



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Efecto de una perforación circular sobre la
transferencia de calor por conducción en una
placa rectangular

TESIS

que para obtener el título de:

FÍSICO

presenta:

Juan Carlos Cajas García

Director de tesis: Dr. César Treviño Treviño



2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

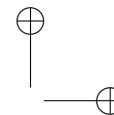
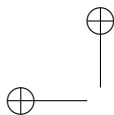
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

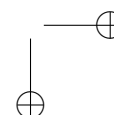
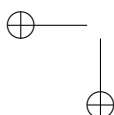
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Descripción del problema.	6
1.2.1. Estructura de tesis.	7
2. Conducción de calor.	9
2.1. El flujo de calor.	9
2.2. Ecuación diferencial para la conducción de calor.	10
2.3. Número de Nusselt.	13
3. Planteamiento del problema.	15
3.1. Planteamiento matemático del problema.	16
3.2. Adimensionalización de las ecuaciones y condiciones de frontera.	18
4. Esquema de la solución numérica.	19
4.1. Métodos numéricos para la solución de sistemas elípticos. . .	19
4.2. Generación del espacio computacional.	21
4.2.1. Métodos de generación de mallas computacionales. . .	22
4.3. Solución numérica del problema.	24
5. Solución analítica para radios de corte pequeños.	27
5.1. Solución analítica para la placa rectangular sin perforar. . . .	27
5.2. Solución analítica para radios de corte pequeños.	30
6. Resultados.	35
6.1. Resultados del método numérico.	35
6.2. Resultados numéricos para el número de Nusselt.	45
6.3. Comparación resultados numéricos-aproximación analítica. . .	48



IV

Índice general

7. Conclusiones	51
Bibliografía	53
A. Ecs. del sistema generador de mallas elípticas	55
A.1. La ecuación de Laplace en el espacio ξ, η	57
B. Cálculos para la aproximación de radios pequeños.	59
B.1. Cálculos para la placa rectangular sin perforar.	59
B.2. Cálculos de la solución analítica para radios pequeños.	62
C. Cálculo del número de Nusselt promedio.	65



Resumen

Utilizando un generador de mallas elíptico se analiza numéricamente el efecto de una perforación circular sobre la transferencia de calor en tres placas rectangulares, con diferentes razones entre la longitud y el ancho de la placa, para diferentes radios de corte. Se desarrolla una aproximación analítica de la solución del problema para radios de corte pequeños a partir del método de imágenes y de la formulación de flujos potenciales.

Se calcula el número de Nusselt promedio para los tres casos encontrando de esta manera una caracterización de los efectos del corte circular sobre la transferencia de calor en las tres placas. Además, al comparar los tres casos se encuentra que para radios de corte pequeños la transferencia de calor se ve afectada de manera independiente de la longitud de la placa. Para radios adimensionales intermedios los efectos negativos en la transferencia de calor son notoriamente mayores para la placa de longitud menor. Finalmente, para radios de corte grandes de nuevo se tiene que el efecto sobre la transferencia de calor es muy similar para las tres longitudes analizadas.

Capítulo 1

Introducción

La conducción es el proceso mediante el cual el calor se transfiere en los sólidos en presencia de un gradiente de temperatura, desde la región que se encuentra a temperatura mayor a la que se encuentra a temperatura menor. El flujo de calor a través del medio está relacionado con una propiedad intrínseca de los materiales llamada conductividad térmica; y es tal que la magnitud del flujo es proporcional a la magnitud de esta conductividad. El flujo de calor no se puede medir directamente, este concepto está relacionado con la cantidad escalar medible llamada temperatura. Es por esto que una vez que se conoce la distribución de temperatura dentro de un cuerpo en función de la posición y el tiempo, el flujo de calor puede ser calculado fácilmente de acuerdo a las leyes que relacionan el flujo de calor con el gradiente de temperatura. Por esta razón, el estudio de la conducción del calor se preocupa principalmente por la determinación de la distribución de la temperatura dentro de sólidos.

En la industria y en el ámbito experimental, muchas veces se trabaja para incrementar la conducción de calor, ya sea utilizando materiales con alta conductividad térmica o usando grandes áreas de contacto. En otras ocasiones el efecto buscado es exactamente el contrario, pero en cualquiera de los casos anteriores, el objetivo se logra a través del uso de intercambiadores de calor. Dependiendo del propósito de dichos dispositivos y de los criterios de construcción, se puede dar un número inmenso de configuraciones posibles. Además, en muchas ocasiones se tiene que los intercambiadores de calor utilizan materiales con conductividad térmica grande o tienen longitudes características pequeñas, lo que implica que la conducción será la

forma dominante de propagación de calor. Por estas razones, el estudio de la conducción de calor a través de medios con geometrías arbitrarias es de gran interés. Muchas veces la información más confiable se obtiene de mediciones directas provenientes de los experimentos. Sin embargo, realizar dichas mediciones no solo resulta económicamente costoso, sino que también consume mucho tiempo. Cada nuevo patrón requeriría la construcción de un nuevo modelo de intercambiador de calor para realizar las mediciones de manera directa.

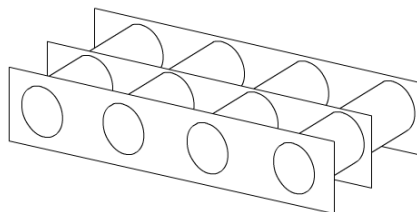
Otra forma de obtener datos de un intercambiador de calor sin necesidad de construirlo, es haciendo un estudio teórico, esto siempre y cuando el fenómeno en cuestión pueda describirse de manera apropiada por un modelo matemático. Desafortunadamente cuando se consideran geometrías arbitrarias en dispositivos de longitud finita el tratamiento analítico de las ecuaciones que describen la conducción de calor se complica enormemente. Por esta razón, las soluciones numéricas se han convertido en una buena alternativa en el tratamiento de problemas con geometrías complejas. Las simulaciones numéricas usualmente brindan predicciones razonables, especialmente cuando pueden reproducir los resultados para casos que no se alejan mucho de aquellos cuyos resultados han sido confirmados experimental o analíticamente.

Las aplicaciones de los intercambiadores de calor cubren un campo muy diverso. En el ramo de los alimentos se suelen utilizar en los procesos de enfriamiento, termización y pasteurización de diversos productos, como leche, salsas, vinagres, vinos y aceite. Además en la industria química y petroquímica son ampliamente utilizados para la producción de combustibles, pinturas y aceites industriales, entre otros productos. Son fundamentales para la industria del aire acondicionado y la calefacción, y permiten generar agua caliente a partir de paneles solares. Finalmente, en la industria del transporte se utilizan para el enfriamiento de motores y lubricantes.

El diseño y construcción de los intercambiadores de calor suele implicar el uso de arreglos de placas perforadas y tubos, como es el caso de los intercambiadores de placas-aletas y tubos, comunmente utilizados en los radiadores de los automoviles. La eficiencia de dichos dispositivos depende de sus propiedades geométricas y de los materiales utilizados en su cons-

trucción. Por este motivo los efectos de las perforaciones en las placas de los intercambiadores de calor han sido objeto de amplio estudio e interés. La figura 1.1 muestra un esquema de la sección de un intercambiadores de calor de placas-aletas y tubos.

Figura 1.1: Esquema intercambiador de calor.



1.1. Antecedentes

Para analizar problemas con geometrías complejas desde el enfoque de los métodos numéricos se suelen utilizar sistemas de coordenadas computacionales (mallas) que se ajustan a la forma del dominio físico estudiado. Con el objeto de tener un panorama general del empleo de dichos métodos en la resolución de diversos problemas de transferencia de calor se hace una breve revisión de trabajos anteriores con planteamientos similares al estudiado en el presente.

A continuación citamos dos ejemplos de la utilización de generadores de mallas computacionales. En 1997 Chen y Liu [1] resolvieron el problema de convección doble-difusiva debida a una fuente cilíndrica de calor sumergida en una solución salina inhomogénea utilizando un generador de mallas elíptico. Encontraron y caracterizaron dos tipos de inestabilidades en el campo de flujo debidas a la interacción del gradiente de temperatura con el gradiente de salinidad. Para el número de Nusselt local, que cuantifica la razón del flujo de calor por convección con el flujo de calor por conducción en cada punto, encontraron un perfil característico correspondiente a la convección de pluma y a una estructura escalonada; mientras que para el número de

Nusselt promedio obtuvieron un comportamiento entre la conducción pura y la convección natural, las diferencias son provocadas por la evolución de las capas salinas. Dos años más tarde se encuentra un ejemplo sencillo de la utilización de los generadores de mallas elípticos [2] donde Donghong utiliza dicho método para resolver un problema de transferencia de calor en un superficie bidimensional con geometría irregular y condiciones de frontera complejas.

En el estudio de los intercambiadores de calor, es muy común encontrar placas con perforaciones circulares para el diseño de intercambiadores de calor de placas-aletas y tubos. Análisis de este tipo de dispositivos se pueden encontrar en los siguientes trabajos: En 1999, R. Romero-Méndez, M. Sen, K.T. Yang y R. McClain [3] estudiaron el efecto de la separación entre dos aletas sobre la tasa total de transferencia de calor y la caída de presión en un intercambiador de calor de una sola fila de aletas y tubos utilizando visualización de flujo y métodos numéricos. Encontraron que si la distancia entre aletas es pequeña respecto al diámetro de los tubos, se obtiene un flujo de Hele-Shaw. A medida que la distancia entre las aletas se incrementa se forma un vórtice de herradura en el tubo, encontrando que el número de Nusselt muestra un máximo en dicho vórtice. Cuatro años más tarde Mi Sandar Mon y Ulrich Gross [4] estudiaron numéricamente el efecto del espaciamiento entre las aletas de un intercambiador de calor de cuatro filas construido con tubos y aletas anulares dispuestos en configuraciones lineal y escalonada y caracterizaron la transferencia de calor y la generación de vórtices entre aletas en función del espaciamiento entre las mismas. En 2004 Ereke y colaboradores [5] estudiaron numéricamente los efectos sobre la transferencia de calor y la caída de presión provocados por los cambios en la geometría de las aletas de un intercambiador de calor de tubos y placas-aletas, encontraron que el aumento en la separación de las placas-aletas provoca una gran disminución en la presión del flujo. También encontraron que al colocar los tubos aguas abajo se incrementa la transferencia de calor y al aumentar la elipticidad de los tubos la caída de presión se reduce considerablemente, de acuerdo con los experimentos descritos en [6]. En 2007, Wu y Tao [7] realizaron simulaciones numéricas en tres dimensiones para la transferencia de calor en flujos laminares de un intercambiador de calor de aletas y tubos con generadores de vórtices, analizando los efectos de las variaciones del número de Reynolds y el ángulo de ataque del generador de vórtices sobre la transferencia de calor.

