



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS DINÁMICOS Y TOPOLÓGICOS
DE LA HERRADURA DE SMALE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ROSA MARIA VARGAS MAGAÑA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HÉCTOR MÉNDEZ LANGO

CO-DIRECTOR DE TESIS:
DR. JEFFERSON EDWIN KING DÁVALOS

2008





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
2. La Herradura de Smale	5
2.1. Una presentación geométrica	5
2.2. Estudiando la dinámica de H en M	7
2.2.1. Un conjunto invariante.	10
2.2.2. Propiedades dinámicas interesantes.	15
3. Dinámica simbólica	21
3.1. Una presentación del espacio Σ_2	21
3.1.1. La función Ψ	21
3.2. Σ_2 como espacio métrico	28
3.2.1. Conjugación Topológica	30
3.3. Propiedades Dinámicas de σ	34
3.4. Σ_2 es un <i>Conjunto de Cantor</i>	38
3.5. Sistema Caótico	41
3.5.1. (Σ_2, σ) es caótico.	43
3.5.2. (Λ, H) es caótico.	45
4. Algunas propiedades topológicas de Ω	47
4.1. Un breve vistazo a la Teoría de continuos	47
4.2. Intersecciones anidadas de continuos.	49
4.2.1. Curva Universal de Sierpinski.	51
4.3. Continuos Indescomponibles.	52
4.3.1. El continuo de <i>Knaster</i>	52
4.4. El Atractor de la Herradura	55
4.4.1. Un diagrama que conmuta	60
4.5. Límites inversos	64

ÍNDICE GENERAL

4.5.1. Continuos Indescomponibles a partir de límites inversos	68
4.5.2. El límite inverso de f^* es indescomponible	70
4.5.3. El atractor de la herradura de Smale es un continuo indescomponible	72
5. La Variedad Inestable es densa	75
5.1. Variedades Estables e Inestables de un punto	77
5.1.1. La $W^u(\bar{b})$ es densa en Ω	83
A. Teorema de la transformación de Contracción	95
B. Resultados de Límites Inversos	99
C. Puntos homoclínicos en Σ_2	103
D. Teorema de Smale	107

Introducción

Las matemáticas a lo largo de la historia han significado un mundo inagotable de conocimiento. Los Sistemas Dinámicos Discretos forman parte de la montaña imaginativa que ha cimentado el hombre para avanzar en ese camino infinito de la teoría matemática.

Todo fenómeno que evoluciona en el tiempo puede ser considerado un sistema dinámico. Matemáticamente se puede definir como el estudio de iteraciones de funciones $f : S \rightarrow S$, donde S es un conjunto.

A los estudiosos de esta rama de las matemáticas les interesa comprender el comportamiento a largo plazo del sistema, es decir, conocer la evolución de las trayectorias, $(x, f(x), f^2(x), \dots)$, de los puntos de S , no en forma individual sino de manera global para todo $x \in S$; es importante determinar si las órbitas tienden a un punto fijo, si divergen a infinito, si son periódicas, si se ven atraídas por algún *ente atractor*, etc...En particular será de especial interés conocer si el sistema es caótico.

Entenderemos como un sistema caótico aquel sistema que aún ordenado por leyes determinísticas puede presentar conductas *caóticas* de acuerdo a la definición establecida por R. Devaney.

La noción clave subyacente en este tipo de sistemas es el desorden aparente que se presenta en la evolución del sistema. Cabe mencionar que no importa la simplicidad de las leyes determinísticas que lo rigen, es posible que se produzcan soluciones de apariencia errática.

En este sentido, la *Herradura de Smale* desde su introducción en Rio de Janeiro, Brasil por el matemático Steven Smale en 1967, ha significado una fuente inagotable de estudios matemáticos además de ser el primer ejemplo de una transformación caótica que es topológicamente conjugada a la función

corrimiento en el espacio de dos símbolos ¹.

Otro punto importante que nos motiva a su estudio es que la Transformación Herradura se origina en una amplia variedad de sistemas dinámicos y el conocimiento de sus propiedades es crucial en el análisis de la dinámica de esos sistemas.

Cabe mencionar que los sistemas caóticos aparecen en la ciencia y en la experiencia de nuestros días. No son sólo una abstracción matemática. Los estudios de fenómenos tan relevantes como los meteorológicos y los movimientos turbulentos de los líquidos y los fluidos en general motivan y fecundan la formalización de la dinámica caótica.

Hace 50 años no se hablaba aún en el mundo científico de sistemas caóticos, aunque ya en 1890 el francés Henri Poincaré había detectado su existencia al estudiar lo que llamó órbitas homoclínicas en el movimiento de tres cuerpos sujetos a la mutua atracción gravitatoria.

Por todo lo explicado anteriormente surgió nuestra motivación para hacer un texto en donde se expusieran las características más importantes del Sistema Herradura, lo cual se concreta con la presentación de esta tesis.

En el primer capítulo, *Capítulo 2*, damos una presentación geométrica de la transformación Herradura, H , así como de la transformación inversa de la herradura. Analizamos su comportamiento dinámico para las primeras iteraciones y en general identificamos un conjunto de cantor, Λ , que es invariante bajo la transformación y que engloba todas propiedades dinámicas interesantes de H . Demostramos la presencia de dos tipos de puntos para el sistema: los que permanecen bajo cualquier iteración entera de H en dicho conjunto de cantor y los que no. Asimismo demostramos la existencia de tres puntos fijos.

Dado que para estudiar las características dinámicas que presenta la Herradura en Λ como son: la existencia de una infinidad de órbitas periódicas, el conjunto de puntos periódicos es denso en Λ , la existencia de órbitas densas, comportamiento caótico, requerimos de la introducción y desarrollo de nuevas herramientas matemáticas, en el *Capítulo 3*, intrudujimos un modelo matemático conocido como Dinámica Simbólica.

¹En este espacio pueden representarse ¡todos los posibles resultados que se obtienen al lanzar una moneda al aire sucesivamente y anotar el resultado ¡ águila o sol !

Es preciso mencionar que la Dinámica Simbólica es una de las herramientas más importantes actualmente para entender los sistemas dinámicos. En este capítulo auxiliándonos de ella demostramos todas las propiedades antes mencionadas de H en Λ . En particular, demostramos el comportamiento caótico que presenta el sistema.

Hasta este momento, no hemos hecho ninguna referencia a lo que estudiamos en el *capítulo 4*, y es que ahí desarrollamos una teoría matemática distinta al enfoque de Sistemas Dinámicos Discretos. Hablamos ahora en términos topológicos de ciertos espacios que llamamos *continuos*, los cuales representan un área de la Topología, la *Teoría de Continuos*, con un gran desarrollo matemático y que históricamente es más antigua que la teoría de Sistemas Dinámicos Discretos.

La peculiaridad de esta tesis es que muestra explícitamente un puente entre la teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos y la Teoría de Continuos, más específicamente con la herramienta de límites inversos desarrollada también en el *Capítulo 4*, se demostrará que el atractor global de la herradura del cual Λ es un subconjunto invariante, es un *continuo indescomponible* y lo más importante es que dicho continuo es homeomorfo al *continuo de Knaster*, el cual fue creado y estudiado, un poco después de 1920 por Janiszewski, Knaster y Kuratowski. Como podemos observar, su descubrimiento fue ¡mucho antes del descubrimiento de la transformación Herradura!

Para finalizar nuestro análisis del Sistema Herradura, en el último capítulo introducimos unos de los conceptos más importantes en el estudio de los sistemas dinámicos, las variedades estables e inestables de puntos fijos y con ello los puntos homoclínicos.

Nuestra meta será estudiar estos conjuntos en el sistema Herradura y principalmente el demostrar que la *variedad inestable* del punto fijo $\bar{b} \in \Omega$ es densa en Ω . Proponemos una demostración formal de este hecho que si bien intuitivamente resulta muy claro la prueba sigue un largo camino.

Puedo adelantar querido lector que nuestra demostración se desarrolla con ayuda de los límites inversos presentados en el capítulo 4, ésta se descompone en varios pasos, y aunque es larga no deja de ser por demás interesante. Así que lo invitamos a leerla.

Para concluir completamente con la introducción de este trabajo, es preciso hablar acerca de los apéndices incluidos al final de la tesis, que por

distintas razones se volvieron numerosos y son todos ellos de distinta índole.

En el *Apéndice A* presentamos el teorema con su demostración de la Transformación de Contracción que nos fue muy importante en el desarrollo del Capítulo 2.

En el *Apéndice B* presentamos varios resultados, utilizados en el Capítulo 4, con sus respectivas demostraciones de límites inversos, es posible encontrar todos ellos en [??] de la bibliografía.

En el *Apéndice C* incluimos un apartado en el que retomamos varios conceptos del Capítulo 5 pero esta vez desarrollados en el espacio de símbolos Σ_2 .

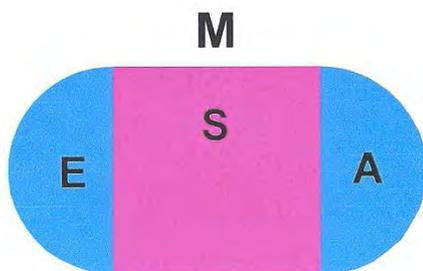
Y por último en el *Apéndice D* presentamos sin demostración un teorema muy especial, el *Teorema de Smale*, en términos generales dicho teorema nos ayuda a determinar ¡la existencia de un sistema herradura dentro de algún otro sistema dinámico!

La Herradura de Smale

0.1. Una presentación geométrica

El objetivo de este capítulo es dar una presentación geométrica de la Transformación Herradura con el fin de comprender algunas de las propiedades dinámicas del sistema. También introduciremos la transformación inversa de la Herradura para así poder definir ciertos subconjuntos del dominio de definición en donde la transformación posee un comportamiento especial.

La transformación Herradura está definida en una región M compacta y conexa del plano. Dicha región M se compone de un cuadrado unitario S a cuyos lados laterales se le añaden dos semicírculos A y E de radio $r = \frac{1}{2}$.

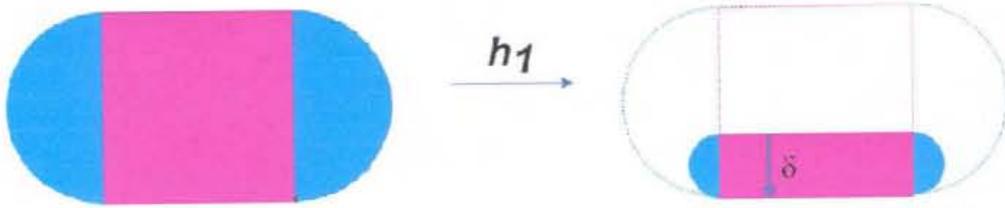


La transformación Herradura la denotaremos como H . El dominio y contradominio de H es precisamente M , es decir:

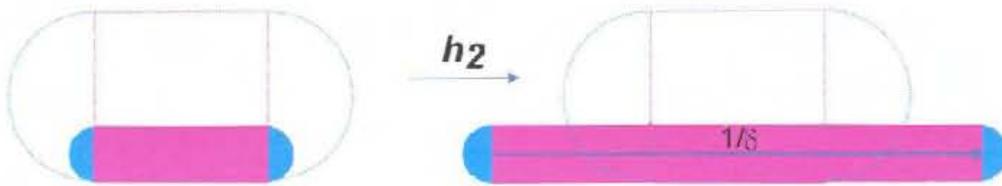
$$H : M \rightarrow M$$

Definiré a H como la composición de otras funciones h_1 , h_2 y h_3 las cuales presento a continuación.

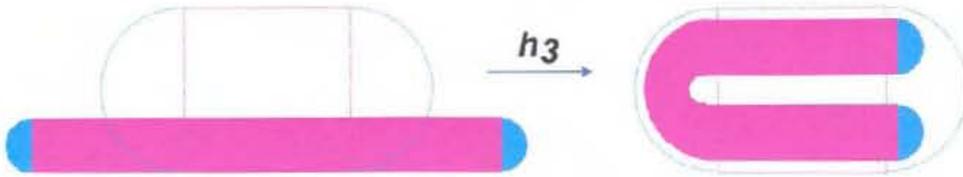
Sea $h_1 : M \rightarrow M$ la transformación que consiste en contraer linealmente M en la dirección del eje de las ordenadas un factor $\delta < \frac{1}{2}$.



Sea $h_2 : M \rightarrow M$ la transformación que consiste en expandir $h_1(M)$ en la dirección del eje de las abscisas un factor $\frac{1}{\delta}$.



Y por último sea $h_3 : M \rightarrow M$ la transformación que consiste en *doblar* $h_2(h_1(M))$ hacia la derecha de modo que quede contenida en M .



Finalmente, definimos $H : M \rightarrow M$ así:

$$H = h_3 \circ h_2 \circ h_1$$

Las siguientes observaciones se derivan de la transformación H :

Observación 0.1.1.

$$H(M) \subset M$$

Observación 0.1.2.

H es inyectiva.

Observación 0.1.3.

H no es suprayectiva.

De dichas observaciones se deduce que H^{-1} está definida en $H(M)$.

Observación 0.1.4.

H es continua.

Observación 0.1.5.

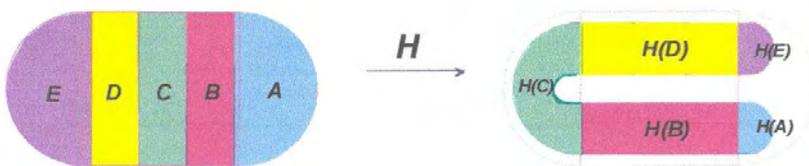
H es una contracción en A .

0.2. Estudiando la dinámica de H en M

Dado que la transformación Herradura es una aplicación de M en sí misma diferente a la transformación identidad, bajo un análisis de h_1 , h_2 y h_3 es factible identificar claramente cuál es la imagen bajo H de ciertos subconjuntos que componen a M .

Para ello denotemos a dichos subconjuntos de M con las letras A , B , C , D , E , los cuales se transformarán al aplicar H en $H(A)$, $H(B)$, $H(C)$, $H(D)$ y $H(E)$ respectivamente, tal como podemos apreciar en la siguiente figura.

Figura 0.2.1.



De aquí es posible observar lo siguiente:

Observación 0.2.1.

La preimagen de S consiste en dos bandas verticales B y D .

Observación 0.2.2.

La banda C de S se transforma fuera de S a la región E .

Observación 0.2.3.

Bajo la transformación H tanto A como B son contraídas dentro de la región A .

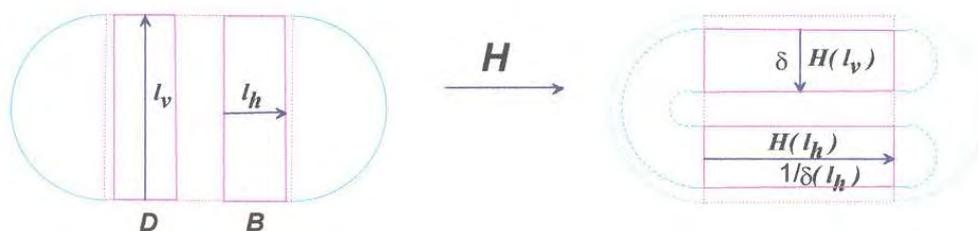
Podemos notar que las *bandas* verticales B y D se transforman en las *bandas* horizontales $H(B)$ y $H(D)$ respectivamente. Dado que dichos conjuntos únicamente sufren las transformaciones lineales de contracción y expansión, bajo la transformación Herradura son transformados nuevamente en rectángulos.

Puesto que h_1 es la contracción de S por un factor $\delta < \frac{1}{2}$, las bandas horizontales B y D , se comprimen a una altura δ y las demás transformaciones que componen a H no modifican esa medida, es decir, el ancho de los rectángulos horizontales $H(B)$ y $H(D)$ están determinados por el factor de contracción δ elegido en h_1 .

De los hechos anteriores y dado que la transformación en el conjunto $B \cup D$ se comporta linealmente, podemos concluir que H envía rectas verticales y horizontales en rectas verticales y horizontales respectivamente, variando únicamente su tamaño.

Sean l_v cualquier recta vertical en $B \cup D$ y l_h cualquier recta horizontal en $B \cup D$. Dado que el factor de contracción de la transformación h_1 es $\delta < \frac{1}{2}$ entonces $H(l_v)$ es una recta vertical de longitud δ y puesto que el factor de expansión de la transformación h_2 es $\frac{1}{\delta}$ entonces $H(l_h)$ es una recta horizontal que mide $\frac{1}{\delta}$ la longitud de l_h .

Figura 0.2.2.



Definición 0.2.1. Una transformación $f : X \rightarrow X$ en un espacio métrico completo (X, d) es llamada **contracción** si existe una constante $0 \leq s < 1$, llamada **factor de contracción** de f , tal que $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Teorema 0.2.1. Teorema de la Transformación de Contracción.

Sea $f : X \rightarrow X$ una transformación de contracción en un espacio métrico completo (X, d) entonces, f posee exactamente un punto fijo $x_0 \in X$ y, más aún, para cualquier punto $x \in X$, la sucesión $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ converge a x_0 . Esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Consulte el Apéndice A. □

Como se ha destacado anteriormente, muchos puntos del cuadrado unitario S bajo H quedan fuera de S y es claro que no regresarán a él bajo ninguna iteración futura. De hecho, todos los puntos que bajo alguna iteración abandonan la región S tendrán como destino final vivir en la región A , en donde ya sabemos por la observación hecha en un principio, que ahí hay una contracción por lo que su dinámica es relativamente sencilla, es decir, todos tienden al único punto fijo que hay en A .

Enunciamos formalmente lo anterior en la siguiente observación.

Observación 0.2.4. Dado que H es una contracción en A , se sigue por el Teorema de la Transformación de Contracción que H tiene un único punto fijo $\bar{a} \in A$. Y más aún:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(x) = \bar{a}$$

para todo $x \in A$. Ahora, dado que $H(E) \subset A$, entonces

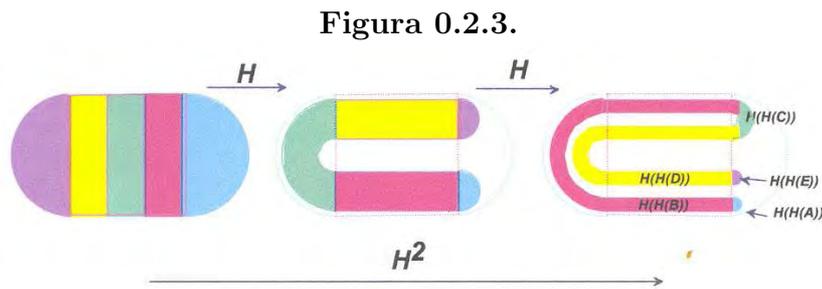
$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(x) = \bar{a}$$

para todo $x \in E$. Y, por último, si $H^n(x)$ no pertenece a S para algún $n \in \mathbb{N}$, para algún $x \in S$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(x) = \bar{a}$$

0.2.1. Un conjunto invariante.

Pero, ¿cuáles son los puntos que permanecen en S siempre, es decir, aquellos puntos que bajo cualquier iteración de H caen en S ? Para responder a esa pregunta, observemos el comportamiento de H hasta la segunda iteración.



Hay puntos en S que bajo H caen fuera de S , sin embargo como hemos visto hasta ahora los de las bandas verticales B y D permanecen en S . De lo anterior se deduce directamente que los puntos de S que permanecen en S bajo H^2 son un subconjunto de puntos de $B \cup D$. Éstos corresponden justamente a cuatro bandas verticales que denotaremos como b_1 , b_2 , d_1 y d_2 respectivamente y cuyo grosor es δ^2 .

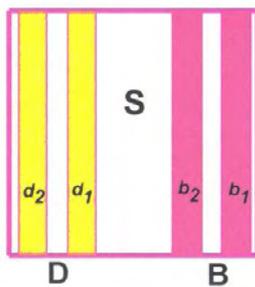


Figura 0.2.4.

Ahora observemos el comportamiento de H^3 :

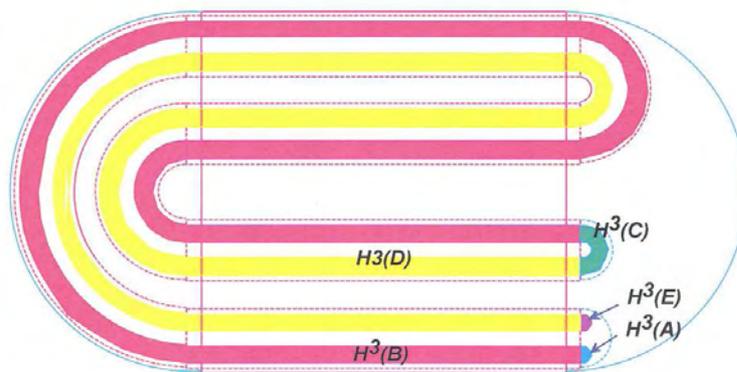


Figura 0.2.5.

Aquí nuevamente podemos notar que los puntos de S que permanecen en S bajo H^3 son un subconjunto de puntos de las bandas b_1, b_2, d_1, d_2 los cuales corresponden exactamente a ocho subbandas verticales de dicho conjunto, cuyo grosor es δ^3 .

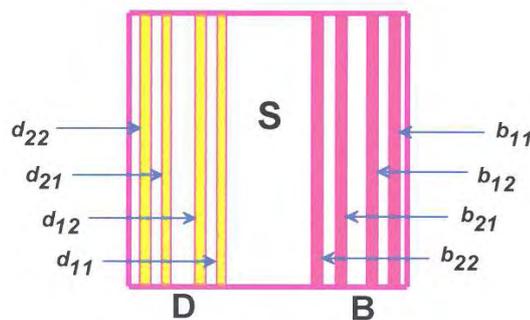


Figura 0.2.6.

Del análisis anterior ahora es posible responder a la pregunta planteada en un principio.

Bajo la n -ésima iteración de H los puntos de S que permanecen en S , son los que determinan 2^n subbandas de D, B de grosor δ^n y aunque no desarrollaremos la demostración de ese hecho en este texto, es posible una prueba por inducción sobre las iteraciones de H . Observemos que, en el paso n , cada banda de ancho δ^n da lugar a exactamente dos bandas de ancho δ^{n+1} en el paso $n+1$. Este proceso es, en esencia, el que se sigue en la construcción del conjunto de Cantor.

Al conjunto de puntos que permanecen en S para toda iteración entera positiva le llamaremos Λ^+ y lo definiremos como sigue:

$$\Lambda^+ = \{x \in S \mid H^n(x) \in S, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (1)$$

Lo mejor de todo ello es que es posible imaginarnos dicho conjunto: Λ^+ puede ser representado como el producto de un conjunto de Cantor con el intervalo vertical unitario.

Y en la siguiente figura presentamos una aproximación a esta representación:

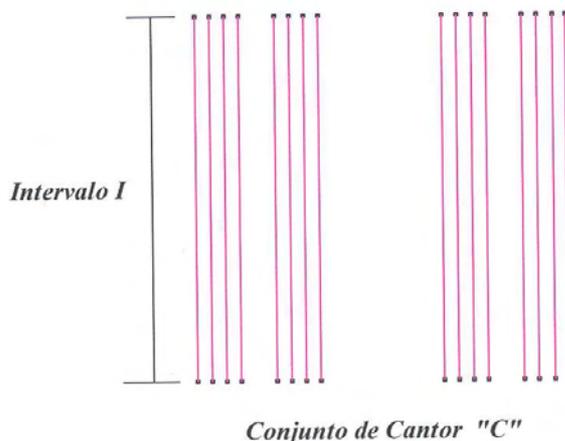


Figura 0.2.7.

Si recordamos en este momento cuál era nuestro objetivo de identificar al conjunto Λ^+ , éste se debía principalmente al hecho de que de haber un comportamiento interesante en la dinámica de H éste tendría que estar justo en los puntos que permanecen en S bajo cualquier iteración. Continuando con nuestro objetivo, estudiaremos un subconjunto de Λ^+ que engloba todas las propiedades complejas e interesantes de H .

A este subconjunto lo denotaremos sencillamente como Λ .

$$\Lambda = \{x \in S \mid H^n(x) \in S, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

Transformación inversa de H .

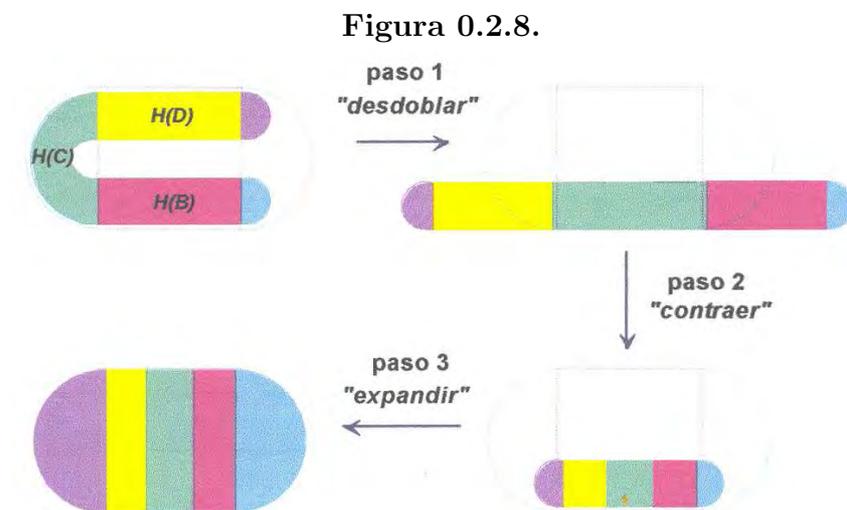
Para comprender claramente quién es dicho conjunto, nos falta considerar al conjunto Λ^- definido a continuación:

$$\Lambda^- = \{x \in S \mid H^{-n}(x) \in S, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (3)$$

Por lo que los puntos de S que ahora nos interesa identificar son todos aquellos que bajo cualquier iteración de la transformación inversa de la Heradura, H^{-1} , están en S .

