

# Colisiones múltiples en condensados de Bose Einstein de dos modos

Autor: Cristopher Gerardo Hernández Salinas

Asesora: Dra. Ivette Fuentes Guridi

Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	3
2..	<i>El Condensado de Bose-Einstein</i>	5
2.1.	Historia y realización experimental	5
2.2.	Descripción matemática del condensado de Bose-Einstein	6
2.3.	El modelo canónico en la aproximación de dos modos	9
2.4.	Predicciones teóricas del modelo canónico de dos modos	13
3..	<i>Colisiones inelásticas en el condensado de Bose-Einstein</i>	16
3.1.	Importancia teórica y experimental de las colisiones inelásticas	16
3.2.	El modelo con colisiones inelásticas	16
3.3.	Predicciones del modelo CIM con solución analítica	18
4..	<i>Enredamiento Cuántico</i>	25
4.1.	Teoría del enredamiento	25
4.2.	Enredamiento en el BEC	28
5..	<i>Efectos de las colisiones múltiples en el condensado de Bose Einstein de dos modos</i>	30
5.1.	Relevancia de las colisiones de orden mayor a dos	30
5.2.	El modelo con colisiones triples y su espectro de energías	30
5.3.	Distribuciones de probabilidad	31
5.4.	Efectos de las colisiones triples en la evolución temporal del BEC	31
5.5.	Colisiones múltiples	33
6..	<i>Conclusiones</i>	39
	<i>Apéndice</i>	40
A..	<i>Obtención de la fórmula explícita para las matrices de rotación</i>	41

## 1. INTRODUCCIÓN

El condensado de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés), uno de los fenómenos más apasionantes de la física moderna, se da en nubes atómicas de  $10^{10}$  partículas enfriadas a temperaturas del orden de nanokelvins. Bajo éstas condiciones, las funciones de onda de cada una de las partículas se traslapan hasta que éstas pierden su identidad. El comportamiento colectivo del conjunto es una reproducción fiel del comportamiento individual de cada una de sus componentes. Así pues, las propiedades cuánticas que en condiciones usuales sólo pueden ser observadas a escala microscópica son amplificadas a una escala mesoscópica. Esta propiedad hace que el fenómeno sea de gran interés, ya que permite explorar los fundamentos mismos de la mecánica cuántica a una escala más accesible.

A los distintos niveles de energía accesibles a las partículas de un BEC se les llama modos. Esto se debe a que los modelos que describen a éstos sistemas consideran a las partículas como modos de un oscilador armónico. El condensado *multimodal* más sencillo es el condensado de dos modos ó *bimodal*, el cual está compuesto por partículas que se encuentran restringidas a ocupar dos subespecies. Estas corresponden generalmente a estados internos de energía ó a la localización de las partículas en algún mínimo de un pozo doble de potencial. Se asume que todos los modos energéticos son despreciables con excepción de los correspondientes a los estados base de las dos subespecies.

El modelo que se usa de forma canónica para describir al BEC es un caso particular del Modelo de Bose-Hubbard, el cual describe el comportamiento de partículas bosónicas a través de una red óptica (optical lattice en inglés) [20, 21]. Las redes ópticas están compuestas por bosones a muy bajas temperaturas atrapados en un potencial periódico. Dicho potencial está compuesto por una serie de mínimos formados por el patrón de interferencia de 2 haces de luz láser, el cual recuerda en su forma a un cartón de huevo. Recientemente los condensados de Bose-Einstein han cobrado mucho interés gracias a la posibilidad de ser un medio adecuado para la implementación de cómputo cuántico, ya que los sistemas más apropiados para este propósito son los sistemas cuánticos de muchos cuerpos.

Hasta hace poco, una de las mayores dificultades para la descripción teórica de los condensados de Bose-Einstein multimodales era la falta de soluciones analíticas para los modelos utilizados hasta ahora. Los resultados presentados en trabajos anteriores eran obtenidos por medio de simulaciones numéricas ó por métodos aproximados [16, 14, 11]. La principal desventaja del uso de métodos numéricos es que el análisis se vuelve prohibitivamente difícil al aumentar el número de grados de libertad. En éstos casos se utilizan ecuaciones semiclásicas. La más utilizada ha sido la ecuación de Gross-Pitaevski, que tiene validez a temperaturas muy bajas con un número suficientemente grande de átomos [22]. En este modelo, el número de partículas y la diferencia de fase entre los modos se tratan de manera clásica.

Recientemente, Fuentes-Schuller y Barberis-Blostein [8] presentaron un modelo para describir al BEC de dos modos, que en este trabajo se llamará "Modelo con Colisiones Inelásticas de Multipartículas" (CIM). Este es una extensión de los modelos previos cuya diferencia principal es que contempla la aparición de procesos inelásticos. Estos procesos no habían sido considerados en los modelos teóricos previos, además de que en los experimentos se les trataba de minimizar ó suprimir debido a que pueden provocar pérdida de partículas en la trampa. Sin embargo, es sabido que los procesos inelásticos están presentes en las situaciones físicas, y existen cálculos microscópicos que lo demuestran [5]. Una gran ventaja de este modelo es que, en algunas situaciones, el Hamiltoniano que incluye procesos inelásticos cuenta con soluciones exactas y analíticas.

En las fases más frías del condensado, donde la densidad de partículas es alta, las colisiones de multipartículas ya no son despreciables. Por lo tanto, es posible que el Modelo CIM nos de una descripción más realista de los propiedades del sistema, ya que puede ser generalizado para incluir colisiones elásti-

cas e inelásticas de orden mayor a dos, procesos no contemplados en los modelos previos. En el trabajo presentado por Fuentes-Schuller y Barberis-Blostein se propone el modelo que incluye éstas interacciones pero no se estudia el efecto de éstos procesos en el comportamiento del condensado. En este trabajo de tesis mostraremos que la inclusión de colisiones de multipartículas tiene una influencia importante en las propiedades cuánticas del condensado, como son la evolución temporal de la población de cada subsistema, la distribución de probabilidades del estado base y el enredamiento.

Uno de los aspectos más estudiados en los BECs bimodales ha sido la diferencia de población entre los 2 modos. Es bien sabido que su evolución temporal presenta un comportamiento conocido como colapsos y reavivamientos (*collapses and revivals* en inglés), cuya aparición más conocida se da en el caso de interacciones semiclásicas entre fotones y átomos de 2 niveles descritos por medio del modelo de Jaynes-Cummings [23]. Los reavivamientos consisten en oscilaciones de Rabi que se presentan durante ciertos periodos de tiempo, los cuales se encuentran intercalados con periodos en los que se las oscilaciones se desvanecen completamente y el comportamiento se vuelve uniforme. A éstos últimos se les denomina colapsos. Este comportamiento se presenta tanto en el modelo canónico como en el CIM. Sin embargo, en el modelo canónico el comportamiento no es uniforme, es decir, los intervalos de tiempo en los que aparecen las oscilaciones de Rabi no tienen la misma duración, y la amplitud de cada oscilación es diferente. Al paso del tiempo, las oscilaciones se presentan en periodos cada vez más grandes y su amplitud es menor. Al incluir colisiones inelásticas, el comportamiento puede volverse completamente uniforme en algunas situaciones, que son las mismas en las que hay de soluciones analíticas para el modelo. Esto está determinado por los valores que toman los parámetros del Hamiltoniano. La situación descrita con anterioridad se ha estudiado únicamente en el caso de interacciones dobles. En esta tesis, mostraremos que la aparición de colisiones de orden mayor a 3 en el modelo puede acabar con el comportamiento uniforme que se presenta en el caso de interacciones dobles e incluso inhibir la aparición de reavivamientos si su intensidad es lo suficientemente grande.

El enredamiento es un concepto fundamental en la mecánica cuántica. Este consiste en una correlación entre sistemas cuánticos que tiene propiedades que carecen de análogo en la física clásica. El enredamiento surge de la estructura del producto tensorial utilizado en mecánica cuántica para definir el estado total de una unión de sistemas. Su importancia radica, entre otras cosas, en sus implicaciones filosóficas y en el hecho de que nos provee de herramientas para investigar los fundamentos mismos de la teoría cuántica. Además, es un elemento fundamental en el campo de la información cuántica. Se ha sugerido que el enredamiento es el causante del incremento en la velocidad de procesamiento para el cómputo cuántico con respecto al cómputo clásico [7]. Y juega además un papel fundamental en los algoritmos de teleportación de estados cuánticos. Por esta razón es de mucho interés entender como se genera el enredamiento en sistemas de muchas partículas como el condensado de Bose-Einstein. La generación de estados enredados en condensados de Bose-Einstein con dos componentes ha sido estudiada de forma extensa [28, 29, 30, 31, 32, 33]. Se sabe que es posible generar enredamiento manipulando la intensidad de las interacciones entre las partículas del condensado. En este trabajo se muestra que el enredamiento tiene una dependencia notoria de la relación entre la intensidad de las colisiones elásticas e inelásticas, además de que su evolución temporal se encuentra correlacionada con la evolución de la diferencia de población, y por lo tanto se puede ver afectado seriamente por la aparición de colisiones múltiples.

## 2. EL CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN

### 2.1. Historia y realización experimental

En esta sección comenzaré por explicar brevemente los aspectos históricos del condensado y el procedimiento experimental para obtenerlo. En un principio, el físico hindú Satyendra Nath Bose formuló una estadística que sirve para describir a sistemas de muchos fotones. Posteriormente, Einstein extendió esta estadística a la descripción de sistemas de muchas partículas idénticas de tipo bosónico (es decir, de spin entero). En 1924, Einstein predijo que si un sistema de muchas partículas bosónicas es enfriado por debajo de cierta temperatura crítica, una fracción de éstas se colapsará al estado base, fenómeno que conocemos como condensación de Bose-Einstein. Este fenómeno fue predicho suponiendo que las partículas no interactúan entre sí. Por tal motivo, la mayoría de los científicos de la época pensaron que este sistema no era más que un caso patológico ajeno al mundo real. Sin embargo, Fritz London sugirió que la condensación de Bose-Einstein se presentaba en helio líquido a muy bajas temperaturas. De hecho, London responsabilizó a la condensación de Bose-Einstein del fenómeno de la superfluidez que se presenta en el helio líquido, a pesar de la intensa interacción que existe entre sus átomos.

El primer reporte sobre nubes gaseosas enfriadas a temperaturas menores que la temperatura de condensación de Bose-Einstein datan de 1995. La primera realización experimental fue lograda por un grupo de científicos de JILA con átomos de rubidio [1]. Posteriormente se reportó su realización con átomos de sodio [2] y de litio [3]. El premio Nobel del año 2001 fue otorgado por este logro.

A continuación se describe el procedimiento que llevó a la condensación de Bose-Einstein:

Al principio los átomos se encuentran en un horno a una temperatura de 350 grados centígrados. Estos salen disparados del horno formando un haz que lleva una velocidad de 800 metros por segundo. Después son frenados hasta una velocidad de 6 metros por segundo por medio de un haz de luz láser aplicado en dirección contraria a la dirección del chorro atómico. Posteriormente éstos átomos, ya frenados (y por lo tanto enfriados) son reunidos en una cámara al alto vacío, en donde son confinados en un volumen muy reducido gracias a una *trampa magneto-óptica*.

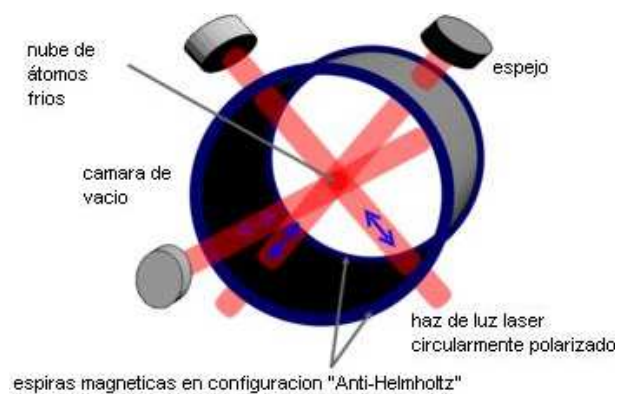


Fig. 2.1: Trampa magneto-óptica

La parte óptica de esta trampa consiste en un arreglo de 6 láseres que emiten luz a una frecuencia ligeramente desfasada de la frecuencia de resonancia de los átomos. Estos láseres inciden perpendicularmente sobre la muestra, un par incide en direcciones opuestas sobre el eje  $x$ , otro sobre el eje  $y$ , y otro sobre el eje  $z$  (ver figura (2.1)). La parte magnética de la trampa es una bobina *anti-Helmholtz*. Esta configuración consiste en una pareja de espiras que se encuentran alineadas sobre un eje común, tal y como en una bobina de Helmholtz. Sin embargo, la diferencia está en que las corrientes que fluyen por éstas espiras no van en el mismo sentido, sino en sentidos opuestos. Esto se debe a que el efecto deseado no es un campo magnético con magnitud constante, sino que el gradiente de este campo tenga una magnitud prácticamente constante en la region central.

El arreglo de láseres sirve para enfriar aún más al sistema, utilizando un efecto conocido como *enfriamiento Doppler*. Este efecto consiste en la aparición de una fuerza sobre los átomos de la muestra, la cual es siempre opuesta a la dirección de su movimiento. Esta fuerza es consecuencia de la interacción entre los átomos y el campo electromagnético de los láseres. Esta fuerza sólo se manifiesta si el átomo se mueve en la misma dirección del vector de onda del campo electromagnético. Por eso es necesario tener láseres incidentes en todas direcciones. Este dispositivo también es conocido como *melaza óptica*, ya que el efecto es análogo a tener a los átomos sumergidos en un fluido viscoso. Por medio de este fenómeno es posible enfriar los átomos hasta una temperatura límite donde se alcanza un equilibrio con los efectos de emisión espontánea. Las temperaturas límite alcanzadas son de microkelvins, muy bajas pero insuficientes para lograr la condensación, ya que esta requiere temperaturas del orden de nanokelvins.

Una vez que la muestra ha llegado a la mínima temperatura posible por medio del enfriamiento óptico, es necesario recurrir a un mecanismo relacionado con el enfriamiento evaporativo para alcanzar temperaturas aun menores. En general, el enfriamiento evaporativo es un fenómeno en el cual las partículas que escapan de un sistema en evaporación toman su energía cinética y bajan su temperatura. En el condensado se induce la evaporación por medio de un técnica conocida como evaporación inducida por radio-frecuencias (rf-induced evaporation). Esta técnica consiste en una lenta modificación del potencial que permite a los átomos más rápidos escapar de la trampa, dejando atrapados a los más fríos. Se aprovecha el hecho de que los átomos tienen distintas alineaciones de espín. Los átomos con una alineación específica son atraídos al centro de la trampa, donde el campo magnético es mínimo, quedando atrapados. Las partículas con otras orientaciones serán atraídas hacia regiones exteriores con campo más intenso, escapando de la trampa. Se utilizan ondas de radio para cambiar el espín de las partículas más energéticas. De esta forma es posible seleccionar y remover las partículas más energéticas, y enfriar la muestra a temperaturas menores a 170 nanokelvins.

Se han reportado otras variantes del condensado por medio de diferentes arreglos experimentales. Por ejemplo, se logro la formación de dos condensados compuestos por átomos de rubidio 87 en una sola trampa. La diferencia entre éstos condensados, además de la separación espacial, radica en que los átomos de cada muestra se encuentran en niveles hiperfinos distintos, correspondientes a los estados  $|F = 1, m = -1\rangle$  y  $|F = 2, m = 2\rangle$ . Esto se logró gracias a una técnica denominada "Enfriamiento simpático" (Sympathetic cooling en inglés)[4]. Este método consiste en el enfriamiento de los átomos en el estado  $|F = 1, m = -1\rangle$  por medio de la evaporación, y posteriormente enfriar la nube de átomos en el estado  $|F = 2, m = 2\rangle$  por medio del contacto térmico con la otra nube. Este condensado doble se logro utilizando un dispositivo que contiene dos trampas magneto- ópticas conectadas con una trampa magnética.

## 2.2. Descripción matemática del condensado de Bose-Einstein

A continuación se explicarán las características propias de sistemas de bosones. En el mundo clásico siempre es posible determinar la trayectoria de una partícula, sin importar si esta forma parte de un sistema de partículas totalmente idénticas. Sin embargo, esto no es posible en la mecánica cuántica, aun en principio. En el mundo cuántico, la trayectoria de una partícula es un concepto que carece de sentido. A esta clase de sistemas se les denomina sistemas de partículas *indistinguibles*

La física que describe a los sistemas cuánticos de partículas indistinguibles debe de permanecer invariante ante intercambios entre cualquiera de sus partículas. Los únicos estados físicamente aceptables deben permanecer igual ó cambiar de signo ante un intercambio de partículas. Esta condición es conocida como principio de simetrización, y se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$P_{i,j}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (2.1)$$

$$P_{i,j}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle \quad (2.2)$$

donde hemos introducido el operador de intercambio  $P_{i,j}$ , cuya acción es permutar las partículas que se encuentran en las posiciones  $i$ -ésima y  $j$ -ésima. A los estados que cumplen con la condición 2.1 se les llama *simétricos* y a los que cumplen la condición 2.2 *antisimétricos*. Por ejemplo, el estado de un sistema de sólo dos partículas puede ser simetrizado ó antisimetrizado por medio de los operadores  $S = (1/2)(1 + P_{1,2})$  y  $A = (1/2)(1 - P_{1,2})$ , aplicados a algún estado no simetrizado, que generalmente es el producto de los estados individuales de cada partícula.

