UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CUENTOS Y CUENTAS PARA CALCULISTAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

LAURA ALEJANDRA HERNÁNDEZ SÁNCHEZ

TUTORA:

MAT. CONCEPCIÓN RUIZ RUIZ-FUNES

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

EL PRIMER CUENTO SIN CUENTAS

¿Por dónde empezar esta historia? Lo más lógico sería por el principio, ya está un poco lejos, pero intentaré ser breve… Cuando comencé mis estudios de bachillerato, lo hice con una “firme” idea: terminar lo más pronto posible, ingresar a la Escuela Nacional de Música y estudiar canto o dirección de orquesta, pues la música es una de mis pasiones; pero uno propone y Dios dispone… El día que tenía que hacer el trámite para elegir mi carrera, literalmente me la jugué en un volado: “¿Actuaría o Matemáticas?”… y así fue como terminé en la Facultad de Ciencias… ¿Y cómo o por qué extraña razón? Porque mi primer contacto con el interesante y apasionante mundo de las Matemáticas y de su enseñanza se dio en esos tres años de escuela; tuve la oportunidad de conocer a uno de los mejores profesores que he tenido; me contagió el gusto por su materia, pero sobre todo la pasión por su trabajo… Como dirían los publicistas, “nos vendió bien su materia”… Así de bien me fue en la prepa con Hugo Cárdenas Hernández…

Ya en la Facultad, ¿todo fue miel sobre hojuelas?... No, no, no, fue un inicio muy difícil, incluso pensé en tirar la toalla, pero me puse filosófica y me dije a mí misma: “Mí misma, ¿quién puede más, tú, o los numeritos, las ecuaciones y las derivadas?...” Así pasé los primeros semestres de la carrera, llegué a las materias optativas, y el abanico matemático me abrió nuevas puertas: historia, filosofía (de las matemáticas y de la ciencia), geometrías, topología, lógica... enseñanza... Después de mis primeras clases en el Seminario de Enseñanza de las Matemáticas I, que tomé con Concha Ruiz y con su ayudante Sara Alejandra Pando, decidí que, si tenía que hacer una tesis o algo parecido para obtener mi título, sería en esa área, pues de nuevo, tomar clase con dos excelentes profesoras apasionadas por su materia, por su trabajo y por compartir sus experiencias con sus estudiantes y encaminarnos en el arte de convencer a otros que las Matemáticas no muerden ni son tan feas, me hizo ver que eso era lo mío, que yo quería hacer lo mismo…

Para cuando tuve que ver dónde hacer mi servicio social el consejo de una amiga, Nadia Huerta, me llevó al CCH Vallejo a participar en un proyecto al que, de entrada, le hice un poco el feo, pues se trataba de trabajar con computadoras, y yo y la tecnología somos como el agua y al aceite, no nos llevamos… Pero la labor que realizamos bajo la dirección de los profesores del área de Matemáticas, en especial del profesor Francisco Quezada, me resultó muy atractiva e interesante, pues se trataba de no quedarse en la época del gis y el borrador, y aprovechar que vivimos en una época muy tecnológica, visual, que los jóvenes (y en general la sociedad) de hoy dedican mucho tiempo frente a la computadora, así que, con ayuda del Flash Mx colaboramos en la elaboración de animaciones para computadora que explican y/o refuerzan temas del curso de Matemáticas II de CCH… De esta experiencia, comprobé la certeza de dos dichos: “Si no puedes con el enemigo, únetele” y aquel de “Renovarse o morir”…

La vida siguió su curso, y por las vueltas que da, en 2005 participé en un seminario cuyo objetivo era lavarnos el cerebro y hacer que, al término de nuestra carrera entráramos a la MADEMS… La condición de permanencia del seminario era terminar nuestros o en su caso la tesis, así que llegó un momento crucial: ¿cuál será el tema de mi tesis? Afortunadamente para esos tiempos la casualidad me había conducido a la Dirección de Cómputo de la ENP, donde también se trabajaba con proyectos de animación para apoyar las materias de Matemáticas de prepa… Como ya se había avances en Álgebra y un poco en Geometría, me puse a darle duro y hacer algo para Cálculo, aprovechando mi nivel “pollito–chicken” de programación y manejo del programa de diseño… Le ofrecí a varios profesores la idea, y fue de nueva cuenta la linda Concha Ruiz la que se puso la camiseta y aceptó ayudarme en eso de la dirección del proyecto…Después de aprender sobre la marcha muchas cosas sobre el mentado programa, el proyecto iba tomando forma, pero le faltaba algo para que no pareciera presentación de Power Point, o caricatura muda… Mi ángel de la guarda me puso de nuevo en contacto con alguien que me ayudó a darle voz a mi proyecto, Marco Ugalde…

Y para no seguir viajando en el tiempo, diré que pasadas muchas noches y días, muchos baches técnicos, anímicos, el viaje de mis sueños, es que finalmente mi Frankenstein vive, el proyecto que realmente acreditará si aproveché o no los años en la Facultad, si aprendí algo de los excelentes profesores con los que tomé clase, y que me dirá si las matemáticas y su enseñanza son lo mío… Se que todavía me falta mucho, pues en el campo de la enseñanza la práctica lo es prácticamente todo, pero los comentarios de las profesoras del jurado de este trabajo y mi propia experiencia en su elaboración me han hecho ver otra cara de la docencia: el trabajo que se puede hacer tras bambalinas (como este tipo de materiales de apoyo) es también útil y necesario…

Hay muchos huecos en esta historia, y esos huecos los llena la gente que ha estado conmigo durante este tiempo, así que no me queda más que agradecer a todos y cada uno de los que en algún momento me llevaron a tomar esta senda o a seguir en ella; a quien me apoyó con un consejo, sugerencia, duda, comentario (positivo y negativo); a quien me regaló una sonrisa, un abrazo, un “ya vete a dormir, mañana sigues con eso”, un “miau” en la madrugada, un “vente a la casa y aquí te echo la mano con la programada”, un “ay hermana jajelona, no desesperéis, ya pronto terminarás”, un “me alegraste la semana”… Son muchas las personas a las que me gustaría mencionar aquí y decirles “Gracias por estar en este tiempo, espacio, lugar, tu valiosa ayuda y amistad”, pero creo que la mejor manera de hacerlo es dar lo mejor de mi en mi trabajo; a darle su verdadero valor a mi esfuerzo; a mostrar la diversidad, belleza, simplicidad, complejidad y movimiento de las matemáticas; a comprometerme por mejorar mis capacidades de comunicación para así poder compartir lo poco o mucho que aprendí y que puedo aprender aún; a no olvidar que el camino de la docencia es difícil, lleno de cosas buenas y malas, pero que se compensan cuando oyes un “ah, ahora si ya le entendí miss, maestra, profesora, Ale, gracias por explicármelo así…”

Si estuvieras aquí, si estuviera allá, hoy, ayer, de nuevo…

Si tu étais ici, si j'étais là, aujourd'hui, hier, de nouveau…

Om du var här, om jag var där , idag, igắr, igen...

If you were here, if I were there, today, yesterday, again…

INDICE

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad, las matemáticas han sido consideradas como una disciplina fundamental dentro de cualquier esquema de enseñanza, y en épocas más recientes, una disciplina indispensable de los programas escolares en todos los países. Por ello, son muchas y muy diversas las propuestas que se han hecho de métodos y estrategias para su estudio, enseñanza y/o aprendizaje.

La gran mayoría de los estudiantes, sin importar en qué nivel se encuentren, sienten por ellas una mezcla de respeto y repulsión; sienten que no son capaces de dominarlas, sino por el contrario que son dominados por ellas. Incluso, es bien sabido que hasta la elección de su carrera o la definición de su vida profesional y laboral dependen de la cantidad de matemáticas a la que habrán de enfrentarse.

Tomando como base los marcos teóricos sobre didáctica de las matemáticas que se han ido desarrollando a lo largo de décadas, han surgido herramientas concretas que intentan facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina. Hoy en día los estudiantes cuentan con una enorme variedad de recursos destinados a facilitarles el aprendizaje de las matemáticas, desde la creación de materiales didácticos para primaria, hasta el desarrollo de software muy sofisticado para niveles universitarios.

Como respuesta a las demandas de necesidades cada vez más complejas de los estudiantes, las nuevas tecnologías ofrecen hoy una opción versátil en los procesos educativos y de formación, por lo que los docentes tenemos que replantear nuestros métodos de enseñanza bajo esta nueva perspectiva, pues los nuevos medios tecnológicos están logrando, no sólo cambiar los sistemas de relación entre el ser humano y los procesos educativos, sino también se están convirtiendo en una parte fundamental de la cultura.

Considerando mi experiencia particular como estudiante y como docente a nivel bachillerato, decidí realizar una tesis cuyo tema fuera la enseñanza de las matemáticas, pues es un área que me interesa, me apasiona y es a la que, en un futuro próximo, me dedicaré de lleno. Pero también descubrí y resolví que una tesis sobre enseñanza de las matemáticas no podía ni debía quedarse en una propuesta meramente teórica, pues este campo no es sólo teórico, sino también (y sobre todo) práctico. Es por ello que la estructura de esta tesis es la siguiente:

La primera parte conserva la estructura tradicional de un trabajo de este tipo, es decir, consta de dos capítulos escritos. El primero, titulado "La enseñanza de las matemáticas: una historia conocida por todos", pretende aportar un panorama general sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas en general, y en particular en nuestro país a nivel bachillerato. En él se abordan tópicos respecto a la naturaleza de las matemáticas y del quehacer matemático, los problemas que se presentan dentro de su enseñanza, y el rol que juega el matemático (o el maestro de matemáticas) en este escenario. También se plantean, de forma muy general, los efectos que el proceso de informatización ha venido ejerciendo en los últimos años en los más diversos aspectos de la vida cotidiana, y especialmente el uso e influencia de la computadora y los programas informáticos dentro de la educación matemática.

El segundo capítulo, titulado "Una miradita (a vuelo de ave) de la historia del cálculo", pretende enfocar, a través de su aparición y desarrollo histórico, los temas de cálculo diferencial e integral que se presentan en esta tesis: funciones, límites, derivada e integral. En este capítulo se abarcan los periodos históricos más importantes para el surgimiento y evolución de los conceptos del cálculo, destacando la importancia de la aparición de la geometría analítica como herramienta que facilitó la unificación de los métodos particulares conocidos para solucionar los problemas del cálculo, así como lo importancia de todos los matemáticos que contribuyeron con su trabajo a esta disciplina, en especial Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Leonard Euler, y los matemáticos del siglo XIX.

La segunda parte de esta tesis es una propuesta didáctica en concreto, que consiste en una serie de animaciones desarrolladas con el programa de diseño Flash MX, a través de las cuales el estudiante de bachillerato podrá acercarse, o bien reforzar, algunos de los temas del cálculo vistos en clase a través de propuestas más amenas y lúdicas. Los temas que se abordan con más detalle mediante animaciones son los conceptos de función y el de límite, pues si bien el alumno de bachillerato ya ha entrado en contacto con funciones, el manejo que tiene de ellas es más bien de carácter mecánico u operativo, y dicho conocimiento debe complementarse y profundizarse para poder introducir uno de los temas centrales del cálculo, el concepto de límite, tema que en ningún curso anterior ha manejado, y que representa cierta dificultad en cuanto a su significado y comprensión. Se propone el trabajo de dichos temas con historias animadas que aparentemente no tienen nada que ver con los conceptos que se manejan, y posteriormente se formalizan tales conceptos con ejemplos que el alumno podría considerar más *matemáticos*, pero que son por él conocidos y manejados con cierta destreza.

1. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: UNA HISTORIA CONOCIDA POR TODOS

1.1 LAS MÁS DE DOS CARAS DE LA MONEDA

Desde siempre, las matemáticas han constituido, más que un saber o una ciencia, una actividad extraordinariamente compleja, y que ha sido utilizada con objetivos muy diversos. Prueba de ello son los procedimientos matemáticos creados por las más importantes culturas de la antigüedad para resolver diferentes problemas de su interés. Por ejemplo, los astrónomos mesopotámicos encontraron en las matemáticas un método para seguir y registrar el movimiento de los cuerpos celestes conocidos en su tiempo, así como también un instrumento para la elaboración de vaticinios. Comerciantes y administradores egipcios la aprovecharon para resolver problemas tanto comerciales como algunos relacionados con la medición y reparto de tierra para cultivo o para cría de ganado. Los matemáticos pitagóricos vieron en su ciencia la forma de pensamiento más perfecta creada por el hombre, que les permitía comprender mejor su universo, y una forma de contacto con sus dioses.

Esta visión de las matemáticas prevaleció por mucho tiempo, y siguió vigente dentro del pensamiento platónico, el cual tuvo gran influencia en quienes se dedicaban a hacer ciencia, a tal grado, que en la Edad Media casi se llegó a despreciar el posible interés práctico que éstas pudieran tener. Pero a partir del Renacimiento, las matemáticas se convierten en la más versátil y adecuada herramienta para la exploración del mundo y del universo (conocidos y por descubrir). La era moderna de la ciencia recupera el interés práctico, y mezcla el experimento con la especulación matemática, con la intención de dejar la huella de la inteligencia humana plasmada en la tecnología.

En Mesoamérica, la mayor aportación matemática de las civilizaciones prehispánicas está ligada estrechamente con cuestiones astronómicas, principalmente los calendarios rituales o ceremoniales y los utilizados para las actividades agrícolas, y en menor grado con la estadística, aparentemente por cuestiones prácticas de la vida diaria. Resulta interesante observar que, por ejemplo, mientras en la Europa de los siglos V al XV la visión del cosmos en general era resultado de las interpretaciones de un texto religioso, en Mesoamérica esta visión del universo se basaba generalmente en relaciones astronómicas y matemáticas. Y no olvidemos que las culturas mesoamericanas conocieron e hicieron uso del cero mucho antes de que éste fuera introducido en las antiguas civilizaciones europeas (egipcia, mesopotámica, griega…)

De igual manera, las matemáticas han constituido una magnífica guía del pensamiento filosófico, tanto entre los pensadores antiguos como entre los filósofos contemporáneos. Han sido y son un instrumento de creación de belleza artística, un campo de ejercicio lúdico entre los matemáticos y no matemáticos de todos los tiempos. Así pues, las matemáticas se convierten en una actividad multifacética: al mismo tiempo que constituyen una ciencia con sus métodos propios, dinámica y rápidamente cambiante, o bien de transformación lenta en su propia concepción profunda, lo que la hace muy cercana en muchos aspectos a la filosofía, es también un arte que consigue, tal vez como un extra en su esfuerzo por alcanzar sus objetivos específicos, la creación de estructuras mentales profundamente bellas *a los ojos del alma* (como dirían los filósofos platónicos); y es también un instrumento muy poderoso de exploración y transformación del universo. Todo esto podría hacernos pensar que la actividad matemática no puede ser algo fácil de abordar y tratar.

Por otra parte, la educación, o el proceso educativo como tal, no es tampoco fácil de comprender. La educación hace referencia a lo más profundo del ser humano en proceso de formación; a la sociedad en evolución en la cual se ha de integrar o de la cual forma parte; a la cultura en la que en se desarrolla dicha sociedad; a los medios, recursos y materiales de los cuales se puede o se quiere disponer; a las finalidades u objetivos primordiales que se le quieran asignar a la educación. La complejidad de las matemáticas y de la educación sugieren que quienes se dedican a ellas deben estar atentos y sobre todo abiertos a las transformaciones profundas que la dinámica y cambiante situación global vaya demandando.

A lo largo del tiempo, y de acuerdo con las ideas filosóficas o con las modas predominantes, la utilización de las matemáticas en la educación de las nuevas generaciones ha sido muy variada. Desde la antigüedad, y prácticamente hasta el final de la Edad Media se estudiaban aritmética, geometría, música y astronomía con el fin de *disciplinar* el pensamiento y que, de este modo, hubiera un único esquema de razonamiento. Pero a la larga, lo que se consiguió con este enfoque fue una pobre creación matemática original en la historia de la humanidad, lo cual es más claro en la época medieval.