Pero, ¿quién es H^{-1} ? En un principio mencionamos que esta transformación estaba definida para $H(M)$. De esta forma $\Lambda^- \subset H(M)$.

Ahora bien, si la transformación H consiste en *comprimir*, *expandir* y *doblar* una región M compacta y conexa del plano, intuitivamente podemos pensar a H^{-1} como la transformación que consiste en *desdoblar*, *contraer* y *expandir* $H(M)$ tal como se muestra en la siguiente secuencia de imágenes.

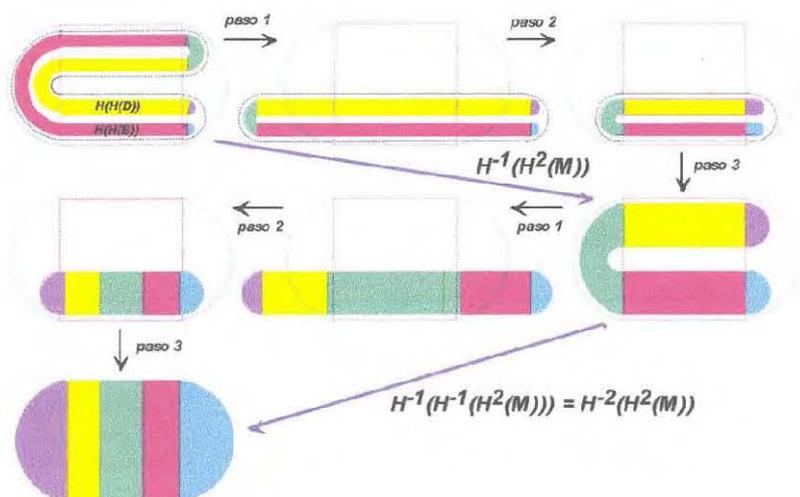


De hecho, en la imagen anterior se muestran muy claramente los puntos de $H(M)$ que pertenecen a S , es decir $H(D) \cup H(B)$. Ahora bien, de estos puntos nos interesa identificar aquellos que bajo H^{-1} permanecen en S .

Como se observa en la imagen, resulta claro que los puntos de $S \cap H(M)$ que bajo H^{-1} permanecen en S son precisamente los de las dos bandas horizontales $H(B) \cup H(D)$, cuyo grosor es δ .

Análogamente, si analizamos el comportamiento de los puntos de $S \cap H^2(M)$ que bajo H^{-2} permanecen en S . Lo que observamos es que éstos corresponden a las cuatro bandas horizontales determinadas precisamente por $(H^2(B) \cup H^2(D)) \cap S$.

Figura 0.2.9.



De lo anterior es posible convencernos de lo siguiente:

Bajo la n -ésima iteración de H^{-1} , los puntos de S que permanecen en S son 2^n rectángulos horizontales determinados por $(H^n(B) \cup H^n(D)) \cap S$, cuyo ancho es δ^n como ya habíamos observado.

Λ^- representa entonces el producto cartesiano de un *Conjunto de Cantor* con un intervalo horizontal. En el siguiente dibujo damos una aproximación a esa representación.

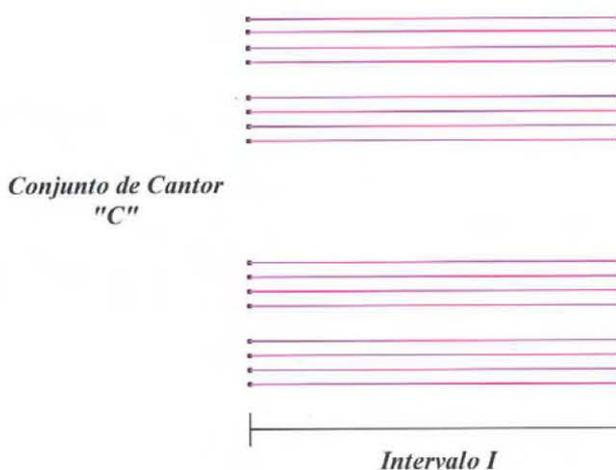


Figura 0.2.10.

Por lo que el conjunto que nos interesa, Λ , está determinado como sigue:

$$\Lambda = \Lambda^+ \cap \Lambda^- \quad (4)$$

La representación gráfica de este conjunto es muy fácil de imaginar, la podemos describir como una “rejilla” de *conjuntos de cantor* como se intenta representar en la figura siguiente, es decir, es de la forma $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Donde \mathcal{C}_1 es un conjunto de cantor horizontal y \mathcal{C}_2 es uno vertical. Como el producto de conjuntos de cantor es un conjunto de cantor, Λ es un conjunto de cantor.

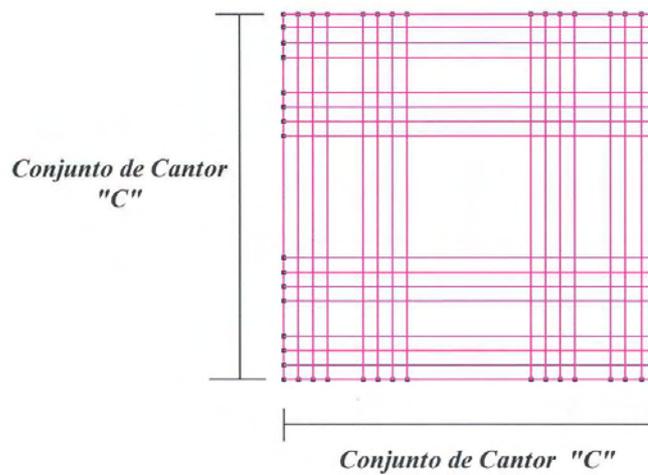


Figura 0.2.11.

0.2.2. Propiedades dinámicas interesantes.

Todo este tiempo hemos mencionado que dicho conjunto posee propiedades dinámicas interesantes pero jamás hemos dicho cuáles son éstas; ha llegado el momento de mencionar algunas de ellas aunque, dado que su prueba requiere del desarrollo de más herramienta matemática, se profundizará en ello en el siguiente capítulo.

- Una propiedad importante es la existencia de dos puntos fijos; uno en B y otro en D .
- La existencia de una infinidad de órbitas periódicas, entre las cuales podemos encontrar órbitas de periodos arbitrariamente grandes.

- El conjunto de puntos periódicos es denso en Λ .
- La existencia de órbitas densas.
- Comportamiento “caótico”.

Para probar todas estas propiedades y observar la riqueza de la estructura dinámica de la Transformación Herradura en Λ , será necesario introducir un nuevo espacio métrico con una nueva función ahí definida, pero como dijimos anteriormente, ello es materia del siguiente capítulo.

Hasta ahora nuestra presentación de la Transformación Herradura ha sido puramente geométrica, es decir, no hemos definido una regla de correspondencia explícita de los puntos de M , y el objetivo de hacerlo de esta manera es para comprender intuitivamente la dinámica del sistema, identificar ciertos conjuntos (con una buena representación gráfica) y ciertas propiedades dinámicas, además de explotar al máximo la belleza visual de la transformación.

Puntos fijos.

Hasta el momento hemos identificado principalmente dos tipos de puntos, en el primer tipo se encuentran todos aquellos puntos de M tales que en alguna iteración de H éstos quedan fuera de S y, lo más importante, en algún momento caen en A y por tanto su dinámica consiste en tender al único punto fijo en A . Y los del segundo tipo, en el que se encuentran los puntos que para cualquier iteración entera positiva de H permanecen en S .

También mencionamos que en A había un único punto fijo dado que H era una contracción en A . Nuestra labor final de este primer capítulo será dar argumentos geométricos y demostrar la existencia de otros dos puntos fijos de H en M , distintos al contenido en A , uno en B y otro en D .

Debo decir que este hecho no es fácil de visualizar ni de entender a simple vista, por lo que una prueba de ello es absolutamente necesaria. Maravillosamente podemos establecer la existencia de tres puntos fijos en el sistema. Mostraremos que en B hay un punto fijo y haremos ver que la prueba es análoga para D .

Teorema 0.2.2. *Existe $b \in B$ tal que $b = H(b)$*

Demostración. Lo primero es recordar que bajo H , el conjunto B se transforma en una banda horizontal que intersecta a B y dado que la Transformación envía líneas verticales en líneas verticales, es claro que las rectas verticales que delimitan a B se transforman cada una en las rectas verticales que delimitan a la banda horizontal $H(B)$.

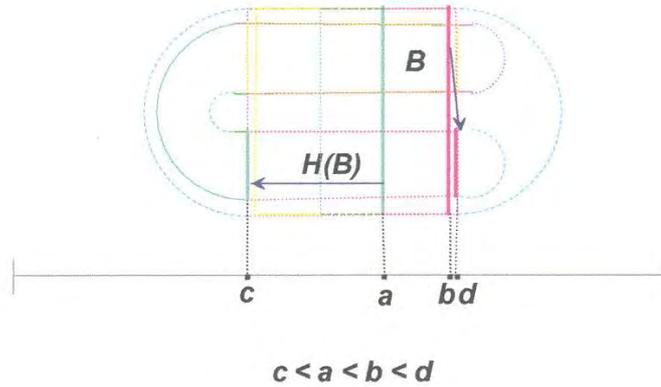


Figura 0.2.12.

También se puede observar que bajo H , B se expande hacia los lados, así que hay muchas rectas en B que se desplazan a la derecha y otro tanto a la izquierda.

Para que ese comportamiento ocurra en una transformación continua, intuitivamente sabemos que debe existir una recta vertical que se mantenga fija bajo H , es decir que al aplicar la transformación, la recta sólo sea comprimida un factor δ sin sufrir de desplazamiento horizontal alguno.

Para demostrar éste hecho lo que haremos es proyectar en la recta real, tal como se aprecia en la figura, las rectas verticales que determinan a la banda B y a la banda horizontal $H(B)$. De tal forma que lo que obtenemos es la localización de cuatro puntos c , a , b y d sobre la recta, los cuales poseen un orden.

La transformación H es continua. El segmento $\{x\} \times [0, 1]$ contenido en B , se transforma bajo H en un segmento vertical cuya proyección está en el intervalo $[c, d]$. Llamamos $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ a la función que describe este movimiento de las proyecciones. Así, h va del intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[c, d]$, $h(a) = c$, $h(b) = d$ y h es continua.

Construyamos ahora la transformación $G(x)$ definida a continuación:

$$G(x) = h(x) - x$$

Es claro que $G(x)$ es una función continua.

Por otro lado tenemos que: $h(a) = c$ y $a > c$, también $h(b) = d$ y $b < d$. Por lo que,

$$G(a) = h(a) - a \text{ y } G(b) = h(b) - b,$$

De donde $G(a) < 0$ y $G(b) > 0$, entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$G(x_0) = h(x_0) - x_0 = 0$$

Por lo que $h(x_0) = x_0$, $x_0 \in [a, b]$.

Lo anterior nos permite afirmar la existencia de una recta que se mantiene fija, y ésta es precisamente la recta que pasa por x_0 . Con ello hemos terminado prácticamente la prueba, ya que sólo basta recordar que H reduce el tamaño de las rectas verticales un factor $\delta < \frac{1}{2}$ por cada iteración, de tal forma que en la k -ésima iteración la longitud de la recta es δ^k . Por lo que nuestra recta fija va volviéndose cada vez más y más pequeña hasta determinar un único punto cuando $k \rightarrow \infty$.

Y es justo ese punto, el punto fijo de H en B . □

Teorema 0.2.3. *Existe un $d \in D$ tal que $d = H(d)$*

La demostración de la existencia del punto fijo en D es análoga a la anterior, sólo que en esta ocasión hay que observar que bajo H , D , se transforma en la banda horizontal como se observa en la figura, es decir que en éste caso los lados verticales que determinan a la banda D se transforman en direcciones opuestas a la anterior, por lo que las desigualdades llevarán otro orden. Así nuevamente encontramos una recta vertical que se mantiene fija, y con ello un punto fijo en D .

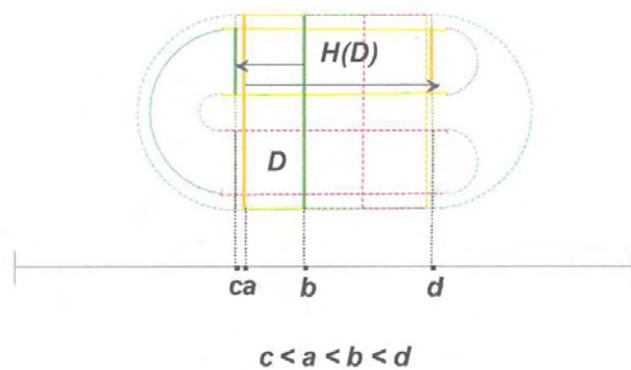


Figura 0.2.13.

Con esta sencilla prueba de un importante hecho terminamos el capítulo.

Dinámica simbólica

Nuestro objetivo en este capítulo es dar un modelo que describa la compleja dinámica de la transformación Herradura en el conjunto Λ . Para ello introduciremos un espacio métrico con propiedades peculiares, Σ_2 , donde definiremos una función que llamaremos de *corrimiento*. Probaremos que $H|_\Lambda$ es una conjugación topológica con la función corrimiento en el espacio Σ_2 .

La Dinámica Simbólica puede parecer un modelo complicado y poco intuitivo, sin embargo, una vez que comprendemos su funcionamiento, nos damos cuenta de que esta representación simbólica describe de la forma más sencilla posible la dinámica de H .

0.1. Una presentación del espacio Σ_2

El espacio Σ_2 , también conocido como el espacio de sucesiones de dos símbolos, consta de todas las posibles sucesiones dobles infinitas de 0's y 1's. Con la palabra dobles me refiero a que se extienden tanto a infinito como a menos infinito.

$$\Sigma_2 = \{x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} : x_n = 0 \text{ ó } 1\}$$

0.1.1. La función Ψ

En lo que sigue se demostrará que cada una de las sucesiones dobles infinitas representa un único punto del espacio Λ , presentaré la correspondencia entre ambos conjuntos de forma explícita, a través de una función, que probaremos que está bien definida y es un homeomorfismo.

A esa función la llamaré Ψ :

$$\Psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2 \tag{1}$$

La correspondencia consiste en asignar a cada punto de Λ una doble sucesión de 0's y 1's con base en el recorrido que posee la órbita del punto, tanto para las iteraciones de H , como para las de H^{-1} . De dicho recorrido lo único que nos va a interesar conocer es en cuál de las bandas, B o D , cae el punto bajo cada iteración, y de esta manera determinar cada término de la sucesión.

Adoptaré la siguiente convención: el "0" representa al conjunto B y el "1" al conjunto D .

Con base en lo explicado en el primer capítulo es fácil identificar la doble sucesión infinita que le corresponde al punto fijo b de B : siguiendo la regla de asignación dada para B y D y dado que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H^n(b) = b$, resulta claro que la doble sucesión que le corresponde a b es: $(\dots\bar{0}00 \cdot 00\bar{0}\dots)$; es decir, la órbita del punto fijo es la sucesión constante de ceros puesto que el punto fijo permanece siempre en B .

Análogamente al punto fijo de D le corresponde la doble sucesión infinita de unos: $(\dots\bar{1}11 \cdot 11\bar{1}\dots)$.

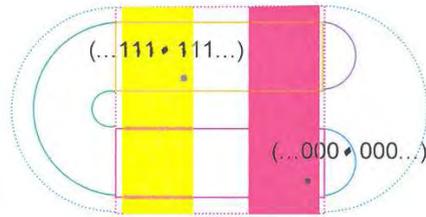


Figura 0.1.1.

Sin embargo, no todos los puntos de Λ poseen una órbita tan predecible, existen muchos puntos en Λ cuya órbita visita B y D de una forma difícil de determinar a simple vista.

Es por ello que para entender bien en qué consiste ésta asignación, primero analizaré cómo se conforma la sucesión derecha de cada punto de Λ .

Tomemos cualquier recta vertical, l_v , contenida en Λ^+ . Notemos que $H^k(l_v)$ es un segmento de recta vertical de longitud δ^k en B o D . De ahí que sea posible asociar una única sucesión infinita $(\dots s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ de ceros y unos a todo punto en dicha recta l_v , de acuerdo a la siguiente regla:

$$s_j = 0 \text{ si y sólo si } H^j(l_v) \subset B,$$

$$s_j = 1 \text{ si y sólo si } H^j(l_v) \subset D.$$

Dado que definimos H^0 como la transformación identidad, el valor que toma la doble sucesión en s_0 nos indica en qué conjunto B o D se localiza l_v , s_1 nos indica en donde se localiza la imagen de l_v y así sucesivamente para los demás puntos.

De lo anterior es claro que cada recta vertical define una sucesión infinita derecha.

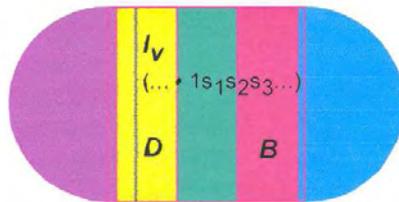


Figura 0.1.2.

De una forma similar ahora podemos asociar una sucesión infinita de 0's y 1's a cada recta horizontal l_h de Λ^- . Notemos que $H^{-1}(l_h), H^{-2}(l_h), \dots$, son segmentos horizontales de longitud decreciente. A esta secuencia la llamaremos $(\dots s_{-3}s_{-2}s_{-1} \cdot \dots)$ donde el valor de s_{-j} se determina como sigue:

$$s_{-j} = 0 \text{ si y sólo si } H^{-j}(l_v) \subset B,$$

$$s_{-j} = 1 \text{ si y sólo si } H^{-j}(l_v) \subset D.$$

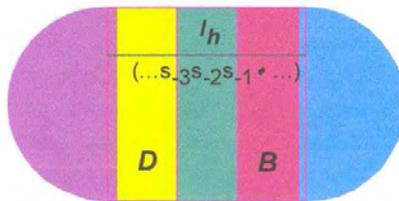


Figura 0.1.3.

De esta forma es claro que la asignación Ψ está bien definida ya que la intersección de una recta vertical con una recta horizontal es única. Por lo que por cada punto en la Λ , existe una única doble sucesión infinita que le corresponde.

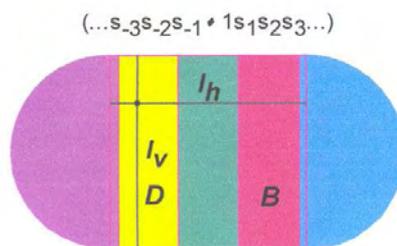


Figura 0.1.4.

Definición 0.1.1. Dado $x \in \Lambda$, $\Psi(x) = (\dots s_{-3}s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$ es su itinerario.

Intuitivamente es posible convencernos de lo siguiente: puntos muy cercanos en Λ poseen órbitas idénticas hasta un tiempo finito tanto hacia adelante como hacia atrás, es decir, que en términos de la asignación de los itinerarios correspondientes que hace Ψ de esos puntos, las entradas a la derecha y a la izquierda del *punto* coinciden hasta cierto valor $|n|$ de la doble sucesión infinita. Con esta idea en mente, en lo que sigue, trataremos de identificar los primeros elementos de la sucesión que poseen los puntos de ciertas **regiones** de Λ con base al recorrido que sufre dicha región al aplicar H y H^{-1} respectivamente.

Para ello es necesario recordar cuál es la distribución de los puntos en S que bajo la k -ésima iteración de H y H^{-1} permanecen en S . En el capítulo anterior observamos que dichos puntos se localizan en los 2^{2k} “cuadrados” determinados por la intersección de 2^k bandas verticales, (los puntos que permanecen en S bajo la k -ésima iteración de H), con 2^k bandas horizontales, (los puntos que permanecen en S bajo la k -ésima iteración H^{-1}).

En la siguiente figura se aprecia éste hecho cuando $k = 2$.

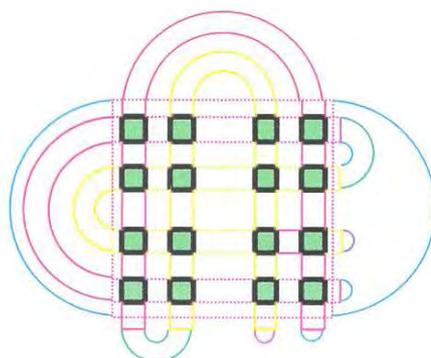
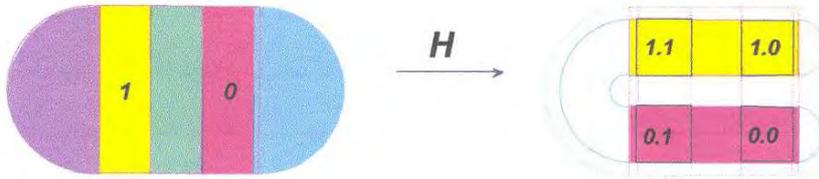


Figura 0.1.5.

Lo que haremos a continuación es explicar cómo asignar los primeros valores de la sucesión infinita a las regiones en verde de $B \cup D$ que se observan en la figura. De paso esto muestra, intuitivamente, que dada cualquier secuencia $(\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$, existe un punto $x \in \Lambda$ cuyo itinerario es dicha secuencia. Es decir, ψ es, en efecto, suprayectiva.

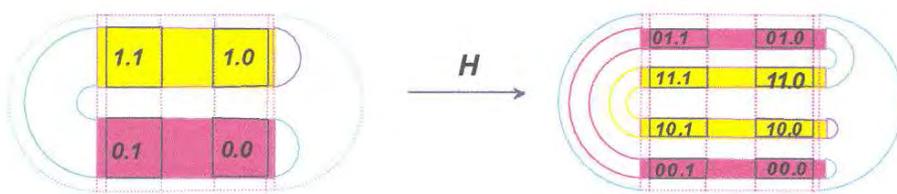
El primer paso es localizar las cuatro, (2^2) , regiones que se delimitan por $H(M) \cap (B \cup D)$. Es posible conocer cuál es la imagen inversa de cada una de dichas regiones al observar el color, el cual nos indicará si provienen de B o D . De tal forma que podremos determinar el término s_{-1} , que posee cada punto en las distintas regiones.

Figura 0.1.6.



Para determinar ahora s_{-2} , lo que haremos es aplicar H^2 a M , de tal forma que será inmediato conocer las ocho, (2^3) , regiones que se delimitan por $H^2(M) \cap (B \cup D)$. De esta forma es factible conocer cuál es la imagen inversa de cada una de las regiones al observar nuevamente el color que poseen, el cual nos indicará que provienen de B o D . De tal forma que podremos conocer el término s_{-2} , que posee cada punto en las distintas regiones.

Figura 0.1.7.



Si continuamos con este proceso, podremos conocer los primeros n términos de la sucesión infinita negativa para cada uno de los 2^{n+1} cuadrados que se determinan con la n -ésima iteración.

De una forma similar pero ahora considerando H^{-1} , es posible dar una asignación de los primeros n términos de la sucesión infinita positiva.

Para ello recordemos lo siguiente:

En S la transformación herradura, puede ser representada con el siguiente diagrama.

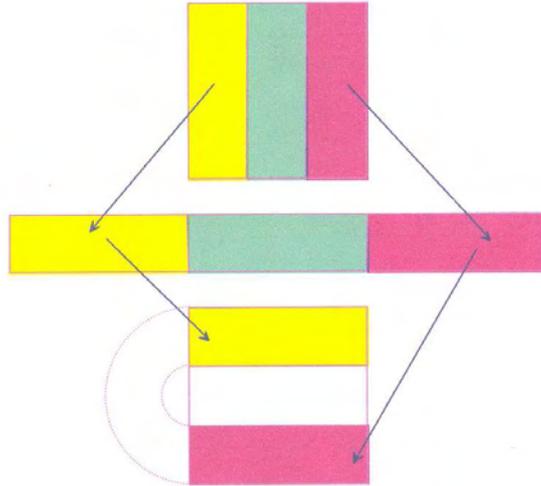


Figura 0.1.8.

De esta forma es claro por lo explicado en el primer capítulo, que un diagrama similar para H^{-1} en $H(S)$ sería el siguiente.

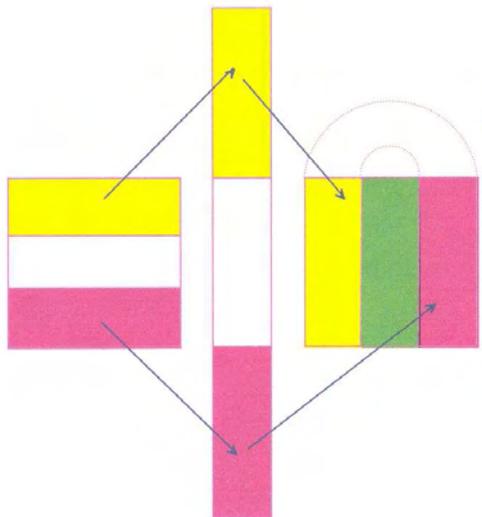
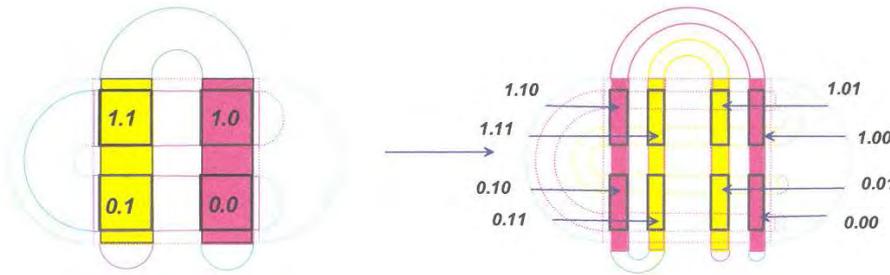


Figura 0.1.9.