Como la experiencia nos dice que la simetría mixta no se da en la naturaleza, las partículas se dividen en dos grandes tipos: los *bosones*, y los *fermiones*. Los bosones deben su nombre a Satyendra Nath Bose, y son partículas de spin entero descritas por estados simétricos. Los fermiones deben su nombre a Enrico Fermi, y son partículas de spin semientero descritas por estados antisimétricos. Esta relación entre la naturaleza entera ó semientera del spin y el tipo de simetrización de los estados debe de ser aceptada como un postulado en mecánica cuántica no relativista. Solo es posible demostrarla en el marco relativista.

La estadística que obedecen los sistemas de fermiones es llamada estadística de Fermi-Dirac. De la construcción antisimétrica de los estados fermiónicos surge una regla conocida como el principio de exclusion de Pauli. Este establece que no está permitido que dos ó más partículas de un sistema de fermiones ocupen el mismo estado de forma simultanea. Este enunciado es fundamental, sobre todo en los campos de la física atómica y molecular. Sin embargo, su estudio está fuera del propósito de este trabajo.

Los bosones cumplen con la estadística de Bose-Einstein. Al contrario de los fermiones, los bosones carecen de restricciones para ocupar el mismo estado cuántico. De hecho, los bosones son partículas mucho más "sociables", que tienden a ocupar el mismo estado. Einstein predijo que a una cierta temperatura, casi todos los bosones caerán al estado de menor energía, dando así origen al fenómeno de la condensación de Bose-Einstein.

Conforme aumenta el número de partículas que forman un sistema, las funciones de onda que lo describen se vuelven largas y complicadas. La descripción de los estados de muchas partículas se vuelve más sencilla si se formula en segunda cuantización. En este formalismo el estado de un sistema se determina por medio de vectores de estado abstractos en lugar de funciones de onda simetrizadas. Estos vectores de estado contienen las propiedades de simetrización de las funciones de onda de los bosones y los fermiones en forma implícita.

Sea un gas de bosones encerrado en un volumen  $V$ , al cual podemos describir por medio de un conjunto de osciladores armónicos asociados a los estados accesibles para cada partícula. La función de onda para el sistema de  $N$  partículas se construye simetrizando el producto de los estados individuales:

$$\begin{aligned} |\Psi_{n_p, n_q, \dots, n_k}^N(r_1, r_2, \dots, r_N)\rangle &= \left[ \frac{n_p! n_q! \dots n_k! \dots}{N!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_P [|\psi_p(r_1) \psi_p(r_2) \dots \psi_p(r_{n_p})\rangle \\ &\times |\psi_q(r_{n_p+1}) \psi_q(r_{n_p+2}) \dots \psi_q(r_{n_p+n_q})\rangle \dots \\ &\times |\psi_k(r_{n_t+1}) \psi_k(r_{n_t+2}) \dots \psi_k(r_{n_t+n_k})\rangle], \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $P$  representa las permutaciones de  $N$  objetos,  $n_p, n_q, \dots, n_k$  representan los numeros de ocupación de cada estado, los cuales cumplen que  $\sum_i n_i = N$ , donde cada  $n_i$  puede tener valores que van desde



0 a  $N$ . Las funciones de onda de cada partícula están dadas por  $|\psi_s(r_j)\rangle = e^{is^*r_j}$ . Considerando que las partículas interactúan entre sí por medio de un potencial de la forma:

$$\mathcal{V} = \sum_j^N v(r_j), \quad (2.4)$$

Un estado puede transitar desde el estado  $|\psi_p(r_j)\rangle$  al estado  $|\psi_k(r_j)\rangle$  por medio de la interacción con el potencial, con una amplitud de transición dada por:

$$\Xi_{kp} = \int \langle \psi_k(r_j) | v(r_j) | \psi_p(r_j) \rangle dr. \quad (2.5)$$

De la misma forma, es posible que la dispersión a través del potencial  $\mathcal{V}$  lleve a una partícula del estado (2.3) a un estado final dado por:

$$\begin{aligned} |\Psi_{n_p, n_q, \dots, n_k}^N(r_1, r_2, \dots, r_N)\rangle &= \left[ \frac{n_p! n_q! \dots n_k! \dots}{N!} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_P [ |\psi_p(r_1) \psi_p(r_2) \dots \psi_p(r_{n_p-1})\rangle \\ &\times |\psi_q(r_{n_p}) \psi_q(r_{n_p+1}) \dots \psi_q(r_{n_p+n_q-1})\rangle \dots \\ &\times |\psi_k(r_{n_t+1}) \psi_k(r_{n_t+2}) \dots \psi_k(r_{n_t+n_k})\rangle ], \end{aligned} \quad (2.6)$$

con una amplitud de transición dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N &= \int \dots \int dr_1 \dots dr_N \langle \Psi_{n_p-1, n_q, \dots, n_k+1, \dots}^N(r_1, r_2, \dots, r_N) | \\ &\times \sum_j^N v(r_j) | \Psi_{n_p-1, n_q, \dots, n_k+1, \dots}^N(r_1, r_2, \dots, r_N) \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como todas las permutaciones son idénticas es posible sustituir  $\sum_{i=1}^N v(r_i) = Nv(r_1)$ . Podemos entonces escribir esta amplitud de transición en términos de funciones de onda de una sola partícula,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_N &= \int \dots \int dr_1 \dots dr_N \sqrt{\frac{n_k+1}{N}} \langle \psi_k(r_1) | \langle \Psi_{n_p-1, n_q, \dots, n_k, \dots}^{N-1}(r_2, \dots, r_N) | \\ &\times Nv(r_1) \sqrt{\frac{n_p}{N}} | \psi_p(r_1) \rangle | \Psi_{n_p-1, n_q, \dots, n_k+1, \dots}^{N-1}(r_2, \dots, r_N) \rangle \\ &= \int dr_1 \sqrt{\frac{n_k+1}{N}} \sqrt{\frac{n_p}{N}} \langle \psi_k(r_1) | Nv(r_1) | \psi_p(r_1) \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La característica de muchos cuerpos se encuentra contenida en los factores  $\sqrt{n_p}$  y  $\sqrt{n_k+1}$  asociados con la aniquilación de una partícula en el estado  $|\psi_p\rangle$  y la creación de otra partícula en el estado  $|\psi_k\rangle$ . Esto es completamente equivalente a la creación y aniquilación de excitaciones en una colección de osciladores armónicos descritos por el estado  $|n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle$  con operadores de creación y aniquilación definidos por:

$$\hat{a}_k |n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_p, n_q, \dots, n_k - 1, \dots\rangle, \quad (2.9)$$

$$\hat{a}_k^\dagger |n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_p, n_q, \dots, n_k + 1, \dots\rangle. \quad (2.10)$$

En los vectores de estado de la forma:

$$|n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle, \quad (2.11)$$

$n_p$  es el número de partículas en el p-ésimo estado,  $n_q$  es el número de partículas en el q-ésimo estado, etc. Estos vectores son ortogonales y forman un conjunto completo:

$$\langle n'_p, n'_q, \dots, n'_k, \dots | n_p, n_q, \dots, n_k, \dots \rangle = \delta_{n_p, n'_p} \delta_{n_q, n'_q} \dots \delta_{n_k, n'_k} \dots \quad (2.12)$$

$$\sum_{n_p, n_q, \dots, n_k, \dots} |n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle \langle n_p, n_q, \dots, n_k, \dots| = \hat{1}. \quad (2.13)$$

Los operadores de aniquilación y creación  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  cumplen con las reglas de conmutación de operadores bosónicos:

$$[\hat{a}_{k'}, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{k, k'}, \quad (2.14)$$

$$[\hat{a}_k', \hat{a}_k] = [\hat{a}_k'^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0. \quad (2.15)$$

Estas relaciones de conmutación surgen al exigir que los vectores de estado cumplan con el postulado de simetrización dado por (2.1). Así pues, toda la información sobre la simetría de los estados ya está contenida en la relación de conmutación dadas en (2.14).

A partir de éstas relaciones de conmutación es posible definir el *operador de número*  $N_k = a^\dagger a$ , cuya acción sobre un estado es la siguiente:

$$\hat{N}_k |n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle = n_k |n_p, n_q, \dots, n_k, \dots\rangle. \quad (2.16)$$

El vacío es el estado que no tiene partículas en ninguno de los estados disponibles:

$$|0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (2.17)$$

Cualquier vector de estado se construye por medio de aplicaciones sucesivas de los operadores de creación al vector que representa al vacío. Por ejemplo, para un sistema de un solo nivel energético:

$$\frac{a^\dagger^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = |n\rangle. \quad (2.18)$$

### 2.3. El modelo canónico en la aproximación de dos modos

Aquí presentaré el modelo más socorrido para hacer predicciones sobre el BEC, el cual es conocido comúnmente como el modelo *canónico* que describe al condensado. Este describe a un sistema formado por una nube de átomos restringidos a ocupar dos grados de libertad internos denominados  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$ . Las interacciones entre los átomos son colisiones elásticas de tipo AA, BB ó AB. Además se inducen transiciones de tipo Raman entre  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  por medio de un láser. El hamiltoniano de segunda cuantización que describe a esta clase de sistemas está dado por:

$$H = H_A + H_B + H_{int} + H_{las}, \quad (2.19)$$

donde

$$H_{A(B)} = \int d^3x \hat{\Psi}_{A(B)}^\dagger(\vec{x}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + \frac{1}{2} M \omega_{A(B)}^2 x^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a_{A(B)}^{sc}}{2M} \hat{\Psi}_{A(B)}^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_{A(B)}(\vec{x}) \right] \hat{\Psi}_{A(B)}(\vec{x}), \quad (2.20)$$

$$H_{int} = \frac{4\pi\hbar^2 a_{AB}^{sc}}{M} \int d^3x \hat{\Psi}_A^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B(\vec{x}) \hat{\Psi}_A(\vec{x}), \quad (2.21)$$

$$H_{las} = -\frac{\hbar\Omega}{2} \int d^3x [\hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_A(\vec{x}) e^{-i\Delta t} + \hat{\Psi}_A^\dagger(\vec{x}) \hat{\Psi}_B(\vec{x}) e^{i\Delta t}]. \quad (2.22)$$

Las funciones  $\hat{\Psi}_{A,B}^\dagger(\vec{x})$  y  $\hat{\Psi}_{A,B}(\vec{x})$  son operadores de campo de Heisenberg, cuya acción consiste en crear y aniquilar partículas de los tipos A ó B con diferente probabilidad para cada punto del espacio  $\vec{x}$ . Estos operadores obedecen las relaciones de conmutación  $[\hat{\Psi}_A(\vec{x}), \hat{\Psi}_A^\dagger(\vec{x}')] = \delta(x - x')$ ,  $[\hat{\Psi}_B(\vec{x}), \hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}')] = \delta(x - x')$ ,  $[\hat{\Psi}_A(\vec{x}), \hat{\Psi}_B(\vec{x}')] = 0$ , y  $[\hat{\Psi}_A(\vec{x}), \hat{\Psi}_B^\dagger(\vec{x}')] = 0$ .

Los términos representados en (2.20) son los hamiltonianos independientes para cada clase de partícula. La parte encerrada en corchetes dentro de la integral es el hamiltoniano estandar expresado en términos de operadores de Heisenberg. El primer término de (2.20) corresponde a la energía cinética de la partícula. El segundo corresponde al potencial de interacción por efecto Zeeman con el campo magnético externo de la trampa, donde  $\omega_{A,B}$  son parámetros que nos dicen la intensidad con la que se siente el potencial de la trampa según el estado interno de las partículas. Finalmente, el último término corresponde a la energía de interacción de colisiones entre 2 partículas del mismo tipo, donde  $a_{A(B)}^{sc}$  es el parámetro de dispersión correspondiente a colisiones entre partículas de clase A y B respectivamente. Una discusión más profunda sobre el origen de éstos términos se da en [10]

La ecuación (2.21) describe a las colisiones elásticas entre partículas de diferente clase. Es similar al ultimo término de (2.20), con un parámetro de dispersión  $a_{AB}^{sc}$ . Finalmente (2.22) describe transiciones entre subniveles inducidas por medio de un láser con frecuencia desplazada una cantidad  $\Delta$  (llamada en inglés *detuning*) de la frecuencia de transición de los átomos. Esta interacción provocan un fenómeno llamado acoplamiento Josephson, que consiste en la transferencia de partículas entre  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  de ida y vuelta en forma oscilante. El factor  $\Omega$  es conocido como frecuencia de Rabi y es la frecuencia de las oscilaciones que se dan entre los niveles hiperfinos  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$ .

Las partículas dentro del condensado tienen acceso a un espectro de estados energéticos, los cuales son denominados modos, como estados del oscilador armónico. Los operadores de campo cuántico pueden ser escritos como una expansión en términos de esos modos:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_A(\vec{x}) &= \sum_j \phi_{a,j}(x) \hat{a}_j, \\ \hat{\Psi}_B(\vec{x}) &= \sum_k \phi_{b,k}(x) \hat{b}_k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En donde  $\phi_{a,j}(x)$  y  $\phi_{b,k}(x)$  son las funciones de onda espaciales correspondientes al modo j-ésimo de las partículas del tipo A y al modo k-ésimo de las partículas del tipo B, respectivamente. Los operadores  $\hat{a}_j$  y  $\hat{b}_k$  son los operadores de aniquilación de cada modo de A y B respectivamente. Estos operadores cumplen con las relaciones de conmutación:  $[a_i, a_j] = 0$  y  $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$  con  $j=1,2$  donde los diferentes índices indican operadores correspondientes a distintos tipos.

La temperatura en un BEC es muy cercana al cero absoluto, y prácticamente todas sus partículas se encuentran en el estado base correspondiente a cada tipo de partícula. Por este hecho es posible desprestigiar los términos correspondientes a modos excitados en (2.23). Al hacer esto, los operadores de campo cuántico son:  $\hat{\Psi}_A = \phi_a(x)\hat{a}$  y  $\hat{\Psi}_B = \phi_b(x)\hat{b}$ , donde  $\phi(x)$  es una función de onda espacial,  $\hat{a}$  es el operador de aniquilación de partículas del primer tipo y  $\hat{b}$  es el operador de aniquilación del segundo tipo. Esta aproximación es conocida como la aproximación de dos modos, y es muy socorrida para formular modelos relativamente sencillos para la descripción del BEC, pero que reproducen fielmente la física del Hamiltoniano (2.19).

Para obtener el Hamiltoniano del BEC en la aproximación de dos modos, es conveniente reescalar el Hamiltoniano dado en (2.19) usando un conjunto de unidades adimensionales.

Para esto, primero se divide este hamiltoniano entre  $\hbar\omega$ , donde  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B)$ . Después se definen las variables adimensionales  $r = \vec{x}/x_0$ ,  $\bar{\phi}_{A,B}(\vec{r}) = \phi_{A,B}(\vec{x})x_0^{3/2}$ ,  $\chi_{A,B} = \omega_{A,B}/\omega$ , con  $x_0 = (\hbar/M\omega)^{1/2}$ .

Al hacer esto es posible separar la parte que consiste en productos de operadores de la parte de integrales de las funciones de onda  $\phi_{a,b}$ . El Hamiltoniano en la aproximación de dos modos se escribe como:

$$\begin{aligned}
H &= H_a + H_b + H_{int} + H_{las}, \\
H_a &= \omega_a a a^\dagger + \frac{U_a}{2} a^\dagger a^\dagger a a, \\
H_b &= \omega_b b b^\dagger + \frac{U_b}{2} b^\dagger b^\dagger b b, \\
H_{int} &= U a^\dagger b^\dagger a b, \\
H_{las} &= -\lambda (a^\dagger b e^{-i\Delta t} + a b^\dagger e^{i\Delta t}).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Los parámetros están relacionados con las integrales de las funciones  $\bar{\phi}_{a,b}(\vec{r})$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\omega_{a,b} &= \int \bar{\phi}(\vec{r}) \left[ -\frac{\nabla^2}{2} + \frac{1}{2} \chi_{A,B}^2 r^2 \right] \bar{\phi}(\vec{r}) d^3 r, \\
U_{a,b} &= \frac{4\pi a_i^{sc}}{x_0} \int |\bar{\phi}_{a,b}(\vec{r})|^4 d^3 x, \\
U &= \frac{4\pi a_{AB}^{sc}}{x_0} \int |\bar{\phi}_a(\vec{r})|^2 |\bar{\phi}_b(\vec{r})|^2 d^3 x, \\
\lambda &= \frac{\Omega}{\omega} \int \bar{\phi}_a(\vec{r}) \bar{\phi}_b(\vec{r}) d^3 x.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Milburn y colegas demostraron que el hamiltoniano (2.24) describe por igual a condensados con grados de libertad externos ó internos [14]. Como ejemplo de grados de libertad internos están los niveles de energía hiperfinos. El caso más conocido de grados de libertad externos son separaciones espaciales entre los distintos componentes de un condensado, como son los mínimos de un pozo doble de potencial. En esta clase de sistemas las transiciones entre los subniveles de energía son substituidas por el tunelaje de partículas entre los dos pozos. Los parámetros  $\omega_{a[b]}$  están relacionados con la profundidad de cada pozo. Las funciones de onda de los subsistemas están centradas en los mínimos. La tasa de colisiones entre partículas de distintos tipos es proporcional al tamaño de la región de superposición las funciones de onda e inversamente proporcional al tamaño de la barrera que separa a cada pozo. En el caso de separaciones externas hay que ser cuidadosos al aplicar la aproximación de dos modos, ya que en [14] se demostró que esta no es válida en casos donde el número de partículas es muy grande. La aproximación de dos modos pierde validez si  $N\alpha \gg x_0$  donde N es el numero de partículas,  $\alpha$  es un parámetro de dispersión asociado al tipo de partículas que componen al condensado y  $x_0$  es el tamaño de la muestra. Para valores típicos  $\alpha = 5nm$  y  $x_0 = 1\mu m$ . sólo es válida para condensados

con menos de doscientas partículas. Esto se debe a que las colisiones de muchos cuerpos afectan las propiedades del estado base si hay muchas partículas en el sistema [14].

