



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“PROPAGACIÓN DE PULSOS ULTRACORTOS
EN LENTES REFRACTIVAS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

FLOR CONCEPCIÓN ESTRADA SILVA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR

COMITE TUTORAL: DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON
DR. ROBERTO ORTEGA MARTÍNEZ



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2008



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Quiero agradecer a Dios, porque creo en él.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de vivir esta aventura de ser un puma y por brindarme los conocimientos adquiridos en todas las etapas desde que pertenezco a ella.

Agradezco a la Facultad de Ciencias por darme los mejores estudios, profesores y amigos durante mi carrera, al Posgrado en Ciencias por permitirme continuar con mi formación profesional, al Centro de Ciencias y Desarrollo Tecnológico por todo el apoyo brindado, especialmente al departamento de óptica por recibirme y permitir ser parte de ellos.

Agradezco, infinitamente a mi comité tutorial: Dr. Roberto Ortega Martínez y Dr. Neil Charles Bruce Davidson por todas las críticas hechas a mi trabajo y por todo su apoyo en todos los sentidos.

Mil gracias a mi directora de tesis, Dra. Martha Rosete Aguilar por todo su apoyo tanto en el trabajo de tesis como en lo personal, ¡Gracia Martha!

Gracias a Carlos Román por su ayuda en este trabajo de tesis.

Agradezco a mi familia, a mis papas: Sofía y Luis, mis hermanos: Lupis, Pera y Luis por que sé que en todo momento han estado conmigo, a mi abue que aunque ya no esta, físicamente, conmigo lo estará siempre en mi corazón.

Agradezco a todas las personas que he conocido aunque haya sido brevemente. Gracias a mis compañeros y amigos: Melba, Sergio (gato), Toño, Tere, Ana, Citlali, Alejandro, Jeanett, Edgar, Olivia, Lydia, Lilia, Manuel, Raúl, Ivan, Karina, Areli, Vianney, Claudia, Alfredo, Lila, Gabriel, Erika, Arminda, Arturo, Jesús, Rubén, Engracia y Carlos Linares.

Agradezco a Rene Ortega por brindarme su apoyo y amistad, a Manuel Serrano por todo su cariño, por creer siempre en mí, a Lucio Cárdenas por las inolvidables mediciones al volcán y a todos aquellos que me faltaron pero que sé que cuento con ellos, gracias por su amistad y su cariño.

Dedico esta tesis a mis niños: Dani, Vale, Fabi, Omar y el bebé.

También dedico esta tesis a dos mujeres muy importantes: mi madre y mi abuela, especialmente a ti abue. Gracias por darme el ejemplo de una mujer trabajadora, fuerte y amorosa... gracias por ese ejemplo de amor a la vida a pesar de todas sus complicaciones. ¡Gracias Conchita por ser alguien importante en mi vida, simplemente mi abuelita!, ¡Gracias mamá por **TODO** lo que me has dado!

Índice	Pág.
Introducción	3
Capítulo 1. Dispersión y velocidad de grupo.	6
1.1 Dispersión.	6
1.1.1 Dispersión normal.	6
1.1.2 Ecuación de Sellmeier.	7
1.1.3 Dispersión anómala.	8
1.1.4 Derivadas del índice de refracción.	9
1.2 Velocidad de fase.	10
1.3 Velocidad de grupo.	11
1.4 Relación entre la velocidad de fase y velocidad de grupo.	13
1.5 Índice de fase e índice de grupo.	14
1.6 Ondas en un medio.	17
Capítulo 2. Propagación de pulsos ultracortos en vidrios ópticos.	21
2.1 Pulsos generados con modos de igual amplitud.	21
2.1.1 Ancho temporal de un pulso propagándose en el vacío.	25
2.1.2 Número de modos.	28
2.1.3 Propagación de pulsos de igual amplitud en vidrios ópticos.	30
2.2 Propagación de pulsos gaussianos en medios dispersivos.	31
2.2.1 Análisis teórico para la propagación de pulsos gaussianos en medios dispersivos.	32
2.2.2 Modelo computacional para la propagación de pulsos	

gaussianos.	36
2.3 Efecto de la dispersión de velocidad de grupo en el ensanchamiento temporal del pulso.	41
Capítulo 3. Propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas.	43
3.1 Lentes refractivas simples	43
3.2 Diferencia en el tiempo de propagación, <i>PTD</i> .	45
3.3 Corrección de la distorsión del frente del pulso	54
3.3.1 Distorsión del frente del pulso en lentes simples.	54
3.3.2 Doblete acromático ideal	54
3.3.3 Doblete acromático real.	55
3.3.4 Diseño de una lente limitada por difracción	56
3.4 Ecuaciones para el diseño de un doblete acromático de lentes delgadas.	57
3.5 Diseño de lentes acromáticas en fase y en grupo.	58
3.5.1 Método de A. Vaughan para el diseño de lentes acromáticas en fase y grupo.	58
3.6 <i>PTD</i> para una lente simple y para un doblete acromático normal.	61
3.7 <i>PTD</i> para un doblete acromático en fase y grupo.	64
3.8 Dobletes apocromáticos con lentes delgadas.	65
3.9 Dobletes acromáticos y apocromáticos reales.	66
Conclusiones	68
Referencias	71
Apéndice A. Solución de la integral dada por la ecuación 2.23.	73
Apéndice B. Cálculo del parámetro <i>a</i> .	77

Introducción

En esta tesis se presenta un estudio sobre la propagación de pulsos ultracortos de luz con ancho temporal del orden de 100 femtosegundos, en vidrios ópticos y en lentes refractivas. Para analizar y calcular la propagación de pulsos en medios dispersivos es necesario conocer las propiedades dispersivas del medio en el que se propagan así como entender los conceptos físicos sobre velocidad de grupo, dispersión de la velocidad de grupo e índice de refracción de grupo. En el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM existe un laboratorio de Pulsos ultracortos, en donde se tiene un láser que produce pulsos con una duración temporal de 100fs, la longitud de onda de la portadora de los pulsos es de 800nm y los pulsos tienen un ancho espectral de aproximadamente 20nm. Por lo que es nuestro interés entender los procesos que afectan a dichos pulsos cuando pasan a través de lentes refractivas.

En el capítulo 1 se presenta la teoría de la dispersión basada en un modelo clásico[1,2] que representa a los electrones y moléculas del material como partículas unidas mediante fuerzas restauradoras tipo oscilador armónico, que al interactuar con la luz sobre ellas produce un movimiento de oscilador armónico forzado. Este modelo lleva a la conocida ecuación de Sellmeier que describe correctamente el fenómeno de dispersión en la llamada región de dispersión normal. En la presente tesis vamos a estudiar cómo se propagan los pulsos cuando viajan a través de vidrios ópticos que son materiales isotrópicos y homogéneos. En este caso los pulsos se encuentran dentro de la región de dispersión normal del material. Posteriormente, en este capítulo presentamos el análisis para la superposición de dos ondas de diferente frecuencia y misma fase inicial que dan lugar a la

generación de un pulso. Con este análisis introducimos el concepto de velocidad de grupo, que es la velocidad con la que se propaga la envolvente del pulso. Finalmente en este capítulo presentamos y deducimos la expresión para el índice de refracción de grupo, el cual puede ser calculado a partir de la ecuación de Sellmeier con la que se evalúa el índice de refracción de fase del material.

En el capítulo 2 presentamos las ecuaciones para la generación y la propagación de pulsos ultracortos en el vacío y en los vidrios ópticos, suponiendo que los pulsos son generados con modos de igual amplitud. Para estos pulsos se define y se calcula la duración del pulso cuando éste se propaga en el vacío y también se calcula el número de modos que se necesitan para generar pulsos ultracortos del orden de 100 femtosegundos. Posteriormente se modelan estos pulsos para mostrar esquemáticamente el efecto que tiene la dispersión del material en la forma del pulso al propagarse a través de éste y se muestra también esquemáticamente que la definición usada para medir la duración temporal de estos pulsos no se puede aplicar cuando los pulsos se propagan en el material. Adicionalmente, en este capítulo se presenta el modelo de pulsos gaussianos en los que se modula la amplitud de los modos por una curva gaussiana. Se hace un análisis teórico para evaluar la duración temporal del pulso gaussiano conforme se propaga a través del material y se verifica con el resultado obtenido de un modelo computacional que desarrollamos para generar estos pulsos gaussianos. Finalmente con gráficas y tablas se muestra el ensanchamiento temporal del pulso producido por la dispersión de la velocidad de grupo, GVD. La dispersión de la velocidad de grupo se introduce en este capítulo y está dada por la segunda derivada del número de onda con respecto a la frecuencia angular.

Dado que una de las funciones principales de los pulsos ultracortos es concentrar energía en tiempo y en espacio, en el capítulo 3 se estudia la propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas las cuales permiten concentrar la energía de un pulso de luz en un pequeño espacio de volumen alrededor del llamado punto focal de la lente. Cuando se utilizan lentes refractivas para enfocar pulsos ópticos ultracortos hay tres fenómenos que afectan la calidad del enfocamiento de los pulsos. Estos tres fenómenos son: la dispersión de la velocidad de grupo, GVD, la diferencia en el tiempo de propagación de los pulsos que

inciden a diferentes alturas del eje óptico de la lente, PTD, y las aberraciones de la lente. La dispersión de la velocidad de grupo, GVD, produce un ensanchamiento temporal del pulso, efecto estudiado en el capítulo 2. En este capítulo se hace un estudio del ensanchamiento espacial del pulso al pasar por la lente el cual es producido por la diferencia en el tiempo de propagación de los pulsos que inciden a diferentes alturas del eje óptico al pasar por la lente. Se mostrará que esta diferencia en el tiempo de propagación, PTD, es generada por la cromaticidad de la lente.

Para estimar la PTD y analizar la forma de reducirla o corregirla, en este capítulo se introduce el método de A. Vaughan[3,4] para el diseño de lentes delgadas acromáticas en fase y grupo. El término acromático en fase y grupo fue usado por A. Vaughan para referirse al diseño de lentes que daban una diferencia en el tiempo de propagación igual a cero para la longitud de onda de la portadora del pulso. El método de A. Vaughan es usado para analizar lentes simples y lentes acromáticas normales. La palabra normales quiere decir dobletes acromáticos que se compran de catálogos y que son diseñados para enfocar luz continua. Posteriormente se usa el método para diseñar dobletes acromáticos en fase y grupo tal y como lo propuso A. Vaughan en 1996, con el fin de compararlos con los dobletes acromáticos normales. Finalmente se diseñan dobletes apocromáticos para comparar la diferencia en el tiempo de propagación, PTD, con la PTD que proporcionan los dobletes acromáticos normales. Se mostrará como los dobletes apocromáticos dan una mejor corrección de PTD que los dobletes acromáticos normales.

Capítulo 1

Dispersión y velocidad de grupo.

1.1 Dispersión.

En los materiales, la velocidad de fase y por lo tanto el índice de refracción no son cantidades constantes sino que dependen de la frecuencia o bien de la longitud de onda. La variación del índice de refracción con la longitud de onda constituye un fenómeno descrito por la teoría de la dispersión[1, 2, 5].

1.1.1 Dispersión normal.

Si se tiene un conjunto de valores del índice de refracción de cierto material como el vidrio y son graficados en función de la longitud de onda se obtienen curvas como las mostradas en la figura 1.1[2].

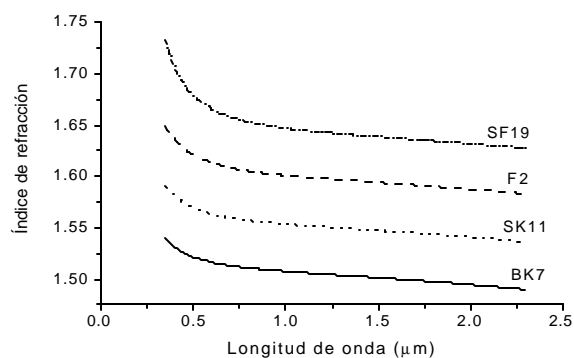


Figura 1. 1 Índice de refracción como función de la longitud de onda de la luz para diferentes vidrios.

Estas curvas son representativas de la dispersión normal porque en ellas se observa que el índice de refracción aumenta cuando la longitud de onda disminuye, el incremento es mayor para longitudes de onda cortas debido a que la dispersión $\frac{dn}{d\lambda}$ dada por la pendiente de la curva aumenta a longitudes de onda pequeñas. También se puede ver que la pendiente de la curva aumenta para materiales con índice de refracción más grande. Todas las sustancias transparentes muestran dispersión normal en la región del visible y la magnitud del índice de refracción puede diferir de una sustancia a otra. La dispersión normal se extiende hacia el UV y hacia el cercano infrarrojo, i.e., $0.248\mu\text{m}$ a $2.3\mu\text{m}$. Aunque en la región UV la mayoría de los vidrios ópticos solo tienen buena transmisión hasta $0.365\mu\text{m}$.

En esta tesis estudiaremos la propagación de pulsos de luz que pasan a través de vidrios ópticos, que son materiales isotrópicos, homogéneos, y transparentes en el rango de $0.36\mu\text{m}$ a $2.3\mu\text{m}$ en donde el tipo de dispersión que presenta el material es dispersión normal.

1.1.2 Ecuación de Sellmeier.

La primera deducción de una fórmula que describe la dispersión de la luz en un medio y más utilizada por su buena aproximación a los valores del índice de refracción en materiales con baja absorción, fue obtenida suponiendo un mecanismo clásico que explicara como el medio afecta la velocidad de la onda de luz. Suponiendo que el medio esta compuesto de partículas unidas por fuerzas elásticas capaces de vibrar con una frecuencia definida ν , llamada frecuencia natural, es decir, que las partículas vibran en ausencia de alguna fuerza periódica. Al pasar la luz por el medio se ejerce una fuerza en las partículas lo cual causa que estas vibren. Si la frecuencia ω de la luz no coincide con ν , las vibraciones serán forzadas, de amplitud pequeña y de frecuencia ω . Conforme la frecuencia de la luz se aproxima a ν , la respuesta de las partículas será mayor y de amplitud muy grande, esto es porque las partículas resonarán a la misma frecuencia que la onda incidente. La derivación matemática de este mecanismo fue hecha por Sellmeier en

1871[2]. La ecuación de dispersión se obtiene al resolver la ecuación de un oscilador armónico forzado dada por:

$$n^2(\omega) = 1 + A \left(\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (1.1)$$

Generalizando este resultado suponiendo que hay N partículas cada una con su frecuencia natural, ω_j , se tiene:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j A_j \left(\frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2} \right) \quad (1.2)$$

que se conoce como la ecuación de Sellmeier.

La ecuación de Sellmeier también se puede escribir en términos de la longitud de onda de la luz en el vacío, λ_0 , como:

$$n^2(\lambda_0) - 1 = \frac{B_1 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_3} \quad (1.3)$$

Esta expresión es ampliamente usada por los fabricantes de vidrios ópticos para caracterizarlos.

1.1.3 Dispersión anómala.

Cuando la frecuencia de la luz es cercana a la frecuencia natural de las partículas entonces las partículas entran en resonancia y se produce dispersión anómala, esto es, el índice de refracción aumenta conforme aumenta la longitud de onda. En la región de dispersión anómala, si pasa luz blanca a través de un material, el azul tendrá un índice mayor que el rojo por lo que será desviado con mayor ángulo[1].

La dispersión anómala se presenta en regiones del espectro llamadas bandas de absorción. Los vidrios presentan bandas de absorción en la región ultravioleta e infrarrojo del espectro. Sin embargo, para la presente tesis no se considerará esta parte de la dispersión.

1.1.4 Derivadas del índice de refracción.

Como se verá más adelante, algunas cantidades físicas como la velocidad de fase, la velocidad de grupo y la dispersión de la velocidad de grupo se pueden calcular a través del índice de refracción del material, de su primera y de su segunda derivada con respecto a I_0 . Por tal motivo a continuación presentamos las expresiones para la primera y segunda derivada.

La primera derivada de la ecuación 1.3 es:

$$\frac{dn}{dI_0} = \frac{-\frac{2B_1I_0^3}{(-C_1+I_0^2)^2} + \frac{2B_1I_0}{-C_1+I_0^2} - \frac{2B_2I_0^3}{(-C_2+I_0^2)^2} + \frac{2B_2I_0}{-C_2+I_0^2} - \frac{2B_3I_0^3}{(-C_3+I_0^2)^2} + \frac{2B_3I_0}{-C_3+I_0^2}}{2\sqrt{1 + \frac{B_1I_0^2}{-C_1+I_0^2} + \frac{B_2I_0^2}{-C_2+I_0^2} + \frac{B_3I_0^2}{-C_3+I_0^2}}} \quad (1.4)$$

Y la segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2n}{dI_0^2} = & \frac{\left(-\frac{2B_1I_0^3}{(-C_1+I_0^2)^2} + \frac{2B_1I_0}{-C_1+I_0^2} - \frac{2B_2I_0^3}{(-C_2+I_0^2)^2} + \frac{2B_2I_0}{-C_2+I_0^2} - \frac{2B_3I_0^3}{(-C_3+I_0^2)^2} + \frac{2B_3I_0}{-C_3+I_0^2} \right)^2}{4\left(1 + \frac{B_1I_0^2}{-C_1+I_0^2} + \frac{B_2I_0^2}{-C_2+I_0^2} + \frac{B_3I_0^2}{-C_3+I_0^2} \right)^{3/2}} + \\ & \frac{\frac{8B_1I_0^4}{(-C_1+I_0^2)^3} - \frac{10B_1I_0^2}{(-C_1+I_0^2)^2} + \frac{2B_1}{-C_1+I_0^2} + \frac{8B_2I_0^4}{(-C_2+I_0^2)^3} - \frac{10B_2I_0^2}{(-C_2+I_0^2)^2} + \frac{2B_2}{-C_2+I_0^2} + \frac{8B_3I_0^4}{(-C_3+I_0^2)^3} - \frac{10B_3I_0^2}{(-C_3+I_0^2)^2} + \frac{2B_3}{-C_3+I_0^2}}{2\sqrt{1 + \frac{B_1I_0^2}{-C_1+I_0^2} + \frac{B_2I_0^2}{-C_2+I_0^2} + \frac{B_3I_0^2}{-C_3+I_0^2}}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Las unidades de la primera y segunda derivada son mm^{-1} y mm^{-2} respectivamente.

Donde I_0 es la longitud de onda en el vacío en micrones y $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ son constantes proporcionadas por los fabricantes de vidrios ópticos como Schott[6] y Ohara[7].

1.2 Velocidad de fase.

Cuando se describe una onda, se habla de longitud de onda (λ), frecuencia (ν), frecuencia angular ($\omega = 2\pi\nu$), número de onda ($k = \frac{\omega}{v}$), amplitud (A) y fase inicial (ϕ), [1].

Una onda plana puede representarse mediante una función seno o coseno, es decir,

$$y(z,t) = A \cos(kz - \omega t + \phi) . \tag{1.6}$$

Donde A es la amplitud de la onda, ϕ es la fase inicial, ω es la frecuencia angular y k es el número de onda que representa la magnitud del vector de propagación de la onda.

La figura 1.2 muestra la gráfica de una onda, a $t=0$, propagándose en la dirección del eje z .

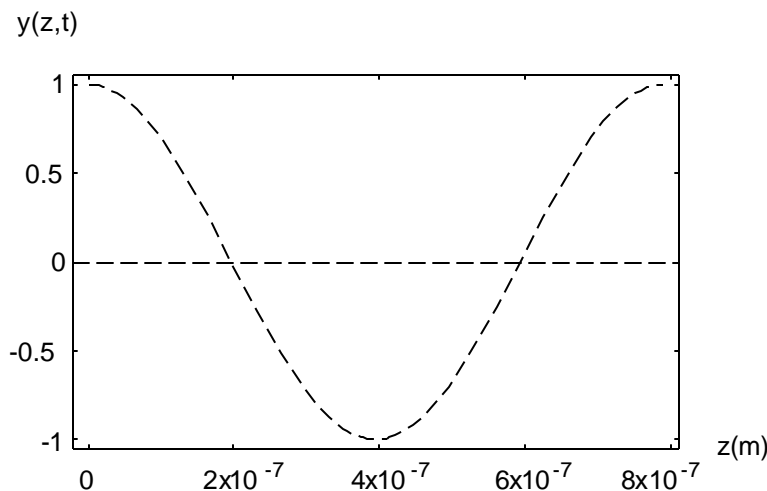


Figura 1.2 Ejemplo de una onda, en el vacío, a $t=0$, con $A=1$, $\lambda=790\text{nm}$, $\phi=0$ y $\omega=2.39 \times 10^{15} \text{rad/s}$.

La velocidad con la que se mueve la onda descrita por la ecuación 1.6, se conoce como velocidad de onda o velocidad de fase y se define como:

$$v = \frac{\omega}{k} . \tag{1.7}$$

La velocidad de fase se relaciona con medir el tiempo que le toma en recorrer una distancia a algún punto de la onda. Esto es equivalente a decir que tan rápido se mueve un valor de fase dado.

1.3 Velocidad de grupo.

La velocidad de grupo, se refiere a la superposición de dos o más ondas[1, 2, 8]. El caso más sencillo es la superposición de dos ondas cada una de ellas de distinta frecuencia y número de onda; con fase inicial igual cero y con amplitudes iguales.

Entonces, la ecuación 1.6 para cada onda, queda como

$$y_1(z, t) = \cos(k_1 z - \mathbf{w}_1 t)$$

$$y_2(z, t) = \cos(k_2 z - \mathbf{w}_2 t)$$

Y por tanto la suma de y_1 y y_2 es

$$Y(z, t) = y_1(z, t) + y_2(z, t) = \cos(k_1 z - \mathbf{w}_1 t) + \cos(k_2 z - \mathbf{w}_2 t) \quad (1.8)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos \mathbf{a} + \cos \mathbf{b} = 2 \cos \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cos \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Y tomando $\mathbf{a} = k_1 z - \mathbf{w}_1 t$ y $\mathbf{b} = k_2 z - \mathbf{w}_2 t$, la ecuación 1.8 queda

$$Y(z, t) = 2 \cos \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1 t - k_1 z + \mathbf{w}_2 t - k_2 z) \cos \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1 t - k_1 z - \mathbf{w}_2 t + k_2 z) \quad (1.9)$$

Simplificando

$$Y(z, t) = 2 \cos \left[\frac{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)}{2} t - \frac{(k_1 + k_2)}{2} z \right] \cos \left[\frac{(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)}{2} t - \frac{(k_1 - k_2)}{2} z \right]. \quad (1.10)$$

La ecuación 1.10 representa la composición de dos ondas, una onda portadora con frecuencia \mathbf{w} y una onda envolvente con frecuencia \mathbf{w}_e que modula la amplitud de la

primera[1], figura 1.3. También la ecuación 1.10, puede describirse como una sucesión de pulsos (grupos o paquetes de ondas) móviles cuya portadora se desplaza con la velocidad de fase y la envolvente se mueve con la velocidad de grupo [8].