Una vez aclarado esto, será sencillo conocer la entrada s_1 de la doble sucesión infinita. Ya que ello consistirá en ubicar cuáles son los subconjuntos de Λ que permanecen en S bajo H^2 . Esto lo haremos utilizando la representación de H^{-1} dada anteriormente pero en su forma iterada H^{-2} , como se aprecia en la figura.

Figura 0.1.10.



Lo que se observa son las ocho regiones determinadas por $(H^{-2}(M) \cap H^2(M) \cap (B \cup D))$. Y por el color es factible conocer cuál es la imagen de cada una de dichas regiones, el cual nos indicará si se transforma bajo H^2 dentro de B ó D respectivamente. De tal forma que podremos determinar el término s_1 que posee cada punto en las distintas regiones.

De esta manera, hemos determinado los términos $(s_2 s_{-1} \cdot s_0 s_1)$ que poseen los puntos en los 2^4 regiones en verde como apreciamos en la siguiente figura.

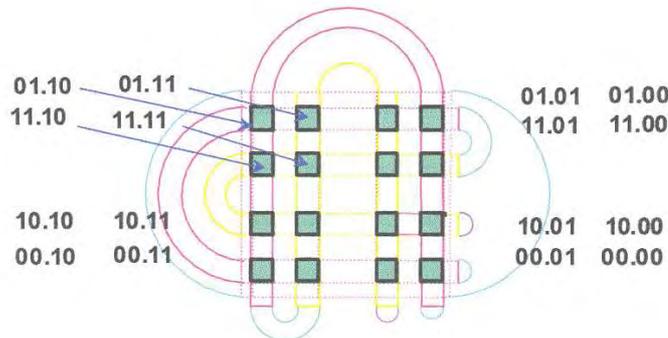


Figura 0.1.11.

Adoptaremos la notación: $\Omega_{s_2 s_{-1} \cdot s_0 s_1}$ para referirnos a dichos cuadrados, es decir, obtendremos para el caso $n = 2$, 16 configuraciones diferentes que representaran a cada uno de los 2^4 cuadrados que se determinan en las dos iteraciones previas y futuras de H .

Este proceso puede generalizarse para obtener los “primeros” n términos alrededor del punto en los 2^{2n} cuadraditos correspondientes. Así cada uno de estos cuadrados estará etiquetado como: $\Omega_{s_{-n} \dots s_2 s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$.

Una observación importante que se deriva directamente del hecho de que H representa una transformación afín sobre las bandas verticales $B \cup D$, es que la proporción de estos cuadrados está claramente determinada por la iteración correspondiente. Es decir, los 2^{2n} cuadrados, $\Omega_{s_{-n} \dots s_2 s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$, que se delimitan por las n iteraciones previas y futuras de H , tienen lados de longitud δ^n , donde $\delta < \frac{1}{2}$.

0.2. Σ_2 como espacio métrico

Sean $\hat{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, $\hat{y} = (y_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ en Σ_2 , definimos la distancia entre estos puntos de la siguiente forma:

$$d(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}}. \quad (2)$$

Observación 0.2.1.

Como $|x_i - y_i|$ es 0 o 1 tenemos que $d(\hat{x}, \hat{y}) \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = 3$. Es decir, la distancia está bien definida porque la serie es convergente y, a la vez, la métrica está acotada.

Nuestra tarea ahora es demostrar que d efectivamente es una métrica.

Sean $\hat{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, $\hat{y} = (y_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\hat{z} = (z_n)_{n=-\infty}^{\infty}$.

1. $d(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{y}$. Ello es muy sencillo de ver puesto que $|x_i - y_i| = 0$ para toda i si y sólo si $x_i = y_i$ para toda i .
2. $d(\hat{x}, \hat{y}) = d(\hat{y}, \hat{x})$. Ello sucede puesto que $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para toda i .
3. $d(\hat{x}, \hat{y}) \leq d(\hat{x}, \hat{z}) + d(\hat{z}, \hat{y})$. Ello se deriva de que $|x_i - y_i| = |y_i - z_i| + |z_i - y_i|$ para toda i .

De 1, 2, y 3 se concluye que la expresión 2 define una métrica.

La métrica d nos permite decidir cuáles subconjuntos de Σ_2 son abiertos y cuáles son cerrados, pero lo más importante es que nos permite determinar cuándo dos sucesiones se encuentran cercanas. Y es justo en ese sentido que el siguiente resultado es muy importante.

Teorema 0.2.1. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_i = y_i$ para $|i| \leq n$ entonces $d(\hat{x}, \hat{y}) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Recíprocamente si $d(\hat{x}, \hat{y}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $x_i = y_i$ para $|i| \leq n$.*

Demostración. Si $x_i = y_i$ para $|i| \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} d(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{i=-\infty}^{-(n+1)} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{|i|}} \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{-(n+1)} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, si suponemos $x_j \neq y_j$ para algún $|j| \leq n$ entonces tenemos que la $d(\hat{x}, \hat{y}) \geq \frac{1}{2^{|j|}} \geq \frac{1}{2^n}$, por lo que si $d(\hat{x}, \hat{y}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $x_i = y_i$ para toda $|i| \leq n$. □

Intuitivamente, el teorema nos dice que dos sucesiones en Σ_2 se encuentran cerca si ocurre que los “primeros” términos a la derecha y a la izquierda del punto coinciden.

Una vez propuesto el espacio métrico en el que trabajaremos, lo que sigue es definir una función en ese espacio. A esa función se le conoce comúnmente con el nombre en inglés *shift*, nosotros la llamaremos la función corrimiento y la denotaremos por la letra σ .

Definimos $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ así:

$$\sigma(\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots) = (\dots s_{-2}s_{-1}s_0 \cdot s_1s_2\dots). \quad (3)$$

Como podemos notar, lo único que hace la función σ es recorrer la sucesión un elemento a la izquierda o de manera equivalente, recorrer el punto una unidad a la derecha.

Es posible definir una función inversa de manera muy simple ya que claramente al recorrer la sucesión una unidad a la derecha obtenemos la inversa de 3

De hecho lo que probaremos a continuación es que σ es un homeomorfismo en Σ_2 .

Teorema 0.2.2. *La función σ es un homeomorfismo en Σ_2 .*

Demostración. Sean $\widehat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$ y $\widehat{t} = (\dots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2\dots)$ elementos de Σ_2 . Probaremos que se cumplen 1, 2, 3, 4.

1. σ es inyectiva. Si suponemos $\widehat{s} \neq \widehat{t}$ entonces ocurre que $s_j \neq t_j$ para algún j por lo que $\sigma(\widehat{s})$ y $\sigma(\widehat{t})$ difieren en el elemento $j-1$, así que $\sigma(\widehat{s}) \neq \sigma(\widehat{t})$
2. σ es suprayectiva. Sea \widehat{t} un elemento en Σ_2 . Definamos s tal que: $s_1 = t_0, s_2 = t_1, s_3 = t_2, \dots, s_n = t_{n-1}, \dots$ para toda $n \in \mathbb{Z}$. Es claro que \widehat{s} es tal que $\sigma(\widehat{s}) = \widehat{t}$.
3. σ es continua. Sea $n, \varepsilon > 0$ y $\widehat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$ en Σ_2 . Fijemos n tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Sea $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Si $\widehat{t} = (\dots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2\dots)$ satisface que $d(\widehat{s}, \widehat{t}) < \delta$, entonces, por el Teorema 0.2.1, tenemos que $s_i = t_i$ para toda $|i| \leq n+1$. De ahí que las i -ésimas entradas de $\sigma(\widehat{s})$ y $\sigma(\widehat{t})$ coinciden para toda $|i| \leq n$. Por lo que $d[\sigma(\widehat{s}), \sigma(\widehat{t})] \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.
4. σ^{-1} es continua; la demostración es análoga a la hecha en 3) y la omitimos.

Por 1, 2, 3, 4, tenemos que σ es un homeomorfismo. □

0.2.1. Conjugación Topológica

En Sistemas Dinámicos, consideramos una *conjugación topológica* a lo siguiente:

Definición 0.2.1. *Sean X y Y dos espacios métricos. Decimos que $f : X \rightarrow X$ es topológicamente conjugada a $g : Y \rightarrow Y$, y lo denotamos por $f \approx g$, si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que*

$$h \circ f = g \circ h.$$

Al homeomorfismo h se le llama una conjugación.

También es posible considerar el caso cuando la transformación h , es diferenciable con inversa diferenciable, es decir h es un difeomorfismo. En este caso se dice que f y h son difeomórficamente conjugadas. A continuación demostraremos que la característica de que dos funciones sean conjugadas es invariante bajo iteraciones.

Teorema 0.2.3. Si $f \approx g$, entonces $f^k \approx g^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$, dos transformaciones. La prueba se hará por inducción: *Base de inducción* Por hipótesis $f \approx g$, es decir, existe un homeomorfismo, h , tal que $h \circ f = g \circ h$.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que existe un homeomorfismo h tal que $f^k \approx g^k$ es decir, se cumple, $h \circ f^k = g^k \circ h$.

Demostremos para $n = k + 1$. Sea $x \in X$, entonces,

$$h(f^{k+1}(x)) = h(f^k(f(x))) \stackrel{1}{=} g^k(h(f(x))) \stackrel{2}{=} g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)).$$

Donde la igualdad 1 se debe a la hipótesis de inducción y la igualdad 2 a la base de inducción demostradas anteriormente. De tal forma que h es el homeomorfismo buscado tal que $h \circ f^{k+1} = g^{k+1} \circ h$. Por tanto, $f^k \approx g^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. \square

Una observación se desprende de este teorema.

Observación 0.2.2. Como $h \circ f = g \circ h$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$h \circ f^k = g^k \circ h.$$

Aplicando h^{-1} ,

$$h^{-1} \circ h \circ f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h \text{ obtenemos, } f^k = h^{-1} \circ g^k \circ h.$$

Además $f^k \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^k \circ h \circ h^{-1}$, entonces $f^k \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^k$

Teorema 0.2.4. Si $f \approx g$, entonces $h \circ f^{-k} \approx g^{-k} \circ h$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$, dos transformaciones. Por el teorema 0.2.3 y observación 0.2.2 anteriores tenemos que

$$f^k \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^k \text{ para toda } k \in \mathbb{N}.$$

De esta forma $(f^k \circ h^{-1})^{-1} = (h^{-1} \circ g^k)^{-1}$.

Por tanto $(h^{-1})^{-1} \circ (f^k)^{-1} = (g^k)^{-1} \circ (h^{-1})^{-1}$

Así $h \circ f^{-k} = g^{-k} \circ h$.

□

Observación 0.2.3. Si $f \approx g$, entonces

$$f^{-k} \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^{-k} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Bajo la conjugación topológica se preservan muchas propiedades dinámicas del espacio. Lo cual expondremos más adelante una vez que introduzcamos ciertas definiciones como función transitiva y función que presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Nuestro propósito ahora es probar que existe una conjugación topológica entre el espacio (Λ, H) y (Σ_2, σ) .

De esta forma como dijimos anteriormente, muchas propiedades dinámicas que posea σ en Σ_2 serán invariantes bajo la conjugación por lo que se cumplirán también en Λ con la transformación Herradura.

A continuación recordaremos un resultado que vamos a utilizar.

Lema 0.2.1. Sea f una función continua y biyectiva, $f : X \rightarrow Y$, donde X, Y son espacios métricos compactos. Entonces, la función inversa, f^{-1} , definida en Y por $f^{-1}(f(x)) = x$ donde $x \in X$, es una transformación continua y suprayectiva de Y en X .

Teorema 0.2.5. La transformación $\Psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ hace una conjugación topológica entre σ y H .

De acuerdo a la definición anterior lo único que hay que probar es que Ψ es un homeomorfismo y que el siguiente diagrama conmuta, es decir, $\Psi \circ H = \sigma \circ \Psi$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{H} & \Lambda \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \end{array}$$

Demostración. Primero probaremos que se cumple la condición $\Psi \circ H = \sigma \circ \Psi$

Sea \bar{x} un elemento en Λ , el cual puede caracterizarse como el punto de intersección de una recta vertical l_{v_1} con una recta horizontal l_{h_1} , de tal forma que al aplicar H , las rectas vertical y horizontal se transformarán en otras rectas vertical $H(l_{v_1})$ y horizontal $H(l_{h_1})$ respectivamente, por lo que $H(\bar{x})$ será el punto de intersección de estas nuevas rectas.

Por lo que al aplicar ψ a $H(\bar{x})$, es claro que lo que obtenemos es la doble sucesión infinita $\psi(H(\bar{x})) = \widehat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$, en donde la sucesión infinita a la izquierda del punto determina la recta horizontal $H(l_{h_1})$ y la sucesión infinita a la derecha del punto determina la recta vertical $H(l_{v_1})$ en cuya intersección se encuentra $H(\bar{x})$.

Veamos ahora qué sucede si aplicamos ψ a \bar{x} . Como en el caso anterior, \bar{x} está en la intersección de l_{v_1} con l_{h_1} . Por tanto $\psi(\bar{x}) = \widehat{t} = (\dots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2\dots)$. Del análisis previo notamos que $(\dots s_{-3}s_{-2}\cdot)$ es la sucesión que caracteriza a l_{h_1} en \widehat{t} y $(\cdot s_{-1}s_0s_1\dots)$ es la sucesión que caracteriza a l_{v_1} en \widehat{t} por lo que $t_{-1} = s_{-2}, t_{-2} = s_{-3}\dots$ así mismo $t_0 = s_{-1}, t_1 = s_0\dots$ de tal forma que $\psi(\bar{x}) = \widehat{t} = (\dots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2\dots) = (\dots s_{-3}s_{-2} \cdot s_{-1}s_0s_1\dots)$ con lo que $\sigma(\psi(\bar{x})) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$.

$$\sigma(\Psi(\bar{x})) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1\dots) = \Psi(H(\bar{x})).$$

Mostraremos ahora que Ψ , la función definida en 1, es un homeomorfismo.

Sean \bar{x}, \bar{y} elementos de Λ . Probaremos que se cumplen 1, 2, 3, 4.

1. Ψ es suprayectiva. Sea $\widehat{s} = (\dots s_{-k}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_{k-1}\dots)$ un elemento en Σ_2 . Es claro que para cada $k \in \mathbb{N}$, s es un elemento del cuadrado:

$$\Omega_{s_{-k}\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots s_{k-1}}$$

Estos cuadrados forman una sucesión anidada cuya longitud de cada lado, es δ^k , de tal forma que podemos garantizar que existe un elemento

\bar{x}_0 en Λ tal que $\bar{x}_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k}\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots s_{k-1}}$. Por lo que $\Psi(\bar{x}_0) = \widehat{s}$.

2. Ψ es inyectiva. Supongamos $\Psi(\bar{x}) = \Psi(\bar{y}) = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$, por lo que los elementos \bar{x}, \bar{y} están dentro de cada uno de los cuadrados,

$$\Omega_{s_{-k}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

de esta forma se cumple que:

$$\bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_{k-1}} \quad \text{y} \quad \bar{y} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{s_{-k}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_{k-1}}.$$

y dado que los cuadrados determinan un único punto conforme $k \rightarrow \infty$, obtenemos que $\bar{x} = \bar{y}$.

3. Ψ es continua. Sean $\bar{x} \in \Lambda$ y $\hat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots) = \Psi(\bar{x})$. Sea $\varepsilon > 0$. Fijemos n tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Para una $\delta > 0$ suficientemente pequeña, si $\bar{y} \in \Lambda$ y ocurre que $|\bar{y} - \bar{x}| < \delta$, entonces $\bar{y} \in \Omega_{s_{-n}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_{n-1}}$. Para tal elemento \bar{y} , sea $\hat{t} = (\dots t_{-2}t_{-1} \cdot t_0t_1t_2\dots) = \Psi(\bar{y})$. De esta manera $t_k = s_k$ para $-n \leq k \leq n-1$. Así $d(h(\bar{x}), h(\bar{y})) \leq \sum_{i=-\infty}^{-(n+1)} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.
4. Ψ^{-1} es continua. Por el lema 0.2.1, 1, 2 y 3, el hecho de que Λ y Σ_2 son compactos probamos que Ψ^{-1} es continua.

Por 1, 2, 3, 4, tenemos que Ψ es un homeomorfismo. □

0.3. Propiedades Dinámicas de σ

En lo sucesivo mostraré muchas de las propiedades dinámicas que posee la función σ .

Definición 0.3.1. Sea $f : X \rightarrow X$, decimos que un punto $x \in X$ es periódico, de periodo k , $k \in \mathbb{N}$ si ocurre que $f^k(x) = x$.

Notemos primero que los puntos periódicos de σ de periodo n corresponden a sucesiones de la forma:

$$\widehat{s} = (\dots, s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1} \cdot s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1}, \dots)$$

Es decir, todos aquellos puntos cuya doble sucesión se conforma de la repetición infinita de una sucesión finita de longitud n . Ello sin importar que el *punto* se localiza en un punto intermedio al periodo, es decir:

$$\widehat{s} = (\dots, s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1} s_0 \dots s_i \cdot s_{i+1} \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1}, \dots)$$

De ahí que existan 2^n puntos fijos de H^n , cada uno generado por alguna de las 2^n posibles ordenaciones de 0's y 1's de longitud n .

También es posible caracterizar a los puntos de Σ_2 que son asintóticamente fijos o asintóticamente periódicos.

Definición 0.3.2. Sea $f : X \rightarrow X$ y sea $x \in X$.

- Decimos que x es asintóticamente fijo si existe un x_0 , punto fijo de f , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x_0) = 0$$

- Decimos que x es asintóticamente periódico si existe un b , punto periódico de f , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(b)) = 0$$

Analicemos primero los puntos que son asintóticamente fijos, para ello veremos que existen tres casos:

- Caso 1. Cualquier sucesión de la forma:

$$(\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_n 111 \dots) \text{ ó } (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_n 000 \dots)$$

es asintóticamente fija para las iteraciones de H .

- Caso 2. Cualquier sucesión de la forma:

$$(\dots 111 s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots) \text{ ó } (\dots 000 s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots)$$

es asintóticamente fija para las iteraciones de H^{-1} .

- Caso 3. Cualquier sucesión de la forma:

$$(\dots, 111s_{-n}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_n 111\dots) \text{ ó } (\dots, 000s_{-n}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_n 000\dots) \\ \text{ó } (\dots, 000s_{-n}\dots s_{-1} \cdot s_0s_1\dots s_n 111\dots)$$

es asintóticamente fija para las iteraciones de H y de H^{-1} .

Para los puntos de Σ_2 que son asintóticamente periódicos existen también tres posibles casos y se constituyen de forma análoga a los casos anteriores, salvo que esta vez sucede que a partir de un cierto término $|m|$ en la doble sucesión, se repite infinitamente una sucesión finita de longitud n .

Definición 0.3.3. Sea $\Delta = \{x \in \Sigma_2 : x \text{ es punto periódico de } \sigma\}$

y dada $n \in \mathbb{N}$, Sea $\Delta_n = \{x \in \Sigma_2 : \sigma^n(x) = x\}$

Otro factor interesante con respecto a σ es que el conjunto de puntos periódicos, Δ , forman un subconjunto denso en Σ_2 .

Recordemos que un conjunto A es denso en Σ_2 si ocurre que su cerradura es el espacio Σ_2 , es decir, $\overline{A} = \Sigma_2$, o equivalentemente, si para cada $x \in \Sigma_2$, existe una sucesión $\{a_n\}$ en A tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x,$$

es decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, x) < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Entonces para demostrar que Δ es denso, vamos a construir una doble sucesión infinita de puntos periódicos $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a un punto arbitrario $\widehat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$. Para ello definimos:

$$\tau_n = (\dots, s_{-n}\dots s_n, s_{-n}\dots s_{-1} \cdot s_0\dots s_n, s_{-n}\dots s_n, s_{-n}\dots s_n, \dots), n \in \mathbb{N}$$

es decir, τ_n es un punto de periodo $(2n) + 1$ cuyas entradas coinciden con las de s hasta el término (n) -ésimo tanto a la izquierda como a la derecha del punto de la doble sucesión. Por lo tanto, $d(\tau_n, s) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, así, $\tau_n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por supuesto no todos los puntos en Σ_2 son periódicos o asintóticamente periódicos. De hecho los puntos no periódicos “rebasan por un gran número”

a las que sí lo son en Σ_2 . Más aún, existen puntos no periódicos cuya órbita es densa a Σ_2 .

Para demostrar ello consideremos el siguiente elemento de Σ_2 :

$$d^* = (\dots \cdot \underbrace{01}_{\text{1}} \underbrace{00011011}_{\text{2}} \underbrace{000001010011100111}_{\text{4}} \dots)$$

Notemos que las entradas de la doble sucesión infinta a la derecha del punto consta de todas las posibles ordenaciones de los valores 0 y 1 tomados de uno en uno primero, luego de dos en dos y así sucesivamente.

Probemos que d^* es una órbita densa para σ .

Demostración. Sea \hat{s} un elemento en Σ_2 es decir $\hat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$ donde $s_i \in \{0, 1\}$ y sea $\epsilon > 0$. Demostraremos que para algún entero positivo m sucede que $\sigma^m(d^*) \cap B_\epsilon(s) \neq \emptyset$.

Por la propiedad arquimediana es posible encontrar un entero positivo n tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$. Dado que en d^* se encuentran todas las posibles ordenaciones de 0's y 1's tomados de $2n$ en $2n$, es claro que la ordenación dada por s para las entradas alrededor del punto :

$$(s_{-n}s_{-(n-1)}\dots s_{-2}s_{-1}s_0s_1s_2\dots s_{n-1})$$

forma parte de las configuraciones en d^* de tal foma que es posible determinar explícitamente un m tal que $\sigma^m(d^*)$ coincide en las n primeras entradas a la derecha del punto y en las $-n$ primeras entradas a la izquierda del punto con los valores respectivos de s en esas posiciones. Entonces por el [Teorema 10] $d(\sigma^m(d^*), \hat{s}) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$, es decir, $\sigma^m(d^*) \cap B_\epsilon(\hat{s}) \neq \emptyset$

□

Para concluir, en el siguiente teorema exponemos todas las propiedades hasta ahora demostradas de (Σ_2, σ) :

Teorema 0.3.1. 1. La cardinalidad de Δ_n , es 2^n para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. El conjunto Δ es denso en Σ_2 .

3. Existe una órbita densa para σ en Σ_2 .

0.4. Σ_2 es un *Conjunto de Cantor*

El *conjunto de Cantor* es de los ejemplos más importantes en topología y en sistemas dinámicos.

Para hablar de un conjunto de Cantor es preciso introducir algunas definiciones matemáticas como por ejemplo de conjunto totalmente desconexo, compacto y perfecto.

Definición 0.4.1. *Un espacio métrico, X , decimos que es:*

1. *Perfecto, si X es cerrado y cualquier punto de X es un punto de acumulación de X .*
2. *Compacto, si cada sucesión en X posee una subsucesión convergente en X .*
3. *Totalmente desconexo, si $X \neq \emptyset$ y ningún subconjunto conexo contiene más de un punto (es decir, sus componentes son puntos).*

El Conjunto de Cantor clásico (de los tercios excluidos) es métrico, compacto, perfecto y totalmente desconexo. Es posible demostrar que todo conjunto no vacío con estas cuatro propiedades es homeomorfo a dicho Conjunto de Cantor. Para ver una prueba de ello, consultar [??] de la bibliografía.



Figura 0.4.1.

Definición 0.4.2. *Un conjunto A , es un Conjunto de Cantor, si A es métrico, perfecto, compacto y totalmente desconexo.*

Teorema 0.4.1. *El espacio métrico Σ_2 es un conjunto de Cantor.*

Demostración. 1. Σ_2 es compacto. Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera en Σ_2 , recordemos que cada α_n es de la forma:

$$\alpha_n = (\dots a_{-2}a_{-1} \cdot a_0a_1a_2 \dots).$$

Pensemos en todos éstos α_n , es posible determinar un conjunto infinito de ellos para los cuales su entrada a_0 coincide. Notemos que la sucesión puede contener una infinidad de términos cuya entrada a_0 sea 0, 1 o incluso puede haber una infinidad de ambos. Sin pérdida de generalidad, elegimos uno de esos subconjuntos infinitos y denotamos por n_1 el menor de los elementos de ese conjunto y hacemos $\beta_1 = \alpha_{n_1}$. Dentro de todo este conjunto cuyos elementos, repito, coinciden en la entrada a_0 seleccionaremos un subconjunto infinito de elementos para los cuales se cumpla que su entrada a_{-1} coincida también. Denotamos por n_2 el menor de ellos tal que $n_2 > n_1$ y hacemos $\beta_2 = \alpha_{n_2}$. Hasta ahora tenemos un subconjunto infinito de elementos de la sucesión $\{\alpha_n\}$ cuyos entradas a_0 y a_{-1} son iguales respectivamente. De ahí seleccionaremos un subconjunto infinito de elementos para los cuales se cumpla que su entrada a_1 coincida. Denotamos por n_3 el menor de esos elementos tal que $n_3 > n_2$ y hacemos $\beta_3 = \alpha_{n_3}$. Continuando con este proceso, obtendremos una subsucesión $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ que es claramente convergente. Por tanto Σ_2 es compacto.

