

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Instituto de Matemáticas

**Series de Eisenstein en la orbidad modular y
la hipótesis de Riemann.**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta

Samuel Estala Arias.

Dr. Alberto Verjovsky	Director de Tesis
Dr. Manuel Cruz	Sinodal
Dr. Florin Nicolae	Sinodal
Dr. Tim Gendron	Sinodal
Dr. Aubin Arroyo	Sinodal

Índice general

Índice general	iii
I. La función zeta y la hipótesis de Riemann.	1
1. Contexto histórico de la hipótesis de Riemann.	1
1.1. Inicios de la función zeta: la distribución de los números primos y la función zeta de Euler.	1
1.2. Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada.	8
2. La función zeta de Riemann.	10
2.1. Fórmula integral de $\zeta(s)$	14
II. Series de Eisenstein en la orbidad modular.	23
1. Geometría de la orbidad modular.	23
2. Series de Eisenstein.	30
2.1. Fórmula Integral de $E(z, s)$	35
III. Teorema de Zagier	41
1. El método de Rankin-Selberg.	41
2. Teorema de Zagier.	45
Apéndice I.	51
Referencias	55

Introducción.

La hipótesis de Riemann (HR) establecida por G. F. B. Riemann (1826-1866) en el año de 1859, en su célebre publicación “Sobre los números primos menores que una cantidad dada” (ver [Rie59]), es uno de los problemas más importantes de las matemáticas modernas. En 1900, D. Hilbert incluyó la HR entre sus famosos 23 problemas del siglo, por lo que la HR ha sido estudiada ampliamente por muchos matemáticos ilustres. En el año 2000, la HR apareció dentro de los 7 problemas del milenio anunciados por el Instituto Clay de Matemáticas.

Por más de un siglo la HR ha sido un problema abierto y hoy en día se conocen una gran variedad de proposiciones equivalentes a esta conjetura. En este escrito nos interesa una equivalencia publicada en 1979 por D. Zagier (ver [Zag79]). El teorema de Zagier nos dice que la HR depende del comportamiento de ciertas medidas en la *orbidad modular*. La conexión de la HR con estas medidas se encuentra mediante las *series de Eisenstein* y el *método de Rankin-Selberg* en la orbidad modular.

Para $s \in \mathbb{C}$ un número complejo con $\Re(s) > 1$, la serie infinita

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

define una función holomorfa. Esta función se extiende a una función meromorfa en el plano complejo \mathbb{C} , que denotamos nuevamente por $\zeta(s)$, llamada la función zeta de Riemann. La función $\zeta(s)$ posee un polo simple en $s = 1$ y éste es su único polo. Dónde se encuentran todos los ceros de $\zeta(s)$ es uno de los misterios más profundos de las matemáticas. Riemann mostró que los únicos ceros con parte real negativa, están en los valores $s = -2, -4, -6, -8, \dots$. Estos ceros se llaman los *ceros triviales* de la función zeta de Riemann. Más aun, $\zeta(s)$ no se anula si $\Re(s) > 1$. Se sigue que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran en la banda crítica $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$. La *hipótesis de Riemann* es la aseveración de que los ceros no triviales de $\zeta(s)$ se encuentran en la recta $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

La hipótesis de Riemann es un problema muy importante dentro del estudio de los números primos y posee una larga historia. Nosotros estamos interesados en su conexión con la geometría hiperbólica y el *grupo modular* encontrada por D. Zagier. El hemiplano superior $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ con la métrica $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ es isométrico al plano hiperbólico de curvatura gaussiana constante igual a menos uno. El grupo modular se define como el grupo cociente

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm id\},$$

donde $SL_2(\mathbb{Z})$ es grupo de las matrices de dos por dos con coeficientes en \mathbb{Z} y determinante uno. El grupo modular Γ actúa en \mathbb{H} mediante transformaciones de Moebius y preserva la métrica hiperbólica de \mathbb{H} . El espacio cociente

$$X(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{H}$$

es una 2-orbitad hiperbólica llamada *la orbitad modular*. La orbitad modular posee una métrica especial con la cual tiene dos puntos singulares cónicos. Asimismo, la orbitad modular posee una *cúspide* (ver fig. 1).

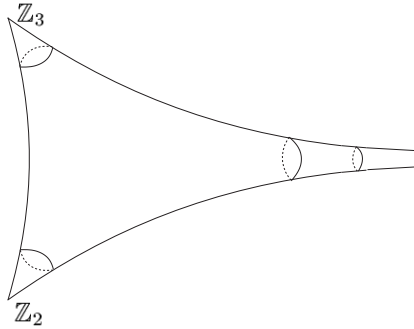


Figura 1: La orbitad modular.

La orbitad modular posee una familia de *horiciclos* cerrados correspondientes a su cúspide. Sea $\mathcal{C}_y := \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$ el horiciclo que es una recta paralela al eje real a altura y en \mathbb{H} . Entonces, \mathcal{C}_y desciende mediante la proyección canónica $\text{Pr} : \mathbb{H} \rightarrow X(\Gamma)$ a $X(\Gamma)$ en una curva cerrada de longitud $1/y$, que denotamos nuevamente por \mathcal{C}_y . Sea m_y la medida de probabilidad en la orbitad modular soportada en el horiciclo \mathcal{C}_y . Esto es, para una función $f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ continua y con soporte compacto

$$m_y(f) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) dx.$$

Sea m_0 la medida en la orbidad modular inducida por el elemento de área hiperbólica $dx dy/y^2$, normalizada a ser una medida de probabilidad, i.e.,

$$m_0(f) := \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(x + iy) \frac{dx dy}{y^2}.$$

En esta tesis exponemos el siguiente resultado:

Teorema de Zagier. *Sea f una función de clase C^∞ en $X(\Gamma)$ con soporte compacto. Entonces,*

$$m_y(f) = m_0(f) + o(y^{1/2}),$$

cuando $y \rightarrow 0$. Más aún, el término de error puede hacerse $o(y^{3/4-\epsilon})$ para todo $0 < \epsilon < 3/4$ si y sólo si la hipótesis de Riemann es cierta.

Este resultado de D. Zagier se obtiene usando el método de Rankin-Selberg, el cual expresa la función $\zeta(2s)^{-1}$ como una integral en la orbidad modular aplicando las series de Eisenstein. Las series de Eisenstein se definen para $z \in \mathbb{H}$ y $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) > 1$ de la siguiente manera

$$E(z, s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \Im(\gamma(z))^s,$$

donde $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$. La función zeta de Riemann se relaciona con las series de Eisenstein mediante la ecuación

$$\zeta(2s)E(z, s) = \frac{1}{2} \sum'_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}},$$

donde \sum' indica la suma sobre todos los $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. La hipótesis de Riemann es equivalente a que las series de Eisenstein se pueden continuar analíticamente en la variable s (excepto por un polo simple) en el hemiplano $\Re(s) > 1/4$ para todo $z \in \mathbb{H}$.

Para una función f complejo valuada en $X(\Gamma)$ diferenciable y soporte compacto el método de Rankin-Selberg “desenrolla” la integral de f sobre $X(\Gamma)$, multiplicada por las series de Eisenstein, en una integral sobre de f un cilindro. Esta integral sobre un cilindro es la trasformada de Mellin de

$m_y(f)$. De esta manera se relaciona la hipótesis de Riemann con la orbidad modular y las medidas involucradas en el teorema de Zagier.

En el capítulo I damos una reseña del contexto histórico en el que se estableció la conjetura de Riemann. Asimismo exponemos algunos resultados de la teoría de la función zeta de Riemann. En el capítulo II presentamos la orbidad modular y las series de Eisenstein. En la primera sección exponemos la geometría de la orbidad modular. En la segunda sección veremos las series de Eisenstein y su relación con la orbidad modular y la hipótesis de Riemann. En el capítulo III exponemos el teorema de Zagier. En la primera sección describimos el método de Rankin-Selberg en la orbidad modular. En la segunda sección veremos el teorema de Zagier como una aplicación del método de Rankin-Selberg. En el apéndice I enunciamos algunos resultados del Análisis de Fourier.

CAPÍTULO I

La función zeta y la hipótesis de Riemann.

En este capítulo exponemos la función zeta y la formulación de la hipótesis de Riemann. En la primera sección damos una breve descripción del contexto histórico en el cual Riemann formuló esta conjetura: la hipótesis de Riemann surgió en relación con el estudio de los números primos. En la segunda sección presentamos algunos resultados de la teoría de la función zeta de Riemann. Se pueden consultar las referencias [Edw75], [Bom00], [Mon99], [Tit88], [Ahl81], [Apo76] y [Neu].

1. Contexto histórico de la hipótesis de Riemann.

En 1859 Riemann estableció su célebre hipótesis en su memoria “Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada” (ver [Rie59]). En esta sección exponemos brevemente la relación de esta conjetura con los números primos. Recomendamos las referencias [Edw75], [Bom00] y [Mon99].

1.1. Inicios de la función zeta: la distribución de los números primos y la función zeta de Euler.

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ los números naturales y $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ los números enteros. \mathbb{N} es un *monoide* con la multiplicación y un *semigrupo* con la suma. \mathbb{Z} es el grupo formado al incluir los inversos (y el cero) del semigrupo aditivo \mathbb{N} .

Los números enteros \mathbb{Z} con las operaciones de suma y multiplicación forman un *dominio entero*. En \mathbb{Z} se define la relación de *divisibilidad* $a \mid b$ si

existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. El subconjunto $\mathbb{P} \subset \mathbb{Z}$ definido por

$$\mathbb{P} := \left\{ p > 1 \mid 1 \mid p \text{ ó } p \mid p \text{ pero } a \nmid p \text{ para todo } a \in \mathbb{Z} \text{ diferente de } 1 \text{ y } p \right\}$$

se llama el conjunto de los *números primos*.

En el siglo III A.C. Euclides demostró que existe un número infinito de números primos de la siguiente manera: supongamos que existe un número finito de números primos, luego si ordenamos los números primos con el orden natural

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

existe un número primo p_N más grande. Como el número $p_1 p_2 \cdots p_N + 1$ no es divisible por ningún número primo, se sigue que es un número primo mayor que p_N , lo cual es una contradicción.

Teorema fundamental de la aritmética. *Todo entero $n > 1$ se descompone como producto de un número finito de primos*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

donde los exponentes α_i son números enteros positivos. Más aún, esta descomposición es única salvo orden.

Consideremos la representación de los números naturales en la recta como se muestra en la figura (I.1). Con la *criba de Eratóstenes* podemos encontrar

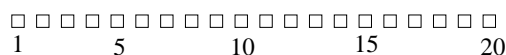


Figura I.1: Los números naturales en la recta.

los números primos (ver figura (I.2)). Si nos alejamos un poco para ver la

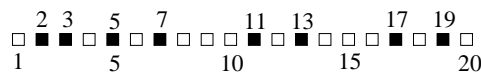


Figura I.2: La criba de Eratóstenes.

figura (I.2) veremos una cantidad mayor de números primos (figura (I.3)). Si nos alejamos una cantidad suficientemente grande veremos la “densidad” de los primos en la recta.

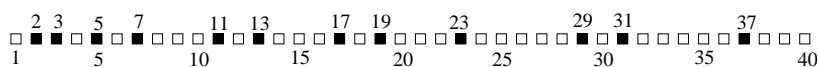


Figura I.3: Los números primos menores que 40.

¿Cómo se distribuyen los primos? Existen huecos arbitrariamente grandes; por ejemplo, los números consecutivos

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4, \dots, (n+1)! + n + 1,$$

donde $n > 1$, no son primos. Asimismo, existen muchos huecos de longitud 2, como por ejemplo $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$ y $(17, 19)$. La *conjetura de los primos gemelos* asevera que existe una cantidad infinita de números primos p tales que $p + 2$ también es primo.

El siguiente lema nos permite estudiar la convergencia de series mediante la convergencia de integrales.

Lema I.1. (Criterio de la integral) Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua positiva y decreciente, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

es convergente (divergente) si y solamente si la integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx,$$

donde dx denota la medida de Lebesgue, es convergente (divergente).