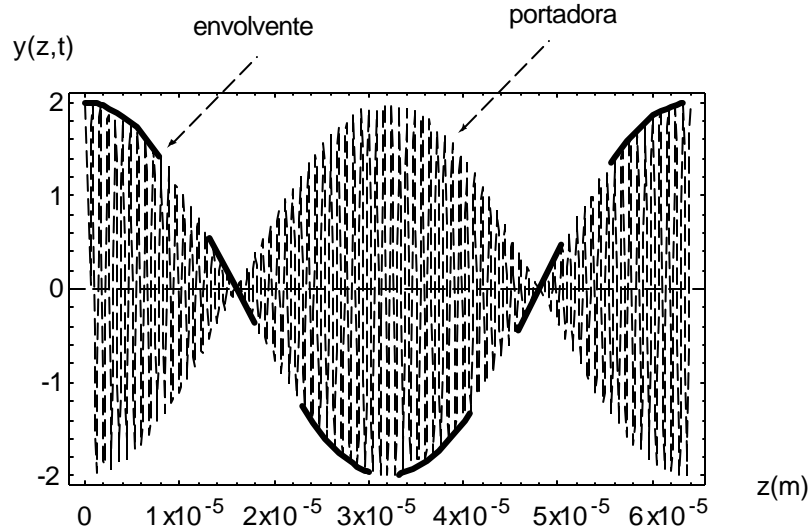


Figura 1.3 Suma de dos ondas, propagándose en el vacío, a $t=0$. La línea punteada corresponde a la envolvente que se propaga con la velocidad de grupo. $A=1, f=0, \lambda_1=790nm, \lambda_2=810nm, \omega_1=2.39 \times 10^{15} rad/s$ y $\omega_2=2.33 \times 10^{15} rad/s$.

Los términos $\omega = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ y $k = \frac{(k_1 + k_2)}{2}$ se refieren a la frecuencia angular y número de onda promedio de la onda portadora.

Los términos $\omega_e = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$ y $k_e = \frac{(k_1 - k_2)}{2}$ corresponden a la frecuencia y número de onda de la onda envolvente o modulación; el subíndice e se refiere a la onda envolvente.

La onda portadora se mueve con la velocidad de fase, en este caso es

$$v = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \tag{1.11}$$

La rapidez con la cual, la onda envolvente, se mueve es la velocidad de grupo, dada por

$$v_g = \frac{\omega_e}{k_e} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (1.12)$$

donde $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ y $\Delta k = k_1 - k_2$.

Cuando el rango de frecuencia $\Delta\omega$, centrado alrededor de ω , es pequeño [1] la ecuación 1.12 se puede aproximar por la derivada; entonces se tiene que

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.13)$$

La modulación se propaga con una velocidad v_g que puede ser mayor, igual o menor que la velocidad de la portadora. Esta última expresión es muy general y será cierta, también para cualquier grupo o paquete de ondas que se superpongan siempre que su rango de frecuencias sea angosto [1]. Así, la velocidad con la que se propaga un pulso de luz es igual a la velocidad de grupo.

1.4 Relación entre la velocidad de fase y velocidad de grupo.

En general la velocidad de fase, en un medio dispersivo, es función de ω o k y por lo tanto depende de la longitud de onda.

De la definición $v = \frac{\omega}{k}$, se obtiene que $\omega = vk$ y al derivar con respecto de k

$$\frac{d\omega}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \quad (1.14)$$

Además se sabe que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

entonces,

$$dk = -\frac{2p}{l^2} dl .$$

Sustituyendo las dos últimas expresiones en 1.14; la velocidad de grupo queda en términos de la longitud de onda.

$$v_g = v - l \frac{dv}{dl} \quad (1.15)$$

l , se refiere a la longitud de onda en el medio[2].

Si en el medio, en el cual se propaga el pulso o el paquete de ondas, la velocidad de fase es constante y no depende de la frecuencia o longitud de onda[8] se tiene que

$$v_g = v$$

En el vacío la velocidad de fase y la velocidad de grupo son iguales, es decir

$$v_g = v = c$$

1.5 Índice de fase e índice de grupo.

El índice de refracción de fase se define como $n = \frac{c}{v}$; es la razón entre la velocidad de una onda electromagnética viajando en el vacío y la velocidad de la misma onda propagándose en un medio.

Así como la velocidad de fase, en medios dispersivos, depende de la frecuencia; el índice de refracción también es función de la frecuencia de la luz, dependiendo así, de la longitud de onda.

De igual forma que se definió el índice de fase, el índice de grupo se puede expresar como la razón de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de grupo. Por lo tanto la expresión para el índice de grupo esta dada por[1],

$$n_g = \frac{c}{v_g}. \quad (1.16)$$

De esta ecuación (1.16) se puede derivar la relación que existe entre el índice de grupo y el índice de fase.

Llamemos l_0 , a la longitud de onda en el vacío, para distinguirla de la longitud de onda en el medio (l).

Sustituyendo 1.15 en 1.16

$$n_g = \frac{c}{v - l \frac{dv}{dl}} \quad (1.17)$$

De la definición de índice de fase se tiene que $v = \frac{c}{n}$ y se sustituye en 1.17

$$n_g = \frac{c}{\frac{c}{n} - l \frac{d\left(\frac{c}{n}\right)}{dl}} \quad (1.18)$$

Con

$$c = l_0 n, \quad v = l n \quad \text{y} \quad v = \frac{c}{n}$$

Tenemos

$$I n = \frac{I_0 n}{n}$$

como la frecuencia no cambia cuando la onda pasa de un medio a otro

$$I = \frac{I_0}{n}$$

Entonces la ecuación 1.18 se convierte en

$$n_g = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} - \frac{I_0}{n} \frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\left(\frac{I_0}{n}\right)} \right)} \quad (1.19)$$

Se calculan las derivadas que aparecen en el denominador de la ecuación 1.19

$$\frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{dI_0} = \frac{-\frac{dn}{n^2}}{dI_0} \quad (1.20)$$

$$\frac{d\left(\frac{I_0}{n}\right)}{dI_0} = \frac{n - I_0 \frac{dn}{dI_0}}{n^2} \quad (1.21)$$

dividiendo 1.20 y 1.21 obtenemos $\frac{-\frac{dn}{dI_0}}{n - I_0 \left(\frac{dn}{dI_0}\right)}$; que al sustituir en 1.19, se tiene

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{I_0}{n} \frac{d\left(\frac{1}{n}\right)}{d\left(\frac{I_0}{n}\right)} \right) = \frac{1}{n - I_0 \frac{dn}{dI_0}} \quad (1.22)$$

Así el índice de grupo es $n_g = \frac{1}{\frac{1}{n - \mathbf{l}_0 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}}}$.

Por lo tanto [3,4],

$$n_g = n - \mathbf{l}_0 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0} \tag{1.23}$$

1.6 Ondas en un medio.

Al definir los índices de refracción de fase y de grupo, se puede calcular la propagación de las ondas en materiales dispersivos como vidrios ópticos, en la región de dispersión normal, en la que se han caracterizado estos materiales a través de la ecuación de Sellmeier.

Cuando una onda pasa de un medio a otro, supongamos del vacío al vidrio, la velocidad de propagación cambia. Entonces se puede escribir como

$$v = \frac{c}{n} \tag{1.24}$$

El número de onda estará en función del índice de refracción de fase, es decir,

$$k = \frac{\mathbf{w}}{v} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} = \frac{2\mathbf{p}n}{\mathbf{l}_0} \tag{1.25}$$

La figura 1.4 muestra una onda propagándose en vidrio BK7[6]. La velocidad con la que se propaga es $v = 1.98547 \times 10^8 \text{ m/s}$, por lo que esta onda se retrasa con respecto a la onda que se propaga en el vacío. Ver figuras 1.2 y 1.4.

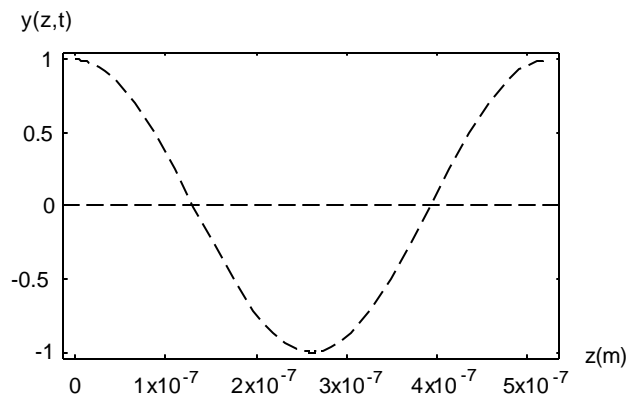


Figura 1.4 Ejemplo de una onda a $t=0$, con $A=1$, $f = 0$, $\lambda_0=790\text{nm}$, $n=1.51098$ y $v=1.98547 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Para describir la superposición de dos ondas que se propagan en un medio, figura 1.5, usamos la ecuación 1.10 en donde ahora el número de onda estará en función del índice de refracción.

En la figura 1.5 se muestra la suma de dos ondas propagándose en vidrio BK7.

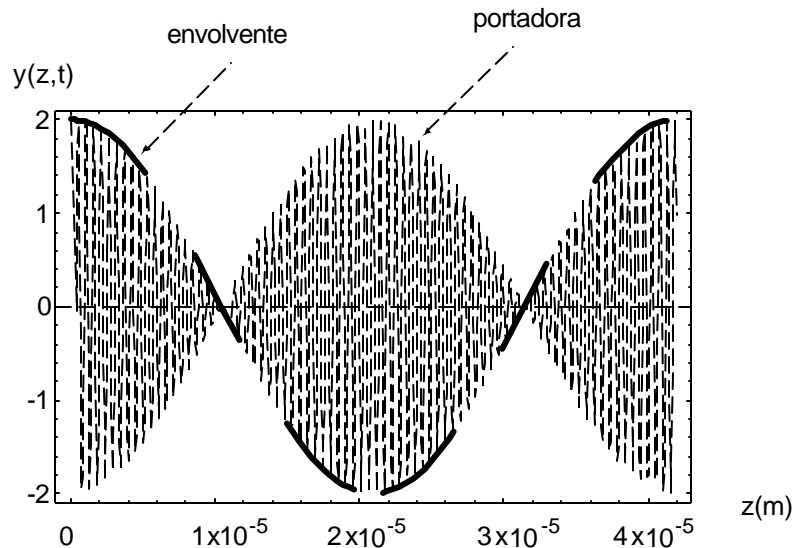


Figura 1.5 Suma de dos ondas a $t=0$, viajando en vidrio BK7. La línea punteada corresponde a la envolvente que se propaga con la velocidad de grupo. $A=1, f=0, \lambda_1=790nm, \lambda_2=800nm, n_1=1.51098$ y $n_2=1.51058$.

En la definición de la velocidad de grupo, se mencionó que la ecuación 1.13 es válida cuando $\Delta\omega$ es pequeño. En la tabla 1.1 se muestran valores de la velocidad de fase y la velocidad de grupo las cuales fueron calculadas para diferentes rangos espectrales en longitud de onda $\Delta\lambda$. Los números que se muestran como subíndices corresponden a la ecuación con la cual cada valor fue calculado.

Las primeras dos columnas corresponden a un pulso propagándose en el vacío, la velocidad de fase y de la velocidad de grupo son iguales a la velocidad de la luz en el vacío.

En las siguientes tres columnas se muestran valores de la velocidad de fase y la velocidad de grupo de un pulso propagándose en vidrio BK7. Ambas velocidades disminuyen cuando el pulso se propaga en el medio dispersivo y la velocidad de grupo es menor que la velocidad de fase.

La velocidad de grupo de la penúltima columna se calculó usando la ecuación 1.12, donde $w_{1,2} = \frac{2pc}{I_{1,2}}$, y $I_1 = 790nm$ y $I_2 = 810nm$. Se calcularon para este rango espectral, pues los pulsos ultracortos que se generan en el Laboratorio del CCADET tienen un ancho espectral de 20nm y una longitud de onda de la portadora de 800nm.

La velocidad de grupo definida por la ecuación 1.13 y que se muestra en la última columna de la tabla 1.1 se calculó usando la expresión $v_g = c/n_g$, donde n_g está dada por la ecuación 1.23. La longitud de onda I_0 está dada por:

$$I_0 = \frac{2I_1I_2}{I_2 + I_1}$$

Esta expresión se obtuvo a partir de la frecuencia angular promedio, w . El subíndice cero se refiere a la longitud de onda en el vacío. Teniendo $I_1 = 790nm$ y $I_2 = 810nm$, entonces $I_0 \cong 800nm$.

Tabla 1.1 Valores de velocidades de fase y de grupo para la superposición de dos ondas.

$\Delta I (nm)$	Vacío		Vidrio (BK7)		
	$v_{1,7} (m/s)$	$v_{g_{1,12}} (m/s)$	$v_{1,7} (m/s)$	$v_{g_{1,12}} (m/s)$	$v_{g_{1,13}} (m/s)$
1	3×10^8	3×10^8	1.98573×10^8	1.96509×10^8	1.96509×10^8
10	3×10^8	3×10^8	1.98573×10^8	1.96509×10^8	1.96509×10^8
20	3×10^8	3×10^8	1.98573×10^8	1.96508×10^8	1.96509×10^8
50	3×10^8	3×10^8	1.98569×10^8	1.96504×10^8	1.96509×10^8
100	3×10^8	3×10^8	1.98557×10^8	1.96488×10^8	1.96509×10^8
200	3×10^8	3×10^8	1.98507×10^8	1.96425×10^8	1.96509×10^8

Para anchos espectrales mayores a 50nm, el valor de la velocidad de grupo calculado con la ecuación 1.12, difiere del valor de la velocidad de grupo calculado con la ecuación 1.13.

De la tabla 1.1 también se observa que la velocidad de grupo dada por la ecuación diferencial 1.13 es independiente del ancho espectral. Esto es importante pues es equivalente a decir que la velocidad de grupo con la que se propaga el pulso en el material dispersivo es independiente de la duración del pulso.

Los correspondientes índices de refracción de grupo para las velocidades de grupo de la columna 6 y 7 de la tabla 1.1, se muestran en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Valores para el índice de grupo
para $I = 800nm$.

$\Delta I (nm)$	$n_{g1.16}$	$n_{g1.23}$
1	1.52665	1.52665
10	1.52665	1.52665
20	1.52666	1.52665
50	1.52669	1.52665
100	1.52681	1.52665
200	1.5273	1.52665

En la segunda columna de la tabla 1.2 se observa que los valores del índice de refracción de grupo calculados con la ecuación 1.16 no cambian en anchos espectrales menores a $50nm$, pero para anchos mayores se empieza a observar un cambio en el índice de grupo. En la tercera columna se puede ver que el índice de refracción de grupo calculado con la ecuación 1.23 es independiente del ancho espectral, y solo depende de la longitud de onda de la onda portadora.

Los pulsos que analizamos en la presente tesis tienen un rango espectral de $\Delta I = 20nm$ para pulsos de 100fs por lo que no habrá cambio en la velocidad de grupo. En los capítulos 2 y 3, la velocidad de grupo del pulso se calcula con la ecuación diferencial 1.13.

Capítulo 2

Propagación de pulsos ultracortos en vidrios ópticos.

2.1 Pulsos generados con modos de igual amplitud.

Algunos láseres son capaces de emitir pulsos de corta duración[9]. La clave para generar estos pulsos es mantener, en fase constante, los fotones producidos por la emisión estimulada. Existen distintos métodos para generar pulsos ultracortos; uno de ellos es por amarre de modos, o Mode-locking (en inglés). Esta técnica mantiene “amarrada” la fase de los fotones y genera pulsos con un tiempo de duración del orden de picosegundos ($10^{-12} s$) o hasta de femtosegundos ($10^{-15} s$). En el presente trabajo analizaremos pulsos del orden de femtosegundos, llamados pulsos ultracortos.

El campo eléctrico emitido por un láser de pulsos se puede escribir como [10]

$$E(t) = \sum_n E_n \exp i[(\mathbf{w}_0 + n\mathbf{w})t + \mathbf{f}_n] \quad (2.1)$$

Donde la suma es sobre todos los modos de oscilación que el medio activo proporciona en un rango espectral $\Delta\mathbf{w}$; $\mathbf{w}_0(\mathbf{n}_0)$ es la frecuencia angular de la onda portadora y \mathbf{f}_n es la fase del n -ésimo modo. La figura 2.1 muestra los modos del medio activo en el espacio de frecuencias y en el espacio de frecuencias angulares, con el objeto de clarificar la notación que se usará en este capítulo.

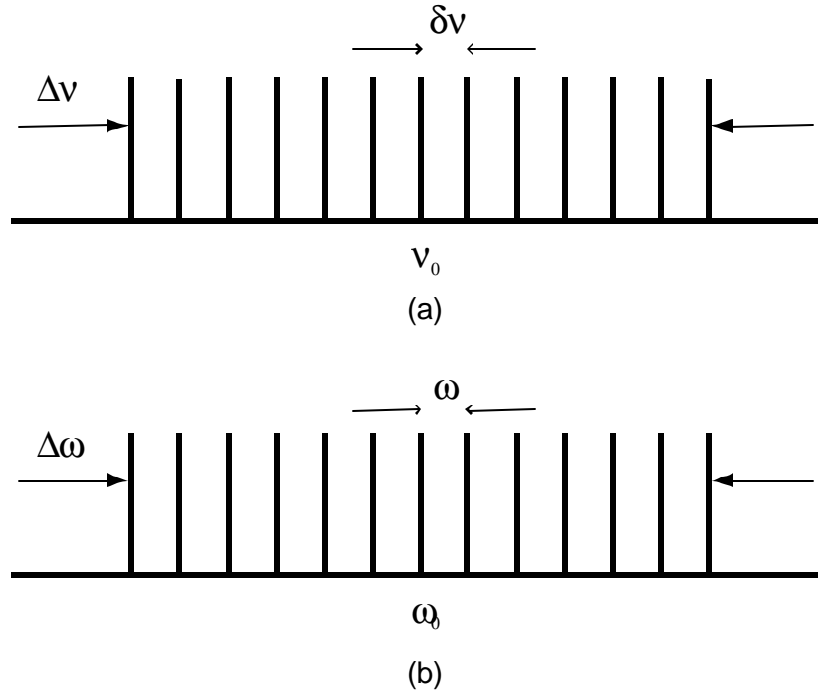


Figura 2.1 Modos de oscilación en un láser. (a) frecuencia (seg^{-1}) y (b) frecuencia angular (rad / seg).

El campo descrito por la ecuación 2.1 es periódico con $T = \frac{2p}{w}$, el cual es el tiempo que oscila dentro del resonador. La periodicidad del campo depende de que las fases dadas por f_n sean fijas para n entero. En láseres típicos las fases pueden variar de forma aleatoria con el tiempo. En este caso el comportamiento de la luz que emite un láser es de manera irregular y fluctuante dando lugar a la generación de luz continua. En la figura 2.2 (a) y (b) se ilustra el campo y la intensidad, respectivamente, de un láser con amplitudes y fases aleatorias.

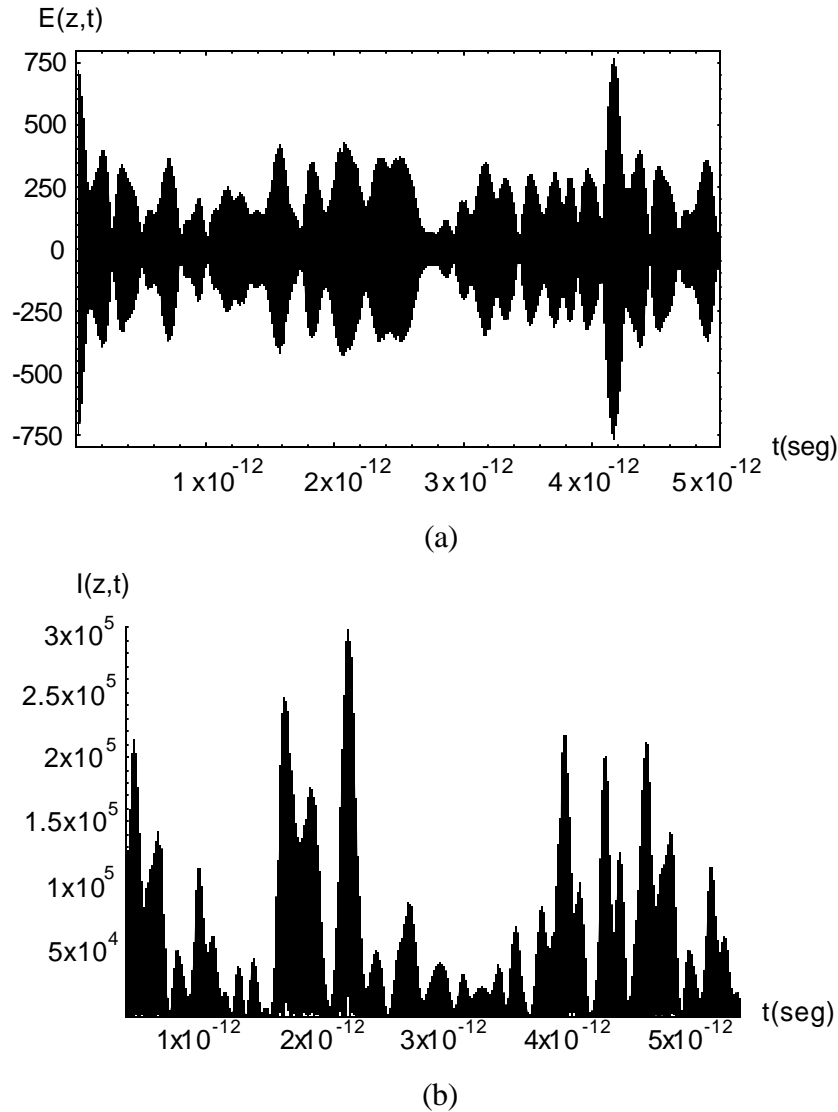


Figura 2.2. (a) Campo a $z=0$. (b) intensidad de la luz que emite un láser a $z=0$.

Para la generación de pulsos, el análisis más simple es suponer que las fases iniciales de las ondas son iguales a cero y suponer que hay N modos de oscilación con amplitudes iguales; así, con $E_n = 1$ (figura 1) y $f_n = 0$, la expresión 2.1 se simplifica y se puede escribir como [10]

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp i(\omega_0 + n\omega)t = \exp(i\omega_0 t) \frac{\text{sen}(N\omega t / 2)}{\text{sen}(\omega t / 2)}. \quad (2.2)$$

donde la suma es sobre n .

