UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA ALTERNATIVA DE FREDHOLM PARA EL PROBLEMA DE POISSON

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

REBECA SALAS BONI

TUTORA: DRA MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA.

2008

Hoja de datos del jurado.

1.- Datos del alumno
Salas
Boni
Rebeca
55 49 59 51
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
404032234

2.- Datos del Tutor
Dra
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez Labora

3.- Datos del sinodal 1
Dr
Nils-Heye
Ackermann

4.- Datos del sinodal 2
Dra
María de la Luz Jimena
de Teresa
de Oteyza

5.- Datos del sinodal 3
Dra
Magali Louise Marie
Folch
Gabayet

6.- Datos del sinodal 4
Dr
Salvador
Pérez
Esteva

7.- Datos del trabajo escrito
La alternativa de Fredholm para el problema de Poisson
74
2008

Índice general

Introducción

Un problema de Dirichlet es un problema que requiere encontrar una función que resuelva una ecuación diferencial parcial específica, en el interior de una región Ω dada, que tome ciertos valores preestablecidos en la frontera de la región.

El problema de Dirichlet puede ser resuelto para distintas ecuaciones diferenciales parciales, aunque originalmente fue propuesto para la ecuación de Laplace, dada por

$$-\Delta u = 0 \text{ en } \Omega,$$

donde

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

es llamado el operador de Laplace (o el laplaciano) de u.

El problema que será estudiado en esta tesis es el problema de Poisson, dado por

$$(\wp_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado, $u \in H_0^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$.

Buscaremos *soluciones débiles* de este problema, es decir, funciones $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfacen

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

donde $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$, el espacio de funciones de clase C^∞ con soporte compacto en Ω, en el espacio de Sobolev de las funciones en $L^2(\Omega)$ que tienen derivadas débiles en $L^2(\Omega)$.

El objetivo de esta tesis es estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema de Poisson $(\wp_\lambda)$. Demostraremos el siguiente resultado.

Theorem 1 *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:*
(a) *El problema $(\wp_\lambda)$ tiene una única solucion débil para cada $f \in L^2(\Omega)$.*
(b) *El problema*

$$(\wp_{\lambda,0}) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 & \textit{en } \Omega \\ u = 0 & \textit{en } \partial\Omega \end{cases},$$

tiene al menos una solución débil $u \neq 0$.
Más aún, si λ satisface (b), entonces existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que el problema $(\wp_\lambda)$ no tiene solución para dicha f.

Si λ es tal que se cumple la afirmación (b) se dice que $-\lambda$ es un valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Una solución débil no trivial de $(\wp_{\lambda,0})$ se llama función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ con valor propio $-\lambda$. Demostraremos el siguiente resultado.

Theorem 2 *Existe un conjunto* $\beta = \left\{e_n \in H_0^1(\Omega) : n \in \mathbb{N}\right\}$ *con las siguientes propiedades:*
i) e_n *es una función propia de* $-\Delta$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *con valor propio* λ_n.
ii) La sucesión (λ_n) *satisface*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

iii) β *es una base de Hilbert para* $L^2(\Omega)$, *es decir,* β *es ortonormal en* $L^2(\Omega)$ *y el espacio vectorial generado por* β *es denso en* $L^2(\Omega)$.
iv) β *satisface*

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m = \begin{cases} \lambda_n & si\ n = m, \\ 0 & si\ n \neq m. \end{cases}$$

v) El espacio

$$E_n := \left\{u \in H_0^1(\Omega) : u \text{ es solución de } (\wp_{-\lambda_n,0})\right\}$$

es de dimensión finita.

La tesis está organizada como sigue:

En el Capítulo 2 introduciremos conceptos y resultados de la teoría de espacios de Hilbert y de la teoría de la integración que serán utilizados en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 3 daremos la construcción del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, que será el espacio en el que trabajaremos para encontrar soluciones débiles al problema de Poisson. Se discutirán las ventajas de éstos, y se demostrarán resultados importantes para el estudio de ecuaciones diferenciales parciales: el teorema de encajes de Sobolev y el teorema de Rellich-Kondrakov.

En el Capítulo 4 se investigará la existencia y unicidad de soluciones débiles para el problema de Poisson $(\wp_\lambda)$, dividiéndolo en dos casos: $\lambda \geq 0$ y $\lambda < 0$. Se demostrarán dos resultados importantes de Análisis Funcional: el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz y la Alternativa de Fredholm, que se requieren para demostrar el Teorema 1.1. Se demostrarán este teorema y el Teorema 1.2.

Preliminares

1.1. Espacios de Hilbert y convergencia débil.

Sea H un espacio vectorial real.

Definition 1 *Una función* $(\ ,\ ) : H \times H \to \mathbb{R}$ *es llamada un producto interior si:*
i) $(u, v) = (v, u)$ *para toda* $u, v \in H$.
ii) La función $u \mapsto (u, v)$ *es lineal para toda* $v \in H$,
iii) $(u, u) \geq 0$ *para toda* $u \in H$,
iv) $(u, u) = 0 \iff u = 0$.

La norma asociada a este producto se define como

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}\,,\ u \in H.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que

$$|(u, v)| \leq \|u\| \, \|v\| \qquad \forall u, v \in H.$$

Esta desigualdad nos permite ver que, en efecto, $\|\cdot\|$ es una norma.

Definition 2 *Decimos que una sucesión* (u_n) *de* H *converge (fuertemente) a* u *en* H, *denotado* $u_n \to u$, *si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| = 0.$$

Definition 3 *Decimos que una sucesión* (u_n) *de* H *converge débilmente a* u *en* H, *denotado* $u_n \rightharpoonup u$, *si*

$$(u_n, v) \to (u, v) \qquad \forall v \in H.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que la convergencia fuerte implica la convergencia débil.

Proposition 4 *Si* $u_n \to u$ *en* H, *entonces* $(u_n, v) \to (u, v)$ *en* $\mathbb{R}$ *para todo* $v \in H$.

Proof. Sea $v \in H$. La linealidad del producto interior y la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dan

$$|(u, v) - (u_n, v)| = |(u - u_n, v)| \leq \|u - u_n\| \, \|v\| \, .$$

Haciendo tender $n \to \infty$, tenemos que $\|u - u_n\| \to 0$, de donde obtenemos

$$(u, v) - (u_n, v) \to 0 \qquad \forall v \in H.$$

■

Definition 5 *Una sucesión* (u_k) *en* H *es de Cauchy si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon \qquad \forall m, n > N.$$

Definition 6 *Un espacio vectorial real con producto interior es de Hilbert si toda sucesión de Cauchy converge en el espacio con la norma inducida por el producto interior.*

Recordamos que, al trabajar en $\mathbb{R}^N$, toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Ésto no se da en general en espacios de Hilbert. Lo que siempre se puede afirmar es el siguiente resultado.

Theorem 7 *Toda sucesión acotada en* H *tiene una subsucesión débilmente convergente en* H*.*

Proof. Una prueba se encuentra en [**?**, Teorema 1.12]. ■

Definition 8 *Sea* (t_k) *una sucesión en* $\mathbb{R}$*. El límite inferior de* (t_k) *se define como*

$$\lim_{k\to\infty} \inf t_k := \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} t_k,$$

donde $\lim_{k\to\infty} \inf t_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Notamos que, si definimos $T_n := \inf_{k\geq n} t_k$, la sucesión (T_n) es creciente, ya que, conforme n tiende a infinito, la cantidad de elementos del conjunto sobre el que se toma el ínfimo es menor.

Lemma 9 *Para cualesquiera dos sucesiones* (s_k) *y* (t_k) *en* $\mathbb{R}$, *se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} \inf s_k + \lim_{k\to\infty} \inf t_k \leq \lim_{k\to\infty} \inf (s_k + t_k).$$

Proof. Primero, tomemos el caso en que (s_k) y (t_k) son sucesiones acotadas. Entonces, definiendo tenemos que

$$S_n := \inf_{k\geq n} s_k, T_n := \inf_{k\geq n} t_k,$$

tenemos que $S_n \leq s_k$ y $T_n \leq t_k$ $\forall k \geq n$. Entonces,

$$S_n + T_n \leq \inf_{k\geq n} (s_k + t_k)$$

Tomemos el caso en que (s_k) y (t_k) son sucesiones acotadas. Entonces, como (S_n) y (T_n) son sucesiones crecientes acotadas, el supremo de éstas coincide con su límite, es decir,

$$\sup_{n\geq 1} (S_n) = \lim_{n\to\infty} (S_n) \text{ y } \sup_{n\geq 1} (T_n) = \lim_{n\to\infty} (T_n).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\inf s_k + \lim_{k\to\infty}\inf t_k &= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n \\
&= \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) \\
&= \sup_{n\geq 1}(S_n + T_n) \\
&\leq \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n}(s_k + t_k) \\
&= \lim_{k\to\infty}\inf(s_k + t_k).
\end{aligned}$$

En el caso en que alguna de las sucesiones, digamos (s_k), no esté acotada inferiormente o superiormente, el resultado se sigue. ■

Como consecuencia del teorema anterior y la definición de límite inferior se obtiene lo siguiente.

Proposition 10 *Si (u_n) converge débilmente a u en H, entonces*

$$\|u\| \leq \lim_{n\to\infty}\inf\|u_n\|.$$

Más aún, (u_n) converge fuertemente a u en H si y sólo si (u_n) converge débilmente a u en H y

$$\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|.$$

Proof. Supongamos que (u_n) converge débilmente a u. Tenemos

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2.$$

Ahora, tomando el límite inferior a esta igualdad, usando el hecho de que $\langle u_n, u\rangle \to \|u\|^2$ y el Lema 9, tenemos

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\inf\|u_n - u\|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\inf\|u_n\|^2 - \|u\|^2,$$

de donde se sigue que

$$\|u\|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\inf\|u_n\|^2.$$

Si además suponemos que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\| = \|u\|,$$

como

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|x\|^2,$$

haciendo $n\to\infty$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 - 2\lim_{n\to\infty}(u_n, u) + \|u\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 - \|u\|^2 = 0,$$

de donde concluimos que (u_n) converge fuertemente a u en H.

Ahora, suponiendo que (u_n) converge fuertemente a u en H, tenemos que $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|^2 = 0$, y por la igualdad anterior, ésto es equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 = \|u\|^2.$$

■

1.2. Resultados de Teoría de la Integración

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjuto abierto.

Definition 11 *Si* $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ *consiste de las clases de equivalencia de las funciones medibles* f, *definidas de* Ω *en* $\mathbb{R}$, *tales que*

$$\int_\Omega |f|^p < \infty.$$

Decimos que dos funciones son equivalentes si son iguales casi dondequiera, es decir, si difieren a lo más en un conjunto de medida cero. Definimos la norma en $L^p(\Omega)$ *como*

$$|f|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

La idea de definir a los elementos de $L^p(\Omega)$ como clases de equivalencia surge de la necesidad de que $|\cdot|_p$ sea, en efecto, una norma, y el único elemento cuya norma sea cero, sea la función cero.

Definition 12 $L^\infty(\Omega)$ *consiste de las funciones medibles* f, *definidas de* Ω *en* $\mathbb{R}$, *tales que esiste una constante* $C \geq 0$ *que satisface*

$$|f(x)| \leq C \textit{ para casi todo punto en } \Omega.$$

Definimos la norma en $L^\infty(\Omega)$ *como*

$$|f|_\infty := \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C \textit{ para casi todo punto en } \Omega \}$$

Definition 13 *Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible. Decimos que* u *es localmente integrable si*

$$\int_K |u| < \infty \qquad \forall K \subset \Omega \textit{ compacto.}$$

Al espacio de funciones que cumplen esta condición le llamamos $L^1_{loc}(\Omega)$.

Notamos que

$$L^p(\Omega) \subsetneq L^1_{loc}(\Omega).$$

En efecto, la función $f(x) \equiv 1$ con dominio $\Omega = \mathbb{R}$, satisface

$$\int_K |f| < \infty \qquad \forall K \subset \Omega \text{ compacto},$$

sin embargo, $\int_\Omega |f|^p = \infty$, por lo que $f \notin L^p(\Omega)$.

Theorem 14 (Desigualdad de Hölder) *Sean* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, *donde* $p \geq 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces,* $fg \in L^1$ *y*

$$|fg|_1 \leq |f|_p |g|_q.$$

En el caso en que $p = \infty$, *entonces, el resultado se sigue con* $q = 1$.

Proof. Ver [?, Theorem 6.9]. ■

Notamos que la relación $p = q$ satisfaciendo las hipótesis de la desigualdad de Hölder, sólo se da con $p = 2$. Esto implica que el producto de cualesquiera dos funciones en $L^2(\Omega)$ será integrable. Así, podemos agregarle una estructura de producto interior a $L^2(\Omega)$, definiendo

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} := \int fg, \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Por inducción vemos que podemos generalizar la desigualdad de Hölder.

Corollary 15 (Desigualdad generalizada de Hölder) *Sean* $1 \leq p_k < \infty$, $k = 1, ..., n$ *tales que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$. *También consideramos funciones* $f_k \in L^{p_k}(\Omega)$. *Entonces,*

$$\prod_{k=1}^{n} f_k \in L^r(\Omega) \ \ y \ \left| \prod_{k=1}^{n} f_k \right|_r \leq \prod_{k=1}^{n} |f_k|_{p_k}.$$

Proof. Primero lidiamos con $n = 2$. Por la desigualdad de Hölder, con $|f| := |f_1|^r$, $|g| := |f_2|^r$, $p = p_1/r$ y $q = p_2/r$, tenemos

$$\begin{aligned} |f_1 f_2|_r^r &= \int |f_1 f_2|^r \leq \left| |f_1|^r \right|_{p_1/r} \left| |f_2|^r \right|_{p_2/r} \\ &= \left[\int |f_1|^{r(p_1/r)} \right]^{r/p_1} \left[\int |f_2|^{r(p_2/r)} \right]^{r/p_2} \\ &= |f_1|_{p_1}^r \, |f_2|_{p_2}^r . \end{aligned}$$

Supongamos que la desigualdad es válida para $n - 1$. Ahora, aplicamos la desigualdad para $n = 2$ reemplazando f_2 por $\prod_{k=2}^{n} f_k$ y p_2 por $r' = \left(\sum_{k=2}^{n} 1/p_k \right)^{-1}$

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_k \right|_r \leq |f_1|_{p_1} \left| \prod_{k=2}^{n} f_k \right|_{r'},$$

y, por la hipótesis de inducción, tenemos

$$\left| \prod_{k=1}^{n} f_k \right|_r \leq \prod_{k=1}^{n} |f_k|_{p_k}.$$

■

Theorem 16 *Si* $1 \leq p < \infty$, *entonces el espacio* $L^p(\Omega)$ *es completo bajo la norma*

$$|f|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Proof. Ver [**?**, 6.14]. ■

Al tener $p = 2$, la norma usual es exactamente norma generada por el producto interior.

