UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tesis Licenciatura (Matemático)

Título: Caracterización de Lefschetz-Dugundji de ANR's

Alumno: Saúl Júarez Ordóñez

Asesor: Sergey Antonyan

Junio de 2007

Caracterización de Lefschetz-Dugundji de ANR's

Alumno: Saúl Juárez Ordóñez

Asesor: Sergey Antonyan

Junio de 2007

Dedico este trabajo a:

Martha, Miguel, José Ángel, Marcela, Liz, Carolina, Ana y Bruno.

Quiero expresar mi agradecimiento a:

Sergey Antonyan, por la asesoría, las sugerencias, los comentarios y todo el soporte que me proporcionó para la elaboración de este trabajo.

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico que me brindó para la elaboración de este trabajo.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Juárez
Ordóñez
Saúl
53 60 53 00
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
402113102

2. Datos del tutor
Dr.
Sergey
Antonyan

3. Datos del sinodal 1
Dra.
María Isabel
Puga
Espinosa

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Ángel
Tamariz
Mascarúa

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Adalberto
García Maynez
y Cervantes

6. Datos del sinodal 4
Dra.
Patricia
Pellicer
Covarrubias

7. Datos del trabajo escrito
Caracterización de Lefschetz-Dugundji de ANR's
52 p.
2007

Índice General

Introducción

El problema de extender una función continua $f : Y \to Z$ de un subconjunto cerrado Y de un espacio X a todo X, ó al menos a una vecindad U de Y en X, es, además de muy interesante, muy frecuente encontrarlo en topología. En 1930, el matemático polaco *Karol Borsuk* se interesó por un caso en particular, consideró que el caso cuando $Y = Z$ y $f = id_Y$ merecía atención especial. En este caso, cualquier extensión de id_Y es llamada una *retracción* [Definición 2.1.1], y si una retracción existe, Y es llamado un *retracto* ó un *retracto de vecindad* [Definición 2.1.2] si la extensión es sólo a una vecindad U de Y en X. Así introdujo *Borsuk* en su tesis doctoral los fundamentos de la *Teoría de Retractos*.

Al principio *Borsuk* consideró sólamente espacios métricos separables. Poco después *Kazimierz Kuratowski* [12] y *Ralph H. Fox* [7] hicieron algunas contribuciones a la teoría, refiriéndose a la misma clase de espacios. Gradualmente, la teoría se fue extendiendo, primero a los espacios métricos arbitrarios por *Clifford H. Dowker* [4] y *James Dugundji* [5], después a clases más generales de espacios, clases cerradas bajo imágenes homeomorfas y subconjuntos cerrados por *Sze-Tsen Hu* [9], *Olof Hanner* [8] y *Ernest A. Michael* [16]. Gradualmente se volvío claro que la clase de los espacios métricos ofrecía la teoría más satisfactoria.

El trabajo de *Borsuk* en la teoría de retractos tiene sus precedentes. El resultado más importante de éstos es el Teorema de extensión de *Tietze*. En notación actual, el teorema dice que el intervalo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$ y la recta real $\mathbb{R}$ son *extensores absolutos* [Definición 2.2.1] para la clase de los espacios normales.

En los primeros días de la teoría de retractos surgió un problema muy importante: determinar cuándo un *retracto absoluto* [Definición 2.3.1] para una clase de espacios, es también un *extensor absoluto* para la misma clase. Esto es cierto para muchas clases importantes de espacios. Se probó para la clase de los espacios métricos arbitrarios, usando el Teorema de extensión de *Dugundji*, el cual dice que *todo espacio lineal localmente convexo* es un *extensor absoluto*. Este resultado fue posible sólo después de que *A.H. Stone* probara que los espacios métricos son espacios *paracompactos* [19].

Existen muchos resultados que caracterizan a los *retractos absolutos de vecindad* [Definición 2.3.2]. Por ejemplo, *Dugundji* probó que *un espacio métrico X de dimensión n es un retracto absoluto de vecindad si y solo si es localmente n-conexo* [6]. En este trabajo se presenta un criterio clásico, una caracterización puramente topológica, basada en realizaciones de *poliedros* [Definición 3.2.1] con respecto a una cubierta $\mathcal{U}$. El resultado es

Un espacio métrico X es un retracto absoluto de vecindad si y sólo si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X admite un refinamiento abierto $\mathcal{V}$, tal que para todo subpoliedro $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ que contenga todos los vértices de $\mathcal{T}$, toda realización parcial de $\mathcal{T}$ en X relativa a $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ [Definición 4.0.4] se puede extender a una realización completa de $\mathcal{T}$ en X relativa a $\mathcal{U}$.

Este resultado fue probado primero para espacios métricos compactos por *Lefschetz* [13] y después *Dugundji* lo generalizó a espacios métricos arbitrarios [6]. Aquí presentamos la generalización de *Dugundji*.

Para una historia mas detallada de la teoría de retractos ó de la topología en general, se puede consultar [11].

Todos los espacios topológicos en consideración son metrizables y les llamaremos simplemete espacios, salvo en el Capítulo 3, ya que la topología CW [3.1] no es necesariamente metrizable.

Capítulo 1

Espacios Lineales

En este capítulo se darán las definiciones básicas de espacio lineal, espacio lineal normado y espacio lineal localmente convexo. Se dará un ejemplo de un espacio lineal normado cuya importancia se hará ver en el Teorema de Kuratowski-Wojdyslawski, que más tarde se generalizará al Teorema de Arens-Eels. Se hará ver la importancia de los espacios lineales localmente convexos por medio del Teorema de extensión de Dugundji, el cual generaliza al Teorema de extensión de Tietze.

1.1. Espacios Lineales

Definición 1.1.1 *Un espacio lineal es un espacio vectorial L dotado de una topología que hace continuas a la suma de vectores y a la multiplicación por escalares.*

Definición 1.1.2 *Sea L un espacio lineal. Una norma en L es una función*

$$\|\cdot\| : L \to [0, \infty)$$

tal que

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in L$,

(2) $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *y* $x \in L$,

(3) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Definición 1.1.3 *Un espacio lineal normado es una pareja $(L, \|\cdot\|)$ donde L es un espacio lineal y $\|\cdot\|$ es una norma en L.*

Ejemplo 1.1.1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *es un espacio lineal normado donde* $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ *es la bien conocida norma euclideana.*

Ahora daremos las definiciones básicas pero importantes de *convexidad.*

Definición 1.1.4 *Decimos que un subconjunto K de un espacio lineal L es* convexo *si para todo par de puntos $x, y \in K$ y $t \in \mathbb{I}$, $tx + (1-t)y \in K$.*

Definición 1.1.5 *Una combinación convexa de elementos de K es un vector de la forma $\sum_{i=0}^{n} k_i t_i$ con $k_i \in K$, $t_i \in \mathbb{I}$ para todo $i \in \{0, ...n\}$ y $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$.*

Definición 1.1.6 *La envoltura convexa de un subconjunto A de L (conv(A)) es el subconjunto convexo más chico que contiene a A.*

Es claro que

$$conv(A) = \bigcap\{K \subseteq L : A \subseteq K \text{ y } K \text{ es convexo}\}$$

$$= \{\sum_{i=0}^{n} k_i t_i : k_i \in A, t_i \in \mathbb{I} \text{ y } \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}.$$

El siguiente ejemplo es muy importante. Además de ser un espacio lineal normado, también es un espacio de *Banach*, es decir, es un espacio lineal normado y completo.

Ejemplo 1.1.2 $C^*(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}$ *es un espacio vectorial, definiendo para $f, g \in C^*(X)$ y $t \in \mathbb{R}$*
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *y* $(tf)(x) = tf(x)$. *Definiendo para toda $f \in C^*(X)$*

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

$(C^*(X), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio vectorial normado y $\|\cdot\|_\infty$ es la bien conocida norma del supremo. Ahora, la función*

$$\rho : C^*(X) \times C^*(X) \to [0, \infty)$$

definida por

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

es una métrica para $C^*(X)$ la cual genera una topología para $C^*(X)$. Así, $C^*(X)$ es un espacio lineal normado.

1.2. Encajes en Espacios Lineales

El primer teorema importante de esta sección es debido a Kuratowski-Wojdyslawski y nos muestra la importancia del Ejemplo 1.1.2 .

Teorema 1.2.1 *(Kuratowski-Wojdyslawski) Para todo espacio X existen un espacio lineal normado L y una isometría $i : X \to L$ tal que para todo $Y \subseteq X$, $i[Y]$ es cerrado en conv($i[Y]$).*

Demostración. Sean $L = C^*(X)$, ρ una métrica admisible para X y una función $d : X \times X \to [0, 1)$ definida por

$$d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

Entonces d es una métrica acotada que genera la misma topología que ρ.

Para cada $y \in X$, sea $f_y : X \to [0, 1)$ definida por

$$f_y(x) = d(y, x).$$

Como d es una métrica acotada, $f_y \in C^*(X)$. Ahora, definamos

$$i : X \to C^*(X)$$

como

$$i(x) = f_x.$$

Veamos que i es una isometría. Sean $x, y \in X$, entonces

$$d(x, y) = |f_x(y) - f_y(y)| \leq \|f_x - f_y\|_\infty = \sup_{z \in X}\{|d(x, z) - d(y, z)|\} \leq d(x, y).$$

Es decir $d(x, y) = \|f_x - f_y\|_\infty$ y por lo tanto i es una isometría. Ahora, sea $(f_{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $i[Y]$ que converge a una función $f \in conv(i[Y])$. Entonces

$$f = \sum_{k=1}^{m} t_k f_{z_k}$$

es una combinación convexa de elementos de $i[Y]$. Como $\sum_{k=1}^{m} t_k = 1$, existe $j \in \{1, ...m\}$ tal que

$$t_j \geq \frac{1}{m}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\|f - f_{y_n}\|_\infty \geq |f(y_n) - f_{y_n}(y_n)| = f(y_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} t_k f_{z_k}(y_n) \geq t_j f_{z_j}(y_n) \geq \frac{1}{m} d(z_j, y_n).$$

Entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f - f_{y_n}\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} d(z_j, y_n)$$

es decir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en Y que converge a un punto $z_j \in Y$ y por lo tanto f_{y_n} converge a $f = f_{z_j} \in i[Y]$.

$\square$

Para generalizar este resultado al Teorema de Arens-Eels, usaremos el siguiente lema.

Lema 1.2.1 *Para todo espacio X existen un espacio A y un encaje isométrico $i : X \to C^*(A)$ tal que $i[X]$ es libre.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.1 , podemos pensar que X es un subconjunto de algún espacio lineal normado Y. Tomemos un punto $x_0 \in Y \setminus X$ y d una métrica admisible y acotada para Y como en la demostración del Teorema 1.2.1 . Sea

$$A = \{f : Y \to \mathbb{R} : f \text{ es de Lipschitz y } f(x_0) = 0\}.$$

Observemos que A es no vacío, pues la función constante $0 \in A$, que $A \subseteq C^*(Y)$, pues las funciones de Lipschitz son continuas y porque para toda $f \in A$, $|f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0) < \infty$. Definamos $i : X \to C^*(A)$ de la siguiente manera

$$i(x) : A \to \mathbb{R} \text{ definida por}$$

$$i(x)(f) = f(x).$$

Tenemos que i está bien definida, pues para toda $x \in X$, $i(x)$ es claramente continua y acotada, ya que para todo par de funciones $f, g \in A$,

$$\|f - g\|_\infty \geq |f(x) - g(x)| = |i(x)(f) - i(x)(g)|$$

y son acotadas.