El promedio de la potencia de salida es proporcional al campo $E(t)$ multiplicado por su conjugado, es decir,

$$P(t) \propto \frac{\text{sen}^2(N\omega t / 2)}{\text{sen}^2(\omega t / 2)} \quad (2.3)$$

La potencia de salida dada por la ecuación (2.3) se muestra en la figura 2.3 suponiendo 13 modos de oscilación y una separación entre modos de $\omega = 4.531 \times 10^{12} \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$. La salida es en

forma de un tren de pulsos con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, es decir, que el espaciamiento, en tiempo, entre cada pulso es

$$T = \frac{1}{dn} \quad (2.4)$$

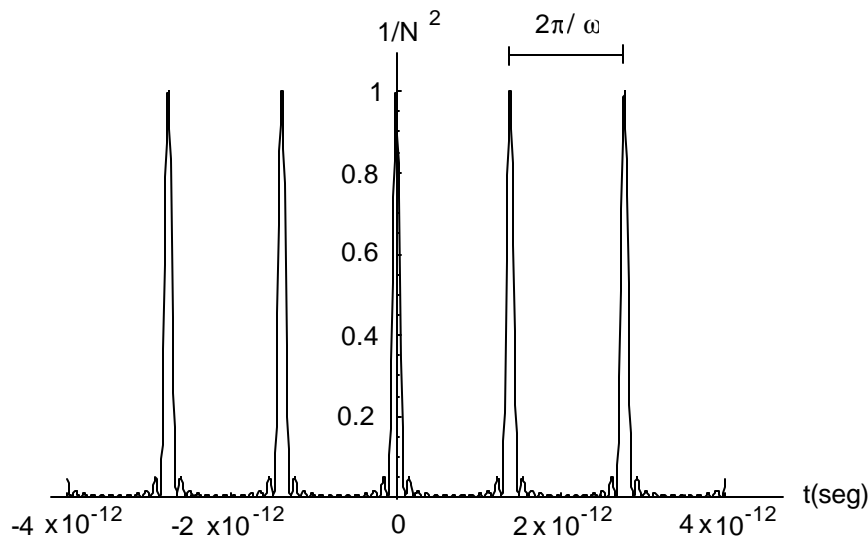


Figura 2.3 Potencia de salida de un láser de pulsos, ecuación 2.3.

El campo eléctrico total del pulso después de que éste se propaga una distancia z en el medio está dada por:

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \exp i[(\omega_0 + n\omega)t - k_n z] \quad (2.5)$$

En la figura 2.4 se muestran los pulsos generados por la ecuación 2.5, $\omega_0 = 2.35 \times 10^{15} \text{ rad / seg}$, después de propagarse una distancia de 100mm en el vacío. Los pulsos se presentan como función del tiempo. El pulso en $t=0$ es el pulso que se ha propagado una distancia de 100mm.

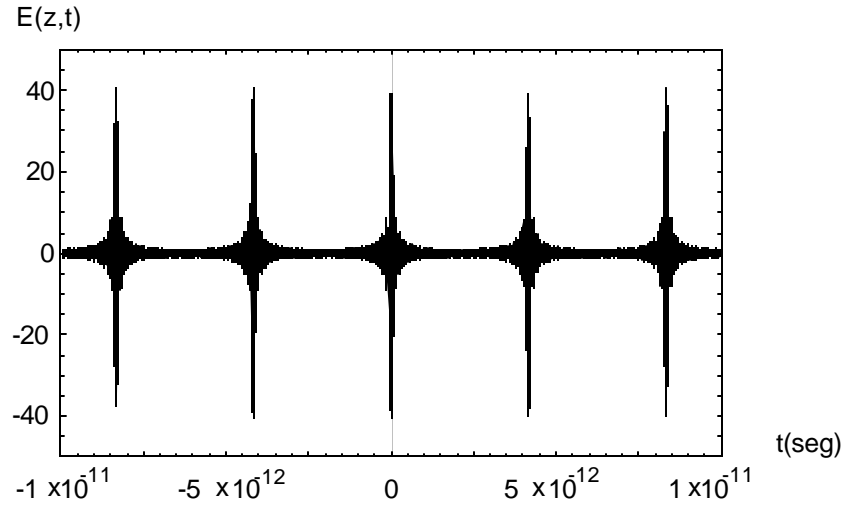


Figura 2.4. Pulsos propagándose en el vacío. En $t=0$ el pulso se ha propagado 100mm.

2.1.1 Ancho temporal de un pulso propagándose en el vacío.

De la ecuación 2.2, la amplitud del campo es igual a N veces la amplitud de un simple modo y el ancho temporal de cada pulso que se define como el tiempo entre el pico y el primer cero [10] dado por:

$$t_0 = \frac{T}{N}. \quad (2.6)$$

El número de modos oscilantes puede ser estimado por $N \approx \frac{\Delta\omega}{\omega}$, que es la razón de la transición del ancho de frecuencias y el espaciado ω entre modos.

Teniendo que $T = \frac{2p}{\omega}$ y $N \approx \frac{\Delta\omega}{\omega}$, t_0 se puede escribir en términos de la frecuencia como:

$$t_0 \sim \frac{2p}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta n} \quad (2.7)$$

Así, la duración del pulso es aproximadamente igual al inverso del ancho de frecuencias. En el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET de la UNAM, el láser genera pulsos con una duración aproximada de 100 femtosegundos y una longitud de onda de la portadora de 800nm. Por lo tanto, $\Delta n = 1 \times 10^{13} \text{ seg}^{-1}$ y $n_0 = 3.75 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}$.

En la figura 2.5 se muestran pulsos generados en un ancho de frecuencias $\Delta n = 9.376 \times 10^{12} \text{ seg}^{-1}$ que es equivalente a $\Delta l = 20 \text{ nm}$. En (a) y (c) se muestra el ancho de frecuencias compuesto por 13 modos de oscilación y por 25 modos de oscilación respectivamente. En (b) y (d) se muestran los pulsos generados por estos modos así como la duración de los mismos. Los pulsos mostrados en la figura 2.5 (b) y (d) son pulsos de 106.6 femtosegundos (ver figuras) y generados para una longitud de onda de la portadora de 800nm, que corresponde a una frecuencia igual a $n_0 = 3.75 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}$ y a una frecuencia angular igual a $w_0 = 2.35 \times 10^{15} \text{ rad / seg}$. Se verifica que el ancho temporal del pulso es independiente del número de modos de oscilación contenidos en Δn .

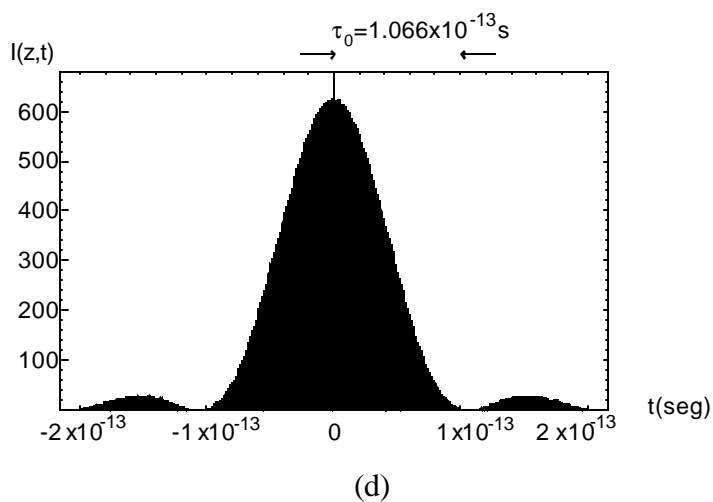
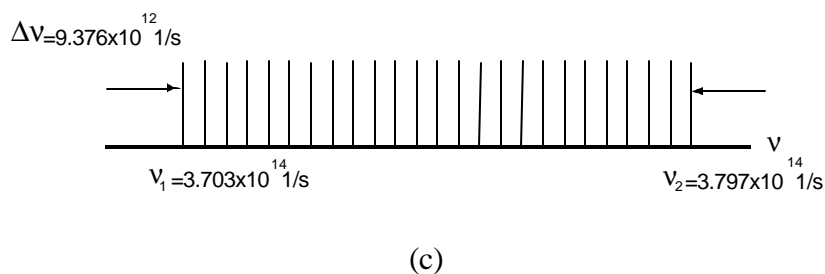
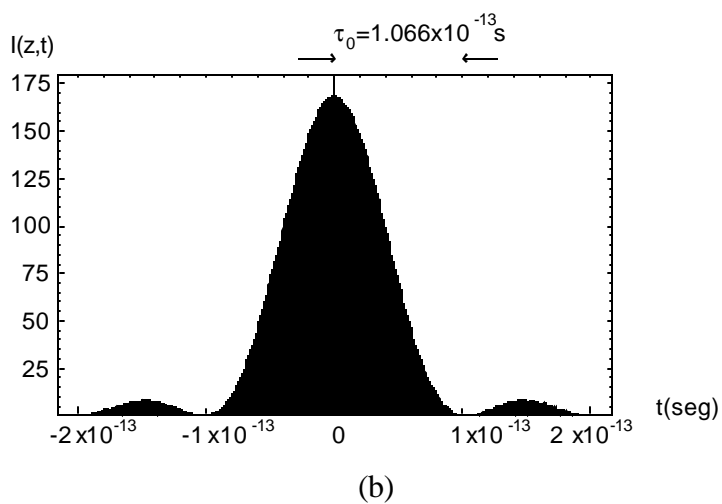
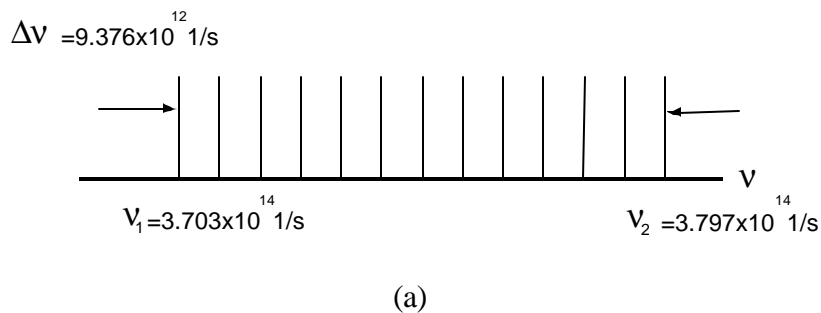


Figura 2.5. Pulsos propagándose en el vacío en $z=0$. En (a) y (c) el ancho espectral es $\Delta I = 20nm$.

En (b) y (d) la duración del pulso es $t_0 = 1.066 \times 10^{-13} \text{ seg}$.

2.1.2 Número de modos.

En el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET de la UNAM, el láser genera pulsos con una tasa de repetición de 76 MHz .

Sabiendo que la tasa de repetición es de 76 MHz tenemos:

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{1}{76\text{MHz}}$$

Despejando w

$$w = 2p(76\text{MHz}) \quad (2.8)$$

Por otro lado de la ecuación 2.7 tenemos que

$$\Delta w \sim \frac{2p}{t_0} \quad (2.9)$$

Para pulsos del orden de 100 femtosegundos, $t_0 = 100 \times 10^{-15} \text{ seg}$.

Sustituyendo las ecuaciones 2.8 y 2.9 en $N \approx \frac{\Delta w}{w}$ tenemos el número de modos,

$$N \approx 131,579.$$

A continuación calculamos la tasa de repetición para pulsos generados en un rango espectral $\Delta n = 9.376 \times 10^{12} \text{ seg}^{-1}$ pero diferente número de modos contenidos en Δn . En la figura 2.6 (a) y 2.6(b) se muestran los modos que dan lugar al tren de pulsos y al campo eléctrico de este tren de pulsos propagándose en el vacío para dos casos: mismo rango espectral $\Delta n = 9.376 \times 10^{12} \text{ seg}^{-1}$ pero diferente espaciamiento entre modos dn . En la figura 2.6(a) se tienen 13 modos, obteniendo un espaciamiento entre modos igual a $dn = 7.212 \times 10^{11} \text{ seg}^{-1}$; en la figura 2.6(b) se tienen 25 modos, obteniendo un espaciamiento entre modos igual a $dn = 3.750 \times 10^{11} \text{ seg}^{-1}$. La tasa de repetición para trece modos de oscilación de 721.2 GHz y para veinticinco modos la tasa de repetición corresponde a 375 GHz . En las figuras podemos observar que conforme aumenta el número de modos disminuye la tasa de repetición.

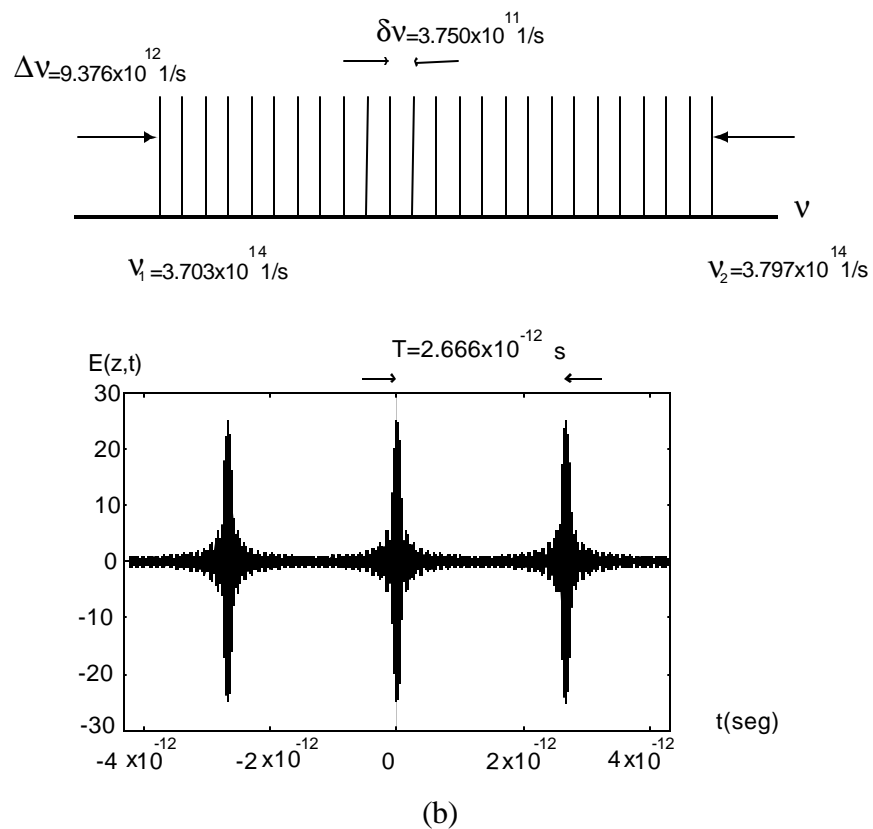
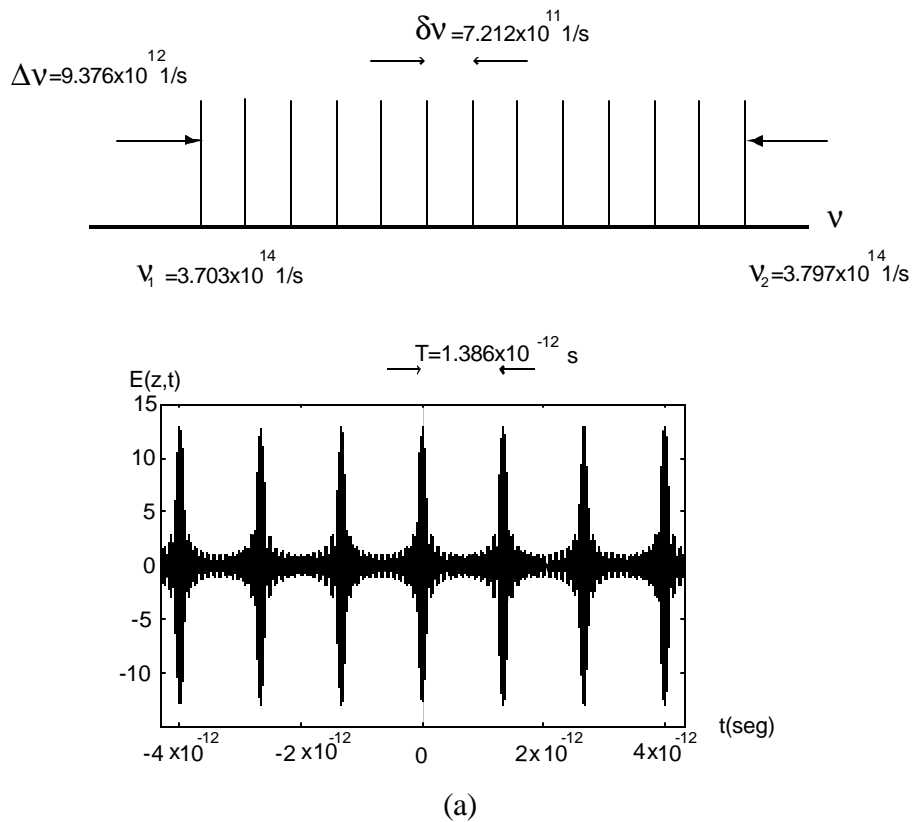


Figura 2.6. Pulsos propagándose en el vacío. Gráficas en $z=0$.

2.1.3 Propagación de pulsos de igual amplitud en vidrios ópticos.

En la figura 2.7 se muestra el campo eléctrico de los pulsos, generados con modos de igual amplitud, propagándose en vidrios BK7 y SF10 a diferentes distancias. El pulso gris se propaga en el vidrio y se compara con un pulso que se propaga en el vacío (negro). En las figuras de la derecha se puede observar un ensanchamiento temporal del pulso que produce un decaimiento en la amplitud máxima del pulso y una deformación del mismo. Este ensanchamiento temporal del pulso se produce por un fenómeno conocido como la dispersión de la velocidad de grupo (*GVD* por las siglas en inglés de group velocity dispersion) que se presentará en la siguiente sección.

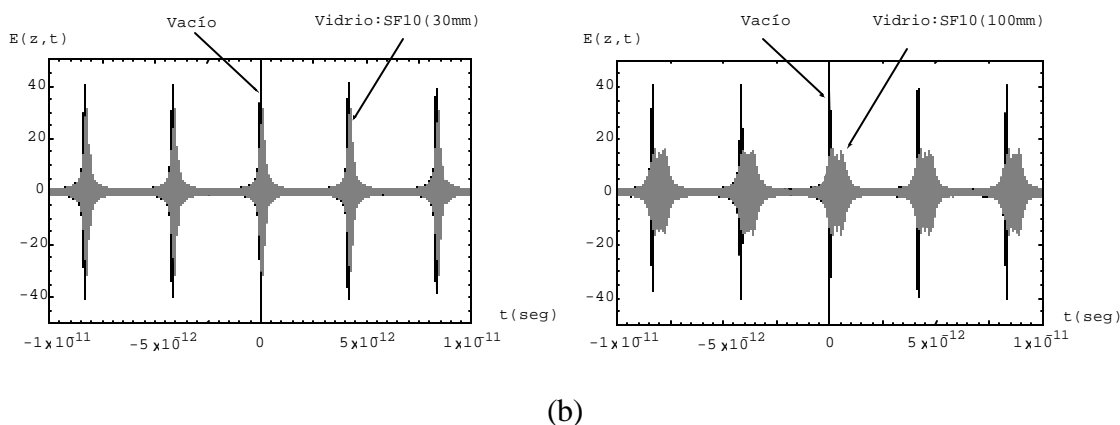
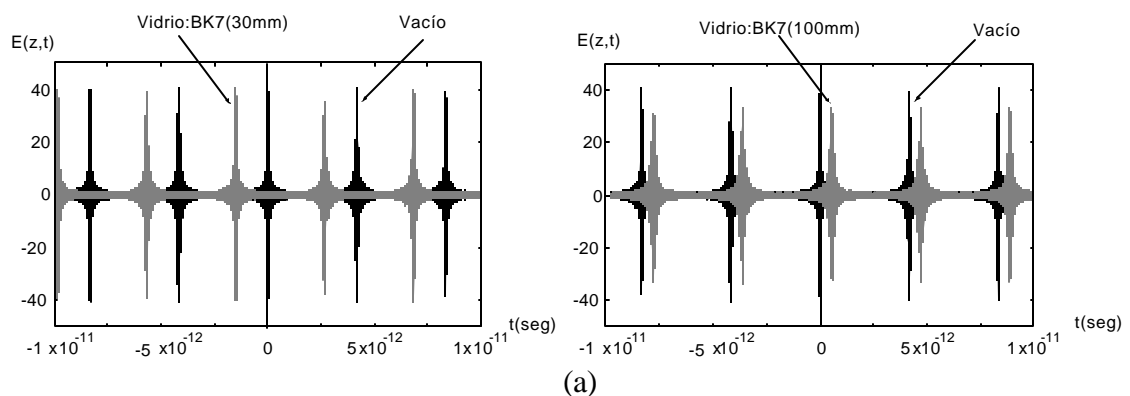


Figura 2.7 (a) Vidrio BK7, 30 mm y 100 mm. (b) Vidrio SF10, 30 mm y 100 mm.

En la figura 2.8 se muestra la intensidad del pulso mostrado en la figura 2.7(a) derecha, cuando el pulso se ha propagado 100mm en el vidrio BK7 después de un acercamiento, ver eje de las abscisas.

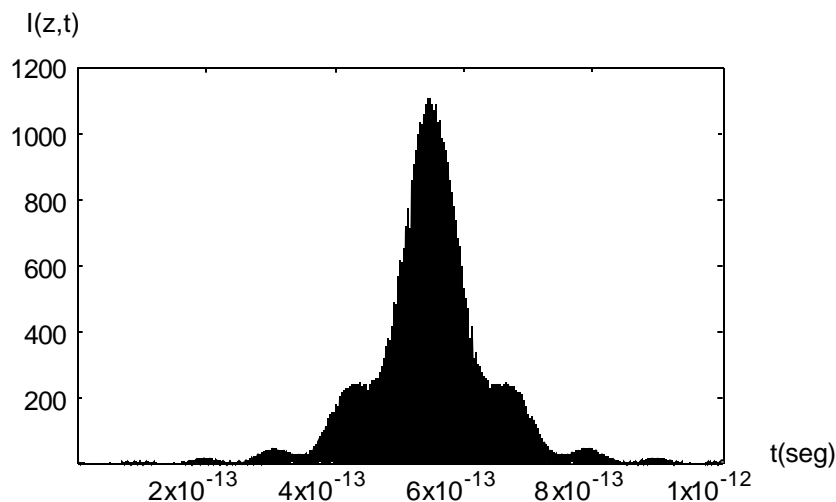


Figura 2.8 Pulso después de propagarse 100mm en BK7.

Como se puede observar en la figura 2.8, el primer valle del pulso no llega a cero, como en el caso del pulso propagándose en el vacío y por lo tanto la definición del ancho temporal del pulso utilizada para pulsos propagándose en el vacío no se puede usar en este caso.

Adicionalmente, los modos generados en un láser no tienen la misma amplitud y un modelo más cercano a la realidad sería modular la amplitud de los modos por una Gaussiana.

En la siguiente sección se presentará un análisis teórico para la propagación de pulsos gaussianos en medios dispersivos y se dará una nueva definición para el ancho temporal del pulso.

2.2 Propagación de pulsos gaussianos en medios dispersivos.

Si las amplitudes de los modos de oscilación de un láser son modulados por una curva Gaussiana [9, 10], ver figura 2.9, entonces se generan pulsos Gaussianos.