La Edad Moderna trajo cambios profundos en la orientación científica y didáctica. Se siguió usando el esquema tradicional, pero lo que ahora se pretendía era la adquisición de un método de trabajo que se complementara perfectamente con un nuevo tipo de enseñanza más activa, pero sobre todo, que se complementara con un enfoque práctico de aplicación del método matemático en otras áreas que iban cobrando mayor importancia. Con la aparición de las geometrías no euclidianas y por la influencia de nuevos métodos de tratamiento del concepto de infinito matemático propuestos por George Cantor, a fines del siglo XIX y principios del XX ocurrieron cambios importantes en la concepción de la matemática, dando como resultado que los matemáticos tuvieran que ocuparse más intensamente que nunca por establecer las bases de su ciencia de un modo que no diera lugar a controversias. Al someter sus fundamentos a una severa observación, las matemáticas sufrieron una fuerte crisis.

La preocupación de muchos matemáticos por esta crisis en los fundamentos de su ciencia condujo a una concepción de la misma predominantemente formalista. La visión que prevaleció identificaba a las matemáticas con un juego puramente formal, es decir, dadas unas reglas (leyes, teoremas, axiomas definiciones), la actividad matemática se lleva a cabo conforme a éstas, pero sin saber a ciencia cierta por qué o cómo funcionan. Esta actitud formalista se reflejó fielmente en los procesos de educación de los jóvenes de fines del siglo XIX y hasta mediados del XX, periodo en el cual apenas si se produjeron cambios significativos en el ámbito de la educación matemática. Se trató de educar a los estudiantes en un esquema de pensamiento formal y de introducirles en los procesos de abstracción propios del álgebra y la teoría de conjuntos, dejando de lado el estudio de, por ejemplo, la geometría elemental, pues ésta tiene dificultades para ser fundamentada rigurosamente, con lo cual los programas y contenidos de matemáticas fueron privados de muchos problemas interesantes.

En los años 70 se empezó a percibir que muchos de estos cambios no fueron muy acertados; por ejemplo, al sustituir geometría por álgebra, las matemáticas que se enseñaban a nivel elemental fueron despojadas rápidamente de contenidos y problemas atractivos. Tan graves fueron las consecuencias, que incluso podría decirse que los inconvenientes introducidos por este método superaron las ventajas que con él se pretendían conseguir. Ahora bien, las ideas predominantes sobre lo que la actividad matemática representa influyen fuertemente en las actitudes con respecto de su enseñanza. El modelo antes citado tuvo lugar en pleno auge de la corriente formalista en matemáticas. Pero en los últimos años se han producido cambios bastante profundos en el campo de las ideas de lo que realmente es el quehacer matemático. La tendencia actual se enfoca más en el carácter empírico, práctico, de la actividad matemática, así como en los aspectos referentes a la historicidad e inmersión de ella misma en la cultura de la sociedad en la que tiene su origen.

Es así que en los años 80 hubo un reconocimiento general de que se había exagerado en las tendencias que enfatizaban la estructura abstracta de las matemáticas. Ahora se propone que el estudio de esta ciencia debe hacerse teniendo mucho más en cuenta la experiencia y la manipulación de los objetos en los que se origina. Para entender la interacción entre matemáticas y realidad, es necesario acudir, por una parte, a la propia historia de las matemáticas, que nos muestra cómo va surgiendo en el tiempo y, por otra parte, a las aplicaciones de éstas, que ponen de manifiesto la fecundidad, potencia y alcance de esta ciencia. Su enseñanza ideal debería intentar reflejar el carácter profundamente humano de las matemáticas, con lo que se ganaría en accesibilidad, dinamismo, interés y atractivo.

Una de las tendencias generales más difundidas en nuestros días hace hincapié en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática por encima de la mera transferencia de contenidos, razón por la cual se ha dado una mayor importancia al estudio de cuestiones referentes a los procesos mentales de resolución de problemas. Por otra parte, existe también la conciencia de que, por diferentes razones, es necesario traspasar la prioridad de la enseñanza de unos contenidos a otros. En nuestra civilización, resulta bastante claro que los procesos mentales eficaces, que no se vuelven obsoletos con rapidez, son lo mejor que se puede proporcionar a las nuevas generaciones; es más valioso contar con procesos de pensamiento útiles que con ideas incapaces de combinarse con otras y formar nuevas estructuras que nos permitan abordar los problemas actuales.

La enseñanza basada en la resolución de problemas es uno de los métodos más utilizados actualmente para poner en práctica el principio de aprendizaje activo y de enculturación ya mencionado. Lo que se busca con esta enseñanza es transmitir, en lo posible, procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas, y pone énfasis en dichos procesos y en los del aprendizaje, tomando los contenidos matemáticos, sin dejar de lado su valor, como campo de operaciones privilegiado para crear estructuras de pensamiento eficaces. Considera como puntos importantes la manipulación de los objetos matemáticos; la activación de la capacidad mental y el ejercicio de la creatividad, así como la reflexión del conocimiento adquirido a través de este medio, con la finalidad de mejorarlo; hace, en la medida de lo posible, transferencias de estas actividades a otros aspectos del trabajo mental, y brinda preparación para enfrentarse con otros problemas y retos de la vida cotidiana, de la ciencia y/o de la tecnología.

Los últimos años han sido escenario de cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas, y es claro que, debido a la labor de quienes se dedican tanto a las matemáticas como a su enseñanza por encontrar mejores métodos para su transmisión, aún vivimos una situación de experimentación y cambio. Muchos problemas se han ido explicando o al menos aclarando, pero también se ha puesto más firmemente de manifiesto que las estructuras profundas del pensamiento matemático presentan misterios que pueden llegar a afectar su misma esencia, e incluso algunos de sus atributos más aplaudidos y estimados como la certeza y la infalibilidad.

1.2 SABEMOS QUÉ HACER O QUÉ NO HACER, PERO NO CÓMO HACERLO

En México, así como en muchos otros países, los programas de estudio para educación básica y bachillerato elaborados en los años 90, estos últimos aún vigentes en la mayoría de las diferentes modalidades que se ofrecen en nuestro país, proponen que el aprendizaje matemático no debe limitarse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni a la aplicación mecánica de técnicas y procedimientos. También señalan la necesidad de desarrollar habilidades de descubrimiento. Para lograrlo, la gran mayoría de estos programas sugieren que se trabaje con base en la resolución de problemas que permitan al estudiante explorar y descubrir.

Muchos de nosotros estamos familiarizados con corrientes pedagógicas de corte constructivista, es decir, las que postulan que el aprendizaje es *más significativo* cuando el alumno *construye su conocimiento*. Hay escuelas y corrientes que sugieren, como posible estrategia para la construcción de conocimientos matemáticos, trabajar con base en el planteamiento y resolución de problemas o con secuencias de aprendizaje que permitan al estudiante explorar y descubrir. A raíz de la reforma educativa de principios de los noventa, esto se pide tanto en el programa de educación básica (primaria y secundaria), como en la mayoría de los programas de las diversas modalidades del bachillerato.

A grandes rasgos, los propósitos de estos programas son que los alumnos aprendan a utilizar las matemáticas para resolver problemas, no sólo con los procedimientos y técnicas aprendidas, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad e imaginación; que se propicie el desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento, así como la capacidad para elaborar conjeturas y la verificación de las mismas por parte de los alumnos.

Sin embargo, la realidad es otra, sobre todo en el bachillerato, pues en la mayoría de las veces se procede de esta manera: el profesor enseña primero, por ejemplo, diferentes técnicas para resolver sistemas de ecuaciones, y después deja a sus alumnos problemas *de aplicación* en donde ellos deben utilizar alguno de los métodos aprendidos para hallar la solución. Y sucede así porque el propio programa impide, tanto al profesor como a los alumnos, trabajar de otra forma. O bien, porque en muchos casos se tiene la creencia de que con el tipo de estudiantes que hay en las diversas modalidades del bachillerato no es posible trabajar de manera diferente, pues los alumnos no saben pensar o cómo resolver problemas, porque es imposible que descubran por sí mismos, porque tienen malas bases. O bien, porque aunque se considere conveniente trabajar de otra manera, no se sabe cómo hacerlo.

1.2.1 ¿Para qué hacer las cosas de otra forma, si así se ha hecho siempre y funcionan?

Dentro del esquema de enseñanza de las matemáticas hay algunos mitos o malentendidos que impiden que los profesores exploren y trabajen en clase usando técnicas novedosas o alternativas, que en muchas ocasiones son muy atractivas para los alumnos, así como también que los estudiantes adquieran los conocimientos de forma más efectiva y duradera, y que aprendan a relacionarlos entre sí y con los de otras áreas.

Por ejemplo, es muy común suponer que es imposible que los alumnos descubran algo. Cabe la posibilidad de que, como al maestro no se le ocurre cómo hacer que sus alumnos descubran, cree que es imposible que lo hagan. De acuerdo; es difícil que, sin la debida ayuda, los alumnos reproduzcan los procesos que llevaron a los matemáticos a decir que $a^{\frac{1}{n}}$ es la raíz n-ésima de *a*, o que el lado recto de una parábola es 4 veces la distancia entre el foco y el vértice, o que la integral de $\frac{1}{x}$ es *lnx*. En bachillerato se trabaja con ideas más complejas y, en consecuencia, se requiere realizar un trabajo previo que permita a los estudiantes familiarizarse con esos conceptos. Al abordar conceptos nuevos para los alumnos es poco recomendable limitarse a enunciar la definición formal y suponer que por el simple hecho de escucharla, leerla o escribirla en el cuaderno, los alumnos la entienden y entienden además cómo es el concepto matemático definido.

Si sólo escuchamos la definición de, por ejemplo, la parábola, es poco probable que a partir de ella se puedan deducir algunas de sus propiedades, pues en muchas ocasiones ni siquiera comprendemos qué es *el lugar geométrico de los puntos que…* (o qué se quiere decir con eso), ni tampoco podemos imaginar cómo es el lugar geométrico de los puntos que cumplen con la definición. Pero si se iniciara el trabajo con actividades y problemas que propicien la familiarización con dicha curva, es más probable deducir, o al menos conjeturar, algunas de sus propiedades.

Otro malentendido usual es suponer que los problemas matemáticos son básicamente aquellos que consisten en hacer preguntas cuya respuesta es un número. Restringir de esta manera el significado de la palabra *problema* ocasiona que el aprendizaje de las matemáticas se convierta en un mero entrenamiento para resolver problemas iguales hasta que, por repeticiones, dejan de ser problemas y se convierten en ejercicios mecánicos que no propician actitudes de exploración y búsqueda, ni el desarrollo de habilidades de descubrimiento. En otras palabras, un problema deja de ser problema cuando éste se resuelve, por lo cual sus copias ya no son problemas, son sólo actividades que permiten ejercitar técnicas aprendidas.

Esto no significa que un problema no deba repetirse, pues es poco probable que la resolución de un único problema con tales o cuales características nos permita elaborar o adquirir conocimientos; a veces no es sino hasta después de resolver veinte problemas similares que comprendemos bien cómo funciona la técnica que empleamos, o que nos damos cuenta de la conveniencia de utilizar este o aquel procedimiento, o que el proceso que utilizamos tiene inconvenientes que podemos evitar. Pero si antes de plantear un problema nos enseñan el procedimiento o *fórmula* para resolverlo, no estaremos en posición de descubrir por nosotros mismos las herramientas para resolver este u otros problemas.

Otra situación común es suponer que para resolver determinado problema, hay una única vía, la que el maestro enseña (o la que dice el libro, si es más sencilla de utilizar). Para encontrar la solución de un mismo problema siempre hay varias estrategias válidas y, en muchos casos, no podemos decir que una sea mejor que el resto. En términos generales, una estrategia es mejor que otra cuando nos permite resolver un problema fácil y rápidamente, no cuando lo hace más complejo. En ocasiones sucede que los maestros piensan que conforme los alumnos adquieren conocimientos más sofisticados, sus técnicas de resolución de problemas también deben ser más complejas. También es posible que si para contestar preguntas sencillas tenemos que hacer uso de razonamientos complejos, se propicie a largo plazo una cierta pérdida de ingenio. Y de igual manera, si suponemos que un problema se resuelve de tal o cual manera, o que está *mejor resuelto* cuando lo hacemos como dice el profesor o el libro, entonces no sólo estamos recibiendo información incorrecta, sino también nos estamos creando una idea equivocada de lo que es el quehacer matemático, inhibiendo nuestro ingenio y creatividad.

1.2.2 Muchas nueces, poco tiempo para hacer ruido

Cuando se pretende que profesor y alumnos hagan matemáticas, es necesario contar con el tiempo suficiente para ello. Sin embargo, en algunos cursos esto es complicado, ya que el respectivo programa tiene muchos temas. En nuestro país, la mayoría de los programas de bachillerato contemplan demasiados temas y tan variados, que es casi imposible que se pueda hacer matemáticas sin omitir algún tema o subtema.

Para muestra, un ejemplo: el programa aún vigente del primer curso (anual) de la Escuela Nacional Preparatoria (una de las modalidades de bachillerato ofrecido por la UNAM) está formado por ocho unidades y cada una, a su vez, por una cantidad considerable de temas y subtemas. En la primera unidad, *El campo de los números reales,* se propone el estudio de catorce temas (con sus respectivos subtemas), entre los cuales destacan el algoritmo de Euclides para obtener el máximo común divisor de dos o más números; números irracionales, su definición, construcción, localización en la recta numérica, clasificación en algebraicos y trascendentes, y el número *e*; números imaginarios; números complejos; leyes de los exponentes, exponentes fraccionarios, significado del signo del exponente y cálculo de productos, cocientes y potencias; logaritmos, su definición, propiedades… Todo esto (y más) en veinticinco horas de clase, algo así como cinco semanas.

Muchos de estos temas están relacionados con conceptos que los estudiantes que ingresan al bachillerato desconocen. Por ejemplo, no saben lo que son los números imaginarios; ignoran el concepto de número trascendente; nunca han oído ni trabajado con logaritmos ni con exponentes fraccionarios. En consecuencia, al abordar cualquiera de estos temas es necesario contar con tiempo suficiente para que los alumnos se familiaricen con el concepto o procedimiento propuesto, independientemente de la estrategia didáctica que se emplee. Aunque el único objetivo fuera que los estudiantes memorizaran definiciones y sean capaces de reproducir o imitar ciertos procedimientos que el profesor escriba en el pizarrón, es poco probable que los catorce temas de la unidad se puedan tratar en las veinticinco horas destinadas para tal efecto.

Quienes están a favor de que en los cursos de bachillerato se contemplen tantos temas argumentan que esto es necesario, pues de otra forma *los alumnos llegarán mal preparados a la universidad*. Sin embargo, no es un secreto de estado el hecho de que la gran mayoría de los alumnos ingresan muy mal preparados a la universidad. En este sentido, decir cuáles o cuántos temas estudiar en el bachillerato es, hasta cierto punto, irrelevante, pues en este nivel lo importante no es qué se estudia, sino cómo se estudia. El abordar un tema tiene o no sentido dependiendo de si la forma en que se trabaja permite que los alumnos aprecien la belleza de las matemáticas, así como también de si su estudio se lleva o no a cabo de tal forma que desarrolla en los alumnos el ingenio, la creatividad, la imaginación, las capacidades de análisis, de resolución de problemas, de deducción, de relación, de hacer conjeturas, abstracciones, representaciones y de comunicarlas.

Otra dificultad que enfrentan maestros y alumnos con ganas de hacer matemáticas es la falta de materiales (libros de texto, antologías, problemarios) que les permitan hacerlo. Este problema es quizás más fuerte en el bachillerato, pues a nivel primaria están los libros de texto gratuitos en los que se trabaja (o al menos se propone) con base en actividades y problemas, y dependiendo de cómo las lleve a cabo el profesor, se puede propiciar que los niños hagan matemáticas. De manera similar, algunos libros autorizados por la SEP para usarse como libros de texto a nivel secundaria cuentan también con esta característica.