Veamos que i es una isometría. Sean $x, z \in X$, entonces

$$\|i(x) - i(z)\|_\infty = \sup_{f \in A}\{|i(x)(f) - i(z)(f)|\} = \sup_{f \in A}\{|f(x) - f(z)|\} \leq d(x, z)$$

pues toda $f \in A$ es de Lipschitz. Ahora, definamos una función $g : Y \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$g(y) = d(y, z) - d(x_0, z).$$

Veamos que $g \in A$, es claro que $g(x_0) = 0$. Ahora, sean $a, b \in Y$ arbitrarios, entonces tenemos que

$$|g(a) - g(b)| = |d(a, z) - d(x_0, z) - d(b, z) + d(x_0, z)|$$

$$= |d(a, z) - d(b, z)| \leq d(a, b),$$

es decir, g es de Lipschitz y por lo tanto tenemos que

$$\sup_{f \in A}\{|f(x) - f(z)|\} \geq |g(x) - g(z)|$$

$$= |d(x, z) - d(x_0, z) - d(z, z) + d(x_0, z)| = d(x, z),$$

es decir

$$\|i(x) - i(z)\|_\infty = d(x, z).$$

Ahora, veamos que $i[X]$ es libre.

Sean $x_1, ..., x_{n+1} \in X$ distintos y veamos que $i(x_{n+1})$ no es combinación lineal de $i(x_1), ..., i(x_n)$. Para esto, definamos una función $f : Y \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(y) = \min_{i \in \{0,...,n\}} d(y, x_i)$$

Sean $a, b \in Y$ arbitrarios, y supongamos sin pérdida de generalidad que $f(a) = d(a, x_j) \geq f(b) = d(b, x_k)$ para algunas $j, k \in \{0, ..., n\}$ y por lo tanto $f(a) = d(a, x_j) \leq d(a, x_k)$. Entonces

$$|f(a) - f(b)| = f(a) - f(b) \leq d(a, x_k) - d(b, x_k) \leq d(a, b)$$

y como $f(x_0) = 0$, tenemos que $f \in A$. Ahora, para toda $k \in \{0, ..., n\}$, $i(x_k)(f) = f(x_k) = 0$ y $i(x_{n+1})(f) \neq 0$ pues $x_k \neq x_{n+1}$. Por lo tanto $i(x_{n+1})$ no puede ser una combinación lineal de $i(x_1), ..., i(x_n)$, es decir, $i[X]$ es libre.

□

Una *compactificación* de un espacio X es un espacio compacto K en el cual se puede encajar densamente a X. Una consecuencia del bien conocido teorema de metrizabilidad de Urysohn, que dice que *todo espacio es homeomorfo a algún subespacio del cubo de Hilbert*, es que *todo espacio tiene una compactificación.* Omitiremos las demostraciones pues nos desvían de nuestro propósito, sin embargo usaremos este resultado para demostrar el ya anunciado Teorema de Arens-Eels. El lector interesado puede encontrarlas por ejemplo en [17, p. 472].

Teorema 1.2.2 *(Arens-Eels) Para todo espacio métrico X, existen un espacio lineal normado L y una isometría $i : X \to L$ tal que $i[X]$ es cerrado en L.*

Demostración. Sea Z una compactificación de X. Por el lema anterior, existen un espacio A y una isometría $i : Z \to C^*(A)$ tal que $i[Z]$ es libre.

Sea $L \subseteq C^*(A)$ el espacio generado por $i[X]$, entonces $L \cap i[Z] = i[X]$, ya que si $y \in L \cap i[Z]$, entonces $y = \sum_{k=0}^{n} t_k i(x_k)$ donde $t_k \in \mathbb{R}$ y $x_k \in X$ para toda $k \in \{0, ..., n\}$, pero $i[Z]$ es libre y por lo tanto $y = i(x_k)$ para alguna k. Ahora, como $i[Z]$ es cerrado en $C^*(A)$ por ser compacto, $i[X]$ es cerrado en L.

□

1.3. Extensión de Funciones Continuas

Sean X, Y y Z espacios con $Y \subseteq X$ y $f : Y \to Z$ una función continua. Si existe una función continua $F : X \to Z$ tal que $F\mid_Y = f$, decimos que F es una *extensión continua* de f y que f se puede extender continuamente a todo X.

En general, no toda función continua es restricción de otra función continua. Por ejemplo, la función $id_{\{0,1\}}$ no puede ser extendida continuamente a todo $\mathbb{I}$ porque las funciones continuas preservan la conexidad. En esta sección se verá que si el espacio Z es un espacio lineal localmente convexo, entonces esto es posible.

Definición 1.3.1 *Se dice que un espacio lineal L es localmente convexo si el origen $\overline{0}$ de L tiene vecindades convexas arbitrariamente pequeñas.*

Los espacios lineales localmente convexos juegan un papel muy importante en la teoría de retractos como se mostrará en el Teorema 1.3.1 .

Ejemplo 1.3.1 *Cualquier espacio lineal normado L es localmente convexo, pues las bolas $B_r(\overline{0}) = \{x \in L : \|x\| \leq r\}$ son conjuntos convexos para toda $r > 0$.*

En particular $\mathbb{R}^n$ es un espacio lineal localmente convexo.

Definición 1.3.2 *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas abiertas de un espacio X. Decimos que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, si para toda $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$, tal que $V \subseteq U$.*

Definición 1.3.3 *Se dice que una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio X es localmente finita si para todo $x \in X$, existe una vecindad W de x, tal que $|\{U \in \mathcal{U} : W \cap U \neq \emptyset\}| < \aleph_0$*

De la definición anterior, se sigue que para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ es finito.

Se dice que un espacio X es *paracompacto*, si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X, tiene un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}$. Un resultado muy importante debido a A. H. Stone, es que *todo espacio métrico es paracompacto.* Usaremos este hecho para demostrar el siguiente lema. La demostración se puede ver por ejemplo en [19] ó en [18].

Lema 1.3.1 *Sean X un espacio y Y un subconjunto cerrado de X. Entonces existe una cubierta abierta localmenta finita, $\mathcal{U}$ de $X\backslash Y$ y una familia de puntos $\{y_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ de Y tales que*

(1) Para todo $p \in U \in \mathcal{U}$, $d(p, y_U) \leq 2d(p, Y)$.

(2) Si $U_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n, Y) = 0, \textit{entonces} \lim_{n\to\infty} diam(U_n) = 0,$$

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{B(x, \frac{1}{4}d(x, Y)) : x \in X\backslash Y\}$, entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta de $X\backslash Y$. Por el Teorema de Stone, existe un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, es decir, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $x_U \in X\backslash Y$, tal que

$$U \subseteq B(x_U, \frac{1}{4}d(x_U, Y)).$$

Para cada $U \in \mathcal{U}$, tomemos un punto $y_U \in Y$ tal que

$$d(x_U, y_U) \leq \frac{5}{4}d(x_U, Y).$$

Veamos que $\mathcal{U}$ y $\{y_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ satisfacen (1) y (2). Sea $p \in U$, entonces

$$d(p, y_U) \leq d(p, x_U) + d(x_U, y_U) \leq \frac{1}{4}d(x_U, Y) + \frac{5}{4}d(x_U, Y) = \frac{3}{2}d(x_U, Y)$$

Ahora,

$$d(x_U, Y) \leq d(x_U, p) + d(p, Y) \leq \frac{1}{4}d(x_U, Y) + d(p, Y),$$

de donde

$$\frac{3}{4}d(x_U, Y) \leq d(p, Y) \text{ y por lo tanto, } d(p, y_U) \leq 2d(p, Y).$$

Ahora, supongamos que $U_n \in \mathcal{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que

$$\lim_{n\to\infty} d(U_n, Y) = 0$$

Escojamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $p_n \in U_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, Y) = 0$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} d(x_{U_n}, Y) \leq \lim_{n\to\infty} d(p_n, Y) = 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} diam(U_n) \leq \lim_{n\to\infty} diam(B(x_{U_n}, \frac{1}{4} d(x_{U_n}, Y))) = 0$$

pues $U_n \subseteq B(x_{U_n}, \frac{1}{4} d(x_{U_n}, Y))$.

$\square$

Dadas las hipótesis del lema anterior, al par $\{\mathcal{U}, \{y_U\}_{U\in\mathcal{U}}\}$ se le conoce como un *sistema de Dugundji para* X *y* Y.

Corolario 1.3.1 *Sean* X*,* Y *y* $\mathcal{U}$ *como en el lema anterior. Para todo* $y \in Y$ *y para toda vecindad* E *de* y *en* X*, existe una vecindad* F *de* y *en* X*, tal que si* $U \in \mathcal{U}$ *intersecta a* F*, entonces* $U \subseteq E$*.*

Demostración. Como E es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(y) \subseteq E$. Supongamos que el corolario no es cierto, entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que

$$U_n \cap B_{\frac{\epsilon}{n}}(y) \neq \emptyset \text{ y } U_n \backslash E \neq \emptyset.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} d(U_n, Y) = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} diam(U_n) = 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_N \subset B_\epsilon(y) \text{ y } U_N \backslash E \neq \emptyset.$$

Lo cual es una contradicción.

$\square$

Notemos que los conjuntos E y F del corolario anterior satisfacen que $F \subseteq E$.

Para poder demostrar el Teorema de extensión de Dugundji, definiremos ciertas funciones que nos serán de gran ayuda.

Para esto, tomemos una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U}$ de un espacio (X, d).

Para toda $U \in \mathcal{U}$, sea $k_U : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$k_U(x) = \frac{d(x, X \backslash U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}} d(x, X \backslash V)}.$$

Notemos que k_U está bien definida pues el denominador siempre es distinto de cero, ya que $\mathcal{U}$ es una cubierta de X y que $k_U(x) \geq 0$. Veamos que también es continua. Sea $x \in X$ y W una vecindad de x, como $\mathcal{U}$ es localmente finita,

$$\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$$

es finito. Consideremos $k_{U_W} = k_U \mid_W : W \to \mathbb{R}$, entonces, para toda $w \in W$

$$k_{U_W}(w) = \frac{d(w, X \backslash U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}_w} d(w, X \backslash V)}$$

y como $\mathcal{U}_w$ es finito, k_{U_W} es continua en W y como W es una vecindad de x, k_U es continua en x. Por último, notemos que para toda $x \in X$,

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} k_U(x) = \sum_{U \in \mathcal{U}_x} \frac{d(x, X \backslash U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}_x} d(x, X \backslash V)} = 1$$

y que

$$k_U^{-1}(0, 1] \subseteq U.$$

El siguiente teorema debido a Dugundji, nos muestra la importancia de los espacios lineales localmente convexos. Este resultado es de gran importancia en la teoría de retractos. Como corolario se obtiene el Teorema de extensión de Tietze.

