UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SEMIOSIS Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO: UN ANÁLISIS TEÓRICO DE LOS RETOS DIDÁCTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

ANA GABRIELA HESSELBART MÁRQUEZ

DR. ALEJANDRO RICARDO GARCIADIEGO DANTAN

2008

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

A Gabi y Fede

Hoja de datos del jurado	
1.Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Hesselbart Márquez Ana Gabriela 56 89 99 93 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 300648047
2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	2. Datos del tutor Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan
3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	3. Datos del sinodal 1 M. en C. de E. Luz Arely Carrillo Olivera
4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	4. Datos del sinodal 2 Mat. Concepción Ruiz Ruiz-Funes
5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	5. Datos del sinodal 3 Mat. Renato Galicia Brito
6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno	6. Datos del sinodal 4 Mat. Julio César Guevara Bravo
7.Datos del trabajo escrito. Título Subtitulo Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Semiosis y razonamiento matemático: Un análisis teórico de los retos didácticos el aprendizaje de la demostración 91 p. 2008

Tabla de Contenido

Introducción

Actualmente existen un sinfín de aplicaciones de las matemáticas en diversas áreas del conocimiento, y de las primeras preguntas que surgen cuando se estudia a las matemáticas es cuál será su uso en la vida diaria, en la tecnología o en la sociedad en general. Además de las aplicaciones, existen también otros aspectos de las matemáticas, en los que el centro de atención no son las matemáticas como 'herramienta', sino la naturaleza de las matemáticas en sí. A lo largo de la historia, estos aspectos se han analizado desde puntos de vista tan apartados entre sí, como los son los de la psicología, la sociología, la historia, la filosofía, e incluso por la anatomía y la geografía etc. Esto, la perspectiva de cada área del conocimiento, sugiere una primera variable para determinar el rumbo a tomar al iniciar 'cierto' análisis en torno a las matemáticas. Por otro lado, una segunda variable surge cuando nos encontramos con la gran variedad de aspectos que se podrían analizar en relación con la naturaleza de las matemáticas. Así tenemos estas dos variables de las cuales surge una serie de combinaciones ('Perspectiva', 'Aspecto') con las que, hasta cierto punto, podemos clasificar el tipo de análisis a realizar: Cierto aspecto de las matemáticas a partir de algún enfoque en particular. Además de estas dos variables, podríamos considerar muchas más, dependiendo del tipo de aspecto o del tipo de perspectiva desde la cual se realiza el análisis, como por ejemplo: Desde una visión social o científica. Así, con esta premisa en mano, es que daremos inicio al análisis teórico que se expondrá en este texto; por un lado tenemos que la 'semiótica'[1] toma el papel de la perspectiva desde la cual se

[1] "Semiótica es, de acuerdo con la definición clásica, *la ciencia de los signos y su vida en la sociedad*" [Winsløw 2004, 1].

abordará la problemática, y por otro lado, en el puesto del 'Aspecto' u 'objeto' de análisis, está el 'razonamiento matemático' que se emplea en la demostración matemática. El objetivo principal de esta empresa es el de realizar un análisis semiótico-cognitivo, en el cual salgan a la luz, de una forma clara y precisa, los obstáculos que se les presentan en el camino del aprendizaje de la demostración a la mayoría de los estudiantes en preparatoria o en los primeros años de educación superior.

El análisis en este proyecto, se realizó principalmente a partir de una selección de la teoría elaborada por Raymond Duval a lo largo de los últimos doce años (1995-2007). Sin pretender ser un compendio de sus teorías cognitivas, en este proyecto presentaré de la forma más concisa posible, los rasgos más importantes de su teoría ya que eso nos ayudará a comprender el problema del aprendizaje de la demostración desde la raíz.

La demostración juega un papel fundamental en la construcción de las teorías matemáticas, sin embargo esta es una de las actividades menos comprendidas y más difíciles de adquirir. De igual forma, es para los profesores todo un reto enseñar a los estudiantes el camino a seguir para lograr su dominio. En general, lo único que se les dice a los alumnos cuando aprenden a demostrar, es que se necesita práctica y 'razonamiento'. Algunas de las preguntas más comunes, que surgen durante los primeros semestres de una licenciatura en matemáticas, son por ejemplo: ¿Cuáles son los pasos que se 'deben' seguir para demostrar?, ¿Cómo saber cuando hemos cometido un error?, o ¿cuándo en verdad se prueba algo?, ¿Cómo hacer para no convencerse con demostraciones 'falsas'? etc.

Debido a que la demostración es esencial en matemáticas, también lo es abordarla en el marco de la educación matemática. En particular, un reto importante que tiene esta, es el conocer a fondo cuáles son los procesos cognitivos que permiten al estudiante entender realmente qué es demostrar un enunciado. A lo largo de este proyecto nos daremos cuenta de qué tan complejos son los procesos subyacentes al razonamiento matemático, ya que sólo de esa forma es que lograremos entender desde 'la raíz' las dificultades y características que se presentan al aprender a demostrar.

En el primer capítulo esbozaremos las características principales de la semiótica y de su aplicación en el estudio de las matemáticas en sí, en particular del razonamiento matemático. En el segundo capítulo, veremos una breve introducción de lo que es la didáctica de las matemáticas y más tarde una introducción a las características principales del enfoque cognitivo. Además, en este mismo capítulo, abordaremos una razón más por la cuál seguir, desde un punto de vista cognitivo-semiótico, el análisis de las actividades matemáticas en general. En el tercer capítulo, tendremos la oportunidad de adentrarnos en los principales temas que influirán en el desarrollo de este proyecto. Es aquí donde exploraremos las características de las representaciones y su clasificación; e introduciremos conceptos importantes como son: los registros de representación semiótica y sus transformaciones (tratamiento y conversión). Analizaremos el obstáculo que representa el cambio de registro y cuán frecuente es en matemáticas. Por último, en este mismo capítulo, encontraremos una sección dedicada al discurso, donde definiremos aspectos importantes de este, como lo son las funciones y operaciones discursivas. De esta forma, crearemos un vínculo que nos permita contar con los elementos necesarios para el desarrollo del cuarto capítulo, el cual se dedica por completo al análisis detallado de lo que es el razonamiento matemático. A través de la distinción de los tipos de razonamiento que hay, sus organizaciones y estructuras, lograremos adquirir un conocimiento más profundo y contundente acerca del funcionamiento y la validez de las demostraciones. Básicamente, en este cuarto capitulo, nos enfocaremos en los razonamientos que están intrínsecamente ligados al uso del lenguaje, esto, debido a la importancia que tienen en matemáticas. Además, consideraremos cuáles son las características que hacen de una expansión discursiva una demostración. El nivel de comprensión (de los procesos cognitivos detrás de la demostración) que buscamos, se logrará con la ayuda de tres análisis esenciales: El lógico, el funcional y el estructural.

Por último, para concluir este proyecto, en el quinto capítulo, haremos uso de toda la teoría expuesta a lo largo los primeros cuatro capítulos, con el fin de analizar los retos didácticos que se presentan al aprender a demostrar. Para así, encontrar un camino razonable que nos guíe hacia el entendimiento y la solución de los principales malentendidos que se tienen acerca de la demostración.

Capítulo 1

Semiótica

La música, las señales de tránsito, la cocina, nuestra vestimenta, la lengua natural, etc. Son actividades o sistemas estructurados, que llamaremos 'sistemas humanos', con los cuales estamos profundamente familiarizados en nuestra vida diaria. Los sistemas humanos, a pesar de que a primera vista parecen no tener relación alguna entre sí, en efecto tienen algo en común: de una u otra forma utilizan signos. Un signo es mucho más que una simple notación, un signo implica una 'relación' compleja, en la que varios factores intervienen. A lo largo de la historia se han dado diferentes definiciones para esta relación. Una de ellas destaca que en un signo siempre hay implícitamente un 'objeto' de por medio. El objeto es 'algo' material o abstracto con cierto contenido 'representado'[1] en el signo. Ahora bien, si nos enfocamos explícitamente en lo que es un signo, encontramos dos 'partes' fundamentales que definen al signo; por un lado tenemos al contenido[2] del objeto representado en el signo ('significado') y, por otro lado, esta la forma en la cual el objeto es representado, es decir, la expresión material del signo ('significante').

El concepto de signo es complejo ya que en él se engloban al mismo tiempo elementos como: Contenido, significado, significante, objeto, e incluso un contexto de enunciación. Pero estas complejidades del signo salen a la luz luego de un análisis cuidadoso, en el que el signo es 'desmenuzado' en cada uno de los elementos que lo integran. Empíricamente utilizamos signos en la vida diaria, en

---

[1] En el capítulo tres analizaremos el concepto de representación y como, a través de los años, ese concepto ha ido evolucionando.

[2] El contenido, representado en un signo o representación, es inseparable de la forma en la cual es representado, además está completamente determinado por el sistema (de signos) en el cual se produjo.

toda clase de contextos y la mayoría de las veces el 'paquete de información' que los signos conllevan, van del emisor al receptor sin ningún problema; no obstante, la definición de signo y la identificación de sus elementos está lejos de ser intuitiva.

En este proyecto nos apegaremos a la definición que considera al signo como una representación la cual está en constante cambio, y que además depende del sistema semiótico en el cual se utilice [Duval 1998, 1].

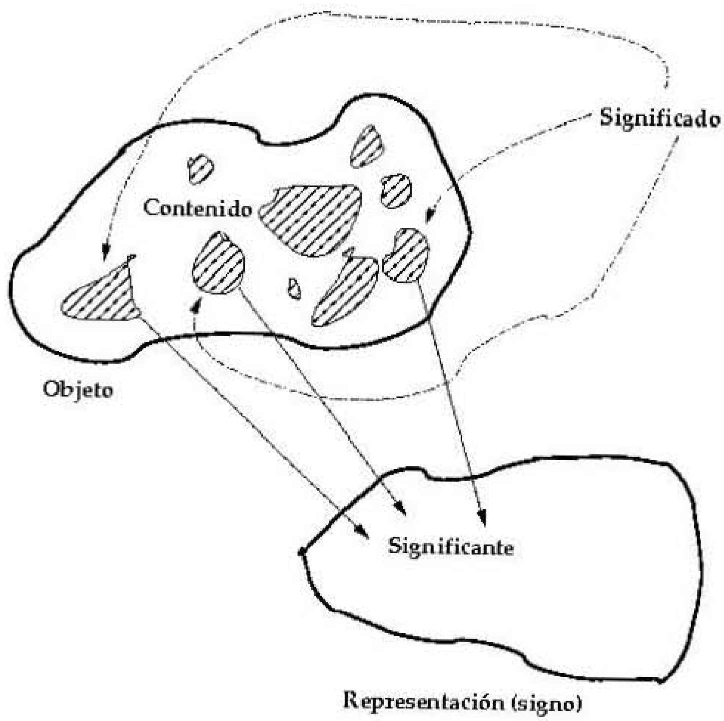


Figura 1.1 En esta figura tenemos un ejemplo de como visualizar la organización del signo. El signo se muestra como la proyección (de parte del contenido de cierto objeto) en una representación, la cual 'vive' en otro nivel; de ahí el nombre de representación para los signos.

En los sistemas humanos, como hemos mencionado, el uso de signos es una constante, debido a esto, los sistemas humanos pueden analizarse sistemáticamente con ayuda de la semiótica. La semiótica es el estudio, desde un punto de vista lingüístico-estructural, de los sistemas humanos de signos [Winsløw

2004, 1]. Los signos tienen como propósito común el de comunicar 'algo', pero su verdadero valor va más allá de la comunicación, para descubrirlo es necesario adentrarnos un poco más en lo que son los signos y lo que los rodea, desde la perspectiva de la semiótica.

Ahora a partir de este punto, la cuestión acerca de los sistemas humanos de los signos y de sus estructuras, abarca una gran cantidad de sistemas de signos. Si, por un lado, es un hecho que cocinar, la música, o el lenguaje natural pueden analizarse desde la perspectiva de la semiótica, es decir, considerándolos sistemas humanos de signos, entonces es perfectamente comprensible que nos preguntemos que tan factible sería utilizarla para analizar el razonamiento matemático. Para introducir esta inquietud basta darnos cuenta que cada vez que trabajamos con matemáticas, en toda actividad matemática, lo hacemos por medio de representaciones de objetos matemáticos que nos dan 'acceso' a los objetos mismos. En otras ciencias, por ejemplo en la Biología o la Geología, el tratamiento de los objetos respectivos a cada una de esas ciencias, se puede realizar directamente con los objetos de estudio; es posible analizar directamente las características de los minerales, de los animales o las plantas, sin necesidad de una representación. Caso contrario es el de las matemáticas, en las que el 'manejo' de los objetos matemáticos (e.g., gráficas, campos, números, relaciones) se puede hacer exclusivamente a través de signos o representaciones. A primera vista, la creación de signos o representaciones se hace con el propósito de comunicar, del emisor al receptor, cierta información contenida en el paquete llamado representación; en matemáticas comunicar por medio de representaciones es sólo una faceta, ya que ahí, estas son dinámicas y se encuentran en constante cambio, debido a que experimentan transformaciones que van de la mano de actividades matemáticas como son: calcular, demostrar, resolver problemas, etc. El manejo, movilización y creación de signos es a lo que en semiótica se le llama 'semiosis'.

1.1 Semiosis y noesis

Hasta ahora, hemos dado la razón por la cual tiene sentido hacer un análisis semiótico de la actividad matemática. Otro punto que interviene en este proyecto es análisis del aprendizaje, ya que como se mencionó anteriormente, nos enfocaremos en los obstáculos que se presentan al prender a demostrar.

En este momento es adecuado resaltar una 'doble aplicación' que haré de la semiótica en este proyecto. Por un lado, ya he mencionado la aplicación de la semiótica en el estudio de las matemáticas en sí, por otro lado, también tiene sentido usar argumentos propuestos por la semiótica, para analizar las condiciones en las que se presenta el aprendizaje de cierto conocimiento, en este caso, aprender a demostrar. Para ejemplificar más claramente este punto citaré el siguiente enunciado al que Duval [1995, 4-5, 22] llama *la ley fundamental del funcionamiento cognitivo* que dice: "No hay noesis sin semiosis" es decir, la semiosis[1] es necesaria para la noesis. La noesis es el acto intencional de intelección, en otras palabras, la noesis se puede definir como la acción y efecto de entender. Este asunto nos lleva a un plano más filosófico en el que tendríamos que analizar rigurosamente en el que cuestionaríamos si realmente la ley que decreta Duval se aplica en todo caso de noesis. Por el momento, esa discusión la dejaremos de lado y consideraremos a dicha ley como un posible argumento a favor en el empleo de las teorías semióticas en el presente análisis.

[1] Como mencionamos anteriormente, la semiosis es el tratamiento, la movilización y la creación de signos.

Capítulo 2

Didáctica de las matemáticas desde un enfoque cognitivo

"El problema fundamental en la adquisición del conocimiento radica en el acceso a los objetos del conocimiento" [Duval 1998a, 141]. Este es un enunciado clave que será utilizado ampliamente a través de éste proyecto para ligar las ideas detrás de semiosis y matemáticas. Desde un punto de vista cognitivo,[1] el enunciado de Duval, sin rodeos, identifica el problema de la adquisición[2] de conocimiento. Para poder analizar los retos didácticos que se presentan al aprender a demostrar, debemos tener una idea clara de cuales son las propiedades y dificultades del acceso a los objetos del conocimiento.

Por años, los objetos del conocimiento han sido sujetos de discusión entre psicólogos, filósofos, y hasta matemáticos. Desde que uno nace, uno comienza a adquirir conocimientos a través de cada actividad en la que uno participa. Esta construcción de conocimiento depende de un conjunto de actividades cognitivas como son: Razonar, resolver problemas, conceptualización, comprensión de textos etc. cuya importancia, como procesos subyacentes al aprendizaje, en la práctica

---

[1] En las siguientes secciones abordaremos más detalladamente que es un enfoque cognitivo y por qué lo he elegido en este análisis del razonamiento matemático.

[2] Es importante destacar el peso que tiene la frase "adquisición de conocimiento"; mientras para algunos 'adquisición' no es el verbo apropiado cuando nos referirnos a aprender-entender cierto conocimiento, considero que en este caso funciona perfectamente al destacar el propósito último del aprendizaje. Adquirir cierto conocimiento significa hacerlo de uno, por lo tanto ser capaz de movilizarlo, o transformarlo. En la práctica, cuando decimos aprender algo, nunca nos referimos a saber algo de memoria o almacenarlo de tal forma que no haya posibilidades de relacionarlo, utilizado o movilizado junto con conocimientos ya aprendidos.

pasa desapercibida. En este proyecto nos conciernen específicamente los procesos subyacentes al aprender a demostrar conocimiento matemático, ya que la demostración juega un papel fundamental en la actividad matemática de hoy día en todo el mundo.

A través del desarrollo de este análisis, tendremos que acomodar armónicamente las piezas que forman este complejo rompecabezas llamado adquisición del conocimiento. Y, al igual que como sucede con los rompecabezas, al acomodar acertadamente las piezas que lo forman, tendremos como recompensa una visión más general y completa del problema que se tiene al aprender a demostrar, lo que espero resulte en una oportunidad para emitir conclusiones de valor acerca del problema.

Las matemáticas juegan un papel fundamental en el desarrollo individual del ser humano. Contribuyen al fomento de las capacidades de razonamiento, análisis, y visualización [Duval 2002, 1]. En la mayoría de las culturas y niveles de educación, desde el jardín de niños hasta el nivel medio superior e incluso hasta en un gran porcentaje de programas universitarios, se enseñan matemáticas. Sin embargo, al mismo tiempo las matemáticas son de los cursos más odiados y temidos. Esta polarización es exactamente uno de los retos más importantes que enfrenta la investigación en didáctica de las matemáticas.

La investigación dentro de la didáctica de las matemáticas, a lo largo del tiempo, desde su nacimiento, ha tomado diferentes direcciones. En las actividades de aprendizaje y enseñanza existe una serie de elementos que continuamente interactúan entre sí, y crean de este modo cierto 'medio'. Debido a esto, es posible tomar en cuenta ya sean: los problemas relacionados con el individuo, *i.e.* los estudiantes y/o el profesor, o los problemas relacionados con el diseño de las clases o de los temarios [Duval 2006b, 1].

Los problemas relacionados con los diseños de clase o de temario están enfocados principalmente en resolver preguntas tales como: ¿Cómo implementar métodos de enseñanza más eficaces que motiven al estudiante en clase?, ¿qué temas deben estar incluidos en un programa anual de cierta materia?, ¿en qué secuencia se deberían organizar los temas en el programa anual? Por otro lado tenemos que los problemas relacionados con el individuo en un ambiente de aprendizaje, han llevado a la didáctica de las matemáticas a explorar tres asuntos principales [Duval 2006b, 1] que enlistamos a continuación:

1.La producción de los estudiantes en situaciones de cooperación. Esto se refiere al interés por analizar lo que producen (matemáticamente) los estudiantes, cuando estos se encuentran en situaciones de cooperación e interacción con otros alumnos. En el estudio de esta cuestión, se busca determinar su capacidad (individual) para resolver problemas matemáticos;

2.Las dificultades de comprensión relacionadas con las concepciones del estudiante. En este caso, se estudian las implicaciones que tienen, en la comprensión de nuevos conocimientos, los malentendidos o concepciones erróneas adquiridas previamente.

3.El desempeño cognitivo requerido en la actividad matemática. Esta línea de investigación se ocupa en desentrañar qué tipo de desempeño se requiere, a nivel cognitivo, para tener éxito en las actividades matemáticas o simplemente en el pensamiento matemático.