Pero para bachillerato prácticamente no hay libros de texto cuyas propuestas permitan hacer matemáticas. Los distintos programas de este nivel sugieren trabajar con libros técnicos, en muchas ocasiones indispensables como libros de consulta para maestros y/o alumnos, pero son básicamente informativos. Aunque en algunos casos incluyen ejercicios, éstos, en términos generales, están diseñados para ejercitar lo estudiado, no para que los alumnos puedan hacer matemáticas. Muchos maestros de bachillerato resuelven este problema diseñando ellos mismos actividades y problemas que se discuten en reuniones de academia y con los que posteriormente se conforma una pequeña antología que se fotocopia o se edita en forma casera y que se utiliza sólo en el plantel o institución en la que se elaboró.

Cuando esto sucede, convendría hacer un esfuerzo para que estos materiales, una vez depurados y bien organizados, tuvieran una difusión mayor, y también apoyar a los maestros de bachillerato con materiales que sugieran diversas posibilidades para tratar los distintos temas del programa, que incluyan actividades y problemas que podrían plantearse a los alumnos. Pero mientras se siga optando por propiciar únicamente el desarrollo de habilidades operatorias y enseñar a copiar procedimientos y esquemas de resolución, a los autores y a las editoriales no les interesará producir materiales que fomenten el hacer matemáticas y, al mismo tiempo, mientras no exista este tipo de materiales, se seguirán desarrollando únicamente habilidades operatorias y enseñando a repetir procedimientos y esquemas de resolución.

Otro punto que impide, sobre todo a los alumnos, hacer matemáticas, es que los maestros no cuentan con una formación sólida en ella. Suponer que para resolver un problema hay una única estrategia, o que lo más importante es aprender a hacer operaciones con exactitud y rapidez, o aprender a resolver problemas copiando esquemas de resolución, sugieren que muchos desconocen en qué consiste en realidad el quehacer matemático y lo que significa hacer matemáticas. Esto no es raro si se toma en cuenta la preparación que comúnmente se recibe. Si alguien no hace matemáticas o no sabe cómo hacer matemáticas, es poco probable que pueda propiciar que sus alumnos hagan matemáticas.

1.3 ¡BENDITA TECNOLOGIA Y BENDITA LEY DEL MENOR ESFUERZO!

1.3.1 C, el orden ¿del caos?

La computadora y el estilo de pensamiento que está imponiendo, van invadiendo poco a poco nuestra sociedad y cultura de manera irreversible. Está ahí con toda su influencia, con todo su impacto potencial en la vida, en la visión de la cultura, de la ciencia, e incluso de la matemática. Sin duda, ofrece muchas ventajas de las que ahora no podríamos prescindir. La presencia informática ha impactado de manera notable el desarrollo de la investigación matemática y científica de nuestro tiempo.

La enseñanza de las matemáticas, sobre todo a nivel superior, recibe ya los primeros impactos de la aparición de programas que ejecutan muchas de las rutinas esenciales de las matemáticas que los estudiantes de los primeros cursos universitarios deben manejar con soltura, y cuya difusión masiva ha sido cosa de unos pocos años. Día con día aparecen nuevos programas más potentes, interactivos, flexibles; pero los que ya existen deberían llevarnos a reflexionar acerca de los impactos, tanto positivos como negativos que estos medios pueden ocasionar en la enseñanza en sus diferentes niveles, con el fin de propiciar los aspectos favorables y tratar de evitar en lo posible los perjudiciales.

Hoy en día, si la introducción de la computadora en el aprendizaje de las matemáticas no se planifica adecuadamente, corremos el riesgo de dejarnos arrastrar por un espejismo fomentado por la industria alrededor de la computadora que llevaría, incluso a los países más carentes de los recursos educativos, a gastar grandes sumas de dinero en la introducción indiscriminada de costoso y sofisticado instrumental que no se sabe utilizar bien a bien y que, por el uso que finalmente se le da, valdría mas, desde el punto de vista educativo, que nunca se hubiera introducido en las escuelas y centros de enseñanza. Puede hablarse también de las facilidades innegables que la computadora ofrece para propiciar un aprendizaje de las matemáticas más eficiente, adecuado, y acorde a la utilización de las mismas que se espera hagan los estudiantes, así como de las diferentes formas prácticas de cómo esta magnífica herramienta de trabajo puede ser utilizada.

La penetración de las matemáticas en nuestra cultura, ahora intensificada y subrayada con el estilo peculiar de la informatización de una buena parte de ellas, es una realidad que se impone a cualquier observador atento. En toda actividad científica, la utilización de las matemáticas como medio de expresión se ha convertido en condición indispensable. La medicina y la biología actuales emplean con mayor frecuencia instrumentos matemáticos tales como la teoría de control, el estudio matemático del crecimiento de poblaciones, la mecánica de fluidos, para tratar sus problemas. La sociología, la psicología, la economía utilizan extensamente herramientas matemáticas. Incluso la lingüística y aun el arte actual se aprovechan considerablemente de las matemáticas, no solamente a través de la nueva tecnología, sino incluso en sus mismas concepciones artísticas.

Pero, indudablemente, la aceleración del ritmo de este proceso de *matematización* en la actualidad se debe a la influencia de la computadora, con las enormes posibilidades que ha puesto a nuestro alcance. Su aparición y uso están teniendo un efecto semejante (si bien mucho más universal y profundo), al que causó el telescopio o el microscopio, ya que nos brinda la posibilidad de observación de multitud de fenómenos que aún no cuentan con una explicación coherente dentro de la ciencia actual. Pero en el proceso de matematización e informatización, tal y como se van presentando, pueden percibirse rasgos muy inquietantes que, de no ser tratados a tiempo, nos conducirían a una situación que, desde la perspectiva actual, podríamos juzgar como un lamentable empobrecimiento y deterioro de la actividad humana.

El proceso de matematización que vivimos hoy en día, acelerado por la presencia de la informática, necesita acompañarse de una profunda reflexión sobre su sentido y sus implicaciones para el hombre y la sociedad. Si no hacemos conciencia al respecto, esta situación puede conducirnos fácilmente a adoptar actitudes francamente perjudiciales. Por otro lado, la simplicidad e ingenuidad de la computadora y la de las matemáticas mismas crean un ambiente propicio para fabricar conclusiones a partir de cualquier idea por absurda que sea, para aceptar con igual entusiasmo ideas científicas brillantes u otras totalmente absurdas, pero expresadas por medio de impresionantes fórmulas y teoremas.

1.3.2 No, el orden de la computadora…

La presión económica, así como el gran desarrollo de la industria informática, están generando en los centros educativos una fuerte demanda que exige cambios rápidos y drásticos, los cuales el propio sistema educativo no puede fácilmente satisfacer sin un traslado un tanto riesgoso de los recursos dedicados hasta ahora a las enseñanzas más tradicionales, especialmente de las matemáticas. También es claro que actualmente las matemáticas experimentan una seria competencia en la atracción de los estudiantes de talento. Esto significa que las mentes creativas de la matemática pudieran encaminarse en el futuro hacia la informática más bien que hacia las matemáticas. Para un campo totalmente dependiente del talento como son las matemáticas, esto sería un gran desastre.

Otro aspecto de cuidado con el uso de programas informáticos consiste en que la computadora proporciona la respuesta demasiado pronto, sin insistir en la necesidad de pensar primero. Para muchos de nosotros la computadora es una extraordinaria herramienta que complementa nuestra actividad. Lo que los programas de cómputo hacen es algo que tal vez sin su ayuda seríamos capaces de realizar (al menos en teoría), pues sabemos cómo se hace, ya que por medio del aprendizaje hemos adquirido aquellos procesos de pensamiento con que los matemáticos han atacado el problema que se trate, y lo mejor de todo, nos ahorra una gran cantidad de trabajo. Que la computadora nos de la respuesta con rapidez y seguridad es magnífico, pero al mismo tiempo que conocemos la respuesta, y estando ante problemas semejantes, podríamos ensayar el uso de estrategias de pensamiento parecidas, para los cuales la computadora no tiene las respuestas incorporadas.

La riqueza del pensamiento matemático no se fundamenta en las soluciones cristalizadas, sino en los procesos de pensamiento que nos han conducido a ellas. El fruto práctico más importante de familiarizarse con tales procesos consiste en ser capaz de construir estrategias de resolución, más que el hecho de disponer de las soluciones ya construidas. Es posible que la incorporación de tales procesos de pensamiento en la mente pueda ser entorpecida mediante un uso inadecuado de la computadora. Ésta parece hecha a medida para satisfacer la mentalidad *del menor esfuerzo* predominante en nuestra sociedad. Apretamos botones, y cosas maravillosas aparecen y suceden en la pantalla como por arte de magia, pero en muchas ocasiones el resultado del ejercicio de apretar botones es por necesidad superficial, y no por asimilar las formas de pensar ante retos difíciles y originales mediante el seguimiento del curso de pensamiento que los matemáticos han realizado para dominarlos.

Desde un punto de vista más concreto, podríamos reflexionar qué debería enseñarse en los primeros cursos universitarios si fuese posible que cada alumno tenga a su disposición en su casa o donde sea una computadora con la que pueda usar alguno de los potentes programas hoy disponibles (como DERIVE, MATHEMATICA, MATHLAB u otros). Tal vez no se deberían enseñar cosas muy diferentes, sino simplemente se podría prescindir de muchísimo esfuerzo rutinario dedicado a tener presentes y activas ciertas técnicas que la computadora puede realizar mucho mejor, más rápido y más seguro. Por otra parte podríamos enfrentarnos con problemas más sofisticados que requieren una gran cantidad de manejo de operaciones y técnicas distintas. En gran parte el contenido de nuestra enseñanza puede ser esencialmente el mismo, pero hay que tener en cuenta que las rutinas se podrían relegar sin mayor problema a la máquina.

Lo que habría que hacer sería utilizar los contenidos que de momento se toman como problemas importantes, retadores, desafiantes, y presentar la teoría como ejemplo del poder de la mente para llegar a reducir su solución a algoritmos que se pueden encargar a la computadora. Por lo tanto, se podría:

- Insistir en el carácter paradigmático de los teoremas relativos a los contenidos que se presentan, como formando parte de una estrategia de superación total de problemas que han sido resueltos, hasta llegar a reducir su solución a algoritmos que se pueden relegar a la rutina humana y posteriormente a la mecánica de la computadora.
- Procurar experimentar un poco con esos algoritmos de modo que, aunque no se adquiera un dominio magistral de ellos en rapidez y seguridad, cada uno pudiera ser capaz de reproducirlos, por haber entendido de dónde provienen y qué les ha dado origen, y si hiciera falta, de adquirir una práctica aceptable de ellos.
- Trabajar bastante para que los alumnos mismos tengan un fuerte interés por adquirir el dominio de los medios informáticos ya existentes, a fin de conseguir hacer los procesos rutinarios mecánicamente mediante la computadora.
- Diseñar prácticas adecuadas con la computadora a fin de familiarizarse por completo con su modo de operación y de sus posibilidades con respecto a tales contenidos y problemas. Para esto, habría que pensar una buena colección de problemas que puedan ser atacados con las herramientas conceptuales con que se cuenta, y con los elementos de ayuda informática que se domina.
- Poner especial cuidado con las consecuencias negativas para el alumno que podrían originarse con este modo de proceder. Si en un curso se estimula a los estudiantes a trabajar de esta forma y no llegan a poseer la destreza que se juzga suficiente de tales rutinas del cálculo, puede suceder que al llegar al curso siguiente se encuentren en desventaja con respecto a otros que sí las poseen, y que fracasen ante profesores que no les permiten usar los medios que ellos conocen y han utilizado en cursos anteriores.

Los instrumentos con los que hoy contamos nos permitirían prever que los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en un futuro muy próximo nos llevarían a una situación en la cual se plantearán ejercicios o problemas con un alto grado de dificultad y que, para su solución, se pida el uso de la computadora y el programa adecuado, restringiendo y economizando al mismo tiempo el tiempo para llevarlos a cabo. Muchos ejercicios son meras rutinas que hoy se hacen sin esfuerzo alguno gracias a los programas de cálculo simbólico tales como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA... Quien los maneja sólo tiene que conocer perfectamente o tener una buena idea de *qué y cómo preguntar* al programa, de tal manera que éste actúe de modo eficiente. Todo el esfuerzo se centra en entender la estructura del ejercicio. El esfuerzo rutinario del cálculo o del dibujo, con todos los riesgos de equivocaciones e imprecisiones que conlleva, han sido traspasados al programa, que los realiza con suma rapidez y fiabilidad.

1.3.3 El futuro nos alcanzó, que no nos rebase

Los programas computacionales actuales admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales (alumnos, profesor, instrumentos didácticos) que constituyen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por supuesto, el programa es un potente, rápido y versátil auxiliar en las tareas de cálculo, tanto numérico como simbólico, así como en la representación y exploración gráfica de funciones que facilitan el análisis de situaciones matemáticas complejas. Dicha facilidad nos permite descargar en la computadora muchas de las tareas de cálculo que aparecen incluso en una demostración matemática.

Pero cualquiera de estos programas admite aplicaciones mucho más ricas que las de mero manipulador de números y expresiones matemáticas sin más que hacer uso, con un poco de destreza, de la elaboración de rutinas propias que el programa mismo ofrece. Entonces se le pueden encomendar cometidos variados directamente relacionados con las tareas de aprendizaje a diversos niveles. La presentación e introducción de los conceptos sutiles del cálculo, como el límite, la derivada, la integral, pueden resultar mucho más accesibles a través de las exploraciones numéricas y gráficas que un programa realiza con facilidad.

Por otra parte, la potencia y versatilidad de los programas de cálculo simbólico actuales favorecen el acercamiento de la enseñanza de las matemáticas al mundo de las aplicaciones reales. No es que el ejercicio del aprendizaje de las técnicas matemáticas deba realizarse a través de situaciones con datos reales; más bien la complejidad de la realidad sugiere lo contrario. Pero es cierto que, una vez que el alumno sabe lo que hay que hacer para resolver un problema matemático surgido de una situación real, le resulta mucho más estimulante poder enfrentarse con el problema tal cual es en la realidad, una vez que la computadora le ha liberado de la impotencia de realizar por sí mismo los cálculos que la situación real le imponen, como ocurre muy a menudo en la enseñanza tradicional.

Imaginemos una clase de matemáticas que en un futuro no lejano será probablemente usual: los alumnos disponen de una computadora en la que un programa de acceso muy simple les proporciona la realización fácil y sencilla de rutinas de cálculo numérico y simbólico (solución de ecuaciones, límites, derivación, integración, cálculo matricial), obtención directa de parámetros y funciones estadísticas a partir de una masa de datos, representación versátil e interactiva de curvas y superficies, la realización precisa de las operaciones de dibujo fundamentales… El programa es de uso tan fácil e intuitivo, que los estudiantes han sido capaces de familiarizarse con su manejo en la primera semana de curso. Es claro que el proceso de enseñanza-aprendizaje adecuado a este entorno hará que cambien, tanto los contenidos de la educación matemática, como los procesos de interacción dentro y fuera del salón de clase. Si contamos con un programa que es capaz de realizar con gran comodidad y seguridad todas las rutinas de cálculo numérico y simbólico, el énfasis ahora podría centrarse en el fomento y estímulo, por parte del profesor, de las destrezas superiores que ningún programa puede transmitir con la misma eficacia que él, consistentes en:

- Introducir a los estudiantes en el ejercicio de la experimentación matemática, ahora más fácil a través de los medios con que se cuenta, explorando cómodamente regularidades y esquemas de comportamiento de los objetos matemáticos que permitan adivinar y conjeturar sobre su propia naturaleza.

- Ayudarles a entender profundamente los problemas básicos de la teoría, su origen, su motivación, las ideas que los resuelven, su evolución posterior, las estrategias y rutinas que estas ideas han originado, hasta convertirse en los instrumentos ágiles y eficaces que hoy son.
- Iniciarles en el ejercicio de la modelación matemática de situaciones reales, más o menos complejas, en las que se pueda apreciar la enorme potencia y eficacia de las herramientas intelectuales de se dispone, magnificadas por el apoyo de las herramientas con que se cuenta.
- Proceder adecuadamente en la resolución de verdaderos problemas, que permitan a los alumnos construir sus propios esquemas de pensamiento eficaces para la resolución de los problemas de cada uno de los campos en que se introduce.
- Ayudar a los estudiantes en la exploración de situaciones que conducen a los conceptos fundamentales, así como el reconocimiento de estructuras y patrones de la teoría en la que se les introduce.

