



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

LOS OCHO MODELOS GEOMÉTRICOS  
EN DIMENSIÓN TRES

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

**MAESTRA EN CIENCIAS**

PRESENTA

**YADIRA LIZETH BARRETO FELIPE**

DIRECTOR DE TESIS: DR. S. ALBERTO VERJOVSKY SOLÁ

MÉXICO, D. F.

DICIEMBRE, 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres,  
a la negra y  
a mi peque.*

# Agradecimientos.

Todos nacemos con una caja de cerillos en nuestro interior.  
Tenemos que descubrir cuáles son sus detonadores  
para poder vivir, pues la combustión  
que se produce al encenderse uno de ellos,  
es lo que nutre de energía el alma.

*Dr. Brown a Tita.*

**Laura Esquivel**

*Como agua para chocolate.*

Hacer una lista de todas las personas a las que quiero darles las **gracias** por ayudarme de una u otra manera a que hoy pueda decir: *mi tesis está terminada* son bastantes y de seguro se me escapará mencionar alguna. Así que de antemano, si es el caso, les pido una disculpa aunque pueden estar seguros que todos comparten un lugar en mi corazón.

A Dios por haberme puesto en este mundo en el momento adecuado y en el lugar preciso, rodeado de las personas y de la teoría matemática necesarias que me permitieron terminar con éxito mi tesis.

A mis papás y a la negra (mi hermanita), porque sin su cariño, respeto y apoyo en todos los sentidos, yo no sería quien soy ni estaría aquí con una tesis de maestría en mis manos. Y a toda, toda mi familia, a la familia de Germán, a Fray y a todos los vecinos de mi casa por el cariño y todas las palabras de aliento que siempre me brindaron.

A Álvaro Álvarez por haber despertado mi interés para continuar estudiando después de terminar la licenciatura. Por su apoyo, tanto académico como emocional y sobre todo, por haberme recomendado con Alberto Verjovsky para que me aceptara como su estudiante, lo cual fue una de las mejores cosas que me han pasado.

A mi peque (porque siempre serás **mi peque**) por haber sido el primero en introducirme en este mundo maravilloso de la geometría al regalarme el libro: “*Introducción a las geometrías no euclidianas*” y haberme brindado todo su apoyo, cariño y mucho más desde el día en que llegué. Por haberme permitido compartirle mi alegría al haber llegado a la meta, mi meta: terminar mi tesis. Por haberme acompañado en este largo proceso de crecimiento y maduración personal y matemática, además de haberse tomado el tiempo de escucharme siempre que yo tenía algo que decir, de explicarme algunas dudas, de discutir matemáticas conmigo y de haber mostrado interés en mi trabajo.

Muchas son las cosas que podría mencionar aquí peque pero las resumiré en un *gracias* que me nace del alma, porque sé que en el fondo de tu corazoncito matemático, la geometría de 3-variedades ocupa un lugar especial y eso es garantía de que siempre vivirá algo de mi dentro de ti.

A Alberto Verjovsky por la confianza que depositó en mi desde el día en que nos conocimos personalmente y me aceptó como su alumna de maestría. Desde ese momento se convirtió en mi *papá académico*, me regañó cuando hubo razón para ello, me regaló un abrazo de vez en cuando y siempre tuvo un comentario para impulsarme a continuar. Le agradezco, el haberme guiado a través de este mundo maravilloso que son las matemáticas y haberme enseñado a descubrir un sin fin de cosas fascinantes, pero sobre todo porque descubrí que las matemáticas llenan mi vida y mi ser. Más aún, por haberme dedicado gran parte de su tiempo estos últimos meses y haberse sentado en la palapa chica conmigo a leer y revisar detenidamente cada página de mi tesis, por haberme escuchado varios jueves en nuestro *seminario de hermanitos* y haberme hecho observaciones relevantes para mi trabajo.

Pero sobre todo, gracias Alberto porque ahora sé que sólo necesito traer una pluma en el bolsillo, no olvidar el niño que todos llevamos dentro, es decir, desempolvar la curiosidad y la imaginación, así como tener las manos libres para comenzar a hacer matemáticas.

A Pepe Seade por toda la confianza que depositó en mi, el tiempo y apoyo que me brindó desde el día que le pedí fuera uno de mis sinodales y sobre todo por lo que me dijo aquel día: “No vamos a dejar que te vayas” (palabras más, palabras menos), las cuales influyeron en mi decisión de continuar con mis estudios de doctorado en el IMATE-Cuernavaca.

A Jesús Muciño por haber aceptado ser uno de mis sinodales desde el primer momento que se lo propuse y haberme invitado a dar unas pláticas sobre mi tesis en su seminario de Geometría y Análisis en el IMATE-Morelia, además de financiar mi estancia esos días. Así como por todas las observaciones, comentarios y consejos que me dió, tanto en el aspecto matemático como en el personal.

A Jorge Luis López por haber aceptado ser uno de mis sinodales, haber leído toda mi tesis en un tiempo realmente corto y por brindarme su apoyo en todo momento. Además, sus observaciones, preguntas, comentarios y sugerencias acerca de mi trabajo me ayudaron a mejorar bastante la versión final de éste, ya que de muchas cosas no me había dado cuenta y muchas más no las había considerado.

A Adolfo Guillot por haber aceptado ser uno de mis sinodales y haberse tomado el tiempo necesario para leer mi tesis y sobre todo por haberme tenido mucha paciencia. Además, todas sus preguntas, observaciones, comentarios y sugerencias me ayudaron bastante a continuar en este proceso de maduración matemática.

A Bruno Zimmermann por haberse tomado todo el tiempo del mundo para explicarme algunas dudas que me surgieron cuando estuve en el ICTP en Trieste, participando en *Summer School and Conference on Geometry and Topology of 3-Manifolds*. Lo cual fue muy grato para mí, sobre todo porque estas charlas fueron una mezcla de matemáticas y varios idiomas: inglés, español y alemán.

A Walter Neumann porque a principios de este año mientras se llevaba a cabo *The Geometry and Topology of Singularities* en el IMATE-Cuernavaca, me permitió acercarme y expresarle algunas dudas que tenía respecto a las variedades de Seifert. Pero sobre todo, porque se sentó a mi lado, tomó papel, pluma y comenzó a explicarme, además de darme algunas referencias bibliográficas.

A Aubín Arroyo porque en algún momento de este año me regaló un poco de su tiempo para explicarme lo que es un flujo y me ayudó a tener una idea de una parte de la demostración del Teorema de Clasificación de Modelos Geométricos en dimensión tres de W. P. Thurston.

A Max Neumann porque un día me abrió la puerta de su cubículo y me explicó detenidamente algunos detalles en un par de demostraciones de aspectos topológicos de 3-variedades y por haberme ayudado a imaginarme una vecindad tubular de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

A José Luis Cisneros por haberme hecho un huequito en su agenda para explicarme lo que es una conexión y haberme invitado a platicar sobre mi tesis en el seminario de Topología del IMATE-Cuernavaca.

A Margareta por el interés que tuvo en ayudarme a entender los espacios lente. Y por los comentarios que me hizo sobre mi tesis, así como los consejos que me dió para presentar un buen examen de grado.

A la vecina (Elsa) porque aunque me confesó que cuando recién llegué a este instituto no le caía nada bien, al final terminamos siendo muy buenas amigas y me ayudó con la revisión ortográfica de algunas partes de mi tesis, me escuchó algunas veces y sobre todo, porque siempre me brindó apoyo emocional y palabras de aliento, las cuales me ayudaron en muchos momentos a seguir adelante.

A mis hermanitos Juan Pablo, Samuel y Ataúlfo ya que sin sus ganas no hubiésemos podido llevar a cabo cada jueves de este semestre nuestro seminario en compañía de Alberto. Por la paciencia que siempre mostraron tratando de entender mi tesis al escucharme exponer y sobre todo, porque siempre estuvieron a mi lado brindándome todo su apoyo. Y en particular a mi hermanito Juan Pablo por haber compartido conmigo (y seguir haciéndolo), en muchos momentos, la fascinación que nos provocan las 3-variedades.

A todos mis amigos y compañeros: Kary-Kary, Tania, Vero, Victor Hugo, Alma, Bety, Daniel,  $\rho$ , Toño, Eréndira, Magda, Haydée, Daisy, Mario, Obed, Lupillo, los paisanos; en fin a todos, desde la A hasta la Z (para evitar omisiones) ya que siempre recibí de ellos (y aún sigo recibiendo) un abrazo, un saludo, una palabra de aliento en el momento justo en que lo necesitaba para continuar... y sobre todo, por haberme brindado su amistad sincera.

A Liz por haberse preocupado por mi más allá de los aspectos académicos y siempre haberse tomado el tiempo para ayudarme con toda mi papelería. Además, porque siempre me recibió con una sonrisa y por haberme enseñado que cuando las cosas se hacen con una actitud positiva hacia todo y todos, éstas salen bien.

A Pilar porque siempre me consiguió los artículos y libros que necesité (los cuales fueron muchísimos) en el menor tiempo posible y sobre todo por haberse tomado la molestia de entregármelos directamente en mi cubo.

Al inge por todo el apoyo que me brindó y el papel reciclado que me fue de gran utilidad; pero sobre todo, porque siempre tuvo un comentario, un chiste, etc., con el cual me hacía reír.

A las Sras. Silvia, Vero, Agri y a Don Seve porque siempre estuvieron al pendiente de mi y en particular, por todas las porras que recibí de ellos.

A todos los investigadores y personal que labora en el IMATE-Cuernavaca, ya que siempre recibí de todos ellos una sonrisa, un saludo, apoyo académico y muchas cosas más ...

A las chicas de posgrado Laura, Socorro y Alexia ya que siempre me ayudaron a resolver los distintos problemas académicos que se me presentaron mientras estuve en la maestría y durante todo el tiempo que me llevó terminar mi tesis. En particular, gracias Laura porque sé que los días previos a querer tener fecha para mi examen de grado te di mucha lata con mis dudas y siempre tuviste tiempo de despejarme cada una de ellas.

A CONACyT y a DGEP por el apoyo otorgado a través de una beca para realizar mis estudios de maestría.

A PAPIIT por la beca otorgada a través del proyecto IN101803-3 para continuar con esta tesis.



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos.</b>	<b>ix</b>
<b>Introducción.</b>	<b>xv</b>
<b>I. Temas de Geometría.</b>	<b>1</b>
§ 1. Variedades Diferenciables. . . . .	2
§ 2. Haz Tangente. . . . .	5
§ 2.1. Definición de Vector Tangente. . . . .	5
§ 2.2. Haz Tangente. . . . .	8
§ 2.3. Campos Vectoriales y Campos de Planos. . . . .	9
§ 3. Grupos de Lie. . . . .	13
§ 3.1. Álgebra de Lie de un Grupo de Lie. . . . .	15
§ 3.2. Medida de Haar. . . . .	17
§ 3.3. Representación Adjunta. . . . .	18
§ 4. Variedades Riemannianas. . . . .	19
§ 5. Haces Fibrados Principales con Conexiones. . . . .	22
§ 5.1. Conexión y Transporte Paralelo. . . . .	22
§ 5.2. Curvatura. . . . .	27
§ 6. Variedades Riemannianas Completas. . . . .	28
§ 7. Foliaciones. . . . .	30
§ 7.1. Condición de Integrabilidad. . . . .	32
§ 8. Estructuras de Contacto. . . . .	33
<b>II. Modelos Geométricos.</b>	<b>37</b>
§ 1. Definición de Modelo Geométrico. . . . .	38
§ 2. Modelos Geométricos en Dimensión Dos. . . . .	40
§ 3. Modelos Geométricos en Dimensión Tres. . . . .	41

<b>III</b>	<b>Los Ocho Modelos Geométricos.</b>	<b>43</b>
§ 1.	Geometría Euclidiana. . . . .	43
§ 1.1.	3-variedades Geométricas Euclidianas. . . . .	53
§ 1.2.	Una Mirada a través de las 3-variedades Geométricas Euclidianas. . . . .	59
§ 2.	Geometría Esférica. . . . .	62
§ 2.1.	Distintas caracterizaciones de $\mathbb{S}^3$ . . . . .	65
§ 2.2.	3-variedades Geométricas Esféricas. . . . .	71
§ 3.	Geometría Hiperbólica. . . . .	85
§ 3.1.	Transformaciones de Möbius y Extensión de Poincaré. . . . .	85
§ 3.2.	Modelo del Semiespacio Superior de Poincaré. . . . .	89
§ 3.3.	Modelo de la Bola Unitaria de Poincaré. . . . .	91
§ 3.4.	Modelo del Hemisferio Sur. . . . .	93
§ 3.5.	Modelo del Hemisferio de Radio Imaginario. . . . .	94
§ 3.6.	Isometrías y Geodésicas Hiperbólicas. . . . .	95
§ 3.7.	3-variedades Geométricas Hiperbólicas. . . . .	99
§ 4.	Geometría $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ . . . . .	101
§ 4.1.	3-variedades Geométricas Modeladas por $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ . . . . .	104
§ 5.	Geometría $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ . . . . .	107
§ 5.1.	3-variedades Geométricas Modeladas por $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ . . . . .	108
§ 6.	Geometría $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	110
§ 6.1.	El Espacio Cubriente Universal de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ : $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	112
§ 6.2.	3-variedades Geométricas Modeladas por $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	115
§ 7.	Geometría $\mathbb{R}^3_{\mathcal{N}il}$ . . . . .	117
§ 7.1.	3- $\mathcal{N}il$ variedades Geométricas. . . . .	119
§ 8.	Geometría $Sol$ . . . . .	123
§ 8.1.	3- $Sol$ variedades Geométricas. . . . .	126
<b>IV</b>	<b>Geometrización de 3-variedades.</b>	<b>129</b>
§ 1.	Clasificación de Modelos Geométricos. . . . .	131
§ 2.	Descomposición de 3-variedades. . . . .	137
§ 2.1.	Variedades Irreducibles. . . . .	138
§ 2.2.	Variedades Atoroidales. . . . .	142
§ 3.	Conjetura de Geometrización de Thurston. . . . .	144
§ 3.1.	Trabajos de R. S. Hamilton y G. Perelman. . . . .	145
	<b>Epílogo.</b>	<b>149</b>

<b>Apéndice I.</b>	<b>151</b>
A. Orbifolds. . . . .	151
B. 3-Varietades de Seifert. . . . .	153
B.1. Fibraciones de Seifert con Fibra un Círculo. . . . .	153
B.2. Fibraciones de Seifert con Fibra un 2-Toro. . . . .	154
B.3. Clasificación de 3-variedades de Seifert. . . . .	155
C. 3-Varietades de Seifert Geométricas. . . . .	156
<b>Apéndice II.</b>	<b>157</b>
A. Varietades de Pham-Brieskorn. . . . .	157
B. 3-variedades de Brieskorn $\mathbf{M}(p, q, r)$ . . . . .	157
B.1. 3-variedades de Brieskorn Esféricas. . . . .	158
B.2. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por $\mathbb{R}_{\widetilde{Nil}}^3$ . . . . .	159
B.3. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	160
<b>Índice de Notación.</b>	<b>161</b>
<b>Índice de Figuras.</b>	<b>165</b>
<b>Referencias</b>	<b>169</b>

# Introducción.

Cada belleza y grandeza de este mundo  
es creada por una sola emoción o  
por un solo pensamiento  
en el interior del hombre.

**Gibrán Jalil Gibrán**

*Poeta Libanés*

El **Teorema de Uniformización** es considerado una de las piedras angulares en la matemática del siglo XX. Este teorema establece que toda superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a la esfera de Riemann, al plano complejo o al disco unitario en el plano complejo. Este resultado se atribuye, principalmente, a G. B. Riemann, H. A. Schwarz, A. Hurwitz, F. C. Klein y J. H. Poincaré, quienes afirmaron tener demostraciones de casos particulares. Pero fue P. Koebe, quien publicó por primera vez una demostración completa en [Koe07]. A partir de ese momento, se despertó el interés por clasificar variedades de dimensión  $n \geq 3$ .

En la reunión de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia que se llevó a cabo en Montreal en 1884, W. Dyck hizo público su propósito de clasificar 3-variedades cerradas utilizando ideas análogas a las desarrolladas por G. B. Riemann. Además, explicó un método para construir dichas variedades (ver [Dyc84]). La topología de 3-variedades tuvo su origen en el artículo [Poi95] de H. Poincaré, en el cual dio una descripción de 3-variedades que pueden ser obtenidas por identificar caras en poliedros de dimensión tres. Además, consideró la idea de obtener una 3-variedad como el cociente de  $\mathbb{R}^3$  por la acción libre, propia y discontinua de un grupo  $G$ .

A finales de la década de los años 20, H. Kneser introdujo la idea de cortar una 3-variedad cerrada a lo largo de 2-esferas (ver [Kne29]). Omitió algunos detalles en su demostración los cuales, décadas más tarde, fueron demostrados por J. Milnor en [Mil62]. Actualmente este resultado se conoce como *Teorema de Descomposición de Kneser-Milnor*. Un par de años después, H.

Seifert en su artículo [Sei32], el cual es considerado una obra maestra en contenido y claridad, construyó una teoría completa y rica sobre 3-variedades que son fibradas por círculos. A finales de la década de los años 70, W. P. Thurston desarrolló una teoría vasta sobre 3-variedades hiperbólicas. Por otro lado, W. H. Jaco en conjunto con P. B. Shalen y K. Johannson desarrollaron, de manera independiente, la idea de cortar una 3-variedad cerrada a lo largo de 2-toros (ver [JS79], [Joh79]). Este resultado se conoce como *Descomposición JSJ*.

A principios de la década de los años 80, W. P. Thurston formuló su **Conjetura de Geometrización**. Ésta establece que cualquier 3-variedad compacta  $M$  puede ser cortada, esencialmente de manera única, a lo largo de 2-esferas y 2-toros en piezas que admiten una estructura geométrica modelada por uno de los ocho modelos geométricos que existen en dimensión tres (ver [Thu82]). R. S. Hamilton comenzó a desarrollar un *programa* basado en la noción de **flujo de Ricci** y enfocado a dar una demostración de dicha conjetura.

La idea básica de R. S. Hamilton fue formular un “proceso dinámico” regulado por una ecuación de difusión análoga a la *ecuación del calor*. Bajo este proceso una 3-variedad es *distorsionada geoméricamente* en el siguiente sentido. Sea  $m$  una métrica arbitraria sobre  $M$ . Permitiendo que el flujo de Ricci actúe,  $m$  debe aproximarse a una métrica  $m'$ , particularmente agradable, que corresponde a la métrica de alguno de los ocho modelos geométricos. R. S. Hamilton demostró que cualquier 3-variedad cerrada  $M$  cuya métrica tiene curvatura de Ricci positiva sólo admite una estructura geométrica esférica.

A finales del año 2002 y durante el año 2003, G. Perelman presentó, basado en el programa de R. S. Hamilton, tres prepublicaciones [Pera], [Perc], [Perb] afirmando que contenían una demostración de la Conjetura de Geometrización de W. P. Thurston; G. Perelman modificó el flujo de Ricci estándar e introdujo la noción de **flujo de Ricci con cirugía**. Este trabajo es considerado por muchos como un “poema” en la literatura matemática contemporánea. Hasta el año 2006, el consenso general de los expertos que han revisado este trabajo es que absolutamente todo es correcto.

En el *Congreso Internacional de Matemáticas* que se llevó a cabo en Madrid en 2006, se dieron a conocer los ganadores de la Medalla Fields, siendo G. Perelman uno de ellos. La sorpresa fue que rechazó la invitación para

asistir a la premiación, así como la medalla y poco después, anunció que se retiraría de la actividad matemática.

## Contenido General.

Los resultados principales de esta tesis son los siguientes:

- Describimos cada uno de los ocho modelos geométricos en dimensión tres y presentamos ejemplos de 3-variedades compactas que admiten una estructura geométrica modelada por alguno de ellos.
- Presentamos la demostración del Teorema de Clasificación de Modelos Geométricos en dimensión tres debido a W. P. Thurston (ver [Thu97]).
- Introducimos las nociones de descomposición prima y descomposición atoroidal. Enunciamos la **Conjetura de Geometrización de Thurston** (ver [Thu82]).

En el capítulo I damos una breve introducción a conceptos y resultados básicos de geometría riemanniana, foliaciones y estructuras de contacto debido a que los utilizaremos a lo largo de toda la tesis. En el capítulo II introducimos el concepto de modelo geométrico, así como la noción de modelo isotrópico y no isotrópico. En el capítulo III describimos los ocho modelos geométricos existentes en dimensión tres y damos ejemplos de 3-variedades geométricas para cada uno de ellos. En el capítulo IV presentamos la demostración del Teorema de Clasificación de Modelos Geométricos en dimensión tres debido a W. P. Thurston. Introducimos los resultados de descomposición prima y descomposición atoroidal con el fin de enunciar la Conjetura de Geometrización de Thurston. Finalmente, damos una idea muy general de los trabajos realizados por R. S. Hamilton y G. Perelman, así como de algunas consecuencias que tendríamos de asumir que dicha conjetura es cierta. En el apéndice I damos una breve introducción a las variedades de Seifert. Por último, en el apéndice II presentamos algunos conceptos básicos sobre 3-variedades de Brieskorn.

# CAPÍTULO I

## Temas de Geometría.

They discover that what they really want  
is usually not some collection of “answers”  
-what they want is *understanding*.

**William P. Thurston**

*On Proof and Progress in Mathematics*

Antes de dar la definición de modelo geométrico es importante tener una idea clara sobre algunos conceptos que utilizaremos a lo largo de toda la tesis. Debido a esto incluimos este capítulo, haciendo énfasis en que si el lector está familiarizado con este material, puede omitirlo y comenzar en el capítulo II.

Las dos primeras secciones son una breve introducción a conceptos básicos de geometría diferencial tales como la definición de variedad diferenciable, haz tangente y campos vectoriales. Siguiendo con una breve descripción de lo que es un grupo de Lie, así como su espacio tangente (álgebra de Lie de dicho grupo).

Es muy importante tener nociones de geometría riemanniana por tal motivo, las siguientes secciones nos dan un pequeño panorama: definimos que es una variedad riemanniana, damos la idea de lo que es una conexión y el transporte paralelo en un haz principal, así como la noción de curvatura. Terminando con la presentación del Teorema de Hopf-Rinow.

La última parte del capítulo pretende introducirnos al mundo de las foliaciones y de la geometría de contacto. El primero puede pensarse como una descomposición en subvariedades conexas de la misma dimensión, de otra variedad. El segundo fue motivado por el formalismo matemático de la mecánica clásica, pero tiene aplicaciones en topología de dimensiones bajas.

Para un estudio más detallado de todos estos conceptos y resultados se puede consultar [Arv03], [BJ82], [CM93], [CN79], [CP99], [DC88], [DFN85], [DS05], [Etn03], [Gei06], [Kir74], [Mil69], [Spi79], [Thu97] y [War83] entre otros.

## § 1. Variedades Diferenciables.

**Definición I.1.** Una *variedad topológica*  $M$  de dimensión  $n$ , con  $n \geq 1$ , es un espacio topológico Hausdorff con una base topológica numerable, localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

La condición anterior significa que para cada  $x \in M$ , existe una vecindad abierta de  $x$ , digamos  $\mathcal{U} \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definición I.2.** Un *sistema de coordenadas locales*, o *carta local*, en  $M$  consta de un abierto  $\mathcal{U} \subset M$  y un homeomorfismo  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ . Lo denotamos por  $(\mathcal{U}, \phi)$ .

Si  $x \in \mathcal{U}$ , decimos que  $(\mathcal{U}, \phi)_x$  es un *sistema de coordenadas locales* de  $x$ .

**Observación I.1.** La definición de  $M$  garantiza la existencia de un sistema de coordenadas locales para cada  $x \in M$ .

**Definición I.3.** Una colección

$$\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in A\} \quad \text{tal que} \quad \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = M,$$

es un *atlas* (algunas veces llamado *subatlas*) para  $M$  y la denotamos por  $\mathcal{A}$ .

Sean  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha), (\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta) \in \mathcal{A}$  tales que  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ . El homeomorfismo

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta),$$

del abierto  $\phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  sobre el abierto  $\phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  es llamado *transición de coordenadas*.

**Definición I.4.** Decimos que  $\mathcal{A}$  es un *atlas diferenciable* si todas sus transiciones de coordenadas son diferenciables.

Cuando hagamos referencia a *diferenciable*, nos referiremos a un *objeto de clase*  $C^\infty$ .



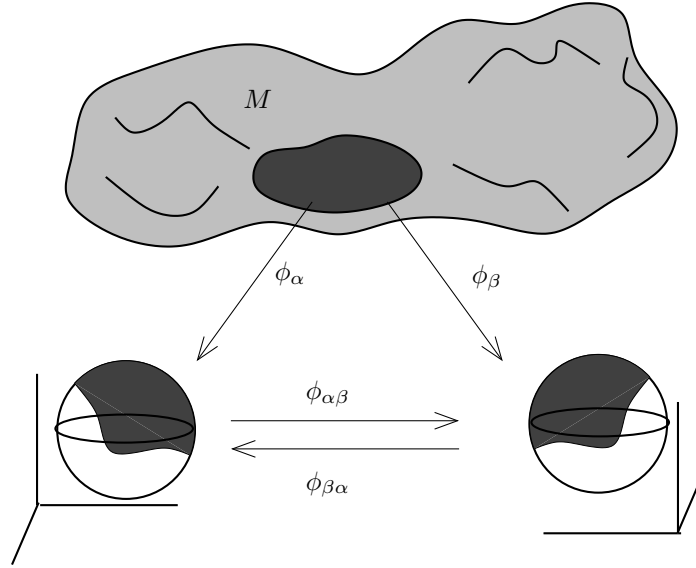


Figura I.1: Transición de coordenadas.

Sea  $\mathcal{A}$  un atlas diferenciable sobre  $M$ . Definimos  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{A})$  como el atlas que contiene todos los sistemas de coordenadas locales para los cuales, cada transición de coordenadas con un elemento de  $\mathcal{A}$  es diferenciable. Por lo tanto,  $\mathfrak{D}$  es un atlas diferenciable que contiene a  $\mathcal{A}$  y es llamado *atlas maximal*. Observemos que todo atlas diferenciable determina un único atlas diferenciable maximal. Tenemos la siguiente definición.

**Definición I.5.** Una *estructura diferenciable* sobre una variedad topológica  $M$  es un atlas diferenciable maximal  $\mathfrak{D}$  de  $M$ . Llamamos *variedad diferenciable* a  $M$  dotada con una estructura diferenciable.

### Seudogrupos.

La noción de pseudogrupo generaliza aquella de atlas y nos permite describir distintas estructuras sobre variedades topológicas.

**Definición I.6.** Un *seudogrupo*  $\mathcal{G}$  sobre un espacio topológico  $X$  es un conjunto de homeomorfismos  $\phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$ , con  $\alpha \in I$  y  $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{V}_\alpha \subset X$  abiertos, que satisfacen las siguientes propiedades:

- i)  $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$  es una cubierta abierta de  $X$ .
- ii) Dados  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}_\alpha$  abierto y  $\phi_\alpha \in \mathcal{G}$ , la restricción  $\phi_\alpha|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}_\alpha$  pertenece a  $\mathcal{G}$ .

- iii) Cuando la composición  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta$  de dos elementos de  $\mathcal{G}$  existe, pertenece a  $\mathcal{G}$ .
- iv) El inverso de  $\phi_\alpha \in \mathcal{G}$  es un elemento de  $\mathcal{G}$  y lo denotamos por  $\phi_\alpha^{-1}$ .
- v) Sea  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , tal que cada  $x \in \mathcal{U}$  tiene una vecindad abierta  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ . Si  $\psi|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  es un elemento de  $\mathcal{G}$  para cada  $x$ , entonces  $\psi \in \mathcal{G}$ .

**Ejemplos.** Los siguientes conjuntos son pseudogrupos.

- **Loc** ( $\mathbb{R}^n$ ):= El conjunto de homeomorfismos entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .
- **Lip** ( $\mathbb{R}^n$ ):= El conjunto de todos los homeomorfismos locales de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen una condición de Lipschitz en un vecindad de cada punto en su dominio.
- **Dif<sub>r</sub>** ( $\mathbb{R}^n$ ):= El conjunto de difeomorfismos locales de clase  $C^r$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ .
- **Hol** ( $\mathbb{C}^n$ ):= El conjunto de biholomorfismos locales de  $\mathbb{C}^n$ .
- **Fol<sub>k</sub>** ( $\mathbb{R}^n$ ):= El conjunto de difeomorfismos locales, de clase  $C^r$ , de  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $\phi(x, y) = (f(x, y), g(y))$ .

Sean  $\mathcal{G}$  un pseudogrupo sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $M$  una variedad diferenciable. Un  $\mathcal{G}$ -atlas es una colección de sistemas de coordenadas locales de  $M$  que son  $\mathcal{G}$ -compatibles. Esto es, para cualesquiera dos elementos de la estructura diferenciable de  $M$ , digamos  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$  con  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ , la transición de coordenadas

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta),$$

es un elemento de  $\mathcal{G}$ .

**Definición I.7.** Si  $M$  posee un  $\mathcal{G}$ -atlas, es llamada  $\mathcal{G}$ -variedad.

Por lo tanto, podemos decir que una variedad diferenciable  $M$  es una variedad topológica dotada con una estructura diferenciable, compatible con el pseudogrupo de funciones diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$ .

## § 2. Haz Tangente.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  variedades diferenciables.

**Definición I.8.** Decimos que la función continua  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es *diferenciable en  $x \in M_1$*  si, para cualesquiera sistemas de coordenadas locales  $(\mathcal{U}, \phi)_x$  de  $x$  y  $(\mathcal{V}, \psi)_{f(x)}$  de  $f(x)$  se satisface que

- i)  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ ;
- ii)  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \psi(\mathcal{V})$  es diferenciable en  $\phi(x)$ .

### § 2.1. Definición de Vector Tangente.

Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{U} \subset M$  una vecindad abierta de  $x \in M$ . Consideremos el conjunto

$$C^\infty(\mathcal{U}, M) = \{f : \mathcal{U} \rightarrow M \mid f \text{ es diferenciable en } \mathcal{U}\}.$$

Definimos una relación de equivalencia de la siguiente manera. Sean  $f, f' \in C^\infty(\mathcal{U}, M)$ , decimos que  $f \sim f'$  si y sólo si existe una vecindad abierta  $\mathcal{U}'$  de  $x$ , tal que  $f|_{\mathcal{U}'} = f'|_{\mathcal{U}'}$ .

**Definición I.9.** Llamamos *germen en  $x$*  a cada clase de equivalencia bajo la relación  $\sim$  en  $C^\infty(\mathcal{U}, M)$  y lo denotamos por  $[f]$ .

Consideremos el conjunto

$$\xi(x) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable en una vecindad abierta de } x\} / \sim.$$

Esto es,  $\xi(x)$  es el conjunto de todos los gérmenes diferenciables en una vecindad abierta de  $x$ . Además, la adición y multiplicación están bien definidas en representantes de elementos de  $\xi(x)$ . Por lo tanto,  $\xi(x)$  tiene estructura de un álgebra.

Sean  $x \in M$  y  $(\mathcal{U}, \phi)_x$  un sistema de coordenadas locales de  $x$ . Entonces, definimos un *germen invertible* como  $[(\mathcal{U}, \phi)_x]$  y lo denotamos por  $[\phi_x]$ . Por lo tanto, tenemos un isomorfismo  $\phi^* : \xi_x \rightarrow \xi(x)$ , con  $\xi_x$  el conjunto de gérmenes  $[r]$  con  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Existen tres definiciones de vector tangente, cada una de las cuales tiene sus ventajas y a continuación las presentamos.

Consideremos el conjunto

$$C_x = \{ \text{gérmenes } [c] \mid c : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, x) \text{ es una curva en } M, \text{ con } c(0) = x \}.$$

Definimos una relación de equivalencia en  $C_x$  de la siguiente manera:  $[c_1] \sim [c_2]$  si y sólo si para cada germen diferenciable  $[f] \in \xi(x)$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} ([f] \circ [c_1]) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} ([f] \circ [c_2]) \right|_0.$$

**Definición I.10.** Un *vector tangente* a  $M$  en  $x$  es una clase de equivalencia de curvas bajo la relación de equivalencia definida anteriormente en  $C_x$ .

Es decir,  $[c_1], [c_2] \in C_x$  definen el mismo vector tangente si y sólo si definen la misma “diferenciación de funciones en la dirección de una curva”.

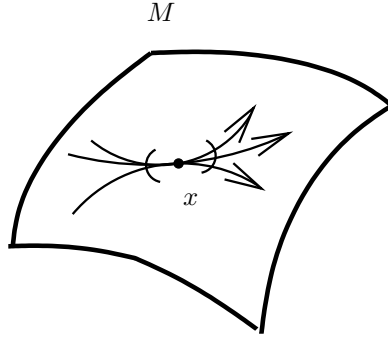


Figura I.2: Vector tangente a  $M$  en  $x$ .

Consideremos una función lineal  $D : \xi(x) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface la regla del producto de Leibniz

$$D([f] \circ [f']) = D([f])[f'](x) + [f](x)D([f']).$$

En otras palabras,  $D$  es un operador lineal sobre funciones diferenciables de  $M$  y es llamado *derivación*.

**Definición I.11.** La derivación  $D$  es un *vector tangente* a  $M$  en  $x$ .

Por último, sean  $x \in M$  y  $[\phi_\alpha], [\phi_\beta]$  dos gérmenes invertibles. Entonces, la transición de coordenadas

$$[\phi]_{\alpha\beta} := [\phi_\beta] \circ [\phi_\alpha]^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0),$$

es un germen diferenciable invertible.

Todas estas posibles transiciones de coordenadas forman un grupo  $G$  bajo composición. Por lo tanto, para cualesquiera dos gérmenes invertibles  $[\phi_\alpha]$ ,  $[\phi_\beta]$  hay exactamente un  $[\phi] \in G$  tal que  $[\phi] \circ [\phi_\alpha] = [\phi_\beta]$ .

Recordemos que la matriz jacobiana  $Df$  es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función  $f$ . Por lo tanto, si a cada  $[\phi] \in G$  le asociamos su matriz jacobiana en el origen  $D_0\phi$ , con  $\phi$  un representante de  $[\phi]$ , obtenemos un homomorfismo de grupos

$$F : G \rightarrow \mathbf{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \text{con } F([\phi]) = D_0\phi,$$

de  $G$  en el grupo general lineal de matrices invertibles  $n \times n$  con entradas reales.

**Definición I.12.** Un *vector tangente* a  $M$  en  $x$  es un operador que asigna a cada germen invertible  $[\phi_\alpha]$  un vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , tal que el vector  $D_0\phi \cdot v$  corresponde al germen invertible  $[\phi] \circ [\phi_\alpha]$ .

### Espacio Tangente.

Denotaremos por  $\mathbf{T}_xM$  al conjunto de vectores tangentes a  $M$  en  $x$ . Éste forma un espacio vectorial de dimensión  $n$  con las operaciones usuales de funciones (ver por ejemplo [DC88], [CP99]).

**Definición I.13.** El espacio vectorial  $\mathbf{T}_xM$  es llamado *espacio tangente de  $M$  en  $x$* .

### Diferencial de una Función.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos variedades diferenciables y  $f : M_1 \rightarrow M_2$  una función diferenciable.

**Definición I.14.** El *diferencial* o *función tangente* de  $f$  en  $x \in M_1$ , es la función lineal

$$df_x : \mathbf{T}_xM_1 \rightarrow \mathbf{T}_{f(x)}M_2,$$

tal que si  $v_x \in \mathbf{T}_xM_1$ , entonces  $df_x(v_x)$  es un vector tangente a  $M_2$  en  $f(x)$ .

Sea  $g : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en una vecindad de  $f(x)$ . Definimos

$$df_x(v_x)(g) = v_x(g \circ f),$$

donde  $v_x(g \circ f) = \nabla(g \circ f) \cdot v_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i}(v_x)_i$ . En otras palabras, es la derivada direccional de  $g \circ f$  en dirección  $v_x$ .

**Proposición (Regla de la cadena).** Sean  $M_1, M_2$  y  $M_3$  variedades diferenciables.  $f : M_1 \rightarrow M_2$  y  $f' : M_2 \rightarrow M_3$  funciones diferenciables. Entonces,

$$df'_{f(x)} \circ df_x = d(f' \circ f)_x.$$

*Demostración.* Sea  $g : M_3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en una vecindad de  $f' \circ f(x)$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} df'_{f(x)} \circ df_x(v_x)(g) &= df_x(v_x)(g \circ f') \\ &= v_x(g \circ f' \circ f) \\ &= d(f' \circ f)_x(v_x)(g), \end{aligned}$$

con  $v_x \in \mathbf{T}_x M_1$ . ■

## § 2.2. Haz Tangente.

Sea  $M$  una variedad diferenciable y consideremos el conjunto

$$TM = \{(x, v_x) \mid x \in M, v_x \in \mathbf{T}_x M\}.$$

Podemos asignarle a  $TM$  una estructura diferenciable de la siguiente manera (para ver esta construcción en detalle puede consultar [DC88]).

Sea  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección natural definida por  $\pi(x, v_x) = x$ , con  $v_x \in \mathbf{T}_x M$ . Sea  $\mathfrak{D}$  la estructura diferenciable de  $M$  y  $(\mathcal{U}, \phi) \in \mathfrak{D}$  un sistema de coordenadas locales. Definimos  $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  como

$$\tilde{\phi}(x, v_x) = (\phi \circ \pi(x, v_x), d\phi_x(v_x)),$$

para todo  $(x, v_x) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ . Observemos que  $\tilde{\phi}$  es inyectiva sobre abiertos de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Por otro lado, si  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  y  $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta) \in \mathfrak{D}$  con  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ , la función  $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1}$  es diferenciable y

$$\left\{ \tilde{\phi}^{-1}(\mathcal{V}) \mid \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{2n} \text{ abierto y } (\mathcal{U}, \phi) \in \mathfrak{D} \right\}$$

forma una base para una topología sobre  $TM$ .

**Proposición I.1.** *La colección*

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \left\{ \left( \pi^{-1}(\mathcal{U}), \tilde{\phi} \right) \mid (\mathcal{U}, \phi) \in \mathfrak{D} \right\},$$

es una estructura diferenciable para  $TM$ .

**Definición I.15.**  $TM$  dotado con  $\tilde{\mathfrak{D}}$  es llamado *haz tangente* de  $M$ .

**§ 2.3. Campos Vectoriales y Campos de Planos.**

**Definición I.16.** Un *campo vectorial* en  $M$  es una sección  $\mathcal{X} : M \rightarrow TM$  del haz tangente  $TM$ ; es decir, para todo  $x \in M$ , tenemos que

$$\pi \circ \mathcal{X}(x) = \pi(x, \mathcal{X}(x)) = x.$$

En otras palabras,  $\mathcal{X}$  asocia a cada  $x \in M$  un vector  $\mathcal{X}(x) \in \mathbf{T}_x M$ , que es tangente a  $M$  en  $x$  y lo denotamos por  $\mathcal{X}_x$ . Podemos pensar a  $\mathcal{X}$  como una colección de flechas, una en cada  $x \in M$ .

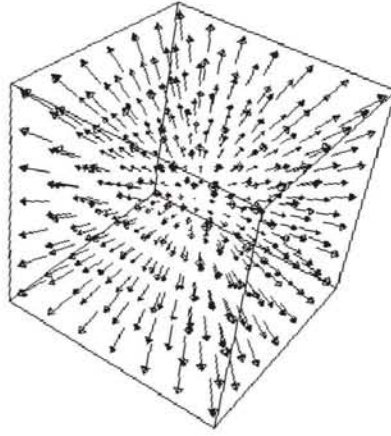


Figura I.3: Campo vectorial en dimensión tres.

Consideremos el conjunto

$$C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}.$$

Sean  $\mathcal{X}$  un campo vectorial en  $M$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Definimos la función

$$X_f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad X_f(x) = \mathcal{X}_x(f),$$

para toda  $x \in M$  y  $\mathcal{X}_x \in \mathbf{T}_x M$ .