Corollary 17 *$L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Theorem 18 (De la Convergencia Dominada de Lebesgue) *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables, es decir, $f_n \in L^1(\Omega)$, y una función medible f, tales que:*
i) $f_n(x) \to f(x)$ para casi toda $x \in \Omega$,
ii) Existe g en $L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi rodo $x \in \Omega$, para toda n.
Entonces f es integrable y

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

Proof. Ver [**?**, Teorema 5.6]. ■

Theorem 19 (de Tonelli) *Si una función medible $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ es tal que la función $F_x : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, dada por $F_x(y) := F(x,y)$ es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, y que la función de $\mathbb{R}^M$ a $\mathbb{R}$ dada por*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} F_x(y)\, dy$$

es integrable. Entonces, $F \in L^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M\right)$. Análogamente, si tenemos que la función $F_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, dada por $F_y(x) := F(x,y)$ es integrable para casi todo $y \in \mathbb{R}^M$, y que la función de $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$ dada por

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} F_y(x)\, dx$$

es integrable. Entonces, $F \in L^1\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M\right)$.

Proof. Ver [**?**, Teorema 7.3.4]. ■

Theorem 20 (de Fubini) *Si una función $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $F_x : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ dada por $F_x(y) := F(x,y)$ es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$, y la función de $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}$ dada por*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} F_x(y)\, dy$$

es integrable. Análogamente, la función $F_y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $F_y(x) := F(x,y)$ es integrable para casi todo $y \in \mathbb{R}^M$, y la función de $\mathbb{R}^M$ a $\mathbb{R}$ dada por

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} F_y(x)\, dx$$

es integrable. Además, se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} F_x(y)\, dy \right) dx = \int \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} F = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} F_y(x)\, dx \right) dy.$$

Proof. Ver [?, Teorema 10.10]. ■

Definition 21 *Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua, definimos su soporte como*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega.$$

Denotamos por $C_c(\Omega)$ a las funciones continuas de Ω en $\mathbb{R}$ con soporte compacto, el cual es un espacio vectorial.

Theorem 22 *El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, si $1 \leq p < \infty$.*

Proof. Ver [?, Teorema 2.13]. ■

Definition 23 *Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ con derivadas continuas de todos los órdenes en Ω, y cuyo soporte es un subconjunto compacto de Ω.*

Corollary 24 *El espacio $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, si $1 \leq p < \infty$.*

Proof. Esto se da ya que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $C_c(\Omega)$. Ver [?, 2.19]. ■

Lemma 25 (Desigualdad de interpolación) *Dada $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 \leq p \leq r \leq \infty$, entonces $f \in L^q(\Omega)$ para todo $p \leq q \leq r$ y se tiene*

$$|u|_q \leq |u|_p^\theta |u|_r^{1-\theta},$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$.

Proof. Sea $\alpha = \theta q$, $\beta = (1-\theta)q$. Aplicamos la desigualdad de Hölder para obtener:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^q &= \int_\Omega |u|^\alpha |u|^\beta \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega |u|^{\alpha z}\right)^{1/z} \left(\int_\Omega |u|^{\beta y}\right)^{1/y},\end{aligned}$$

donde $z = \frac{p}{\theta q}$ y $y = \frac{r}{(1-\theta)q}$. Entonces, elevando ambos lados de la desigualdad a $(1/q)$, obtenemos

$$|u|_q \leq |u|_p^\theta |u|_r^{1-\theta}.$$

■

1.3. Regularización

En muchas aplicaciones es importante poder aproximar elementos de nuestro espacio por elementos de una naturaleza más manejable, usualmente pertenecientes a un subespacio de nuestro espacio original.

En la Definición 26 se habla del soporte de una función continua. Sin embargo, esta definición no es adecuada para funciones medibles en general. Un ejemplo puede ser dado por la función característica $1_\mathbb{Q}$ de los racionales en $\mathbb{R}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto.

Definition 26 *El soporte de una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se define como*

$$\operatorname{supp}(u) := \Omega \backslash U,$$

donde U es el máximo conjunto abierto de Ω en el cual $u(x) = 0$ para casi tod punto en U.

De esta forma, $supp(u)$ es siempre cerrado relativo a Ω.

Remark 27 *Observamos que, si* $\operatorname{supp}(u)$ *es compacto, entonces es cerrado en $\mathbb{R}^N$ y, como Ω es abierto y* $\operatorname{supp}(u) \subset \Omega$*, se tiene que*

$$dist\left(\operatorname{supp}(u), \mathbb{R}^N \backslash \Omega\right) > 0.$$

Para estudiar el espacio de Sobolev, será necesario construir una forma de aproximar sus funciones por funciones suaves. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ con las propiedades

$$\eta_\varepsilon \geq 0 \quad , \quad supp\left(\eta_\varepsilon\right) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq \varepsilon\right\} \quad , \quad \int \eta_\varepsilon = 1.$$

Tales funciones son llamadas ε-regularizadoras, y a continuación expondremos una posible construcción de dichas funciones.

Definition 28 *Definimos $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por*

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & si \ |x| < 1, \\ 0 & si \ |x| \geq 1, \end{cases}$$

con la constante C seleccionada de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Llamamos a η la función regularizadora estándar. Las funciones η_ε están en $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon dx = 1 \quad , \quad \operatorname{supp}\left(\eta_\varepsilon\right) = \overline{B_\varepsilon(0)},$$

donde $B_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < \varepsilon\}$.

Definition 29 *Si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es localmente integrable, definimos su $\varepsilon-$regularización como*

$$u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u,$$

donde $*$ es el operador de convolución, es decir,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) u(x-y) dy \ \in \mathbb{R}.$$

Theorem 30 (Propiedades de las funciones regularizadoras) *Para toda u en* $L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *se cumple lo siguiente:*
i) Para cada $\varepsilon > 0$, $\operatorname{supp}(u_\varepsilon) \subset \operatorname{supp}(u) + \overline{B_\varepsilon(0)}$.
ii) Para toda $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *y*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\varepsilon * u) = \left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}\right) * u.$$

iii) Si u es continua, entonces u_ε *converge uniformemente a u cuando* $\varepsilon \to 0$ *en cada subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^N$.
iv) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, *entonces* $u_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $|u_\varepsilon|_p \le |u|_p$, *y*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon - u|_p = 0.$$

Proof. *i)* Sea $x \in U := \mathbb{R}^N \backslash \left(supp\,(u) + \overline{B_\varepsilon(0)}\right)$. Entonces $x - y \in \mathbb{R}^N \backslash supp(u)$ $\forall y \in \overline{B_\varepsilon(0)}$, es decir, $u(x-y) = 0$ $\forall y \in \overline{B_\varepsilon(0)}$. Por tanto,

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\, u(x-y)\, dy = 0 \qquad \forall x \in U.$$

Como U es abierto, concluimos que $supp(u_\varepsilon) \subset supp(u) + \overline{B_\varepsilon(0)}$.

Para demostrar *ii*), consideramos $e_1, ..., e_N$ la base canónica de $\mathbb{R}^N$. Fijamos $i \in \{1, ..., N\}$, x en $\mathbb{R}^N$ y $h \in \mathbb{R}$. Sea $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{u_\varepsilon(x + he_i) - u_\varepsilon(x)}{h} - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\, u(y)\, dy \\ = & \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} - \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\right) u(y)\, dy. \end{aligned}$$

El teorema de valor medio para la derivada nos garantiza que existe $s \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x + she_i - y).$$

La continuidad de $\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}$ y el que tenga soporte compacto en $\mathbb{R}^N$ implican que $\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}$ es uniformemente continua. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que, si $|sh| < \delta$,

$$\left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x + she_i - y) - \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) \right| \le \gamma \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Utilizando esta desigualdad, obtenemos que, si $|h| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x + he_i - y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} - \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_{i\,\iota}} \eta_\varepsilon(x-y) \right) u(y)\, dy \right| \\ \le & \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x + she_i - y) - \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) \right| |u(y)|\, dy \le \gamma\, |u|_1 . \end{aligned}$$

Lo cual nos dice que u_ε es parcialmente diferenciable en x y que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\, u(y)\, dy = \left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * u \right)(x).$$

Ahora, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * u$, $\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, y $supp\left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}\right) = \overline{B_\varepsilon(0)}$. Entonces, podemos aplicar el mismo razonamiento para ver que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^N$, y por inducción, se sigue que $u_\varepsilon \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

En el caso de *iii*), observamos que, si u es continua, y $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, entonces u es uniformemente continua en K, y, por tanto, dada $\delta > 0$ podemos elegir $\delta_0 > 0$ tal que

$$|u(x-y) - u(x)| < \delta \qquad \forall x \in K, \forall y \in B_{\delta_0}(0).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - u(x) &= \int (u(x-y) - u(x))\, \eta_\varepsilon(y)\, dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} (u(x-y) - u(x))\, \eta_\varepsilon(y)\, dy. \end{aligned}$$

Se sigue que para toda $\varepsilon < \delta_0$ y $x \in K$ que

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(0)} (u(x-y) - u(x))\, \eta_\varepsilon(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |u(x-y) - u(x)|\, |\eta_\varepsilon(y)|\, dy \\ &\leq \delta \int_{B_\varepsilon(0)} |\eta_\varepsilon(y)|\, dy = \delta. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $|u_\varepsilon - u|_\infty \leq \delta$, si $\varepsilon < \delta_0$ y $x \in K$, de donde se sigue que

$$u_\varepsilon \to u \text{ uniformemente en subconjuntos compactos de } \mathbb{R}^N.$$

Para la demostración de *iv*), consideramos primero el caso $p = 1$. Para cada $y \in \mathbb{R}^N$ la función $F(x,y) := |\eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)|$ es integrable respecto a x, y la función

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} F(x,y)\, dx = |u(y)|$$

es integrable en $\mathbb{R}^N$. Por el teorema de Tonelli (Teorema 19) y el de Fubini (Teorema 20), se tiene que

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon|_1 &= \int \left| \int \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy \right| dx \\ &\leq \int \int |\eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)|\, dy dx \\ &= \int \int |\eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)|\, dx dy \\ &= |u|_1, \end{aligned}$$

y, como $u \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, concluimos que $u_\varepsilon \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Consideramos ahora el caso $p > 1$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la desigualdad de Hölder nos da:

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(\eta_\varepsilon(x-y)\right)^{1/q} \left(\eta_\varepsilon(x-y)\right)^{1/p} u(y)\, dy \right| \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, dy \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}^N} |\eta_\varepsilon(x-y)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_\varepsilon| = 1$, ya que solamente estamos trasladando la función. Elevando ambos lados de la desigualdad a la p e integrando, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^p\, dx &\le \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\, |u(y)|^p\, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(y)|^p\, dy. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$|u_\varepsilon|_p \le |u|_p < \infty,$$

por pertenecer u a $L^p\left(\mathbb{R}^N\right)$. Ahora, sea $\delta > 0$. Por el Teorema 22 existe $\nu \in C_c\left(\mathbb{R}^N\right)$ tal que

$$|u - \nu|_p < \delta/3.$$

Ya que ν tiene soporte compacto, se sigue del inciso $iii)$ que $|\nu - \nu_\varepsilon|_p < \delta/3$ para ε suficientemente pequeña. Ahora,

$$|u_\varepsilon - \nu_\varepsilon|_p \le |u - \nu|_p < \delta/3$$

de donde podemos concluir que

$$|u - u_\varepsilon|_p \le |u - \nu|_p + |\nu - \nu_\varepsilon|_p + |\nu_\varepsilon - u_\varepsilon|_p < \delta$$

es decir, que $u \to u_\varepsilon$ en $L^p(\mathbb{R})$ cuando $\varepsilon \to 0$. ■

Lemma 31 *Sea Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$. Para toda $u \in C_c^\infty(\Omega)$ y toda $\varepsilon > 0$ se cumple que*

$$|u_\varepsilon - u|_1 \le \varepsilon\, |\Omega|^{1/2}\, |\nabla u|_2\,,$$

donde $|\nabla u|_2 := \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_2^2 \right)^{1/2}$.

Proof. Fijemos $x, y \in \mathbb{R}^N$ y definimos

$$v(t) := u(x - ty)\,, \qquad t \in [0,1]\,.$$

Entonces,

$$v'(t) = -y \cdot \nabla u(x - ty)$$

y, por el teorema fundamental del Cálculo,

$$u(x-y) - u(x) = \int_0^1 -y \cdot \nabla u(x - ty)\, dt.$$

Tomando el valor absoluto de esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x-y) - u(x)| &\leq \int_0^1 |y \cdot \nabla u(x-ty)|\, dt \\ &\leq |y| \int_0^1 |\nabla u(x-ty)|\, dt. \end{aligned}$$

Utilizando esta desigualdad y el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon - u|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\,(u(x-y) - u(x))\, dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\, |(u(x-y) - u(x))|\, dydx \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_{\mathbb{R}^N} |(u(x-y) - u(x))|\, dxdy \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |y|\, \eta_\varepsilon(y) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x-ty)|\, dxdtdy \\ &\leq \varepsilon \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \int_\Omega |\nabla u|\, dxdy \\ &\leq \varepsilon \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)\, |\Omega|^{1/2}\, |\nabla u|_2\, dy \\ &= \varepsilon\, |\Omega|^{1/2}\, |\nabla u|_2\,. \end{aligned}$$

■

El espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

2.1. Derivadas débiles

La definición de derivada débil fue introducida por S.L. Sobolev en su trabajo temprano en ecuaciones diferenciales parciales, a finales de la década de los treintas. Su enfoque requería la extención del conjunto de funciones diferenciables, es decir, una extensión del dominio de los operadores diferenciales a funciones cuyas derivadas no eran necesariamente continuas. El usar derivadas débiles le permitió sobrepasar el problema de continuidad y discontinuidad con respecto a la diferenciación, lo cual abrió nuevas perspectivas al estudio de ecuaciones diferenciales.

La definición de derivada débil está basada en la fórmula de integración por partes. Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$. Supongamos que nos es dada una función $u \in C^1(\Omega)$. Entonces, si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, vemos que por la fórmula de integración por partes,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx, \qquad \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Notamos que las funciones $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se anulan cerca de $\partial\Omega$, ya que tienen soporte compacto en Ω. Sigue preguntarnos si podemos debilitar las hipótesis sobre la función u. Para que el lado izquierdo de la igualdad tenga sentido, debemos pedir que u sea localmente sumable, es decir, que $u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Ahora, si u no pertenece a $C^1(\Omega)$, la expresión $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ no tiene sentido. Así que nos preguntaremos sobre la existencia de funciones $v_i \in L_{loc}^1(\Omega)$ que sigan cumpliendo esta igualdad para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Definition 1 *Decimos que $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ es débilmente diferenciable si existen $v_1, ..., v_N \in L_{loc}^1(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_\Omega v_j \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Proposition 2 *La función $v_j \in L_{loc}^1(\Omega)$ que satisface 1 es única.*

Proof. Supongamos que, para alguna $j_0 \in \{1, ..., N\}$, existen $v_{j_0}, w_{j_0} \in L_{loc}^1(\Omega)$ tales que satisfacen

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_0}} = -\int_\Omega v_{j_0} \varphi = -\int_\Omega w_{j_0} \varphi,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\int_\Omega (v_{j_0} - w_{j_0})\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

de donde concluimos que $v_{j_0} = w_{j_0}$, ver [**?**, 1.7.1] es decir, que las funciones v_{j_0} son únicas. ■

Dada la unicidad de las funciones v_j, las denotarememos

$$D_j u := v_j, \quad \nabla u := (D_1 u, ..., D_N u).$$

$D_j u$ se llama la j-ésima derivada débil de u.