1.1. ANTECEDENTES

5

También se encuentran geometrías similares a la estudiada en el presente trabajo al analizar el flujo de combustibles a través de arreglos de alambres catalíticos de sección circular. En 2004, M. Vera y A. Liñán [8] analizaron numéricamente la combustión de una mezcla reactiva que fluye a través de un arreglo de alambres catalíticos para bajos números de Peclet. Encontraron la dependencia de los valores de la temperatura lejos del arreglo de alambres en la dirección del flujo respecto a las fracciones másicas de los reactantes sobre el número de Peclet, el número de Lewis de los reactantes, la temperatura de los alambres y la razón de del radio de los alambres a la separación entre ellos. Posteriormente generalizaron el análisis para incluir los efectos de las reacciones homogéneas, demostraron que la tasa de consumo de combustible en la fase gaseosa crece con la razón de la velocidad de la flama laminar adiabática a la velocidad del flujo lejos del arreglo de alambres en la dirección contraria al flujo, el producto del número de Zeldovich, el número de Peclet y la temperatura adimensional de los alambres. Ese mismo año J. Lizardi, C. Treviño y A. Liñán [9] analizaron el problema de la transferencia de calor y la combustión heterogénea del flujo de una mezcla reactiva de hidrógeno/oxígeno que atraviesa un arreglo de alambres catalíticos. Encontraron la velocidad, vorticidad y temperatura del flujo, así como las concentraciones de los reactantes para diferentes números de Reynolds y para el valor 0.72 del número de Prandtl. De la misma forma encontraron la temperatura de ignición de las reacciones de superficie como función del número de Peclet para un alambre de radio 0.02 cm y una separación de 0.1 cm entre ellos. Es notable que los estudios sobre la transferencia de calor a través de superficies altamente irregulares han llegado a analizar geometrías prefractales. Blyth y Pozrikidis [10] analizaron la conducción de calor a través de superficies con geometrías fractales en dos dimensiones, encontrando el efecto que tienen dichas geometrías en la distribución del flujo y en el incremento de la tasa de transporte respecto a geometrías regulares y complejas.

En el ámbito experimental se han analizado ampliamente los fenómenos de flujo a través de obstáculos con geometría circular. J.Y. Kim y T.H Song [11] analizaron experimentalmente el flujo y la transferencia de calor sobre un ensamble de placas-aletas y tubos utilizando la técnica de sublimación de naftaleno. El estudio se realizó variando el número de Reynolds así como la razón de la separación de las placas al diámetro de los tubos y la localización de los mismos dentro del dispositivo experimental. Encontraron que el coeficiente local de transferencia de calor/masa del flujo a través de los tubos es grande tanto en el borde frontal de la placa como en la parte frontal del tu-

bo, tomando valores relativamente bajos detrás del mismo, aproximándose al valor dado por el análisis asintótico del problema aguas abajo. Utilizando a su vez la técnica de sublimación de naftaleno, S.M. Saboya y F.E.M. Saboya [6] estudiaron el flujo y la transferencia de calor a través de un arreglo de placas aletas y tubos de sección elíptica para números de Reynolds entre 150 y 1300. Los resultados obtenidos fueron comparados con aquellos para tubos de sección circular encontrando que las diferencias entre los coeficientes de transferencia de ambos casos no presentan discrepancias relevantes. Además, demuestran que el uso de tubos de sección elíptica disminuye considerablemente la caída de presión en el canal rectangular utilizado en el experimento y aumenta la eficiencia de las placas-aletas.

Ahora que se tiene una visión general de los estudios realizados para geometrías finitas con perforaciones u obstáculos circulares es posible plantear el problema que se desea resolver en el presente trabajo.

1.2. Descripción del problema.

En la sección anterior se ha resaltado la utilidad que tiene el estudio de las geometrías finitas con perforaciones u obstáculos circulares, principalmente en el diseño de intercambiadores de calor. Por esta razón se desea estudiar el efecto de una perforación circular sobre la transferencia de calor por conducción sobre una placa rectangular de dimensiones finitas. Se supondrá que los extremos opuestos por los lados más largos de la placa se encuentran en contacto con dos reservorios a temperaturas diferentes y que tanto la perforación circular como los extremos restantes de la placa están aislados de forma adiabática.

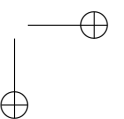
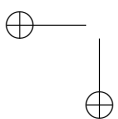
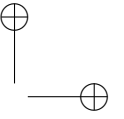
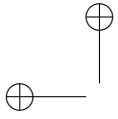
Para resolver el problema se desarrollará una aproximación analítica válida para cortes con radios pequeños respecto a la longitud de la placa, as como códigos numéricos que permitan obtener la solución para radios de corte mayores que los dados por la aproximación analítica. Todo esto siguiendo la siguiente estructura.

1.2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

7

1.2.1. Estructura de tesis.

- **Capítulo 1. Introducción.**
- **Capítulo 2. Conducción de calor.** Se darán las herramientas teóricas necesarias para la comprensión del problema estudiado.
- **Capítulo 3. Planteamiento del problema.** Se planteará el problema a resolver utilizando las herramientas matemáticas que se describen en el capítulo 2.
- **Capítulo 4. Esquema de la solución numérica.** Se describen las herramientas computacionales a utilizar para resolver el problema, además se describe el procedimiento seguido para encontrar la solución numérica del mismo.
- **Capítulo 5. Solución analítica para radios de corte pequeños.** Se desarrolla la solución analítica para radios de corte pequeños respecto a la longitud de la placa.
- **Capítulo 6. Resultados.**
- **Capítulo 7. Conclusiones.**



Capítulo 2

Conducción de calor.

2.1. El flujo de calor.

La ley básica que nos da la relación entre el flujo de calor y el gradiente de temperatura, basada en las observaciones experimentales, es la ley de Fourier, en honor al físico matemático francés Joseph Fourier, quien la utilizó en su teoría analítica del calor. Para un sólido homogéneo e isotrópico (es decir un material en el que la conductividad térmica no depende de la dirección) la *Ley de Fourier* está dada en la forma

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -k\nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

donde el gradiente de la temperatura ∇T es un vector normal a las superficies isotérmicas. El *vector flujo de calor* $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ representa la cantidad de calor por unidades de tiempo y de área de la superficie isotérmica en la dirección en la que decrece la temperatura. k es llamada la *conductividad térmica* del material y es una cantidad escalar positiva. Dado que el vector flujo de calor $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ apunta en la dirección decreciente de la temperatura, el signo menos se incluye en la ecuación (2.1) para hacer de la magnitud del flujo de calor una cantidad positiva. Cuando el flujo de calor está dado en W/m^2 y el gradiente de temperatura tiene unidades de $^{\circ}C/m$, la conductividad térmica k tiene unidades de $W/(m.^{\circ}C)$.

Claramente, la razón del flujo de calor para un gradiente de temperatura dado es directamente proporcional a la conductividad térmica del material k . Por lo tanto, en el análisis de la conducción de calor, la conductividad térmica del material es una propiedad esencial que controla la razón de flujo de calor en el medio. Existe una amplia diferencia entre las conductividades térmicas de los diversos materiales que se usan en la industria. Los valores más altos corresponden a metales puros y los más bajos a gases y vapores. Los materiales aislantes amorfos y los líquidos orgánicos tienen conductividades térmicas intermedias. La conductividad térmica también depende de la temperatura. Para la mayoría de los metales puros decrece con la temperatura, mientras que para los gases se incrementa conforme aumenta la temperatura. Para la mayoría de los materiales aislantes, la conductividad térmica aumenta cuando aumenta la temperatura.

2.2. Ecuación diferencial para la conducción de calor.

A continuación se deriva la ecuación diferencial para la conducción de calor para un sólido estacionario, homogéneo e isotrópico con una fuente de calor en su interior [12]. La generación de calor puede deberse a causas nucleares, eléctricas, químicas, o a otras fuentes que pueden ser funciones del tiempo y/o de la posición. La razón de generación de calor en el medio, generalmente especificada como generación de calor por unidad de tiempo, por unidad de volumen, es denotada por el símbolo $g(\mathbf{r}, t)$, y si se utilizan las unidades del SI está dada en W/m^3 .

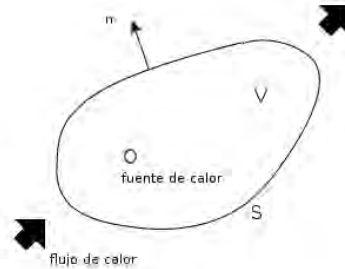
Consideremos la ecuación de balance de energía para un pequeño volumen de control V , ilustrado en la figura 2.1, dada como

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{flujo de calor entrante a través} & & \text{calor producido} & & \text{energía} \\
 \text{de la} & & \text{en el} & = & \text{en el} \\
 \text{superficie límite del material} & + & \text{interior de } V & & \text{interior de } V
 \end{array}$$

Los términos de esta expresión se pueden evaluar de la siguiente manera

2.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA LA CONDUCCIÓN DE CALOR.11

Figura 2.1: Energía almacenada en V .



flujo de calor entrante a través de la superficie límite del material =

$$-\int_A \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dv \quad (2.2)$$

donde A es la superficie que contiene al elemento de volumen V , $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario al elemento de superficie dA que apunta hacia afuera de la superficie, \mathbf{q} es el vector de flujo de calor sobre dA . El signo menos se incluye para asegurar que el flujo de calor es hacia adentro del elemento de volumen V y se usó el teorema de la divergencia para convertir la integral de superficie en una integral de volumen. Los dos términos restantes son evaluados de la siguiente manera

$$\text{energía generada en } V = \int_V g(\mathbf{r}, t) dv \quad (2.3)$$

$$\text{energía almacenada en } V = \int_V \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dv \quad (2.4)$$

donde C_p es la capacidad calorífica a presión constante.

La sustitución de las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) en la ecuación (2.2) nos da como resultado

$$\int_v \left[-\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) - \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] dv \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) fue derivada para un elemento de volumen arbitrariamente pequeño dentro del sólido; por tanto V puede elegirse tan pequeño como sea necesario para remover la integral. Obteniendo

$$-\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) = \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

Sustituyendo la ecuación (2.1) en la ecuación (2.6), se obtiene *la ecuación diferencial de la conducción de calor* para un sólido estacionario, homogéneo e isotrópico con generación de calor en su interior como

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\mathbf{r}, t)] + g(\mathbf{r}, t) = \rho C_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

En esta ecuación se considera que k puede depender del espacio o de la temperatura $k = k(\mathbf{r}, \mathbf{T})$ así como también se considera que C_p depende de la temperatura. Cuando se supone que la conductividad térmica es constante (es decir, no depende de la posición ni de la temperatura), la ecuación (2.10) se simplifica en

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{k} g(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

donde

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \text{difusividad térmica} \quad (2.9)$$

Para un medio con conductividad térmica constante y sin fuentes generadoras de calor, la ecuación (2.8) se convierte en la ecuación de Fourier.

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

En esta expresión la difusividad térmica α es una propiedad del medio y tiene dimensiones de longitud²/tiempo, y puede estar dada en unidades de m²/h o m²/s. El significado físico de la difusividad térmica está asociado con la rapidez de propagación del calor dentro del sólido durante cambios de temperatura en el tiempo. Mientras más alta sea la difusividad térmica, más rápido se propagará el calor en el medio.

2.3. Número de Nusselt.

El número de Nusselt es un número adimensional que permite medir la magnitud del flujo de calor por conducción en un proceso dado. También puede considerarse que el número de Nusselt es un gradiente adimensional de la temperatura sobre la superficie en la que tiene lugar el proceso de transferencia de calor. El número de Nusselt se define como

$$Nu = \frac{hL}{k}, \quad (2.11)$$

donde L es una longitud característica del sistema y h es el coeficiente de intercambio térmico, que se define de tal forma que

$$\mathbf{q} = h(T_1 - T_0)\hat{n},$$

donde T_1 es la temperatura de una de las paredes que limitan el espacio donde ocurre la transferencia de calor y T_0 es la temperatura de la pared restante.