**Definición I.17.** Decimos que  $\mathcal{X}$  es un *campo vectorial diferenciable* si  $X_f$  es una función diferenciable para toda  $f \in C^\infty(M)$ .

Por otro lado, podemos pensar a  $X_f$  como la función

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad \text{definida por} \quad f \mapsto X_f.$$

Entonces,  $X$  satisface las siguientes propiedades:

- **Linealidad.**

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g), \text{ con } a, b \in \mathbb{R};$$

- **Regla de Leibniz.**

$$X(fg) = X(f)g + fX(g).$$

### Curvas Integrales.

Un campo vectorial diferenciable  $\mathcal{X}$  en  $M$  tiene asociada una ecuación diferencial ordinaria en  $M$

$$\frac{dc}{dt} = \mathcal{X}(c). \quad (\text{I.1})$$

Una solución de (I.1) es una curva  $c : (a, b) \rightarrow M$  tal que,  $c'(t) = \mathcal{X}(c(t))$ , con  $t \in (a, b)$ .

**Definición I.18.** Llamamos a  $c$  *curva integral de  $\mathcal{X}$  por  $x \in M$*  si es solución de  $\mathcal{X}$  con  $c(0) = x$ .

Por el Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo [BD92]) sabemos que si  $\mathcal{X}$  es continuo y satisface la condición de Lipschitz  $|\mathcal{X}_{x_1} - \mathcal{X}_{x_2}| \leq s|x_1 - x_2|$ , con  $s \in \mathbb{R}$ , existe una única curva integral por  $x \in M$ , para todo  $x \in M$ .

### Corchete de Campos Vectoriales Diferenciables.

Denotamos por  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables sobre una variedad  $M$ .

**Definición I.19.** Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ . El *corchete* de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  es un campo vectorial diferenciable en  $M$  dado por  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$ .

Podemos interpretar a  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  como una derivación de  $\mathcal{Y}$  a lo largo de las curvas integrales de  $\mathcal{X}$ .

Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ . El corchete  $[ , ]$  satisface las siguientes propiedades:

- **Antisimetría.**

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = -[\mathcal{Y}, \mathcal{X}];$$

- **$\mathbb{R}$ -bilinealidad.**

$$[a\mathcal{X} + b\mathcal{Y}, \mathcal{Z}] = a[\mathcal{X}, \mathcal{Z}] + b[\mathcal{Y}, \mathcal{Z}],$$

$$[\mathcal{Z}, a\mathcal{X} + b\mathcal{Y}] = a[\mathcal{Z}, \mathcal{X}] + b[\mathcal{Z}, \mathcal{Y}];$$



■ **Identidad de Jacobi.**

$$[\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{Z}, \mathcal{X}]] + [\mathcal{Z}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]] = 0;$$

y asigna a cada  $x \in M$  el vector tangente  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_x = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}](x)$ .

Como  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_x \in \mathbf{T}_x M$  podemos pensarlo como una clase de equivalencia de curvas. Consideremos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  en una vecindad de  $x$ , entonces para un  $t$  lo suficientemente pequeño

- i) seguimos un tiempo  $t$  la curva integral de  $\mathcal{X}$  que pasa por  $x$ ;
- ii) continuamos un tiempo  $t$  por la curva integral de  $\mathcal{Y}$ ;
- iii) seguimos un tiempo  $t$  en dirección contraria por la curva integral de  $\mathcal{X}$ ;
- iv) por último, nos movemos un tiempo  $t$  en dirección contraria por la curva integral de  $\mathcal{Y}$ .

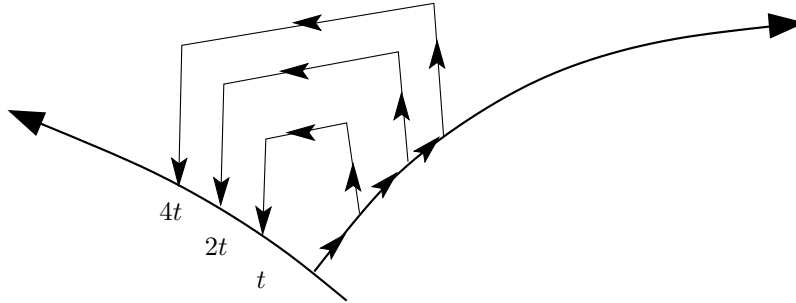


Figura I.4: Construcción geométrica de  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_x$ .

**Campos de  $k$ -planos.**

El *grassmanniano*  $Gr_k(n)$  es el espacio de todos los subespacios de dimensión  $k$  ó  $k$ -planos de un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$ , sobre un campo dado. Más aún,  $Gr_k(n)$  es una variedad diferenciable de dimensión  $k(n - k)$  y lo llamamos *variedad grassmanniana*.

Definimos un *campo de  $k$ -planos* en  $M$  como la sección  $\mathcal{P} : M \rightarrow Gr_k(n)$  del grassmanniano  $Gr_k(n)$  de  $M$ . Es decir,  $\mathcal{P}$  asocia a cada  $x \in M$  un subespacio vectorial  $\mathcal{P}(x) \subset \mathbf{T}_x M$  de dimensión  $k$  tangente a  $M$  en  $x$ , el cual

denotamos por  $\mathcal{P}_x$ .

Un campo de  $k$ -planos  $\mathcal{P}$  en  $M$  es diferenciable si para todo  $x \in M$ , existen  $k$  campos vectoriales diferenciables,  $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^k$  definidos en una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $x$ , tales que para todo  $y \in \mathcal{U}$ , tenemos que  $\{\mathcal{X}_y^1, \mathcal{X}_y^2, \dots, \mathcal{X}_y^k\}$  es una base para  $\mathcal{P}_x$ .

**Ejemplo 1.** Consideremos  $k = 1$ ; un campo de 1-planos  $\mathcal{L}$  en  $M$ , comúnmente llamado *campo de líneas*, puede construirse de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{X}$  un campo vectorial tal que para toda  $x \in M$ ,  $\mathcal{X}_x \neq 0$  y definimos  $\mathcal{L}_x = \mathbb{R} \cdot \mathcal{X}_x$ . Observemos que  $\mathcal{L}_x \subset \mathbf{T}_x M$  es un subespacio de dimensión uno generado por  $\mathcal{X}_x$ .

### Orientación.

Sean  $W$  un espacio vectorial real y  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dos bases ordenadas de  $W$ . Sabemos que existe una única transformación lineal  $T : W \rightarrow W$  tal que  $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ .

**Definición I.20.** Las bases  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$  tienen la misma *orientación* si la matriz asociada a  $T$  tiene determinante positivo; de otro modo, decimos que tienen *orientaciones opuestas*.

Observemos que la propiedad de tener la misma orientación nos define una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las bases ordenadas de  $W$ . Si  $W$  no es el espacio vectorial cero, tenemos dos clases de equivalencia, las cuales son llamadas *orientaciones* de  $W$ .

Sea  $\mathcal{P}$  un  $k$ -campo de planos diferenciable en  $M$ . Decimos que  $\mathcal{P}$  es *orientable* si para cada  $x \in M$ , podemos escoger una orientación  $\mathcal{O}_x$  en  $\mathcal{P}_x$  de modo que la correspondencia  $x \mapsto \mathcal{O}_x$  es continua.

De esta manera, si  $k$  es la dimensión de  $M$  y  $\mathcal{P}_x$  corresponde a  $\mathbf{T}_x M$ , podemos determinar una orientación en  $TM$  y decimos que  $M$  es orientable.

**Ejemplo 2.** Un campo de líneas  $\mathcal{L}$  es orientable si y sólo si existe un campo vectorial diferenciable  $\mathcal{X}$  en  $M$ , tal que para todo  $x \in M$ ,  $\mathcal{L}_x$  es un subespacio de  $\mathbf{T}_x M$  generado por  $\mathcal{X}_x$ .

Por lo tanto, si  $\mathcal{L}$  es un campo de líneas orientable en  $M$  podemos definir un campo vectorial  $\mathcal{X}$  escogiendo en cada  $x \in M$  un vector no nulo en  $\mathcal{L}_x$ , tal que  $\mathcal{X}_x \neq 0$  para toda  $x$ . Decimos en este caso, que  $\mathcal{X}$  es *tangente* a  $\mathcal{L}$ .

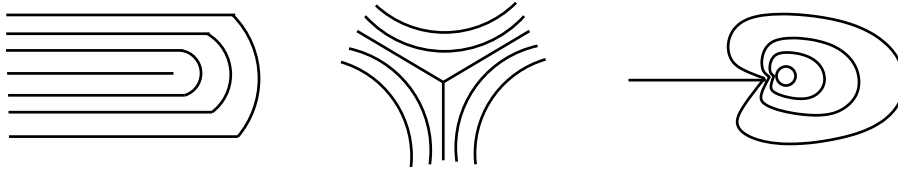


Figura I.5: Campos de líneas que no son orientables.

### § 3. Grupos de Lie.

La teoría de grupos de Lie, desarrollada por S. Lie, tiene sus raíces en el estudio de simetrías de sistemas de ecuaciones diferenciales y las técnicas de integración para resolverlas; S. Lie llamó a esas simetrías *grupos continuos*. En 1930, E. Cartan introdujo el término *grupo de Lie*.

**Definición I.21.** Una variedad diferenciable  $G$  es llamada *grupo de Lie* si

*i)*  $G$  es un grupo y

*ii)* las operaciones de grupo

$$G \times G \rightarrow G, \quad \text{tal que } (x, y) \mapsto xy;$$

$$G \rightarrow G, \quad \text{tal que } x \mapsto x^{-1},$$

son diferenciables.

**Ejemplos.** Los siguientes son grupos de Lie.

- $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  bajo la adición vectorial.
- $\mathbb{R} - \{0\}$  y  $\mathbb{C} - \{0\}$  bajo la multiplicación.
- El *grupo general lineal*  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  de todas las matrices  $n \times n$  invertibles, con entradas reales.
- El *grupo afín*  $\mathbf{Aff}(3) = \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$  de todas las funciones afines invertibles de un espacio en si mismo.

Sea  $G$  un grupo de Lie. Llamamos a  $H \subset G$  *subgrupo de Lie* si  $H < G$  y es una subvariedad encajada en  $G$ .

Observemos que cualquier subgrupo de Lie  $H < G$  de un grupo de Lie  $G$  es cerrado en  $G$ .

### Componente Identidad.

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $G_0$  la componente conexa de  $G$  que contiene al elemento identidad  $e \in G$ . Tenemos que  $G_0$  es cerrada y es un subgrupo, ya que la multiplicación e inversión son operaciones continuas. Además, para cualquier automorfismo continuo  $f : G \rightarrow G$  tenemos que  $f(G_0) = G_0$  y se sigue que  $G_0$  es normal en  $G$ .

**Definición I.22.** La componente  $G_0$  de  $G$  es llamada *componente identidad* de  $G$ .

Observemos que  $G_0$  es abierto ya que contiene una vecindad conexa por caminos de  $e$ . Por lo tanto,  $G_0$  es un conjunto abierto y cerrado.

Consideremos el grupo cociente  $G/G_0$ , sus elementos son precisamente las componentes conexas de  $G$  y además, es discreto. Llamamos a  $G/G_0$  *grupo de componentes* de  $G$ .

### Acciones de Grupos de Lie.

Sea  $G$  un grupo de Lie y  $M$  una variedad diferenciable.

**Definición I.23.** Decimos que  $G$  *actúa por la derecha* en  $M$  si para cada  $g \in G$  existe un difeomorfismo de  $M: x \mapsto T_g(x)$  con  $x \in M$ , tal que

- $T_g T_h = T_{hg}$  para toda  $g, h \in G$ ,
- $T_e$  es la función identidad y
- $(x, g) \mapsto T_g(x)$  es una función diferenciable de  $M \times G \rightarrow M$ .

De manera similar, podemos definir una *acción izquierda* de  $G$  en  $M$ . En este caso,  $T_g T_h = T_{gh}$ .

### Ejemplos.

- La acción trivial de cualquier grupo de Lie  $G$  en una variedad diferenciable  $M$  está definida como

$$x \longmapsto T_g(x) = x, \text{ para todo } g \in G \text{ y todo } x \in M.$$

- El grupo general lineal  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , el grupo especial lineal  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ , el grupo ortogonal  $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$  y el grupo ortogonal especial  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$  son grupos de Lie que actúan en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición I.24.**

- El conjunto  $\{g \in G \mid T_g(x) = x\}$ , es un subgrupo de  $G$  llamado *estabilizador* o *grupo de isotropía* de  $x \in M$ .
- La *órbita* de  $x \in M$  es el conjunto  $\{T_g(x) \mid g \in G\}$ .

Decimos que  $G$  actúa *libremente* en  $M$  si para todo  $x \in M$ , el estabilizador es trivial. Si para cualquier  $x, y \in M$  existe  $g \in G$  tal que  $T_g(x) = y$ , entonces  $G$  actúa *transitivamente* en  $M$ . Es decir, la órbita de cualquier elemento de  $M$  es toda  $M$ . La acción de  $G$  en  $M$  es *discontinua* si para todo  $x \in M$ , existe una vecindad  $x \in \mathcal{U} \subset M$  tal que  $\{g \in G \mid T_g(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$  es finito.

**Definición I.25.**  $M$  es una *variedad homogénea* si existe un grupo de Lie  $G$  que actúa transitivamente en ella.

**Ejemplos.**

- La esfera  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$  es homogénea bajo  $\mathbf{SO}(n)$ .
- El semi plano superior  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  es homogéneo bajo  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .
- El grassmanniano  $Gr_k(n)$  es homogéneo bajo la acción de  $\mathbf{SO}(n)$ .

**Teorema I.1.** *Sea  $M$  una variedad homogénea bajo la acción de un grupo de Lie  $G$ . Existe una correspondencia inyectiva entre los puntos  $x \in M$  y las clases laterales derechas  $Hg$  de  $H$  en  $G$ , con  $H$  el estabilizador.*

**Ejemplos.**

- $\mathbb{S}^{n-1} \cong \mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1)$ , escogiendo  $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$  como  $e_n$ , el  $n$ -ésimo elemento de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .
- $\mathbb{H}^2 \cong \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbf{SO}(2)$ , escogiendo  $x_0 \in \mathbb{H}^2$  como  $i$ .
- $Gr_k(n) \cong \mathbf{SO}(n)/(\mathbf{SO}(n) \times \mathbf{SO}(n-k))$ .

**§ 3.1. Álgebra de Lie de un Grupo de Lie.**

Uno de los objetos algebraicos más simple es un espacio vectorial. Es posible asociar a cada  $g \in G$ , con  $G$  grupo de Lie, un espacio vectorial que corresponde al espacio tangente de  $G$  en  $g$ . Este espacio tangente es isomorfo a lo que definiremos como el álgebra de Lie de  $G$ .

Para toda  $h \in G$ , definimos los siguientes difeomorfismos

- *Traslación izquierda.*  $L_g : G \rightarrow G$  con  $L_g(h) = gh$ .
- *Traslación derecha.*  $R_g : G \rightarrow G$  con  $R_g(h) = hg$ .

**Definición I.26.** Sean  $e \in G$  el elemento identidad,  $v_e$  un vector tangente a  $G$  en  $e$  y  $g \in G$ . Un vector tangente a  $G$  en  $g$  está dado por  $v_g = dR_g(v_e)$ .

Entonces, podemos obtener un campo vectorial diferenciable  $\mathcal{X}$  en  $G$ , ya que la multiplicación es una operación diferenciable. Además,

$$dR_g \circ dR_h(v_e) = dR_{gh}(v_e) = v_{gh},$$

y la imagen de  $\mathcal{X}$  bajo  $dR_g$ , para cualquier  $g \in G$ , es  $\mathcal{X}$  mismo.

**Definición I.27.** Decimos que un campo vectorial  $\mathcal{X}$  en un grupo de Lie  $G$  es *invariante por la derecha* si  $dR_g(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ , para cualquier  $g \in G$ .

**Ejemplo 3.** Consideremos  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(G)$ . Si estos son invariantes por la derecha, entonces  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  es invariante por la derecha.

Sea  $\mathfrak{g} = \{\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(G) \mid dR_g(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \forall g \in G\}$ . Bajo la adición usual de campos vectoriales y multiplicación escalar por números reales,  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial cerrado bajo la operación corchete  $[\cdot, \cdot]$  (ver definición I.19).

La dimensión de  $\mathfrak{g}$  es la dimensión del espacio tangente a  $G$  en  $e$ , que corresponde a la dimensión de  $G$  mismo, ya que un campo vectorial invariante por la derecha está completamente determinado por su valor en  $e$ .

**Definición I.28.** El espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  dotado con la operación corchete  $[\cdot, \cdot]$  es llamado *álgebra de Lie de  $G$* .

**Ejemplo 4.** El álgebra de Lie del grupo de Lie  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  es el espacio vectorial  $\mathbf{M}(n, \mathbb{R})$  de todas las matrices  $n \times n$ , con  $[A, B] = AB - BA$ .

**Proposición I.2.** La función  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{T}_e G$  dada por  $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_e$ , define un isomorfismo lineal.

*Demostración.* La función  $f$  es lineal. Si  $\mathcal{X}_e = 0$ , entonces  $v_g = dR_g(\mathcal{X}_e) = 0$  para toda  $g \in G$ . Por lo tanto,  $f$  es inyectiva. Para  $\mathcal{X}_e \in \mathbf{T}_e G$ , definimos el campo vectorial

$$V_{\mathcal{X}_e} = \{w_g = (dR_g)_e(\mathcal{X}_e), \text{ para toda } g \in G\}.$$

Entonces,  $V_{\mathcal{X}_e}$  es invariante por la derecha y  $w_e = \mathcal{X}_e$ . Por lo que  $f$  es sobreyectiva. Concluimos que  $f$  es un isomorfismo lineal. ■

Sean  $\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e$  elementos de  $\mathbf{T}_e G$  y  $V_{\mathcal{X}_e}, V_{\mathcal{Y}_e}$  campos vectoriales invariantes por la derecha determinados por  $\mathcal{X}_e$  y  $\mathcal{Y}_e$ , respectivamente. Por medio del isomorfismo descrito anteriormente, definimos la operación corchete en  $\mathbf{T}_e G$  como

$$[\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e] = [V_{\mathcal{X}_e}, V_{\mathcal{Y}_e}].$$

### § 3.2. Medida de Haar.

Consideremos el  $\sigma$ -álgebra de Borel generada por los subconjuntos compactos de  $G$  y sea  $\mu_r$  una medida en subconjuntos borelianos de  $G$ . Decimos que  $\mu_r$  es invariante por la derecha si y sólo si para todo subconjunto boreliano  $S$  de  $G$  y para todo  $g \in G$  tenemos

$$\mu_r(Sg) = \mu_r(S).$$

Siguiendo a P. Halmos, decimos que  $\mu_r$  es *regular* si y sólo si

- $\mu_r(\mathcal{K}) < \infty$  para cualquier subconjunto compacto  $\mathcal{K}$ ;
- para cada subconjunto boreliano  $E$  tenemos que
 
$$\mu_r(E) = \inf \{ \mu_r(\mathcal{U}) \mid E \subset \mathcal{U} \text{ con } \mathcal{U} \text{ abierto} \}$$
 y
 
$$\mu_r(E) = \sup \{ \mu_r(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \subset E, \text{ con } \mathcal{K} \text{ compacto} \}.$$

### Existencia y Unicidad de una Medida de Haar Derecha.

Existe sólo una medida regular invariante por la derecha  $\mu_r$  en subconjuntos borelianos de  $G$ , tal que  $\mu_r(\mathcal{U}) > 0$  para cualquier subconjunto boreliano abierto y no vacío  $\mathcal{U}$ , salvo un múltiplo constante positivo.

**Definición I.29.** La medida  $\mu_r$  es llamada *medida de Haar derecha* en  $G$ .

Análogamente, existe una única medida  $\mu_l$  invariante por la izquierda, salvo multiplicación por una constante positiva, pero no necesariamente coincide con  $\mu_r$  y la llamamos *medida de Haar izquierda*. Sin embargo, es fácil encontrar una relación entre ellas.

Sea  $S$  un subconjunto boreliano, denotamos por  $S^{-1}$  el conjunto de los elementos inversos a los elementos de  $S$  y definimos

$$\mu_{r^{-1}}(aS) = \mu_r((aS)^{-1}) = \mu_r(S^{-1}a^{-1}) = \mu_r(S^{-1}) = \mu_{r^{-1}}(S),$$

ya que la medida de Haar izquierda es única, se sigue que  $\mu_{r^{-1}}$  es un múltiplo de  $\mu_l$ . Entonces,  $\mu_r(S^{-1}) = k\mu_l(S)$  para todo subconjunto boreliano  $S$ , con  $k$  una constante positiva.

**Definición I.30.** Un grupo de Lie  $G$  es *unimodular* si toda medida de Haar derecha en  $G$  es una medida de Haar izquierda en  $G$ .

Usando la teoría de integración de Lebesgue, definimos una integral para todas las funciones borel medibles  $f$  en  $G$ . Si  $\mu_r$  es una medida de Haar derecha, entonces para toda  $g \in G$  y cualquier  $f$

$$\int_G f(gg_0) d\mu_r(g) = \int_G f(g) d\mu_r(g),$$

y la llamamos *integral de Haar*.

**Ejemplos.**

- La medida de Haar en el grupo topológico  $(\mathbb{R}, +)$  que toma valor 1 en  $[0, 1]$  es igual a la restricción de la medida de Lebesgue a los subconjuntos borelianos de  $\mathbb{R}$ .
- Sea  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  el grupo de números reales positivos con la multiplicación como operación. Entonces, la medida de Haar  $\mu(S)$  está dada por

$$\mu(S) = \int_S \frac{1}{t} dt,$$

para cualquier subconjunto boreliano  $S$  de  $\mathbb{R}_+$ .

### § 3.3. Representación Adjunta.

**Definición I.31.** Un *endomorfismo* de un espacio vectorial  $V$  es una función lineal  $\phi : V \rightarrow V$ . Si además  $\phi$  es un isomorfismo, entonces lo llamamos *automorfismo*.

Sea  $H = \mathbf{Aut}(V)$  el conjunto de automorfismos de un espacio vectorial  $V$  y  $G$  un grupo de Lie.

**Definición I.32.** El homomorfismo  $\phi : G \rightarrow H$  es llamado *representación del grupo de Lie  $G$* .

Sean  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  álgebras de Lie. Llamamos a  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  *homomorfismo* si es lineal y preserva corchetes. Si además  $\psi$  es biyectivo, lo llamamos *isomorfismo*.

Sea  $\mathfrak{h} = \mathbf{End}(V)$  el conjunto de endomorfismos del espacio vectorial  $V$ , que corresponde al espacio tangente de  $\mathbf{Aut}(V)$  en la identidad.



**Definición I.33.** El homomorfismo  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es llamado *representación del álgebra de Lie*  $\mathfrak{g}$ .

Consideremos la función

$$f : G \times G \rightarrow G, \quad \text{definida como} \quad f(g, h) = ghg^{-1} = f_g(h).$$

Observemos que  $f$  es la composición de una traslación izquierda seguida de una traslación derecha. Además, el elemento identidad es un punto fijo. En este caso, decimos que  $f$  es un *automorfismo interno* de  $G$ .

**Definición I.34.** Las representaciones  $\mathbf{Ad}$  y  $\mathbf{ad}$  son llamadas *representaciones adjuntas* de  $G$  y  $\mathfrak{g}$ , respectivamente y están dadas por los homomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbf{Ad} : G &\rightarrow \mathbf{Aut}(\mathfrak{g}) & \text{con} & \quad \mathbf{Ad}(g) = (df_g)_e; \\ \mathbf{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbf{End}(\mathfrak{g}) & \text{con} & \quad \mathbf{ad}(\mathcal{X}) = d\mathbf{Ad}(e)(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

## § 4. Variedades Riemannianas.

Sea  $M$  una variedad diferenciable.

**Definición I.35.** Una *métrica riemanniana* en  $M$  es una correspondencia que asocia a cada  $x \in M$  un producto interno  $\cdot$  en  $\mathbf{T}_x M$  que varía de manera diferenciable en  $x$ .

Esto significa que escogiendo un sistema de coordenadas locales  $(\mathcal{U}, \phi)_x$  de  $x \in M$ , el producto interno  $\cdot : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x \mapsto \mathcal{X}_x \cdot \mathcal{Y}_x$  es una función diferenciable, con  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  campos vectoriales base de  $\mathbf{T}_x M$ .

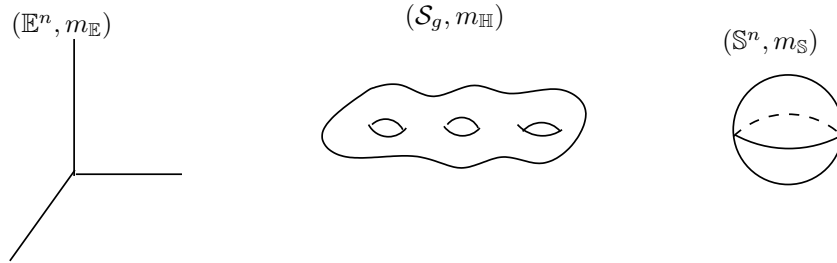


Figura I.6: Variedades riemannianas.

**Definición I.36.** Una variedad riemanniana  $(M, m)$  es una variedad diferenciable  $M$  dotada con una métrica riemanniana  $m$ .

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una familia  $\{f_\alpha\}$  de funciones diferenciables  $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una *partición diferenciable de la unidad* si

- para toda  $\alpha$ ,  $f_\alpha \geq 0$  y el soporte de  $f_\alpha$  está contenido en una vecindad  $\mathcal{V}_\alpha$  que pertenece al sistema de coordenadas locales de la estructura diferenciable de  $M$ ;
- la familia  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  es localmente finita;
- $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ , para todo  $x \in M$ .

Decimos que  $\{f_\alpha\}$  está *subordinada* a la cubierta  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ .

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [BC70].

**Teorema I.2.** *Una variedad diferenciable  $M$  posee una partición diferenciable de la unidad si y sólo si es paracompacta.*

**Observación I.2.** Cualquier variedad topológica (ver definición I.1) es paracompacta.

**Proposición I.3.** *Toda variedad diferenciable  $M$  posee una métrica riemanniana.*

*Demostración.* Sea  $\{f_\alpha\}$  una partición diferenciable de la unidad de  $M$ , subordinada a una cubierta abierta  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  de  $M$ . Para cada  $\alpha$ ,  $\mathcal{V}_\alpha$  pertenece a un sistema de coordenadas locales de la estructura diferenciable en  $M$ . Tenemos que  $\{\mathcal{V}_\alpha\}$  es una cubierta abierta, localmente finita y  $\{f_\alpha\}$  es un conjunto de funciones diferenciables en  $M$  tal que

- i)  $f_\alpha \geq 0$ ,  $f_\alpha = 0$  en el complemento de la cerradura de  $\overline{\mathcal{V}_\alpha}$ ,
- ii)  $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ , para todo  $x \in M$ .

Definimos una métrica riemanniana  $(u_x \cdot v_x)_\alpha$  en cada  $\mathcal{V}_\alpha$ : la inducida por el sistema de coordenadas locales. El conjunto  $A = \{(u_x \cdot v_x)_\alpha\}$  genera un *cono convexo*

$$\left\{ (u_x \cdot v_x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) (u_x \cdot v_x)_\alpha \mid (u_x \cdot v_x)_\alpha \in A, \text{ y } f_\alpha \geq 0 \text{ para todo } \alpha \right\}.$$

Entonces,

$$(u_x \cdot v_x) = \sum_\alpha f_\alpha(x) (u_x \cdot v_x)_\alpha, \quad \text{para todo } x \in M \text{ y } u_x, v_x \in \mathbf{T}_x M,$$

define una métrica riemanniana sobre  $M$ . ■

Vamos a dar una noción de equivalencia entre dos variedades riemannianas.

**Definición I.37.** Sean  $(M_1, m_1)$  y  $(M_2, m_2)$  dos variedades riemannianas y  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un difeomorfismo. Si

$$(u_x \cdot v_x) = (df_x(u_x) \cdot df_x(v_x)) \quad \text{con } x \in M_1 \text{ y } u_x, v_x \in \mathbf{T}_x M_1, \quad (\text{I.2})$$

llamamos a  $f$  *isometría*.

Decimos que  $(M_1, m_1)$  y  $(M_2, m_2)$  son *localmente isométricas* si para todo  $x \in M_1$ , existe una vecindad  $\mathcal{U} \subset M_1$  de  $x$  y un difeomorfismo  $f : \mathcal{U} \rightarrow f(\mathcal{U}) \subset M_2$  satisfaciendo la ecuación (I.2).

**Proposición I.4.** *El conjunto de todas las isometrías  $\phi : M \rightarrow M$  de una variedad riemanniana  $(M, m)$  forma un grupo bajo la composición.*

**Teorema I.3 (Myers-Steenrod [MS38]).** *El grupo de isometrías de una variedad riemanniana es un grupo de Lie.*

**Definición I.38.** Una *variedad riemanniana homogénea* es una variedad riemanniana  $(M, m)$  en la cual actúa transitivamente su grupo de isometrías.

**Proposición I.5. [Arv03]** *Sea  $(M, m)$  una variedad riemanniana homogénea. Entonces, el estabilizador de cualquier  $x \in M$  es un subgrupo compacto del grupo de isometrías de  $M$ .*

Esto es, el estabilizador de cualquier  $x \in M$  es un grupo de Lie compacto.

### Métrica Producto.

Sean  $(M_1, m_1)$  y  $(M_2, m_2)$  dos variedades riemannianas y consideremos la variedad diferenciable  $M_1 \times M_2$ . Denotamos por

$$\phi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1 \quad \text{y} \quad \psi : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2,$$

las proyecciones naturales. Definimos una métrica riemanniana en  $M_1 \times M_2$  de la siguiente forma

$$(u_{(p,q)} \cdot v_{(p,q)}) = \left( d\phi_p(u_{(p,q)}) \cdot d\phi_p(v_{(p,q)}) \right) + \left( d\psi_q(u_{(p,q)}) \cdot d\psi_q(v_{(p,q)}) \right),$$

para todo  $(p, q) \in M_1 \times M_2$  y  $u_{(p,q)}, v_{(p,q)} \in \mathbf{T}_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ .

**Ejemplo 5.** El toro sólido  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^3$  tiene una estructura riemanniana obtenida por escoger en  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , la métrica riemanniana inducida por  $\mathbb{R}^2$  y formar la métrica producto.

## § 5. Hazes Fibrados Principales con Conexiones.

Daremos una definición geométrica de una conexión. La idea intuitiva es descomponer el espacio tangente a  $M$  en  $x \in M$ , como un subespacio tangente a la fibra  $F_x$  que pasa por  $x$  y un espacio horizontal  $\mathcal{H}$  a éste. Definiremos una manera de mover, en algún sentido, la geometría local de  $M$  a lo largo de una curva, es decir, “conectar” la geometría de puntos cercanos. Además, presentamos otras definiciones equivalentes de conexión, una en términos de 1-formas diferenciales y otra mediante la noción de derivada covariante. Finalizamos esta sección con la definición de curvatura. Para un estudio más detallado de estos conceptos se puede consultar [CM93], [DS05] y [DFN85].

### Haz Fibrado Principal.

Sean  $B$  y  $F$  variedades diferenciables.

**Definición I.39.** Un *haz fibrado* consiste de un espacio total  $M$ , un espacio base  $B$ , una función continua  $p : M \rightarrow B$ , llamada *haz de proyección* y una trivialización local.

Esto significa que, para cada  $a \in B$  existe una vecindad abierta  $U \ni a$  y un difeomorfismo

$$\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F,$$

con  $f \circ \phi = p$  y  $f : U \times F \rightarrow U$  la proyección en el primer factor. Llamamos a  $F$  *fibra*.

Decimos que  $M$  es un fibrado sobre  $B$  con fibra  $F$  y lo denotamos por  $(M, B, p, F)$ .

**Definición I.40.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Un  *$G$ -haz fibrado principal* es un haz fibrado  $(M, B, p, F)$  tal que  $F$  coincide con  $G$ , que actúa en  $F$  por multiplicación por la derecha, es decir, por medio de traslaciones derechas  $R_g : G \rightarrow G$ , con  $R_g(x) = xg$ .

En este caso decimos que  $M$  es un fibrado principal sobre  $B$  con fibra y grupo estructural  $G$ .

### § 5.1. Conexión y Transporte Paralelo.

Introducimos el concepto de conexión en un  $G$ -haz sobre una variedad riemanniana  $(M, m)$ , así como en el caso en que tenemos un  $G$ -haz principal y definimos las funciones de transporte paralelo.

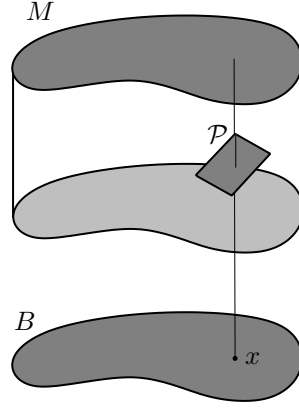


Figura I.7: Conexión.

**Definición I.41.** Sea  $(M, B, p, F)$  un  $G$ -haz sobre una variedad riemanniana  $(M, m)$  y  $n$  la dimensión de  $B$ . Una *conexión* en  $(M, B, p, F)$  es un  $n$ -campo de planos en  $M$  (ver pág. 11), tal que la imagen de cada  $n$ -plano  $P_x \subset T_x M$  bajo  $dp_x : T_x M \rightarrow T_{p(x)} B$  es inyectiva.

**Definición I.42.** Los  $n$ -planos de  $T_x M$  asociados a cada  $x \in M$  son llamados  *$n$ -planos horizontales* de la conexión.

Sea  $\tilde{c} = \tilde{c}(t)$  una curva diferenciable en  $M$ . Si para cada  $t \in [0, 1]$  su vector tangente  $\tilde{c}'(t)$  pertenece al  $n$ -plano horizontal en  $\tilde{c}(t)$ , decimos que  $\tilde{c}$  es *horizontal*.

**Lema I.1.** *Cualquier  $G$ -haz  $(M, B, p, F)$  diferenciable puede ser dotado de una conexión.*

*Demostración.* Sea  $m$  una métrica riemanniana en  $M$  (sabemos que existe por la Proposición I.3). Obtenemos una conexión en  $(M, B, p, F)$  escogiendo el  $n$ -plano horizontal en cada  $x \in M$  como el  $n$ -plano de  $T_x M$ , ortogonal a la fibra  $F_x$  que pasa por  $x$ . ■

### Transporte Paralelo.

Consideremos una conexión en el  $G$ -haz  $(M, B, p, F)$  en la variedad riemanniana  $(M, m)$ .

**Definición I.43.** Sea  $c : [0, 1] \rightarrow B$  una curva diferenciable por pedazos en  $B$ . Un *levantamiento horizontal* de  $c$  es una curva  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow M$  en  $M$ , tal que  $p(\tilde{c}(t)) = c(t)$  con  $t \in [0, 1]$ .

**Lema I.2.** [DFN85] Sean  $(M, B, p, F)$  un  $G$ -haz, cuyas fibras son compactas y  $c : [0, 1] \rightarrow B$  una curva diferenciable por pedazos en  $B$ . Entonces, para cada  $x_0 \in M$  que pertenece a la fibra  $F_{c(0)}$  existe un único levantamiento horizontal  $\tilde{c}(t)$  en  $M$  con  $\tilde{c}(0) = x_0$ .

Por lo tanto, dado un  $G$ -haz diferenciable que satisface la conclusión del Lema I.2, sobre el cual está definida una conexión, existe para cualquier curva diferenciable por pedazos  $c : [0, 1] \rightarrow B$  una función de la fibra pasando por  $b_0 = c(0)$  a la fibra pasando por  $b_1 = c(1)$ , dada por

$$\varphi_c : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}, \quad \text{tal que} \quad \varphi_c(x_0) = \tilde{c}(1) \quad \text{para cada} \quad x_0 \in F_{b_0}.$$

Tenemos que  $\varphi_c$  satisface las siguientes propiedades:

- Depende de manera continua de  $c$ .
- $\varphi_{c_1 c_2} = \varphi_{c_1} \circ \varphi_{c_2}$  y  $\varphi_{c^{-1}} = (\varphi_c)^{-1}$ . Además, si  $c$  es constante,  $\varphi_c$  es la función identidad.
- $\varphi_c$  es independiente de la parametrización de  $c$ .

Hemos construido, de la definición de conexión, las funciones  $\varphi_c$  entre fibras de  $(M, B, p, F)$ . Éstas son llamadas *funciones de transporte paralelo* sobre las fibras del  $G$ -haz.

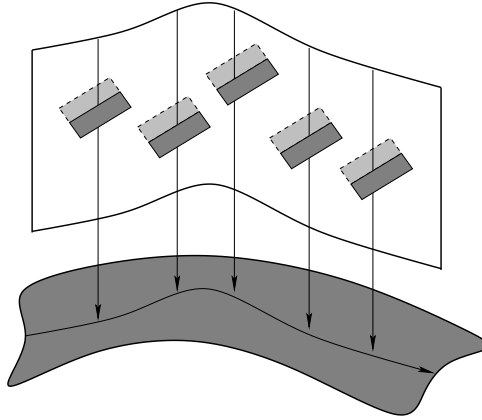


Figura I.8: Transporte paralelo definido por una conexión.

Ahora consideremos un  $G$ -haz principal  $(M, B, p, F)$  sobre una variedad riemanniana  $(M, m)$ , con  $n$  la dimensión de  $B$ .

**Definición I.44.** Una *conexión* o *G-conexión* en  $(M, B, p, F)$  es un  $n$ -campo de planos horizontales en  $M$ , que varía de manera diferenciable, invariante bajo la acción derecha de  $G$  en  $M$ .

De manera análoga al Lema I.1, en este caso el método más sencillo para obtener una conexión en un  $G$ -haz fibrado es por medio de la existencia de una métrica riemanniana  $m$  en  $M$ , con respecto a la cual los elementos de  $G$  son isometrías. Definimos dicha conexión escogiendo como  $n$ -plano horizontal en cada  $x \in M$ , el  $n$ -plano de  $\mathbf{T}_x M$  ortogonal a la fibra  $F_x$  que pasa por  $x$ .

En este caso, definimos las funciones de transporte paralelo  $\varphi_c$  sobre las fibras del  $G$ -haz principal de manera análoga que cuando tenemos un  $G$ -haz; en este caso, todas las  $\varphi_c$  son elementos de  $G$ .

### Definiciones equivalentes de Conexión.

Primero daremos una definición de conexión en términos de una 1-forma diferenciable sobre  $M$ , después en términos de la noción de derivada covariante.

Una *1-forma diferenciable* sobre  $M$  es una función diferenciable del espacio total del haz tangente de  $M$  a  $\mathbb{R}$ , cuya restricción a cada fibra es un funcional lineal sobre el espacio tangente.

En este caso, definimos los subespacios horizontales en términos de una 1-forma diferencial  $\omega$  sobre  $M$  con valores en  $\mathfrak{g} = \mathbf{T}_e F_e$ , donde  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de Lie de  $G$  y  $e$  el elemento identidad de  $G$ .

**Definición I.45.** Una *conexión* en el  $G$ -haz principal es una 1-forma sobre  $M$  con valores en  $\mathfrak{g}$ ,  $\omega : TM \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $\omega|_e$  es la 1-forma

$$\omega_e = \omega|_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \text{ con } \omega(\mathcal{X}) = \mathcal{X}.$$

Observemos que  $\omega_e$  es distinta de cero cuando  $\mathcal{X}$  es no nulo.

Existe otra forma de definir una conexión utilizando la idea de “*derivar*” secciones diferenciables del haz tangente de  $M$ . Daremos una definición local y una global.

**Definición I.46.** Una *conexión local* en  $x \in M$  es una función que asigna a cada vector tangente  $v \in \mathbf{T}_x M$  y a cada campo vectorial  $\mathcal{X}$  en  $M$  un nuevo

vector tangente

$$\nabla_v \mathcal{X} \in \mathbf{T}_x M,$$

que es bilineal como función de  $v$  y  $\mathcal{X}$ . Además, si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con valores reales y  $f\mathcal{X}$  es el campo vectorial dado por  $(f\mathcal{X})_y = f(y)\mathcal{X}_y$ , entonces  $\nabla$  satisface

$$\nabla_v(f\mathcal{X}) = (vf)\mathcal{X}_x + f(x)\nabla_v\mathcal{X},$$

donde  $vf$  denota la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $v$ .