Teorema 1.3.1 *(Dugundji) Sean L un espacio lineal localmente convexo, X un espacio, Y un subespacio cerrado de X y $f : Y \to L$ una función continua. Entonces existe una extensión continua $F : X \to L$ de f, tal que*

$$F[X] \subseteq conv(f[Y]).$$

Demostración. Consideremos un sistema de Dugundji $\{\mathcal{U}, \{y_U\}_{U\in\mathcal{U}}\}$ para X y Y y $k_U : X\backslash Y \to \mathbb{R}$ las funciones k con respecto a $\mathcal{U}$. Definamos $F : X \to L$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in Y), \\ \sum_{U\in\mathcal{U}} k_U(x) \cdot f(y_U) & (x \in X\backslash Y). \end{cases}$$

Es claro que F extiende a f. Además $\sum_{U\in\mathcal{U}} k_U(x) \cdot f(y_U)$ es una suma convexa de elementos de $f[Y]$ y por lo tanto $F[x] \subseteq conv(f[Y])$. Veamos que F es continua. Para toda $x \in Y^\circ$, $F(x) = f(x)$ y por lo tanto F es continua en Y°. Sea $x \in X\backslash Y$, como $\mathcal{U}$ es localmente finita, existe una vecindad W de x y $n \in \mathbb{N}$, tal que $|A_x| = |\{U \in \mathcal{U} : U \cap W\}| = n$. Sean $U_1, ..., U_n \in A_x$. Entonces, para toda $w \in W$ se tiene que,

$$F(w) = \sum_{i=1}^{n} k_{U_i}(w) \cdot f(y_{U_i})$$

y como k_{U_i} es una función continua, F es continua en W y por lo tanto F es continua en todo $x \in X\backslash Y$. Sólo falta verificar la continuidad en la frontera $\delta[Y]$ de Y. Sea $y \in \delta[Y]$ y V una vecindad convexa de $F(y) = f(y)$ en L. Como f es continua en Y, existe $\epsilon > 0$, tal que

$$f[Y \cap B_\epsilon(y)] \subseteq V.$$

Por el corolario anterior, existe una vecindad W de y, tal que $W \subseteq B_{\frac{\epsilon}{3}}(y)$ y si $U \in \mathcal{U}$ es tal que $U \cap W \neq \emptyset$, entonces $U \subseteq B_{\frac{\epsilon}{3}}(y)$. Para todo $U \in \mathcal{U}$, tomemos un punto $x_U \in U$ entonces, para todo $U \in \mathcal{U}$ que intersecte a W, tenemos que

$$d(y, y_U) \leq d(y, x_U) + d(x_U, y_U) < \frac{\epsilon}{3} + 2d(x_U, Y) \leq \frac{\epsilon}{3} + 2d(x_U, y) = \epsilon.$$

Es decir, $y_U \in B_\epsilon(y)$, de donde

$$f(y_U) \in V.$$

Por lo tanto, si $x \in Y \cap W$, $F(y) = f(y) \in V$. Ahora, tomemos un punto $x \in W \cap X \backslash Y$, como $\mathcal{U}$ es localmente finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \cap_{i=1}^{n} U_{j_i}$ y para toda $m \in \mathbb{N} \backslash \{j_1, ..., j_n\}$, $x \notin U_m$. Entonces

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} k_{Uj_i}(x) \cdot f(y_{U_{j_i}})$$

y $f(y_{U_{j_i}}) \in V$, porque $W \cap U_{j_i} \neq \emptyset$. Como V es convexo y $F(x)$ es una combinación convexa de elementos de V, $F(x) \in V$. Es decir, $F[W] \subseteq V$ y por lo tanto F es continua en $\delta[Y]$.

$\square$

Corolario 1.3.2 *(Teorema de Tietze) Para todo espacio normal X con subespacio cerrado Y, toda función continua $f : Y \to \mathbb{I}$ se puede extender continuamente a todo X.*

Demostración. Solo basta observar que el intervalo unitario $\mathbb{I}$ es un espacio lineal localmente convexo y aplicar el teorema anterior.

$\square$

Capítulo 2

Teoría de Retractos

En este capítulo se presentan los resultados básicos de la teoría de retractos. Se introducen los conceptos de Retracto Absoluto y Extensor Absoluto y se ve la equivalencia de estos dos conceptos cuando los espacios son metrizables. También se hace lo mismo para los Retractos Absolutos de Vecindad y los Extensores Absolutos de Vecindad.

2.1. Retractos

El término *retracto* le fue sugerido a Borsuk por su supervisor de tesis doctoral, *Stefan Mazurkiewickz*, que fue uno de los fundadores de la escuela polaca de topología a finales del siglo XIX [11, p. 18].

Definición 2.1.1 *Se dice que un subconjunto Y de un espacio X es un retracto de X si la función identidad $id_Y : Y \to Y$ tiene una extensión continua $r : X \to Y$. A dicha extensión se le llama retracción. En otras palabras, se dice que Y es un retracto de X si existe una función continua $r : X \to Y$ tal que $r\,|_Y = id_Y$. Igualmente, la función r es llamada una retracción.*

Ejemplo 2.1.1 *Sea X un espacio y $\{*\} \subseteq X$. Entonces $\{*\}$ es un retracto de X, la función constante $*$ es una retracción.*

Ejemplo 2.1.2 *La función $id_X : X \to X$ es una retracción. Es decir, todo espacio es retracto de sí mismo.*

Ejemplo 2.1.3 *$\mathbb{B}^n$ es un retracto de $\mathbb{R}^n$, la función $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{B}^n$ definida como*

$$r(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{B}^n), \\ \frac{x}{\|x\|} & (x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{B}^n). \end{cases}$$

es una retracción, donde $\|x\|$ es la norma euclideana de x.

Ejemplo 2.1.4 *$Y = \mathbb{S}^{n-1}$ es un retracto de $X = \mathbb{R}^n \backslash \{\bar{0}\}$, la función $r : X \to Y$ definida como*

$$r(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$$

es una retracción, donde $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ y $\bar{0} = (0, ..., 0)$.

Las retracciones y las extensiones están íntimamente relacionadas, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 *Y es un retracto de X si y sólo si para todo espacio Z, toda función continua $f : Y \to Z$ se puede extender a todo X.*

Demostración. Sean $r : X \to Y$ una retracción, Z un espacio y $f : Y \to Z$ una función continua. La función $f \circ r$ es una extensión continua de f. Recíprocamente, la función id_Y tiene una extensión continua.

□

Es una propiedad de todo retracto, ser un subconjunto cerrado.

Proposición 2.1.2 *Si Y es un retracto de X entonces Y es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sean $x \in X \backslash Y$ y $r : X \to Y$ una retracción. Entonces $r(x) \neq x$. Como X es de Hausdorff, existen vecindades ajenas U y V de x y de $r(x)$ respectivamente.

Como r es continua y $V \cap Y$ es una vecindad de $r(x)$ en Y, $r^{-1}(V \cap Y)$ es una vecindad de x en X, entonces $r^{-1}(V \cap Y) \cap U$ es una vecindad de x en X.

Ahora, supongamos que existe $y \in Y \cap r^{-1}(V \cap Y) \cap U$, entonces $r(y) = y$, de donde $y \in V \cap U$, lo cual es una contradicción, por lo tanto Y es cerrado en X.

$\square$

Es natural considerar si un subespacio es un retracto de alguna vecindad suya.

Definición 2.1.2 *Se dice que Y es un retracto de vecindad de X si existe una vecindad U de Y en X tal que Y es un retracto de U.*

En particular todo retracto de X es un retracto de vecindad de X tomando $U = X$. Si Y es un subconjunto abierto de X, entonces Y es un retracto de vecindad de X tomando $U = Y$.

Ejemplo 2.1.5 *Si $Y = \mathbb{S}^{n-1}$ y $X = \mathbb{R}^n$ entonces existe $U = \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ tal que Y es un retracto de U por el Ejemplo 2.1.4 .*

Ejemplo 2.1.6 *Si $Y = \{0, 1\}$ y $X = [0, 1]$ entonces existe $U = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ y una retracción $r : U \to Y$ definida como*

$$r(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0, \frac{1}{2})), \\ 1 & (x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dado que una retracción es una función continua, esta preserva compacidad, conexidad y conexidad por trayectorias. Por otra parte, existen propiedades que no se preservan bajo funciones continuas, pero sí bajo retracciones. A estas propiedades se les llama *r-invariantes.*

Algunos ejemplos de propiedades r-invariantes son:

(1) La propiedad del punto fijo.

(2) La contractibilidad.

(3) La contractibilidad local.

(4) La conexidad local.

(5) La n-conexidad local.

Demostraremos que la propiedad del punto fijo y la contractibilidad son propiedades r-invariantes. Las demostraciones de (3), (4) *y* (5) se pueden encontrar en [10, p. 26, 27 y 28].

Definición 2.1.3 *Se dice que un espacio X tiene la propiedad del punto fijo si para toda función continua $f : X \to X$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema 2.1.1 *La propiedad del punto fijo es un r-invariante.*

Demostración. Tomemos X un espacio con la propiedad del punto fijo, $r : X \to Y$ una retracción y $f : Y \to Y$ una función continua. Como X tiene la propiedad del punto fijo y $f \circ r : X \to Y \subseteq X$ es continua, existe $x \in X$ tal que $f(r(x)) = x$, de donde $x \in Y$, y como r es una retracción, $x = f(r(x)) = f(x)$. Por lo tanto Y tiene la propiedad del punto fijo.

$\square$

Definición 2.1.4 *Se dice que dos funciones continuas $f, g : X \to Y$ son homotópicas ($f \simeq g$) si existe una función continua $F : X \times \mathbb{I} \to Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$. A la función F se le llama homotopía.*

Definición 2.1.5 *Se dice que un espacio X es contraible ($X \in C$) si la función identidad id_X es homotópica a una función constante k ($id_X \simeq k$).*

En la siguiente sección veremos la importancia de los espacios contraibles en la teoría de retractos.

Ejemplo 2.1.7 *$\mathbb{R}^n \in C$, la función $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ definida por*

$$H(x, t) = x - tx$$

es una homotopía que conecta a $id_{\mathbb{R}^n}$ con la constante $\overline{0}$.

Teorema 2.1.2 *La contractibilidad es un r-invariante.*

Demostración. Sean $X \in C$ y $r : X \to Y$ una retracción. Entonces existe una homotopía $F : X \times \mathbb{I} \to X$ tal que $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = k$. Sea $H : Y \times \mathbb{I} \to Y$ definida como

$$H(y, t) = r(F(y, t)).$$

La función H es claramente continua, $H(y, 0) = r(F(y, 0)) = r(y) = y$ y $H(y, 1) = r(F(y, 1)) = r(k)$. Por lo tanto H es una homotopía entre id_Y y la constante $r(k)$.

□

2.2. Extensores Absolutos

La terminología AE y ANE fue introducida por el matemático suizo Michael en 1953 [16].

Definición 2.2.1 *Un espacio Z es un Extensor Absoluto ($Z \in AE$) si para todo espacio X y todo subespacio cerrado Y de X, toda función continua $f : Y \to Z$ se puede extender continuamente a todo X.*

Definición 2.2.2 *Se dice que un espacio Z es un Extensor Absoluto de Vecindad ($Z \in ANE$) si para todo espacio X y todo subespacio cerrado Y de X, toda función continua $f : Y \to Z$ se puede extender continuamente a una vecindad U de Y en X.*

Es claro que si $X \in AE$ entonces $X \in ANE$.

Ejemplo 2.2.1 *Por el Corolario 1.3.2 , tenemos que $\mathbb{I} \in AE$.*

Veamos que la propiedad de un espacio de ser un extensor absoluto se preserva bajo retracciones.

Teorema 2.2.1 *Sean X un espacio y $r : X \to Y$ una retracción. Si $X \in AE$ entonces $Y \in AE$.*

Demostración. Sean Z un espacio, $W = \overline{W} \subseteq Z$ y $f : W \to Y$ una función continua. Como $X \in AE$ y $f : W \to Y \subseteq X$ es continua, existe una extensión continua $F : Z \to X$ de f. Sea $H : Z \to Y$ definida como

$$H(z) = r(F(z)).$$

Es claro que H es una función continua y para todo $w \in W$ se tiene que $H(w) = r(F(w)) = r(f(w)) = f(w)$ ya que $f(w) \in Y$ y r es retracción. Por lo tanto $Y \in AE$.

□

Lo mismo sucede para extensores absolutos de vecindad, si consideramos ahora un retracto de vecindad.

Teorema 2.2.2 *Tomemos un espacio X y Y un retracto de vecindad de X. Si $X \in ANE$ entonces $Y \in ANE$.*

Demostración. Sean Z un espacio, $W = \overline{W} \subseteq Z$ y $f : W \to Y$ una función continua. Como $X \in ANE$ y $f : W \to Y \subseteq X$ es continua, existe una vecindad U de W en Z y una extensión continua $F : U \to X$ de f. Como Y es un retracto de vecindad de $X \in ANE$, existe una vecindad V de Y en X y una retracción $r : V \to Y$. Como F es continua $F^{-1}(V)$ es una vecindad de W en U y por lo tanto también es abierto en Z. Ahora, la extensión que buscamos es

$$r \circ F \mid_{F^{-1}(V)} .$$

Es claro que es continua y que extiende a f. Por lo tanto $Y \in ANE$.