Haciendo

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0},$$

también se hace

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L},$$

se obtiene que el gradiente respecto a las variables adimensionales, denotado por ∇^* , de la temperatura adimensional es

$$\nabla T = \frac{T_1 - T_0}{L} \nabla^* T^*,$$

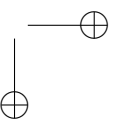
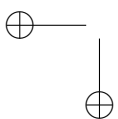
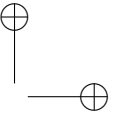
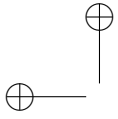
y h queda expresada como

$$|h| = \frac{k}{L} \nabla^* T^* \Big|_{pared},$$

y por tanto el número de Nusselt es

$$Nu = \nabla^* T^* \Big|_{pared} \cdot \hat{n}. \quad (2.12)$$

Y será utilizado para medir la magnitud del flujo de calor en la placa.

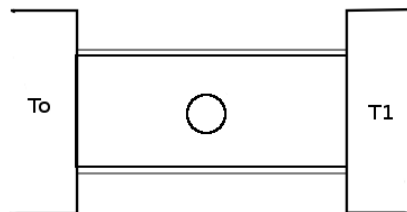


Capítulo 3

Planteamiento del problema.

Se considera una placa rectangular de longitud $2L$ y ancho $2a$ con una perforación circular en el centro de radio r_0 . Los extremos opuestos por los lados más largos de la placa se encuentran en contacto con dos reservorios a temperaturas diferentes T_0 y T_1 con $T_1 > T_0$; la perforación y los dos extremos restantes de la placa se aíslan adiabáticamente como se muestra en la figura 3.1. Además, supondremos que se ha llegado al estado estacionario, es decir, el campo de temperatura sobre la placa es constante en el tiempo. Nos interesa conocer dicho campo de temperaturas y saber cómo afecta el radio del corte al proceso de transferencia de calor sobre la placa.

Figura 3.1: Esquema del problema a resolver.



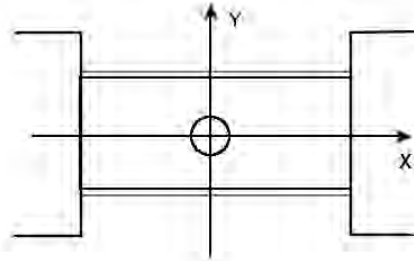
3.1. Planteamiento matemático del problema.

Una vez que se ha especificado el problema a resolver es posible invocar a la ecuación de calor (2.10) para hacer la descripción matemática del problema. El segundo término de dicha ecuación se anula ya que estamos considerando el caso en el que se ha alcanzado el estado estacionario, obteniendo de esta manera la ecuación

$$\nabla^2 T(x, y) = 0, \quad (3.1)$$

que es la ecuación de Laplace. Coloquemos ahora el origen de un sistema coordenado en el centro de la perforación circular de modo que el eje y este situado a la mitad de la placa y sea paralelo a los extremos que están en contacto con los reservorios, como se ilustra en la figura 3.2.

Figura 3.2: Sistema de referencia cartesiano utilizado.



Debido a la simetría existente en la placa respecto al eje x podemos considerar únicamente la mitad superior de la misma para resolver la ecuación de Laplace. Por esta razón cuando más adelante se mencionen las fronteras del problema a resolver, se debe tener en cuenta solamente la mitad de la placa.

3.1. PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA.

17

Para plantear el problema de forma cerrada es necesario considerar las condiciones de frontera. Para los extremos que están en contacto con los reservorios tenemos

$$\begin{aligned} T(x = -L, y) &= T_0, \\ T(x = L, y) &= T_1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para las paredes restantes de la placa tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x,y=0)} &= 0, \quad x \in (-L, -r_0) \cup (r_0, L) \\ \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big|_{y=\sqrt{r_0^2-x^2}} &= 0, \quad x \in (-r_0, r_0) \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x,y=a/2)} &= 0, \quad x \in (-L, L) \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde \hat{n} es la dirección normal a la circunferencia.

Por tanto podemos reescribir el problema a resolver de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= 0 \\ T(x = -L, y) &= T_0 \\ T(x = L, y) &= T_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x,y=0)} &= 0, \quad x \in (-L, -r_0) \cup (r_0, L) \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{(x,y=a)} &= 0, \quad x \in (-L, L) \\ \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big|_{y=\sqrt{r_0^2-x^2}} &= 0, \quad x \in (-r_0, r_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Adimensionalización de las ecuaciones y condiciones de frontera.

Las ecuaciones planteadas anteriormente se encuentran escritas de forma dimensional y corresponden a un problema particular definido por la temperatura de cada reservorio y por las longitudes de la placa. Sin embargo, mediante cambios de variable adecuados que consideren una temperatura y una longitud características del problema se pueden reformular dichas ecuaciones de forma adimensional. Lo que corresponde a una descripción general del problema que nos da la solución sin importar la temperatura de los reservorios.

La longitud característica que se considera en este problema es la mitad del ancho de la placa denotado por la letra a , con lo que se estudiará el efecto de la perforación circular sobre placas de distinta longitud. De esta forma se tienen las siguientes expresiones para las variables espaciales

$$x^* = \frac{x}{a}, \quad y^* = \frac{y}{a}.$$

El cambio de variable adecuado para la temperatura en nuestro problema es el siguiente:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad (3.5)$$

Aquí las variables adimensionales son denotadas por x^* , y^* y θ . Se definen $\epsilon = \frac{r_0}{a}$ y $l = \frac{L}{a}$ y se omiten los superíndices para simplificar la notación. De esta forma las ecuaciones (3.4) se transforman en

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta(x, y) &= 0 \\ \theta(x = -l, y) &= 0 \\ \theta(x = l, y) &= 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x, y=0)} &= 0, \quad x \in (-l, -\epsilon) \cup (\epsilon, l) \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{(x, y=1)} &= 0, \quad x \in (-l, l) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \hat{n}} \Big|_{y=\sqrt{\epsilon^2 - x^2}} &= 0, \quad x \in (-\epsilon, \epsilon) \end{aligned} \quad (3.6)$$

que es el problema a resolver en este trabajo.

Capítulo 4

Esquema de la solución numérica.

4.1. Métodos numéricos para la solución de sistemas elípticos.

La ecuación que rige el fenómeno a estudiar en el presente trabajo es la ecuación de Laplace (3.1), que es una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden. Para resolver numéricamente este tipo de ecuaciones se puede utilizar el método de diferencia finita, en el que la ecuación diferencial parcial se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas.

Uno de los métodos más populares utilizado en décadas anteriores para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas es el de Gauss-Seidel, que es un método iterativo que en el que éstas ecuaciones pueden representarse en forma matricial como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

La iteración de Gauss-Seidel es

$$\mathbf{x}^{j+1} = (D - L)^{-1}(U\mathbf{x}^j + \mathbf{b}),$$

donde D , $-L$ y $-U$ representan la diagonal, la estricta parte triangular inferior y la estricta parte triangular superior de la matriz A respectivamente y j es el paso de iteración.

20 *CAPÍTULO 4. ESQUEMA DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA.*

En este método cada componente de la nueva iteración depende de todas las componentes previamente calculadas. Además, la nueva iteración \mathbf{x}^{k+1} depende también del orden en el que las ecuaciones son resueltas. Si el orden cambia, las componentes de la nueva iteración también cambiarán y no solamente el orden de las mismas. Este método tiene la virtud de generar poca carga en memoria, puesto que todos los cálculos se cargan al procesador.

Otro método muy común en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones es la descomposición LU (Lower-Upper Band) derivado del método de Gauss-Seidel. Consiste en una descomposición de matrices que expresa una matriz como el producto de dos matrices triangulares superior e inferior. Este método se usa en análisis numérico para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas o para encontrar la inversa de una matriz.

La mayor ventaja que presenta este método es que toma el sistema de ecuaciones completo y lo resuelve en un solo paso, es decir, no hace iteraciones hasta cumplir un criterio de convergencia. Sin embargo, presenta la desventaja de que es necesario construir una matriz muy grande de tamaño $(m_i * n_j)^2$ y la cantidad de memoria necesaria para resolver el sistema se vuelve considerable, lo que hace necesario contar con un equipo de cómputo especial.

Finalmente, dentro de los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden se encuentra el método de tridiagonales. Este método consiste en escribir las ecuaciones algebraicas obtenidas de la discretización de las ecuaciones diferenciales, como el producto de una matriz tridiagonal de coeficientes por un vector de incógnitas que representan los puntos de la discretización. Dicho producto se iguala a un vector de resultados que se va construyendo a partir de las condiciones de frontera del problema.

Aunque este método fue desarrollado en principio para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una forma de adaptarlo para resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Dicho método se propuso en el año de 1976 para resolver ecuaciones de Poisson y no goza de mucha popularidad en nuestros días. Sin embargo, es un método poderoso que permite resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden como dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden por medio de dos tridiagonales acopladas. Éste método será utilizado para resolver la ecuación de Laplace (3.1) en el presente trabajo.

4.2. Generación del espacio computacional.

La principal dificultad que se presenta al abordar el problema (3.6) es la geometría de la placa, que es compleja a pesar de poseer dos ejes de simetría. Esto se debe a que las condiciones de frontera se imponen considerando que la placa tiene dimensiones finitas al mismo tiempo que se toma en cuenta la frontera circular.

Para resolver esta dificultad se pensó en la utilización de una malla computacional que proporcionara un escenario cercano al real. Existen muchos métodos para la generación de mallas computacionales pero todos deben cumplir los siguientes objetivos [13].

1. *Minimizar errores numéricos.* La resolución y la orientación de la malla con respecto a la dirección del flujo pueden afectar a las fuentes de errores numéricos, tales como los errores por redondeo y por truncamiento.

2. *Proporcionar estabilidad numérica.* En algunos métodos numéricos, como los métodos explícitos de diferencia finita o de elemento finito, la estabilidad, depende del tamaño del elemento discretizado.

3. *Proporcionar economía en los cálculos computacionales.* Obviamente, mientras mayor sea el número de nodos en la malla, serán necesarios más cálculos numéricos.

4. *Proporcionar un fácil manejo de las condiciones de frontera.* En algunos casos las condiciones de frontera pueden involucrar derivadas normales. Consecuentemente es ventajoso tener líneas de malla que se ajusten a las fronteras de una manera ortogonal.

4.2.1. Métodos de generación de mallas computacionales.

En la literatura existen muchos métodos para generar mallas computacionales, y en esta sección se da una breve descripción de cuatro de estos métodos.

Métodos algebraicos

Mapeo Bilineal

El mapeo bilineal se usa ampliamente cuando las fronteras del problema físico son cuadriláteros y consiste en una transformación de coordenadas mediante funciones lineales que mapean al cuadrilátero unitario del espacio computacional en la frontera del problema físico.

Interpolación transfinita

Este método es muy similar al mapeo bilineal, con la diferencia de que en este caso las fronteras de nuestro espacio físico son expresadas como funciones no necesariamente lineales, lo que permite modelar mallas cuadrilaterales con bordes irregulares. La principal ventaja de estos métodos es la facilidad y la rapidez con las que se genera la malla. Sin embargo, tienen la gran desventaja de no proporcionar suavidad en la malla en algunos casos.