Llamamos a  $\nabla_v\mathcal{X}$  *derivada covariante* de  $\mathcal{X}$  en la dirección de  $v$ .

**Definición I.47.** Una *conexión global* o simplemente una *conexión* en  $M$  es una función que asigna a cada  $x \in M$  una conexión local y satisface las siguientes propiedades:

- Sean  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  campos vectoriales diferenciables en  $M$ , entonces el campo vectorial  $\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$  definido por  $(\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y})_x = \nabla_{\mathcal{X}_x}\mathcal{Y}$  es diferenciable;
- $\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}$  es bilineal como función de  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ ;
- $\nabla_{f\mathcal{X}}\mathcal{Y} = f(\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y})$ ;
- $\nabla_{\mathcal{X}}(f\mathcal{Y}) = (\mathcal{X}f)\mathcal{Y} + f(\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y})$ .

Consideremos una *curva parametrizada*  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  en  $M$ .

**Definición I.48.** Un *campo vectorial*  $\mathcal{X}$  a lo largo de  $\alpha$  es una función que asigna a cada  $t \in \mathbb{R}$ , un vector tangente  $v \in \mathbf{T}_{\alpha(t)}M$ .

Esta función es diferenciable en el siguiente sentido: para cualquier función diferenciable  $f$  sobre  $M$ , la correspondencia  $t \mapsto vf$  define una función diferenciable sobre  $\mathbb{R}$ .

Por otro lado, supongamos que  $M$  está dotada de una conexión. Entonces, cualquier campo vectorial  $\mathcal{X}$  a lo largo de  $\alpha$  determina un nuevo campo vectorial  $D\mathcal{X}/dt$  a lo largo de ella, llamado *derivada covariante* de  $\mathcal{X}$ . El operador  $\mathcal{X} \mapsto D\mathcal{X}/dt$  se caracteriza por satisfacer las siguientes propiedades:

- $\frac{D(\mathcal{X}+\mathcal{Y})}{dt} = \frac{D\mathcal{X}}{dt} + \frac{D\mathcal{Y}}{dt}$ ;
- si  $f$  es una función diferenciable con valores reales sobre  $\mathbb{R}$ , entonces

$$\frac{D(f\mathcal{X})}{dt} = \frac{df}{dt}\mathcal{X} + f\frac{D\mathcal{X}}{dt};$$



- si  $\mathcal{X}$  es inducido por un campo vectorial  $\mathcal{Y}$  en  $M$ ; es decir,  $v = \mathcal{Y}_{\alpha(t)}$  para cada  $t$ , entonces  $D\mathcal{X}/dt$  es igual a  $\nabla_{d\alpha/dt}\mathcal{Y}$  (derivada covariante de  $\mathcal{Y}$  en la dirección de la derivada de  $\alpha$ , con respecto de  $t$ ).

Decimos que un campo vectorial  $\mathcal{X}$  a lo largo de  $\alpha$  en  $M$  es *paralelo* si su derivada covariante  $D\mathcal{X}/dt$  es idénticamente cero.

### Conexión Riemanniana.

**Definición I.49.** Una conexión  $\nabla$  en una variedad riemanniana  $(M, m)$  es *compatible* con  $m$  si para cualesquiera curva parametrizada  $\alpha$  y campos vectoriales paralelos  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  a lo largo de  $\alpha$  en  $M$ , tenemos que  $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}$  es constante.

La siguiente proposición justifica, en cierto modo, la definición dada. La demostración puede consultarse en [DC88].

**Proposición I.6.** Sea  $(M, m)$  una variedad riemanniana. Una conexión  $\nabla$  en  $M$  es compatible con  $m$  si y sólo si para todo par de campos vectoriales  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha$ , se tiene

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) = \left(\frac{D\mathcal{X}}{dt} \cdot \mathcal{Y}\right) + \left(\mathcal{X} \cdot \frac{D\mathcal{Y}}{dt}\right).$$

**Definición I.50.** Una conexión  $\nabla$  en  $(M, m)$  es *simétrica* si satisface

$$\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} - \nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{X} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}], \quad \text{para todo } \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(M).$$

El siguiente resultado es considerado como el **lema fundamental de la geometría riemanniana**. Una demostración de éste puede consultarse en [Mil69] y [DC88].

**Lema I.3.** Dada una variedad riemanniana  $(M, m)$ , existe una única conexión  $\nabla$  en  $M$  simétrica y compatible con  $m$ .

La conexión dada por el lema I.3 es llamada *conexión de Levi Civita* o *conexión riemanniana* de  $M$ .

### § 5.2. Curvatura.

Vamos a introducir la noción de *curvatura* en términos de formas diferenciales.

Consideremos un  $G$ -haz principal  $(M, B, p, F)$  en una variedad riemanniana  $(M, m)$ . Sea  $\omega$  una 1-forma diferencial en con valores en  $\mathfrak{g}$ , el álgebra de Lie de  $G$ .

**Definición I.51.** La *curvatura* es una 2-forma  $\Omega$  en  $M$  con valores en  $\mathfrak{g}$ , dada por

$$\Omega(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{X}(\omega(\mathcal{Y})) - \mathcal{Y}(\omega(\mathcal{X})) - \omega([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]) + [\omega(\mathcal{X}), \omega(\mathcal{Y})],$$

con  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ .

## § 6. Variedades Riemannianas Completas.

En esta sección iniciamos el estudio de las relaciones entre propiedades locales (sólo dependen del comportamiento en una vecindad) y globales (dependen del comportamiento en un todo) en variedades riemannianas. Para esto, necesitamos definir un ambiente natural y éste resulta ser lo que se conoce como variedades riemannianas completas. Cuya importancia radica en el hecho de que dados dos puntos cualesquiera existe una geodésica mínima que los une.

Al final de esta sección presentamos el Teorema de Hopf-Rinow, llamado así en honor a H. Hopf y a su estudiante W. Rinow, el cual establece una equivalencia entre las nociones de completitud geodésica, completitud topológica y completitud métrica en una variedad riemanniana.

Sean  $(M, m)$  una variedad riemanniana dotada con una conexión compatible con  $m$  y  $c : [a, b] \rightarrow M$  una curva parametrizada.

**Definición I.52.** Decimos que  $c$  es una *geodésica* en  $t_0 \in [a, b]$  si

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{dc}{dt} \right) \Big|_{t_0} = 0.$$

Si  $c$  es una geodésica en  $t$ , para todo  $t \in [a, b]$ , llamamos a  $c$  *geodésica*.

Abusando de la notación, algunas veces llamaremos geodésica a la imagen de  $[a, b]$  bajo  $c$ .

Sea  $c : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dc}{dt} \right) = 2 \left( \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dc}{dt} \right) = 0;$$

es decir, la longitud de  $dc/dt$  es constante a lo largo de  $c$ .

Sea  $v_x \in T_x M$  con  $x \in M$ , un vector tangente a  $M$  en  $x$  para el cual existe una geodésica  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tal que

$$c(0) = x \quad \text{y} \quad \left. \frac{dc}{dt} \right|_0 = c'(0) = v_x.$$

El hecho que  $c$  existe y mas aún, que es única se sigue de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver por ejemplo, [DC88], [Spi79]).

Definimos la *función exponencial* de  $v_x$  por

$$\exp(v_x) = \exp_x(v_x) = c(1).$$

Por lo tanto, podemos describir la geodésica  $c$  como  $c(t) = \exp_x(tv_x)$ . En general, esta función sólo está definida localmente (debido también a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias).

**Definición I.53.** Decimos que  $M$  es *geodésicamente completa* si para todo  $x \in M$ ,  $\exp_x(v_x)$  está definida para todo  $v_x \in \mathbf{T}_x M$ .

En otras palabras,  $M$  es geodésicamente completa si cualquier geodésica  $c : [0, 1] \rightarrow M$  se puede extender a una geodésica definida en todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 6.** Las variedades riemannianas  $(\mathbb{E}^n, m_{\mathbb{E}^n})$ ,  $(\mathbb{S}^n, m_{\mathbb{S}^n})$  y  $(\mathbb{T}^n, m_{\mathbb{T}^n})$  son variedades geodésicamente completas.

Vamos a introducir una noción de distancia en  $M$  de la siguiente manera.

**Definición I.54.** Dados  $x, y \in M$  consideramos todas las curvas diferenciables por pedazos  $c_i$  que unen  $x$  a  $y$ . La *distancia*  $d(x, y)$  en  $M$  está dada por

$$d(x, y) = \inf_i l(c_i),$$

con  $l$  la longitud de  $c_i$ .

**Ejemplo 7.** La variedad riemanniana  $(M, m)$  con  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$  y  $m$  la métrica euclidiana, no es una variedad geodésicamente completamente como vemos a continuación.

Sea  $x \neq 0$  cualquier punto en  $M$  y  $y$  su punto antípoda. A pesar de que la distancia de  $x$  a  $y$  es  $2|x|$ , que es el ínfimo sobre todas las longitudes de todas las posibles curvas uniendo  $x$  a  $y$ , no hay una curva que alcance esta longitud. Si existiera tal curva tendría que pasar por el origen, pero cualquier geodésica  $c : [0, 1] \rightarrow M$  es tal que  $c(t) \in M$  para todo  $t \in [0, 1]$  y por lo tanto tendríamos una contradicción.

**Proposición I.7.** [DC88]  $(M, d)$  es un espacio métrico y la topología inducida por  $d$  en  $M$ , coincide con la topología de  $M$ .

El siguiente teorema nos muestra la importancia del concepto de completitud. Éste afirma que es posible definir la función exponencial en todo el espacio tangente a una variedad riemanniana si y sólo si ésta es completa, como espacio métrico. En particular, se sigue que variedades riemannianas compactas son geodésicamente completas. La demostración puede consultarse en [Mil69], así como en [DC88].

**Teorema de Hopf-Rinow.** [HR31] Sean  $(M, m)$  una variedad riemanniana y  $x \in M$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) La función exponencial  $\exp_x$  está definida en todo  $\mathbf{T}_x M$ .
- ii) Los conjuntos cerrados y acotados de  $M$  son compactos.
- iii)  $M$  es completa, como espacio métrico.
- iv)  $M$  es geodésicamente completa.
- v) Existe una sucesión de conjuntos compactos  $K_n \subset M$ , con  $K_n \subset K_{n+1}$  y  $\bigcup_n K_n = M$ , tal que si  $y_n \notin K_n$  entonces,  $d(x, y_n) \rightarrow \infty$ .

Además, cada una de las afirmaciones anteriores implica la siguiente

- vi) para todo  $y \in M$  existe una geodésica  $c$  uniendo  $x$  a  $y$ , tal que  $l(c) = d(x, y)$ .

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del Teorema de Hopf-Rinow.

**Corolario I.1.** Sea  $(M, m)$  una variedad riemanniana compacta. Entonces,  $M$  es geodésicamente completa.

## § 7. Foliaciones.

A grandes rasgos, una foliación de dimensión  $n - k$  de una variedad diferenciable  $M$  es una descomposición de  $M$  en variedades conexas contenidas en  $M$  de dimensión  $n - k$ , llamadas *hojas*. Éstas se aglomeran localmente como los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$  con la segunda coordenada constante.

Uno de los ejemplos más sencillos de foliaciones de dimensión  $n - k$  es la foliación de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ , donde las hojas son  $(n - k)$ -planos de la forma  $\mathbb{R}^{n-k} \times \{c\}$ , con  $c \in \mathbb{R}^k$ . (ver figura I.9).

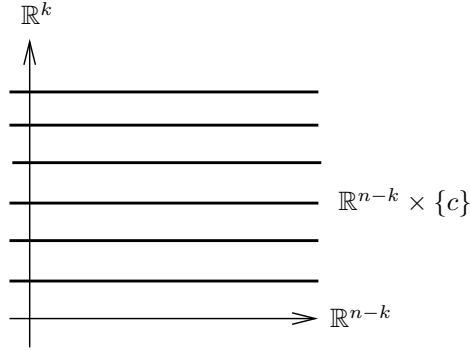


Figura I.9: Foliación de  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ .

Consideremos a  $M$  y a  $\mathbb{R}^n$  como el producto  $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ . Sea  $\mathcal{G}$  el pseudogrupo generado por difeomorfismos  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  abierto, que preservan factores horizontales. Es decir,  $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(y))$ , con  $\phi_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

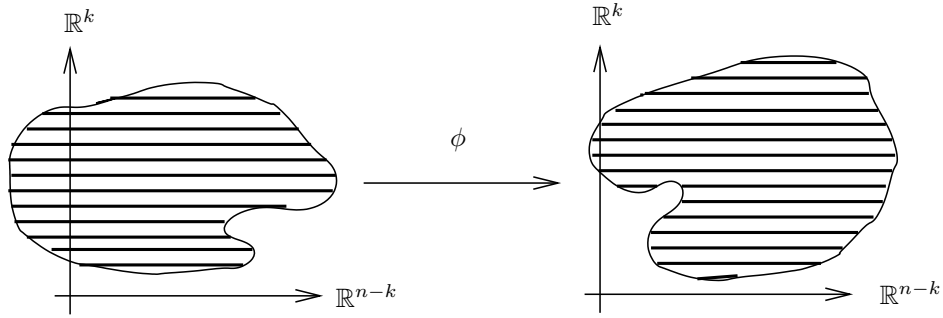


Figura I.10: Foliación de dimensión  $n - k$ .

**Definición I.55.** La  $\mathcal{G}$ -estructura en  $M$  recién descrita, es llamada *foliación* de  $M$  de codimensión  $k$  ó dimensión  $n - k$  y la denotamos por  $\mathcal{F}$ .

Foliaciones de dimensión uno existen en una gran cantidad de variedades diferenciables. Por ejemplo, cualquier campo vectorial diferenciable no nulo  $\mathcal{X}$  tiene una foliación asociada, obtenida al recorrer sus curvas integrales.

### § 7.1. Condición de Integrabilidad.

**Definición I.56.** Un campo de  $k$ -planos  $\mathcal{P}$  en  $M$  es *involutivo* si el conjunto de campos vectoriales tangentes a él, es cerrado bajo la operación corchete  $[\cdot, \cdot]$ .

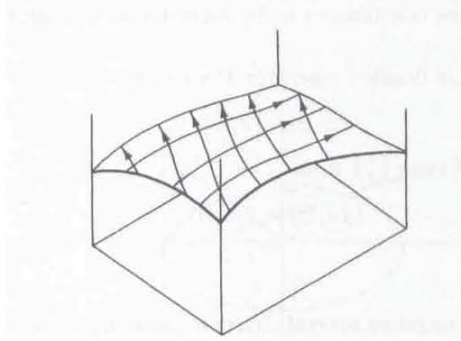


Figura I.11: Campos vectoriales cuyo corchete de Lie es cero.

En otras palabras,  $\mathcal{P}$  es involutivo si dados campos vectoriales  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  en  $M$ , tales que para todo  $x \in M$ ,  $\mathcal{X}_x, \mathcal{Y}_x \in \mathcal{P}_x$ , tenemos que  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_x \in \mathcal{P}_x$ . Además, si existe una foliación  $\mathcal{F}$  de dimensión  $n - k$  en  $M$  tal que  $\mathcal{P}$  es el campo de  $(n - k)$ -planos (ver pág. 11) tangentes a  $\mathcal{F}$ , decimos que  $\mathcal{P}$  es *completamente integrable*.

Nos interesa tener un criterio que nos permita saber si un campo de  $k$ -planos es *completamente integrable*. Este criterio está dado por el siguiente resultado, debido a F. G. Frobenius. Una versión de este resultado en términos de formas diferenciales puede consultarse en [Thu97] y [CN79].

**Teorema de Frobenius [CN79].** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{P}$  un campo de  $k$ -planos en  $M$ . Entonces,  $\mathcal{P}$  es completamente integrable si y sólo si es involutivo. Más aún, la foliación tangente a  $\mathcal{P}$  es única.

En términos de conexiones y curvatura tenemos

**Proposición I.8. [DS05]** La curvatura de una variedad riemanniana  $(M, m)$  es idénticamente cero si y sólo si la conexión de Levi Civita del  $G$ -haz principal  $(M, B, p, F)$  en  $M$  es completamente integrable.

## § 8. Estructuras de Contacto.

Así como las foliaciones están relacionadas con campos de  $k$ -planos completamente integrables, las estructuras de contacto están relacionadas con una clase distinta de campos de  $k$ -planos: los que son completamente no integrables. Una estructura de contacto está localmente “torcida” en cada punto y podemos pensarla como una especie de **antifoliación** (ver [CN79]).

Sean  $\mathcal{P}$  un campo de  $k$ -planos completamente no integrable en  $\mathbb{R}^n$  y  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$ , con  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  abierto. Si  $\phi$  preserva  $\mathcal{P}$  lo llamamos *difeomorfismo de contacto*. El conjunto de estos difeomorfismos forma unseudogrupo  $\mathcal{C}$ , el cual llamamos *seudogrupo de contacto*.

**Definición I.57.** Una  $\mathcal{C}$ -estructura sobre una variedad diferenciable  $M$  es llamada *estructura de contacto* en  $M$ .

**Ejemplo 8.** Sea  $\mathcal{P}$  un campo de 2-planos en  $\mathbb{R}^3$  que asocia a cada punto  $(x, y, z)$  el 2-plano generado por  $\{(1, 0, 0), (0, -1, x)\}$ . Observemos que  $\mathcal{P}$  define una conexión para el haz trivial  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Veamos que  $\mathcal{P}$  es completamente no integrable.

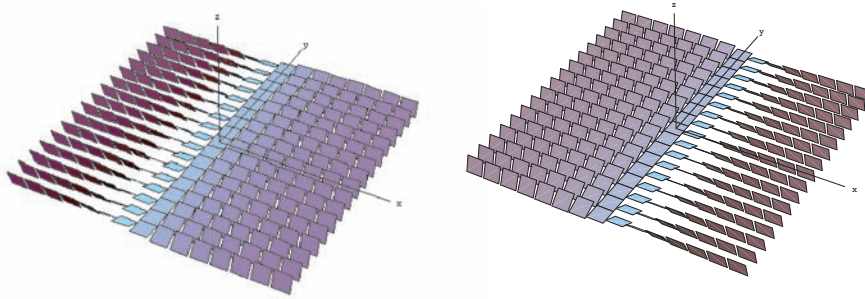


Figura I.12: Estructura de contacto en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\mathcal{P}_{(x,y,z)} \in \mathcal{P}$  el 2-plano tangente a  $(x, y, z)$ , el cual es generado por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Entonces,  $\mathcal{P}_{(0,y,z)}$  es un plano horizontal. Si nos movemos a  $(1, 0, 0)$ , tenemos que  $\mathcal{P}_{(1,0,0)}$  está generado por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{P}_{(1,0,0)}$  es tangente al eje  $x$ . Pero se ha inclinado, en sentido de las manecillas

del reloj,  $45^\circ$ .

En general, si comenzamos en el origen  $(0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{P}_{(0,0,0)}$  es completamente horizontal; es decir, tiene una inclinación de  $0^\circ$ . Conforme nos alejamos del origen sobre el eje  $X$ ,  $\mathcal{P}$  se inclinará en sentido de las manecillas del reloj. Cuando  $x \rightarrow \infty$ , la inclinación tiende a  $90^\circ$ . Además, hay un comportamiento similar sobre todos los rayos perpendiculares al plano  $yz$ .

Otra manera de pensar la estructura de contacto estándar en  $\mathbb{R}^3$  es por medio de la proyección  $\pi_x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  al plano  $yz$ , a lo largo de rectas paralelas al eje  $x$ . Sea  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cualquier difeomorfismo del plano  $yz$ . Hay un único difeomorfismo de contacto  $\tilde{\phi}$ , definido en casi todo  $\mathbb{R}^3$ , que preserva la foliación por rectas paralelas al eje  $x$  y se proyecta a  $\phi$  bajo  $\pi_x$ .

Sea  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , la proyección de  $\mathcal{P}$  al 2-plano  $yz$  es una recta con pendiente  $x$ . La imagen del vector  $(1, x)$  en el punto  $(y, z)$  bajo  $d\phi$  es algún otro vector; definimos la coordenada  $x$  de  $\tilde{\phi}(p)$  como la pendiente de ese vector. Si la pendiente es infinita,  $\tilde{\phi}$  está indefinida en  $p$ . Por construcción,  $\tilde{\phi}$  preserva  $\mathcal{P}$ . Si la imagen de rectas verticales bajo  $\phi$  son rectas verticales, la pendiente nunca es infinita y obtenemos un automorfismo de contacto de  $\mathbb{R}^3$ . Los automorfismos de contacto obtenidos por esta construcción son precisamente aquellos que preservan la foliación de  $\mathbb{R}^3$  por rectas paralelas al eje  $x$ .

Podemos evitar el hecho que  $\tilde{\phi}$  esté indefinida en ciertos puntos añadiendo un punto al infinito en el eje  $x$  y así completar el círculo de direcciones. De este modo, extendemos  $\mathcal{P}$  a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$  tal que a  $x = \infty$  corresponden 2-planos verticales. En este caso, pensamos a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$  como el espacio tangente proyectivizado de  $\mathbb{R}^2$ , donde un elemento de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$  es un punto en el 2-plano junto con una recta pasando por dicho punto.

Formalmente, la estructura de contacto en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$  se define por medio de las siguientes coordenadas locales

- la función identidad, siempre que  $x$  es finito;
- la función dada por  $(x, y, z) \mapsto (-1/x, z, -y)$ , cuando  $x \neq 0$ .

**Proposición I.9.** *El haz tangente circular de una 2-variedad diferenciable  $\mathcal{S}$  tiene una estructura de contacto  $\mathcal{C}$ , preservada por el diferencial de cualquier difeomorfismo.*



*Demostración.* Consideremos  $\mathbb{R}^2$  y su haz tangente unitario  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Este espacio es un cubriente doble de la variedad de contacto  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ . La fibra del haz es un círculo de vectores tangentes unitarios. Dotamos a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  con la estructura de contacto inducida. Además, los difeomorfismos de  $\mathbb{R}^2$  se levantan a automorfismos de contacto de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ . Sea  $\mathfrak{D}$  un atlas para una 2-variedad  $\mathcal{S}$ . Las estructuras de contacto sobre abiertos  $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$  que corresponden a los dominios de los sistemas de coordenadas locales en  $\mathfrak{D}$ , generan una estructura de contacto en el haz tangente circular de  $\mathcal{S}$ . ■

Por la proposición anterior sabemos que existe una estructura de contacto en el haz tangente unitario de una 2-variedad diferenciable  $\mathcal{S}$ . Si además  $\mathcal{S}$  es geométrica, el siguiente resultado nos relaciona la existencia de una estructura de contacto en su haz tangente unitario con el hecho de que su curvatura sea distinta de cero. La demostración puede consultarse en [Thu97].

**Teorema I.4.** *La conexión de Levi-Civita en  $\mathbf{T}^1\mathcal{S}$ , el haz tangente unitario de una 2-variedad geométrica  $\mathcal{S}$ , define una estructura de contacto si y sólo la curvatura de  $\mathcal{S}$  es estrictamente positiva o estrictamente negativa.*

El siguiente teorema fue demostrado por R. Lutz y J. Martinet en [Lut71] y [Mar71] respectivamente, basándose en el hecho de que toda 3-variedad cerrada y orientable puede obtenerse de  $\mathbb{S}^3$  por cirugía. Una idea de estas demostraciones se encuentra en [Gei06]. Una demostración, usando una descripción de 3-variedades como libros abiertos debida a J. Alexander (ver [Ale23]), fue dada por W. P. Thurston y H. E. Winkelnkemper y puede consultarse en [TW75].

**Teorema.** *Toda 3-variedad  $M$  admite una estructura de contacto.*

## CAPÍTULO II

# Modelos Geométricos.

No hay modo de entender bien al hombre  
si no se repara en que la matemática  
brota de la misma raíz que la poesía,  
del don imaginativo.

**José Ortega y Gasset**  
*Filósofo Español*

La palabra **geometría** viene de la palabra griega “*γεωμετρειν*” que significa medición de la tierra. A través del tiempo se ha intentado definir lo que es geometría. Una de las primeras definiciones fue la de Euclides, presentada en su libro titulado *Los Elementos*, obra que perduró como única verdad geométrica hasta el siglo XIX (ver [Euc56]). Sin embargo, entre los postulados en los que Euclides se apoyó uno (el quinto) causó controversia desde el principio. Durante los siguientes siglos, uno de los principales problemas fue determinar si este postulado era independiente de los otros cuatro. Uno de los primeros en considerar la posibilidad de crear “geometrías no euclidianas” fue C. F. Gauss, pero J. Bolyai y N. I. Lobachevsky son los primeros que publicaron acerca de una geometría que no verifica el quinto postulado, ocasionando con este hecho una fuerte crisis en la matemática de ese tiempo.

Durante el siglo XIX, aparecieron varias vertientes a seguir. La primera está relacionada con el trabajo que G. F. B. Riemann presentó para su “*Habilitationsvortrag*” (ver [Rie73]). Éste consistió en una generalización de los resultados de C. F. Gauss sobre 2-variedades, aplicado a dimensión  $n$ . Además, G. F. B. Riemann introdujo el concepto de variedad diferenciable, así como la idea de dotar de una métrica a los espacios tangentes de éstas. De esta manera, cualquier modelo de un espacio de dimensión  $n$  puede ser estudiado como una variedad diferenciable y al introducir en ella una métrica se determina la geometría que la gobierna. Estos resultados son lo que, hoy en día, conocemos como *geometría diferencial*.

La segunda fue desarrollada por E. Beltrami (ver [Bel68]), quien fue el primero en demostrar que la superficie conocida como seudoesfera modelaba una parte del espacio hiperbólico. Más aún, definió lo que hoy conocemos como *modelo de Klein*, *modelo de la bola de Poincaré* y *modelo del semiespacio superior de Poincaré*, mostrando que la geometría hiperbólica era consistente.

Años más tarde, F. Klein en su famoso *Programa de Erlangen* dio una nueva definición de geometría (ver [Kle93]). Según F. Klein, una geometría es el estudio de propiedades invariantes bajo un tipo de transformaciones. Estas transformaciones tienen estructura de grupo bajo la operación de composición. El trabajo de F. Klein es fundamental, ya que por un lado nos permite clasificar las geometrías, comprendiendo cual es una “subgeometría” de cual, por otro lado nos permite comprender que es el estudio general de la geometría (como disciplina matemática).

Como vemos, definir geometría ha sido una ardua tarea. En este capítulo presentamos nuestro concepto de geometría o modelo geométrico (según W. P. Thurston en [Thu97], otras referencias son [BMP03], [Bon02] y [Sco83]). El tener una definición precisa, nos permitirá ir en busca de los ocho modelos correspondientes a dimensión tres, dados a conocer por W. P. Thurston en su artículo [Thu82].

## § 1. Definición de Modelo Geométrico.

Sea  $M$  una variedad diferenciable.

**Definición II.1.** Sean  $m$  una métrica sobre  $M$  y  $x, y \in M$ . Si existen vecindades  $x \in \mathcal{U} \subset M$ ,  $y \in \mathcal{V} \subset M$  y una isometría  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  con  $\phi(x) = y$ , decimos que  $m$  es *localmente homogénea*.

$M$  admite una *estructura geométrica* si admite una métrica riemanniana  $m$  localmente homogénea y completa. En este caso, el espacio cubriente universal de  $M$  que denotamos por  $\widetilde{M}$ , hereda una métrica riemanniana  $\widetilde{m}$  localmente homogénea y completa. Ya que  $\widetilde{M}$  es simplemente conexa,  $\widetilde{m}$  es homogénea (ver [Sin60]). Es decir, el grupo de isometrías de  $\widetilde{M}$ , respecto a  $\widetilde{m}$ , actúa transitivamente en  $\widetilde{M}$ .

**Definición II.2.** Una *geometría* o *modelo geométrico* es una pareja  $(M, G)$ , donde  $M$  es una variedad diferenciable y  $G$  es un grupo de difeomorfismos de  $M$  que preservan orientación, tal que

- $M$  es conexa y simplemente conexa;
- $M$  posee una estructura geométrica, invariante bajo  $G$ ;
- $(M, G)$  es maximal;
- existe al menos una variedad diferenciable compacta que admite una estructura geométrica modelada por  $(M, G)$ .

Decimos que  $(M, G)$  es *maximal* si no existe otro grupo de difeomorfismos de  $M$ , digamos  $G'$ , con  $G \subset G'$ ,  $G \neq G'$  y  $(M, G')$  satisfaciendo la definición II.2.

Una variedad diferenciable compacta  $N$  admite una estructura geométrica modelada por  $(M, G)$  si puede representarse como la variedad cociente  $M/\Gamma$ , con  $\Gamma < G$  subgrupo discreto que actúa libremente en  $M$ .

En este caso, decimos que  $\Gamma$  es *cocompacto* y llamamos a  $N$  *variedad geométrica*. Además, el grupo  $G$  corresponde al grupo de isometrías de  $M$  que preservan orientación y lo denotamos por  $\mathbf{Isom}(M)$ .

Sea  $\mathbf{Est}(M)_x = \{\phi \in \mathbf{Isom}(M) \mid \phi(x) = x\}$ , el estabilizador de  $x \in M$ .

**Definición II.3.** Un modelo geométrico  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  es *isotrópico* si para cada  $x \in M$ ,  $\mathbf{Est}(M)_x$  actúa transitivamente en su haz tangente unitario  $\mathbf{T}^1M$ .

En otras palabras,  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  es isotrópico si, además de verse igual en cualquier punto, se ve igual en cualquier dirección. Como consecuencia, cualquier estructura geométrica sobre  $M$  tiene curvatura seccional constante. Un resultado clásico en geometría riemanniana es el siguiente: para dimensión  $n \geq 2$ , existen exactamente tres modelos geométricos isotrópicos  $(\mathbb{S}^n, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^n))$ ,  $(\mathbb{E}^n, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^n))$  y  $(\mathbb{H}^n, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^n))$  (ver [Wol84]).

De aquí en adelante, asumiremos que una variedad diferenciable  $M$  es conexa, con frontera vacía, orientable y la llamaremos  $n$ -variedad, con  $n$  su dimensión.

## § 2. Modelos Geométricos en Dimensión Dos.

A manera de introducción a los modelos geométricos en dimensión tres, primero consideraremos 2-variedades. En dimensión dos existen tres modelos geométricos que corresponden a las parejas

- $(\mathbb{S}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2))$ ;
- $(\mathbb{E}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^2))$ ;
- $(\mathbb{H}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2))$ ;

llamadas *geometría esférica*, *eucladiana* e *hiperbólica*, respectivamente.

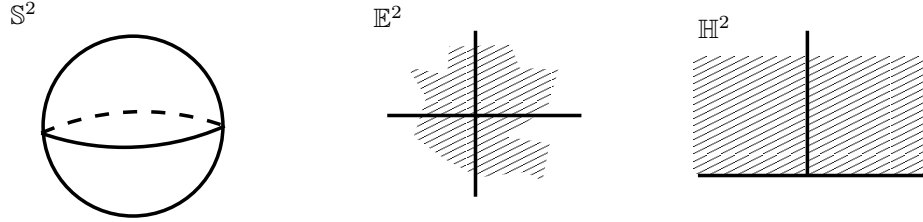


Figura II.1: Modelos geométricos en dimensión dos.

El siguiente resultado es un teorema de clasificación y nos da una descripción de todas las superficies de Riemann. Se atribuye a P. Koebe, quien publicó por primera vez una demostración completa en su artículo [Koe07].

**Teorema de Uniformización.** *Toda superficie de Riemann simplemente conexa  $\mathcal{S}$  es biholómicamente equivalente a*

- *la esfera de Riemann,*
- *el plano complejo ó*
- *el disco unitario en el plano complejo.*

Una versión más geométrica y topológica de este teorema es la siguiente (ver [Ca']).

**Teorema de Uniformización.** *Cualquier 2-variedad simplemente conexa es difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  ó  $\mathbb{R}^2$ .*

Por lo tanto, el espacio cubriente universal de cualquier 2-variedad debe ser  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{H}^2$  y tenemos el siguiente resultado.

**Corolario II.1.** *Cualquier 2-variedad es difeomorfa al espacio cociente de  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{E}^2$  ó  $\mathbb{H}^2$  por un subgrupo discreto de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2)$ ,  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^2)$  ó  $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$  respectivamente, actuando libre, propia y discontinuamente.*

### § 3. Modelos Geométricos en Dimensión Tres.

En dimensión tres, tenemos los correspondientes modelos geométricos isotrópicos  $(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$ ,  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3))$  ó  $(\mathbb{H}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3))$ .

Desafortunadamente estos modelos no son suficientes, pues es fácil encontrar 3-variedades compactas cuya estructura geométrica no puede ser modelada por alguno de ellos. Por ejemplo  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , cuyo espacio cubriente universal es  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , el cual no es homeomorfo a  $\mathbb{S}^3$  ó  $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{E}^3 \cong \mathbb{H}^3$ .

Por esta razón necesitamos aumentar el número de modelos geométricos. En total, existen ocho y los cinco que aún no mencionamos no son isotrópicos.

**Definición II.4.** En dimensión tres, un modelo geométrico  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  no es isotrópico si para cada  $x \in M$  existe  $\mathcal{L}_x \subset TM$  tal que para todo  $\phi \in \mathbf{Isom}(M)$ , la imagen de  $\mathcal{L}_x$  bajo  $d\phi_x$  es  $\mathcal{L}_{\phi(x)}$ .

#### Modelos geométricos en dimensión tres.

Isotrópicos	No isotrópicos		
	Productos Triviales	Productos no triviales	
$(\mathbb{E}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3))$	$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1))$	$(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$	$(\mathbb{R}_{Nil}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{Nil}^3))$
$(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$	$(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1))$		$(Sol, \mathbf{Isom}(Sol))$
$(\mathbb{H}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3))$			

# CAPÍTULO III

## Los Ocho Modelos Geométricos.

There are actually eight different flavours of three-dimensional geometry describing eight different classes of 3-manifolds.

**William P. Thurston**  
*How to See 3-manifolds*

En este capítulo describimos cada uno de los ocho modelos geométricos en dimensión tres y presentamos ejemplos de 3-variedades geométricas. Se pueden consultar las siguientes referencias [BMP03], [Bon02], [Sco83], [Thu82] y [Thu97].

### § 1. Geometría Euclidiana.

La geometría euclidiana nos es familiar ya que se aproxima mucho a la geometría del espacio en que vivimos, al menos a corta distancia. En esta sección describimos el modelo geométrico euclidiano, su grupo de isometrías, sus geodésicas, entre otras cosas (ver [Bea83] y [Rat94]). Vamos a definir que es un grupo de Bieberbach. Estos grupos deben su nombre al matemático alemán L. Bieberbach, quien estudió los grupos cristalográficos y describió algunas de sus propiedades en los teoremas conocidos como Teoremas de Bieberbach.

Consideremos el espacio real en dimensión tres  $\mathbb{R}^3$  con el producto interno dado por

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{III.1}$$

con  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ .

**Definición III.1.**  $\mathbb{R}^3$  dotado con la métrica riemanniana

$$ds_{\mathbb{E}^3}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

es el modelo de esta geometría, lo llamamos *espacio euclidiano* y lo denotamos por  $\mathbb{E}^3$ .

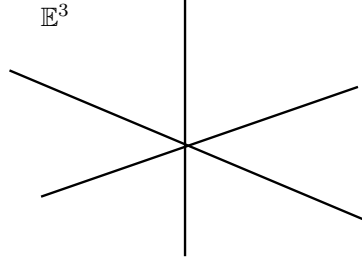


Figura III.1: Espacio euclidiano.

**Observación III.1.** El producto interno definido por la ecuación III.1 es llamado *producto interno euclidiano*. La métrica  $ds_{\mathbb{E}^3}^2$  es conocida como *métrica euclidiana*.

### Reflexiones.

Sea  $a \in \mathbb{E}^3$  y  $t$  un número real. Consideremos el 2-plano de  $\hat{\mathbb{E}}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}$  definido como

$$\mathcal{P}(a, t) = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid x \cdot a = t\} \cup \{\infty\}.$$

**Definición III.2.** Una *reflexión*  $\rho$  de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a, t)$  está dada por  $\rho(x) = x + sa$ , con  $s \in \mathbb{R}$ , tal que  $x + \frac{1}{2}sa$  es un punto en  $\mathcal{P}(a, t)$ .

Por lo tanto, tenemos la fórmula explícita

$$\rho(x) = x - 2(x \cdot a - t) \frac{a}{|a|^2}. \quad (\text{III.2})$$

Sean  $c \in \mathbb{E}^3$  y  $r$  un número real positivo. La 2-esfera en  $\mathbb{E}^3$  de radio  $r$ , centrada en  $c$  se define como

$$\mathbb{S}(c, r) = \{x \in \mathbb{E}^3 \mid |x - c| = r\}.$$

**Definición III.3.** Una *reflexión ó inversión*  $\sigma$  de  $\mathbb{E}^3$  sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(c, r)$  está dada por  $\sigma(x) = c + s(x - c)$ , con  $s \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $|\sigma(x) - c| |x - c| = r^2$ .



Tenemos la fórmula explícita

$$\sigma(x) = c + \left( \frac{r}{|x - c|} \right)^2 (x - c). \quad (\text{III.3})$$

Brevemente presentamos la construcción geométrica del punto  $\sigma(x)$ .

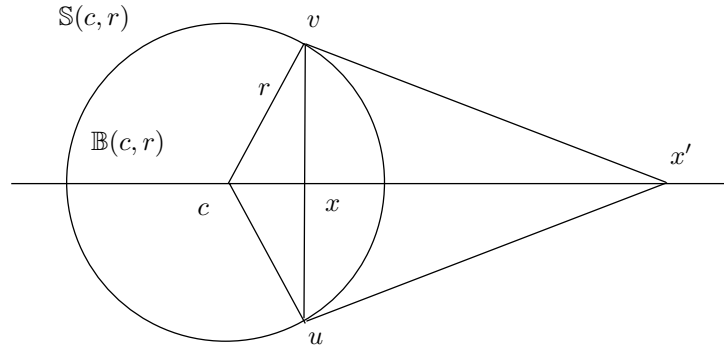


Figura III.2: Construcción de  $\sigma(x)$  cuando  $x \in \mathbb{B}(c, r)$ .

Asumimos que  $x$  está en  $\mathbb{B}(c, r)$ , la bola en  $\mathbb{E}^3$  centrada en  $c$  y de radio  $r$ . Trazamos una cuerda de  $\mathbb{S}(c, r)$  que pasa por  $x$  y es perpendicular a la línea que pasa por  $c$  y  $x$ . Sean  $u, v$  los extremos de la cuerda. El punto de intersección  $x'$  de las líneas tangentes a  $\mathbb{S}(c, r)$  en los puntos  $u, v$  corresponde a  $\sigma(x)$ .

Ahora asumimos que  $x$  está en  $\mathbb{E}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}(c, r)}$ .

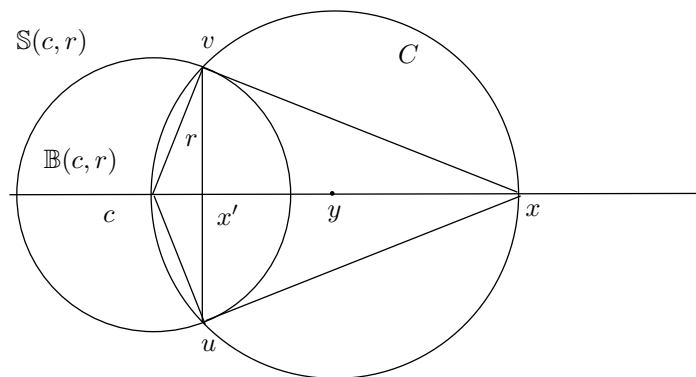


Figura III.3: Construcción de  $\sigma(x)$  cuando  $x \in \mathbb{E}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}(c, r)}$ .