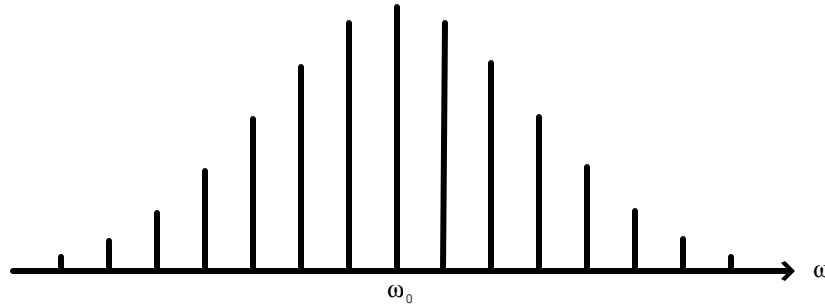


Figura 2.9. Modos de oscilación modulados por una gaussiana.

En la figura 2.10 se muestra un pulso gaussiano propagándose en el vacío y que después pasa a través de un bloque de vidrio de longitud L. La velocidad con la que se propaga el pulso dentro del bloque es igual a la velocidad de grupo dada por la ecuación 1.13.

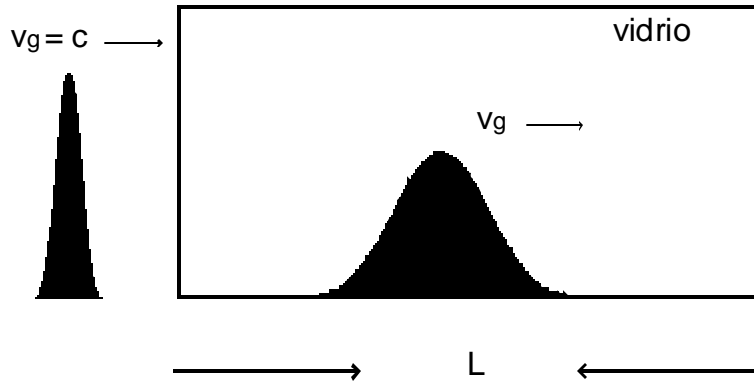


Figura 2.10. Pulso propagándose en vidrio una distancia L.

2.2.1 Análisis teórico para la propagación de pulsos gaussianos en medios dispersivos.

Supongamos un pulso gaussiano, cuyo campo se puede escribir de la siguiente manera [9]

$$E(z = 0, t) = \exp(-at^2 + iw_0t) \tag{2.10}$$

Donde w_0 es la frecuencia angular de la portadora y a es una constante.

Este pulso gaussiano incide en el bloque de vidrio mostrado en la figura 2.10, de tal manera que el sistema de coordenadas se sitúa en la cara de entrada del bloque en donde $z=0$.

El campo del pulso de entrada puede expresarse como una integral de Fourier

$$E(z = 0, t) = \exp(iw_0t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \tag{2.11}$$

Donde $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de la envolvente gaussiana $\exp(-at^2)$ dada por

$$F(\Omega) = \frac{1}{4a} \exp\left(\frac{-\Omega^2}{4a}\right) \quad (2.12)$$

La ecuación 2.11 se puede ver como un conjunto de campos armónicos, cada uno con frecuencia única $(\mathbf{w}_0 + \Omega)$ y amplitud $F(\Omega)d\Omega$.

Para calcular el campo del pulso de luz en el plano de salida $z = L$ se necesita multiplicar por cada frecuencia $F(\Omega)d\Omega \exp[i(\mathbf{w}_0 + \Omega)t]$ por su factor de fase

$$\exp[-ik(\mathbf{w}_0 + \Omega)z] \quad (2.13)$$

Así, sustituyendo en 2.11, el campo en z queda como

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \exp\{i[(\mathbf{w}_0 + \Omega)t - k(\mathbf{w}_0 + \Omega)z]\} d\Omega \quad (2.14)$$

Expandiendo $k(\mathbf{w}_0 + \Omega)$, alrededor de la frecuencia óptica \mathbf{w}_0 , en serie de Taylor, se tiene

$$k(\mathbf{w}_0 + \Omega) = k(\mathbf{w}_0) + \left. \frac{dk}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}_0} \Omega + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2k}{d\mathbf{w}^2} \right|_{\mathbf{w}_0} \Omega^2 + \dots \quad (2.15)$$

Cortando la serie de Taylor hasta el tercer término y sustituyendo en la expresión 2.14, el campo queda de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \exp[i(\mathbf{w}_0 t - k_0 z)] \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp\left\{i\left[\Omega t - \frac{\Omega z}{v_g} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\mathbf{w}} \left(\frac{1}{v_g}\right) \Omega^2 z\right]\right\} \\ &\equiv \exp[i(\mathbf{w}_0 t - k_0 z)] E(z, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde

$$k_0 \equiv k(\mathbf{w}_0) \quad (2.17)$$

$$\left. \frac{dk}{d\mathbf{w}} \right|_{\mathbf{w}_0} = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{\text{velocidad de grupo}} \quad (2.18)$$

$$a \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{2v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (2.19)$$

La dispersión de la velocidad de grupo se define como:

$$GVD = \frac{d^2 k}{d\omega^2} \quad (2.20)$$

Por lo tanto la dispersión de la velocidad de grupo está caracterizada por el parámetro a .

El campo de la envolvente está dada por

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i\Omega \left[\left(t - \frac{z}{v_g} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Omega z \right] \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i\Omega \left[\left(t - \frac{z}{v_g} \right) - a\Omega z \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

En ausencia de dispersión de la velocidad de grupo (GVD), es decir $a = 0$, la envolvente del pulso no cambia y el campo se puede escribir como

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i\Omega \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right\} = E \left[0, \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] \quad (2.22)$$

Sustituyendo $F(\Omega)$ en 2.21, el campo de la envolvente es

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\Omega^2 \left(\frac{1}{4a} + iaz \right) - i \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \Omega \right] \right\} d\Omega \quad (2.23)$$

Integrando la expresión anterior (ver apéndice A), se tiene que el campo es

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + i4aaz}} \exp \left(- \frac{\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2 z^2 a} \right) \exp \left(i \frac{4az \left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2 z^2} \right) \quad (2.24)$$

Y la intensidad del pulso es

$$I(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 16a^2 z^2}} \exp\left(-\frac{2\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2 z^2}\right) \quad (2.25)$$

La duración del pulso t , en z , puede tomarse como la separación entre los dos tiempos cuando el cuadrado de la envolvente se reduce por un factor de $1/2$ de su valor máximo (ver apéndice A); esto es

$$t = \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{\frac{1}{a} + 16a^2 z^2} \quad (2.26)$$

El ancho inicial del pulso es

$$t_0 = \left(\frac{2 \ln 2}{a}\right)^{1/2} \quad (2.27)$$

El ancho de un pulso que se ha propagado una distancia L dentro del material queda expresado como

$$t(L) = t_0 \sqrt{1 + \left(\frac{8aL \ln 2}{t_0^2}\right)^2} \quad (2.28)$$

Para conocer la dispersión de la velocidad de grupo (*GVD*) se necesita calcular la derivada de la velocidad de grupo con respecto a la frecuencia en términos del índice de refracción y de la longitud de onda. En el apéndice B se muestra las ecuaciones necesarias para calcular el parámetro a .

En las tablas 2.1 y 2.2 se muestran los valores teóricos del tiempo de duración de pulsos propagándose en distintos vidrios: BK7 el cual es un vidrio de baja dispersión y comúnmente usado en lentes; SF10 y SF14, vidrios altamente dispersivos usados en la compresión de pulsos. El ancho temporal inicial del pulso es de $t_0 = 50fs$ y $t_0 = 100fs$ respectivamente y $I_0 = 800nm$.

Tabla 2.1. Pulsos de $t_0 = 50 fs$.

L (mm)	Vidrio BK7 $t(L)fs$	Vidrio SF10 $t(L)fs$	Vidrio SF14 $t(L)fs$
0	50.00	50.00	50.00
5	51.51	66.52	70.06
10	55.78	100.98	110.14
50	133.38	441.50	493.25
100	252.31	878.74	982.68

Tabla 2.2. Pulso de $t_0 = 100 fs$

L (mm)	Vidrio BK7 $t(L)fs$	Vidrio SF10 $t(L)fs$	Vidrio SF14 $t(L)fs$
0	100.00	100.00	100.00
5	100.20	102.38	102.97
10	100.76	109.20	111.39
50	117.57	241.05	264.95
100	159.03	449.91	500.79

2.2.2 Modelo computacional para la propagación de pulsos gaussianos.

Para corroborar los valores anteriores, se hizo un programa computacional que modelara estos pulsos. A partir de la ecuación 2.14 se modelaron frecuencias moduladas por una Gaussiana propagándose en vidrio.

En las figuras 2.11 y 2.12 se presentan los pulsos modelados propagándose a través del vidrio después de una distancia L , el cuadrado del campo eléctrico del pulso se encuentra normalizado. Los pulsos fueron generados para una longitud de onda de la portadora de

$\lambda_0 = 800nm$, los anchos iniciales para estos pulsos fueron de $t_0 = 50fs$ (figura 2.11) y $t_0 = 100fs$ (figura 2.12).

El centro de la abscisa se encuentra en el pico del pulso, que se encuentra localizado en L/v_g , donde v_g es la velocidad de grupo dada por:

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \frac{c}{n - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0}}$$

El rango total en las abscisas es de $1000fs$ y en las figuras se muestran 5 distancias, $L = 0mm$, $L = 5mm$, $L = 10mm$, $L = 50mm$ y $L = 100mm$. De la tabla 2.4 y de la figura 2.12 se puede ver que para pulsos de $100fs$, el ensanchamiento temporal en estos pulsos es despreciable después de que han viajado $5mm$ en vidrio y es más importante para pulsos de $50fs$ propagándose en vidrios más dispersivos como: SF10 y SF14.

En las tablas 2.3 y 2.4 se muestran los valores del ensanchamiento temporal medidos directamente de las gráficas de las figuras 2.11 y 2.12 respectivamente. El error se estimó midiendo varias veces el ancho del pulso y fue aproximadamente del 1%.

Tabla 2.3. Pulsos de $t_0 = 50fs$

L (mm)	Vidrio BK7 $t(L)fs$	Vidrio SF10 $t(L)fs$	Vidrio SF14 $t(L)fs$
0	50.50 ± 0.5	50.85 ± 0.5	50.84 ± 0.5
5	51.95 ± 0.5	66.09 ± 0.7	70.36 ± 0.7
10	54.85 ± 0.5	101.65 ± 1.0	110.52 ± 1.1
50	132.20 ± 1.3	446.70 ± 4.5	498.80 ± 5.0
100	253.32 ± 2.5	886.10 ± 8.9	999.10 ± 9.9

Tabla 2.4. Pulso de $t_0 = 100 fs$

L (mm)	Vidrio BK7 $t(L)fs$	Vidrio SF10 $t(L)fs$	Vidrio SF14 $t(L)fs$
0	100.08 ± 1.0	100.08 ± 1.0	100.08 ± 1.0
5	100.22 ± 1.0	103.13 ± 1.0	102.65 ± 1.0
10	100.50 ± 1.0	109.30 ± 1.0	111.71 ± 1.1
50	117.53 ± 1.2	242.73 ± 2.4	265.33 ± 2.6
100	158.70 ± 1.6	451.97 ± 4.5	504.02 ± 5

Comparando las tablas 2.1 y 2.3 y las tablas 2.2 y 2.4 se verifica que los cálculos teóricos obtenidos con las ecuaciones del apéndice A son correctos.

Figura 2.11. Pulsos de $t_0 = 50 \text{ fs}$.

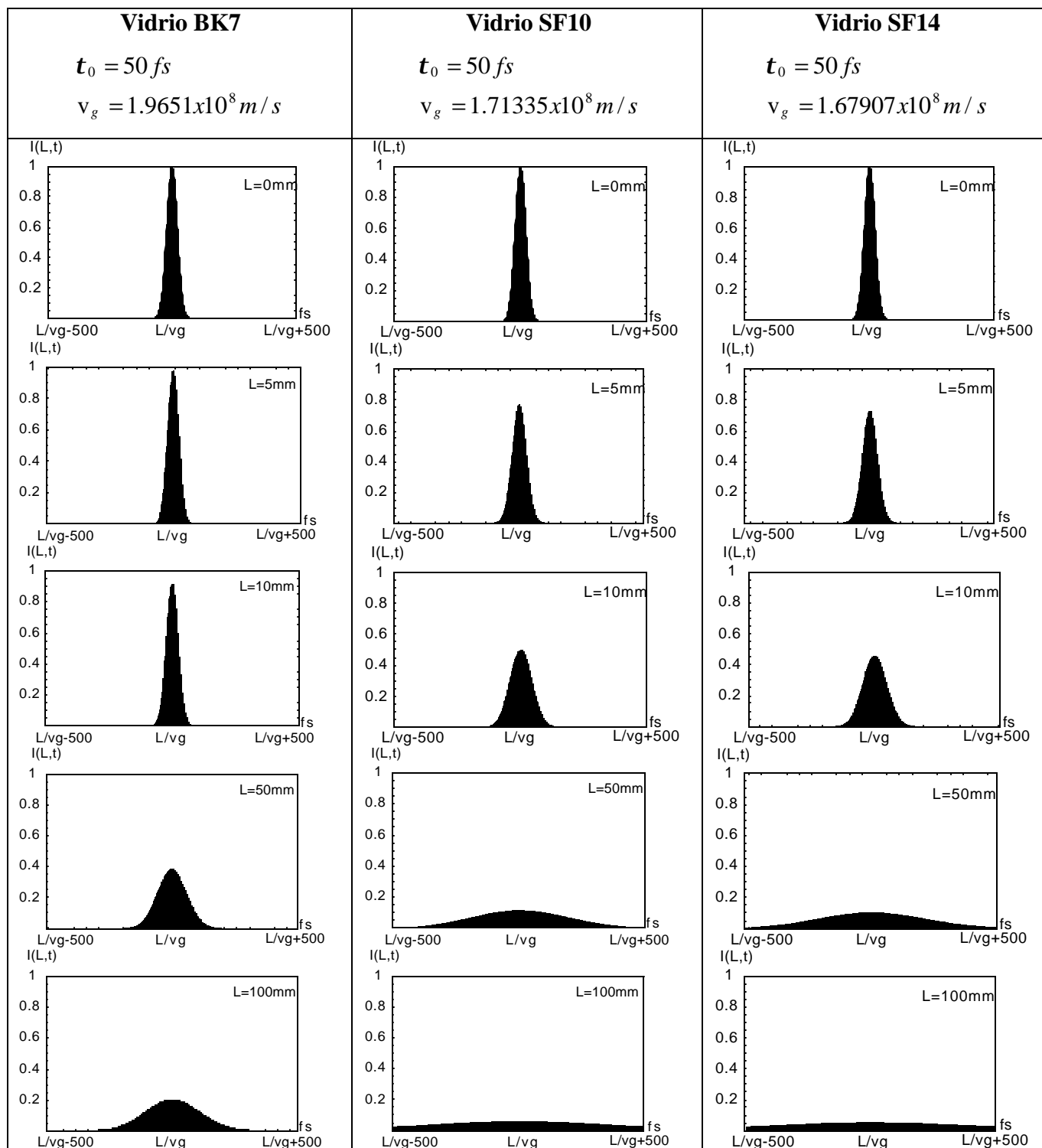
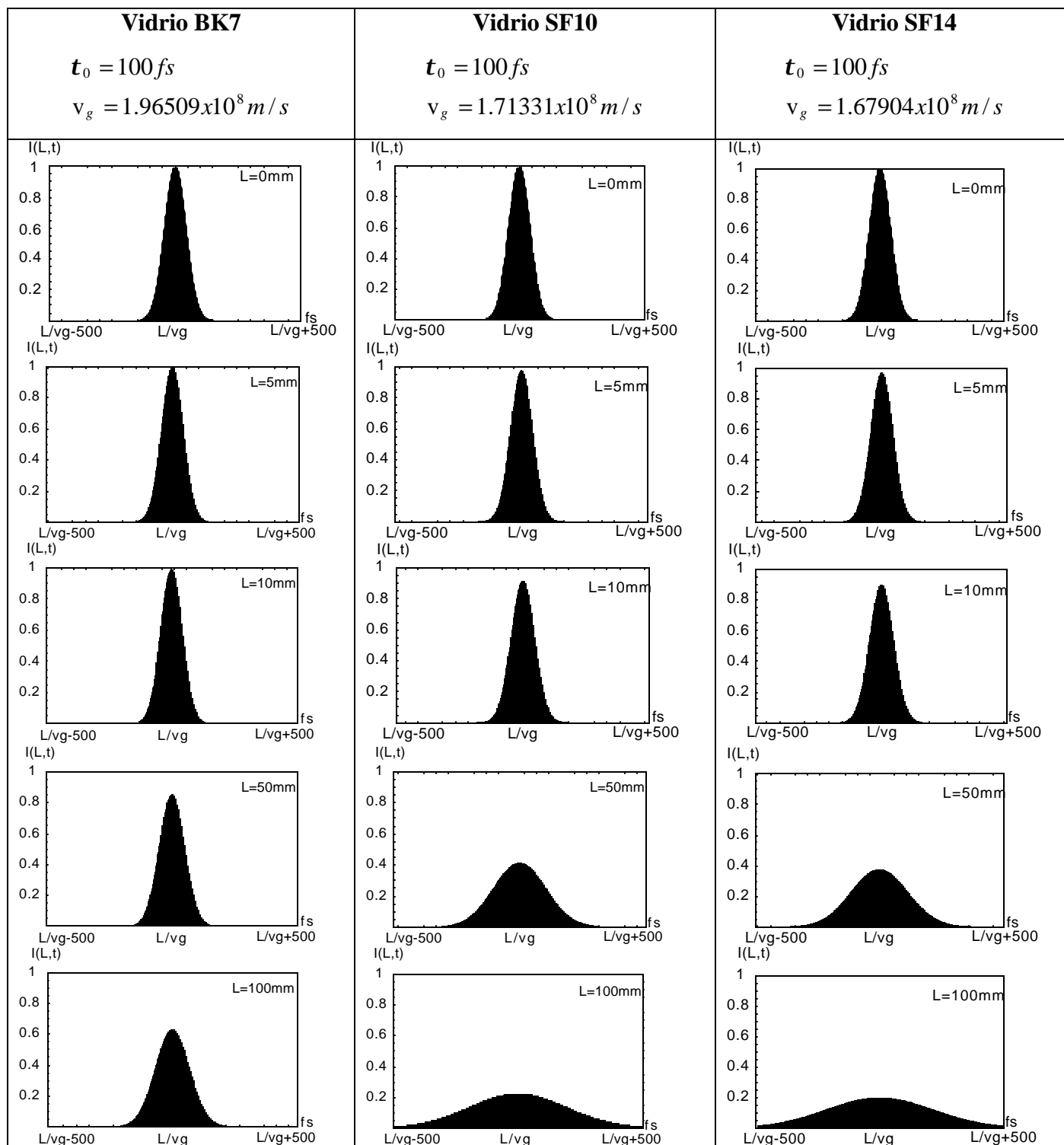


Figura 2.12. Pulso de $t_0 = 100\text{ fs}$ propagándose en diferentes vidrios.



2.3 Efecto de la dispersión de velocidad de grupo en el ensanchamiento temporal del pulso.

Como hemos visto la dispersión de la velocidad de grupo en el material provoca un ensanchamiento temporal del pulso. Por otro lado, el ancho temporal del pulso τ dado por la ecuación 2.28 depende del ancho inicial del pulso τ_0 , de la longitud de onda de la portadora del pulso, de la dispersión del material y de la distancia que se propaga el pulso en el material. Se calculó el ancho temporal del pulso τ después de propagarse 1cm en vidrio de Silica fundida y se calculó la diferencia entre este ancho temporal y el ancho inicial del pulso. Esta diferencia se graficó como función de la longitud de onda de la portadora del pulso entre 0.234 y 2.3 micrones. Los resultados se muestran en la figura 2.13 para tres anchos temporales iniciales del pulso: 25fs, 50fs y 100fs.

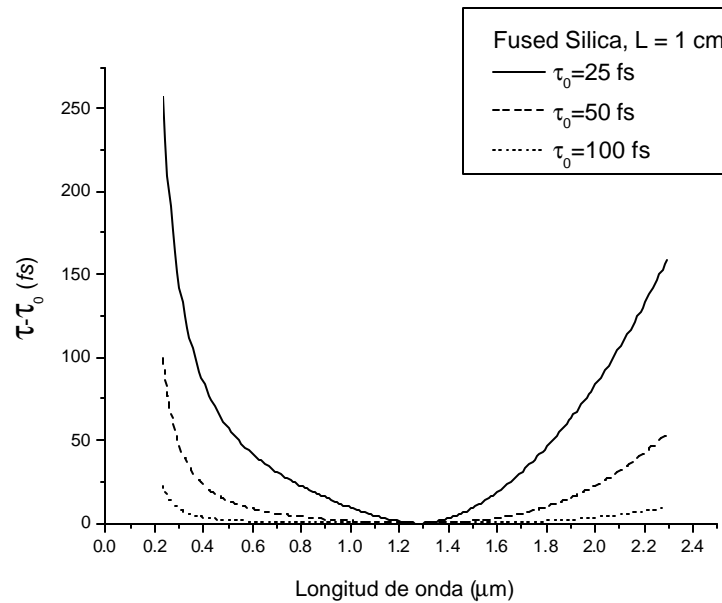


Figura 2.13 Diferencia del ancho temporal del pulso después de propagarse 1cm en Silica fundida con respecto al inicial τ_0 .

En la figura 2.13 se puede observar el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo en el ancho temporal del pulso como función de la longitud de onda de la portadora del pulso. Se observa que a 1.3 micrones, el ancho temporal del pulso prácticamente no cambia, esto se debe a que para esta longitud de onda la dispersión de la velocidad de grupo es

aproximadamente igual a cero. Esto es bien conocido en la propagación de señales en fibras ópticas. También se puede observar como la dispersión de la velocidad de grupo tiene un mayor efecto en pulsos más cortos, como 25fs.

En resumen, la dispersión de la velocidad de grupo produce un ensanchamiento temporal de los pulsos que aumenta en materiales más dispersivos, o bien cuando los pulsos se propagan distancias mayores en el material. La dispersión de la velocidad de grupo también produce un ensanchamiento temporal de los pulsos que es más importante para pulsos ultracortos; como 50fs y 25fs. Adicionalmente podemos ver como a partir de 1.3micrones en donde $GVD \cong 0$, el ancho temporal aumenta hacia el ultravioleta y hacia el infrarrojo.

Finalmente, en una lente de vidrio BK7 y con un espesor de 5mm, el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo en el ensanchamiento temporal de un pulso de 100fs es prácticamente despreciable cuando éste pasa a través de la lente.

Capítulo 3

Propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas.

3.1 Lentes refractivas simples.

Una de las funciones principales de los pulsos ultracortos es concentrar energía en tiempo y en espacio. El uso de lentes permite concentrar la energía de un pulso de luz en un pequeño espacio de volumen alrededor del llamado punto focal de la lente[11].