Método de interpolación a través de los polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite proveen un método muy útil de transformación de coordenadas para la generación de mallas. Se caracterizan por proporcionar una gran rapidez de cálculo, además de que brindan estabilidad al sistema de resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, tienen la desventaja de que las singularidades generadas por las esquinas de las condiciones de frontera se propagan con cierta facilidad hacia dentro de la malla, lo cual puede resolverse redondeando las esquinas y adaptando las condiciones de frontera sobre la región de singularidad.

4.2. GENERACIÓN DEL ESPACIO COMPUTACIONAL.

23

Tomando en cuenta que para el problema a tratar es necesario tener una malla suave que pueda dar una representación cercana al espacio físico incluyendo las singularidades de las esquinas, se analiza un método más.

Sistemas de coordenadas diferencial.

Un sistema de coordenadas diferencial (DCS, por sus siglas en inglés) es aquel en el que las funciones de coordenadas de la transformación son definidas usando ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Las transformaciones por sistemas de coordenadas diferencial son particularmente útiles en problemas que tienen dominios físicos con fronteras complejas o irregulares. Muchas veces son preferidos sobre los métodos algebraicos porque pueden ser manipulados para asegurar suavidad e incluso ortogonalidad en la generación de la malla. En contraparte, este método incluye algoritmos computacionales más sofisticados y aumenta el tiempo de cómputo.

En muchos casos, la aplicación de este método está restringida a las transformaciones planas, es decir, mapeos de un espacio computacional bidimensional a un espacio físico bidimensional. Esto se debe a que gran parte de la teoría y aplicación de la generación de mallas diferencial es resultado de la teoría del mapeo conforme, la cual está restringida al caso de dos dimensiones. Sin embargo, muchos de los desarrollos resultantes de la teoría del mapeo conforme, tales como las transformaciones elípticas, pueden ser aplicadas al caso tridimensional.

Los métodos elípticos tienen la ventaja de ser estables frente a pequeñas variaciones de las fronteras físicas, además de que proporcionan suavidad en el interior de la malla sin importar que las funciones que definen a las fronteras no sean suaves. Por otra parte, una de las principales desventajas de este método es que no garantiza una solución inyectiva, es decir, pueden existir regiones del dominio físico donde la malla esté *doblada*. Esta dificultad se presenta principalmente en dominios físicos no convexos.

Entre los métodos de generación de sistemas de coordenadas diferencial se encuentran el método elíptico, el método hiperbólico y los métodos adaptativo y multinivel. A continuación daremos una descripción más detallada del primero de estos métodos.

Método elíptico de generación de mallas.

Este método fue desarrollado por Thompson a finales de los años 70 y principios de los 80 [14] y [15]. En principio se utilizó para calcular los esfuerzos del flujo sobre superficies complejas sumergidas en medios infinitos. Desarrollos posteriores del mismo pueden encontrarse en [16] y [17]. La base de este método es la ecuación de Poisson, que es una ecuación diferencial parcial elíptica de segundo orden. La transformación de coordenadas se define usando un sistema de ecuaciones de Poisson con condiciones de frontera adecuadas al espacio físico. La forma de la ecuación de Poisson permite introducir funciones de control que brindan la posibilidad de distribuir de manera conveniente las líneas de la malla dentro del espacio computacional, logrando de esta manera hacer más densa a la malla en las regiones donde se producen gradientes importantes dentro del dominio físico.

En vista de las ventajas que proporciona este método (estabilidad ante cambios pequeños de las fronteras físicas y suavidad al interior de la malla aunque las funciones que definen a las fronteras no sean suaves) se le considera como el método ideal para resolver el problema (3.6), pues las esquinas de la placa no crearán singularidades al interior de la misma y el corte circular puede ser representado escribiendo condiciones de frontera de manera adecuada. El único inconveniente que debe ser considerado es que el dominio físico es no convexo, lo que puede provocar que la malla sea no inyectiva.

4.3. Solución numérica del problema.

Ahora que se ha elegido un método para resolver la ecuación de Laplace y uno para generar el espacio computacional se procede a describir el procedimiento para resolver el problema completo de forma numérica.

Primero se genera una malla utilizando un sistema de ecuaciones de Laplace con condiciones de frontera adecuadas a la forma de la placa. En primera instancia se imponen condiciones de frontera que se ajusten a los bordes de la placa con una distribución lineal. Las ecuaciones que se obtienen se resuelven utilizando el método de tridiagonales acopladas, iterando hasta conseguir que la diferencia máxima entre dos iteraciones sea menor que 1×10^{-8} .

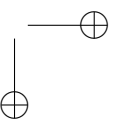
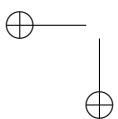
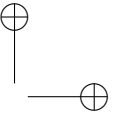
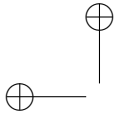
4.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA.

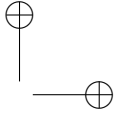
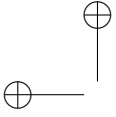
25

Posteriormente, se construye una segunda malla con las mismas condiciones de frontera que la primera pero utilizando ahora la ecuación de Laplace escrita en las coordenadas del espacio computacional. Dicha ecuación se escribe a través de coeficientes de transformación que se calculan usando la malla anterior. Nuevamente se itera el sistema hasta obtener una diferencia máxima entre dos iteraciones menor a 1×10^{-8} .

Finalmente, se crea una tercera malla con un sistema de ecuaciones de tipo Poisson. La forma de dichas ecuaciones hace posible introducir funciones de control que permiten ajustar la densidad de líneas de malla en el interior de la placa, nutriendo mayormente la malla alrededor del corte circular y en los extremos de la placa. Se imponen condiciones de frontera ortogonales en lugar de la distribución lineal que se tenía en las mallas anteriores, únicamente no se impone dicha condición de frontera sobre el corte circular pues esto sobredeterminaría el problema. Nuevamente se realizan iteraciones hasta conseguir que la diferencia máxima entre dos iteraciones sea menor a 1×10^{-8} .

Una vez que se tiene la malla adecuada y se confirma que no existen puntos en los cuales no sea inyectiva se procede a resolver el problema (3.6), obteniendo de esta manera el campo de temperatura sobre la placa. La función de la malla es proporcionar un mapeo inyectivo del espacio físico a un espacio computacional con la forma de un cuadrado unitario. Dicho mapeo permite resolver la ecuación de Laplace en el espacio cuadrado utilizando coeficientes de transformación adecuados, los cuales son calculados a partir de los valores obtenidos de la malla. Una vez que los coeficientes han sido calculados se resuelven las ecuaciones en el espacio cuadrado. Posteriormente se vuelve a utilizar la malla para escribir la solución en el espacio físico utilizando el hecho de que nuestro mapeo es uno a uno. Los detalles de la transformación de las ecuaciones al espacio computacional cuadrado, así como la forma de los coeficientes de transformación están descritos en el apéndice A.





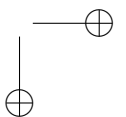
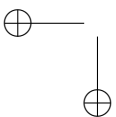
Capítulo 5

Solución analítica para radios de corte pequeños.

5.1. Solución analítica para la placa rectangular sin perforar.

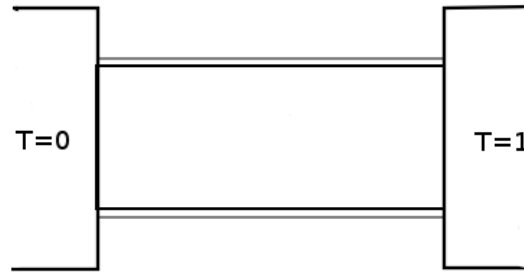
Si se considera que la perforación circular es muy pequeña en comparación con el ancho de la placa se puede dar una solución aproximada del problema (3.6) siguiendo los métodos de las imágenes y de flujos potenciales [18].

En primer lugar se analiza el caso de una placa rectangular de longitud $2l$ y ancho unitario sin perforar donde los extremos opuestos por los lados más largos de la placa se encuentran en contacto con dos reservorios a temperaturas diferentes 0 y 1, respectivamente. Los dos extremos restantes de la placa se aíslan adiabáticamente como se muestra en la figura 5.1.



28CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA RADIOS DE CORTE PEQUEÑOS.

Figura 5.1: Placa rectangular sin perforar.



Por tanto el problema a resolver es

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 T_p(x, y) &= 0 \\
 T_p(x = -l, y) &= T_0 \\
 T_p(x = l, y) &= T_1 \\
 \frac{\partial T_p}{\partial y} \Big|_{(x, y=0)} &= 0 \\
 \frac{\partial T_p}{\partial y} \Big|_{(x, y=1)} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

donde T_p denota la temperatura sobre la placa.

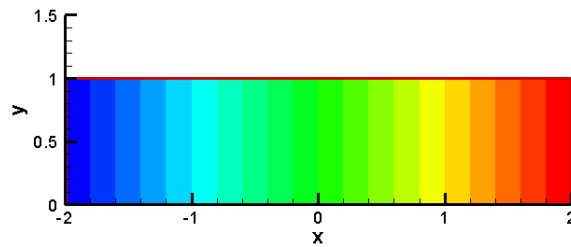
La solución a este problema se puede encontrar fácilmente aplicando el método de separación de variables a la ecuación de Laplace, encontrando la siguiente expresión para el campo de temperatura

$$T_p(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} + 1 \right)
 \tag{5.2}$$

5.1. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA LA PLACA RECTANGULAR SIN PERFORAR.29

Los detalles de la solución de este problema se encuentran en el apéndice B. La figura 5.2 muestra la distribución de temperatura dada por la función (5.2) para una placa de longitud $2l = 4$. El color azul representa la temperatura $T = 0$ mientras el rojo representa $T = 1$

Figura 5.2: Temperatura sobre una placa rectangular con $2l = 4$.



Se hace notar que el gradiente de la función (5.2) es constante y está dado por

$$\nabla T_p(x, y) = \left(\frac{1}{2l}, 0 \right) \quad (5.3)$$

5.2. Solución analítica para radios de corte pequeños.

Cuando el radio del corte r es pequeño en comparación con el ancho total de la placa, es posible utilizar un enfoque análogo al que frecuentemente se utiliza al analizar flujos laminares a través de esferas o cilindros, es decir, el enfoque de los potenciales complejos. Es bien sabido que para obtener la solución al problema de un flujo laminar que fluye a través de un cilindro se utiliza la suma de los potenciales complejos debidos a un flujo uniforme y a un dipolo puntual. Al analizar el problema del presente trabajo es claro que se puede tomar ventaja de esto ya que la geometría de ambos problemas es muy similar, además de que ambos fenómenos están regidos por la ecuación de Laplace en los casos estacionarios. De esta manera es posible construir una solución analítica utilizando los potenciales complejos y el método de las imágenes.