□

La siguiente proposición nos brindará un ejemplo muy importante de un extensor absoluto. El bien conocido *cubo de Hilbert*.

Proposición 2.2.1 *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios. Si para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $X_\lambda \in AE$, entonces $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in AE$.*

Demostración. Sea Z un espacio, $W = \overline{W} \subseteq Z$ y $f : W \to Y$ una función continua. Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos la proyección $\mathcal{P}_\lambda : Y \to X_\lambda$ y llamemos

$$f_\lambda = \mathcal{P}_\lambda \circ f.$$

Entonces $f_\lambda : W \to X_\lambda$ es una función continua, y como $X_\lambda \in AE$, existe una extensión continua $F_\lambda : Z \to X_\lambda$ de f_λ. Sea $F : Z \to Y$ definida como

$$F(z) = \Delta_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda(z) = (F_\lambda(z))_{\lambda\in\Lambda}.$$

A $F = \Delta_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ se le conoce como el producto diagonal y es una función continua por ser producto de funciones continuas. Ahora, sea $w \in W$, entonces $F(w) = (F_\lambda(w))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(w))_{\lambda\in\Lambda} = (\mathcal{P}_\lambda(f(w)))_{\lambda\in\Lambda} = f(w)$. Por lo tanto $Y \in AE$.

$\square$

Ejemplo 2.2.2 *Como $\mathbb{I} \in AE$, $\mathbb{I}^\alpha \in AE$ para cualquier potencia topológica α.*

En particular, el cubo de Hilbert $\mathbb{I}^\omega$ es un AE.

Como la propiedad de un espacio de ser AE se preserva claramente bajo homeomorfismos, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3 *El n-simplejo $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $\mathbb{B}^n$ son AE ya que $\mathbb{I}^n \approx \mathbb{B}^n \approx \Delta^n$.*

Ejemplo 2.2.4 *$\mathbb{S}^{n-1} \in ANE$ por ser retracto de vecindad de $\mathbb{B}^n \in ANE$ [ver Ejemplo 2.1.4].*

Proposición 2.2.2 *Si U es un subconjunto abierto de un espacio $X \in ANE$ entonces $U \in ANE$.*

Demostración. Sean Z un espacio, $Y = \overline{Y} \subseteq Z$ y $f : Y \to U$ una función continua. Como $X \in ANE$ y $f : Y \to U \subseteq X$ es continua, existe una vecindad V de Y en Z y una extensión continua $F : V \to X$ de f. Entonces $F^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de V que contiene a Y y por lo tanto también es abierto en Z. Entonces

$$F\mid_{F^{-1}(U)}$$

es la extensión que buscabamos. Por lo tanto $U \in ANE$.

$\square$

Ejemplo 2.2.5 $\mathbb{B}^n \backslash \{\overline{0}\}$ *y* $(\mathbb{B}^n)^\circ$ *son ANE por ser subconjuntos abiertos de $\mathbb{B}^n \in ANE$.*

Ejemplo 2.2.6 $\mathbb{R}^n \in ANE$ *pues* $\mathbb{R}^n \approx (\mathbb{B}^n)^\circ \in ANE$*.*

El siguiente lema nos ayudará a relacionar a los extensores absolutos con los extensores absolutos de vecindad.

Lema 2.2.1 *Sean X un espacio y A y B dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X, entonces existe una función continua $u : X \to \mathbb{I}$ tal que $u^{-1}(0) = A$ y $u^{-1}(1) = B$.*

Demostración. Sea ρ una métrica admisible para X. La función $u : X \to \mathbb{I}$ definida por

$$u(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, B) + \rho(x, A)}$$

es la función buscada.

$\square$

El siguiente teorema es muy importante porque nos dice cuándo un espacio ANE es también un espacio AE, mostrando la importancia de los espacios contraibles.

Teorema 2.2.3 *$X \in AE$ si y sólo si $X \in ANE$ y $X \in C$.*

Demostración. Sean $X \in AE$ y $Y = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \subseteq X \times \mathbb{I}$. Entonces $Y = \overline{Y} \subseteq X \times \mathbb{I}$. Sean x_0 cualquier punto de X y una función $f : Y \to X$ definida como

$$f(x,t) = \begin{cases} x & (t = 0), \\ x_0 & (t = 1). \end{cases}$$

La función f es continua porque x_0 y id_X son continuas y sus dominios son cerrados y ajenos. Y dado que $X \in AE$, existe una extensión continua $F : X \times \mathbb{I} \to X$ de f. Es claro que F es una homotopía que conecta a id_X con la constante x_0.

$\Diamond$

Recíprocamente, supongamos que $X \in ANE$ y $X \in C$. Sean Z un espacio con subespacio cerrado Y y $f : Y \to X$ una función continua.

Como $X \in ANE$, existe una vecindad U de Y en Z y una extensión continua $F : U \to X$ de f. Como Z es un espacio normal por ser metrizable, existe una vecindad V de Y en Z tal que $\overline{V} \subseteq U$. Por el Lema 2.2.1 , existe una función continua $u : Z \to \mathbb{I}$ tal que $u^{-1}(0) = Y$ y $u^{-1}(1) = Z \backslash V$. Como $X \in C$, existe una homotopía $H : X \times \mathbb{I} \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = k$. Sea $G : Z \to X$ definida por:

$$G(z) = \begin{cases} k & (z \in \overline{Z \backslash V}), \\ H(F(z), u(z)) & (z \in \overline{V}). \end{cases}$$

Ahora, sea $y \in Y$, entonces $y \in \overline{V}$ y por lo tanto

$$G(y) = H(F(y), u(y)) = H(f(y), 0) = f(y)$$

es decir, G extiende a f. También G es continua porque es unión de dos funciones continuas con dominios cerrados cuya intersección, δV, también es un cerrado y $G[\delta V] = H(F[\delta V], u[\delta V]) = H(F[\delta V], 1) = k$. Por lo tanto $X \in AE$.

$\square$

Ejemplo 2.2.7 *$\mathbb{R}^n \in AE$ ya que $\mathbb{R}^n \in ANE$ y $\mathbb{R}^n \in C$ [ver Ejemplos 2.1.7 y 2.2.6].*

Notemos que el Teorema de Dugundji dice que *todo espacio lineal localmente convexo $L \in AE$.* Terminaremos esta sección con una consecuencia de este teorema y del Teorema de Arens-Eels, pues todo espacio lineal normado es localmente convexo. El ejemplo anterior, se puede justificar también, notando que $\mathbb{R}^n$ es un espacio lineal localmente convexo [Teorema 1.3.1].

Corolario 2.2.1 *Todo espacio métrico X puede ser encajado cerradamente como subespacio de algún AE.*

Demostración. Por el Teorema de Arens-Eels, podemos pensar que X es un subconjunto cerrado de algun espacio lineal normado L y por lo tanto lineal localmente convexo. Por el Teorema de extensión de Dugundji, $L \in AE$.

$\square$

2.3. Retractos Absolutos

El término *AR* le fue sugerido a Borsuk por su colega polaco *Nachman Aronszajn*, que también fue estudiante de Mazurkiewickz.

Definición 2.3.1 *Un espacio Y es un Retracto Absoluto ($Y \in AR$) si para todo espacio X y todo encaje cerrado $\iota : Y \to X$, $\iota[Y]$ es un retracto de X.*

Definición 2.3.2 *Se dice que un espacio Y es un Retracto Absoluto de Vecindad ($Y \in ANR$) si para todo encaje cerrado $\iota : Y \to X$, $\iota[Y]$ es un retracto de vecindad de X.*

Es claro que si $X \in AR$ entonces $X \in ANR$.

Ejemplo 2.3.1 *El espacio $Y = \{*\} \in AR$ [ver Ejemplo 2.1.1].*

Ejemplo 2.3.2 *$Y = \{0, 1\} \in ANR$ pero $Y \notin AR$ pues $Y = \overline{Y} \subset \mathbb{I}$ y las retracciones, al ser funciones continuas preservan la conexidad.*

En la primera sección de este capítulo, vimos que la existencia de una retracción implica la existencia de una extensión y viceversa. Esto sucede también con los extensores absolutos y los retractos absolutos como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *$X \in AE$ si y sólo si $X \in AR$.*

Demostración. Supongamos primero que $X \in AE$. Sea Z un espacio y supongamos sin pérdida de generalidad que $X = \overline{X} \subseteq Z$. Como $X \in AE$ la función $id_X : X \to X$ se puede extender continuamente a todo Z. Por lo tanto X es un retracto de Z.

$\Diamond$

Ahora, supongamos que $X \in AR$. Sean Z un espacio, Y un subespacio cerrado de Z y $f : Y \to X$ una función continua. Por el Corolario 2.2.1 podemos suponer que $X = \overline{X} \subseteq L \in AE$, entonces existe una extensión continua $F : Z \to L$ de f. Como $X \in AR$, existe una retracción $r : L \to X$. La extensión de f que estamos buscando es simplemente $r \circ F$.

$\square$

Tenemos una propiedad similar para los extensores absolutos de vecindad y los retractos absolutos de vecindad.

Teorema 2.3.2 *$X \in ANE$ si y sólo si $X \in ANR$*

Demostración Supongamos primero que $X \in ANE$, Sea Z un espacio y supongamos que $X = \overline{X} \subseteq Z$. Como $X \in ANE$, id_X se puede extender continuamente a una vecindad de X.

$\diamondsuit$

Recíprocamente, tomemos un espacio Z con subespacio cerrado Y y una función continua $f : Y \to X$. Por el Corolario 2.2.1 podemos suponer que

$$X = \overline{X} \subseteq L \in AE$$

entonces existe una extensión continua $F : Z \to L$ de F.

Como $X \in ANR$, existen una vecindad U de X en L y una retracción $r : U \to X$. Consideremos el abierto $F^{-1}[U]$ y notemos que

$$F[Y] = f[Y] \subseteq X \subseteq U$$

Es decir, F^{-1} es una vecindad de Y en Z. Entonces, la extensión que estamos buscando es simplemente $r \circ F \mid_{F^{-1}[U]}$.

$\square$

Este par de teoremas es muy importante porque nos muestra la equivalencia de estos dos conceptos cuando los espacios son metrizables, y como consecuencia se obtienen los siguientes corolarios. Claramente, todos los ejemplos de la sección anterior, también son ejemplos de espacios $AR's$ y $ANR's$.

Corolario 2.3.1 *Sea X un espacio y $r : X \to Y$ una retracción. Si $X \in AR$ entonces $Y \in AR$.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.3.1 y 2.2.1

$\square$

Corolario 2.3.2 *Sean X un espacio y Y un retracto de vecindad de X.*
Si $X \in ANR$ entonces $Y \in ANR$.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.3.2 y 2.2.2

□

Corolario 2.3.3 *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios.*
Si para toda $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $X_\lambda \in AR$, entonces $Y = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in AR$.

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.3.1 y 2.2.1

□

Corolario 2.3.4 *Si U es un subconjunto abierto de un espacio $X \in ANR$ entonces $U \in ANR$.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.3.2 y 2.2.2

□

Corolario 2.3.5 *$X \in AR$ si y sólo si $X \in ANR$ y $X \in C$.*

Demostración. Se sigue de los Teoremas 2.3.1 , 2.3.2 y 2.2.3

□

Corolario 2.3.6 *Todo subconjunto convexo de un espacio localmente convexo es un AE.*

Demostración. Sea K un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo L. Sean X un espacio con subespacio cerrado Y y $f : Y \to K$ una función continua. Por el Teorema 1.3.1 , existe una extensión continua $F : X \to L$ de f, tal que $F[X] \subseteq conv(f[Y])$. Como K es convexo y contiene a $f[Y]$, $F[X] \subseteq K$, es decir, $K \in AE$.

□

Capítulo 3

Poliedros

En este capítulo se verá lo que es un Poliedro. Su importancia radica en que gracias a ellos podemos conectar a los espacios topológicos abstractos con espacios más concretos, más manejables.