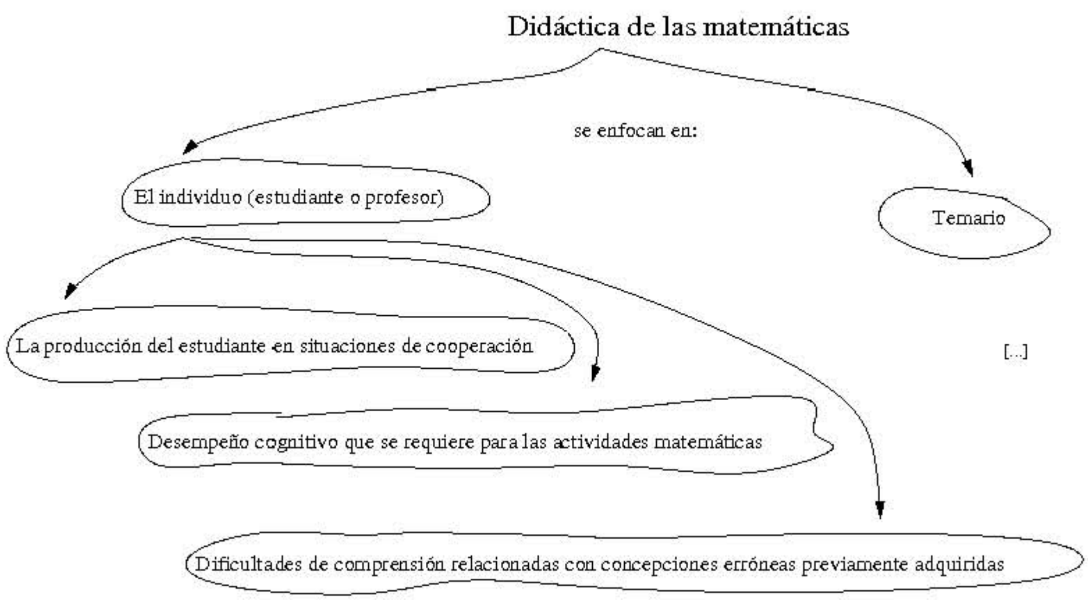


Figura1.2 Esta figura muestra una posible forma de organizar las áreas de investigación en didáctica de las matemáticas, basada de acuerdo con las inquietudes de estudio, dando preferencia a describir la organización que se da en el caso de que la atención se centre en el individuo.

Debido a que el tema de este proyecto se enfoca directamente en la perspectiva cognitiva, preferiría no entrar en detalles en el caso en el que el centro de atención (de la investigación en didáctica de las matemáticas, IDM) no sea el individuo.

Ahora, ha llegado el momento de explicitar 'oficialmente' una de las razones por las que me incliné a seguir el enfoque cognitivo para el desarrollo de este proyecto. Como dije anteriormente, al elegir qué dirección tomar, para analizar las dificultades del entendimiento de las matemáticas, tenemos una gran variedad de opciones. Pero, si ponemos atención en cómo es que la IDM se ha conducido para resolver y analizar los problemas de aprendizaje de las matemáticas, encontraremos que "el estudio de los mecanismos cognitivos e inquietudes referentes al estudiante de matemáticas (como individuo), han sido tema central y fundamental entre las áreas de IDM" [Winsløw 2004, 9]. Debido a esto, el camino que nos lleva a realizar un análisis cognitivo del problema en cuestión, parece no estar tan errado, además de que eso significa también más herramientas para nosotros en el momento de abordar el problema de la demostración matemática.

Ya hemos dicho que nos enfocaremos específicamente al individuo como estudiante, y por otro lado, al problema de describir, lo más claro posible, como son los procesos cognitivos detrás del aprendizaje matemático. Ahora las opciones se han reducido sustancialmente, ya que tenemos básicamente dos opciones [Duval 2000, 60]. La razón de que contemos únicamente con dos opciones ('modelos') radica en que distintas preocupaciones, o mejor dicho, diferentes formas de entender el problema del aprendizaje de las matemáticas en sí, nos lleva a distintas formas de analizar el problema, dando como resultado distintos modelos: Los modelos de 'desarrollo' y los modelos 'cognitivos'.

La personalidad de cada modelo se muestra como sigue: Por un lado tenemos uno (el de desarrollo), al que le preocupa en primera instancia cómo es que sucede el incremento de conocimientos; por ejemplo, ya sea al ir detrás de las huellas históricas, mediante un análisis histórico de la evolución de los conocimientos matemáticos, o cómo es que el niño se percata de los conocimientos matemáticos. En otras palabras, podemos decir que la característica principal de los modelos de desarrollo es que explican los "procesos de aprendizaje a través de 'esquemas comunes' que darían cuenta de cualquier incremento en el conocimiento" [Duval 2000,61]. Por otro lado, tenemos que los "modelos cognitivos se centran en la complejidad cognitiva del funcionamiento del pensamiento humano" [Duval 2000,61]. Así, en un modelo de este tipo dentro de la didáctica de las matemáticas, la meta principal es determinar el funcionamiento cognitivo detrás de la gran variedad de actividades matemáticas, así como de los procesos de pensamiento específico que se requieren para su aprendizaje; es decir, tales como: el tratamiento de figuras, los modos de razonamiento, el entendimiento de conceptos matemáticos, etc.

Un ejemplo del tipo de las preguntas que puede ayudar a responder un modelo cognitivo, es una tal como la que formuló Duval [2000, 61]: "¿Cuáles son las condiciones cognitivas internas que se requieren para que cualquier estudiante pueda entender matemáticas en cualquier grado, a nivel básico o medio superior?".

Capítulo 3

Representaciones

3.1 Representaciones semióticas

"No hay conocimiento movilizable[1] sin una actividad de representación" [Duval 1995, 15]. Este enunciado parece ser razonable si nos detenemos, por un momento, a pensar que es lo que necesitamos para movilizar conocimiento. Intuitivamente, se necesita un 'medio' que contenga el conocimiento, es decir un modo de 'describir', 'tratar', o 'empaquetar' la información, de tal forma que sea posible su movilización. En este sentido podemos introducir formalmente los tres polos constitutivos de toda representación: 1. El objeto representado; 2. El contenido de la representación, es decir el contenido de cierto objeto presente en una representación; y, 3. La forma en la que está representado, es decir el modo.

[1] En este texto utilizaré el termino 'movilizar' en dos sentidos: Movilizar conocimiento y movilizar registros de representación, donde la primera acepción implica una serie de acciones tales como: Aplicar, comunicar, transformar, reacomodar, o simplemente 'mover' cierto conocimiento.

Un claro ejemplo de lo que significa movilizar conocimiento es el siguiente: Consideremos el estudio de los límites (a nivel preuniversitario), entre las actividades a realizar para satisfactoriamente entender la teoría de los límites se encuentran: aprender la definición formal, graficar y visualizar ejemplos que muestren la idea de límite, calcular y reconocer una gran variedad de 'tipos' de límites, etc. Después de haber realizado estas acciones, se supone que el estudiante es capaz de ligar la teoría de límites con el tema siguiente: la teoría de derivación. Es sólo a través de una secuencia de actividades cognitivas, como la descrita anteriormente, que el estudiante moviliza y adquiere el conocimiento. Por otro lado, la segunda acepción, se dice en el sentido de 'transformación', más adelante entraremos en las definiciones y los detalles acerca de las transformaciones y los registros de representación.

No tenemos que ir tan lejos cuando hablamos de representaciones y matemáticas, ya que hay una razón aún más fuerte para justificar la necesidad de realizar actividades de representación en matemáticas: La naturaleza de los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos se pueden describir como objetos abstractos, inobservables, no-físicos, etc. Para tener acceso a ellos, se necesitan representaciones. Si pensamos en el conocimiento matemático y en como manejamos sus objetos (e.g., funciones, grupos, relaciones, figuras geométricas, transformaciones, etc.), nos daremos cuenta rápidamente de lo indispensable que son las representaciones, ya que no es posible percibir, manipular o trabajar (directamente) con objetos matemáticos. No podemos ver una función sin la 'ayuda', por ejemplo, de una expresión algebraica o una gráfica; incluso, no podemos ni siquiera saber a que función nos referimos sin siquiera mencionarla a través de la lengua[1]. Debido a esto las actividades de representación son imprescindibles en la actividad matemática.

A través de los años, ha aumentado el interés por reflexionar acerca de las representaciones y sus cualidades; Duval [1995, 15] dice eso se debe a la preocupación por las cuestiones relacionadas con la constitución de un conocimiento cierto. Exactamente ese es el caso en este proyecto, el cual tuvo origen en el interés por describir[2] certera y objetivamente el razonamiento matemático como un conocimiento cierto y objetivo; Así es que eso nos llevó a analizar distintos elementos (e.g., representación, discurso) esenciales para el aprendizaje, para luego ligarlos al razonamiento matemático.

En términos generales, Piaget se dedicó al estudio de los fenómenos relacionados con la percepción y la adquisición del conocimiento. Las representaciones aparecen en sus análisis en el sentido de representaciones 'mentales', con respecto a las creencias sobre el mundo físico o como una mera 'evocación de los objetos ausentes', especialmente en sus estudios: *La*

[1] Más tarde enfatizaremos la importancia de distinguir entre representaciones y el objeto que, valga la redundancia, representan; confundirlos es común y resulta en problemas de comprensión.
[2] Una descripción objetiva del razonamiento matemático es en sí misma conocimiento, por lo tanto tenemos conocimiento acerca de 'conocimiento'.

Represéntation du Monde chez l'enfant y *La Naissance de l'intelligence chez l'enfant*. Aunque la visión de Piaget acerca de las representaciones fue un primer paso para el desarrollo de las teorías siguientes, éstas fueron hasta cierto punto opuestas a su teoría; como sucedió entre los años 1955 y 1960 cuando las teorías computacionales consideraban a las representaciones como 'internas' o 'computacionales'. "Estas teorías se enfocan en el tratamiento [de información] recibida, por un sistema, de tal modo que produzca una respuesta adaptada" [Duval 1995, 16]. Esta nueva perspectiva considera la representación como una codificación de información, donde la representación es el 'modo' de describir y considerar cierta información en el contexto de de un sistema de tratamiento.

En diferentes áreas del conocimiento, encontramos algunas disciplinas que han contribuido a la búsqueda de respuestas para las preguntas que surgieron luego del nacimiento de la teoría computacional de las representaciones. Entre estás disciplinas encontramos: Psicología cognitiva y psicolingüística; además de ciertas investigaciones en torno a la memoria semántica. Estas disciplinas que se enfocan principalmente en cuestiones acerca de cómo es que la información externa entra en un sistema determinado. Paralelamente existen modelos, que se han desarrollado dentro del marco de inteligencia artificial, que han contribuido a la indagación respecto a la utilización de la computación como una transformación de información, es decir por medio de un tratamiento de información.

Una teoría un tanto diferente vino después (alrededor de veinte años), con la idea de las 'representaciones semióticas', donde dos puntos principales se toman en cuenta: 1. Las 'representaciones semióticas' están relacionadas con ciertos 'sistemas de signos', como lo son la lengua, el álgebra, las gráficas, etc; 2. Dentro de un sistema de signos, una representación semiótica *(a)*, en el contexto de un sistema semiótico *A*, se puede 'convertir' en una representación equivalente *(b)* dentro de otro sistema semiótico *B* dando como resultado una 'nueva representación equivalente'*(b)* que podría tener diferentes significados para el sujeto que realizó la 'conversión'[Duval, 1995].

Entonces, cuando nos referimos a las representaciones semióticas, se involucran diferentes sistemas semióticos, así como una operación cognitiva llamada 'conversión'. En otras palabras, convertir una representación significa cambiar (de un sistema a otro) la forma en la que el conocimiento está en esta. Es importante resaltar que al convertirla, su significado y contenido cambian. En matemáticas, un ejemplo de esta operación cognitiva es el pasaje, de un sistema semiótico como el álgebra, a otro como el plano cartesiano, es decir: Graficar una función es una conversión. En matemáticas existe una infinidad de ejemplos de esta transformación, más adelante veremos algunos de estos. Hay ciertos puntos que deben quedar claros respecto a la conversión, especialmente en el plano de la didáctica de las matemáticas, más tarde entraremos en detalles en relación con las características fundamentales de la conversión.

Luego de las primeras teorías que aparecieron en torno a las representaciones semióticas, han surgido 'nuevas' teorías, como la de Duval, que se desarrollan con el mismo propósito, pero añaden otras características (anteriormente no consideradas) al análisis, como por ejemplo el reconocimiento de la influencia que tienen las representaciones semióticas en las actividades cognitivas. Lo cual, especialmente en la teoría de Duval, es tan sólo el comienzo para el extenso análisis de (algunas de) las raíces más profundas que están detrás del pensamiento humano. Esto abre las puertas a nuevas posibilidades para la comprensión y el razonamiento, y es justo a partir de esta perspectiva, que el análisis de las propiedades de las representaciones toma mayor importancia.

3.2 Registros semióticos de representación

Para este momento, en términos generales, ya hemos visto qué es una representación semiótica, pero el esquema aún no está completamente dibujado. Todavía podemos analizar las representaciones semióticas desde otros ángulos, especialmente con relación al papel (fundamental) que desempeñan en la actividad matemática.

Recordemos la relación semiosis-signo. Anteriormente, definimos semiosis como 'la creación y transformación de los signos'; ahora seremos más específicos al introducir las tres actividades cognitivas que desempeñan un papel fundamental en la actividad de representación, y al mismo tiempo son esenciales para las 'actividades cognitivas de semiosis': 1. 'Formación' de representaciones en un 'registro semiótico' en particular, ya sea para expresar representaciones mentales o para evocar a un objeto real; 2. 'Tratamiento', una transformación dentro del mismo registro; y, 3. 'Conversión', una transformación que resulta en una representación dentro de otro registro.

Duval [1995, 21] dice que a un sistema de representación se le llama registro de representación semiótica cuando satisface las tres 'actividades cognitivas que son inherentes a toda representación': 1. Si constituye un conjunto de 'marcas' perceptibles que nos permitan identificarlas como una representación de algo en un sistema dado; 2. Las representaciones se puedan 'transformar dentro de un sistema semiótico', mediante un tratamiento, de acuerdo con las reglas que lo rijan, tal que la representación que se obtenga de dicho tratamiento, constituya una ganancia de conocimiento en comparación con la representación inicial; y, 3. La representación se puede 'convertir de un sistema a otro', de tal forma que la representación resultante le permita a uno hacer explícitos otros significados relacionados con lo que se representa.

Ahora es importante resaltar el hecho de que no todo sistema semiótico satisface las tres actividades, por lo tanto no todo sistema semiótico es un registro de representación semiótica [Duval 1995, 22]. Veamos un ejemplo de registro semiótico, consideremos la definición de convexidad:

> Una función f es convexa en un intervalo, si para todo a y b de este intervalo, el segmento rectilíneo que une a $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f[Spivak 1999, 302-303].

La definición anterior corresponde a una representación 'del concepto de convexidad' dada en el sistema de la lengua, la cual es un registro semiótico, ya que contiene marcas lingüísticas que nos permiten identificar el contenido, es decir, sabemos a que se refiere. Además, podemos parafrasearla, lo que en términos de actividades cognitivas se traduce en una transformación dentro del mismo sistema; y, por último, al expresar analíticamente la definición de convexidad, lo que cognitivamente se hace es convertir la representación a un sistema mixto en el cual rigen las reglas de la lengua y de la álgebra.

El caso que nos interesa analizar en este proyecto, es el de los registros semióticos dentro de la actividad matemática, la cuál incluye otros además del de la lengua. Para ver un ejemplo más tangible de la presencia y utilización de los registros semióticos en matemáticas retomemos el ejemplo anterior en el que citamos la definición de función convexa. De manera analítica la definición se puede expresar como:

La recta entre *(a, f(a))* y *(b, f(b))* es la gráfica de la función *g* definida por:

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

y queda por encima de la gráfica de *f* en *x* si *g(x)>f(x)*, es decir, si:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)>f(x)$$

Entonces, por medio de operaciones algebraicas podemos transformar la representación, dentro del mismo sistema y obtener otras representaciones que dejan explícita otra información, como se muestra a continuación:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)>f(x)-f(a)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \ldots (i)$$

Ahora, lo que ésta definición nos dice lo podemos ver en una gráfica como la que se muestra en la figura 3.1, al dibujar esa gráfica cognitivamente realizamos una conversión, de un sistema algebraico a uno gráfico, en donde es posible apreciar información que no estaba implícita en la definición analítica, ni en la verbal. Con esto vemos como la definición analítica es un registro semiótico de representación (se puede convertir, transformar y además contiene marcas que la hacen identificable como una representación de la definición de convexidad).

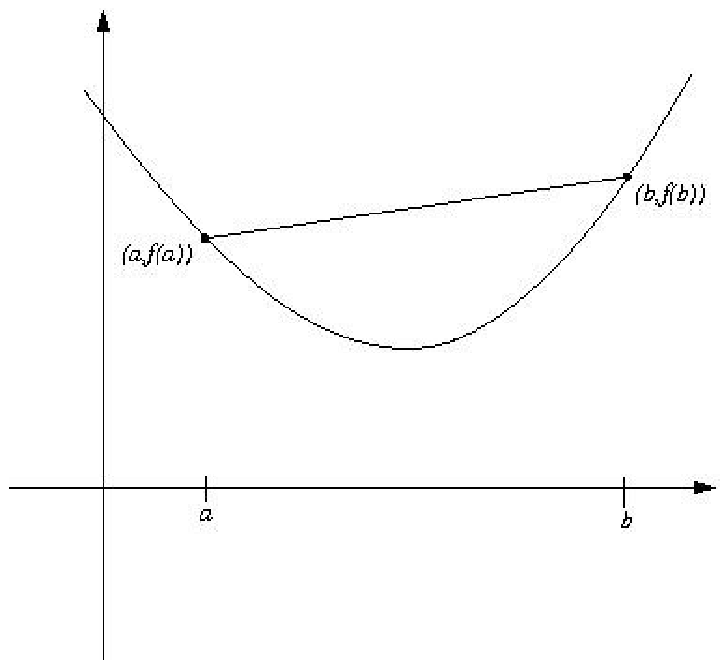


Figura 3.1 Representación gráfica del significado de "función convexa".

Por medio de este ejemplo es posible darse cuenta de que el contenido, del objeto matemático, en este caso, el de las funciones convexas, difiere de una representación a otra. Asimismo, es interesante resaltar que convertir la desigualdad (*i*) en una representación gráfica como la de la figura 1.3

probablemente no presenta gran dificultad para el estudiante, en comparación de lo que sería lo contrario, es decir, poner en términos algebraicos el contenido de una gráfica; ya que el costo cognitivo sería mucho mayor.

Hasta este momento, hemos mencionado algunos registros de representación (e.g., la lengua, el álgebra) además de estos también son registros de representación los lenguajes simbólicos, las gráficas o las figuras geométricas entre otros [Duval 1995, 22]. Estas ideas nos conducen a analizar con más cuidado las representaciones y su relación con las matemáticas: ¿Qué tan estrecha es esta relación? y ¿qué tan indispensables son las representaciones en las matemáticas? Anteriormente mencioné algunos aspectos generales con respecto a la necesidad de usar representaciones en las actividades matemáticas; pero ahora nuevas nociones se requieren ya que hemos especificado un poco más el 'simple' acto de representar objetos matemáticos, por medio de la introducción de los registros semióticos de representación.

> La función más importante de los signos y representaciones en matemáticas no es la comunicación ni la evocación de objetos ausentes, sino el tratamiento de la información, es decir la transformación intrínseca de las representaciones en otras que contengan nueva información o nuevo conocimiento [Duval 2006b, 11].

Más adelante analizaremos la importancia de los registros en matemáticas y los obstáculos que se presentan en los procesos de entendimiento, especialmente al cambiar de registro.

3.3 Clasificación de las representaciones

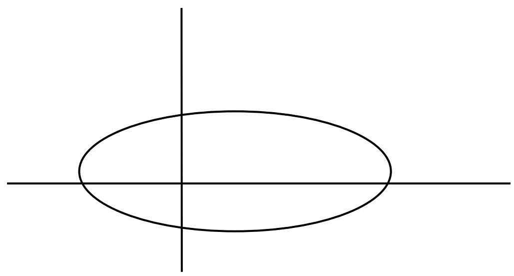
Hasta ahora hemos abordado diferentes teorías acerca de las representaciones donde hemos visto tres principales tipos: Mentales, computacionales y semióticas.