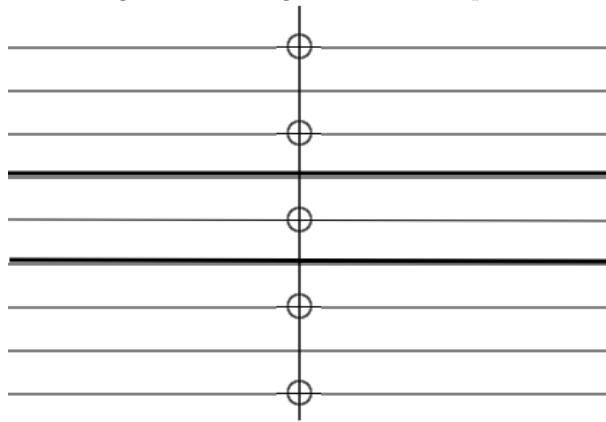
En principio se hace notar que una primera aproximación a la solución del problema (3.6) puede encontrarse utilizando la analogía con el caso del flujo laminar a través de un cilindro. Desafortunadamente en dicho problema se toma al cilindro como la única frontera del problema, esto es, se considera que el fluido llena una extensión infinita del espacio. En el caso tratado en este trabajo se tiene una placa de dimensión finita que además debe cumplir con las condiciones de frontera del problema (3.6) y por tanto no es posible utilizar solamente esta aproximación. Sin embargo, no es muy complicado imaginar un arreglo de soluciones de este tipo que tome en cuenta las condiciones de frontera.

En vista de que la placa considerada es aislante en todos sus bordes excepto en los extremos que se encuentran en contacto con los baños térmicos, es claro que la función que sea la solución para la temperatura en el problema (3.6) debe cumplir con ser ortogonal en los bordes aislantes de la placa. La suma de los potenciales para el flujo constante y para el dipolo aseguran la ortogonalidad de la solución sobre el corte circular y el borde inferior de la placa; desgraciadamente no aseguran la ortogonalidad en el borde superior, pues la contribución del dipolo no puede ser despreciada debido a que la placa es de dimensión finita. Se puede resolver esta dificultad si se coloca un segundo dipolo como imagen del primero utilizando el borde superior de la placa como eje de simetría, lo que garantiza la ortogonalidad sobre dicho borde pero afecta la ortogonalidad sobre el corte circular y sobre el borde inferior de la placa. Es posible resolver a su vez

5.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA RADIOS DE CORTE PEQUEÑOS.31

dicho inconveniente poniendo un nuevo dipolo como imagen del segundo, utilizando el borde inferior de la placa como eje de simetría, esto afecta de nueva cuenta la ortogonalidad en el borde superior de la placa por lo que se debe colocar un dipolo más como imagen de este último. Se hace notar que este proceso genera un arreglo infinito de dipolos equidistantes situados sobre el eje vertical de la placa, donde la separación entre los dipolos es el doble del ancho de la placa. El arreglo construido de esta forma puede verse esquemáticamente en la figura 5.3.

Figura 5.3: Arreglo infinito de dipolos.



El potencial complejo asociado un solo dipolo de magnitud unitaria es

$$\psi(z) = \frac{1}{z - z_0},$$

donde z_0 es el punto donde se localiza el dipolo, por tanto el potencial complejo asociado al arreglo infinito de dipolos es

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2ik} + \frac{1}{z + 2ik} \right)$$

Esta suma converge a la cotangente hiperbólica, esto es

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2ik} + \frac{1}{z + 2ik} \right) = \frac{\pi}{2} \coth\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad (5.4)$$

32CAPÍTULO 5. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA RADIOS DE CORTE PEQUEÑOS.

La expresión para la temperatura estará dada por la parte real de (5.4), que resulta ser

$$\theta_D(x, y) = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)}. \quad (5.5)$$

Por tanto, la solución del problema (3.6) será de la forma

$$\theta(x, y) = A + \frac{Bx}{2l} + \frac{m \sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)}, \quad (5.6)$$

donde el A, B y m son constantes que se determinarán mediante las condiciones de frontera y el término $\frac{x}{2l}$ corresponde al flujo uniforme de calor sobre la placa sin perforar que fue determinado en la sección 5.1.

La constante m se puede obtener a partir de una aproximación de la ecuación (5.6) para valores de x e y cercanos al radio del corte. Los cálculos correspondientes se encuentran en el apéndice B.2, siendo el resultado hasta segundo orden en ϵ

$$m = \frac{3\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)}.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\theta(x, y) = A + \frac{Bx}{2l} + \frac{3\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)}. \quad (5.7)$$

Ahora, para los extremos de la placa en contacto con los reservorios se deben cumplir las condiciones de frontera correspondientes del problema (3.6), las cuales se pueden expresar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lim_{x/\epsilon \gg 1} \theta(x, y) &= 1, \\ \lim_{x/\epsilon \ll -1} \theta(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que estamos considerando que el radio del corte es pequeño, estas dos condiciones conducen a

$$A = \frac{1}{2}, \quad (5.8)$$

$$B = 1 - \frac{6\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} + O(\epsilon^4). \quad (5.9)$$

5.2. SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA RADIOS DE CORTE PEQUEÑOS.33

Finalmente, la solución del problema (3.6) para radios de corte pequeños es

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{6\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)}\right) \frac{x}{2l} + \frac{3\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{\operatorname{senh}(\pi x)}{\operatorname{cosh}(\pi x) - \cos(\pi y)} + O(\epsilon^4) \quad (5.10)$$

De la expresión (5.10) es posible obtener el número de Nusselt tomando la derivada parcial con respecto de x e integrando respecto a y , dando como resultado

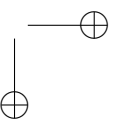
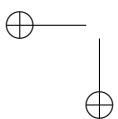
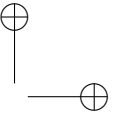
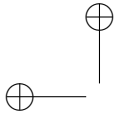
$$\bar{N}u = \frac{1}{2l} - \frac{3\pi\epsilon^2}{l^2(12 - \pi^2\epsilon^2)}. \quad (5.11)$$

De manera normalizada respecto al número de Nusselt promedio correspondiente a la placa no perforada se tiene

$$\frac{\bar{N}u}{Nu_0} = 1 - \frac{6\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)}. \quad (5.12)$$

Los cálculos correspondientes se encuentran en el apéndice B.2. Las expresiones (5.11) y (5.12) permitirán dar validez a los resultados numéricos obtenidos.

Cabe mencionar que para obtener las expresiones (5.11) y (5.12) se consideró que la placa es de longitud infinita. Dicha suposición es válida cuando el radio de corte es muy pequeño respecto a la longitud de la placa, y permite resolver el problema (3.6) considerando las condiciones de frontera en los extremos en contacto con los reservorios como límites al infinito. De no hacer esto, el problema queda sobredeterminado, pues se tienen demasiadas condiciones de frontera dado que las dimensiones de la placa son finitas. Por esta razón, no es posible extender más la aproximación analítica y se recurre a los métodos numéricos.



Capítulo 6

Resultados.

6.1. Resultados del método numérico.

A partir del método numérico descrito en la sección 4.3, se generaron mallas computacionales con la geometría que demanda el problema (3.6). Dichas mallas se generaron en tres pasos, donde los resultados correspondientes a cada paso se muestran a continuación en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3.

Figura 6.1: Malla en primera fase.

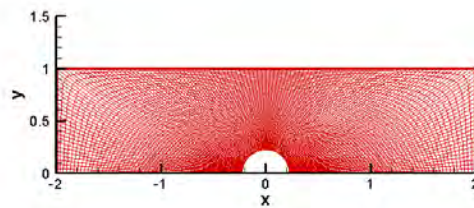


Figura 6.2: Malla en segunda fase.

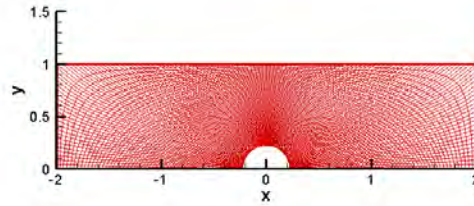
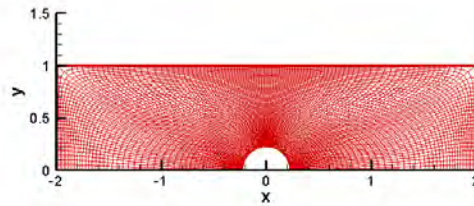


Figura 6.3: Malla en tercera fase.



6.1. RESULTADOS DEL MÉTODO NUMÉRICO.

37

Utilizando mallas como la mostrada en la figura 6.3 se calculó el campo de temperaturas para placas de diferentes longitudes y con cortes de diferentes radios. A continuación, en las figuras 6.4, 6.5, 6.6 y 6.7, se muestran cuatro casos correspondientes a placas de longitud $2l = 3$ y radios de corte $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.21$, $\epsilon = 0.47$ y $\epsilon = 0.69$ respectivamente.

Figura 6.4: Isotermas para $2l = 3$ y $\epsilon = 0.05$

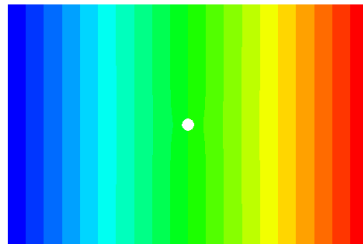


Figura 6.5: Isotermas para $2l = 3$ y $\epsilon = 0.21$

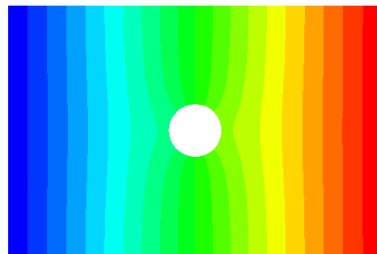


Figura 6.6: Isotermas para $2l = 3$ y $\epsilon = 0.47$

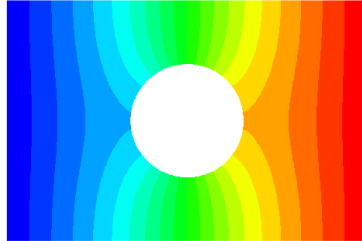
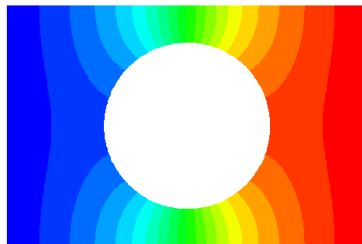


Figura 6.7: Isotermas para $2l = 3$ y $\epsilon = 0.69$



En la figura 6.4 se aprecia que para el caso extremo $\epsilon = 0.05$ el campo de temperatura es muy similar al esperado para una placa rectangular sin perforación alguna, figura 5.2.

6.1. RESULTADOS DEL MÉTODO NUMÉRICO.

39

Para el caso intermedio $\epsilon = 0.21$ de la figura 6.5, se observa una deformación en el campo de temperaturas sobre el corte circular y se aprecia que dicha deformación afecta ligeramente el campo de temperaturas en el borde superior de la placa y prácticamente no afecta a la temperatura cerca de los extremos en contacto con los reservorios respecto al caso de $\epsilon = 0.05$.

Para $\epsilon = 0.47$ mostrado en la figura 6.6, se aprecia que la deformación del campo de temperatura alcanza el borde superior de la placa, haciendo más estrecha la zona de intercambio de calor. Además, la temperatura cerca de los extremos en contacto con los reservorios también sufre modificaciones apreciables.

Finalmente para el caso extremo $\epsilon = 0.69$ mostrado en la figura 6.7, se encuentra que la deformación del campo de temperatura sobre toda la placa se hace mucho más pronunciada y la zona de intercambio de calor se hace muy estrecha.