El Hamiltoniano (2.24), conocido comúnmente como el *Hamiltoniano canónico*, no es más que una versión restringida a dos grados de libertad de el *Hamiltoniano de Bose-Hubbard*. El Hamiltoniano de Bose-Hubbard describe a un conjunto de partículas bosónicas con interactuantes, atrapadas en una red óptica (*optical lattices* en inglés) con tunelaje de partículas entre mínimos adyacentes.

La base para los estados del condensado descrito en (2.24) está conformada por vectores de la forma:

$$|n_a, n_b\rangle, \quad (2.26)$$

donde  $n_a$  es el número de partículas en el nivel  $|A\rangle$  y  $n_b$  es el número de partículas en  $|B\rangle$ . Recordando la ecuación (2.18):

$$|n_a, n_b\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n_a} (b^\dagger)^{n_b}}{\sqrt{n_a! n_b!}} |0, 0\rangle. \quad (2.27)$$

El número total de partículas está dado por el operador  $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_b = a^\dagger a + b^\dagger b$ .

El Hamiltoniano (2.24) se escribe de una manera más compacta si se le expresa en términos de operadores de momento angular de Schwinger en vez de expresarlo con operadores de creación y aniquilación. Los operadores de Schwinger se definen como:

$$\begin{aligned} J_+ &= a^\dagger b, \\ J_- &= a b^\dagger, \\ J_z &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Estos operadores cumplen con las relaciones de conmutación propias de operadores de momento angular:  $[J_+, J_-] = 2J_z$  y  $[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm$ .

El operador de momento angular total se define como:  $\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) + \hat{J}_z^2$ , cuyo significado físico está relacionado con el operador de número total de partículas, ya que se puede mostrar:

$$\hat{J}^2 = \frac{\hat{N}}{2}(\frac{\hat{N}}{2} + 1), \quad (2.29)$$

la acción de éstos operadores es:

$$\begin{aligned} J_+ |n_a, n_b\rangle &= a^\dagger b |n_a, n_b\rangle = \sqrt{(n_b)(n_a + 1)} |n_a + 1, n_b - 1\rangle, \\ J_- |n_a, n_b\rangle &= b^\dagger a |n_a, n_b\rangle = \sqrt{(n_a)(n_b + 1)} |n_a - 1, n_b + 1\rangle, \\ J_z |n_a, n_b\rangle &= \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b) |n_a, n_b\rangle = \frac{1}{2}(n_a - n_b) |n_a, n_b\rangle \\ J^2 |n_a, n_b\rangle &= \frac{n}{2}(\frac{n}{2} + 1) |n_a, n_b\rangle. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nótese que ninguno de los operadores actuando en (2.30) cambia el número total de partículas del sistema. Podemos obtener expresiones familiares de las ecuaciones de operadores de momento angular

haciendo la sustitución  $j = (n_a + n_b)/2$  y  $m = 1/2(n_a - n_b)$ . Los estados ahora son de la forma  $|j, m\rangle$ , y en virtud de (2.27) están definidos por:

$$|j, m\rangle = \frac{a_1^{j+m} a_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} |0\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.31)$$

en donde  $|0\rangle \otimes |0\rangle$  es el estado que representa al vacío. Las expresiones para la acción de los operadores en la base  $|j, m\rangle$  son:

$$\begin{aligned} J_+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle, \\ J_- |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\ J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Así pues, el número cuántico  $j$  está relacionado con el número total de partículas:  $j = n/2 = \frac{1}{2}(n_a + n_b)$ , y el valor propio  $m$  del operador  $J_z$  representa a la diferencia de población entre los dos niveles:  $m = \frac{1}{2}(n_a - n_b)$ . El número  $m$  puede tomar valores que van de  $-j$  a  $j$ .

El Hamiltoniano escrito en términos de los operadores de momento angular definidos en (2.28) es:

$$H = \alpha J_z + \beta J_z^2 + \gamma [e^{\phi} J_+ + e^{-\phi} J_-] \quad (2.33)$$

Donde  $\alpha = (\omega_a - \omega_b) + (2J - 1)(U_a - U_b)/2$ ,  $\beta = (U_a + U_b - U)/2$  y  $\phi = \Delta t$ .

El Hamiltoniano (2.33) también puede ser usado para describir fermiones. Esta relacionado con el modelo LMG (Lipkin-Meshkov-Glick) de física nuclear. El Hamiltoniano LMG describe a un sistema de  $N$  fermiones interactuantes entre sí, cada uno con dos niveles de energía. Puede describir tanto a un sistema de spines interactuantes ó a conjuntos de átomos de dos niveles en interacción con un campo electromagnético. Por tal motivo, este modelo tiene una gran importancia en el campo de los sistemas de muchas partículas.

#### 2.4. Predicciones teóricas del modelo canónico de dos modos

En esta sección presentaremos predicciones sobre el BEC modelado con el Hamiltoniano (2.24), que sólo puede ser resuelto en forma aproximada ó numéricamente, ya sea en primera ó segunda cuantización. Este modelo aún no ha sido verificado cuantitativamente en los experimentos, aunque si reproduce algunos resultados cualitativos. Se han escrito una gran cantidad de artículos estudiando las predicciones del modelo canónico. Los resultados mostrados a continuación fueron tomados de [11], donde se calcula el estado base por medio del método conocido como "la aproximación de campo medio", considerando los valores  $U_a = U_b = U_0$ ,  $\omega_a = \omega_b$ , y  $\Delta = 0$ .

Para estudiar el comportamiento de las distribuciones de probabilidad sera necesario desarrollar al estado base  $|\phi_k\rangle$  en la base de estados  $|m\rangle \otimes |N - m\rangle$ :

$$|\phi_k\rangle = \sum_{m=-N}^N q_k^m |m\rangle \otimes |N - m\rangle. \quad (2.34)$$

Dado que  $|\phi_k\rangle$  se determina en forma numérica, su distribución de probabilidad  $|q_k^m|^2$  también se calcula numéricamente. En la figura (2.4) se muestra una colección de gráficas correspondientes a las distribuciones de probabilidad para diferentes parámetros, mostradas originalmente en [11]. Estas gráficas muestran la aparición paulatina de una superposición de estados ó estados de gato de Schrodinger.

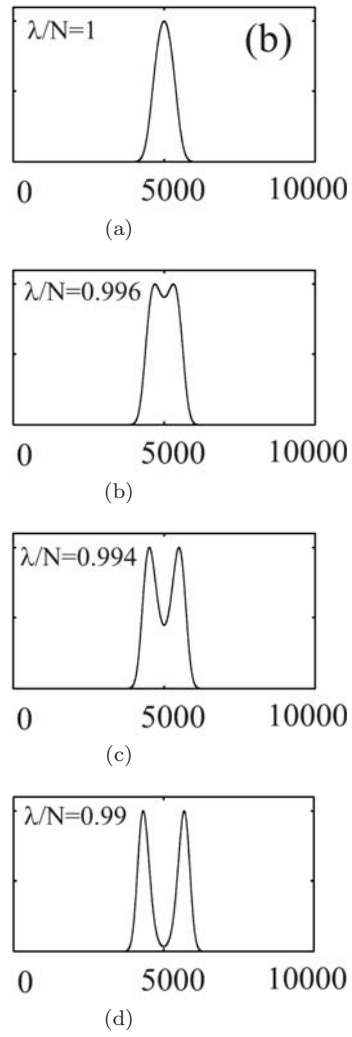


Fig. 2.2: Distribución de probabilidades del estado base para  $N=1000$ , publicadas originalmente en [11]. Aquí podemos apreciar la aparición paulatina de una superposición de estados conforme  $\lambda$  decrece suavemente.

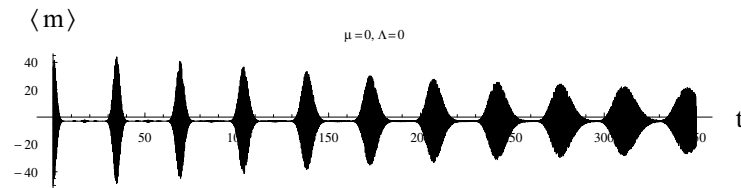


Fig. 2.3: En esta figura se puede observar la evolución de la diferencia de población entre los 2 modos en el modelo sin colisiones inelásticas. Imagen cortesía de Pablo-Barberis

Más adelante se verá que los estados superpuestos también aparecen de forma paulatina para el caso del Hamiltoniano con colisiones inelásticas pero en la región donde no es posible encontrar solución analítica. Sin embargo, la forma en que éstos aparecen es ligeramente diferente. La figura (2.4) muestra la diferencia de población entre los dos modos, donde se observa la aparición de colapsos y reavivamientos. Nótese que, conforme transcurre el tiempo, los reavivamientos son cada vez menos intensos, pero tienen una duración mayor. Los parámetros  $\mu$  y  $\Lambda$  están relacionados con la intensidad de las colisiones inelásticas en el Hamiltoniano. Más adelante se mostrará que este comportamiento se repite para algunos casos en los que  $\Lambda$  y  $\mu$  son distintos de cero.



### 3. COLISIONES INELÁSTICAS EN EL CONDENSADO DE BOSE-EINSTEIN

#### 3.1. Importancia teórica y experimental de las colisiones inelásticas

Las colisiones descritas por el modelo canónico son puramente elásticas, es decir, el tipo de partículas es el mismo antes y después del proceso. Los procesos inelásticos son aquellos en los que las partículas resultantes después de la interacción son de tipos diferentes a las iniciales. Un ejemplo de interacción de este tipo sería la creación de una partícula en  $|A\rangle$  y otra en  $|B\rangle$  después de la colisión de dos partículas en el estado  $|A\rangle$ , proceso que se representa como  $a^\dagger b^\dagger aa$  en lenguaje de operadores. Otro ejemplo sería la colisión de dos partículas en el estado  $|B\rangle$  dando como resultado dos partículas en  $|B\rangle$ , proceso que se escribe de la forma  $b^\dagger b^\dagger aa$ . En los experimentos se hacen grandes esfuerzos para suprimir los procesos inelásticos. El principal motivo es que las colisiones inelásticas no son del mismo tipo que las descritas justo arriba, si no que pueden dar lugar a pérdida de partículas. Entre las colisiones inelásticas más conocidas de este tipo están las colisiones con partículas a temperatura ambiente localizadas dentro de la cámara, recombinaciones triples de átomos que dan lugar a moléculas que escapan de la trampa, interacciones entre partículas que provocan que alguna de éstas ó ambas cambien a un estado de spin que no es atrapado por el potencial, interacciones dipolares entre partículas, etc. En el Modelo con Colisiones Inelásticas de Multipartículas se consideran procesos inelásticos en los cuales las partículas cambian de modo después de la interacción y cuyo exceso de energía no es suficiente para provocar la pérdida de éstas. De hecho, existen cálculos microscópicos que muestran que éstas colisiones pueden ser inducidas por la presencia de un campo electromagnético externo durante la colisión [5]. Es posible que alguna de las partículas en colisión absorba ó emita un fotón del campo, provocando una transición entre niveles.

#### 3.2. El modelo con colisiones inelásticas

Aquí se introduce el Modelo con Colisiones Inelásticas de Multipartículas (CIM) presentado por Fuentes-Schuller y Barbers-Blostein por primera vez en [8]. El Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned}
 H &= A_0 + \delta\omega(a^\dagger a - b^\dagger b) \\
 &+ \lambda(e^{i\phi} a^\dagger b + e^{-i\phi} b^\dagger a) + \mathcal{U} a^\dagger b^\dagger ab \\
 &+ \Lambda(e^{2i\phi} a^\dagger a^\dagger bb + h.c.) \\
 &+ \mu(e^{i\phi}(a^\dagger a^\dagger ab - b^\dagger a^\dagger bb) + h.c.)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

El término  $A_0$  es una constante. El segundo término es la diferencia de población entre los dos modos modulado por un parámetro  $\delta\omega$ , el cual representa la diferencia de frecuencia entre los modos. El tercer término corresponde la interacción de tipo Josephson inducida por la interacción de las partículas con un campo electromagnético clásico. En esta interacción ocurre la aniquilación una partícula de un modo, y su creación en el otro. Los términos que consisten de producto de 4 operadores representan las colisiones entre dos partículas. El término con parámetro de dispersión  $\mathcal{U}$  describe a las colisiones elásticas. Los términos con parámetros  $\mu$  y  $\Lambda$  describen a las colisiones inelásticas. Nótese que si hacemos  $\mu = \Lambda = 0$ , regresamos al hamiltoniano canónico presentado en (2.24), aunque a primer vista

faltan los términos  $\frac{U_a}{2}a^\dagger a^\dagger aa$  y  $\frac{U_b}{2}b^\dagger b^\dagger bb$ . Estos términos forman parte de la constante  $A_0$ , la cual tiene la forma  $A_1N + A_2N^2$ , para algunos coeficientes  $A_1$  y  $A_2$ . El Hamiltoniano (2.24) y otros del mismo tipo sólo pueden ser resueltos con métodos numéricos. La principal ventaja del Hamiltoniano CIM es que este puede tener solución exacta y analítica. Sin embargo, esta solución sólo existe si los parámetros satisfacen ciertas condiciones, que a su vez dependen de la tasa de colisiones inelásticas presente en el sistema. Esto es más evidente si escribimos al Hamiltoniano (3.1) en la representación de momento angular definida en (2.28):

$$\begin{aligned}
H &= A_0 + 2\delta\omega J_z + \lambda(e^{i\phi}J_+ + e^{i\phi}J_-) \\
&+ \mathcal{U}\frac{(J_z^2 - \hat{N}^2)}{4} + \Lambda(e^{2i\phi}J_+^2 + e^{-2i\phi}J_-^2) \\
&+ \mu(e^{i\phi}J_+(J_z + 1) + h.c.),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideremos ahora el Hamiltoniano  $H_0 = A_1(J_z) + A_2(J_z)^2$  con estados propios  $|j, m\rangle$ . Este Hamiltoniano describe a un condensado sin interacción Josephson, es decir, sin tunelaje ni interacción con un láser.  $A_1$  corresponde a la diferencia de energía entre modos y  $A_2$  al parámetro de dispersión de colisiones elásticas de dos cuerpos. No es difícil verificar que si los parámetros del modelo satisfacen las siguientes condiciones:

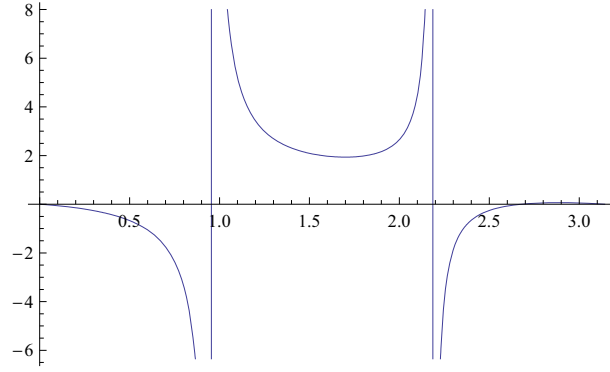
$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{A_2}{4}(\cos^2 \theta N^2 + \sin^2 \theta N), \\
\delta\omega &= (A_1 \cos \theta)/2, \\
\lambda &= (A_1 \sin \theta)/2, \\
\mathcal{U} &= A_2(1 - 3 \cos^2 \theta)/4, \\
\mu &= (A_2 \sin \theta \cos \theta)/2, \\
\Lambda &= (A_2 \sin^2 \theta)/4.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

entonces el Hamiltoniano (3.2) puede ser escrito de la forma  $H_2 = UH_0U^\dagger$

$$\begin{aligned}
H &= A_1(\cos(\theta)J_z + \sin(\theta)(e^{i\phi}J_+ + e^{i\phi}J_-)) \\
&+ A_2(\cos^2 \theta J_z^2 + \sin^2 \theta (e^{2i\phi}J_+^2 + e^{-2i\phi}J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+)) \\
&+ \cos \theta \sin \theta (J_z(e^{i\phi}J_+ + e^{-i\phi}J_-) + h.c.),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $H_0 = A_1J_z + A_2J_z^2$  y  $U = \exp(i\theta J_z) \exp(i\phi J_y)$  es una rotación general, que en el campo de la óptica cuántica se le conoce como operador de desplazamiento de dos modos. El operador  $U(\theta, \phi)$  es unitario, por lo que es fácil ver que la soluciones exactas y analíticas previstas con anterioridad son de la forma:  $U^\dagger|j, m\rangle$ . El espectro de energías de  $H_0$  permanece invariante:  $\mathcal{E}_m = A_1m + A_2m^2$ . El estado base  $U^\dagger|j, m_0\rangle$  se obtiene trivialmente minimizando esta ecuación. Para  $A_2 > 0$  tenemos que  $m_0$  es el entero más cercano a  $-A_1/2A_2$  ó  $m_0 = A_1N/|A_1|$  si  $|A_1/2A_2| > N$ . Para  $A_2 < 0$  el mínimo corresponde a  $m_0 = N$  si  $A_1 < 0$  ó  $m_0 = -N$  cuando  $A_2 > 0$ . El cociente  $A_1/2A_2$  es un parámetro que mide la intensidad de las colisiones entre partículas en comparación con la diferencia entre frecuencias de los dos modos en ausencia de interacciones de tipo Josephson.