2. Σ_2 es perfecto. Sea $\hat{t} = (\dots t_{-1} \cdot t_0 t_1 \dots)$, demostraremos que es un punto de acumulación de Σ_2 , para ello, construyamos la sucesión de elementos de Σ_2 como sigue: Sea $\hat{s} \in \Sigma_2$ tal que para toda $i \in \mathbb{Z}$, $s_i \neq t_i$. Sean

$$\hat{a}_0 = (\dots s_{-2} t_{-1} \cdot t_0 s_1 \dots),$$

$$\hat{a}_1 = (\dots s_{-3} t_{-2} t_{-1} \cdot t_0 t_1 s_2 \dots),$$

$$\hat{a}_2 = (\dots s_{-4} t_{-3} t_{-2} t_{-1} \cdot t_0 t_1 t_2 s_3 \dots)$$

⋮

$$\hat{a}_n = (\dots t_{-n} \dots t_{-3} t_{-2} t_{-1} \cdot t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1} \dots) \text{ etc.}$$

Por lo que resulta claro que dicha sucesión converge a $\hat{t} = (\dots t_{-1} \dot{t}_0 t_1 \dots)$.

3. Σ_2 es totalmente desconexo. Sean \widehat{a}, \widehat{b} en Σ_2 dos elementos distintos. Demostremos que existen dos cerrados ajenos A y B en Σ_2 tal que $\widehat{a} \in A$ y $\widehat{b} \in B$ y $A \cup B = \Sigma_2$.

Como $\widehat{a} \neq \widehat{b}$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Sean $A \subset \Sigma_2$, $B \subset \Sigma_2$ definidos así:

$$A = \{\widehat{t} : t_{n_0} = a_{n_0}\} \text{ y } B = \{\widehat{t} : t_{n_0} = b_{n_0}\}.$$

Claramente $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Sigma_2$.

Afirmación. A es abierto.

Demostración. Sea $\widehat{c} \in A$, entonces $c_{n_0} = a_{n_0}$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2^{|n_0|}}$. Por el Teorema 0.2.1, si $d(\widehat{t}, \widehat{c}) < \varepsilon$, entonces las coordenadas de \widehat{t} y \widehat{c} coinciden para toda n , $|n| \leq |n_0|$. Esto implica que $t_{n_0} = c_{n_0} = a_{n_0}$, es decir, $\widehat{t} \in A$. Por lo tanto $B_\varepsilon(\widehat{c}) \subset A$. Así A es un conjunto abierto y procediendo de manera análoga demostramos que B es abierto.

De esta forma podemos concluir que cada componente de Σ_2 tiene exactamente un punto.

4. Por último, Σ_2 es claramente un espacio métrico. □

Otra forma de probar que el espacio Σ_2 es un Cantor es dando directamente un homeomorfismo entre el espacio de símbolos y el conjunto de Cantor.

Mencionamos aquí, sin demostración, sólo la idea que se puede seguir.

Para ello definamos la siguiente transformación: $h_c : \mathcal{C} \rightarrow \Sigma_2$ como sigue: para $x = (0.x_0x_1x_2x_3\dots) \in \mathcal{C}$ donde x_i es 0 ó 2. Notemos que ello es posible puesto que se puede demostrar que todo punto que pertenezca al Conjunto de Cantor, puede escribirse únicamente con ceros y dos en base 3. Una vez aclarado este punto, podemos definir sin ambigüedades el siguiente homeomorfismo.

$$h_c(x) = y = (\dots y_{-2}y_{-1} \cdot y_0y_1y_2\dots), \text{ donde}$$

$$y_i = \frac{x_{2i}}{2} \text{ y } y_{-(i+1)} = \frac{x_{(2i)+1}}{2}.$$

0.5. Sistema Caótico

De las múltiples posibilidades matemáticas para definir el comportamiento caótico de las órbitas de un sistema dinámico adoptaremos la propuesta por el matemático Robert L. Devaney, ya que ésta posee un enfoque topológico que resulta muy adecuado para nuestro propósito, además de la relativa sencillez con la que es posible verificar las condiciones de esta definición.

Antes de formalizar el concepto de caos, me gustaría hablar de lo que intuitivamente podríamos esperar de un sistema caótico, de esta forma será más fácil asimilar las definiciones matemáticas de función transitiva y de dependencia a las condiciones iniciales que están íntimamente relacionadas a la definición de sistema caótico.

Claramente cuando nos referimos a un comportamiento caótico pensamos en un sistema que es impredecible, es decir que sin importar la experiencia acumulada o previa que se tenga del comportamiento del sistema, es imposible establecer una predicción verdadera del estado futuro del mismo.

Me gustaría citar un ejemplo de sistema caótico que es sin duda el más socorrido, pero no por ello deja de ser interesante y sobre todo muy conocido por todos los habitantes del planeta tierra.

Pensemos en el clima. ¿Podremos predecir con plena certeza, siendo hoy una hermosa tarde de otoño, con un sol resplandeciente, un cielo despejado y una temperatura agradable, que al anoecer la lluvia densa y tenaz no cubrirá a la ciudad? La experiencia diaria nos dice claramente que es imposible garantizarlo, ya que los factores climáticos pueden cambiar abruptamente sus valores sin importar las condiciones presentes, con ello me refiero al hecho de que la precisión en los valores iniciales es fundamental para una mayor certeza en la predicción ya que cualquier error produce cambios sustanciales en la predicción final.

Definición 0.5.1. *Decimos que $f : D \rightarrow D$ es topológicamente transitiva si para cualesquier par de conjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset D$, existe $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Intuitivamente podemos imaginar a las funciones transitivas como aquellas que poseen órbitas que visitan densamente a todo el espacio, es decir que hay puntos que eventualmente, bajo alguna iteración de f , se mueven de una vecindad arbitrariamente pequeña a alguna otra.

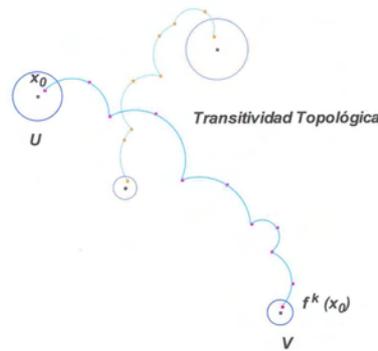


Figura 0.5.1.

En el siguiente teorema se hará explícita la relación entre la existencia de una órbita densa bajo alguna función y que ésta sea topológicamente transitiva.

Proposición 0.5.1. *Sea D un subconjunto compacto y perfecto de un espacio métrico y una función, $f : D \rightarrow D$ continua. Si existe un punto cuya órbita bajo f es densa en D , entonces f es topológicamente transitiva en D .*

Para la demostración consultar [??] de la bibliografía.

Definición 0.5.2. *Decimos que $f : D \rightarrow D$ posee una sensible dependencia a las condiciones iniciales si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in D$ y cualquier vecindad N de x , existe un $y \in N$ y $n \geq 0$ tal que $d(f^n(x) - f^n(y)) > \delta$.*

Intuitivamente una transformación es sensible a las condiciones iniciales si podemos encontrar puntos arbitrariamente cercanos a x que eventualmente se separen de x al menos una distancia δ bajo alguna iteración de f .

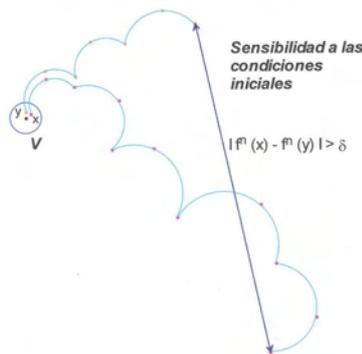


Figura 0.5.2.

Debo enfatizar que no es necesario que todos los puntos cercanos a x deben separarse de x bajo alguna iteración, sin embargo debe existir al menos un punto que describa ese comportamiento en cada vecindad de x .

Una vez establecidas estas definiciones estamos listos para introducir formalmente la definición de caos adoptada por Robert Devaney.

Definición 0.5.3. *Sea D un conjunto y sea $f : D \rightarrow D$ continua. Se dice que f es caótica en D si:*

1. f es sensible a las condiciones iniciales.
2. f es topológicamente transitiva.
3. Los puntos periódicos son densos en D .

En particular, podemos observar que cuando el dominio de una función continua es infinito, entonces, la densidad de los puntos periódicos y el que la función sea topológicamente transitiva implica la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales. Lo cual se manifiesta formalmente en el siguiente teorema demostrado por Banks y otros. Consultar [??] de la bibliografía.

Teorema 0.5.1. *Sea D un subconjunto infinito de un espacio métrico y $f : D \rightarrow D$ una función continua. Si f es topológicamente transitiva en D y los puntos periódicos de f son densos en D , entonces f es caótica en D .*

Para la demostración consultar [??] de la bibliografía.

0.5.1. (Σ_2, σ) es caótico.

Teorema 0.5.2. *El sistema dinámico dado por (Σ_2, σ) es caótico.*

Demostración. Sabemos que Σ_2 es un espacio métrico y σ es una función continua. Además se demostró que Σ_2 es un conjunto compacto y perfecto y que existe un punto en Σ_2 cuya órbita es densa bajo σ en Σ_2 . Entonces, por el Proposición 0.5.1 la función σ es topológicamente transitiva en Σ_2 , además se demostró que el conjunto de puntos periódicos, Δ , es denso en Σ_2 , entonces por el Proposición 0.5.1, σ es una función caótica en Σ_2 .

□

En la sección de *Conjugación Topológica*, hablamos de la preservación de propiedades dinámicas de las funciones bajo cierta conjugación h . En ese sentido, presentamos los siguientes resultados que nos permitirán, para finalizar, presentar el resultado más importante del capítulo 2.

Sea la transformación $f : A \rightarrow A$ topológicamente conjugada a la transformación $g : B \rightarrow B$, ambas funciones continuas en los espacio métricos A y B respectivamente, es decir tenemos el siguiente diagrama conmutativo, donde h es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

De esta forma podemos demostrar lo siguiente:

Teorema 0.5.3. *Si f es transitiva en A , entonces g es transitiva en B .*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos abiertos en B y supongamos que g es h -conjugada de f . Entonces $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son dos subconjuntos abiertos en A . Dado que f es transitiva, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$ por la Observación 0.2.2. Ahora, puesto que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$, entonces $(h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(V)) \neq \emptyset$, entonces $h^{-1}(g^k(U) \cap V) \neq \emptyset$, entonces $g^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo que, g es transitiva. \square

Teorema 0.5.4. *El conjunto de puntos periódicos de f , P , en A es denso, entonces el conjunto de puntos periódicos de g , P^* , en B es denso.*

Demostración. Sea U cualquier conjunto abierto no vacío de B . Entonces, $h^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de A y por la densidad de los puntos periódicos debe contener un punto $x_0 \in A$ k -periódico para algún k , es decir, $x_0 = f^k(x_0)$. De ahí se sigue que $h(x_0) = h(f^k(x_0)) = g^k(h(x_0))$ por tanto $h(x_0)$ es un punto k -periódico de g . Además, $h(x_0) \in h(h^{-1}(U)) = U$ por consiguiente, el conjunto de puntos periódicos bajo g , P^* es denso en B . \square

Teorema 0.5.5. *Si f es caótica en A , entonces g es caótica en B .*

Demostración. Por los dos teoremas previos y el teorema 0.5.1 podemos concluir que g es caótica en B . \square

0.5.2. (Λ, H) es caótico.

Corolario 0.5.1. *El sistema dinámico (Λ, H) es caótico.*

Demostración. Se demostró que la función H es conjugada topológica a la función σ y por el teorema 0.5.2, (Σ_2, σ) es caótica entonces por el teorema 0.5.5, (Λ, H) es caótico. \square

Algunas propiedades topológicas de Ω

De la relación $H(M) \subset M$ obtenemos la siguiente sucesión encajada de conjuntos:

$$M \supset H(M) \supset H^2(M) \supset H^3(M) \supset \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene :

1. $H^n(M)$ es compacto, conexo y distinto del vacío, y
2. $H^n(M) = \bigcap_{i=0}^n H^i(M)$.

Sea Ω el siguiente conjunto:

$$\Omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} H^i(M)$$

A continuación demostraremos que Ω es un continuo.

0.1. Un breve vistazo a la Teoría de continuos

Definición 0.1.1. *Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un subespacio de un espacio métrico, el cual es un continuo.*

Algunos ejemplos son los siguientes:

1. En \mathbb{R} los únicos continuos son los intervalos cerrados y acotados.
2. En general llamaremos *arco*, a todo espacio que es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ y por lo tanto es un continuo.
3. El *círculo unitario*, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
4. El *disco*, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. El continuo $X = Cl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \text{sen}(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}$ se conoce como la *curva topológica*.
6. El *Cubo de Hilbert* es un espacio que es homeomorfo al producto cartesiano numerable:

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \text{ cada } X_i = [0, 1]$$

con la topología producto. Este conjunto es también un continuo.

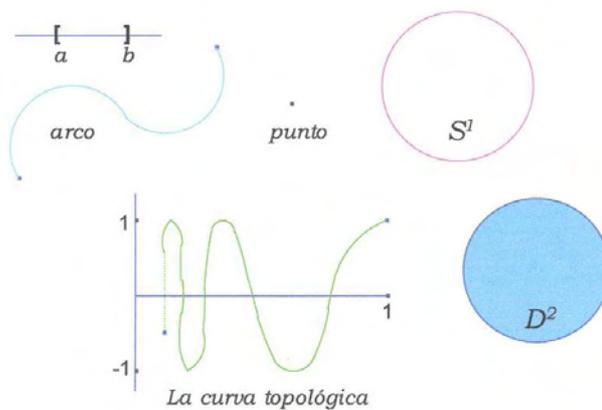


Figura 0.1.1.

7. El *toro* $T = S^1 \times S^1$.
8. El *toro sólido* $T = S^1 \times D^2$.

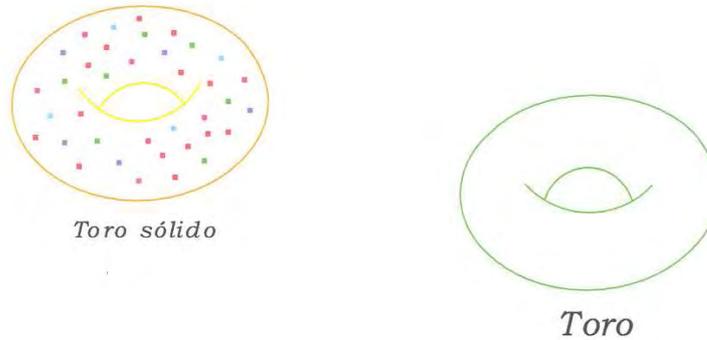


Figura 0.1.2.

0.2. Intersecciones anidadas de continuos.

Una de las herramientas más importantes en teoría de continuos para construir ejemplos interesantes de estos espacios es el uso de intersecciones anidadas de continuos.

Es por ello que los siguientes resultados son muy importantes.

Lema 0.2.1. Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos, compactos tal que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada $i = 1, 2, \dots$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Si U es un conjunto abierto de X_1 tal que $U \supset X$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \supset X_i$ para todo $i \geq N$.

En particular: Si cada $X_i \neq \emptyset$, entonces $X \neq \emptyset$. Nótese que X es compacto.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que para cada $i = 1, 2, \dots$, existe un $x_i \in X_i - U$. Puesto que $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \dots$ entonces $X_1 \setminus U \supset X_2 \setminus U$ y así sucesivamente. Entonces $x_i \in X_1 \setminus U$ para todo i . Ahora, puesto que X_1 es un compacto y U es un abierto se implica que $X_1 \setminus U$ es un subconjunto cerrado de un compacto, métrico y por tanto $X_1 \setminus U$ es un conjunto compacto, métrico. De tal forma que podemos asumir que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X_1 - U$. Sabemos que para cada k , $x_i \in X_k$ para todo $i \geq k$. de tal forma que $p \in X_k$ para cada k . Por lo tanto, $p \in X$, lo cual, dado que p no pertenece a U , contradice la hipótesis de que $U \supset X$. De ahí que existe una N tal que, $U \supset X_i$ para todo $i \geq N$. Así queda demostrada la primera parte de la proposición.

El hecho de que $X \neq \emptyset$ si cada $X_i \neq \emptyset$ se sigue de lo anterior. Si asumimos $X = \emptyset$ y tomamos $U = \emptyset$ ya que de esta forma tenemos que U es un conjunto abierto de X_1 tal que $U \supset X$ (el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto), entonces por lo recién demostrado podemos afirmar que existe $N \in \mathbb{N}$ que $U \supset X_i$ para todo $i \geq N$, por lo que es claro que $X_N = \emptyset$. Esto es una contradicción. Ello completa la prueba. \square

Antes de enunciar el otro resultado importante en este sentido es preciso observar lo siguiente:

Proposición 0.2.1. *Todo espacio métrico X , es normal. esto quiere decir que para cualesquiera dos puntos, $x, y \in X$ siempre existen vecindades $V_x \in \mathcal{V}(x)$ (la familia de vecindades de x), y $V_y \in \mathcal{V}(y)$ que son disjuntas. Además que para cualesquiera dos subconjuntos cerrados y disjuntos, A y B de X , existen siempre vecindades $U_A \in \mathcal{V}(A)$ y $U_B \in \mathcal{V}(B)$ que son disjuntas.*

Demostración. Para una prueba de ello consultar [??] de la bibliografía. \square

Teorema 0.2.1. *Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos tal que $X_i \supset X_{i+1}$ para cada $i = 1, 2, \dots$, y sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, entonces X es un continuo.*

Demostración. Por la proposición anterior, X es un espacio métrico compacto no vacío. Por lo que sólo resta demostrar que X es conexo. Para ello, supongamos que X no es conexo. Entonces, $X = A \cup B$ donde A y B son dos conjuntos disjuntos, no vacíos y cerrados (de ahí que sean compactos). Por la *Observación 3.1.1* y dado que X_1 es un espacio métrico, X_1 es un espacio *normal*, es decir, podemos encontrar dos subconjuntos abiertos V y W de X_1 tal que $A \subset V$ y $B \subset W$. Sea $U = V \cup W$. Entonces, por la proposición anterior, $U \supset X_n$ para alguna n . De ahí que,

$$X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W).$$

Además, dado que $X_n \supset X = A \cup B$ y puesto que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, observamos que $X_n \cap V \neq \emptyset$ y $X_n \cap W \neq \emptyset$. Se sigue inmediatamente que X_n no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es conexo. \square

0.2.1. Curva Universal de Sierpinski.

Un ejemplo muy interesante de continuo construido a partir de intersecciones anidadas es la llamada *Curva Universal de Sierpinski*.

La forma de construirla es muy sencilla; hagamos una partición del cuadrado unitario $S = [0, 1] \times [0, 1]$, en nueve cuadrados congruentes, y sea

$$X_1 = S - \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).$$

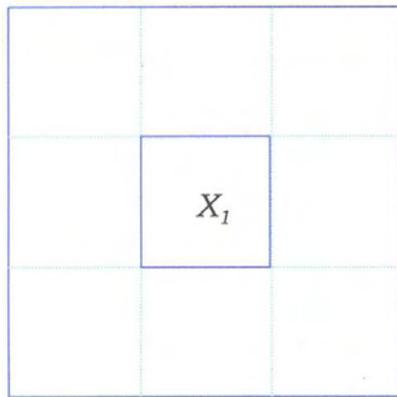


Figura 0.2.1.

Análogamente, dividamos cada uno de los ocho cuadrados restantes en nueve cuadrados congruentes, y sea X_2 el continuo resultante al remover los cuadrados centrales de cada uno de los ocho cuadrados, tal como se aprecia en la siguiente figura.

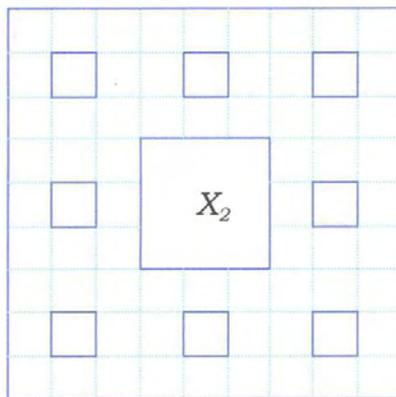


Figura 0.2.2.

Continuando con este proceso definimos X_3, X_4, \dots . Sea $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Y por el teorema anterior sabemos que X es un continuo y lleva el nombre de *Curva Universal de Sierpinski*.

El término universal se refiere al hecho de que se puede demostrar que este continuo de dimensión uno en el plano contiene una copia topológica de cualquier otro continuo unidimensional del plano.

0.3. Continuos Indescomponibles.

Todos los ejemplos anteriores de continuos poseen la propiedad de que pueden ser expresados como la unión de dos subcontinuos propios.

Esta propiedad es muy importante y de hecho nos da una clasificación de los continuos, tal como observamos en la siguiente definición.

Definición 0.3.1. *Un continuo X se dice que es descomponible si ocurre que X puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. Esta unión no es disjunta. Un continuo que no es descomponible se dice que es indescomponible.*

Para lectores no familiarizados con estos conjuntos, presentamos los siguientes ejemplos:

1. El *intervalo unitario cerrado* es descomponible, ya que éste puede ser escrito, por ejemplo, como: $[0, \frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$.
2. El *círculo unitario* es descomponible, puesto que podemos describirlo como la unión de los semicírculos cerrados superior e inferior.
3. También lo son el *toro*, la *esfera*, o incluso la *Curva de Sierpinski*.

Hasta este momento podríamos pensar que todos los continuos son descomponibles (excepto el continuo que consta de un punto, claro está). Sin embargo es posible demostrar que la mayoría de los continuos son indescomponibles aunque la prueba no forma parte de los objetivos de la tesis.

0.3.1. El continuo de *Knaster*

El ejemplo más sencillo de un continuo indescomponible y que ha sido ampliamente estudiado por los topólogos es el *Continuo de Knaster*. A continuación damos una explicación de la construcción de este espacio así como de sus propiedades más relevantes.

Empecemos con el *conjunto ternario de Cantor*, \mathcal{C} , en \mathbb{R}^2 . Este conjunto es simétrico alrededor de $x = \frac{1}{2}$, de esta forma podemos unir todo par de puntos simétricos en \mathcal{C} , por un semicírculo que “viva” en la mitad superior del plano con centro en $x = \frac{1}{2}$.

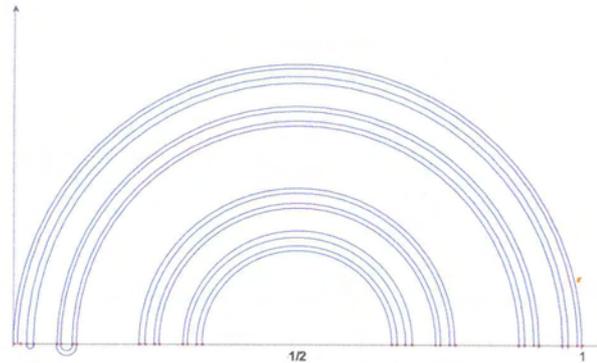


Figura 0.3.1.

El siguiente paso es unir los puntos de la parte derecha de \mathcal{C} entre $\frac{2}{3}$ y 1. Ellos pueden igualmente ser conectados por semicírculos que “vivan” en la parte inferior del plano, esta vez centrados en $\frac{5}{6}$.

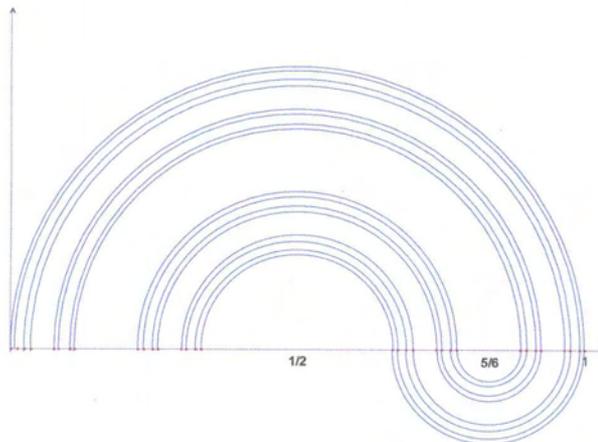


Figura 0.3.2.

Con la porción izquierda que nos queda lo que haremos es dividirla nuevamente a la mitad, y de esta forma pares de puntos simétricos en la porción derecha pueden ahora ser unidos por semicírculos.

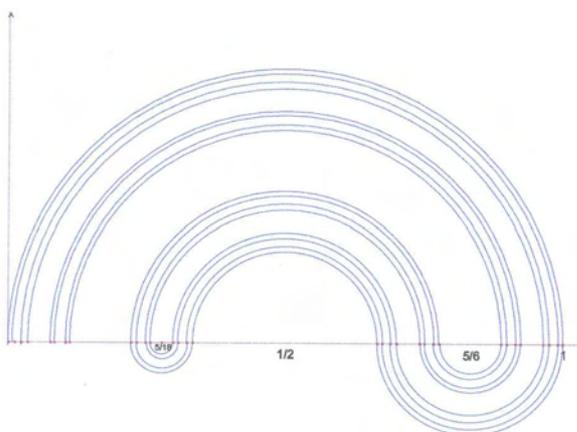
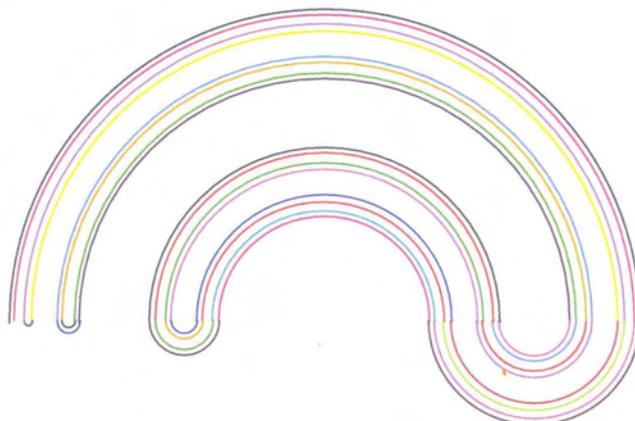


Figura 0.3.3.

Continuando con este proceso, en el límite, lo que obtendremos es un conjunto que lleva por nombre el *Continuo de Knaster* y que tratamos de representar en la figura siguiente.