Aunque en algunos países existen centros en los que la situación didáctica descrita anteriormente es prácticamente una realidad desde hace unos cuantos años, es claro que en la mayoría de los casos aún queda un largo camino por recorrer para llegar a una situación como la citada. Los obstáculos más importantes no provienen tanto de las dificultades para colocarnos en una situación material como la mencionada, sino más bien de la inercia profundamente enraizada en el sistema educativo de cualquier país y en gran parte connatural a él. Los cambios no se realizarán sin tener bien claras las ideas y las metas a las que queremos dirigirnos. Para ello es necesario invertir un esfuerzo considerable en investigar y explorar las diversas alternativas.

Con todo, lo que parece claro es que la educación matemática no puede comportarse a largo plazo ignorando la presencia en el ambiente y en la cultura social y profesional de instrumentos con altas potencialidades específicamente en el terreno matemático. Lo que hay de saludable en las nuevas tendencias acabará por imponerse y los sistemas educativos que se adapten a los cambios razonables más rápidamente lograrán equipar ventajosamente a las personas a ellos encomendadas.

1.4 ¿CUÁL ES EL PAPEL DE LOS MATEMÁTICOS (Y DE LAS MATEMÁTICAS) EN ESTA OBRA?

Un matemático no es una persona dedicada a efectuar grandes cálculos, ni quien se caracteriza por conocer y aplicar correctamente fórmulas, procedimientos y técnicas aprendidas; un matemático es un explorador o una exploradora que asume una inmediata actitud de búsqueda ante casi cualquier reto intelectual y que, por lo general, tiene bastante ingenio para idear estrategias que le permitan atacar los problemas que quiere resolver. En consecuencia, el buen maestro de matemáticas es aquel que logra que sus estudiantes tengan siempre una actitud de exploración y búsqueda y tengan ocurrencias propias; es quien logra que sus alumnos cuestionen, busquen y diseñen estrategias; es quien hace que sus alumnos elaboren y validen conjeturas, que usen su sentido común para descubrir, hacer inferencias, predecir resultados, deducir, generalizar y establecer analogías; no quien logra únicamente que sus alumnos hagan operaciones aritméticas con rapidez y precisión, o resuelvan ecuaciones sin cometer errores, ni quien logra que memoricen fórmulas o resuelvan problemas copiando esquemas de resolución.

El desarrollo de muchas de estas actitudes y habilidades podría darse, por una parte, si el profesor abandonara su papel de expositor y se convirtiera en observador que ayuda a explorar y descubrir. Sin embargo, en ocasiones es difícil jugar este papel, no sólo porque implica romper con una tradición añeja, sino también porque no siempre se cuenta con material adecuado para ello y porque, suponiendo que existiera, no siempre es fácil detectar cómo y cuándo conviene apoyar a los estudiantes mientras analizan cómo resolver algún problema.

Por otro lado, los elementos afectivos inherentes al ser humano pueden incidir positiva o negativamente en su concepción de las matemáticas. Una gran parte de los fracasos matemáticos de los alumnos tienen su origen en un posicionamiento afectivo inicial totalmente destructivo de sus capacidades en este campo provocado, en muchos casos, por la inadecuada introducción por parte de los maestros. Por eso habría de intentarse a través de diversos medios que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el placer lúdico que las matemáticas son capaces de proporcionar, a fin de involucrarles en ellas de un modo más personal y humano. En nuestro ambiente contemporáneo, con una fuerte tendencia a la deshumanización de la ciencia en general, a la despersonalización producida por la cultura computarizada, es cada vez más necesario un saber en el que el hombre y la máquina ocupen cada uno el lugar que les corresponde. La educación matemática que recurre a su natural carácter lúdico, así como a su historia misma, podría contribuir eficazmente en esta importante tarea.

1.4.1 Jugando también se aprende

Los juegos tienen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión; para eso se han hecho y ese es el cometido básico que desempeñan. Ese mismo elemento debería ser un motivo para emplearlos en la enseñanza. El juego con reglas bien definidas y que posee cierta riqueza de movimientos, frecuentemente se presta a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de las matemáticas tienen sus piezas, los objetos que éstas estudian, bien definidos en su comportamiento a través de las definiciones de la teoría; las reglas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos.

Las matemáticas así concebidas presentan el mismo tipo de estímulos y de actividad que se dan en el resto de los juegos intelectuales. Por eso no es extraño que muchos matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando activamente en ellos, y que muchas de sus obras hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemáticas *serias,* precisamente por esa peculiar relación de juego y matemáticas. Por algunas razones relativas a la semejanza en la estructura del juego y de las matemáticas, (avaladas por sus propias historias), el juego puede ser un elemento auxiliar muy poderoso para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

La aritmética está inmersa en los cuadrados mágicos, cambios de monedas, adivinación de números. La teoría de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, así como también aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración. La teoría combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea. El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades o medidas. La teoría de grupos es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas del estilo de las damas. La teoría de gráficas es una de las herramientas que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos; surgió con los puentes de Königsberg, y nos da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos como el del pastor, la gallina, el maíz y el lobo, o como el de los maridos celosos. Diversas formas de topología aparecen tanto en juegos antiguos como en juegos más modernos, como los relacionados con la banda de Möbius, de coloreado, nudos, rompecabezas de alambres y aros. La geometría aparece de innumerables formas en falacias, disecciones, juegos con figuras hechas con cerillos, poliominós planos y espaciales. Por supuesto, la probabilidad es la base de todos los juegos de azar, pues precisamente en ellos tuvo su origen. La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje…

El objetivo primordial de la enseñanza no es el llenar la mente de los alumnos de montones de información *que van a necesitar más adelante*. Su objetivo fundamental consiste en ayudarles a desarrollar sus mentes y sus capacidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso, y para ello, el instrumento principal debe contemplar el estímulo de sus propias acciones, colocando a los alumnos en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que pueden conducir a la adquisición de las actitudes que se pretenden transmitir con el estudio de cada materia.

Por la semejanza de estructura entre juego y matemáticas, podemos decir que muchos tipos de actividad y actitudes fundamentales pueden ejercitarse eligiendo juegos adecuados (tan bien o mejor que estudiando contenidos matemáticos más serios), con claras ventajas de tipo psicológico y motivacional para el juego sobre los contenidos propiamente matemáticos. Ahora bien, no todos los juegos pueden adaptarse para su aprovechamiento didáctico. Hay algunos que se prestan a una manipulación similar a la que se lleva a cabo en la resolución sistemática de problemas matemáticos y que encierran lecciones muy valiosas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde se pueden obtener motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, y muchos de estos elementos pueden adquirirse del enfrentamiento con los problemas que constituyen los juegos matemáticos.

1.4.2 ¡Qué bueno es el chisme! (bueno, conocer la historia de los hechos)

Un cierto conocimiento de la historia de las matemáticas debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general y del profesor de cualquier nivel en particular; en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática.

La perspectiva histórica de las matemáticas puede transformar hechos y procedimientos actualmente mecanizados y memorizados en conocimientos buscados ansiosamente y con pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellos. Dicha perspectiva nos acerca a las matemáticas como una verdadera ciencia humana, con un sinnúmero de brillantes aciertos y con errores ahora inconcebibles, pero capaz también de aceptarlos y corregirlos; nos acerca a ellas no como una ciencia propia de intelectos superiores, sino como a una ciencia construida por gente común y corriente. Nos aproxima a las interesantes personalidades de los hombres que han ayudado a impulsarlas a lo largo de muchos siglos por motivaciones muy distintas. Nos proporciona un cuadro en el que los elementos aparecen en su verdadera perspectiva, lo que redunda en un gran enriquecimiento tanto para el matemático técnico como para el que enseña.

Si cada conocimiento matemático de los libros de texto llevara escrito el número de un siglo al que se le pudiera asignar con alguna aproximación, veríamos saltar locamente los números, a veces dentro de la misma página o del mismo párrafo. El orden lógico no es necesariamente el orden histórico en el que tuvieron lugar los descubrimientos de las ideas y conceptos matemáticos, ni tampoco el orden didáctico coincide con ninguno de los dos. Pero el profesor debería saber cómo han ocurrido las cosas para comprender mejor las dificultades de la humanidad en la elaboración de las ideas matemáticas y a través de ello las de sus alumnos, para entender mejor la conexión de las ideas, de los motivos y variaciones del saber matemático, y de esta forma crearse una guía para su propia pedagogía.

El conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de las matemáticas. Se puede suponer la motivación de las ideas y desarrollos en el inicio, y buscar ahí las ideas originales en toda su sencillez y originalidad, todavía con su sentido de aventura, que muchas veces se pierde en los textos, hecho que nos capacitaría para muchas tareas interesantes en el trabajo educativo, tales como la posibilidad de extrapolación hacia el futuro; la inmersión creativa en las dificultades del pasado, así como la comprobación de lo tortuoso de los caminos de la invención, con la percepción de la ambigüedad, oscuridad, confusión iniciales. Por otra parte, el conocimiento de la historia de las matemáticas y de la biografía de sus creadores nos hace plenamente conscientes de su carácter profundamente histórico, dependiente del momento y de las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento, así como de los mutuos y fuertes impactos que la cultura en general, la filosofía, las matemáticas, la tecnología, las diversas ciencias han ejercido unas sobre otras.

El valor del conocimiento histórico no consiste en tener un amplio repertorio de historietas y anécdotas curiosas para entretener a los alumnos a fin de hacer un alto en el camino. La historia se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado. Los diferentes métodos del pensamiento matemático, (la inducción, el pensamiento algebraico, la geometría analítica, el cálculo infinitesimal, la topología, la probabilidad), han surgido en circunstancias históricas muy interesantes y peculiares en la mente de pensadores singulares, cuyos méritos, no ya por justicia, sino por ejemplaridad, es muy útil resaltar. La historia debería ser un potente auxiliar para objetivos tales como hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas; para enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación y precedentes; señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente, así como para apuntar las conexiones históricas de las matemáticas con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes.

Desgraciadamente, tanto para quien desea adentrarse en la investigación matemática como para quien quiere dedicarse a sus aplicaciones o a la enseñanza, la historia de las matemáticas suele estar poco presente en la formación universitaria. Sería muy conveniente que las diversas materias que se enseñan se beneficiaran de la visión histórica, y que a todos los estudiantes se les proporcionara al menos un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida.

2. UNA MIRADITA (A VUELO DE AVE) DE LA HISTORIA DEL CÁLCULO

2.1 UN PAJARILLO VOLÓ Y NOS CONTÓ ESTA HISTORIA

El cálculo diferencial e integral es una de las ramas de la matemática más recientes comparada con, por ejemplo, la geometría, la cual es conocida y usada desde varios siglos antes de Cristo por diferentes civilizaciones. Los conceptos centrales del cálculo como tal: función, límite, derivada e integral, surgieron a lo largo de los siglos XVII y XVIII para tratar de resolver diversos problemas, aunque para esa época aún no estuvieran bien justificados y fundamentados. Pero gracias al desarrollo del álgebra y la aparición de la geometría analítica fue que los axiomas, definiciones y teoremas del cálculo se formalizaron, hasta que durante el siglo XIX adquirieron una forma y expresiones muy parecidas a las usadas hoy en día.

Si tomáramos un libro de texto de cálculo actual y lo hojeáramos, veríamos las definiciones y propiedades de funciones, límites, derivadas e integrales, y la demostración de algunas de ellas; luego de estas definiciones, más teoremas, muchos ejemplos resueltos (y otros tantos por resolver), y las fórmulas y técnicas que se usan para calcular límites, derivadas e integrales. Podríamos pensar entonces que el cálculo es simplemente un conjunto de fórmulas, reglas y técnicas que pueden aplicarse para resolver determinado tipo de problemas, generalmente aquellos relacionados con la velocidad y aceleración de un objeto en movimiento, cambios en el crecimiento de poblaciones, cálculo de áreas delimitadas por curvas o de rectas tangentes a una curva en un punto… En fin, el cálculo es la matemática del cambio.

Y esto es en parte cierto. El cálculo se aplica para resolver este tipo de problemas y muchos otros más. Lo que sería interesante antes de ver qué es un límite, una derivada o una integral, y los cientos de fórmulas que hay para calcularlos, es saber, por ejemplo, por qué las culturas de la antigüedad no realizaron (¿o si?) aportaciones significativas para el estudio y desarrollo del cálculo desde su época, y por qué esta área de la matemática apareció hasta después del siglo XVII. También sería conveniente saber qué tipo de problemas se plantearon y cuya solución propició el surgimiento de las herramientas y técnicas del cálculo, y si éstas se pensaban y utilizaban como se hace ahora; o bien, de dónde salió toda la simbología que se maneja en esta materia hoy en día.

Así pues, para entender mejor las principales ideas del cálculo, echaremos un vistazo muy general y breve a la evolución histórica de esta rama de la matemática. Comenzaremos por ver qué sucedió desde la antigüedad y hasta el Renacimiento; luego, analizaremos la situación de la matemática durante el siglo XVII, etapa en la que se sentaron las bases a partir de las cuales se empezó a construir el cálculo; veremos de manera muy general las obras y enfoques de Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz sobre esta materia (y también señalaremos por qué precisamente la obra de estos dos personajes en particular), y finalmente mencionaremos qué sucedió después de que estos matemáticos *crearan* el cálculo, es decir, lo que pasó entre los siglos XVIII y XIX, y lo que ha sucedido desde entonces y hasta nuestros días

2.2 DE LA ANTIGUA GRECIA AL RENACIMIENTO

(Los meros meros le sacaron al infinito)

Es bien sabido que la mayoría de las civilizaciones y culturas antiguas disponían de sistemas de números que les permitían contar (los números naturales), así como también un sistema para asignar cantidades a partes de la unidad (números racionales). La civilización griega, la más avanzada de la antigüedad, conocía y usaba ambos sistemas numéricos. Para los griegos, los números tenían un claro significado geométrico, pues estaban asociados a medidas, de tal forma que los números podían ser la longitud de un segmento, el área de una superficie, o el volumen de un cuerpo.

La importancia que los números tuvieron dentro del mundo griego fue tal, que hacia el siglo VI a.C. surgió una corriente filosófico-religiosa que consideraba al número como centro del universo: *los Pitagóricos.* Para ellos, todo se podía explicar en términos y a través de los números naturales y sus razones, es decir, de los racionales, y a propósito de esto, desarrollaron toda una mística alrededor de los números y sus propiedades mágicas y prácticas. El más conocido de los resultados que este grupo nos legó es sin duda el *teorema de Pitágoras*, que es la relación entre los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo con el cuadrado de su hipotenusa, la famosa fórmula $a^2 + b^2 = c^2$, donde *a* y *b* son los catetos, y *c* la hipotenusa del triángulo. Pero para el siglo V a.C., al aplicar el teorema de Pitágoras a algunos tipos de triángulos rectángulos, se encontraba que había magnitudes que no podían expresarse por medio de números racionales, o en términos modernos, por medio de una fracción irreducible como $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7} \ldots$ (un ejemplo de estos triángulos es aquel cuyos catetos miden una unidad, y su hipotenusa lo que hoy expresamos como $\sqrt{2}$).

Dado este hecho, no resulta extraño el duro golpe que representó para la filosofía pitagórica el descubrimiento de segmentos cuya longitud no podía indicarse por medio de los números racionales. En aquel entonces era muy importante que todos los números fueran racionales, pues mediante un procedimiento que hacía uso de éstos, era posible comparar segmentos, superficies y volúmenes. El que hubiera segmentos no expresables en términos de racionales implicaba que con dicho procedimiento no se pudieran comparar. A estas magnitudes se les llamó *inconmensurables.*

Así pues, se tenía que inventar una nueva forma para poder comparar cantidades inconmensurables. Este procedimiento tardó más de un siglo en aparecer, y fue propuesto por un alumno de Platón, Eudoxo de Cnido. Su método, llamado *de exhaución,* permitía comparar cantidades inconmensurables, pero era muy complicado. A pesar de esto, el mérito en el trabajo de Eudoxo es que entendió que los inconmensurables, aunque no eran números, podían interpretarse como tales de forma geométrica a través de longitudes de segmentos, áreas de superficies o volúmenes de cuerpos.