Example 3 *Existen funciones débilmente derivables que no son derivables en el sentido usual.*

Proof. Sea $\Omega := (-1, 1)$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u(x) := |x|$. Sabemos que esta función no es derivable en $x = 0$ en el sentido usual. Claramente, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Veremos que u es débilmente diferenciable. Como derivada débil de u proponemos la función

$$v(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0, 1) \\ -1 \text{ si } x \in (-1, 0) \end{cases},$$

Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .Por la Observacion **??**, $\varphi(1) = \varphi(-1) = 0$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x) &= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi'(x) + \int_{0}^{1} u(x)\varphi'(x) \\ &= \int_{-1}^{0} (-x)\varphi'(x) + \int_{0}^{1} x\varphi'(x) \\ &= (-x\varphi(x))|_{x=-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x) + (x\varphi(x))|_{x=0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x) \\ &= -\varphi(-1) + \varphi(1) + \int_{-1}^{0} \varphi(x) - \int_{0}^{1} \varphi(x) \\ &= \int_{-1}^{0} \varphi(x) - \int_{0}^{1} \varphi(x) = -\int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x), \end{aligned}$$

lo cual demuestra que u es débilmente diferenciable, y $v = Du$. ■

Example 4 *Existen funciones que no son débilmente derivables.*

Proof. Sea $\Omega := (0, 2)$ y sea

$$u(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in (0, 1) \\ 2 \text{ si } x \in (1, 2) \end{cases}.$$

Veremos que u no es débilmente diferenciable. En efecto, supongamos que existe alguna función $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ que satisface

$$\int_0^2 u\varphi' dx = -\int_0^2 v\varphi dx \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La fórmula de integración por partes y el soporte compacto de φ nos dan

$$\begin{aligned}
-\int_0^2 v\varphi dx &= \int_0^2 u\varphi' dx = \int_0^1 x\varphi' dx + 2\int_1^2 \varphi' dx \\
&= x\varphi|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi dx + 2\left(\varphi|_{x=1}^2\right) \\
&= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi dx.
\end{aligned}$$

Si se cumple la igualdad anterior, podemos elegir una sucesión de funciones $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ que cumplan

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad , \quad \varphi_n(1) = 1 \quad \forall n \quad , \quad \varphi_n(x) \to 0 \quad \forall x \neq 1.$$

Sustituyendo en la igualdad obtenida, y haciendo $n \to \infty$, por el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, tenemos

$$1 = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \left[\int_0^2 v\varphi_n dx - \int_0^1 \varphi_n dx\right] = 0,$$

lo cual contradice la existencia de la derivada débil de u. ■

Proposition 5 *Si $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ son débilmente diferenciables y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $u+v$ y αu son débilmente diferenciables y*

$$\begin{aligned}
D_i(u+v) &= D_i u + D_i v, \\
D_i(\alpha u) &= \alpha D_i(u),
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., N$.

Proof. Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha \in \mathbb{R}$, e $i \in \{1, ..., N\}$. Tenemos que existen $D_i u, D_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (D_i u)\varphi \quad \text{y} \quad \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (D_i v)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces, la linealidad de la integral nos da:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u+v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \int_\Omega v\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\
&= -\int_\Omega (D_i u)\varphi - \int_\Omega (D_i v)\varphi \\
&= -\int_\Omega (D_i v + D_i u)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).
\end{aligned}$$

Ya que $D_i u, D_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $D_i u + D_i v \in L^1_{loc}(\Omega)$, y podemos concluir que $u+v$ es débilmente diferenciable. Además, por la unicidad de la derivada débil, concluimos que

$$D_i(u+v) = D_i v + D_i u.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \alpha \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\alpha \int_\Omega (D_i u)\, \varphi \\ &= -\int_\Omega (\alpha D_i u)\, \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\end{aligned}$$

y de nueva cuanta, el que $D_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$ implica que $\alpha D_i u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Llegamos a que αu es débilmente diferenciable, y de nueva cuenta, la unicidad de la derivada débil nos lleva a que

$$D_i(\alpha u) = \alpha D_i u.$$

■

2.2. Los espacios de Sobolev $H^1(\Omega)$ y $H^1_0(\Omega)$

Definition 6 *El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define como*

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \ u \textit{ es débilmente diferenciable y } D_j u \in L^2(\Omega) \ \textit{ para } j = 1, ..., N\}$$

con el producto escalar

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_1 \ \ : &= \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega (D_j u)(D_j v) + \int_\Omega uv \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv.\end{aligned}$$

Proposition 7 *$\langle u, v\rangle_1$ es, efectivamente, un producto escalar en $H^1(\Omega)$.*

Proof. Sean $u, v \in H^1(\Omega)$.

$$\langle u, v\rangle_1 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \int_\Omega vu = \langle v, u\rangle_1,$$

lo cual prueba la simetría. Para probar la linealidad en la primera entrada, tomamos $w \in H^1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando la Proposición 5 obtenemos

$$\begin{aligned}\langle u + w, v\rangle_1 &= \int_\Omega \nabla(u + w) \cdot \nabla v + \int_\Omega (u + w)v \\ &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \nabla w \cdot \nabla v) + \int_\Omega (uv + wv) \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v + \int_\Omega wv \\ &= \langle u, v\rangle_1 + \langle w, v\rangle_1.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u, v\rangle_1 &= \int_\Omega \nabla(\alpha u)\cdot \nabla v + \int_\Omega \alpha u v = \\
&= \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega \alpha u v \\
&= \alpha\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_\Omega uv\right) = \alpha \langle u, v\rangle_1 .
\end{aligned}
$$

La linealidad en la segunda entrada es consecuencia de la linealidad en la primera y la simetría.

Ahora,

$$\langle u, u\rangle_1 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 \geq 0,$$

ya que $|\nabla u|^2 \geq 0$ y $|u|^2 \geq 0$.

Finalmente, observamos que

$$\langle u, u\rangle_1 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^2 = 0 \iff \int_\Omega |\nabla u|^2 = 0 \text{ y } \int_\Omega |u|^2 = 0 \iff u = 0$$

ya que $\int_\Omega |u|^2 = 0 \iff |u|_2^2 = 0$, pues $|\cdot|_2$ es una norma en $L^2(\Omega)$. ■

Notation 8 *A la norma inducida por el producto escalar mencionado en la proposición anterior la denotaremos por*

$$\|\cdot\|_1 := (\langle\cdot,\cdot\rangle_1)^{1/2}.$$

Lemma 9 *Si* (u_n) *es una sucesión de Cauchy en* $H^1(\Omega)$, *entonces* (u_n) *y* $(D_i u_n)$ *son sucesiones de Cauchy en* $L^2(\Omega)$, *para toda* $i \in \{1, ..., N\}$.

Proof. Sea $i \in \{1, ..., N\}$ y (u_n) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, es decir, dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_m - u_n\|_1 = \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 + \int_\Omega |u_n - u_m|^2 < \varepsilon \qquad \forall n, m > N.$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^2 < \varepsilon \qquad \forall n, m > N$$

y

$$\int_\Omega |u_n - u_m|^2 < \varepsilon \qquad \forall n, m > N.$$

Además, tenemos que

$$\int_\Omega |D_i u_n - D_i u_m|^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u_m|^2,$$

de donde concluimos que (u_n) *y* $(D_i u_n)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$. ■

Theorem 10 *$H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Proof. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, entonces (u_n) y $(D_i u_n)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$, y como éste un espacio de Hilbert, existen $u, v_i \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_2 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} |D_i u_n - v_i|_2 = 0 \qquad \forall i = 1, ..., N.$$

Ahora, queremos ver que $u \in H^1(\Omega)$. Para ello, basta probar que $v_i = D_i u$, es decir, que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como $u_n \to u$ y $D_i u_n \to v_i$ en $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (D_i u_n)\varphi = -\int_\Omega v_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La primera y la última identidad son consecuencia de la Proposición 2.4.

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_1 = \lim_{n\to\infty} \left(|u_n - u|_2 + \sum_{i=1}^N |D_i u_n - v_i|_2 \right) = 0$$

es decir, $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$. Así, conlcuímos que $H^1(\Omega)$ es completo. ∎

Definition 11 *El espacio $H_0^1(\Omega)$ es la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_1$.*

Al definir de esta manera al espacio $H_0^1(\Omega)$, tenemos que, por ser un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert, éste también será un espacio de Hilbert. Además, $u \in H_0^1(\Omega)$ si y sólo si existe $(u_m) \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $H^1(\Omega)$.

2.3. Desigualdades de Sobolev.

Las desigualdades de Sobolev dan información sobre cómo acotar uniformemente la norma en $L^q(\mathbb{R}^N)$ de una función en términos de la norma en $L^p(\mathbb{R}^N)$ de su gradiente. Observemos primero que q no puede ser arbitraria. En efecto, supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi|_q \leq C |\nabla \varphi|_p \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

donde

$$|\nabla \varphi|_p = \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|_p^p \right)^{1/p}.$$

Entonces, al fijar una función $f \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, $N > p$, y reemplazando $x \mapsto f(x)$ por $x \mapsto f(\lambda x) =: f_\lambda(x)$, con $\lambda > 0$, tenemos

$$|f_\lambda|_q = \lambda^{-N/q} |f|_q \leq C\lambda^{1-N/p} |\nabla f|_p = C |\nabla f_\lambda|_p \qquad \forall \lambda > 0.$$

Al hacer a λ tender a cero o a infinito, observamos que la desigualdad de arriba sólo puede ser satisfecha si

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \text{ es decir, } q = \frac{Np}{N-p} \text{ y } p < N.$$

Tomando esto en cuenta, definimos

$$p^* := \frac{Np}{N-p}.$$

De aquí en adelante, usaremos $N > 2$.

Para la demostración del siguiente teorema utilizaremos la desigualdad de Hölder generalizada.

Theorem 12 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Si $N > 2$, existe una constante C que depende únicamente de N, tal que*

$$|u|_{2^*} \leq C |\nabla u|_2 \quad \forall u \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Proof. Tenemos que, para $1 \leq i \leq N$,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., y_i, ..., x_n) dy_i,$$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, ..., y_i, ..., x_n)| \, dy_i,$$

donde y_i ocupa la $i-$ésima coordenada del vector en el integrando. Entonces,

$$|u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, ..., y_i, ...x_N)| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Integrando esta desigualdad con respecto a la primera variable, x_1, y aplicando la desigualdad de Hölder generalizada, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{N}{N-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dy_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \cdot \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \, dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Ahora, integramos con respecto a x_2 :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx_1dx_2\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{N}I_i^{\frac{1}{N-1}}dx_2,$$

con

$$I_1:=\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_1,\qquad I_i:=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1dy_i\quad (i=3,...,N)\,.$$

Aplicando una vez más la desigualdad de Hölder generalizada, encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{N}{N-1}}\,dx_1dx_2 \quad &\leq\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &\quad\prod_{i=3}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{N-1}}.\end{aligned}$$

Continuando este proceso, es decir, integrando sucesivamente con respecto a cada variable, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u\,(x)|^{\frac{N}{N-1}}\,dx \quad &\leq\quad \left(\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1...dy_i...dx_N\right)^{\frac{1}{N-1}}\\ &=\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|\,dx\right)^{\frac{N}{N-1}}.\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando $|u|$ por $|u|^{\gamma}$, y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\gamma\frac{N}{N-1}}\,dx\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad &\leq\quad \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(|u|^{\gamma}\right)|\,dx\right)\\ &=\quad \gamma\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{\gamma-1}|\nabla u|\,dx\\ &\leq\quad \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2(\gamma-1)}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Elegimos γ tal que $\frac{\gamma N}{N-1}=2\,(\gamma-1)$, esto es, $\gamma=\frac{2(N-1)}{N-2}$, en cuyo caso, $\frac{\gamma N}{N-1}=2(\gamma-1)=\frac{2N}{N-2}=2^*$. Entonces, $\frac{N-1}{N}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2^*}$ y, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,dx\right)^{1/2^*}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\qquad\forall u\in C_c^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

con $C=\gamma=\frac{2(N-1)}{N-2}$. ■

Corollary 13 *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Entonces existe $C > 0$, que depende únicamente de N, tal que*

$$|u|_{2^*} \leq C\,|\nabla u|_2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, y sea (u_n) una sucesión en $C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que converge a u en $H_0^1(\Omega)$. Esto nos dice que $|u_n - u|_2 \to 0$ y que $|\nabla u_m - \nabla u|_2 \to 0$. Entonces, aplicando el Teorema 12, tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$|u_n - u_m|_{2^*} \leq C\,|\nabla u_n - \nabla u_m|_2 \qquad \forall m, n.$$

Por tanto, (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^{2^*}(\Omega)$ que converge a un $v \in L^{2^*}(\Omega)$, porque $L^{2^*}(\Omega)$ es completo. Como $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, se tiene que $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$. Entonces, existe una subsucesión de (u_n) que converge a u en casi todo punto de Ω, ver por ejemplo, [**?**, Teorema IV.9]. Análogamente, como $u_n \to u$ en $L^{2^*}(\Omega)$, una subsucesión de (u_n) converge a v en casi todo punto de Ω. Se conlcuye que $u(x) = v(x)$ para casi todo punto de Ω.

Usando el Teorema 12 de nueva cuenta, y haciendo $n \to \infty$, tenemos

$$|u|_{2^*} = \lim_{n\to\infty} |u_n|_{2^*} \leq C \lim_{n\to\infty} |\nabla u_n|_2 = C\,|\nabla u|_2,$$

con $C = \frac{2(N-1)}{N-2}$. ■

Theorem 14 (Desigualdad de Poincaré) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado, con $N \geq 3$, y $q \in [1, 2^*]$, entonces existe $C > 0$, que depende de N, de Ω y de q, tal que*

$$|u|_q^2 = \left(\int_\Omega u^q\right)^{2/q} \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Proof. Aplicando el teorema anterior, tenemos

$$|u|_{2^*} \leq C_2\,|\nabla u|_2,$$

con C_2 una constante que depende únicamente de N. Además, por ser Ω acotado, y que $q \leq 2^{*,}$ concluiremos que

$$|u|_q \leq C_1\,|u|_{2^*} \qquad \forall u \in L^{2^*}(\Omega),$$

C_1 una constante que depende de Ω y de q. En efecto, dada $u \in L^{2^*}(\Omega)$, tenemos que $u^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\Omega)$, y por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\int_\Omega |u|^q = \int_\Omega 1 \cdot |u|^q \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{q}{2^*}}, \qquad \text{con } p = \frac{2^*}{2^* - q} \geq 1.$$

Elevando ambos lados de la desigualdad a la $1/q$ obtenemos

$$\left(\int_\Omega |u|^q\right)^{1/q} \leq C_1 \left(\int_\Omega |u|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$

Aplicando este resultado, y por transitividad, tenemos

$$|u|_q \leq C_1\,|u|_{2^*} \leq C\,|\nabla u|_2,$$

con $C = C_1 C_2$. ■

2.4. Teorema de Rellich-Kondrakov.

Recordaremos la definición de cierto tipo de operadores que nos serán útiles para desarrollar el problema más adelante.

Definition 15 *Sean X, Y dos espacios vectoriales normados. Decimos que un operador lineal $T : X \to Y$ es acotado si existe una constante $M > 0$ tal que, para toda x en X,*

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X .$$

Recordemos que, para los operadores lineales, la condición de ser acotado es equivalente a la de ser continuo.