Como mencioné al principio, el *Continuo de Knaster* posee muchas propiedades topológicas interesantes, entre ellas destaca la característica de ser un continuo indescomponible.

Para tener una idea intuitiva de porqué este continuo es indescomponible, supongamos por un instante que tratamos de romper dicho conjunto por la mitad, en la parte derecha y la parte izquierda. Entonces, lo que obtenemos, es que cada uno de los subconjuntos resultantes es claramente desconexo. De forma similar, si intentamos dividir éste conjunto en la mitad superior e inferior lo que obtendremos también son dos subconjuntos cada cual desconexo.

Pero bueno, ustedes dirán, porqué no tomar uno de los arcos que lo conforman, hagamos eso. Es decir, consideremos un subconjunto cerrado que contenga la curva que empieza en 0 (de hecho ésta es la única curva que es accesible a nuestros ojos...), lo que encontramos es que ésta curva pasa a través de los puntos $X = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \dots$, en el orden planteado, es decir, atraviesa todos los puntos frontera del conjunto de Cantor.

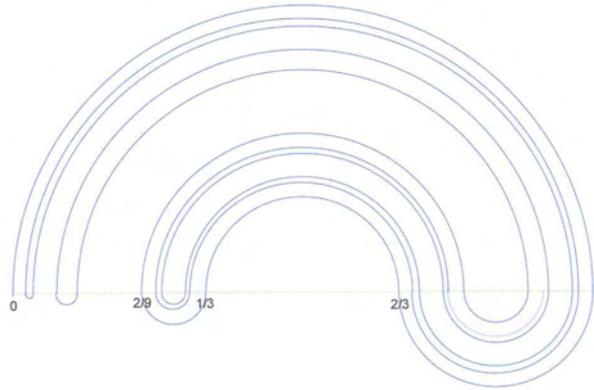


Figura 0.3.4.

De ahí que la cerradura de este conjunto sea el *Continuo de Knaster* completito, y por tanto no es un subconjunto propio. En conclusión lo que estamos demostrando intuitivamente es que no es posible tomar un subconjunto cerrado que contenga a alguna de las curvas que sea propio. De ahí la imposibilidad de descomponerlo.

Topológicamente este continuo posee muchas más propiedades. Existe una infinidad de curvas disjuntas en el conjunto, y cada una de ellas es densa. Esta característica es muy importante y más adelante la retomaremos.

La importancia de presentar la propiedad de indescomponibilidad en esta sección se debe principalmente al hecho de que en la siguiente sección demostraremos que el sistema dinámico de la Herradura posee un subconjunto especial, un *atractor*, con la propiedad de ser un continuo indescomponible. Un aspecto muy interesante es que ¡dicho atractor es homeomorfo al *Continuo de Knaster*!

0.4. El Atractor de la Herradura

Recordemos que M es el dominio de H y que de la relación $H(M) \subset M$ obtenemos la siguiente sucesión encajada de conjuntos:

$$M \supset H(M) \supset H^2(M) \supset H^3(M) \supset \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene :

1. $H^n(M)$ es compacto, conexo y distinto del vacío, y
2. $H^n(M) = \bigcap_{i=0}^n H^i(M)$.

Sea Ω el siguiente conjunto:

$$\Omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} H^i(M)$$

Resulta inmediato por lo estudiado en la subsección previa que Ω es un continuo, pero ¿por qué el atractor de la Herradura? Intuitivamente es fácil entender el concepto de *atractor*, es decir, alguna región del espacio a la cual la mayoría de las órbitas se aproximen. Para formalizar un poco más este hecho, daremos algunas definiciones previamente.

Definiremos la distancia entre un punto y un conjunto, muy conocida en topología.

Sean Y un subconjunto compacto de X y x un punto en X . La distancia de x a Y está dada por:

$$\text{dist}(x, Y) = \min\{d(x, y) : y \in Y\}.$$

Este mínimo si se alcanza ya que Y es compacto.

El diámetro de Y nos lo da el siguiente máximo:

$$\text{diam}(Y) = \max\{d(y, z) : y, z \in Y\}.$$

Con ello podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 0.4.1. *Para todo $(x, y) \in M$ se tiene que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(H^n(x, y), \Omega) = 0.$$

Demostración. Sean $(x, y) \in M$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto:

$$U = \bigcup_{(u, v) \in \Omega} B_\varepsilon(u, v),$$

donde $B_\varepsilon(u, v) = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \|(s, t) - (u, v)\| < \varepsilon\}$. El conjunto U es abierto y contiene a Ω por la proposición demostrada anteriormente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H^n(M) \subset U$ si $n \geq N$. De aquí se sigue que

$$\text{dist}(H^n(x, y), \Omega) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

□

La proposición anterior nos dice que las órbitas de todos los puntos de M tienden hacia Ω . Tal vez la órbita de $(x, y) \in M$ no sea una sucesión convergente, pero la distancia entre el punto $H^n(x, y)$ y el conjunto Ω sí converge a cero cuando n tiende a infinito. Es por cumplir esta condición que nos referiremos a Ω como el atractor de la Herradura.

Ahora daremos una definición formal de atractor.

Tenemos $H : M \rightarrow M$ y Sea $\Omega \subset M$.

La cuenca de atracción de Ω es el siguiente conjunto.

$$B(\Omega) = \{(x, y) \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(H^n(x, y), \Omega) = 0\}.$$

Decimos que Ω es el atractor de H en M si existe un abierto, V , tal que $\Omega \subset V$ y $V \subset B(\Omega)$. Algunos autores para definir atractor piden que exista un región compacta $N \subset M$ tal que $H(N) \subset \text{Int}(N)$ y que $\Omega = \bigcap_{i=0}^{\infty} H^i(N)$.

Observemos que el conjunto Ω definido anteriormente en la Herradura cumple estas condiciones.

De aquí en adelante nuestro objetivo será mostrar que Ω es indecomponible. Ello requiere de un mayor esfuerzo, así que empecemos por demostrar la siguiente proposición.

Proposición 0.4.2. $H(\Omega) = \Omega$

Demostración. Probemos primero que $H(\Omega) \subset \Omega$. Para ello observemos lo siguiente:

$$H(\Omega) = H(\bigcap_{n=0}^{\infty} H^n(M)) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} H^n(M) = \Omega.$$

Para probar la otra contención tomemos $(x, y) \in \Omega$. Como $(x, y) \in H(M)$, existe $(u, v) \in M$ tal que $H(u, v) = (x, y)$. Dado que H es inyectiva y que para todo $n \geq 0$,

$$(x, y) \in H^{n+1}(M) = H(H^n(M)),$$

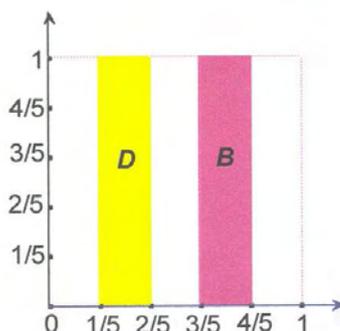
Se sigue que $(u, v) \in H^n(M)$ para toda $n \geq 0$. Esto es, $(u, v) \in \Omega$. Por lo tanto $(x, y) \in H(\Omega)$. \square

Para el desarrollo de la siguiente sección será preciso recordar lo visto en el primer capítulo cuando dimos una presentación geométrica de la transformación Herradura.

Recordaremos entonces que en las regiones B y D , H , se comporta como una transformación afín, de esta forma es fácil encontrar una regla de correspondencia para cada punto en estas regiones. Debo aclarar que ello es necesario, porque nos ayudará a demostrar que Ω es indescomponible.

Definiremos la función $H : M \rightarrow M$ para las regiones $B \cup D$. Lo haremos en 3 pasos, cada uno de ellos descrito por una función h_i . Al final H será el resultado de hacer la composición de todas ellas, $H = h_3 \circ h_2 \circ h_1$.

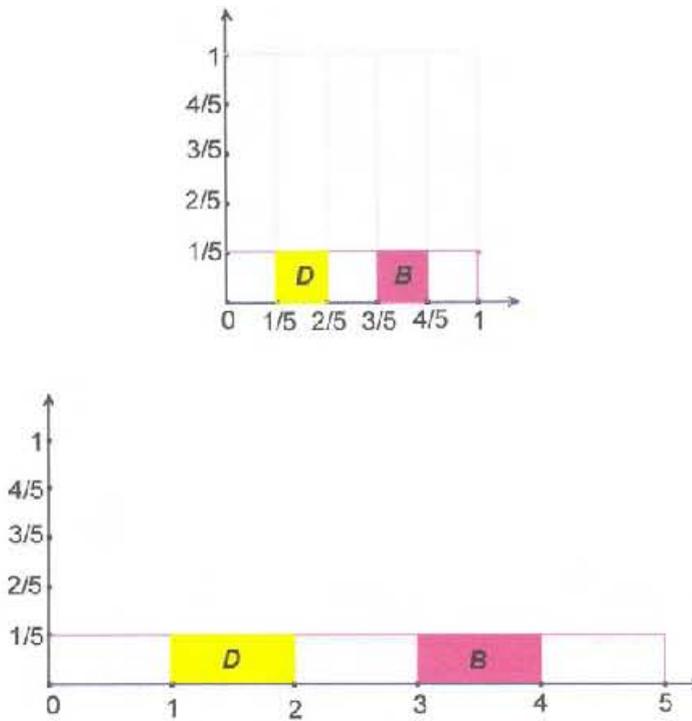
Iniciemos descomponiendo nuestro cuadrado S en las siguientes regiones homogéneas, como se muestra en la figura. (no tienen por qué ser exactamente esos valores)



Para fijar ideas pensemos en $\delta = \frac{1}{5}$. Recordemos que las bandas B y D sufren primeramente una contracción lineal en la dirección del eje de las ordenadas un factor δ . En este caso $\delta = \frac{1}{5}$

$$\text{Esto es, } h_1(x, y) = (x, \frac{y}{5}) \text{ si } (x, y) \in S$$

Luego aplicamos una transformación h_2 que consiste en expandir $h(A)$ y $h(B)$ en la dirección del eje de las abcisas un factor $\frac{1}{\delta} = 5$



Esto es, $h_2(x, y) = (5x, y)$ si $(x, y) \in S$

Ahora bien, dado que las regiones B y D quedan transformadas después de aplicar $h_2 \circ h_1$ en los rectángulos:

$$B \rightarrow [1, 2] \times [0, \frac{1}{5}] \text{ y}$$

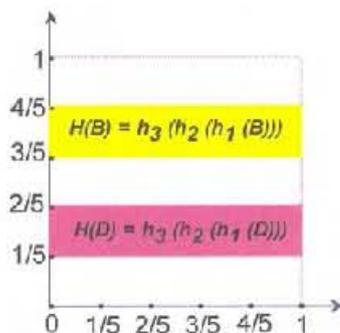
$$D \rightarrow [3, 4] \times [0, \frac{1}{5}]$$

Será sencillo determinar la función que envíe dichos rectángulos a su lugar final, promovido por H , como se aprecia en la figura.

De tal forma que los rectángulos dados por $h_2 \circ h_1$ de B y D respectivamente son y deseamos que sean enviados bajo h_3 a:

$$[1, 2] \times [0, \frac{1}{5}] \rightarrow [0, 1] \times [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \text{ y}$$

$$[3, 4] \times [0, \frac{1}{5}] \rightarrow [0, 1] \times [\frac{1}{5}, \frac{3}{5}]$$



Así:

$$h_3(x, y) = \begin{cases} (2 - x, \frac{4}{5} - y) & \text{si } (x, y) \in h_2(h_1(D)) \\ (x - 3, y + \frac{1}{5}) & \text{si } (x, y) \in h_2(h_1(B)) \end{cases}$$

Finalmente encontramos una regla de correspondencia $H : M \rightarrow M$ para las regiones B y D :

$$H = h_3 \circ h_2 \circ h_1$$

$$H(x, y) = \begin{cases} (2 - 5x, \frac{4}{5} - \frac{y}{5}) & \text{si } (x, y) \in D \\ (5x - 3, \frac{y}{5} + \frac{1}{5}) & \text{si } (x, y) \in B \end{cases}$$

Por lo que es inmediato calcular que los puntos fijos de H , bajo esta regla de correspondencia son : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$

En lo que sigue construiremos una función f^* , que satisfaga

$$f^* \circ T(x, y) = T \circ H(x, y)$$

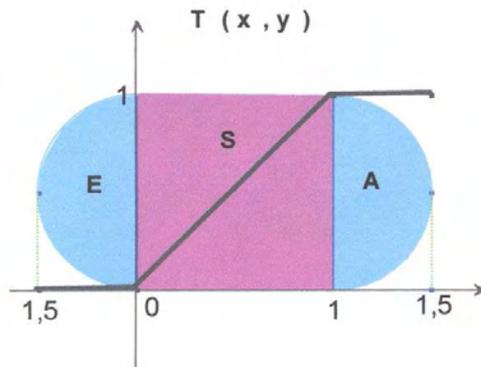
para una función T que definiremos en la siguiente sección.

0.4.1. Un diagrama que conmuta

Consideremos la siguiente función $T : M \rightarrow I$, definida por:

Definición 0.4.1.

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in E \\ x & \text{si } (x, y) \in I \times I \\ 1 & \text{si } (x, y) \in A \end{cases}$$



Es inmediato demostrar que T es suprayectiva y es continua en todo punto de M . Sin embargo esta función no es inyectiva. De hecho cada segmento de recta vertical contenido en $I \times I \subset M$ es transformado bajo P en un punto,

$$T(\{x\} \times I) = \{x\}.$$

Como expliqué al final de la sección previa, lo que haremos es encontrar una función continua $f^* : I \rightarrow I$ tal que para todo $(x, y) \in M$ se tenga que $f^* \circ T(x, y) = T \circ H(x, y)$. Esto es, f^* será una función que hará conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{H} & M \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ I & \xrightarrow{f^*} & I \end{array}$$

La regla de correspondencia de f^* la encontramos a partir de las siguientes observaciones:

1. Sea $(x, y) \in E$. Como $H(x, y) \in A$,

$$f^*(0) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 1.$$

2. Sea $(x, y) \in A$. Como $H(x, y) \in A$,

$$f^*(1) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 1.$$

3. Sea $(x, y) \in I \times I$ tal que $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$. Como $H(x, y) \in A$,

$$f^*(x) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 1.$$

4. Sea $(x, y) \in I \times I$ tal que $\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}$. Aquí $H(x, y) = (2 - 5x, \frac{4}{5} - \frac{y}{5})$ y, por tanto,

$$f^*(x) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 2 - 5x.$$

5. Sea $(x, y) \in I \times I$ tal que $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$, entonces $H(x, y) \in E$. Por tanto,

$$f^*(x) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 0.$$

6. Sea $(x, y) \in I \times I$ tal que $\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}$. Aquí $H(x, y) = (5x - 3, \frac{y}{5} - \frac{1}{5})$ y, por tanto,

$$f^*(x) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 5x - 3.$$

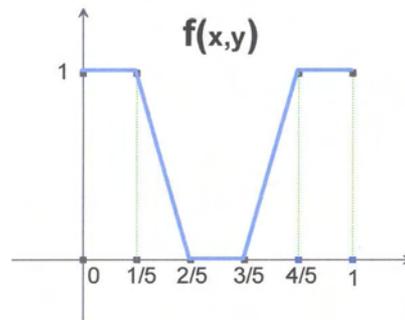
7. Por último, si $(x, y) \in I \times I$ es tal que $\frac{4}{5} \leq x \leq 1$, entonces $H(x, y) \in A$. Por tanto,

$$f^*(x) = f^*(T(x, y)) = T(H(x, y)) = 1.$$

En resumen, dado que $x \in I$ tenemos que f^* se define como:

Definición 0.4.2.

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{4}{5}, 1] \\ 2 - 5x & \text{si } x \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ 5x - 3 & \text{si } x \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \end{cases}$$



La función $f^*(x)$ es suprayectiva y continua en todo punto de I . Además, para todo $(x, y) \in M$, $f^* \circ T(x, y) = T \circ H(x, y)$.

Antes de continuar es preciso observar que la función f^* describe el “movimiento” de los segmentos de rectas verticales que se obtienen en cada iteración de H ello recordando que segmentos de rectas verticales se transforman en segmentos de rectas verticales variando su tamaño.

Proposición 0.4.3. $T(\Omega) = I$

Demostración. Sabemos que Ω es conexo y que $\{\bar{a}, (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\} \subset \Omega$. Como $T(A) = 1$ entonces $1 \in T(\Omega)$. Además como:

$$\Omega \in H(M) \subset M \setminus \{(x, y) : x > 0, y \in (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})\},$$

la intersección de Ω con E debe ser distinto del vacío (ya que Ω es conexo, de hecho probamos que es un continuo. De aquí que $0 \in T(\Omega)$. Y como $T(\Omega)$ es conexo, $T(\Omega) = I$.

□

Esta proposición nos permite concluir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{H} & \Omega \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ I & \xrightarrow{f^*} & I \end{array}$$

0.5. Límites inversos

En la sección anterior introdujimos la técnica de intersecciones anidadas y mostramos cómo utilizarla para construir nuevos continuos interesantes a partir de unos más sencillos. En esta sección veremos que es posible utilizar los *límites inversos* en el mismo sentido. También veremos que ellos pueden ser pensados como un caso particular de intersecciones anidadas.

Cabe enfatizar que estos espacios son un tema importante en Sistemas Dinámicos, particularmente en el estudio de atractores. Actualmente hay múltiples trabajos en donde con la ayuda de límites inversos es posible tener una clara y comprensible idea sobre la estructura de cierto tipo de atractores. (Ver el trabajo de R.F. Williams [R.F. Williams, One dimensional nonwandering sets, Topology 6 (1967), 473-487].

En este sentido, se ha demostrado que los *límites inversos* sirven para explicar la dinámica en algunos *atractores* de homomorfismos en el plano. Informalmente podemos decir que cuando el límite inverso es indescomponible, al atractor se le conoce como *atractor extraño*. Y más todavía, la dinámica de dichos homomorfismos está relacionada con la dinámica de la función de ligadura y con la descomponibilidad del límite inverso.

En un primer acercamiento a los límites inversos, la teoría y los resultados, tal vez parezcan complicados, sin embargo cuando llegamos a familiarizarnos con este tipo de herramientas obtenemos construcciones interesantes.

Definición 0.5.1. Una sucesión inversa es una sucesión de espacios X_i , junto con una sucesión de funciones continuas $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ (llamadas funciones de ligadura) y se denota, $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Algunas veces escrita como:

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{i-1}} X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \dots$$

El **límite inverso** de una sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, es el subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido como:

$$X_{\infty} = \varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i\}$$

Para lectores no familiarizados con estos espacios, presentamos los siguientes ejemplos que se introducen en orden de complejidad.

- *Ejemplo 1.* Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i = X$ y $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ está definida como $f_i(x) = x$. Es claro que:

$$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x, x, \dots) : x \in X\} \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i.$$

Es posible demostrar que $\{(x, x, \dots) : x \in X\}$ es homeomorfo al espacio X .

- *Ejemplo 2.* Como en el ejemplo anterior, sólo que ahora en lugar de tomar a la función identidad tomamos a la función $f_i(x) = c$ para cada $i \in \mathbb{N}$, es claro que el único elemento en el $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es (c, c, c, \dots) . Es decir,

$$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(c, c, \dots) : c \in X\}$$

- *Ejemplo 3.* Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i = \mathbb{N}$ y $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ está definida como $f_i(n) = n + 1$. Afirmamos que que:

$$\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \emptyset$$

Para ello supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1 x_2 \dots x_n \dots) \in \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Notemos que $f(x_2) = x_2 + 1 = x_1$ entonces $x_2 = x_1 - 1$, $f(x_3) = x_2 = x_2 - 1 = (x_1 - 1) - 1 = x_1 - 2$, etc. Sea $n_0 = x_1 + 2$. Observemos que $x_{n_0} = x_{x_1+2} = x_1 - (n_0 - 1) = x_1 - (x_1 + 2 - 1) = -1$, lo cual es una contradicción ya que $x_1 \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \emptyset$.

- *Ejemplo 4.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $X_n = [0, 1]$ y $f_n = t$, donde f es la tan conocida función tienda.

$$t(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

El Teorema 0.5.2 nos muestra que X_{∞} es un continuo; de hecho, se puede demostrar que X_{∞} es homeomorfo al *Continuo de Knaster*.

- *Ejemplo 5.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $X_n = \mathbb{S}^1$ y $f_n(z) = z^2$, tomando a z como número complejo de módulo 1.

Igualmente por el Teorema 0.5.2 tal sabemos que X_∞ es un continuo y puede demostrarse que es homeomorfo al *solenoides diádico*.

Una vez familiarizados con la definición, es posible realizar las siguientes observaciones.

Si para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\nu_i : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \rightarrow X_i$$

es la proyección natural sobre el i -ésimo factor, entonces denotamos por π_i a la restricción de ν_n al límite inverso X_∞ , es decir, $\pi_i = \nu_i|_{X_\infty}$ para cada número natural n .

Observación 0.5.1. $\pi_i = f_i \circ \pi_{i+1}$ y en general, si $m < i$ tenemos que

$$\pi_m = f_m \circ f_{m+1} \circ \dots \circ f_{i-1} \circ \pi_i.$$

Observación 0.5.2. Si cada función de ligadura es suprayectiva, entonces todas las proyecciones π_i también son suprayectivas.

Demostración. Sea $y_i \in X_i$ debemos demostrar que existe un $\hat{x} \in X_\infty$ tal que $\pi_i(\hat{x}) = y_i$; por hipótesis las f_i son suprayectivas, entonces existe un $x_{i+1} \in X_{i+1}$ tal que $f_i(x_{i+1}) = y_i$, asimismo existe un $x_{i+2} \in X_{i+2}$ tal que $f_{i+1}(x_{i+2}) = x_{i+1}$ y así sucesivamente. Además puesto que las funciones de ligadura son suprayectivas no puede ocurrir que para algún i exista un elemento en X_i que no va a dar a otro en X_{i-1} .

De esta forma, $f_{i-1}(y_i) = y_{i-1}$, asimismo $f_{i-2}(y_{i-1}) = y_{i-2} \dots f_2(y_3) = y_2$ y $f_1(y_2) = y_1$, para algún

$$y_{i-1} \in X_{i-1}, y_{i-2} \in X_{i-2}, \dots, y_2 \in X_2, y_1 \in X_1.$$

por lo que hemos construido un elemento en X_∞ ,

$$\hat{x} = (y_1, y_2, \dots, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots), \text{ tal que } \pi_i(\hat{x}) = y_i.$$

□

Lema 0.5.1. Una transformación $f : X \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es continua si y sólo si $\pi_i \circ f$ es continua para todo $i \in \mathbb{N}$.

Demostración. La implicación directa es fácil, puesto que bajo la topología producto, π_i es continua, y sabemos que la composición de funciones continuas es continua. Veamos qué ocurre si suponemos que $\pi_i \circ f$ es continua para cada $i \in \mathbb{N}$. Primero notemos que los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_\alpha)$ donde $i \in \mathbb{N}$ y U_i un abierto en X_i forman una subbase para la topología de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Notemos que es suficiente con demostrar que la imagen inversa de cada elemento de la subbase es un abierto en X para concluir que f es continua. Para ello veamos que $f^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i)$. Y por hipótesis $\pi_i \circ f$ es continua, de aquí que la imagen inversa de cada U_i es un abierto en X por tanto f es continua. \square

En la siguiente proposición se muestra cómo es posible pensar al límite inverso como intersecciones anidadas.

Proposición 0.5.1. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Para cada $n \geq 1$ definimos $Q_n(X_i, f_i)$ como:

$$Q_n(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \leq n\}.$$

entonces, (1) – (3) se cumplen:

(1) $Q_n(X_i, f_i) \supset Q_{n+1}(X_i, f_i)$ para todo $n \geq 1$;

(2) $Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para cada $n \geq 1$;

(3) $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$.

Demostración. Véase el Apéndice B. \square

Antes de enunciar el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. Es preciso enunciar el siguiente teorema.

Teorema 0.5.1. *El producto cartesiano finito o numerable de continuos, es un continuo.*

Es posible consultar una prueba de éste hecho en [??] de la bibliografía.

Teorema 0.5.2. *Sea $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$, un continuo y $f_n = f$, una función continua. Entonces el límite inverso, (X, f) , es un continuo.*

Demostración. Sea X un continuo y f una función de ligadura, por la Proposición 0.5.1, es posible representar a (X, f) como:

$$(X, f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X, f), \text{ donde definimos}$$

$$Q_n(X, f) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f(x_{i+1}) = x_i \text{ para todo } i \leq n\}.$$

Además se cumple que $Q_n(X, f)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para cada $n \geq 1$ entonces, por el Teorema 3.2.1 sabemos que $Q_n(X, f)$ es un continuo. De esta forma lo que obtenemos es que los Q_n forman una sucesión encajada de continuos. Por tanto (X, f) es un continuo. \square

De hecho, el resultado anterior será fundamental para demostrar que el *atractor* de la herradura es un continuo indescomponible.

0.5.1. Continuos Indescomponibles a partir de límites inversos

Como mencionamos anteriormente, los límite inversos son útiles entre otras cosas como herramienta para construir continuos con propiedades interesantes. En este apartado mostraremos cómo utilizar los límites inversos para construir continuos indescomponibles. La idea de ello se encuentra en la siguiente definición.