Sea  $y$  el punto medio del segmento de línea  $\overline{cx}$  y sea  $C$  el círculo centrado

en  $y$ , de radio  $|x - y|$ . Entonces,  $C$  interseca a  $\mathbb{S}(c, r)$  en dos puntos  $u, v$ . El punto de intersección  $x'$  del segmento de línea  $\overrightarrow{cx}$  y  $\overrightarrow{uv}$  es  $\sigma(x)$ .

**Teorema III.1.** *Sea  $\sigma$  una reflexión de  $\mathbb{E}^3$  sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(c, r)$ . Entonces,  $\sigma$  satisface las siguientes afirmaciones*

i)  $\sigma(x) = x$  si y sólo si  $x$  está en  $\mathbb{S}(c, r)$ .

ii)  $\sigma^2(x) = x$  para todo  $x \neq c$ .

iii) Para todo  $x, y$  distintos de  $c$ , tenemos que  $|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2|x-y|}{|x-c||y-c|}$ .

*Demostración.*

i) Como  $|\sigma(x) - c| |x - c| = r^2$ , tenemos que  $\sigma(x) = x$  si y sólo si  $|x - c| = r$ .

ii)

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(x) &= \sigma \circ \sigma(x) \\
 &= c + \left( \frac{r}{|\sigma(x) - c|} \right)^2 (\sigma(x) - c) \\
 &= c + \left[ \frac{r}{\left| \left( \frac{r}{|x-c|} \right)^2 (x-c) \right|} \right]^2 \left( \left( \frac{r}{|x-c|} \right)^2 (x-c) \right) \\
 &= c + \frac{|x-c|^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{|x-c|^2} (x-c) \\
 &= x.
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 |\sigma(x) - \sigma(y)|^2 &= \left| \left( \frac{r}{|x-c|} \right)^2 (x-c) - \left( \frac{r}{|y-c|} \right)^2 (y-c) \right|^2 \\
 &= \left| r^2 \left[ \frac{(x-c)}{|x-c|^2} - \frac{(y-c)}{|y-c|^2} \right] \right|^2 \\
 &= r^4 \left| \frac{(x-c)}{|x-c|^2} - \frac{(y-c)}{|y-c|^2} \right|^2 \\
 &= r^4 \left[ \frac{1}{|x-c|^2} - \frac{2(x-c) \cdot (y-c)}{|x-c|^2 |y-c|^2} + \frac{1}{|y-c|^2} \right] \\
 &= r^4 \left[ \frac{|y-c|^2 - 2(x-c) \cdot (y-c) + |x-c|^2}{|x-c|^2 |y-c|^2} \right] \\
 &= \frac{r^4}{|x-c|^2 |y-c|^2} |x-y|^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| = \frac{r^2}{|x-c||y-c|} |x-y|.$$

■

**Lema III.1.** Sea  $\sigma$  la reflexión de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(c, r)$ ,  $\sigma_1$  la reflexión de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(0, 1)$  y  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  definida por  $\phi(x) = c + rx$ . Entonces,  $\sigma = \phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1}$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= c + \left( \frac{r}{|x-c|} \right)^2 (x-c) \\
 &= \phi \left( \frac{r(x-c)}{|x-c|^2} \right) \\
 &= \phi \circ \sigma_1 \left( \frac{x-c}{r} \right) \\
 &= \phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1}(x).
 \end{aligned}$$

■

### Isometrías Euclidianas.

Vamos a considerar que toda isometría euclidiana  $\phi$  actúa en  $\hat{\mathbb{E}}^3$  con  $\phi(\infty) = \infty$ . Más aún, la extensión de  $\phi$  a  $\hat{\mathbb{E}}^3$  es diferenciable.

De aquí en adelante, restringiremos las reflexiones de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre 2-planos  $\mathcal{P} \subset \hat{\mathbb{E}}^3$  a 2-planos  $\mathcal{P}|_{\mathbb{E}^3} \subset \mathbb{E}^3$ .

**Teorema III.2.** *Sea  $\rho$  una reflexión de  $\mathbb{E}^3$  sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a, t)$ . Entonces,  $\rho$  satisface las siguientes afirmaciones:*

- i)  $\rho(x) = x$  si y sólo si  $x$  está en  $\mathcal{P}(a, t)$ ;
- ii)  $\rho^2(x) = x$ , para toda  $x$  en  $\mathbb{E}^3$ ;
- iii)  $\rho$  es una isometría euclidiana.

El siguiente resultado caracteriza a las isometrías euclidianas.

**Teorema III.3.** *Toda isometría euclidiana  $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  es una composición de a lo más cuatro reflexiones  $\rho_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) de  $\mathbb{E}^3$  sobre 2-planos  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^3$ .*

*Demostración.* Como toda reflexión de  $\mathbb{E}^3$  sobre un 2-plano  $\mathcal{P}$  es una isometría euclidiana, es suficiente considerar sólo las isometrías euclidianas  $\phi$  que satisfacen  $\phi(0) = 0$ . Estas isometrías preservan la longitud de los vectores

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| = |x - 0| = |x|,$$

y también preservan el producto interno euclidiano ya que

$$\begin{aligned} 2(\phi(x) \cdot \phi(y)) &= |\phi(x)|^2 + |\phi(y)|^2 - |\phi(x) - \phi(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 \\ &= 2(x \cdot y). \end{aligned}$$

Esto implica que los vectores  $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$  son mutuamente ortogonales y linealmente independientes. Ya que estos vectores son tres, forman una base para  $\mathbb{E}^3$  y por lo tanto, para cada  $x \in \mathbb{E}^3$  existe algún  $\mu \in \mathbb{E}^3$  tal que

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^3 \mu_j \phi(e_j).$$

Pero como los  $\phi(e_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) son mutuamente ortogonales,

$$\begin{aligned}\mu_j &= \phi(x) \cdot \phi(e_j) \\ &= x \cdot e_j \\ &= x_j.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\phi\left(\sum_{j=1}^3 x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^3 x_j \phi(e_j),$$

y esto nos muestra que  $\phi$  es una transformación lineal de  $\mathbb{E}^3$  en  $\mathbb{E}^3$ . Como cualquier isometría es uno a uno, el núcleo de  $\phi$  tiene dimensión 0, entonces  $\phi(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$ .

Sea  $A$  la matriz asociada a  $\phi$  con respecto a la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Por lo tanto,  $\phi(x) = Ax$  y  $A$  tiene como renglones  $\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)$ . Esto nos muestra que el  $(i, j)$ -ésimo elemento de la matriz  $AA^t$  es  $\phi(e_i) \cdot \phi(e_j) = e_i \cdot e_j$ , que es 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ . Concluimos que  $A$  es una matriz ortogonal.

Por inducción mostraremos que  $\phi$  es una composición de a lo más 3 reflexiones de  $\mathbb{E}^3$  sobre 2-planos de  $\mathbb{E}^3$ . Sean  $a_1 = \phi(e_1) - e_1$  y  $\rho_1$  la reflexión sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a_1, 0)$ . Si  $a_1 \neq 0$ , la imagen de  $\phi(e_1)$  bajo  $\rho_1$  es  $e_1$ . Si  $a_1 = 0$ , entonces  $\rho_1$  es la reflexión identidad. Por lo tanto, en cualquier caso la imagen de  $\phi(e_1)$  bajo  $\rho_1$  es  $e_1$ .

Sea  $\phi_1 = \rho_1 \circ \phi$ , es decir, la isometría que fija a  $e_1$  y 0. Supongamos que  $\phi_2$  es una isometría que fija a  $e_1, e_2, 0$  y sea  $a_3 = \phi_2(e_3) - e_3$ . De manera análoga, tenemos que  $\rho_3$  es la reflexión identidad ó es la reflexión sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a_3, 0)$  (si  $a_3 = 0$  ó  $a_3 \neq 0$ , respectivamente). Por lo tanto,  $\phi_3 = \rho_3 \circ \phi_2$  es una isometría que deja fijos a  $e_3$  y 0. Además, para  $j = 1, 2$  tenemos que

$$\begin{aligned}e_j \cdot a_3 &= (e_j \cdot \phi_2(e_3)) - (e_j \cdot e_3) \\ &= (\phi_2(e_j) \cdot \phi_2(e_3)) - 0 \\ &= e_j \cdot e_3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces,  $e_j \in \mathcal{P}(a_3, 0)$  y  $\rho_3(e_j) = e_j$ .

Como  $\phi_2$  deja fijos a  $e_1, e_2, 0$ , deducimos que  $\phi_3$  deja fijos a  $e_1, e_2, e_3, 0$ . En conclusión, existen reflexiones  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), tales que la isometría

$\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1 \circ \phi$  deja fijos a  $e_1, e_2, e_3, 0$ , es lineal y además, es la reflexión identidad. Por lo tanto,  $\phi = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ . Entonces, cualquier isometría euclidiana, compuesta con una reflexión de  $\mathbb{E}^3$  apropiada, es composición de a lo más 3 reflexiones  $\rho$  de  $\mathbb{E}^3$  sobre 2-planos  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^3$ . Esto es, cualquier isometría euclidiana es la composición de a lo más cuatro reflexiones de  $\mathbb{E}^3$  sobre 2-planos de  $\mathbb{E}^3$ . ■

Existe otra forma de caracterizar una isometría euclidiana. Recordemos que el grupo  $\mathbf{O}(3)$  es isomorfo, de manera natural, al grupo de matrices ortogonales reales  $3 \times 3$  y consta de dos componente conexas: el subgrupo de matrices con determinante 1, el cual llamamos  $\mathbf{SO}(3)$  y el subgrupo de matrices con determinante  $-1$ . De aquí en adelante nos restringiremos a matrices ortogonales que pertenecen a  $\mathbf{SO}(3)$ , ya que nos interesan isometrías que preservan orientación.

**Teorema III.4.**  $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  es una isometría euclidiana si y sólo si es de la forma

$$\phi(x) = Ax + x_0, \quad \text{con } A \in \mathbf{SO}(3) \quad \text{y } x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

*Demostración.* Ya que  $A$  es una matriz ortogonal preserva distancias. Por lo tanto, cualquier  $\phi$  con  $\phi(x) = Ax + x_0$  es una isometría euclidiana. Si  $\phi$  es una isometría euclidiana, entonces  $\psi(x) = \phi(x) - \phi(0)$  es una isometría euclidiana que fija el origen. De la demostración del Teorema (III.3) concluimos que  $\psi$  tiene asociada una matriz ortogonal; es decir,  $\psi(x) = Ax$ .

Por lo tanto,  $\phi(x) = Ax + \phi(0)$ , haciendo  $\phi(0) = x_0$ , concluimos que  $\phi(x) = Ax + x_0$ . ■

**Observación III.2.** Llamamos *transformaciones ortogonales* a las funciones de la forma  $\phi(x) = Ax + x_0$ , con  $A \in \mathbf{SO}(3)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ . Del Teorema (III.3) concluimos que  $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  es una transformación ortogonal si y sólo si  $\phi$  es lineal y  $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\}$  es una base ortogonal de  $\mathbb{E}^3$ .

El conjunto de isometrías euclidianas bajo la operación composición forma un grupo,  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$ , llamado *grupo de isometrías euclidianas* ó *grupo euclideo*. Más aún,  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  es isomorfo al grupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in \mathbf{SO}(3) \text{ y } b \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

actuando en  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = 1\}$ .

**Ejemplo 9.** Sea  $a$  un punto en  $\mathbb{E}^3$ . La función  $T_a : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  dada por  $T_a(x) = x+a$ , es llamada *traslación de  $\mathbb{E}^3$  por  $a$*  y es una isometría euclidiana.

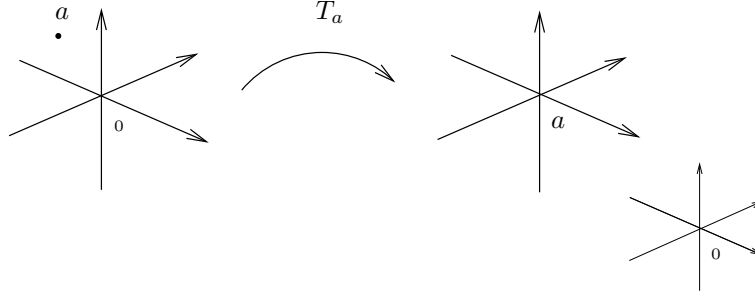


Figura III.4:  $T_a(x) = x + a$ .

Consideremos la isometría euclidiana  $T_z : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que para  $x, y \in \mathbb{E}^3$ ,

$$T_z(x) = x + z, \text{ con } z = y - x.$$

Esto es,  $T_z(x) = y$ , por lo tanto  $\mathbb{E}^3$  es un espacio homogéneo.

El subgrupo de **Isom** ( $\mathbb{E}^3$ ) que consiste de todas las rotaciones, que preservan orientación, alrededor de los ejes que pasan por el origen en  $\mathbb{E}^3$  es **SO**(3).

Sea  $\phi(x) = Ax + b$  una isometría euclidiana, consideremos el homomorfismo sobreyectivo

$$\phi : \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3) \rightarrow \mathbf{SO}(3) \text{ tal que } \phi \mapsto A, \tag{III.4}$$

cuyo núcleo es igual al grupo de traslaciones de  $\mathbb{E}^3$ , el cual denotamos por  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3) \longrightarrow \mathbf{SO}(3) \longrightarrow 1.$$

Sean  $\phi_1(x) = A_1x + b_1$  y  $\phi_2(x) = A_2x + b_2$  dos isometrías euclidianas. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_2(x) &= A_1(A_2x + b_2) + b_1 \\ &= A_1A_2x + A_1b_2 + b_1. \end{aligned} \tag{III.5}$$

Pensando a  $\phi_1$  y  $\phi_2$  como parejas ordenadas  $(A, b)$  con  $A \in \mathbf{SO}(3)$  y  $b \in \mathbb{R}^3$ , tenemos que

$$(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) = (A_1A_2, A_1b_2 + b_1),$$

lo cual nos da una descripción de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  como producto semidirecto de  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{SO}(3)$ , dado por la acción natural de  $\mathbf{SO}(3)$  sobre  $\mathbb{R}^3$ . En conclusión,

$$\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3) = \mathbf{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3.$$

Sea  $g \in \mathbf{SO}(3)$  una rotación alrededor del eje  $\mathcal{L}$  que pasa por el origen con ángulo de rotación  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Vamos a representar a  $g$  por un vector sobre  $\mathcal{L}$  de longitud  $\theta$ . Observemos que la dirección de  $\mathcal{L}$  comienza a ser ambigua cuando  $\theta = \pi$ .

Como espacio topológico,  $\mathbf{SO}(3)$  puede ser construido identificando puntos antípodas sobre la frontera de la bola  $\mathbb{B}(0, 1) \subset \mathbb{E}^3$  de radio  $\pi$ .

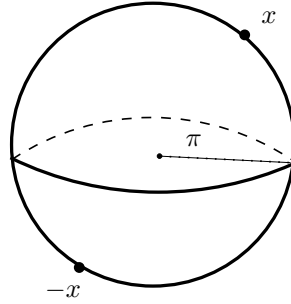


Figura III.5:  $x \sim -x$ .

### Grupo Estabilizador euclidiano.

**Teorema III.5.** Para toda  $x \in \mathbb{E}^3$ ,  $\mathbf{Est}(\mathbb{E}^3)_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(3)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{E}^3$ . Como  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  actúa transitivamente en  $\mathbb{E}^3$  podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que  $x$  es igual al origen en  $\mathbb{E}^3$ . Sea  $\phi \in \mathbf{Est}(\mathbb{E}^3)_x$ , entonces  $\phi(x) = Ax + b = x$  y  $b$  es igual a cero. Como los elementos de  $\mathbf{SO}(3)$  son rotaciones alrededor del origen y lo dejan fijo,  $\phi(x) = Ax$ . ■

### Geodésicas Euclidianas.

**Definición III.4.** Las geodésicas de  $\mathbb{E}^3$  son sus líneas rectas.



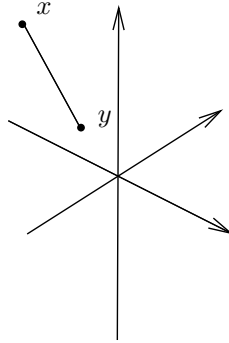


Figura III.6: Geodésica uniendo  $x$  a  $y$ .

### § 1.1. 3-variedades Geométricas Euclidianas.

Una 3-variedad geométrica euclidiana es un espacio cociente de la forma  $\mathbb{E}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{E}^3$ .

El estudio y clasificación de 3-variedades geométricas euclidianas se reduce al estudio y clasificación de grupos de Bieberbach en dimensión tres. Estos grupos fueron dados a conocer en 1934 por W. Nowacki (ver [Now34]).

#### Grupos de Bieberbach.

**Definición III.5.** Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  un subgrupo discreto. El grupo de traslaciones puras de  $\Gamma$  es la intersección  $\Gamma \cap \mathbb{R}^3$  y lo denotamos por  $T_\Gamma$ .

Observemos que  $T_\Gamma$  corresponde al núcleo de  $\varphi|_\Gamma$ , con  $\varphi$  definida por la ecuación (III.4) y  $\mathbb{R}^3$  el grupo de traslaciones de  $\mathbb{E}^3$ . Además,

$$\varphi(\Gamma) \cong \Gamma / (T_\Gamma).$$

El cual es llamado *holonomía* de  $\Gamma$  y lo denotamos por  $\Psi$ .

Recordemos que si el elemento identidad de un grupo es el único elemento de orden finito, decimos que el grupo es *libre de torsión*.

**Proposición III.1.**  $T_\Gamma$  es un grupo abeliano y libre de torsión. Más aún, es un subgrupo normal en  $\Gamma$ .

**Lema III.2.** [Wol84] La intersección  $\Psi \cap \mathbf{SO}(3)$  es un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_m$  de orden  $m = 1, 2, 3, 4, 6$  ó  $\Psi \cap \mathbf{SO}(3) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  y  $\Lambda = T_\Gamma$  es una retícula rectangular.

Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  y consideremos la proyección  $p : \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definición III.6.** Decimos que  $\Gamma$  es irreducible si  $p(\Gamma')$  genera  $\mathbb{E}^3$ , donde  $\Gamma' = \alpha\Gamma\alpha^{-1}$  con  $\alpha \in \mathbf{Aff}(3)$ .

Todo subgrupo discreto  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  es cerrado y satisface la siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse en [Wol84] y [Cha86].

**Proposición III.2.**

- i)  $\Gamma$  es discreto si y sólo si es discontinuo.
- ii)  $\Gamma$  es cocompacto si y sólo si es irreducible.
- iii) Si  $\Gamma$  actúa libremente entonces,  $\Gamma$  es libre de torsión.

**Definición III.7.** Un grupo de Bieberbach de dimensión tres es un subgrupo  $\mathcal{C} < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  discreto, cocompacto y libre de torsión.

**Teoremas de Bieberbach.**

Comenzaremos enunciando los tres Teoremas de Bieberbach en su versión “clásica”. El primero de ellos es considerado el más difícil de los tres. Demostraciones tanto de éste como del segundo teorema pueden consultarse en [Bie11], [Bie12], [Fro11], [Zas48], [Rin61] y [Cha86]. El tercero se sigue de los dos primeros y de un teorema de Minkowski (ver [Bie11] y [Bie12]). Además, varias generalizaciones del primer teorema pueden consultarse en [Aus60], [Aus61] y [Wol62].

**Primer Teorema de Bieberbach.** Sea  $\mathcal{C}$  un grupo de Bieberbach de dimensión tres. Entonces,

- $\Psi$  es finita y
- $\Lambda = T_{\mathcal{C}}$  es una retícula (único subgrupo normal y maximal abeliano de  $\mathcal{C}$ ) que genera a  $\mathbb{E}^3$ .

**Segundo Teorema de Bieberbach.** Sean  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  grupos de Bieberbach de dimensión tres y  $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  un isomorfismo. Entonces, existe  $\alpha \in \mathbf{Aff}(3)$  tal que  $f(\phi) = \alpha\phi\alpha^{-1}$ , para toda  $\phi \in \mathcal{C}_1$ .

**Tercer Teorema de Bieberbach.** Existe un número finito de grupos de Bieberbach de dimensión tres, salvo cambio de coordenadas afines.

Ahora reinterpretamos los Teoremas de Bieberbach clásicos en el contexto de 3-variedades geométricas euclidianas, las cuales podemos caracterizar de la siguiente manera.

$M$  es una 3-variedad geométrica euclidiana si y sólo si es isométrica a  $\mathbb{E}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma$  un grupo de Bieberbach de dimensión tres que actúa libremente en  $\mathbb{E}^3$ .

**Primer Teorema de Bieberbach'.** *Sea  $M$  una 3-variedad geométrica euclidiana. Entonces, existe una función cubriente  $p : \mathbb{T}^3 \rightarrow M$  que es una isometría local. Más aún,  $\Psi$  es finito.*

*Demostración.* Sea

$$p : \mathbb{E}^3/\Gamma \cap \mathbb{R}^3 \rightarrow M,$$

donde  $M = \mathbb{E}^3/\Gamma$ . Tenemos que  $p$  es una función cubriente. Por el Primer Teorema de Bieberbach,  $\mathbb{E}^3/\Gamma \cap \mathbb{R}^3$  es un 3-toro y  $\Psi$  es finito. ■

**Segundo Teorema de Bieberbach'.** *Sean  $M_1 = \mathbb{E}^3/\Gamma_1$  y  $M_2 = \mathbb{E}^3/\Gamma_2$  dos 3-variedades geométricas euclidianas tales que  $\Gamma_1$  es isomorfo a  $\Gamma_2$ . Entonces, existe un homeomorfismo  $F : M_1 \rightarrow M_2$ .*

*Demostración.*  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son grupos de Bieberbach de dimensión tres. Por el Segundo Teorema de Bieberbach, existe  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  tal que si  $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  es un isomorfismo, tenemos que  $f(\phi) = \alpha\phi\alpha^{-1}$ , para todo  $\phi \in \Gamma_1$ . Sean

$$p_1 : \mathbb{E}^3 \rightarrow M_1 \quad \text{y} \quad p_2 : \mathbb{E}^3 \rightarrow M_2,$$

proyecciones (o funciones cubrientes). Definimos  $F : M_1 \rightarrow M_2$  por

$$F(x) = p_2 \circ \alpha \circ p_1^{-1}(x) \quad \text{para} \quad x \in M_1.$$

Sean  $\tilde{x} \in p_1^{-1}(x)$  y  $\phi \in \Gamma_1$ . Como  $\alpha\phi\alpha^{-1} \in \Gamma_2$ , entonces  $\alpha\phi = f(\phi)\alpha$  y

$$p_2(\alpha\phi \cdot \tilde{x}) = p_2(f(\phi)\alpha \cdot \tilde{x}) = p_2(\alpha \cdot \tilde{x}).$$

Por lo tanto,  $F$  está bien definida y es un homeomorfismo. ■

**Tercer Teorema de Bieberbach'.** *Existe un número finito de 3-variedades geométricas euclidianas salvo homeomorfismo.*

La demostración se sigue inmediatamente de los teoremas previos y del Tercer Teorema de Bieberbach.

El siguiente teorema muestra que en dimensión tres sólo existen seis 3-variedades geométricas euclidianas.

**Teorema III.6.** [Wol84] *Existen, salvo homeomorfismo, seis 3-variedades geométricas euclidianas  $M = \mathbb{E}^3/\Gamma$ , donde  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  corresponde a uno de los grupos de Bieberbach  $\mathcal{C}_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) descritos en la tabla III.1 (pág. 58).*

*Demostración.* Los  $\mathcal{C}_i < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  son subgrupos discretos, cocompactos, sin elementos de orden finito y  $\Psi = \mathcal{C}_i/(T_{\mathcal{C}_i}) \subset \mathbf{SO}(3)$ . Vamos a mostrar que  $\Gamma$  corresponde a uno de estos grupos.

i)  $\Psi = \mathbf{Id}$ . Entonces,  $\Gamma = \Gamma \cap \mathbb{R}^3$  y corresponde al grupo  $\mathcal{C}_1$ .

ii)  $\Psi = \mathbb{Z}_m$ , con  $m > 1$ . Por el Lema III.2, tenemos que  $m = 2, 3, 4$  ó  $6$ . Escogemos  $\phi(x) = Ax + a \in \Gamma$  tal que  $\langle A \rangle = \Psi$ ,  $Aa = a$  y  $|a|$  es mínima. Sea  $R$  la retícula  $\mathcal{P} \cap \Lambda$ , con  $\mathcal{P}$  un 2-plano por el origen que es perpendicular a  $a$ ; sean  $\{a_2, a_3\}$  los generadores de  $R$  y escogemos  $a_1 = ma$ . Por lo tanto,  $a_1$  es ortogonal a  $a_2, a_3$  y además,  $R$  es invariante bajo  $A$ . Para  $m > 2$ , escogemos  $a_3 = Aa_2$ , entonces

- si  $m = 2$ ,  $\Gamma = \mathcal{C}_2$ ;
- si  $m = 3$ ,  $\Gamma = \mathcal{C}_3$ ;
- si  $m = 4$ ,  $\Gamma = \mathcal{C}_4$ ;
- si  $m = 6$ ,  $\Gamma = \mathcal{C}_5$ .

iii)  $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Denotamos por  $A$  y  $B$  a los generadores de  $\Psi$  tales que  $\phi_1(x) = Ax + a$ ,  $\phi_2(x) = Bx + b \in \Gamma$  con  $|Aa + a|$ ,  $|Bb + b|$  mínimas. Sean  $a_1 = a + Aa$ ,  $a_2 = b + Bb$  y escogemos  $a_3$  de tal forma que  $\{a_1, a_2, a_3\}$  genere la retícula  $\Lambda$ . Podemos asumir que  $Aa = a$ , entonces  $a = \frac{a_1}{2}$ . Ahora trasladamos el origen en la dirección de  $a_1$  y consideramos que  $b = \frac{1}{2}a_2 + ra_3$ . Escogemos  $\phi_3(x) = Cx + c \in \Gamma$  con  $C = AB$  y  $c + Cc = a_3$ , entonces  $c = ua_1 + va_2 + \frac{1}{2}a_3$ . Tenemos que  $\phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(x) = \mathbf{Id}x + d$ , con

$$d = \left(u + \frac{1}{2}\right) a_1 + \left(v - \frac{1}{2}\right) a_2 + \left(r + \frac{1}{2}\right) a_3 \in \Lambda.$$

Reemplazamos  $\phi_2$  por un elemento de  $\phi_2\Psi$ ,  $\phi_3$  por un elemento de  $\phi_3\Psi$  y asumimos

$$a = \frac{1}{2}a_1, \quad b = \frac{1}{2}(a_2 + a_3), \quad c = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3),$$

por lo tanto,  $\Gamma$  corresponde al grupo  $\mathcal{C}_6$ .

■

Las seis 3-variedades geométricas euclidianas existentes se conocen como sigue.

$\mathbb{E}^3/\Gamma$	Nombre
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_1$	3-Toro
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_2$	Espacio de 1/2-giro
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_3$	Espacio de 1/3-giro
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_4$	Espacio de 1/4-giro
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_5$	Espacio de 1/6-giro
$\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_6$	Espacio Hantzsche-Wendt

Recientemente, W. P. Thurston, O. Delgado Friedrichs, J. H. Conway y J. P. Rossetti en [CDFHT01] y [CR] estudiaron a detalle las 3-variedades geométricas euclidianas, dando una nueva nomenclatura sistemática que describe algunas de las propiedades de éstas. Ellos han propuesto llamar a estas 3-variedades *platycosms*, es decir, *universos planos*.

Sean  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$  un grupo de Bieberbach,  $\Lambda \subset \Gamma$  la retícula generada por  $\{a_1, a_2, a_3\}$  y  $T_i = x + a_i$  una traslación.

Nombre	$\Psi$	Grupo	Condiciones
$\mathcal{E}_1$	1	$\langle T_1, T_2, T_3 \rangle$	Los $a_i$ con $i = 1, 2, 3$ , son linealmente independientes.
$\mathcal{E}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\langle \phi, T_1, T_2, T_3 \mid \phi^2 = T_1, \phi T_2 \phi^{-1} = T_1^{-1}, \phi T_3 \phi^{-1} = T_3^{-1} \rangle$	$a_1$ es ortogonal a $a_2$ y $a_3$ ; $\phi(x) = Ax + \frac{a_1}{2}$ tal que $\Lambda a_1 = a_1, \Lambda a_2 = -a_2$ y $\Lambda a_3 = -a_3$ .
$\mathcal{E}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\langle \phi, T_1, T_2, T_3 \mid \phi^3 = T_1, \phi T_2 \phi^{-1} = T_3, \phi T_3 \phi^{-1} = T_2^{-1} T_3^{-1} T_1 \rangle$	$a_1$ es ortogonal a $a_2$ y $a_3$ , $ a_2  =  a_3 $ ; $\phi(x) = Ax + \frac{a_1}{3}$ tal que $\Lambda a_1 = a_1, \Lambda a_2 = a_3$ y $\Lambda a_3 = -a_2 - a_3$ .
$\mathcal{E}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\langle \phi, T_1, T_2, T_3 \mid \phi^4 = T_1, \phi T_2 \phi^{-1} = T_3, \phi T_3 \phi^{-1} = T_2^{-1} \rangle$	Los $a_1$ con $i = 1, 2, 3$ , son mutuamente ortogonales y $ a_2  =  a_3 $ ; $\phi(x) = Ax + \frac{a_1}{4}$ tal que $\Lambda a_1 = a_1, \Lambda a_2 = a_3$ y $\Lambda a_3 = -a_2$ .
$\mathcal{E}_5$	$\mathbb{Z}_6$	$\langle \phi, T_1, T_2, T_3 \mid \phi^6 = T_1, \phi T_2 \phi^{-1} = T_3, \phi T_3 \phi^{-1} = T_2^{-1} T_3 \rangle$	$a_1$ es ortogonal a $a_2$ y $a_3$ , $ a_2  =  a_3 $ ; $\phi(x) = Ax + \frac{a_1}{6}$ tal que $\Lambda a_1 = a_1, \Lambda a_2 = a_3$ y $\Lambda a_3 = a_2 - a_3$ .
$\mathcal{E}_6$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\langle \phi_1, \phi_2, \phi_3; T_1, T_2, T_3 \mid \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3 = T_1 T_3, \phi_1^2 = T_1, \phi_2^2 = T_2, \phi_3^2 = T_3, \phi_2 T_1 \phi_2^{-1} = \phi_3 T_1 \phi_3^{-1} = T_1^{-1}, \phi_1 T_2 \phi_1^{-1} = \phi_3 T_2 \phi_3^{-1} = T_2^{-1}, \phi_1 T_3 \phi_1^{-1} = \phi_2 T_3 \phi_2^{-1} = T_3^{-1} \rangle$	Los $a_i$ con $i = 1, 2, 3$ , son mutuamente ortogonales. $\phi_1(x) = Ax + \frac{a_1}{2}, \phi_2(x) = Bx + \frac{a_2}{2}, \phi_3(x) = Cx + \frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)}$ tal que $\Lambda a_1 = a_1, \Lambda a_2 = a_2, \Lambda a_3 = a_3, B a_1 = C a_1 = -a_1, \Lambda a_2 = -a_2$ y $\Lambda a_3 = B a_3 = -a_3$ .

Cuadro III.1: Grupos de Bieberbach  $\mathcal{E}_i$

**§ 1.2. Una Mirada a través de las 3-variedades Geométricas Euclidianas.**

El 3-toro  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_1$  se obtiene por identificar caras opuestas en un cubo sólido. También podemos pensarlo como el producto de un 2-toro y un círculo.

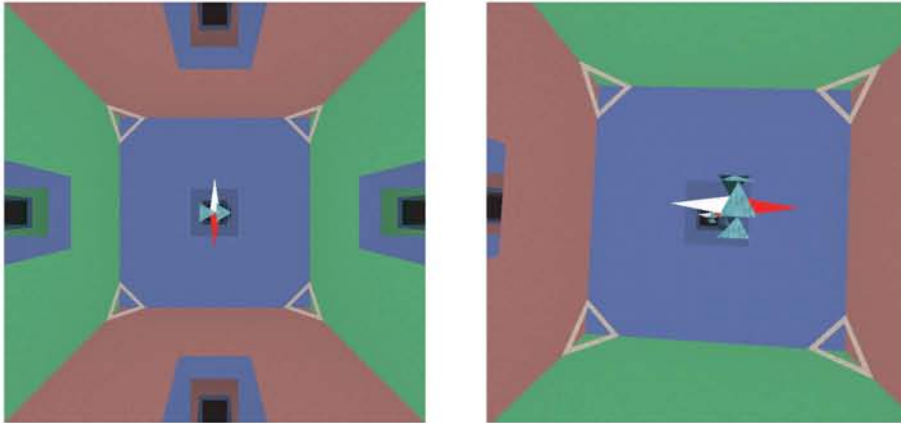


Figura III.7: 3-Toro.

El espacio  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_2$  se obtiene por identificar caras opuestas de un cubo sólido, sólo que antes de identificar la cara superior y la cara inferior rotamos una de ellas por  $2\pi/2$ .

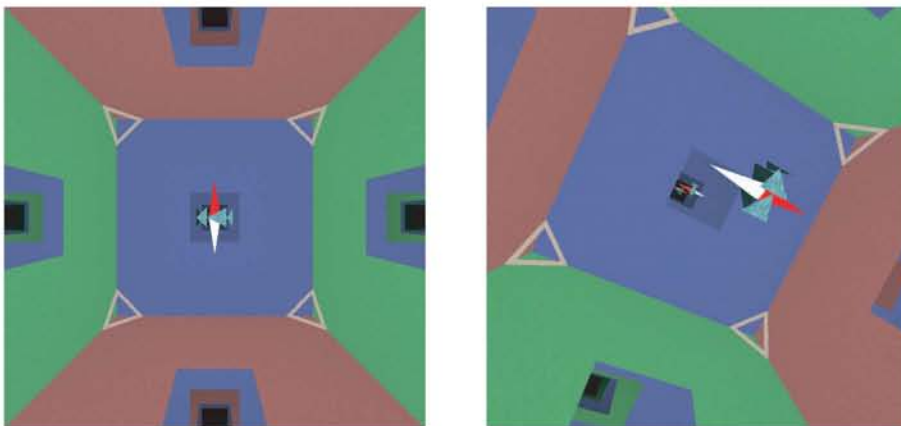


Figura III.8: Espacio de 1/2-giro.

El espacio  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_3$  se obtiene por identificar caras opuestas de un cubo sólido, sólo que antes de identificar la cara superior y la cara inferior rotamos una de ellas por  $2\pi/3$ .

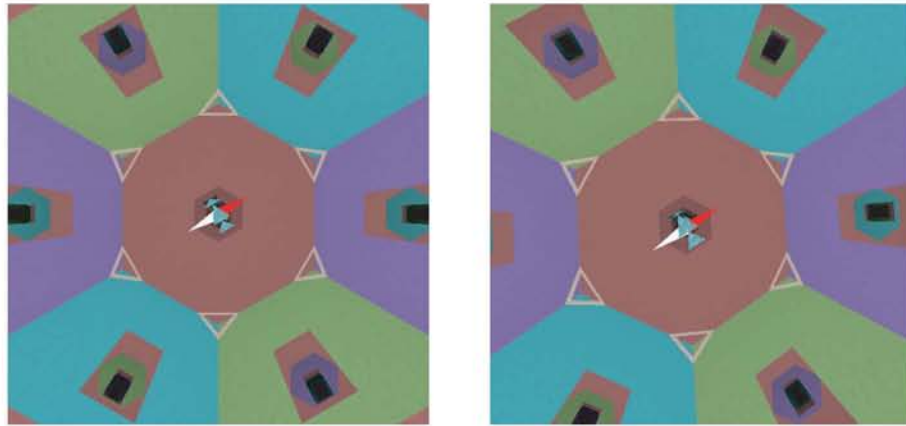


Figura III.9: Espacio de 1/3-giro.

El espacio  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_4$  se obtiene por identificar caras opuestas de un cubo sólido, sólo que antes de identificar la cara superior y la cara inferior rotamos una de ellas por  $2\pi/4$ .

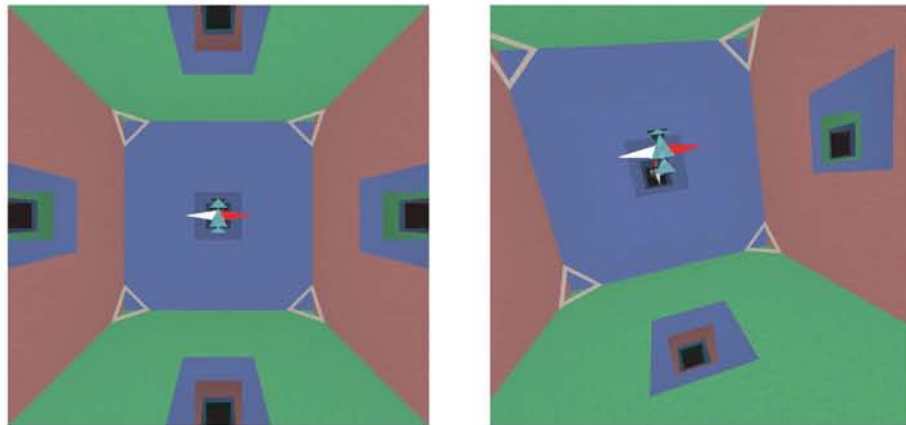


Figura III.10: Espacio de 1/4-giro.

El espacio  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_5$  se obtiene por identificar caras opuestas de un cubo sólido, sólo que antes de identificar la cara superior y la cara inferior rotamos una de ellas por  $2\pi/6$ .



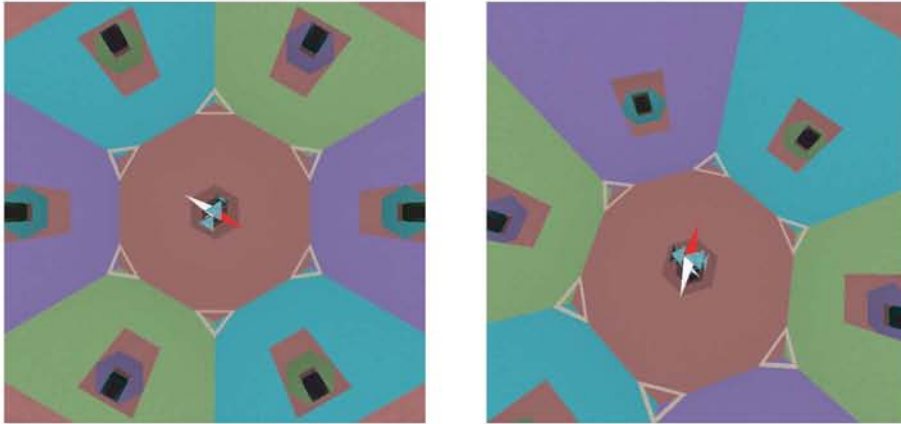


Figura III.11: Espacio de 1/6-giro.

En el caso del espacio  $\mathbb{E}^3/\mathcal{C}_6$ , observemos que podemos pensar a  $\mathcal{C}_6$  como el grupo generado por  $\left\langle \left( \begin{matrix} A & a \\ 0 & 1 \end{matrix} \right), \left( \begin{matrix} B & b \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \right\rangle$ , con  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $a = (1/2, 1/2, 1/2)$  y  $b = (0, 1/2, 1/2)$ .