Definition 16 *Sean X, Y dos espacios vectoriales normados. Decimos que un operador lineal $T : X \to Y$ es compacto si, para todo conjunto acotado B de X, tenemos que $T(B)$ es relativamente compacto en $\dot{Y}$. Una condición equivalente es que para toda sucesión acotada (x_n) en X, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que la sucesión $(T(x_{n_k}))$ converge en Y.*

Example 17 *Si X o Y es de dimensión finita, todo mapeo lineal continuo es compacto.*

Proof. Sea B un subconjunto acotado de X, y $T : X \to Y$ un mapeo lineal continuo.

Veamos primero el caso en el que X es de dimensión finita. En este caso, existe un homeomorfismo entre X y $\mathbb{R}^N$, N la dimensión de X. Si tomamos un conjunto acotado $B' \subset \mathbb{R}^N$, el conjunto homeomorfo a B, tenemos por el teorema de Borel-Lebesgue que B' es relativamente compacto en $\mathbb{R}^N$, ver [**?**, 3.17.6, 3.20,16], y como B' y B son homeomorfos, B es relativamente compacto en X. Entonces, para cualquier mapeo lineal continuo $T : X \to Y$, el que B sea relativamente compacto en X, implica que $T(B)$ es relativamente compacto en Y, ver [**?**, 3.17.9].

Suponiendo el caso en el que Y es de dimensión finita, tenemos que $T(B)$ es un subconjunto acotado de Y, por ser T continuo. Ahora, por ser Y de dimensión finita, con un argumento similar al anterior, llegamos a que $T(B)$ es relativamente compacto en Y. De cualquier forma, concluimos que T es compacto. ■

Example 18 *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, el operador identidad en X no es compacto.*

Proof. Si consideramos la bola unitaria cerrada en X, tenemos que esta es compacta si y sólo si X es de dimensión finita, ver, por ejemplo, [**?**, Teorema VI.5]. ■

Recordamos que, en un espacio normado de dimensión finita, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Sin embargo, en espacios de dimensión infinita, esta caracterización deja de ser cierta en general.

Sea X un espacio métrico compacto y sea $C^0(X)$ el espacio de las funciones continuas $u : X \to \mathbb{R}$ con la norma

$$|u|_\infty := \max_{x \in X} |u(x)|.$$

Definition 19 *Un subconjunto S de $C^0(X)$ es uniformemente acotado si existe $C > 0$ tal que*

$$|u|_\infty \leq C \qquad \forall u \in S.$$

S es equicontinuo si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad si \quad dist(x, y) < \delta \qquad \forall u \in S,$$

donde dist es la métrica de X.

S es relativamente compacto en X si $\overline{S}$, la cerradura de S en X, es compacta.

Theorem 20 (de Arzelà-Ascoli) *Si X es un espacio métrico compacto y $S \subset C^0(X)$ es uniformemente acotado y equicontinuo, entonces S es relativamente compacto en $C^0(X)$.*

Proof. Ver, por ejemplo, [**?**, Theorem A5]. ■

Definition 21 *Un conjunto S en un espacio métrico X es totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos en S tales que la unión de las bolas abiertas en X de radio ε con centro en estos puntos contiene a S.*

Proposition 22 *Si X es un espacio métrico completo, un subconjunto S de X es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Proof. Ver, por ejemplo, [**?**, 9.6*.25]. ■

También recordamos que el espacio $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ es completo con la norma usual.

Como consecuencia de las desigualdades de la sección anterior, tenemos que, si Ω es acotado, el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ está encajado continuamente en $L^q(\Omega)$ para $q \in [1, 2^*]$. Más aún, se tiene que este encaje es compacto en $L^q(\Omega)$, si $1 \leq q < 2^*$. Es decir, la cerradura en $L^q(\Omega)$ de todo conjunto acotado en $H_0^1(\Omega)$ es un conjunto compacto en $L^q(\Omega)$. A continuación probaremos este resultado para $q = 2$.

Theorem 23 (Rellich-Kondrakov) *Si Ω abierto y acotado en $\mathbb{R}^N$, el encaje*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

es compacto.

Proof. Sea $B \subset H_0^1(\Omega)$ un conjunto acotado. Queremos ver que la cerradura $\overline{B}$ de B en $L^2(\Omega)$ es compacta en $L^2(\Omega)$. Ya que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, basta probar el resultado para subconjuntos de $C_c^\infty(\Omega)$. Supondremos que $B \subset C_c^\infty(\Omega)$. También supondremos que $\|u\|_1 \leq 1$ para toda $u \in B$. Para $\varepsilon \in (0, 1)$, sea $u_\varepsilon := \eta_\varepsilon * u$, con η_ε como en la Definición **??**. Definimos $B_\varepsilon := \{u_\varepsilon | u \in B\}$. Sea $\Omega_\varepsilon := \Omega + B_\varepsilon(0)$. Observemos que $B_\varepsilon \subset C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$

1) Veremos que el conjunto B_ε es uniformemente acotado. En efecto, por la desigualdad de Hölder, el Teorema 14 y la Definición **??** existe C que depende de Ω_ε y N tal que, para toda u_ε en B_ε y para toda x en $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |u(x-y)|\, \eta_\varepsilon(y) dy \\ &\leq |\eta_\varepsilon|_\infty |u|_1 \\ &\leq |\eta_\varepsilon|_\infty C \|u\|_1 \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^N} |\eta|_\infty , \end{aligned}$$

En consecuencia, $|u_\varepsilon|_\infty \leq \frac{C}{\varepsilon^N} |\eta|_\infty \ \forall u \in B$, de donde concluimos que B_ε es uniformemente acotado. Análogamente se tiene que

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x)| &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |u(x-y)|\, |\nabla \eta_\varepsilon(y)|\, dy \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \sup\left\{\left|\nabla \eta(y) : y \in \mathbb{R}^N\right|\right\} |u|_1 \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} \sup\left\{\left|\nabla \eta(y) : y \in \mathbb{R}^N\right|\right\} \|u\|_1 \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^{N+1}} \sup\left\{\left|\nabla \eta(y) : y \in \mathbb{R}^N\right|\right\} =: M \qquad \forall u \in B. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad implica que u_ε es Lipschitz continua. En efecto, fijando $i \in \{1, ..., N\}$, por el teorema de valor medio tenemos que, con $\xi = (1-t)\,x + ty$, para alguna $t \in [0,1]$,

$$\left|\frac{u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)}{|x-y|}\right| = |\nabla u_\varepsilon(\xi)| \leq M.$$

Por tanto,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq M|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \forall u \in B.$$

2) Veremos que B_ε es equicontinuo en $L^1(\Omega)$, Sea $\varepsilon_1 > 0$, $x \in \Omega$. Veamos que existe $\delta > 0$ tal que para toda u_ε en B_ε y para toda y en $B_\delta(x)$, tenemos

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| < \varepsilon_1.$$

Proponemos $\delta := \frac{\varepsilon_1}{M}$. Entonces, para todo u en B,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq M|x-y| < \varepsilon_1 \ \text{ si } \ |x-y| < \delta.$$

Se sigue que B_ε es un subconjunto de $C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$ uniformemente acotado y equicontinuo. Entonces, por el teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 20), tenemos que B_ε es relativamente compacto en $C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$.

3) Probaremos que existe una constante A que depende sólo de Ω y de N tal que

$$|u_\varepsilon - u|_1 \leq A\varepsilon^\theta \qquad \forall u \in B,\ \forall \varepsilon \in (0,1),$$

con $\theta := \frac{2}{N-2}$.

En efecto, por el Lema **??**,

$$|u_\varepsilon - u|_1 \leq |\Omega|^{1/2}\,\varepsilon \qquad \forall u \in B,\ \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Usando la desigualdad de interpolación y el Teorema 14, obtenemos

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon - u|_2 &\leq |u_\varepsilon - u|_1^\theta\,|u_\varepsilon - u|_{2^*}^{1-\theta} \\
&\leq |u_\varepsilon - u|_1^\theta\,(2\,|u|_{2^*})^{1-\theta} \\
&\leq C\,|u_\varepsilon - u|_1^\theta\,\|u\|_1^{1-\theta} \\
&\leq C\,|u_\varepsilon - u|_1^\theta \qquad \forall u \in B,\ \forall \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

donde C depende únicamente de N, y $\theta := \frac{2^*-2}{2(2^*-1)}$.

En consecuencia,

$$|u_\varepsilon - u|_2 \leq A\varepsilon^\theta, \qquad \forall u \in B,\ \forall \varepsilon \in (0,1),$$

con $A := C\,|\Omega|^{\frac{1}{N+2}}$.

4) Probaremos que B es totalmente acotado en $L^2(\Omega)$. Sea $\delta > 0$. Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $A\varepsilon^\theta < \frac{\delta}{2}$. Como B_ε es totalmente acotado en $C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$ existen $v_1, ..., v_k$ en $C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$ tales que B_ε está contenido en la unión de las bolas abiertas en $C^0\left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right)$ de radio $\frac{\delta}{2|\Omega_\varepsilon|^{1/2}}$ y centro v_i, $i = 1, ..., k$. Sea $u_i := v_i|_\Omega$. Como

$$|u_i|_2^2 = \int_\Omega u_i^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} v_i^2 \leq |\Omega_\varepsilon|\,|v_i|_\infty^2 < \infty,$$

se sigue que $u_i \in L^2(\Omega)$. Para cada $u \in B$ existe v_i tal que

$$|u_\varepsilon - v_i|_\infty < \frac{\delta}{2\,|\Omega_\varepsilon|^{1/2}}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
|u - u_i|_2 &\leq |u - u_\varepsilon|_2 + |u_\varepsilon - u_i|_2 \\
&\leq A\varepsilon^\theta + |\Omega_\varepsilon|^{1/2}\,|u_\varepsilon - u_\iota|_\infty \\
&< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
\end{aligned}$$

de donde concluimos que B es totalmente acotado en $L^2(\Omega)$. Usando que $L^2(\Omega)$ es un espacio métrico completo, tenemos que ésto es equivalente a que B sea relativamente compacto en $L^2(\Omega)$. ■

Nos preguntamos si podemos debilitar las hipótesis del Teorema de Rellich-Kondrakov y aún así obtener el mismo resultado. ¿Puede el teorema ser extendido a un dominio Ω no acotado? ¿Puede $H_0^1(\Omega)$ ser encajado compactamente en $L^{2^*}(\Omega)$? Ambos casos vienen tratados en [**?**].

El teorema de Rellich-Kondrakov no puede ser, generalmente, extendido a un conjunto no acotado.

Example 24 *El encaje* $H^1\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ *no es compacto.*

Proof. Existe una sucesión de bolas abiertas $\{B_i\}$ en $\mathbb{R}^N$ ajenas entre sí y todas con el mismo radio positivo r. Sea $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ y supongamos que $\|\varphi\|_1 > 0$, lo cual implica que $|\varphi|_2 > 0$. Sea φ_i la función trasladada de φ_1 con soporte en B_i. Claramente, $\|\varphi_i\|_1 = \|\varphi\|$ y $\|\varphi_i\|_2 = |\varphi|_2$ para toda i,de donde (φ_i) es acotada en $H_0^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Sin embargo,

$$\left|\varphi_i - \varphi_j\right|_2^2 = |\varphi_i|_2^2 + \left|\varphi_j\right|_2^2 = 2\,|\varphi|_2 > 0 \qquad \forall i \neq j$$

de donde concluimos que (φ_i) no puede tener una subsucesión convergente en $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$. ■

Aunque damos la demostración del encaje compacto de $H_0^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$, mencionamos que este encaje es compacto para toda $1 \leq q < 2^*$. Ahora, veremos que $H_0^1(\Omega)$ no puede ser encajado compactamente en $L^{2^*}(\Omega)$.

Example 25 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto acotado, con* $N > 2$. *El encaje* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ *no es compacto.*

Proof. Sea (a_i) una sucesión de puntos distintos de Ω, (r_i) una sucesión de números tales que $0 < r_i \leq 1$ y $B_{r_i}(a_i) \subset \Omega$ son ajenas todas entre sí. Sea $\varphi \in C_c^\infty(B_1(0))$ que satisfaga $supp(\varphi) \subset B_1(0)$, $\varphi(x) \geq 0$.

Para cada i, definimos

$$\varphi_i(x) := r_i^{\frac{2-N}{2}} \varphi\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right).$$

Entonces, $\varphi_i \in C_c^\infty(B_{r_i}(a_i))$, y

$$\nabla\varphi_i(x) = \frac{r_i^{\frac{2-N}{2}}}{r_i} \nabla\varphi\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right) = r_i^{\frac{-N}{2}} \nabla\varphi\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right).$$

Usando el teorema de cambio de variable se obtiene

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_i|^2 = \int_{B_{r_i}(a_i)} \left|\nabla\varphi\left(\frac{x - a_i}{r_i}\right)\right|^2 r_i^{-N} dx = \int_{B_1(0)} |\nabla\varphi(y)|^2\, dy,$$

es decir, $|\nabla\varphi_i|_2 = |\nabla\varphi|_2$. Ésto y la desigualdad de Poincaré nos dicen que (φ_i) es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Ahora, tenemos que $\left(\frac{2-N}{2}\right)2^* =$

$\left(\frac{2-N}{2}\right)\left(\frac{2N}{N-2}\right)=-N$. Usando el teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi_i|_{2^*}^{2^*} &= \int_{B_{r_i}(a_i)} \left| r_i^{\frac{2-N}{2}} \varphi\left(\frac{x-a_i}{r_i}\right)\right|^{2^*} dx \\
&= \int_{B_{r_i}(a_i)} r_i^{-N} \left|\varphi\left(\frac{x-a_i}{r_i}\right)\right|^{2^*} dx \\
&= \int_{B_1(0)} |\varphi(y)|^{2^*} dy = |\varphi|_{2^*}^{2^*}
\end{aligned}$$

El que las funciones φ_i tengan soportes ajenos nos da

$$\left|\varphi_i - \varphi_j\right|_{2^*}^{2^*} = |\varphi_i|_{2^*}^{2^*} + \left|\varphi_j\right|_{2^*}^{2^*} = 2\,|\varphi|_{2^*}^{2^*} \qquad \forall i \neq j,$$

así que ninguna subsucesión de (φ_i) puede converger en $L^{2^*}(\Omega)$. ■

Capítulo 3

Existencia y unicidad de soluciones para el problema de Poisson

3.1. El problema de Poisson.

Consideramos el problema de Poisson

$$(\wp_\lambda) \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases},$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto y acotado, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$ y

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

es el operador de Laplace.

Definición 3.1 *Una solución clásica de este problema es una función $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ que verifica $(\wp_\lambda)$.*

Si u es una solución clásica de $(\wp_\lambda)$, al multiplicar la primera igualdad por una función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtenemos

$$-(\Delta u)\varphi + (\lambda u)\varphi = f\varphi.$$

Integrando sobre Ω y aplicando la fórmula de integración por partes, tomando en cuenta que φ se anula en $\partial\Omega$, tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Nos damos cuenta que esta identidad se sigue satisfaciendo si φ está en $H_0^1(\Omega)$, en vez de en $C_c^\infty(\Omega)$, por densidad.

Definición 3.2 *Una solución débil de* $(\wp_\lambda)$ *es una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que satisface*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Una de las primeras ventajas que notamos al plantear el problema débilmente, es que tenemos solamente derivadas de primer orden de u, mientras que al buscar soluciones clásicas nos preguntamos por sus derivadas de segundo orden. Otra ventaja que encontramos es que no pedimos que se satisfaga una identidad en todo punto, sino, más generalmente, al integrar sobre una región. Notamos que toda solución clásica es una solución débil. Para demostrar esta afirmación, usaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.3 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y acotado, y* u *una función que cumpla*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right), \ u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Entonces $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Una demostración de este teorema se encuentra en [**?**, Teorema IX.17]. ■

Proposición 3.4 *Toda solución clásica de* $(\wp_\lambda)$ *es solución débil.*

Demostración: Sea $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ una solución clásica de $(\wp_\lambda)$. Entonces, $u \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$.