3.1. Simplejos

Definición 3.1.1 $\Delta^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$ *es el simplejo estándar de dimensión n, ó el n-simplejo estándar.*

Los vértices de Δ^n son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir, el conjunto:

$$\{(0, ..., \underbrace{1}_{i}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : i \in \{0, ..., n\}\}.$$

Observemos que Δ^n es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por lo tanto compacto. Δ^n es un espacio topológico con la topología que hereda de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A cualquier copia homeomorfa de un simplejo estándar le llamaremos simplemente simplejo.

Si τ es un simplejo con vértices $\{v_0, ..., v_n\}$ y $\sigma \subseteq \{v_0, ..., v_n\}$, al conjunto $\text{conv}(\sigma)$ lo llamaremos una *cara* de τ.

Definición 3.1.2 *La frontera de τ ($\delta\tau$) es la unión de todas las caras propias de τ.*

Definición 3.1.3 *Por el interior de τ (τ°), nos referiremos al interior relativo de τ que es el conjunto $\tau \backslash \delta\tau$.*

Si $v_0, ..., v_n$ son los vértices de algún simplejo τ, diremos que

$$\tau =< v_0, ..., v_n >$$

es el simplejo generado por estos vértices.

Tomemos una familia de simplejos T. Nos interesa dar una topología al conjunto

$$\mathcal{T} = \bigcup T$$

y dado que un simplejo $\tau \in T$ es homeomorfo a algún Δ^n, la topología que queremos dar a $\mathcal{T}$ tiene que ser una topología que induzca la misma topología en cada simplejo $\tau \in T$, esto es

$$U \subseteq \mathcal{T} \text{ es abierto sii para todo } \tau \in \ T,\ U \cap \tau \text{ es abierto en } \tau.$$

Esta topología es llamada topología *débil* o topología CW.

3.2. Poliedros

Definición 3.2.1 *Al espacio topológico $(\mathcal{T}, CW)$ se le llama Poliedro si para todo par de simplejos τ_1 y τ_2 de T se cumple que*

(1) Si σ es una cara de τ, con $\tau \in \ T$ entonces $\sigma \in T$,

(2) Si $\tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$ entonces $\tau_1 \cap \tau_2$ es una cara de τ_1 y de τ_2.

Ejemplo 3.2.1 $\mathcal{T} = \bigcup\{\sigma : \sigma \text{ es cara de } \Delta^n\} = \Delta^m$ *es un poliedro.*

Ejemplo 3.2.2 $\mathcal{T} = \{*\}$ *es un poliedro.*

Ejemplo 3.2.3 $\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$ *es un poliedro.*

Observemos que si al espacio $\mathcal{T}$ del ejemplo anterior le agregamos el $\{0\}$, éste deja de ser un poliedro, pues si $U = \{0\}$, $U \cap \{\frac{1}{n}\} = \emptyset$ es abierto en cada $\{\frac{1}{n}\}$ y $U \cap \{0\} = \{0\}$ es abierto en $\{0\}$, pero U no es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología euclideana.

Proposición 3.2.1 *Un subconjunto A de un poliedro $\mathcal{T}$ es cerrado si y sólo si $A \cap \tau$ es cerrado en τ para todo $\tau \in T$.*

Demostración. Si A es cerrado entonces $\mathcal{T} \backslash A$ es abierto y por lo tanto $\tau \cap (\mathcal{T} \backslash A)$ es abierto en τ para todo $\tau \in T$. Entonces

$$\tau \backslash (A \cap \tau) = \tau \cap ((\mathcal{T} \backslash A) \cup (\mathcal{T} \backslash \tau)) = \tau \cap (\mathcal{T} \backslash A)$$

es abierto en τ, es decir $A \cap \tau$ es cerrado en τ.

$\Diamond$

Ahora, si $A \cap \tau$ es cerrado en τ para toda $\tau \in T$,

$$\tau \backslash (A \cap \tau) = \tau \cap (\mathcal{T} \backslash A)$$

es abierto en τ para toda $\tau \in T$, es decir $\mathcal{T} \backslash A$ es abierto en $\mathcal{T}$ y por lo tanto A es cerrado en $\mathcal{T}$.

$\square$

Proposición 3.2.2 *Una función $f : \mathcal{T} \to X$ definida en un poliedro es continua si y sólo si la restricción de f a cada simplejo de T es continua.*

Demostración. Es claro que si f es continua, toda restricción de f es continua. Ahora, sea $A \subseteq X$ cerrado y $\tau \in T$, entonces

$$f^{-1}(A) \cap \tau = (f\,|_{\tau})^{-1}(A)$$

es cerrado en τ porque $f\,|_{\tau}$ es continua. Entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado en $\mathcal{T}$ y, por lo tanto, f es continua.

$\square$

A un subconjunto $\mathcal{S} = \cup\{\tau : \tau \in S \subseteq T\}$ de $\mathcal{T}$ que también sea un poliedro le llamaremos *subpoliedro* de $\mathcal{T}$.

Corolario 3.2.1 *Todo subpoliedro es un subconjunto cerrado.*

Demostración. Si $\mathcal{S}$ es un subpoliedro de $\mathcal{T}$, sólo basta notar que para todo $\tau \in T$, $\mathcal{S} \cap \tau = \tau$ si $\tau \in S$, $\mathcal{S} \cap \tau = \emptyset$ ó $\mathcal{S} \cap \tau = \sigma$, donde σ es una cara de τ si $\tau \in T \backslash S$. Los cuales son cerrados en τ.

□

La topología que un subpoliedro hereda, coincide con la topología débil en el subpoliedro.

Teorema 3.2.1 *Sea $\mathcal{S}$ un subpoliedro de un poliedro $\mathcal{T}$. Entonces, la topología inducida por $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ (χ_i) es la topología débil en $\mathcal{S}$ (χ_d).*

Demostración. Sea $U \in \chi_i$, entonces $U = V \cap \mathcal{S}$ con V abierto en $\mathcal{T}$. Entonces $V \cap \tau$ es abierto en τ para todo $\tau \in T$ y por lo tanto, si $\sigma \in S$, $U \cap \sigma = (V \cap \mathcal{S}) \cap \sigma = V \cap \sigma$ es abierto en σ, por lo tanto $\chi_i \subseteq \chi_d$.

Ahora, sea $U \in \chi_d$, entonces $A = \mathcal{S} \backslash U$ es cerrado en $\mathcal{S}$. Consideremos el conjunto

$$V = A \cup \Big(\bigcup_{\tau \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{S}} \tau \Big)$$

Como $V \cap \tau = \tau$ si $\tau \in \mathcal{T} \backslash \mathcal{S}$ ó $V \cap \tau = A \cap \tau$ si $\tau \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{T}$, V es cerrado en $\mathcal{T}$. Es claro que $V \cap \mathcal{S} = A$, y que $B = \mathcal{T} \backslash V$ es abierto en $\mathcal{T}$. También

$$B \cap \mathcal{S} = (\mathcal{T} \backslash V) \cap \mathcal{S} = \mathcal{S} \backslash V = \mathcal{S} \backslash A = U$$

es decir, $U \in \chi_i$ y por lo tanto $\chi_i = \chi_d$

□

Por la dimensión de un simplejo τ ($dim(\tau)$), entenderemos la dimensión del simplejo estándar del cual es copia.

Definición 3.2.2 *Para cada $m \geq 0$, llamaremos al conjunto*
$\mathcal{T}^{(m)} = \{\tau \in T : dim(\tau) \leq m\}$ *el m-esqueleto del poliedro $\mathcal{T}$.*

Es claro que $\mathcal{T}^{(m)}$ es un subpoliedro de $\mathcal{T}$. Observemos que $\mathcal{T}^{(0)}$ es el conjunto de los vértices de todos los simplejos de T. Los elementos de $\mathcal{T}^{(0)}$ son llamados los *vértices* de $\mathcal{T}$.

Ahora, tomemos un poliedro $\mathcal{T}$. Para cada $x \in \mathcal{T}$, al simplejo de dimensión menor, al cual x pertenezca, lo llamaremos el *portador* de x.

Sea $\tau =< v_0, ..., v_n >$ el portador de $x \in \mathcal{T}$, entonces podemos escribir a x de forma única como una combinación convexa de los vértices de τ, es decir,

$$x = t_{v_0} v_0 + ... + t_{v_n} v_n$$

donde $t_{v_i} \in \mathbb{I}$ y $\sum_{i=0}^{n} t_{v_i} = 1$. Así definimos para cada $v \in T^{(0)}$ una función $\phi_v : \mathcal{T} \to \mathbb{I}$ de la siguiente forma:

$$\phi_v(x) = \begin{cases} t_v & \textit{si } v \textit{ es vértice del portador de } x, \\ 0 & \textit{si } v \textit{ no es vértice del portador de } x. \end{cases}$$

Esta función está bien definida ya que los escalares t_{v_i} son únicos. Observemos que $\phi_v(x) > 0$ sólo para un número finito de vértices.

Proposición 3.2.3 *Para cada $v \in T^{(0)}$, la función ϕ_v definida anteriormente, es continua.*

Demostración. Veamos que la restricción de ϕ_v a cada simplejo $\tau \in T$, $\phi_v \mid_\tau$ es continua y apliquemos el resultado de la Proposición 3.2.2 . Sea $\tau \in T$ y supongamos que $v \notin \tau$, entonces para todo $x \in \tau$, v no es vértice del portador de x entonces $\phi_v \mid_\tau (x) = 0$ para toda x y por lo tanto $\phi_v \mid_\tau$ es continua.

Ahora, supongamos que $v \in \tau$, entonces para cada $x \in \tau$ existe un único $(t_{v_{x0}}, ..., t_{v_x}, ..., t_{v_{xn}}) \in \Delta^n$ tal que $\phi_v \mid_\tau (x) = t_{v_x}$, entonces $\phi_v \mid_\tau$ es la restricción de las coordenadas euclideanas de Δ^n, y por lo tanto $\phi_v \mid_\tau$ es una función continua.

$\square$

Definición 3.2.3 *Para cada vértice v de un poliedro $\mathcal{T}$, se define la estrella de v como el subconjunto $St(v) = \{x \in \mathcal{T} : \phi_v(x) > 0\} \subseteq \mathcal{T}$.*

Notemos que para todo vértice v de $\mathcal{T}$, $v \in St(v)$.

Proposición 3.2.4 *Para todo vértice v de $\mathcal{T}$, $St(v)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{T}$.*

Demostración. Tomemos una sucesión

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (St(v))^c = \{x \in \mathcal{T} : \phi_v(x) = 0\}$$

tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathcal{T}$ y veamos que $x \in (St(v))^c$. Como ϕ_v es continua, $0 = \lim_{n\to\infty} \phi_v(x_n) = \phi_v(x)$ y por lo tanto $x \in (St(v))^c$, es decir, $St(v)$ es abierto.

□

Corolario 3.2.2 *$\mathcal{T}^{(0)}$ es un espacio discreto.*

Demostración. Sea v un vértice de $\mathcal{T}$ y consideremos la estrella de v, $St(v)$. Como $St(v)$ es abierto en $\mathcal{T}$, entonces $St(v) \cap \mathcal{T}^{(0)} = \{v\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{T}^{(0)}$. Por el Teorema 3.2.1 , $\mathcal{T}^{(0)}$ es discreto.

□

3.3. Nervio de una Cubierta

El concepto de *Nervio de una cubierta* fue introducido por el matemático ruso *Pavel Alexandroff* en 1926 [1].