Cuando se usan lentes refractivas para enfocar pulsos ultracortos de luz (del orden de femtosegundos) hay tres efectos que afectan la calidad del enfocamiento de los pulsos. Estos tres fenómenos son: la dispersión de la velocidad de grupo, *GVD* por sus siglas en inglés de group velocity dispersion, la diferencia en el tiempo de propagación de los pulsos que inciden a diferentes alturas en la lente, *PTD* por sus siglas en inglés de Propagation time difference, y las aberraciones de la lente.

Como vimos en el capítulo 2, *GVD* produce un ensanchamiento temporal del pulso que depende fuertemente de la duración temporal del pulso, es prácticamente igual a λ_0 alrededor de 1.3 micrones y a partir de esta longitud de onda aumenta hacia el infrarrojo y hacia el ultravioleta. En este capítulo mostraremos que *PTD* produce un ensanchamiento espacial del pulso y que es un efecto que es independiente de la duración temporal del pulso, y solo depende de las características de la lente como son la abertura numérica, la distancia focal y los materiales ópticos. Por último las aberraciones de la lente afectan la

concentración de los pulsos, sin embargo, en el presente capítulo analizaremos lentes ideales para luz monocromática, es decir, lentes que están limitadas por difracción y por lo tanto las aberraciones son despreciables. De tal manera que *GVD* y *PTD* son los efectos más importantes que afectan la calidad del enfocamiento del pulso producido por la lente.

En este capítulo discutiremos como surge la diferencia en el tiempo de propagación de pulsos en lentes, *PTD*, y la forma de corregir este efecto usando lentes acromáticas. Posteriormente presentaremos un método propuesto por A. Vaughan [3, 4] en 1996 para diseñar lentes que tienen una *PTD* igual a cero para la longitud de onda de la onda portadora del pulso y compararemos estos diseños con los diseños de lentes acromáticas normales que son diseñadas para funcionar con luz continua para la formación de imágenes, en donde lo único que nos interesa es la propagación de la fase de las ondas o el frente de onda de fase. En este último caso, el frente de onda se propaga dentro del medio con una velocidad igual a c/n , en donde c es la velocidad de la luz en el vacío y n es el índice de refracción de fase en el medio.

En el caso de un pulso óptico, formado por un paquete de ondas, éste se propaga con una velocidad igual a la velocidad de grupo dentro de un material dispersivo, dada por, $v_g = c/n_g$, en donde n_g es el índice de refracción de grupo. La diferencia entre la velocidad de grupo con la que se propaga el pulso y la velocidad de fase con la que se propagan las ondas dentro de la lente produce que los pulsos que inciden a diferentes alturas en la lente no lleguen al mismo tiempo al foco de la lente causando un ensanchamiento espacial del pulso, efecto conocido como *PTD*.

3.2 Diferencia en el tiempo de propagación, *PTD*.

Supongamos un frente de onda plano con una distribución de potencia uniforme que incide en una lente monocromática ideal para luz continua como se muestra en la figura 3.1.

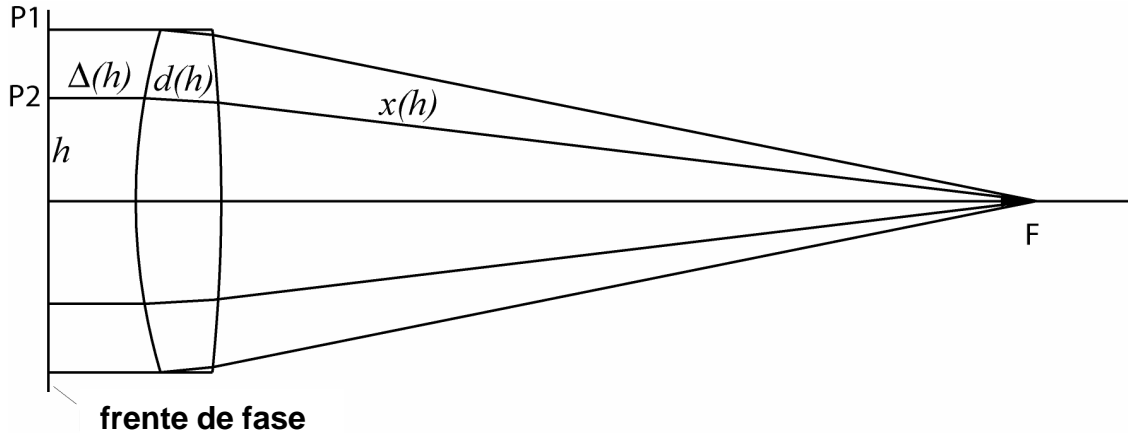


Figura 3.1. Lente ideal para luz monocromática continua.

Una lente ideal, desde el punto de vista de la óptica geométrica, significa que todos los rayos paralelos al eje óptico que pasan a través de la lente convergen al punto focal F. Usando el principio de Fermat también significa que el tiempo que le lleva a las ondas viajar del frente de fase, P, al punto focal de la lente, F, es el mismo. De tal manera que todas las ondas llegan en fase al punto focal F. El tiempo que les lleva a las ondas viajar de P a F está dado por

$$t_f = \frac{\Delta(h)}{c} + \frac{d(h)}{v_f} + \frac{x(h)}{c} \tag{3.1}$$

En donde $v_f = c/n$ es la velocidad de fase con la que se propagan las ondas en la lente. Porque la lente es ideal entonces t_f es independiente de h , que es la altura a la que incide el rayo en la lente con respecto al eje óptico.

Ahora bien, supongamos que un pulso de luz incide sobre la lente ideal mostrada en la figura 3.1. El pulso de luz tiene un tamaño finito que cubre una cierta área sobre la lente como se muestra en la figura 3.2. Este haz se puede modelar como un conjunto de pulsos,

cada uno propagándose a lo largo de cada rayo. En la figura mostramos cinco pulsos, y hemos supuesto que el frente del pulso es plano y coincide con el frente de fase. El frente del pulso es la superficie que une a todos los puntos de máxima intensidad de los pulsos.

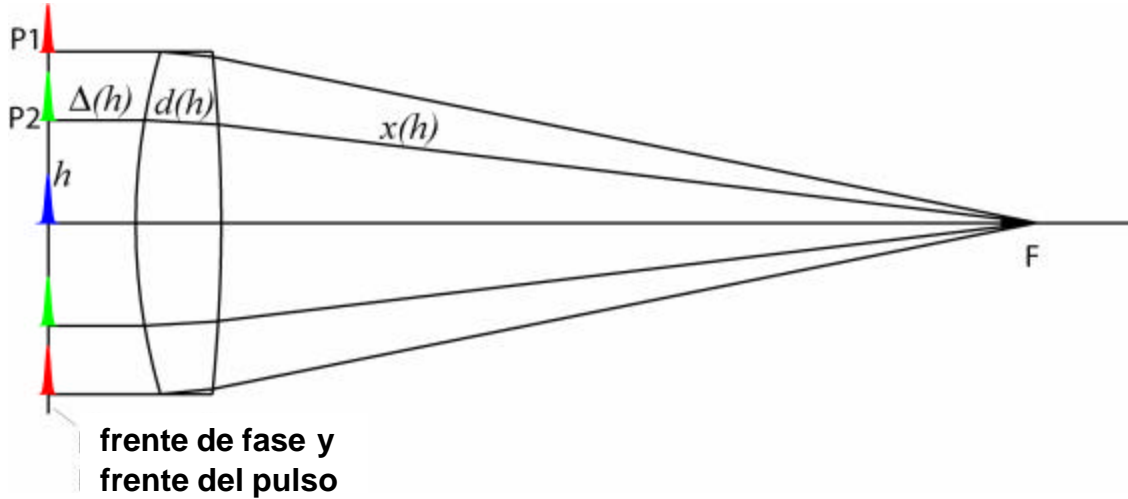


Figura 3.2. Lente ideal mostrada en la figura 3.1, pero ahora incide sobre ella un haz de luz pulsada.

Los colores usados en los pulsos mostrados en la figura 3.2 son únicamente para mostrar que sucede con ellos al pasar por la lente, y no tienen ningún significado sobre la longitud de onda de la onda portadora de los pulsos. De hecho, todos ellos deben tener la misma longitud de onda de la onda portadora del pulso.

Si calculamos el tiempo que le lleva a cada pulso viajar del frente del pulso al punto focal F tenemos:

$$t_g(h) = \frac{\Delta(h)}{c} + \frac{d(h)}{v_g} + \frac{x(h)}{c} \quad (3.2)$$

Donde $v_g = c/n_g$ es la velocidad de grupo con la que se propaga el pulso dentro de la lente, y donde n_g es el índice de grupo dado por:

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \quad (3.3)$$

Donde n es el índice de fase del vidrio de la lente y l es la longitud de onda de la onda portadora del pulso en el vacío. El tiempo que tarda el pulso viajar del frente del pulso al punto F, t_g , si depende de la altura, h , a la que incide el pulso en la lente.

Calculando la diferencia de tiempo de propagación entre el frente de fase y el frente del pulso después de pasar por la lente tenemos:

$$\Delta T(h) = t_f - t_g = \frac{d(h)}{v_f} - \frac{d(h)}{v_g} \quad (3.4)$$

En donde $d(h)$ es la distancia que se propaga el rayo dentro de la lente y que depende de h . Sustituyendo las expresiones para la velocidad de fase y la velocidad de grupo en la ecuación (3.4) tenemos:

$$\Delta T(h) = \frac{d(h)}{c} l \frac{dn}{dl} \quad (3.5)$$

Suponiendo una lente delgada y formada con dos superficies esféricas con radios de curvatura R_1 y R_2 tenemos que:

$$d(h) \cong d_0 - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.6)$$

En donde d_0 es el espesor de la lente a lo largo del eje óptico.

En la figura 3.3 se muestran los rayos que provienen de la lente ideal y que son enfocados en el punto F. Calculando el retraso de los pulsos a diferentes alturas con respecto a las ondas de fase se obtiene la curva mostrada con línea continua y que representa el frente del pulso. La gráfica se obtuvo calculando el retraso de los pulsos justo en el momento en que las ondas de fase llegan al punto focal F. Como podemos ver el frente del pulso está distorsionado. El frente del pulso ideal se muestra en la misma figura con línea punteada, el cual es un frente esférico con centro en F. La diferencia temporal entre el frente del pulso real y el frente del pulso ideal es lo que se conoce como la diferencia de tiempo de propagación, en inglés, propagation time difference, *PTD*, que ocasiona un ensanchamiento espacial del pulso.

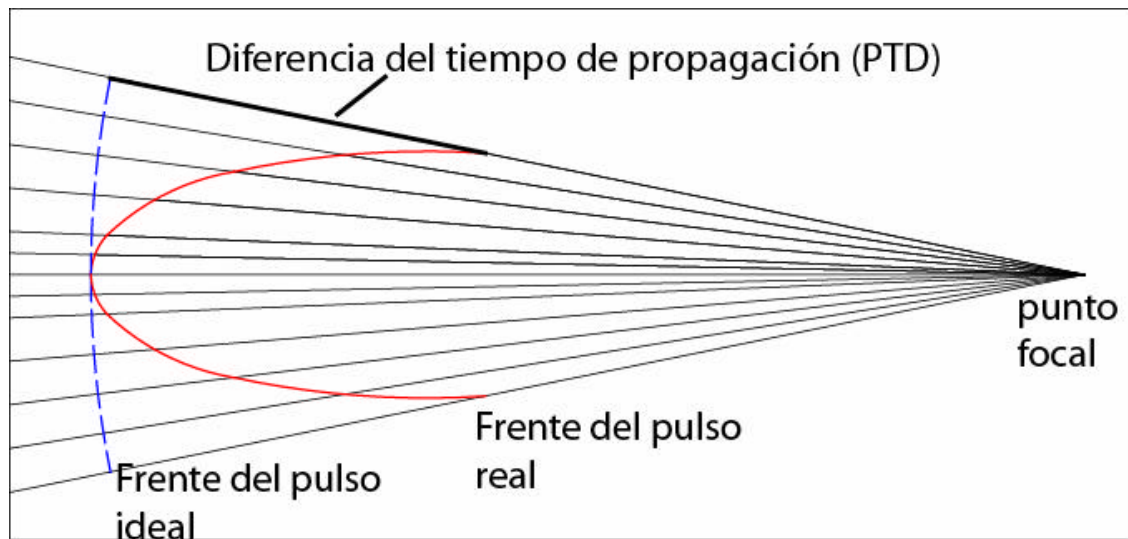


Figura 3.3 Ampliación de la zona focal para mostrar (a) el frente del pulso real, línea en color rojo y (b) el frente del pulso ideal, línea en color azul.

En las figuras 3.4 (a), (b) y (c) se muestra esquemáticamente el efecto de la distorsión en el frente del pulso. El pulso que se propaga a lo largo del rayo marginal llega primero al punto focal F . Después llega un pulso que se propaga a lo largo de un rayo a una altura h menor, y así sucesivamente. El pulso que llega más retrasado al punto focal es el pulso que se propaga a lo largo del eje óptico, dado que es a lo largo de este rayo que se propaga más distancia en el material dispersivo. Como podemos observar, lo que es una lente ideal con luz continua, no es ideal para luz pulsada. A pesar de que la lente es ideal para luz continua y todas las ondas convergen a un mismo punto, o llegan en fase a éste, el frente del pulso estará distorsionado al pasar por la lente, y los pulsos no llegarán al mismo tiempo al punto focal.

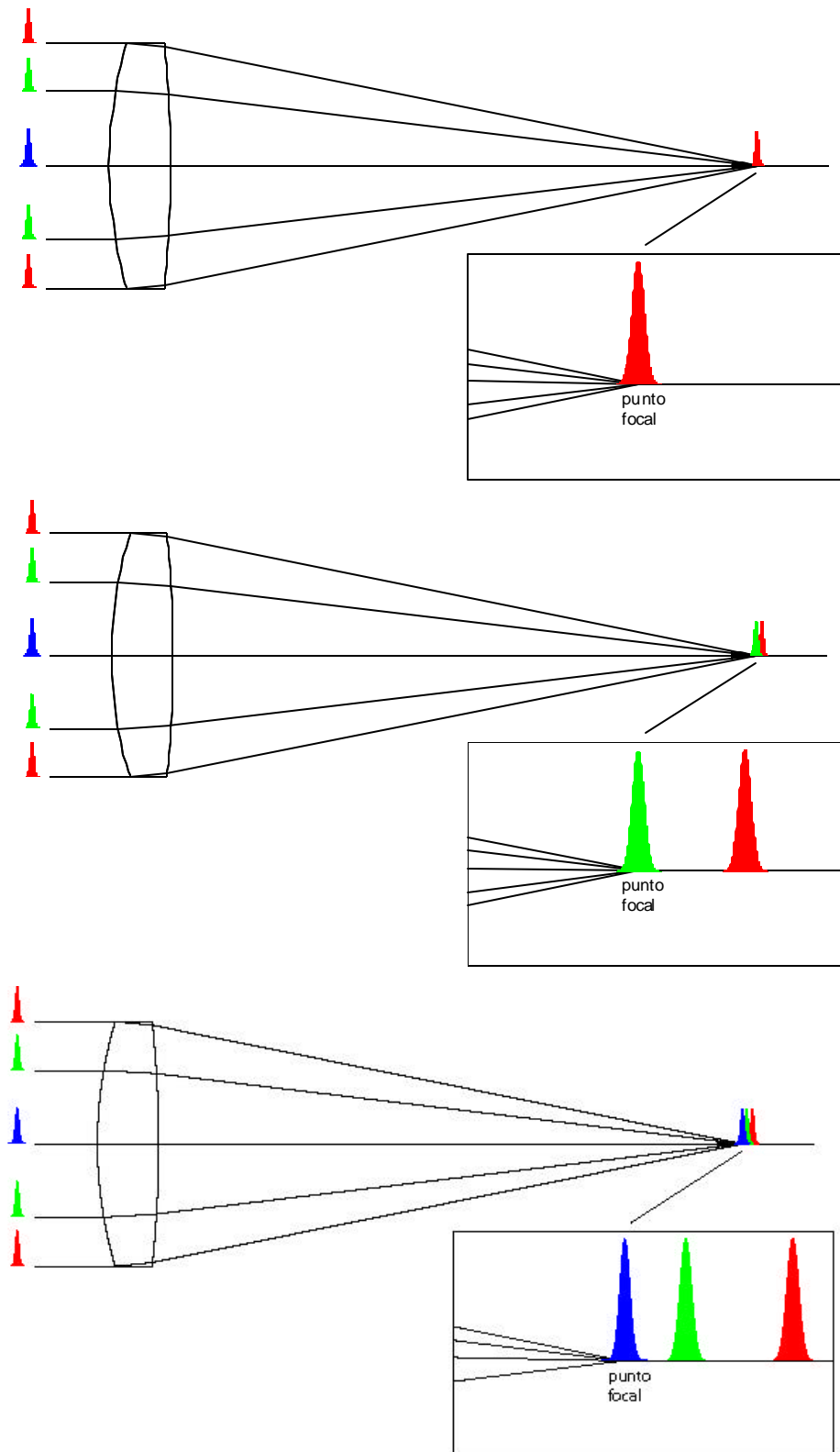


Figura 3.4 Se muestra el momento en el que llega el pulso al punto focal F cuando se propaga a diferentes alturas.

La diferencia entre el pulso que se propaga a lo largo del rayo marginal y el rayo que se propaga a lo largo del eje óptico da una estimación del ensanchamiento espacial del pulso en el foco de la lente.

Suponiendo que el radio del haz pulsado de entrada es r_b , el ensanchamiento espacial del pulso se puede estimar calculado la diferencia en el tiempo de llegada $\Delta T'$ de un pulso sobre un rayo axial y un pulso pasando a través de la lente a una altura $h = r_b$.

Para una lente delgada con un espesor dado por la ecuación 3.6, se tiene que $\Delta T'$ está dado por:

$$\begin{aligned}\Delta T'(r_b) &= \Delta T(h = r_b) - \Delta T(h = 0) \\ &= -\frac{r_b^2}{2c} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\mathbf{I} \frac{dn}{d\mathbf{I}} \right) \\ &= -\frac{r_b^2}{2c} \frac{1}{f(n-1)} \left(\mathbf{I} \frac{dn}{d\mathbf{I}} \right)\end{aligned}\quad (3.7)$$

en donde hemos introducido la expresión para la distancia focal dada por:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.8)$$

En lo sucesivo identificaremos a $\Delta T'$ como PTD , i.e., $\Delta T' = PTD$.

En la tabla 3.1 se muestran los resultados del ensanchamiento espacial del pulso debido a la diferencia de tiempo de propagación que se produce cuando el pulso pasa a través de la lente. Los resultados se muestran para tres longitudes de onda: infrarrojo: 800nm, visible: 620nm y ultravioleta: 248nm, para diferentes distancias focales, f , diámetros, D , y aberturas numéricas, $N.A.$, de la lente, y para tres vidrios: BK7, SF14 y Silica fundida. En la última columna de la tabla 3.1 se muestra el diámetro del disco de Airy que es el tamaño de la imagen limitada por difracción de una lente ideal, dado por:

$$d = 2r = 1.22 \frac{\mathbf{I}}{N.A.} \quad (3.9)$$

donde \mathbf{I} es la longitud de onda de la portadora. Como podemos observar en la tabla el efecto del ensanchamiento espacial del pulso se vuelve mas importante para aberturas numéricas grandes y cuando la longitud de onda de la portadora del pulso está en la región del ultravioleta.

Tabla 3.1 Ensanchamientos espaciales del pulso para diferentes lentes delgadas.

I (mm)	f (mm)	D (mm)	$N.A$	$\Delta T' (fs)$ BK7	$\Delta T' (fs)$ SF14	$\Delta T' (fs)$ Fused Silica	Diámetro del disco de Airy (mm)
800	30	2	0.033	2	3	2	29
800	30	7.2	0.12	22	42	22	8
800	30	10	0.166	43	82	42	6
800	30	20	0.333	173	328	169	3
800	30	30	0.5	389	734	381	2
800	100	24	0.12	75	142	73	8
800	100	33.3	0.166	144	273	141	6
620	30	2	0.033	2	6	2	23
620	30	7.2	0.12	31	71	30	6
620	30	30	0.5	543	1230	518	1.5
248	30	2	0.033	---	---	15	9
248	30	7.2	0.12	---	---	197	2.5
248	30	30	0.5	---	---	3422	0.6

En la figura 3.5 se ha graficado el ensanchamiento espacial del pulso en femtosegundos, dada por la ecuación 3.7 como función de la longitud de onda de la portadora del pulso, I , para una lente simple ideal, con una distancia focal de 30mm y una abertura numérica igual a 0.2. El material de la lente es silica fundida. Para una longitud de onda de 800nm el ensanchamiento del pulso es de aproximadamente 60 fs. Mientras que el ensanchamiento temporal del pulso para la misma longitud de onda en una lente del mismo material y espesor de 1cm, es menor a 1fs. En la figura 3.6 se muestra la comparación entre las curvas mostradas en las figuras 2.13 y 3.5, con el fin de mostrar que para pulsos del orden de 100fs, el efecto espacial en el ensanchamiento del pulso causado por *PTD* es más importante que el ensanchamiento temporal del pulso causado por *GVD*. En la figura 3.7 se muestra esquemáticamente el efecto del ensanchamiento espacial y temporal del pulso al pasar por la lente ideal simple.

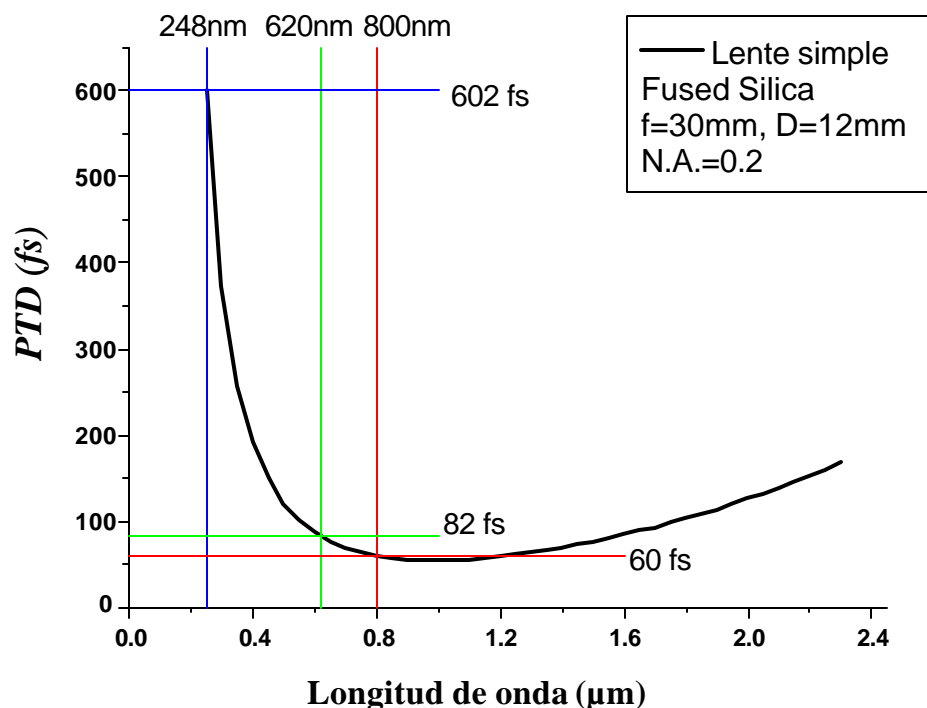


Figura 3.5 Ensanchamiento espacial del pulso como función de la longitud de onda de la portadora.