Demostración. Como $f(x)$ es decreciente, para $n > 1$ tenemos

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx.$$

Luego, sumando en los naturales $n > 1$ obtenemos

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx.$$

De estas desigualdades se sigue nuestro lema. □

Teorema 1.1. (Euler 1737) *La serie de los recíprocos de los números primos*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots \quad (\text{I.1})$$

es divergente.

Demostración. Supongamos que

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} < \infty,$$

entonces existe $k > 0$ tal que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}.$$

Sean $N := p_1 p_2 \cdots p_k$ y $a_n := 1 + nN$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces $p_i \nmid a_n$ para $1 \leq i \leq k$ y $n = 1, 2, 3, \dots$. Luego,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{1+nN} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \right)^t,$$

ya que, por el teorema fundamental de la aritmética, el lado derecho tiene más sumandos. Como

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_n} \right)^t < \sum_{t=1}^{\infty} (1/2)^t < \infty,$$

tenemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+nN}$$

es convergente. Por otro lado, el criterio de la integral implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+nN)$ diverge, ya que la integral $\int_1^{\infty} 1/(1+xN)dx$ es divergente, lo cual es una contradicción. Esto termina la prueba de nuestra aserción. \square

Observación I.1. El teorema de Euler (1.1) implica el teorema de Euclides sobre la infinitud de los números primos. Esto se sigue, ya que si existieran un número finito de primos, entonces la serie (I.1) sería convergente, lo cual contradice el resultado de Euler. Si bien esta observación es sencilla marcó un cambio muy importante en la manera de estudiar los números naturales y los números primos, ya que se introdujo el análisis como herramienta.

Observación I.2. La prueba original de Euler del teorema (1.1) es diferente a la que hemos mostrado y en su demostración Euler utiliza la función zeta, que discutiremos más adelante, como herramienta importante (ver [Eul37]).

El teorema de los números primos.

El *teorema de los número primos* comienza con otra aserción de Euler, como parte del teorema (1.1), sobre el orden de crecimiento de la serie de los recíprocos de los números primos. Euler escribió en su publicación [Eul37] lo siguiente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots = \log(\log(\infty)). \quad (\text{I.2})$$

Si bien Euler no especificó de manera precisa lo que debe entenderse por la ecuación (I.2), podemos interpretarla de la siguiente manera:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log(\log(x)) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (\text{I.3})$$

donde el lado izquierdo denota la suma sobre todos los primos p menores o iguales que x . Esto es,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}}{\log(\log(x))} = 1. \quad (\text{I.4})$$

Como, por el teorema de cambio de variable tenemos

$$\log(\log(x)) = \int_1^{\log(x)} \frac{du}{u} = \int_e^x \frac{dv}{v \log(v)},$$

se sigue que (I.4) expresa lo siguiente: la integral de la función $\frac{1}{t}$ en el intervalo (e, ∞) con respecto a la medida $d\mu_1 := dt/\log(t)$ (donde dt denota la medida de Lebesgue) diverge como la integral de la función $1/t$ con respecto a la medida discreta $d\mu_2$ en el intervalo $(1, \infty)$, definida como la medida que asigna peso 1 a los números primos y cero a cualquier otro punto. En otras palabras,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_e^x \frac{1}{t} d\mu_1}{\int_1^x \frac{1}{t} d\mu_2} = 1.$$

De esta manera, la ecuación (I.3) nos dice que la “*densidad*” de los primos es estrictamente $1/\log(v)$. No obstante que hemos reformulado (I.2) en vista de

motivar lo que se conoce como el *teorema de los números primos*, no existe evidencia de que Euler considerara la densidad de los números primos.

Para $x \geq 2$ un número real sea $\pi(x)$ el número de primos que no exceden a x . Esto es,

$$\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}|.$$

Teorema de los números primos. *Se satisface la identidad*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1. \quad (\text{I.5})$$

Este teorema fue conjeturado a finales del siglo XVIII, tanto por Gauss como por A.M. Legendre.

La función zeta de Euler.

Como hemos observado anteriormente, la demostración de Euler del teorema (1.1) es distinta a la que hemos mostrado. La prueba de Euler conlleva a la teoría de la función zeta y el tratamiento de series infinitas. Las series infinitas aparecieron esporádicamente en la historia de las matemáticas y fue Euler el primero en tratar ampliamente con series y productos infinitos. Por ejemplo, la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

apareció por primera vez en un libro en el año de 1332. La serie armónica es una serie divergente. Sin embargo, se puede “*perturbar*” de manera apropiada para obtener una serie convergente. Por ejemplo, la serie

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \quad (\text{I.6})$$

es una serie convergente (esto se puede mostrar utilizando el criterio de la integral). La serie (I.6) fue mencionada en un libro de Mongeli, donde pregunta acerca del valor de esta serie.

Euler estudió ampliamente el problema de Mongeli y desarrolló técnicas para aproximar los valores de las series

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots, \quad (\text{I.7})$$

para $n > 1$ un número natural. Euler exitosamente resolvió el problema de Mongeli y obtuvo el valor de la serie (I.6). Euler mostró que

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Mas tarde, Euler encontró los valores de la serie (I.7) para n un número par. De esta manera Euler introdujo la función zeta de Euler.¹

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots \quad (n > 1),$$

para n un número natural. Él también mostró la memorable identidad²

$$\zeta(n) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-n}},$$

donde el producto se toma sobre todos los primos, la cual escribió como

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdots$$

Asimismo Euler consideró series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}, \quad (\text{I.8})$$

donde $c(n)$ depende del valor de n módulo N para algunos valores pequeños de N .

En los años 1830's Dirichlet reconoció en las series de Euler (I.8) una herramienta importante en la teoría de números y llevó este tema más adelante. Sea $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$ los números racionales. \mathbb{Q} es el campo de fracciones del anillo \mathbb{Z} . Dirichlet introdujo las series L sobre los números racionales

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (s \in \mathbb{Q}),$$

¹La notación $\zeta(n)$ fué introducida posteriormente por G. B. Riemann.

²La relación entre la función zeta y los números primos dada por esta identidad es muy estrecha y en la prueba de Euler del teorema (1.1) se muestra esta conexión.

donde χ es un *carácter* módulo N (para nuestra exposición es importante mencionar únicamente que un carácter es una función que depende sólo de su congruencia módulo N). Con estas series Dirichlet probó su famoso teorema sobre la infinitud de los números primos en progresiones aritméticas: sean a, b enteros primos relativos, entonces existe una infinidad de números primos de la forma $a + nb$, donde $n \in \mathbb{N}$.³

1.2. Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada.

En 1859, la Academia de Ciencias de Berlín nombró a G.F. B. Riemann (1826-1866) uno de sus miembros. Para esto, Riemann debía escribir y enviar un reporte sobre sus últimos trabajos, como indicaba la academia. Riemann escogió su investigación sobre la distribución de los números primos y envió una memoria titulada “Über Die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” (ver [Rie59]), que podemos traducir como “Sobre los números primos menores que una cantidad dada”. En estos años estaba abierto el teorema de los números primos.

En su memoria Riemann extendió la función zeta de Euler a los números complejos \mathbb{C} e introdujo la función zeta de Riemann definida en el hemiplano $\Re(s) > 1$, por la serie absolutamente convergente

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

y en el plano complejo \mathbb{C} por *continuación analítica* excepto en $s = 1$. Como demostró Riemann, $\zeta(s)$ se extiende a \mathbb{C} como una función meromorfa con un polo simple en $s = 1$, con residuo 1, y satisface la ecuación funcional

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

El triunfo de Riemann en su célebre memoria es una expresión analítica de la función $\pi(x)$, en términos de los ceros de la función zeta de Riemann, i.e., las soluciones $\rho \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\zeta(s) = 0$. Una de las importancias de esta fórmula es que implica el teorema de los números primos. La fórmula de

³La demostración de Dirichlet sobre la infinitud de los números en progresiones aritméticas es una generalización de la prueba de Euler del teorema (1.1) (ver por ejemplo [Apo76]).

$\pi(x)$ obtenida por Riemann muestra que la fracción $x/\log(x)$ es por mucho el término que contribuye más al valor de $\pi(x)$.

Riemann introdujo la función compleja en la variable t , definida por

$$\xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad (s = \frac{1}{2} + it)$$

y mostró que $\xi(t)$ es una función entera de t que es par (i.e., $\xi(t) = \xi(-t)$) cuyos ceros tienen parte imaginaria entre $-i/2$ e $i/2$. Igualmente él estableció, bosquejando una demostración, que entre el rango 0 y T , la función $\xi(t)$ tiene aproximadamente

$$\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} \quad (\text{I.9})$$

ceros y que el error relativo en esta aproximación es del orden de $\log(1/T)$. Riemann continua: “*Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind.*”, lo cual puede traducirse como “*De hecho, uno encuentra entre esos límites que algunos ceros son reales, y es bastante probable que todos los ceros lo sean.*” La aseveración de que todos los ceros de la función $\xi(t)$ son reales es la hipótesis de Riemann.

La función $\zeta(s)$ tiene ceros en los enteros pares negativos $-2, -4, \dots$ y nos referimos a estos como los *ceros triviales*. Los otros ceros son los números complejos $\frac{1}{2} + i\alpha$ donde α es un cero de $\xi(t)$. Luego, en términos de la función $\zeta(s)$, podemos establecer

Hipótesis de Riemann. *Los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ tiene parte real igual a $\frac{1}{2}$.*

Los ceros de $\zeta(s)$ están relacionados con los números primos mediante la fórmula de Riemann:

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots = Li(x) - \sum_{\{\rho:\zeta(\rho)=0\}} Li(x^\rho),$$

para $x \geq 2$, donde $x^\rho = e^{\rho \log(x)}$ y

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}.$$

Estos resultados de Riemann fueron completados por otros matemáticos. El teorema de los números primos fue probado por J.Hadamard y C.J. de la

Vallée Poussin independientemente, utilizando que la función $\zeta(s)$ no se anula en la recta $\Re(s) = 1$. Asimismo Hadamard y Von Mangoldt demostraron la fórmula de Riemann.

En la actualidad muchos matemáticos opinan que la hipótesis de Riemann y su extensión a clases más generales de funciones L, es probablemente hoy en día, el problema más importante en matemáticas puras.

2. La función zeta de Riemann.

En esta sección presentamos la teoría de la función zeta de Riemann. Para un tratamiento detallado se puede consultar [Ahl81] y [Tit88]. Una exposición más general sobre las series L de Dirichlet se tratará en [Apo76] y [Neu].

Recordemos que, en el contexto de la función zeta, escribimos un número complejo por $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$.⁴

Definición 2.1. Para s en el hemiplano $\Re(s) > 1$ se define la función zeta de Riemann de la siguiente manera

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (\text{I.10})$$

donde $n^{-s} = e^{-s \log(n)}$.

Lema I.2. La serie que define a $\zeta(s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente en el hemiplano $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, $\zeta(s)$ define una función holomorfa en el dominio $\Re(s) > 1$.

Demostración. Probaremos primero que, si $s = \sigma > 1$ es real, entonces $\zeta(s)$ está bien definida. Como la función

$$\frac{1}{x^\sigma} = e^{-x \log(\sigma)}$$

es decreciente, el criterio de la integral implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

⁴El uso de la variable s se encuentra en el célebre trabajo de Dirichlet de 1837 sobre los números primos en progresiones aritméticas.

converge o diverge de la misma manera que la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx.$$

Luego, la serie (I.10) es convergente para $s = \sigma > 1$.

Para $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, tenemos que, si $n > 0$ entonces

$$n^{-s} = e^{-s \log(n)} = e^{-\sigma \log(n)} e^{-it \log(n)}.$$

Se sigue que

$$|n^s| = n^{-\sigma}.$$

Por lo tanto

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

es convergente si $\Re(s) = \sigma > 1$. Más aún, como la función $\frac{1}{x^\sigma}$ es decreciente en los reales positivos, entonces para todo $\epsilon > 0$ y $s \in \mathbb{C}$ con $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$, se tiene la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty.$$

Por el criterio M de Weierstrass se sigue que la serie (I.10) converge uniformemente en cada hemiplano $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Luego, por el teorema de convergencia de Weierstrass $\zeta(s)$ define una función holomorfa en el hemiplano $\Re(s) > 1$. \square

La manera de relacionar la función $\zeta(s)$ con los números primos es mediante la *identidad de Euler* que expresa a la función zeta como un producto infinito. Antes de enunciar y probar este teorema necesitamos un resultado del análisis complejo (ver por ejemplo [Ahl81]).