A continuación se muestran los campos de temperaturas correspondientes a placas de longitud total $2l = 4$ con los mismos radios de corte que en el caso anterior, de nuevo se encuentran las características mencionadas para la placa de longitud total $2l = 3$.

Figura 6.8: Isotermas para $2l = 4$ y $\epsilon = 0.05$

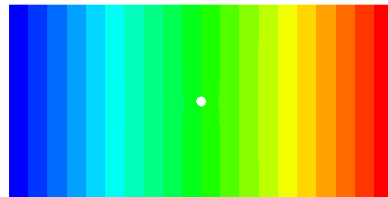


Figura 6.9: Isotermas para $2l = 4$ y $\epsilon = 0.21$

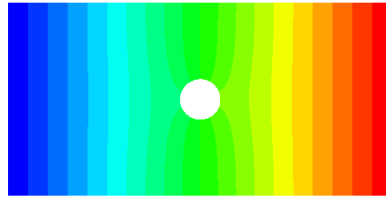


Figura 6.10: Isotermas para $2l = 4$ y $\epsilon = 0.47$

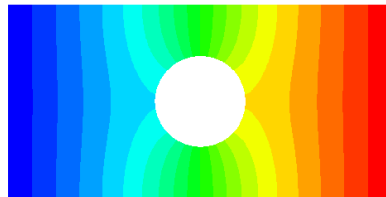
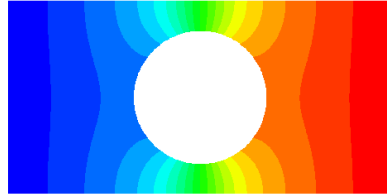


Figura 6.11: Isotermas para $2l = 4$ y $\epsilon = 0.69$



En la figura 6.8 vemos que para el radio $\epsilon = 0.05$ el campo de temperaturas se ve poco afectado por el corte circular, tal como en el caso anterior.

Para el radio intermedio $\epsilon = 0.21$ se aprecia de nuevo la deformación del campo de temperaturas alrededor del corte circular, el cual provoca ligeras deformaciones sobre el campo de temperaturas en el borde de la placa, tal como se muestre en la figura 6.9. También se observa que el campo de temperaturas cerca de los extremos de la placa en contacto con los reservorios no presenta variaciones considerables respecto al caso extremo $\epsilon = 0.05$.

Para el radio $\epsilon = 0.47$ se aprecia que la deformación del campo de temperaturas se extiende de forma considerable hasta el borde de la placa y provoca un estrechamiento en la zona de transferencia de calor, figura 6.10. También se observan deformaciones en el campo de temperaturas cerca de los extremos en contacto con los reservorios.

Finalmente de la figura 6.11 se hace notar que la zona de transferencia de calor se compacta drásticamente para el caso extremo $\epsilon = 0.69$, de la misma forma el campo de temperaturas cerca de los extremos en contacto con los reservorios sufre grandes modificaciones respecto al caso de la perforación de radio $\epsilon = 0.05$.

Ahora se incluyen los resultados obtenidos para placas de longitud total $2l = 5$ con radios de corte $\epsilon = 0.05$, $\epsilon = 0.21$, $\epsilon = 0.47$ y $\epsilon = 0.69$

Figura 6.12: Isotermas para $2l = 5$ y $\epsilon = 0.05$

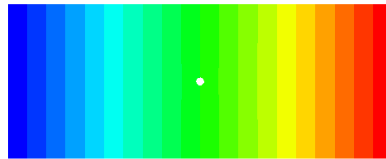


Figura 6.13: Isotermas para $2l = 5$ y $\epsilon = 0.21$

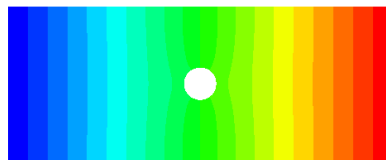


Figura 6.14: Isotermas para $2l = 5$ y $\epsilon = 0.47$

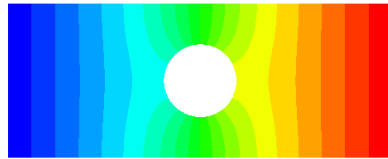


Figura 6.15: Isotermas para $2l = 5$ y $\epsilon = 0.69$



Como en los dos casos anteriores de la figura 6.12 puede notarse que para el caso extremo $\epsilon = 0.05$ el campo de temperaturas es muy similar al esperado para una placa rectangular sin perforación alguna.

En la figura 6.13 se observa que para el radio intermedio $\epsilon = 0.21$ se presenta de nuevo la deformación del campo de temperaturas alrededor del corte circular, provocando ligeras deformaciones sobre el campo de temperaturas en el borde superior de la placa. El campo de temperaturas cerca de los extremos de la placa en contacto con los reservorios no presenta deformaciones considerables respecto al caso de la perforación de radio $\epsilon = 0.05$.

Para el radio $\epsilon = 0.47$ de la figura 6.14 se aprecia que la deformación del campo de temperaturas se extiende de forma considerable hasta el borde de la placa y provoca un estrechamiento en la zona de transferencia de calor, se hace notar que el campo de temperaturas cerca de los extremos de la placa que se encuentran en contacto con los reservorios presentan una deformación de menor impacto en relación con los casos de las placas de longitudes $2l = 3$ y $2l = 4$.

Por último, de la figura 6.15 se hace notar que la zona de transferencia de calor se compacta drásticamente para el caso extremo $\epsilon = 0.69$ y que la deformación sobre el campo de temperaturas cercano a los extremos de la placa que se encuentran en contacto con los reservorios por efecto de la perforación es muy grande, como en los casos de las placas de longitudes $2l = 3$ y $2l = 4$.

6.2. RESULTADOS NUMÉRICOS PARA EL NÚMERO DE NUSSELT.45

6.2. Resultados numéricos para el número de Nusselt.

Con los campos de temperatura encontrados en la sección 6.1 se puede calcular el número de Nusselt promedio en cualquier extremo de la placa, mismo que cuantifica la magnitud del flujo de calor a través de los bordes de la placa. A continuación se muestran los resultados de dicho cálculo para cada una de las tres placas en función del radio de corte.

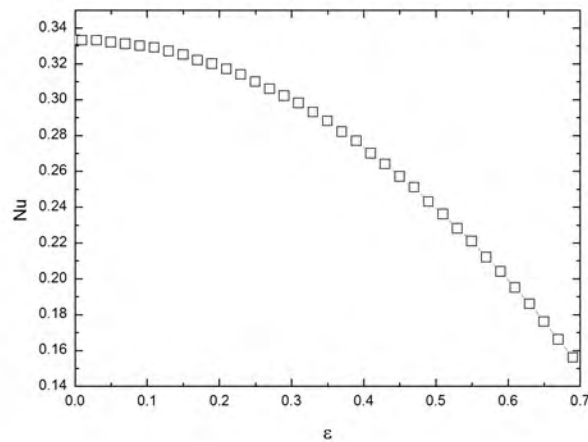


Figura 6.16: Número de Nusselt promedio obtenido numéricamente ($2l = 3$).

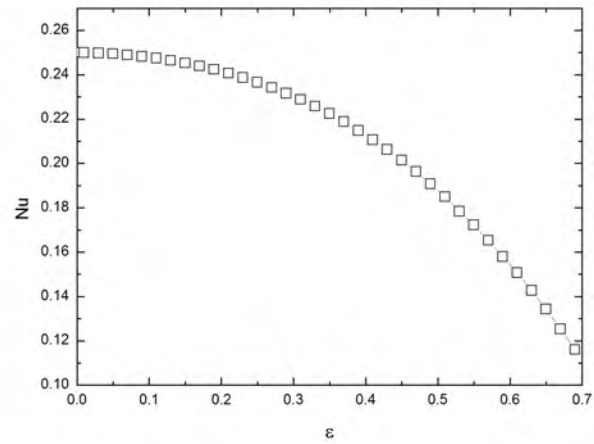


Figura 6.17: Número de Nusselt promedio obtenido numéricamente ($2l = 4$).

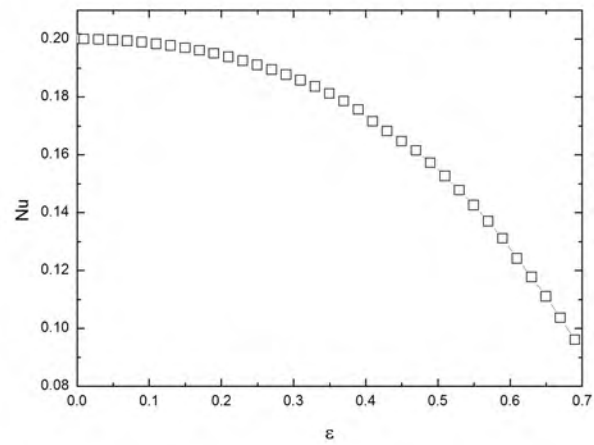


Figura 6.18: Número de Nusselt promedio obtenido numéricamente ($2l = 5$).

6.2. RESULTADOS NUMÉRICOS PARA EL NÚMERO DE NUSSELT.47

Es posible ver el impacto sobre la transferencia de calor que tendrá el corte circular si se normaliza el número de Nusselt promedio sobre la placa. Esto se logra dividiendo los resultados mostrados en las figuras 6.16, 6.17 y 6.18 por el valor del número de Nusselt promedio correspondiente a la placa sin perforar. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.19, donde puede verse que para radios de corte pequeños el efecto sobre la transferencia de calor en la placa es muy similar para los tres casos considerados, para radios de corte entre $\epsilon = 0.25$ y $\epsilon = 0.60$ vemos que el efecto desfavorable hacia la transferencia de calor es notoriamente menor mientras la longitud de la placa es mayor, obteniendo finalmente resultados muy similares para los tres casos cuando el radio de corte se aproxima al valor del ancho de la placa.

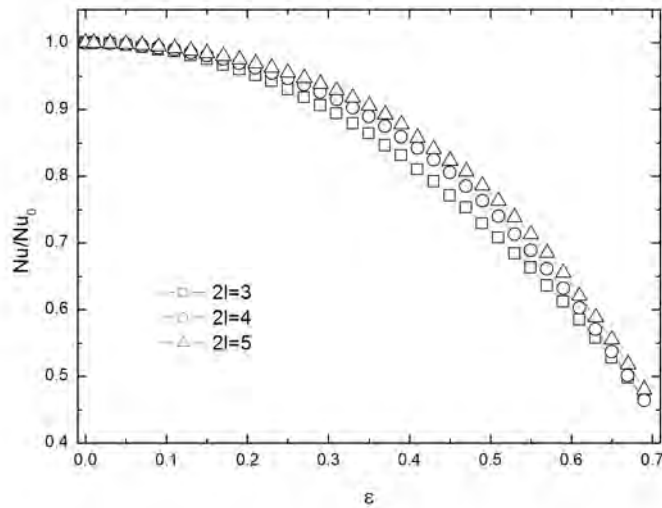


Figura 6.19: Número de Nusselt normalizado para $2l = 3$, $2l = 4$ y $2l = 5$.

6.3. Comparación resultados numéricos-aproximación analítica.

En el capítulo 5 se obtuvo una solución aproximada para radios pequeños, encontrando la expresión (5.11) para el número de Nusselt promedio. Evaluando dicha expresión para cada una de las placas se pueden construir las figuras 6.20, 6.21 y 6.22 para comparar los resultados de la aproximación analítica y del método numérico.