También se cumple que $u = 0$ en la frontera de Ω. Por el teorema anterior, tenemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ .Ahora, si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, como vimos hace un momento por la fórmula de integración por partes, se satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, y, en consecuencia, para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ por densidad. ■

El buscar soluciones débiles, en lugar de soluciones clásicas, nos da ciertas ventajas. Al buscar soluciones débiles para el problema de Poisson, el espacio en el que trabajaremos será $H_0^1(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert, mientras que $C^2(\Omega)$ no lo es. Ésto nos permite aplicar resultados de Análisis Funcional, concretamente, el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz y la Alternativa de Fredholm, para garantizar la existencia de soluciones débiles. Una vez demostrada la existencia de una solución débil, se aplican resultados de regularidad para obtener una solución clásica. Dichos resultados nos dicen qué tan diferenciable es la solución, dependiendo de la diferenciabilidad de f y la suavidad del dominio. No abordaremos este asunto en este trabajo. Los resultados de regularidad para este problema se encuentran, por ejemplo, en [**?**], [**?**], [**?**].

Ahora, desarrollaremos la teoría y los resultados de Análisis Funcional que necesitaremos para probar el Teorema 0.1. Para la demostración de éste, consideraremos dos casos: $\lambda \geq 0$ y $\lambda < 0$.

3.2. El Teorema de Representación de Fréchet-Riesz

Teorema 3.5 (de la proyección ortogonal) *Sea V un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H. Para cada $u \in H$ existe un único $v \in V$ tal que*

$$\|u - v\| = \inf_{w \in V} \|u - w\| .$$

Demostración: Primero veamos el caso en el que $u \in V$. Entonces,

$$\inf_{w \in V} \|u - w\| = \|u - u\| = 0,$$

donde $v = u$, que está en V, es el único elemento en el cual se hace cero la expresión, por ser $\|\cdot\|$ una norma.

Ahora, trataremos el caso en el que V está contenido propiamente en H. Sea $u \in H \setminus V$. Ya que V es cerrado tenemos

$$d := \inf_{w \in V} \|u - w\| > 0.$$

Sea (v_n) una sucesión en V tal que $\lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = d$. Veamos que (v_n) es de Cauchy. En efecto, la norma $\|\cdot\|$ de un espacio de Hilbert satisface, para cualesquiera $x, y \in H$, la igualdad del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

ver, por ejemplo, [**?**, I.5]. Aplicando esta identidad a cualesquiera dos elementos de la sucesión (v_n), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|v_m - v_n\|^2 &= \|(v_m - u) + (u - v_n)\|^2 \\
&= 2\left(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2\right) - \|2u - v_n - v_m\|^2 \\
&= 2\left(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2\right) - 4\left\|u - \frac{(v_n + v_m)}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2\right) - 4d^2.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se da ya que $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$ por ser un subespacio vectorial. Haciendo n y m tender a infinito tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n,m\to\infty} \|v_m - v_n\|^2 &\leq \lim_{n,m\to\infty} 2\left(\|u-v_n\|^2 + \|u-v_m\|^2\right) - 4d^2 \\ &= 2\left(d^2+d^2\right) - 4d^2 = 0,\end{aligned}$$

de donde concluimos que (v_n) es una sucesión de Cauchy en H. Ahora, el que H sea un espacio de Hilbert, nos garantiza la existencia de un elemento v en H tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = v$. Tenemos que V es cerrado, entonces, $v \in V$. También, por la continuidad de la norma, tenemos que

$$\|u - v\| = d.$$

Falta probar la unicidad del elemento v. Supongamos que existe un elemento v' que también minimiza la distancia entre u y V. Entonces,

$$\|v + v' - 2u\| \leq \|v - u\| + \|v' - u\| = 2d,$$

es decir,

$$\left\|\frac{v+v'}{2} - u\right\| \leq d,$$

de donde concluimos que, por ser d el ínfimo y porque $\frac{v+v'}{2} \in V$,

$$\left\|\frac{v+v'}{2} - u\right\| = d.$$

Aplicando la igualdad del paralelogramo a $v-u$ y $v'-u$, tenemos

$$\|v - v'\|^2 = 2\|v-u\|^2 + 2\|v'-u\|^2 - \|v+v'-2u\|^2 = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,$$

es decir, el elemento v es único. ■

Notación 3.6 *Si V es un subespacio vectorial cerrado de H, denotamos*

$$P_V u := v,$$

donde $v \in V$ satisface

$$\|u - v\| = \inf_{w\in V} \|u - w\|.$$

Definición 3.7 *Definimos*

$$V^{\perp} := \{u \in H : \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\},$$

el complemento ortogonal de V en H.

Obsérvese que $V^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H, aún cuando V no lo sea.

Proposición 3.8 *Si V es un subespacio vectorial cerrado de H, H un espacio de Hilbert, entonces*

$$u - P_V u \in V^{\perp} \qquad \forall u \in H.$$

Demostración: Sea $u \in H$, $v \in V$. Queremos demostrar que

$$\langle u - P_V u, v\rangle = 0.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que $P_V u - \alpha v \in V$, y por la definición de $P_V u$, tenemos

$$\begin{aligned} \|u - P_V u\|^2 &\leq \|u - P_V u - \alpha v\|^2 \\ &= \|u - P_V u\|^2 - 2\alpha \langle u - P_V u, v\rangle + \alpha^2 \|v\|^2 =: f(\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos un polinomio de segundo grado en α que alcanza un mínimo en $\alpha = 0$. Además, f tiene como dominio $\mathbb{R}$ y es derivable en todo su dominio. Entonces $f'(0) = 0$, de donde concluimos que

$$f'(0) = -2\langle u - P_V u, v\rangle = 0,$$

es decir, que $\langle u - P_V u, v\rangle = 0$. ■

Corolario 3.9 *Si V es un subespacio vectorial cerrado de H y $V \neq H$, entonces $V^{\perp} \neq \{0\}$.*

Demostración: Sea $u \in H \setminus V$. Como $u \notin V$ y $P_V u \in V$, tenemos que $u \neq P_V u$. Por el resultado anterior, $0 \neq u - P_V u \in V^{\perp}$, es decir, $V^{\perp} \neq \{0\}$. ■

Teorema 3.10 (Representación de Fréchet-Riesz) *Sea H un espacio de Hilbert, $f : H \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua. Entonces, existe un único $v \in H$ tal que*

$$f(u) = \langle v, u\rangle \qquad \forall u \in H.$$

Además,

$$\|v\| = \sup_{\|u\|=1} |f(u)| =: \|f\|.$$

Demostración: Sea $V := f^{-1}\{0\}$. V es un subespacio cerrado de H, ya que $\{0\}$ es cerrado y f es continua. Si $V = H$, tenemos que $f \equiv 0$, de donde concluimos que la condición se cumple al tomar $u = 0$.

Ahora, supongamos que $V \subsetneq H$. Entonces, tomamos $v_0 \in H \diagdown V$. Por el teorema de la proyección ortogonal, existe un único $v_1 := P_V v_0 \in V^{\perp}$.

Tomamos
$$v' := \frac{v_0 - v_1}{\|v_0 - v_1\|} \neq 0.$$
Por la Proposición 3.8, $v' \in V^{\perp}$. Además, $f(v') \neq 0$, ya que $v' \notin f^{-1}\{0\}$.

Ahora, para todo $u \in H$, se satisface $u = \lambda v' + w$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in V$, tomando
$$\lambda = \frac{f(u)}{f(v')}, \qquad w = u - \lambda v'.$$
En efecto, $w \in V$ ya que
$$f(w) = f(u - \lambda v') = f(u) - \frac{f(u)}{f(v')} f(v') = 0.$$
Resulta que, por $w \in V$ y $v' \in V^{\perp}$,
$$0 = \langle v', w \rangle = \langle v', u - \lambda v' \rangle = \langle v', u \rangle - \lambda \langle v', v' \rangle,$$
y como $\|v'\| = 1$, tenemos
$$\langle v', u \rangle = \lambda = \frac{f(u)}{f(v')},$$
de donde concluimos que, con $v := f(v') v'$,
$$\langle v, u \rangle = f(u) \qquad \forall u \in H.$$
Ahora, supongamos que existe otro elemento $\tilde{v}$ en H que satisface esta identidad. Entonces,
$$\langle v - \tilde{v}, v - \tilde{v} \rangle = \langle v, v - \tilde{v} \rangle - \langle \tilde{v}, v - \tilde{v} \rangle = f(v - \tilde{v}) - f(v - \tilde{v}) = 0,$$
es decir, el elemento v es único. Ahora, tenemos
$$\|v\| = \|f(v') v'\| = |f(v')| \leq \sup_{\|u\|=1} |f(u)| =: \|f\|.$$
Por otro lado, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da que, para todo u en H tal que $\|u\| = 1$,
$$f(u) = \langle v, u \rangle \leq \|u\| \, \|v\| = \|v\|.$$

Tomando el supremo, obtenemos que

$$\|f\| := \sup_{\|u\|=1} f(u) \leq \|v\|,$$

de donde concluimos que

$$\|f\| = \|v\|.$$

■

3.3. El caso $\lambda \geq 0$.

Si $\lambda \geq 0$, entonces probaremos que $(\wp_\lambda)$ tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$. Dados $u, v \in H_0^1(\Omega)$, denotamos

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_\lambda &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv, \\ \|u\|_\lambda &:= \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Probaremos a continuación la siguiente afirmación.

Proposición 3.11 *Para todo $\lambda \geq 0$, se tiene que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ y la norma inducida por él es equivalente a la la norma usual de $H_0^1(\Omega)$, es decir, existen $C_1, C_2 > 0$, que dependen de λ, N y Ω tales que*

$$C_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_\lambda \leq C_2 \|u\|_1 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ es un espacio de Hilbert.

Demostración: Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Para probar la simetría, basta observar que

$$\langle u, v \rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + \lambda \int_\Omega vu = \langle v, u \rangle_\lambda.$$

Ahora, para probar la linealidad en la primera entrada, tenemos que

$$\langle \alpha u, v \rangle_\lambda = \int_\Omega \nabla \alpha u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega \alpha uv = \alpha \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv \right) = \alpha \langle u, v \rangle_\lambda,$$

$$\begin{aligned}
\langle u+w,v\rangle_\lambda &= \int_\Omega \nabla(u+w)\cdot\nabla v+\lambda\int_\Omega (u+w)\,v\\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v+\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v+\lambda\int_\Omega uv+\lambda\int_\Omega wv\\
&= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v+\lambda\int_\Omega uv+\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla v+\lambda\int_\Omega wv\\
&= \langle u,v\rangle_\lambda+\langle w,v\rangle_\lambda .
\end{aligned}$$

La linealidad en la segunda entrada es entonces consecuencia de la simetría y la linealidad en la primera entrada.

Ahora, veremos que $\langle u,u\rangle_\lambda \geq 0$ para toda $u\in H_0^1(\Omega)$

$$\langle u,u\rangle_\lambda=\int_\Omega |\nabla u|^2+\lambda\int_\Omega |u|^2\geq 0,$$

ya que estamos sumando dos términos positivos. La condición $\langle u,u\rangle_\lambda = 0 \iff u=0$ es consecuencia inmediata de la Proposición **??** y las desigualdades 3.1 que probaremos a continuación. Utilizando la desigualdad de Poincaré, tenemos que existe $C>0$ tal que, para todo u en $H_0^1(\Omega)$,

$$|u|_2^2\leq C\,\|\nabla u\|_2^2 .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2+\int_\Omega |u|^2 &\leq (1+C)\int_\Omega |\nabla u|^2\\
&\leq (1+C)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2+\lambda\int_\Omega |u|^2\right),
\end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{1}{1+C}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2+\int_\Omega |u|^2\right)\leq \int_\Omega |\nabla u|^2+\lambda\int_\Omega |u|^2 .$$

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2+\lambda\int_\Omega |u|^2 &\leq (1+\lambda C)\int_\Omega |\nabla u|^2\\
&\leq (1+\lambda C)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2+\int_\Omega |u|^2\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2+\lambda\int_\Omega |u|^2\leq (1+\lambda C)\left(\int_\Omega |\nabla u|^2+\int_\Omega |u|^2\right).$$

Así,

$$C_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_\lambda \leq C_2 \|u\|_1 \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega), \ \lambda \geq 0,$$

con

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{1+C}}, \ \ C_2 = \sqrt{1+\lambda C},$$

de donde concluimos que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\lambda$ son equivalentes para toda $\lambda \geq 0$, y como además, $H_0^1(\Omega)$ es completo con la norma $\|\cdot\|_1$, se tiene que $H_0^1(\Omega)$ es completo con la norma $\|\cdot\|_\lambda$. ■

Notamos que, considerando que nuestro espacio $H_0^1(\Omega)$ es de Hilbert con el producto interior $\langle u, \varphi \rangle_\lambda$, se satisfacen las hipótesis del Teorema de Representación de Fréchet-Riesz. Ésto nos sugiere que, para garantizar la existencia y unicidad de una solución débil de nuestro problema $(\wp_\lambda)$, basta con que definamos una función lineal y continua adecuada.

Dado $f \in L^2(\Omega)$, le asignamos la función

$$L_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi.$$

Lema 3.12 *La función $L_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua, para cualquiera de las normas $\|\cdot\|_\lambda$ con $\lambda \geq 0$.*

Demostración: Para probar la linealidad de L_f, consideramos $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega), \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} L_f(\varphi+\psi) &= \int_\Omega f(\varphi+\psi) = \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega f\psi = L_f(\varphi) + L_f(\psi), \\ L_f(\alpha\varphi) &= \int_\Omega f(\alpha\varphi) = \int_\Omega \alpha(f\varphi) = \alpha \int_\Omega f\varphi = \alpha L_f(\varphi). \end{aligned}$$

Estas igualdades se dan por la linealidad de la integral. Para ver la continuidad de L_f, fijamos $\lambda \geq 0$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2(\Omega)$, y usando la Proposición 3.11, tenemos

$$|L_f u| = \int_\Omega fu = \left|\langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)}\right| \leq |f|_2 |u|_2 \leq |f|_2 \|u\|_1 \leq C_1 |f|_2 \|u\|_\lambda.$$

Como $f \in L^2(\Omega)$ es una función fija, tenemos que L_f es acotado, con cota $C = C_1 |f|_2$. Además, el que L_f sea una función lineal y acotada, es equivalente a que sea lineal y continua. ■

Teorema 3.13 *Si $\lambda \geq 0$, entonces $(\wp_\lambda)$ tiene una única solución débil para cada $f \in L^2(\Omega)$.*

Demostración: Consideramos $\lambda \geq 0$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con la norma inducida por el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$. El Lema 3.12 nos dice que L_f es una función lineal y continua. Entonces, por el teorema de Representación de Fréchet-Riesz (Teorema 3.10), existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $L_f(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle_\lambda$ para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$; es decir, que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

de donde concluimos que u es la única solución débil de $(\wp_\lambda)$. ■

3.4. La Alternativa de Fredholm

Sea H un espacio de Hilbert y sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Si $H = \mathbb{R}^N$ basta con comprobar que $NucT = \{0\}$ o que $imT = H$ para asegurar que T es biyectivo, pero ésto no es cierto en general.