Este hamiltoniano tiene exactamente los mismos términos que el hamiltoniano (2.24). Sin embargo los parámetros son distintos. De hecho, el hamiltoniano de la ecuación (3.1) tiene 6 parámetros:  $A_0, \delta\omega, \mathcal{U}, \lambda, \mu$  y  $\Lambda$ . Mientras que el espacio de parámetros de (3.4) está restringido a 4:  $\theta, \phi, A_1$  y  $A_2$ . Para que (3.1) tenga soluciones analíticas no es suficiente con incluir las colisiones inelásticas, también



debe ser posible encontrar números  $\theta, \phi, A_1$  y  $A_2$  tales que cumplan las condiciones dadas en (3.3). Las ecuaciones (3.3) definen una región en el espacio de los parámetros del Hamiltoniano. Si los valores de los parámetros de un Hamiltoniano con colisiones inelásticas caen en dicha región, este Hamiltoniano tiene solución analítica. Además, el comportamiento de las propiedades físicas cambia dependiendo si el Hamiltoniano está dentro 'o fuera de la región analítica.

La tasa entre colisiones elásticas e inelásticas está dada por:

$$\frac{\Lambda + \mu}{\mathcal{U}} = \frac{2 \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta}{1 - 3 \cos^2 \theta} \quad (3.5)$$

Además de ser el resultado de una restricción matemática, esta relación tiene una razón física. Esto se debe a que las colisiones inelásticas son provocadas por la interacción con láseres. Si graficamos (3.5) con respecto a  $\theta$  se puede apreciar que hay dos regiones en las que tiene valores negativos y una región intermedia de valores positivos. Cabe destacar que (3.5) no puede tomar valores en el intervalo que va de 0 hasta 1.699.

### 3.3. Predicciones del modelo CIM con solución analítica

Se mencionó anteriormente que el comportamiento del sistema descrito por el Hamiltoniano CIM varía dependiendo de la existencia de una solución analítica. Esto se puede ver al analizar las distribuciones de población en ambos casos. Para el Hamiltoniano CIM sin solución analítica se utilizan métodos numéricos para calcular los coeficientes  $|q_k^m|^2$ . En el Modelo CIM, el estado base es de la forma  $U^\dagger |j, m_0\rangle$  para algún  $m_0$ . Si queremos obtener sus distribuciones de probabilidad, debemos obtener los coeficientes de su expansión en la base  $|j, m\rangle$ :  $U^\dagger |j, m_0\rangle = \sum_m d_{m, m_0}^j |j, m\rangle$ , donde  $d_{m, m_0}^j = \langle j, m | U^\dagger |j, m_0\rangle$ . Las distribuciones se obtienen al graficar  $P_n = |d_{m, m_0}^j|^2$  como función de  $m$ . Aprovechando que contamos con la solución analítica del problema, podemos dar una expresión exacta de éstos coeficientes:

$$\begin{aligned} d_{m, m_0}^j &= \sum_{k=Min[0, m_0-m]}^{Max[j+m_0, j-m]} (-1)^{k-m_0+m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m_0)!(j-m_0)!}}{k!(j+m_0-k)!(j-m-k)!(k-m_0+m)!} \\ &\times \cos\left[\frac{\theta}{2}\right]^{2j-2k+m_0-m} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right]^{2k-m_0+m} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Los coeficientes (3.6) son conocidos como coeficientes de Wigner. Estos son fundamentales en el cálculo de los resultados presentados en este trabajo, por lo que en el apéndice se da una explicación el método utilizado para su obtención explícita. En la figura (3.3) se muestran una serie de distribuciones

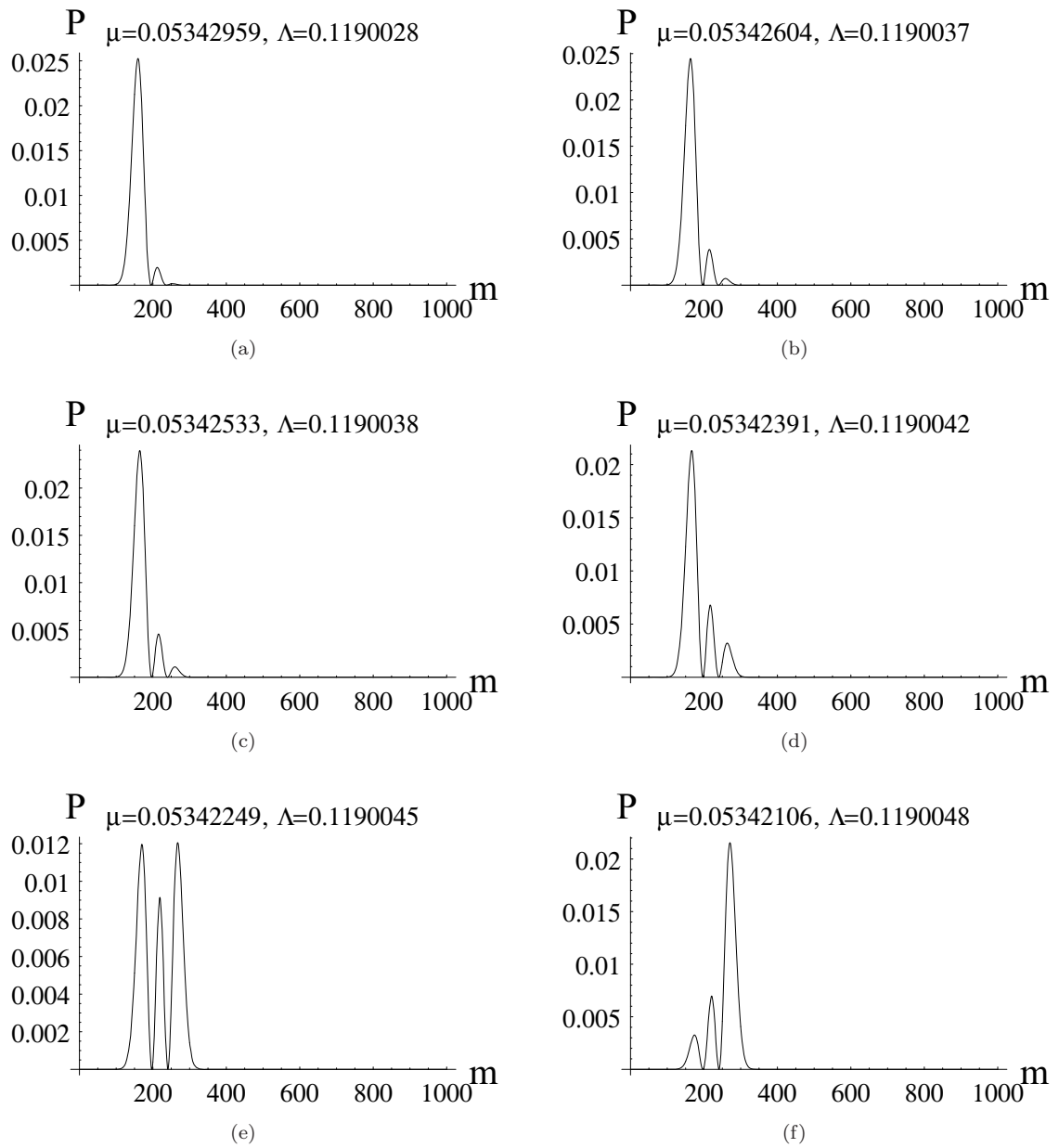


Fig. 3.1: Distribuciones de población para el estado base para 1000 partículas con parámetros  $\delta\omega$ ,  $\lambda$  y  $\mathcal{U}$  fijos y con  $\Lambda$  y  $\mu$  con los valores indicados. Nótese la aparición paulatina de picos cuando se  $\lambda$  y  $\mu$  varían suavemente

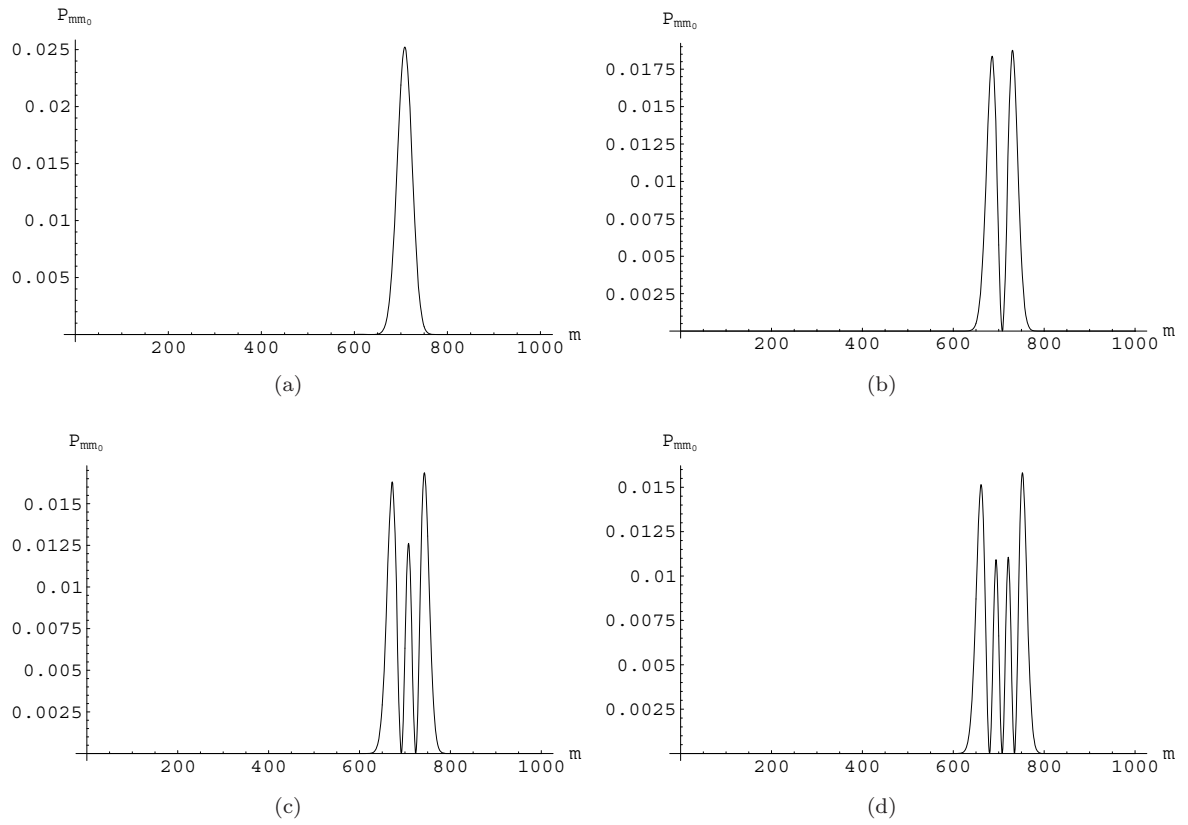


Fig. 3.2: Distribuciones de población para el estado base para 1000 partículas con  $\theta = 1,35$ .

para el estado base con 1000 partículas con distintos parámetros fuera de la región analítica. En la figura (3.3) se muestran éstas mismas distribuciones pero dentro de la región analítica para distintos valores de  $m_0 = [-A_1/2A_2]$ , es decir, el menor número entero mayor que  $-A_1/2A_2$ . Se puede notar en la figura que hay un cambio abrupto si variamos el cociente  $-A_1/2A_2$  de tal forma que  $m_0$  vaya de 1000 a 999 y así sucesivamente. Este cambio brusco se debe a que nuestra solución depende del número  $m_0$ , el cual sólo toma valores enteros. Este cambio contrasta con el comportamiento obtenido en [11] al variar suavemente los parámetros. A partir de  $m_0 = 999$  aparecen los estados de gato de Schrodinger.

En varios artículos que analizan al modelo canónico se ha reportado la aparición de colapsos y reavivamientos, sin embargo, éstos nunca exhiben un comportamiento completamente periódico. Su forma cambia al paso del tiempo, aumentado su anchura y disminuyendo su altura. Más adelante veremos que en el modelo CIM existen situaciones en las cuales los colapsos y reavivamientos son uniformes en periodo y en forma.

Al graficar  $\langle J_z(t) \rangle$  vs.  $t$  calculado en presencia de colisiones inelásticas, el comportamiento obtenido también presenta colapsos y reavivamientos. Sin embargo, el hecho de añadir las colisiones inelásticas afecta dramáticamente la evolución del sistema. Si los parámetros son cambiados, moviéndose hacia los determinados por las ecuaciones (3.3), el comportamiento se vuelve cada vez más uniforme, hasta ser completamente periódico cuando los parámetros corresponden a un Hamiltoniano que tiene solución exacta y analítica.

En la figura (3.3) se muestra que al variar los parámetros  $\Lambda$  y  $\mu$  de las colisiones inelásticas, desde cero hasta valores que caen en la región que cuenta con soluciones analíticas, los colapsos se vuelven cada vez más uniformes, hasta ser completamente periódicos.

Para calcular explícitamente la evolución de la diferencia de población en el modelo CIM, basta con calcular la evolución temporal del valor de expectación del operador  $J_z = a^\dagger a - b^\dagger b = n_a - n_b$ . Para un estado inicial  $|\Psi(t=0)\rangle = \sum C_m U^\dagger |J, m\rangle$  tenemos que:

$$\langle J_z(t) \rangle = \sum_m \sum_{m'} C_m C_{m'}^* e^{i(E_{m'} - E_m)t} \langle J, m' | U J_z U^\dagger | J, m \rangle, \quad (3.7)$$

donde  $U = \exp(i\theta J_z) \exp(i\phi J_y)$  y como  $U J_z U^\dagger = \cos\theta J_z + \sin\theta(e^{i\phi} J_+ + e^{-i\phi} J_-)$ , por lo tanto, el resultado final es:

$$\langle J_z(t) \rangle = \cos\theta \sum_m m |C_m|^2 - \sin\theta \sum_m C_m C_{m-1} \sqrt{N(N+1) - m(m-1)} L_m, \quad (3.8)$$

donde  $L_m = \cos(\phi + (E_{m-1} - E_m)t)$ .

En caso de tener al estado base  $|\Psi(t=0)\rangle = |j, m_0\rangle$  como estado inicial, los coeficientes son:  $C_m = e^{im\phi} d_{m, m_0}^j(\theta)$ , donde  $d_{m, m_0}^j(\theta)$  son los coeficientes (3.6)

Si se sustituyen en la ecuación (3.8) los coeficientes (3.6) y los valores del espectro de energía, la fórmula obtenida para la diferencia de población es:

$$\begin{aligned} \langle J_z(t) \rangle &= m_0 \cos^2\theta - \sin\theta \sum_{m=-N+1}^N \frac{(2N)!}{(N-m)!(N+m-1)!} \\ &\times \cos\left[\frac{\theta}{2}\right]^{2n+2m-1} \sin\left[\frac{\theta}{2}\right]^{2n-2m+1} \cos[(A_2 - A_1 - 2A_2 m)t]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se puede aprovechar la existencia de soluciones exactas y analíticas para calcular explícitamente los tiempos de colapsos y reavivamientos. El tiempo de colapso  $t_c$  es aquel en el cual todos los cosenos de la fórmula (3.8) se cancelan mutuamente. Por lo tanto  $t_c$  es el tiempo tal que los argumentos de tales cosenos tengan una diferencia de fase de  $2n + 1\pi$  con  $n$  algún número entero:

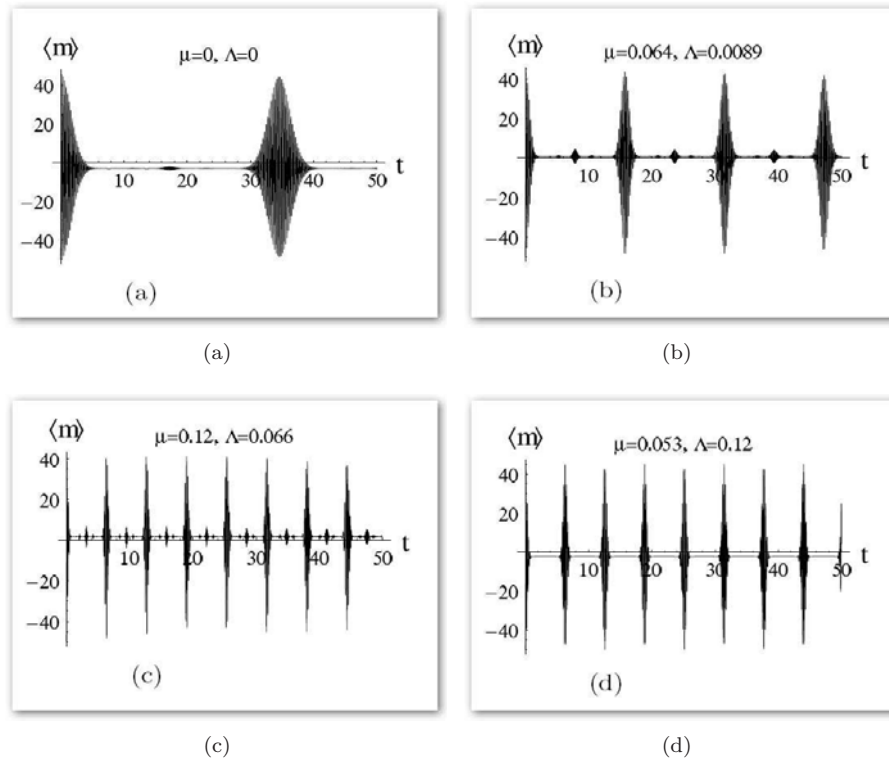


Fig. 3.3: Aquí tenemos unas gráficas que representan el comportamiento de la diferencia de población entre los dos modos. La figura (a) representa al modelo canónico, y las siguientes representan al modelo CIM. La última imagen representa a la región donde existe solución analítica

$$(E_{m-1} - E_m)t_c - (E_m - E_{m+1})t_c = (2n + 1)\pi, \quad (3.10)$$

como  $E_m = A_1m + A_2m^2$  tenemos que  $t_c = (2n + 1)\pi/2A_2$ , si suponemos que el tiempo  $t=0$  está justo a la mitad de un reavivamiento, entonces  $t_c(n = 0)$  corresponde justo a la mitad de la distancia entre reavivamientos.