Definición 0.5.2. *Una sucesión inversa $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde cada X_i es un continuo es llamada **sucesión inversa indescomponible** si ocurre que para todo $i \geq 1$, se tiene que cada vez que A_{i+1} y B_{i+1} sean subcontinuos de X_{i+1} tales que $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$, entonces $f_i(A_{i+1}) = X_i$ o bien $f_i(B_{i+1}) = X_i$.*

Lema 0.5.2. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso, X_{∞} . Para cada $i = 1, 2, \dots$, sea $\pi_i : X_{\infty} \rightarrow X_i$ la transformación que denota la i -ésima proyección. Sea A un subconjunto compacto de X_{∞} . Entonces, $\{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y

$$(\spadesuit) \lim_{\leftarrow} \{\pi_i(A), f_i \mid \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}.$$

Demostración. Consultar Apéndice B o bien [??] de la bibliografía. \square

Teorema 0.5.3. Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa indescomponible con límite inverso X_{∞} , entonces X_{∞} es un continuo indescomponible.

Demostración. Dado que $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa indescomponible, cada X_i es un continuo, entonces, por el Teorema 0.5.2, X_{∞} es un continuo, por lo que sólo falta probar que X_{∞} es indescomponible. Supongamos que X_{∞} es descomponible. Sean A y B subcontinuos propios de X_{∞} tales que $A \cup B = X_{\infty}$. Demostraremos que $A = X_{\infty}$ o $B = X_{\infty}$. De la Definición 0.5.2 se deduce que las funciones de ligadura $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$ son suprayectivas en X_i luego, por la Observación 0.5.2 $\pi_i : X_{\infty} \rightarrow X_i$ es suprayectiva en X_i . Por lo que, para cada i , dado que $X_{\infty} = A \cup B$,

$$\pi_{i+1}(X_{\infty}) = \pi_{i+1}(A) \cup \pi_{i+1}(B) = X_{i+1}.$$

Dado que A y B son subcontinuos y π_i es una función continua obtenemos que $\pi_{i+1}(A)$ y $\pi_{i+1}(B)$ son subcontinuos de X_{i+1} cuya unión es X_{i+1} . Entonces, por la definición de sucesión inversa indescomponible $f_i(\pi_{i+1}(A)) = X_i$ o $f_i(\pi_{i+1}(B)) = X_i$ para cada i y dado que $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$ para cada i tenemos que $\pi_i(A) = X_i$ o bien $\pi_i(B) = X_i$ para cada i , entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\pi_i(A) = X_i$ para una infinidad de i 's en \mathbb{N} . A continuación demostraremos que $\pi_i(A) = X_i$ para toda i .

Sea, $q \in \mathbb{N}$, dado que $\pi_i(A) = X_i$ es válido para una infinidad de i 's. Existe un $k > q$ tal que $\pi_k(A) = X_k$ y puesto que las proyecciones son suprayectivas sucede que $\pi_q(A) = f_q \circ \dots \circ f_{k-1} \circ \pi_k(A)$. Veamos esto: $\pi_k(A) = X_k$, $f_{k-1}(X_k) = X_{k-1}$, $f_{k-2}(X_{k-1}) = X_{k-2}$, $f_{q+1}(X_{q+2}) = X_{q+1}$, $f_q(X_{q+1}) = X_q$ por tanto $\pi_q(A) = X_q$. Por lo que $\pi_i(A) = X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Se sigue

de (♠) que $A = X_\infty$ puesto que $A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_\infty$ pero $X_\infty \subset \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)$.

Lo que completa la prueba. □

El atractor de la herradura es un ejemplo de la sencilla aplicación de dicho teorema para obtener un bello continuo indescomponible.

0.5.2. El límite inverso de f^* es indescomponible

Una vez introducido la maravillosa herramienta de límites inversos podemos demostrar que el límite inverso de la sucesión inversa donde para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i = I$ y $f_i = f^*$.

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{4}{5}, 1] \\ 2 - 5x & \text{si } x \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ 5x - 3 & \text{si } x \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \end{cases}$$

y que denotamos como (I, f^*) es indescomponible.

Proposición 0.5.2. (I, f^*) es un continuo indescomponible.

Demostración. Por el Teorema 0.5.3, es suficiente con demostrar que la sucesión $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ donde $I_i = I$ y $f_i = f^*$ para toda $i \in \mathbb{N}$, es una sucesión inversa indescomponible.

Sean A y B dos subcontinuos de I , dado que I es un intervalo cerrado vimos anteriormente que los únicos subcontinuos de él son un *punto* o un *subintervalo cerrado*. Puesto que la prueba para A igual a un punto es trivial, supondremos que A es un intervalo cerrado $[a, b]$ y B es otro intervalo cerrado $[c, d]$ y además debe ocurrir que $I = A \cup B$, sin pérdida de generalidad, supongamos que el $0 \in A$. Ahora bien, si analizamos f^* notamos que existe un elemento mínimo que llamaremos r en I en este caso $r = \frac{2}{5}$ tal que $f[0, r]$ es igual a I y $f[r, 1] = I$, Por lo que surgen tres casos:

- *Caso 1.* $r > b$. Entonces es claro que $f^*([a, b]) = f^*([0, b]) = I$, puesto que $f^*[0, r] = I$

- *Caso 2.* $r = b$. Entonces $f^*([a, b]) = f^*([0, r]) = I$.
- *Caso 3.* $r < b$. Entonces debe ocurrir que $c \leq r$ dado que $I = A \cup B$, de esta forma $f^*([c, d]) = I$

Luego, por el Teorema 0.5.3 (I, f^*) es un continuo indescomponible. \square

Proposición 0.5.3. *Si $g : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces (X, g) es homeomorfo a X .*

Demostración. La proyección $\pi_1 : (X, g) \rightarrow X$ es una candidata a ser el homeomorfismo buscado. Esta función ya es continua, y es suprayectiva porque $g : X \rightarrow X$ lo es. Sólo nos falta ver que es inyectiva. Sean \hat{x} y \hat{y} dos puntos de (X, g) . Si $\hat{x} \neq \hat{y}$, existe $k \geq 0$ tal que $x_k \neq y_k$. Dado que g es un homeomorfismo, entonces para todo $n \leq k$ se tiene que:

$$x_n = g^{k-n}(x_k) \neq g^{k-n}(y_k) = y_n,$$

y por tanto,

$$\pi_1(\hat{x}) = x_1 \neq y_1 = \pi_1(\hat{y}).$$

\square

Finalizaremos esta sección con el siguiente lema. La idea es mostrar que la cualidad de ser indescomponible es invariante bajo homeomorfismos.

Lema 0.5.3. *Si X y Y son dos continuos homeomorfos y X es indescomponible, entonces Y es indescomponible.*

Demostración. Sean H y K dos subcontinuos de Y tales que $Y = H \cup K$. Sea $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Los conjuntos $h^{-1}(H)$ y $h^{-1}(K)$ son dos subcontinuos de X tales que $X = h^{-1}(H) \cup h^{-1}(K)$. Entonces $h^{-1}(H) = X$ o $h^{-1}(K) = X$, lo que nos lleva a que $H = Y$ o $K = Y$. \square

Con el homeomorfismo $H : \Omega \rightarrow \Omega$ definimos el límite inverso (Ω, H) . Por la proposición 0.5.3, Ω y el límite inverso (Ω, H) son espacios homeomorfos. Gracias al lema 0.5.3, para demostrar que Ω es un continuo indescomponible es suficiente con demostrar que (Ω, H) es indescomponible. Ésta es la tarea de la siguiente sección.

0.5.3. El atractor de la herradura de Smale es un continuo indescomponible

El siguiente diagrama comutativo nos ayudará a definir una función entre los límites inversos (Ω, H) e (I, f^*) .

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{H} & \Omega \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ I & \xrightarrow{f^*} & I \end{array}$$

Sean $\hat{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) \in (\Omega, H)$ y $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ la función dada por:

$$\hat{T}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) = (T(\bar{z}_1), T(\bar{z}_2), \dots).$$

Proposición 0.5.4. $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ es continua.

Demostración. Dado $k \geq 0$ sea φ_k la k -ésima proyección de $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega$ en Ω . Recordemos que π_k representa la correspondiente k -ésima proyección de $\prod_{i=0}^{\infty} I$ en I . Para demostrar que $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ es continua, es suficiente mostrar que para cada $k \geq 0$ la función $\pi_k \circ \hat{T}$ es continua. Sea $\hat{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) \in (\Omega, H)$. Entonces:

$$\pi_k \circ \hat{T}(\hat{z}) = \pi_k(T(\bar{z}_1), T(\bar{z}_2), \dots) = T(\bar{z}_k) = T \circ \varphi_k(\hat{z}).$$

Como T y φ_k son funciones continuas, entonces $\pi_k \circ \hat{T}$ es continua. \square

Proposición 0.5.5. $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ es biyectiva y por tanto es un homeomorfismo.

Demostración. La guía central de nuestra argumentación es mostrar que la función $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ es suprayectiva. En el primer paso mostramos que existe un único elemento de (Ω, H) tal que bajo \hat{T} va a dar a $(1, 1, 1, \dots) \in (I, f^*)$. En el segundo paso mostraremos que también para cada uno de los otros elementos de (I, f^*) , digamos \hat{x} , existe uno en (Ω, H) , digamos \hat{z} , tal que $\hat{T}(\hat{z}) = \hat{x}$. La forma en que realizamos este segundo paso nos permite

afirmar la unicidad del punto \widehat{z} encontrado. Por ello, la demostración de que \widehat{T} es inyectiva va de la mano de la demostración de que esta función es suprayectiva.

- **Paso 1.** Sea $\widehat{1} = (1, 1, 1, \dots) \in (I, f)$. Sea $\widehat{a} = (\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}, \dots) \in (\Omega, H)$. Recordemos que $H(\bar{a}) = \bar{a}$ y que $\bar{a} \in A$. Es inmediato que $\widehat{T}(\widehat{a}) = \widehat{0}$. Además si $\widehat{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots) \in (\Omega, H)$ es tal que $\widehat{T}(\widehat{b}) = \widehat{1}$, entonces para todo $k \geq 0$, tenemos que $\bar{b}_k \in A$, ya que $\widehat{T}(\bar{b}_k) = 0$. Consideremos un número $n \geq 0$ fijo y observemos que si $m > 0$, entonces:

$$\|\bar{b}_n - \bar{a}\| = \|H^n(\bar{b}_{n+m}) - H^n(\bar{a})\| \leq C^m \|\bar{b}_{n+m} - \bar{a}\| \leq C^m,$$

donde $0 < C < 1$ es la constante de contracción de H en A . Las últimas desigualdades se siguen del hecho de que \bar{b}_{n+m} y \bar{a} están en A y, en esa zona, la función H es una contracción. Además $\text{diám}(A) = 1$. Por tanto, para todo $n \geq 0$ se tiene que $\bar{b}_n = \bar{a}$.

- **Paso 2.** Sea $\widehat{x} = (x_1, x_2, \dots) \in (I, f^*)$, $\widehat{x} \neq \widehat{1}$. Existe $N \geq 0$ tal que $x_N \neq 1$. Se sigue que para todo $n \geq N + 1$, x_n no es cero ni uno. Como $x_n \in (0, 1)$, con $n \geq N + 1$, la imagen inversa de x_n bajo T es un segmento de recta vertical contenido en $(0, 1) \times [0, 1] \subset M$. Construiremos ahora un punto $\widehat{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) \in (\Omega, H)$ tal que $\widehat{T}(\widehat{z}) = \widehat{x}$. Nuestro procedimiento mostrará también, como anunciamos antes, que sólo hay un punto en (Ω, H) con esta propiedad.

De aquí en adelante consideraremos $n \geq N + 1$, n fijo. Sean $k \geq 0$ y S_{n+k} el segmento de recta $T^{-1}(x_{n+k})$. La $n+k$ -ésima coordenada de \widehat{z} debe ser un punto contenido en S_{n+k} .

Como $f^{*k} \circ T = T \circ H^k$, entonces $H^k(T^{-1}(x_{n+k})) \subset T^{-1}(x_n)$. De aquí que la n -ésima coordenada de \widehat{z} debe ser un punto no sólo contenido en S_n , sino también en $H^k(S_{n+k})$. Consideremos la siguiente sucesión encajada de continuos:

$$S_n \supset H(S_{n+1}) \supset H^2(S_{n+2}) \supset \dots \supset H^k(S_{n+k}) \supset \dots$$

Como la longitud de $H^k(S_{n+k})$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, la siguiente intersección es un sólo punto.

$$\{\bar{z}_n\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(S_{n+k}).$$

A partir de esto definimos $\hat{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$ de la siguiente manera: Para $n \geq N + 1$ definimos la *nésima* coordenada de \hat{z} , \bar{z}_n , con la intersección anterior. Para n tal que $0 \leq n < N + 1$, sea $\bar{z}_n = H^{N+1-n}(\bar{z}_{N+1})$. Para confirmar que este punto está efectivamente en (Ω, H) , observemos que si $n \geq N + 1$, entonces:

$$\begin{aligned} H(\{\bar{z}_{n+1}\}) &= H(\bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(S_{n+1+k})) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k \circ H(T^{-1}(x_{n+1+k})) \subset \\ &\bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(T^{-1}(x_{n+k})) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(S_{n+k}) = \{\bar{z}_n\}. \end{aligned}$$

Ahora es inmediato que \hat{z} , definido de esta manera, es el único punto en el límite inverso (Ω, H) con la propiedad $\hat{T}(\hat{z}) = \hat{z}$. □

Teorema 0.5.4. Ω es un continuo indescomponible.

Demostración. Como $\hat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ es un homeomorfismo y el continuo (I, f^*) es indescomponible, entonces (Ω, H) es indescomponible. Dado que $H : \Omega \rightarrow \Omega$ es un homeomorfismo, Ω y el límite inverso (Ω, H) , son homeomorfos. Por lo que el atractor de la Herradura de Smale es un continuo indescomponible. □

La Variedad Inestable es densa

Nos aproximamos al final de la tesis y hemos reservado este momento para presentar uno de los conceptos que más ha revolucionado el estudio de los sistemas dinámicos. Su introducción al mundo matemático se debe en gran medida al matemático Henri Poincaré. A continuación relatamos un poco de esta historia.

El sistema dinámico por excelencia es el *Cosmos*, y éste ha sido a lo largo del tiempo de gran interés para filósofos, religiosos, científicos y personas en general. A partir de Newton, el estudio de la dinámica celeste y en especial la predicción de los movimientos del sistema solar, constituyeron la ocupación central de físicos y matemáticos. De entre todos los problemas que obsesionaban a los científicos del siglo *XIX* merece especial atención el de determinar las posiciones y las velocidades de tres cuerpos que se mueven por influencia de la mutua atracción gravitatoria, más conocido como *problema de los tres cuerpos*. Henry Poincaré, en algún momento creyó haber encontrado la solución al problema sin embargo, él mismo se percató de que no era así. Las incógnitas más inquietantes eran si en determinado momento algún planeta dejaría su órbita o si el sistema planetario se colapsaría etc... Como producto de su búsqueda muchos caminos nuevos se abrieron para las matemáticas, entre ellos, el descubrimiento de los *puntos homoclínicos*, el cual es un concepto precursor de los modernos estudios del caos.

Según Poincaré en el modelo dinámico de los tres cuerpos existen puntos fijos cuyas *variedades estables e inestables* se cortan. Estos puntos de intersección son los puntos homoclínicos y las órbitas que pasan por un punto homoclínico se denominan órbitas homoclínicas. Cualquiera de estas órbitas tiende hacia el punto de equilibrio cuando el tiempo avanza y cuando retrocede. Esta definición aparentemente inofensiva tiene consecuencias sorprendentes: Poincaré descubrió que las órbitas próximas a un punto homoclínico tienen un comportamiento muy complicado; vuelven a cortarse una y otra

vez. El propio Poincaré escribía en 1889:

“Cuando uno intenta visualizar la figura formada por estas dos curvas y su infinidad de intersecciones [...], éstas forman una suerte de red, telaraña, tejido infinitamente entrelazado; donde cada una de estas curvas no debe cortarse nuevamente a sí misma,[...]. Uno queda asombrado con la complejidad de esta figura que ni tan siquiera me atrevo a dibujar¹”.

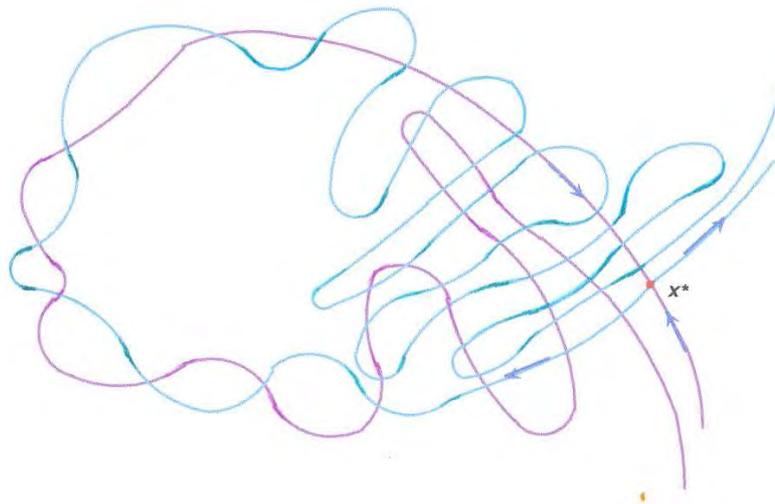


Figura 0.0.1.

0.1. Variedades Estables e Inestables de un punto

Si bien el tema de puntos homoclínicos es muy importante, en este capítulo nuestra meta será estudiar la variedad inestable del punto fijo \bar{b} . En par-

¹“Que l’on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini [...], ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d’une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne chercherai même pas à tracer. Rien n’est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème de trois corps, et en général de tous les problèmes de Dynamique [...]”.

ticular demostraremos que esta variedad inestable forma un conjunto denso en el conjunto atractor de la Herradura.

Definición 0.1.1. *Dos puntos p_1 y p_2 en M , se dice que son asintóticos hacia adelante, (respectivamente hacia atrás), si $H^n(p_1), H^n(p_2) \in M$ para todo $n \geq 0$ (respectivamente $n \leq 0$) y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(H^n(p_1) - H^n(p_2)) = 0$$

(respectivamente $n \rightarrow -\infty$).

Intuitivamente, dos puntos en M son asintóticos *hacia adelante* si sus órbitas se aproximan entre ellas cuando $n \rightarrow \infty$.

De esta manera, situándonos en el *Sistema Herradura*, podemos observar lo siguiente:

- Cualquier punto que en alguna iteración de H sale de S es asintótico *hacia adelante* al punto fijo atractor en $\bar{a} \in A$.
- Si \bar{x} y \bar{y} se encuentran en la misma línea vertical en Λ_+ , entonces, \bar{x} y \bar{y} son asintóticos *hacia adelante*.
- Si \bar{x} y \bar{y} se encuentran en la misma línea horizontal en Λ_- , entonces, \bar{x} y \bar{y} son asintóticos *hacia atrás*.

La noción de órbitas asintóticas *hacia adelante* y *hacia atrás* nos permite definir a los conjuntos estables e inestables de un punto.

Definición 0.1.2. *El Conjunto Estable de un punto fijo p se denota por $W^s(p)$ y está definido por:*

$$W^s(p) = \{z : d(H^n(z), p) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

El Conjunto Inestable de p se denota por $W^u(p)$ y está definida por:

$$W^u(p) = \{z : d(H^{-n}(z), p) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}.$$

Al Conjunto Estable (respectivamente, Inestable), también se le conoce como Variedad Estable (respectivamente, Variedad Inestable.)

En el *Sistema Herradura* podemos observar lo siguiente:

- Cualquier punto de S que abandona S bajo alguna iteración futura de H vive en el conjunto estable del punto fijo atractor en A .

Sin embargo, los conjuntos de puntos estables e inestables de Λ son más complicados. Por ejemplo, consideremos el punto fijo \bar{b} que vive en B y por tanto tiene asociada la secuencia de puros ceros: $(\dots 000 \cdot 000 \dots)$.

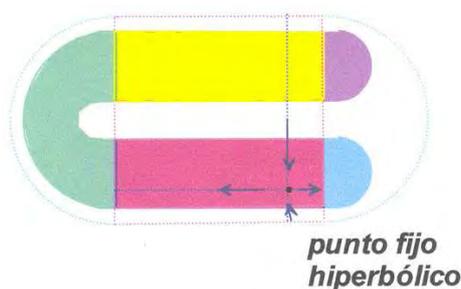


Figura 0.1.1.

**punto fijo
hiperbólico**

A continuación, lo que haremos es determinar quién es la variedad estable de \bar{b} en M .

Es claro, por lo explicado hasta ahora, que cualquier punto en el segmento vertical por \bar{b} , l_b , pertenece a $W^s(\bar{b})$. Sin embargo hay muchos otros puntos que pertenecen a ese conjunto. Por ejemplo; supongamos que el punto q eventualmente cae en la recta vertical l_b .

Es decir, existe un escalar n tal que $H^n(q) \in l_b$ de tal forma que:

$$d(H^n(q) - \bar{b}) < 1 \quad (\text{puesto que } S \text{ es el cuadrado unitario y } \Lambda \subset S).$$

De donde:

$$d(H^{n+k}(q) - \bar{b}) < \delta^k. \text{ para toda } k \in \mathbb{N},$$

luego entonces $q \in W^s(\bar{b})$.

Del análisis previo podemos concluir que la unión de rectas verticales obtenidas por $H^{-k}(l_s)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$ también es parte de $W^s(\bar{b})$. Si recordamos lo visto en el primer capítulo sabremos que para cada $k \in \mathbb{N}$ hay 2^k de tales rectas.

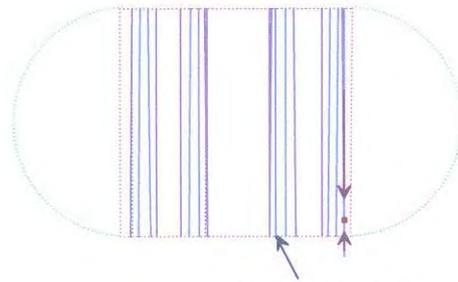


Figura 0.1.2.

En el siguiente diagrama se ve con claridad quiénes son esas rectas para $k = 1$:

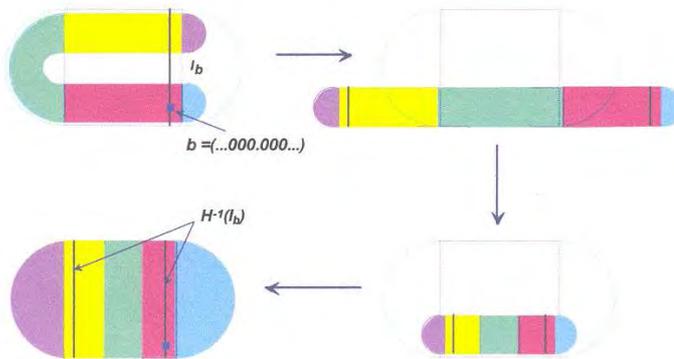
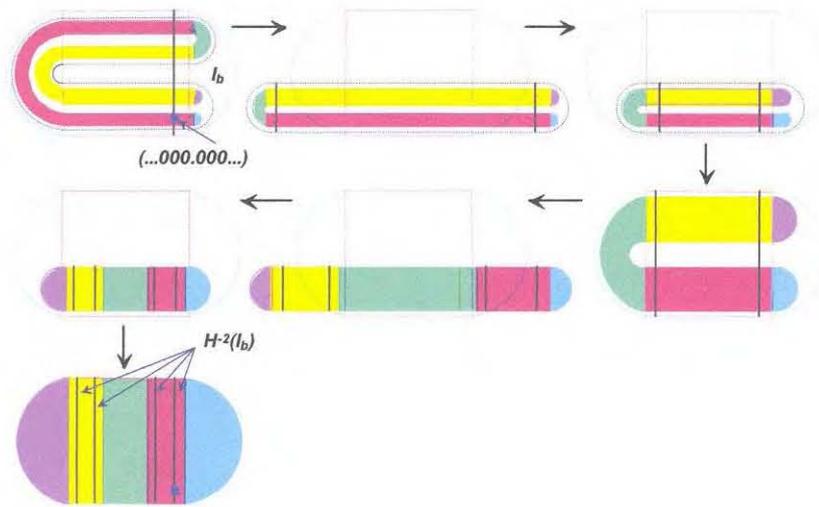


Figura 0.1.3.

Y para $k = 2$.

Figura 0.1.4.



Veamos ahora quién es la variedad inestable de \bar{b} .

En este caso, sabemos que la recta horizontal que pasa por b , y que denotamos por, l_b^* , forma parte de $W^u(\bar{b})$, así como también todas sus iteraciones positivas, esto es, $W^u(\bar{b}) = \{H^k(l_b^*) : k \in \mathbb{N}\}$ y nada más, puesto que las iteraciones de $H^{-1}(l_b^*)$ lo que hacen es contraer la recta. Una aproximación a esta representación se puede apreciar en la figura.

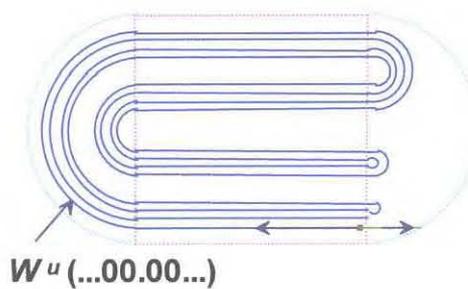
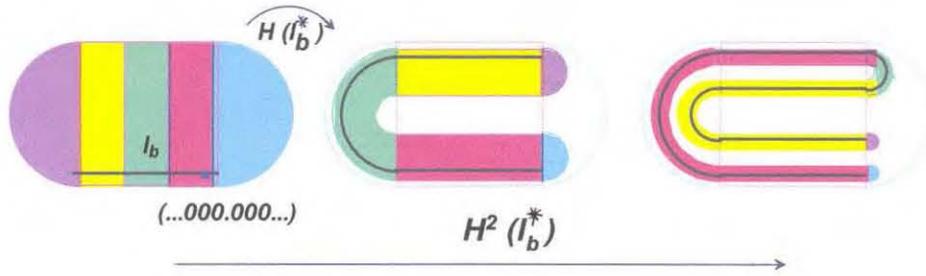


Figura 0.1.5.