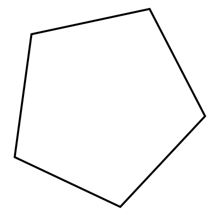
Ahora seguiremos un análisis más profundo, en el que con ayuda de una clasificación detallada de estas, veremos cuales son las principales cualidades de cada uno de los diferentes tipos de representaciones. Como el objetivo de este proyecto apunta hacia las 'representaciones semióticas', pondremos especial énfasis en su análisis, dando al lector una perspectiva de cuan completas son, al hablar de las funciones que satisfacen, en comparación con los demás tipos. Antes de iniciar con el análisis de los tres tipos de representaciones que ya hemos mencionado, introduciré dos oposiciones clásicas que deben tomarse en cuenta cuando se hace una caracterización de estas; estas oposiciones son: Conciente/inconsciente y externa/interna. Un factor que analizaremos en esta sección es que estas dos oposiciones no son una partición de los fenómenos cognitivos, ya que las funciones y cualidades de cada tipo de representación se entremezclan cuando tomamos en cuenta las dos oposiciones [Duval 1995, 24-25].

3.3.1 Oposición consciente/inconsciente

Esta oposición se refiere a lo que el sujeto obtiene o no de una representación luego de percibirla, casi instantáneamente y sin meditarlo o decidirlo; habrá cosas de una representación dada, que el sujeto percibirá con mayor facilidad que otras, incluso habrá aspectos del significante, que el sujeto ni siquiera percibirá aun cuando se encuentran en la representación. Se habla de consciencia cuando inmediatamente después de 'mirar' una representación, esta adquiere el estatus de objeto para el sujeto que la miró. Al proceso cognitivo de tomar consciencia de algo, es decir, pasar de lo no consciente a lo consciente, se le conoce como 'objetivación' y corresponde al descubrimiento por el mismo sujeto de lo que hasta el momento le era insospechable, incluso luego de que otros se lo hubieran explicado. [Duval 1995, 24]. Es a través de la 'significación' que se hace posible la aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto, además podemos decir que la significación es condición necesaria para la objetivación del sujeto, es decir, es la posibilidad de tomar consciencia [Duval 1995, 24-25] ya que una representación se percibe a través su significado y lo que éste signifique para el sujeto.

Un primer ejemplo que viene a la mente cuando pensamos en la oposición de las representaciones conscientes e inconscientes y el papel que estas juegan en las matemáticas, son, por ejemplo: Las figuras geométricas, las gráficas o incluso algunos símbolos utilizados en el lenguaje matemático como son: ≤, ≠, ∞, ∫, π, etc. Estos símbolos por sí mismos significan algo para el sujeto y proporcionan (inmediatamente) ciertas pautas del significado de la representación (completa) que los contenga.





Una integral puede significar diferentes cosas para diferentes estudiantes universitarios, incluso si estudian la misma carrera. Es probable que unos objetivarán más aspectos de la misma representación que otros, además de que algunos podrían resolverla o graficarla, mientras que otros, tal vez sólo sabrían instantáneamente que se trata de una integral sin poder realizar un tratamiento intencional[1] de ésta como: convertirlo a otro sistema (graficarlo) o transformarla dentro del mismo sistema (resolverla).

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

Algunos serán conscientes de que la integral anterior se refiere al volumen dado por el sólido de revolución bajo *f* en el intervalo *[a,b]*, mientras que otros serán conscientes de que la representación anterior corresponde simplemente a una integral y si acaso la podrían resolver.

[1] En la siguiente sección entraremos en detalles respecto a los dos tipos de tratamientos que se ha identificado Duval (1995, p.33-34) los tratamientos: cuasi instantáneos y los intencionales.

3.3.2 Oposición externa/interna

> Todas las representaciones externas son las representaciones producidas por un sujeto o un sistema […], una representación externa puede producirse sólo a través de la aplicación de un sistema semiótico. Las representaciones externas son por naturaleza, representaciones semióticas […] las internas, en cambio son representaciones que pertenecen al sujeto y además no son comunicadas (a otro(s) sujeto(s)) por medio de la producción de representaciones externas. [Duval 1995, 25].

Al considerar ambas oposiciones, interna/externa y consciente/inconsciente, podemos obtener más información acerca de todo tipo de representaciones, por ejemplo: Las representaciones externas satisfacen dos o más funciones, objetivación (al igual que todas las representaciones conscientes) y la función de tratamiento. Por otro lado las representaciones internas pueden satisfacer ya sea funciones de objetivación o funciones de tratamiento automático o cuasi instantáneo.

	Interna	*Externa*
Consciente	**Mental** + Función de objetivación	**Semiótica** + Función de objetivación + Función de expresión + Función de tratamiento intencional
Inconsciente	**Computacional** + Función de tratamiento automático o cuasi instantáneo	

Tabla3.1 Tipos y funciones de representaciones [Duval 1995, 27].

A continuación tenemos una descripción más precisa de lo que son los tres tipos de representaciones, basándonos en las cualidades de sus significantes, su modo de producción o el tipo de funciones cognitivas que satisfacen.

R e p r e s e n t a c i o n e s

Semióticas	Mentales	Computacionales
+ Un sistema que satisfaga las funciones de comunicación, tratamiento de la información y objetivación. + Son conscientes y externas a la vez. + Permiten ver el objeto a través de la percepción de estímulos como puntos, trazos, caracteres, sonidos, etc. Cuyo valor es de significantes. + Producirlas requiere del seguimiento de reglas sintácticas de formación de acuerdo con el sistema en el que estén, además se requiere del tratamiento de unidades significantes. + Su propiedad fundamental es que se pueden transformar en diferentes representaciones; esta habilidad para transformarse se puede dividir en dos: las que transforman todo el contenido de la representación o las que sólo transforman una parte del contenido [Duval 1995, 36].	+ Permite mirar al objeto aun cuando un significante perceptible esté ausente por completo. + Son las proyecciones más difusas y globales que reflejan el conocimiento y los valores que un sujeto comparte con su entorno. Las representaciones mentales incluyen conceptos, nociones, ideas, creencias y fantasías. + Producirlas requiere de procesos físicos y psicológicos. + Su desarrollo esta vinculado con la adquisición e interiorización de sistemas semióticos de representación.	+ Tienen naturaleza homogénea. + No se requiere mirar al objeto para tratar con ellas. + En cuanto al sistema que las contenga, las representaciones computacionales expresan la información externa del sistema de tal modo que la información se vuelve manejable, recuperable e incluso se puede combinar dentro del mismo sistema. + En cuanto al sujeto, las representaciones computacionales son representaciones internas e inconscientes. + Permiten una transformación algorítmica de una secuencia de significantes a otra. Ejemplo: Representaciones en el sistema binario.

Tabla 3.2 Comparación de las características de los tres tipos de representaciones.

3.4 Transformación de representaciones: Tratamiento y conversión

Anteriormente ya hemos mencionado la importancia de la conversión y el tratamiento de representaciones dentro de la teoría de las representaciones. Estas transformaciones desempeñan un papel fundamental en la semiosis e incluso forman parte de los principales obstáculos que tienen que vencer los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de las matemáticas. En la práctica la conversión y el tratamiento de las representaciones parece ser muy similar y a pesar de ser tan diferentes frecuentemente se les confunde entre sí. Esta confusión probablemente se debe a que ambas transforman a las representaciones, por eso mismo es importante darse cuenta de las principales diferencias que las separan.

El 'tratamiento' es una transformación que se realiza al interior del mismo registro, por lo cual, para realizarlo uno se rige por las reglas vigentes al mismo; por esta razón, decimos que en un tratamiento se moviliza un solo registro de representación. Duval [1995, 33-35] introdujo una forma de organizar los tratamientos no conscientes, es decir aquellos tratamientos que le efectúan a representaciones inconscientes (computacionales y semióticas). Esta organización identifica dos tipos de tratamiento complementarios: los tratamientos cuasi-instantáneos y los tratamientos intencionales.

Los tratamientos 'cuasi instantáneos' se realizan incluso antes de observar la representación en cuestión. Además, este tipo de tratamientos producen información y significados de los cuales el sujeto es inmediatamente consciente. "Intuitivamente se dice que estos tratamientos corresponden al la experiencia o familiaridad que resulta de prácticas largas o desempeño adquirido luego del domino de cierto aspecto" [Duval 1995, 33]. Otra característica de este tipo de tratamientos es que se pueden llevar a cabo simultáneamente y son libres de integrar (a la representación) cualquier cantidad de elementos.

Los tratamientos ‘intencionales’ se manejan solamente sobre lo que el sujeto cuasi instantáneamente ve, es decir, estos los tratamientos intencionales se pueden realizar solamente en secuencia (*i.e.* uno después del otro) y además, a diferencia de los tratamientos cuasi instantáneos, son muy sensibles a la cantidad de elementos que pueden integrar en la representación. Una característica más de este tipo de tratamientos es que no están disponibles para todo sujeto, ya que a pesar de su nivel de conocimientos no cualquier sujeto es capaz de realizar un tratamiento intencional [Duval 1995, 34].

La estrecha relación que guardan los dos tipos de tratamientos se debe al hecho de que estos son complementarios entre sí. Mientras más grande sea el conjunto de tratamientos cuasi instantáneo, que el sujeto pueda efectuar, mayor será el número de elementos inmediatamente integrados en una sola unidad informacional. Es decir, la variedad de tratamientos cuasi instantáneos da como resultado un horizonte epistémico más amplio para la aplicación de los tratamientos intencionales. Así es como podemos concluir que la adquisición de nuevos tratamientos cuasi instantáneos es condición para todo proceso cualitativo del aprendizaje; al mismo tiempo que dicha adquisición forzosamente pasa a través de una fase de tratamientos intencionales [Duval 1995, 34].

Como hemos visto anteriormente, una ‘conversión’ es la trasformación de una representación, de cierto objeto, de un registro a otro; es decir, se produce en un registro diferente a en el que encontraba inicialmente. Lo más importante de esto, es que se requiere de ciertas habilidades por parte del sujeto que la realiza: este debe de poder coordinar ambos registros [Duval 1995, 22-23, 27]. Podemos decir que la conversión de una representación, es una transformación externa al registro inicial, en la que el contenido, se ve modificado, ya que los elementos que lo integran son reorganizados y seleccionados. Esto da como resultado que dada una representación inicial, luego de convertirla, su contenido no permanecerá intacto ni será necesariamente el mismo que el de la resultante.

Otro factor fundamental que no debemos perder de vista en este asunto, es que, la conversión es irreversible en algunos casos, ya que el costo cognitivo de conlleva convertir a la inversa (de su representación resultante a su inicial) es muchas veces mucho más alto y en algunos casos hasta 'impagable'.

Por ejemplo, consideremos un toro.

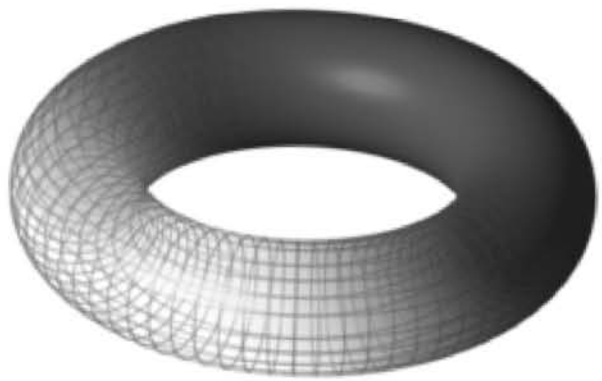


Figura 3.3 Imagen de un toro

Un toro es un objeto matemático que desempeña papeles importantes en diversas áreas de las matemáticas. El toro puede estudiarse en diferentes contextos que nos dan como resultado diferentes formas (equivalentes) de definirlo según el contexto donde nos encontremos. Uno de los primeros acercamientos que tenemos al toro es a través del Cálculo, donde se define como 'la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar un círculo alrededor de uno de los ejes en un espacio tridimensional'. En topología se le conoce como una superficie cerrada con un hoyo definido por el producto de dos círculos. Semioticamente, estas definiciones corresponden a dos representaciones distintas dentro del mismo, el de la lengua. A continuación tenemos otras representaciones del toro dadas en registros diferentes. Lo interesante de esto es que si pensamos en lo que conlleva la conversión de alguna de estas representaciones a otra, nos daremos cuenta de que tan complicado pude ser la conversión en ciertos casos.

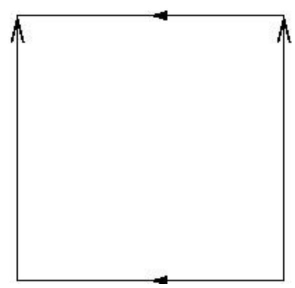
Ecuaciones paramétricas	**Coordenadas cartesianas**
$x(u,v)=(R+rcos(v))\cos(u)$ $y(u,v)=(R+rcos(v))\sin(u)$ $z(u,v)=rsin(v)$ $u,v\in$ *[0,2π)*, donde *R* es la distancia del centro del tubo al centro del toro y *r* es el radio del tubo	$(c-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2=a^2$
Gráfica Dirigida	**Simbolismo Algebraico**
	$S^1\times S^1$

Tabla 3.3 Cuatro registros de representación diferentes para representar al toro.

La conversión desempeña un papel poderoso cuando nos referimos al entendimiento. "Desde un punto de vista cognitivo, la actividad de la conversión parece ser la transformación fundamental de las representaciones, la que dirige los mecanismos subyacentes al entendimiento" [Duval 2002b, 4]. A pesar de esto, en matemáticas la actividad de la conversión de representaciones es comúnmente despreciada, ya que se le considera una actividad vacua matemáticamente; Cuando por ejemplo, escribir el siguiente número en el sistema fraccional:

$$\frac{1}{8}$$

ó en el sistema decimal:

$$.125$$

matemáticamente no tiene importancia, aunque cognitivamente sí la tenga, ya que son muy distintas, las dificultades cognitivas que tiene el estudiante al realizar el producto:

$$\frac{1}{8}\times\frac{8}{1}=1$$

ó

$$.125\times 8=1$$

3.5 Cambio de registro

Como ya hemos mencionado, la conversión es una actividad cognitiva en la que se realiza un cambio de registro. Sería interesante preguntarnos: ¿Con qué frecuencia se necesita cambiar de registro en las actividades relacionadas con las matemáticas? Si con esta pregunta en mente prestamos un poco de atención a los libros de texto, nos podremos dar cuenta de que, para abordar un tema de matemáticas, es común encontrar más de un registro de representación semiótica utilizado a la vez, así se orilla al estudiante a coordinar diferentes registros: de la lengua a los lenguajes formales, pasando por símbolos matemáticos, sistemas algebraicos, sistemas numéricos, gráficas, figuras geométricas etc.

En diferentes ramas de las matemáticas el uso de diversos registros de representación se da en mayor o menor medida, dependiendo del área en la que trabajemos, por ejemplo, en ramas de la matemática como la geometría, teoría de gráficas, topología, etc. el uso de figuras, y gráficas es muy común, además de ciertos lenguajes formales, algebraicos, o simplemente el uso la lengua. De hecho Duval [2000, 3] dice que "la principal característica de las actividades matemáticas es la movilización simultánea de al menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar de un registro a otro en cualquier momento". El estudio de las funciones cognitivas que subyacen al fenómeno del cambio de registro es inminente, tan pronto como seamos concientes de la importancia y variedad de cambios de registro que se realizan en matemáticas.

Para algunos resulta sorprendente la 'simple' idea de que al aprender o desarrollar actividades matemáticas, uno se encuentra sumergido en todo un mar de registros de representaciones donde el vaivén de cambios de registro se hace presente en todo momento. A pesar de ser tan necesario, el cambio de registro, no resulta ser siempre tan inmediato o sencillo, de realizar para el estudiante, como generalmente se piensa lo es. Profesores y estudiantes desdeñan su importancia en el aprendizaje ya que erróneamente se le considera una operación natural y, por lo tanto, irrelevante para los programas de enseñanza, cuando en realidad llega a ser para el estudiante todo un reto, cognitivamente hablando.

Hasta este momento ya hemos esbozado la importancia de la creación y movilización de las representaciones en matemáticas (es decir implícitamente hemos hablado de la semiosis en matemáticas). Ahora, desde este punto de vista, continuaremos el análisis al tener presente que los principales problemas de la semiosis son: Por un lado, la diversidad de los sistemas de representaciones y, por otro lado, los fenómenos de no-congruencia que resultan de la conversión de las representaciones [Duval 1995, 8].

Un ejemplo tangible de las ideas que hemos abordado en cuanto al cambio de registro y a la congruencia entre registros es el siguiente: Consideremos de nuevo la tabla 3.3, donde tenemos cuatro representaciones del toro (donde cada una ellas está dada en un registro semiótico distinto). Entonces podemos corroborar que el cambio de registro entre esas representaciones, no conlleva el mismo costo cognitivo para todas las conversiones posibles (3^4). En otras palabras, no da lo mismo parametrizar (*i.e.* convertir), a partir de las coordenadas cartesianas, que al contrario dar las coordenadas cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas del toro, así como no es lo mismo dibujar la gráfica dirigida del toro a partir de las mismas ecuaciones. Unas conversiones serán con certeza más sencillas de efectuar que otras y cambiar de un registro *a* a otro *b* tendrá un costo cognitivo distinto, que cambiar del mismo b al a. Ya que cada representación tiene significantes distintos que contienen informaciones distintas a cerca del objeto al que se refieren. De esta forma es que la coordinación de registros es tan necesaria en el contexto de las matemáticas, ya que además de ser el único modo de acceder a los objetos matemáticos, estas se 'complementan', hasta cierto punto, así brindando al sujeto significados distintos.

3.5.1 Congruencia y no-congruencia de representaciones

En las secciones anteriores hemos puesto especial énfasis en que al convertir una representación, el contenido cambia y la información es reorganizada al interior del nuevo registro. El sujeto que realiza la conversión, no tiene acceso a la misma información que tenía antes y la nueva información que se hace explicita, de cierto modo, complementa la información presente en la representación inicial. A continuación introduciré dos términos indispensables en el análisis de las actividades de conversión, estos son: Congruencia y no-congruencia entre dos registros de representación dados en dos registros de representación respectivamente.

Dado que continuamente manejamos representaciones dadas en diversos registros de representación, probablemente nos habremos dado cuenta de que algunas veces pasar de una representación a otra, trae consigo dificultades, mientras que en otras ocasiones la conversión se realiza casi en automático sin siquiera percatarnos de que se lleva a cabo un. Respecto a esto podemos plantearnos preguntas como: ¿Cuándo resulta natural o no el cambio de registro?, ¿de que depende la naturalidad del pasaje de un registro a otro?, etc. Para darse cuenta de cuan complicado y poco natural puede llegar a ser la conversión, Duval [1995, 46-47] dice que es necesario analizar como se podría efectuar la puesta en correspondencia, sobre la cual reposa toda conversión de representación. Primero que nada es importante mencionar que cada registro de representación está constituido por un cierto número de unidades significantes elementales donde, con unidades significantes, nos referimos a ciertas 'partes' de la representación que la identifican y en conjunto la constituyen. Estas unidades significantes son consideradas para la puesta en correspondencia que mencionamos anteriormente. "La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede establecerse localmente por una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los dos registros" [Duval 1995, 47].

Para concretizar lo que ya hemos mencionado, enunciaremos los criterios de congruencia (Duval, 1995, p.47-59) para dos representaciones: 1. Correspondencia semántica entre los elementos significantes; 2. Univocidad semántica terminal; y, 3. Relación al orden en el cual las unidades componentes están arregladas en ambas representaciones.

3.6 Discurso, lengua y matemáticas

La lengua y las matemáticas son dos de los tesoros más significativos que tenemos en la cultura humana; su relación, sin embargo, aún no es completamente clara. No resulta familiar relacionar cosas que a primera vista parecen estar tan alejadas entre sí. Esta relación parece hasta irónica, ya que las matemáticas no son un lenguaje [Duval 2003, 1] ni una lengua[1]. Sin embargo, el uso de la lengua natural en actividades matemáticas y en la enseñanza de las matemáticas es evidente, e incluso el análisis del uso de lenguajes formales en matemáticas es sujeto de atención.