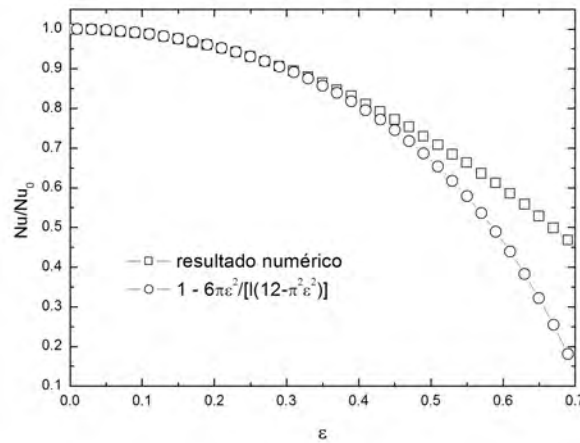


Figura 6.20: Comparación del número de Nusselt promedio para $2l = 3$.

6.3. COMPARACIÓN RESULTADOS NUMÉRICOS-APROXIMACIÓN ANALÍTICA.49

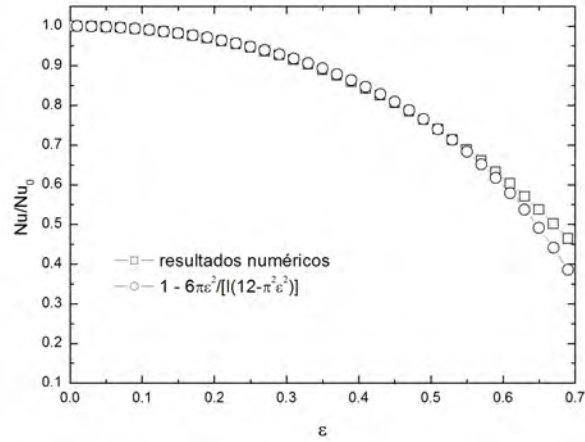


Figura 6.21: Comparación del número de Nusselt promedio para $2l = 4$.

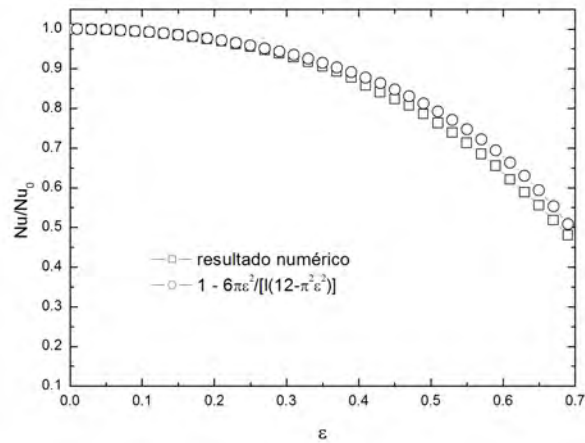
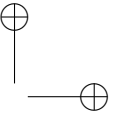
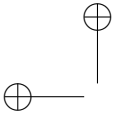
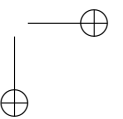
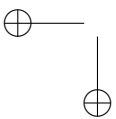


Figura 6.22: Comparación del número de Nusselt promedio para $2l = 5$.



En todos los casos se observa que ambas soluciones tienen el mismo comportamiento para radios de corte menores que $\epsilon = 0.36$ y además tienen valores muy cercanos. Se hace notar que la región en la que ambas soluciones se comportan de la misma forma es aquella en la que se espera que la solución analítica tenga validez dadas las suposiciones hechas al obtener la expresión (5.11).



Capítulo 7

Conclusiones

Utilizando un generador de mallas elíptico se analizó numéricamente el efecto de una perforación circular sobre la transferencia de calor en tres placas rectangulares con diferentes razones entre la longitud y el ancho de la placa ($L/a = 1.5$, $L/a = 2.0$, $L/a = 2.5$). Se estudiaron radios de corte entre $\epsilon = 0.001$ y $\epsilon = 0.69$, desarrollando además una aproximación analítica para radios de corte pequeños a partir del método de imágenes y de la formulación de flujos potenciales. Los resultados numéricos, para valores pequeños de ϵ , concuerdan con la solución analítica.

Se calculó el número de Nusselt promedio para los tres casos encontrando de esta manera una caracterización de los efectos del corte circular sobre la transferencia de calor en las tres placas. Además, al comparar los tres casos se encuentra que para radios de corte menores que $\epsilon = 0.15$, la transferencia de calor se ve afectada de manera independiente de la longitud de la placa. Para radios adimensionales entre $\epsilon = 0.15$ y $\epsilon = 0.60$ los efectos negativos en la transferencia de calor son notoriamente mayores para la placa de longitud menor. Para radios de corte mayores a $\epsilon = 0.60$ de nuevo se tiene que el efecto sobre la transferencia de calor es muy similar para las tres longitudes analizadas.

El estudio presentado en este trabajo puede extenderse a otras geometrías. Por ejemplo se podrían analizar cortes de sección elíptica, que son ampliamente utilizados en los casos prácticos en intercambiadores de calor, además se hace notar que el método que se siguió para resolver el problema es útil también para resolver el caso no estacionario, mismo que puede ser interesante desde el punto de vista de la termodinámica irreversible, con modificaciones menores a los códigos numéricos desarrollados.

Bibliografía

- [1] C. L. Y.M. Chen, Double-diffusive convection for a heated cylinder submerged in a salt-stratified fluid layer, *Heat and Mass Transfer*. 33 (1997) 17–26.
- [2] D. Gao, Numerical solution for a heat conduction problem, *Int. Comm. of Heat Mass Transfer* 26, No. 2 (1999) 209–217.
- [3] K. T. Y. R. Romero-Méndez, M. Sen, R. McClain, Effect of fin spacing on convection in a plate fin and tube heat exchanger, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 43 (2000) 39–51.
- [4] U. G. Mi Sandar Mon, Numerical study of fin-spacing effects in annular-finned tube heat exchangers, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 47 (2004) 1953–1964.
- [5] L. B. A. Ereğ, B. Ozerdem, Z. Ilken, Effect of geometrical parameters on heat transfer and pressure drop characteristics of plate fin and tube heat exchangers, *Applied Thermal Engineering* 25 (2005) 2421–2431.
- [6] F. S. S.M. Saboya, Experiments on elliptic sections in one and two row arrangements of plate fin and tube heat exchangers, *Exp. Therm. Fluid Sci.* 24 (2001) 67–75.
- [7] W. T. J. Wu, Investigation on laminar convection heat transfer in fin-and-tube heat exchanger in aligned arrangement with longitudinal vortex generator from the viewpoint of field synergy principle, *Applied Thermal Engineering* 27 (2007) 2609–2617.
- [8] A. L. M. Vera, Low peclet number flow of a reacting mixture past an array of catalytic wires, *Combustion Theory and Modelling* 8 (2004) 97–121.

- [9] C. T. J. Lizardi, A. Liñán, Ignition and combustion of diluted hydrogen mixtures in a flow past an array of catalytic wires, *Combustion Theory and Modelling* 11 No. 3 (2007) 483–499.
- [10] C. P. M.G. Blyth, Heat conduction across irregular and fractal-like surfaces, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 46 (2003) 1329–1339.
- [11] T. S. J.Y. Kim, Microscopic phenomena and macroscopic evaluation of heat transfer from plate fins/circular tube assembly using naphthalene sublimation technique, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 45 (2002) 3397–3404.
- [12] M.Ñ. Ozisik, *Heat Transfer a Basic Approach*, McGraw-Hill, 1985.
- [13] K. C. Ch.J Chen, R. Bernatz, W. Lin, *Finite Analytic Method in Flows and Heat Transfer*, Taylor & Francis, 2000.
- [14] Z. W. J.F Thompson, C. Mastin, Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations - a review, *Journal of Computational Physics* 47, 1 (1982) 1–108.
- [15] P. E. A.S Arcilla, J. Hauser, J. Thompson, *Numerical Grid Generation*, North-Holland, 1982.
- [16] C. C. T.-S Wung, Finite analytic solution of convective heat transfer for tube arrays in crossflow: Part i, flow field analysis, *Journal of Heat and Mass Transfer*. 111 (1989) 633–640.
- [17] T.-S. W. C.J Chen, Finite analytic solution of convective heat transfer for tube arrays in crossflow: Part ii, heat transfer analysis, *Journal of Heat and Mass Transfer*. 111 (1989) 641–648.
- [18] C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1997.

Apéndice A

Ecs. del sistema generador de mallas elípticas

Para construir la malla descrita en el capítulo 4 se utilizó el método propuesto por Thompson y colaboradores (1974-1977), donde se plantea un sistema de ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden con la forma de la ecuación de Poisson como el sistema generador de coordenadas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P(\xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}$$

En dicho sistema de ecuaciones los puntos del sistema coordenado rectangular (ξ, η) se calculan en función de las coordenadas (x, y) . Como se desea hacer los cálculos en el sistema coordenado rectangular se deben intercambiar los roles de las variables dependientes e independientes, lo que se logra a través del Jacobiano de la transformación, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales elípticas no lineales

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q(\xi, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (\text{A.2})$$

56 APÉNDICE A. ECS. DEL SISTEMA GENERADOR DE MALLAS ELÍPTICAS

donde J es el jacobiano de la transformación y α , β , y γ son coeficientes de transformación que tienen la siguiente forma

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

Se puede tener control sobre la separación de las líneas coordenadas en el espacio computacional y sobre el comportamiento de dichas líneas cerca de las fronteras si se imponen condiciones de frontera de tipo Neumann a través de las funciones de control P y Q .

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^n a_i \text{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|)$$

Éstas funciones de control son una simplificación de las propuestas por Thompson y colaboradores, quienes estudiaron la función exponencial para lograr la atracción de líneas coordenadas con otras líneas coordenadas y/o con puntos de la malla.

A.1. La ecuación de Laplace en el espacio ξ, η

En vista de que los cálculos necesarios para resolver la ecuación de Laplace del problema (3.6) se desean hacer en el sistema coordenado rectangular (ξ, η) debemos transformar dicha ecuación a través del Jacobiano, de donde se obtiene

$$-\tau \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} \quad (\text{A.7})$$

Donde τ y σ están definidos de la siguiente manera

$$\tau = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} D_y - \frac{\partial y}{\partial \eta} D_x \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} D_x - \frac{\partial x}{\partial \xi} D_y \right) \quad (\text{A.9})$$

con

$$D_x = \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.10})$$

$$D_y = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Cálculos para la aproximación de radios pequeños.

B.1. Cálculos para la placa rectangular sin perforar.