Para el caso $k = 2$ es muy claro.

Figura 0.1.6.



Cabe mencionar que la variedad inestable de \bar{b} consta de una curva conexa que se “envuelve” infinitas veces sin cruzarse sobre ella misma dentro de $H(M)$. Ello se implica del hecho de que la recta horizontal por \bar{b} se mantiene fija.

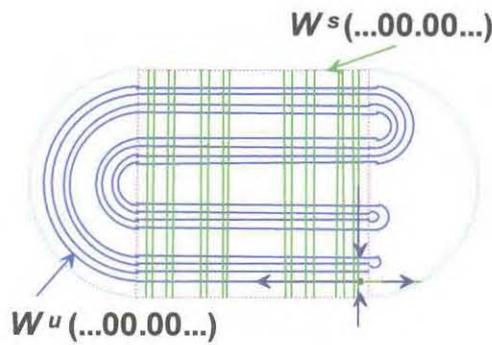


Figura 0.1.7.

Para finalizar esta sección demostraremos el siguiente teorema que nos será de suma utilidad para demostrar el resultado de la siguiente subsección.

Sea la transformación $f : A \rightarrow A$, topológicamente conjugada a la transformación $g : B \rightarrow B$, ambas funciones continuas y biyectivas en los espacios métricos correspondientes, es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde h es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & A \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 B & \xrightarrow{g} & B
 \end{array}$$

Teorema 0.1.1. *Sea b un elemento de B y $W^u(b)$ la variedad inestable de g en b . Entonces, $W^u(b)$ es densa en B si sólo si $W^u(h^{-1}(b))$ es densa en A .*

Demostración. Sea V un abierto en A , demostraremos que

$$V \cap W^u(h^{-1}(b)) \neq \emptyset.$$

Observemos que $h(V)$ es un abierto en B puesto que h es un homeomorfismo. Por hipótesis $W^u(b)$ es un conjunto denso en B , así que

$$h(V) \cap W^u(b) \neq \emptyset,$$

entonces es posible tomar un elemento, x , de esa intersección.

Afirmación. El punto $h^{-1}(x)$ pertenece a $V \cap W^u(h^{-1}(b))$

Es claro que $h^{-1}(x) \in V$, sólo nos resta demostrar que

$$h^{-1}(x) \in W^u(h^{-1}(b)).$$

Para ello demostremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(h^{-1}(x)), h^{-1}(b)) = 0$$

Por la observación ??

$$f^{-n}(h^{-1}(x)) = h^{-1}(g^{-n}(x)).$$

así,

$$d(f^{-n}(h^{-1}(x)), h^{-1}(b)) = d(h^{-1}(g^{-n}(x)), h^{-1}(b)).$$

luego entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(h^{-1}(x)), h^{-1}(b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(h^{-1}(g^{-n}(x)), h^{-1}(b)).$$

Por otro lado $x \in W^u(b)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(g^{-n}(x), b) = 0.$$

Como h es un homeomorfismo h^{-1} es un función continua y puesto que $g^{-n}(x) \rightarrow b$ cuando $n \rightarrow \infty$, $h^{-1}(g^{-n}(x)) \rightarrow h^{-1}(b)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(h^{-1}(x)), h^{-1}(b)) = 0,$$

por tanto $h^{-1}(x) \in W^u(h^{-1}(b))$. Así $W^u(h^{-1}(b))$ es densa en A .

□

Corolario 0.1.1. *Sea a un elemento de A y $W^u(a)$ la variedad inestable de f en a . Entonces, $W^u(a)$ es densa en A si sólo si $W^u(h(a))$ es densa en B .*

0.1.1. La $W^u(\bar{b})$ es densa en Ω

Hemos apartado esta sección para demostrar que la variedad inestable del punto fijo en B de H es densa en Ω .

Una prueba formal de este hecho es posible realizarla con la herramienta de límites inversos desarrollada en el capítulo anterior. Haremos una presentación de la prueba en **varios** pasos. Esperamos que el lector sea muy paciente.

Recordemos la función $T : \Omega \rightarrow I$ definida en ?? y $f^* : I \rightarrow I$ definida en ?? de tal forma que el siguiente diagrama conmuta :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{H} & \Omega \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ I & \xrightarrow{f^*} & I \end{array}$$

Además recordemos que dicha T induce la función $\widehat{T} : (\Omega, H) \rightarrow (I, f^*)$ introducida en ?? definida como sigue:

$$\widehat{T}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) = (T(\bar{z}_1), T(\bar{z}_2), \dots)$$

En el teorema ?? demostramos que se trata de un homeomorfismo.

De donde podemos observar lo siguiente:

Observación 0.1.1.

- $H : \Omega \rightarrow \Omega$ induce la siguiente función en el límite inverso:

$$\widehat{H} : (\Omega, H) \rightarrow (\Omega, H) \text{ definida así:}$$

$$\widehat{H}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots) = (H(\bar{z}_1), H(\bar{z}_2), H(\bar{z}_3), \dots) = (H(\bar{z}_1), \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$$

- Análogamente la función f^* induce la función en el límite inverso:

$\widehat{f}^* : (I, f^*) \rightarrow (I, f^*)$ definida así:

$$\widehat{f}^*(x_1, x_2, \dots) = (f^*(x_1), f^*(x_2), \dots) = (f^*(x_1), x_1, \dots)$$

Ahora demostraremos que tienen inversa. Encontraremos la inversa de \widehat{f}^* y diremos que es análogo para \widehat{H}^{-1} .

Observación 0.1.2. Sea $\widehat{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in (I, f^*)$.

Definimos $(\widehat{f}^*)^{-1}$ como:

$$(\widehat{f}^*)^{-1}(\widehat{x}) = (x_2, x_3, \dots)$$

Es decir, la inversa se obtiene suprimiendo la primer entrada.

Demostración. $(\widehat{f}^* \circ (\widehat{f}^*)^{-1})(\widehat{x}) = \widehat{f}^*(x_2, x_3, \dots)$

$$= (f^*(x_2), f^*(x_3), f^*(x_4), \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$((\widehat{f}^*)^{-1} \circ \widehat{f}^*)(\widehat{x}) = (\widehat{f}^*)^{-1}(f^*(x_1), f^*(x_2), f^*(x_3), \dots)$$

$$= (\widehat{f}^*)^{-1}(f^*(a_1), a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \square$$

Por último recordemos la función $\pi_1 : (\Omega, H) \rightarrow \Omega$ definida así:

$$\pi_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \dots) = \bar{z}_1$$

En el teorema ?? se demostró que π_1 es un homeomorfismo.

Proposición 0.1.1.

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, H) & \xrightarrow{\widehat{H}} & (\Omega, H) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \Omega & \xrightarrow{H} & \Omega \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Puesto que π_1 es un homeomorfismo sólo nos resta verificar que se cumple $\pi_1 \circ \widehat{H} = H \circ \pi_1$.

Sea $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) \in (\Omega, H)$

$$\pi_1 \circ \widehat{H}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) = \pi_1(H(\bar{z}_1), H(\bar{z}_2), \dots) = H(\bar{z}_1) \text{ y,}$$

$$H \circ \pi_1(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) = H(\bar{z}_1)$$

□

De esta forma es posible enunciar la siguiente proposición.

Proposición 0.1.2. $W^u(\bar{b})$ es denso en Ω si sólo si $W^u(\pi^{-1}(\bar{b}))$ es denso en (Ω, H)

$$\pi^{-1}(\bar{b}) = (\bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \dots) = \widehat{b}$$

Demostración. Por el teorema 1.1.1.

□

Con ello es claro que nuestro objetivo ahora será demostrar que $W^u(\widehat{b})$ es densa en (Ω, H) .

Proposición 0.1.3. *El siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, H) & \xrightarrow{\widehat{H}} & (\Omega, H) \\ \widehat{T} \downarrow & & \downarrow \widehat{T} \\ (I, f^*) & \xrightarrow{\widehat{f}^*} & (I, f^*) \end{array}$$

Demostración. Puesto que \widehat{T} es un homeomorfismo sólo nos resta verificar que se cumple $\widehat{T} \circ \widehat{H} = \widehat{f}^* \circ \widehat{T}$.

Sea $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) \in (\Omega, H)$

$$\widehat{T} \circ \widehat{H}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) = \widehat{T}(H(\bar{z}_1), H(\bar{z}_2), \dots)$$

$$= (T(H(\bar{z}_1)), T(H(\bar{z}_2)), \dots) = (f^*(T(\bar{z}_1)), f^*(T(\bar{z}_2)), \dots)$$

$$= \widehat{f}^*(T(\bar{z}_1), T(\bar{z}_2), \dots) = \widehat{f}^* \circ \widehat{T}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$$

□

Así podemos formular la siguiente proposición.

Proposición 0.1.4. $W^u(\widehat{b})$ es densa en (Ω, H) si sólo si $W^u(\widehat{T}(\widehat{b}))$ es densa en (I, f^*) .

$$\widehat{T}(\widehat{b}) = (T(\bar{b}), T(\bar{b}), \dots)$$

donde $\bar{b} = (x_0, y_0)$ es el punto fijo en B de H .

De esta forma

$$W^u(\widehat{T}(\widehat{b})) = W^u(T(\bar{b}), T(\bar{b}), \dots) = W^u(x_0, x_0, \dots) = W^u(\widehat{x}_0) \subset (I, f^*)$$

$$\text{donde } \widehat{x}_0 = (x_0, x_0, \dots)$$

Demostración. Por el teorema 1.1.1. □

De esta forma es claro que nuestro objetivo ahora será demostrar que $W^u(\widehat{x}_0)$ es densa en (I, f^*) y con ello habremos terminado.

Podemos darnos de lo siguiente: hasta ahora lo que hemos hecho para demostrar que $W^u(\bar{b})$ es densa en Ω es traducir nuestra proposición a distintos “lenguajes” con ayuda del teorema 1.1.1 de tal forma que como se observa en el siguiente diagrama hemos escalado “varios niveles” en nuestro camino de demostración.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{H} & \Omega \\ \pi_1^{-1} \downarrow & & \downarrow \pi_1^{-1} \\ (\Omega, H) & \xrightarrow{\widehat{H}} & (\Omega, H) \\ \widehat{T} \downarrow & & \downarrow \widehat{T} \\ (I, f^*) & \xrightarrow{\widehat{f}^*} & (I, f^*) \end{array}$$

En conclusión, para demostrar que $W^u(\bar{b})$ es densa en Ω debemos demostrar que $W^u(\widehat{T}(\pi^{-1}(\bar{b})))$ es densa en (I, f^*) .

Sin embargo para probar ello aún debemos recorrer un largo camino, la idea de lo que haremos a continuación es identificar un subconjunto, \overleftarrow{A} ,

de $W^u(\widehat{T}(\pi^{-1}(\bar{b}))) = W^u(\widehat{x}_0)$ y demostraremos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f}^*)^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(\widehat{x}_0)$

donde $\bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f}^*)^n(\overleftarrow{A})$ es densa en $W^u(\widehat{x}_0)$.

Comencemos con las siguientes observaciones:

Observación 0.1.3. *Existe un $\varepsilon > 0$ y $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = A_1 \subset (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ donde x_0 es la primera coordenada de \bar{b} , tal como establecimos en 1.1.4.*

Puesto que la función f^* expande en la región $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, entonces existe $A_2 \subset A_1$ tal que

$$f^*(A_2) = A_1 \text{ es decir } A_2 = (f^*)^{-1}(A_1) \cap (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Asimismo existe $A_3 \subset A_2$ tal que

$$f^*(A_3) = A_2 \text{ es decir } A_3 = (f^*)^{-1}(A_2) \cap (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Análogamente, para $j \in \mathbb{N}$ existe $A_{j+1} \subset A_j$ tal que

$$f^*(A_{j+1}) = A_j \text{ es decir } A_{j+1} = (f^*)^{-1}(A_j) \cap (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Por tanto,

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \dots$$

Es una sucesión de intervalos abiertos anidados contenidos en $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$.

Observación 0.1.4. *La función $f^*|_{A_{i+1}} : A_{i+1} \rightarrow A_i$ es claramente un homeomorfismo para todo $i \in \mathbb{N}$.*

De esta manera, es posible construir con dichos conjuntos y funciones una sucesión inversa $\{A_n, f^*|_{A_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$:

$$A_1 \xleftarrow{f^*|_{A_2}} A_2 \xleftarrow{f^*|_{A_3}} \dots \xleftarrow{f^*|_{A_i}} A_i \xleftarrow{f^*|_{A_{i+1}}} A_{i+1} \xleftarrow{f^*|_{A_{i+2}}} \dots$$

De donde definimos el siguiente límite inverso.

$$\overleftarrow{A} = \varprojlim \{A_n, f^*|_{A_{n+1}} : A_{n+1} \rightarrow A_n\} \subset (I, f^*)$$

Además como cada $f^*|_{A_{n+1}}$ es un homeomorfismo por la proposición ?? $\overleftarrow{A} \cong A_1$ es decir $A \cong (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Afirmación. $\overleftarrow{A} \subset W^u(\hat{x}_0)$

Sea $\hat{a} \in \overleftarrow{A}$, $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Por demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d((\hat{f}^*)^{-n}(\hat{a}), \hat{x}_0) = 0.$$

Para ello observemos lo siguiente:

Observación 0.1.5. Sea $\hat{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots) \in \overleftarrow{A}$.

Anteriormente definimos \hat{f}^* y $(\hat{f}^*)^{-1}$ como sigue:

$$\hat{f}^*(\hat{a}) = (f^*(a_1), f^*(a_2), f^*(a_3), \dots) = (f^*(a_1), a_1, a_2, \dots)$$

$$(\hat{f}^*)^{-1}(\hat{a}) = (a_2, a_3, \dots)$$

Antes de continuar con la demostración es preciso recordar la definición de distancia entre dos elementos del límite inverso.

Definición 0.1.3. Sean $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ y $\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ dos elementos del límite inverso (X_i, f_i) . La distancia entre \hat{x} y \hat{y} se define como:

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

De esta forma podemos comparar las siguientes distancias

1. $\hat{d}(\hat{a}, \hat{x}_0) = \hat{d}((a_1, a_2, a_3, \dots), (x_0, x_0, x_0, \dots))$.
2. $\hat{d}((\hat{f}^*)^{-1}(\hat{a}), \hat{x}_0) = \hat{d}((a_2, a_3, a_4, \dots), (x_0, x_0, x_0, \dots))$

Si recordamos cual es el comportamiento de la función f^* en $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ sabremos que la función expande por un factor igual a 5, es decir

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{4}{5}, 1] \\ 2 - 5x & \text{si } x \in [\frac{1}{5}, \frac{2}{5}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ 5x - 3 & \text{si } x \in [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}] \end{cases}$$

Observación 0.1.6. *Tenemos que $A_1 = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, además $f^*(A_2) = A_1$. Si $t \in A_1$, entonces $(f^*)^{-1}(t) \in A_2$ de donde:*

$$|t - x_0| = 5|(f^*)^{-1}(t) - x_0|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{d}((f^*)^{-1}(\widehat{a}), \widehat{x}_0) &= \widehat{d}((a_2, a_3, a_4, \dots), (x_0, x_0, x_0, \dots)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n+1} - x_0|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f^*)^{-1}(a_n) - x_0|}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{5}|a_{n+1} - x_0|}{2^n} \\ &= \frac{1}{5} \widehat{d}((a_1, a_2, a_3, \dots), (x_0, x_0, x_0, \dots)) = \frac{1}{5} \widehat{d}(\widehat{a}, \widehat{x}_0). \end{aligned}$$

Observación 0.1.7. *Puesto que $(f^*)^{-1}(\widehat{a})$ “recorta” la primer entrada, a_1 , del elemento \widehat{a} en el límite inverso \overleftarrow{A} y $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \dots$, entonces es claro que $(f^*)^{-1} : \overleftarrow{A} \rightarrow \overleftarrow{A}$.*

Corolario 0.1.2. *Si $\widehat{a} \in \overleftarrow{A}$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\widehat{d}((f^*)^{-1}(\widehat{a}), \widehat{x}_0) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \widehat{d}(\widehat{a}, \widehat{x}_0)$$

de esta forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}((f^*)^{-1}(\widehat{a}), \widehat{x}_0) = 0$$

entonces $\widehat{a} \in W^u(\widehat{x}_0)$.

Por tanto $\overleftarrow{A} \subset W^u(\widehat{x}_0)$.

Mostraremos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} (f^*)^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(\widehat{x}_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 0.1.5. *Si $\widehat{t} \in W^u(x_0)$, entonces $\widehat{f^*}(\widehat{t}) \in W^u(x_0)$*

Demostración.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}(((f^*)^{-1})^n(\widehat{f^*}(\widehat{t})), \widehat{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{d}((f^*)^{-n+1}(\widehat{t}), \widehat{x}_0) = 0$$

□

Corolario 0.1.3. *Como $\overleftarrow{A} \subset W^u(x_0)$, entonces $\widehat{f^*}(\overleftarrow{A}) \subset W^u(x_0)$. Y aún más, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$(\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(x_0), \text{ entonces } \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(x_0)$$

Para continuar con el siguiente paso hagamos la siguiente observación:

Observación 0.1.8. *Puesto que*

$$\overleftarrow{A} = \lim_{\leftarrow} \{A_n, f^*|_{A_{n+1}} : A_{n+1} \rightarrow A_n\} \subset (I, f^*)$$

Con ayuda del diagrama:

$$A_1 \xleftarrow{f^*|_{A_2}} A_2 \xleftarrow{f^*|_{A_3}} \dots \xleftarrow{f^*|_{A_i}} A_i \xleftarrow{f^*|_{A_{i+1}}} A_{i+1} \xleftarrow{f^*|_{A_{i+2}}} \dots$$

resulta claro que

$$(\widehat{f})^*(\overleftarrow{A}) = ((f^*)(A_1), (f^*)(A_2), (f^*)(A_3), \dots) \text{ es decir,}$$

la coordenada i -ésima de un punto en $\widehat{f^}(\overleftarrow{A})$ está en $f^*(A_i)$.*

Análogamente

$$((\widehat{f})^*)^n(\overleftarrow{A}) = ((f^*)^n(A_1), (f^*)^n(A_2), (f^*)^n(A_3), \dots) \text{ es decir,}$$

la coordenada i -ésima de $(\widehat{f^})^n(\overleftarrow{A})$ es $(f^*)^n(A_i)$.*

Otra observación relevante:

Observación 0.1.9. *Para todo $M \in \mathbb{N}$*

$$\pi_M((\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A})) = (f^*)^n(A_M) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Lema 0.1.1. *Sea $M \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\pi_M((\widehat{f^*})^N(\overleftarrow{A})) = I.$$

$$\text{Más aún, si } n \geq N, \pi_N((\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A})) = I.$$

Demostración. Sea $M \in \mathbb{N}$.

$$\text{Entonces } \pi_M((\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A})) = \pi_M((f^*)(A_1), (f^*)(A_2), (f^*)(A_3), \dots) = (f^*)(A_M).$$

Por otra parte conocemos lo siguiente:

- $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$
- $f^*(A_2) = A_1$, $f^*(A_3) = A_2$ y así en general $f^*(A_{i+1}) = A_i$.

De donde podemos observar lo siguiente:

- $|f^*(A_2)| = |A_1|$
- $|f^*(A_3)| = |A_2| = |(f^*)^{-1}(A_1)| = \frac{1}{5}|A_1|$
- ⋮
- $|f^*(A_M)| = |A_{M-1}| = |(f^*)^{-1}(A_{M-2})| = \frac{1}{5}|A_{M-2}| = \frac{1}{5^{M-1}}|A_1|$

Ahora bien puesto que la función en $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ expande por un factor de 5. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |f^*(A_i)| &= 5|A_i| \\ |(f^*)^2(A_i)| &= 5^2|A_i| \\ |(f^*)^3(A_i)| &= 5^3|A_i| \end{aligned}$$

⋮

$$|(f^*)^N(A_i)| = 5^N|A_i|$$

De tal forma que

$$\begin{aligned} |(f^*)(A_M)| &= \frac{1}{5^{M-1}}|A_1| \\ |(f^*)^2(A_M)| &= 5\frac{1}{5^{M-1}}|A_1| \\ |(f^*)^3(A_M)| &= 5^2\frac{1}{5^{M-1}}|A_1| \end{aligned}$$

⋮

$$|(f^*)^{i+1}(A_M)| = 5^i\frac{1}{5^{M-1}}|A_1|$$

Por lo que es claro que si elijo $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M - 1 - (\frac{\ln|A_1|}{\ln 5})$, entonces

$$|(f^*)^N(A_M)| = 5^{N-1} \frac{1}{5^{M-1}} |A_1| \geq 1$$

Y si ello ocurre, entonces para toda $n > N$,

$$|(f^*)^n(A_M)| = 5^{n-1} \frac{1}{5^{M-1}} |A_1| \geq 1$$

Con lo que se demuestra el lema. \square

En lo que sigue demostraremos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(\widehat{x}_0)$ es densa en (I, f^*) bajo la función $\widehat{f^*}$.

Proposición 0.1.6. $\bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(\widehat{x}_0)$ es densa en (I, f^*) .

Demostración. Sea $\widehat{t} = (t_1, t_2, \dots) \in (I, f^*)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por demostrar que existe $\widehat{s} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f^*})^n(\overleftarrow{A})$, tal que $\widehat{d}(\widehat{t}, \widehat{s}) < \varepsilon$.

Sea $M \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

De acuerdo al Lema 1.1.1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\pi_M((\widehat{f^*})^{n_0}(\overleftarrow{A})) = (f^*)^{n_0}(A_M) = I.$$

Entonces existe $\widehat{s} \in (\widehat{f^*})^{n_0}(\overleftarrow{A})$ tal que

$$\pi_M(\widehat{s}) = t_M \text{ donde } \widehat{t} = (t_1, t_2, \dots, t_M, \dots)$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{s} &= (s_1, s_2, \dots, t_M, \dots) \text{ elemento del límite inverso } (I, f^*). \\ \widehat{t} &= (t_1, t_2, \dots, t_M, \dots) \text{ elemento del límite inverso } (I, f^*). \end{aligned}$$

De esta forma

- $s_{M-1} = f^*(t_M) = t_{M-1}$
- $s_{M-2} = (f^*)(s_{M-1}) = (f^*)(t_{M-1}) = t_{M-2}$

⋮

$$\blacksquare s_1 = (f^*)(s_2) = (f^*)(t_2) = t_1$$

$$\text{Por tanto } \widehat{d}(\widehat{t}, \widehat{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n} = \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n} \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

$$\text{Por tanto } \widehat{s} \in (\widehat{f}^*)^{n_0}(\overleftarrow{A}) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f}^*)^n(\overleftarrow{A}) \text{ y } \widehat{d}(\widehat{t}, \widehat{s}) < \varepsilon.$$

$$\text{Luego entonces } \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f}^*)^n(\overleftarrow{A}) \text{ es densa en } (I, f^*).$$

$$\text{Además, } \bigcup_{n=0}^{\infty} (\widehat{f}^*)^n(\overleftarrow{A}) \subset W^u(\widehat{x}_0).$$

Por tanto $W^u(\widehat{x}_0)$ es densa en (I, f^*) .

Así “escalando niveles” podemos concluir que $W^u(\bar{b})$ es densa en Ω .

□

FIN.

Apéndice A

Teorema de la transformación de Contracción

Teorema. Sea $f : X \rightarrow X$ una transformación de contracción en un espacio métrico completo (X, d) , entonces f posee exactamente un punto fijo $x_0 \in X$ y más aún, para cualquier punto $x \in X$ la sucesión $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ converge a x_0 . Esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Primero demostraremos las siguientes afirmaciones.

Afirmación 1. Sea $0 \leq s < 1$ la constante contracción de f . Para toda pareja de puntos $x, y \in X$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq s^n d(x, y)$$

La prueba se hará por inducción sobre n .

Sean $x, y \in X$. Entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y). \text{ Esto nos da el caso } n = 1.$$

Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $d(f^k(x), f^k(y)) \leq s^k d(x, y)$

Entonces, aplicando f a la pareja de puntos $f^k(x), f^k(y)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(f^{k+1}(x), f^{k+1}(y)) &= d(f(f^k(x)), f(f^k(y))) \leq s d(f^k(x), f^k(y)) \\ &\leq s s^k d(x, y) \leq s^{k+1} d(x, y) \end{aligned}$$

2APÉNDICE A. TEOREMA DE LA TRANSFORMACIÓN DE CONTRACCIÓN

Afirmación 2. Ahora demostraremos que para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq s^n \cdot d(x, f(x))$$

Para probarlo sólo será necesario sustituir en la *Afirmación 1.* $y = f(x)$ de tal forma que lo que obtenemos es:

$$d(f^n(x), f^n(y)) = d(f^n(x), f^n(f(x))) \leq s^n d(x, f(x))$$

y esto se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

Auxiliándonos del resultado anterior obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(f^n(x), x) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \dots + d(f(x), x) \\ &\leq s^{n-1} \cdot d(x, f(x)) + s^{n-2} \cdot d(x, f(x)) + \dots + d(x, f(x)) \end{aligned}$$

Así,

$$d(x, f(x))(s^{n-1} + s^{n-2} + \dots + 1) = \frac{1-s^n}{1-s} d(x, f(x)).$$

Puesto que $0 \leq s < 1$ ocurre que; $0 \leq s^n < 1$ entonces,

$$d(f^n(x), x) \leq \frac{1}{1-s} \cdot d(x, f(x)).$$

Ahora demostraremos que $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ es una sucesión de Cauchy. Sean $n, m, n_0 \in \mathbb{N}$, n y $m \geq n_0$ y supongamos $n > m$. Entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &= d(f^m(f^{n-m}(x)), f^m(x)) \\ &\leq s^m d(f^{n-m}(x), x) \\ &\leq s^m \frac{1}{1-s} d(x, f(x)) \\ &\leq s^{n_0} \frac{1}{1-s} s^{n_0} d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Dado que s^{n_0} puede ser tan chico como queramos eligiendo n_0 suficientemente grande, la sucesión $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ es de Cauchy. Y dado que el espacio es completo, tenemos que existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$$

Supongamos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0,$$

entonces,

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = f(x_0).$$

Dado que f es continua,

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_0.$$

Por tanto $f(x_0) = x_0$. Es inmediato que x_0 es el único punto fijo en X .