[1] De la definición de Ferdinand de Saussure, *lengua* se utiliza para denominar el sistema de signos que existe independientemente del individuo que lo utiliza, por lo tanto *la lengua* cuenta con un carácter homogéneo.
Por otro lado, el *lenguaje* se refiere específicamente al uso que se hace de la *lengua*, o a la capacidad lingüística que tiene todo ser humano para utilizarlo, el *lenguaje* tiene un carácter heterogéneo. Estas dos distinciones comúnmente son confundidas, pero en español contamos con las dos palabras para identificarlas, mientras que en otras lenguas como el inglés, estos términos no existen y se concentran en la palabra "*language*".

Es a través de las representaciones, que las actividades matemáticas nos permiten 'decir algo' acerca de los objetos matemáticos, pero es importante resaltar que la función de las representaciones no es una actividad meramente comunicativa, sino al contrario, el pensamiento requerido en las matemáticas involucra, incluso en sus representaciones mentales, algunas actividades semióticas [Duval 2007, 144]. Por esta razón en las actividades matemáticas encontramos transformaciones cuyo propósito va más allá de la pura comunicación.

El 'decir algo' puede ser, por ejemplo enunciar y probar ciertas propiedades acerca de los objetos matemáticos a través de expansiones discursivas (que más adelante definiremos como demostraciones). Como hemos insistido en esta sección, la importancia de la lengua en las matemáticas va más allá de aspectos como la comunicación de conceptos, o la comunicación entre estudiantes o colegas interesados en demostrar o resolver cierto enunciado o problema matemático. Si analizamos como es que se llevan a cabo las actividades matemáticas, nos daremos cuenta de que la lengua es esencial en el proceso de encontrar la solución o demostración al problema planteado de este modo participando en el proceso de objetivación.

Primeramente nos enfocaremos en analizar ciertos aspectos de la relación entre discurso y matemáticas, para ello nos necesitamos adentrar en el análisis que hizo Duval [1995, 87-132] de 'las funciones discursivas de una lengua' donde en este sentido, planteó tres preguntas principales: 1. ¿La lengua consiste en algo diferente a otros sistemas semióticos (como los esquemas y las imágenes?; 2. ¿Cuál es la diferencia entre la lengua y los lenguajes formales?; y, 3. ¿Por qué la lengua se pude utilizar de formas tan distintas como por ejemplo, en el uso común que se le da en la conversión, usos especializados como que se hace al enunciar un teorema, o usos literarios como en la escritura?

Como abordamos ciertas características de la lengua desde tres perspectivas diferentes, tenemos que estar conscientes de un concepto clave: 'discurso'[1]. El discurso no se menciona como tal explícitamente en las cuestiones planteadas anteriormente por Duval, pero de cualquier modo se encuentra presente en la problemática analizada en esta sección. Una manera fácil y accesible de definir discurso en este contexto es como "el uso de la lengua para *decir algo*" [Duval 1995, 88]. El discurso es una expansión de la lengua con el objetivo de 'decir algo' acerca de 'algo' (ya sea un objeto físico, ideal, o imaginario) y se logra más que con el simple uso de los significantes potenciales de la lengua en cuestión. El punto sensible de este asunto radica en que existen ciertas funciones cognitivas que subyacen al proceso del discurso.

3.6.1 Funciones discursivas y meta-discursivas

La exploración que haremos en esta sección respecto a las funciones de la lengua es fundamental para tener una mayor comprensión del razonamiento matemático ya que más adelante veremos que este es un tipo de razonamiento intrínsecamente ligado al uso de la lengua.

Entre las funciones que se movilizan con el uso de la lengua, se tienen dos dimensiones (completamente diferentes entre sí) que deben distinguirse. Por un lado tenemos funciones que son comunes a todo tipo de representación, y, por otro lado, están las funciones específicas que son relativas al uso de la lengua; estás funciones se llaman meta-discursivas y discursivas respectivamente [Duval 1995, 88]. Ambas funciones son importantes y merecen ser analizadas en el contexto matemático en el que nos hallamos, ya que por un lado, en las actividades matemáticas se moviliza una gran variedad de registros y por otro lado se utilizan la lengua y lenguajes formales para llevar acabo esa movilización.

[1] De acuerdo con el diccionario de la RAE discurso en el sentido de la lingüística significa: 'Cadena hablada o escrita'. Mientras que en otros sentidos se refiere a un 'escrito o tratado de no mucha extensión, en que se discurre sobre una materia para enseñar o persuadir'.

Funciones meta-discursivas

Las funciones meta-discursivas son funciones cognitivas comunes a todos los registros de representación, ya sea lingüísticos, simbólicos o figurativos. Para cualquier registro que comunica cierta información existen tres funciones meta-discursivas que no son reducibles entre sí; estas son las funciones de: Comunicación, tratamiento y objetivación[1].

La función de 'comunicación' es hasta cierto punto fácilmente comprensible si analizamos la referencia que se tiene comúnmente de lo que la comunicación es: 'la transmisión de cierta información en un medio social'. En el contexto de este proyecto podemos definir la comunicación como la función necesaria para la existencia de una organización de los elementos, donde estos son subsistemas o individuos. Los individuos tienen su propio funcionamiento; el punto es que a través de transmisiones, intercambio o difusiones, la información pueda llegar a los subsistemas o individuos. Por esta razón no es de sorprenderse que la lengua sea el registro semiótico más apropiado para satisfacer esta función entre los individuos dentro de una sociedad o un grupo. No obstante, además de la lengua, existen otros sistemas capaces de satisfacer la función de comunicación social, además en ocasiones estos sistemas llegan a remplazar la función de la lengua. Esta es la razón por la cual muchos sistemas semióticos pueden funcionar como lenguajes sin ser en sí una lengua [Duval 1995, 210].

El 'tratamiento' es necesario para las actividades que tienen que ver con el conocimiento en sí mismo. Las actividades relativas con el conocimiento se pueden comparar con la recepción de información en una especie de 'paquetes', los cuales no son más que la forma de presentar la información; por ello se tiene que en un 'paquete' encontramos información explicita e implícita a la vez. Cuando recibimos un 'paquete', el punto es que seamos capaces de 'desempacarlo', es decir, que seamos capaces de transformarlo. Por medio de la transformación es que,

[1] Podemos notar que estas tres funciones meta-discursivas están fuertemente relacionadas con las funciones requeridas para que un registro de representación se diga semiótico que introdujimos previamente en la sección 1.1.

inevitablemente, extraemos otras informaciones que antes no eran explícitas. Debido a esto, el discurso va más allá del acto de comunicar, el discurso permite la transformación.

"La objetivación es necesaria, para el sujeto, en el desarrollo de su habilidad para tomar control sobre sus actividades, experiencias de vida o incluso sobre su mundo imaginario o personal" [Duval 1995, 90]. Como habíamos mencionado antes, la objetivación es la posibilidad que el sujeto tiene de volverse consciente de lo que hasta ese momento él o ella no lo era.

Funciones Discursivas

Las funciones discursivas son las funciones cognitivas que un sistema semiótico debe satisfacer para hacer posible el discurso. "Generalmente cuando un sistema semiótico satisface todas las funciones discursivas, entonces se le considera como una lengua" [Duval 1995, 91][1]. El único sistema semiótico que satisface todas las funciones discursivas en el mismo acto intencional es la lengua natural, y esa es justo la razón por la cual, la lengua es el poderoso sistema semiótico que es [Duval 1995, 9].

Para poder hablar de discurso se deben poder satisfacer cuatro funciones discursivas, las cuales en conjunto tienen el mismo propósito: Hacer referencia al mundo de tal forma que se pueda compartir con el o los interlocutores. 1. Función 'referencial'→ La habilidad para designar objetos; 2. Función 'apofántica'→ La habilidad para decir algo acerca de objetos designados, en la forma de una proposición enunciada, es decir, la expresión de enunciados completos; 3. Función de 'expansión discursiva'→ Se trata de articular enunciados completos de tal forma que en conjunto formen una unidad coherente. Como ejemplo están las descripciones o las referencias; 4. Función 'reflexiva'→ EL sujeto que enuncia una

[1] Duval [1995, 137] dice que una escritura, como por ejemplo el cálculo de predicados, (que satisface tres funciones discursivas) ya puede considerarse como una lengua.

expresión, le da a esta el valor o estatus. Es la transformación potencialmente recurrente para un enunciado completo [Duval 1995, 91-93].

3.6.2 Operaciones discursivas

Ahora surge otra pieza importante para visualizar el panorama completo del discurso: las 'operaciones discursivas'. Las operaciones discursivas contribuyen a la construcción del discurso. Cada tipo de lengua ofrece un amplio rango de operaciones discursivas. Existen diferentes operaciones relacionadas con cada una de las funciones y algunas de las operaciones suelen ser comunes a varios tipos de lenguajes; por otro lado, algunas son específicas sólo a un tipo de lenguaje. Fundamentalmente, la relevancia de las operaciones discursivas en las matemáticas es la siguiente: "los problemas que surgen de la conversión entre la lengua natural y un lenguaje formal dependen de la comparación de las operaciones posibles en cada registro de la lengua" [Duval 1995, 97].

Funciones de expansión discursiva

De las cuatro funciones discursivas, la función de 'expansión discursiva' es la más importante, ya que permite la articulación de varios enunciados completos en una unidad coherente como lo es una descripción o un 'razonamiento'.

En un discurso, los enunciados se vinculan dentro de una unidad coherente gracias a la función de expansión. En esta unidad coherente el sujeto encontrará elementos implícitos y explícitos. Esto significa que habrá omisiones; de aquí que los problemas surjan, en parte, por esta omisión de elementos que el sujeto puede o no obtener del discurso, así facilita o no la comprensión del discurso dentro de la unidad coherente.

El discurso matemático utiliza un desarrollo sistemático de la función referencial discursiva; al mismo tiempo escoge sólo una operación discursiva con el fin de satisfacer la función apofántica. Un resultado de esto es que el discurso matemático privilegia la función meta-discursiva de tratamiento, incluso en su uso de la lengua [Duval 1995, 107-108, 95]. Antes se mencionó la definición de la lengua dada por Saussure, ahora dentro de este marco cognitivo podemos decir que un discurso que designa objetos, enuncia propiedades y relaciones, y además puede hacer inferencias de información (como deducciones o cálculos), ya se puede considerar como una lengua. En la siguiente sección, entre otras cosas, analizaremos a detalle estas cualidades asignadas a una lengua.

3.7 Sistemas semióticos de representación en las matemáticas: Una clasificación

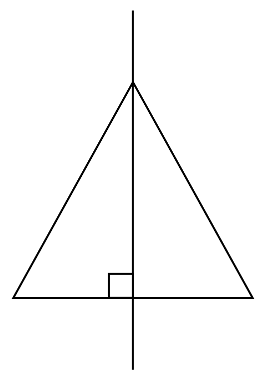
En las actividades matemáticas se movilizan cuatro tipos de registros de representación, los cuales pueden ser organizados como sigue: Por un lado, los discursivos y los no-discursivos, mientras que por otro lado se pueden organizar como multifuncionales y mono-funcionales [Duval 1999, 2002, 2003, 2006b]. Esta clasificación nos permite tener una idea más clara de las características y diferencias de los registros que se movilizan en matemáticas, proporcionándonos de esta manera herramientas suficientes para su óptima movilización. Esto facilita las tareas con las que se enfrenta el estudiante cada vez que requiere de la movilización de registros de representación en el aprendizaje y desarrollo de las matemáticas.

Registros discursivos y no-discursivos

Nos referimos a un sistema discursivo cuando este satisface las diferentes operaciones que se pueden realizar con una lengua. Las representaciones discursivas cuentan con la característica de ser linealmente sintácticas y además poder calcular, en estos sistemas es posible describir, inferir y razonar; por esta razón, como hemos visto en la sección anterior, todo sistema que permite calcular se puede considerar una lengua.

- Registros no-discursivos

Nos encontramos con registros no-discursivos cuando sus representaciones no pueden producirse por medio de un lenguaje y uno puede tener aprehensiones sinópticas cuasi-inmediatas. Existen muchas representaciones no-discursivas que no funcionan como imágenes, algunos ejemplos de este tipo de representaciones son las figuras geométricas o los esquemas.



- Registros multifuncionales

La diferencia entre los registros multifuncionales y los mono-funcionales, como su nombre lo indica, es precisamente la cantidad de funciones, una o más respectivamente, que satisface el registro a la vez.

	Discursivas	No-discursivas
Registros Multifuncionales: Tratamientos que no se pueden algoritmizar.	Lengua natural Asociaciones verbales (conceptuales). 'Razonamiento' (argu mentaciones a partir de observaciones o creencias, 'deducciones' válidas a partir de definiciones o teoremas etc.)	Figuras geométricas tales como: configuraciones de contorno, planas o en perspectiva. Aprehensión operativa y no sólo aprehensión perceptual.

		Construcción con herramientas de trazo o dibujo.
Registros monofuncionales: Los tratamientos son principalmente algorítmicos	Sistemas numéricos: binario decimal, fraccional Sistemas de notación simbólica o algebraica, lenguajes formales Computar	Gráficas cartesianas Cambio de sistemas de coordenadas, interpolación, extrapolación.

Tabla 3.4 Clasificación de los cuatro tipos de registros utilizados en los procesos matemáticos [Duval 1999, 2000, 2002, 2003].

Capítulo 4

Razonamiento

Si nos detenemos a analizar cuales son las descripciones más comunes que hay para las matemáticas, nos daremos cuenta de que generalmente, las idas ligadas a estas son: precisión, exactitud, e incluso perfección[1] (en los casos más devotos). En los países occidentales, no es difícil notar que, en general, la sociedad confía de cierto modo en las matemáticas (especialmente en los sectores educados de la población). En pocas cosas se confía y respeta tanto, como sucede con las matemáticas. Generalmente se confía en ambas cosas: en las herramientas técnicas que de las nos proveen para su aplicación en el mundo real, así como en la teoría en su estado más puro. Un ejemplo de esto, son las ideas que aprendemos en los primeros años de escuela, al adquirir experiencia con el razonamiento matemático fundamental y llegar a confiar tanto en las matemáticas como si fueran una especie de autoridad inapelable; Además se aprende a aceptar los resultados y teoremas matemáticos sin conocer las pruebas que los respalden (probablemente esto no tenga que ver con la certeza que emanan las matemáticas sino con la imposición que hace de estos el maestro al alumno). Así, cada vez que exista un error en los cálculos, y no se obtenga el resultado correcto[2], o no se llegue a la demostración del teorema, la causa siempre se derivará de una falla del alumno y no de las matemáticas en sí. Estos fenómenos son interesantes, y nos llevan a cuestionarnos

---

[1] Las concepciones que se tienen acerca de las matemáticas generalmente son bastante idealizadas, se considera que los objetos matemáticos 'viven' en un mundo platónico; Opuesto a lo que es realmente la actividad matemática en la práctica: El resultado del ensayo y error en busca de nuevas teorías matemáticas. Considero importante esta nota pero no indagaremos más en este asunto, ya que tiende a ser más una cuestión filosófica que no es indispensable para el desarrollo de este proyecto.

[2] Al calificar de correcto a un resultado matemático es tan sólo un ejemplo más de la precisión matemática mencionada al principio del presente capítulo: existe uno y sólo un resultado correcto.

acerca de la confiabilidad y el fundamento de las matemáticas: ¿Por qué son las matemáticas tan confiables? Así con esta pregunta clave, es que marcamos para el lector la introducción al fascinante mundo del razonamiento, el cual se discutirá ampliamente en este capítulo.

Este capítulo esta localizado física y teóricamente en una suerte de 'baricentro' para este proyecto, lo cual no es coincidental. El propósito de este capítulo se divide principalmente en dos: Por un lado, construir el puente teórico que relacione a la teoría expuesta en los capítulos anteriores con la teoría subsiguiente, a este capítulo (la cual estará centrada en el aprender a demostrar); y, por otro lado, exponer las características principales de lo que es la demostración así como de su funcionamiento.

La demostración es un punto central del análisis en este capítulo ya que además de ser de vital importancia para (casi) cualquier matemático[1], la actividad matemática gira principalmente en torno a los objetos matemáticos y a los enunciados acerca de estos, los cuales 'deben que ser demostrados' para su inclusión en las teorías matemáticas. Más adelante veremos, entre otras cosas, que detrás de cualquier demostración existe algún tipo de razonamiento involucrado.

Tenemos dos conceptos claves que han surgido hasta ahora: 'razonamiento' y 'demostración'. En las siguientes secciones analizaremos estos dos conceptos; su relación y diferencias entre sí, pero en particular, pondremos especial atención en el funcionamiento cognitivo detrás de ellos. Iniciaremos desde la raíz, localizando la importancia que tiene el razonamiento matemático en las actividades matemáticas y analizaremos el rol fundamental que desempeña la demostración (como actividad matemática) en la construcción de las matemáticas. Luego tendrá aun más sentido el preguntarnos cómo es que en realidad funciona la demostración; esto a su vez nos dará las pautas para el análisis de su aprendizaje.

[1] Sin importar la actividad que se realice, el hecho de haber estudiado matemáticas por cuatro o cinco años es suficiente para haber dejado en él o ella un rastro inconfundible de razonamiento matemático, que moldeará su pensamiento para el resto de su vida. Por esta razón, conocer que hay detrás del razonamiento, cobra vital importancia para los matemáticos en general.

4.1 Teorías Matemáticas

Cuales son los fundamentos de las teorías matemáticas ha sido sujeto de discusión por años. En la actualidad, hasta cierto punto, una manera de definir lo que es una teoría matemática es como una teoría capaz de extenderse que está determinada por dos cosas principalmente: "un conjunto de axiomas y una lógica" [Eves 1997, 257-258] donde el conjunto de axiomas son enunciados no demostrables[1] que son verdaderos por sí mismos y que además se localizan al 'principio' de la teoría. La 'lógica' (igualmente con su propio conjunto de axiomas) funciona como un conjunto de reglas para la teoría; de este modo guía la movilización de axiomas y definiciones con el fin de demostrar la validez de nuevos enunciados para luego ser agregados a la teoría previa. De este modo es como se puede expandir la teoría existente, porque una vez que los teoremas se están en la teoría, nuevos teoremas se podrán demostrar tomando como base los teoremas ya probados, las definiciones y axiomas.[2]

Una posible analogía del funcionamiento de las teorías en matemáticas, es la comparación de estas con un 'juego'; Ya que en estos, se tienen definiciones de elementos básicos, además de ciertas reglas que marcan la pauta de su desarrollo; cuya: combinación, omisión o inclusión, lo hacen o no funcionar de tal a cual manera. Así es como pueden llegar a resultar diversas variantes del 'mismo' juego. Además siempre que no se conozcan o entiendan sus definiciones o reglas, el resultado será que no se podrá jugarlo. En matemáticas pasa algo muy parecido: Se tiene, por un lado, un conjunto de definiciones y axiomas y, por otro lado, reglas

[1] 'Un enunciado no demostrable' quiere decir que no existe demostración alguna para ese enunciado, o como en el caso de los axiomas, donde no se requiere de una demostración para aceptar los axiomas como ciertos.