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos distintos de -1 tales que a_n converge a 0 cuando n tiende a ∞ . Un producto infinito es una expresión de la forma

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \cdots,$$

el cual denotamos por $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$.

Definición 2.2. El producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ se dice convergente, si el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n)$$

existe y es distinto de cero.

Proposición I.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Supongamos que $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas tales que $f_j(z)$ es distinto de -1 para todo $z \in U$ y

$$\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos. Entonces, el producto infinito

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1 + f_j)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos. Por lo tanto, define una función holomorfa en U que no se anula en ningún punto.

Teorema 2.3. (Identidad de Euler) Se satisface la identidad

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad (\Re(s) > 1),$$

donde el producto se toma sobre todos los números primos $p \in \mathbb{P}$.

Demostración. Para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) > 1$, se tiene que la serie

$$\sum_p \frac{1}{p^s},$$

donde la suma se toma sobre todos los números primos, está acotada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1/n^s|$. Luego, por la proposición anterior, el producto infinito

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad (\text{I.11})$$

donde p se toma sobre todos los número primos, converge absolutamente y uniformemente en el hemiplano $\Re(s) > 1 + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Por lo proposición

(I.1) tenemos que el producto infinito (I.11) define una función analítica diferente de cero en $\Re(s) > 1$.

Mostaremos ahora que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad (\Re(s) > 1).$$

Si multiplicamos a la función $\zeta(s)$ por la función compleja $(1 - 1/2^s)$ obtenemos

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}.$$

Como el lado derecho de la ecuación es la resta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ menos la serie formada por sus términos pares $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)^s$, tenemos que

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \sum_{(m,2)=1} \frac{1}{m^s},$$

donde (m, n) denota el máximo común divisor de (m, n) . Luego, si multiplicamos por $(1 - 1/3^s)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) &= \left(\sum_{(m,2)=1} \frac{1}{m^s} \right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \\ &= \sum_{(n,2)=1} \frac{1}{n^s} - \sum_{(n,2)=1} \frac{1}{(3n)^s}. \end{aligned} \tag{I.12}$$

Como la última expresión es la serie $\sum_{(n,2)=1} \frac{1}{n^s}$ menos la serie formada por sus términos que contienen un múltiplo de tres, se sigue que⁵

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \sum_{(n,6)=1} \frac{1}{n^s}.$$

⁵Observemos que este procedimiento corresponde a la criba de Eratóstenes, excepto que también eliminamos los números primos

Continuado este proceso inductivamente se obtiene que, para $N > 1$, si $p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$ denotan los primeros N números primos, entonces

$$\prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \zeta(s) = \sum_{(m,L)=1} \frac{1}{m^s}, \quad (\text{I.13})$$

donde $L = \prod_{i=1}^N p_i$. Por el teorema fundamental de la aritmética se tiene que la última serie es la cola de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Se sigue que

$$\sum_{(m,L)=1} \frac{1}{m^s} \longrightarrow 0 \quad (L = \prod_{i=1}^N p_i),$$

cuando $N \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad (\Re(s) > 1),$$

lo cual es equivalente a nuestra aserción. □

Observación I.3. La identidad de Euler muestra la función $\zeta(s)$ es distinta de cero para todo s en el hemiplano $\Re(s) > 1$.

Observación I.4. La identidad de Euler implica el teorema de Euclides sobre la infinitud de los número primos, ya que si el número de primos es finito, entonces $\zeta(s) = \prod_p 1/(1-p^{-s})$ se aproxima a un límite cuanto s tiende a 1, pero esto contradice el hecho de que la serie armónica diverge.

2.1. Fórmula integral de $\zeta(s)$.

Podemos decir que la identidad de Euler representa el teorema fundamental de la aritmética en una sola ecuación. De este modo la función zeta de Riemann posee naturalmente información sobre los números naturales. Esto ha llevado a estudiar sus propiedades más de cerca. Por definición, la función $\zeta(s)$ está dada solamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Aún así, admite una continuación analítica al plano complejo en el punto $s = 1$, y satisface una ecuación funcional que relaciona el argumento s con el argumento $1-s$. Estos

hechos cruciales se basan en “*fórmulas integrales*” para la función $\zeta(s)$ que resultan de la *función gama*. Nosotros estamos interesados en la representación de $\zeta(s)$ dada en la segunda demostración de Riemann de la ecuación funcional de $\zeta(s)$, ya que esta demostración contiene los ingredientes necesarios para estudiar las series de Eisenstein. Se puede consultar las referencias [Ahl81],[Tit88], [Apo76] y [Neu].

La función gama de Euler.

En esta sección enunciamos algunas propiedades fundamentales de la función gama de Euler.

Sea $\mathbb{R}^\bullet := (\mathbb{R}^+, \cdot)$ el grupo formado por los números reales positivos con la operación de multiplicación. \mathbb{R}^\bullet es un *grupo topológico abeliano localmente compacto*. La medida de Borel dx/x en \mathbb{R}^\bullet , donde dx denota la medida de Lebesgue, es una *medida de Haar* en \mathbb{R}^\bullet (ver por ejemplo [Kat04]). Esto es, dx/x es invariante por traslaciones en \mathbb{R}^\bullet . En otras palabras, para toda $f : \mathbb{R}^\bullet \rightarrow \mathbb{C}$ integrable con respecto a dx/x , si $L_\alpha(f)(x) := f(\alpha x)$ denota la traslación izquierda de f por $\alpha \in \mathbb{R}^\bullet$, entonces

$$\int_0^\infty L_\alpha(f)(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty f(x) \frac{dx}{x}. \quad (\text{I.14})$$

Esta propiedad se obtiene de la regla de la cadena y se conoce como la *invarianza bajo traslaciones de la medida de Haar* en \mathbb{R}^\bullet .

Para $\Re(s) > 0$ la función gama de Euler se define mediante la integral absolutamente convergente

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (\text{I.15})$$

donde $x^s = e^{s \log(x)}$.

La función $\Gamma(s)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(s)$ es analítica en el hemiplano $\Re(s) > 0$ y posee una continuación meromorfa a todo \mathbb{C} .
2. $\Gamma(s)$ no se anula en ningún punto del plano complejo y tiene polos simples en los valores $s = 0, -1, -2, -3, \dots$ con residuo $(-1)^n/n!$ en $s = -n$. No tiene polos en ningún otro punto.

3. $\Gamma(s)$ satisface las siguientes ecuaciones funcionales: para todo $s \in \mathbb{C}$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (\text{I.16})$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad (\text{I.16a})$$

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2s}}\Gamma(2s). \quad (\text{I.16b})$$

4. $\Gamma(s)$ toma los siguientes valores $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$, para $n = 0, 1, 2, \dots$

5. $\Gamma(s)$ decrece exponencialmente en rectas verticales, i.e., para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ existen $K, C > 0$ tales que

$$|\Gamma(\sigma + it)| \leq Ke^{-C|t|}.$$

La serie teta asociada a la función zeta.

La segunda demostración de la ecuación funcional de Riemann representa la función zeta de Riemann como una integral de una función teta, la cual posee una ecuación funcional que herada a la función zeta. En esta sección establecemos la ecuación funcional de esta función teta.

Definición 2.4. Para $t > 0$ definimos

$$\theta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi tn^2}. \quad (\text{I.17})$$

Observación I.5. La serie teta se define usualmente en el hemiplano superior $\Im(z) > 0$ por la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi in^2 z}$. Tomando $z = it$ obtenemos (I.17).

Lema I.3. La serie que define a $\theta(t)$ converge absolutamente para $t > 0$ y uniformemente si $t > \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, define una función analítica real para $t > 0$.

Demostración. Observemos que, si $t > 0$, entonces la serie (I.17) es una serie de términos positivos. Más aun, por el criterio de la integral, se puede comparar con la integral (gaussiana)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Luego, $\theta(t)$ es convergente para $t > 0$. Por otro lado, como la aplicación e^{-t} es decreciente en los reales positivos si $t > \epsilon$, entonces $\theta(t) < \theta(\epsilon)$. Por los teoremas de Weierstrass se sigue nuestro resultado. \square

Proposición I.2. *La función $\theta(t)$ satisface*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right) \quad (t > 0).$$

Demostración. Para $t > 0$ sea $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f_t(x) := e^{-\pi tx^2}$. Entonces, la transformada de Fourier de f_t está dada de la siguiente manera

$$\widehat{f}_t(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2} e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Luego, haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{t}x$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi tx^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2\pi i \frac{\xi}{\sqrt{t}} u} du.$$

Utilizando que la transformada de Fourier $\widehat{e^{-\pi u^2}}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ se sigue que la última integral es igual a

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \widehat{e^{-\pi u^2}}\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \frac{\xi^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{\frac{1}{t}}(\xi).$$

Esto es,

$$\widehat{f}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{\frac{1}{t}}(\xi). \quad (\text{I.18})$$

Por otro lado, como $f_t(\xi) = e^{-\pi t \xi^2}$ pertenece al espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la fórmula de Poisson implica que (ver apéndice I)

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_t(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_t(n).$$

Por lo tanto, de (I.18) tenemos que

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\frac{1}{t}}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

\square

La representación integral.

Antes de enunciar la siguiente proposición importante probaremos un lema que nos permite relacionar la función gama con series de Dirichlet y sus funciones teta asociadas.

Lema I.4. *Sea $n > 0$ un número real positivo. Entonces*

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} \quad (\Re(s) > 0) \quad (\text{I.19})$$

Demostración. Recordemos que, para $\Re(s) > 0$, la función gama esta dada por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Luego, si $n > 0$, de la invarianza por traslaciones de la medida de Haar en \mathbb{R}^\bullet , tenemos

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{t} t^s \frac{dt}{t} = \int_0^\infty L_n(e^{-t} t^s) \frac{dt}{t} = n^s \int_0^\infty e^{-nt} t^s \frac{dt}{t}.$$

Dividiendo sobre n^s obtenemos el resultado. □

Para $\Re(s) > 1$ definimos

$$\zeta^*(s) := \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

donde $\zeta(s)$ es igual a $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$. Asimismo escribimos

$$\theta(t) = 1 + 2\psi(t), \quad (\text{I.20})$$

donde

$$\psi(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}. \quad (\text{I.21})$$

Proposición I.3. *Sea s en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Entonces,*

$$\zeta^*(s) = \int_0^\infty \psi(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\theta(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Demostración. Por el lema (I.19), para todo número natural n , se tiene que, si $\Re(s) > 1$, entonces

$$\pi^{-s/2} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\Gamma(s/2)}{(\pi n^2)^{s/2}} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Sumando sobre n se sigue

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Como $\Re(s) > 1$ la última integral converge absolutamente. Luego, por el teorema de Fubini tenemos que la última integral es igual a

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \right) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \psi(t) t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t}.$$

□

Lema I.5. La función $\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$ decrece rápidamente cuanto t tiende a infinito. Esto es

$$\psi(t) = O(y^{-N}) \quad (y \rightarrow \infty),$$

para todo entero $N > 0$.