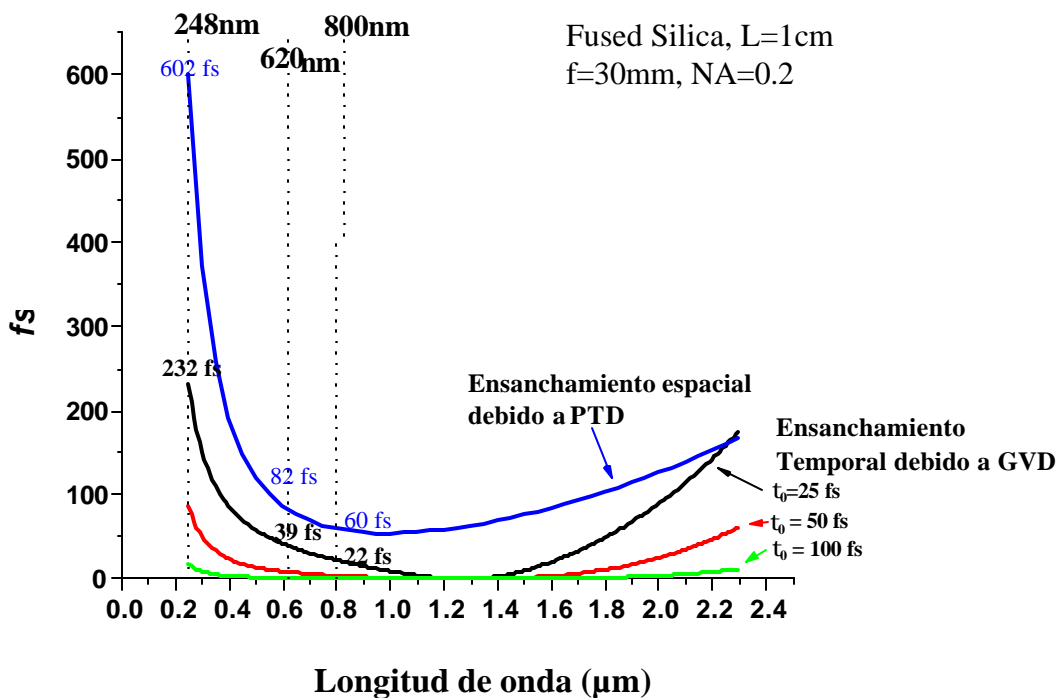


Figura 3.6 Comparación entre ensanchamiento espacial causado por *PTD* y el ensanchamiento temporal del pulso causado por *GVD*, como función de la longitud de onda.

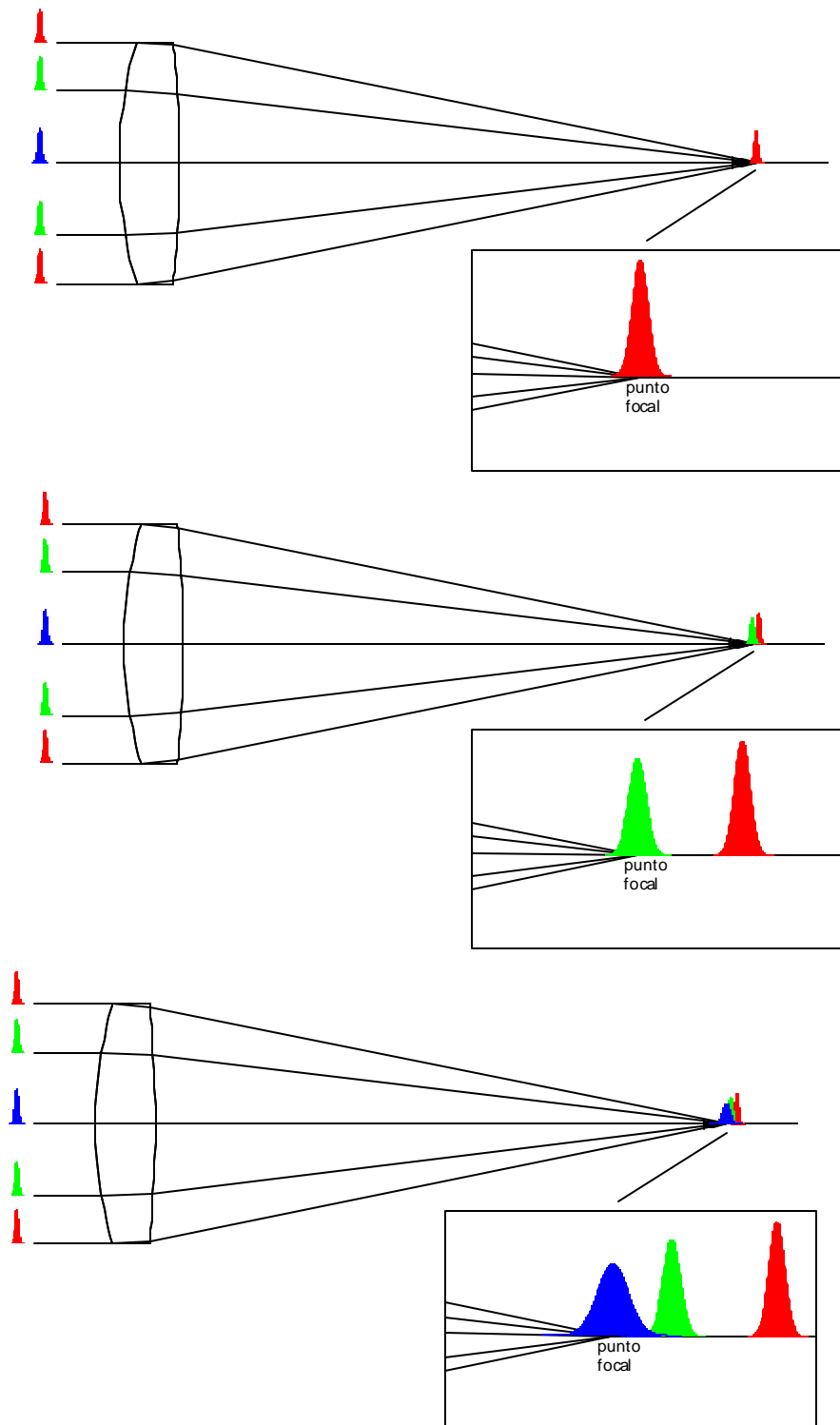


Figura 3.7 Se muestra el momento en el que llega el pulso al punto focal F cuando se propaga a diferentes alturas. En la figura se muestra esquemáticamente el ensanchamiento temporal y el ensanchamiento espacial del pulso.

3.3 Corrección de la distorsión del frente del pulso.

En esta sección se discutirá qué causa la distorsión del frente del pulso y la forma de corregirlo.

3.3.1 Distorsión del frente del pulso en lentes simples.

La ecuación 3.7 se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\Delta T'(r_b) &= \Delta T(h = r_b) - \Delta T(h = 0) \\ &= -\frac{r_b^2}{2c} \frac{1}{f(n-1)} \left(\mathbf{1} \frac{dn}{d\mathbf{l}} \right) \\ &= -\frac{r_b^2}{2c} \mathbf{1} \frac{d}{d\mathbf{l}} \left(\frac{1}{f} \right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

De la ecuación 3.10 podemos ver que la causa de la distorsión en el frente del pulso, al pasar éste por una lente simple ideal, es la variación de la distancia focal de la lente con la longitud de onda, esto es, la cromaticidad de la lente. Por lo tanto es de esperarse que esta distorsión pueda corregirse si se usa óptica acromática. A continuación presentamos el cálculo de la diferencia en tiempo de propagación entre el frente de fase y el frente del pulso después de pasar por un doblete, a una altura h .

3.3.2 Doblete acromático ideal.

En un doblete formado por dos lentes delgadas tenemos que la diferencia en el tiempo de propagación entre el frente de fase y el frente del pulso a una altura h , es:

$$\Delta T(h) = t_f - t_g = \frac{d_1(h)}{v_{f_1}} + \frac{d_2(h)}{v_{f_2}} - \frac{d_1(h)}{v_{g_1}} - \frac{d_2(h)}{v_{g_2}} \quad (3.11)$$

donde:

$$d_1(h) \cong d_{01} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{y} \quad d_2(h) \cong d_{02} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \quad (3.12)$$

Usando la expresión para la velocidad de grupo en términos del índice de grupo dado por la ecuación 3.3 y sustituyendo esta expresión y la ecuación 3.12 en la ecuación 3.11, tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta T(h) &= \frac{d_{01}l}{c} \frac{dn_1}{d\lambda} + \frac{d_{02}l}{c} \frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{h^2 l}{2c} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{dn_1}{d\lambda} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \left(\frac{dn_2}{d\lambda} \right) \right] \\ &= \frac{d_{01}l}{c} \frac{dn_1}{d\lambda} + \frac{d_{02}l}{c} \frac{dn_2}{d\lambda} - \frac{h^2 l}{2c} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para un doblete acromático ideal $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f} \right) = 0$ y por lo tanto:

$$\Delta T(h) = \frac{d_{01}l}{c} \frac{dn_1}{d\lambda} + \frac{d_{02}l}{c} \frac{dn_2}{d\lambda} = \text{constante} \quad (3.14)$$

Lo que quiere decir que todos los pulsos llegarán al mismo tiempo, independiente de la altura, h , a la que inciden en la lente. De tal manera que el frente del pulso será un frente de onda esférico paralelo al frente de onda de fase, como se muestra en la figura 3.8.

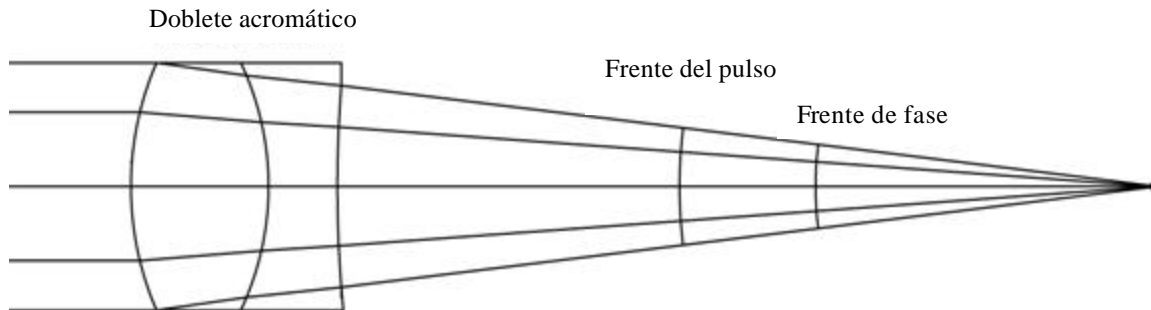


Figura 3.8 Doblete acromático ideal. Se corrige la distorsión del frente del pulso.

3.3.3 Doblete acromático real.

En la figura 3.9 se muestra el diseño óptico de un doblete acromático real. En un doblete acromático real se corrige la aberración cromática longitudinal, haciendo que los focos para las longitudes de onda extremas del rango espectral sean iguales (mostrados en rojo y azul), y se corrige la aberración esférica para la longitud de onda de diseño (mostrada en color verde)[1,2].

Como podemos ver en la figura hay un remanente de color, conocido como el espectro secundario dado por A_s [12-15].

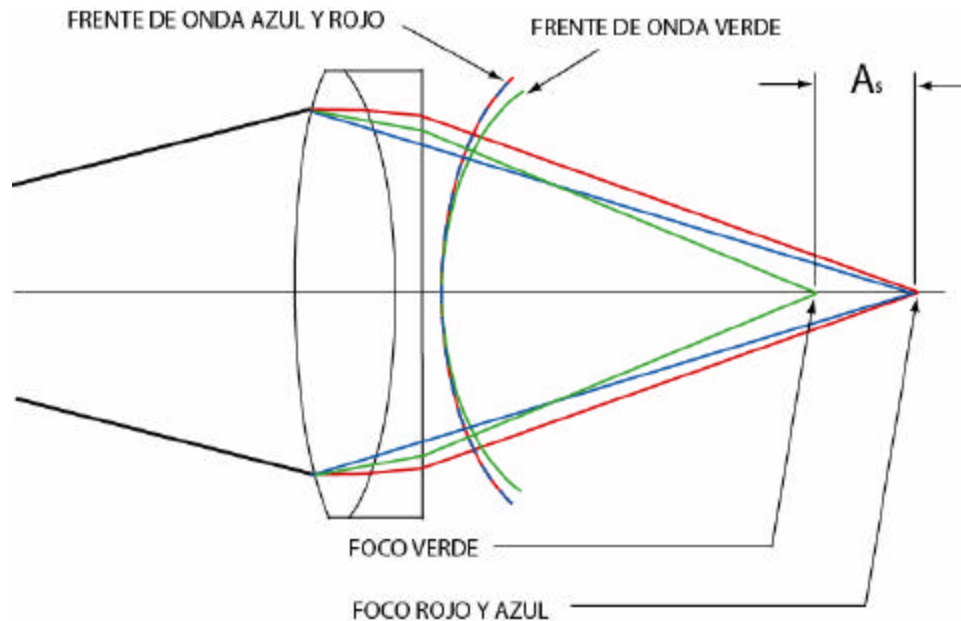


Figura 3.9 Diseño de un doblete acromático real.

3.3.4 Diseño de una lente acromática limitada por difracción.

En la figura 3.10 se muestra el diseño de un doblete acromático real, con una distancia focal de 30mm y una abertura numérica de 0.12. El doblete fue diseñado para una longitud de onda de diseño de 880 nm, esto es, la aberración esférica del doblete es corregida para esta longitud de onda y la aberración cromática longitudinal fue corregida para el rango espectral entre 750 a 1100 nm. En las curvas de la figura 3.10 se muestran las aberraciones transversales para las tres longitudes de onda anteriores. La separación entre las líneas paralelas es igual a 8.8 micrones que es el tamaño del disco de Airy, por lo que el doblete está limitado por difracción. Esto último quiere decir que este doblete se puede considerar como un sistema óptico ideal, esto es, un frente de onda de fase plano se transforma al pasar por la lente en un frente de onda de fase esférico. Y el remanente de color, llamado espectro secundario y dado por A_s [12-15], está dentro del límite de difracción.

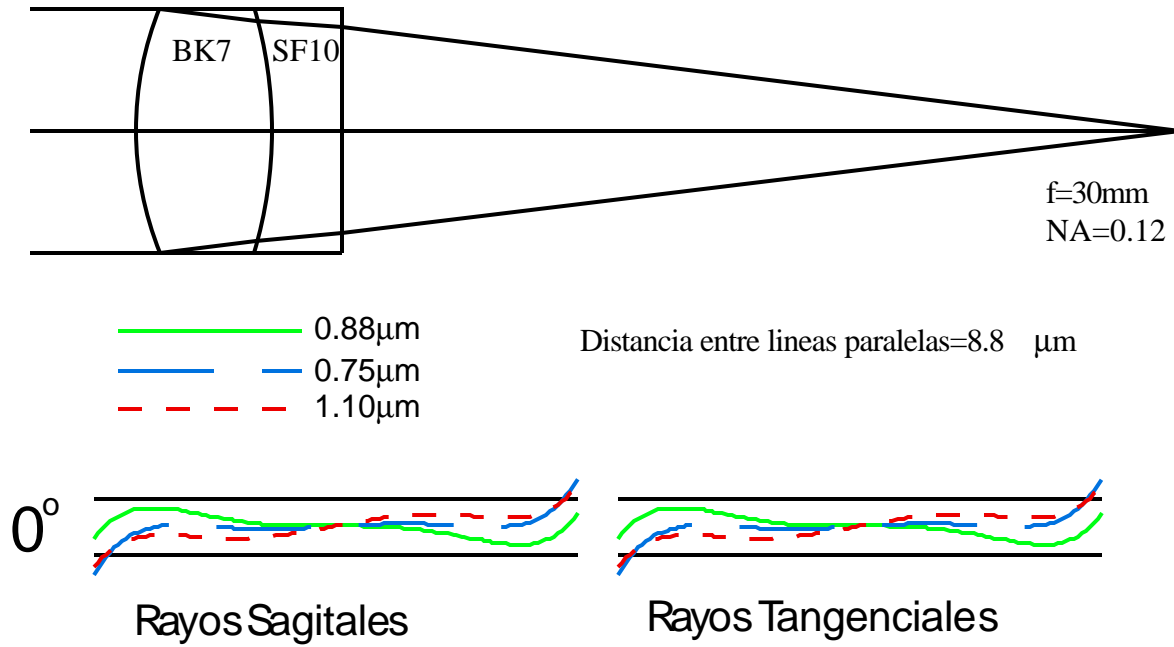


Figura 3.10 Aberraciones transversales de una lente acromática con f=30mm y NA=0.12.

De acuerdo a lo visto en la sección 3.3.2 si se utiliza un doblete acromático ideal se corregirá la distorsión en el frente del pulso generado por la lente simple. Con base en esto, sería de esperarse que la lente presentada en esta sección corrigiera esta distorsión. Pero, ¿La diferencia en el tiempo de propagación, PTD, se corregirá para cualquier pulso cuya longitud de onda de la portadora esté dentro del rango espectral en el que la lente es acromática? El objetivo de las siguientes secciones consiste en contestar esta pregunta.

3.4 Ecuaciones para el diseño de un doblete acromático de lentes delgadas.

Las ecuaciones para diseñar un doblete acromático formado por lentes delgadas están dadas por:

$$K_{(d)1} + K_{(d)2} = K \tag{3.15}$$

$$\frac{K_{(d)1}}{V_{(F-C)1}} + \frac{K_{(d)2}}{V_{(F-C)2}} = 0 \tag{3.16}$$

Donde

$$V_{(F-C)} = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \quad (3.17)$$

es el número de Abbe. Los subíndices d, F y C en los índices de refracción se refieren a las longitudes de onda 589nm, 486.1nm y 656.3nm respectivamente.

Y la potencia de las lentes está dada por:

$$K_i = (n_d - 1)f_i \quad (3.18)$$

Donde $f_i = c_i - c_{i+1}$ es la diferencia entre las curvaturas de las dos superficies esféricas de

la lente, con radios de curvatura $R_i = \frac{1}{c_i}$ y $R_{i+1} = \frac{1}{c_{i+1}}$.

Resolviendo las ecuaciones 3.15 y 3.16 para $K_{(d)1}$ y $K_{(d)2}$ tenemos:

$$K_{(d)1} = -\frac{KV_1}{V_2 - V_1} \quad (3.19)$$

$$K_{(d)2} = \frac{KV_2}{V_2 - V_1} \quad (3.20)$$

Las ecuaciones 3.19 y 3.20 son las ecuaciones para diseñar un doblete acromático en fase.

3.5 Diseño de lentes acromáticas en fase y en grupo.

Para contestar la pregunta: ¿La diferencia en el tiempo de propagación, PTD, se corregirá para cualquier pulso cuya longitud de onda de la portadora esté dentro del rango espectral en el que la lente es acromática?, utilizaremos el método propuesto en 1996 por A. Vaughan de lo que él llamó el diseño de lentes acromáticas en fase y grupo.

3.5.1 Método de A. Vaughan para el diseño de lentes acromáticas en fase y grupo.

En sus artículos Vaughan[3,4] no habla del concepto de diferencia en el tiempo de propagación sino de un efecto de corrimiento del foco cuando se enfocan pulsos en vez de luz continua, esto es, Vaughan menciona que el punto de máxima energía donde se enfocan los pulsos no coincide con el punto focal de fase de la lente, debido a que los pulsos viajan con una velocidad igual a la velocidad de grupo, e introduce el concepto de distancia focal de grupo. En esta sección mostramos que las ideas y conceptos introducidos por Vaughan

son equivalentes a la diferencia en el tiempo de propagación, *PTD*, usada por el resto de los autores que han trabajado en este tema[16-21].

Regresando a la ecuación 3.11, se puede mostrar que esta ecuación también se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\Delta T(h) &= t_f - t_g = \frac{d_1(h)}{v_{f1}} + \frac{d_2(h)}{v_{f2}} - \frac{d_1(h)}{v_{g1}} - \frac{d_2(h)}{v_{g2}} \\ &= \frac{d_{01}}{c}(n_{f1} - n_{g1}) + \frac{d_{02}}{c}(n_{f2} - n_{g2}) - \\ &\quad - \frac{h^2}{2c} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (n_{f1} - 1) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) (n_{f2} - 1) \right] + \\ &\quad + \frac{h^2}{2c} \left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (n_{g1} - 1) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) (n_{g2} - 1) \right]\end{aligned}\quad (3.21)$$

Los dos primeros términos de la ecuación 3.21 son independientes de h . El tercer y cuarto términos de la ecuación 3.21 dependen de h . En el tercer término, la expresión entre los paréntesis cuadrados es la potencia del doblete que es igual al inverso de la distancia focal de un doblete de lentes delgadas. Esto es,

$$\text{Potencia de fase:} \quad \Pi = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (n_{f1} - 1) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) (n_{f2} - 1) \quad (3.22)$$

La expresión entre los paréntesis cuadrados del cuarto término se parece al inverso de la distancia focal de un doblete de lentes delgadas, pero evaluado con el índice de grupo, n_g .

Vaughan definió la potencia de grupo como sigue:

$$\text{Potencia de grupo:} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (n_{g1} - 1) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) (n_{g2} - 1) \quad (3.23)$$

La potencia de grupo no tiene ningún significado físico, pero matemáticamente se vuelve útil para diseñar dobletes acromáticos en fase y grupo y para evaluar la diferencia del tiempo de propagación, *PTD*, dada por:

$$PTD = -\frac{h^2}{2c} (\Pi - \Gamma) \quad (3.24)$$

Reescribiendo la ecuación 3.21 en términos de la potencia de fase y la potencia de grupo tenemos:

$$\Delta T(h) = \frac{d_{01}}{c}(n_{f1} - n_{g1}) + \frac{d_{02}}{c}(n_{f2} - n_{g2}) - \frac{h^2}{2c}(\Pi - \Gamma) \quad (3.25)$$

De tal manera que la condición para que ΔT sea independiente de h es que la potencia de fase del doblete sea igual a su potencia de grupo, esto es,

$$\Pi = \Gamma \quad (3.26)$$

o

$$(n_{f1} - 1)\mathbf{f}_1 + (n_{f2} - 1)\mathbf{f}_2 = (n_{g1} - 1)\mathbf{f}_1 + (n_{g2} - 1)\mathbf{f}_2 \quad (3.27)$$

donde

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \quad (3.28)$$

Vaughan llamó dobletes acromáticos en fase y grupo, a aquellos dobletes que satisfacen la ecuación 3.26. Vaughan definió el número-G como:

$$G = \frac{n_g - 1}{n_g - n_f} \quad (3.29)$$

Por otro lado, la potencia total de un doblete de lentes delgadas está dado por:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma \quad (3.30)$$

Usando la ecuación 3.26, la ecuación 3.30 también se puede escribir como:

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Pi \quad (3.31)$$

De la condición que la potencia de fase debe ser igual a la potencia de grupo, ecuación 3.26, y del número-G, ecuación 3.29 se obtiene

$$\frac{\Gamma_1}{G_1} + \frac{\Gamma_2}{G_2} = 0 \quad (3.32)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3.31 y 3.32 para Γ_1 y Γ_2 obtenemos:

$$\Gamma_1 = -\frac{\Pi G_1}{G_2 - G_1} \quad (3.33)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Pi G_2}{G_2 - G_1} \quad (3.34)$$

Las ecuaciones 3.33 y 3.34 dan la solución al diseño de un doblete acromático en fase y grupo. Un doblete que satisfaga estas ecuaciones tendrá cero *PTD* a la longitud de onda de la portadora del pulso.