[2] Esto sólo es un esbozo del desarrollo que siguen, en general, las teorías matemáticas. En este texto estoy omitiendo una gran cantidad de detalles como los fundamentos de la lógica o los métodos de axiomatización, la teoría de consistencia, etc. Es importante no dejar a un lado el hecho de que las teorías matemáticas son bastante complejas y que desde diferentes puntos se pueden resaltar u omitir ciertos atributos acerca de los 'verdaderos' fundamentos de las matemáticas. A lo largo de los años han existido distintas corrientes al interior de las matemáticas (e.g., logicismo, intuicionismo, formalismo) que han dado diferentes definiciones de lo que es una teoría matemática y cuales son o no las demostraciones válidas para estas.

que los rigen, es decir, la lógica que se aplica para desarrollar la teoría existente (hasta el punto inmediato anterior). Ahora, lo 'único' que bastaría para poder desarrollar las diferentes teorías matemáticas, sería justamente entender las definiciones, axiomas, al igual que las reglas y luego seguirlas adecuadamente. Sin embargo, en la práctica, el conocer las reglas y los axiomas de una teoría, no significa que a partir de estos, uno podrá derivar teoremas o demostrar proposiciones; Es exactamente en este punto donde surge la pregunta de qué es lo que se requiere entonces: si no es suficiente el conocer las reglas del juego para jugarlo, entonces: ¿Qué es lo que interviene en el éxito de los jugadores para jugar, o en este caso demostrar?, ¿qué hay detrás de la capacidad para demostrar un enunciado matemático? Estas cuestiones, generalmente, se no se analizan, ya que el razonamiento en matemáticas (erróneamente) se reduce 'el seguimiento de reglas', lo cual deriva en que el análisis de la riqueza de los procesos cognitivos que subyacen este, permanece en el anonimato.

Hasta ahora, no hemos dado una definición formal de lo que llamamos 'la lógica'. Definir a la lógica como: las 'reglas de procedimiento', es bastante brusco y carece de detalles; pero seremos un poco más precisos y diremos que la lógica es mucho más que un simple conjunto de reglas, y que además, va de la mano con el razonamiento matemático, justo el que nos permite ser capaces de demostrar. La función de la lógica radica en decidir la validez del proceso y del razonamiento que se utiliza para demostrar los enunciados que se quieren probar. El razonamiento matemático es una actividad matemática, que se refiere al tipo de razonamiento utilizado con el propósito de demostrar en matemáticas. Más adelante veremos que como "existen otros tipos de razonamiento, demostrar no se puede reducir a razonar" [Duval 1995, 137].

En matemáticas, demostrar es validar (a través de 'razonamientos válidos') ciertas proposiciones, es decir, un conjunto de enunciados acerca de objetos matemáticos. Pero, ¿qué es exactamente validar una proposición? La respuesta a esta pregunta, es todavía tema de discusión en la comunidad matemática; Donde se rechazan demostraciones asistidas por computadora, o nuevas formas de demostrar que no encajan en los modelos tradicionales. En este proyecto nos enfocamos en las formas tradicionales de demostrar, ya que son las que se utilizan en la educación media y superior. Pero estamos concientes de que otras corrientes pueden existir, dependiendo de qué es lo que se considera como válido (*i.e.* de cuales son los axiomas que tenga la lógica utilizada). De ahora en adelante sólo nos referiremos a las formas más comúnmente aceptadas (en la lógica clásica) para demostrar en matemáticas.

4.2 Razonamiento

Para analizar el 'razonamiento matemático' nos localizaremos en un espectro más amplio, donde además de este, existen otros tipos de razonamiento.

¿Qué es el razonamiento?, es una pregunta difícil y compleja de responder en unas cuantas líneas. El razonamiento, generalmente, se asocia con 'recorridos del pensamiento'; pero además, una gran variedad de aspectos están involucrados con él, desde actividades cognitivas, hasta discurso, y representaciones. En los capítulos anteriores definimos los cuatro tipos de representaciones que se movilizan en las actividades matemáticas y ahí fue que se hizo presente el razonamiento, junto al lenguaje natural, como un ejemplo de 'operaciones discursivas que no son algoritmisables'. De hecho, "no hay razonamiento sin una organización discursiva regida por diferencias funcionales entre proposiciones constitutivas" [Duval 2007, 139]. Más adelante, analizaremos en detalle estas diferencias funcionales. Por ahora, conservaremos la primera asociación dada al razonamiento, es decir, como 'un recorrido del pensamiento', y, en base a esto, podemos clasificar los tipos de razonamiento en dos grupos, dependiendo de si están o no intrínsecamente ligados al uso del lenguaje [Duval 1995, 209]. Estas dos clases de razonamiento, funcionan de modo diferente, pero aun así tienen algo en común (además de ser razonamientos): Ellos trabajan, "implícita o explícitamente, con 'proposiciones', esto es, enunciados que tienen un 'valor' por sí mismos, y un 'estatus' en relación con otros enunciados. El valor y el estatus son componentes específicos del significado de toda proposición" [Duval 2007, 138].

Razonamiento	
Intrínsecamente ligado al uso del lenguaje	**No** ligado intrínsecamente al uso del lenguaje
Inferencias explícitas de una o más proposiciones dadas. Son expansiones discursivas: + Razonamiento deductivo + Reducción al absurdo + Silogismo aristotélico + Inferencias semánticas + Argumentación	+ Se requiere en: 1. Adaptaciones a situaciones nuevas; y, 2. Para solucionar problemas no ligados al uso del lenguaje (donde es suficiente manipular objetos o herramientas). + Espontáneamente moviliza la exploración de recorridos, sin verbalizar. Ejemplo: 'La inducción'.

Tabla 4.1 Esta tabla muestra dos clases de razonamiento opuestas entre sí dependiendo de su vinculación con el uso del lenguaje [Duval 1995, 211].

4.3 Razonamientos intrínsecamente ligados al uso del lenguaje

Como se muestra en la tabla 4.1, el razonamiento deductivo y la reducción al absurdo, además de otros tipos de razonamientos, forman parte del grupo de razonamientos intrínsecamente ligados al uso del lenguaje, ya sea natural o formal. De acuerdo con Duval [1995, 212-213], las principales características de esta clase de razonamientos es que explícitamente movilizan proposiciones. Otra característica que se destaca en estos, es que hay un pasaje justificado de ciertas proposiciones (en calidad de llamadas premisas), suficientes para afirmar nueva(s) proposición(es) (en calidad de conclusiones o consecuencias). En otras palabras, esta clase de razonamientos se pueden definir como expansiones discursivas de una o más premisas, que tienen una conclusión necesaria.

> "El poder del razonamiento intrínsecamente ligado al uso del lenguaje, radica en que no tiene que confirmarse, es válido o inválido por sí mismo, […] solamente los razonamientos válidos tiene la fuerza y el valor objetivo de una demostración" [Duval 1995, 212].

Si en este momento miramos hacia atrás y nos preguntamos de nuevo: ¿Por qué las matemáticas son tan confiables? Entonces, ahora podemos responder a esa pregunta con un argumento más sólido, que el simple hecho de decir: 'las matemáticas son confiables, porque son, en sí, correctas e inquebrantables'. Ahora, sabemos que las teorías matemáticas se expanden, gracias a que sus nuevos teoremas sólo se aceptan a luego de un razonamiento válido, es decir, su fundamento radica en las demostraciones.

Ahora, ya hemos distinguido que no todos los razonamientos son válidos y esto nos orienta hacia cuestiones relativas la línea que separa a los razonamientos válidos de los no-válidos. Esto cobra importancia, ya que, a pesar del hecho de que los razonamientos no-válidos no demuestran, estos pueden llegar a convencer, mientras que, irónicamente, razonamiento válido, en ocasiones, no logra convencer. De este hecho, se derivan preguntas como: ¿Qué lleva a un alumno a pasar de un razonamiento válido a uno no- válido y viceversa?, ¿cuáles son los impedimentos que tiene un estudiante al distinguir entre un razonamiento válido y uno no-válido? Mientras mejor se conozca la naturaleza de la frontera que rodea a los razonamientos válidos[1], mejores serán las posibilidades de permanencia dentro de la 'zona' de los razonamientos válidos. De esta forma, hemos determinado otra clasificación para los tipos de razonamiento, donde el factor es su validez. A un análisis con estas características, le llamaremos un 'análisis lógico' y más adelante será abordado en detalle.

En matemáticas, para demostrar se utilizan (principalmente) dos tipos de razonamiento: El 'deductivo' (el cual parte de un sistema de axiomas y definiciones y su conclusión es única); y, la 'reducción al absurdo'. En este proyecto, pondremos énfasis en comprender los procesos cognitivos que subyacen al razonamiento deductivo, ya que este ocupa un lugar primordial en la demostración, e irónicamente, entender su funcionamiento y estructura es todo un reto para la mayoría de los estudiantes; Pero, ¿a qué se le atribuye la dificultad del alumno para con su dominio? Generalmente, se dice que desconocer su proceso y la falta de práctica, es lo que lleva a realizar 'razonamientos deductivos que no demuestran'; y, ¿qué tan cierto es esto? Para averiguarlo, necesitaremos contar con argumentos sólidos derivados de un análisis integral del razonamiento. Para realizar dicho análisis, que nos permita conocer en detalle de que está hecho el razonamiento y cuál es su funcionamiento, seguiremos el desarrollo que realizó Duval (1995), en el que atacó el problema desde tres ángulos distintos a partir de los siguientes tres análisis: El 'funcional', 'estructural' y el 'lógico'. Cada uno de estos tres análisis contribuirá, desde diferentes perspectivas, al esclarecimiento de lo que en realidad es el razonamiento.

[1] El complemento de los razonamientos válidos, comprende a los razonamientos neutrales y a los falsos, que serán analizados más adelante.

4.4 El análisis funcional

El interés principal de este proyecto, como ya hemos dicho en repetidas ocasiones, recae en conocer más sobre las demostraciones, es decir sobre los razonamientos válidos. Pero, para lograr esto, iremos de 'mayor a menor': Empezaremos desde el razonamiento en general, para luego enfocarnos particular mente en los razonamientos válidos. Para comenzar, plantearemos un par de preguntas acerca de su naturaleza: ¿Qué nos hace decidir si algo es o no un razonamiento?, ¿Qué características básicas satisface?, ¿Cómo 'se ve'?, ¿Cómo funciona y cuál es su estructura? En este momento, las respuestas son aún inciertas, pero las responderemos poco a poco en el transcurso de esta sección.

Desde un punto de vista funcional, el razonamiento, se define como todo discurso que tiene el propósito de probar la 'validez' de un enunciado o de ser aceptado por un interlocutor, ya sea, como una negación o una afirmación del enunciado, siempre y cuando esta esté 'bien fundada' [Duval 1995, 217]. De esta definición debemos resaltar que un razonamiento tiene 'el propósito' de probar algo o de ser aceptado; lo que esto nos dice es que, sin embargo, este no lo consigue en todos los casos; de aquí que no todos los razonamientos convencen, así como no todos prueban 'algo'. Como ya hemos mencionado, la cualidad de demostrar 'algo' se le atribuye únicamente a los razonamientos válidos. Esto se traduce en que frecuentemente, cuando un estudiante se encuentra en el proceso de aprendizaje de la demostración, este falla básicamente en dos aspectos: Por un lado, en reconocer cuando un razonamiento que es válido lo es y, por otro lado, en aceptar como válido un razonamiento que no lo es, es decir, uno que no demuestra. En efecto, decidir la validez de un razonamiento puede resultar una decisión difícil de tomar, especialmente cuando no se domina el funcionamiento de la demostración; Justo ahí es, cuando se vuelve habitual el aceptar como válido (más por un acto de fe, que por un entendimiento consciente) casi cualquier demostración que se presente, aún cuando existan 'pasos' de esta que no se hayan comprendido del todo. Este punto que acabamos de reconocer, se suman a lista de obstáculos que el alumno debe superar para aprender a demostrar.

Ahora, para continuar con el análisis funcional, primero debemos identificar ciertas características que hacen de un razonamiento lo que es. Se dice que un discurso que satisface con las siguientes dos características es, de hecho, un razonamiento: 1. Está orientado a un 'enunciado-objeto', es decir está dirigido o tiene como propósito la justificación de una proposición dada; y, 2. Se enfoca en el valor 'lógico' o 'epistémico' de una proposición en vez de en su 'contenido'.

Un 'enunciado-objeto' es algún teorema que se quiera demostrar y se desarrolla el discurso a partir de sus hipótesis. Para demostrar un teorema, uno empieza tomando como válida la hipótesis, para luego de un procedimiento de expansión discursiva, alcanzar una conclusión, de aquí que comúnmente se le considere 'lineal' asignándole un formato como el que sigue:

Hipótesis→ … expansión discursiva…→ *conclusión*.

Fuera de las matemáticas, la organización de un razonamiento generalmente se da de otras formas, es decir, no necesariamente sigue el formato descrito previamente, un ejemplo de esto es el caso de la 'argumentación'[1].

Luego de analizar lo que son las proposiciones y su importancia en los tipos de razonamiento, llegaremos a la pregunta de cuáles son los 'valores' de una proposición, (e.g., epistémico, lógico).

[1] Más adelante abordaremos nuevamente el caso de la argumentación.

4.4.1 Proposiciones

Partir del análisis de lo que son las proposiciones es, hasta cierto punto, analizar el razonamiento desde 'el núcleo', desde los elementos básicos que le integran; ya que, las proposiciones son las unidades discursivas que se combinan y movilizan (implícita o explícitamente) en todo razonamiento [Duval 1995, 218; 2007, 138] y el funcionamiento cognitivo de este, depende de cuales sean las unidades discursivas que este movilice.

Previamente, introdujimos el término proposición como un enunciado (o enunciados) que tiene valor y estatus. Pero, ¿qué quiere decir que una preposición tenga valor y estatus? En la siguiente sección descubriremos lo que es el 'espacio del significado' y daremos una clasificación de este; es ahí donde será aún más evidente, qué tan compleja puede ser la movilización de las proposiciones en un razonamiento, especialmente cuando el objetivo es conseguir una demostración.

4.4.2 El significado de una proposición

En comparación con el significado de, por ejemplo, una palabra o una oración dada en la lengua natural, el de una proposición es mucho más complejo, ya que depende de varios factores. Y, se determina en medio de la interacción de varias dimensiones (llamadas dimensiones de significado), las cuales se pueden clasificar en tres grandes componentes: 'Contenido', 'valor' y 'estatus'.

Comencemos por definir los componentes internos del significado de una proposición: 'contenido' y 'valor'. Los componentes internos, son aquellos que determinan el significado de una proposición desde su interior, es decir, en relación con una sola proposición, y no en el contexto de un discurso, donde se encuentran otras proposiciones. Entre los componentes internos encontramos tres dimensiones: 1. La 'semántica', a través de su 'contenido'; 2. La 'lógica', a través de sus 'valores de verdad': verdadero, falso o indecidible; y por último, 3. La 'de conocimiento', a través del 'valor epistémico'. Esta última dimensión, se refiere al nivel de confianza que el contenido de una proposición tiene para el sujeto. Esto esta estrechamente relacionado con el modo en el que uno entiende, de primera mano, el contenido de una proposición. En otras palabras, esta dimensión se refiere a la clase de impresión, que da al sujeto, una proposición justo antes de ser demostrada. A primera vista, el sujeto puede tener impresiones muy distintas sobre una esta, por ejemplo, puede parecerle obvia, posible, absurda, irreal, necesaria, etc. La importancia de identificar cual es el valor epistémico, es que al final, el resultado de todo razonamiento, apunta a cambiar este valor, cuya validez se quiere probar (o al menos convencer a alguien más de esta). En una demostración, más que indagar u obtener información adicional, se busca cambiar el valor epistémico de la información enunciada en la proposición. [Duval 2007, 138, 145]. Por esta razón, saber las características del valor epistémico contribuirá al presente análisis.

Pero, ¿de qué depende el valor epistémico?, para responder esta pregunta podemos decir que 'el nivel de confianza que se tiene de una proposición' se determina por la base de conocimientos que tiene el sujeto, la cual está dividida en dos rasgos: Por un lado, el bagaje 'teórico' del que dispone el sujeto, acerca de una proposición (*i.e.* en relación con definiciones, teoremas o conceptos ya aprendidos.); por otro lado, está el entendimiento 'semántico' de la proposición, es decir, de acuerdo con el entendimiento que se tiene del lenguaje ordinario [Duval 2007, 138; 1995, 218].

Con lo anterior, hemos planteado las dimensiones del significado, pero el punto de esto no es sólo enunciarlas y listo, sino el de vincularlas explícitamente, de tal forma que, articulemos la teoría expuesta en este capítulo, con la teoría previamente abordada en los capítulos anteriores.

Como los valores epistémicos y de verdad lógica son componentes de sentido, de una proposición dada, debe ser posible explicitarlos, al igual que al contenido de la proposición. Para hacer explícito el valor epistémico de una proposición, uno utiliza frases como: 'Pienso que…', 'creo que…', 'en mi opinión…', 'estoy seguro(a) de que…', 'es claro que…', etc. Es decir, por medio de estas frases, el sujeto 'traduce' el valor epistémico de la proposición, el cual está vinculado al entendimiento que el sujeto tiene del enunciado. Mientras que, para explicitar el valor de verdad lógico uno utiliza frases como: 'es cierto que…', 'es falso que…', 'aún no se ha probado que…', etc. Ahora, si analizamos lo anterior, tomando en cuenta las funciones discursivas (expuestas en el capítulo anterior), podemos notar que: Hacer explícitos los valores epistémicos o lógicos de una proposición, es una consecuencia de la función reflexiva de discurso, mientras que, explicitar el contenido de una proposición es consecuencia de una función referencial de discurso. Por lo tanto, tenemos que se requieren dos funciones discursivas distintas para explicitar los valores epistémico y lógico de una proposición. Ahora, ¿en qué radica la importancia de diferenciarlos y explicitarlos? En la siguiente sección, buscaremos una respuesta clara y precisa para la pregunta anterior.

4.3.3. Valor epistémico *vs.* valor de verdad lógico

Es necesario distinguir entre el valor de verdad lógico y el valor epistémico de una proposición, ya que no provienen de los mismos procesos de determinación: Uno proviene de la comprensión del contenido, mientras que el otro proviene de procedimientos externos a la comprensión del contenido. Además de esto, otro aspecto importante por destacar, es que las proposiciones enunciadas en lengua natural, tienen cierto valor epistémico ligado a su comprensión, pero estas no tienen un valor lógico determinado. En el desarrollo de las demostraciones, el sujeto debe tener claros estos dos valores. En particular, nos debemos fijar en dos aspectos, que Duval [2007, 139] llama 'la razón epistemológica' y 'cognitiva' respectivamente, que se refieren a lo siguiente: Por un lado, la única conexión acordada entre el valor de verdad y el valor epistemológico, es cuando cada uno tiene asignado el valor 'verdadero' y 'necesario' respectivamente. Por un lado, los valores epistémicos dependen del 'estatus' de las proposiciones, y no en primer lugar de su 'contenido'; mientras que por otro lado, el valor lógico no depende solamente de su contenido, sino de resultados de verificación específicos de la percepción o procesos de razonamiento.

En matemáticas, hallar o decidir el valor lógico de una proposición, se torna un poco más complicado, ya que en el momento, en la mayoría de los casos, el estudiante se enfrenta con el reto de demostrar proposiciones que se encuentran inmersas en un discurso deductivo, donde a otras proposiciones, ya se les ha sido asignado un valor de verdad.

La distinción entre el valor epistémico y el valor de verdad de una proposición, es una de las distinciones clave que surgen al analizar funcionalmente al razonamiento, la segunda distinción que aparece, tiene que ver con el 'contexto de enunciación de la proposición[1]' [Duval 1995, 215; 2007, 139], el cual analizaremos en la siguiente sección.

4.4.4 Estatus

En la sección anterior, hemos analizado el significado de una proposición por sí misma, ahora es momento de pasar al siguiente nivel y estudiar las proposiciones en el 'contexto' de una organización discursiva, es decir, un contexto donde se involucran más de una proposición las cuales en conjunto se encuentra lógicamente ligadas para formar un razonamiento, por ejemplo una demostración o una argumentación.

[1] Es un 'contexto' en el que ciertas proposiciones ya han sido demostradas, otras no se han demostrado y muchas más no han sido enunciadas. Esto nos indica que el valor lógico cambia, no es estático, sino que tiene un carácter dinámico y, en un discurso, se determina entre otras cosas, de acuerdo con los valores de otras proposiciones, es decir, además depende de un 'estatus'.