Demostración. Sea $t > 1$. Si multiplicamos $\psi(t)$ por la aplicación $e^{\pi t}$ tenemos que

$$\psi(t) e^{\pi t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} < \psi(t).$$

Como $\psi(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\psi(t) e^{\pi t} < K$$

para t suficientemente grande. Esto muestra que $\psi(t)$ decae rápidamente en infinito. □

Teorema 2.5. *La función $\zeta^*(s)$ se extiende a una función meromorfa a todo el plano complejo, analítica salvo por dos polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Más aún, satisface la ecuación funcional*

$$\zeta^*(s) = \zeta^*(s-1).$$

Esto es,

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

Demostración. Supongamos que $\Re(s) > 1$. Entonces, por la proposición (I.3), tenemos

$$\zeta^*(s) = \int_0^\infty \psi(t)t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Partiendo la integral como $\int_0^1 + \int_1^\infty$ obtenemos

$$\begin{aligned}\zeta^*(s) &= \int_0^1 \psi(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} + \int_1^\infty \psi(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} \\ &=: I_1(s) + I_2(s).\end{aligned}$$

Observemos que la integral que define a I_2 representa una función analítica para todo $s \in \mathbb{C}$, ya que $\psi(t)$ decrece rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$. La continuación meromorfa se encuentra en la integral que define a I_1 como sigue. Evaluamos I_1 de la siguiente manera: como $\psi(t) = (\theta(t) - 1)/2$ tenemos

$$I_1(s) = \int_0^1 \psi(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_0^1 t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Luego, como

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 t^{s/2}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \frac{x^{s/2}}{s/2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s},$$

se sigue

$$\int_0^1 \psi(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} - \frac{1}{s}.$$

Ahora, si consideramos la sustitución $t \mapsto 1/u$ en la última integral, tenemos

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \theta(t)t^{s/2}\frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{u}\right)u^{-s/2}\frac{-du/u^2}{1/u} = \frac{1}{2} \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right)t^{-s/2}\frac{dt}{t}.$$

Utilizando la ecuación funcional $\theta(1/t) = \sqrt{t}\theta(t)$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \int_1^\infty \theta\left(\frac{1}{t}\right) t^{-s/2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \int_1^\infty \theta(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t}$$

Como $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_1^\infty \theta(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} &= \int_1^\infty \psi(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\infty \psi(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$I_1(s) = \int_1^\infty \psi(t) t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.$$

Sumando I_1 e I_2 tenemos que

$$\zeta^*(s) = \int_1^\infty \psi(t) (t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s},$$

para $\Re(s) > 1$. Como la integral del lado derecho es convergente para todo $s \in \mathbb{C}$ y define una función holomorfa en el plano, ya que $\psi(t)$ decae rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$ obtenemos la continuación meromorfa de $\zeta^*(s)$ para todo s . Como esta expresión es simétrica bajo $s \rightarrow 1-s$ obtenemos también la ecuación funcional. \square

Observación I.6. El teorema anterior muestra que la función $\zeta(s)$ se extiende a una función meromorfa en plano dada por

$$\zeta(s) := \frac{\zeta^*(s)}{\pi^{-s/2} \Gamma(s/2)}, \quad (\text{I.22})$$

por lo que de las propiedades de la función $\Gamma(s)$ podemos deducir propiedades de la función $\zeta(s)$. Por ejemplo, como la función $\Gamma(s/2)$ tiene polos en los enteros negativos pares (y el cero), podemos ver que $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s = 1$ y se anula en los enteros negativos.

Observación I.7. La ecuación funcional nos indica que los ceros de $\zeta(s)$ en la banda crítica son simétricos con respecto del punto $\frac{1}{2}$. Luego, se sigue que la hipótesis de Riemann es cierta si y sólo si $\zeta(s)$ no tiene ceros para $\Re(s) > 1/2$.

CAPÍTULO II

Series de Eisenstein en la órbita modular.

En este capítulo exponemos la órbita modular y las series de Eisenstein. En la primera sección describimos la órbita modular y su geometría. En la segunda sección presentamos las series de Eisenstein y mostramos su relación con la hipótesis de Riemann y la órbita modular. Se pueden consultar las referencias [Ver82], [Ver92], [MBB00], [Thu80], [Mon03], [BMP03], [Bum96] y [Zag92].

1. Geometría de la órbita modular.

En esta sección exponemos la órbita modular y los resultados fundamentales sobre su geometría. Para una introducción detallada a la geometría hiperbólica se puede consultar [Ver82]. En [MBB00] se puede consultar un tratamiento general de acciones de grupos discretos en el plano hiperbólico. La teoría general de órbitas puede tratarse en [Mon03], [Thu80] o [BMP03]. En [Ver92] se encuentra una exposición detallada de la órbita modular.

Sea $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = y > 0\}$ el hemiplano superior. En \mathbb{H} tenemos definida la *métrica riemanniana* dada por $ds^2 = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$. Con esta métrica \mathbb{H} es isométrico al plano hiperbólico de curvatura gaussiana constante igual a menos uno. El grupo de isometrías de \mathbb{H} que preservan orientación $Isom^+(\mathbb{H})$ se describe de la siguiente manera: sea $SL_2(\mathbb{R})$ el *grupo de Lie* de las matrices de dos por dos con coeficientes en \mathbb{R} y determinante uno. Esto es,

$$SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ab - cd = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

El grupo $SL_2(\mathbb{R})$ actúa por isometrías en \mathbb{H} por transformaciones de Moebius

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc = 1). \quad (\text{II.1})$$

Esta acción no es efectiva y posee núcleo igual a $\{\pm id\}$. Se sigue que la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{H} dada por (II.1) induce una acción del grupo proyectivo especial lineal $PSL_2(\mathbb{R}) := SL_2(\mathbb{R})/\{\pm id\}$ en \mathbb{H} por isometrías. De hecho se tiene que esta acción de $PSL_2(\mathbb{R})$ en \mathbb{H} identifica a $PSL_2(\mathbb{R})$ con el grupo completo de isometrías de \mathbb{H} que preservan orientación $Isom^+(\mathbb{H})$.

Las siguientes fórmulas son fundamentales: si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, entonces, para $z \in \mathbb{H}$, tenemos

$$\frac{dg}{dz} = (cz + d)^{-2}, \quad (\text{II.2})$$

$$|\det(dg/dz)| = \frac{1}{|cz + d|^4} \quad (\text{II.2b})$$

$$\Im(g(z)) = \Im(z) / |cz + d|^2, \quad (\text{II.3})$$

donde $\Im(z)$ denota la parte imagiaria de z .

Sea $SL_2(\mathbb{Z}) \subset SL_2(\mathbb{R})$ el subgrupo

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definición 1.1. *El grupo cociente*

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm id\} \subset PSL_2(\mathbb{R})$$

se llama el grupo modular.

El grupo modular Γ actúa en \mathbb{H} restringiendo la acción (II.1) a Γ . Como Γ es un *subgrupo discreto* de $PSL_2(\mathbb{R})$, ya que $SL_2(\mathbb{Z})$ es discreto en $SL_2(\mathbb{R})$, se tiene que la acción de Γ en \mathbb{H} es propia y discontinua. Esto es, dados dos subconjuntos compactos $L, K \subset \mathbb{H}$, entonces, el conjunto

$$\left\{ g \in \Gamma \mid g(K) \cap L \neq \emptyset \right\}$$

es finito. Se sigue que, para todo $z \in \mathbb{H}$ el subgrupo de isotropía

$$I_z := \left\{ \gamma \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma(z) = z \right\} \quad (z \in \mathbb{H})$$

es trivial o un grupo cíclico de orden finito. Por lo tanto, el espacio cociente

$$X(\Gamma) := \Gamma \backslash \mathbb{H}$$

posee una geometría modelada localmente por el plano hiperbólico, módulo un subgrupo cíclico de orden finito (en un número finito de puntos, ya que $X(\Gamma)$ posee área finita). Esto es, $X(\Gamma)$ posee una estructura de *2-orbidad hiperbólica* (se puede consultar [Thu80] para una definición). La orbidad hiperbólica $X(\Gamma)$ se llama la *orbidad modular*. El conjunto

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H} \mid 1 < |z|, -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{II.4})$$

es un dominio fundamental para la acción de $PSL_2(\mathbb{Z})$ en \mathbb{H} (ver figura II.1). Esto es, D es un abierto tal que:

- (i) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{D}) = \mathbb{H}$, donde \overline{D} es la cerradura de D .
- (ii) $\gamma_1(D) \cap \gamma_2(D) = \emptyset$ para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tales que $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

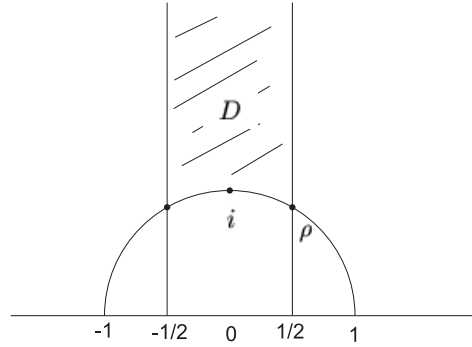


Figura II.1: Dominio fundamental del grupo modular.

Sean $S, T \in \Gamma$ los elementos del grupo modular dados por

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para $z \in \mathbb{H}$, tenemos que $S(z) = -1/z$ y $T(z) = z + 1$. Los elementos S y T generan el grupo Γ y satisfacen las relaciones $S^2 = id$ y $(ST)^3 = id$. El elemento S genera el grupo de isotropía del punto $i \in \mathbb{H}$. Asimismo, ST genera el grupo de isotropía del punto $\rho \in \mathbb{H}$, donde $\rho = (1 + i\sqrt{3})/2$. Más aun, todos los puntos en \mathbb{H} no equivalentes a i, ρ , bajo la acción de Γ en \mathbb{H} , tienen grupo de isotropía trivial. Así, $X(\Gamma)$ posee únicamente dos *puntos cónicos*. El punto cónico correspondiente a la órbita del punto $i \in \mathbb{H}$ posee una vecindad isométrica al espacio métrico que se obtiene al identificar isométricamente los dos lados iguales de un triángulo hiperbólico isósceles, cuyos lados iguales se encuentran en un ángulo de π . El punto cónico correspondiente a la órbita del punto $\rho \in \mathbb{H}$ posee una vecindad isométrica al espacio métrico que se obtiene al identificar los dos lados iguales de un triángulo hiperbólico isósceles, cuyos lados iguales se encuentran en un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$. Identificando los lados de la región fundamental D con las relaciones dadas por los elementos S y T obtenemos la orbidad modular (ver figura II.2).

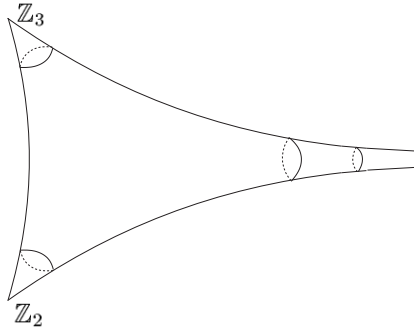


Figura II.2: La orbidad Modular.

La proyección canónica $\text{Pr} : \mathbb{H} \rightarrow X(\Gamma)$ definida por $z \mapsto \Gamma \cdot z$ es una *aplicación cubriente de orbidad*¹. Con la proyección Pr podemos determinar una identificación entre objetos Γ -invariantes en \mathbb{H} y objetos en $X(\Gamma)$. Por ejemplo Pr determina una identificación entre las funciones f (diferenciales, continuas, etc.) en la orbidad modular $X(\Gamma)$ y las funciones \tilde{f} Γ -invariantes en \mathbb{H} de la siguiente manera $\tilde{f} = f \circ \text{Pr}$. Usualmente identificamos una función en $X(\Gamma)$ con su correspondiente función Γ -invariante en \mathbb{H} .

¹Las nociones de geometría diferencial en variedades corresponden a nociones “*equivariantes*” en las orbivarietades (ver por ejemplo [BMP03])

El elemento de área hiperbólica $dz = dx dy / y^2$ en \mathbb{H} induce el elemento de área hiperbólica $dz = dx dy / y^2$ en $X(\Gamma)$ como sigue. Para $f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y con soporte compacto tenemos

$$\int_{X(\Gamma)} f(z) dz = \int_D f(x + iy) \frac{dx dy}{y^2}, \quad (\text{II.5})$$

donde D es un dominio fundamental en \mathbb{H} del grupo modular.

Observación II.1. Por la fórmula de Gauss-Bonnet el área hiperbólica de $X(\Gamma)$ es igual a $\pi/3$. Luego, normalizando el elemento de área hiperbólica dz en $X(\Gamma)$, podemos definir una medida de probabilidad m_0 en $X(\Gamma)$ de la siguiente manera: para una función f continua y con soporte compacto

$$m_0(f) := \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(z) dz.$$

La cúspide de $X(\Gamma)$.