Ejemplo 3.14 *Un operador lineal y acotado $T : H \to H$ tal que $NucT = \{0\}$ no es biyectivo en general.*

Demostración: Consideramos el espacio $H = l^2$, donde

$$l^2 := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\},$$

con el producto escalar

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

y la norma inducida por este producto, que denotaremos $\|\cdot\|_2$. Éste es un espacio de Hilbert. Consideramos el operador

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$

El operador S es lineal y acotado. Sean $x, y \in l^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} S(x+y) &= S(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, ...) \\ &= (0, x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, ...) \\ &= (0, x_1, x_2, x_3, ...) + (0, y_1, y_2, y_3, ...) = S(x) + S(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\alpha x) &= S(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_{3,}...) \\ &= (0, \alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ...) \\ &= \alpha (0, x_1, x_2, x_3, ...) = \alpha S(x). \end{aligned}$$

Sea $A \subset l^2$, A acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|x\|_2 < M$ para toda $x \in A$. Entonces,

$$\|S(x)\|_2 = \|(0, x_1, x_2, x_3, ...)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < M \qquad \forall x \in A.$$

de donde concluimos que S es un operador acotado. Ahora, afirmamos que $NucS = \{0\}$, ya que dado $x \in NucS$, tenemos que

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...) = (0, 0, 0, 0, ...)$$

lo cual implica que $x_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, que $x = 0$.

S no es biyectivo, ya que $imT \neq l^2$. Podemos dar la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, que está en l^2, mas no existe una sucesión tal que $S(x) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$,ya que para toda $S(x)$, el primer término va a ser el cero. ■

Ejemplo 3.15 *Un operador lineal y acotado $T : H \to H$ tal que $imT = H$ no es necesariamente biyectivo.*

Demostración: Consideramos el mismo espacio del ejemplo anterior, $H = l^2$. Consideramos el operador

$$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

El operador S es lineal y acotado. Sean $x, y \in l^2, \alpha \in \mathbb{R}$. Se cumple que

$$\begin{aligned} S(x+y) &= S(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...) \\ &= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, ...) \\ &= (x_2, x_3, x_4, ...) + (y_2, y_3, y_4, ...) = S(x) + S(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\alpha x) &= S(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ...) \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, ...) \\ &= \alpha(x_2, x_3, x_4, ...) = \alpha S(x). \end{aligned}$$

Sea $A \subset l^2$, A acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|x\|_2 < M$ para toda $x \in A$. Entonces,

$$\|S(x)\|_2 = \|(x_2, x_3, x_4, ...)\|_2 = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < M \qquad \forall x \in A,$$

de donde concluimos que S es un operador acotado. Ahora, afirmamos que $imS = l^2$, ya que dado $(x_1, x_2, x_3, ...)$ en l^2, consideramos la sucesión $(0, x_1, x_2, x_3, ...)$. Este elemento está en l^2, y además,

$$S(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...).$$

Pero S no es biyectivo. Consideremos las sucesiones $(0, x_1, x_2, x_3, ...)$ y $(1, x_1, x_2, x_3, ...)$ en l^2. Tenemos que

$$S(0, x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...) = S(1, x_1, x_2, x_3, ...),$$

entonces, S no es inyectivo. ∎

Este par de ejemplos nos ilustran que, en general, la inyectividad de un operador lineal acotado no implica su suprayectividad, ni viceversa. Sin embargo, bajo ciertas restricciones adicionales, el tener una de estas cualidades implica automáticamente la otra.

Antes de exponer la demostración de este teorema, daremos unas definiciones y mencionaremos unas proposiciones que más tarde usaremos para la demostración de éste.

Definición 3.16 *Si $T : H \to H$ es un operador lineal y acotado, su operador adjunto $T^* : H \to H$ se define mediante la condición*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \qquad \forall u, v \in H \tag{3.2}$$

Como $u \mapsto \langle Tu, v\rangle$ es lineal y continua para cada $v \in H$, el teorema de Representación de Fréchet-Riesz (Teorema 3.10) nos asegura la existencia de un único elemento T^*v tal que se da 3.2. La bilinealidad del producto interior garantiza que T^* es lineal. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que, para toda $u, v \in H$,

$$|\langle u, T^*v\rangle| = |\langle Tu, v\rangle| \leq \|Tu\| \|v\|.$$

Tomando $u = T^*v$, tenemos

$$\begin{aligned} \|T^*v\| &= \sup_{\|u\|=1} |\langle u, T^*v\rangle| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Tu, v\rangle| \\ &\leq \|v\| \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| =: \|T\| \|v\| \qquad \forall v \in H. \end{aligned}$$

En consecuencia, T^* es acotado.

Proposición 3.17 *Para T, S operadores lineales y acotados se cumple lo siguiente:*
i) $(T^*)^* = T$
ii) $(T+S)^* = T^* + S^*$
iii) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
iv) $I^* = I$, *donde I denota el operador identidad.*

Demostración: *i)* Tenemos que, para todo $u, v \in H$,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle .$$

También se satisface que

$$\langle T^* v, u \rangle = \langle v, (T^*)^* u \rangle .$$

La simetría del producto interior nos da que, para toda $u, v \in H$,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle (T^*)^* u, v \rangle ,$$

Por tanto,

$$\langle Tu - (T^*)^* u, v \rangle = 0 \qquad \forall u, v \in H.$$

Tomando $v := Tu - (T^*)^* u$ obtenemos que

$$\| Tu - (T^*)^* u \| = 0,$$

es decir, $(T^*)^* = T$.

ii) Tenemos que $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle$, $\langle Su, v \rangle = \langle u, S^* v \rangle$. La bilinealidad del producto interior nos da

$$\begin{aligned} \langle (T+S)\, u, v \rangle &= \langle Tu, v \rangle + \langle Su, v \rangle = \langle u, T^* v \rangle + \langle u, S^* v \rangle \\ &= \langle u, (T^* + S^*)\, v \rangle \qquad \forall u, v \in H, \end{aligned}$$

es decir, $(T+S)^* = T^* + S^*$.

iii) Análogamente, por la bilinealidad del producto interior, tenemos

$$\begin{aligned} \langle (\lambda T)\, u, v \rangle &= \langle \lambda\, (Tu)\, , v \rangle = \lambda \langle Tu, v \rangle \\ &= \lambda \langle u, T^* v \rangle = \langle u, \lambda T^* v \rangle \qquad \forall u, v \in H, \end{aligned}$$

es decir, $(\lambda T)^* = \lambda T^*$.

iv) Tenemos que $\langle Iu, v \rangle = \langle u, v \rangle = \langle u, Iv \rangle$ para toda $u, v \in H$, y la unicidad del operador adjunto nos permite concluir que $I^* = I$. ■

Proposición 3.18 *Si T es un operador lineal y acotado, se cumple:*
i) $NucT^* = (imT)^{\perp}$,
ii) $(NucT)^{\perp} \supset \overline{imT^*}$.

Demostración: *i)* Sea $u \in H$. $u \in NucT^* \iff T^*u = 0 \iff \langle T^*u, v\rangle = 0$ $\forall v \in H \iff \langle u, Tv\rangle = 0 \ \ \forall v \in H \iff u \in (imT)^{\perp}$.

ii) Del inciso anterior y la relación $(T^*)^* = T$ tenemos que $NucT = (imT^*)^{\perp}$. Entonces, también se cumple $(NucT)^{\perp} = (imT^*)^{\perp\perp}$. Afirmamos que $(imT^*) \subset (imT^*)^{\perp\perp}$. En efecto, sea $u \in imT^*$. Entonces,

$$\langle u, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in (imT^*)^{\perp}.$$

Así, $u \in (imT^*)^{\perp\perp}$. Ahora, $(imT^*)^{\perp\perp}$ es un subespacio cerrado de H, entonces,

$$\overline{(imT^*)} \subset \overline{(imT^*)^{\perp\perp}} = (imT^*)^{\perp\perp},$$

de donde concluimos que $\overline{imT^*} \subset (NucT)^{\perp}$. ■

Notamos que el kernel de un operador lineal y acotado siempre es un subespacio cerrado, mientras que la imagen es un subespacio no necesariamente cerrado.

Proposición 3.19 *Si K es un operador compacto, entonces K^* también lo es.*

Demostración: Sea (u_n) una sucesión acotada en H. Por el Teorema **??**, (u_n) contiene una subsucesión (u_{n_k}) tal que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ débilmente en } H.$$

Probaremos que $(K^*u_{n_k})$ contiene una subsucesión que converge a K^*u fuertemente en H. En efecto, por la Proposición 3.17 *i)*,

$$\begin{aligned} \|K^*u_{n_k} - K^*u\| &= \langle u_{n_k} - u, KK^*u_{n_k} - KK^*u\rangle \\ &\leq \|u_{n_k} - u\| \, \|KK^*u_{n_k} - KK^*u\| \\ &\leq C \, \|KK^*u_{n_k} - KK^*u\| \end{aligned}$$

pues $(u_n - u)$ es acotada. Ahora bien, como KK^* es lineal y continuo,

$$KK^*u_{n_k} \to KK^*u \text{ débilmente en } H.$$

(véase [**?**, Teorema III.9]) y, puesto que $(K^*u_{n_k})$ es acotada y K es compacto, existe una subsucesión $\left(K^*u_{n_{k_j}}\right)$ tal que

$$KK^*u_{n_{k_j}} \to v \text{ fuertemente en } H.$$

Como el límite débil es único, se tiene que $v = KK^*u$ y que

$$\left\| K^* u_{n_{k_j}} - K^* u \right\| \leq C \left\| KK^* u_{n_{k_j}} - v \right\| \to 0.$$

Es decir, $K^* u_{n_{k_j}} \to K^* u$ fuertemente en H. ■

Teorema 3.20 (Alternativa de Fredholm) *Sea H un espacio de Hilbert y sea $K : H \to H$ un operador lineal, acotado y compacto. Entonces*
i) $Nuc(I - K)$ es un subespacio de dimensión finita de H.
ii) $im(I - K)$ es un subespacio cerrado de H.
iii) $Nuc(I - K) = \{0\}$ si y sólo si $im(I - K) = H$.

Demostración: *i)* Sea $V := Nuc\,(I - K)$. V es un subespacio cerrado de H, por lo tanto, también es de Hilbert. Supongamos que $\dim V = \infty$. Sea $v_1 \in V$ con $\|v_1\| = 1$. El subespacio $V_1 := \langle v_1 \rangle$, generado por v_1, es de dimensión finita, y, por tanto, cerrado en V. Por el Corolario 3.9, $V_1^\perp \neq \{0\}$. Sea $v_2 \in V \cap V_1^\perp$ con $\|v_2\| = 1$. Continuando con este proceso obtenemos una sucesión (v_n) en V tal que $v_n \in V \cap V_{n-1}^\perp$, $\|v_n\| = 1$ y $\langle v_n, v_m \rangle = 0$ para toda $n \neq m$. Como $v_n \in Nuc\,(I - K)$, $v_n = Kv_n$, y el que K sea compacto, implican que (v_n) contiene una subsucesión convergente. Pero

$$\|v_n - v_m\|^2 = \|v_n\|^2 + \|v_m\|^2 \geq 2 \qquad \forall n \neq m.$$

Esto es una contradicción, por tanto, $\dim V < \infty$.

ii) Supongamos que $f_n = u_n - Ku_n$ con $u_n \in H$ y que $f_n \to f$ en H. Queremos ver que $f \in im(I - K)$. Por el inciso anterior, tenemos $V := Nuc\,(I - K)$ es un subespacio cerrado de dimensión finita de H. Sean $v_n := P_V u_n \in V$ y $w_n := u_n - v_n$. Por la Proposición 3.8 se tiene que $w_n \in V^\perp$. Además, como $v_n \in Nuc\,(I - K)$,

$$f_n = u_n - Ku_n = w_n - Kw_n. \tag{3.3}$$

Por otra parte, afirmamos que existe $C > 0$ tal que

$$\|z - Kz\| \geq C\,\|z\| \qquad \forall z \in V^\perp. \tag{3.4}$$

En efecto, de no ser así, existiría una sucesión (z_k) en $V^\perp$ tal que $\|z_k\| = 1$ y

$$\|z_k - Kz_k\| \leq \frac{1}{k}.$$

Entonces, como K es compacto, (z_k) contiene una subsucesión $\left(z_{k_j}\right)$ tal que $z_{k_j} \rightharpoonup z$ débilmente en H y $Kz_{k_j} \to Kz$ fuertemente en H. Por tanto,

$$\|z - Kz\| \leq \liminf_{j \to \infty} \left\| z_{k_j} - Kz_{k_j} \right\| = 0,$$

es decir, $z \in V$. Pero entonces $z = 0$, ya que

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \lim_{j\to\infty} \left\langle z_{k_j}, z\right\rangle = 0.$$

En este caso, $Kz_{k_j} \to 0$ y, en consecuencia,

$$\left\|z_{k_j}\right\| \leq \left\|z_{k_j} - Kz_{k_j}\right\| + \left\|Kz_{k_j}\right\| \to 0,$$

lo cual contradice que $\left\|z_{k_j}\right\| = 1$. Esto prueba la afirmación 3.4

De 3.4 y 3.3 se sigue que

$$\|f_n - f_m\| \geq C\,\|w_n - w_m\|\,.$$

Como (f_n) converge en H, (w_n) es de Cauchy y, en consecuencia, $w_n \to w$ en H y

$$\begin{aligned} w - Kw &= \lim_{n\to\infty} (w_n - Kw_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n = f. \end{aligned}$$

Esto prueba que $f \in im\,(I - K)\,.$

iii) Supongamos que $Nuc(I - K) = \{0\}$ y que $im(I - K) =: H_1 \subsetneq H$. Por el inciso anterior, H_1 es un subespacio cerrado. Consideramos $H_2 := (I - K)(H_1)$. Afirmamos que $H_2 \subsetneq H_1$. En efecto, de no ser así,

$$H_2 = (I - K)\,(H_1) = (I - K)\,(1 - K)\,H = H_1.$$

El que $I - K$ sea inyectivo, nos permite cancelar por la izquierda. Ésto sería equivalente a decir que

$$H_1 = (1 - K)\,H = H,$$

contradiciendo nuestra suposición. Así, $H_2 \subsetneq H_1$, y por el inciso anterior, H_2 es un subespacio cerrado de H.

Definimos $H_{n+1} := (I - K)\,(H_n)\,,$ para $n \in \mathbb{N}$. Por inducción, se tiene que $H_{n+1} \subsetneq H_n$, y por el inciso anterior, H_{n+1} es un subespacio cerrado de H_n para toda n. Además, el que sean subespacios cerrados contenidos propiamente nos garantiza que $H_n^{\perp} \neq \{0\}\,,$ entonces, $H_n \cap H_{n+1}^{\perp} \neq \{0\}\,.$ Elegimos $u_n \in H_n \cap H_{n+1}^{\perp}$, con $\|u_n\| = 1$. Tenemos

$$Ku_n - Ku_m = -\,(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + (u_n - u_m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n > m$. Entonces,

$$H_{n+1} \subsetneq H_n \subset H_{m+1} \subsetneq H_m.$$

Estas contenciones nos dan que $u_n - Ku_n$, $u_m - Ku_m$, $u_n \in H_{m+1}$, de donde concluimos que

$$-(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + u_n \in H_{m+1}.$$

Entonces, usando que $u_m \in H_{m+1}^{\perp}$,

$$\begin{aligned}\|Ku_n - Ku_m\|^2 &= \|-(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + (u_n - u_m)\|^2 \\ &= \|-(u_n - Ku_n) + (u_m - Ku_m) + u_n\|^2 + \|u_m\|^2 \geq 1\end{aligned}$$

lo cual contradice la compacidad de K. Esta contradicción nos lleva a concluir que $im\,(I - K) = H$.