Dada una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{U}$ de un espacio X, podemos asociar naturalmente a X un poliedro por medio de $\mathcal{U}$, asociando a cada elemento U de $\mathcal{U}$ un vértice $x(U)$ de este poliedro. Más formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3.1 *Llamaremos Nervio de $\mathcal{U}$ ($\mathcal{N}(\mathcal{U})$) al poliedro descrito por*

(1) $\mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)} = \{x(U) \in \mathbb{R}^\omega : U \in \mathcal{U}\}$, *de tal forma que los puntos $x(U)'s$ estén en posición general,*

(2) $< x(U_0), ..., x(U_n) >$ *es un simplejo en $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ si y sólo si*

$$\bigcap_{k=0}^{n} U_k \neq \emptyset.$$

Se dice que una familia finita o infinita de puntos $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}^\omega$ está en *posición general*, si todo subconjunto $\{x_{i_j}\}_{j\in\{0,...,k\}}$ con $i_0 < i_1 < ... < i_k$ donde $k \leq \aleph_0$ es linealmente independiente.

El espacio topológico $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es muy importante, es la manera más natural de conectar un espacio abstracto con un espacio más concreto usando a las funciones k_U definidas en la Sección 1.3 , de la siguiente manera:

Definamos una función $k : X \to \mathcal{N}(\mathcal{U})$ así

$$k(x) = \sum_{U\in\mathcal{U}} k_U(x) \cdot x(U).$$

Dado que la cubierta $\mathcal{U}$ es localmente finita, para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ es finito, de donde

$$k(x) = \sum_{U\in\mathcal{U}_x} k_U(x) \cdot x(U).$$

Luego $k(x)$ es una suma finita. Como $\sum_{U\in\mathcal{U}_x} k_U(x) = 1$, $k(x)$ es una combinación convexa de algunos vértices de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ y por lo tanto está bien definida y es continua dado que k_U es continua.

Definición 3.3.2 *Llamaremos $\tau(x)$ al simplejo de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ que se forma con todos los elementos de $\mathcal{U}_x$. Es decir, si $\mathcal{U}_x = \{U_{i_0}, ..., U_{i_n}\}$, entonces*

$$\tau(x) =< x(U_{i_0}), ..., x(U_{i_n}) >$$

Es claro que para cada $x \in X$, $k(x) \in \tau(x)$.

Capítulo 4

Caracterización de Lefschetz-Dugundji

En este capítulo se demostrará el teorema de Lefschetz-Dugundji. Para esto, se usarán un par de lemas básicos pero importantes que nos ayudarán a demostrar el resultado principal de este trabajo.

Para un espacio X, denotemos por ρX a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X y por τX a la familia de todos los subconjuntos abiertos de X.

Definamos una función $k : \rho Y \to \rho X$ con Y un subespacio de X dada por

$$k(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq d(x, Y \backslash A)\}.$$

y por convención se define $d(x, \emptyset) = \infty$.

Lema 4.0.1 *La función k está bien definida y cumple*

(1) $k(\emptyset) = \emptyset$, $k(Y) = X$,

(2) $k(A) \cap Y = A$ *para toda* $A \in \rho Y$,

(3) si $A, B \in \rho Y$ *y* $A \subseteq B$ *entonces* $k(A) \subseteq k(B)$,

(4) si $A, B \in \rho Y$ *entonces* $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$.

Demostración. Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq k(A)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$$

Como d es métrica, y $d(x_n, A) - d(x_n, Y\backslash A) \leq 0$, entonces

$$d(x, A) - d(x, Y\backslash A) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, A) - d(x_n, Y\backslash A) \leq 0,$$

es decir, $x \in k(A)$. Los incisos (1), (2) y (3) son claros. Por el inciso (3), como $A, B \subseteq A \cup B$, $k(A) \cup k(B) \subseteq k(A \cup B)$.

Sea $x \in k(A \cup B)$, entonces

$$d(x, A \cup B) \leq d(x, Y\backslash(A \cup B))$$

Como $d(x, A \cup B) \in \{d(x, A), d(x, B)\}$, supongamos sin pérdida de generalidad que $d(x, A \cup B) = d(x, A)$.

Entonces

$$d(x, A) = d(x, A \cup B) \leq d(x, Y\backslash(A \cup B)) \text{ y } d(x, A) \leq d(x, B).$$

Luego, como

$$Y\backslash A \subseteq (Y\backslash A) \cup B = (Y\backslash(A \cup B)) \cup B$$

y

$$d(x, (Y\backslash(A \cup B)) \cup B) \in \{d(x, Y\backslash(A \cup B)), d(x, B)\},$$

$$d(x, A) \leq d(x, (Y\backslash(A \cup B)) \cup B) \leq d(x, Y\backslash A).$$

Es decir, $x \in k(A)$

$\square$

Lema 4.0.2 *La función* $\sigma : \tau Y \to \tau X$ *definida por*

$$\sigma(A) = \{x \in X : d(x, A) < d(x, Y \backslash A)\}$$

está bien definida y cumple que

(1) $\sigma(\emptyset) = \emptyset$, $\sigma(Y) = X$,

(2) $\sigma(A) \cap Y = A$ *para toda* $A \in \tau Y$,

(3) para toda $A, B \in \tau Y$, $A \subseteq B$ *sii* $\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$,

(4) si $A, B \in \tau Y$ *entonces* $\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$.

Demostración. Sólo basta notar que $\sigma(A) = X \backslash k(Y \backslash A)$ y aplicar el lema anterior.

□

Definición 4.0.1 *Para cada cubierta abierta* $\mathcal{U}$ *de un espacio* X *se define la estrella de* $\mathcal{U}$ *como*

$$St(\mathcal{U}) = \{St(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$$

donde

$$St(U, \mathcal{U}) = \bigcup \{V \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}.$$

Proposición 4.0.1 *Si* $\mathcal{F}$ *es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de un espacio* X *entonces* $\cup\mathcal{F}$ *es cerrado en* X.

Demostración. Tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \cup\mathcal{F}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$$

Como $\mathcal{F}$ es localmente finita, existe una vecindad U de x en X tal que $\Lambda = \{F \in \mathcal{F} : F \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. Como la sucesión converge, podemos pensar que para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \cup\Lambda$, que es cerrado por ser una unión finita de conjuntos cerrados y por lo tanto $x \in \cup\Lambda \subseteq \cup\mathcal{F}$.

□

El siguiente lema es muy importante en la demostración del Teorema de Lefschetz-Dugundji.

Lema 4.0.3 *Para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de un espacio X existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que $St(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}$.*

Demostración. Por el Teorema de Stone, podemos suponer que la cubierta $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es localmente finita. Para cada $\lambda \in \Lambda$ tomemos un punto arbitrario $x_\lambda \in U_\lambda$. Como X es regular, existe una vecindad F_λ de x_λ en X tal que

$$F_\lambda \subseteq \overline{F}_\lambda \subseteq U_\lambda$$

entonces, para todo $x \in X$, el conjunto $A_x = \{\lambda \in \Lambda : x \in \overline{F}_\lambda\}$ es finito.

Para cada $x \in X$, sea

$$W_x = \bigcap_{\lambda\in A_x} U_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda\notin A_x} \overline{F}_\lambda.$$

Entonces $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta de X por la Proposición 4.0.1 . Veamos que $\{St(\{x\},\mathcal{W})\}_{x\in X} \prec \mathcal{U}$. Tomemos $x \in X$ y $\lambda \in A_x$ arbitrario. Sea $W_y \in \mathcal{W}$ tal que $x \in W_y$, entonces $A_x \subseteq A_y$ y $W_y \subseteq U_\lambda$. Por lo tanto $St(\{x\},\mathcal{W}) \subseteq U_\lambda$ y $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$.

Repitiendo este argumento para $\mathcal{W}$, obtenemos una cubierta abierta $\mathcal{V}$ de X tal que $\{St(\{x\},\mathcal{V})\}_{x\in X} \prec \mathcal{W}$ y $\mathcal{V} \prec \mathcal{W}$. Resta ver que $St(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}$. Tomemos $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$ y $B \in \mathcal{V}$ tal que $B \cap V \neq \emptyset$. Sea $y \in B \cap V$, entonces existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $St(\{y\},\mathcal{V}) \subseteq W$. Entonces

$$x \in V \subseteq V \cup B \subseteq St(\{y\},\mathcal{V}) \subseteq W.$$

De aquí que $B \subseteq W \subseteq St(\{x\},\mathcal{W})$ y por lo tanto

$$St(V,\mathcal{V}) \subseteq St(\{x\},\mathcal{W}) \subseteq U$$

para algún $U \in \mathcal{U}$. Es decir $St(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}$.

$\square$

Sean X un espacio, $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, $\mathcal{T}$ un poliedro y $\mathcal{S}$ un subpoliedro de $\mathcal{T}$ que contenga todos los vértices de $\mathcal{T}$.

Definición 4.0.2 *Una realización parcial de $\mathcal{T}$ en X relativa a $(\mathcal{S},\mathcal{U})$ es una función continua $f : \mathcal{S} \to X$ tal que para todo $\tau \in T$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f[\tau \cap \mathcal{S}] \subseteq U$.*

En caso de que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$, decimos que f es una *realización completa* de $\mathcal{T}$ en X relativa a $\mathcal{U}$.

Finalmente podemos demostrar el Teorema de caracterización de $ANR's$ de Lefschetz y Dugundji.

Teorema 4.0.1 *(Lefschetz-Dugundji) Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) X es un ANR

(2) Para toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ tal que para todo poliedro $\mathcal{T}$ y para todo subpoliedro $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ que contenga todos los vértices de $\mathcal{T}$, toda realización parcial de $\mathcal{T}$ en X relativa a $(\mathcal{S},\mathcal{V})$ puede ser extendida a una realización completa de $\mathcal{T}$ en X relativa a $\mathcal{U}$.

Demostración. Supongamos primero que $X \in ANR$. Por el Teorema 1.2.2 podemos suponer que X es un subconjunto cerrado de algún espacio lineal normado L. Como $X \in ANR$, existe una vecindad V de X en L y una retracción r de V en X. Sea $\mathcal{E} = \{ r^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \}$. Entonces $\mathcal{E}$ es una cubierta abierta de V. Como V es abierto en L, $r^{-1}(U)$ es abierto en L, y como L es localmente convexo por ser un espacio lineal normado, existe un refinamiento abierto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ cuyos elementos son conjuntos convexos. Sea $\mathcal{V} = \mathcal{F} |_X$. Entonces $\mathcal{V}$ es el refinamiento abierto de $\mathcal{U}$ que buscamos, pues para toda $\nu \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\nu \subseteq r^{-1}(U)$, entonces $r(\nu) = \nu \subseteq U$ ya que r es retracción.

Ahora, sean $\mathcal{T}$ un poliedro, $\mathcal{S}$ un subpoliedro de $\mathcal{T}$ que contenga todos los vértices de $\mathcal{T}$ y f una realización parcial de $\mathcal{T}$ en X relativa a $(\mathcal{S} , \mathcal{V})$. Para todo $\tau \in T$, denotemos $\tau^* = conv(f[\tau \cap \mathcal{S}])$, entonces $\tau^* \subseteq F$ para algún convexo $F \in \mathcal{F}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{K}_n = \mathcal{T}^{(n)} \cup \mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{K}_n$ es un subpoliedro de $\mathcal{T}$. Por inducción sobre $\mathbb{N}$ construiremos funciones continuas

$$f_n : \mathcal{K}_n \to V$$

tales que

(i) $f_0 = f$,

(ii) Para toda $n \geq 1$, f_n extiende a f_{n-1},

(iii) Para todo $\tau \in T$, $f_n[\tau \cap \mathcal{K}_n] \subseteq \tau^*$.

Notemos que f_0 está bien definida ya que $\mathcal{T}^{(0)} \subseteq \mathcal{S}$ y por lo tanto $\mathcal{K}_0 = \mathcal{S}$.

Ahora, supongamos que hemos construido f_{n-1} y que cumple (ii) y (iii). Queremos construir una extensión continua f_n de f_{n-1} que cumpla (iii). Para esto, definiremos f_n en cada simplejo de $\mathcal{K}_n$.