La orbidad modular $X(\Gamma)$ no es un espacio topológico compacto y posee una “*punta*”. Esta punta puede describirse como sigue. El grupo modular $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ actúa en la frontera de $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ por transformaciones proyectivas extendiendo la fórmula (II.1). Esta acción fija el vértice impropio al infinito ∞ del dominio fundamental D . El grupo de isotropía del punto ∞ es el grupo de traslaciones enteras

$$\Gamma_\infty := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \Gamma.$$

La superficie cociente

$$X(\Gamma_\infty) := \Gamma_\infty \backslash \mathbb{H},$$

es una superficie (suave) hiperbólica homeomorfa a un cilindro con proyección cubriente $\text{Pr}_1 : \mathbb{H} \rightarrow X(\Gamma_\infty)$, dada por $z \mapsto \Gamma_\infty \cdot z$. Asimismo, para $c > 0$, si $\mathbb{H}_c := \{z \in \mathbb{H} : \Im(z) \geq c\}$, entonces el cociente $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}_c \subset \Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}$ es un cilindro hiperbólico con frontera. Si c suficientemente grande, entonces el cilindro $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}_c$ puede encajarse isométricamente en \mathbb{R}^3 como un subconjunto de la pseudoesfera.

El cilindro $X(\Gamma_\infty)$ cubre (con puntos de ramificación) a $X(\Gamma)$ mediante la aplicación $\text{Pr}_2 : X(\Gamma_\infty) \rightarrow X(\Gamma)$ dada por $\Gamma_\infty \cdot z \mapsto \Gamma \cdot z$. Resulta que, para

$c > 1$, la proyección Pr_2 restringida al cilindro con frontera $\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}_c$ define un encaje isométrico, por lo que la geometría de la cúspide de la orbidad modular puede visualizarse en \mathbb{R}^3 como la geometría de la pseudoesfera (ver figura (II.3)).

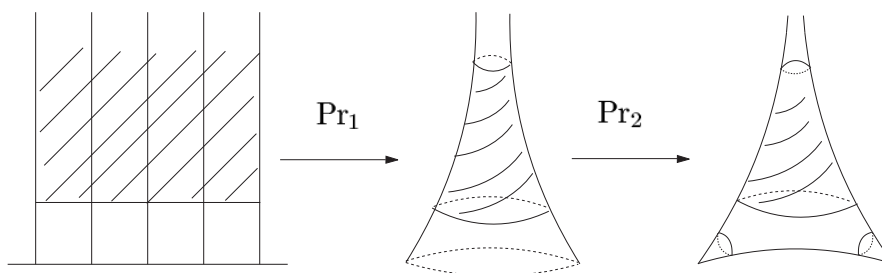


Figura II.3: Cubrientes

Los horiciclos cerrados de $X(\Gamma)$.

Un *horiciclo geométrico* en el plano hiperbólico \mathbb{H} es un círculo euclideo tangente a la recta real o una recta paralela a ésta (ver figura II.4). Un *horiciclo* es una curva en \mathbb{H} parametrizada por longitud de arco tal que su imagen es un horiciclo geométrico. Usualmente identificamos un horiciclo (curva parametrizada) con su horiciclo geométrico determinado (imagen de la curva).

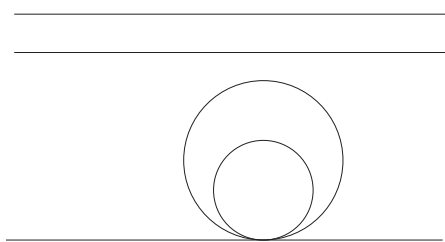
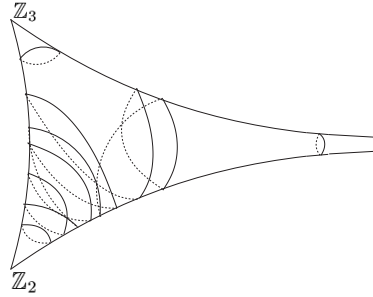
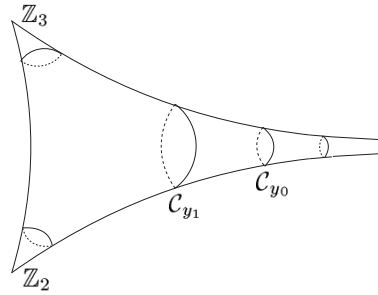


Figura II.4: horiciclos geométricos.

Los horiciclos del plano hiperbólico descienden a $X(\Gamma)$ mediante la proyección canónica $\text{Pr} : \mathbb{H} \rightarrow X(\Gamma)$ (ver figura II.5). Para $y > 0$, sea $\mathcal{C}_y := \{z \in \mathbb{H} : z = x + iy\}$ el horiciclo en el hemiplano que es una recta paralela a la recta real a altura y . Se tiene que \mathcal{C}_y desciende a un horiciclo cerrado $X(\Gamma)$,

Figura II.5: horiciclo en $X(\Gamma)$.Figura II.6: horiciclos cerrados en $X(\Gamma)$.

que denotamos nuevamente por \mathcal{C}_y , de longitud $\frac{1}{y}$ (ya que el grupo modular contiene la traslación $z \mapsto z + 1$ (ver figura II.6)).

Para $y > 0$ el horiciclo cerrado \mathcal{C}_y en $X(\Gamma)$ determina una medida de probabilidad m_y en $X(\Gamma)$ soportada \mathcal{C}_y de la siguiente manera: para una función $f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ continua y con soporte compacto

$$m_y(f) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) dx.$$

Observación II.2. Por el teorema de Hedlund y un resultado de Dani (ver por ejemplo [MBB00]) tenemos que los horiciclos de $X(\Gamma)$ se pueden clasificar de la siguiente manera: sea \mathcal{C} un horiciclo en $X(\Gamma)$. Entonces, se tiene una de las dos siguientes situaciones: \mathcal{C} es una curva cerrada que es igual a un horiciclo \mathcal{C}_y asociado a la cúspide de $X(\Gamma)$, para algún $y > 0$; \mathcal{C} es una recta inmersa densamente en la orbidad modular.

2. Series de Eisenstein.

En esta sección estudiamos las series de Eisenstein $E(z, s)$. Estas series determinan funciones en la orbidad modular en la variable z y se relacionan con la hipótesis Riemann en la variable s . Se pueden consultar las referencias [Bum96], [Zag79] y [Zag92].

La función zeta de Epstein.

Antes de definir las series de Eisenstein necesitamos estudiar la función zeta de Epstein asociada a una forma cuadrática positiva definida. Denotamos por $\mathbf{u} = (u, v)$ un vector en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.1. Una forma cuadrática real en \mathbb{R}^2 es una aplicación $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$Q(\mathbf{u}) = Au^2 + Buv + Cv^2, \quad (\mathbf{u} = (u, v)) \quad (\text{II.6})$$

donde A, B, C son números reales cualesquiera.

Una forma cuadrática en \mathbb{R}^2 se llama *positiva definida*, si para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$Q(\mathbf{u}) \geq 0$$

y la igualdad se da si y sólo si $\mathbf{u} = 0$. Por ejemplo, el cuadrado de la función norma $\|\mathbf{u}\|^2 = u^2 + v^2$ en \mathbb{R}^2 , es una forma cuadrática positiva definida en \mathbb{R}^2 .

Lema II.1. Sea $Q_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q_0(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}\|^2$. Entonces, la serie

$$\sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} Q_0(m, n)^{-\sigma}, \quad (\text{II.7})$$

donde \sum' indica la suma las parejas de enteros m, n no ambos iguales a cero, es convergente si $\sigma > 1$.

Demostración. Sea $\sigma > 1$. Entonces, la aplicación en \mathbb{R}^2 dada por $\|\mathbf{u}\|^{-2\sigma}$ decrece cuando el valor de la norma $\|\mathbf{u}\|$ crece. Luego, de manera análoga a la función $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$, podemos acotar superiormente la serie (II.7) por un múltiplo de la doble integral

$$\int \int \frac{1}{(\sqrt{u^2 + v^2})^{2\sigma}} dudv,$$

tomada sobre el plano menos un disco centrado en cero. Como esta integral es convergente para $\sigma > 1$ se sigue el lema. \square

Lema II.2. *Sea Q una forma cuadrática positiva definida en \mathbb{R}^2 . Entonces, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$Q(\mathbf{u}) \geq c \|\mathbf{u}\|^2, \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2). \quad (\text{II.8})$$

Demostración. Escribamos $\mathbf{u} = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Por hipótesis $Q(u, v) > 0$ para todos los puntos en la esfera unitaria $u^2 + v^2 = 1$. Luego, la función continua Q tiene un mínimo c en la superficie de la esfera; esto es,

$$Q(u_1, v_1) \geq c, \quad \text{si } u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Luego, si escribimos

$$u_1 = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad v_1 = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

para reales arbitrarios u, v no ambos cero, obtenemos (II.8). Esto concluye nuestro lema. \square

Definición 2.2. *Sea Q una forma cuadrática positiva definida en \mathbb{R}^2 . Para s en el hemiplano $\Re(s) > 1$ la función zeta de Epstein se define por*

$$E_Q(s) := \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} Q(m, n)^{-s}, \quad (\text{II.9})$$

donde \sum' indica la suma sobre las parejas de enteros m, n no ambos iguales a cero.

Proposición II.1. *La serie que define a $E_Q(s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente en el hemiplano $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto $E_Q(s)$ representa una función holomorfa en el hemiplano $\Re(s) > 1$.*

Demostración. Como Q es una forma cuadrática positiva definida, por el lema (II.2), existe $C > 0$ tal que $(u^2 + v^2)C \leq Q(u, v)$, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Luego,

$$|E_Q(s)| \leq \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{Q(m, n)^s} \right| \leq \frac{1}{C} \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\sigma},$$

donde $s = \sigma + it$. Por el lema (II.1) la última serie converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Más aun, la convergencia es uniforme en cada hemiplano $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. \square

Nosotros estamos interesados en las siguientes formas cuadráticas relacionadas con la geometría hiperbólica. Para cada $z \in \mathbb{H}$, sea Q_z la forma cuadrática positiva definida en \mathbb{R}^2 dada por (comparar con la fórmula (II.3))

$$Q_z(m, n) = \frac{|mz + n|^2}{\Im(z)} \quad ((m, n) \in \mathbb{R}^2). \quad (\text{II.10})$$

Si escribimos $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned} Q_z(m, n) &= \frac{|mx + n + imy|^2}{y} \\ &= \frac{(mx + n)^2 + (my)^2}{y} \\ &= m^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y} mn + \frac{n^2}{y} + m^2 \frac{y^2}{y} \\ &= m^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{y} \right) + \frac{2x}{y} mn + \frac{n^2}{y}. \end{aligned}$$

Luego, podemos escribir

$$Q_z(m, n) = A_z m^2 + B_z mn + C_z n^2,$$

donde

$$A_z = \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad B_z = \frac{2x}{y}, \quad C_z = \frac{1}{y}.$$

Para cada $z \in \mathbb{H}$ tenemos la función zeta de Epstein asociada a Q_z : para $\Re(s) > 1$

$$E_{Q_z}(s) = \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} Q_z(m, n)^{-s} = \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}}.$$

Series de Eisenstein.

El método de convolución de Rankin-Selberg que veremos en el capítulo III es una de las herramientas más poderosas en la teoría de formas automorfas. El ingrediente esencial de este método son las series de Eisenstein.

Definición 2.3. Las series de Eisenstein ² $E(z, s)$ se definen para $z = x + iy \in \mathbb{H}$ y $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) > 1$ de la siguiente manera

$$E(z, s) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ (c, d) = 1}} Q_z(c, d)^{-s} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ (c, d) = 1}} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}}, \quad (\text{II.11})$$

donde (c, d) denota el máximo común divisor de c y d .

Observación II.3. Las series de Eisenstein son similares a las series de Eisenstein clásicas pero tienen diferencias importantes. Por ejemplo, $E(z, s)$ no es holomorfa como función de z debido a la presencia de $y = \Im(z)$ y el valor absoluto.

Proposición II.2. Sea $z \in \mathbb{H}$. Entonces, la serie que define a $E(z, s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente en $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, $E(z, s)$ define una función holomorfa en el hemiplano $\Re(s) > 1$.