Observemos que  $\Psi$  es isomorfo al grupo de Klein  $V$ , es decir, a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

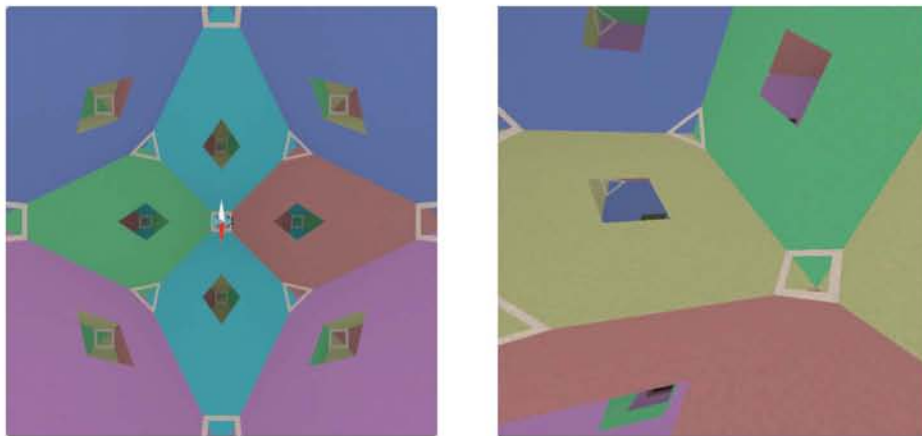


Figura III.12: Espacio Hantzsche-Wendt.

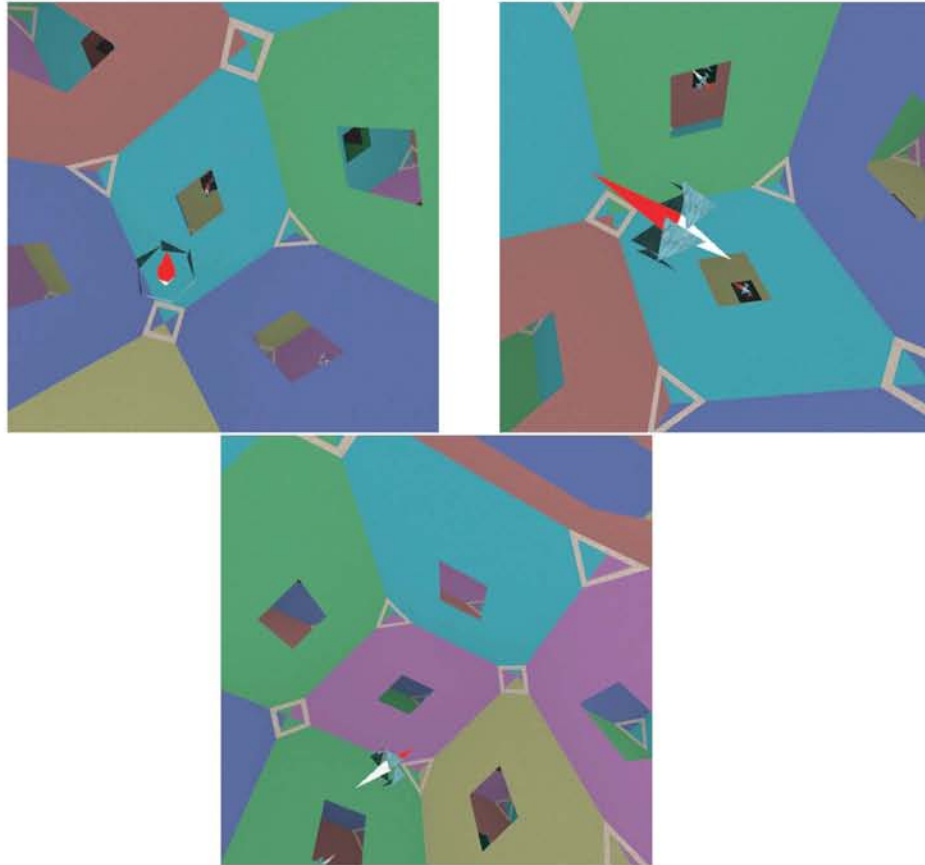


Figura III.13: Espacio Hantzsche-Wendt.

## § 2. Geometría Esférica.

En esta sección describimos el modelo geométrico esférico, su grupo de isometrías, sus geodésicas, entre otras cosas (se puede consultar [Rat94]). También mostramos distintas caracterizaciones de  $\mathbb{S}^3$  (ver por ejemplo [Lim98] y [Sea06]). Vamos a clasificar los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$ . Estos grupos fueron clasificados por H. Hopf, H. Seifert y W. Threlfall.

El espacio  $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subset \mathbb{E}^4$ , dotado con la métrica inducida por la métrica euclidiana<sup>1</sup> de  $\mathbb{E}^4$  es el modelo

<sup>1</sup> $ds_{\mathbb{E}^4}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ .

para esta geometría.

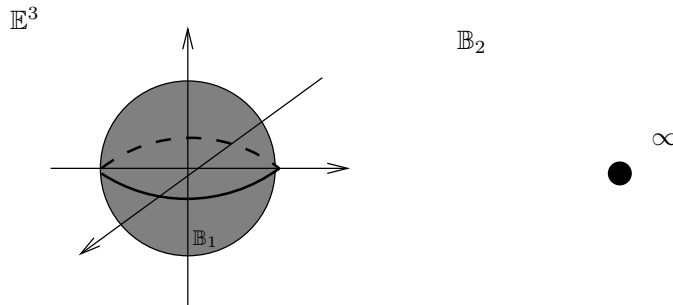


Figura III.14:  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{B}_1 \cup_f \mathbb{B}_2$ , con  $\mathbb{B}_1$  y  $\mathbb{B}_2 = \text{int}(\mathbb{E}^3 - \mathbb{B}_1) \cup \{\infty\}$  3-bolas y  $f: \partial\mathbb{B}_1 \rightarrow \partial\mathbb{B}_2$ .

**Observación III.3.** Identificando  $\mathbb{E}^4$  con  $\mathbb{C}^2$  por medio de la correspondencia

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longleftrightarrow (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4),$$

podemos definir a  $\mathbb{S}^3$  como

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\},$$

con  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$  el módulo de  $z$ .

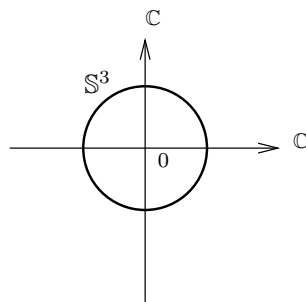


Figura III.15:  $\mathbb{S}^3$  como circunferencia compleja.

### Isometrías Esféricas.

Observemos que cualquier par  $x, y \in \mathbb{S}^3$  satisface la siguiente igualdad

$$x \cdot y = 1 - \frac{1}{2}|x - y|^2. \tag{III.6}$$

Sea  $\phi : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{E}^4$  una isometría euclidiana, si  $\phi$  restringida a  $\mathbb{S}^3$  satisface

$$x \cdot y = 1 - \frac{1}{2} |\phi(x) - \phi(y)|^2,$$

la llamamos *isometría esférica*.

El siguiente resultado nos caracteriza toda isometría esférica.

**Teorema III.7.** *Toda transformación ortogonal  $\phi : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{E}^4$  se restringe a una isometría esférica y toda isometría esférica se extiende a una única transformación ortogonal de  $\mathbb{E}^4$ .*

*Demostración.* De la igualdad (III.6) tenemos que  $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  es una isometría esférica si y sólo si preserva productos internos euclidianos sobre  $\mathbb{S}^3$ . Por lo tanto, una transformación ortogonal de  $\mathbb{E}^4$  se restringe a una isometría de  $\mathbb{S}^3$ . Por otro lado, el hecho de que toda isometría esférica se extiende a una única transformación ortogonal de  $\mathbb{E}^4$  sigue la misma idea de la demostración del Teorema III.3. ■

**Corolario III.1.** *El grupo de isometrías esféricas, el cual denotamos por  $\text{Isom}(\mathbb{S}^3)$ , es isomorfo al grupo ortogonal  $\text{SO}(4)$ .*

### Grupo Estabilizador Esférico.

**Teorema III.8.** *Para todo  $x \in \mathbb{S}^3$ ,  $\text{Est}(\mathbb{S}^3)_x$  es isomorfo a  $\text{SO}(3)$ .*

### Geodésicas Esféricas.

**Definición III.8.** Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^4$  un 2-plano por el origen. Un *círculo máximo* de  $\mathbb{S}^3$  está dado por  $\mathcal{C} = \mathbb{S}^3 \cap \mathcal{P}$ .

El siguiente resultado nos caracteriza toda geodésica esférica.

**Proposición III.3.** *Las geodésicas de  $\mathbb{S}^3$  son sus círculos máximos.*

*Demostración.* Sea  $\rho : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{E}^4$  una reflexión de  $\mathbb{E}^4$  sobre un 2-plano  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^4$ . Entonces,  $\rho|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  es una isometría esférica, cuyo conjunto de puntos fijos es  $\mathcal{C} = \mathbb{S}^3 \cap \mathcal{P}$ . Sean  $x, y \in \mathcal{C}$ , por el Teorema de Hopf-Rinow existe una única geodésica  $\gamma$  que los une. Tenemos que  $\rho|_{\mathbb{S}^3}(\gamma)$  es una geodésica, de la misma longitud que  $\gamma$ , uniendo  $\rho|_{\mathbb{S}^3}(x) = x$  y  $\rho|_{\mathbb{S}^3}(y) = y$ . Concluimos que  $\rho|_{\mathbb{S}^3}(\gamma) = \gamma$  y por lo tanto,  $\gamma \subset \mathcal{C}$ .

Finalmente, como hay un círculo máximo  $\mathcal{C}$  por cualquier punto de  $\mathbb{S}^3$  en cualquier dirección dada, estos son todas las geodésicas de  $\mathbb{S}^3$ . ■

**§ 2.1. Distintas caracterizaciones de  $\mathbb{S}^3$ .**

Presentamos distintas maneras de describir a  $\mathbb{S}^3$ , ya que más adelante nos serán útiles para entender algunas de sus propiedades y las usaremos indistintamente.

**Proyección Estereográfica.**

Identificamos  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{E}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{E}^4$ . Sea

$$\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 - \{e_4\} \quad \text{con} \quad e_4 = (0, 0, 0, 1),$$

la proyección que a cada  $x \in \mathbb{E}^3$  le asocia un único punto  $\pi(x) \in \mathbb{S}^3 - \{e_4\}$  sobre la línea conteniendo a  $x$  y  $e_4$ . Llamamos a  $\pi$  *proyección estereográfica*.

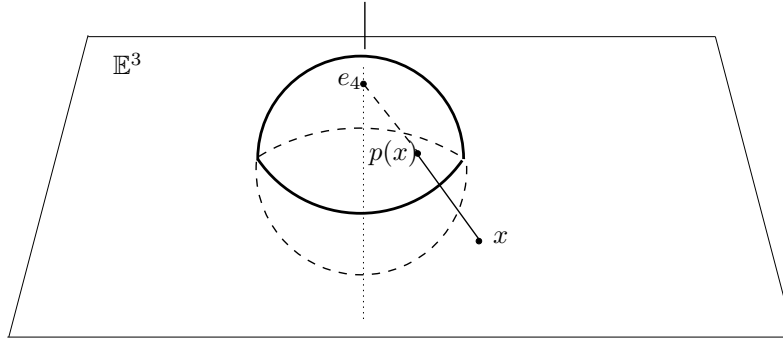


Figura III.16: Proyección estereográfica.

Para  $x \in \mathbb{E}^3$ , tenemos la fórmula explícita

$$\pi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_3}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

**Observación III.4.**  $\pi$  es un mapeo biyectivo de  $\mathbb{E}^3$  sobre  $\mathbb{S}^3 - \{e_4\}$ .

Podemos dar una interpretación de la proyección estereográfica en términos de reflexiones. Sea  $\sigma$  la reflexión de  $\mathbb{E}^4$  sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(e_4, \sqrt{2})$ , es decir,

$$\sigma(x) = e_4 + 2 \frac{(x - e_4)}{|x - e_4|^2}.$$

Sea  $x \in \mathbb{E}^3$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= e_4 + 2 \frac{(x - e_4)}{|x - e_4|^2} \\ &= (0, 0, 0, 1) + 2 \frac{(x_1, x_2, x_3, -1)}{|x|^2 + 1} \\ &= \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_3}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la restricción de  $\sigma$  a  $\mathbb{E}^3$  es  $\pi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 - \{e_4\}$ . Ya que  $\sigma$  es su propia inversa, podemos calcular la inversa de  $\pi$ .

Sea  $y \in \mathbb{S}^3 - \{e_4\}$ , entonces

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= e_4 + 2 \frac{(y - e_4)}{|y - e_4|^2} \\ &= (0, 0, 0, 1) + 2 \frac{(y_1, y_2, y_3, y_4 - 1)}{|y|^2 - 2y \cdot e_4 + 1} \\ &= (0, 0, 0, 1) + 2 \frac{(y_1, y_2, y_3, y_4 - 1)}{2(1 - y_4)} \\ &= (0, 0, 0, 1) + \frac{(y_1, y_2, y_3, y_4 - 1)}{1 - y_4} \\ &= \left( \frac{y_1}{1 - y_4}, \frac{y_2}{1 - y_4}, \frac{y_3}{1 - y_4}, 0 \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\pi^{-1}(y) = \left( \frac{y_1}{1 - y_4}, \frac{y_2}{1 - y_4}, \frac{y_3}{1 - y_4} \right).$$

Sea  $\infty$  un punto que no pertenece a  $\mathbb{E}^4$ , vamos a extender  $\pi$  a una biyección  $\hat{\pi} : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$  con  $\hat{\pi}(\infty) = e_4$ . Definimos la métrica  $m_c$  en  $\hat{\mathbb{E}}^3$  como

$$m_c(x, y) = |\hat{\pi}(x) - \hat{\pi}(y)|. \quad (\text{III.7})$$

Esta métrica es llamada *métrica cordal* en  $\hat{\mathbb{E}}^3$ .

**Teorema III.9.** Sean  $x, y \in \mathbb{E}^3$ . Entonces,

$$i) \quad m_c(x, \infty) = \frac{2}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$ii) m_c(x, y) = \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

*Demostración.*

i)

$$\begin{aligned} m_c(x, \infty) &= |\hat{\pi}(x) - \hat{\pi}(\infty)| \\ &= |\hat{\pi}(x) - e_4| \\ &= \left| \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_3}{|x|^2 + 1}, \frac{-2}{|x|^2 + 1} \right) \right| \\ &= \frac{2}{(|x|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

ii) Por el Teorema (III.1), tenemos que

$$\begin{aligned} m_c(x, y) &= \frac{2|x-y|}{|x-e_4||y-e_4|} \\ &= \frac{2|x-y|}{(|x|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}(|y|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

■

### $\mathbb{S}^3$ como Grupo de Lie.

El *grupo de los cuaterniones*, que denotamos por  $\mathbf{H}$ , es  $\mathbb{R}^4$  dotado con una multiplicación no conmutativa y bilineal en  $\mathbb{R}$  como veremos a continuación.

Denotamos cada cuaternión por  $q = t + xi + yj + zk$ , donde  $\{1, i, j, k\}$  es la base de  $\mathbf{H}$ , con  $i, j, k$  llamados *unidades imaginarias* y  $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$  llamado *unidad real*.

El grupo de los cuaterniones es un espacio vectorial con las operaciones usuales de  $\mathbb{R}^4$ . Tiene dos subespacios particulares que denotamos  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$  y  $\mathbf{H}_{\text{Im}}$ ;  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$  es el conjunto de los cuaterniones reales  $t = t + 0i + 0j + 0k$ , con  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{H}_{\text{Im}}$  es el conjunto de los cuaterniones imaginarios puros  $q = xi + yj + zk$ . Podemos pensar que  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$  es el conjunto de escalares y  $\mathbf{H}_{\text{Im}}$  el conjunto de vectores del espacio vectorial  $\mathbf{H}$ . En relación al producto interno canónico de  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{H}_{\text{Im}}$  es el complemento ortogonal de  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ .

La multiplicación de cuaterniones se define de la siguiente manera:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$

$$1i = i1 = i, \quad 1j = j1 = j, \quad 1k = k1 = k.$$

**Observación III.5.** La multiplicación de cuaterniones es asociativa y distributiva, pero no conmutativa como podemos constatar en la definición.

Por otro lado, todo cuaternión no nulo  $q$  posee un inverso multiplicativo  $q^{-1}$ . Para mostrar esto, introducimos la noción de *conjugado de un cuaternión*. Sea  $q = t + xi + yj + zk \in \mathbf{H}$ , el conjugado de  $q$  es  $\bar{q} = t - xi - yj - zk$ .

Tenemos que  $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$ , con  $|q|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ . Entonces, si  $q \neq 0$  definimos

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2};$$

además,  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$  y la norma de un cuaternión se comporta bien respecto a la multiplicación, es decir,  $|qq'| = |q||q'|$ .

Concluimos que  $\mathbf{H}$  es un grupo bajo la multiplicación descrita anteriormente. Ahora consideremos el subconjunto de los cuaterniones de norma uno, el cual identificamos con  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Este subconjunto es un subgrupo de  $\mathbf{H}$ .

Por lo tanto,  $\mathbb{S}^3$  tiene estructura de grupo de Lie y como tal, es de dimensión tres, no abeliano y compacto.

**Teorema III.10.** *Multiplicación por la izquierda y por la derecha son acciones de  $\mathbb{S}^3$  en si misma por isometrías.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathbb{S}^3$ . La distancia de  $x$  a  $y$  sólo depende de la norma de  $x - y$ . Ya que la norma se preserva bajo multiplicación izquierda y multiplicación derecha por un cuaternión unitario, nos definen isometrías de  $\mathbb{S}^3$ . ■

El siguiente lema nos dice que el centro de  $\mathbb{S}^3$  es  $\{1, -1\}$ .

**Lema III.3.** *Sea  $q \in \mathbf{H}$  tal que conmuta con todo cuaternión imaginario puro. Entonces,  $q$  es real. Si  $q \in \mathbb{S}^3$ , entonces  $q = \pm 1$ .*



Observemos que podemos escribir todo cuaternión  $q = t + xi + yj + zk$ , de manera única, como  $q = (t + xi) + (y + zi)j$ . Esto nos da una identificación entre  $\mathbf{H}$  y  $\mathbb{C}^2$ . En otras palabras, podemos escribir cada  $q \in \mathbf{H}$  como  $q = z_1 + z_2j$ , con  $z_1 = (t + xi)$  y  $z_2 = (y + zi)$ .

Recordemos que el *grupo especial unitario* está definido como

$$\mathbf{SU}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ y } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Consideremos la función  $\psi : (\mathbf{H} - \{0\}) \rightarrow \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ , con  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  el grupo de matrices  $2 \times 2$  invertibles con coeficientes complejos, definida por

$$q = z_1 + z_2j \quad \xrightarrow{\psi} \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la norma de  $q$  corresponde al determinante de  $\psi(q)$ . Más aún, los vectores columna de  $\psi(q)$  forman una base ortogonal de  $\mathbb{C}^2$ .

Si restringimos  $\psi$  a los cuaterniones unitarios  $\mathbb{S}^3$ , tenemos que  $\psi(\mathbb{S}^3)$  consiste de todas las matrices  $2 \times 2$  unitarias con determinante igual a uno. En otras palabras, tenemos una identificación canónica de  $\mathbb{S}^3$  con  $\mathbf{SU}(2)$  dada por

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema III.11.**  $\mathbb{S}^3$ , como grupo de Lie, es isomorfo a  $\mathbf{SU}(2)$ .

Observemos que el centro de  $\mathbf{SU}(2)$  es  $\{\mathbf{Id}, -\mathbf{Id}\}$  y además la proyección

$$p : \mathbb{S}^3 \cong \mathbf{SU}(2) \rightarrow (\mathbf{SU}(2)/\pm \mathbf{Id}),$$

identifica puntos antípodas en  $\mathbb{S}^3$ .

### Homomorfismo entre $\mathbb{S}^3$ y $\mathbf{SO}(3)$ .

Ya que la dimensión de  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbf{SO}(3)$  es tres (ver [Cur84]) da pie a pensar que estos grupos deberían ser isomorfos, lo cual no ocurre como mostramos a continuación.

**Proposición III.4.** Sea  $u = t + xi + yj + zk \in \mathbb{S}^3$ . Entonces,  $L_u : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  dada por  $L_u(q) = uq$  es una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\mathbf{H} = \mathbb{R}^4$  como espacio vectorial. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $q_1, q_2 \in \mathbf{H}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} L_u(aq_1 + bq_2) &= u(aq_1 + bq_2) \\ &= auq_1 + buq_2 \\ &= aL_u(q_1) + bL_u(q_2). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$L_u(i) \cdot L_u(j) = ui \cdot uj = 0 \quad \text{y} \quad L_u(1) \cdot L_u(i) = u \cdot ui = 0.$$

De manera análoga, se satisface

$$L_u(i) \cdot L_u(k) = L_u(j) \cdot L_u(k) = L_u(1) \cdot L_u(j) = L_u(1) \cdot L_u(k) = 0.$$

Concluimos que  $L_u$  es una transformación ortogonal.  $\blacksquare$

Observemos que esta proposición también es válida si  $L_u(q) = qu$  es una traslación derecha.

**Proposición III.5.** *Existe un homomorfismo  $F : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  continuo y sobreyectivo, cuyo núcleo es  $\{1, -1\}$ .*

*Demostración.* Sean  $u \in \mathbb{S}^3$  y  $q \in \mathbf{H}$ . Definimos una función  $f_u(q) = uq\bar{u}$ . De la Proposición III.4 concluimos que  $f_u$  es una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$ . Como  $f_u(1) = 1$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$  es invariante bajo  $f_u$  y por lo tanto,  $\mathbf{H}_{\text{Im}}$  también es invariante bajo  $f_u$ . Entonces, la restricción

$$f_{u_{\text{Im}}} := f_u|_{\mathbf{H}_{\text{Im}}} : \mathbf{H}_{\text{Im}} \rightarrow \mathbf{H}_{\text{Im}},$$

está bien definida y es una transformación ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$ .

La matriz asociada a  $f_{u_{\text{Im}}}$ , que denotamos por  $M_u$ , tiene como columnas a los vectores  $ui\bar{u}$ ,  $uj\bar{u}$  y  $uk\bar{u}$ , los cuales dependen continuamente de  $u$ . Tenemos que  $\det(M_u) = \pm 1$  para todo  $u \in \mathbb{S}^3$ . Ya que  $\mathbb{S}^3$  es conexa y  $\det(M_u) = 1$  para  $u = 1$ ; se sigue que  $\det(M_u) = 1$  para todo  $u \in \mathbb{S}^3$ . Entonces,  $f_{u_{\text{Im}}} \in \mathbf{SO}(3)$  para toda  $u$ , por lo cual tenemos una función continua  $F : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$ .

Sean  $u_1, u_2 \in \mathbb{S}^3$  y  $q \in \mathbf{H}_{\text{Im}}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} f_{u_1 u_2}(q) &= u_1 u_2 q \bar{u}_1 \bar{u}_2 \\ &= u_1 (u_2 q \bar{u}_2) \bar{u}_1 \\ &= f_{u_1} f_{u_2}(q). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $F$  es un homomorfismo.

El núcleo de  $F$  consiste de los cuaterniones  $u \in \mathbb{S}^3$  tales que  $uq\bar{u} = q$ , es decir,  $uq = qu$  para toda  $q \in \mathbf{H}_{\text{Im}}$ . Por el Lema III.3, concluimos que el núcleo de  $F$  consta únicamente de los cuaterniones 1 y  $-1$ . En otras palabras,  $F(u_1) = F(u_2)$  si y sólo si  $u_2 = \pm u_1$ . En particular,  $F$  es localmente inyectiva.

Observemos que  $F$  es de clase  $C^\infty$ , ya que para todo  $u \in \mathbb{S}^3$ , los coeficientes de  $M_u$  son de clase  $C^\infty$ . Como  $F$  es un homomorfismo localmente inyectivo, tiene rango máximo. Esto es, tiene rango igual a tres. En particular,  $F$  es abierto. Ya que  $\mathbb{S}^3$  es compacta y  $\mathbf{SO}(3)$  es conexo (ver [Cur84] ó [Lim98]), concluimos que  $F(\mathbb{S}^3) = \mathbf{SO}(3)$ . Por lo tanto,  $F : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  es un homomorfismo continuo y sobreyectivo con núcleo  $\{1, -1\}$ . ■

Consideremos el cociente  $\mathbb{S}^3 / \{1, -1\}$ , entonces

$$\bar{F} : \mathbb{S}^3 / \{1, -1\} \rightarrow \mathbf{SO}(3),$$

es biyectiva y continua. Es decir,  $\bar{F}$  es un isomorfismo de grupos. Por otro lado, como  $\mathbb{S}^3 / \{1, -1\}$  es compacto y  $\mathbf{SO}(3)$  es un espacio Hausdorff, concluimos que  $\bar{F}$  es un homeomorfismo. Podemos decir que  $\mathbf{SO}(3)$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{S}^3$  y por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema III.12.**  $\mathbb{S}^3$  es un espacio cubriente doble de  $\mathbf{SO}(3)$ .

Más aún,  $\mathbb{S}^3$  es el espacio cubriente universal de  $\mathbf{SO}(3)$ .

## § 2.2. 3-variedades Geométricas Esféricas.

Una 3-variedad geométrica esférica es un espacio cociente de la forma  $\mathbb{S}^3 / \Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  finito, cocompacto, que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ .

La clasificación de 3-variedades geométricas esféricas equivale a clasificar los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$  (ya que todo subgrupo discreto de un grupo compacto es finito). Estos grupos fueron clasificados por H. Hopf (ver [Hop26]), H. Seifert y W. Threlfall (ver [ST30]); se puede consultar [Orl72], [Sco83], [Sea06], [Wol84].

Antes de clasificar dichos subgrupos, presentamos otra caracterización de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$ .

**Proposición III.6.**  *$\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  es isomorfo a  $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) / \mathbb{Z}_2$ .*

*Demostración.* Sea

$$h : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3) \quad \text{definida como} \quad h(q_1, q_2)(x) = q_1 x q_2^{-1}.$$

Es decir,  $h(q_1, q_2)$  es la isometría de  $\mathbb{S}^3$  dada por  $x \mapsto q_1 x q_2^{-1}$ . Tenemos que  $h$  es un homomorfismo de grupos.

Si  $(q_1, q_2)$  pertenece al núcleo de  $h$ , entonces  $x = q_1 x q_2^{-1}$  para todo  $x \in \mathbb{S}^3$ . Suponiendo  $x = 1$ , tenemos que  $q_1 = q_2$ . Por lo tanto,  $q_1$  pertenece al centro de  $\mathbb{S}^3$ . Se sigue que el núcleo de  $h$  consiste de  $\{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbb{Z}_2$ , el grupo cíclico de orden dos. Entonces, la imagen de  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  bajo  $h$  es un subgrupo de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  de dimensión seis. Como  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  es conexo y de dimensión seis, concluimos que  $h$  es sobreyectivo e induce un isomorfismo

$$\bar{h} : (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) / \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3).$$

■

Sea  $\phi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$ . Entonces,  $\phi(x) = q_1 x q_2^{-1}$ , para  $q_1, q_2 \in \mathbb{S}^3$ . Supongamos que  $\phi(x) = x$ , por lo tanto  $x = q_1 x q_2^{-1}$  y por consiguiente  $q_2 = x^{-1} q_1 x$ . Esto es,  $q_1$  y  $q_2$  son conjugados en  $\mathbb{S}^3$ . Por otro lado, si  $q_1$  y  $q_2$  son conjugados en  $\mathbb{S}^3$ , entonces  $\phi$  tiene un punto fijo. Concluimos que  $\phi$  tiene un punto fijo si y sólo si  $q_1$  y  $q_2$  son conjugados en  $\mathbb{S}^3$ . Este hecho nos permitirá describir todos los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$ .

**Lema III.4.** *Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  un subgrupo de orden dos que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ . Entonces,  $\Gamma = \{\mathbf{Id}, -\mathbf{Id}\} \cong \mathbb{Z}_2$ , con  $\mathbf{Id}$  la matriz identidad de orden cuatro.*

*Demostración.* Sea  $\phi$  distinta de  $\mathbf{Id}$ , el elemento en  $\Gamma$  correspondiendo a la isometría de  $\mathbb{S}^3$  dada por  $x \mapsto q_1 x q_2^{-1}$ . Como  $\phi$  es de orden dos, entonces  $x = q_1^2 x q_2^{-2}$  para todo cuaternión unitario  $x$ . Suponiendo  $x = 1$ , tenemos que  $q_1^2 = q_2^2$  y su valor común es 1 ó  $-1$ . Si es  $-1$ , entonces  $q_1$  y  $q_2$  tienen orden cuatro lo que implica que  $q_1$  es conjugado a  $q_2$  en  $\mathbb{S}^3$ . Como consecuencia,  $\phi$  tendría un punto fijo, lo cual es una contradicción. Entonces,  $q_1^2 = q_2^2 = 1$  y  $q_1$  y  $q_2$  son iguales a 1 ó  $-1$ . Si  $q_1 = q_2$ , entonces  $\phi$  es igual a  $\mathbf{Id}$ , lo cual de nuevo es una contradicción. Entonces,  $q_1, q_2$  son iguales a 1,  $-1$  respectivamente y  $\phi$  es la isometría de  $\mathbb{S}^3$  dada por  $x \mapsto -x$ . ■

El *espacio proyectivo real* de dimensión tres, el cual denotamos por  $\mathbb{RP}^3$ , es el espacio cociente  $\mathbb{S}^3/\sim$ , con  $\sim$  la relación de equivalencia dada por  $x \sim -x$  para toda  $x \in \mathbb{S}^3$ . Es decir,  $\sim$  identifica puntos antípodos en  $\mathbb{S}^3$ .

Sea  $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$  tal que  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  no contiene a  $-\mathbf{Id}$ . La acción de  $-\mathbf{Id}$  en  $\mathbb{S}^3$  desciende a  $M$ , ya que pertenece al centro. Entonces, la acción cociente de  $-\mathbf{Id}$  en  $M$  no tiene puntos fijos. Si los tuviera, habría algún  $\phi \in \Gamma$  y  $x \in \mathbb{S}^3$  tales que  $\phi(x) = -x$  y por lo tanto  $\phi^2(x) = x$ . Tendríamos que  $\phi^2 = \mathbf{Id}$  y por el Lema III.4,  $\phi = -\mathbf{Id}$ . Concluimos por lo tanto, que  $M/\{\pm\mathbf{Id}\}$  es una variedad geométrica esférica.

De lo anterior tenemos que una 3-variedad geométrica esférica también se puede pensar como un espacio cociente de la forma  $\mathbb{RP}^3/\Gamma$  si y sólo si  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  contiene al elemento  $-\mathbf{Id}$ .

Por lo tanto, la clasificación de 3-variedades geométricas esféricas se separa en dos casos. Primero, encontrar todos los espacios cociente de  $\mathbb{RP}^3$  por subgrupos  $\Gamma$  que actúan libremente y segundo, encontrar ciertos espacios cubrientes de orden dos de espacios cociente cuyo  $\Gamma$  no contiene a  $-\mathbf{Id}$ . Comenzaremos con el segundo caso.

Cada subgrupo finito  $\Gamma < \mathbf{SO}(3)$  se levanta a un subgrupo finito de  $\mathbb{S}^3 \cong \mathbf{SU}(2)$ , digamos  $\Gamma^*$ , cuyo orden es el doble del orden de  $\Gamma$ ; ya que  $\mathbb{S}^3$  es un espacio cubriente doble de  $\mathbf{SO}(3)$ . Por lo tanto, un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$  de orden  $n$ , se levanta a un grupo cíclico de orden  $2n$  y los subgrupos poliédricos se levantan a los siguientes grupos:

- diédrico binario, de orden  $4n$ ;
- tetraédrico binario, de orden 24;
- octaédrico binario, de orden 48;
- icosaédrico binario, de orden 120.

Denotamos a estos grupos por  $\mathbf{D}^*$ ,  $\mathbf{T}^*$ ,  $\mathbf{O}^*$  e  $\mathbf{I}^*$ , respectivamente y los llamamos *grupos poliédricos binarios*.

**Observación III.6.** Los grupos poliédricos binarios son subgrupos de  $\mathbb{S}^3$ , mientras que los grupos poliédricos son subgrupos de  $\mathbf{SO}(3)$ .

**Teorema III.13.** *Los únicos subgrupos finitos de  $\mathbb{S}^3$  son los cubrientes dobles de los subrupos finitos de  $\mathbf{SO}(3)$  y los grupos cíclicos de orden impar.*

*Demostración.* Vamos a considerar  $\mathbb{S}^3$  como  $\mathbf{SU}(2)$ . Sea  $\Gamma < \mathbf{SU}(2)$  conteniendo el centro. Entonces,  $\Gamma$  es el levantamiento de un subgrupo de  $\mathbf{SO}(3)$ . Tenemos que mostrar que si  $\Gamma < \mathbf{SU}(2)$  no contiene a  $\{1, -1\}$ , entonces es un grupo cíclico de orden impar.

*i)* Si  $\Gamma < \mathbf{SU}(2)$  no contiene a  $\{1, -1\}$ , entonces  $F : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  restringido a  $\Gamma$  es inyectivo. Por lo tanto,  $\Gamma$  es isomorfo a su imagen  $F(\Gamma) < \mathbf{SO}(3)$ ;

*ii)* Sea  $u \in \mathbb{S}^3$  tal que  $u^2 = 1$ , entonces  $u = \pm 1$ . Como  $u = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ , tenemos que

$$u^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 - |z_2|^2 & z_2(z_1 + \bar{z}_1) \\ -\bar{z}_2(z_1 + \bar{z}_1) & \bar{z}_1^2 - \bar{z}_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces,  $z_2 = 0$  ó  $z_1$  es imaginario puro, digamos  $z_1 = iy$  con  $y \in \mathbb{R}$ . Si esto sucede, tenemos que  $z_1^2 = -y^2 \leq 0$  y por hipótesis  $z_1^2 = |z_2|^2 = 1$ , lo cual no es posible. Concluimos que  $z_2 = 0$  y  $z_1 = \pm 1$ .

Los elementos de  $\Gamma \subset \mathbb{S}^3$ , distintos de la identidad, necesariamente vienen en pares. Entonces, si  $-1 \notin \Gamma$ , por el inciso *ii)* tenemos que el orden de  $\Gamma$  es impar. Además, el inciso *i)* implica que  $\Gamma$  es isomorfo a un subgrupo de  $\mathbf{SO}(3)$  de orden impar, concluimos que  $\Gamma$  es un grupo cíclico. ■

La ventaja de trabajar con espacios cociente de  $\mathbb{RP}^3$  es que el grupo de isometrías de  $\mathbb{RP}^3$ , que denotamos por  $\mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3)$ , es un producto. Podemos identificar  $\mathbb{RP}^3$  con  $\mathbf{SO}(3)$ , ya que  $\mathbf{SO}(3)$  es homeomorfo a  $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_2$  (ver pag. 71). Tenemos que  $\mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3) = \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$ , actuando sobre  $\mathbb{RP}^3$  por isometrías de la siguiente manera: sea  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$ , entonces  $x \mapsto \phi_1 x \phi_2^{-1}$ . Además, esta acción es libre ya que  $\mathbf{SO}(3)$  tiene centro trivial. Por lo tanto, clasificar los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$ , equivale a clasificar los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{RP}^3$ .

Análogo al caso de  $\mathbb{S}^3$ , todo  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3)$  no trivial, tiene un punto fijo si y sólo si  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son conjugados en  $\mathbf{SO}(3)$ . Más aún, todos los elementos de orden dos en  $\mathbf{SO}(3)$  son conjugados, ya que su ángulo de rotación es  $\pi$ . Necesitamos definir una construcción para obtener subgrupos de un producto de grupos, una vez que hemos dado subgrupos de los correspondientes factores. Tenemos la siguiente definición, siguiendo a W. P. Thurston (ver [Thu97]).

**Definición III.9.** Sean  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, G$  grupos y  $f_i : \mathcal{G}_i \rightarrow G$  ( $i = 1, 2$ ) un homomorfismo. El *producto fibrado*  $\mathcal{G}(f_1, f_2)$  de  $f_1$  y  $f_2$  es el subgrupo de  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  definido como

$$\mathcal{G}(f_1, f_2) = \{(g_1, g_2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \mid f_1(g_1) = f_2(g_2)\}.$$

**Proposición III.7.** *Todo subgrupo  $\mathcal{G} < \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  que se proyecta de forma sobreyectiva en  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$ , es el producto fibrado de una pareja de homomorfismos sobreyectivos de  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  a algún grupo  $G$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{G} \cap \mathcal{G}_1 \times \{e_2\}$  y  $\mathcal{G}'_2 = \mathcal{G} \cap \{e_1\} \times \mathcal{G}_2$ , con  $e_i$  el elemento identidad de  $\mathcal{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Como las proyecciones  $\mathcal{G} \xrightarrow{p_i} \mathcal{G}_i$  son sobreyectivas, entonces  $\mathcal{G}'_1 \triangleleft \mathcal{G}_1 \times \{e_2\}$  y  $\mathcal{G}'_2 \triangleleft \{e_1\} \times \mathcal{G}_2$ . Consideremos los cocientes

$$\mathcal{G} / (\mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2) \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 / (\mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2).$$

Obtenemos un subgrupo  $G = \mathcal{G} / (\mathcal{G}'_1 \times \mathcal{G}'_2) < (\mathcal{G}_1 / \mathcal{G}'_1) \times (\mathcal{G}_2 / \mathcal{G}'_2)$ .

Como  $G \cap (\mathcal{G}_1 / \mathcal{G}'_1)$  y  $G \cap (\mathcal{G}_2 / \mathcal{G}'_2)$  son triviales, existen proyecciones isomorfas

$$h_1 : G \longrightarrow \mathcal{G}_1 / \mathcal{G}'_1 \quad \text{y} \quad h_2 : G \longrightarrow \mathcal{G}_2 / \mathcal{G}'_2.$$

Tomando la composición de  $h_1$  y  $h_2$  con

$$g_1 : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_1 / \mathcal{G}'_1 \quad \text{y} \quad g_2 : \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_2 / \mathcal{G}'_2,$$

respectivamente, obtenemos los homomorfismos  $f_1 : \mathcal{G}_1 \rightarrow G$ ,  $f_2 : \mathcal{G}_2 \rightarrow G$  y  $\mathcal{G}$  es el producto fibrado de  $f_1$  y  $f_2$ . ■

El siguiente resultado puede consultarse en [Sco83] y [Thu97].

**Proposición III.8.** *Sea  $\mathcal{G} < \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$  que actúa libremente en  $\mathbb{RP}^3$ , sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  sus respectivas proyecciones en  $\mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$  y*

$$\mathcal{G}_1 = \Gamma_1 \cap (\mathbf{SO}(3) \times \{\mathbf{Id}\}), \quad \mathcal{G}_2 = \Gamma_2 \cap (\{\mathbf{Id}\} \times \mathbf{SO}(3)).$$

Entonces,

- i) todo elemento de orden dos en  $\Gamma_2$  pertenece a  $\mathcal{G}_2$ ;
- ii)  $\Gamma_1$  es un grupo cíclico de orden impar.

*Demostración.* Ya que la acción de  $\mathcal{G}$  en  $\mathbb{RP}^3$  es libre, por el Lema III.4 tenemos que  $\mathcal{G}_1$  ó  $\mathcal{G}_2$  no tiene elementos de orden dos. Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $\mathcal{G}_1$  no tiene elementos de orden dos.

Sea  $b \in \Gamma_2$  un elemento de orden dos, escogemos  $a \in \Gamma_1$  tal que  $(a, b) \in \mathcal{G}$ . Ya que  $(a, b)^2 = (a^2, 1)$ , entonces  $a^2 \in \mathcal{G}_1$  y el orden, digamos  $r$ , de  $a^2$  debe ser impar. Pero,  $(a, b)^r = (a^r, b^r) \in \mathcal{G}$  tiene orden dos y por lo tanto  $a^r = 1$  de no ser así,  $a^r$  podría ser conjugado a  $b^r = b$ , ambos teniendo orden dos. Concluimos que  $(a^r, b) \in \mathcal{G}$ , lo que muestra que  $b \in \mathcal{G}_2$ . Sabemos que los únicos subgrupos finitos de  $\mathbf{SO}(3)$  que no tienen elementos de orden dos son los grupos cíclicos de orden impar. Como  $\Gamma_1$  no tiene elementos de orden dos, debe ser un grupo cíclico de orden impar.