La concepción de Eudoxo sobre los inconmensurables permaneció vigente durante mucho tiempo, y tuvo algunas consecuencias dentro de las matemáticas griega que se realizaron posteriormente. Como para los griegos los inconmensurables no eran números (o al menos no como lo eran los naturales o los racionales), no se realizaban operaciones aritméticas entre ellos. En este hecho influyó además la filosofía platónica que no apreciaba mucho las aplicaciones prácticas del conocimiento, y al no ser los inconmensurables *números*, no se estudiaron como los naturales y racionales.

Otra consecuencia de la tradición griega dentro de su desarrollo fue la presencia casi absoluta de la geometría dentro de las matemáticas griegas. Al estar limitada la aritmética al estudio de los números naturales y racionales, no pudieron realizarse desarrollos de tipo algebraico, dando como resultado que la poca álgebra que se hiciera fuera más bien retórica y geométrica que numérica y simbólica. Al tener pocos conceptos numéricos y algebraicos, no se podía asignar a las figuras geométricas números o fórmulas que ayudaran a medir sus áreas o volúmenes. Para hacer estos cálculos se tenía que encontrar la razón de la figura o cuerpo en cuestión y otro previamente conocido; es por ello que los griegos desarrollaron una muy perfeccionada teoría de magnitudes y proporciones.

Por otro lado, esta limitación algebraica imposibilitó la introducción de nuevas curvas por medio de ecuaciones. Las curvas eran entendidas como lugares geométricos o como las intersecciones de planos y superficies, así como también a través de relaciones de áreas o longitudes que daban la propiedad con que se definía la curva; de esta manera, el número de curvas que manejaron los griegos fue muy reducido. Además, la geometría griega tomó un carácter excesivamente estático a consecuencia del escaso papel que jugaron los conceptos de movimiento y variación continua de cantidades dentro de la ciencia griega; por ejemplo, un círculo no era el resultado del giro o movimiento de un segmento en torno a uno de sus extremos, sino el conjunto de todos los puntos que equidistan de un punto fijo.

Las ideas y métodos de Eudoxo tuvieron una gran influencia en uno de los matemáticos griegos más importantes de la antigüedad: Arquímedes de Siracusa. Dejando de lado la filosofía platónica de desdeñar los aspectos prácticos del mundo real, Arquímedes logró proponer muchas técnicas y procedimientos creativos e imaginativos para resolver diversos problemas; pero una vez que tenía sus resultados los sometía a demostraciones rigurosas (generalmente por el método de exhaución de Eudoxo) para comprobar la validez de los mismos.

Por ejemplo, Arquímedes encontró fórmulas para encontrar cuadraturas y cubaturas, lo que hoy en día conocemos como área y volumen respectivamente, de muchas figuras y cuerpos geométricos, y en seguida daba una rigurosísima prueba de su validez. Tales pruebas eran complicadas, rígidas y muy técnicas; sin embargo, en la mayoría de los casos la prueba no daba indicios de cómo Arquímedes llegaba a los resultados que probaba. Éstos son tan sorprendentes, que incluso se pensaba que tenía un método (que mantenía en secreto), para que de esta forma se valorara aún más su talento creativo e imaginativo.

La creencia de la existencia de tal método fue confirmada hasta dos milenios después de su muerte, si bien Arquímedes no lo había mantenido en secreto. El texto que lo contenía, llamado ahora *El Método*, fue recuperado accidentalmente en el año de 1906, en una biblioteca de un monasterio en Constantinopla, por el historiador danés J. L. Heiberg, quien lo encontró escrito en unos pergaminos del siglo X que se habían usado para escribir textos religiosos. Esencialmente, el *Método* es una carta que Arquímedes escribió a su contemporáneo Eratóstenes, bibliotecario y matemático en Alejandría. En dicha carta, Arquímedes comentaba a Eratóstenes varios resultados sobre cuadraturas y cubaturas que había obtenido.

Aunque los resultados no eran novedosos, ya que estaban contenidos en otras obras de Arquímedes, con sus pruebas correspondientes, lo que aportó en su carta es el método que había empleado para encontrarlos. Tal método es una mezcla de consideraciones de carácter infinitesimal y mecánico; así por ejemplo, él consideró el área como una suma de segmentos o bien, el volumen como una suma de áreas, para luego, usando la ley de la palanca (descubierta anteriormente por él mismo), reubicar esos segmentos y encontrar así un área equivalente pero más fácil de calcular. Arquímedes es consciente de que los resultados obtenidos por su método carecen de rigor, así que para poder ser tomados como válidos necesitaban de una prueba rigurosa (realizada por el método de exhaución). Como final de la historia de Arquímedes y su *Método*, hay que mencionar que si éste no hubiera estado perdido, muy probablemente el desarrollo del cálculo infinitesimal se hubiera producido antes. Las consideraciones de carácter infinitesimal, tales como tratar al área como suma de segmentos, fundamentales en el desarrollo del cálculo y que aparecen en el *Método* no se hicieron de nuevo sino hasta el siglo XVII.

Durante la época medieval, aunque se llevaron a cabo numerosos estudios sobre el cambio y el movimiento, de los cuales surgieron las primeras cuestiones de índole infinitesimal, éstos tenían un carácter más filosófico que matemático. El personaje más destacado de esta etapa, por las aportaciones propiamente matemáticas que hizo al respecto, fue Nicolás de Oresme, matemático francés del siglo XII. Oresme introdujo la noción de variable como medida de segmentos, así como un cierto tipo de relación que podía establecerse entre dichas variables, y también, a través de la representación gráfica de estas relaciones dio una primera aproximación a la introducción de un sistema de coordenadas. Propuso la idea de que entre más cerca se esté de un extremo de un segmento, la variación en su valores tendía a disminuir, y finalmente planteó una especie de integración para calcular distancias en términos de, como diríamos hoy, el área bajo la gráfica velocidad-tiempo. La maduración de estas ideas jugaron un papel muy importante en la aparición de las técnicas del cálculo del siglo XVII, y desde luego influyeron en los trabajos de otros científicos como Galileo, quien en una de sus obras dio una mayor estructura a estas ideas, creando así una nueva rama de la mecánica: la cinemática.

Como consecuencia de las especulaciones filosóficas acerca del infinito, se realizó cierta actividad matemática que hizo que disminuyera esa especie de aversión que los griegos de la antigüedad tuvieron hacia las cuestiones infinitesimales. De esta manera, las aportaciones medievales abrieron nuevos caminos dentro de la matemática: se llevaron a cabo avances en el terreno de la cinemática y en la consideración intuitiva del concepto de función. Estos resultados tuvieron un gran mérito, pues sus creadores no contaban con herramientas geométricas o algebraicas considerables que les facilitaran las operaciones. De cualquier manera, la aparición de un ambiente propicio para el uso del concepto de infinito influiría positivamente en el desarrollo de los métodos y técnicas infinitesimales posteriores.

En el Renacimiento, la tendencia general en la cultura hizo que las diversas corrientes y escuelas, tanto artísticas como científicas, recuperaron el legado de la antigüedad. Así, en el caso de las matemáticas, se tradujeron del griego al latín e incluso a las lenguas regionales las principales obras de las matemáticas griegas. Pero esta labor no se reducía a la traducción o aclaración de fragmentos dudosos y a su puesta en circulación para el público interesado, sino que iba más allá, pues se intentaba la restauración del material perdido y la extensión de los métodos y resultados, dando mayor énfasis a la resolución de los problemas que al estilo en que éstos se presentan.

En este sentido, la importancia de la naciente álgebra simbólica, considerada como una poderosa técnica para resolver problemas, fue determinante. Gracias al uso de símbolos para representar magnitudes, el álgebra liberó de la necesidad de tratar casos particulares y ejemplos concretos, y propició el manejo de los datos de un problema como parámetros (medidas) para, en función de los mismos, obtener soluciones generales. Como consecuencia de este enfoque, la atención se centró en las operaciones que conducían a la solución de los problemas, es decir, en los procedimientos de resolución más que en la propia solución.

También jugó un papel muy importante una obra de fines del siglo XVI llamada *Introducción al arte analítico*, en la cual su autor, el matemático francés François Viète recuperó el método geométrico utilizado en las matemáticas griegas antiguas, y le incorporó la acción del álgebra, pues pensaba que ésta podía brindar mayores y mejores resultados que los que se obtenían usando sólo el método griego. Con esta obra, Viète logró establecer una conexión entre álgebra y geometría, ya que obtuvo ecuaciones correspondientes a diversas construcciones geométricas derivadas de problemas específicos. En sus respectivos trabajos, Pierre de Fermat y René Descartes desarrollaron esta idea para problemas geométricos en general.

Aunque el principio fundamental de la geometría analítica consiste en el descubrimiento de que las ecuaciones indeterminadas en dos incógnitas se corresponden con lugares geométricos, en general curvas, determinadas por todos los puntos cuyas coordenadas relativas a dos ejes satisfacen la ecuación, los enfoques de Fermat y Descartes difieren un poco. Mientras que Descartes parte de la curva correspondiente a un lugar geométrico, y de la cual deduce la ecuación general, Fermat parte de una ecuación algebraica de la que deriva las propiedades geométricas de la curva correspondiente. De esta manera, podemos darnos cuenta de que las visiones de

Descartes y Fermat son complementarias, estableciéndose así el vínculo entre álgebra y geometría en ambos sentidos.

Así pues, la geometría analítica influyó en la aparición de las técnicas del cálculo del siglo XVII. Pero no sólo influyó la geometría analítica; también lo hizo el álgebra, pues mediante ésta se intentó aritmetizar los métodos matemáticos de los griegos de la antigüedad. En este intento aparecieron serios problemas, unos referentes a lo infinitesimal (como por ejemplo, la ausencia del concepto de límite), y otros referentes a la ausencia de un método como el de la geometría analítica. Fue gracias a los trabajos de Descartes y Fermat que algunos de estos problemas pudieron ser enfrentados: por el simple hecho de escribir una ecuación, una curva queda definida, así que se amplía el número de curvas que pueden ser estudiadas a través de las nuevas técnicas algorítmicas infinitesimales. Al ser la geometría analítica una herramienta muy efectiva en el tratamiento de los problemas, ésta jugó un papel decisivo en la investigación infinitesimal.

2.3 EL SIGLO XVII

(Preparando el terreno para construir un nuevo edificio)

La historia de cualquier rama de las matemáticas es, hasta cierto punto, compleja, básicamente por dos razones. La primera, que en muchas ocasiones el orden cronológico no corresponde con el orden de aparición de los diversos conceptos que se estudian; por ejemplo, la idea de límite apareció y se formalizó entre los siglos XVIII y XIX, en tanto que la de derivada surgió en el siglo XVII, siendo que en la actualidad se explica primero el concepto de límite y después se usa para definir a la derivada.

La segunda, que, independientemente de las circunstancias específicas (situación geográfica, política, económica, social…), generalmente las aportaciones matemáticas no son obra de una sola persona; para ejemplificar esta situación, podemos mencionar el caso de Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz, a quienes se les atribuye la creación del cálculo, y a quienes además se ha enfrascado en una polémica sobre quién fue el *verdadero creador* del cálculo, muchas veces sin tomar en cuenta cómo llegaron a sus resultados, bajo qué circunstancias, cuáles eran sus enfoques, y por qué llegaron al enfrentamiento, y también sin mencionar quiénes fueron sus antecesores. Y no son los únicos ejemplos; las matemáticas están llenas de situaciones como las anteriores. Así que es conveniente hacer una breve revisión histórica de la situación de la matemática del siglo XVII, siglo en el que los predecesores de Newton y Leibniz propusieron los primeros rudimentos del cálculo.

En primer lugar, una buena parte de los matemáticos de esta época eran, además de matemáticos, arquitectos, contadores, ingenieros, artistas, teólogos, filósofos, etcétera, y en muchas ocasiones se auxiliaban de las técnicas matemáticas conocidas en su tiempo para simplificar sus propios procedimientos, o para realizar y expresar de manera más sencilla investigaciones en dichas áreas que les permitieran hacer sus trabajos con mayor eficiencia. La investigación se hacía en las universidades, y en grupos de trabajo que comúnmente se formaban en torno a algún o algunos científicos reconocidos. Estos grupos estaban aislados unos de otros, por lo cual los resultados que se obtenían no eran comunicados (o si esto se hacía, podían ser interpretados erróneamente). Además, no había revistas especializadas en temas científicos que sirvieran para difundir los nuevos descubrimientos; lo común era escribir cartas a los científicos que quizá pudieran interesarse en el tema. Entonces, la mejor manera de obtener alguna formación matemática era buscarse un tutor que hiciera investigaciones en el área, que conociera el trabajo de otros, y que tuviera acceso a los pocos libros que se publicaban. Con la creación de las primeras academias científicas, así como con la aparición de revistas científicas donde publicar los resultados y descubrimientos, la situación empezó a cambiar hacia la segunda mitad del siglo XVII.

Un rasgo distintivo de las matemáticas de esta etapa fue la diferencia de rigor comparándolas con las que hacían los antiguos griegos. Durante los siglos XVI y XVII la mayoría de los razonamientos matemáticos estaban llenos de ideas empíricas, puesto que muchos de los problemas que se analizaban entonces surgían del estudio de cuestiones físicas. Este hecho es clave en el desarrollo de los métodos del cálculo, pues sin el rigor de la antigüedad, los matemáticos pudieron crear nuevas e ingeniosas herramientas para la resolución de los problemas.

Otro factor importante era la falta de un lenguaje adecuado que ayudara en la representación de los razonamientos matemáticos. Mucha de la notación que usamos hoy en día quedó fijada entre los siglos XVIII y XIX, gracias a los trabajos de muchos matemáticos. Sin una notación conveniente y unificada, la difusión de los descubrimientos matemáticos era una tarea difícil de realizar.

También en este siglo empezó a producirse un cambio, tanto en la actitud como en la concepción de los matemáticos hacia su ciencia. Este cambio, cristalizado en la invención de la geometría analítica de Fermat y Descartes, provocó el interés por las componentes analíticas de las curvas sobre sus componentes geométricas. De este modo, la geometría analítica, el interés cada vez mayor por las cuestiones sobre dinámica, y los avances dentro del naciente cálculo originaron que el número de curvas que eran investigadas aumentara de manera considerable. También, como consecuencia de la geometría analítica y de su uso, surgió una componente cuantitativa con la que la geometría antigua no contaba. Tal componente fue esencial al momento de aplicar las matemáticas en la resolución de problemas físicos, ya que era muy frecuente que se necesitara un resultado cuantitativo, es decir, expresable por medio de números, en lugar de uno geométrico (por medio de figuras).

Por otro lado, a los matemáticos de aquel siglo les interesó especialmente la resolución de tres tipos de problemas básicos para el cálculo, que si bien se conocían y habían sido estudiados desde la antigüedad, con la geometría analítica y el álgebra fue que pudieron encontrarse nuevas posibilidades de resolución más simples, sin tener que recurrir a los complicados métodos griegos. Básicamente, estos eran los problemas de máximos y mínimos, los problemas de tangentes, y los problemas de cuadraturas.

Por obvias razones, el problema de maximizar y minimizar cantidades tiene claras aplicaciones prácticas. Un ejemplo muy conocido de este problema se originó cuando a principios del siglo XVII hubo una excelente cosecha de uva en Austria y que, después de haber sido procesada, generó una gran cantidad de vino. Para guardarlo, se pidió al científico Johann Kepler que resolviera el problema del almacenamiento del vino. Kepler estudió la forma de los barriles que con una menor superficie, que implicaba una menor cantidad de manera a utilizar para hacerlos, tuvieran mayor volumen (es decir, que pudieran contener más vino). Para esto, Kepler buscó el punto donde la variación en el volumen producida por una variación en las dimensiones del barril fuera prácticamente nula.