Demostración. Como $|E(z, s)|$ está acotado por la serie de Epstein $|E_{Q_z}(s)|$, ya que ésta contiene más términos, el resultado se sigue de la proposición (II.1). \square

Las series de Eisenstein están relacionadas con el grupo modular Γ mediante la siguiente proposición.

Proposición II.3. Las series de Eisenstein $E(z, s)$ satisfacen

$$E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \Im(\gamma z)^s, \quad (\text{II.12})$$

donde $\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma}$ indica la suma sobre un conjunto de representantes de las clases $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$.³

Demostración. Primero observemos que, si $\gamma \in \Gamma$, entonces el valor $\Im(\gamma z)^s$ no depende del representante Γ_∞ -órbita de γ , ya que Γ_∞ consta de traslaciones en \mathbb{H} . La proposición se sigue de la fórmula (II.3) y el hecho que existe una biyección entre la parejas de enteros $\pm(c, d)$ primos relativos y las clases de equivalencia $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$. \square

²En la literatura estas series se conocen como series de Eisenstein no holomorfas o real analíticas en distinción de las series de Eisenstein clásicas. Sin embargo en este escrito las hemos llamado series de Eisenstein.

³ Γ_∞ actúa en Γ por multiplicación a la izquierda.

Observación II.4. La ecuación (II.12) implica que $E(z, s)$ es invariante en la variable z por el grupo modular. Esto es,

$$E(\gamma(z), s) = E(z, s) \quad (\Re(s) > 1), \quad (\text{II.13})$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ y $z \in \mathbb{H}$. Esto es una diferencia importante con las series de Eisenstein clásicas.

Lema II.3. *Sea $K \subset \mathbb{H}$ un subconjunto compacto. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$Q_z(m, n) \geq C(m^2 + n^2)$$

para todo $z \in K$ y $(m, n) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. La aplicación definida por $Q(z, m, n) = Q_z(m, n)$ es continua en $\mathbb{H} \times \mathbb{R}^2$. Luego, si $K \subset \mathbb{H}$ es un subconjunto compacto, entonces $Q(z, m, n) > 0$ para $z \in K$ y $m^2 + n^2 = 1$. Continuando como en la demostración del lema (II.2) obtenemos el resultado. \square

Proposición II.4. *Sea s en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Entonces, la serie que define a $E(z, s)$ converge absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{H} . Por lo tanto, representa una función analítica real en la variable $z \in \mathbb{H}$.*

Demostración. Sea $K \subset \mathbb{H}$ un subconjunto compacto. Por el lema (II.3) existe una constante $C > 0$ tal que

$$Q_z(m, n) \geq C(m^2 + n^2)$$

para todo $z \in K$ y $(m, n) \in \mathbb{R}^2$. Luego, tenemos que $|E(z, s)|$ está acotado por la serie

$$\frac{1}{C} \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m^2 + n^2)^\sigma}, \quad (\Re(s) = \sigma)$$

para todo $z \in K$. Por el lema (II.1) la última serie converge para $\Re(s) > 1$. Esto muestra que $E(z, s)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{H} . \square

Observación II.5. Para $\Re(s) > 1$ hemos mostrado que $E(\cdot, s) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es función analítica real y Γ -invariante. Luego, $E(\cdot, s)$ determina una función analítica real en la orbidad modular $X(\Gamma)$.

2.1. Fórmula Integral de $E(z, s)$.

Para $z \in \mathbb{H}$ las series de Eisenstein $E(z, s)$ esta definida para $\Re(s) > 1$. Sin embargo $E(z, s)$ se extiende a una función meromorfa “divisible” por $\zeta(2s)$ y posee una ecuación funcional, que relaciona el argumento s con el argumento $s - 1$. La demostración de esto es análoga a la segunda demostración de Riemann de la ecuación funcional de $\zeta(s)$ (ver [Bum96] y [Zag79]).

La siguiente proposición contiene la relación fundamental entre las series de Eisenstein y la función zeta de Riemann.

Proposición II.5. *Sea s con $\Re(s) > 1$. Entonces,*

$$\zeta(2s)E(z, s) = \frac{1}{2} \sum'_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}} = \frac{1}{2} E_{Q_z}(s). \quad (\text{II.14})$$

Demostración. Como $\zeta(2s) = \sum_{r=1}^{\infty} r^{-2s}$ si $\Re(s) > 1$, si multiplicamos la serie de Eisenstein $E(z, s)$ por la función $\zeta(2s)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \zeta(2s)E(z, s) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{r^{2s}} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{y^s}{|rcz + rd|^{2s}}. \end{aligned}$$

Luego, si escribimos $m = rc$, $n = rd$ obtenemos que

$$\zeta(2s)E(z, s) = \frac{1}{2} \sum'_{n,m \in \mathbb{Z}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}},$$

donde \sum' indica la suma sobre todas las parejas de enteros m, n no ambos iguales a cero. Esto es

$$\zeta(2s)E(z, s) = \frac{1}{2} \sum'_{m,n \in \mathbb{Z}} Q_z(m, n)^{-s} = \frac{1}{2} E_{Q_z}(s), \quad (\Re(s) > 1).$$

□

Para $z \in \mathbb{H}$ la serie de Dirichlet que define a la función zeta de Epstein $\zeta(2s)E(z, s) = \frac{1}{2}E_{Q_z}$ se puede representar como una integral sobre una función teta. Para $z \in \mathbb{H}$ definimos

$$\theta_z(t) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t Q_z(m,n)}, \quad (t > 0).$$

La serie que define a $\theta_z(t)$ satisface las siguientes propiedades (ver [Lan94]):

1. $\theta_z(t)$ converge absolutamente en si $t > 0$ y uniformemente si $t > \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, define una función analítica real para $t > 0$.
2. $\theta_z(t)$ satisface la ecuación funcional

$$\theta_z\left(\frac{1}{t}\right) = t\theta_z(t). \quad (\text{II.15})$$

Asimismo tenemos las propiedades:

1. Si $t > 0$, entonces $\theta_z(t)$ es invariante en \mathbb{H} por el grupo modular. Esto es,

$$\theta_{\gamma(z)}(t) = \theta_z(t),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$.

2. $\theta_z(t)$ decae rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente en subconjuntos compactos de \mathbb{H} . Esto es, si $K \subset \mathbb{H}$ es un conjunto compacto, entonces

$$\theta_z(t) = O(t^{-N}) \quad (t \rightarrow \infty),$$

para todo $N > 0$ y $z \in K$.

Consideremos la serie de Eisenstein modificada:

$$E^*(z, s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)E(z, s) \quad (\Re(s) > 1). \quad (\text{II.16})$$

Proposición II.6. *Sea $\Re(s) > 1$. Entonces*

$$E^*(z, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\theta_z(t) - 1)t^{s-1} dt.$$

Demostración. Sea s con $\Re(s) > 1$. Entonces, por la proposición II.5, tenemos que

$$\begin{aligned} E^*(z, s) &= \frac{1}{2} \pi^{-s} \Gamma(s) \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} Q_z(m, n)^{-s} \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(s) \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} [\pi Q_z(m, n)]^{-s}. \end{aligned} \tag{II.17}$$

Como, por el lema (I.19), tenemos que

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi Q(m, n)^s} = \int_0^\infty e^{-\pi Q_z(m, n)t} t^{s-1} dt,$$

para toda pareja de enteros m, n no ambos cero. Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Gamma(s) \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} [\pi Q_z(m, n)]^{-s} &= \frac{1}{2} \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty e^{-\pi t Q_z(m, n)} t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t Q_z(m, n)} \right) t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (\theta_z(t) - 1) t^{s-1} dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. Sea $z \in \mathbb{H}$. Entonces, $E^*(z, s)$ se extiende analíticamente excepto por polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Más aún, satisface la siguiente ecuación funcional

$$E^*(z, s) = E^*(z, 1 - s)$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{H}$, consideremos la aplicación

$$f_z(t) = \theta_z(t) - 1, \quad (t > 0).$$

Por la proposición (II.6) tenemos que

$$E^*(z, s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty f_z(t) t^{s-1} dt.$$

Luego, rompiendo la integral como $\int_0^1 + \int_1^\infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty f_z(t) t^{s-1} dt &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f_z(t) t^{s-1} dt + \int_1^\infty f_z(t) t^{s-1} dt \right) \\ &=: \frac{1}{2} I_1(z, s) + \frac{1}{2} I_2(z, s). \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Como $f(t)$ decrece rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$ la integral que define a $I_2(z, s)$ representa una función holomorfa para todo $s \in \mathbb{C}$. La continuación meromorfa se encuentra en $I_1(z, s)$ que evaluamos como sigue. Considerando el cambio de variable $t \rightarrow 1/t$ obtenemos

$$I_1(z, s) = \int_0^1 f_z(t) t^{s-1} dt = \int_1^\infty f_z\left(\frac{1}{t}\right) t^{-s-1} dt.$$

Luego, por la ecuación funcional $\theta_z(1/t) = t\theta_z(t)$, se tiene que

$$\theta_z\left(\frac{1}{t}\right) = t(\theta(t) - 1) + t = t f_z(t) + t.$$

Esto es,

$$f_z\left(\frac{1}{t}\right) = t f_z(t) + t - 1.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} I_1(z, s) &= \int_1^\infty f_z\left(\frac{1}{t}\right) t^{-s-1} dt = \int_1^\infty (t f_z(t) + t - 1) t^{-s-1} dt. \\ &= \int_1^\infty f_z(t) t^s dt + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Sumando $I_1(z, s)$ e $I_2(z, s)$ obtenemos

$$E^*(z, s) = \frac{1}{2} \int_1^\infty f_z(t) (t^{s-1} + t^{-s}) dt + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2s}.$$

Como la integral del lado derecho de la última igualdad representa una función analítica en s , ya que la $f_z(t) = \theta_z(t) - 1$ decae rápidamente cuando $t \rightarrow \infty$, obtenemos la continuación meromorfa de $E^*(z, s)$. Asimismo como la última expresión es simétrica con respecto de s y $1-s$ obtenemos la ecuación funcional. \square

Observación II.6. Para todo $z \in \mathbb{H}$ las series de Eisenstein $E(z, s)$ se extienden a una función meromorfa definida por

$$E(z, s) := \frac{E^*(z, s)}{\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)}.$$

Como la función gama no tiene ceros se tiene que los polos de $E(z, s)$ se encuentran en los ceros de la función $\zeta(2s)$ (contando los polos de $E^*(z, s)$). Luego, por las propiedades de la función zeta de Riemann, se tiene que $E(z, s)$ es holomorfa para $\Re(s) > 1/2$ excepto por un polo simple en $s = 1$ cuyo residuo es independiente de z

$$\mathcal{R}es_{s=1}(E(z, s)) = \frac{3}{\pi} \quad (\forall z \in \mathbb{H}). \quad (\text{II.19})$$

Más aun, la hipótesis de Riemann es cierta y sólo si $E(z, s)$ es holomorfa para $\Re(s) > 1/4$ excepto por un polo simple en $s = 1$ para todo $z \in \mathbb{H}$.

CAPÍTULO III

Teorema de Zagier

En este capítulo exponemos el teorema de Zagier. En la primera sección describimos el método de Rankin-Selberg. Este método desdobra integrales en la orbifold modular en integrales en un cilindro utilizando las series de Eisenstein. En la segunda sección veremos el teorema de Zagier como una aplicación del método de Rankin-Selberg. Se puede consultar las referencias [Bum96], [Zag79], [Zag92], [Sar80], [Ver92] y [Ver94].

1. El método de Rankin-Selberg.

Antes de enunciar y probar siguiente teorema necesitamos algunas definiciones preliminares. Recordemos que denotamos por $\Gamma := PSL_2(\mathbb{Z})$ el grupo modular y por $X(\Gamma)$ el espacio cociente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$.

Sea $C_c^\infty(X(\Gamma))$ el conjunto de funciones complejo valuadas en $X(\Gamma)$ de clase C^∞ y con soporte compacto. Esto es, $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$ si y sólo si $f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua y con soporte compacto tal que su correspondiente función Γ -invariante en \mathbb{H} , que denotamos nuevamente por f , es de clase C^∞ .