Un error frecuente que comenten los estudiantes al intentar demostrar un teorema, por medio de un razonamiento deductivo, es que utilizan la conclusión como parte de la hipótesis, esto no es más que evidencia pura de que los estudiantes no tienen claro el estatus de las proposiciones. De cierto modo, es comprensible, ya que, al demostrar en matemáticas uno se encuentra flotando en un mar de proposiciones, definiciones, axiomas, y teoremas por demostrar o teoremas ya demostrados; cuando no se tiene claro que posición ocupa cada uno de estos los elementos, es cuando se dan errores de este tipo. Pero ahora, debemos cuestionarnos ¿qué es exactamente el estatus de una proposición? Anteriormente hemos mencionado que toda proposición tiene cierto 'estatus' y 'sentido'. Ahora bien, el estatus de una proposición depende del contexto en cual se enunció. Podemos llamar 'estatus', al rol específico que cada proposición desempeña dentro de un conjunto de proposiciones, las cuales son requeridas o enunciadas para poder lograr una demostración o una argumentación [Duval 2007, 139].

Una proposición puede tener los siguientes estatus: hipótesis, premisa, conclusión, moción, argumento, etc. En matemáticas cada proposición tiene un doble estatus el 'operatorio' y el 'teorético', los cuales se determinan por el contexto de enunciación en el cual se enunciaron [Duval 1995, 224-225].

Por un lado, el estatus 'operatorio' es intrínseco a cualquier organización del razonamiento, como pueden ser: Premisa, hipótesis, conclusión, etc. Y, determina la organización interna y las posibilidades para el funcionamiento de un paso de razonamiento, es decir la organización de las proposiciones al interior de un razonamiento. Por otro lado, el estatus 'teórico', es intrínseco al marco teórico, el cual está integrado por axiomas, definiciones, teoremas, conjeturas, reglas, principios, etc. Esto se refiere a un nivel de organización más elevado (o 'global'), tal como una vinculación axiomática de demostraciones locales.

El discurso, que se encuentra en pleno desarrollo, se organiza con respecto a un conjunto de discursos previos los cuales llamaremos el contexto global; por otro lado, con contexto 'local' nos referiremos a la organización dentro del discurso en desarrollo. Estos dos niveles de organización están estrechamente vinculados, ya que interactúan entre sí. Para comprender el funcionamiento del contexto local, es necesario entender por qué una demostración en efecto demuestra [Duval 1995, 224-225; 2007, 139].

Lo más importante que nos deja el análisis funcional son las dos distinciones clave del razonamiento; Por un lado, los valores de una proposición: Valor de verdad 'lógico', valor 'epistémico'; y, por otro lado, los contextos de enunciación: 'teórico' y 'operatorio' [Duval 1995, 215; 2007, 139]. Ahora, una vez que ya hemos introducido estos conceptos, podemos dar una definición (de razonamiento) más certera, desde el punto de vista funcional: "Una forma de expansión discursiva orientada hacia un enunciado-objeto, con el propósito de modificar el valor epistémico, teórico o semántico, que el enunciado-objeto tiene en un estado de conocimiento dado." [Duval 1995, 233].

4.5 Análisis estructural

Consideremos, por un segundo, que el razonamiento es de cierto modo, como una escalera: sea cual sea el escalón donde iniciemos, tendremos fija la meta de llegar al 'último' escalón de la escalera donde se encontrará la conclusión que buscábamos desde un principio. El punto de esta analogía, es el darnos cuenta de que cada escalón que subimos nos lleva a un escalón nuevo, el cual, nos llevará ya sea a un siguiente escalón intermedio, o al escalón meta que buscábamos alcanzar desde un principio; Además de esto, esta escalera es una en la que podemos subir un solo escalón a la vez, es decir, no hay espacios "vacíos" ni 'pasos-elevador' (mágicos) que no hagan evitar escalones. De esta forma, estructuralmente, podemos reducir a dos, las opciones que hay para alcanzar el último escalón: 'Un sólo paso' o 'más de un paso'. El razonamiento es mucho más complejo que una escalera, pero pensarlo de esta manera nos ayuda a darnos una idea de su estructura. De aquí podemos introducir el concepto siguiente. En un razonamiento será suficiente 'un paso de razonamiento' o más de un paso de razonamiento (*i.e.* un 'encadenamiento de pasos') para alcanzar el enunciado-objeto. Distinguir entre estas dos formas de razonamiento será fundamental para diferenciar los grados de dificultad que se pueden presentar en los distintos razonamientos. "Lo más importante de esto, es destacar que la organización de los razonamientos de un paso y los de un encadenamiento de pasos, provienen de diferentes niveles de organización, cuya naturaleza es distinta" [Duval 1995, 235].

Razonamiento de **un paso**	Un **encadenamiento de pasos** de razonamiento
+ Este tipo de razonamiento articula las proposiciones de acuerdo con su estatus operatorio: premisa, hipótesis, conclusión. Modifica el valor epistémico de su conclusión	+ Articula 'bloques' (o eslabones) de proposiciones que ya están organizadas entre sí. + Asegura la continuidad entre las conclusiones que se van obteniendo en cada paso del encadenamiento, así como la continuidad correspondiente al enunciado-objeto.
+ Su organización se puede identificar solamente con criterios funcionales.	+ Su organización se identifica con: Criterios globales de coherencia textual, es decir, con criterios que en un conjunto de proposiciones, permiten asegurar la continuidad o coherencia del tema dentro del enunciado; Así como, con criterios locales en los que se repite cierta proposición de un paso a otro.

Tabla 4.2 Las dos formas de organización un razonamiento.

Además del hecho de que existen varias formas de realizar un razonamiento, con el objetivo de lograr un enunciado-objeto, es importante resaltar que los dos tipos de organización para mencionados anteriormente, son una forma general de identificar las posibles estructuras. Cada uno de estas, demandan del sujeto, procesos cognitivos distintos para poder llevarlos a cabo. Por ejemplo, existen razonamientos de un paso que van de una proposición a una conclusión o de varias proposiciones a una conclusión.

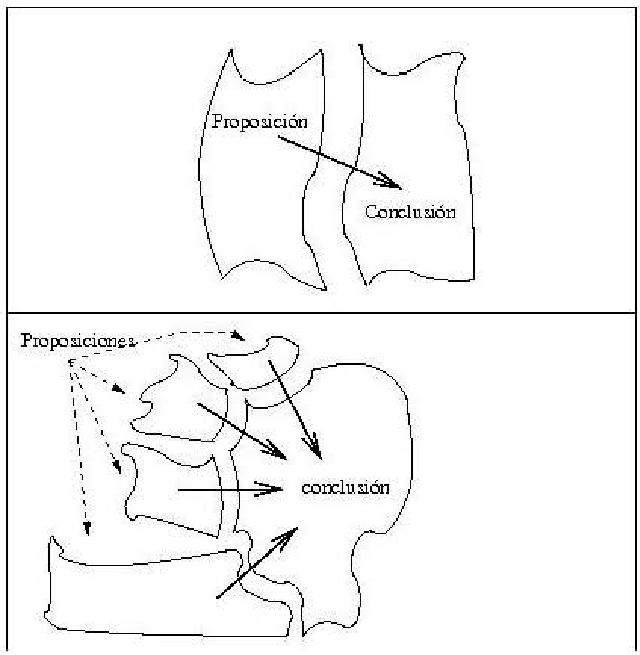


Figura 4.1 Dos posibles organizaciones para razonamientos de un paso. Arriba una proposición lleva a una conclusión a través de un paso representado por la flecha. Abajo tenemos un conjunto de proposiciones localizadas en el mismo nivel que en conjunto llevan a una conclusión por medio de un paso de razonamiento.

Análogamente, como en el caso del razonamiento de un paso, tenemos que es posible tener diferentes formas de realizar razonamientos de pasos encadenados, por ejemplo, en una cadena se le puede enganchar uno o más eslabones (o bloques) al eslabón anterior, el cual a la vez puede provenir de uno o más eslabones. La característica principal que tiene todo tipo de razonamiento por encadenamiento de pasos es que a fin de cuentas, siempre llegará a una sola conclusión, la cual podría servir como premisa en un futuro razonamiento.

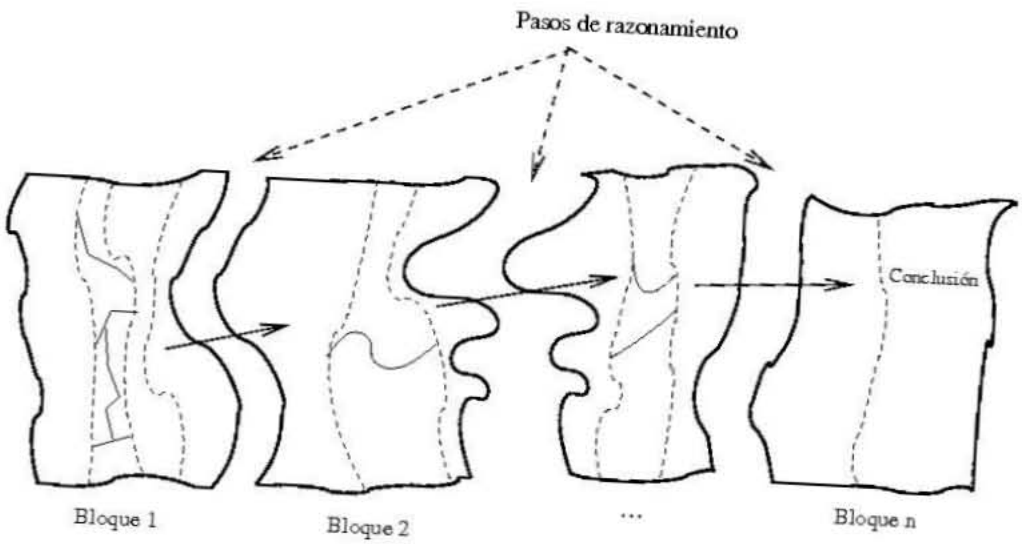


Figura 4.2 En esta figura se muestra una posible organización para un encadenamiento de *n* pasos de razonamiento ($n \leq 2,\ n \in \mathbb{N}$) es la organización más simple en una cadena de pasos, uno seguido del otro, como en un circuito en serie. En esta organización un bloque está ligado al siguiente por medio de un paso de razonamiento (representado en cada flecha), de esta forma se asegura la continuidad de la cadena, esto claro sin tomar en cuenta la continuidad interna a cada bloque (que podría tener más de un paso intermedio, representado por las líneas punteadas que dividen a cada bloque.

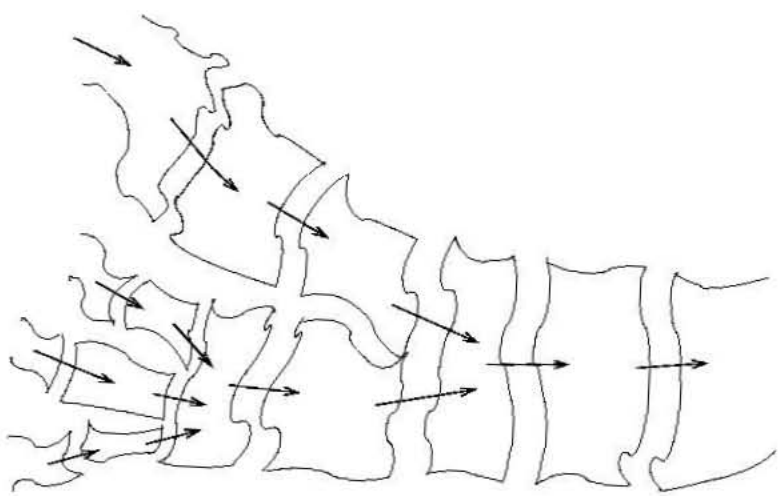


Figura 4.4 Esta figura es un ejemplo más de una posible organización, estructurada como encadenamiento de pasos de razonamiento. Se enfatiza que podría ser necesario tomar más de una conclusión previa para poder continuar con el discurso, es decir, puede estar formada por 'pequeñas cadenas' que se van enlazando para formar una más larga. Este encadenamiento de pasos ya no es comparable con un circuito en serie. Podría haber pasos en los que sea necesario retomar proposiciones y conclusiones previas, ocasionando así, que el encadenamiento no sea para nada lineal.

4.5.1 Análisis de la organización de los pasos de un razonamiento

En la sección anterior, vimos como una expansión discursiva, en particular una demostración, puede estar organizada en uno de los dos niveles de organización: un paso de razonamiento o un encadenamiento de pasos. Para tener un análisis más profundo del funcionamiento cognitivo detrás del razonamiento, podemos analizar el funcionamiento interno a cada nivel de organización. "Un entendimiento real de la demostración matemática requiere de la comprensión del modo 'operatorio' al momento de usar teoremas al interior de cada paso de razonamiento, así como de comprender de que forma se vinculan entre sí los diferentes pasos" [Duval 2007, 141].

Organización de los razonamientos de un solo paso

Comencemos por plantear la pregunta, desde el punto de vista cognitivo, acerca de cuáles son los tipos de razonamientos de un paso que se pueden efectuar, ¿existirán realmente diferentes tipos de razonamientos de un paso? El razonamiento, está intrínsecamente ligado al pensamiento, y de primera instancia puede sonar ingenuo siquiera pensar en que es posible clasificar sus tipos de un paso. Pero, bajo ciertas circunstancias, esto sí es posible a través de un análisis que se enfoque en las combinaciones y diferencias que se dan al considerar dos factores o variaciones cognitivas: El 'contexto' y la presencia o ausencia de 'tercer enunciados'. Así, definimos dos variaciones cognitivas que nos ayudarán a identificar los tipos de pasos de razonamiento que podemos efectuar en una expansión discursiva.

Primera variación cognitiva: Dependiendo del contexto de enunciación, en las proposiciones se puede reconocer la presencia o ausencia de un estatus operatorio, el cual se determina explícitamente desde un principio, además, este neutraliza los valores semánticos y epistémicos de la proposición.

Segunda variación: A través de un 'tercer enunciado', es posible pasar directamente de las proposiciones dadas, a las proposiciones enunciadas con estatus de consecuencia.

Estas dos[1] variaciones determinan las diferencias que se dan en las organizaciones de razonamientos de un solo paso. Al combinarlas, obtenemos criterios que nos ayudan a identificar cuatro posibles organizaciones de expansiones discursivas de una o más proposiciones dadas. La importancia de definir estas cuatro organizaciones es que dan lugar a cuatro formas de razonamiento: I. Inferecia semática, II. Silogismo Aristotélico, III. Inferencia discursiva, y IV. Deducción.

	Sin estatus operatorio	**Con** estatus operatorio
Sin tercer enunciado	I. Inferencia Semántica	II. Silogismo Aristotélico
Con tercer enunciado	III. Inferencia Discursiva	IV. Deducción

Tabla 4.3 Los cuatro posibles pasos de razonamientos o las cuatro posibles organizaciones de una expansión discursiva de una o más proposiciones (Duval, 1995, p.238).

Tipo I. Inferencias Semánticas

Las inferencias están ligadas a la comprensión de la lengua. Este paso de razonamiento, se caracteriza por el pasaje directo de las proposiciones; el cual, principalmente incluye pasar de una proposición a otra, sin usar un tercer enunciado, con sólo presuponiendo o negando. Por un lado la negación es un tratamiento fundamental para todo sistema de representación que se diga lengua. 'Negar un enunciado' quiere decir que uno opone dos enunciados entre sí mediante el uso de operaciones elementales, mismas que se aplican a los elementos

[1] Existe una tercera variación, identificada con la aprehensión simultánea de premisas que podrían estar contextualmente alejadas unas de otras. Esta, tendría lugar en un análisis psicológico, pero en este caso no la consideraremos, ya que como Duval [1995, 237-238] dice, esta variación es diferencial y en general está contenida en la primera variación, es decir corresponde en la división entre los pasos que están o no organizados en función de un estatus operatorio.

constitutivos del enunciado; ejemplos de esto son: '$\forall$' y '$\neg\forall$'; 'par' e 'impar'; '$\exists$' y '$\forall$'; p y $\neg p$; 'todos' y 'alguno'. La negación también se puede realizar por medio de la combinación de operaciones elementales, en las que el enunciado se transforma y pasa de un enunciado o proposición a otra, de tal manera que se tenga el mismo valor de verdad, o un enunciado contradictorio opuesto en significado [Duval 1995, 238-240,164). Por otro lado 'presuponer' quiere decir 'inferir' parte del contenido de la proposición, el cual está implícito en esta. El hecho esencial de estas dos operaciones, es que se realizan en tan sólo un paso, y como dijimos anteriormente, sin el uso de un tercer enunciado.

Mencionar las características básicas de este tipo de paso de razonamiento es relevante para este proyecto, por el papel que desempeñan en la coordinación de registros en la actividad matemática, además de que interviene en dos formas de demostración en matemáticas: Reducción al absurdo[1], donde uno niega el enunciado para llegar a una contradicción; así como, en la demostración por contra positiva. Un ejemplo de tratamiento de negación es el siguiente:

Proposición: *Todos los números primos son impares*
Negación: *Existe un número primo que es par*

En este ejemplo, la negación de la proposición es opuesta en significado además de que su valor de verdad es distinto. Otro ejemplo de inferencia semántica pero ahora donde el tratamiento es la presuposición es:

Proposición: *Los enteros son números complejos cuya parta imaginaria es igual a cero*
Presuposición: *Los números enteros tienen una parte imaginaria*

Mencionar este tipo de paso de razonamiento puede parecer trivial, pero desde el punto de vista didáctico no lo es, ya que en realidad varios de los

[1] Su funcionamiento se detallará más adelante.

problemas que surgen al demostrar tienen su raíz en este tipo de paso. Frecuentemente, nos encontramos con que el estudiante no logra negar 'correctamente' las proposiciones y dado que este paso es fundamental, el razonamiento en general no será válido, y por tanto no podremos hablar de una demostración. Por ejemplo, en el cálculo de predicados, se presentan dificultades para el estudiante cuando este intenta negar enunciados como el siguiente:

$$\forall(x)\{\exists(y)\neg p(y)\rightarrow[p(x)\vee\neg q(x)]\}$$

Especialmente, si nos preguntamos por la negación del enunciado en la que no sólo se aplica el operador unitario '¬' a todo el enunciado,

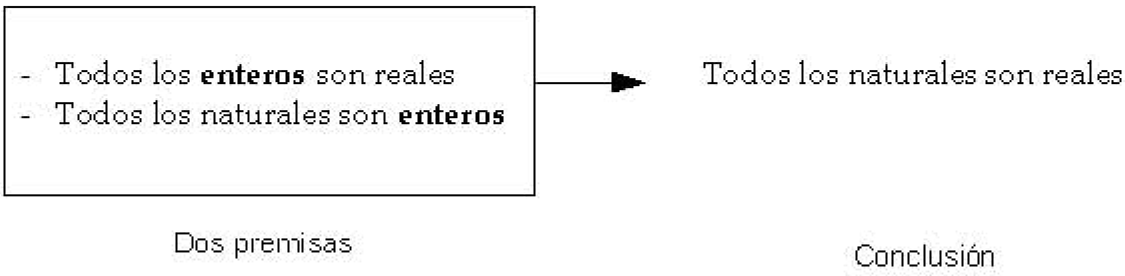
$$\neg\{\forall(x)[\exists(y)\neg p(y)\rightarrow(p(x)\vee\neg q(x))]\}$$

sino donde se busca otra transformación que aunque matemáticamente es equivalente a la anterior, el costo cognitivo para obtenerla es por mucho mayor, como lo es en el caso de la siguiente:

$$\exists(x)\{\exists(y)\neg(p)\wedge[\neg p(x)\wedge q(x)]\}$$

Tipo II. Silogismo Aristotélico

El silogismo aristotélico no es particularmente relevante para este proyecto, dado que su intervención en la demostración matemática es igualmente irrelevante (si no es que nula). De cualquier modo incluiré aquí una breve descripción de este tipo de razonamiento para poder diferenciarlo claramente de los demás tipos (principalmente del el paso deductivo). El silogismo aristotélico tiene una estructura perfectamente definida que consiste en únicamente dos proposiciones y un término común en cada una de ellas, de donde se obtiene la conclusión. Además de esto, el silogismo aristotélico no admite tercer enunciado(s), es decir el pasaje de las dos premisas a la conclusión es directo. Aquí un ejemplo de silogismo aristotélico:



Tipo III. Inferencias Discursivas

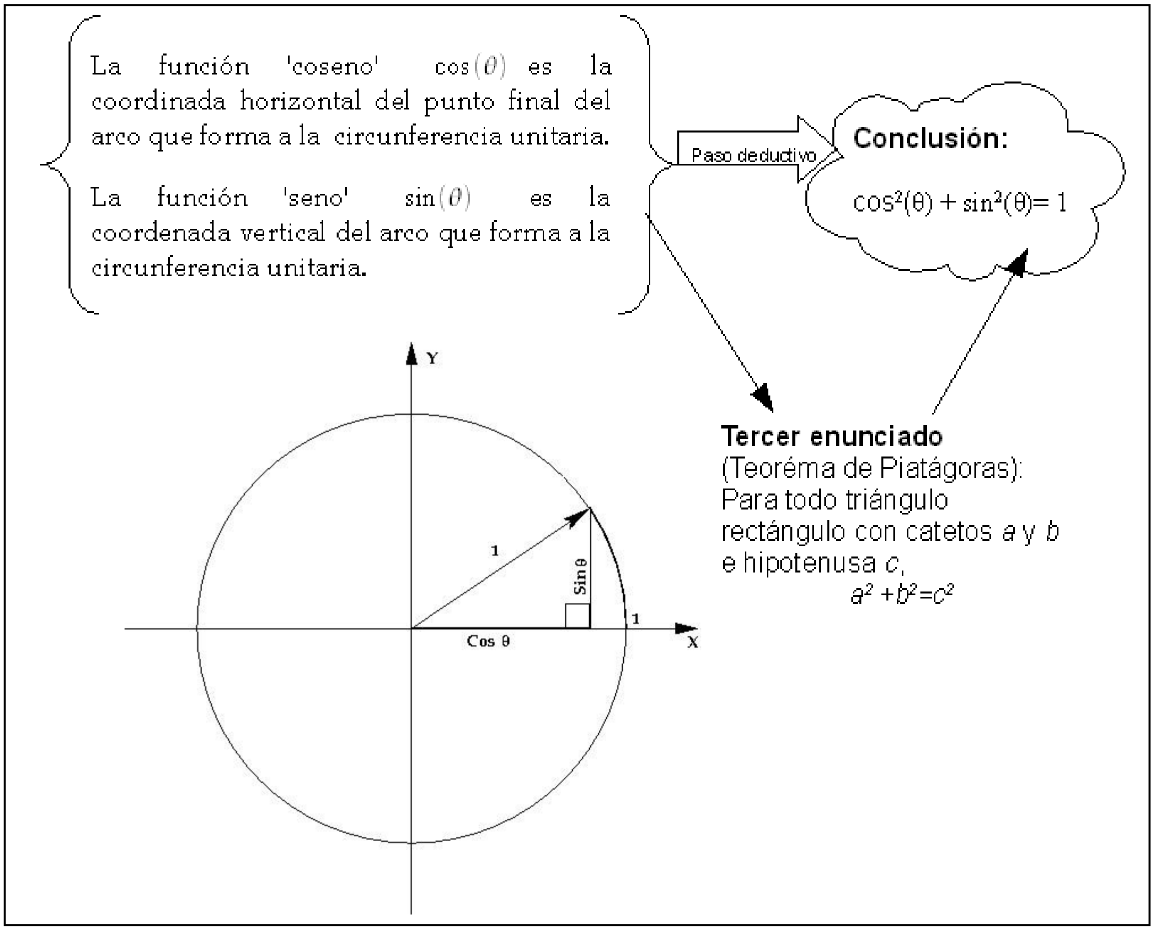
Las inferencias discursivas no se deben confundir con las inferencias semánticas, ya que las inferencias discursivas no dependen de la organización semántica del léxico de una lengua. Las inferencias discursivas se realizan en expansiones discursivas como la argumentación, la cual seguido se confunde con el razonamiento deductivo; Pero existe una delgada línea que separa a la deducción de la argumentación, la diferencia entre estas dos expansiones discursivas, radica en que la argumentación tiene el propósito de convencer mas no de demostrar. Frecuentemente en matemáticas vemos que los estudiantes tratan de demostrar por medio de argumentaciones, lo cual no es erróneo del todo (si se realiza sólo como una práctica de entrenamiento). El problema es que la argumentación proviene del uso común de la lengua natural [Duval 1995, 260], desde la perspectiva de Piaget ”es sólo a través de la lengua natural que se pueden describir los valores epistémicos de una proposición” [Como citó Duval 2007, 152], adicionalmente, es también a través de la lengua, que el sujeto se puede dar cuenta de qué es lo que está involucrado en la actividad que él o ella realiza. En la práctica, el estudiante intentará llegar al resultado o a la demostración a como de lugar, especialmente cuando este no está conciente de cuales son los posibles caminos a seguir para lograr su objetivo. La argumentación se le presenta al alumno como la forma más natural de demostrar, aunque esta no sea realmente una demostración. Para indagar más sobre esto, tendremos que analizar las características del cuarto tipo de paso de razonamiento, esto nos dará la pauta de cuales son los caminos a seguir para lograr demostrar.

Tipo IV. Deducción

Una demostración requiere de un razonamiento válido, esto es, que la conclusión de cada paso que la integra sea 'necesaria' y que entre cada dos pasos no existan 'huecos' [Duval 2007, 140], es decir, el pasaje entre cada dos pasos debe estar justificado. A este tipo de razonamiento, se le conoce como razonamiento deductivo. Dado que estamos interesados en conocer los secretos detrás de las demostraciones, analizaremos en detalle las características del tipo IV.

En el nivel del paso deductivo, a cada proposición se le asigna uno de los siguientes estatus operatorios: premisa, conclusión o tercer enunciado. La razón es que como las premisas están enunciadas en un contexto teórico, entonces estas adquieren un estatus teórico que determinará su estatus operatorio en la organización de un paso de razonamiento. Esto implica que los tercer-enunciados se produjeron antes, y se enunciaron dentro de un marco teórico como axioma, definición, teorema etc. [Duval 1995, 244; 2007, 140).

En secciones previas ya hemos introducido el término 'teorema', pero sin haberlo definido realmente. Ahora, una forma de hacerlo es la siguiente: "Un teorema es un enunciado con una organización bipartita de cualquier regla 'si, entonces'" [Duval 2007, 140], 'si pasa esto, entonces aquello'. Además de esto, podemos decir que un teorema es un tercer enunciado, ya que en matemáticas, se puede reducir la organización de un tercer enunciado, a la organización de un teorema. Un tercer enunciado, tiene dos parte que debemos identificar; primero, uno o más antecedentes a una o más proposiciones (que se deben verificar); y segundo, está la consecuencia de la proposición (que se debe ser extraer). En otras palabras, para poder aplicar un teorema adecuadamente uno tiene que verificar, que todos los enunciados que forman parte de las condiciones se satisfagan, ya sea con las premisas de la proposición, o se hayan obtenido antes en conclusiones previas. Una vez que se han verificado, uno puede proceder a extraer la conclusión del tercer enunciado para usarlo en la proposición inicial. A continuación tenemos un ejemplo de razonamiento deductivo:



Tipos de organizaciones para encadenamientos de pasos razonamiento

Un encadenamiento de pasos, se refiere a los pasos que son suficientes en una expansión discursiva para alcanzar el enunciado-objeto. La característica principal de este tipo de organización es que sigue criterios de coherencia discursiva. Como vimos en la sección dedicada al discurso, en la expansión discursiva de una proposición, se toman unidades significantes comunes (similaridad semiótica) o existe una referencia común a los mismos objetos (similaridad semántica) [Duval 1995, 246-249].

Encadenamientos

Los encadenamientos se presentan de dos formas; Por 'reciclaje de proposiciones', y por 'conexión extrínseca'. A continuación tenemos una descripción de cada una.

Un encadenamiento por reciclaje de proposiciones, sucede cuando hay similaridad semiótica entre las proposiciones, esto es, que la continuidad entre dos pasos deductivos, se asegura cuando la conclusión del primer paso se retoma como premisa; ya sea en el siguiente paso (en el caso de un desarrollo estrictamente lineal), o en un paso más adelante en un rango superior (en el caso de un desarrollo con forma de árbol). Al retomar la conclusión como premisa, lo que sucede es que el estatus operatorio cambia y no hay necesidad de utilizar conectivos proposicionales como: *si… entonces, por eso, por lo tanto, ahora bien etc.* Ya que la vinculación entre dos pasos. se basa en la repetición de la misma proposición, cambiando su estatus operatorio de un paso al siguiente.

En un encadenamiento por conexión extrínseca, el razonamiento se hace por acumulación y no por sustitución. Este encadenamiento de razonamientos se va construyendo con ayuda de los conectivos o expresiones, que van fijando las relaciones de los argumentos entre sí, así como con el enunciado-objeto. Además, los conectivos o expresiones como: "con mayor razón" "por tanto", "pero", "sin embargo", etc. indican si dos pasos convergen o divergen. Así, al converger o divergir los pasos, estos producen, o no, el mismo cambio en el valor epistémico del enunciado-objeto respectivamente. La importancia de diferenciar el encadenamiento por conexión extrínseca, es que este tipo de encadenamiento "exige que se recuerde el conjunto de proposiciones, y que haya aprehensión de las múltiples correspondencias de contenido que tienen las proposiciones entre sí" [Duval 1995, 249].

4.6 Análisis lógico

Anteriormente, ya hemos tocado el tema de los fundamentos de las matemáticas y su relación con la demostración matemática, la cual definimos al principio del presente capítulo como un razonamiento válido. Ahora, ha llegado el momento de analizar el razonamiento desde el punto de vista de cuáles son las condiciones que le dan, o no, validez. A este tipo de análisis, lo llamaremos el análisis lógico. Como ya hemos mencionado, uno de los problemas que surgen al aprender a demostrar es la dificultad para identificar cuando estamos frente a una. En otras palabras, el problema es identificar cuando un razonamiento es, o no, válido. Este obstáculo parece ser bastante abstracto e incluso difícil de superar para la mayoría de los alumnos, (sin mencionar el problema para producir demostraciones). Por ello, averiguar que significa realmente que una demostración sea válida parece ser el primer paso para comprender y así superar estos obstáculos. Ahora debemos preguntarnos: ¿En qué está fundada la validez de un paso de razonamiento?, ¿A qué da fundamento dicha validez dentro de un encadenamiento de pasos? Anteriormente, hablamos del hecho de que en matemáticas, los problemas tienen uno y sólo un resultado, que puede estar integrado de distintas formas, pero este resultado no se contradice, el problema y la respuesta guardan coherencia entre sí. Ahora bien, según Aristóteles, para que un paso de razonamiento sea válido, es necesario y suficiente que a partir de sus premisas se produzca una y sólo una proposición [Como citó Duval 1995, 269], es decir, se debe obtener una y sólo una conclusión. 'Por contención' y como 'la propiedad se hereda', es posible extender la aseveración anterior acerca de los razonamientos de un paso a los encadenamientos de un paso de razonamiento. Dentro de un encadenamiento, si cada paso es válido, dará una y sólo una conclusión que será usada en los pasos subsecuentes, así con pasos válidos 'encadenados', es que podemos decir que el encadenamiento será válido si da como resultado una y sólo una conclusión. La unicidad de la conclusión, se puede traducir en el hecho de que un paso de razonamiento válido da una conclusión con un valor epistémico específico: un valor 'apodíctico'. En otras palabras, una demostración tiene absoluto sentido para alguien que comprende cada uno de los pasos que la integran, mientras que para alguien que la acepta sin entender los pasos el sentido que adquiere la conclusión es completamente distinto (no es podíctico).

Validez en un razonamiento deductivo

La única restricción respecto a la operación de extracción, concierne a la organización interna del tercer enunciado empleado en la deducción. Como mencionamos anteriormente, un tercer enunciado tiene una organización bipartita de los antecedentes de la proposición y de la proposición consecuente. La conclusión se localiza en el tercer enunciado, precisamente de donde se extraerá, así que, en un razonamiento deductivo uno tiene que verificar que todos los antecedentes de las proposiciones del tercer enunciado estén entre las premisas (hipótesis o conclusiones previas) del enunciado que se quiere demostrar.

Hasta el momento, parece ser simple lo que se requiere para realizar un razonamiento deductivo. Pareciera que verificar los antecedentes con las premisas, no es más que una lista que debemos palomear para saber si el antecedente está o no incluido. Para tener éxito en un razonamiento deductivo, uno tiene que considerar la diferencia entre 'contenido' y 'estatus' de las proposiciones. Cuando esta diferenciación se pierde de vista, fácilmente se cae en malentendidos, como tomar la conclusión como hipótesis, creando así, un círculo vicioso que sólo intenta demostrar algo basándose en lo mismo, ¡esto es tan absurdo como intentar morderse los dientes! Este círculo vicioso se presenta en los casos en que uno realiza un razonamiento deductivo con base en el contenido de las proposiciones, y, cuando uno no está conciente del hecho de que la organización deductiva de las proposiciones depende de su estatus operatorio. Cuando un estudiante no se convence con una demostración, lo que sucede es que el razonamiento no trae consigo cambio alguno en la aprehensión del sentido de la conclusión obtenida.

Razonamiento válido: Contenido de la proposición vs. validez del razonamiento

Para entender cómo funciona un razonamiento válido, es importante destacar cuales son la variables que toman parte en la decisión de si un razonamiento es o no válido. Una de las variables, que pueden desembocar en confusión total, tiene que ver con el contenido de las proposiciones. Con frecuencia, uno se encuentra en el caso de que las proposiciones parecen ser irreales, correctas, absurdas (o cualquier otro adjetivo con el que se pueda calificar a una proposición), entonces el estudiante tiende a proceder en su razonamiento de acuerdo a sus percepciones, frecuentemente derivadas de su primera impresión. En realidad un razonamiento válido no depende del contenido de las proposiciones, sino de cómo se justifican los pasos que llevan a la conclusión, es decir, depende de lo bien que se hayan aplicado las normas que rigen la organización de las proposiciones utilizadas.

Razonamiento neutral

El término razonamiento neutral se utiliza para referirse a los razonamientos cuyas conclusiones no son ni válidas ni inválidas. Un ejemplo de razonamiento neutral es la argumentación, la cual como dijimos anteriormente, tiene el objetivo de convencer pero no de demostrar.

4.7 Tipos de demostraciones utilizadas en Matemáticas

En matemáticas uno puede demostrar una proposición dada a través de distintos métodos: Razonamiento deductivo, reducción al absurdo, principio de inducción, contra positiva o por contraejemplo. Estas se utilizan en casos distintos, y los procesos cognitivos que se requieren para llevarlas a cabo, son muy diferentes para cada uno de estos métodos.

Razonamiento deductivo

Aunque hasta ahora ya hemos descrito en buena medida las características del razonamiento deductivo, en esta sección, reuniremos los aspectos más importantes de este tipo de razonamiento: 1. Cualquier razonamiento deductivo involucra dos niveles de organización discursiva: El nivel de organización que lleva de varias proposiciones a un paso deductivo, y por otro lado, el nivel que lleva varios pasos a una demostración [Duval 2007, 140]. Los mecanismos de deducción consisten en extraer una proposición y reciclarla como premisa en un paso siguiente, lo que implica el uso de un tercer enunciado. Cualquier restricción en la organización, aparece a partir del estatus operatorio de las proposiciones enunciadas y no de su contenido; 2. Cada proposición adquiere uno de los siguientes estatus operatorios: premisa, conclusión o tercer enunciado; 3. Se desarrolla por sustitución y no por acumulación. La lengua natural no es el primer registro en el cual se pueda experimentar un razonamiento deductivo, ya que la expresión lingüística obscurece y oculta el funcionamiento real de la deducción. Por esta razón la argumentación no se debe usar para demostrar, o en todo caso sólo se debe utilizar como una muleta; En un razonamiento deductivo, el uso de otros teoremas (tercer enunciados) es constante; y, 4. La vinculación de las proposiciones al interior del razonamiento deductivo depende solamente de su estatus operatorio.

Reducción al absurdo

Este tipo de demostración, se conoce como una fórmula universalmente válida, es decir, corresponde a un argumento válido que proviene en dos principios de la lógica clásica: la ley clásica de no contradicción y el principio del tercero excluido[1].

A continuación, tenemos la escritura de la reducción al absurdo escrita en un lenguaje formal, donde α y β denotan cualquier proposición:

$$[\neg\alpha \rightarrow (\beta \wedge \neg\beta)] \rightarrow \alpha$$

En matemáticas, este tipo de razonamiento podría considerarse puramente como una forma de razonamiento deductivo, ya que el objetivo de la reducción al

[1] $\neg(p \wedge \neg p)$ y $p \vee \neg p$ donde p denotan cualquier proposición. La ley clásica de no contradicción y el principio del tercero excluido respectivamente.

absurdo es establecer que α es necesaria luego que su negación conduce a una contradicción. En detalle, la estructura de una demostración por reducción al absurdo se puede dividir en tres etapas: El paso inicial, el cual es un razonamiento en el que uno niega el enunciado-objeto (que se pretende alcanzar); El paso final, en el que se rechaza la negación propuesta en el paso inicial y se concluye el enunciado-objeto; Y, entre estos dos pasos, hay una etapa de razonamiento intermedio que funciona exactamente como una deducción. Por esta razón, las dificultades específicas a la reducción al absurdo se dan en los pasos inicial y final del mismo.

El paso inicial, que se refiere a la negación del enunciado-objeto, es una operación discursiva que no requiere, ni del pasaje a través de un tercer enunciado, ni de una determinación previa del estatus del enunciado-objeto negado. Debido a esto, el paso de razonamiento inicial que se requiere, es un razonamiento de tipo I, es decir, una inferencia semántica. Una vez dado el primer paso de razonamiento, da comienzo un razonamiento deductivo, el cual toma las premisas originales del enunciado-objeto y agrega la negación obtenida en el paso inicial. Esta etapa intermedia se desarrolla como una deducción, justo hasta el momento en que surge una contradicción; en este punto, a modo de '*feed-back*', uno mira hacia atrás (donde quedó el paso inicial) y utiliza un tercer enunciado (principio del tercer excluido), para rechazar la negación propuesta en el paso inicial; Esto nos conduce hasta el paso final de la demostración, concluye la demostración, luego de un segundo '*feed-back*' que ve hacia las premisas del razonamiento en general y transforma el rechazo anterior en aserción del enunciado-objeto.

Para resumir, podemos decir que una demostración por reducción al absurdo, consta de dos enunciados-objeto y de dos "*feed-backs*". Una representación no discursiva del razonamiento por reducción al absurdo, no tiene forma de árbol (porque contiene ciclos) y su gráfica de organización proposicional se muestra en la siguiente figura:

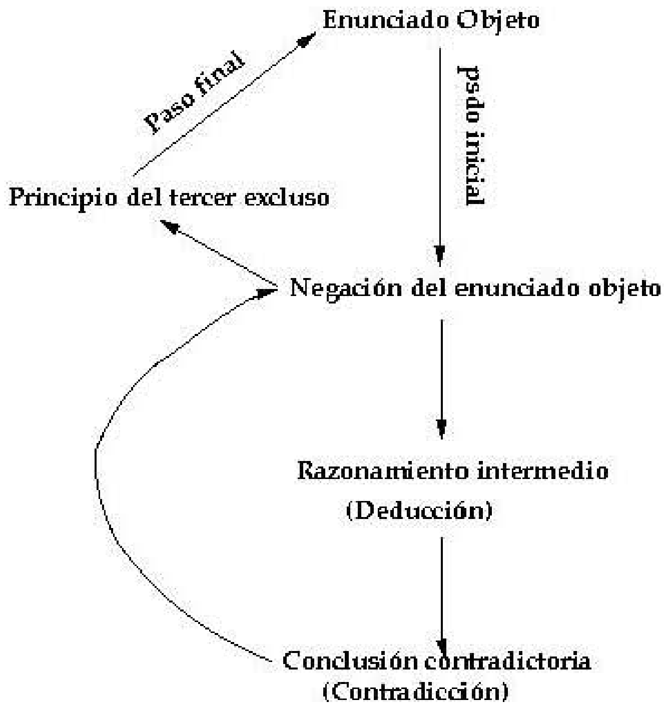


Figura 4.5 La gráfica de organización proposicional del razonamiento por reducción al absurdo, Duval [1995, p.263]

El principio de inducción matemática

El principio de inducción matemática, se explica como una consecuencia de los postulados del conjunto de los números reales: Sea *P(n)* una proposición definida para todo numero natural *n*. Si *P(1)* es verdadera y si *p(k+1)* es verdadera siempre que *P(k)* es verdadera, entonces *P(n)* es verdadera para todo numero natural *n*. [Eves 1997, 138-191]. Una demostración que se construye con base en el principio de inducción, tiene una estructura que podemos analizar en dos partes: La base y el paso inductivo.