El problema de encontrar la tangente a una curva en un punto es claramente un problema geométrico, pero cuya aplicación a los problemas de la óptica interesaba a gran número de científicos de aquel entonces. Además, al ampliarse el número de curvas que eran estudiadas, la antigua definición griega de tangente: recta que corta a la curva en un punto, y válida para las secciones cónicas, no podía aplicarse a las nuevas curvas. En este siglo apareció también una variante del problema de la tangente, el problema inverso de la tangente. Éste consistía en determinar una curva conociendo alguna propiedad de sus tangentes. El primero en plantear problemas de este estilo fue un discípulo de Descartes, Florimond de Beaune, quién creía que las propiedades de las curvas podían estar definidas por las propiedades de sus tangentes.

Los problemas de cuadraturas consistían en el cálculo de áreas, que aunque incluían también cálculos de longitudes y volúmenes, el interés por los problemas relacionados con la longitud de segmentos de curvas apareció hacia la segunda mitad del siglo XVII, debido al desánimo que causaba el hecho de que hasta entonces no se hubiera podido calcular la longitud de una curva tan conocida como la elipse (recordemos que lo que interesaba era poder expresar la longitud, volumen o área en términos numéricos, y no encontrar una longitud, volumen o área equivalentes a la dada, como se hacía con la técnica griega).

2.4 LOS TRABAJOS DE NEWTON Y LEIBNIZ

(Que las cosas fluyan y evanescan)

El interés por el estudio de nuevas y diferentes curvas, así como también por descubrir sus longitudes, áreas o volúmenes (generadas cuando se les hacía girar) venía de una gran variedad de cuestiones sobre todo mecánicas: establecer matemáticamente el centro de gravedad de un objeto era importante al preocuparse por su estabilidad y, claramente, esto también era un tema esencial en áreas como la arquitectura o la construcción de barcos. Así pues, para fines del siglo XVII existían una serie de métodos infinitesimales para resolver problemas específicos de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos,

Por ejemplo, Kepler utilizó métodos infinitesimales para calcular el volumen de un tonel de vino; Galileo creía en la existencia del infinito, citando como ejemplo de esto que consideraba a la circunferencia como un polígono con un número infinito de lados; Bonaventura Cavalieri, alumno de Galileo, analizó diferentes métodos de indivisibles, manipulando áreas como si éstas estuvieran compuestas de líneas indivisibles, y volúmenes como si estuvieran compuestos por áreas indivisibles; Fermat desarrolló métodos para encontrar tangentes en cualquier punto de una curva polinómica, así como para dar sus máximos y sus mínimos, métodos muy parecidos a los actuales, pero que no recurren al concepto de límite.

Pero la propia particularidad de estos procedimientos, ideados para resolver problemas muy determinados, hace que no podamos hablar de ellos como una teoría general. En la actualidad diríamos que estos problemas pueden resolverse por medio de la derivada y la integral. Pero eso es precisamente lo que hacía falta en aquella época, es decir, se necesitaba detectar y aislar lo que tenían en común los problemas y las soluciones hasta entonces propuestas para el cálculo de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, y desarrollar nuevas técnicas adecuadas, pero sobre todo generales, para resolverlos. Fue entonces que aparecieron en escena Newton y Leibniz, y llevaron a cabo la labor de generalizar los métodos que ya existían. Por un lado, Newton propuso el concepto de *fluxión de una fuente* (algo parecido a la derivada de una función), y mostró que para calcular el área bajo una curva era suficiente con calcular la *fluente de una fluxión* (es decir, que si nos dan una función, debemos encontrar otra que al derivarse nos de la primera). Por otro lado, Leibniz definió, entre otros, los conceptos de diferencial e integral, y mostró que resultan ser inversos entre sí. Ambos, Newton y Leibniz, probaron cómo sus respectivos conceptos podían ser utilizados para resolver no sólo los problemas específicos de tangentes, cuadraturas o máximos y mínimos, sino una gran variedad de problemas, con lo cual también se hacía patente la gran eficacia del cálculo.

Esta eficacia se debía a que los métodos del cálculo carecían de una fundamentación rigurosa, pues su estructura se basaba en un concepto, la *cantidad infinitesimal*, cuya vaguedad hizo que muchos dudaran de su existencia. Es precisamente esta idea de cantidad infinitesimal la componente común de todos los métodos particulares creados a lo largo del siglo XVII. De hecho, Newton y Leibniz basaron sus razonamientos en esta idea de cantidad infinitesimal, aunque hubo importantes diferencias conceptuales entre los enfoques de ambos en cuanto al uso de dichas cantidades. Como sea, lo que cabe resaltar aquí es que había quienes aceptaban la existencia de las cantidades infinitesimales y quienes no, pero que justificaban su uso como una forma de eludir las complicaciones de las pruebas por exhaución. Aunque se necesitaron casi dos siglos para superar los problemas que surgieron con las cantidades infinitesimales y con su uso, la clave fue considerarlas no como una cantidad fija o número, sino como una cantidad variable, como una función, que se va aproximando progresivamente a cero. Al final de este proceso histórico, el cálculo tomó la forma que tiene actualmente, y derivó en otra rama de la matemática, el análisis infinitesimal de nuestros días.

La labor matemática de Isaac Newton, muy relacionada con sus investigaciones de filosofía natural, abarcó diversas áreas de la geometría y del álgebra. Por ejemplo, estudió las secciones cónicas desde un punto de vista completamente geométrico; inició la teoría de las curvas algebraicas, que son curvas cuya ecuación en coordenadas cartesianas es de naturaleza algebraica como el caso de las curvas cúbicas, o de la forma $y = x^3$. En su libro *Arithmetica Universalis sive de composicione et resolutione arithmetica liber* (*Aritmética Universal o Tratado de composición y resolución aritmética,* obra en la que se plantea la relación entre la geometría y el álgebra), generalizó y mejoró los conocimientos de su época referentes a la teoría general de ecuaciones, la eliminación algebraica y la resolución de problemas geométricos por medio de procedimientos algebraicos.

Pero la primer obra de Newton dedicada a cuestiones de cálculo es su *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (*Sobre el análisis mediante ecuaciones de un número infinito de términos*), escrita en 1669 y publicada en 1711. En ésta aparece una demostración para la fórmula del área encerrada por una parábola de la forma $y = x^{\frac{m}{n}}$, y después para curvas más complicadas. Lo que Newton hacía es que, a partir de la fórmula que daba el área delimitada por la curva entre cero y la abscisa *x*, se podía calcular la velocidad de variación del área conforme se incrementaba el valor de *x*, con lo cual obtenía la ecuación de la curva que genera tal área.

La segunda y más extensa obra de Newton en torno del cálculo se encuentra en el libro *De methodis fluxionum et serierum infinitorum* (*Sobre el método de fluxiones y series infinitas*), escrito en 1671, traducido y publicado en inglés en 1736. Aquí se presentaron los conceptos de *fluente* y *fluxión de la fluente*, y desarrolló un método general para calcular la fluxión de una fluente. El método de las fluxiones de Newton es más bien de naturaleza geométrico-mecánica, pues supuso que cualquier magnitud geométrica es generada por movimientos de velocidades diferentes, en tanto que el tiempo fluye constante y uniformemente, actuando como telón de fondo y apareciendo implícitamente en las velocidades. Las magnitudes así creadas son las fluentes, y las velocidades de las fluentes las fluxiones; designó al incremento del tiempo por una ***o***, y el producto de este incremento por la respectiva fluxión es denominado *momento*. La notación característica de

Newton para las fluxiones, y que se sigue usando en nuestros días en mecánica, consiste en indicar las sucesivas fluxiones mediante puntos sobre la fluente correspondiente; así, la fluxión de $\boldsymbol{g}$ (su derivada), se escribe $\dot{\boldsymbol{g}}$.

Después de esto, Newton proponía los dos problemas fundamentales del cálculo que eran, dada la relación de las fluentes, determinar la relación de las fluxiones; y dada la ecuación para las fluxiones de ciertas cantidades, determinar la relación de dichas cantidades. Este último problema nos remite al estudio de las ecuaciones diferenciales, de las cuales el caso más simple puede ser tratado con el cálculo. Como ya hemos dicho, Newton aplicó sus resultados sobre fluxiones y fluentes a la resolución de problemas de máximos y mínimos, tangentes, cuadraturas… Pero en otro problema que propuso en este mismo libro, que consistía en determinar el área bajo cualquier otra curva, la solución que dio radicaba en encontrar la relación entre la cantidad fluente y su fluxión, es decir, en calcular la integral de la función dada. Con esto, Newton definió su cálculo integral como el inverso del cálculo de fluxiones, no como un proceso independiente (tal y como lo haría Leibniz).

Newton presentó otro método para el cálculo de fluxiones en el que intentaba evitar el uso de las cantidades infinitesimales; este método se baso en lo que denominó *razones primeras y últimas*, usando el término razones con el significado de proporciones, y apareció dentro de un tratado titulado *De quadratura curvarum* (*Sobre la cuadratura de las curvas*) en 1704, como un apéndice de otra obra suya, *Opticks* (*Óptica*). Con la introducción de un nuevo concepto, el de *cantidad evanescente* (algo así como un incremento que se va desvaneciendo), Newton se aproximó mucho a la idea de límite, y aunque aquí no utilizó las cantidades infinitesimales, su concepto de incrementos evanescentes resultaba tanto o más confuso que el de infinitesimal.

Estas son, de manera muy general, las aportaciones que hizo Newton al cálculo: el desarrollo del concepto de derivada de una variable con respecto al tiempo (fluxión), y un procedimiento para su cálculo; la resolución de varios problemas con este método; el establecimiento de que los problemas de cuadraturas podían solucionarse al invertir los procesos de derivación. Por último, si bien Newton no dio una definición rigurosa de derivada, hay que señalar que a su idea de los incrementos evanescentes solo había que *aplicarle* el límite para obtener el concepto de derivada. De esto fue de lo que se ocupó la matemática durante el siglo XIX.

Mientras en Inglaterra, gracias al trabajo de Newton, el cálculo infinitesimal lograba avances y adquiría las primeras notas que le daban unidad y autonomía, lo mismo sucedía en el continente europeo por la obra de Gottfried W. Leibniz. En su obra, a diferencia de la de Newton, se nota la preocupación por la claridad de los conceptos y por el aspecto formal de la matemática, lo cual le permitió crear un simbolismo adecuado para los nuevos procedimientos. Además de sus contribuciones al cálculo, la labor matemática de Leibniz se extendió a la teoría de números, al cálculo mecánico, al álgebra, al perfeccionamiento de la notación matemática.

La concepción del cálculo de Leibniz es completamente diferente de la de Newton. Para Leibniz, las curvas están formadas por segmentos indivisibles de longitud infinitesimal, de tal manera que al prolongarlos se obtenían las tangentes de la curva en sus puntos. También, al definir así una curva, se le podían asociar distintas sucesiones de números: la de las abscisas (x), la de las (y), la de la longitud de los segmentos… El cálculo de Leibniz se originó en la teoría de sumas y diferencias de tales sucesiones: el cálculo diferencial se obtenía del cálculo de diferencias de sucesiones, y el cálculo integral del cálculo de sumas de sucesiones. Aquí encontramos una diferencia conceptual entre los cálculos de Newton y Leibniz. Mientras que Newton tenía una visión dinámica de las curvas, como generadas por un movimiento, y recurría a los infinitésimos para el cálculo de las fluxiones (sin interesarle éstos por sí mismos, sino el límite cuando van desvaneciéndose), para Leibniz, al estar una curva formada por un conjunto de segmentos rectos de longitud infinitesimal, le importan entonces las propiedades de tales cantidades, de ahí que desarrollara un método para la suma de esas cantidades (integración), y otro para su diferencia (derivación).

De igual manera, Leibniz proponía que cada número tenía asociada una *dimensión* que nos indicaba si éste era la longitud de un segmento, un área, o un número sin dimensión. Además de esta dimensión, cada cantidad tenía asociada otra, que indicaba el orden de magnitud o infinitud de dicha cantidad. Estas características que todo número tenía, son muy importantes dentro del cálculo de Leibniz, pues los diferentes órdenes de magnitud permitían tomar como cero los números de menor orden con respecto a los de mayor orden. Los operadores diferencial e integral modificaba las características de una cantidad; ambas operaciones respetaban la dimensión, pero la diferencial disminuía el orden de infinitud y la integral lo incrementaba. Así, *dx* (el operador diferencial) es una cantidad infinitesimal con respeto a *x*, y *x* es, a su vez, infinitesimal con respecto a $\int x$ (el operador integral). Aquí tenemos otra diferencia entre el cálculo de Newton y el de Leibniz. El concepto de límite sirve para fundamentar el cálculo de Newton, pero no el de Leibniz, pues para éste las cantidades infinitesimales juegan un papel fundamental dentro de su cálculo, y no es posible eliminarlas recurriendo al concepto de límite, como con Newton.

El primer trabajo de Leibniz sobre cálculo fue un breve artículo titulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (*Un nuevo método para máximos y mínimos y tangentes, no impedido por cantidades racionales o irracionales y un singular nuevo tipo de cálculo para ellas*), publicado en 1684 en la revista *Acta Eruditorum* (*Notas para los que se instruyen*), en el que definió el concepto de diferencial de una cantidad como una cantidad infinitesimal. También fijó las reglas de diferenciación para la suma, producto y cociente de funciones, así como la regla para derivar potencias, y aplicaciones de este cálculo para determinar tangentes, máximos, mínimos, cuadraturas. A pesar de la importancia de este artículo para el cálculo, el hecho de que la mayoría de los resultados mostrados aparecieran sin demostración y de una forma confusa, más los numerosos errores de impresión, lo hicieron casi incomprensible para el público interesado. Para intentar aclarar sus ideas, Leibniz publica dos años después su segundo artículo sobre cálculo, también en *Acta Eruditorum*.

En este nuevo texto, Leibniz hizo hincapié en la relación inversa que había entre diferenciación e integración, y asimismo, resaltó la importancia de su notación, creada en paralelo a su método de cálculo, para encontrar expresiones de curvas no algebraicas (como las logarítmicas, exponenciales o trigonométricas). Aquí tenemos que hacer una observación. Aunque al final terminó considerando a los procesos de diferenciación e integración como inversos, Leibniz los desarrolló de forma separada, al contrario de Newton, quien establecía que la integración era el proceso inverso de la diferenciación al decir que, para calcular áreas bajo una curva, bastaba encontrar la relación entre la cantidad fluente y su fluxión. En cambio, Leibniz se percató de este hecho al revisar el trabajo del matemático francés Blaise Pascal, quien en su propio método para calcular tangentes y áreas dejó entrever la relación de ambos conceptos (derivada e integral), aunque al parecer no dio mayor importancia a esta relación.

Leibniz dedicó parte de su esfuerzo a la creación de una notación matemática adecuada para las nuevas técnicas. Tomó de Cavalieri la abreviación *omn* (de *omnia*, todos) para denotar su suma de infinitésimos. En un manuscrito de 1675 apareció por primera vez el signo $\int$, que fue la estilización de la letra inicial de la palabra *summa* (que denotaba la suma de infinitésimos); en este mismo texto, Leibniz representó por una *d* su operación de diferencia de infinitésimos. Así, denotaba a la diferencial de una cantidad *x* por *dx* y la integral por $\int x$. El nombre de *cálculo diferencial* proviene de la expresión del latín para su operación de diferencias de infinitesimales, *calculus differentialis*, y a sugerencia de otro matemático, Jean Bernoulli, Leibniz sustituyó la expresión *calculus summatorius* (que indicaba sus sumas de infinitésimos) por la de *calculus integralis*, de donde se derivó *cálculo integral*. Como nota curiosa, para la fecha en que Leibniz introdujo su notación aún no se habían descubierto las reglas del cálculo. Parece ser que hacia 1680 Leibniz tenía ya su método de cálculo, pero éste no fue publicado sino hasta 1684.