Sea $\tau \in K_n$. Si $\tau \in K_{n-1}$, definimos $f_n \mid_\tau = f_{n-1} \mid_\tau$. Supongamos entonces que $\tau \in T^{(n)} \backslash K_{n-1}$. Entonces $\tau^\circ \cap \mathcal{K}_{n-1} = \emptyset$.

Como $\delta\tau \subseteq \mathcal{K}_{n-1}$ y $f_{n-1} \mid_{\delta\tau} : \delta\tau \to \tau^*$, sólo falta extender f_{n-1} a τ°. Como $\delta\tau$ es cerrado en τ y τ^* es un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo, por el Corolario 2.3.6, existe una extensión continua de f_{n-1} a todo τ. Definimos f_n en τ como dicha extensión. Notemos que f_n es continua en $\mathcal{K}_n$, pues la restrición en cada simplejo de K_n es continua y que f_n cumple (iii) ya que si $\tau \in T$,

$$f_n[\tau \cap \mathcal{K}_n] \subseteq [\tau \cap \mathcal{K}_n]^* \subseteq \tau^*.$$

Ahora, definimos $\Psi : \mathcal{T} \to V$ dada por:

$$\Psi(x) = f_n(x) \quad (x \in \mathcal{T}^{(n)}).$$

Notemos que Ψ está bien definida, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, f_n extiende a f_{n-1} y $\Psi[\mathcal{T}] \subseteq V$, que es continua, ya que la restricción a cada simplejo de T es continua, y que extiende a f, ya que para toda $n \in \mathbb{N}$, f_n extiende a f.

Finalmente, definimos $g : \mathcal{T} \to X$ dada por:

$$g = r \circ \Psi.$$

Notemos que g es continua y extiende a f, ya que si $x \in \mathcal{S}$, entonces

$$g(x) = r(\Psi(x)) = r(f(x)) = f(x)$$

ya que r es retracción. Afirmamos que g es la extensión que buscábamos.

Para ver esto, tomemos $\tau \in T$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in T^{(n)}$, luego

$$g[\tau] = r[\Psi[\tau]] = r[f_n[\tau]] = r[f_n[\tau \cap \mathcal{K}_n]] \subseteq r[\tau^*] \subseteq r[F]$$

para algún convexo $F \in \mathcal{F}$, y como $\mathcal{F} \prec \mathcal{E}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $F \subseteq r^{-1}(U)$, entonces $r[F] \subseteq U$ y por lo tanto $g[\tau] \subseteq U$, es decir, g es una realización completa de $\mathcal{T}$ en X relativa a $\mathcal{U}$.

$\Diamond$

Recíprocamente, supongamos la condición (2) del teorema, y veamos que $X \in ANR$. Por el Teorema 1.2.2 , podemos suponer que X es un subconjunto cerrado de algún espacio lineal normado L. Como L es localmente convexo, por el Teorema 1.3.1 , L es un AE y por lo tanto un ANR. Demostraremos que X es un retracto de vecindad de L y por lo tanto un ANR, por el Corolario 2.3.2 .

Por inducción sobre $\mathbb{N}$, construiremos cubiertas abiertas $\mathcal{A}_n$ y $\mathcal{B}_n$ de X tales que

(i) $\mathcal{A}_0 = \{X\}$,

(ii) $\mathcal{B}_n \prec \mathcal{A}_n$ y para todo poliedro $\mathcal{T}$ y todo subpoliedro $\mathcal{S}$ de $\mathcal{T}$ que contenga todos los vértices de $\mathcal{T}$, toda relización parcial de $\mathcal{T}$ en X relativa a $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_n)$, puede ser extendida a una realización completa de $\mathcal{T}$ en X relativa a $\mathcal{A}_n$,

(iii) para toda $n \geq 1$, $St(\mathcal{A}_n) \prec \mathcal{B}_{n-1}$,

(iv) $\text{mesh}(\mathcal{A}_n) < \frac{1}{n}$.

Notemos que el inciso (ii) es simplemente la hipótesis, usando el Lema 4.0.3 se obtiene el inciso (iii), y dado que X es metrizable, podemos suponer el inciso (iv).

$\Diamond$

Ahora bien, por el Lema 1.3.1 , existe un sistema de Dugundji $\{\mathcal{U}, \{x_U\}_{U\in\mathcal{U}}\}$ para L y X.

Construiremos por inducción sobre $\mathbb{N}$ vecindades H_n's de X tales que $H_0 = L$ y para toda $n \geq 1$

$(1)_n$ $\overline{H}_n \subseteq B_{\frac{1}{n}}(X) \cap H_{n-1}$,

$(2)_n$ si $U \in \mathcal{U}$ intersecta a $\overline{H}_n$ entonces existe $A \in \mathcal{A}_n$ tal que

$$U \subseteq \sigma(A) \cap H_{n-1},$$

donde σ es la función definida en el Lema 4.0.2

Sea $n \geq 1$ y supongamos que ya hemos construido hasta H_{n-1}, como $X \subseteq H_{n-1} \cap B_{\frac{1}{n}}(X)$ y L es un espacio normal, existe una vecindad V de X tal que

$$X \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq H_{n-1} \cap B_{\frac{1}{n}}(X).$$

Para todo $x \in X$ existe $A_x \in \mathcal{A}_n$ tal que $x \in \mathcal{A}_x$, entonces $\sigma(A_x) \cap V$ es una vecindad de x en L. Por el Corolario 1.3.1 , existe una vecindad B_x de x en L tal que si $U \in \mathcal{U}$ intersecta a B_x entonces $U \subseteq \sigma(A_x) \cap V$. Sea

$$H_n = \bigcup_{x\in X} B_x.$$

Como $B_x \subseteq \sigma(A_x) \cap V \subseteq V$ para toda $x \in X$, $H_n \subseteq V$, entonces $\overline{H}_n \subseteq \overline{V} \subseteq H_{n-1} \cap B_{\frac{1}{n}}(X)$. Ahora, sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap \overline{H}_n \neq \emptyset$, como U es abierto, $U \cap H_n \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X$ tal que $U \cap B_x \neq \emptyset$ luego

$$U \subseteq \sigma(A_x) \cap V \subseteq \sigma(A_x) \cap H_{n-1}.$$

$\Diamond$

Notemos que para toda $U \in \mathcal{U}$ el conjunto

$$E_U = \{n \geq 0 : U \cap \overline{H}_n \neq \emptyset\} \neq \emptyset$$

ya que $L = H_0 \neq \emptyset$ y que es finito, pues si no lo fuera, $d(U, X) = 0$ y entonces $diam(U) = 0$ pues $\{\mathcal{U}, \{x_U\}_{U \in \mathcal{U}}\}$ es un sistema de Dugundji, y por lo tanto $U = \{x\} \subseteq X$, lo cual es una contradicción. Sea entonces $n(U) = max E_U$.

Para toda $U \in \mathcal{U}$ tomemos $z_U \in U$. Por $(2)_{n(U)}$ existe $A_U \in \mathcal{A}_{n(U)}$ tal que $U \subseteq \sigma(A_U)$.

Afirmación 4.0.1 *Para toda $U \in \mathcal{U}$ existe $y_U \in A_U$ tal que $d(z_U, y_U) \leq 2d(z_U, X)$.*

Demostración. Si $x_U \in A_U$ tomamos $x_U = y_U$. Supongamos entonces que $x_U \in X \backslash A_U$, como $z_U \in \sigma(A_U)$, $d(z_U, A_U) < d(z_U, X \backslash A_U)$ entonces

$$d(z_U, A_U) < d(z_U, x_U) \leq 2d(z_U, X).$$

Sea y_U cualquier punto en A_U tal que $d(z_U, y_U) \leq d(z_U, x_U)$.

$\Diamond$

Definamos $\Phi : \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)} \to X$ así

$$\Phi(x(U)) = y_U$$

donde y_U satisface la Afirmación 4.0.1 . Notemos que Φ es continua, ya que $\mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)}$ es un espacio discreto, por el Lema 3.2.2 .

Queremos extender Φ a una mayor parte de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, para esto, definamos para cada $m \geq 0$

$$B_m = \overline{H}_m \backslash H_{m+1}$$

y

$$\mathcal{P}_m = \bigcup \{\{x(U_{i_0}), ..., x(U_{i_k})\} \in N(\mathcal{U}) : (\forall j \in \{0, ..., k\}) \ (U_{i_j} \cap B_m \neq \emptyset)\}.$$

Es decir, $\mathcal{P}_m$ es el subpoliedro de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ que consta de todos los posibles simplejos de $N(\mathcal{U})$ que se puedan formar con todos aquellos elementos $U \in \mathcal{U}$ que intersecten al anillo B_m.

Afirmación 4.0.2 *Para cada $m \geq 1$, $\Phi \mid_{\mathcal{P}_m^{(0)}}$ es una realización parcial de $\mathcal{P}_m$ en X relativa a $(\mathcal{P}_m^{(0)}, \mathcal{B}_{m-1})$.*

Para ver esto, tomemos $\tau = \{x(U_{i_0}), ..., x(U_{i_k})\} \in P_m$, queremos encontrar $B \in \mathcal{B}_{m-1}$ tal que $\Phi(x(U_{i_j})) \subseteq B$ para toda $j \in \{0, ..., k\}$. Como $\tau \in P_m$, $U_{i_j} \cap \overline{H}_m \neq \emptyset$, por $(3)_{n(U_{i_j})}$, existe $A_{U_{i_j}} \in \mathcal{A}_{n(U_{i_j})}$ tal que

$$U_{i_j} \subseteq \sigma(A_{U_{i_j}}).$$

Como $m \leq n(U_{i_j})$, por (ii) y (iii), $\mathcal{A}_{n(U_{i_j})} \prec \mathcal{A}_m$, entonces existe $A_j \in \mathcal{A}_m$ tal que $A_{U_{i_j}} \subseteq A_j$ y como σ es monótona, lema 4.0.2, tenemos que

$$U_{i_j} \subseteq \sigma(A_{U_{i_j}}) \subseteq \sigma(A_j).$$

También, $\bigcap_{j=0}^k U_{i_j} \neq \emptyset$ ya que $\tau \in N(\mathcal{U})$, entonces

$$\bigcap_{j=0}^{k} \sigma(A_j) = \sigma\Big(\bigcap_{j=0}^{k} A_j\Big) \neq \emptyset$$

y por lo tanto

$$\bigcap_{j=0}^{k} A_j \neq \emptyset.$$

Entonces

$$\Phi(x(U_{i_j})) = y_{U_{i_j}} \in A_{U_{i_j}} \subseteq A_j \subseteq St(A_0, \mathcal{A}_m)$$

para toda $j \in \{0, ..., k\}$ y como $St(\mathcal{A}_m) \prec \mathcal{B}_{m-1}$, existe $B \in \mathcal{B}_{m-1}$ tal que $\Phi(x(U_{i_j})) \in B$ para toda $j \in \{0, ..., k\}$.

$\Diamond$

Por (ii), podemos extender para toda $m \geq 1$, $\Phi \mid_{\mathcal{P}_m^{(0)}}$ a una realización completa Ψ'_m de $\mathcal{P}_m$ en X relativa a $\mathcal{A}_{m-1}$, pero dado que $\mathcal{P}_m$ y $\mathcal{P}_{m+1}$ pueden intersectarse, la existencia de las extensiones no garantiza que si

$$\tau \in P_m \cap P_{m+1}, \quad \textit{entonces } \Psi'_m[\tau] = \Psi'_{m+1}[\tau]$$

lo cual necesitaremos para definir la retracción que estamos buscando.

Ahora, veamos por qué

$$\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_n = \emptyset \text{ si } |m-n| \geq 2.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad, que $m \geq n+2$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap B_m \neq \emptyset$ entonces $U \cap \overline{H}_m \neq \emptyset$. Luego, por $(3)_m$, por (ii) y por (iii), $U \subseteq H_{m-1} \subseteq H_{n+1}$. Entonces

$$B_n \cap U = (\overline{H}_n \backslash H_{n+1}) \cap U = \emptyset.$$

Es decir, cualquier vértice $x(U)$ de $\mathcal{P}_m$, no es vértice de $\mathcal{P}_n$ si $|m-n| \geq 2$.