Lema III.1. *Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Entonces, existe una constante $A > 0$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z = x + iy \in \mathbb{H}$ con $y > A$.*

Demostración. Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Supongamos por contradicción que existe una sucesión $z_n = x_n + y_n$ en \mathbb{H} tal que $y_n \rightarrow \infty$ y $f(x_n + y_n) \neq 0$. Entonces, el soporte de f no es compacto en $X(\Gamma)$, ya que contiene puntos arbitrariamente cerca de la cúspide. Esto es una contradicción. \square

Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Entonces $f(x + iy)$ es periódica de periodo uno en la variable x , ya que es una función invariante por el grupo de traslaciones

$\Gamma_\infty \subset \Gamma$. Luego, para cada $y > 0$, podemos desarrollar $f(x + iy)$, en la serie de Fourier

$$f(x + iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f, y) e^{2\pi i n x} \quad (y > 0),$$

donde $a_n(f, y)$ es el n -ésimo coeficiente de Fourier de $f(x + iy)$. Esto es,

$$a_n(f, y) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) e^{-2\pi i n x} dx. \quad (\text{III.1})$$

Sea $y > 0$, entonces el “*término constante de la serie de Fourier a altura y* ” define una medida de probabilidad en $X(\Gamma)$, soportada en el horiciclo cerrado $\mathcal{C}_y = \text{Pr}(\mathbb{R} + iy)$ de la siguiente manera: sea $C_0(X(\Gamma))$ el espacio de Banach de las funciones continuas de $X(\Gamma)$ en \mathbb{C} que se desvanecen en el infinito con la norma supremo. Por el teorema de representación de Riesz, el espacio dual $C_0(X(\Gamma))^*$ se identifica con el espacio de medidas de Borel en $X(\Gamma)$.

Definición 1.1. Para $y > 0$ definimos el funcional $m_y : C_0(X(\Gamma)) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$m_y(f) := a_0(f, y) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) dx, \quad (\text{III.2})$$

para toda $f \in C_0(X(\Gamma))$.

De la integral que define a m_y se obtiene directamente que $\|m_y\| = 1$, por lo que m_y representa una medida de probabilidad en $X(\Gamma)$. Asimismo, tenemos que m_y tiene soporte en el horiciclo \mathcal{C}_y .

La transformada de Mellin de $m_y(f)$.

Para cada $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$ consideremos la transformada de Mellin de $m_y(f)$:

$$\mathcal{M}_f(s) := \int_0^\infty m_y(f) y^{s-1} \frac{dy}{y}. \quad (\text{III.3})$$

Observación III.1. Estrictamente hablando la ecuación (III.3) es la transformada de Mellin de $m_y(f)y$. Sin embargo nosotros la llamamos la transformada de Mellin de $m_y(f)$.

Proposición III.1. *La integral que define a $\mathcal{M}_f(s)$ converge absolutamente en el hemiplano $\Re(s) > 1$ y uniformemente en $\Re(s) \geq 1 + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, define una función holomorfa en el hemiplano $\Re(s) > 1$.*

Demostración. Sea f una función diferenciable y de soporte compacto en $X(\Gamma)$. Entonces, por el lema (III.1), existe $A > 0$ tal que $m_y(f) = 0$ para $y > A$. Sea $\|f\|_\infty = \sup_{z \in X(\Gamma)} |f(z)|$. Como $|m_y(f)| \leq \|f\|_\infty$ entonces, si $\Re(s) > 1$, tenemos

$$|\mathcal{M}_f(s)| \leq \|f\|_\infty \left(\frac{A^{\sigma-1}}{\sigma-1} \right), \quad (\text{donde } \Re(s) = \sigma). \quad (\text{III.4})$$

Por lo tanto, tenemos convergencia absoluta en $\Re(s) > 1$. Más aun, esta convergencia es uniforme en $\Re(s) > 1 + \epsilon$ para $\epsilon > 0$. \square

El siguiente teorema se conoce como el *método de Rankin-Selberg*. Este método relaciona la orbidad modular con las series de Eisenstein (ver por ejemplo [Bum96]).

Teorema 1.2. *Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Entonces,*

$$\mathcal{M}_f(s) = \int_{X(\Gamma)} E(z, s) f(z) dz \quad (\Re(s) > 1), \quad (\text{III.5})$$

donde $dz = dx dy / y^2$ denota el elemento de área hiperbólica en $X(\Gamma)$ y $E(z, s)$ las series de Eisenstein.

Demostración. Sea s en el hemiplano $\Re(s) > 1$. Entonces la integral del lado derecho de (III.5) converge absolutamente, ya que $E(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \Im(\gamma(z))^s$ es continua en z y f es de soporte compacto. Luego, por el teorema de Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \int_{X(\Gamma)} E(z, s) f(z) dz &= \int_{X(\Gamma)} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \Im(\gamma(z))^s f(z) dz \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \int_{X(\Gamma)} \Im(\gamma(z))^s f(z) dz \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Para evaluar la última serie escojamos $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ un conjunto de representantes de las clases de $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ y evaluamos los sumandos sustituyendo $X(\Gamma)$ por

el dominio fundamental D como sigue. Para cada $\gamma = \gamma_i$ con $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, por la fórmula (II.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_D \Im(\gamma(z))^s f(z) dz &= \int_D \Im(z)^s f(z) |cz + d|^{-2s} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_D \Im(z)^{s-2} f(z) |cz + d|^{-2s} dx dy \\ &= \int_D \Im(z)^{s-2} f(z) |cz + d|^{-2(s-2)} |cz + d|^{-4} dx dy \\ &= \int_D \Im(\gamma(z))^{s-2} f(z) |cz + d|^{-4} dx dy. \end{aligned}$$

Como $|\det(d\gamma/dz)| = |cz + d|^{-4}$ y f es Γ -invariante podemos escribir la última integral de la siguiente manera

$$\int_D \Im(\gamma(z))^{s-2} f(\gamma(z)) |\det(\gamma(z))| dx dy.$$

Luego, si cambiamos la variable $\gamma(z)$ por z , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_D \Im(\gamma(z))^{s-2} f(\gamma(z)) |\det(\gamma(z))| dx dy &= \int_{\gamma(D)} \Im(z)^{s-2} f(z) dx dy \\ &= \int_{\gamma(D)} \Im(z)^s f(z) dz. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\int_{X(\Gamma)} \Im(\gamma_i(z))^s f(z) dz = \int_{\gamma_i(D)} \Im(z)^s f(z) dz,$$

para todo $i = 1, 2, \dots$. Sumando sobre i obtenemos que la serie (III.6) es igual a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_i(D)} \Im(z)^s f(z) dz.$$

Como $\bigcup_1^{\infty} \gamma_i(D)$ es un dominio fundamental para la acción de Γ_{∞} en \mathbb{H} tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_i(D)} \Im(z)^s f(z) dz = \int_{X(\Gamma_{\infty})} \Im(z)^s f(z) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Ahora, podemos tomar la última integral sobre cualquier dominio fundamental para Γ_∞ . Si consideramos el dominio fundamental definido por $0 < x < 1$, $y > 0$, entonces

$$\int_{X(\Gamma_\infty)} \Im(z)^s f(z) \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^\infty \int_0^1 y^{s-1} f(x+iy) dx \frac{dy}{y} = \mathcal{M}_f(s).$$

□

Observación III.2. De la ecuación (III.5) se obtiene que $\mathcal{M}_f(s)$ posee las mismas propiedades que $E(z, s)$. Esto es, $\mathcal{M}_f(s)$ posee una continuación meromorfa a todo s que es regular en $\Re(s) > 1/2$ excepto a lo más por un polo simple en $s = 1$ con

$$\mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s)) = \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(z) dz \quad (\text{III.7})$$

Además, la hipótesis de Riemann es cierta si y sólo si $\mathcal{M}_f(s)$ es regular para $\Re(s) > 1/2$ excepto posiblemente por un polo en $s = 1$.

Observación III.3. Si consideremos la función modificada:

$$\mathcal{M}_f^*(s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) \mathcal{M}_f(s). \quad (\text{III.8})$$

Entonces, como $E^*(z, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) E(z, s)$, el método de Rankin-Selber implica que

$$\mathcal{M}_f^*(s) = \int_{X(\Gamma)} E^*(z, s) f(z) dz.$$

De las propiedades de $E^*(z, s)$ tenemos que $\mathcal{M}_f^*(s)$ tiene una continuación meromorfa a todo s , con a lo más polos simples en $s = 0$ y $s = 1$. Además

$$\mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s)) = \frac{1}{2} \int_{X(\Gamma)} f(z) dz \quad (\text{III.9})$$

2. Teorema de Zagier.

Antes de enunciar el teorema de Zagier necesitamos algunos resultados preliminares sobre el crecimiento en líneas verticales de la transformada de Mellin $\mathcal{M}_f(s)$.

La serie de Fourier de $E^*(z, s)$.

Como $E^*(z+1, s) = E^*(z, s)$ podemos expresar las series de Eisenstein como un serie de Fourier

$$E^*(z, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_r(y, s) e^{2\pi i r x}.$$

Los coeficientes están dados de la siguiente manera (ver [Bum96]):

1.

$$a_0(y, s) = \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) y^s + \pi^{-s+1/2} \Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s - 1) y^{1-s}.$$

2. Si $r \neq 0$ tenemos que

$$a_r(y, s) = 2 |r|^{s-1/2} \sigma_{1-2s}(|r|) \sqrt{y} K_{s-1/2}(2\pi |r| y),$$

donde $\sigma_{1-2s}(r) = \sum_{m|r} m^{1-2s}$ y K es la función de Macdonald Bessel dada por

$$K_s(y) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y(t+t^{-1})/2} t^s \frac{dt}{t}.$$

Como la función K de Bessel decae rápidamente, se puede mostrar que el crecimiento de $E^*(z, s)$ está controlado por el término constante de su serie de Fourier. Asimismo, el crecimiento de $\mathcal{M}_f^*(s)$ está controlado por el término constante de la serie de Fourier de $E^*(z, s)$. Dividiendo $\mathcal{M}_f^*(s)$ por $\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s)$ podemos obtener en particular que el crecimiento de $\mathcal{M}_f(s)$, en líneas verticales $t \rightarrow \sigma + it$, está controlado por el crecimiento de la función (ver [Sar80])

$$\phi(s) = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(s - 1/2) \zeta(2s - 1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)}.$$

Se sigue que el crecimiento $\mathcal{M}_f(s)$ puede estimarse a partir de la función $\Gamma(s)$ y la función $\zeta(s)$.

Estimaciones de la función $\zeta(s)$.

Sea $\mu(\sigma)$ el ínfimo de los números reales $l \geq 0$ tal que

$$\zeta(\sigma + it) = O(|t|^l) \text{ cuando } |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{III.10})$$

Entonces μ tiene las siguientes propiedades (consultar [Tit88]):

1. μ es continua no decreciente y no negativa.
2. μ es convexa en el sentido de que la curva $y = \mu(\sigma)$ no posee puntos encima de ninguna cuerda que una cualesquiera dos de sus puntos.
3. $\mu(\sigma) = 0$ si $\sigma \geq 1$ y $\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma$ si $\sigma \leq 0$.

Asimismo tenemos la siguiente implicación de la hipótesis de Riemann debida a Littlewood: supongamos que la hipótesis de Riemann es cierta. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ y $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1/2$ se satisface

$$\zeta(s) = O(t^\epsilon) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(t^\epsilon), \quad (\text{III.11})$$

cuando $|t| \rightarrow \infty$.

Ahora enunciamos el teorema de Zagier. Recordemos que, para $y > 0$, tenemos definida la medida de probabilidad m_y en la orbidad modular soportada en el horiciclo \mathcal{C}_y de la siguiente manera: para una función $f : X(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ continua y con soporte compacto

$$m_y(f) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) dx.$$

Asimismo, tenemos la medida de probabilidad m_0 inducida en la orbidad modular por el elemento de área hiperbólica $dx dy / y^2$, normalizada a ser una medida de probabilidad, i.e.,

$$m_0(f) := \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(x + iy) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Teorema de Zagier. *Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Entonces,*

$$m_y(f) = m_0(f) + o(y^{1/2}),$$

cuando $y \rightarrow 0$. Más aún, el término de error puede hacerse $o(y^{3/4-\epsilon})$ para todo $0 < \epsilon < 3/4$ si y sólo si la hipótesis de Riemann es cierta.