3.6 *PTD* para una lente simple y para un doblete acromático normal.

En lo sucesivo usaremos la expresión lente acromática normal para referirnos al diseño de una lente acromática en fase usando las ecuaciones 3.19 y 3.20. En esta sección presentamos los resultados obtenidos para la diferencia del tiempo de propagación, *PTD*, dada por la ecuación 3.24, para una lente simple delgada y dos lentes acromáticas normales delgadas. Para la lente simple se usó el material de Silica fundida. En la figura 3.11 se muestra el *PTD* en femtosegundos como función de la longitud de onda en el intervalo entre 750 y 1100 nm. La distancia focal de la lente simple es de 30mm y la apertura numérica es $NA=0.12$. En la misma figura se muestra el *PTD* en femtosegundos en el mismo intervalo espectral para dos lentes acromáticas que tienen la misma distancia focal y apertura numérica que la lente simple. Las lentes acromáticas normales fueron diseñadas para una longitud de onda $I_d = 880nm$ y la aberración cromática longitudinal fue corregida para 750nm y 1100nm. Los vidrios usados para un doblete acromático son BK7 y SF10 y para el otro doblete son LaKN22 y SFL6. Todos los vidrios son del catálogo de Schott.

Como se puede ver en la figura 3.11, cuando se usan los dobletes acromáticos normales se disminuye la cantidad de *PTD*, sin embargo, esta cantidad no es igual a cero para la longitud de onda de diseño del doblete $I_d = 880nm$, y la longitud de onda para la cual se hace igual a cero la *PTD* depende de los pares de vidrios usados en el doblete.

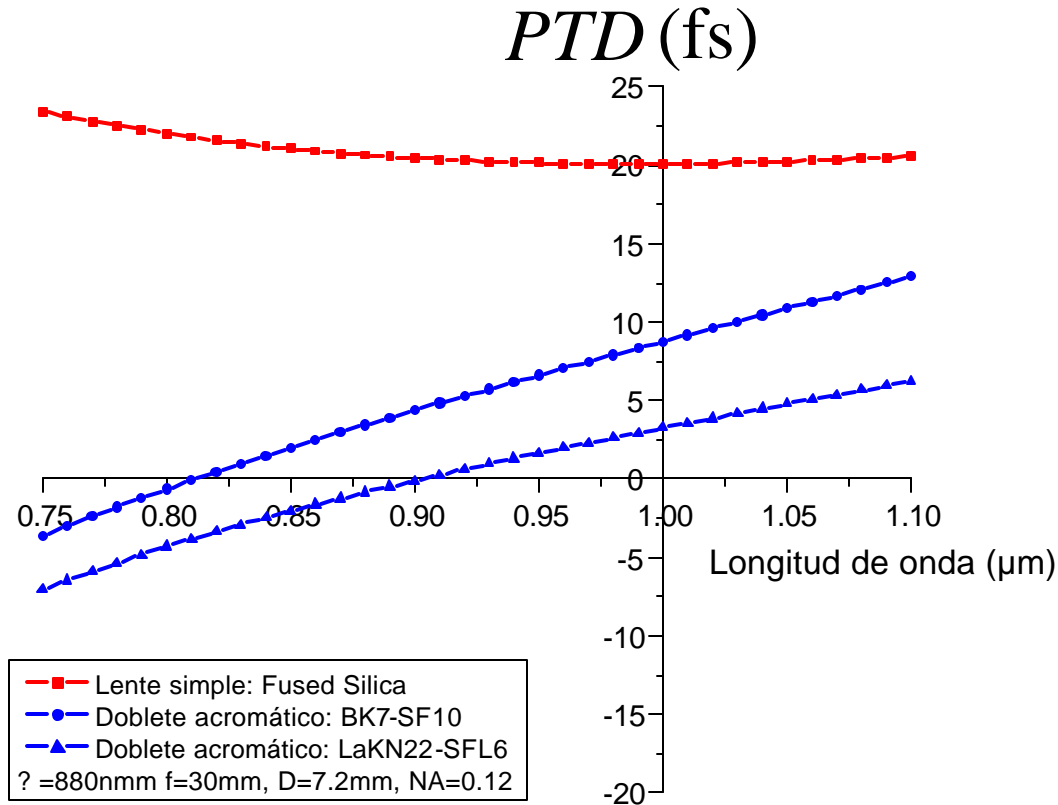


Figura 3.11 *PTD* como función de la longitud de onda, para una lente simple y dos lentes acromáticas normales.

Los parámetros de las lentes son $f = 30\text{mm}$ y $N.A = 0.12$.

Dependiendo de la longitud de onda de la portadora del pulso será la cantidad de *PTD* que contribuirá al ensanchamiento espacial del pulso. Por ejemplo, en el caso de los pulsos generados en el láser del Laboratorio de Pulsos Ultracortos del CCADET que son generados con una longitud de onda de 800nm, entonces el doblete formado por el par de vidrios de BK7 y F2 producirá menor ensanchamiento espacial que el doblete formado con los vidrios LAKN22 y SFL6. La figura 3.11 nos permite contestar la pregunta hecha en la sección 3.4: ¿La diferencia en el tiempo de propagación, *PTD*, se corregirá para cualquier pulso cuya longitud de onda de la portadora esté dentro del rango espectral en el que la lente es acromática? La respuesta es no. El ensanchamiento temporal del pulso se disminuye pero no se corrige en todo el rango espectral. Solo es igual a cero para una longitud de onda que no coincide con la longitud de onda de diseño y la cual varía dependiendo del par de vidrios usados en el doblete.

En la figura 3.12 también se muestra el valor de PTD para una lente simple y un doblete acromático normal, pero para una abertura numérica mayor igual a $N.A.=0.2$ y con una distancia focal igual a $f = 30mm$.

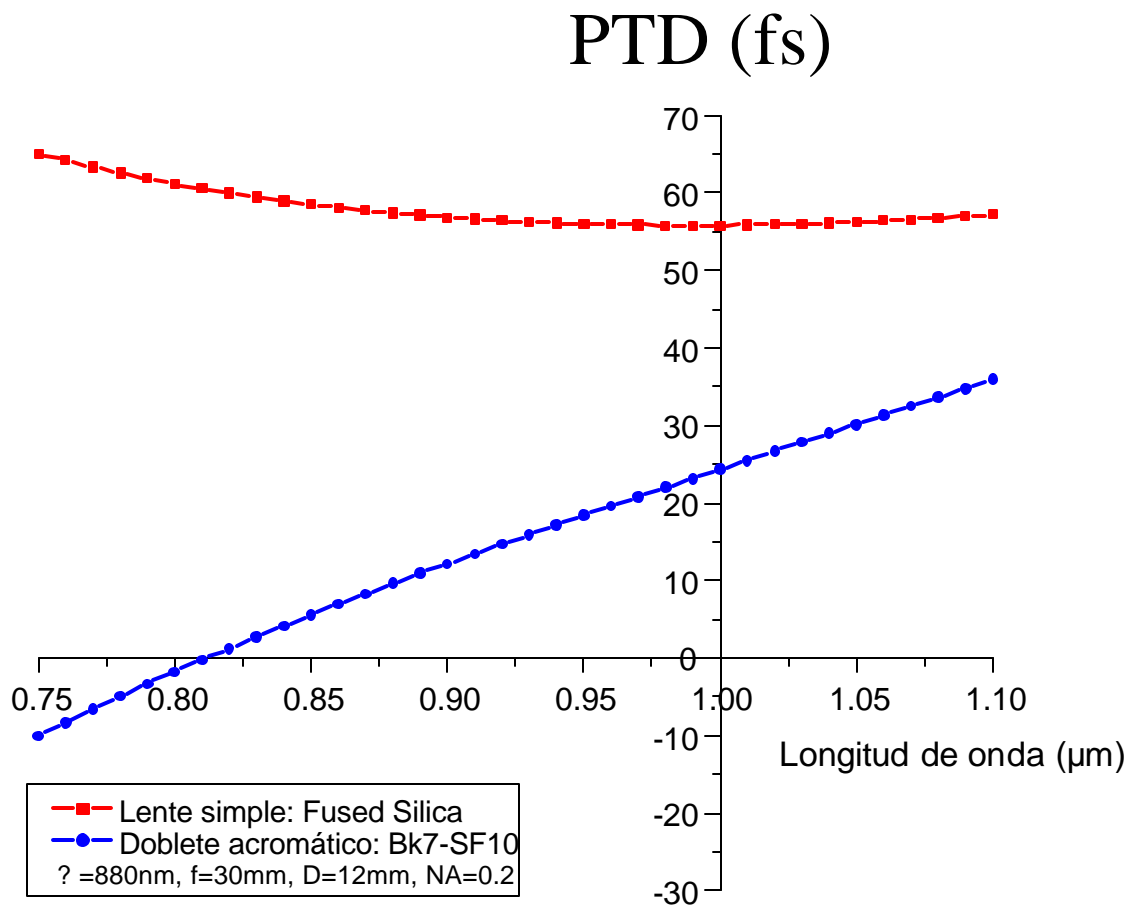


Figura 3.12 PTD como función de la longitud de onda, para una lente simple y una lente acromática normal.

Los parámetros de las lentes son $f = 30mm$ y $N.A = 0.2$.

3.7 *PTD* para un doblete acromático en fase y grupo.

En esta sección presentamos el diseño de dobletes acromáticos delgados en fase y grupo usando las ecuaciones 3.33 y 3.34. En la figura 3.13 se presentan los resultados obtenidos para estos dobletes. Los resultados de los dobletes acromáticos en fase y grupo se presentan junto con los resultados de los dobletes presentados en la figura 3.11, con el objeto de poder compararlos.

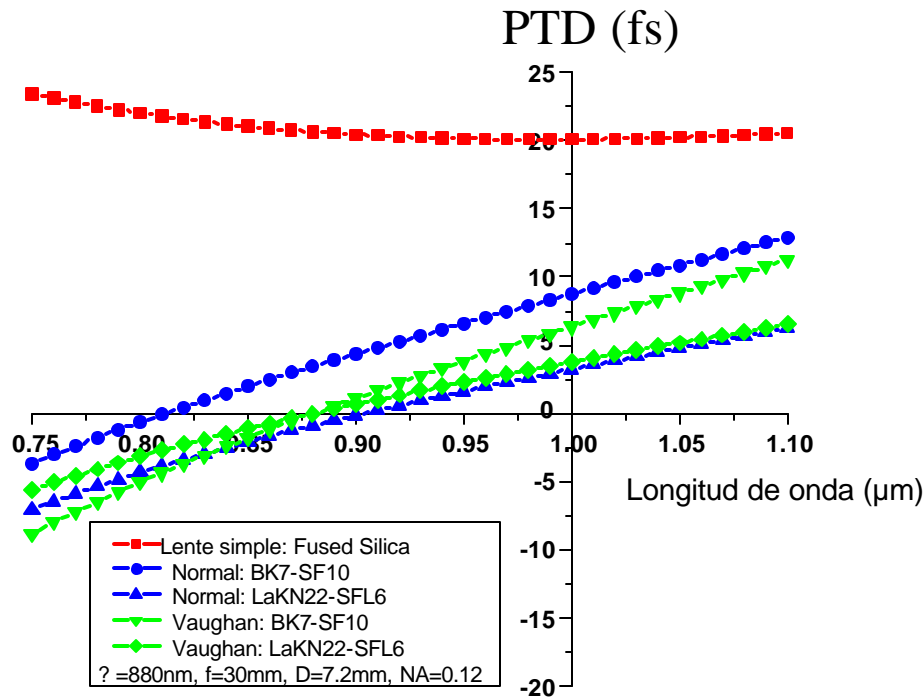


Figura 3.13 *PTD* para una lente simple, dos dobletes acromáticos normales y dos dobletes acromáticos en fase y grupo (Vaughan)

Como podemos observar los dobletes acromáticos en fase y grupo dan una *PTD* igual a cero para la longitud de onda de diseño igual a $\lambda_d = 880\text{nm}$ independientemente de los vidrios usados en el diseño. Esto muestra que la forma de diseñar lentes acromáticas para enfocar pulsos de luz debe ser diferente a la forma de diseñar lentes acromáticas para enfocar luz continua. Esta nueva forma de diseñar lentes para pulsos de luz es un nuevo campo que aún no ha sido explotado y que se deja como trabajo a futuro.

3.8 Dobletes apocromáticos con lentes delgadas.

Generalmente en los laboratorios de óptica cuando se realizan experimentos se utiliza óptica que puede comprarse de catálogo. Prácticamente nunca se diseña y construye óptica para el arreglo en cuestión. En esta sección mostraremos que la variación en la diferencia del tiempo de propagación del pulso, que causa el ensanchamiento espacial de éste en la región focal de la lente, se puede disminuir si se usa óptica apocromática. El término apocromático se usa para describir sistemas ópticos que cumplen con la condición de que el foco del sistema coincide para tres longitudes de onda, de tal manera que el espectro secundario, A_s , es igual a cero. Usando el algoritmo desarrollado para evaluar el espectro secundario de dobletes acromáticos[12-14] se obtuvieron los pares de vidrios FK51-KZFSN4 y FK52-KZFSN4 que dan un espectro secundario prácticamente igual a cero. Los resultados se muestran en la figura 3.14 para dobletes acromáticos normales, ecuaciones 3.19 y 3.20, y para dobletes acromáticos en fase y grupo, ecuaciones 3.33 y 3.34.

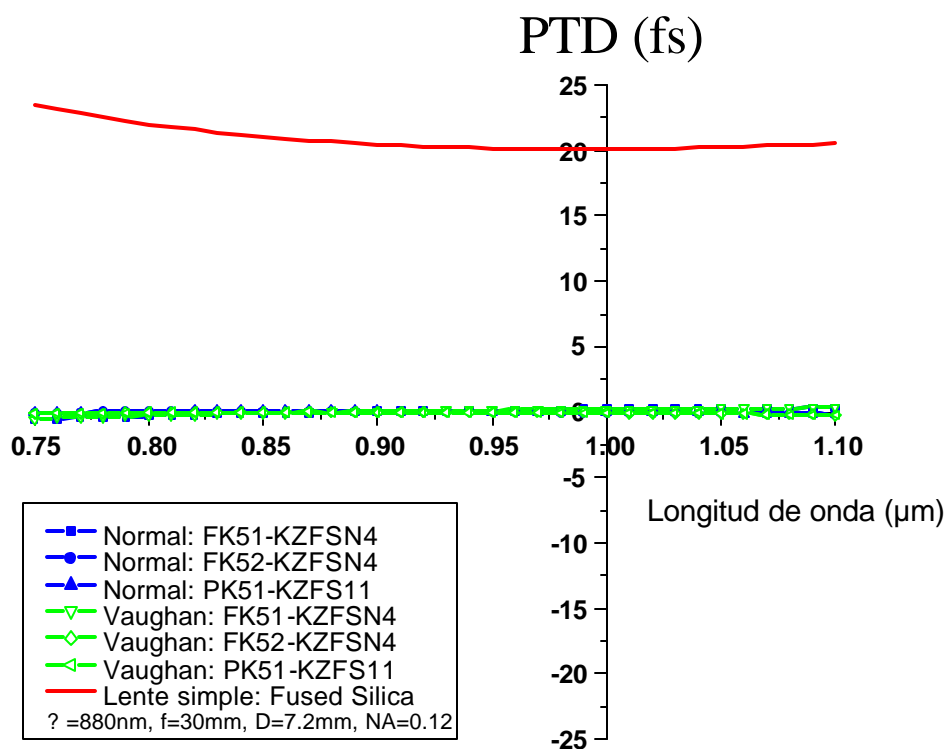


Figura 3.14 PTD para dobletes apocromáticos delgados.

En la figura 3.15 se muestran los resultados de la figura 3.14 pero en el intervalo de $(-1.0, 1.0)$ micrones en el eje de las abscisas. En esta figura podemos verificar que en los dobletes apocromáticos normales varía la longitud de onda para la cual el PTD es igual a cero. Mientras que en los dobletes apocromáticos en fase y en grupo, el PTD es igual a cero para la longitud de onda de diseño independientemente de los vidrios usados.

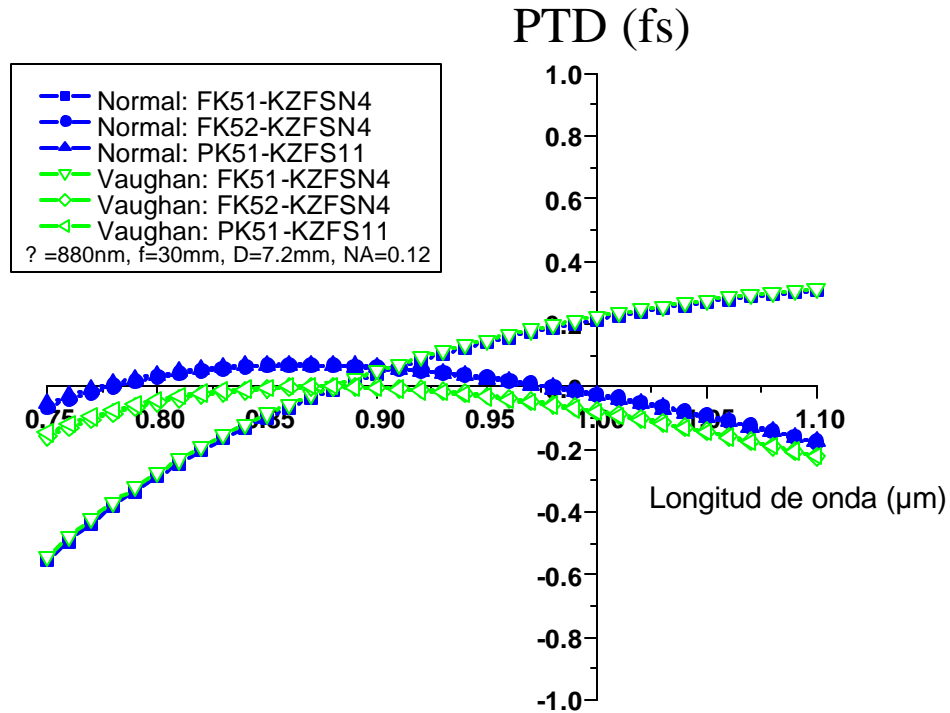


Figura 3.15 PTD para los dobletes apocromáticos delgados de la figura 3.14.

3.9 Dobletes acromáticos y apocromáticos reales.

El análisis presentado en las secciones 3.4 y 3.6, es un análisis paraxial de dobletes acromáticos y apocromáticos delgados. En esta sección diseñaremos esos mismos dobletes pero poniendo espesores a las lentes y haciendo trazo finito de rayos para evaluar la calidad de la imagen. En la tabla 3.2 se muestran los espesores y las curvaturas de las lentes utilizadas en cada doblete. Usando un programa optico profesional de diseño óptico, Eikonol[22], se corrigieron la aberración esférica y la aberración cromática longitudinal de estos dobletes. Los dobletes optimizados son los llamamos reales, pues son dobletes que

estarían listos para ser fabricados. Usando trazo finito de rayos se calculó el *PTD* como función de la longitud de onda de la luz. Los resultados se muestran en la figura 3.16. Comparando estos resultados con los resultados obtenidos en el análisis paraxial de dobletes delgados se observa que éstos últimos dan una buena estimación de la diferencia en el tiempo de propagación del pulso, *PTD*.

Tabla 3.1 Espesores y curvaturas de las lentes usadas en los dobletes reales.

Doblete	c_1 (mm^{-1})	c_2 (mm^{-1})	c_3 (mm^{-1})	d_{01} (mm)	d_{02} (mm)
LaKN22-SFL6	0.0626306	-0.0599239	-0.0010850	4.0	2.0
BK7-SF10	0.0925413	-0.0712078	0.0024311	4.0	2.0
FK51-KZFSN4	0.0741577	-0.0776118	-0.0115700	4.0	2.0
PK51-KZFS11	0.0682039	-0.0763667	-0.0087785	4.0	2.0

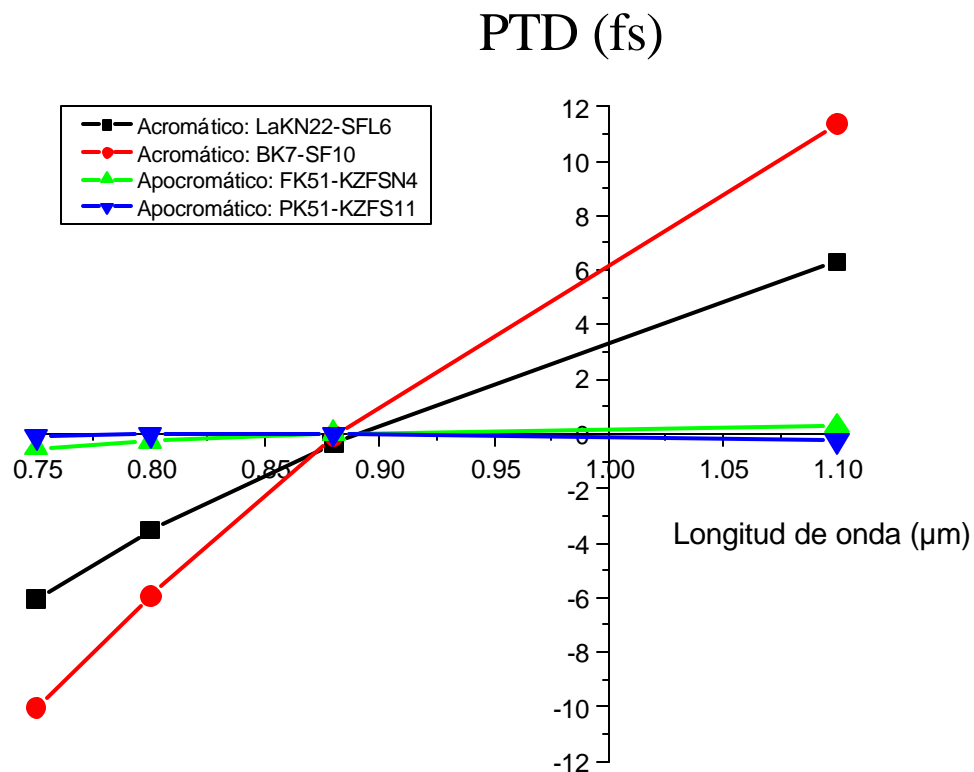


Figura 3.16 PTD para dobletes acromáticos y apocromáticos con espesores finitos.