Para garantizar lo anterior, extenderemos primero para toda $m \geq 1$, $\Phi\mid_{\mathcal{P}_{2m}^{(0)}}$ a una realización completa Ψ_{2m} de $\mathcal{P}_{2m}$ en X relativa a $\mathcal{A}_{2m-1}$ solamente, y para la parte que nos falta extender, consideraremos las posibles partes comunes que estos subpoliedros de $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ pueden tener. Para esto, definimos

$$\mathcal{T}_{2m+1} = \mathcal{P}_{2m+1}^{(0)} \cup (\mathcal{P}_{2m+1} \cap \mathcal{P}_{2m}) \cup (\mathcal{P}_{2m+1} \cap \mathcal{P}_{2m+2}).$$

Es claro que $\mathcal{T}_{2m+1}$ es un subpoliedro de $\mathcal{P}_{2m+1}$.

Ahora, definimos una función $\Phi_{2m+1} : \mathcal{T}_{2m+1} \to X$ dada por

$$\Phi_{2m+1}(x) = \begin{cases} \Psi_{2m}(x) & (x \in \mathcal{P}_{2m}), \\ \Phi(x) & (x \in \mathcal{P}_{2m+1}^{(0)}), \\ \Psi_{2m+2}(x) & (x \in \mathcal{P}_{2m+2}). \end{cases}$$

y así, encontraremos las extensiones Ψ_m's restantes que necesitamos.

Notemos que Φ_{2m+1} está bien definida y es continua, ya que Ψ_{2m} y Ψ_{2m+2} extienden a $\Phi\mid_{\mathcal{P}_{2m}^{(0)}}$ y a $\Phi\mid_{\mathcal{P}_{2m+2}^{(0)}}$ respectivamente, son continuas y $\mathcal{P}_{2m+1}^{(0)}$, $(\mathcal{P}_{2m+1} \cap \mathcal{P}_{2m})$ y $(\mathcal{P}_{2m+1} \cap \mathcal{P}_{2m+2})$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{T}_{2m+1}$, por el Corolario 3.2.1 .

Afirmación 4.0.3 *Para toda* $m \geq 1$*,* Φ_{2m+1} *es una realización parcial de* $\mathcal{P}_{2m+1}$ *en* X *relativa a* $(\mathcal{T}_{2m+1}, \mathcal{B}_{2m-2})$.

Demostración. Tomemos $\tau \in P_{2m+1}$, queremos encontrar $\beta \in \mathcal{B}_{2m-2}$ tal que $\Phi_{2m+1}[\tau \cap \mathcal{T}_{2m+1}] \subseteq \beta$. Por la Afirmación 4.0.2 , existe $B \in \mathcal{B}_{2m}$ tal que

$$\Phi[\tau \cap \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)}] \subseteq B$$

y como $\mathcal{B}_{2m} \prec \mathcal{A}_{2m}$, existe $A \in \mathcal{A}_{2m}$ tal que

$$\Phi[\tau \cap \mathcal{N}(\mathcal{U})^{(0)}] \subseteq A.$$

Sean $\sigma = \tau \cap \mathcal{P}_{2m}$ y $\varsigma = \tau \cap \mathcal{P}_{2m+2}$, entonces existen $A_\sigma \in \mathcal{A}_{2m-1}$ y $A_\varsigma \in \mathcal{A}_{2m+1}$ tales que

$$\Psi_{2m}(\sigma) = \Phi_{2m+1}(\sigma) \subseteq A_\sigma$$

y

$$\Psi_{2m+2}(\varsigma) = \Phi_{2m+1}(\varsigma) \subseteq A_\varsigma.$$

Observemos que $A \cap A_\sigma \neq \emptyset \neq A \cap A_\varsigma$, ya que si x es un vértice de $\sigma(\varsigma)$, $\Phi(x) \in A \cap A_\sigma(A \cap A_\varsigma)$ respectivamente.

Puesto que $\mathcal{A}_{2m+1} \prec \mathcal{A}_{2m}$ y $\mathcal{A}_{2m} \prec \mathcal{A}_{2m-1}$ entonces existen $\Omega, \Gamma \in \mathcal{A}_{2m-1}$ tales que $A \subseteq \Omega$ y $A_\varsigma \subseteq \Gamma$, entonces

$$\Omega, A_\sigma, \Gamma \subseteq St(\Omega, \mathcal{A}_{2m-1})$$

y como $St(\mathcal{A}_{2m-1}) \prec \mathcal{B}_{2m-2}$, existe $\beta \in \mathcal{B}_{2m-2}$ tal que

$$\Phi_{2m+1}[\tau \cap \mathcal{T}_{2m+1}] \subseteq \beta.$$

$\Diamond$

Por (ii), podemos extender para toda $m \geq 1$, Φ_{2m+1} a una realización completa Ψ_{2m+1} de $\mathcal{P}_{2m+1}$ en X relativa a $\mathcal{A}_{2m-2}$, y ahora sí podemos garantizar que para toda $m \geq 1$, si $\tau \in P_{2m} \cap P_{2m+1}$, $\Psi_{2m+1}(\tau) = \Phi_{2m+1}(\tau) = \Psi_{2m}(\tau)$.

Ahora, sea $\kappa : L\backslash X \to \mathcal{N}(\mathcal{U})$ la proyección canónica de la cubierta $\mathcal{U}$ definida en la Sección 3.3 . Observemos que $\kappa[B_n] \subseteq \mathcal{P}_n$ para toda $n \geq 0$, pues si $x \in B_n \subseteq L\backslash X$, existe un número finito de elementos de la cubierta $\mathcal{U}$ que contienen a x, digamos $U_{i_0}, ..., U_{i_k}$, entonces $\tau(x) = \{x(U_{i_0}), ..., x(U_{i_k})\} \subseteq \mathcal{P}_n$ ya que $\bigcap_{j=0}^{k} U_{i_j} \neq \emptyset$ y $U_{i_j} \cap B_n \neq \emptyset$, y $\kappa(x) \in \tau(x)$.

Definimos para cada $n \geq 0$,

$$\mathcal{Q}_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} \mathcal{P}_m$$

y $\Psi : \mathcal{Q}_2 \to X$ de la siguiente manera:

$$\Psi(x) = \Psi_m(x) \qquad (x \in \mathcal{P}_m\,, m \geq 2)$$

Notemos que Ψ está bien definida, por las Afirmaciones 4.0.2 y 4.0.3 , que es continua, pues la restricción a cada simplejo de Q_2 es continua, y que para toda $m \geq 3$, $\Psi\mid_{\mathcal{P}_m}$ es una realización completa de $\mathcal{P}_m$ en X relativa a $\mathcal{A}_{m-3}$, por la Afirmación 4.0.3 y porque $\mathcal{A}_{2m-1} \prec \mathcal{A}_{2m-3}$.

Finalmente definimos $r : \overline{H}_2 \to X$ dada por:

$$r(x) = \begin{cases} x & (x \in X), \\ (\Psi \circ \kappa)(x) & (x \in \overline{H}_2\backslash X). \end{cases}$$

Notemos que r está bien definida, ya que $\kappa[B_n] \subseteq \mathcal{P}_n$ para toda $n \geq 2$, también, $r[\overline{H}_2\backslash X] \subseteq X$, y como X es cerrado en L y $(\Psi \circ \kappa)$ es continua, sólo falta checar la continuidad en los puntos de la frontera δX de X, para asegurar que r es continua.

Para ver esto, tomemos $x \in \delta X$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{H}_2\backslash X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, queremos ver que $\lim_{n\to\infty} r(x_n) = x$. Como $x_n \in \overline{H}_2\backslash X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $x_n \in U_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} d(U_n, X) = 0$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} diam(U_n) = 0$ y $\lim_{n\to\infty}(z_{U_n}) = x$, por la Afirmación 4.0.1 ,

$$\lim_{n\to\infty} d(z_{U_n}, y_{U_n}) \leq 2 \lim_{n\to\infty} d(z_{U_n}, X) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} y_{U_n} = \lim_{n\to\infty} \Psi(x(U_n)) = \lim_{n\to\infty} z_{U_n} = x.$$

Ahora, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_{k_n}$.

Como $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, luego, podemos suponer que $k_n > 3$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $\kappa(x_n) \in \tau(x_n) \subseteq \mathcal{P}_{k_n}$, y $\Psi\mid_{\mathcal{P}_{k_n}}$ es una realización completa de $\mathcal{P}_{k_n}$ en X relativa a $\mathcal{A}_{k_n-3}$, existe $A_n \in \mathcal{A}_{k_n-3}$ tal que

$$\Psi(\kappa(x_n)) \in \Psi[\tau(x_n)] \subseteq A_n$$

y como $x(U_n) \in \tau(x_n)$,

$$\Psi(x(U_n)) \in \Psi[\tau(x_n)]$$

Entonces

$$\{\Psi(x(U_n)), \Psi[\kappa(x_n)]\} \subseteq A_n$$

Como $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} mesh(\mathcal{A}_{k_n-3}) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k_n-3)} = 0$, y por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} diam(A_n) = 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \Psi[\kappa(x_n)] = \lim_{n\to\infty} \Psi(x(U_n))$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} r(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Psi[\kappa(x_n)] = \lim_{n\to\infty} \Psi(x(U_n)) = x.$$

Entonces r es continua en δX, lo que muestra que r es una retracción y por lo tanto que X es un ANR.

$\square$

Un *continuo* de Peano es un espacio compacto, conexo y localmente conexo. El *hiperespacio* de un espacio X (2^X), es el conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de X con la topología que se deriva de la muy conocida métrica de Hausdorff, que es:

$$\rho_H(E,F) = \inf\{\epsilon > 0 : E \subseteq B(F,\epsilon) \ y \ F \subseteq B(E,\epsilon)\}.$$

Para subrayar la importancia del Teorema de Lefschetz-Dugundji, mencionemos que él constituye una de las herramientas en la demostración (no trivial) del siguiente importante Teorema de Wojdyslawski (la demostración se puede ver por ejemplo en [17, p. 292]):

Teorema 4.0.2 X *es un continuo de Peano si y sólo si* 2^X *es un AR.*

Bibliografía

[1] P.S. Alexandroff, *Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie*, Math. Ann. **96** (1926), 489-511.

[2] R. Arens y J. Eels, *On embedding uniform and topological spaces*, Pac. J. Math. **6** (1956).

[3] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Polish Scientific Pub., Warsaw, 1967.

[4] C.H. Dowker, *Retracts of metric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 645.

[5] J. Dugundji, *An extension of Tietze's Theorem*, Pac. J. Math. **1** (1951), 353-367.

[6] J. Dugundji, *Absolute neighborhood retracts and local connectedness of arbitrary metric spaces*, Compositio Math. **13** (1958), 229-246.

[7] R.H. Fox, *A characterization of absolute neighborhood retracts*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 271-275.

[8] O. Hanner, *Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces*, Arkiv Mat. **2** (1952), 315-360

[9] S.-T. Hu, *A new generalization of Borsuk's theory of retracts*, Indag. Math. **9** (1947), 465-469.

[10] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[11] I.M. James, *History of Topology*, Oxford University, UK, 1999.

[12] K. Kuratowski, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. **24** (1935), 269-287.

[13] S. Lefschetz, *Locally connected and related sets II*, Duke Math. J. **2** (1936), 435-442.

[14] S. Lefschetz, *On compacta spaces*, Annals of Math. **32** (1931).

[15] S. Mardešić y J. Segal, *Shape theory*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982.

[16] E. A. Michael, *Some extension theorems for continuous functions*, Pacific J. Math. **3** (1953), 789-804.

[17] J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001.

[18] M. E. Rudin, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 603.

[19] A. H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977-982.