Por otro lado, como  $\mathcal{G}_1$  no tiene elementos de orden dos, aplicamos este mismo razonamiento y concluimos que  $\mathcal{G}_1$  es un grupo cíclico de orden impar. De la demostración de la Proposición III.7 tenemos que  $\Gamma_2/\mathcal{G}_2 = \Gamma_1/\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  es normal en  $\Gamma_2$ . Si  $\Gamma_2 = \mathcal{G}_2$ , entonces  $\Gamma_1 = \mathcal{G}_1$  y se sigue que  $\Gamma_1$  es un grupo cíclico de orden impar. Por otro lado,  $\Gamma_2 < \mathbf{SO}(3)$  es finito, tal que todos sus elementos de orden dos están contenidos en un subgrupo propio normal. Entonces,  $\Gamma_2$  es el grupo tetraédrico  $\mathbf{T}$  y  $\mathcal{G}_2$  es un subgrupo de índice tres. Se sigue que el índice de  $\mathcal{G}_1$  en  $\Gamma_1$  también es tres. Como  $\mathcal{G}_1$  no contiene elementos de orden dos, tampoco  $\Gamma_1$ , por lo que es un grupo cíclico de orden impar. ■

El siguiente teorema nos da una clasificación de los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{RP}^3$ . La demostración puede consultarse en [Sco83] y [Thu97].

**Teorema III.14.** *Sea  $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$  una 3-variedad geométrica esférica.*

*i) Si  $\Gamma$  es un subgrupo abeliano, entonces es un subgrupo cíclico.*

*De otro modo,  $M$  es el cociente de  $\mathbb{RP}^3$  por un grupo  $\mathcal{G}$  que corresponde a uno de los siguientes:*

*ii)  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ , con  $\mathcal{G}_1$  un grupo diédrico ó un grupo poliédrico y  $\mathcal{G}_2$  un grupo cíclico de orden  $n$ , primo relativo al orden de  $\mathcal{G}_1$ .*

*iii)  $\mathcal{G}$  es un subgrupo de índice tres en  $\mathbf{T} \times \mathbb{Z}_{3n}$ , con  $n$  impar.*

*iv)  $\mathcal{G}$  es un subgrupo de índice dos en  $\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbf{D}_{2m}$ , con  $n$  par y  $(m, n) = 1$ .*



*Demostración.* Supongamos que  $\Gamma$  es un subgrupo abeliano. Si  $M$  no es un cociente de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , podemos considerar  $N = M/\{\pm\mathbf{Id}\} = \mathbb{R}\mathbb{P}^3/\Gamma_N$ . Como  $-\mathbf{Id}$  pertenece al centro de  $\mathbb{S}^3$ , el que  $\Gamma$  sea un subgrupo abeliano implica que  $\Gamma_N$  es un subgrupo abeliano y si  $\Gamma_N$  es un subgrupo cíclico, entonces  $\Gamma$  es un subgrupo cíclico.

i) Podemos asumir que  $M$  es el cociente de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$  por un subgrupo abeliano  $\mathcal{G} < \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$ . Por la Proposición III.8, al menos una de sus proyecciones a uno de estos factores es un subgrupo cíclico. Supongamos que  $\Gamma_1$  es un subgrupo cíclico, entonces si  $\Gamma_2$  no es un subgrupo cíclico, debe ser  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Si esto último ocurriese, escogemos dos elementos de  $\mathcal{G}$ , cuyas proyecciones en  $\Gamma_2$  son distintas y no triviales. Levantamos dichos elementos a  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3) = (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)/\mathbb{Z}_2$ . Los levantamientos son de la forma  $(\phi_1, \phi_2)$  y  $(\psi_1, \psi_2)$ , donde  $\phi_1$  y  $\psi_1$  conmutan,  $\phi_2$  y  $\psi_2$  no pertenecen al centro de  $\mathbf{H}$  y por consiguiente no conmutan. Entonces, los levantamientos no conmutan y  $\Gamma$  no es un subgrupo abeliano.

Concluimos que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son subgrupos cíclicos. Si  $\mathcal{G}$  es un subgrupo cíclico,  $\Gamma$  también lo es. Ya que si  $(\phi_1, \phi_2) \in \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{SO}(3)$  genera a  $\mathcal{G}$ , tenemos que  $|\mathcal{G}|$  corresponde al mínimo común múltiplo del orden de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Ahora tomamos los levantamientos de  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que denotamos por  $\widetilde{\phi}_1$  y  $\widetilde{\phi}_2$ , entonces el mínimo común múltiplo del orden de  $\widetilde{\phi}_1$  y  $\widetilde{\phi}_2$  es  $2|\mathcal{G}|$ . Tenemos que  $(\widetilde{\phi}_1, \widetilde{\phi}_2)$  genera a  $\Gamma$  y concluimos que  $\Gamma$  es un subgrupo cíclico.

Supongamos que  $\Gamma$  no es un subgrupo abeliano. Si  $M = \mathbb{R}\mathbb{P}^3/\mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{G}$  no es un subgrupo cíclico. Por la Proposición III.8 podemos asumir que  $\mathcal{G}_1$  contiene todos los elementos de orden dos en  $\Gamma_1$  y que  $\mathcal{G}_2 = \mathbb{Z}_n$ , con  $n$  impar. Entonces, tenemos tres posibilidades:  $\mathcal{G}_1 = \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1$  es el grupo tetraédrico  $\mathbf{T}$  con  $\mathcal{G}_1$  de índice tres ó  $\Gamma_1$  es un subgrupo cíclico y  $\mathcal{G}_1$  es un subgrupo propio.

ii) Si  $\mathcal{G}_1 = \Gamma_1$ , por la demostración de la Proposición III.7 tenemos que  $\mathcal{G}_2 = \Gamma_2$ . Por lo tanto,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \quad \text{y} \quad \Gamma = \widetilde{\mathcal{G}}_1 \times \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1 \times \widetilde{\mathcal{G}}_2.$$

Por el Lema III.4,  $(|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2|) = 1$ , es decir,  $|\mathcal{G}_1|$  y  $|\mathcal{G}_2|$  son primos relativos.

iii) Si  $\Gamma_1 = \mathbf{T}$ ,  $\mathcal{G}_1$  tiene índice tres como en la última parte de la demostración de la Proposición III.7.

- iv)* Si  $\Gamma_1$  es un subgrupo cíclico y  $\Gamma_1/\mathcal{G}_1 = \Gamma_2/\mathcal{G}_2$  no es trivial, entonces  $\Gamma_2$  debe ser un subgrupo diédrico o cíclico. Esto se debe a que los grupos poliédricos no son extensiones cíclicas de grupos cíclicos. Cuando  $\Gamma_2$  es un subgrupo cíclico estamos en el caso *i*). Si  $\Gamma_2$  es un subgrupo diédrico, el único candidato para  $\mathcal{G}_2$  (que debe ser normal, cíclico y de orden impar) es  $\mathbb{Z}_m$ . Entonces,  $m$  es impar,  $\Gamma_1/\mathcal{G}_1 = \Gamma_2/\mathcal{G}_2 = \mathbb{Z}_2$  y  $\Gamma_1$  tiene orden  $2n$ , con  $n$  par (de no ser así, tendríamos un elemento de orden dos en  $\Gamma_1$  que no pertenece a  $\mathcal{G}_1$ ). Por el Lema III.4, tenemos que  $(m, n) = 1$ .

■

### Ejemplos de 3-variedades Geométricas Esféricas.

- **Espacios Lente.** Los espacios lente fueron definidos en 1908 por H. Tietze (ver [Tie08]) como los ejemplos más sencillos de 3-variedades, obtenidas por “identificar” las caras de un poliedro. El término *espacio lente* (*linsenraume*) fue introducido por H. Seifert y W. Threlfall en 1930 en su artículo [ST30]. Existen varias maneras de describir un espacio lente, nosotros presentamos dos de ellas. Las demás pueden consultarse en [Ada04], [Hem76], [Mos71], [Rol76] y [Ste93], entre otros.

Vamos a considerar  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ . Sea  $\mathbb{Z}_p < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$ , con  $p$  no necesariamente un número primo, un grupo cíclico de orden  $p$  bajo la suma módulo  $p$ , con 0 la identidad aditiva. Escogemos  $q \in \mathbb{Z}_p$  tal que  $0 < q < p$  y  $(q, p) = 1$ . Definimos una acción de  $\mathbb{Z}_p$  en  $\mathbb{S}^3$  de la siguiente manera

$$[m] \cdot (z_1, z_2) = \left( e^{2\pi im/p} z_1, e^{2\pi iqm/p} z_2 \right), \quad [m] \in \mathbb{Z}_p \text{ y } (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3.$$

Observemos que  $\mathbb{Z}_p$  actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ , ya que si

$$[m] \cdot (z_1, z_2) = (z_1, z_2), \text{ entonces } e^{2\pi im/p} z_1 = z_1 \text{ y } e^{2\pi iqm/p} z_2 = z_2.$$

Tenemos dos posibilidades:  $e^{2\pi im/p} = 1$  ó  $z_1 = 0$ .

- $e^{2\pi im/p} = 1$ . Esto implica que  $m/p \in \mathbb{Z}$  y  $p|m$ . Por lo tanto,  $m = 0$  en  $\mathbb{Z}_p$ ;
- $z_1 = 0$ . Esto implica que  $|z_2| = 1$  y por consiguiente  $z_2 \neq 0$ ; se tiene que  $e^{2\pi iqm/p} = 1$  y  $qm/p \in \mathbb{Z}$ , entonces  $p|qm$ . En particular,  $p|m$  y por lo tanto,  $m = 0$  en  $\mathbb{Z}_p$ .

**Definición III.10.** El espacio cociente  $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ , bajo la acción descrita anteriormente, es una 3-variedad compacta llamada *espacio lente* y la denotamos por  $L_{p,q}$ .

Vamos a describir al espacio lente  $L_{p,q}$  como la unión de dos 3-toros  $\mathbb{T}_1 \sqcup_h \mathbb{T}_2$ . En este caso,  $h : \partial\mathbb{T}_1 \rightarrow \partial\mathbb{T}_2$  es un homeomorfismo y la imagen bajo  $h$  de un meridiano  $\mu \subset \partial\mathbb{T}_1$  es una curva  $\gamma_{p,q} \subset \partial\mathbb{T}_2$ . Recordemos que una curva  $\gamma_{p,q} \subset \partial\mathbb{T}$  es una curva no trivial que no se autointersecta en  $\partial\mathbb{T}$ , con  $p$  el número de meridianos y  $q$  el número de paralelos.

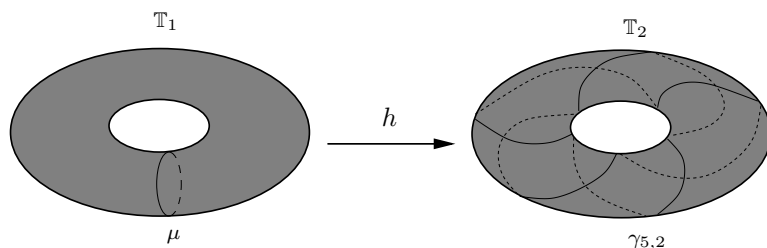


Figura III.17: Unión de  $\mathbb{T}_1$  y  $\mathbb{T}_2$  mediante  $h : \partial\mathbb{T}_1 \rightarrow \partial\mathbb{T}_2$ , con  $h(\mu) = \gamma_{5,2}$ .

Descomponemos estos 3-toros de la siguiente manera.

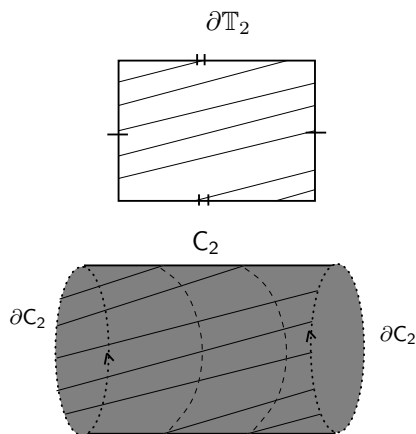


Figura III.18:  $\partial\mathbb{T}_2$  con cinco secciones disjuntas de la curva  $\gamma_{5,2}$ .

Cortamos  $\mathbb{T}_2$  de modo que obtenemos un cilindro sólido  $C_2$  con  $p$  segmentos disjuntos de la curva  $\gamma_{p,q}$  envolviéndolo, tal que la frontera de  $C_2$  está identificada. Observemos que  $C_2$  es invariante bajo la rotación de una de las componentes de su frontera por  $(2\pi q)/p$ .

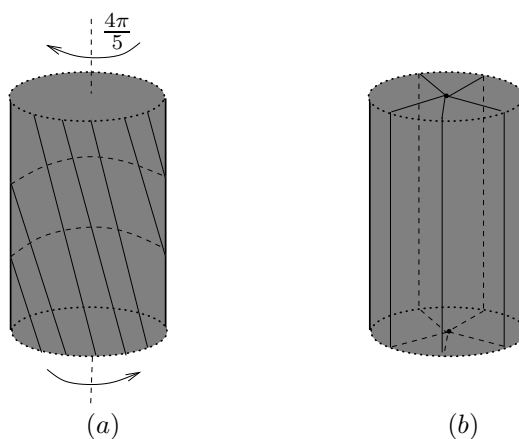
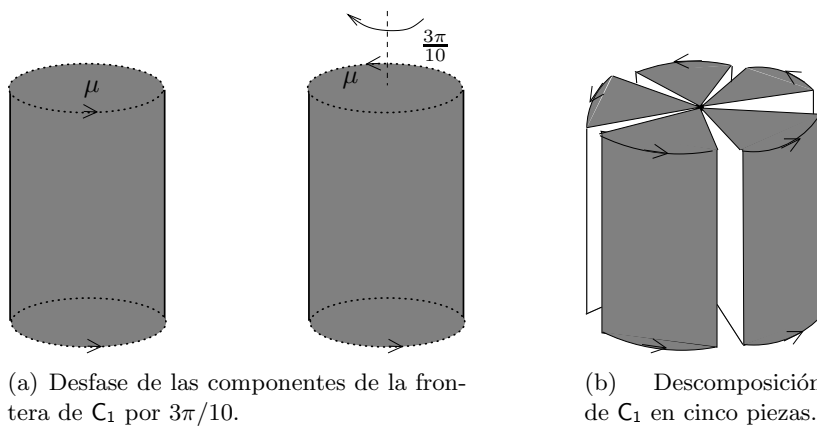


Figura III.19: Invarianza de  $C_2$  bajo una rotación de  $4\pi/5$ .

Como  $(p, q) = 1$ , por la identidad de Bézout sabemos que existen  $r, s \in \mathbb{Z}$ , tales que  $qs \equiv 1 \pmod{p}$ . Es decir,  $q$  tiene inverso único, digamos  $s = q^{-1}$ , en  $\mathbb{Z}_p$ .

Por otro lado, cortamos  $\mathbb{T}_1$  de manera que obtenemos un cilindro sólido  $C_1$ , con las componentes de su frontera identificadas y una copia de  $\mu$  alrededor de cada una de ellas. Rotamos  $C_1$  de tal modo que las componentes de su frontera queden desfasadas por  $(2\pi q^{-1})/p$ . Descomponemos el cilindro en  $p$  piezas iguales.



(a) Desfase de las componentes de la frontera de  $C_1$  por  $3\pi/10$ .

(b) Descomposición de  $C_1$  en cinco piezas.

Figura III.20: Descomposición de  $\mathbb{T}_1$ .

Vamos a nombrar a las caras superiores de estas piezas, en dirección

positiva, por  $0, 1, \dots, p-1$ . Como consecuencia del desfase, las caras inferiores son  $-q^{-1}, -q^{-1}+1, \dots, -q^{-1}+(p-1)$ , todas (mód  $p$ ). Debido a que  $-q^{-1}$  posee un inverso único en  $\mathbb{Z}_p$ , digamos  $-q$ , tenemos que

$$\{0, -q^{-1}, 2(-q^{-1}), \dots, (p-1)(-q^{-1})\} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}. \quad (\text{III.8})$$

Identificamos las piezas de acuerdo con (III.8), como se muestra en la siguiente figura.

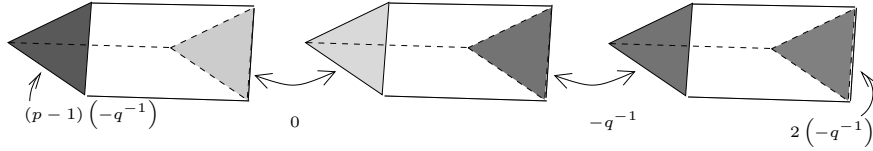


Figura III.21: Identificación de piezas en la figura III.20 (b).

Obtenemos un 3-toro, con un lado “plano” y un “ecuador”.

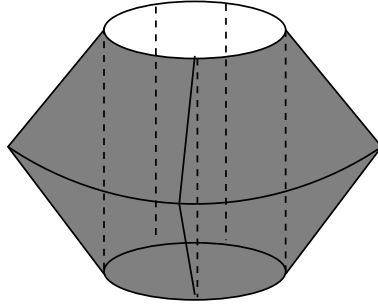


Figura III.22: 3-toro obtenido de la identificación en la figura III.21.

Las  $p$  líneas punteadas, que corresponden a los  $p$  pares de arcos de las caras en las piezas de la figura III.20 (b), están distribuidas a la misma distancia una de otra formando un cilindro. Uniendo los extremos en su orden original,

$$\{0, 1, \dots, p-1\} = \{0(-q^{-1}), -q(-q^{-1}), \dots, -(p-1)q(-q^{-1})\} \pmod{p},$$

obtenemos una copia del meridiano  $\mu$ .

Las líneas punteadas en la figura III.21 son múltiplos de  $(-q^{-1})$ . Entonces, un orden para los segmentos verticales de la figura III.19 (b) correspondiendo, bajo traslación, al orden en el hueco cilíndrico de la

figura III.22 es  $(0, -q, -2q, \dots, -(p-1)q)$ , todos (mód  $p$ ). Este es el orden en el que los segmentos de la figura III.19 (b) fueron unidos originalmente, en la curva  $\gamma_{p,q}$ . Es decir, si rotamos  $C_2$  por  $(2\pi(-q))/p$  e identificamos ortogonalmente las componentes de su frontera, obtenemos  $\mathbb{T}_2$ .

Colocamos el cilindro sólido de la figura III.19 (b) en el hueco cilíndrico de la figura III.22, de modo que los segmentos verticales coincidan, como muestra la figura.

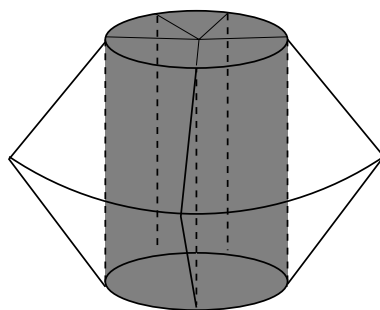


Figura III.23: Segmentos verticales coincidiendo.

Las caras superior e inferior están identificadas por una rotación de  $(2\pi q)/p$ , al igual que las caras de la figura III.22.

Vamos a nombrar a las caras de cada pieza en III.20 (b) como se muestra en la siguiente figura.

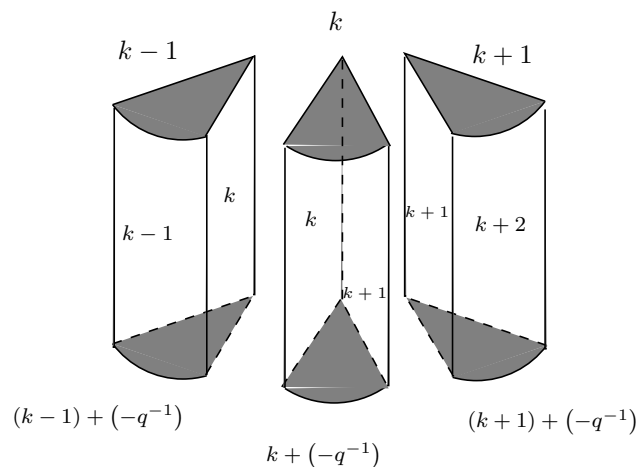


Figura III.24: Piezas etiquetadas.

Ya que  $a(-q^{-1}) = (a+q)(-q^{-1}) + 1$ , la cara superior de una pieza es identificada con la cara inferior de la  $q$ -ésima pieza.

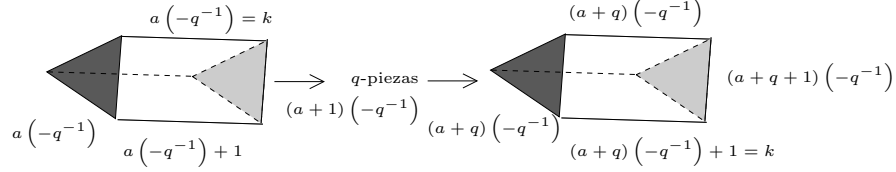


Figura III.25: Identificación de caras.

■ **Espacios Prisma.**

Los *espacios prisma* son espacios cociente de la forma  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  un subgrupo diédrico que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ . Denotamos a estos espacios por  $\mathbf{P}_{n,m}$ .

Consideremos el caso,  $m = 1$  y  $n = 2$ , es decir,  $\Gamma = \mathbb{Z}_4 \times \mathbf{D}_2$ . Este espacio se obtiene por identificar caras opuestas en un cubo mediante una rotación, en el sentido de las manecillas del reloj, de  $2\pi/4$  como se muestra en la figura.

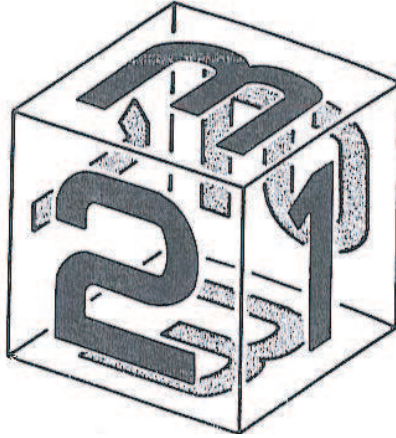


Figura III.26: Espacio Prisma  $\mathbf{P}_{2,1}$ .

Bajo esta identificación, se forman dos grupos de cuatro vértices cada uno, tal que cada vértice es adyacente a los otros tres en su mismo grupo.

Este espacio prisma es conocido como *espacio cuaterniónico*, ya que

sus simetrías pueden ser modelas por el grupo cuaterniónico  $\mathbf{H}$  que describimos anteriormente.

■ **Espacios Tetraedrales.**

Los *espacios tetraedrales* son espacios cociente de la forma  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  un subgrupo de tipo *ii*) ó *iii*) en el Teorema III.14, que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ .

■ **Espacios Octaedrales.**

Los *espacios octaedrales* son espacios cociente de la forma  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  un subgrupo de tipo *ii*) en el Teorema III.14, que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ .

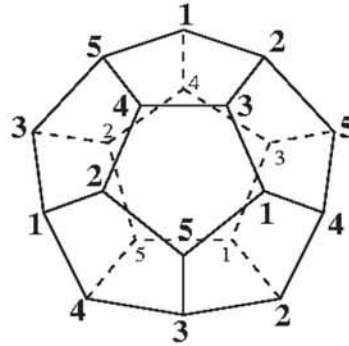
■ **Espacios Icosaedrales.**

Los *espacios icosaedrales* son espacios cociente de la forma  $\mathbb{S}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  un subgrupo de tipo icosaédrico que actúa libremente en  $\mathbb{S}^3$ .

Consideremos el caso  $p = 1$ , es decir,  $\Gamma = \mathbf{Id} \times \mathbf{I}^*$ . Una construcción sencilla de este espacio es la siguiente.



(a) Dodecaedro esférico.



(b) Identificación de caras opuestas con una rotación por  $\frac{2\pi}{10}$ .

Figura III.27: Espacio dodecaedral de Poincaré.

Identificamos caras opuestas en un dodecaedro esférico (ver figura III.27 (a)) mediante una rotación, en el sentido de las manecillas del reloj, de  $2\pi/10$  como se muestra en la figura III.27 (b). Bajo este patrón de identificación, los ejes del dodecaedro esférico son identificados



en diez ternas y los vértices forman cinco clases que constan de cuatro vértices equivalentes, cada uno.

Este espacio corresponde al espacio cociente

$$\mathbb{RP}^3/\Gamma' \quad \text{con} \quad \Gamma' = \mathbf{Id} \times \mathbf{I} < \mathbf{Isom}(\mathbb{RP}^3).$$

En otras palabras, corresponde al espacio cociente

$$\mathbb{S}^3/\Gamma \quad \text{con} \quad \Gamma = \mathbf{Id} \times \mathbf{I}^* < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3).$$

Este espacio icosaedral apareció en 1933 en el artículo [SW33] de C. Weber y H. Seifert. Es conocido como *espacio dodecaedral de Poincaré* ó *esfera homológica de Poincaré* en honor de H. Poincaré.

### § 3. Geometría Hiperbólica.

El modelo geométrico hiperbólico es el más rico y a la vez el menos entendido de los ocho en el siguiente sentido: podemos dar una lista explícita de 3-variedades compactas que admiten una estructura geométrica modelada en cada uno de los modelos excepto, para éste. En esta sección describimos varias maneras de representar dicho modelo, así como su grupo de isometrías, sus geodésicas, entre otras cosas (se puede consultar [Bea83], [BP92], [Rat94] y [Ver82]).

#### § 3.1. Transformaciones de Möbius y Extensión de Poincaré.

Comenzaremos por definir cuales son las transformaciones de Möbius de  $\hat{\mathbb{E}}^3$ , así como algunas de sus propiedades. Utilizaremos el concepto de extensión de Poincaré para presentar un subgrupo de dichas transformaciones, el cual será de suma importancia para el entendimiento del espacio hiperbólico. Hacemos énfasis en que los resultados que a continuación presentamos se satisfacen para dimensión  $n \geq 2$ , pero nos enfocaremos a  $n = 3$ .

#### Razón Cruzada.

Comenzaremos por definir la razón cruzada de cuatro puntos en  $\hat{\mathbb{E}}^3$  y así, caracterizar las transformaciones de Möbius de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  mismo.

**Definición III.11.** Sean  $u, v, x, y \in \hat{\mathbb{E}}^3$ , tales que  $u \neq v$  y  $x \neq y$ . El número real

$$[u, v, x, y] = \frac{m_c(u, x)m_c(v, y)}{m_c(u, v)m_c(x, y)},$$

con  $m_c$  la métrica cordal en  $\hat{\mathbb{E}}^3$  (ver pág. 66), es llamado *razón cruzada* de los puntos  $u, v, x, y$ .

**Observación III.7.** La razón cruzada es una función continua de cuatro variables, ya que la métrica  $m_c : \hat{\mathbb{E}}^3 \times \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua.

El siguiente resultado se sigue del Teorema III.9.

**Teorema III.15.** Sean  $u, v, x, y \in \mathbb{E}^3$ , tales que  $u \neq v$  y  $x \neq y$ . Entonces,

$$i) [u, v, x, y] = \frac{|u-x||v-y|}{|u-v||x-y|};$$

$$ii) [\infty, v, x, y] = \frac{|v-y|}{|x-y|};$$

$$iii) [u, \infty, x, y] = \frac{|u-x|}{|x-y|};$$

$$iv) [u, v, \infty, y] = \frac{|v-y|}{|u-v|};$$

$$v) [u, v, x, \infty] = \frac{|u-x|}{|u-v|}.$$

### Transformaciones de Möbius de $\hat{\mathbb{E}}^3$ .

**Definición III.12.** Una  $k$ -esfera generalizada  $\Sigma \subset \hat{\mathbb{E}}^3$  ( $k = 1, 2$ ), es

- un  $k$ -plano  $\mathcal{P}(a, t)$  en  $\hat{\mathbb{E}}^3$  ó
- una  $k$ -esfera euclidiana  $\mathbb{S}(c, r)$  en  $\mathbb{E}^3$ .

Cuando  $k = 1$ , hablamos de un círculo y cuando  $k = 2$ , de una 2-esfera.

Decimos que dos  $k$ -esferas generalizadas  $\Sigma$  y  $\Sigma' \subset \hat{\mathbb{E}}^3$  son *ortogonales* si y sólo si se intersecan en  $\mathbb{E}^3$  y en cada punto de intersección, sus líneas normales son ortogonales.

**Definición III.13.** Una *transformación de Möbius*  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  es una composición finita de un número par de reflexiones  $\rho_i$  en  $k$ -esferas generalizadas  $\Sigma \subset \hat{\mathbb{E}}^3$ .

**Observación III.8.** Toda transformación de Möbius  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  es un homeomorfismo. La composición de dos de ellas es de nuevo una transformación de Möbius de  $\hat{\mathbb{E}}^3$ , al igual que su inversa. Además, ya que cualquier reflexión  $\rho$  satisface que  $\rho^2(x) = x$ , la función identidad  $\mathbf{Id} : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  es una transformación de Möbius.

Concluimos que las transformaciones de Möbius de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  forman un grupo bajo la composición.

**Definición III.14.** El grupo de transformaciones de Möbius  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  que preservan orientación, es llamado *Grupo de Möbius* y lo denotamos por  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .

**Ejemplos.**

- $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que  $x \mapsto x + a$  con  $a \in \mathbb{E}^3$ , es un elemento de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .  
Ya que es la reflexión sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a, 0)$ , seguida de la reflexión sobre el 2-plano  $\mathcal{P}(a, \frac{1}{2}|a|^2)$ .
- $\phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  tal que  $x \mapsto kx$  con  $k > 0$ , es un elemento de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .  
Ya que es la reflexión sobre  $\mathbb{S}(0, 1)$ , seguida por una reflexión sobre  $\mathbb{S}(0, \sqrt{k})$ .
- Las isometrías euclidianas son elementos de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .

El siguiente teorema nos permite caracterizar a los elementos de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .

**Teorema III.16.** Una función  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  pertenece a  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$  si y sólo si preserva la razón cruzada.

*Demostración.* Sea  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ . Ya que  $\phi$  es una composición de reflexiones, podemos asumir que es una reflexión. Una homotecia euclidiana preserva la razón cruzada y por el Lema III.1, podemos asumir que  $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ . Por el Teorema (III.1) tenemos que

$$|\phi(x) - \phi(y)| = \frac{|x - y|}{|x||y|}.$$

Del Teorema (III.15) se sigue que

$$\begin{aligned} [\phi(u), \phi(v), \phi(x), \phi(y)] &= \frac{|\phi(u) - \phi(x)| |\phi(v) - \phi(y)|}{|\phi(u) - \phi(v)| |\phi(x) - \phi(y)|} \\ &= \frac{|u - x| |v - y|}{|u - v| |x - y|} \\ &= [u, v, x, y], \end{aligned}$$

si  $u, v, x, y$  son distintos de  $\infty$  y de cero. Los casos restantes se siguen por continuidad. Por lo tanto,  $\phi$  preserva la razón cruzada.

Supongamos ahora que  $\phi$  preserva la razón cruzada. Podemos asumir que  $\phi(\infty) = \infty$ , por componer  $\phi$  con un elemento de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ . Sean  $u, v, x, y \in \mathbb{E}^3$ , tales que  $u \neq v, x \neq y$  y  $(u, v) \neq (x, y)$ . Tenemos dos posibilidades  $u \neq x$  ó  $v \neq y$ .

Asumiremos primero que  $u \neq x$ . Como  $[\phi(u), \infty, \phi(x), \phi(y)] = [u, \infty, x, y]$ , tenemos que

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(x) - \phi(y)|} = \frac{|u - x|}{|x - y|}.$$

Ya que  $[\phi(u), \phi(v), \phi(x), \infty] = [u, v, x, \infty]$ , tenemos que

$$\frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|\phi(u) - \phi(v)|} = \frac{|u - x|}{|u - v|}.$$

Entonces,

$$\frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|u - v|} = \frac{|\phi(u) - \phi(x)|}{|u - x|} = \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

De manera análoga, si asumimos que  $v \neq y$  tenemos que

$$\frac{|\phi(u) - \phi(v)|}{|u - v|} = \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

Por lo tanto, existe una constante positiva  $k$ , tal que

$$|\phi(x) - \phi(y)| = k|x - y| \quad \text{para toda } x, y \in \mathbb{E}^3.$$

Se sigue que  $\phi$  es una homotecia euclidiana. Concluimos que  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ . ■

### Extensión de Poincaré.

H. Poincaré observó que toda transformación de Möbius  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^2$  que actúa en  $\hat{\mathbb{E}}^2$  tiene una extensión natural a una transformación de Möbius  $\tilde{\phi} : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  que actúa en  $\hat{\mathbb{E}}^3$ . Esto nos permite pensar a  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$  como un subgrupo de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ .

Dicha extensión depende del encaje

$$\psi : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3 \quad \text{tal que } x \mapsto \tilde{x} = (x_1, x_2, 0) \text{ y } \tilde{\infty} \mapsto \infty, \quad \text{con } x = (x_1, x_2).$$

Para cada reflexión  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^2$ , definimos una reflexión  $\tilde{\phi} : \hat{\mathbb{E}}^3 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^3$  de la siguiente manera:

- Si  $\phi$  es la reflexión sobre  $\mathbb{S}(c, r)$  con  $c \in \mathbb{E}^2$ , entonces  $\tilde{\phi}$  es la reflexión sobre  $\mathbb{S}(\tilde{c}, r)$ ;
- si  $\phi$  es la reflexión sobre  $\mathcal{P}(a, t)$ , entonces  $\tilde{\phi}$  es la reflexión sobre  $\mathcal{P}(\tilde{a}, t)$ .

Se sigue de las ecuaciones (III.2) y (III.3) que si  $x \in \hat{\mathbb{E}}^2$  y  $y = \phi(x)$ ,

$$\tilde{\phi}(x_1, x_2, 0) = (y_1, y_2, 0) = \widetilde{\phi(x)}. \quad (\text{III.9})$$

En este sentido decimos que  $\tilde{\phi}$  es una extensión de  $\phi$ . De manera alternativa, podemos identificar  $\mathbb{E}^3$  con  $\mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^1$  y escribir la ecuación (III.9) como

$$\tilde{\phi}(x, 0) = (\phi(x), 0).$$

Observemos que  $\tilde{\phi}$  deja invariante el plano  $x_3 = 0$  (es decir,  $\hat{\mathbb{E}}^2$ ) y los semiespacios  $x_3 > 0$  y  $x_3 < 0$ ; lo cual se sigue directamente de las ecuaciones (III.2) y (III.3).

Ya que toda transformación de Möbius  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^2$  es una composición finita de reflexiones, existe al menos una transformación de Möbius, digamos  $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\phi}_m$ , que extiende la acción de  $\phi$  a  $\hat{\mathbb{E}}^3$  en el sentido de la ecuación (III.9) y preserva el semiespacio superior de  $\mathbb{E}^3$ .

**Definición III.15.** La *extensión de Poincaré* de  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$  es la transformación  $\tilde{\phi} \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$  definida anteriormente.

Observemos que si  $\phi = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m$  y  $\psi = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k$  son elementos de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ , entonces la extensión de Poincaré de  $\phi \circ \psi$  está dada por

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi \circ \psi} &= (\phi_1 \circ \cdots \circ \phi_m \circ \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k)^\sim \\ &= \tilde{\phi}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\phi}_m \circ \tilde{\psi}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\psi}_k \\ &= \tilde{\phi} \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos un homomorfismo inyectivo de  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$  en  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$  dado por  $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ .

### § 3.2. Modelo del Semiespacio Superior de Poincaré.

Sea

$$\mathbb{E}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_3 > 0\},$$

el semiespacio superior de  $\mathbb{E}^3$  y  $\partial\mathbb{E}_+^3 = \hat{\mathbb{E}}^2$  su frontera.

Dotamos a  $\mathbb{E}_+^3$  con la métrica riemanniana

$$ds_{\mathbb{H}^3}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2},$$

la cual llamamos *métrica hiperbólica*.

**Definición III.16.**  $\mathbb{E}_+^3$  dotado con la métrica hiperbólica es el *modelo del semiespacio superior de Poincaré* y lo denotamos por  $\mathbb{H}^3$ .

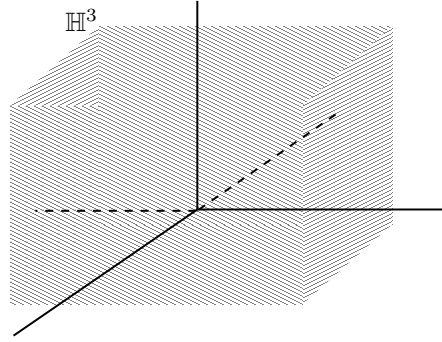


Figura III.28: Modelo del semiespacio superior de Poincaré.

**Observación III.9.** Podemos identificar a  $\mathbb{H}^3$  con

$$\mathbb{C} \times (0, +\infty) = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{E}^1 \mid t > 0\},$$

dotado con la métrica riemanniana

$$ds_{\mathbb{H}^3}^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}.$$

**Transformaciones de Möbius de  $\mathbb{H}^3$ .**

**Definición III.17.** Sea  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$ . Si  $\phi(\mathbb{H}^3) = \mathbb{H}^3$ , decimos que es una *transformación de Möbius de  $\mathbb{H}^3$* .

Las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{H}^3$  forman un grupo, el cual denotamos por  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$ .

**Teorema III.17.**  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$  es una transformación de Möbius de  $\mathbb{H}^3$  si y sólo si es la extensión de Poincaré de alguna  $\psi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ .

*Demostración.* Sea  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^3}$  que deja invariante a  $\mathbb{H}^3$ . Como  $\phi$  es un homeomorfismo, también deja invariante a  $\partial\mathbb{H}^3$ . Por lo tanto,  $\phi$  se puede restringir a un homeomorfismo  $\phi' : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^2$ . Ya que  $\phi$  preserva la razón cruzada en  $\hat{\mathbb{E}}^3$ , entonces  $\phi'$  preserva la razón cruzada en  $\hat{\mathbb{E}}^2$ . Se sigue que  $\phi' \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ .

Sea  $\tilde{\phi}'$  la extensión de Poincaré de  $\phi'$ . Entonces,  $\tilde{\phi}' \circ \phi^{-1}$  deja fijo cada punto de  $\hat{\mathbb{E}}^2$  y deja invariante a  $\mathbb{H}^3$ . Por lo tanto,  $\tilde{\phi}' \circ \phi^{-1}$  es la función identidad. Concluimos que  $\phi = \tilde{\phi}'$ . ■

**Corolario III.2.** *El grupo  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$  es isomorfo al grupo  $\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ .*

Recordemos que los siguientes grupos son isomorfos

$$\mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2} \cong \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

Por lo tanto,  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3} \cong \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

El siguiente resultado nos da una caracterización de los elementos de  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$ .

**Teorema III.18.** *Toda  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$  es la composición de reflexiones  $\sigma_i$  sobre  $k$ -esferas generalizadas  $\Sigma \subset \hat{\mathbb{E}}^3$ , ortogonales a  $\hat{\mathbb{E}}^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\psi \in \mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$ . Entonces,  $\psi$  es la extensión de Poincaré  $\tilde{\psi}$  de una transformación de Möbius  $\phi : \hat{\mathbb{E}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{E}}^2$ . Por lo tanto,  $\phi$  es a lo más la composición de 3 reflexiones, digamos  $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ , de  $\hat{\mathbb{E}}^2$  sobre  $k$ -esferas generalizadas. La extensión de Poincaré de la reflexión  $\sigma_i$  es una reflexión de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre una  $k$ -esfera generalizada, la cual es ortogonal a  $\hat{\mathbb{E}}^2$ . Como  $\tilde{\psi} = \tilde{\sigma}_1 \circ \tilde{\sigma}_2 \circ \tilde{\sigma}_3$ , tenemos que  $\psi$  es la composición de reflexiones de  $\hat{\mathbb{E}}^3$  sobre  $k$ -esferas generalizadas, ortogonales a  $\hat{\mathbb{E}}^2$ . ■

### § 3.3. Modelo de la Bola Unitaria de Poincaré.

Sea

$$\mathbb{B}(0, 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\},$$

la bola unitaria abierta en  $\mathbb{E}^3$  y

$$\partial\mathbb{B}(0, 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

su frontera.