Para calcular el periodo de evolución hay que encontrar el tiempo  $T$  tal que  $\langle J_z(0) \rangle = \langle J_z(T) \rangle$ . Esto se cumple cuando:

$$(E_{m-1} - E_m)T = 2\pi n_m, \quad (3.11)$$

siendo  $n_m$  un número entero diferente para cada  $m$ . Si introducimos el valor  $E_m = A_1m + A_2m^2$  en la ecuación (3.11), obtenemos:

$$(-A_1 - A_2(2m - 1))T = 2\pi n_m. \quad (3.12)$$

Dividiendo la ecuación (3.12) entre  $\pi$  nos queda:

$$-(A_1T/\pi) - (A_2T/\pi)(2m - 1) = 2n_m. \quad (3.13)$$

Se puede observar que el término del lado derecho de la ecuación (3.13) es un número entero, por lo tanto el lado izquierdo también lo debe de ser. Esta condición sólo se puede satisfacer si los números  $A_1T/\pi$  y  $A_2T/\pi$  son enteros. La condición anterior implica que el cociente  $A_1/A_2$  debe de ser un número racional. Si no es así, la ecuación (3.12) nunca se cumple y la función (3.8) no es periódica. Se presentarán los colapsos y reavivamientos, pero la forma particular de cada reavivamiento será diferente. Si  $A_1/A_2$  es racional entonces  $T$  representa al periodo. Definiendo un periodo  $P_r = \frac{T}{2t_c(n=0)}$  cuya unidad es el número de reavivamientos. Como  $t_c(n = 0)$  corresponde a la mitad de un reavivamiento, entonces si  $P_r = k$ , la estructura del primer reavivamiento se repite después de  $k$  reavivamientos. Suponiendo que  $A_1 = cA_2$ , con  $c = p/q$  y con  $p$  y  $q$  enteros, entonces si  $p-q$  es par  $P_r = p$  y si es impar entonces  $P_r = 2q$ . Como ejemplo esta la figura (3.3), en donde se muestra la evolución de la población relativa para  $\theta = 1,35$  con  $c = 49, 50, 101/3, 59/2$ , valores que fueron escogidos para que  $P_r = 1, 2, 3, 4$ .

Cabe destacar que en el modelo canónico ( $\Lambda, \mu = 0$ ), si la intensidad de las colisiones elásticas es mucho mayor que la intensidad de las interacciones de tipo Josephson ( $U/\lambda \gg 1$ ), entonces las oscilaciones de Rabi se inhiben totalmente, dejando al condensado atrapado en un solo modo, fenómeno conocido como "Self-Trapping". En el Modelo CIM, al dejar fijo  $A_1$  y  $A_2$ , tenemos que la relación  $U/\lambda$  es máxima para  $\theta = 0$  y se puede ver trivialmente en la ecuación (3.8) que no hay oscilaciones produciendo el fenómeno de Self-trapping. Sin embargo, para  $\theta \neq 0$  en el caso de que  $A_2 \gg A_1$  que es lo mismo que  $U/\lambda \gg 1$ , siempre habrá un colapso en  $t_r$  y nunca se observará el fenómeno de Self trapping. Esto implica que las colisiones inelásticas inhiben la aparición de este fenómeno.



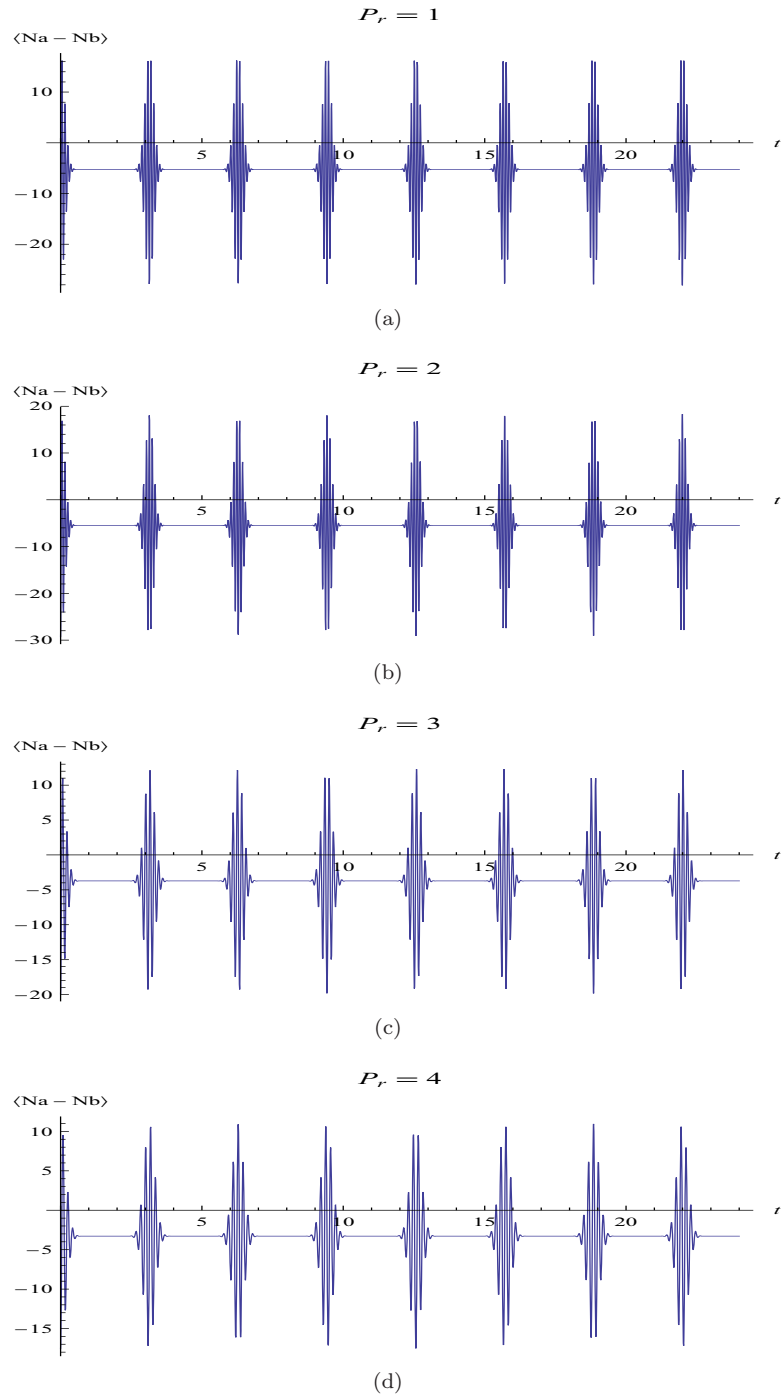


Fig. 3.4: La evolución de la población para  $\theta = 1,35$ ,  $A_1/A_2 = 49, 50, 101/3, 59/2.$ , los cuales fueron escogidos de tal manera que  $P_r = 1, 2, 3, 4$

## 4. ENREDAMIENTO CUÁNTICO

Según los postulados de la mecánica cuántica, el espacio de Hilbert de un sistema compuesto por dos subsistemas  $A$  y  $B$  está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada uno de sus componentes:  $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Se dice que un vector de estado perteneciente a  $\mathcal{H}_{AB}$  es enredado cuando no es posible escribirlo como el producto tensorial de vectores de estado independientes en cada subsistema. El enredamiento es una consecuencia de los postulados de la mecánica cuántica, y carece completamente de análogo clásico. El enredamiento es una propiedad que le da un toque extraño y controversial a la mecánica cuántica. La discusión respecto a esta propiedad comenzó a principios del siglo XX con un conocido trabajo publicado por Einstein en colaboración con Podolsky y Rosen en 1935 [24]. Uno de los aspectos que más inquietaba a este grupo de investigadores era el hecho de que no es posible asignar una realidad física objetiva e independiente a los objetos que forman a un sistema que se encuentra en un estado enredado, hecho que intentaron usar como argumento para mostrar posibles inconsistencias en la teoría cuántica. Schrodinger respondió a este argumento [25], introduciendo el conocido concepto de **estado de gato** y señalando que no es posible explicar la superposición de estados ó los estados enredados de forma clásica. Además de afirmar que en mecánica cuántica no es posible asignarle un estado individual a los objetos que conforman un sistema.

En 1967 Bell publicó su trabajo en donde mostraba que las correlaciones clásicas entre sistemas deben de cumplir ciertas condiciones, llamadas en su honor desigualdades de Bell. Sobra decir que éstas condiciones son violadas por las correlaciones que existen entre dos sistemas enredados. Cuando dos sistemas se encuentran en un estado enredado, exhiben entre si correlaciones de carácter no local. Si uno de los sistemas es alterado, el otro también sufrirá modificaciones aún si los dos sistemas estuvieran desconectados causalmente.

Actualmente, el enredamiento sigue siendo un foco de atención, no sólo por el papel clave que juega en los fundamentos mismos de la teoría cuántica ó por sus aspectos filosóficos. También ha adquirido relevancia al haber sido identificado como un recurso potencial para aplicaciones en teoría de la información cuántica, tales como la teleportación y la criptografía cuántica. De hecho, se ha propuesto que el enredamiento es el responsable del aumento de la eficiencia del procesamiento de información en cómputo cuántico.

La teoría del enredamiento aún está muy lejos de estar completada. Únicamente han logrado definir criterios y medidas definitivas para determinar el enredamiento en estados de sistemas de dos partes (llamados *bipartitos*). Para sistemas consistentes en más de dos partes existen problemas para definir al enredamiento de manera satisfactoria, ya que existen estados no separables en su totalidad, y estados no separables sólo entre algunos de los subsistemas. Tal es el caso de los sistemas con tres partes (llamados *tripartitos*)

### 4.1. Teoría del enredamiento

El objetivo de esta sección es presentar las bases matemáticas de la teoría del enredamiento, a partir de las cuales será definida la entropía de Von Neumann, la cual se sabe que cuantifica al enredamiento. Si un sistema físico se encuentra dividido en  $n$  subsistemas bien diferenciados, cada uno con su respectivo espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_j$  de dimensión  $m_j$ , el espacio de Hilbert total está dado por el *producto tensorial* de los espacios de Hilbert de cada una de sus partes  $H = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \dots \otimes \mathcal{H}_n$ . Si  $|\phi_i^{k_i}\rangle$  es la base del espacio de Hilbert del sistema  $i$ -ésimo, con dimensión  $k_i$ , entonces el sistema completo tiene una base compuesta por los productos tensoriales de los elementos de las bases de cada subsistema. Cualquier estado del

sistema total puede ser escrito como una combinación lineal de tales productos. La dimensión del espacio de Hilbert del sistema total es el producto de las dimensiones de los espacios que la componen.

El estado más general de un sistema *bipartito* cuyos subsistemas tienen espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  y bases  $|i\rangle_A$  y  $|j\rangle_B$  es:

$$|\Psi\rangle_{A,B} = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B, \quad (4.1)$$

donde  $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = 1$

Un estado *separable* es aquel que puede ser factorizado en el producto tensorial de algún estado  $|\phi\rangle_A$  del subsistema A con otro estado  $|\psi\rangle_B$  de B:

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B. \quad (4.2)$$

Sin embargo, es posible que los coeficientes  $a_{ij}$  sean tales que (4.1) no puede ser factorizado en el producto de los estados correspondientes a cada uno de los subsistemas. Esa clase de estados son llamados no separables ó *enredados*. Un ejemplo típico de un estado enredado es:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B). \quad (4.3)$$

El estado (4.3), corresponde a un sistema de dos partículas con spin, donde  $|\downarrow\rangle$  y  $|\uparrow\rangle$  representan la proyección positiva y negativa del spin en el eje z, respectivamente. Nótese que para este estado los dos sistemas están completamente correlacionados: Si medimos que la partícula A tiene proyección positiva de spin, sabremos con certeza que si medimos la partícula B esta tendrá proyección negativa. Esto sucede incluso si los dos subsistemas están desconectados causalmente. Por eso se dice que el enredamiento es una correlación *no local*.

Un criterio para determinar si un estado es enredado ó no es la *Descomposición de Schmidt*. Sea  $|\psi\rangle$  el estado de un sistema compuesto AB. Por lo tanto existen estados ortonormales  $|i_A\rangle$  en el sistema A y  $|i_B\rangle$  en el sistema B tales que:

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (4.4)$$

donde los coeficientes  $\lambda_i$  son *coeficientes de Schmidt*. Como consecuencia de esta descomposición sabemos que los operadores densidad reducidos del estado  $|\psi\rangle$  son  $\rho_A = \sum_i |\lambda_i|^2 |i_A\rangle \langle i_A|$  y  $\rho_B = \sum_i |\lambda_i|^2 |i_B\rangle \langle i_B|$ . El número de Schmidt se define como el número de coeficientes de Schmidt distintos de cero en la expresión (4.4). Si el número de Schmidt es mayor a uno, entonces el estado es no separable. La descomposición (4.4) tiene sentido aun si los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  no tienen la misma dimensión. Esto se debe a que el número de valores propios de  $\rho_A$  y  $\rho_B$  diferentes de cero es el mismo. Si los espacios de Hilbert son de dimensiones diferentes, el número de valores propios iguales a cero en  $\rho_A$  es diferente al de  $\rho_B$ . La descomposición de Schmidt nos da un criterio para determinar la separabilidad de un estado, pero no proporciona directamente criterios para cuantificar al enredamiento.

Para definir la entropía de Von Neumann es necesario introducir el concepto de *matriz densidad* u *operador densidad*, pero antes de eso hay que definir el concepto de *ensamble*. Un ensamble es una colección de un gran número de sistemas físicos idénticos. La teoría cuántica hace sus predicciones sobre ensambles, ya que sus predicciones son probabilísticas. Un ensamble *puro* se caracteriza porque todos sus elementos están descritos por algún vector de estado  $|\alpha\rangle$ . Esto pasa si todos los sistemas que conforman el ensamble fueron preparados de forma idéntica. Un ensamble mezclado es aquel que

tiene a sus elementos descritos por más de un estado. Un ejemplo de ensamble mezclado es aquel cuyos elementos están descritos en un 60 por ciento por el vector  $|\alpha\rangle$  y 40 por ciento por otro vector  $|\beta\rangle$ . Los ensambles mezclados se dan cuando hay incertidumbre sobre la forma de preparación de los estados de los sistemas que lo componen. Si un sistema pertenece a un ensamble puro, se dice que se encuentra en un estado puro, y si no, se dice que se encuentra en un estado mezcla.

Es posible describir a los estados mezcla por medio del lenguaje de los vectores de estado. Sin embargo, es más adecuado recurrir al formalismo de la *matriz densidad*. El operador densidad se define como:

$$\rho = \sum_i \omega_i |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i|, \quad (4.5)$$

donde  $|\alpha_i\rangle$  son los estados que ocupan los componentes del ensamble, y  $\omega_i$  es la fracción de población correspondiente a ese estado. Los vectores de estado  $|\alpha_i\rangle$  no tienen que ser ortogonales necesariamente y por lo tanto, el número de términos puede ser mayor que la dimensión del espacio de Hilbert del sistema.

Para que un operador  $\rho$  sea un operador densidad correspondiente a algún ensamble, este debe de cumplir las siguientes propiedades:

- $\rho$  es positiva: para cualquier estado  $|\Psi\rangle$  tenemos que  $\langle \Psi | \rho | \Psi \rangle \geq 0$
- $tr(\rho) = 1$

De aquí se sigue que  $\rho$  es diagonalizable, tiene valores propios reales y positivos, y su suma es igual a uno.

Si un sistema se encuentra en un estado puro, existe algún coeficiente  $\omega_i$  en (4.5) que es igual a 1, mientras que los otros coeficientes valen cero. Por lo tanto, si un operador densidad  $\rho$  corresponde a un estado puro, entonces se cumple que  $\rho^2 = \rho$ .

La formulación de la matriz densidad es matemáticamente equivalente a la que utiliza el lenguaje de los vectores de estado. Sin embargo, la matriz densidad es más apropiada para la descripción de ciertas situaciones; en particular para la descripción de subsistemas individuales de un sistema cuántico compuesto en un estado puro. Esta descripción está dada en términos del *operador densidad reducido*, cuya definición es:

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) \quad (4.6)$$

El mapeo  $Tr_B$  es conocido como la *traza parcial* sobre el sistema. La traza parcial sobre B está definida como:

$$Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_i \langle i | \rho_{AB} | i \rangle_B. \quad (4.7)$$

La traza parcial es la única operación que nos da la descripción correcta de cantidades observables para subsistemas de un sistema compuesto.

Se sabe que la *entropía de Von Neumann* es una medida que cuantifica el enredamiento para estados puros bipartitos. La entropía de Von Neumann se define en función de la matriz densidad reducida:

$$\mathcal{S}(\rho_A) = -Tr[\rho_A \log_2(\rho_A)] \quad (4.8)$$

Algunas de sus propiedades más relevantes son:

- $\mathcal{S}(\rho) = 0$  para estados separables.