¿Cuáles fueron, pues, las aportaciones que hicieron Newton y Leibniz para que fueran considerados como los fundadores del cálculo infinitesimal? A diferencia de sus predecesores, que aplicaban razonamientos infinitesimales muy específicos a problemas determinados, Newton y Leibniz crearon una teoría general donde entraban problemas particulares de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos, y abrían la posibilidad de estudio de otros problemas con la nueva técnica. Y por otra parte, al reconocer de manera general que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos (que uno es el inverso del otro), la consecuencia fue que había una nueva herramienta para el cálculo de áreas, pues bastaría ahora con invertir los procesos de cálculo. En este sentido, Newton y Leibniz dieron más generalidad a este proceso y a su aplicación, una presentación más analítica y la debida importancia que este resultado tiene dentro del cálculo. Para finalizar, diremos que aunque la obra de Newton y Leibniz fue menos creativa que la de sus predecesores, tenía en cambio un mayor contenido empírico, y carecía de una fundamentación rigurosa. En sus inicios, el cálculo infinitesimal no era más que un conjunto de reglas cuya eficacia se demostraba por los éxitos en sus aplicaciones, lo que provocó que ambos autores recibieran gran cantidad de críticas.

2.5 LOS SIGLOS XVIII Y XIX

(Todos llevan agua al molinito y ponen de su cosecha)

Como hemos visto, la fundación del cálculo fue obra de dos científicos que desarrollaron sus métodos de forma independiente. Esto fue causa de una polémica disputa sobre la prioridad del descubrimiento y que se prolongaría durante el siglo XVIII. Esta controversia degeneró en un guerra entre los matemáticos ingleses, quienes seguían y defendían a Newton como creador del cálculo, y los matemáticos del continente, que apoyaban a Leibniz. Esto provocó el aislamiento de los ingleses, que al seguir la obra de Newton, desarrollaron un cálculo infinitesimal de contenido geométrico excesivo, lo que quitó efectividad a sus métodos. Aunado a esto, la falta de una notación conveniente hizo que durante el siglo XVIII la matemática inglesa quedara muy retrasada con respecto a la del continente. Allí, el carácter más algebraico y simbólico del cálculo de Leibniz y su notación potenciaron los alcances de su método; y además, el impulso que matemáticos como los de la familia Bernoulli o Leonard Euler dieron a esta técnica, terminaron por consolidarla como una nueva rama de la matemática.

Aunque son destacadas las contribuciones de los Bernoulli al desarrollo del cálculo, la figura central no sólo en esta áreas, sino en casi toda la matemática del siglo XVII fue Leonard Euler, quién es considerado como el fundador del análisis infinitesimal, una rama de la matemática que engloba los métodos infinitesimales del cálculo diferencial en integral. En su libro *Introductio in analysis infinitorum* (*Introducción al análisis del infinito*), publicado en 1748, Euler unificó y dio mayor estructura a los trabajos de sus predecesores sobre las funciones, y las introdujo sin hacer uso del cálculo diferencial o integral, recurriendo casi siempre a argumentos analíticos en vez de geométricos.

En relación con el surgimiento del concepto de función, hay dos factores relevantes al respecto. Por un lado, y como ya lo hemos mencionado, el hecho de asociar una curva con una ecuación hizo que se diera mayor importancia a los aspectos relacionados con las expresiones algebraicas que a sus componentes geométricas. Por otro lado, el interés que suscitó el estudio del movimiento, reflejado en los trabajos de Kepler sobre el movimiento de los planetas, o de Galileo sobre dinámica, dieron como resultado las primeras leyes físicas que se expresaban como la dependencia entre cantidades variables; precisamente en esa *dependencia de cantidades variables* encontramos una primera idea del concepto de *función*.

Para la época de Descartes, una función era entendida como una relación entre dos variables y que, interpretada de manera conveniente, representaba una curva. Las funciones se manejaban en forma implícita, o sea, se escribían expresiones como $x^2 + xy + y^2 = a$, y se reducían a funciones cuadráticas o cúbicas, es decir, a polinomios en dos variables de grado 2 o 3 igualados a cero. Fue Descartes quien dio a este tipo de curvas el nombre de *curvas geométricas*, y a las que en general no eran de este tipo de polinomios las llamó *curvas mecánicas*, y además introdujo el uso de las primeras letras del alfabeto *a, b, c,…* para señalar a las constantes, y a las últimas, ***…,*** *x, y, z* para las variables.

Para la segunda mitad del siglo XVII, los matemáticos que creaban el cálculo infinitesimal comenzaron a usar expresiones explícitas para las funciones con más frecuencia; por ejemplo, Newton manejaba expresiones como

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad y = \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$$

y se fue ampliando el número y tipo de funciones que se estudiaban, precisamente por los avances del cálculo, de tal suerte que los logaritmos, las exponenciales y las razones trigonométricas empezaron a tratarse desde un punto de vista funcional, al descubrirse que estas curvas daban solución a determinados problemas de tangentes y cuadraturas. Así, las curvas mecánicas fueron retomadas, y Leibniz las renombró: las geométricas ahora eran *curvas algebraicas*, y las mecánicas (logaritmos, exponenciales, trigonométricas) *curvas trascendentes*, nombres que hoy seguimos usando.

Leibniz y Jean Bernoulli fueron los primeros en emplear el término de función, aunque un tanto diferente del actual. Para ellos, una función era definida como una cantidad compuesta *de alguna manera* por una variable y constantes, y esa *manera* implicaba que las variables y las constantes aparecieran en sumas o productos. Euler dio su definición de función a partir de ésta, y decía que una función era *cualquier expresión analítica formada por una cantidad variable y con cantidades constantes*, y en donde *expresión analítica* se refería a un conjunto de operaciones que la generan. También fue el primero en usar las letras que hoy son comunes para representar funciones *f, g, h,* indicando entre paréntesis las variables, es decir, escribía $f(x)$ para señalar el valor que la función f asocia al punto x.

Ahora bien, esta definición de función que dio Euler es bastante restrictiva; consideraciones de tipo físico como las que se derivan del llamado *problema de la cuerda vibrante*, que consiste en estudiar las vibraciones de una cuerda sujeta por sus extremos, hicieron ver que era necesario extender el concepto de función para incluir a la clase de curvas originadas por este problema (que básicamente son las trigonométricas). Así, Euler propuso otra idea de función más amplia, en la que decía que cuando una cantidad dependía de otra, de manera que ésta sufría un cambio en el momento en el que la otra variaba, entonces la primera cantidad era función de la segunda; este concepto era mucho más amplio, y abarcaba todas las formas en que una cantidad podía ser determinada usando otra.

Nuestro concepto actual de función, que a grandes rasgos nos dice que si a cada valor x de un conjunto dado le asociamos un único valor $f(x)$, entonces f es una función, fue propuesto, de nueva cuenta, por dos matemáticos: el ruso Nicolai I. Lobachevski y por el alemán Peter Gustav Lejeune

Dirichlet. Ambos trabajos estaban inspirados en las ideas del matemático francés Joseph Louis Fourier, quien escribía expresiones algebraicas en términos de senos y cosenos, lo que ahora se conoce como series trigonométricas o de Fourier.

Regresando a Euler y a su obra, es importante señalar su libro *Institutiones calculi differentialis* (*Fundamentos del cálculo diferencial*), pues en éste retomó la idea de diferencial de Leibniz y la de incremento evanescente de Newton y las vinculó; a Euler no le interesaba qué eran los infinitesimales, sino su comportamiento; para él, estas cantidades eran cero o terminarían siendo cero, y lo que era importante es que esas cantidades eran susceptibles de escribirse en forma de cociente unas con otras; estos cocientes, que en un principio son $\frac{0}{0}$, podían representar una cantidad determinada, de tal manera que, por ejemplo, *dx, dy* definirían al cociente $\frac{dx}{dy}$. Entonces, el cálculo venía a ser el método para determinar este cociente cuando los incrementos se desvanecían. En esta obra, se empezó a plantear el cociente de incrementos *Δx*

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

que posteriormente dio origen a la derivada de una función. Con esta idea de derivada, a las funciones se les empezó a pensar como aplicaciones que a un número *x* se le asocia otro *f(x)*. Este acercamiento entre el concepto de límite y el cálculo diferencial de Leibniz permitió, más adelante, la fundamentación de su trabajo.

Un último escrito de Euler dedicado a cuestiones de cálculo fue su libro *Institutionis calculi integralis* (*Fundamentos del cálculo integral*), en el que propuso explícitamente que el cálculo integral era la operación inversa al proceso de diferenciación. El cálculo integral aquí desarrollado por Euler aún conservaba el sentido geométrico del área, pero ya no era un proceso independiente del cálculo diferencial como lo había postulado Leibniz. A pesar de los avances que las matemáticas, y en específico el cálculo infinitesimal, lograron con los trabajos de Euler, esta nueva rama carecía aún de fundamentos. Muchos matemáticos criticaban duramente los resultados que se obtenían y era precisamente por la falta de solidez en sus fundamentos.

Los primeros intentos serios por fundamentar el cálculo se dieron dentro de la *Académie des Sciences* (*Academia de Ciencias*) en París por matemáticos franceses como Jean le Rond D'Alembert o Joseph Louis Lagrange, aunque entonces no tuvieron mucho éxito sus trabajos. Es hasta el siglo XIX que se llegó finalmente a la fundamentación rigurosa de los conceptos de derivada e integral. Fueron dos matemáticos, el checo Bernhard Bolzano y el francés Augustin Louis Cauchy quienes dieron una definición formal del concepto de límite que luego utilizaron para definir derivada e integral.

Como ya mencionamos, Newton fue el primero que intentó definir el concepto de límite dando una serie de argumentos con los que trataba de justificar su idea de incremento evanescente (que utilizó en su método de las *razones primeras y últimas* para calcular derivadas). Sin embargo, sus conceptos resultaron muy vagos, pues al realizar cálculos para obtener derivadas por medio de este método, podían aparecer expresiones como $\frac{0}{0}$ que causaban confusión. Cuando Newton se refería a las *razones últimas* indicaba el límite, pero el problema al que se enfrentaba era justamente en definirlo sin tener que hacer uso de cocientes de cantidades que en última instancia terminarían siendo $\frac{0}{0}$. El segundo intento para definir al límite lo hizo D'Alembert, que decía que una cantidad era el límite de una segunda cantidad variable si ésta segunda podía acercarse a la primera cantidad hasta que la diferencia entre ambas fuera más pequeña que cualquier otra cantidad dada, pero sin llegar nunca a coincidir con ella. A pesar de que esta definición de límite es muy parecida a la actual, los matemáticos de la época prefirieron seguir usando los conceptos y el lenguaje de los infinitesimales para justificar el cálculo.

Cauchy y Bolzano recuperaron esta idea de límite y lograron perfeccionarla, pero fue finalmente el matemático alemán Kart Weierstrass quien dio la definición y una notación muy cercana a la actual del límite. Cauchy escribía **lím,** pero sin especificar el punto hacia el que se tomaba el límite, y Weierstrass escribía $\textbf{lím}_{\varepsilon = 1}$ para indicar que se tomaba límite cuando ε se acercaba a 1, o $\textbf{lím}_{n=\infty} \, p_n$ para denotar que se tomaba límite cuando *n* tendía hacia infinito. Algunos matemáticos no encontraban conveniente esta notación para indicar el punto hacia donde se tomaba límite, especialmente cuando el límite era hacia infinito, así que fue el matemático G. H. Hardy quien hacia principios de siglo XX estableció definitivamente (aunque indicando que no fue el primero en usarla) la actual notación, sustituyendo el signo igual por la flecha → en la notación de Weierstrass; así ahora escribimos $\textbf{lím}_{x\to a}$ o $\textbf{lim}_{x\to\infty}$ para denotar que el límite se toma cuando la variable *x* tiende a *a* o hacia infinito.

Así pues, con una definición bastante formal de lo que se entendía por límite, Bolzano y Cauchy dieron sus respectivas definiciones de derivada. Para el primero, la derivada de una función *f(x)* era la cantidad a la que se aproximaba el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ cuando Δx se aproximaba a cero; para Cauchy, la derivada era lo mismo, pero él la escribía como $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, y en este caso *i* representaba lo que en la notación de Bolzano era Δx; cuando se tomaba el límite de la cantidad *i*, lo que se obtenía del cociente resultaba ser la derivada de la función *f(x)*, lo que escribía como *f '(x)* o *y '* (si la función era de la forma *y* = *f(x)*). De esta manera, el concepto de derivada pudo ser debidamente fundamentado (basándose en el concepto de límite) hacia el primer cuarto del siglo XIX.

La definición actual de integral tardó un poco más de tiempo en madurar. A partir de la aparición de los trabajos de Newton y Leibniz, el cálculo integral se entendía como la operación inversa a la diferenciación; sin embargo, surgió la necesidad de definir la integral de una función de manera directa, pero a partir de la vieja idea del área. Uno de los motivos por los cuales se planteó este cambio de visión se debió a los trabajos de Fourier sobre las series trigonométricas asociadas a una función. Los primeros trabajos en este sentido fueron obra de Cauchy, que utilizó el concepto de límite para definir la integral como el límite de una suma de rectángulos para después probar la relación con la derivada. Las mismas ideas de Fourier sobre funciones y series trigonométricas las que hicieron ver que se tenía que ampliar el concepto de integral dado por Cauchy, pues había funciones que no podían ser integradas por medio de dicha definición. Fue el matemático alemán Bernhard Riemann quien, en la segunda mitad del siglo XIX, dio el concepto de integral que se usa en nuestros días, en el que se definen las sumas superiores e inferiores de una función como $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$ y $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$, respectivamente, y si éstas resultan ser iguales, la función es integrable (es decir, si $\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$, entonces se puede hablar de la integral de *f(x)*, y que es $\int f(x)dx$), y además estableció criterios para determinar si una función puede o no ser integrada.

w

2.6 PERO LA HISTORIA NO TERMINA AQUÍ…

Esta es, pues, una crónica muy general sobre la aparición y evolución histórica de los conceptos más importantes del cálculo diferencial e integral. No podemos decir que con el trabajo de Cauchy, Bolzano o Riemann se haya terminado de crear el cálculo, ni que éste sea una rama de las matemáticas ya concluida en la que no puedan proponerse nuevos temas de estudio. Lo que si podemos decir es que el cálculo diferencial e integral fue una de las áreas de la matemática que ocupó un lugar central en la investigación del siglo XVII, pues con su aparición, consolidación y aplicación se daba solución a muchos problemas surgidos de la realidad física que ya eran imposibles de tratar con las rígidas técnicas de la antigüedad.

También podemos decir que gracias a la propia naturaleza de las matemáticas fue que esta nueva rama, el cálculo, que en sus inicios sólo era considerado como un conjunto de métodos para calcular áreas, volúmenes, tangentes, máximos, mínimos…, tuvo que experimentar un proceso de fundamentación que se dio durante el siglo XVIII, y que dio como resultado la aparición de nuevas áreas de estudio para las matemáticas, como por ejemplo, las ecuaciones diferenciales, que hoy en día se utilizan para explicar, modelar e incluso predecir fenómenos relativos a las interacciones que se establecen entre grupos de poblaciones; o bien, a partir de la formalización del concepto de integral se derivó una rama de las matemáticas llamada teoría de la medida, que es de gran utilidad para las actuales investigaciones y aplicaciones que se hacen dentro de la probabilidad y la estadística.

No olvidemos tampoco que en este proceso hubo dos factores que jugaron un papel clave: la aparición de la geometría analítica y el surgimiento de técnicas algebraicas más efectivas, que vinieron a romper con el esquema clásico, rígido (y sobre todo geométrico) del quehacer matemático heredado de los antiguos griegos, y que asimismo dieron a las matemáticas de aquel tiempo nuevos aires, movimiento, vitalidad, lo cual, sin lugar a dudas, representó el legado más significativo que los matemáticos de los siglos XVI a XIX pudieron hacer a su ciencia.

CONCLUSIONES

El haber realizado este trabajo ha significado para mí un gran reto, tanto por los obstáculos técnicos que tuve que sortear, pero sobre todo por los obstáculos personales que se me presentaron a lo largo del camino y que, afortunadamente, pude librar. A través de él aprendí que la enseñanza de las matemáticas constituye un verdadero campo de investigación importante y sobre todo muy fértil para desarrollar y proponer nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Me enfrenté a la necesidad de adquirir y aprender los conocimientos más básicos de un programa de diseño, actividad que, al principio me pareció un poco tediosa e incluso aburrida; pero al final de ello descubrí que dicho programa, Flash MX, es una excelente herramienta que nos permite crear animaciones y actividades interactivas que si son bien pensadas y diseñadas, pueden resultar sumamente interesantes, atractivas, lúdicas y provechosas para los alumnos a los cuales estén dirigidas, no sólo para el área matemática, sino para muchas otras.