Conclusiones

En la presente tesis se estudió y analizó la propagación de pulsos ultracortos al pasar por lentes refractivas formadas con vidrios ópticos que son materiales isotrópicos, homogéneos y transparentes entre 0.365 a 2.3 micrones. En el capítulo 1 se derivaron las ecuaciones necesarias para calcular el índice de grupo y la velocidad de grupo y mostramos que la expresión que siempre se utiliza para calcular la velocidad de grupo a través de la derivada de la frecuencia angular con respecto al número de onda de la luz, $v_g = d\omega/dk$, es una aproximación de la expresión finita de la velocidad de grupo de la superposición de dos ondas. También mostramos que la velocidad de grupo calculada a través de la derivada, i.e, $v_g = d\omega/dk$, solo depende de la frecuencia de la onda portadora del pulso.

En el capítulo 2 se estudió el efecto que tiene la dispersión de la velocidad de grupo, GVD, en el pulso conforme éste se propaga en el material. Se mostró que la dispersión de la velocidad de grupo produce un ensanchamiento temporal de los pulsos al propagarse por el material. Este ensanchamiento temporal depende de la duración del pulso, de la dispersión del material y de la distancia que se propaga el pulso en el material.

Los pulsos que se estudiaron en el capítulo 2 fueron: 1) pulsos generados con modos de igual amplitud y 2) con modos modulados por una gaussiana. El ancho temporal de los pulsos se midió cuando se propagan en el vacío y en el material dispersivo. Se mostró que el criterio para medir el ancho temporal de pulsos generados con modos de igual amplitud, (cuando la intensidad máxima cae a cero), solo se puede usar cuando se propagan en el vacío, pero no se puede aplicar cuando se propagan en el material. En el caso de pulsos gaussianos no se tiene este problema, el criterio, (cuando la intensidad máxima cae a la mitad), para medir pulsos gaussianos se puede usar tanto en el vacío como en el medio.

Para los pulsos gaussianos se realizó un análisis teórico para obtener una expresión del ancho temporal del pulso en función de la duración inicial del pulso, de la dispersión del material y de la distancia que se propaga el pulso en el material. Para calcular analíticamente el campo eléctrico del pulso se expandió el número de onda en serie de Taylor alrededor de la frecuencia de la onda portadora y se cortó la serie hasta el tercer término. La velocidad de grupo aparece en el segundo término y la dispersión de la velocidad de grupo aparece en el tercer término de esta expansión. Una vez calculado el campo eléctrico se calculó la intensidad del pulso y posteriormente se calculó la duración del pulso. En este capítulo se presentaron tablas para pulsos ultracortos de 100fs y 50fs que se propagan en diferentes vidrios ópticos y que se propagan diferentes distancias dentro del material. Para verificar estos resultados se realizó un modelo computacional que genera los pulsos gaussianos, en el que no se hace ninguna aproximación al número de onda. De las gráficas de los pulsos gaussianos obtenidos con el modelo computacional se midió directamente el ancho temporal de los pulsos y se compararon los resultados con el cálculo teórico, con lo que se verificó que los cálculos teóricos (usando las ecuaciones del apéndice B) son correctos.

En el capítulo 3 se estudió la diferencia en el tiempo de propagación, *PTD*. La diferencia en el tiempo de propagación ocasiona que pulsos incidentes en una lente refractiva a diferentes alturas del eje óptico lleguen en diferentes tiempos al foco de ésta ocasionando de esta manera el ensanchamiento espacial del pulso. En este capítulo también se mostró que la diferencia en el tiempo de propagación es ocasionada por la cromaticidad de la lente y que por lo tanto el uso de óptica acromática reduce o corrige este ensanchamiento espacial del pulso. Para el análisis de la *PTD* se introdujo en este capítulo el método de A. Vaughan que fue propuesto por él en 1996 para diseñar dobletes acromáticos en fase y grupo. Vaughan introduce en sus artículos nuevos conceptos como la distancia focal de grupo y el diseño de dobletes acromáticos en fase y grupo. En este capítulo mostramos que estos conceptos llevan al diseño de lentes que corrigen la diferencia en el tiempo de propagación, i.e., $PTD = 0$, para la longitud de onda de la portadora del pulso, y estas son las lentes que Vaughan llamó lentes acromáticas en fase y grupo. Finalmente se usó el método de Vaughan para analizar la *PTD* producida por lentes simples, lentes acromáticas normales,

Conclusiones

lentes acromáticas en fase y grupo y lentes apocromáticas, mostrando que estas últimas dan la mejor corrección de PTD en todo el rango espectral en donde son apocromáticas.

Referencias

- [1] Hecht, E. y Zajac A., *Optica*, “Capítulo 3. Teoría electromagnética, fotones y luz”, pag. 41, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
- [2] Jenkins, F.A. y White, H.E., *Fundamentals of Optics*, “Chapter 23. Dispersion”, pag. 462, McGraw-Hill Publishing company, 1951.
- [3] Vaughan, A.H., Lens design using group indices of refraction, *Journal of Modern Optics*, 1996, Vol. 43, No. 8, 1683-1700.
- [4] Vaughan, A.H. Application of group indices of refraction to achromatic lens design, *SPIE*, Vol 2774, pag. 728, 1996.
- [5] Sommerfeld, A, *Optics*, “Chapter III. Theory of dispersion”, pag. 88, Academic Press, New York, 1949.
- [6] Optical Glass Catalog, www.us.schott.com/optics_devices (mayo 2007)
- [7] Ohara Glass Catalog, www.oharacorp.com/PDF/Ohara_Glass_Catalog.pdf (2007).
- [8] Brillouin, L. Wave propagation and group velocity, “Chapter I. Introduction”, pag. 1, Academic Press, New York, 1960.
- [9] Yariv, A. y Yeh P. *Photonics*, “Chapter 7. Chromatic dispersion and polarization mode dispersion in fibers”, pag. 313, Oxford University Press, 6ª. edition, 2007.
- [10] Yariv, A., *Optical Electronics*, “Chapter 6. Theory of laser oscillations”, pag. 165, Holt Rinehart and Winston, New York, 3er. Edition, 1985.
- [11] J.C. Diels and W. Rudolph, *Ultrashort laser pulse phenomena*, “Chapter 2. Femtosecond optics”, pag. 82, Second edition (Optics and Photonics series), Elsevier, Inc, 2006.
- [12] J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, “Differential equation of the normal glass dispersion and the evaluation of secondary spectrum”, *Applied Optics.*, **38**, (11), 2028-2039, (1999).
- [13] J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, “Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. I: Tolerance conditions for secondary spectrum, spherochromatism and fifth-order spherical aberration”, *Applied Optics*, **40** (31), 5663-5676, (2001).

- [14] M. Rosete-Aguilar and J. L. Rayces, "Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. II. Application of the method for selecting pairs of glasses for aplanatic achromatic doublets", *Applied Optics*, **40** (31), 5677-5692, (2001).
- [15] Juan L. Rayces, Martha Rosete-Aguilar, "Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum", *Current Developments in Lens Design and Optical Systems Engineering*, R.E. Fischer, R.B. Johnson, W.J. Smith, W.H. Swantner, editors. 2-4 Agosto, San Diego, USA, Proceedings of **SPIE** 4093, 36-46, (2000).
- [16] Z. Bor, *Journal of Modern Optics*, 35, 1907-1918, 1988.
- [17] Z. Bor, *Optics Lett.*, Vol.14, No.3, 1989.
- [18] M. Kempe, et.al *J. Opt. Soc. Am.*, B9:1158-1165, 1992.
- [19] M. Kempe and W. Rudolph, *Phys. Rev. A*48: 4721-4729, 1993.
- [20] M. Kempe and W. Rudolph, *Opt. Lett.*, 18:137-139, 1993.
- [21] U. Fuchs, et.al, *Opt. Express*, 13:3852-3861, 2005.
- [22] J. L. Rayces and L. Lebich, "RAY CODE: An aberration coefficient oriented lens design and optimization program", *Proc. SPIE* 766, 230-245, (1987).

Apéndice A. Solución de la integral dada en la ecuación 2.23.

Se muestra la solución de la integral del campo eléctrico dada en la ecuación 2.23 del capítulo 2, así como el cálculo de la intensidad del campo dada por la ecuación 2.25 y el tiempo que dura el pulso ecuación 2.28.

El campo del pulso gaussiano esta dado por:

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{1}{4pa}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\Omega^2 \left(\frac{1}{4a} + iaz \right) - i \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \Omega \right] \right\} d\Omega$$

Donde la integral es de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(imx - bx^2) dx = \sqrt{\frac{p}{b}} \exp\left(\frac{-m^2}{4b}\right)$$

Entonces, se toma

$$m = \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \text{ y } b = \frac{1}{4a} + iaz$$

La ecuación del campo queda de la siguiente forma

$$E(z, t) = \sqrt{\frac{1}{4pa}} \sqrt{\frac{p}{\frac{1}{4a} + iaz}} \exp \left\{ \frac{- \left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{4 \left[\frac{1}{4a} + iaz \right]} \right\} \quad (\text{A.1})$$

De esta última expresión se puede simplificar cada uno de sus términos como

$$\sqrt{\frac{p}{4pa \left(\frac{1}{4a} + iaz \right)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + i4aaz}}$$

Al sustituir de nuevo en la ecuación A.1 se tiene que

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4iaaz}} \exp \left\{ \frac{-\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 4iaz} \right\}$$

El argumento de la exponencial se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{-\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 4iaz} &= \frac{-\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 4iaz} \left(\frac{\frac{1}{a} - 4iaz}{\frac{1}{a} - 4iaz} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{a} - 4iaz\right) \left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} = \frac{-\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} + i \frac{4az \left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} \end{aligned}$$

Al sustituir en la exponencial, el campo queda como

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4iaaz}} \exp \left\{ \frac{\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2a} \right\} \exp \left\{ i \frac{4az \left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Para calcular la intensidad, el campo dado por la expresión A.2 se multiplica por su complejo conjugado, por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} I(z, t) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+4iaaz}} \exp \left\{ \frac{\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2a} \right\} \exp \left\{ i \frac{4az \left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} \right\} \right) \times \\ &\frac{1}{\sqrt{1-4iaaz}} \exp \left\{ \frac{\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2a} \right\} \exp \left\{ -i \frac{4az \left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a^2} + 16a^2z^2} \right\} \end{aligned}$$

Simplificando

$$I(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1+16a^2z^2}} \exp \left\{ -\frac{2\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Para obtener la duración del pulso, se puede tomar la separación entre dos tiempos cuando la intensidad disminuye a la mitad de su valor máximo[9], es decir,

$$\exp \left\{ -\frac{2\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Entonces,

$$\ln \exp \left\{ -\frac{2\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2} \right\} = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln(2)$$

Quedando así,

$$\frac{2\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\frac{1}{a} + 16a^2z^2} = \ln 2$$

Despejando el tiempo

$$\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2 = \frac{\ln 2}{2} \left[\frac{1}{a} + 16a^2z^2 \right]$$

Así,

$$\left(t - \frac{z}{v_g}\right) = \sqrt{\frac{\ln 2}{2} \left[\frac{1}{a} + 16a^2z^2 \right]}$$

$$\Delta t = \left(t - \frac{z}{v_g} \right) = \sqrt{\frac{\ln 2}{2} \left[\frac{1}{a} + 16a^2 z^2 a \right]}$$

Δt es la diferencia de tiempo entre el máximo de la intensidad y cuando ésta cae a $1/2$ de su valor máximo. El ancho temporal del pulso se define como dos veces Δt , esto es,

$$\begin{aligned} t &= 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{2} \left[\frac{1}{a} + 16a^2 z^2 a \right]} \\ t &= \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{\left[\frac{1}{a} + 16a^2 z^2 a \right]} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Pero la ecuación A.4 puede ser expresada como

$$t = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{a}} \sqrt{[1 + 16a^2 z^2 a^2]} = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{a}} \sqrt{[1 + (4az a)^2]} \quad (\text{A.5})$$

El ancho inicial del pulso en $z=0$ es

$$t_0 = \left(\frac{2 \ln 2}{a} \right)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Entonces de A.6 se obtiene una expresión para a

$$a = \frac{2 \ln 2}{t_0^2}$$

Así la ecuación A.5 queda en términos del ancho inicial del pulso t_0 , de la distancia ($z = L$) que se propaga el pulso en el material y del parámetro a .

$$t(L) = t_0 \sqrt{1 + \left(\frac{8aL \ln 2}{t_0^2} \right)^2} \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B. Cálculo del parámetro a .

De la ecuación 2.19 el parámetro a está dado por:

$$a \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} = -\frac{1}{2v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega}$$

A continuación presentamos las derivaciones para calcular la primera derivada de la velocidad de grupo con respecto a la frecuencia ω . La primera relación es encontrar la velocidad de grupo en función del índice de refracción y la longitud de onda.

Partiendo de la relación

$$v_g = v - \omega \frac{dv}{d\omega} \quad (\text{B.1})$$

Y de la definición del índice de refracción de fase $n = \frac{c}{v}$ se tiene que

$$v = \frac{c}{n} \quad (\text{B.2})$$

entonces,

$$\frac{dv}{d\omega} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\omega} = \frac{dv}{dn} \frac{dn}{d\omega} \quad (\text{B.3})$$

Así,

$$\frac{dv}{dn} = -\frac{c}{n^2} \quad (\text{B.4})$$

Sustituyendo (B.3) en (B.2)

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{dn}{d\omega} \frac{c}{n^2} \quad (\text{B.5})$$

Se sustituyen las expresiones (B.2) y (B.5) en (B.1)

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{c\omega}{n^2} \frac{dn}{d\omega} \quad (\text{B.6})$$

Donde ω es la longitud de onda en el medio.

La derivada de la velocidad de grupo es

$$\frac{dv_g}{d\omega} \quad (\text{B.7})$$

Por regla de la cadena, la ecuación (B.7) se puede escribir como

$$\frac{dv_g}{d\omega} = \frac{dv_g}{dI} \frac{dI}{dk} \frac{dk}{d\omega} \quad (\text{B.8})$$

El primer término se calcula usando la ecuación (B.6)

$$\frac{dv_g}{dI} = \frac{d}{dI} \left(\frac{c}{n} + \frac{cI}{n^2} \frac{dn}{dI} \right) \quad (\text{B.9})$$

Así,

$$\frac{dv_g}{dI} = \frac{cI}{n^2} \left[\frac{d^2n}{dI^2} - \frac{2}{n} \left(\frac{dn}{dI} \right)^2 \right] \quad (\text{B.10})$$

El segundo término de la expresión (B.8) se calcula a partir de $k = \frac{2p}{I}$, es decir,

$$I = \frac{2p}{k} \quad (\text{B.11})$$

y se deriva con respecto a k

$$\frac{dI}{dk} = -\frac{2p}{k^2} = -\frac{2p}{\left(\frac{2p}{I} \right)^2} \quad (\text{B.12})$$

Así,

$$\frac{dI}{dk} = -\frac{I^2}{2p} \quad (\text{B.13})$$

El tercer factor de se obtiene del hecho que

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v_g} \quad (\text{B.14})$$

Sustituimos (B.10), (B.13) y (B.14) en (B.8) se tiene que

$$\frac{dv_g}{d\omega} = \frac{I^3 c}{2pn^2 v_g} \left[\frac{2}{n} \left(\frac{dn}{dI} \right)^2 - \frac{d^2 n}{dI^2} \right] \quad (\text{B.15})$$

Finalmente el parámetro a esta dado por:

$$a = -\frac{1}{2v_g^3} \frac{I^3 c}{2pn^2} \left[\frac{2}{n} \left(\frac{dn}{dI} \right)^2 - \frac{d^2 n}{dI^2} \right] \quad (\text{B.16})$$

Pero la ecuación (B.16) esta en términos del índice de refracción y la longitud de onda en el medio, y solo se conoce la variación del índice de refracción con respecto a la longitud de onda en el vacío (I_0), por lo que se tiene dejar en términos de I_0 .

Entonces, se tiene que el índice de refracción de fase se puede escribir como

$$n = \frac{c}{v} = \frac{I_0 n_0}{I n_0} = \frac{I_0}{I} \quad (\text{B.17})$$

Así,

$$I_0 = nI \quad \text{y} \quad I = \frac{I_0}{n} \quad (\text{B.18})$$

La primera derivada es:

$$\frac{dn}{dI} = \frac{dn}{dI_0} \frac{dI_0}{dI} \quad (\text{B.19})$$

Pero,

$$\frac{dI_0}{dI} = n + I \frac{dn}{dI} \quad (\text{B.20})$$

Por lo tanto,

$$\frac{dn}{dI} = \frac{dn}{dI_0} \frac{dI_0}{dI} = \frac{dn}{dI_0} \left[n + I \frac{dn}{dI} \right] = n \frac{dn}{dI_0} + I \frac{dn}{dI_0} \frac{dn}{dI} \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{dn}{dI} = \frac{n \frac{dn}{dI_0}}{\left(1 - I \frac{dn}{dI_0}\right)} = \frac{n \frac{dn}{dI_0}}{\left(1 - \frac{I_0}{n} \frac{dn}{dI_0}\right)} \quad (\text{B.22})$$

El cálculo de la segunda derivada es

$$\begin{aligned} \frac{d^2n}{dI^2} &= \frac{d}{dI} \frac{dn}{dI} = \frac{d}{dI_0} \frac{dI_0}{dI} \frac{dn}{dI} \\ &= \frac{d}{dI_0} \left[n + I \frac{d}{dI} \right] \left[\frac{dn}{dI_0} \right] \left[n + I \frac{d}{dI} \right] \\ &= \frac{d}{dI_0} \left\{ \left[\frac{dn}{dI_0} \right] \left[n + I \frac{dn}{dI} \right]^2 \right\} \\ &= \left[\frac{dn}{dI_0} \right] \left\{ 2 \left[n + I \frac{dn}{dI} \right] \frac{d}{dI_0} \left[n + I \frac{dn}{dI} \right] \right\} + \left[n + I \frac{dn}{dI} \right]^2 \left[\frac{d^2n}{dI_0^2} \right] \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dI_0} \left[n + I \frac{d}{dI} \right] &= \frac{dn}{dI_0} + I \frac{d}{dI_0} \frac{dn}{dI} + \frac{dn}{dI} \frac{dI}{dI_0} \\ &= \frac{dn}{dI_0} + I \frac{d}{dI_0} \frac{dn}{dI} + \frac{dn}{dI_0} \\ &= 2 \frac{dn}{dI_0} + I \frac{d}{dI_0} \frac{dn}{dI} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Y

$$\frac{d}{dI_0} \frac{dn}{dI} = \frac{d}{dI_0} \left[\frac{n \frac{dn}{dI_0}}{1 - \frac{I_0}{n} \frac{dn}{dI_0}} \right]$$

Desarrollando la derivada se tiene

$$\frac{\left(1 - \frac{I_0}{n} \frac{dn}{dI_0}\right) \left\{ n \frac{d^2n}{dI_0^2} + \left(\frac{dn}{dI_0}\right)^2 \right\} - \left(n \frac{dn}{dI_0}\right) \left\{ -\left(\frac{I_0}{n}\right) \left(\frac{d^2n}{dI_0^2}\right) - \left(\frac{dn}{dI_0}\right) \frac{\left(n - I_0 \frac{dn}{dI_0}\right)}{n^2} \right\}}{\left(1 - \frac{I_0}{n} \frac{dn}{dI_0}\right)^2}$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{l}_0} \frac{dn}{d\mathbf{l}} &= \\ &= \frac{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right) \left\{ n \frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2} + \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2 \right\} - \left(n \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right) \left[\left(\frac{\mathbf{l}_0}{n}\right) \left(\frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2}\right) - \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right) \frac{\left(n - \mathbf{l}_0 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)}{n^2} \right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2} \\ &= \frac{n \frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2} + 2 \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2 - 2 \frac{\mathbf{l}_0}{n} \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^3}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (B.23) se puede escribir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{l}_0} \left[n + \mathbf{l} \frac{dn}{d\mathbf{l}} \right] &= 2 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0} + \mathbf{l} \frac{d}{d\mathbf{l}_0} \frac{dn}{d\mathbf{l}} \\ &= 2 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0} + \frac{\mathbf{l}_0}{n} \left[\frac{n \frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2} + 2 \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2 - 2 \frac{\mathbf{l}_0}{n} \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^3}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2} \right] \end{aligned}$$

Así la segunda derivada queda

$$\begin{aligned} \frac{d^2 n}{d\mathbf{l}^2} &= \left[\frac{dn}{d\mathbf{l}_0} \right] \left\{ 2 \left(n + \mathbf{l}_0 \frac{\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)} \right) \left(2 \frac{dn}{d\mathbf{l}_0} + \frac{\mathbf{l}_0}{n} \left[\frac{n \frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2} + 2 \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2 - 2 \frac{\mathbf{l}_0}{n} \left(\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^3}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)^2} \right] \right) \right\} \\ &+ \left(n + \mathbf{l}_0 \frac{\frac{dn}{d\mathbf{l}_0}}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}_0}{n} \frac{dn}{d\mathbf{l}_0}\right)} \right)^2 \left[\frac{d^2 n}{d\mathbf{l}_0^2} \right] \end{aligned}$$

Ejemplos numéricos.

En la siguiente tabla se muestran ejemplos numéricos para algunas ecuaciones derivadas en este apéndice y para el parámetro a .

$l_0 (nm)$	Vidrio			
	BK7	SF10	SF14	Fused Silica
800				
$\frac{dn}{dl_0} (mm^{-1})$	-0.0198418	-0.0496977	-0.0547449	-0.0172802
$\frac{d^2n}{dl_0^2} (mm^{-2})$	0.492482	0.175873	0.196895	0.0399186
$v_g (mm / s)$	1.96509×10^{14}	1.71331×10^{14}	1.67904×10^{14}	2.04483×10^{14}
$\frac{dn}{dl} (mm^{-1})$	-0.0296648	-0.0831135	-0.0930783	-0.0248765
$\frac{d^2n}{dl^2} (mm^{-2})$	0.110122	0.485702	0.561153	0.0828728
$\frac{dv_g}{dw} (mm)$	-0.0017222	-0.00464423	-0.0049895	-0.00151259
$a (s^2 / mm)$	2.2992×10^{-32}	7.91064×10^{-32}	8.84922×10^{-32}	1.80873×10^{-32}

En los ejemplos anteriores vemos que la dispersión de la velocidad de grupo es positiva en todos los casos, esto es,

$$GVD = \frac{d^2k}{d\omega^2} = 2a > 0.$$

Una dispersión de la velocidad de grupo positiva produce un ensanchamiento temporal del pulso. Una dispersión de la velocidad de grupo negativa produce una compresión temporal del pulso.