- *Aditividad*  $S(\rho^n) = nS(\rho)$
- *Subaditividad*  $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$ . La igualdad se cumple si  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$
- *Invariancia* Si  $U$  es una transformación unitaria entonces  $S(\rho) = S(U\rho U^\dagger)$
- *Valor máximo*  $S(\rho) \leq \text{Log}D$  donde  $D$  es el número de valores propios no negativos de  $\rho$ .

Si escribimos  $\rho_A$  en su forma diagonal:

$$\rho_A = \sum_i C_i |i\rangle\langle i|, \quad (4.9)$$

veremos que la entropía de Von Neumann se escribe como:

$$S(\rho_A) = - \sum C_i \log_2[C_i] \quad (4.10)$$

Como la entropía de Von Neumann depende únicamente de los valores propios de la matriz densidad reducida, los cálculos darán los mismos resultados sin importar si la traza parcial se aplica en el subsistema A ó en el subsistema B. Vale la pena destacar que los coeficientes  $C_i$  en (4.9) están relacionados con los coeficientes de Schmidt  $\lambda_i$  de la forma  $C_i = |\lambda_i|^2$ . Así pues, si conocemos la descomposición de Schmidt del estado que queremos cuantificar, la entropía de Von Neumann estará en función de los coeficientes de Schmidt:

$$S(\rho_A) = -2 \sum |\lambda_i|^2 \log_2[|\lambda_i|] \quad (4.11)$$

y ya no será necesario calcular la matriz densidad para obtener los coeficientes  $C_i$ .

#### 4.2. Enredamiento en el BEC

La posibilidad de generar enredamiento en BECs con dos modos ya ha sido estudiada exhaustivamente [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Se sabe que las colisiones en el BEC generan enredamiento de muchos cuerpos entre grados de libertad internos de spin de un condensado de dos componentes [28]. Esto se debe a que la evolución de las propiedades del sistema está determinada por la fuerza de las interacciones entre las partículas. As pues, regulando la intensidad de éstas interacciones es posible generar estados enredados entre las partículas del condensado. Una manera de hacer esto es aplicar un campo magnético externo, el cual cambiará el potencial de interacción de los átomos en el condensado. Otra forma es por medio de pulsos provenientes de un láser [27].

El BEC de dos componentes es un sistema descrito por estados puros bipartitos. En el caso de transiciones entre niveles de energía, los subsistemas son las partículas en los distintos niveles hiperfinos  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$ . En el caso de tunelaje en un pozo doble, la interacción tipo Josephson ya no se da en la transición entre niveles de energía sino en el tunelaje de partículas entre los dos pozos. En el caso de un pozo doble el enredamiento se da entre las nubes de partículas contenidas en cada uno de los pozos, y se verá afectado por la intensidad del tunelaje y por la diferencia de energía entre los mínimos de los dos pozos de potencial. En ambos casos es más conveniente estudiar el enredamiento entre los dos modos que estudiar el enredamiento entre partículas individuales, dado que no es posible hacer el seguimiento de cada una. Además, los componentes así definidos son más accesibles de ser investigados experimentalmente.

El estado del BEC de dos modos con solución analítica en la base desacoplada  $|N+m\rangle \otimes |N-m\rangle$  es:

$$|\Psi\rangle_{AB} = U^\dagger |j, m\rangle = \sum_m d_{m, m_0}^j |j+m\rangle \otimes |j-m\rangle, \quad (4.12)$$

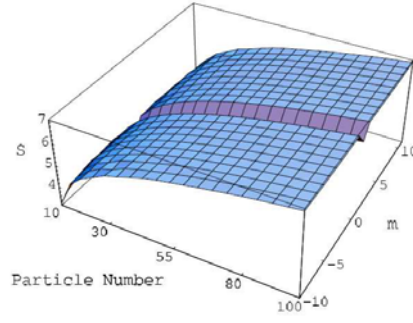


Fig. 4.1: Enredamiento como función de  $N$  y  $m_0$  para  $\theta = \pi/2$

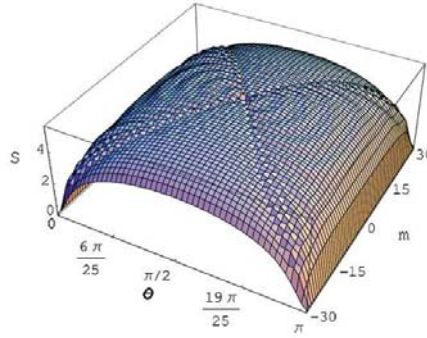


Fig. 4.2: Enredamiento como función de  $\theta$  y  $m_0$  para  $N=100$

el cual está representado como una descomposición de Schmidt con coeficientes  $d_{n,m_0}^j$ . Por lo tanto, sabemos que la entropía de Von Neumann para un BEC de dos modos para el estado (4.12) es:

$$S(N, m_0, \theta) = -2 \sum_{n=-j}^j |d_{n,m_0}^j(\theta)|^2 \log_2 |d_{n,m_0}^j(\theta)| \quad (4.13)$$

En la figura (4.1) aparece una gráfica de enredamiento contra  $m_0$  y contra  $N$ , en donde se puede apreciar que el grado de enredamiento es mayor mientras crece el número de partículas. En [9] se afirma que este comportamiento se sigue presentando hasta valores de  $N$  de  $10^5$  partículas. En la figura (4.2) se grafica enredamiento como función de  $\theta$  y  $m_0$ . En general se ve que el enredamiento es mayor para valores de  $m_0$  cercanos a 0. Esto corresponde a valores en los que la distribución de probabilidades tiene el número máximo de picos. Los valores de  $A_1$  y  $A_2$  son comparables, lo que significa la fuerza de las colisiones es comparable con la diferencia de frecuencias entre los modos en ausencia de interacción de Josephson. En la figura (4.2) se ve que existe un mínimo local para  $m_0 = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Si queremos generar un estado de máximo enredamiento debemos de evitar este mínimo, el cual se da cuando la interacción de Josephson es muy grande ( $\theta = \pi/2$ ) y  $A_2 \geq A_1$ . En el caso de tunelaje en un pozo doble habrá máximo enredamiento si el parámetro de dispersión en ausencia de tunelaje es comparable pero menor a la diferencia de energía entre los pozos.

## 5. EFECTOS DE LAS COLISIONES MÚLTIPLES EN EL CONDENSADO DE BOSE EINSTEIN DE DOS MODOS

### 5.1. Relevancia de las colisiones de orden mayor a dos

En capítulos anteriores se revisaron algunas propiedades del modelo CIM introducido en [8]. En este capítulo se concentra el trabajo original contenido en esta tesis. A continuación se procederá a analizar aspectos que no fueron abordados en [8]. Principalmente se estudiara la influencia de las colisiones múltiples en las propiedades del condensado estudiadas en capítulos anteriores.

Se verá que el hecho de pasar de colisiones dobles a colisiones triples trae consigo cambios importantes en el comportamiento del sistema. El primer caso que estudiaremos aquí será la diferencia de población. En ese caso la diferencia en el comportamiento entre colisiones dobles y triples se hace evidente. Las colisiones triples afectan severamente al comportamiento periódico en la diferencia de población, llegando a inhibir los colapsos y reavivamientos estudiados en el capítulo tres. Otro aspecto no estudiado en [8] es la evolución temporal del enredamiento. Este aspecto será analizado en este capítulo, mostrando que hay una gran correlación entre este y la diferencia de población, siendo afectado de forma similar al incluir colisiones de orden mayores a dos.

### 5.2. El modelo con colisiones triples y su espectro de energías

Antes de presentar los cambios traídos por la adición de colisiones triples, sera conveniente presentar el Hamiltoniano del BEC que incluye a esta clase de procesos en su forma más general:

$$H_3 = H_I + H_{II} + H_{III}, \quad (5.1)$$

en donde:

$$\begin{aligned} H_I &= \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 a^\dagger a + \mathcal{A}_2 b^\dagger b + \mathcal{B}_1 a^\dagger b + \mathcal{B}_2 b^\dagger a \\ H_{II} &= \mathcal{C}_1 a^\dagger a^\dagger a a + \mathcal{C}_2 a^\dagger b^\dagger a b + \mathcal{C}_3 b^\dagger b^\dagger b b \\ &+ \mathcal{D}_1 a^\dagger a^\dagger a b + \mathcal{D}_2 a^\dagger a^\dagger b b + \mathcal{D}_3 a^\dagger b^\dagger a a + \mathcal{D}_4 a^\dagger b^\dagger b b + \mathcal{D}_5 b^\dagger b^\dagger a a + \mathcal{D}_6 b^\dagger b^\dagger a b \\ H_{III} &= \mathcal{E}_1 a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a a + \mathcal{E}_2 b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b + \mathcal{E}_3 a^\dagger b^\dagger b^\dagger a b b + \mathcal{E}_4 a^\dagger a^\dagger b^\dagger a a b \\ &+ \mathcal{F}_1 a^\dagger a^\dagger a^\dagger a a b + \mathcal{F}_2 a^\dagger a^\dagger a^\dagger a b b + \mathcal{F}_3 a^\dagger a^\dagger a^\dagger b b b + \mathcal{F}_4 a^\dagger a^\dagger b^\dagger a a a + \mathcal{F}_5 a^\dagger a^\dagger b^\dagger a b b + \mathcal{F}_6 a^\dagger a^\dagger b^\dagger b b b \\ &+ \mathcal{F}_7 a^\dagger b^\dagger b^\dagger a a a + \mathcal{F}_8 a^\dagger b^\dagger b^\dagger a a b + \mathcal{F}_9 a^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b + \mathcal{F}_{10} b^\dagger b^\dagger b^\dagger a a a + \mathcal{F}_{11} b^\dagger b^\dagger b^\dagger a a b + \mathcal{F}_{12} b^\dagger b^\dagger b^\dagger a b b \end{aligned} \quad (5.2)$$

$H_I$  abarca a los operadores de número de cada uno de los niveles (con parámetros  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ ), y a los procesos de intercambio directo entre tipos de partículas (con parámetros  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$ ).  $H_{II}$  incluye colisiones dobles tanto elásticas (con parámetros  $\mathcal{C}_i$ ) como inelásticas (con parámetros  $\mathcal{D}_j$ ). Y finalmente, las colisiones triples tanto elásticas (con parámetros  $\mathcal{E}_k$ ) como inelásticas (con parámetros  $\mathcal{F}_l$ ) vienen incluidas en  $H_{III}$ .

Es posible que los parámetros que determinan al Hamiltoniano (5.1) sean tales que este tenga solución analítica, tal y como sucede con el (3.1). Si tal es el caso, (5.1) puede ser escrito como una transformación unitaria aplicada a un operador más sencillo, que en este caso (colisiones triples) es  $H_0 = A_1 J_z + A_2 J_z^2 + A_3 J_z^3$ .

Así pues, el Hamiltoniano del BEC con colisiones triples y solución analítica es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_3 &= \mathcal{U}H_0\mathcal{U}^\dagger = A_1\mathcal{U}J_z\mathcal{U}^\dagger + A_2(\mathcal{U}J_z\mathcal{U}^\dagger)^2 + A_3(\mathcal{U}J_z\mathcal{U}^\dagger)^3 \\
&= A_1(\cos(\theta)J_z + \sin(\theta)(e^{i\phi}J_+ + e^{i\phi}J_-)) \\
&+ A_2(\cos^2\theta J_z^2 + \sin^2\theta(e^{2i\phi}J_+^2 + e^{-2i\phi}J_-^2 + J_+J_- + J_-J_+)) \\
&+ \cos\theta\sin\theta(J_z(e^{i\phi}J_+ + e^{-i\phi}J_- + h.c.)) \\
&+ A_3[\cos^3\theta J_z^3 + \cos\theta\sin^2\theta(e^{2i\phi}(J_zJ_+^2 + J_+^2J_z + J_+J_zJ_+) + (e^{2i\phi}(J_zJ_+^2 + J_+^2J_z + J_+J_zJ_+)) \\
&+ J_z(J_+J_- + J_-J_+) + J_+(J_-J_z + J_zJ_-) + J_-(J_+J_z + J_zJ_+)) \\
&+ \sin\theta\cos^2\theta(e^{i\phi}(J_zJ_+J_z + J_z^2J_+ + J_+J_z^2) + e^{i\phi}(J_zJ_-J_z + J_z^2J_- + J_-J_z^2)) \\
&+ \sin^3\theta(e^{3i\phi}J_+^3 + e^{-3i\phi}J_-^3 + e^{i\phi}(J_+J_-J_+ + J_+^2J_- + J_-J_+^2) + e^{-i\phi}(J_-J_+J_- + J_-^2J_+ + J_+J_-^2))
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Como  $\mathcal{U}$  es una transformación unitaria, el espectro de energías es  $E_m^3 = A_1m + A_2m^2 + A_3m^3$ , que el mismo que tiene  $H_0$ . Minimizando esta ecuación con respecto a  $m$  da como resultado el número :

$$m_{\pm} = \frac{A_2}{3A_3}[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{3A_1A_3}{A_2^2}}] \tag{5.4}$$

Si  $\frac{A_1A_3}{A_2^2} > 1$ , entonces (5.4) es un número complejo y  $E_m^3$  no tiene mínimos locales, por lo tanto,  $m_0 = -\frac{NA_3}{|A_3|}$ . En caso de que  $\frac{A_1A_3}{A_2^2} < 1$  entonces hay un máximo y un mínimo locales, que están en los puntos señalados por los dos distintos signos en (5.4). Si  $A_3 > 0$  entonces la raíz con signo positivo es el valor donde se encuentra este mínimo local y si  $A_3 < 0$  entonces el mínimo local es la raíz negativa. El rango de  $m$  va de  $-N$  a  $N$ , y es posible que  $N$  sea lo suficientemente grande como para que el estado base sea otra vez  $m_0 = -\frac{NA_3}{|A_3|}$ , así que habrá que comparar la energía correspondiente a este valor con la energía del entero más cercano al valor del mínimo local. El valor que sea menor es el estado base.

### 5.3. Distribuciones de probabilidad

En el Modelo CIM la intervención de colisiones de orden mayor modifica al espectro de energías propias  $E_m$ , sin embargo, deja invariantes a los vectores propios, los cuales son  $U^\dagger|j, m\rangle$  independientemente del orden de las colisiones. Así pues, las figuras que representan las distribuciones de probabilidad en función de  $m$  permanecen inalteradas para un valor de  $m_0$  **fijo**, ya que representan a los coeficientes  $|d_{mm_0}^N|^2$  que no dependen explícitamente de  $E_m$ . Sin embargo, para la distribución correspondiente al estado base la introducción de un valor  $A_3$  distinto de cero altera drásticamente el valor  $m_0$  del estado base, aun si este valor es de orden mucho menor a  $A_1$  ó  $A_2$ . Por ejemplo, para el caso de 100 partículas con  $m_0 = A_1/2A_2 = 100$  tendremos una distribución con un solo máximo. Al añadir un valor  $A_3 = 1/600$  tenemos que el estado base corresponde al valor  $m_0 = 0$ , que es la distribución con número máximo de picos (ver figura (5.3)). Algo similar ocurre con las gráficas de enredamiento en función de  $\theta$  y  $m_0$ . Estas siguen siendo validas para el caso de colisiones triples ó mayores. Lo que va a cambiar son las posibles combinaciones de los valores de  $A_j$  para un determinado valor de  $m_0$ .

### 5.4. Efectos de las colisiones triples en la evolución temporal del BEC

El hecho de incluir colisiones de más de dos partículas afecta dramáticamente a la evolución temporal de las propiedades del condensado. Una de éstas es la diferencia de población entre los dos modos, la cual fue estudiada en el capítulo 4 para el caso de colisiones dobles tal y como se presento en [8].



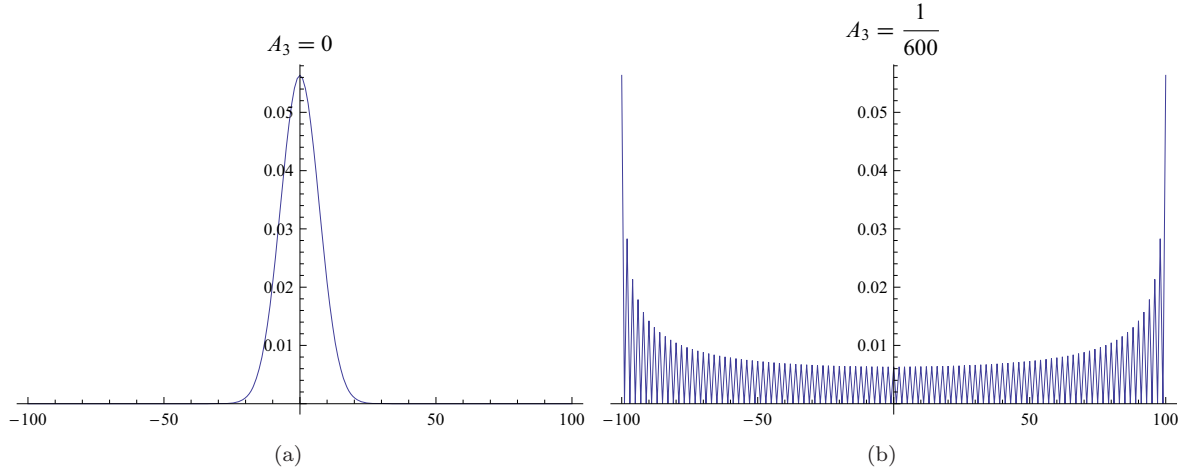


Fig. 5.1: Distribuciones de población para  $A_1 = 200$  y  $A_2 = 1$ . Es posible notar la transición de una distribución con un solo pico a una con un número máximo de picos al añadir colisiones triples con un parámetro  $A_3 = 1/600$

Otra propiedad interesante es la evolución temporal del enredamiento, la cual no fue revisado en [8] ya que sólo se investigaron los aspectos independientes del tiempo. Además, se realizará una comparación entre ambas propiedades en presencia de colisiones dobles y con algunos ejemplos de colisiones múltiples.