Ahora, supongamos que $im(I - K) = H$. Entonces,

$$Nuc(I - K^*) = im(I - K)^{\perp} = \{0\}$$

por el Corolario 3.9 y por la Proposición 3.19. Como K^* también es un operador compacto, se puede aplicar la afirmación anterior a K^* y obtenemos que $im\,(I - K^*) = H$. En consecuencia,

$$Nuc(I - K) = im(I - K^*)^{\perp} = \{0\}.$$

■

3.5. El caso $\lambda < 0$

La unicidad de la solución en el caso $\lambda \geq 0$ nos permite definir un operador

$$K_\lambda : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \qquad K_\lambda f := u,$$

donde $u \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución de $(\wp_\lambda)$ para f, es decir, u es la única función en $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Proposición 3.21 *Si $\lambda \geq 0$, entonces K_λ es un operador lineal, acotado y compacto.*

Demostración: •K_λ es lineal: Sean $f, g \in L^2(\Omega)$. Por definición, $K_\lambda(f + g) := u$, donde u es tal que, para toda φ en $H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega (f + g)\varphi.$$

Sean $K_\lambda f := u_1$, $K_\lambda g := u_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \nabla(u_1+u_2)\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega (u_1+u_2)\varphi \\ = & \int_\Omega \nabla u_1\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega u_1\varphi + \lambda\int_\Omega u_2\varphi \\ = & \int_\Omega f\varphi + \int_\Omega g\varphi = \int_\Omega (f+g)\varphi, \end{aligned}$$

y como tenemos que la solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$, entonces $u = u_1 + u_2$, es decir, $K_\lambda(f+g) = K_\lambda f + K_\lambda g$.

Ahora, sea $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $K_\lambda(\alpha f) := u$ y $K_\lambda f := v$. Entonces, para toda φ en $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega u\varphi &= \int_\Omega \alpha f\varphi, \\ \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega v\varphi &= \int_\Omega f\varphi. \end{aligned}$$

La linealidad de la integral nos da que $\int_\Omega \alpha f\varphi = \alpha\int_\Omega f\varphi$. Entonces

$$\int_\Omega \nabla(\alpha v)\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega \alpha v\varphi = \int_\Omega \alpha f\varphi,$$

de donde αv es solución para αf, y de nuevo, por la unicidad de la solución, tenemos que $u = \alpha v$, es decir, $K_\lambda(\alpha f) = \alpha K_\lambda f$, de donde concluimos que K_λ es lineal.

$\bullet K_\lambda$ es acotado: Queremos ver que existe $C > 0$ tal que

$$\|K_\lambda f\| \leq C\,|f|_2 \qquad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Como $u := K_\lambda f$ es solución débil de $(\wp_\lambda)$, se tiene que

$$\|u\|_\lambda^2 = \langle u, u\rangle_\lambda = \int_\Omega fu =: L_f u.$$

De la desigualdad del Lema 3.12, tenemos que

$$\|u\|_\lambda^2 \leq L_f u \leq C\,|f|_2\,\|u\|_\lambda \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto,

$$\|K_\lambda f\|_\lambda \leq \|u\|_\lambda \leq C\,|f|_2 \qquad \forall f \in L^2(\Omega),$$

donde C sólo depende de λ, N y Ω.

$\bullet K_\lambda$ es compacto: Sea $(f_k) \subset L^2(\Omega)$ una sucesión acotada, con $|f_k| < M$ para toda k, y denotemos por $K_\lambda f_k =: u_k$. Queremos demostrar que $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ es precompacta, es decir, que existe una subsucesión (u_{kj}) de (u_k) que converge en $H_0^1(\Omega)$. Como K_λ es acotado, $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ es acotada y las u_k son tales que

$$\int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla u + \lambda \int_\Omega u_k u = \int_\Omega f_k u.$$

Por el teorema de Rellich-Kondrakov (Teorema **??**), existe (u_{kj}) una subsucesión de (u_k) tal que (u_{kj}) converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$, y fuertemente en $L^2(\Omega)$. Queremos ver que (u_{kj}) converge fuertemente a u en $H_0^1(\Omega)$. La convergencia débil de (u_k) a u en $H_0^1(\Omega)$ nos dice que, para todo v en $H_0^1(\Omega)$, se satisface

$$\int_\Omega \nabla u_{kj} \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega u_{kj} v \to \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega uv.$$

Al sustituir $v = u$, obtenemos

$$\left\langle u_{k_j}, u \right\rangle_\lambda := \int_\Omega \nabla u_{kj} \cdot \nabla u + \lambda \int_\Omega u_{kj} u \to \int_\Omega |\nabla u|^2 + \lambda \int_\Omega |u|^2 =: \|u\|_\lambda^2 \tag{3.5}$$

Por otro lado, como $\left(f_{k_j}\right)$ está acotada en $L^2(\Omega)$ y $u_{k_j} \to u$ fuertemente en $L^2(\Omega)$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \left\|u_{k_j} - u\right\|_\lambda^2 &= \left\langle u_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle_\lambda - \left\langle u, u_{k_j}\right\rangle_\lambda + \langle u, u\rangle_\lambda \\ &= \int f_{k_j}\left(u_{k_j} - u\right) - \left\langle u, u_{k_j}\right\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder y 3.5 obtenemos

$$\begin{aligned} & \int f_{k_j}\left(u_{k_j} - u\right) - \left\langle u, u_{k_j}\right\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 \\ \leq\; & \left|f_{k_j}\right|_2 \left|u - u_{k_j}\right|_2 - \left\langle u, u_{k_j}\right\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 \\ \leq\; & M\left|u - u_{k_j}\right|_2 - \left\langle u, u_{k_j}\right\rangle_\lambda + \|u\|_\lambda^2 \to 0 \end{aligned}$$

Esto se da gracias a que $\left(f_{k_j}\right)$ es una sucesión acotada en $L^2(\Omega)$, y a que $u_{k_j} \to u$ fuertemente en $L^2(\Omega)$. Entonces,

$$\left\|u_{k_j} - u\right\|_\lambda \to 0, \text{ es decir, } u_{k_j} \to u \text{ fuertemente en } H_0^1(\Omega).$$

■

Para demostrar que $\|\cdot\|_\lambda$ es una norma, utilizamos el argumento de que $\int_\Omega |\nabla u| + \lambda \int_\Omega u^2 \geq 0$. El que λ fuera mayor ó igual a cero nos garantizaba la positividad de $\|\cdot\|_\lambda$.

Sin embargo, al tener $\lambda < 0$, ya no tenemos esta certeza. Fijemos $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq -\mu$. Entonces, $\lambda + \mu \geq 0$, y tenemos un caso similar al anterior.

De aquí en adelante supondremos que

$$\lambda < 0 \qquad y \quad \lambda + \mu \geq 0.$$

Lema 3.22 *u es solución de $(\wp_\lambda)$ si y sólo si*

$$u - \mu K_{\lambda+\mu} u = K_{\lambda+\mu} f.$$

Demostración: Supongamos que u es solución de $(\wp_\lambda)$, es decir, que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

$K_{\lambda+\mu} u =: v$ y $K_{\lambda+\mu} f =: w$ son tales que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + (\lambda+\mu) \int_\Omega v\varphi = \int_\Omega u\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla \varphi + (\lambda+\mu) \int_\Omega w\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Queremos ver que $w = u - \mu v$. Sustituyendo obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla(u-\mu v) \cdot \nabla \varphi + (\lambda+\mu) \int_\Omega (u-\mu v)\varphi \\
= \ & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \mu \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + (\lambda+\mu) \int_\Omega u\varphi + -\mu(\lambda+\mu) \int_\Omega v\varphi \\
= \ & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi + \mu(-\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi - (\lambda+\mu) \int_\Omega v\varphi) \\
= \ & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi.
\end{aligned}$$

Por tanto, $u - \mu v$ es solución débil de $(\wp_{\lambda+\mu})$ y, en consecuencia, $K_{\lambda+\mu} f = u - \mu v$.

Ahora, supongamos que $u - \mu K_{\lambda+\mu} u = K_{\lambda+\mu} f$. Tenemos que $u = w + \mu v$. Queremos ver que u es solución de $(\wp_\lambda)$, es decir, que

$$\int_\Omega \nabla(w+\mu v) \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega (w+\mu v)\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Desarrollando la expresión tenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla(w+\mu v)\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega (w+\mu v)\varphi \\
= \; & \int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega w\varphi + \mu(\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\varphi + \lambda\int_\Omega v\varphi) \\
= \; & \mu(-\mu\int_\Omega v\varphi + \int u\varphi - \int w\varphi) + \int f\varphi \\
= \; & \mu(\int (u-\mu v - w)\varphi) + \int f\varphi = \int f\varphi.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que u es solución de $(\wp_\lambda)$. ■

Definimos el operador $T_{\lambda+\mu} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$,

$$T_{\lambda+\mu}u := u - \mu K_{\lambda+\mu}u$$

Observamos que este operador es lineal y acotado, debido a que es la combinación lineal del operador identidad y el operador $K_{\lambda+\mu}$, ambos con estas características. También observamos que, por el lema anterior, una función u es solución de $(\wp_\lambda)$ si y sólo si $T_{\lambda+\mu}u = K_{\lambda+\mu}f$.

Proposición 3.23 *(a) El problema $(\wp_\lambda)$ tiene solución para cada $f \in L^2(\Omega)$ si y sólo si el operador $T_{\lambda+\mu} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es suprayectivo.*
(b) Más aún, $(\wp_\lambda)$ tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$ si y sólo si el operador $T_{\lambda+\mu} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es biyectivo.

Demostración: (a) Supongamos que $(\wp_\lambda)$ tiene solución para cada $f \in L^2(\Omega)$. Para ver que $T_{\lambda+\mu}$ es suprayectivo, dada $g \in L^2(\Omega)$, consideramos la función $u := g + \mu v$, donde v es solución de $(\wp_\lambda)$ para g. Afirmamos que $T_{\lambda+\mu}u = g$. En efecto, $K_{\lambda+\mu}u = v$, ya que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\varphi + (\lambda+\mu)\int_\Omega v\varphi &= \int_\Omega g\varphi + \mu\int_\Omega v\varphi \\
&= \int_\Omega (g+\mu v)\,\varphi = \int_\Omega u\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Ahora, calculando $T_{\lambda+\mu}u$, tenemos,

$$T_{\lambda+\mu}u = u - \mu v = g + \mu v - \mu v = g.$$

Supongamos ahora que $T_{\lambda+\mu}$ es suprayectivo. Fijemos $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que $T_{\lambda+\mu}u = f$, es decir, que $f = u - \mu K_{\lambda+\mu}u$. Tomando $K_{\lambda+\mu}u =: v$ se cumple que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi + (\lambda+\mu)\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega (f+\mu v)\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Por tanto,

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi + \lambda\int_\Omega v\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces, v es solución de $(\wp_\lambda)$ con la función f, y esto equivale, por el Lema 3.22, a que $T_{\lambda+\mu}v = K_{\lambda+\mu}f$.

(b) Supongamos que $(\wp_\lambda)$ tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$. Veamos que $T_{\lambda+\mu}$ es inyectivo. Supongamos que $T_{\lambda+\mu}u_1 = T_{\lambda+\mu}u_2$, es decir, que

$$u_1 - \mu K_{\lambda+\mu}u_1 = u_2 - \mu K_{\lambda+\mu}u_2.$$

Sustituyendo con $K_{\lambda+\mu}u_1 =: v_1$ y $K_{\lambda+\mu}u_2 =: v_2$, obtenemos

$$u_2 - u_1 = \mu(v_2 - v_1).$$

Por otro lado, tenemos que, para toda φ en $H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int \nabla v_1 \cdot \nabla\varphi + (\lambda+\mu)\int v_1\varphi &= \int u_1\varphi, \\ \int \nabla v_2 \cdot \nabla\varphi + (\lambda+\mu)\int v_2\varphi &= \int u_2\varphi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \nabla(v_2-v_1)\cdot\nabla\varphi + (\lambda+\mu)\int (v_2-v_1)\varphi = \int (u_2-u_1)\varphi = \int \mu(v_2-v_1)\varphi,$$

es decir,

$$\int \nabla(v_2-v_1)\cdot\nabla\varphi + \lambda\int (v_2-v_1)\varphi = 0.$$

Esta última igualdad implica que $v_2 - v_1$ es solución de $(\wp_\lambda)$ con $f = 0$. Pero también la función $g \equiv 0$ es solución de este problema, y como la solución es única, tenemos que $v_2 - v_1 = 0$. Esto implica que $u_2 - u_1 = 0$, es decir, $T_{\lambda+\mu}$ es inyectivo.

Ahora, supongamos que $T_{\lambda+\mu}$ es biyectivo. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Queremos ver que $(\wp_\lambda)$ tiene solución única para esta f. Si v y v' son soluciones de $(\wp_\lambda)$ entonces, por el Lema 3.22, se tiene que

$$T_{\lambda+\mu}v = K_{\lambda+\mu}f = T_{\lambda+\mu}v',$$

y la inyectividad del operador $T_{\lambda+\mu}$ nos garantiza que $v = v'$, es decir, que la solución a $(\wp_\lambda)$ es única. ■

Definición 3.24 *Decimos que $-\lambda$ es un valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ si el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = 0 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

posee una solución débil no trivial. Dicha solución débil se llama una función propia de $-\Delta$ con valor propio $-\lambda$.

Esto es, $-\lambda$ es un valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ si existe $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \neq 0$, tal que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega v\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Proposición 3.25 *$v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ es una función propia de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ con valor propio $-\lambda > 0$ si y sólo si $v \neq 0$ y $v \in NucT_{\lambda+\mu}$ para toda $\mu \geq -\lambda > 0$.*

Demostración: Sea $u := \mu v$ con $\mu \geq -\lambda > 0$. Entonces,

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \lambda \int_\Omega v\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + (\lambda + \mu) \int_\Omega v\varphi &= \int_\Omega u\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ &\Longleftrightarrow K_{\lambda+\mu} u = v = \frac{1}{\mu} u \\ &\Longleftrightarrow T_{\lambda+\mu} u := u - \mu K_{\lambda+\mu} u = 0 \\ &\Longleftrightarrow v \in NucT_{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

■

Habiendo probado este resultado, enunciaremos la

Demostración del Teorema 1.1: Caso $\lambda \geq 0$: El Teorema 3.13 asegura que $(\wp_\lambda)$ tiene solución única para cada $f \in L^2(\Omega)$. En particular, $u = 0$ es la única solución de $(\wp_\lambda)$ para $f = 0$, es decir, $-\lambda$ no es valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$. Por tanto, λ satisface la afirmación (a) pero no la afirmación (b).