Me enfrenté también a la necesidad de convertir en propuestas concretas los resultados teóricos que adquirí en todos y cada uno de los seminarios de enseñanza y de enseñanza de las matemáticas que cursé en la Facultad y en la Universidad. Quizá la metodología que apliqué al hacer este trabajo fue la misma que la de mis trabajos finales de para acreditar los seminarios (pensar un tema, proponer la base teórica, planear las actividades, elaborar el material necesario…), pero indudablemente el esfuerzo, el esmero, el cuidado, la calidad, todos los detalles que puse en mis trabajos de facultad fueron llevados a un punto tal que dieran como resultado un trabajo que no va por una calificación numérica, sino que amerita el poder ser o no nombrada Matemática por mis aún profesores y espero, en un futuro, colegas.

Pero considero que mi principal reto fue tomar temas como el concepto de relación, función y sobre todo el de límite, de un área hasta cierto punto desconocida para la gran mayoría de los estudiantes de matemáticas, el cálculo diferencial e integral, y presentarlos de una manera nada rígida, lo más alejada de lo que pudiera leerse en un libro de texto, de hacer una propuesta diferente y, en lo posible, amena para estudiantes de bachillerato. De alguna u otra manera, considero que los jóvenes pueden seguir sin mayor problema los razonamientos y procedimientos que nos brindan el álgebra y la geometría analítica, pues son temas con los que ellos están más familiarizados, y se pueden vincular, en muchas de las veces, con ejemplos reales. Sin embargo, enfrentarse por primera vez al concepto de infinito, infinitesimal, límite, etcétera, no es una labor sencilla para los estudiantes de bachillerato, dada la complejidad y nivel de abstracción que los mismos conceptos del cálculo tienen en su esencia.

El haber elaborado un trabajo que sé de antemano puede ser utilizado y aprovechado, fue para mí una gran motivación. Mientras investigaba, escribía la parte teórica, diseñaba y animaba la parte práctica, siempre tuve en mente a los profesores, pero sobre todo, a los estudiantes a los cuales está dirigido. Regresaba a mi propia experiencia escolar, y me cuestionaba a mí misma cómo me hubiera gustado que me explicaran todas las ideas que plasmé en este trabajo (o cómo me gustaría hacerlo), si el lenguaje era apropiado, si no resultaba soso o muy rebuscado, si los ejemplos no eran muy ridículos… En fin, todos estos cuestionamientos que en algún punto de este proceso se convirtieron un obstáculo, los pude librar porque recordé que mi esfuerzo y trabajo tenían un destinatario real, de carne y hueso, y no era simplemente una investigación o proyecto que debía realizar como parte de un trámite burocrático.

Este trabajo dista mucho de ser un proyecto completamente terminado, sin fallas, sin errores, sin puntos sobre los cuales se pueda profundizar y proponer más al respecto. Esta tesis representa una propuesta real de material de apoyo para la enseñanza del Cálculo, y considero realmente que este proyecto es un buen punto de partida para una crear una propuesta verdaderamente innovadora, atractiva, y sobre todo interactiva y de gran utilidad para los estudiantes de bachillerato. Espero algún día yo misma, o alguna otra persona interesada en la enseñanza de las matemáticas pueda o quiera continuarla, mantenerla, renovarla, criticarla, refutarla, pero nunca terminarla, pues cuando afirmemos que cualquier rama de las matemáticas ya no tiene más que ofrecernos, que ya hemos llegado al fin, que ya todo esta dicho y hecho, en ese momento no sólo esa área, sino absolutamente todas las matemáticas habrán muerto. Y esto no es exclusivo de las matemáticas, sino que se aplica a cualquier otra área del conocimiento humano de la que afirmemos haber llegado a decir todo lo que de éstas se pueda decir.

BIBLIOGRAFIA

Collete, Jean-Paul. *Historia de las Matemáticas.* México, Siglo Veintiuno, 1986. Tomos I y II.

Durán, Antonio J. *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid, Alianza, 1996. 291 p.

Gil, Denis Z; Dewar, Jacqueline M. *Álgebra y Trigonometría.* Segunda ed. revisada. Colombia, McGraw-Hill Panamericana, 2000. 657 p.

González Urbaneja, Pedro M. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*., Madrid, Alianza, 1992. 297 p.

Gómez Chacón, Inés Ma. *Matemática emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, Narcea, 2000. 276 p.

Hamada, Tomoko. "Tecnología Informática y Educación: Perspectiva Teórica". En: Bueno, Carmen; Santos, María J, eds. *Nuevas tecnologías y cultura.* México, Anthropos, 2003. pp. 183-211

Kilpatrick, Jeremy; Gómez, Pedro; Rico, Luis, eds. *Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación, historia*. México, Iberoamericana, 1995. 131 p.

Larson, Roland E; Hostetler, Robert P. *Cálculo y Geometría Analítica.* Trad. de la tercera edición en inglés. México, McGraw-Hill, 1989. 1134 p.

Marván, Luz Ma. *Hacer matemáticas.* México, Santillana, 2001. 132 p.

Millán, José A. *De redes y saberes: Cultura y educación en las nuevas tecnologías.* Madrid, Santillana, 1998. 137 p.

Rey Pastor, Julio; Babini, José. *Historia de la Matemática.* España, Gedisa. 1985. Vol. 1 y 2.

Saint-Onge, Michel. *Yo explico pero ellos… ¿aprenden?* México, Secretaria de Educación Pública, 2000. 182 p.

Stewart, James. *Cálculo Diferencial e Integral.* México, International Thomson, 1999. 587 p.

Swokowski, Earl; Olinick, Michael; Pence, Dennis. *Calculus.* Boston, PWS, 1994. 1383 p.

Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Novena ed. México, International Thomson, 1998. 893 p.

Documentos electrónicos

Guzmán, Miguel de. *El papel del matemático en la educación matemática.* Página personal. Febrero de 2002. [ref. de 12 de marzo de 2006]. Disponible en Web: http://usuarios.bitmailer.com/mdeguzman/guzmanpa/papeldelmatematico.htm

Guzmán, Miguel de. *El papel de la historia en la enseñanza de las matemáticas.* Matemáticas *sin* números. Red Escolar. [ref. de 2 de marzo de 2006]. Disponible en Web: http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/orden/mate5d/mate5d.htm

Guzmán, Miguel de. *Juegos matemáticos en la enseñanza.* Matemáticas *sin* números. Red Escolar. Fragmento del documento actualmente disponible en Web: http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/indexactiv.htm

De Guzmán, Miguel. *La educación matemática en riesgo.* Página personal. Febrero de 2002. [ref. de 10 de enero de 2006]. Disponible en Web: http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/edmatriesgo.html

De Guzmán, Miguel. *Los riesgos del ordenador en la enseñanza matemática.* Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad. Universidad Politécnica de Madrid. Diciembre de 1991. [ref. de 27 de diciembre 2005]. Disponible en Web: http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/00edumatuniv/riesgoordenador.html

Guzmán, Miguel de. *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura. [ref. de 10 de enero de 2006]. Disponible en Web: http://www.oei.es/edumat.htm

Los siguientes documentos fueron consultados en Internet. Actualmente no se encuentran disponibles en la Red, pero se agrega el enlace del cual fueron tomados así como la fecha de consulta:

Guzmán, Miguel de. *Impactos de la matemática en la cultura.* Página personal. Febrero de 2002. [ref. de 10 de enero de 2006]. http://www.mat.ucm.es/~guzman/#laboratorio

Guzmán, Miguel de. *Juegos matemáticos en la enseñanza.* Sector Matemática, 2000. [ref. de 27 de diciembre de 2005]. http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm

Guzmán, Miguel de. *Programas de ordenador en la educación matemática.* Página personal. Febrero de 2002. [ref. de 27 de diciembre de 2005]. http://www.mat.ucm.es/~guzman/#laboratorio

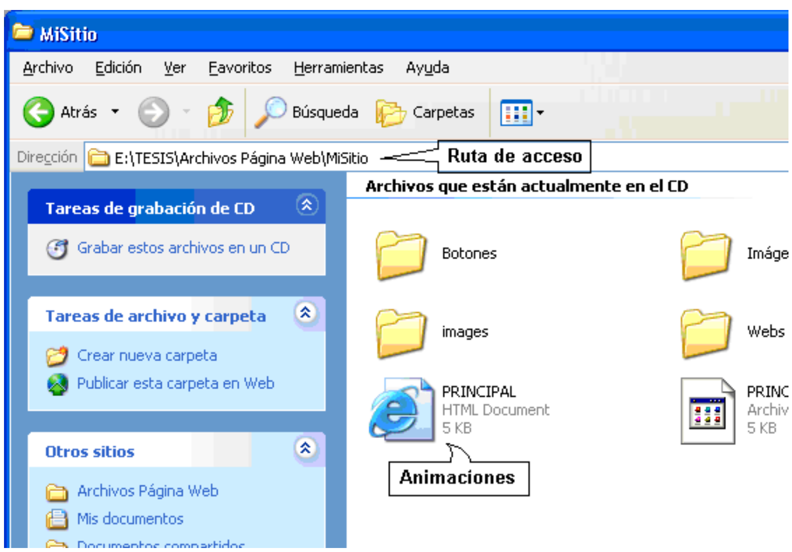
Guzmán, Miguel de. *Sobre la educación matemática.* Sector Matemática, 2000. [ref. de 27 de diciembre de 2005]. http://www.sectormatematica.cl/articulos.htm

ANEXO

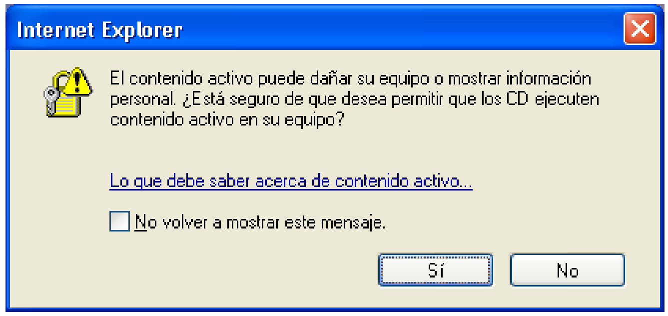
Sobre el uso y navegación del CD

La segunda parte que constituye esta tesis se encuentra en el CD que se anexa a la presentación escrita. Cualquier computadora personal (PC) con sistema operativo Windows puede abrir y leer la información contenida en el disco. Es necesario que la computadora cuente con un sistema de altavoces o bocinas, pues las animaciones incluyen sonidos.

Al introducir el CD en la computadora, hay que ir a la unidad de disco correspondiente (por ejemplo, E:TESIS). El disco contiene una carpeta principal, *TESIS*, y dentro de ésta dos carpetas, *Archivos Página Web* y *Teoría*. Para acceder a la presentación de las animaciones, es necesario ir al archivo PRINCIPAL.htm (que tiene asignado el símbolo de Internet Explorer), ubicado dentro de la carpeta *MiSitio*.

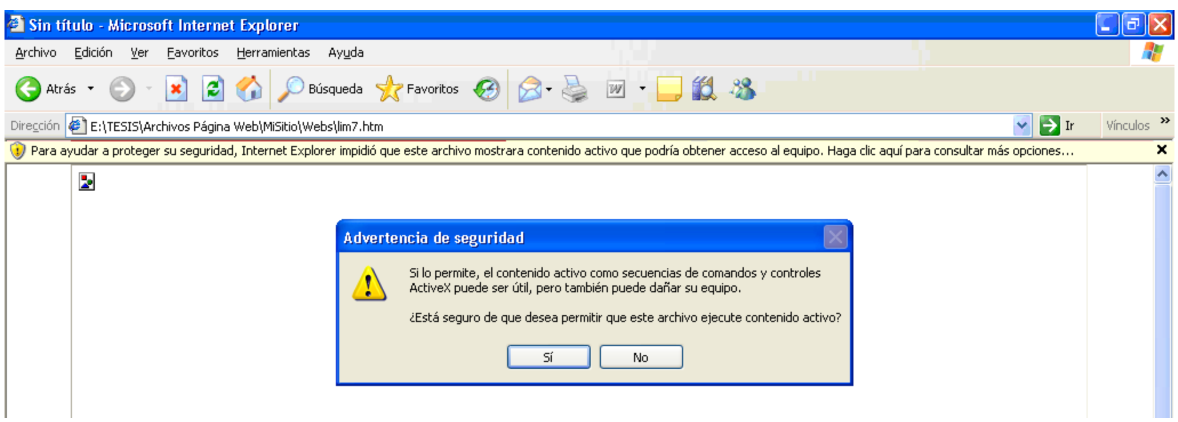


Si al presionar en el icono Web e ir a la página aparece la siguiente ventana:



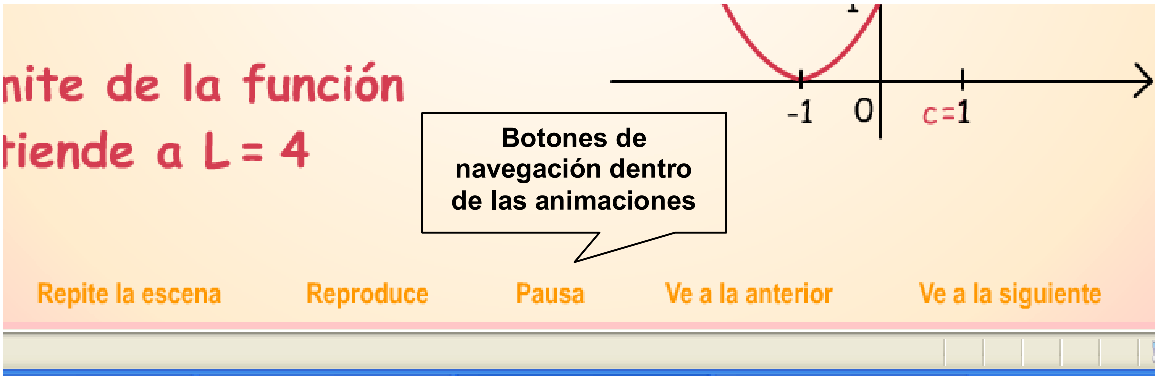
Seleccionaremos la opción *Sí*. Esta ventana es preventiva, la presentación no contiene ningún código malicioso ni daña al equipo, así que podemos verla sin ningún problema.

En caso de que no haya problemas con el acceso a la página, sino al momento de querer ver alguna de las animaciones, el Explorador de Internet nos mostrará una ventana como ésta:

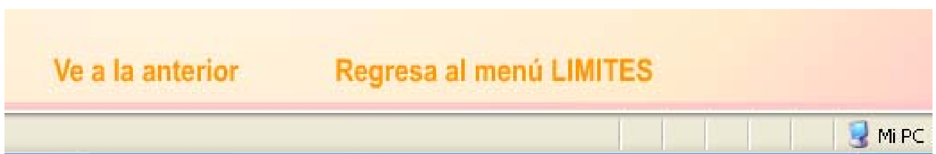


Daremos clic en la barra amarilla para consultar las opciones, se mostrará el cuadro de diálogo, y de nuevo seleccionaremos la opción *Sí* para ver la animación.

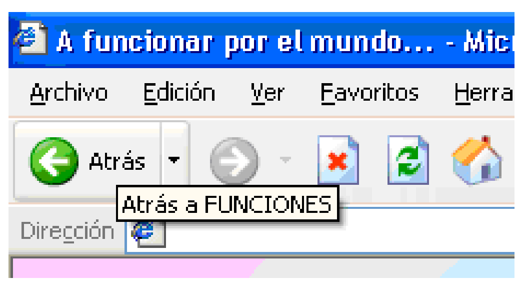
Las animaciones contienen sus botones de navegación, que nos permiten reiniciar la escena, pausarla, reproducirla, regresar a la anterior o ir a la siguiente.



Cuando llegamos al final de una secuencia aparecerá un mensaje que nos indicará que regresemos al menú anterior:



Y lo haremos utilizando los controles de navegación del Explorador de Internet:



Que nos permitirán ir de un menú a otro.