Calculando el tiempo de reavivamiento por medio de (3.10) tal y como se hizo en la sección 3.3 pero con  $E_m = A_1 m + A_2 m^2 + A_3 m^3$  que es el valor de la energía propia en presencia de colisiones triples; obtendremos la siguiente condición:

$$2(A_2 + 3A_3 m)tc = (2n + 1)\pi \quad (5.5)$$

El tiempo de colapso  $t_c$  se define como el tiempo en el que todos los cosenos en la fórmula (3.8) se cancelan **simultáneamente**. Por eso es que la expresión que define a  $t_c$  debe de ser válida para toda  $m$ . Al introducir colisiones triples en (3.10) obtenemos la expresión (5.5), en donde aparece una dependencia en  $m$ , lo que nos indica que los términos en (3.8) nunca se cancelan simultáneamente. Como se puede apreciar, las colisiones triples inhiben la aparición de colapsos y reavivamientos. La única forma en que es posible observar los colapsos y reavivamientos para colisiones mayores a dos es haciendo que estén tengan una intensidad muy baja, en particular para el caso de colisiones triples tenemos que  $A_2 \gg 3A_3 N$ . En la figura (5.4) se puede apreciar este efecto. Los valores de los coeficientes de orden menor a dos son  $A_1 = 49$  y  $A_2 = 1$ . Estos valores fueron seleccionados de tal manera que los reavivamientos son siempre idénticos para el caso de colisiones dobles, es decir  $P_r = 1$ . El valor de  $A_3$  es diferente para cada gráfica. Se puede notar al observar éstas figuras que un valor de  $A_3$  de orden 4 veces menor al de  $A_2$  ya influye de forma sustancial en el comportamiento. También es posible observar que el tiempo que tardan en descomponerse es cada vez menor si se aumenta el valor de  $A_3$ , y si este llega a ser del orden de  $A_2/3N$  no se alcanza a formar ningún reavivamiento.

El papel que juegan las colisiones frías en el enredamiento ha sido poco estudiado, no sólo en el BEC, sino en cualquier sistema cuántico de muchos cuerpos. Para muestra, en el archivo del laboratorio de Los Álamos sólo hay referencia a 4 artículos que investigan la relación entre colisiones y enredamiento. Todos éstos artículos están relacionados directa ó indirectamente con el BEC. En [16] se propone un esquema para la generación controlada de estados altamente enredados entre átomos neutros (no ionizados) de un BEC ó una red óptica, por medio de colisiones frías. Sin embargo, este artículo incluye únicamente a las colisiones dobles, ya que los estados enredados se generan entre pares de átomos. [17]

reporta la generación de enredamiento entre átomos pertenecientes a una red óptica. Esto se logra por medio de colisiones entre átomos vecinos en la red óptica. El artículo [18] nos habla de la influencia de las colisiones atómicas en el enredamiento entre átomos bosónicos ultra fríos y un campo óptico. Finalmente, en [19] se propone un esquema para la generación de estados EPR por medio de disociación de moléculas diatómicas en pares de átomos, para después implementar la teleportación de paquetes de onda por medio de las colisiones. Todos los artículos antes mencionados sólo hablan de colisiones dobles. La relación entre colisiones múltiples y enredamiento es un campo aún inexplorado, pero que será abordado en esta tesis.

Para obtener la evolución temporal del enredamiento hay que calcular la evolución de la matriz densidad  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Para esto sabemos que, para un  $|\Psi(0)\rangle = |j, m_0\rangle = \sum_m C_m U|j, m\rangle$ , entonces

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= \sum_m C_m e^{-iHt} U^\dagger |N, m\rangle, \\
&= \sum_m C_m e^{iE_m t} U^\dagger |N, m\rangle, \\
&= \sum_{m, m'} C_m e^{iE_m t} e^{-im\phi} d_{m', m}^N(\theta) |N, m'\rangle, \\
&= \sum_{m, m'} e^{iE_m t} d_{m_0, m}^N d_{m', m}^N |N, m'\rangle, \\
&= \sum_{m'} \Omega_{m'}(t) |N + m'\rangle \otimes |N - m'\rangle,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde  $\Omega_{m'}(t) = \sum_m d_{m', m}^N(\theta) d_{m_0, m}^N(\theta) e^{iE_m t}$ . Tal y como en el caso independiente del tiempo, el estado está escrito en la representación de Schmidt, y por lo tanto no es necesario calcular la matriz densidad reducida. Se hace pues evidente que el enredamiento en función del tiempo está dado por:

$$S(N, m_0, \theta, t) = -2 \sum_{m'} [|\Omega_{m'}(t)|^2 \log_2 |\Omega_{m'}(t)|] \tag{5.7}$$

En las figuras (5.4) se representa la evolución temporal del enredamiento en color guinda. Nótese que sus oscilaciones se alejan muy poco de cierto valor, que es el valor máximo de la entropía de Von Neumann, dado por  $\log_2(2N + 1)$ , el cual es ligeramente mayor a 5, ya que  $N$  está entre 17 y 25 en los casos expuestos en las figuras. En éstas también aparece la diferencia de población tal y como se presenta en el capítulo 3, con periodos relativos  $P_r = 1, 2, 3, y 4$ . Esto se hace para mostrar que éstas dos propiedades están correlacionadas. De hecho el periodo del enredamiento es el mismo para ambas propiedades, y la estructura del enredamiento se repite según los valores de  $P_r$ , de la misma forma en la que lo hace la diferencia de población. Además, los puntos donde el enredamiento es máximo se dan precisamente en el punto medio de cada colapso y cada reavivamiento. Evidentemente, dada esta correlación, el comportamiento temporal del enredamiento también se verá seriamente afectado por la aparición de colisiones múltiples, tal y como se muestra en la figura.

### 5.5. Colisiones múltiples

Se ha demostrado que las colisiones de ordenes mayores a dos están presentes en el BEC [5]. Por lo tanto, éstos procesos deberán ser incluidos si se desea que los modelos utilizados para la descripción del sistema se acerquen más a la realidad. El Hamiltoniano más general en la aproximación de dos modos que incluya colisiones de orden  $n$  deber de incluir todos los procesos de ordenes más bajos, tanto elásticos como inelásticos. Si suponemos que no hay pérdida de partículas, todos los términos en el Hamiltoniano tendrán el mismo número de operadores de aniquilación y creación. Por ejemplo, si queremos escribir el Hamiltoniano de orden  $n$ -ésimo, simplemente debemos de añadir los términos de

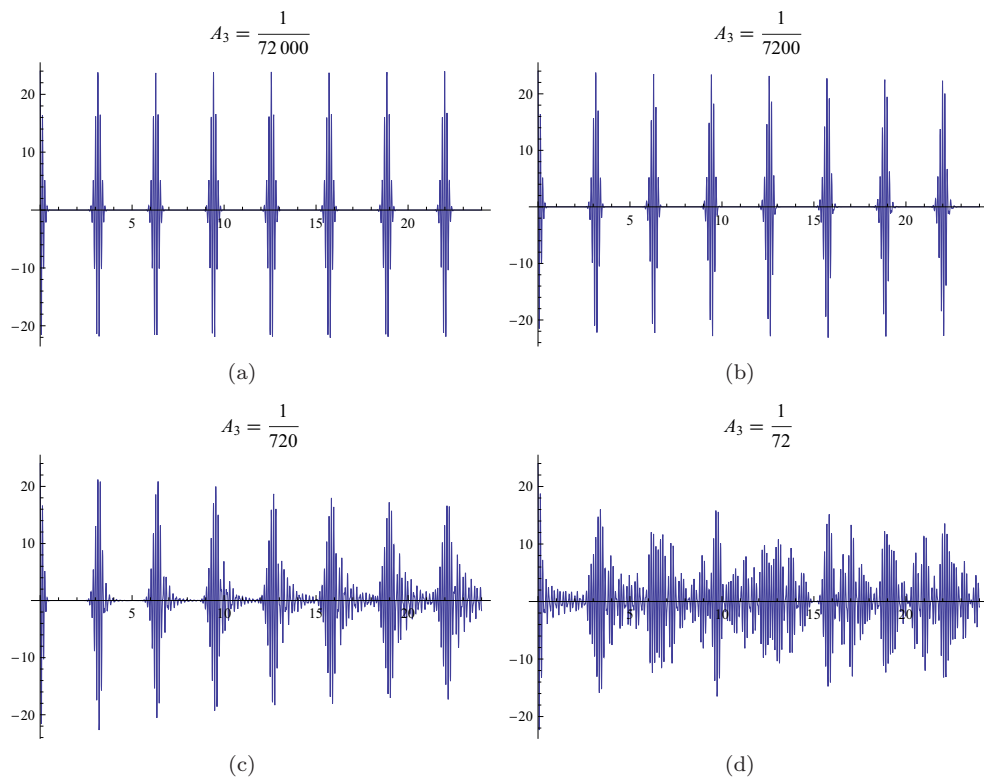


Fig. 5.2: Aquí se muestra la forma en la que influyen las colisiones triples en la evolución de  $J_z$ . Estas figuras fueron realizadas con  $A_1 = 49$ ,  $A_2 = 1$  y  $A_3$  el valor especificado en cada figura.

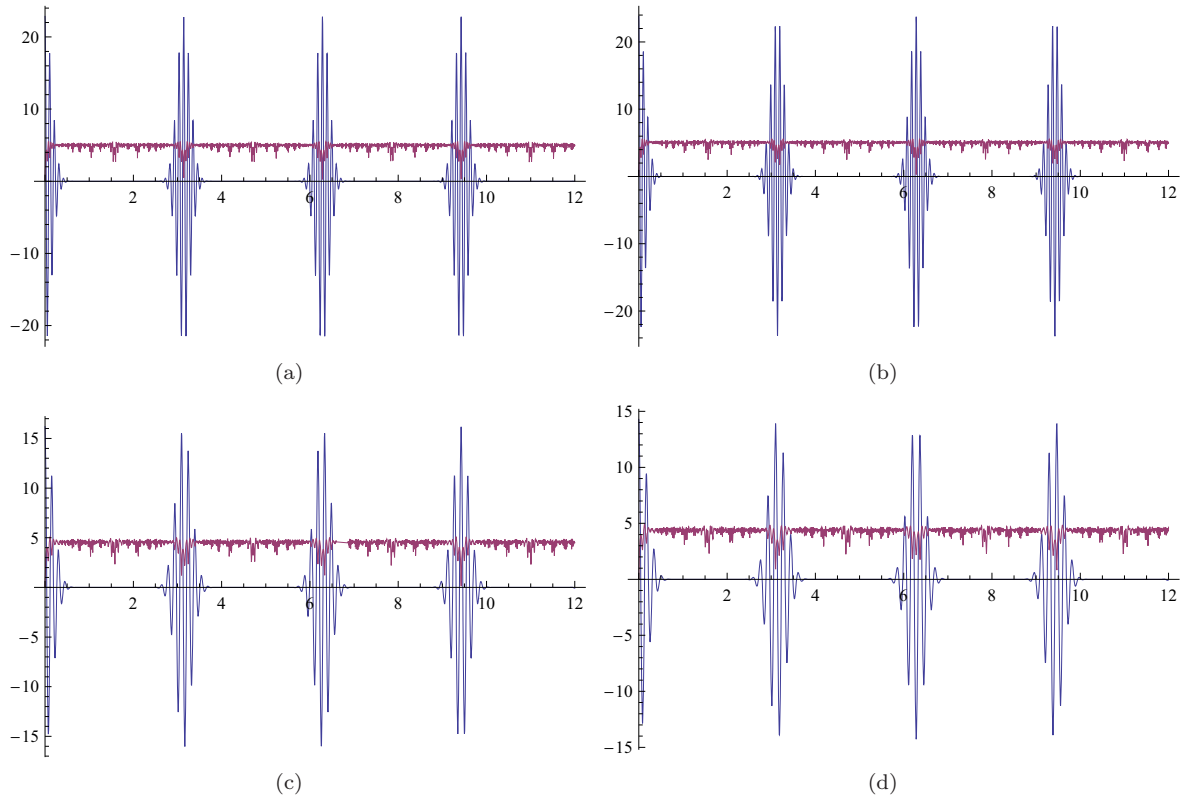


Fig. 5.3: Comparación entre la diferencia de población y el enredamiento para un estado inicial  $|j, j\rangle$ , con  $P_r=1,2,3$  y 4. Es posible apreciar que el enredamiento repite su comportamiento según el valor de  $P_r$  de la misma forma en que lo hace  $\langle J_z \rangle$

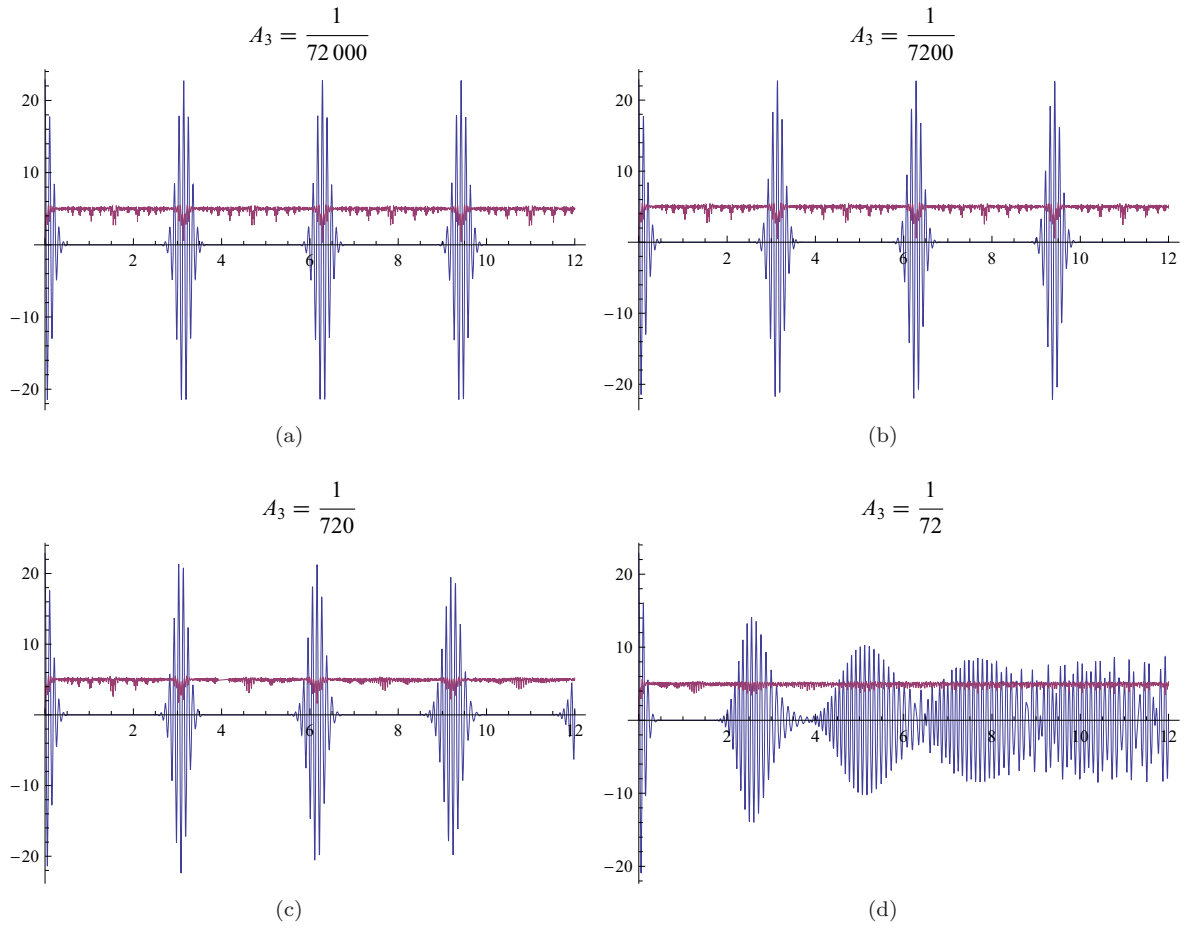


Fig. 5.4: Aquí se muestra la distorsión en el comportamiento periódico que aparece tanto en  $\langle J_z \rangle$  como en el enredamiento al aumentar  $A_3$ . Los parámetros  $A_1$  y  $A_2$  fueron escogidos de tal manera que la estructura del enredamiento y de los reavivamientos en  $\langle J_z \rangle$  sean siempre idénticas en el caso de colisiones dobles.

orden 4 (p. ej.  $a^\dagger a^\dagger a^\dagger b^\dagger abbb$ ) al Hamiltoniano (5.1). Posteriormente se añaden los términos de orden 5 (p. ej.  $a^\dagger a^\dagger a^\dagger b^\dagger b^\dagger abbbb$ ) y así sucesivamente.