Caso $\lambda < 0$: Si $\lambda < 0$ y $\mu \geq -\lambda$, la Proposición 3.23 asegura que $(\wp_\lambda)$ tiene solución para cada $f \in L^2(\Omega)$ si y sólo si $T_{\lambda+\mu}$ es suprayectivo, y que la solución es única si y sólo si $T_{\lambda+\mu}$ es biyectivo. Pero $T_{\lambda+\mu} := I - \mu K_{\lambda+\mu}$, y $K_{\lambda+\mu}$ es compacto por la Proposición 3.19. La Alternativa de Fredholm (Teorema 3.20) y la Proposición 3.25 aseguran entonces que

$$\begin{aligned} T_{\lambda+\mu} \text{ es biyectivo} \quad &\Longleftrightarrow \quad T_{\lambda+\mu} \text{ es suprayectivo} \\ &\Longleftrightarrow \quad NucT_{\lambda+\mu} = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \quad -\lambda \text{ no es valor propio de } -\Delta \text{ en } H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ésto concluye la demostración para el caso en que el problema $(\wp_\lambda)$ tiene una única solución débil para cada $f \in L^2(\Omega)$.

En caso de que $-\lambda$ sí es valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, tenemos que $NucT_{\lambda+\mu} \neq \{0\}$. En este caso, para $u \in NucT_{\lambda+\mu}$, $u \neq 0$, se tiene que u es solución de $(\wp_{\lambda,0})$. También, la Alternativa de Fredholm nos da que $T_{\lambda+\mu}$ no es suprayectivo. La Proposición 3.23 nos garantiza la existencia de $f \in L^2(\Omega)$ tal que el problema $(\wp_\lambda)$, con la función f, no tiene solución. ■

3.6. Valores propios del operador de Laplace

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado.

Ahora estudiaremos el caso en el que λ es un valor propio de $-\Delta$. Es decir, estudiaremos el caso en el que el problema

$$(\wp_{-\lambda,0}) \quad \begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases},$$

tiene solución no trivial. Observemos que todos los múltiplos de una solución de $(\wp_{-\lambda,0})$ son soluciones de $(\wp_{-\lambda,0})$.

Denotaremos el producto escalar en $L^2(\Omega)$ por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega uv,$$

consideraremos al producto escalar

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

en $H_0^1(\Omega)$, y denotaremos a su norma asociada por

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}.$$

El problema $(\wp_{-\lambda,0})$ se reescribe como

$$\langle u, \varphi\rangle = \lambda \langle u, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y observamos que, si u en $H_0^1(\Omega)$ es solución $(\wp_{-\lambda,0})$ con $|u|_2 = 1$, entonces $\|u\|^2 = \lambda$.

Definición 3.26 *Denotamos por*

$$E_\lambda := \left\{u \in H_0^1(\Omega) : u \text{ es solución de } (\wp_{-\lambda,0})\right\}.$$

Si λ es un valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces E_λ se llama el espacio de funciones propias con valor propio λ.

Proposición 3.27 *E_λ es un subespacio vectorial de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Primero consideremos el caso en el que λ no es valor propio de $-\Delta$. Por el Teorema 3.13, existe una única solución para el problema $(\wp_{-\lambda,0})$. Como la función $u \equiv 0$ es solución de $(\wp_{-\lambda,0})$, entonces, $E_\lambda = \{0\}$, el cual es un subespacio de dimensión finita de $H_0^1(\Omega)$.

Ahora, supongamos que λ es un valor propio de $-\Delta$. Por la Proposición 3.25, se tiene que $E_\lambda = NucT_{-\lambda+\mu}$ para toda μ tal que $-\lambda+\mu \geq 0$. La Alternativa de Fredholm (Teorema 3.20) nos dice que la dimensión de $NucT_{-\lambda+\mu}$ es finita. ■

Proposición 3.28 *Se cumple lo siguiente:*
i) Los valores propios de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ son positivos.
ii) Si λ y μ son dos valores propios distintos de $-\Delta$, y e_λ, e_μ son funciones propias asociadas a λ y μ respectivamente, entonces

$$\langle e_\lambda, e_\mu\rangle = \langle e_\lambda, e_\mu\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

iii) Si $\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subset H_0^1(\Omega)$ es un conjunto ortonormal en $L^2(\Omega)$ de funciones propias de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces el correspondiente conjunto de valores propios $\left\{\lambda_k := \|e_k\|^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$ no es acotado.

Demostración: $i)$ Tenemos, por el Teorema 3.13, que existe una única solución débil al problema $(\wp_\lambda)$ si $\lambda \geq 0$. Ésto implica que los valores propios de $-\Delta$ son positivos.

$ii)$ Si e_λ, e_μ son funciones propias asociadas a λ y μ respectivamente, satisfacen que

$$\begin{aligned} \langle e_\lambda, e_\mu \rangle &= \lambda \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)}, \\ \langle e_\lambda, e_\mu \rangle &= \mu \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

de donde se concluye que $\langle e_\lambda, e_\mu \rangle = \langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$

$iii)$ Supongamos que el conjunto $\{\lambda_k\}$ es acotado. Entonces, dado que $\lambda_k = \|e_k\|^2$, tendríamos que el conjunto de funciones propias correspondientes sería acotado en $H_0^1(\Omega)$. En este caso, el teorema de Rellich-Kondrakov (Teorema **??**) nos garantizaría la existencia de una subsucesión de (e_k) fuertemente convergente en $L^2(\Omega)$, pero el que sea un conjunto ortonormal nos da

$$|e_k - e_j|_2^2 = |e_k|_2^2 + |e_j|_2^2 = 2,$$

lo cual hace imposible extraer una subsucesión de (e_k) convergente en $L^2(\Omega)$. ∎

Lema 3.29 *Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ la norma inducida por éste. Dados $u, v \in H$, definimos*

$$f_{u,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad , f_{u,v}(t) := \|u + tv\|^2.$$

La función $f_{u,v}$ es diferenciable y

$$f'_{u,v}(t) = 2 \langle u, v \rangle + 2 \|v\| t.$$

Demostración: Sean $u, v \in h$, $t \in \mathbb{R}$. Por la bilinealidad del producto interior tenemos

$$\begin{aligned} f_{u,v}(t) &= \langle u + tv, u + tv \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \|v\|. \end{aligned}$$

Derivando con respecto a t, obtenemos

$$f'_{u,v}(t) = 2 \langle u, v \rangle + 2 \|v\| t.$$

∎

La siguiente proposición nos permite obtener funciones propias por un proceso de minimización. Denotemos por

$$\Sigma := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : |u|_2 = 1 \right\}.$$

Definimos la función

$$I : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad I(u) = \|u\|^2 .$$

Proposición 3.30 *Sea H un subespacio vectorial de $H_0^1(\Omega)$.*
$i)$ Si e es un mínimo de I en $\Sigma \cap H$ entonces

$$\langle e, v \rangle = \lambda \langle e, v \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H,$$

donde $\lambda := \|e\|^2$.
$ii)$ Si H es cerrado en $H_0^1(\Omega)$, la función I alcanza su mínimo en $\Sigma \cap H$.

Demostración: $i)$ Sea e un mínimo de I en $\Sigma \cap H$ y sea $v \in H$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$|e + tv|_2 \neq 0 \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Consideramos la función $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) := I\left(\frac{e + tv}{|e + tv|_2}\right) = \frac{\|e + tv\|^2}{|e + tv|_2^2}.$$

Por el Lema 3.29 aplicado a las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|_2$, esta función es derivable y se tiene que

$$h'(t) = 2\left[\frac{|e + tv|_2^2 \left(\langle e, v\rangle + \|v\|^2 t\right) - \|e + tv\|^2 \left(\langle e, v\rangle_{L^2(\Omega)} + |v|_2^2 t\right)}{|e + tv|_2^4}\right].$$

Como e es un mínimo de I, tenemos que 0 es un mínimo de h. Así,

$$0 = h'(0) = 2\left[\langle e, v\rangle - \|e\|^2 \langle e, v\rangle_{L^2(\Omega)}\right],$$

es decir, $\langle e, v\rangle = \|e\|^2 \langle e, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda \langle e, v\rangle_{L^2(\Omega)}$.

$ii)$ Sea

$$\lambda := \inf_{v \in \Sigma \cap H} \|v\|^2,$$

y sea (u_n) una sucesión en $\Sigma \cap H$ tal que $\|u_n\|^2 \to \lambda$. Como (u_n) está acotada en $H_0^1(\Omega)$, el Teorema de Rellich-Kondrakov (Teorema **??**) nos garantiza la existencia de una subsucesión (u_{n_k}) tal que u_{n_k} converge a u fuertemente en $L^2(\Omega)$, y débilmente en $H_0^1(\Omega)$. En consecuencia, $|u|_2 = 1$, entonces, $u \in \Sigma$. Como H es un subespacio vectorial cerrado, es un conjunto convexo, entonces, coincide con su envoltura convexa. Además, toda sucesión débilmente convergente tiene su límite débil en la cerradura de la envolvente convexa del conjunto, ver, por ejemplo, [?, 5.1, Teorema 2.]. Entonces, $u \in \Sigma \cap H$. Por la Proposición **??**, tenemos que

$$\lambda \leq \|u\|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|^2 = \lambda,$$

de decir, u es un mínimo de I en $\Sigma \cap H$. ■

Teorema 3.31 *Existe un conjunto* $\beta = \{e_n \in H_0^1(\Omega) : n \in \mathbb{N}\}$ *con las siguentes propiedades:*
i) e_n *es un vector propio de* $-\Delta$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *con valor propio* $\lambda_n := \|e_n\|^2$,
ii) $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ *si* $n \neq m$,
iii) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq y \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$,
iv) β *es ortonormal en* $L^2(\Omega)$,
v) El espacio vectorial generado por β *es denso en* $L^2(\Omega)$.

Demostración: Usando la proposición anterior, elegimos $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|e_1\|^2 = \inf_{u\in\Sigma} \|u\|^2, \qquad |e_1|_2 = 1,$$

Ahora, elegimos $e_2 \in H_2 := \{v \in H_0^1(\Omega) : \langle v, e_1 \rangle = 0\}$ tal que

$$\|e_2\|^2 = \inf_{u\in\Sigma\cap H_2} \|u\|^2, \qquad |e_2|_2 = 1.$$

Inductivamente, definimos $e_n \in H_n := \{v \in H_0^1(\Omega) : \langle v, e_j \rangle = 0 \ \forall 1 \leq j < n\}$ tal que

$$\lambda_n := \|e_n\|^2 = \inf_{u\in\Sigma\cap H_n} \|u\|^2, \qquad |e_n|_2 = 1 \tag{3.6}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 3.30, se tiene que

$$\langle e_n, v \rangle = \|e_n\|^2 \langle e_n, v \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Además, por construcción, tenemos que

$$H_0^1(\Omega) \supset H_2 \supset\supset H_n \supset,$$

entonces, obtenemos que

$$0 = \langle e_i, e_n \rangle = \|e_i\|^2 \langle e_i, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall i = 1, ..., n-1.$$

Por tanto, tenemos que $\langle e_i, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para $i = 1, ..., n-1$ y, en consecuencia,

$$\langle e_n, v \rangle = \|e_n\|^2 \langle e_n, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_n \langle e_n, v \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Esto prueba que la sucesión (e_n) satisface las afirmaciones $i)$, $ii)$, $iv)$ y la primera afirmación de $iii)$. El que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ se cumple por la Proposición 3.28.

Ahora probaremos la afirmación $v)$. Sea W_n el espacio vectorial generado por $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$. Por ser de dimensión finita, es un subespacio cerrado de $H_0^1(\Omega)$. Además, $W_n^\perp = H_n$, el complemento ortogonal en $H_0^1(\Omega)$, por construcción. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, y sea $\varphi_n \in W_n$ la proyección ortogonal de φ sobre W_n con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega)$. Entonces,

$$\langle \varphi - \varphi_n, e_i \rangle = \lambda_i \langle \varphi - \varphi_n, e_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall i = 1, ..., n-1.$$

es decir, $\varphi - \varphi_n \in H_n$, y de 3.6 y se sigue que

$$\lambda_n \leq \frac{\|\varphi - \varphi_n\|^2}{|\varphi - \varphi_n|_2^2}.$$

En consecuencia,

$$|\varphi - \varphi_n|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_n} \|\varphi - \varphi_n\|^2 = \frac{1}{\lambda_n} \left(\|\varphi\|^2 + \|\varphi_n\|^2\right) \leq \frac{1}{\lambda_n} \|\varphi\|^2 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$. Esto es, $\varphi_n \to \varphi$ en $L^2(\Omega)$. Como $C_c^\infty(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^2(\Omega)$, concluimos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n =: W$ es denso en $L^2(\Omega)$. ■

Observamos que, tanto los valores propios como las funciones propias de $-\Delta$ dependen de la región Ω.

Proposición 3.32 *Los valores (λ_n) del teorema anterior son los únicos valores propios de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración: Supongamos que existe λ un valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$ distinto a los valores (λ_n) del teorema anterior. Sea e_λ una función propia asociada a λ. Entonces, por la Proposición 3.28, tenemos que

$$\langle e_\lambda, e_n \rangle = 0 = \langle e_\lambda, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Esto nos dice que e_λ está en el complemento ortogonal de W en $L^2(\Omega)$, donde W es el espacio generado por el conjunto β del Teorema 3.31. Pero el que W sea denso $L^2(\Omega)$ nos garantiza que $W^\perp = \{0\}$. En efecto, existe una sucesión (w_n) en W tal que $w_n \to e_\lambda$ en $L^2(\Omega)$. Por tanto,

$$\langle e_\lambda, e_\lambda \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \langle e_\lambda, w_n \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

de donde concluimos que $e_\lambda = 0$, una contradicción. ∎

Demostración del Teorema 0.2: Este teorema es consecuencia inmediata del Teorema 3.31 y las Proposiciones 3.28 y 3.27. ∎

Bibliografía

[1] N. Ackermann, *Análisis Aplicado a Ecuaciones Diferenciables Parciales,* Notas del curso "Seminario de Análisis Matemático A", Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Agosto-Diciembre 2007.

[2] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics **65**, Academic Press 1975.

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration*, Wiley-Interscience 1966.

[4] R. G. Bartle, *Elements of Real Analysis*, John Wiley and Sons Inc., 1964.

[5] H. Brézis, *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones,* Alianza Editorial 1984.

[6] M. Clapp, *Métodos Variacionales en Ecuaciones Diferencibles Parciales,* Notas del curso, Posgrado en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Febrero-Junio, 2007.

[7] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Pure and Applied Mathematics **10**, Academic Press 1969.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, Amer. Math. Soc. 1998

[9] D. Gilbarg N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Classics in Mathematics, Springer 2001.

[10] D. Mitrović, D. Žubrinić, *Fundamentals of Applied Functional Analysis,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **91**, Addison Wesley Longman Limited, 1998.

[11] I. K. Rana, *An Introduction to Measure and Integration,* Graduate Studies in Mathematics **45**, Amer. Math. Soc 2002.

[12] H. L. Royden, *Real Analysis,* Macmillian Publishing Company 1988.

[13] W. Rudin, *Functional Analysis,* McGraw-Hill 1991.

[14] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* MacGraw-Hill, 1987.

[15] L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series **289**, Cambridge University Press 2002.

[16] K. Yosida, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag 1980.

[17] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Graduate Texts in Mathematics **120**, Springer-Verlag 1989.