La base comienza con el primer elemento del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, (dependiendo de como se considera $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ puede contener, o no, al 'cero'). En el primer paso se muestra que *P(n)* se satisface para *n=1* (ó *n=0*). Luego el paso inductivo consiste en suponer que *P(n)* se satisface para *n=k*, donde *k* es un elemento de $\mathbb{N}$, teniendo esta premisa, el paso siguiente es demostrar que *P(n)* se satisface para *n=k+1*.

La inducción es un razonamiento que depende del dominio que el sujeto tiene sobre los elementos a los que se refiere la proposición, es decir, tiene que ver con la experiencia que se tiene con los objetos involucrados en la proposición. Dicha experiencia, no es más que un compuesto de anticipaciones, observación de ciertas regularidades, etc.; las mismas que se utilizan para efectuar reglas de inferencia o generalizaciones.

> La familiaridad que tenga el sujeto con los objetos, independientemente del sistema semiótico de representación, es una condición necesaria para la inducción, por esta razón, la inducción no se puede considerar completamente como un tipo de razonamiento intrínsecamente ligado con el uso del lenguaje [Duval 1995, 211-212].

Método del contraejemplo

El método del contraejemplo, se usa como una forma de demostración, en los casos en los que el enunciado-objeto es falso y contiene un cuantificador universal sobre los elementos del conjunto al que se refiere. En este caso, lo que se demuestra es la negación del enunciado-objeto. Para lograrlo, es suficiente con exhibir, a través de un ejemplo, al menos un elemento que no satisfaga la propiedad cuantificada universalmente. Después de demostrar la negación del enunciado-objeto, uno enuncia (haciendo uso del principio del tercero excluido) la falsedad del enunciado objeto. Ahora lo que debemos destacar de este tipo de demostración, es que el único razonamiento involucrado es un razonamiento de tipo III; tan sólo consiste en establecer la contradicción una vez exhibido el elemento que no satisface el enunciado-objeto. El obstáculo que concierne a una demostración por contraejemplo, es precisamente el ser capaz de exhibir tal elemento que lleva a la contradicción del enunciado-objeto. Pero para 'ser capaz de exhibir un elemento' uno necesita realizar una búsqueda en el catálogo de representaciones cognitivas disponibles, o en general, en el conocimiento que se tiene; lo cual no depende de manera alguna de la expansión discursiva de la proposición, sino del campo de representaciones de las que el sujeto dispone. Si el sujeto cuanta con un 'catálogo' lo suficientemente variado y extenso, entonces, encontrar el contraejemplo puede ser incluso trivial; Mientras que un catálogo reducido, lleva a que la demostración se convierta en un descubrimiento aleatorio, o en un problema de creatividad y no de razonamiento, como comúnmente se cree. A fin de cuentas, tenemos que una demostración por contraejemplo, demanda una práctica semántica, además de la distinción entre la parte del contenido cognitivo y la parte del pequeño paso de razonamiento. [Duval 1995, 297-298].

Capítulo 5

Aprender a demostrar: Los retos

Una vez analizado lo que es el razonamiento y las demostraciones, nuestra misión en el presente capítulo es discutir y reconocer, tan precisamente como sea posible, los problemas concretos que se presentan al aprender a demostrar. En varias ocasiones, a lo largo del desarrollo de este proyecto, hemos planteado algunas de las preguntas principales que surgen respecto al aprendizaje, la actividad matemática y el razonamiento matemático. Para lograr este cometido tenemos que abrirnos y ver el panorama completo, en busca de relaciones razonables que liguen de alguna forma todos los temas abordados en este proyecto.

Entender y producir demostraciones.

Aprender a demostrar implica que uno tendrá que dominar dos de las actividades implícitas a la demostración, por un lado la capacidad de 'producir demostraciones' y por otro lado, la capacidad de 'entender demostraciones' (que no fueron desarrolladas por el sujeto mismo). La idea es, que el entendimiento de una demostración, es una condición necesaria para la producción de demostraciones, mas no es suficiente. Una vez que el estudiante entiende realmente cuál es la estructura y el funcionamiento de las demostraciones, él o ella cuenta con los elementos para producir una demostración. Sin embargo, esto no asegura que tendrá éxito en ello. Ser capaz de entender una demostración es el primer paso hacía la capacidad para producir otra. 'Entender' una demostración tiene dos connotaciones: Por un lado, entender en general las características de la demostración (su organización, como se moviliza el espacio de significado de las proposiciones, etc.); por otro lado, entender una demostración en particular, al convencerse de cierto enunciado-objeto, luego de seguir una demostración de este, es decir, cambiar el valor epistémico de la información enunciada en una proposición sin influencia externa excepto por la de la misma demostración. Como vemos, entender una demostración abarca muchos aspectos. Ahora, producirla, abarca aún más. El punto interesante de esto es que, el modo en que se mide el entendimiento que el estudiante tiene de las demostraciones, es justo a través de su capacidad de producción.

El punto decisivo para aprender a demostrar está en el descubrimiento de un paso de razonamiento válido del que el estudiante, sin control externo alguno, pueda probar su validez [Duval 1995, 312]. El problema didáctico de aprender a demostrar en matemáticas está dirigido hacia saber como guiar al estudiante para que descubra el funcionamiento de un paso deductivo. Dado que solamente un razonamiento deductivo (tipo IV) satisface con los aspectos siguientes: 1. Su funcionamiento deriva siempre en una conclusión única; 2. Utiliza tercer enunciados; y, 3. Se utiliza ampliamente en matemáticas.

Ahora, para comprender un razonamiento deductivo debemos prestar atención al estatus de las proposiciones y a la neutralización de su valor epistémico semántico frente a su valor epistémico teórico. El descubrimiento de una organización de discurso deductiva no se puede llevar a cabo sino es a través de registros diferentes al de la lengua natural [Duval 1995, 313].

El análisis del desarrollo del conocimiento, así como el de los obstáculos involucrados en aprendizajes fundamentales del razonamiento, comprensión de textos y adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrentan tres fenómenos estrechamente relacionados entre sí que Duval [1995] definió de la siguiente manera: 1. La diversificación de los registros semióticos de representación. Cuando un estudiante se enfrenta con el problema de demostrar, a este se le presentan algunos enunciados o teoremas en los que el uso de diversos registros de representación es inevitable, de hecho son al menos dos registros distintos los que estarán involucrados en todo enunciado matemático; 2. La diferenciación entre significado y significante. Dado que en matemáticas se analizan las propiedades y relaciones de objetos matemáticos, abstractos por naturaleza, el uso de representaciones es necesario para tener acceso a dichos objetos. Es respecto a la diferenciación entre estos objetos matemáticos y sus representaciones, que se presentan enormes dificultades para el estudiante. El estudiante tiende a confundir los objetos con sus representaciones y eso lo conduce a tratar a las representaciones como si estos fueran directamente los objetos; y, 3. La coordinación de diferentes registros de representación. En una demostración, como en otras actividades matemáticas, se necesita coordinar, al mismo tiempo, diferentes registros. Lo que agrega un costo cognitivo a la actividad de la demostración. La coordinación de registros es más evidente en ramas de las matemáticas que recurren al uso de sistemas gráficos o figuras; sin embargo, no hay rama de las matemáticas que se escape a la coordinación simultánea de al menos dos registros de representación.

La falta de entendimiento en la demostración: Tres diferenciaciones

Es posible definir tres problemas principales detrás de la falta de entendimiento de la demostración. Enfocándose en el análisis de las proposiciones y de su organización en pasos de razonamiento, Duval [1995, 303-306] identifica tres obstáculos que alejan al estudiante del entendimiento real de la demostración. Estos obstáculos consisten básicamente en no diferenciar entres las siguientes tres oposiciones: 1. Valor epistémico teórico y valor epistémico semántico de una proposición. Esta oposición teorético-semántica de los valores epistémicos de una proposición, hace referencia al caso en que la organización de los pasos de una deducción se realizan de acuerdo al 'contenido' y no al 'estatus operatorio' de las proposiciones. Además se considera que las proposiciones se proporcionan fuera del contexto de enunciación, cuyo sentido se reduce solamente al componente de sentido. El resultado de esta falta de diferenciación es que el valor epistémico semántico domina al valor epistémico; 2. Los dos posibles usos del tercer enunciado.

Hay tres posibles formas de usar un tercer enunciado. Dependiendo de su naturaleza, este puede ser de forma bipartita (si, entonces), donde es completamente claro cuales son las premisas que se deben verificar y cual será la extracción de la conclusión. Pero además de esta forma, puede haber otro tipo de terceros enunciados en los que sus elementos no son tan explícitos, ya que no requieren de ninguna organización en particular, en este caso sólo habrá una relación justificada en las relaciones semánticas interproposicionales; y, 3. Dos niveles de organización del razonamiento. Como hemos abordado en el capítulo anterior, el razonamiento deductivo involucra dos niveles de organización discursiva, donde su funcionamiento cognitivo es radicalmente diferente: a) Razonamientos de 'un paso': basándose en el estatus de las proposiciones; y, b) Encadenamiento de pasos de razonamiento: a base del reciclaje de conclusiones intermedias. Reconocer la diferencia entre estas dos organizaciones es la clave para lograr el dominio y comprensión de las demostraciones.

A partir de esta triple diferenciación es posible clasificar los errores más comunes que se cometen en la práctica y que conducen a la incomprensión de la demostración. Para realizar esta clasificación, seguiré el modelo que Duval [2007, 147] propuso, el cual se desarrolla en función de la organización del paso de razonamiento deductivo. Donde se consideran cuáles son los elementos que se requieren para tener éxito en cada una de las organizaciones deductivas: Un paso de razonamiento o un encadenamiento de pasos de razonamiento.

	El funcionamiento de un razonamiento válido	Tipos de malentendidos
Organizar las proposiciones en un paso deductivo tomando en cuanta tres clases de estatus	1. Un cambio de enfoque respecto a lo que se considera el primer componente del significado de una proposición: Estatus en lugar del contenido 2. Hacer funcionar al teorema: Desprendiendo su parte 'entonces'. Un teorema no es un argumento.	'Disfuncionales': + 'Mezclar' hipótesis con la conclusión +'Confundir' el enunciado con su inverso + 'No revisar' la aplicación de las condiciones de los teoremas
Organizar los pasos deductivos en una demostración de…	Hacer que los pasos deductivos encajen. Hay dos condiciones: 1. La conclusión de un paso debe ser la premisa de otro paso. Hipótesis y premisas no se refieren al mismo nivel. 2. Usar todas las propiedades matemáticas relevantes al problema.	+ La 'no discriminación' de los mecanismos de sustitución 'Huecos en el progreso' de la demostración + No percibir todas las limitantes del problema a resolver

Tabla 5.1 Indicadores de incomprensión de la organización de una demostración. [Duval 2007, 147]

¿Cómo es que los estudiantes podrían evitar estos malentendidos al aprender a demostrar? Esta es la pregunta que nos lleva a considerar toda la teoría que hasta ahora hemos analizado. Duval [2007 p.150] propone una clara división para las actividades matemáticas que se deberían realizan antes y durante desarrollo de una demostración, de tal modo que estas permitan al estudiante tener un mejor control sobra la propia demostración. La división de actividades que propone, comprende tres etapas: 'Exploración', 'investigación específica que lleva a la organización deductiva' de proposiciones presentes en registros no discursivos y, por último, una 'descripción verbal'.

Exploración libre

Escribir una lista, dividida en diferentes grupos, dependiendo del estatus de la proposición, al igual que escribir la conclusión del enunciado objeto que se quiere obtener al finalizar la demostración, ayuda a tomar consciencia sobre cuales son las hipótesis, las proposiciones, el enunciado objeto, etc. Una exploración libre, significa una familiarización con el problema. Para tener éxito en una demostración es importante saber cuáles son los elementos que se tienen y los que se quieren obtener. Una investigación que conduzca a la organización deductiva de las proposiciones, así como una descripción verbal, son dos fases que en realidad se reducen a las fases visual y verbal respectivamente, dos sistemas de representación que ayudan al estudiante a encontrar su camino hacia una demostración exitosa. Ambas fases se complementan entre sí con los procesos de objetivación del estudiante, cuando éste decide sobre la organización de la demostración y los pasos a seguir en esta.

La gráfica proposicional

Todas las proposiciones se deben considerar y organizar entre sí dependiendo de su estatus (y no de su contenido), para poder hacer esto es necesario proponer una forma de representación que ofrezca una comprensión sinóptica de la organización de un paso deductivo. Dicha forma de representación debe evitar la confusión de las inferencias semánticas y deductivas y al mismo tiempo permitirle al estudiante controlar los errores causados por olvidos, o realizar pasos incorrectos dentro de la organización de los pasos de razonamiento. La gráfica proposicional es un registro de representación utilizado para discriminar el estatus de las proposiciones.

La situación de la representación verbal

Una vez que se tiene la gráfica proposicional, proponemos una descripción verbal de esta, con el propósito de ayudar al estudiante a darse cuenta del valor epistémico de las proposiciones, pero sobre todo para la transformación del valor epistémico que viene con el razonamiento deductivo. Debido a que el entendimiento en matemáticas, no se puede alcanzar si se excluye de éste a la lengua natural. Resulta de suma importancia que se complete el ciclo de la estructuración de la demostración, mediante una descripción verbal de la gráfica proposicional.

Conclusiones

El propósito de esta tesis fue explorar, desde el análisis semiótico-cognitivo de Raymond Duval, las características de las actividades matemáticas, en particular las de la demostración. Para lograrlo, introdujimos conceptos importantes, que sirvieron como base para edificar una aproximación cognitiva al razonamiento matemático que se requiere para demostrar.

Con este propósito en mente, dimos inicio al proyecto, con el planteamiento de un análisis semiótico para una mejor comprensión de, lo que son e implican, las actividades matemáticas, más allá de: Las aulas, los temarios, o cualquier otra perspectiva (que no se enfoque en lo que sucede cognitivamente, con el individuo). Un análisis semiótico para este proyecto, definitivamente tiene sentido, especialmente luego de señalar dos cosas; 1. Qué es, 'sólo a través de las representaciones, que podemos tener acceso a los objetos matemáticos'; y, 2. 'No hay noesis sin semiosis'; Estas dos afirmaciones nos indican cuán relevante es el papel de las representaciones semióticas, por un lado, en las actividades matemáticas, y, por otro, en su aprendizaje y comprensión.

A partir de la definición de 'registro de representación semiótica', pudimos llegar al concepto de sus transformaciones (conversión y tratamiento) y a través de éstas, a la conclusión de que, en matemáticas, se realiza la movilización simultánea, de al menos, dos registros; Si a esto agregamos que la demostración es una expansión discursiva con el propósito de probar 'algo', y que se lleva a cabo por medio de cualquiera de los registros semióticos al alcance de las matemáticas, entonces tenemos que el funcionamiento del razonamiento que se emplea en ella, depende del registro en el cual se realice. Esto, como vimos, trae consigo diferentes costos cognitivos que afectan el desempeño del estudiante al demostrar. Cuando el alumno comprende la forma específica de representar (*i.e.* semiosis) para cada sistema semiótico que se utilice en la demostración, entonces el efecto será positivo, debido a que, la comprensión conceptual surge de la coordinación de los registros semióticos empleados; cada sistema semiótico provee de capacidades de transformación especificas (como vimos, el costo cognitivo de graficar no es equivalente al de parametrizar). Por lo tanto, estar consciente de las formas de representar, es condición cognitiva para la comprensión [Duval 2006b]. Ahora, si relacionamos lo anterior con el aprendizaje de la demostración, entonces tenemos que la capacidad intrínseca de las representaciones semióticas empleadas en ésta, para poder ser transformadas en otras, es una pieza clave para lograr comprender la demostración. De aquí se deriva, uno de los argumentos para proponer la 'triple división de las actividades a seguir para facilitar el desarrollo de una demostración'; ya que esta, incluye las fases verbal y visual, que conllevan la semiosis en dos registros de representación distintos respectivamente: 1. El de la lengua natural (descripción verbal); y, 2. El de un registro de representación no discursivo (la gráfica proposicional).

Lo más relevante de haber introducido la variedad de conceptos que análizamos a lo largo del proyecto, es que estos, no se quedaron aislados, sino que fueron vinculados, entre sí, de tal manera que en conjunto, tejieron una red que sostiene al análisis del razonamiento que desarrollamos en el cuarto capítulo. El que, a su vez, nos permitió conocer a fondo cuáles son los procesos cognitivos detrás de la demostración, lo que significa un primer paso hacía la comprensión integral de la demostración (y así también de los problemas didácticos para su aprendizaje). Esto se logró gracias a los análisis estructural, lógico y funcional del razonamiento, que en conjunto nos brindan la posibilidad de identificar diferenciaciones y variaciones cognitivas que exponen (desde distintos puntos), cuáles son las dificultades que se presentan para alcanzar razonamientos válidos.

Una vez identificados esos obstáculos, fue posible plantear una estrategia (con base en toda la teoría abordada) para vencer los principales obstáculos que experimenta el alumno en la actividad de la demostración. En este caso, la estrategia propuesta fue, como ya dijimos, triple división (en etapas), de las actividades a realizar para lograr una demostración: Primero, una 'exploración libre'; segundo, la elaboración de una 'la gráfica proposicional'; y por último, la descripción verbal de dicha representación no discursiva.

Referencias

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

________ (1998a). "Signe et object (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet". Incluído en: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **6** 139-163

________ (1998b). "Signe et object (II): questions relatives a l'analyse de la connaissance". Incluído en: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **6** 165-196, Strasburg: IREM.

________ (1999). Les problèmes fondamentaux de l'apprentissage des mathématiques et les formes supérieurs du développement cognitif. [Notas del curso dado en La Universidad de Valle, Santiago de Cali, Colombia].

________ (2000). "Basic issues for research in mathematics education". En: T. Nakahara y M. Koyama (Eds.),*Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* **1:** 55-69

________ (2002a). "The cognitive analysis of the problems of comprehension in the learning of mathematics". *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education Ed.* **1**, no.2: 1-16

________ (2002b). "Proof understanding in mathematics: What ways for students?" Contenido en: Fou Lai Lin (Ed.) 2002 International Conference on Mathematics - "Understanding proving and proving to understand". Taipei: NSC and NTNU (pp. 61-77)

Duval, R. (2006a). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *Relime*, número especial, 45-81.

________ (2006b). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME* **9:1** 143-168.

________ (2007). "Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof". En: Boero, P. (Ed.), *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers. . (pp. 137-162)[1].

Eves, H. (1997). *Foundations and fundamental concepts of mathematics*. 3a. ed., Dover: Boston.

Spivak, M. (1999). Cálculo Infinitestimal. 2a. ed., Reverté: Barcelona.

Winsløw, C. (2004). "Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics". *Nordic Studies in Mathematics Education*, **9** vol.2: 81-100

________ (2007). "Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. "Annales de didactique et de sciences cognitives" (por aparecer).

[1] Las referencias en el texto probablemente no concuerden con las páginas en el libro, ya que mi fuente fue una copia del capítulo en cuestión proporcionada por el autor antes de su publicación.