Sean  $\sigma$  y  $\phi_0$  las reflexiones sobre el plano  $x_3 = 0$  y sobre la 2-esfera  $\mathbb{S}(e_3, \sqrt{2})$  respectivamente, con  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Es decir,

$$x = (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\sigma} (x_1, x_2, -x_3) \quad \text{y} \quad x \xrightarrow{\phi_0} e_3 + \frac{2}{|x - e_3|^2} (x - e_3).$$

Observemos que,

$$\begin{aligned} |\phi_0(x)|^2 &= 1 + \frac{4e_3 \cdot (x, e_3)}{|x - e_3|^2} + \frac{4}{|x - e_3|^2} \\ &= 1 + \frac{4x_3}{|x - e_3|^2}. \end{aligned}$$

Esto implica que la imagen de  $\overline{\mathbb{H}^3}$  bajo  $\phi_0$  es homeomorfa al interior de  $\mathbb{B}(0, 1)$ .

Denotaremos las restricciones  $\phi_0|_{\overline{\mathbb{H}^3}}$  y  $\sigma|_{\mathbb{H}^3}$  por  $\phi_0$  y  $\sigma$ , respectivamente. El homeomorfismo

$$\phi := \phi_0 \circ \sigma : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{B}(0, 1), \quad \text{definido por} \quad \phi(x) = \frac{(2x_1, 2x_2, |x|^2 - 1)}{|x|^2 + 2x_3 + 1},$$

es llamado *homeomorfismo estandar*.

**Proposición III.9.** *La métrica inducida por  $\phi$  en  $\mathbb{B}(0, 1)$  es*

$$ds_{\mathbb{B}^3}^2 = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} |dx|^2.$$

**Observaciones.**

- Esta métrica es proporcional a la métrica euclidiana, ya que

$$ds_{\mathbb{B}^3}^2 = [\rho(x)]^2 |dx|^2,$$

donde  $\rho : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^\infty$ , con  $\rho(x) = \frac{2}{1 - |x|^2} > 0$ . Por lo tanto, concluimos que  $ds_{\mathbb{B}^3}^2$  es una métrica conforme. Esto es, preserva ángulos.

- El factor  $1 - |x|^2$  en  $ds_{\mathbb{B}^3}^2$ , depende de la norma euclidiana y por consiguiente, es invariante bajo  $\mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$ .

**Definición III.18.**  $\mathbb{B}(0, 1)$  dotada con la métrica  $ds_{\mathbb{B}^3}^2$ , es el *modelo de la bola unitaria de Poincaré* y lo denotamos por  $\mathbb{B}^3$ .



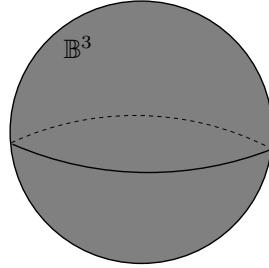


Figura III.29: Modelo de la bola unitaria de Poincaré.

### Transformaciones de Möbius de $\mathbb{B}^3$ .

**Definición III.19.** Sea  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\mathbb{B}^3}$ . Si  $\phi(\mathbb{B}^3) = \mathbb{B}^3$ , decimos que es una *transformación de Möbius* de  $\mathbb{B}^3$ .

Al igual que para  $\mathbb{H}^3$ , las transformaciones de Möbius de  $\mathbb{B}^3$  forman un grupo, que denotamos por  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{B}^3}$  y es isomorfo al grupo  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{P}^2}$ .

### § 3.4. Modelo del Hemisferio Sur.

Sea  $\varphi|_{\mathbb{B}^3} : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 - \{N\}$  con  $N = (0, 0, 0, 1)$ , la proyección estereográfica restringida a  $\mathbb{B}^3$  sobre  $\mathbb{S}_N^3$ , la cual esta dada por

$$\varphi(x) = \left( \frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_2}{|x|^2 + 1}, \frac{2x_3}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right).$$

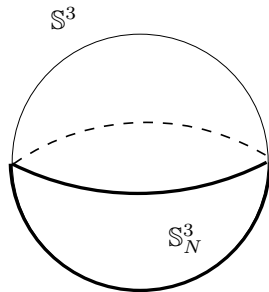


Figura III.30: Modelo del hemisferio sur.

**Definición III.20.**  $\varphi(\mathbb{B}^3)$  dotado con la métrica

$$ds_{\mathbb{S}_N^3}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_4^2},$$

es el *modelo del hemisferio sur* y lo denotamos por  $\mathbb{S}_N^3$ .

### § 3.5. Modelo del Hemisferio de Radio Imaginario.

Identificamos  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$ . Definimos en  $\mathbb{R}^4$  el producto interno

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4. \quad (\text{III.10})$$

El producto interno dado por la ecuación III.10 es conocido como *producto interno lorentziano* y define una métrica riemanniana no positiva definida en  $\mathbb{R}^4$ .

Sea  $\mathbb{H} = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x \cdot x = -1, x_4 > 0\}$ . Existe una biyección  $\psi : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{H}$  definida por

$$\psi(x) = \left( \frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \frac{2x_2}{1 - |x|^2}, \frac{2x_3}{1 - |x|^2}, \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} \right).$$

**Proposición III.10.** *La métrica riemanniana positiva definida en  $\mathbb{H}$ , inducida por  $\psi$ , es*

$$ds_{\mathcal{H}^3}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

**Definición III.21.**  $\mathbb{H}$  dotado con la métrica  $ds_{\mathcal{H}^3}^2$ , es el *modelo del hemisferio de radio imaginario* ó *modelo del hiperboloide* y lo denotamos por  $\mathcal{H}^3$ .

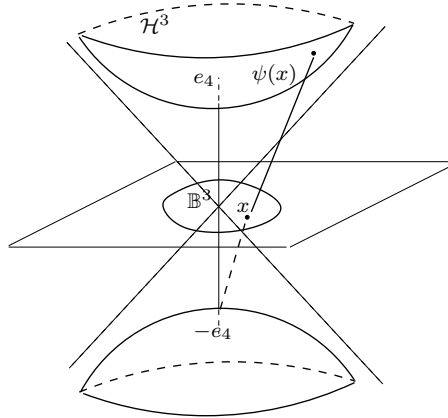


Figura III.31: Modelo del hiperboloide.

### § 3.6. Isometrías y Geodésicas Hiperbólicas.

Puesto que los modelos del espacio hiperbólico son isométricos entre si y cada uno tiene sus ventajas para entender o enfatizar ciertas propiedades, los utilizaremos indistintamente para definir las geodésicas y las isometrías hiperbólicas.

#### Isometrías Hiperbólicas.

Los grupos de isometrías de los diferentes modelos del espacio hiperbólico son isomorfos. Presentamos a detalle sólo las isometrías de  $\mathbb{H}^3$  y mencionamos las correspondientes a los demás modelos.

**Teorema III.19.** *La extensión de Poincaré de cualquier  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$  es una isometría de  $\mathbb{H}^3$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ . Podemos suponer que  $\phi$  es la reflexión sobre  $\mathbb{S}(c, r)$ , con  $c \in \mathbb{E}^2$ . Entonces,  $\tilde{\phi}$  es la reflexión sobre  $\mathbb{S}(\tilde{c}, r)$ , con  $c \in \mathbb{E}^2$ . Por el Teorema III.1 tenemos que

$$\frac{|\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)|}{|y - x|} = \frac{r^2}{|x - \tilde{a}||y - \tilde{a}|}.$$

Como  $\tilde{\phi}(x) = \tilde{c} + \left(\frac{r}{|x - \tilde{c}|}\right)^2 (x - \tilde{c})$ , la tercer componente de  $\tilde{\phi}$  es

$$\left[\tilde{\phi}(x)\right]_3 = 0 + \left(\frac{r}{|x - \tilde{c}|}\right)^2 x_3. \quad (\text{III.11})$$

Por lo tanto,

$$\frac{|y - x|^2}{y_3 x_3} \quad (\text{III.12})$$

es invariante bajo  $\tilde{\phi}$  ya que

$$\begin{aligned} \frac{|\tilde{\phi}(y) - \tilde{\phi}(x)|}{\left(\frac{r}{|y - \tilde{c}|}\right)^2 y_3 \left(\frac{r}{|x - \tilde{a}|}\right)^2 x_3} &= \frac{r^4 |y - x|^2}{|x - \tilde{c}|^2 |y - \tilde{c}|^2} \frac{|x - \tilde{c}|^2 |y - \tilde{c}|^2}{r^4 y_3 x_3} \\ &= \frac{|y - x|^2}{y_3 x_3}. \end{aligned}$$

Sea  $\phi$  la reflexión sobre  $\mathcal{P}(a, t)$ , con  $a \in \hat{\mathbb{E}}^2$ . Entonces,  $\tilde{\phi}$  es la reflexión sobre  $\mathcal{P}(\tilde{a}, t)$ , con  $a \in \hat{\mathbb{E}}^2$ , la cual es una isometría euclidiana.

Como  $\tilde{\phi}(x) = x - 2(x \cdot a - t) \frac{a}{|a|^2}$ , la tercer componente de  $\tilde{\phi}$  es

$$\left[ \tilde{\phi}(x) \right]_3 = x_3, \quad (\text{III.13})$$

y (III.12) es invariante bajo  $\tilde{\phi}$ . Por lo tanto, (III.12) es invariante bajo toda extensión de Poincaré de cualquier  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$ .

Concluimos que la extensión de Poincaré de cualquier  $\phi \in \mathbf{Möb}_{\hat{\mathbb{E}}^2}$  es una isometría de  $\mathbb{H}^3$ . ■

Del Corolario III.2 se sigue que  $\mathbf{Möb}_{\mathbb{H}^3}$  es isomorfo a  $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3)$ .

Los correspondientes grupos de isometrías en los modelos hiperbólicos restantes son los siguientes:

- $\mathbf{Isom}(\mathcal{H}^3)$  es el grupo ortogonal especial de Lorentz  $\mathbf{SO}^+(3, 1)$ .
- $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}_N^3)$  es el grupo de transformaciones de Möbius de  $\mathbb{E}^3$  que preservan a  $\mathbb{S}_N^3$ .
- Por el Teorema de Liouville (ver por ejemplo [BP92]),  $\mathbf{Isom}(\mathbb{B}^3)$  consiste de funciones de la forma  $Ai(x)$  tal que,
  - si  $A \in \mathbf{SO}(3)$ ,  $i$  es la función identidad ó
  - si  $A \in \mathbf{O}(3) - \mathbf{SO}(3)$ ,  $i$  es una inversión sobre una 2-esfera, ortogonal a  $\mathbb{S}^2$ .

### Grupo Estabilizador Hiperbólico.

**Teorema III.20.** Para todo  $x \in \mathbb{B}^3$ ,  $\mathbf{Est}(\mathbb{B}^3)_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(3)$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \mathbb{B}^3$ . Como  $\mathbf{Isom}(\mathbb{B}^3)$  actúa transitivamente en  $\mathbb{B}^3$  asumimos, sin pérdida de generalidad, que  $x = 0$ . Sea  $\phi \in \mathbf{Est}(\mathbb{B}^3)_x$ . Entonces,  $x = \phi(x) = Ai(x)$ . Pero  $i$  deja invariante a  $\mathbb{S}^2$ , esto significa que debe ser la función identidad. Por lo tanto,  $\phi(x) = Ax$ , con  $A \in \mathbf{SO}(3)$ . ■

### Geodésicas Hiperbólicas.

Presentamos a detalle sólo las geodésicas de  $\mathcal{H}^3$  y mencionamos las correspondientes a los demás modelos.

**Definición III.22.** Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^4$  un 2-plano. Llamamos a la intersección  $\mathcal{H}^3 \cap \mathcal{P}$  línea hiperbólica de  $\mathcal{H}^3$ .

Sean  $x, y \in \mathcal{H}^3$  con  $x \neq y$ , tales que generan un 2-plano  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^4$ . La única línea hiperbólica de  $\mathcal{H}^3$  conteniendo  $x$  y  $y$  es  $l_{x,y} = \mathcal{H}^3 \cap \mathcal{P}$ , la cual es una rama de una hipérbola.

**Proposición III.11.** Sean  $x \in \mathcal{H}^3$  y  $v_x \in T_x \mathcal{H}^3$ , con  $v_x \cdot v_x = 1$  respecto a  $ds_{\mathcal{H}^3}^2$ .  $\gamma$  con punto inicial  $x$  y  $\gamma'(x) = v_x$  es una geodésica si y sólo si está dada por

$$t \mapsto \cosh(t)x + \sinh(t)v_x, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.14})$$

En particular, como conjunto  $\gamma$  está definida por la intersección de  $\mathcal{H}^3$  con el 2-plano  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}^4$ , generado por  $x$  y  $v_x$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{P}$  el 2-plano generado por  $x$  y  $v_x$ . Sea  $\phi \in \mathbf{Isom}(\mathcal{H}^3)$ , tal que  $\phi|_{\mathcal{P}}$  es la función identidad  $\mathbf{Id}$  y  $\phi|_{\mathcal{P}^\perp}$  es la función  $-\mathbf{Id}$ . Entonces,  $\phi(x) = x$  y  $d_x \phi(v_x) = v_x$ . Concluimos que  $\phi$  deja invariante a  $\gamma$  y como consecuencia  $\gamma \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{H}^3$ .

Ahora,  $\gamma$  es una geodésica si y sólo si  $\gamma'' - \gamma = 0$  si y sólo si  $\gamma$  corresponde a la imagen de la función (III.14), con  $x \in \mathcal{H}^3$  y  $v_x \in T_x \mathcal{H}^3$ . De tal forma que  $v_x \cdot v_x = 1$  respecto a  $ds_{\mathcal{H}^3}^2$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, la función (III.14) nos da una parametrización de  $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}^3$ , con  $v_x \cdot v_x = 1$ . Por lo tanto,  $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}^3 = \gamma$ . ■

**Corolario III.3.** Las geodésicas de  $\mathcal{H}^3$  son sus líneas hiperbólicas.

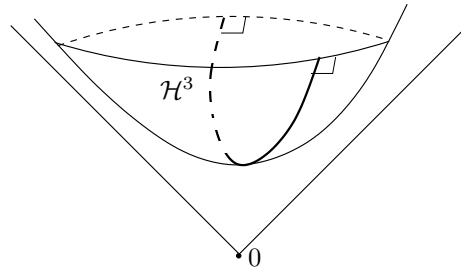
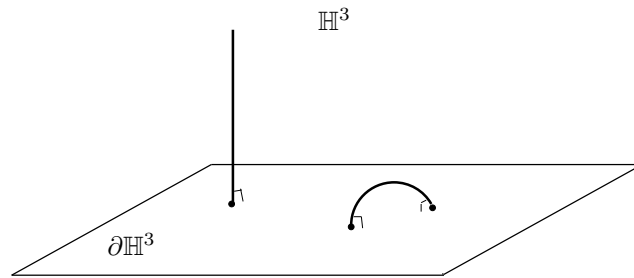


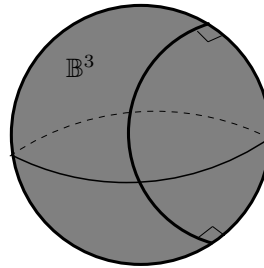
Figura III.32: Geodésicas en  $\mathcal{H}^3$ .

Las geodésicas en los modelos hiperbólicos restantes son las siguientes.

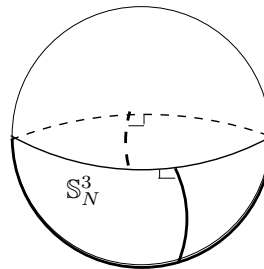
En  $\mathbb{H}^3$  son semicircunferencias  $C \subset \mathbb{H}^3$ , centradas en  $\mathbb{R}^2$  y ortogonales a  $\partial \mathbb{H}^3$ .

Figura III.33: Geodésicas en  $\mathbb{H}^3$ .

En  $\mathbb{B}^3$  son semicírculos y diámetros, ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^3$ .

Figura III.34: Geodésicas en  $\mathbb{B}^3$ .

En  $\mathbb{S}_N^3$  son semicírculos ortogonales a la frontera de  $\mathbb{S}_N^3$ .

Figura III.35: Geodésicas en  $\mathbb{S}_N^3$ .

**§ 3.7. 3-variedades Geométricas Hiperbólicas.**

Una 3-variedad geométrica hiperbólica  $M$  es un espacio cociente de la forma  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3)$  subgrupo discreto que actúa libremente en  $\mathbb{H}^3$ .

Un ejemplo de una 3-variedad geométrica hiperbólica se puede construir identificando las caras opuestas de un dodecaedro de la siguiente manera.

Consideremos el modelo de la bola unitaria  $\mathbb{B}^3$ . Escogemos un dodecaedro hiperbólico regular centrado en el origen  $\mathbf{D}_{\text{hip}} \subset \mathbb{B}^3$ , tal que sus ángulos diédricos son iguales a  $2\pi/5$ .

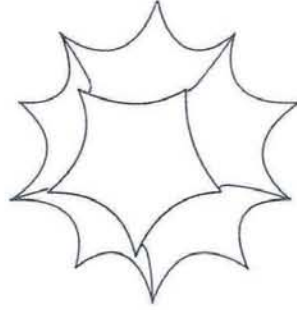


Figura III.36: Dodecaedro hiperbólico  $\mathbf{D}_{\text{hip}}$ .

Denotamos por  $\mathbf{D}_j$  y  $\mathbf{D}_j^{-1}$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) caras opuestas en  $\mathbf{D}_{\text{hip}}$ . Para cada par de caras opuestas, consideremos la función

$$f_j := \phi_j \circ \phi'_j \circ \phi''_j : \mathbf{D}_j \longrightarrow \mathbf{D}_j^{-1},$$

donde  $\phi''_j$  es una inversión sobre la 2-esfera (ó 2-plano) que contiene a  $\mathbf{D}_j$ ,  $\phi'_j$  es la reflexión sobre el 2-plano perpendicular a la recta uniendo los centros de  $\mathbf{D}_j$  y  $\mathbf{D}_j^{-1}$  y  $\phi_j$  es una rotación alrededor de dicha recta de  $3\pi/5$ . La figura III.37 nos muestra el espacio dodecaedral que obtenemos al realizar la identificación descrita por medio de las funciones  $f_j$ .

Observemos que las  $f_j$  son elementos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{B}^3)$ . Los ejes de  $\mathbf{D}_{\text{hip}}$  forman seis clases de equivalencia, que consisten de cinco ejes cada una. Sus vértices son mutuamente equivalentes. Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{B}^3)$ , el subgrupo generado por las funciones  $f_j$ . Este subgrupo es discreto y actúa libremente en  $\mathbb{B}^3$ .

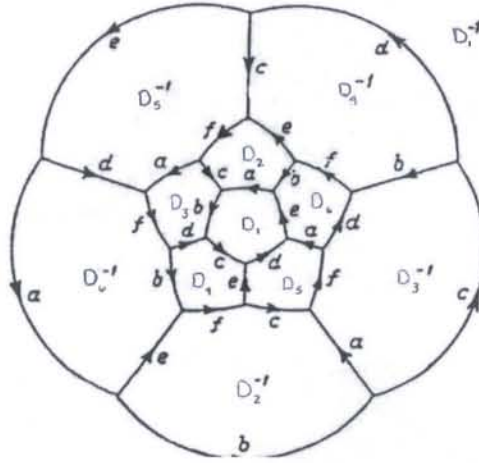


Figura III.37: Espacio dodecaedral de Seifert-Weber.

El espacio dodecaedral que construimos corresponde al espacio cociente  $M = \mathbb{B}^3/\Gamma$ . Este espacio es conocido como el *espacio dodecaedral de Seifert-Weber* ó *espacio dodecaedral hiperbólico* y es uno de los primeros ejemplos de una 3-variedad geométrica hiperbólica que se conocieron. Al igual que el espacio dodecaedral de Poincaré, apareció por primera vez en 1933 en el artículo [SW33] de C. Weber y H. Seifert.

Las siguientes imágenes nos muestran un poco más acerca de este espacio.

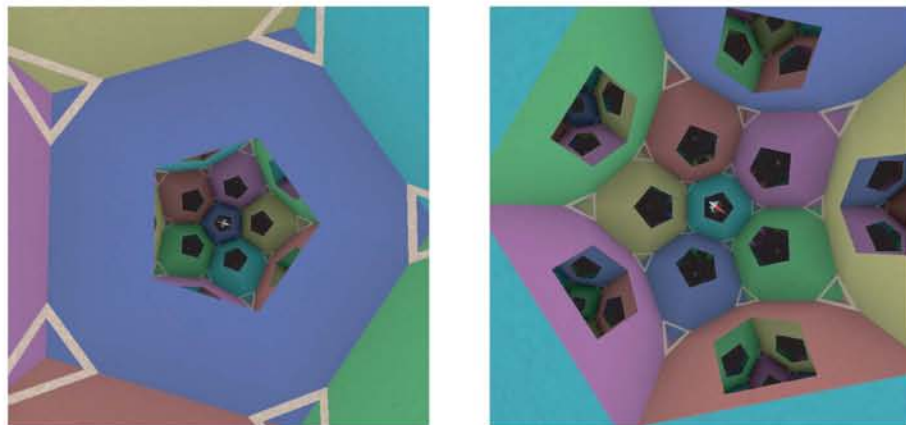


Figura III.38: Espacio dodecaedral de Seifert-Weber.



Existen otras 3-variedades geométricas hiperbólicas, que a continuación presentamos. Para un estudio más detallado de ellas, así como para una comprensión y panorama más amplio de los conceptos involucrados invitamos al lector a consultar [LH86], [Thua], [Thu82] y [Thu88].

**Definición III.23.** Sea  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  un difeomorfismo de una 2-variedad  $\mathcal{S}$ . La *suspensión* de  $\mathcal{S}$  por  $\phi$  es la 3-variedad compacta

$$M := (\mathcal{S} \times [0, 1]) / \sim_\phi \quad \text{con} \quad (x, 0) \sim_\phi (\phi(x), 1).$$

Observemos que  $M$  es un haz fibrado sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra  $\mathcal{S}$ .

Existen distintos tipos de difeomorfismos de 2-variedades. La clasificación de difeomorfismos de 2-variedades  $\mathcal{S}$  de W. P. Thurston (ver [Thu88]), establece que un difeomorfismo de  $\mathcal{S}$  es isotópico a un difeomorfismo periódico o a un difeomorfismo que deja fija una partición de  $\mathcal{S}$  o a un difeomorfismo que deja fijo un par de foliaciones medibles transversales.

Una *partición* de una 2-variedad  $\mathcal{S}$  es un conjunto de curvas cerradas, simples y ajenas. Por otro lado, una *foliación medible* es una familia de líneas geodésicas ajenas dos a dos, llamadas *hojas*, en  $\mathcal{S}$ .

**Definición III.24.** Un difeomorfismo  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  de una 2-variedad  $\mathcal{S}$  es llamado *seudo anosov* si preserva un par de foliaciones medibles transversales  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  y existe  $k > 1$  tal que

$$\phi(\mathcal{F}_1) = \frac{1}{k}\mathcal{F}_1 \quad \text{y} \quad \phi(\mathcal{F}_2) = k\mathcal{F}_2.$$

En otras palabras,  $\phi$  contrae  $\mathcal{F}_1$  por un factor de  $1/k$  y expande  $\mathcal{F}_2$  por un factor  $k$ .

**Teorema III.21.** [Thua] *La suspensión de una 2-variedad  $\mathcal{S}$  por un difeomorfismo  $\phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , admite una geometría modelada por  $(\mathbb{H}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3))$  si y sólo si  $\phi$  es isotópico a un difeomorfismo seudo anosov de  $\mathcal{S}$ .*

## § 4. Geometría $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

Esta geometría probablemente es la menos rica de las ocho, pero a la vez es la más simple de todas. En esta sección describimos el modelo  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , su grupo de isometrías, entre otras cosas. Además, mostramos que es maximal

y presentamos las únicas 3-variedades compactas que poseen dicha geometría (se puede consultar [Bon02]).

Consideremos el producto trivial de  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{E}^1$ , con sus respectivas métricas.<sup>2</sup> Observemos que podemos pensar a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1 = \mathbb{E}^3 - \mathbb{B}^3$  como  $\mathbb{E}^3 - \{0\}$ .

**Definición III.25.**  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  dotado con la métrica producto  $ds_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1}^2$  es el modelo de esta geometría.

**Isometrías de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

**Definición III.26.** El grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , el cual denotamos por  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ , es  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2) \times \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^1)$ .

**Observación III.10.** La acción de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  sobre  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  preserva la métrica  $ds_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1}^2$  y es transitiva.

**Grupo Estabilizador de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

**Teorema III.22.** Para todo  $x \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbf{Est}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(2)$ .

Por otro lado, sean

$$(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_y = \{0\} \times \mathbf{T}_y \mathbb{E}^1 \subset \mathbf{T}_x \mathbb{S}^2 \times \mathbf{T}_y \mathbb{E}^1.$$

Sea  $\phi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ , tenemos que

$$d_{(x,y)} \phi : \mathbf{T}_{(x,y)} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbf{T}_{\phi(x,y)} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1.$$

Entonces,

$$d_{(x,y)} \phi(\mathcal{L}_y) = \mathcal{L}_{\phi(y)} = \{0\} \times \mathbf{T}_{\phi_{\mathbb{E}^1}(y)} \mathbb{E}^1,$$

con  $\phi = (\phi_{\mathbb{S}^2}, \phi_{\mathbb{E}^1})$ . Pero como  $\mathbb{E}^1$  no es isotrópico, concluimos en base a lo anterior que  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  no es isotrópico.

---

<sup>2</sup> $ds_{\mathbb{S}^2}^2 = ds_{\mathbb{E}^3}^2|_{\mathbb{S}^2}$  y  $ds_{\mathbb{E}^1}^2 = dx^2$ .

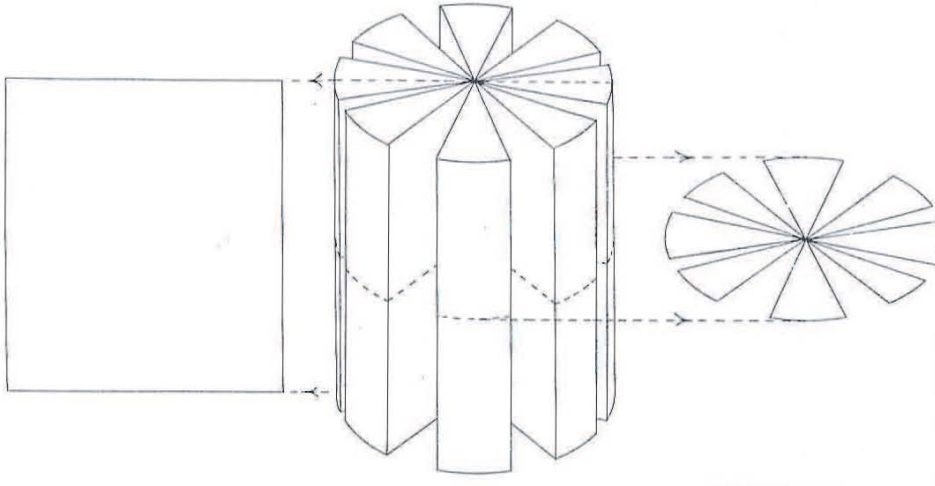


Figura III.39: Una sección vertical de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  tiene geometría euclidiana mientras que, una sección horizontal tiene geometría esférica.

$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1))$  es Maximal.

**Teorema III.23.** *El modelo geométrico  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1))$  es maximal.*

*Demostración.* Recordemos que  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1 \subset \mathbb{E}^4$ . Mostrar que

$$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1))$$

es maximal equivale a mostrar la siguiente propiedad. Para cada métrica  $m'$  sobre  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  invariante bajo  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ , el grupo de isometrías de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  con respecto a  $m'$ , no contiene propiamente a  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ .

Supongamos que existe una métrica  $m'$  de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , que es invariante bajo  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$ . Para cada  $(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $m'$  debe ser invariante bajo la acción del estabilizador  $\mathbf{Est}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)_{(x,y)}$ . En particular,  $\mathbf{Est}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)_{(x,y)}$  contiene elementos que rotan  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  alrededor de un eje  $\{x\} \times \mathbb{E}^1$ . Por ejemplo,  $\phi = (\phi_{\mathbb{S}^2}, id_{\mathbb{E}^1})$  tal que  $\phi_{\mathbb{S}^2} \in \mathbf{Est}(\mathbb{S}^2)_{(x)}$ , el estabilizador de  $x \in \mathbb{S}^2$ .

Se sigue que la forma bilineal inducida por  $m'$  en  $\mathbf{T}_{(x,y)}\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  debe ser invariante, bajo una rotación alrededor de  $\mathcal{L}_{(x,y)} = \{0\} \times \mathbf{T}_y\mathbb{E}^1$ . Por lo tanto,  $m'$  es un múltiplo escalar de la métrica producto  $m$ , por un factor  $\lambda_1 > 0$  en la dirección de  $\mathcal{L}_{(x,y)} = \{0\} \times \mathbf{T}_y\mathbb{E}^1$  y por un factor  $\lambda_2 > 0$  en la dirección

de  $\mathcal{L}_{(x,y)}^\perp \mathbf{T}_x \mathbb{S}^2 \times \{0\}$ ; tal que  $\mathcal{L}_{(x,y)}$  y  $\mathcal{L}_{(x,y)}^\perp$  siguen siendo subespacios ortogonales.

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbf{T}_{(x,y)} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  un 2-plano. Si  $\mathcal{L}_{(x,y)} \subset \mathcal{P}$  tenemos que la curvatura seccional es 0; si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}_{(x,y)}^\perp$ , tenemos que la curvatura seccional está estrictamente entre 0 y  $\lambda_2^{-2}$ . Sea  $\varphi$  una isometría de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  con respecto a  $m'$ . Entonces,  $\varphi$  debe respetar las curvaturas seccionales. Más aún, debe respetar la descomposición

$$\mathbf{T}_{(x,y)} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1 = \mathbf{T}_x \mathbb{S}^2 \times \mathbf{T}_y \mathbb{E}^1 = \mathcal{L}_{(x,y)}^\perp \cup \mathcal{L}_{(x,y)}.$$

Es decir, la imagen de  $\mathcal{L}_{(x,y)}$  bajo el diferencial de  $\varphi$  es  $\mathcal{L}_{\varphi(x,y)}$  y la imagen de  $\mathcal{L}_{(x,y)}^\perp$  es  $\mathcal{L}_{\varphi(x,y)}^\perp$ . En particular, sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  arbitrario. Existe  $\varphi' \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ , tal que  $\varphi'(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$  y  $\mathbf{T}_{(x_0,y_0)} \varphi' = \mathbf{T}_{(x_0,y_0)} \varphi$ .

Por lo tanto,  $\varphi = \varphi' \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$  (ver [BP92], **Proposición A.2.1**). Concluimos que toda isometría  $\varphi$  es un elemento de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ . ■

#### § 4.1. 3-variedades Geométricas Modeladas por $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

Una 3-variedad geométrica modelada por  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  es un espacio cociente de la forma  $M = (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

La clasificación de todos los subgrupos discretos y cocompactos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  que actúan libremente en  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  está dada por el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [Tol74]. Éste muestra que sólo existen dos 3-variedades compactas, cuyo espacio cubriente universal es  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

**Teorema III.24 (Tollefson).** *Las únicas 3-variedades compactas, cuyo espacio cubriente universal es  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  son  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ .*

Vamos a describir  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  para cada una de las 3-variedades mencionadas en el teorema anterior y formar los respectivos espacios cociente.

Sea

$$\Gamma = \langle (\alpha, \beta) \rangle < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$$

un subgrupo discreto, tal que  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  con  $\alpha$  la función identidad en  $\mathbb{S}^2$  y  $\beta$  una traslación de  $\mathbb{E}^1$ . Entonces,

$$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1.$$

Describimos a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  de dos maneras.

- i) Sean  $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$  dos 3-toros;  $\mu, \alpha \in \mathbb{T}_1$  y  $\eta, \beta \in \mathbb{T}_2$  un meridiano y paralelo en  $\mathbb{T}_i$  ( $i = 1, 2$ ) respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

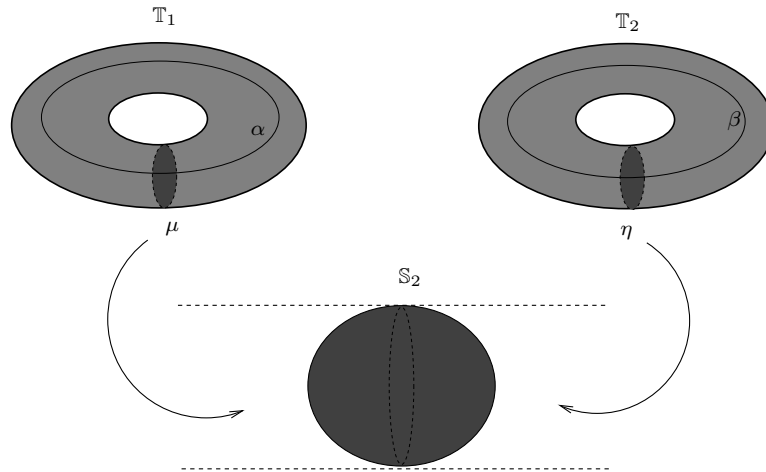


Figura III.40: Identificación de  $\mu$  con  $\eta$  y  $\alpha$  con  $\beta$ .

Vamos a identificar, al mismo tiempo,  $\mu$  con  $\eta$  y  $\alpha$  con  $\beta$ . Por lo tanto, la frontera de cada disco meridional en  $\mathbb{T}_1$  se identifica con la frontera de un disco meridional en  $\mathbb{T}_2$ . Entonces, parejas de discos meridionales forman 2-esferas en la nueva variedad  $M$ .

Sea  $\alpha$  un paralelo en  $\mathbb{T}_1$ , en cada  $x \in \alpha$  tenemos una 2-esfera perpendicular a  $\alpha$  en  $M$ . Por lo que tenemos un círculo de 2-esferas, donde el círculo es  $\alpha$  y concluimos que  $M = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

- ii) Consideremos una 3-bola  $\mathbb{B}_1$  menos una 3-bola  $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{B}_1$ . Identificamos cada punto en  $\partial\mathbb{B}_2$  con el punto correspondiente en  $\partial\mathbb{B}_1$ , siguiendo la dirección radial.

Las 2-esferas concéntricas forman las 2-esferas de la descripción anterior. Tenemos un círculo de 2-esferas, ya que cuando nos movemos a lo largo de un radio, en cada punto tenemos una 2-esfera concéntrica; excepto en el último punto, el cual está identificado con el primero, convirtiendo así, el radio en un círculo.

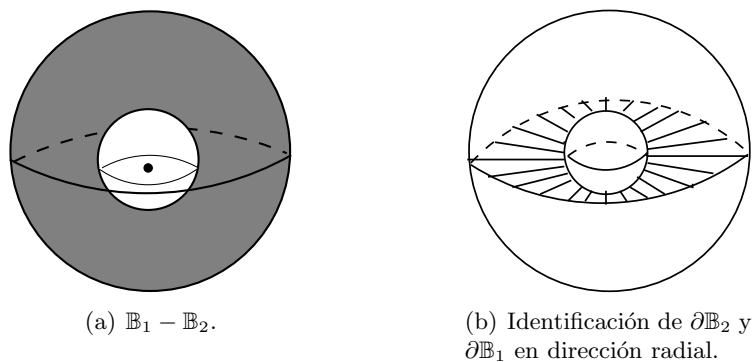


Figura III.41: Otra construcción de  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .

Sea

$$\Gamma = \langle (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \rangle < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$$

un subgrupo discreto, tal que  $(\alpha_1, \beta_1)$  y  $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1)$  con  $\alpha_1, \alpha_2$  la función antipodal en  $\mathbb{S}^2$  y  $\beta_1, \beta_2$  reflexiones distintas de  $\mathbb{E}^1$ . Entonces,

$$(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma = \mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3.$$

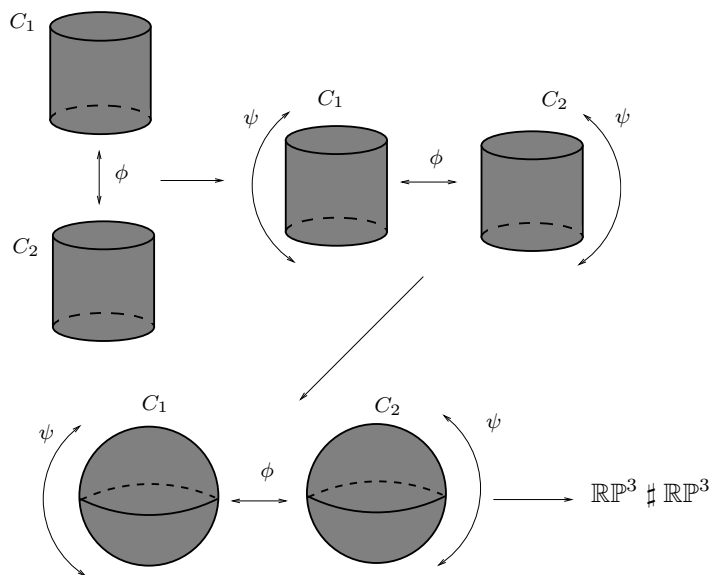


Figura III.42: Representación de la 3-variedad  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$ .

Describimos a  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$  de la siguiente manera. Consideremos  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ . Vamos a pensar a  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  como dos cilindros sólidos  $C_1$  y  $C_2$ , identificados por su frontera mediante  $\phi : \partial C_1 \rightarrow \partial C_2$  y sea  $\psi$  la función antipodal. La imagen de  $C_1$  y  $C_2$  bajo  $\phi$  es  $\mathbb{RP}^2 \times [0, 1]$ , entonces podemos pensar a  $\mathbb{RP}^3$  como un haz lineal sobre  $\mathbb{RP}^2$ . Se sigue que,  $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$  es un haz circular sobre  $\mathbb{RP}^2$ .

## § 5. Geometría $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

A diferencia de la geometría  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , existe una infinidad de 3-variedades cuya geometría es modelada por  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ . Sin embargo, estos modelos son muy similares. En esta sección describimos este modelo, su grupo de isometrías, entre otras cosas. Además, mostramos que es maximal y presentamos ejemplos de 3-variedades que poseen dicha geometría (se puede consultar [Bon02] y [Sco83]).

Consideremos el producto trivial de  $\mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{E}^1$ , con sus respectivas métricas.<sup>3</sup>

**Definición III.27.**  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  dotado con la métrica producto  $ds_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1}^2$  es el modelo para esta geometría.

**Isometrías de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

**Definición III.28.** El grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ , el cual denotamos por  $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$ , es  $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2) \times \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^1)$ .

**Observación III.11.** La acción de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$  sobre  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  preserva la métrica  $ds_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1}^2$  y es transitiva.

**Grupo Estabilizador de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

**Teorema III.25.** Para todo  $x \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbf{Est}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(2)$ .

Por otro lado, sean

$$(x, y) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_y = \{0\} \times \mathbf{T}_y \mathbb{E}^1 \subset \mathbf{T}_x \mathbb{H}^2 \times \mathbf{T}_y \mathbb{E}^1.$$

Sea  $\phi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$ , tenemos que

$$d_{(x,y)} \phi : \mathbf{T}_{(x,y)} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1 \rightarrow \mathbf{T}_{\phi(x,y)} \mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1.$$

---

<sup>3</sup>  $ds_{\mathbb{H}^2}^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}$  y  $ds_{\mathbb{E}^1}^2 = dx^2$ .

Entonces,

$$d_{(x,y)}\phi(\mathcal{L}_y) = \mathcal{L}_{\phi(y)} = \{0\} \times \mathbf{T}_{\phi_{\mathbb{E}^1}(y)}\mathbb{E}^1,$$

con  $\phi = (\phi_{\mathbb{H}^2}, \phi_{\mathbb{E}^1})$ . Como  $\mathbb{E}^1$  no es isotrópico, concluimos en base a lo anterior que  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  es una estructura geométrica no isotrópica.