Para resolver la ecuación (5.1) se aplicó el método de separación de variables, el desarrollo de dicho método en coordenadas cartesianas es el siguiente, en primer lugar la ecuación a resolver es

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Se supone que la solución $T(x, y)$ tiene la forma del producto de dos funciones, una que depende solamente de x y otra que depende solamente de y .

$$T(x, y) = T_x(x)T_y(y)$$

sustituyendo en la ecuación (B.1) se obtiene

$$T_y(y) \frac{d^2 T_x(x)}{dx^2} + T_x(x) \frac{d^2 T_y(y)}{dy^2} = 0$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación por $T_x(x)T_y(y)$ y despejando se

60 APÉNDICE B. CÁLCULOS PARA LA APROXIMACIÓN DE RADIOS PEQUEÑOS.

obtiene

$$\frac{1}{T_x(x)} \frac{d^2 T_x(x)}{dx^2} = -\frac{1}{T_y(y)} \frac{d^2 T_y(y)}{dy^2} \quad (\text{B.2})$$

Como el primer miembro de la ecuación (B.2) depende solamente de x y el segundo solamente de y es necesario que ambos sean iguales a una constante para cumplir la igualdad, se propone

$$\frac{1}{T_x(x)} \frac{d^2 T_x(x)}{dx^2} = -\frac{1}{T_y(y)} \frac{d^2 T_y(y)}{dy^2} = -k^2 \quad (\text{B.3})$$

con k constante.

Ahora que la ecuación (B.3) está separada es posible resolver cada miembro independientemente

$$\frac{1}{T_x(x)} \frac{d^2 T_x(x)}{dx^2} + k^2 = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{1}{T_y(y)} \frac{d^2 T_y(y)}{dy^2} - k^2 = 0 \quad (\text{B.5})$$

se considera en primer lugar la ecuación (B.5), donde se obtiene

$$\frac{d^2 T_y(y)}{dy^2} - k^2 T_y(y) = 0$$

cuya solución general es una combinación lineal de exponenciales crecientes y decrecientes, por tanto la expresión para $T_y(y)$ es

$$T_y(y) = A e^{ky} + B e^{-ky} \quad (\text{B.6})$$

donde las constantes A y B son constantes de integración que se determinan a través de las condiciones de frontera. Notando que

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = T_x(x) \frac{dT_y(y)}{dy}$$

y que las condiciones de frontera del caso estudiado son las del problema (5.1) se encuentra

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x, y=0)} &= T_x(x) \left. \frac{dT_y}{dy} \right|_{(y=0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x, y=1)} &= T_x(x) \left. \frac{dT_y}{dy} \right|_{(y=1)} = 0 \end{aligned}$$

B.1. CÁLCULOS PARA LA PLACA RECTANGULAR SIN PERFORAR.61

como $T_x(x)$ no es idénticamente nula se concluye que

$$\left. \frac{dT_y}{dy} \right|_{(y=0)} = (A - B)k = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\left. \frac{dT_y}{dy} \right|_{(y=1)} = Ake^k - Bke^{-k} = 0 \quad (\text{B.8})$$

De la ecuación (B.7) se sigue que $k = 0$ ó $A = B$. Si se supone que k es distinto de cero entonces $A = B$ y por (B.8) se concluye que

$$Ak(e^k - e^{-k}) = 0$$

y por tanto $A = 0$, lo cual resulta en una solución trivial, por ende suponemos $k = 0$ y de nuevo por (B.8) se llega a

$$T_y(y) = A + B = cte. \quad (\text{B.9})$$

En vista de que $k = 0$ la ecuación (B.4) se reduce a

$$\frac{1}{T_x(x)} \frac{d^2 T_x(x)}{dx^2} = 0$$

que tiene por solución general un polinomio de primer grado en x ,

$$T_x(x) = Cx + D \quad (\text{B.10})$$

De nuevo se imponen las condiciones de frontera del problema (5.1) y se encuentra

$$\begin{aligned} T(x = -l, y) &= -Al + B = 0 \\ T(x = l, y) &= Al + B = 1 \end{aligned}$$

de donde es claro que

$$A = \frac{1}{2l} \text{ y } B = \frac{1}{2}$$

por tanto la expresión para $T_x(x)$ es

$$T_x(x) = \frac{x}{2l} + \frac{1}{2} \quad (\text{B.11})$$

Que es la solución general del problema (5.1), ya que el valor constante de $T_y(y)$ puede absorberse en las constantes de integración sin cambiar su valor final.

$$T(x, y) = \frac{x}{2l} + \frac{1}{2} \quad (\text{B.12})$$

62 APÉNDICE B. CÁLCULOS PARA LA APROXIMACIÓN DE RADIOS PEQUEÑOS.

B.2. Cálculos de la solución analítica para radios pequeños.

De la sección 5.2 tenemos que la solución del problema (3.6) se expresará como la parte real del potencial complejo asociado a un arreglo infinito de dipolos situados en el eje vertical de la placa, dicho potencial está dado por

$$\Psi(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2ik} + \frac{1}{z + 2ik} \right) = \frac{\pi}{2} \coth\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad (\text{B.13})$$

La parte real de dicho potencial se calcula utilizando que

$$\text{Re}\left[\coth\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} \left(\coth\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \coth\left(\frac{\pi \bar{z}}{2}\right) \right)$$

y que

$$\begin{aligned} \coth\left(\frac{\pi z}{2}\right) &= \frac{\cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \\ \frac{\cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right)} &= \frac{e^{\frac{\pi z}{2}} + e^{-\frac{\pi z}{2}}}{e^{\frac{\pi z}{2}} - e^{-\frac{\pi z}{2}}} \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\text{Re}\left[\coth\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)} \quad (\text{B.14})$$

Ahora, para valores de x e y cercanos al corte circular la ecuación (B.14) se podrá escribir como

$$\text{Re}\left[\coth\left(\frac{\pi z}{2}\right)\right] = \frac{\sinh(\pi \tilde{r} \epsilon \cos \phi)}{\cosh(\pi \tilde{r} \epsilon \cos \phi) - \cos(\pi \tilde{r} \epsilon \sin \phi)} \quad (\text{B.15})$$

donde $x = \tilde{r} \epsilon \cos \phi$, $y = \tilde{r} \epsilon \sin \phi$ y $\tilde{r} = r/\epsilon$, si estamos cerca del corte circular tendremos que $\tilde{r} \approx 1$ y podemos expandir en serie la ecuación (B.15) en términos de $\epsilon \ll 1$.

B.2. CÁLCULOS DE LA SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA RADIOS PEQUEÑOS.63

Primero consideremos el denominador

$$\begin{aligned} \cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi) &= 1 + \frac{\pi^2\tilde{r}^2}{2} \cos^2\phi \epsilon^2 + \frac{\pi^4\tilde{r}^4}{24} \cos^4\phi \epsilon^4 \\ &- \left(1 - \frac{\pi^2\tilde{r}^2}{2} \sin^2\phi \epsilon^2 + \frac{\pi^4\tilde{r}^4}{24} \sin^4\phi \epsilon^4 \right) + O(\epsilon^5) \end{aligned}$$

$$\cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi) = 1 + \frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{2} (\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{\pi^4\tilde{r}^4\epsilon^4}{24} (\cos^4\phi - \sin^4\phi) + O(\epsilon^5)$$

$$\cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi) = \frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{12} (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \right) + O(\epsilon^5)$$

Ahora consideramos la expresión completa

$$\frac{\sinh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi)}{\cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi)} = \frac{\sinh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi)}{\frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{2} \left(1 + \frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{12} (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \right) + O(\epsilon^5)}$$

$$\frac{\sinh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi)}{\cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi)} = \frac{2 \sinh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi)}{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2} \left(1 + \frac{\pi^2\tilde{r}^2\epsilon^2}{12} (\cos^2\phi - \sin^2\phi) \right) + O(\epsilon^5)$$

Si ahora se expande el seno hiperbólico en potencias de ϵ se encuentra a primer orden que

$$\frac{\sinh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi)}{\cosh(\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi) - \cos(\pi\tilde{r}\epsilon\sin\phi)} = \frac{2 \cos\phi}{\pi\tilde{r}\epsilon} + \frac{\pi\tilde{r}\epsilon\cos\phi}{6} + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.16})$$

Por tanto, en vista de la ecuación (5.6) la expresión aproximada para la temperatura cerca del corte circular es

$$\theta(\tilde{r}, \phi) = A + \left[\frac{B\tilde{r}\epsilon}{2l} + m \left(\frac{2}{\pi\tilde{r}\epsilon} + \frac{\pi\tilde{r}\epsilon}{6} \right) \right] \cos\phi + O(m\epsilon^2) \quad (\text{B.17})$$

Finalmente, se calcula

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{r}} = \left[\frac{B\epsilon}{2l} + m \left(\frac{-2}{\pi\epsilon\tilde{r}^2} + \frac{\pi\epsilon}{6} \right) \right] \cos\phi + O(m\epsilon^2) \quad (\text{B.18})$$

64 APÉNDICE B. CÁLCULOS PARA LA APROXIMACIÓN DE RADIOS PEQUEÑOS.

Y se encuentra que

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = 0 \implies m = \frac{3B\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \quad (\text{B.19})$$

Con lo que se obtiene la forma de la solución (5.7)

$$\theta(x, y) = A + \frac{Bx}{2l} + \frac{3B\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)} + O(\epsilon^4) \quad (\text{B.20})$$

Apéndice C

Cálculo del número de Nusselt promedio.

Para calcular el número de Nusselt promedio se considera la ecuación (B.20)

$$\theta(x, y) = A + \frac{Bx}{2l} + \frac{3B\pi\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{\sinh(\pi x)}{\cosh(\pi x) - \cos(\pi y)} + O(\epsilon^4) \quad (\text{C.1})$$

Tomamos la derivada parcial de θ respecto a x y la evaluamos en $x = 0$,

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{B}{2l} + \frac{3B\pi^2\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{1}{1 - \cos(\pi y)} \quad (\text{C.2})$$

calculamos el número de Nusselt integrando sobre y

$$\bar{Nu} = \int_{\epsilon}^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} dy = \frac{B}{2l}(1 - \epsilon) + \frac{3B\pi^2\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{1 - \cos(\pi y)} dy \quad (\text{C.3})$$

Haciendo la integral del segundo miembro de la ecuación anterior se obtiene

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{1 - \cos(\pi y)} dy = \int_{\epsilon}^1 \frac{1 + \cos(\pi y)}{1 - \cos^2(\pi y)} dy$$

66 APÉNDICE C. CÁLCULO DEL NÚMERO DE NUSSELT PROMEDIO.

$$\int_{\epsilon}^1 \csc^2(\pi y) dy + \int_{\epsilon}^1 \frac{\cos(\pi y)}{\sen^2(\pi y)} dy = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\pi y) + 1}{\sen(\pi y)} \Big|_{\epsilon}^1 = -\frac{1}{\pi} \cot\left(\frac{\pi y}{2}\right) \Big|_{\epsilon}^1$$

Por tanto el número de Nusselt es

$$\bar{N}u = \frac{B}{2l}(1 - \epsilon) + \frac{3B\pi^2\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \frac{1}{\pi} \cot\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right)$$

Haciendo la expansión de la cotangente en serie de Taylor se encuentra

$$\bar{N}u = \frac{B}{2l}(1 - \epsilon) + \frac{3B\pi^2\epsilon^2}{l(12 - \pi^2\epsilon^2)} \left[\frac{2}{\pi^2\epsilon} - \frac{\epsilon}{6} + O(\epsilon^3) \right]$$

$$\bar{N}u = \frac{B}{2l} - \frac{B\epsilon}{2l} + \frac{B\epsilon}{2l} + O(\epsilon^5)$$

Finalmente tenemos

$$\bar{N}u = \frac{B}{2l} + O(\epsilon^5)$$