Bosquejo de la demostración. Sea $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$. Entonces, la transformada de Mellin $\mathcal{M}_f(s)$ de $m_y(f)$ es holomorfa en

$$\Re(s) > \Theta := \frac{1}{2} \sup\{\Re(s) \mid \zeta(s) = 0\}$$

excepto a lo mas por un polo simple de residuo

$$m_0(f) = \frac{3}{\pi} \int_{X(\Gamma)} f(z) dz$$

en $s = 1$. Por la fórmula de inversión de Mellin, se tiene

$$m_y(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2+i\infty}^{2+i\infty} \mathcal{M}_f(s) y^{1-s} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(2+it) y^{-1} y^{-it} dt.$$

Ahora, la integral de $\mathcal{M}_f(s) y^{1-s}$ sobre la frontera de la banda vertical $\frac{1}{2} \leq 2$ existe siempre que la función $\mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it)$ pertenescas a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Luego, por las estimaciones de la función $\mu(\sigma)$ y el hecho que f es diferenciable se tiene que la integral de $\mathcal{M}_f(s)$ sobre frontera de la banda vertical $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$ existe y es igual al mismo tiempo a $m_0(f) = \mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s))$ e igual a

$$m_y(f) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it) y^{\frac{1}{2}} y^{-it} dt.$$

Como

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it) y^{\frac{1}{2}} y^{it} dt \right| = y^{\frac{1}{2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it) y^{it} dt \right| = o(y^{\frac{1}{2}}),$$

ya que por el teorema de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{2} + it) y^{it} dt \right| = 0$$

tenemos

$$m_y(f) = m_0(f) + o(y^{1/2}).$$

Supongamos ahora que la hipótesis de Riemann es cierta. Entonces por la estimación de Littlewood (III.11) tenemos que la integral de $\mathcal{M}_f(s) y^{1-s}$ existe sobre la frontera de la banda $\frac{1}{4} + \epsilon \leq \sigma \leq 2$. Por lo tanto

$$m_y(f) = \mathcal{R}es_{s=1}(\mathcal{M}_f(s)) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f(\frac{1}{4} + \epsilon + it) y^{-it} y^{\frac{3}{4}-\epsilon} dt.$$

Nuevamente, por el teorema de Riemann-Lebesgue, obtenemos

$$m_y(f) = m_0 + o(y^{\frac{3}{4}-\epsilon}).$$

Recíprocamente, si $m_y(f) = m_0(f) + o(y^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$ y para toda $f \in C_c^\infty(X(\Gamma))$, entonces $\mathcal{M}_f(s)$ es holomorfa (excepto por un polo en $s = 1$) en el hemiplano $\Re(s) > \frac{1}{4} + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, lo cual implica la hipótesis de Riemann. La razón por la que $\mathcal{M}_f(s)$ es holomorfa en el hemiplano, bajo la hipótesis de que $m_y(f) = m_0(f) + K(y)$, donde $K(y) = o(y^{\frac{3}{4}-\epsilon})$ cuando $y \rightarrow 0$, es el siguiente:

$$\mathcal{M}_f(s) = \frac{m_0(f)}{s-1} + \int_0^\infty K(y)y^{s-2}dy. \quad (\text{III.12})$$

La integral en el lado derecho de (III.12) converge absolutamente y uniformemente en el hemiplano $\Re(s) > \frac{1}{4} + \epsilon$, por lo que define una función holomorfa en ese hemiplano. \square

Comentarios finales. Sea $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ un campo de número algebraicos. Esto es, la dimensión de K como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} es finita. Esta dimensión se llama el grado de K ,

$$n := [K : \mathbb{Q}] := \dim_{\mathbb{Q}} K.$$

Tal campo de números posee n encajes diferentes

$$K \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \mapsto a_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

dentro del campo de los números complejos. Decimos que K es totalmente real si las imagenes de sus encajes a los números complejos estan contenidas en \mathbb{R} . El grupo modular de Hilbert se define como $\Gamma_K := SL(2, O_K)$, donde O_K denota el anillo de enteros de K . El grupo modular se inyecta en el grupo de Lie $SL_2(\mathbb{R})^n$ como un subgrupo discreto utilizando los n encajes de K . Se sigue que el grupo modular de Hilbert actúa en el producto de n planos hiperbólicos $\mathbb{H}^n = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \cdots \mathbb{H}$ de la siguiente manera:

$$M(z) := (M(z_1), \dots, M(z_n)),$$

donde

$$M = (M_1, \dots, M_n).$$

El espacio cociente $\Gamma_K \backslash \mathbb{H}^n$ se llama la variedad modular de Hilbert. La variedad modular de Hilbert posee propiedades análogas a la variedad modular (ver [Fre80]). La hipótesis de Riemann generalizada en campos de números se puede estudiar por medio de la convergencia de medidas en esta variedad de manera análoga al teorema de Zagier. En ([Con99]) se encuentra una generalización del teorema de Zagier para campos cuadráticos imaginarios.

Apéndice I.

En este apéndice presentamos algunas definiciones y resultados fundamentales del *Análisis de Fourier* en \mathbb{R}^n . Asimismo describimos la transformada de Mellin. Un tratamiento detallado puede consultarse en [Kat04].

Sea $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ el conjunto de las funciones Lebesgue integrables en \mathbb{R}^n . Para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la transformada de Fourier $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de f de la siguiente manera

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dy,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en \mathbb{R}^n .

Si $\|x\|$ denota la norma de $x \in \mathbb{R}^n$, entonces tenemos que la función $f(x) = e^{-\pi \|x\|^2}$ es autorecíproca i.e., $\widehat{f} = f$. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de Schwartz de \mathbb{R}^n . Entonces, se tiene la fórmula de inversión de Fourier: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se satisface

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{2\pi i \langle x, t \rangle} dt.$$

Más aún, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la *fórmula de Poisson*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(l).$$

Para $n \geq 1$ sea $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Entonces tenemos determinada una identificación natural entre las funciones \mathbb{Z}^n -invariantes en \mathbb{R}^n (medibles, continuas, diferenciables,...) y las funciones en \mathbb{T}^n (medibles, continuas, diferenciables,...)

La medida de Lebesgue dx en \mathbb{R}^n determina una medida de probabilidad dt en \mathbb{T}^n de la siguiente manera: una función f es integrable en \mathbb{T}^n si su correspondiente función \mathbb{Z}^n -invariante, la cual denotamos nuevamente por f , es integrable en el cubo $(0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$. En este caso escribimos

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t) dt = \int_{(0,1)^n} f(x) dx.$$

Sea $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones Lebesgue integrables en \mathbb{T}^n . Para $l \in \mathbb{Z}^n$, el l -ésimo coeficiente de Fourier esta dado por

$$\widehat{f}(l) := \int_{\mathbb{T}^n} f(t, s) e^{-2\pi i \langle t, l \rangle} dt,$$

donde \langle, \rangle denota le producto interno usual en \mathbb{R}^n . Si f es una función diferenciable en \mathbb{T}^n . Entonces

$$f(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(l) e^{2\pi i \langle t, l \rangle},$$

converge uniformemente un t .

Finalmente el teorema de Riemann-Lebesgue para $n = 1$ nos afirma que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

El grupo aditivo \mathbb{R} es isomorfo al grupo multiplicativo \mathbb{R}^\bullet de los reales positivos mediante el isomorfismo $e^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\bullet$. La *transformada de Mellin* resulta de trasladar el análisis de Fourier en \mathbb{R} a \mathbb{R}^\bullet mediante este isomorfismo.

Sea $f : \mathbb{R}^\bullet \rightarrow \mathbb{C}$ un función medible. La transformada de Mellin se define de la siguiente manera

$$\mathcal{M}_f(s) := \int_0^\infty f(y) y^s \frac{dy}{y}$$

siempre que esta integral sea absolutamente convergente. Observemos que si

$$\int_0^1 f(y) y^s \frac{dy}{y}$$

es absolutamente convergente para algún valor de s , entonces es absolutamente convergente para cualquier valor de más grande que s . Asimismo, si

$$\int_1^\infty f(y) y^s \frac{dy}{y}$$

es absolutamente convergente para algún s , entonces es absolutamente convergente para cualquier valor más pequeño que s . Luego, existen $\sigma_1, \sigma_2 \in (-\infty, \infty)$ tal que integral que define a $\mathcal{M}_f(s)$ es absolutamente convergente

para $\Re(s) \in (\sigma_1, \sigma_2)$, mientras que la integral es divergente para $\Re(s) < \sigma_1$ o $\Re(s) > \sigma_2$. Entonces, el dominio de $\mathcal{M}_f(s)$, si no es vacío, es una banda vertical que puede ser un hemiplano o todo \mathbb{C} . Para $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ y $0 < y < \infty$, tenemos la *fórmula de inversión de Mellin*

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{M}_f(s) y^{-s} ds,$$

donde la integral indica una integral de contorno sobre la recta vertical que pasa por σ .

Referencias

- [Ahl81] L. Ahlfors. *Complex Variable*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [Apo76] Tom. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag New York Inc., 1976.
- [BMP03] Michael Boileau, Sylvian Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et synthèses*. Société Mathématique de France, 2003.
- [Bom00] E. Bombieri. Problems of the millennium: the Riemann hypothesis. *CLAY*, 2000.
- [Bum96] Daniel Bump. *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge University Press, Cambridge studies in advanced mathematics 55, 1996.
- [Con99] Salvatore Consentino. Equidistribution of parabolic fixed points in the limit set of Kleinian groups. *Erg. Th. and Dynamical Systems. Cambridge University Press*, 19, 1999. 1437-1484.
- [Edw75] H.M Edwards. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1975.
- [Eul37] L. Euler. Variar observationes circa series infinitas. *Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, 9:222–236, 1737. Traducción al inglés.
- [Fre80] Eberhard Freitag. *Hilbert Modular Forms*. Springer-Verlag, 1980.
- [Kat04] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge Mathematical Library, Tercera Edición, 2004.
- [Lan94] Serge Lang. *Algebraic Number Theory*. Springer-Verlang. Segunda Edición, 1994.

- [MBB00] Matthias Mayer M. Bachir Bekka. *Ergodic Theory and Topological Dynamics of Group Actions on Homogeneous Spaces*. London Mathematical Society, Lecture Note Series 269, 2000.
- [Mon99] Michael Monastyrsky. *Riemann, Topology, and Physics*. Birkhäuser. Segunda Edición, 1999.
- [Mon03] J. M. Montesinos. *Calidoscopios y 3-Variedades*. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [Neu] Jürgen Neukirch. *Algebraic Number Theory*. A series of comprehensive studies in Mathematics. Vol. 322. Springer.
- [Rie59] B. Riemann. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer Gegebenen Grösse. *Monatber. der Preuss. Acad. Wiss.*, November 1859.
- [Sar80] P. Sarnak. Asymptotic behaviour of periodic orbits of the horocycle flow and Eisenstein series. *Comm. in Pure and App. Math.* 34, 1980. 719-739.
- [Thu80] W. P. Thurston. *Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lectures Notes. Princeton University, 1980.
- [Tit88] E.C. Titchmarsh. *The theory of Riemann Zeta-Funtion*. Oxford Univ. Press, London, 1988.
- [Ver82] Alberto Verjovsky. *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*. Cinvestav, 1982.
- [Ver92] A. Verjovsky. Arithmetic, geometry and dynamics in the modular orbifold. *Dynamical Systems (Santiago de Chile 1990)(Pitman Series 285)*, R Bamon, R. Labarca, J. Lewowicz, J. Palis, Longman, Essex, UK, 1992. 263-298.
- [Ver94] A. Verjovsky. Discrete measures and the Riemann hypothesis. *Kodai Math J.*, 17, 1994. 596-608.
- [Zag79] D. Zagier. Eisenstein series and the Riemann zeta function. *Automorphic Forms, Representation theory and Arithmetic, Tata Institute of Fundamental Reserch, Bombay*, 1979. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981, 275-301.

- [Zag92] D. Zagier. Introduction to modular forms. *From number theory to physics, Eds M.Waldshmidt, P.Moussa, J.-M. Luck and C.Itzykson. Springer, 1992. 238-291.*