Aplicando el mismo procedimiento que llevo al Hamiltoniano (5.3) se obtiene una familia de Hamiltonianos de orden arbitrario menos general que la definida justo arriba pero con solución analítica. Para esto hay que aplicar la transformación unitaria  $U$  definida en la sección 3 a una combinación lineal de potencias de  $J_z$   $H_0 = \sum_p A_p J_z^p$ , El grado del polinomio  $H_0 = \sum_p A_p J_z^p$  en  $J_z$  es el orden máximo de colisiones incluidas. El Hamiltoniano obtenido es  $H_n = U^\dagger H_0 U = \sum_{p=0}^n A_p (U^\dagger J_z U)^p$ . Toda esta familia de Hamiltonianos tiene como solución al vector  $U^\dagger |j, m\rangle$ , sin importar el orden de las colisiones incluidas. El espectro de energía está dado por  $E_m^p = \sum_p A_p m^p$  con  $-j \leq m \leq j$ . El estado base se obtiene resolviendo la siguiente ecuación con respecto a  $m$ :

$$\sum_p p A_p m^{(p-1)} = 0 \quad (5.8)$$

Para investigar lo que sucede con la evolución temporal del BEC, hay que escribir la ecuación que define el tiempo  $t_c$  de aparición de un colapso en la diferencia de población (5.5), pero incluyendo los términos correspondientes a colisiones múltiples de orden arbitrario:

$$\left( \sum_{p=1}^n A_p ((m+1)^p - 2m^p + (m-1)^p) \right) t_c = (2n+1)\pi. \quad (5.9)$$

En el caso de colisiones dobles, la ecuación (5.9) nos daba el tiempo en el que todos los términos de la ecuación (3.8) se cancelan entre sí. A causa de la dependencia en  $m$  que hay en (5.9), éstos términos no se cancelan simultáneamente, tal y como sucede cuando se incluyen solamente colisiones triples. Se observaran colapsos y reavivamientos durante un cierto tiempo si los coeficientes  $A_p$  con  $3 \leq p \leq n$  son lo suficientemente pequeños. El tiempo que duran los colapsos y reavivamientos será menor si la intensidad de las colisiones múltiples aumenta, tal y como se muestra en la figura (5.5). Esta condición se cumple para  $n \geq 2$ , y por lo tanto, no habrá comportamiento periódico en presencia de colisiones múltiples de cualquier orden. Para la evolución del enredamiento pasa algo similar, un patrón que originalmente es periódico pierde su estructura al paso del tiempo en presencia de colisiones múltiples de cualquier orden.

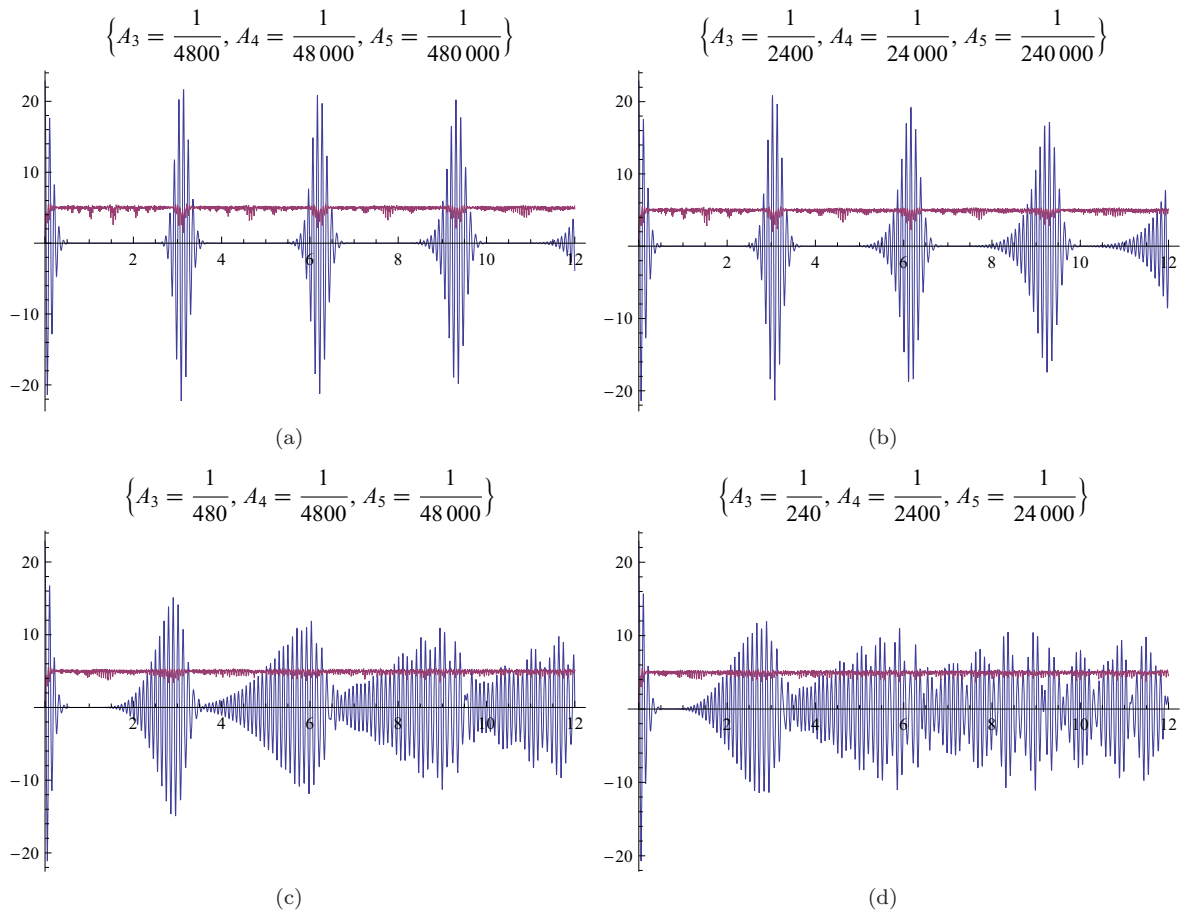


Fig. 5.5: Aquí se muestra el cambio en el comportamiento periódico del BEC en presencia de colisiones quintuples. Se puede apreciar que el cambio es similar al que se da en presencia de colisiones triples.

## 6. CONCLUSIONES

El hecho que las colisiones inelásticas tienen una gran influencia en las propiedades del condensado ya era conocido desde hace tiempo. Con el modelo CIM se hace posible un estudio teórico más detallado de las colisiones múltiples que no provocan esta pérdida de partículas, lo cual es un campo relativamente inexplorado. En este modelo se facilita el entendimiento de la física del condensado al introducir soluciones analíticas, además de tener la ventaja de ser escalable a colisiones multipartículas de orden arbitrario. En [8] ya se había mostrado que la inclusión de colisiones inelásticas tiene efectos drásticos en las propiedades del BEC con respecto a los modelos utilizados típicamente.

En este trabajo de tesis se utilizan los resultados presentados en [8] y se presentan nuevas predicciones teóricas. Estas predicciones extienden el trabajo realizado en [8], sobre todo en el aspecto de las colisiones múltiples, en particular en el caso de las colisiones triples. Aquí se muestra que éstas colisiones tienen efectos visibles sobre el comportamiento observado con colisiones dobles: Es posible pasar directamente de un estado no superpuesto a la superposición máxima posible sin atravesar por estados intermedios y la evolución temporal de la diferencia de población y del enredamiento pierde el comportamiento uniforme y periódico observado en el caso de interacciones dobles. Todas éstas predicciones son, en teoría, susceptibles de ser medidas experimentalmente, y por tanto existe la posibilidad de determinar que tan factible es el inducir procesos inelásticos sin pérdida de partículas, y que tan influyentes son éstos procesos en las situaciones experimentales reales. Sin embargo, uno de los problemas abiertos del modelo introducido en [8] es la determinación de los valores de los parámetros que corresponden a situaciones reales. Esta tarea se vuelve difícil debido a que hay un distanciamiento entre el lenguaje que utilizan los físicos teóricos y los experimentales. Es decir, si se realiza un experimento sobre el BEC, no se tiene un conocimiento claro de sobre los parámetros que corresponden a un modelo teórico que describa correctamente a tal experimento. Por lo tanto, aun es necesario determinar la relación entre las variables experimentales y los parámetros de los modelos teóricos. Este conocimiento nos permitirá saber en que regiones del espacio de parámetros el hamiltoniano tiene sentido físico, y en consecuencia nos permitirá saber si las soluciones analíticas lo tienen. Los resultados aquí presentados podrían tener relevancia para las redes ópticas y los sistemas de fermiones interactuantes por medio de spin, gracias a la relación que existe de el modelo utilizado para describir al BEC con los modelos de Bose-Hubbard y de Lipkin-Meshkov-Glick.

Se había mencionado con anterioridad que el BEC es uno de los sistemas favoritos para la implementación del cómputo cuántico. Por eso, existe una línea de investigación futura la cual contempla la posibilidad de implementar compuertas cuánticas en el BEC. La existencia de soluciones analíticas hace más fácil el estudio de esta posibilidad. El principal reto de esta investigación consiste en el determinar la forma más conveniente para definir en el BEC la unidad fundamental del cómputo cuántico, el *qubit*.



## APÉNDICE

## A. OBTENCIÓN DE LA FÓRMULA EXPLÍCITA PARA LAS MATRICES DE ROTACIÓN

Para obtener explícitamente los elementos de la matriz de rotación  $U = \exp^{i\theta J_y}$  es conveniente recordar que los estados  $|j, m\rangle$  se definen como por medio de la ecuación (2.31):

$$|j, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^{j+m}(b^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}|0, 0\rangle \quad (\text{A.1})$$

Así pues, si le aplicamos el operador de rotación obtendremos:

$$U|j, m\rangle = \frac{(Ua^\dagger U^\dagger)^{j+m}(Ub^\dagger U^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}U|0, 0\rangle \quad (\text{A.2})$$

A partir de la definición de  $e^{i\theta J_y} = \sum_n \frac{(i\theta J_y)^n}{n!}$  se puede ver que  $U|0\rangle = |0\rangle$ . En consecuencia sólo necesitamos saber la acción de el operador de rotación sobre los operadores  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$ : para este propósito invocaremos a la fórmula de **Baker-Hausdorff**:

$$e^{iG\lambda} A e^{-iG\lambda} = A + i\lambda[G, A] + \frac{i\lambda^2}{2!}[G, [G, A]] + \dots + \frac{i\lambda^n}{n!}[G, [G, [G, [\dots[G, A]]]]] + \dots \quad (\text{A.3})$$

Para calcular el resultado de la fórmula anterior sustituyendo  $A = a^\dagger$  ó  $b^\dagger$ ,  $\lambda = \theta$  y  $G = -J_y$  es útil saber que:

$$[J_y, a^\dagger] = \frac{1}{2i}b^\dagger \quad (\text{A.4})$$

$$[J_y, b^\dagger] = \frac{1}{2i}a^\dagger \quad (\text{A.5})$$

Es claro que al aplicar sucesivamente los conmutadores la dependencia en  $a^\dagger$  y  $b^\dagger$  siempre es lineal por lo tanto podemos agrupar sus coeficientes, los cuales corresponden a las funciones seno y coseno evaluados en  $\theta/2$ . El resultado es:

$$\begin{aligned} e^{-iJ_y\theta} a^\dagger e^{iJ_y\theta} &= a^\dagger + (\theta/2)b^\dagger - \frac{(\theta/2)^2}{2!}a^\dagger - \frac{(\theta/2)^3}{3!}b^\dagger \dots \\ &= a^\dagger \cos \frac{\theta}{2} + b^\dagger \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

y análogamente para  $b^\dagger$ :

$$e^{-iJ_y\theta} a^\dagger e^{iJ_y\theta} = b^\dagger \cos \frac{\theta}{2} - a^\dagger \sin \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.7})$$

por lo tanto, si sustituimos las ecuaciones (A.6) y (A.7) en la ecuación (2.31) y recordamos el teorema binomial:

$$(x + y)^N = \sum_k \frac{N! x^{N-k} y^k}{(N-k)! k!} \quad (\text{A.8})$$

obtendremos:

$$\begin{aligned} e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle &= \sum_k \sum_l \frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m-k)! k! (j-m-l)! l!} \\ &\times \frac{[a^\dagger \cos(\theta/2)]^{j+m-k} [b^\dagger \sin(\theta/2)]^k}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \\ &\times [-a^\dagger \sin(\theta/2)]^{j+m-l} [b^\dagger \cos(\theta/2)]^l |0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Los coeficientes de la matriz de rotación  $d_{m',m}^j(\theta)$  están definidos por medio de la ecuación:

$$e^{-i\theta J_y} |j, m\rangle = \sum_m' |j, m'\rangle d_{m',m}^j(\theta) = \sum_m' d_{m',m}^j(\theta) \frac{(a^\dagger)^{j+m'} (b^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}} |0\rangle \quad (\text{A.10})$$

Nótese que el operador  $a^\dagger$  en (A.9) como exponente a  $2j + 2m - k - l$ . Por lo tanto, para comparar (A.9) y (A.10) podemos igualar:

$$2j - k - l = j + m' \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, la sumas sobre  $l$  y sobre  $k$  no son independientes, y como deseamos obtener los coeficientes para una  $m'$  fija, podemos eliminar la suma sobre  $l$  y dejar sólo la suma con índice  $k$  sustituyendo  $l = j - k - m'$ . Y esta sustitución es congruente con los exponente  $k + l$  y  $j - m'$  de  $b^\dagger$  en (A.9) y (A.10). Finalmente, es necesario identificar los coeficientes de  $\cos(\theta/2)$ ,  $\sin(\theta/2)$  y de  $-1$ , que son:

$$\begin{aligned} j + m - k + l &= 2j - 2k + m - m' \\ k + j - m - l &= 2k - m + m' \\ j - m - l &= k - m + m' \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

en donde se ha usado (A.11) para eliminar  $l$ . Así pues, se obtiene que la expresión para  $d_{m',m}^j$  es:

$$\begin{aligned} d_{m',m}^j(\theta) &= \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(k)!(j-k-m')!(k-m+m')!} \\ &\times \cos \frac{\theta}{2}^{2j-2k+m-m'} \sin \frac{\theta}{2}^{2k-m+m'} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para esta expresión tenga sentido, los argumentos de los factoriales en el denominador deben ser positivos, lo que implica que el índice  $k$  debe de cumplir con las siguientes condición:

$$\text{Min}[j + m, j - m'] \geq k \geq \text{Max}[0, m - m'] \quad (\text{A.14})$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wiemann y E.A. Cornell, *Science* 269, 198 (1995).
- [2] K.B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969. (1995)
- [3] C.C. Bradley, C.A. Sackett y R.G.Hulet
- [4] C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Ghrist, E.A.
- [5] K.A. Souminen, Y.B. Band, I. Tuvi, K. Burnett, y P.S. Julienne, *atom-ph/9708011* (1997)
- [6] J. Weiner, V. S. Bagnato, S. Zilio y P. S. Julienne, *Rev. Mod. Phys.* 71, 1 (1999) Cornell y C.E. Wiemann, *Phys. Rev. Lett.* 78, 586 (1997)
- [7] R. Josza, *quant-ph/9707034* (1997)
- [8] I. Fuentes-Schuller, P. Barberis-Blostein, *quant-ph/0607191* 2006
- [9] I. Fuentes-Schuller, P. Barberis-Blostein, *quant-ph/0701148* 2007
- [10] A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* 73, 307 (2001)
- [11] J. I. Cirac, M. Lewenstein, K. Molner, and P. Zoller, *Phy. Rev. A* 57, 1208 (1998).
- [12] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Adisson-Wesley, 1994)
- [13] I. Fuentes-Guridi, J. Pachos, S. Bose, V. Vedral, S. Choi, *quant-ph/0108018* (2002)
- [14] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, D. F. Walls, *Phys. Rev. A* 55, 4318 (1997)
- [15] M.J. Stell, M.J. Collet, *Phys. Rev. A* 57, 2920 1998
- [16] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J.I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 82, 1975 (1999)
- [17] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hansch e I. Bloch, *quant-ph/0308080*
- [18] V.V. França y G. A. Pratavia, *quant-ph/0611078* (2007)
- [19] T. Opatrny y G. Kurizki, *quant-ph/0009121v3* (2001)
- [20] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J.I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 81, 3108 (1998)
- [21] E. M. Graefe y H. J. Korsch, *Physical Review A* 76, 032116, (2007).
- [22] D. Ananikian y T. Bergeman, *Physical Review A* 73, 013604 (2006)
- [23] J.H. Eberly, N.B. Narozhny y J.J.Sanchez Mondragon, *Physical Review Letters* 44, 1323, (1980).
- [24] A. Einstein, B: Podolsky y N. Rosen, *Physical Review* 47, 777, (1935).

- 
- [25] E. Schroedinger, *Naturwissenschaften* 23, 807 (1935).
  - [26] I. Fuentes-Schuller, P. Barberis-Blostein, *quant-ph/0607191* (2006)
  - [27] D. Jaksch, J.I.Cirac y P. Zoller *cond-mat/0110494v2* (2002)
  - [28] A. Sorensen, L.-M. Duan, J.I Cirac y P. Zoller, *Nature* 409, 63 (2001).
  - [29] H. Pu and P. Meystre, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3987 (2000).
  - [30] L.-M. Duan, A. Srensen, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 85, 3991 (2000).
  - [31] L.-M. Duan, J. I. Cirac, P. Zoller, *quant-ph/0107055*.
  - [32] N.P. Bigelow, *Nature* 409, 27 (2001).
  - [33] U.V. Poulsen and Klaus Mlmer, *Phys. Rev. A* 64, 13616 (2001).
  - [34] K. Helmerson and L. You, *quant-ph/0104130*.