□

Apéndice B

Resultados de Límites Inversos

Proposición. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa. Para cada $n = 1, 2, \dots$, definimos $Q_n(X_i, f_i)$ como:

$$Q_n(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \leq n\}.$$

entonces, (1) – (3) se cumplen:

(1) $Q_n(X_i, f_i) \supset Q_{n+1}(X_i, f_i)$ para todo $n = 1, 2, \dots$;

(2) $Q_n(X_i, f_i)$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para cada $n = 1, 2, \dots$;

(3) $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i)$.

Demostración. (1); Sean $Q_n(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para}$

toda $i \leq n\}$. y $Q_{n+1}(X_i, f_i) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i \leq n + 1\}$. Tomamos un elemento $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_{n+1}(X_i, f_i)$ entonces $f_i(x_{i+1}) = x_i$ para toda $i \leq n + 1$. En particular $f_i(x_{i+1}) = x_i$ para toda $i \leq n$. Por tanto $(y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i)$.

Para demostrar (2); Definamos una función,

$$h : Q_n(X_i, f_i) \rightarrow \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i, \text{ como } h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty} \text{ para cada } (x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i).$$

Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty}, (y_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i)$. Veamos que se cumple:

(a) *h es inyectiva.*

Supongamos:

$$h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = h((y_i)_{i=1}^{\infty})$$

entonces $(x_i)_{i=n+1}^{\infty} = (y_i)_{i=n+1}^{\infty}$ por tanto, $x_i = y_i$ para todo $i \geq n + 1$.

Demostremos ahora que coinciden también en los primeros n términos. Sabemos que $x_n = f_n(x_{n+1})$ y $y_n = f_n(y_{n+1})$, pero $x_{n+1} = y_{n+1}$ por tanto, $x_n = y_n$. Análogamente $x_{n-1} = f_{n-1}(x_n)$ y $y_{n-1} = f_{n-1}(y_n)$, pero $x_n = y_n$ entonces, $x_{n-1} = y_{n-1}$ y así sucesivamente hasta concluir que $x_1 = y_1$. Por tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (y_i)_{i=1}^{\infty}$.

(b) *h es suprayectiva.* Sea $(y_i)_{i=n+1}^{\infty} \in \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$. Debemos encontrar un

$$(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i) \text{ tal que } h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (y_i)_{i=n+1}^{\infty}.$$

Para ello, sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i)$ tal que $x_i = y_i$ para todo $i \geq n + 1$ y $x_n = f_n(y_{n+1})$, $x_{n-1} = f_{n-1}(y_n) \dots x_1 = f_1(y_2)$. De tal forma que $h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty} = (y_i)_{i=n+1}^{\infty}$.

(c) *h es continua.* $h : Q_n(X_i, f_i) \rightarrow \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$. Si demostramos que $\pi_n \circ h$ es

continua para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el lema 4.5.1, h es continua. Para ello, sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ y $k \geq n + 1$ entonces, $\pi_k(h((x_i)_{i=1}^{\infty})) = \pi_k((x_i)_{i=n+1}^{\infty}) = x_k \in X_k$. Es decir, lo que se obtiene es la función proyección la cual sabemos que es una función continua puesto que estamos trabajando con la topología producto.

(d) *h⁻¹ es continua.* Se deriva de la compacidad de Q_n y las anteriores.

Para completar la prueba, solo resta decir que el inciso (3) se infiere directamente de las definiciones de límite inverso y de $Q_n(X_i, f_i)$. \square

Lema. Sea $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso, X_{∞} . Para cada $i \geq 1$, denotamos por $\pi_i : X_{\infty} \rightarrow X_i$ la i -ésima proyección. Sea A un subconjunto compacto de X_{∞} . Entonces, $\{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y

$$(\spadesuit) \lim_{\leftarrow} \{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}.$$

Demostración. Observamos que $\pi_i(A) \subset X_i$ para toda i . Denotemos $\pi_i(A) = A_i \subset X_i$. Podemos escribir $\{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$ como sigue:

$$A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_{i-1}} A_i \xleftarrow{f_i} A_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \dots$$

El primer paso es demostrar que $f_i \circ \pi_{i+1}(A) = \pi_i(A)$ para toda $i \geq 1$; para ello, sea $\hat{x} \in A$, entonces se cumple: $\pi_{i+1}(\hat{x}) = x_{i+1}$ y $f_i(x_{i+1}) = x_i$ por tanto, $f_i(\pi_{i+1}(\hat{x})) = f_i(x_{i+1}) = x_i = \pi_i(\hat{x})$ y esto para cualquier \hat{x} en A . De ésta forma es inmediato que para todo $a_i \in A_i$ existe un $a_{i+1} \in A_{i+1}$ tal que $f_i(a_{i+1}) = a_i$. De donde se sigue inmediatamente que $\{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas. Nos falta demostrar (\spadesuit) para ello, observemos lo siguiente.

- *Observación 1.* $\lim_{\leftarrow} \{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty} = \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$. La con-

tención directa es obvia. Para la otra contención, sea $\hat{x} \in \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap$

X_{∞} entonces $\hat{x} \in \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right]$ y $f_i(x_{i+1}) = x_i$. Así $f_i |_{\pi_{i+1}(A)}(x_{i+1}) = x_i$.

Por tanto, $\hat{x} \in \lim_{\leftarrow} \{\pi_i(A), f_i | \pi_{i+1}(A)\}_{i=1}^{\infty}$.

- *Observación 2.* $A \subset \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty}$; sea $\hat{x} \in A$ entonces, $x_i \in \pi_i(A)$

para todo i , entonces, $\hat{x} \in \prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A)$ y dado que $A \subset X_{\infty}$ se implica directamente que $\hat{x} \in X_{\infty}$.

Para demostrar (\spadesuit) es suficiente con demostrar por *Observación 1* y 2 la siguiente contención:

$$\left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty} \subset A.$$

$$\text{Sea } y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty} \subset (A \cap X_{\infty}).$$

Definamos para cada $j = 1, 2, \dots$, $K_j = A \cap \pi_j^{-1}(y_j)$. Antes de proseguir, probemos que $K_j \neq \emptyset$; se tiene que $y_j \in \pi_j(A)$ para todo $j \geq 1$ y como $\pi_j : A \rightarrow A_j \subset X_j$ es sobre puesto que las funciones de ligadura son sobres, entonces, existe $\hat{x} \in \pi_j^{-1}(y_j)$ por tanto, $\hat{x} \in A \cap \pi_j^{-1}(y_j)$ así, el conjunto K_j , es no vacío.

Afirmación 1. K_j es compacto para todo $j \geq 1$.

Finalmente, observamos que $K_j \supset K_{j+1}$ si y solo si $\pi_{j+1}^{-1}(y_{j+1}) \subset \pi_j^{-1}(y_j)$ para cada $j \geq 1$; una prueba de ello es la siguiente, sea $\hat{x} \in \pi_{j+1}^{-1}(y_{j+1})$, entonces, $\pi_{j+1}(\hat{x}) = y_{j+1}$ entonces, $f_j(\pi_{j+1}(\hat{x})) = f_j(y_{j+1})$ y dado que $\hat{x} \in X_{\infty}$ y $\hat{y} \in X_{\infty}$, nos da que $f_j(y_{j+1}) = y_j$. Sin embargo, habíamos probado que $f_j \circ \pi_{j+1}(A) = \pi_j$ entonces, $\pi_j(\hat{x}) = y_j$, por tanto, $\hat{x} \in \pi_j^{-1}(y_j)$ por lo que $\pi_{j+1}^{-1}(y_{j+1}) \subset \pi_j^{-1}(y_j)$ y por tanto $K_j \supset K_{j+1}$ para todo $j \geq 1$, entonces por la proposición tate $\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset$. Ahora, sea $p \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$, claramente $p \in A$ y

la j -ésima coordenada de p debe ser y_j para cada $j = 1, 2, \dots$ de donde se concluye que $p = y$ por tanto $y \in A$ por tanto $\left[\prod_{i=1}^{\infty} \pi_i(A) \right] \cap X_{\infty} \subset A$. Esto completa la prueba. \square

Apéndice C

Puntos homoclínicos en Σ_2

Los conjuntos estables e inestables son fáciles de describir en Σ_2 con la función corrimiento.

$$\text{Sea } s^* = (\dots s_{-2}^* s_{-1}^* \cdot s_0^* s_1^* s_2^* \dots) \in \Sigma_2.$$

Claramente si \widehat{t} es una sucesión cuyas entradas coinciden con las de s^* a la derecha de alguna entrada entonces, $\widehat{t} \in W^s(s^*)$. La implicación contraria también es cierta y lo demostraremos a continuación.

Teorema C.0.1. *Sea $s^* \in \Sigma_2$ entonces, $W^s(s^*)$ consiste precisamente de aquellas sucesiones cuyas entradas coinciden con las de s^* a la derecha de alguna entrada de s^* .*

Demostración. Sea $\widehat{t} \in W^s(s^*)$ ello significa que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(\widehat{t}) - \sigma^n(s^*)) = 0$$

Por tanto, podemos fijar algún

$$m \in \mathbb{N} \text{ (cualquiera)} \text{ y } N \text{ tal que } d(\sigma^n(s^*), \sigma^n(\widehat{t})) < \frac{1}{2^m} \text{ si } n \geq N$$

Ello quiere decir por el Teorema 3.2.1 que $\sigma^N(s^*)$ y $\sigma^N(\widehat{t})$ coinciden en las primeras m coordenadas a la derecha y a la izquierda del punto, esto es:

$$\sigma^N(s^*) = (\dots u_{-(m+1)} s_{-m} s_{-(m-1)} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{m-1} u_m u_{m+1} \dots)$$

$$\sigma^N(\widehat{t}) = (\dots t_{-(m+1)} s_{-m} s_{-(m-1)} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_{m-1} t_m t_{m+1} \dots)$$

Dado que lo anterior ocurre siempre que $n \geq N$, obtenemos que $\sigma^{N+1}(s^*)$ y $\sigma^{N+1}(\widehat{t})$ también coinciden en m valores tanto a la derecha como a la izquierda del **punto**, debemos observar que el punto se recorre bajo σ de tal forma que obtenemos:

$$\sigma^{N+1}(s^*) = (\dots u_{-(m+1)} u_{-m} s_{-(m-1)} \dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots s_{m-1} s_m u_{m+1} \dots)$$

$$\sigma^{N+1}(\widehat{t}) = (\dots t_{-(m+1)} t_{-m} s_{-(m-1)} \dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots s_{m-1} s_m t_{m+1} \dots)$$

Es decir $u_m = t_m$.

Análogamente como $\sigma^{N+2}(s^*) = \sigma^{N+2}(\widehat{t})$ lo que obtenemos es que $u_{m+1} = t_{m+1}$ y así sucesivamente.

Con lo que se concluye la prueba. □

El Teorema C.0.2 es muy importante ya que gracias a él es posible determinar cuándo un punto pertenece a la variedad estable de algún otro.

En este sentido, podemos identificar con claridad aquellos puntos de Σ_2 que pertenecen a la variedad estable del punto fijo $\widehat{0} = (..,00 \cdot 00\dots)$, lo cual escribimos a continuación:

Teorema C.0.2. *El punto $\widehat{t} = (\dots t_{-2} t_{-1} \cdot t_0 t_1 \dots)$ pertenece a $W^s(\widehat{0})$ si ocurre que para algún $k \in \mathbb{Z}$, $t_n = 0$ para todo $n \geq k + 1$, es decir los elementos de la forma:*

$$\widehat{s} = (\dots s_m s_{m+1} \cdot s_{m+2} \dots s_k 000 \dots) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Notemos que el Teorema C.0.2 puede reformularse para caracterizar a la variedad Inestable de algún punto en Σ_2 y de esta forma obtener una caracterización análoga para los puntos en dicha variedad.

Es muy sencillo demostrar que $W^s(\widehat{0})$ es un conjunto denso en Σ_2 .

Sin embargo, es más interesante ver qué ocurre con los puntos homoclínicos de $\widehat{0}$, lo cual veremos a continuación.

Definición C.0.1. *Sea $\widehat{0} = (\dots 00 \cdot 000 \dots) \in \Sigma_2$. Una elemento \widehat{s} en Σ_2 es llamado homoclínico con respecto a $\widehat{0}$, si $\widehat{s} \neq \widehat{0}$ y $\widehat{s} \in W^s(\widehat{0}) \cap W^u(\widehat{0})$.*

Ahora describiremos las entradas de un elemento de Σ_2 que es *homoclínico* a $\widehat{0}$. Ello es muy sencillo puesto que por un lado $s \in W^s(\widehat{0})$ entonces por el Teorema C.0.3,

$$\widehat{s} = (\dots s_m s_{m+1} \cdot s_{m+2} \dots s_k 000 \dots) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z},$$

y por otra parte $\widehat{s} \in W^u(\widehat{0})$, entonces por un teorema análogo a C.0.3,

$$\widehat{s} = (\dots 000 s_l \dots s_j s_{j+1} \cdot s_{j+2} \dots) \text{ para algún } l \in \mathbb{Z}$$

Y puesto que $s \in W^s(\widehat{b}) \cap W^u(\widehat{0})$ se tiene entonces que

$$s = (\dots 000 s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_n 000 \dots) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

donde n es el $\max\{|k|, |l|\}$.

Teorema C.0.3. *El conjunto de puntos en Σ_2 que son homoclínicos a $\widehat{0}$ y que llamaremos, Γ_0 , es denso en Σ_2*

Demostración. Ello es equivalente a demostrar que para cada $\widehat{s} \in \Sigma_2$, existe una sucesión $\{\widehat{\gamma}_n\}$ en Γ_0 tal que límite $\widehat{\gamma}_n$ es igual a \widehat{s} , es decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(\widehat{\gamma}_n, s) < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Para ello contruyamos una doble sucesión infinita de puntos homoclínicos a \widehat{b} , $\{\widehat{\gamma}_n\}_{n=1}^\infty$, que converja a un punto arbitrario $\widehat{s} = (\dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 s_2 \dots)$. Definamos el elemento de la sucesión $\widehat{\gamma}_n = (\dots 000 s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_n 000 \dots)$, es decir, $\widehat{\gamma}_n$ es la sucesión cuyas entradas coinciden con las de s hasta el término (n) -ésimo tanto a la izquierda como a la derecha del punto y a partir del $|n+1|$ hay puros ceros en las entradas. Por lo que por el Teorema 3.2.1, $d[\widehat{\gamma}_n, s] \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, así, $\widehat{\gamma}_n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Definición C.0.2. *Sea $\widehat{1} = (\dots 11 \cdot 111 \dots) \in \Sigma_2$. Una elemento \widehat{s} en Σ_2 es llamado heteroclínico con respecto a $\widehat{0}$ y a $\widehat{1}$ si $s \in W^s(\widehat{0}) \cap W^u(\widehat{1})$ o $s \in W^s(\widehat{1}) \cap W^u(\widehat{0})$.*

Ahora describiremos las entradas de un elemento de Σ_2 que es *heteroclínico*. Ello es muy sencillo puesto que por un lado $\widehat{s} \in W^s(\widehat{1})$ entonces por el Teorema C.0.3,

$$\widehat{s} = (\dots s_m s_{m+1} \cdot s_{m+2} \dots s_k 111 \dots) \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

y por otra parte $\widehat{s} \in W^u(\widehat{0})$ entonces por un teorema análogo a C.0.3,

$$\widehat{s} = (\dots 000s_l \dots s_j s_{j+1} \cdot s_{j+2} \dots) \text{ para alg\u00fan } l \in \mathbb{Z}$$

Y puesto que $\widehat{s} \in W^s(\widehat{0}) \cap W^u(\widehat{1})$ se tiene entonces que

$$\widehat{s} = (\dots 000s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_n 111 \dots) \text{ para alg\u00fan } n \in \mathbb{N}$$

donde n es el *m\u00e1ximo* $\{|k|, |l|\}$.

Teorema C.0.4. *El conjunto de puntos en Σ_2 que son heterocl\u00ednicos con respecto al $\widehat{0}$ y al $\widehat{1}$ es denso en Σ_2 .*

Demostraci\u00f3n. Para ello contruyamos una doble sucesi\u00f3n infinita de puntos heterocl\u00ednicos a $\widehat{0}$ y $\widehat{1}$, $\{\widehat{\theta}_n\}_{n=1}^\infty$, que converja a un punto arbitrario $\widehat{s} = (\dots s_{-2}s_{-1} \cdot s_0s_1s_2\dots)$. Para ello definamos el elemento de la sucesi\u00f3n $\widehat{\gamma}_n = (\dots 111s_{-n} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_n 000 \dots)$, es decir, $\widehat{\gamma}_n$ es la sucesi\u00f3n cuyas entradas coinciden con las de \widehat{s} hasta el t\u00e9rmino n -\u00e9simo tanto a la izquierda como a la derecha del punto y a partir del elemento $|n+1|$ hay puros ceros en las entradas derechas y puros unos en las entradas izquierdas. Por lo que por el Teorema 3.2.1, $d[\widehat{\gamma}_n, s] \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, as\u00ed, $\widehat{\gamma}_n \rightarrow s$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Apéndice D

Teorema de Smale

Definición D.0.3. Sea $f : M \rightarrow M$, $M \subset \mathcal{R}^2$ un difeomorfismo. Y $p \in \text{int}(M)$ un punto fijo de f . Decimos que p es un punto fijo hiperbólico de f si ocurre que la derivada de f en p , Df_p , posee dos valores propios reales, distintos de cero, $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$.

Así

$$Df_p \cong \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

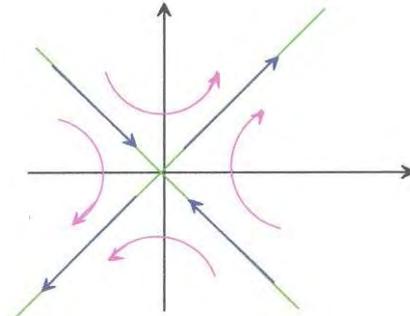


Figura D.0.1.

Definición D.0.4. Un punto homoclínico x es un punto que se encuentra en la intersección de las variedades estables e inestables de un punto fijo o periódico x^* . Si la intersección entre ellas se da de forma transversal en lugar de tangencial hablaremos entonces de un **punto homoclínico transversal**.

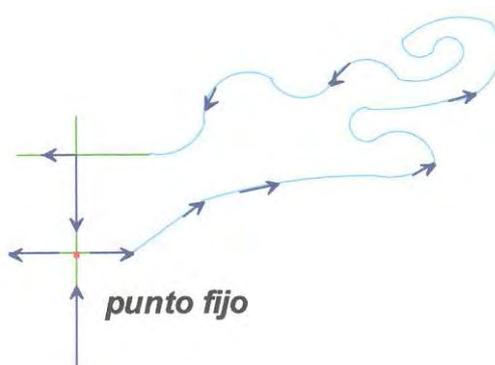


Figura D.0.2.

Anteriormente estudiamos los puntos homoclínicos de la Herradura. Consideramos por ejemplo, el punto fijo representado por la sucesión $(\dots 000 \cdot 000 \dots)$, y demostramos que una rama de la variedad estable de este punto en S es el segmento de línea vertical y que una rama de la variedad inestable es el segmento de línea horizontal.

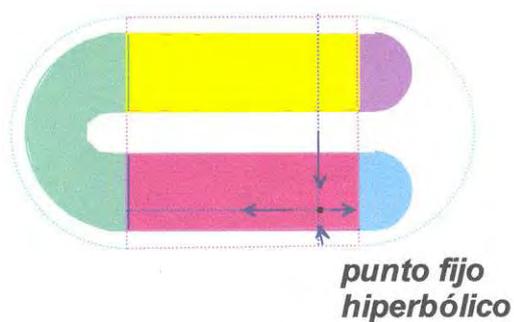


Figura D.0.3.

Al iterar una vez la transformación, claramente observamos que aparecen puntos homoclínicos transversales, por ejemplo el punto x^\diamond .

La pregunta que nos gustaría responder ahora es si la existencia de conjuntos homoclínicos es un factor de la existencia de conjuntos caóticos.

Y el siguiente teorema nos da una respuesta parcial a esta pregunta.

Definición D.0.5. Sea M un conjunto en \mathcal{R}^2 y llamemos $Dif(M)$ el conjunto de todos los difeomorfismos en M de clase C^1 . Si ocurre que para un subconjunto denso y numerable de $Dif(M)$, éstos tienen la propiedad de que todos sus puntos fijos y periódicos son hiperbólicos y todas las intersecciones de las variedades estables e inestables son transversales, entonces a los difeomorfismos en este subconjunto se les llama: difeomorfismos **Kupka- Smale**.

Teorema de Smale. Sea M un compacto en \mathcal{R}^2 . Sea $f \in Dif(M)$ un difeomorfismo *Kupka- Smale* y x^\diamond un punto homoclínico transversal de algún punto periódico x^* de f . Entonces existe un subconjunto cerrado Λ de M que contiene a x^\diamond tal que

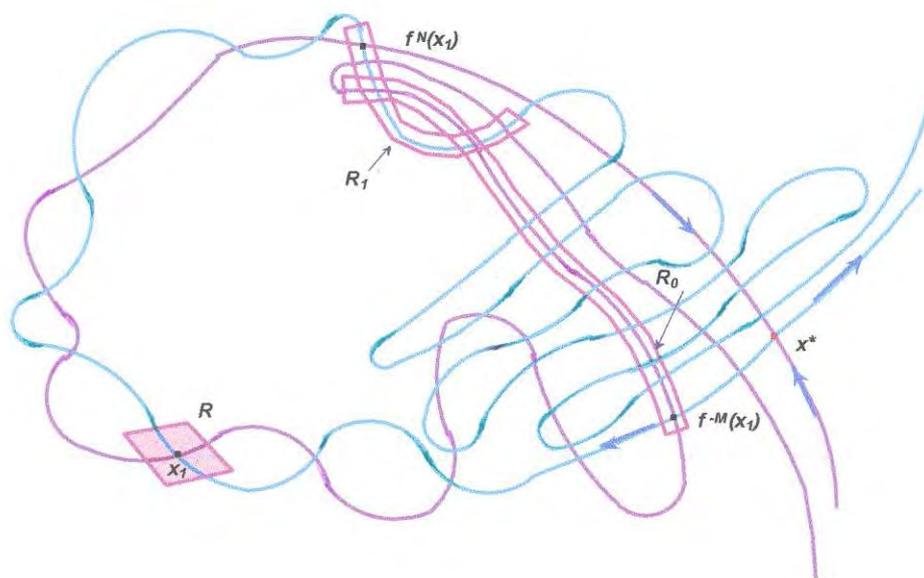
- (a) Λ es un conjunto de Cantor.
- (b) $f^p(\lambda) = \Lambda$ para algún $p \in \mathcal{N}$
- (c) $f^p|_\lambda$ es topológicamente conjugado al espacio de dos símbolos.

La idea detrás de la prueba del teorema se ilustra bien en la siguiente figura.

Cuando x^* es un punto fijo.

Y más general, cuando x^* es un punto periódico.

Figura D.0.4.



En la figura se muestra un paralelogramo R cuyas imágenes bajo $f^N(R) = R_1$ y $f^{-N}(R) = R_0$ se intersectan en una configuración tipo herradura.

Bibliografía

- [1] M. Barge, *Horseshoe Maps and Inverse Limits*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 121, No. 1, 1986, 29-39.
- [2] R. L. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, USA (1989).
- [3] S.N. Elaydi: *Discrete Chaos*, Chapman and Hall/CRC, USA (1999).
- [4] R. Escobedo, S. Macías y H. Méndez: *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios* Aportaciones Matemáticas, Nivel Medio No. 31, Sociedad Matemática Mexicana, (2006).
- [5] B. Hasselblatt y A. Katok: *A First Course in Dynamics with a Panorama of Recent Developments*, Cambridge University Press, USA (2003).
- [6] D. Hinrichsen, J. L. Fernández, A. Fraguera y A. Álvarez: *Topología General* Aportaciones Matemáticas, Nivel medio No. 22, Sociedad Matemática Mexicana, (2003).
- [7] J. G. Hocking, G. S. Young: *Topology*, Courier Dover Publications, USA (1998).
- [8] R. A. Holmgren: *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Segunda Edición, Springer, USA (1996).
- [9] S. B. Nadler: *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker, USA, (1992).
- [10] C. Robinson: *Dynamical Systems Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, USA (1998).

- [11] R. M. Shori, *Chaos: An Introduction to some Topological Aspects* Contemporary Mathematics Vol. 117, American Mathematical Society, 1991, 149-161.
- [12] S. Smale, *Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio*, Mathematical Intelligencer 20(1), 39-44, (1998).
- [13] S. Smale, *On dynamical Systems*, Bol. Sociedad Matemática Mexicana (2) 1960, 195-198. (Reviewer. S. Sternberg) 34.54.
- [14] S. Smale, *Differentiable dynamical Systems*, Bull. American Math. Soc. 73 1967 747-817.