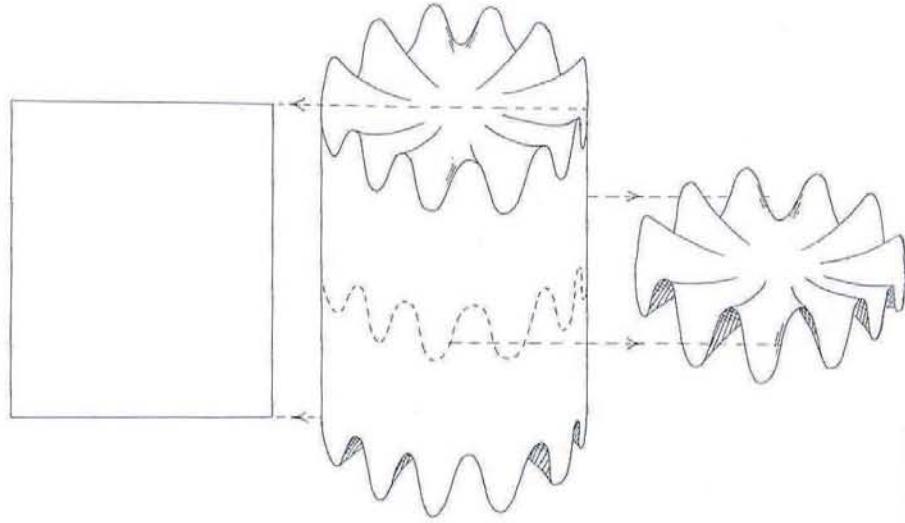


Figura III.43: Una sección vertical de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  tiene geometría euclidiana mientras que, una sección horizontal tiene geometría hiperbólica.

$(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1))$  es Maximal.

**Teorema III.26.** *El modelo geométrico  $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1))$  es maximal.*

La demostración de este resultado es similar a la del Teorema III.23. La única diferencia es que la curvatura seccional a lo largo de un 2-plano está entre 0 y  $-\lambda_2^2$ .

### § 5.1. 3-variedades Geométricas Modeladas por $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .

Una 3-variedad geométrica modelada por  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$  es un espacio cociente de la forma  $M = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$  subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .



Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1)$  un subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ . Entonces,  $\Gamma' = \Gamma \cap \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^1)$  es discreto y por lo tanto, debe ser isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{D}_\infty$  ó al grupo trivial. Como  $\Gamma$  actúa libremente en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\Gamma'$  debe ser isomorfo a  $\mathbb{Z}$  ó al grupo trivial.

En cualquiera de estos casos,  $\Gamma'$  es normal en  $\Gamma$ , es el núcleo de la proyección  $\Gamma \xrightarrow{p} \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$  y tenemos la siguiente sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow \Gamma \longrightarrow p(\Gamma) \longrightarrow 1. \tag{III.15}$$

Como  $\Gamma = p(\Gamma) \times \Gamma'$  es cocompacto, entonces  $\Gamma'$  debe ser un subgrupo cíclico infinito. De esta manera, cada línea  $\{x\} \times \mathbb{E}^1$ , con  $x \in \mathbb{H}^2$ , es el espacio cubriente de un círculo en el espacio cociente  $M := (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma$ . En otras palabras,  $M$  es un haz sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra una 2-variedad geométrica hiperbólica.

Es fácil ver que existe un número infinito de 3-variedades con estructura geométrica modelada en  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ . Esto es consecuencia del Teorema de Uniformización (pág. 40), por el cual sabemos que existe un número infinito de 2-variedades geométricas hiperbólicas.

Por ejemplo, sea  $\mathbb{T} = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  una 2-variedad geométrica hiperbólica de género dos, con  $\mathbb{T}^2$  un 2-toro. Esto es,  $\mathbb{T}$  puede representarse como  $\mathbb{H}^2 / G$ , con  $G < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$  discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{H}^2$ .

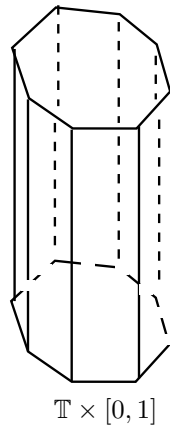


Figura III.44: Producto de  $\mathbb{T}$  y el intervalo  $[0, 1]$ .

Formamos el producto  $\mathbb{T} \times [0, 1]$ . Podemos ver este producto como un

prisma octagonal identificando lados opuestos. Definimos

$$M := (\mathbb{T} \times [0, 1]) / \sim \quad \text{tal que} \quad (x, 0) \sim (x', 1),$$

donde  $x'$  es la imagen de  $x$  bajo una rotación por  $3\pi/4$ .

Entonces,  $M$  admite una geometría modelada sobre  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ , ya que

$$M = (\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1) / \Gamma \quad \text{con} \quad \Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1).$$

En términos de la notación de la sucesión exacta III.15, en este caso  $\Gamma' = \mathbb{Z}$  y  $p(\Gamma) = G$ .

**Observación III.12.** La identificación anterior también puede realizarse mediante una rotación por  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\pi$  ó por una de las siguientes reflexiones:

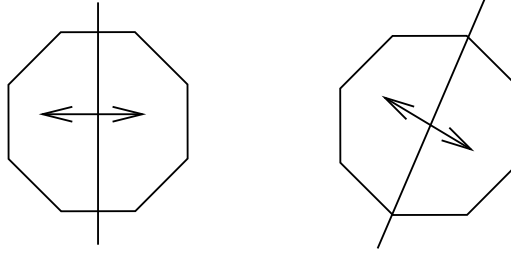


Figura III.45: Posibles reflexiones.

## § 6. Geometría $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Podemos pensar a  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  como la geometría de haces tangentes unitarios y surge, de manera natural, como la geometría de  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ , el haz tangente unitario de  $\mathbb{H}^2$ . En esta sección describimos dicho modelo, su grupo de isometrías, entre otras cosas. Para ello, comenzaremos describiendo a  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ , a  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  y a su espacio cubriente universal  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Además, mostramos que es maximal y damos algunos ejemplos de 3-variedades que poseen una geometría de este tipo (se puede consultar [Bon02], [Har], [Sco83], [Sea06], [Mil75] y [Thu82]).

**El Grupo  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .**

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det(A) = 1 \text{ y } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

es un grupo de Lie de dimensión tres, cuyo centro es  $\{\mathbf{Id}, -\mathbf{Id}\} \cong \mathbb{Z}_2$ . Además, como variedad es  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ .

**Identificación de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  y  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ .**

Topológicamente,  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  es la 3-variedad  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^2$ . Como grupo de Lie, corresponde al grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  y se define como

$$\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) := \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \mathbf{Id}\}.$$

Su acción en  $\mathbb{H}^2$  se puede extender, por medio del diferencial, a  $\mathbf{T}\mathbb{H}^2$  de la siguiente manera

$$g(z, v_z) = (g(z), dg_z(v_z)),$$

con  $v_z$  el vector tangente a  $\mathbb{H}^2$  en  $z \in \mathbb{H}^2$ ,  $g \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  y  $dg_z$  su diferencial en  $z$ . En otras palabras,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}\mathbb{H}^2 & \xrightarrow{dg} & \mathbf{T}\mathbb{H}^2 \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{H}^2 \end{array}$$

con  $\pi : \mathbf{T}\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ , la proyección natural que asocia a  $u_z = (z, v_z) \in \mathbf{T}\mathbb{H}^2$  su punto base  $z \in \mathbb{H}^2$ . Además,  $\pi$  es una submersión. Esta acción es libre fuera de la sección cero, ya que si  $g \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  fija  $z \in \mathbb{H}^2$ , entonces localmente es una rotación.

**Observación III.13.**  $\mathbb{H}^2$  es un modelo geométrico isotrópico en dimensión dos. Por lo tanto,  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  actúa transitivamente en  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ , el haz tangente unitario de  $\mathbb{H}^2$ ; el cual es un haz circular sobre  $\mathbb{H}^2$ .

Sea  $(z, v_z) \in \mathbf{T}\mathbb{H}^2$ , con  $|v_z| \neq 0$ . La órbita de  $(z, v_z)$  es una copia de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . En particular, la órbita de  $(i, 1) \in \mathbf{T}\mathbb{H}^2$  encaja  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  en  $\mathbf{T}\mathbb{H}^2$  como  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ . Además, como la acción de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  es libre, el estabilizador de cualquier  $(z, v_z) \in \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  es trivial. Por lo tanto,  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  (ver pág. 15).

### § 6.1. El Espacio Cubriente Universal de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ : $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

De la definición de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , se sigue que  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  es un espacio cubriente de orden dos de éste. Por lo tanto, el espacio cubriente universal de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  es el espacio cubriente universal de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ , que denotamos por  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Topológicamente,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^3$ . Además, es un haz lineal sobre  $\mathbb{H}^2$  y su estructura de grupo de Lie es más interesante aún.  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  es una extensión central de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow 0, \quad (\text{III.16})$$

con  $\mathbb{Z}$  el núcleo de la proyección  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Además,  $\mathbb{Z}$  mismo es el centro de  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , ya que el centro de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  es trivial. Observemos que esta sucesión no se escinde.

#### $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ Como un Grupo de Transformaciones de $\mathbb{R}$ .

El grupo  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  consiste de todas las funciones de  $\mathbb{R}$  de la forma

$$x \longmapsto x + 2\pi a + \frac{1}{i} \ln \frac{1 - ze^{-ix}}{1 - \bar{z}e^{ix}}, \quad (\text{III.17})$$

con  $x, a \in \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| < 1$  y  $\ln$  denota la rama principal de la función logaritmo natural. Esto es, la rama continua determinada por  $\ln(1) = 0$ .

Cada función de la forma III.17 tiene la propiedad que si  $x \mapsto y$ , entonces  $x + 2\pi n \mapsto y + 2\pi n$  para toda  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $\mathbb{Z}$  está contenido en el subgrupo central de  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . De hecho,  $\mathbb{Z}$  es el subgrupo central de  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Observemos que  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , con  $\mathbb{R}$  el conjunto de transformaciones de la forma  $x \mapsto x + 2\pi a$ . El subgrupo  $\mathbb{R}$  no es central y más aún, tiene intersección infinita con el subgrupo central. Esto no puede suceder para un subgrupo de Lie de  $\mathbf{GL}(N, \mathbb{R})$ .

Por lo tanto,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  no tiene una representación fiel. Es decir,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  no es un grupo de matrices (ver [DFN85, Teo. 3.2.3]).

### Métrica de Sasaki.

Queremos asignarle una métrica riemanniana a  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  y para ello vamos a utilizar el hecho que  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ , así como la métrica riemanniana de  $\mathbb{H}^2$ . Para un estudio más detallado de esta métrica se puede consultar el artículo [Sas58] de S. Sasaki.

Consideremos  $z \in \mathbb{H}^2$  y  $u_z = (z, v_z) \in \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ . Denotamos por  $\pi^{-1}(\pi(u_z))$  a las fibras de  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ . Consideremos el espacio tangente a  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  en  $u_z$ . Utilizando la métrica de  $\mathbb{H}^2$ , definimos una conexión en  $\mathbf{T}_{u_z}(\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2)$ , de tal manera que la dirección horizontal en cada punto es ortogonal a la línea tangente a la fibra  $\pi^{-1}(\pi(u_z))$ , la cual llamaremos *vertical*. Por lo tanto, podemos escribir

$$\mathbf{T}_{u_z}(\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2) = \mathcal{L}_{u_z} \oplus \mathcal{P}_{u_z},$$

con  $\mathcal{L}_{u_z}$  vertical y  $\mathcal{P}_{u_z}$  un 2-plano ortogonal a  $\mathcal{L}_{u_z}$ .

Observemos que la conexión que acabamos de definir es completamente no integrable. Vamos a utilizar la noción de vertical y horizontal para obtener una métrica en  $\mathbf{T}^1_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2$ , por medio de la proyección  $p : \mathbf{T}^1_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ .

En este caso, la métrica sobre la fibra  $\pi^{-1}(\pi(u_z)) \subset \mathbf{T}^1_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2$  corresponde a la métrica natural sobre un espacio vectorial de dimensión dos. Dicha métrica, a su vez induce una norma en  $\mathcal{L}_{u_z}$ . Por otro lado, la imagen  $\mathcal{P}_{u_z}$  bajo la restricción de  $d\pi$  a  $d\pi_{u_z}$ , es el espacio tangente  $\mathbf{T}^1_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2$ . Por consiguiente, la métrica de  $\mathbb{H}^2$  define una norma en  $\mathcal{P}_{u_z}$ .

Definimos una métrica  $ds^2_{\widetilde{\mathbf{SL}}}$  en  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  de la siguiente manera:

- Si  $w_1, w_2 \in \mathcal{L}_{u_z}$ , su norma es la norma de los vectores correspondientes en  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2$ .
- Si  $w_1, w_2 \in \mathcal{P}_{u_z}$ , su norma es la norma de las proyecciones correspondientes sobre  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2_{\pi(u_z)}\mathbb{H}^2$ .
- Si  $w_1 \in \mathcal{L}_{u_z}$  y  $w_2 \in \mathcal{P}_{u_z}$ , decidimos que son ortogonales.

**Definición III.29.** La métrica  $ds^2_{\widetilde{\mathbf{SL}}}$  es llamada *métrica de Sasaki*.

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [Sas58, Thm. 10].

**Proposición III.12.** Sea  $\phi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  una isometría de  $\mathbb{H}^2$ . Entonces,

$$d_z\phi : \mathbf{T}^1_z\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbf{T}^1_{\phi(z)}\mathbb{H}^2$$

es una isometría respecto a la métrica de Sasaki.

Además, las rotaciones también preservan a  $ds_{\widetilde{\mathbf{SL}}}^2$ . En particular, tenemos que  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$  es una variedad riemanniana homogénea bajo esta métrica. Más aún,  $\widetilde{\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2}$  es una variedad riemanniana homogénea, bajo la métrica correspondiente al levantamiento de  $ds_{\widetilde{\mathbf{SL}}}^2$ . En otras palabras,  $\widetilde{\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2}$  hereda una métrica via la función cubriente  $\widetilde{\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2} \rightarrow \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ .

Ya que  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ , podemos identificar  $\widetilde{\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2}$  y  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Concluimos que  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  es una variedad riemanniana homogénea bajo la métrica correspondiente al levantamiento de la métrica de Sasaki  $ds_{\widetilde{\mathbf{SL}}}^2$ .

**Definición III.30.**  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  dotado con la métrica  $ds_{\widetilde{\mathbf{SL}}}^2$  es el modelo para esta geometría.

### Isometrías de $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

La sucesión (III.16) nos da información muy útil acerca del grupo de isometrías de  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , el cual denotamos por  $\mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$ , como vemos a continuación.

La acción de  $\mathbb{Z}$  en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  preserva la estructura de haz lineal sobre  $\mathbb{H}^2$  ya que cada elemento central simplemente traslada las fibras una distancia fija. Esta acción se extiende a una acción de  $\mathbb{R}$  por traslaciones verticales a lo largo de las fibras de  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , las cuales se proyectan a rotaciones de las fibras correspondientes a  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Éstas a su vez, se proyectan a la función identidad en  $\mathbb{H}^2$ .

Entonces  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$  y  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$ . Más aún, si consideramos  $\mathbb{R}$  y  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  como subgrupos de  $\mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$ , entonces  $\mathbb{R} \cap \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$ . Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$  el subgrupo generado por las imágenes de  $\mathbb{R}$  y  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , tenemos que la dimensión de  $\Gamma$  es cuatro. Más aún,  $\Gamma$  es la componente identidad de  $\mathbf{Isom}\left(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})\right)$ .

Tenemos entonces, que  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$  es generado por traslaciones verticales a lo largo de las fibras  $\pi^{-1}\pi(u_z)$  y por levantamientos de las isometrías de  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2$ , asociadas a las isometrías de  $\mathbb{H}^2$ .

### Grupo Estabilizador de $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

**Teorema III.27.** *Para todo  $x \in \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{Est}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(2)$ .*

$(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$  es Maximal.

**Teorema III.28.** *El modelo geométrico  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$  es maximal.*

*Demostración.* Sea  $m$  una métrica riemanniana en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  invariante bajo la acción de  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$ . Sea  $\mathbf{Est}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))_{u_z}$  el estabilizador de  $u_z \in \mathbf{T}_{u_z}\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . La acción de  $\mathbf{Est}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))_{u_z}$  en  $\mathbf{T}_{u_z}\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  contiene todas las rotaciones alrededor de  $\mathcal{L}_{u_z}$ , que es la línea tangente a la fibra  $\pi^{-1}(\pi(u_z))$ . Entonces,  $m$  es un múltiplo escalar de la métrica original por factores uniformes distintos a lo largo de  $\mathcal{L}_{u_z}$  y de  $\mathcal{P}_{u_z}$ .

Sea  $\mathcal{P} \subset \mathbf{T}_{u_z}\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  un 2-plano. Si  $\mathcal{L}_{u_z} \subset \mathcal{P}$ , la curvatura seccional de  $m$  a lo largo de  $\mathcal{P}$  es máxima y si  $\mathcal{P}$  es ortogonal a  $\mathcal{L}_{u_z}$  entonces, es mínima. Como consecuencia, tenemos que bajo el diferencial de toda isometría  $\varphi$  con respecto a  $m$ , la imagen de  $\mathcal{L}_{u_z}$  es  $\mathcal{L}_{\varphi(u_z)}$ . Esto implica que  $\varphi$  conmuta con la proyección  $p : \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$ .

Para cada isometría  $\varphi$  con respecto a  $m$  y para cada  $u_z \in \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , existe  $\phi \in \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$ , tal que  $\varphi(u_z) = \phi(u_z)$  y  $d_{u_z}\varphi = d_{u_z}\phi$ . Concluimos que  $\varphi = \phi$  (ver [BP92], **Proposición A.2.1**). ■

### § 6.2. 3-variedades Geométricas Modeladas por $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Una 3-variedad geométrica modelada por  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  es un espacio cociente de la forma  $M = \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$  subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Consideremos una 2-variedad geométrica hiperbólica  $\mathcal{S}$ . Podemos expresar a  $\mathcal{S}$  como un espacio cociente de la forma  $\mathbb{H}^2/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$

subgrupo discreto y cocompacto actuando libremente en  $\mathbb{H}^2$ . Recordemos que  $\phi \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2)$  se levanta a una isometría en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  y por lo tanto, a una isometría en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . Si permitimos que  $\Gamma$  actúe en  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ , el espacio cociente  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$  nos da una estructura geométrica en  $\mathbf{T}^1\mathcal{S}$ . Por lo tanto, hay un grupo  $\widetilde{\Gamma}$  actuando en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , que es una extensión por el subgrupo central  $\mathbb{Z}$  de  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$ :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

De este modo, para cualquier 2-variedad geométrica hiperbólica  $\mathcal{S}$ , su espacio tangente unitario  $\mathbf{T}^1\mathcal{S}$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$ . En otras palabras,

$$\mathbf{T}^1\mathcal{S} = \widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})/\widetilde{\Gamma} \quad \text{con} \quad \widetilde{\Gamma} < \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})).$$

Otro ejemplo es el siguiente. Sea  $\Delta$  el triángulo hiperbólico con ángulos  $\pi/2$ ,  $\pi/3$  y  $\pi/7$  y consideremos el enmosaicado de  $\mathbb{H}^2$  generado por reflexiones sobre los lados de  $\Delta$ . El grupo de automorfismos que preservan orientación de este enmosaicado es llamado *grupo triangular*  $(2, 3, 7)$ . Nos referiremos a este grupo por  $(2, 3, 7)$ , el cual es un subgrupo discreto y cocompacto de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  que actúa libremente en  $\mathbb{H}^2$ .

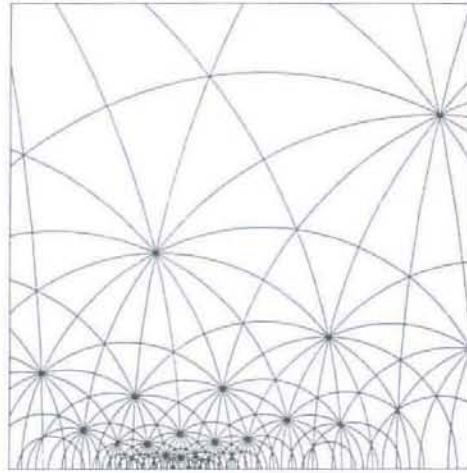


Figura III.46: Enmosaicado de  $\mathbb{H}^2$  por  $(2, 3, 7)$ .

Observemos que  $(2, 3, 7)$  es un grupo perfecto, esto es, coincide con su subgrupo conmutador. Más aún, su levantamiento  $(2, 3, 7)$  a  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$



también es perfecto. El espacio cociente  $\mathbf{T}^1\mathbb{H}^2 / \widetilde{(2, 3, 7)}$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$ .

Por otro lado, si consideramos el subgrupo discreto y cocompacto de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  que actúa libremente en  $\mathbb{H}^2$ , generado por cualquier otro triángulo hiperbólico, su levantamiento a  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$  no necesariamente contiene a  $\mathbb{Z}$ . En otras palabras, no todo subgrupo discreto y cocompacto de  $\mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}))$  que actúa libremente en  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ , es el levantamiento de un subgrupo discreto y cocompacto de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  actuando libremente en  $\mathbb{H}^2$ .

### § 7. Geometría $\mathbb{R}_{Nil}^3$ .

Pensemos a  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ . Tomamos un haz de líneas verticales colocadas de una manera distinta, podríamos decir “extraña”, en el siguiente sentido. Si nos movemos horizontalmente sobre él, el punto final de nuestro recorrido no coincide con el punto inicial como se muestra en la figura.

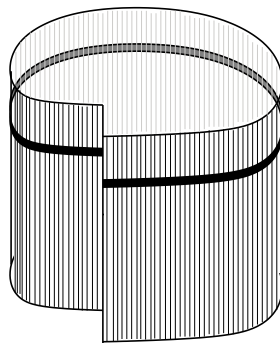


Figura III.47: Haz de líneas en  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ .

En esta sección describimos el modelo para esta geometría, su grupo de isometrías, entre otras cosas. Además, mostramos que es maximal y damos una caracterización de 3-variedades que poseen una geometría de este tipo (se puede consultar [Bon02], [Sco83] y [Thu97]).

Consideremos la métrica riemanniana dada por

$$ds_{\mathcal{N}il}^2 = dx^2 + dy^2 + \left( dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx) \right)^2. \quad (\text{III.18})$$

**Definición III.31.**  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$  dotado con la métrica riemanniana (III.18) es un modelo para esta geometría y lo denotamos por  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .

Una manera alternativa de describir en este caso a  $\mathbb{R}^3$  es la siguiente. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) \right\}.$$

$\mathcal{N}$  es un grupo de Lie de dimensión tres bajo multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \xi & \zeta \\ 0 & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + \xi & z + \zeta + x\eta \\ 0 & 1 & y + \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.19})$$

y lo llamamos *grupo de Heisenberg*.

**Proposición III.13.** *El grupo de Heisenberg es nilpotente.*

Debido a este hecho, la geometría  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$  es llamada comúnmente *geometría Nil*.

**Proposición III.14.**  $\mathbb{R}^3$  dotado con el producto interno

$$(x, y, z) \cdot (\xi, \eta, \zeta) = (x + \xi, y + \eta, z + \zeta + x\eta), \quad (\text{III.20})$$

define un grupo isomorfo a  $\mathcal{N}$ .

**Isometrías de  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .**

Sea  $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  una isometría de  $\mathbb{E}^2$ . Definimos su levantamiento  $\Phi$  a  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$  por

$$\Phi(x, y, z) = \left( \phi(x, y), z + \frac{1}{2}(bx - ay) \right), \quad (\text{III.21})$$

con  $(a, b) = \phi(0, 0)$ .

**Proposición III.15.** *Cualquier traslación vertical de  $\mathbb{R}^3$  y cualquier levantamiento de isometrías de  $\mathbb{E}^2$  de la forma (III.21), son isometrías de  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$  respecto a la métrica (III.18).*

El grupo de isometrías de  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ , que denotamos  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ , es generado por todos los levantamientos de isometrías de  $\mathbb{E}^2$  de la forma (III.21) y por todas las traslaciones verticales de  $\mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3) = \mathbf{SO}(2) \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbf{SO}(2) \times \mathcal{N}.$$

El modelo geométrico  $(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3))$  es homogéneo, como mostramos a continuación.

Sean  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ . Existe una isometría  $\phi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  de  $\mathbb{E}^2$ , con  $\phi(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ; ésto porque  $\mathbb{E}^2$  es una 2-variedad riemanniana homogénea. Levantando  $\phi$  a  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$  tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1, z_1) &= \left( \phi(x_1, y_1), z_1 + \frac{1}{2}(bx_1 - ay_1) \right) \\ &= \left( x_2, y_2, z_1 + \frac{1}{2}(bx_1 - ay_1) \right), \end{aligned}$$

con  $\phi(0, 0) = (a, b)$ . Por otro lado, existe una traslación vertical  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ , tal que

$$\left( z_1 + \frac{1}{2}(bx_1 - ay_1) \right) \xrightarrow{T} z_2,$$

ya que  $\mathbb{R}^3$  es una 3-variedad riemanniana homogénea. Entonces,

$$T \circ \Phi(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2).$$

**Grupo Estabilizador de  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .**

**Teorema III.29.** *Para todo  $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ ,  $\mathbf{Est}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)_x$  es isomorfo a  $\mathbf{SO}(2)$ .*

$(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3))$  es Maximal.

**Teorema III.30.**  $(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3))$  es un modelo geométrico maximal.

La demostración de este teorema sigue la misma idea de la demostración del Teorema III.28.

### § 7.1. 3- $\mathcal{N}il$ variedades Geométricas.

Una 3- $\mathcal{N}il$ variedad geométrica  $M$  es un espacio cociente de la forma  $M = \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .

Existe un subgrupo discreto  $\Gamma_k < \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ , para cada entero  $k \geq 1$ .

$$\Gamma_k = \left\langle a, b, c \mid [a, b] = c^k, [a, c] = 1, [b, c] = 1 \right\rangle,$$

consiste de los elementos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  que pertenecen a  $\mathcal{N}$  con coeficientes de la forma  $nk$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  que actúan libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ . Vamos a construir una 3- $\mathcal{N}il$ variedad de la siguiente manera.

Sea  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$ , cuya matriz asociada es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  (en la literatura usualmente se le asocia la matriz  $A^t$ ). Pero para ser consistentes cuando formemos el espacio cociente, la hemos considerado así; es decir,  $\Phi(x, y) = (x, y + x)$ . Observemos que  $\mathbf{det}(A) = 1$ . Esto es,  $A \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Además, su traza al cuadrado es cuatro, por lo que  $A$  es lo que llamamos *un elemento parabólico* de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

Consideremos la restricción de  $\Phi$  al 2-toro  $\mathbb{T}^2$ , la cual denotaremos por  $\varphi$ . Vamos a extender  $\varphi$  a  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente manera

$$(x, y, t) \xrightarrow{\varphi'} (x, y + x, t),$$

y definimos  $(x, y, t) \xrightarrow{\phi} (x, y, t + y)$  e  $(x, y, t) \xrightarrow{\mathbf{Id}} (x, y, t)$ . En este caso, las matrices asociadas a  $\varphi'$ ,  $\phi$  e  $\mathbf{Id}$  son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

**Proposición III.16.**  $[\varphi', [\varphi', \phi]] = [\phi, [\varphi', \phi]] = \mathbf{Id}$ .

*Demostración.* Utilizando las matrices asociadas a  $\varphi'$  y  $\phi$  tenemos que

$$[\varphi', \phi] = \varphi' \phi (\varphi')^{-1} \phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual es la matriz asociada a  $(x, y, t) \xrightarrow{\rho} (x, y, t - x)$ . Por lo tanto,  $[\varphi', \phi]$  es una traslación vertical.

$$[\varphi', [\varphi', \phi]] = [\varphi', \rho] = \varphi' \rho (\varphi')^{-1} \rho^{-1} = \mathbf{Id},$$

y

$$[\phi, [\varphi', \phi]] = [\phi, \rho] = \phi\rho\phi^{-1}\rho^{-1} = \mathbf{Id}.$$

■

Sea

$$\Gamma = \langle \varphi', \phi \mid [\varphi', [\varphi', \phi]] = [\phi, [\varphi', \phi]] = \mathbf{Id} \rangle.$$

$\Gamma$  es un grupo bajo la composición o definiéndolo en términos de sus matrices asociadas, bajo la multiplicación de matrices. Además, el centralizador de  $\Gamma$  es el grupo cíclico infinito  $\langle \rho \rangle$ , que es un subgrupo normal de  $\Gamma$ ; en particular, es un subgrupo normal de  $\mathcal{N}$ .

**Proposición III.17.** *El grupo  $\Gamma$  es isomorfo al subgrupo de  $\mathcal{N}$  definido por*

$$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 & m & n \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid m, n, p \in \mathbb{Z} \right\} < \mathcal{N},$$

el cual se conoce como grupo entero de Heisenberg.

Tenemos que  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  es discreto y actúa libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ , ya que  $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$  es un subgrupo discreto de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  y actúa libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ . Consideremos el espacio cociente de la forma

$$\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\Gamma \cong (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})_{\mathcal{N}il}/\Gamma. \quad (\text{III.22})$$

Nos interesa saber como está actuando  $\Gamma$ , para ello vamos a ver cual es la acción de sus generadores sobre  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ . Sea  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ , tenemos que

$$\varphi'(x, y, t) = (x, y + x, t) \quad \text{y} \quad \phi(x, y, t) = (x, y, t + y).$$

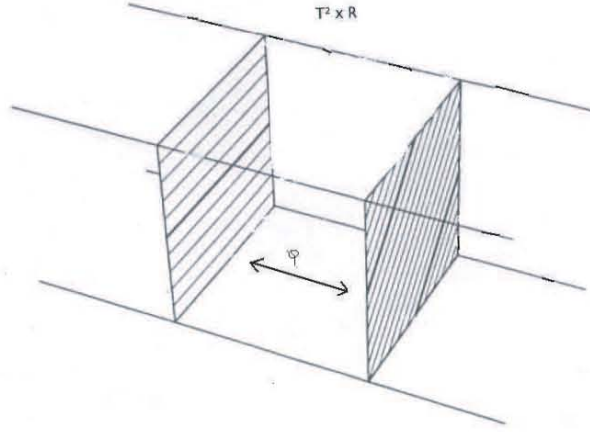
En general,  $(x, y, z) \mapsto (x, y + nx, t + ny)$ . Por otro lado, consideremos

$$(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \langle f \rangle, \quad \text{tal que} \quad (x, y, t) \xrightarrow{f} (x, y + x, t + (y + x)).$$

Observemos que

$$(x, y, t) \xrightarrow{f} (x, y + x, t + (y + x)) = (\varphi(x, y), t + (y + x)),$$

con  $\varphi$  la restricción del automorfismo lineal  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^2$  definido anteriormente.

Figura III.48: Suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ .

En otras palabras,

$$M_\varphi = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \langle f \rangle, \quad (\text{III.23})$$

es la *suspensión* de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ , la cual es una 3-variedad compacta. Más aún, tenemos que la acción de  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$  y la acción de  $\langle f \rangle$  en  $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$  generan el mismo espacio de órbitas. Por lo tanto, podemos pensar al espacio cociente (III.22) como la suspensión de  $\mathbb{T}^2$  dada por (III.23).

El siguiente resultado nos presenta una caracterización de los subgrupos discretos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  que actúan libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ . La demostración puede consultarse en [Thu97, pág. 284].

**Teorema III.31 (Thurston).** *Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$  un subgrupo.  $\Gamma$  es discreto y cocompacto si y sólo si contiene un subgrupo  $H$  de índice finito isomorfo al grupo entero de Heisenberg, tal que su centralizador es cíclico infinito.*

Observemos que para cada subgrupo discreto  $\Gamma_k < \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ , el grupo entero de Heisenberg es un subgrupo de índice finito. Por el teorema anterior,  $\Gamma_k$  es un subgrupo discreto cocompacto de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ .

Por lo tanto, el espacio cociente  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3 / \Gamma_k$  es una 3-*Nil*variedad geométrica, para cada  $k \geq 1$ . Más aún, podemos expresar esta 3-variedad como una suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ , donde  $\varphi$  es un elemento parabólico de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

## § 8. Geometría Sol.

Este modelo geométrico, que denotamos por  $\mathfrak{S}$ , es el menos simétrico de los ocho ya que la componente identidad del estabilizador de un punto es trivial. En esta sección describimos esta geometría, su grupo de isometrías, entre otras cosas. Además, mostramos que es maximal y vamos a caracterizar las 3-variedades que poseen dicha estructura geométrica (se puede consultar [Bon02], [Sco83] y [Thu97]).

Consideremos  $\mathbb{R}^3$ . Definimos un producto interno como sigue

$$(x, y, z) \cdot (\xi, \eta, \zeta) = (x + e^{-z}\xi, y + e^z\eta, z + \zeta). \quad (\text{III.24})$$

Bajo el producto interno dado por (III.24),  $\mathbb{R}^3$  es un grupo con  $(0, 0, 0)$  el elemento identidad y además, el 2-plano  $xy$ , que es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , es un subgrupo normal de éste.

Definimos una métrica riemanniana en  $\mathbb{R}^3$  por

$$ds_{\mathfrak{S}}^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2. \quad (\text{III.25})$$

**Observación III.14.** Podemos reemplazar  $e$  en la métrica por cualquier número mayor que 1, por un cambio de escala en la dirección de  $z$ .

**Definición III.32.**  $\mathbb{R}^3$  dotado con la métrica  $ds_{\mathfrak{S}}^2$  es el modelo para esta geometría.

Podemos describir a  $\mathfrak{S}$  como una extensión de  $\mathbb{R}^2$  por  $\mathbb{R}$ ; esto es,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathfrak{S} \xrightarrow{p} \mathbb{R} \longrightarrow 0, \quad (\text{III.26})$$

con  $t \in \mathbb{R}$  actuando en  $\mathbb{R}^2$  por

$$(x, y) \longmapsto (e^t x, e^{-t} y). \quad (\text{III.27})$$

Para  $t \neq 0$  la acción dada por (III.27) es un isomorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$ , cuya matriz asociada es de la forma  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ . Esta matriz tiene determinante igual a uno y valores propios reales y distintos.

### Isometrías de $\mathfrak{S}$ .

Consideremos el conjunto de funciones definidas por

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\mapsto (e^{-c}x + a, e^c y + b, z + c) \quad \text{ó} \\ (x, y, z) &\mapsto (e^{-c}y + a, e^c x + b, -z + c). \end{aligned}$$

Este conjunto es un grupo bajo la composición y además preserva la métrica (III.25).

**Definición III.33.** El grupo de isometrías de  $\mathfrak{S}$ , el cual denotamos por  $\mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$ , es generado por

- $\mathfrak{S}$  mismo;
- todas las reflexiones independientes a lo largo de los 2-planos  $xz$ ,  $yz$ ;
- Todas las reflexiones en la dirección de  $z$  aplicadas al mismo tiempo que se intercambian las direcciones restantes; es decir, funciones tales que  $(x, y, z) \mapsto (y, x, -z)$ .

### Grupo Estabilizador del Origen.

Recordemos que  $\mathbf{D}_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = e, sr = r^3s \rangle$  es el *grupo diédrico* de orden ocho. Sea  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_0 \subset \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  el estabilizador del origen.

**Proposición III.18.**  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_0$  es isomorfo a  $\mathbf{D}_4$

*Demostración.* Sean  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) elementos de  $\mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  con

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (x, y, z); & \phi_2(x, y, z) &= (x, -y, z); \\ \phi_3(x, y, z) &= (-x, y, z); & \phi_4(x, y, z) &= (-x, -y, z); \\ \phi_5(x, y, z) &= (y, x, -z); & \phi_6(x, y, z) &= (-y, x, -z); \\ \phi_7(x, y, z) &= (y, -x, -z); & \phi_8(x, y, z) &= (-y, -x, -z). \end{aligned}$$

Tenemos que  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_0 = \{\phi_i \text{ con } i = 1, \dots, 8\}$ .

Sea  $f : \mathbf{D}_4 \rightarrow \mathbf{Est}(\mathfrak{S})_0$  tal que,

$$\begin{aligned} e &\mapsto \phi_1; & r^3s &\mapsto \phi_2; & rs &\mapsto \phi_3; & r^2 &\mapsto \phi_4; \\ s &\mapsto \phi_5; & r &\mapsto \phi_6; & r^3 &\mapsto \phi_7; & r^2s &\mapsto \phi_8, \end{aligned}$$



con  $e$  la identidad en  $\mathbf{D}_4$  y  $r, s$  sus generadores.

Tenemos que  $f$  es un homomorfismo, ya que para todo  $a, b \in \mathbf{D}_4$  se satisface que  $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ . Más aún, es un homomorfismo biyectivo. Concluimos que  $f$  es un isomorfismo entre  $\mathbf{D}_4$  y  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_0$ . ■

**Observación III.15.** Para todo  $x \in \mathfrak{S}$ , el estabilizador  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_x$  es un grupo finito y su componente identidad  $(\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_x)_0$  es trivial; es decir, sólo contiene al elemento identidad. Entonces,  $(\mathbf{Isom}(\mathfrak{S}))_0$  actúa libre y transitivamente en  $\mathfrak{S}$ . Por lo tanto, podemos identificar de manera natural a  $(\mathbf{Isom}(\mathfrak{S}))_0$  con  $\mathfrak{S}$  (ver pág. 15).

$(\mathfrak{S}, \mathbf{Isom}(\mathfrak{S}))$  es Maximal.

**Teorema III.32.**  $(\mathfrak{S}, \mathbf{Isom}(\mathfrak{S}))$  es un modelo geométrico maximal.

*Demostración.* Consideremos  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_x$ , para cada  $x \in \mathfrak{S}$ . Sea  $m$  una métrica invariante bajo  $\mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$ . Como  $\mathbf{Est}(\mathfrak{S})_x$  es finito,  $m$  debe ser un múltiplo escalar de  $ds^2_{\mathfrak{S}}$  en las direcciones vertical y horizontal. Es decir, existen constantes  $\lambda, \mu > 0$ , tales que  $m$  corresponde a

$$m = \lambda e^{2z} dx^2 + \lambda e^{-2z} dy^2 + \mu dz^2.$$

Entonces, la curvatura seccional de  $m$  es  $1/\mu$ , a lo largo de cualquier 2-plano tangente horizontal (por la identificación de  $\mathfrak{S}$  con  $\mathbb{R}^3$ ). A lo largo de cualquier 2-plano tangente vertical es  $-1/\mu$  y varía estrictamente entre estos dos valores a lo largo de cualquier 2-plano tangente que no es vertical ni horizontal.

Sean  $\phi$  una isometría de  $\mathfrak{S}$  respecto a  $m$  y  $\mathcal{X}$  un campo vectorial diferenciable y vertical en  $\mathbb{R}^3$ , unitario respecto a  $m$ . Sea  $v_x \in T_x \mathfrak{S}$  y consideremos la derivada covariante  $v_x \mapsto \nabla_{v_x} \mathcal{X}$ . Observemos que la podemos pensar como un automorfismo de cada  $\mathbf{T}_x \mathfrak{S}$ . Si  $\phi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ , entonces  $d\phi : T\mathfrak{S} \rightarrow T\mathfrak{S}$  debe respetar los tres ejes coordenados. Ya que  $\mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  actúa transitivamente en  $\mathfrak{S}$ , se sigue que para  $x_0 \in \mathfrak{S}$  arbitrario, existe  $\phi' \in \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$ , tal que

$$\phi(x_0) = \phi'(x_0) \quad y \quad d\phi(x_0) = d\phi'(x_0).$$

Concluimos que  $\phi = \phi' \in \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  (ver [BP92], **Proposición A.2.1**). ■

### § 8.1. 3-Solvariedades Geométricas.

Una 3-Solvariedad geométrica  $M$  es un espacio cociente de la forma  $M = \mathfrak{S}/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  subgrupo discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathfrak{S}$ .

Vamos a construir un ejemplo de una 3-Solvariedad de la siguiente manera. Sea  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$ , cuya matriz asociada es  $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; es decir,  $\Phi(x, y) = (2x + y, x + y)$ . Observemos que  $\det(N) = 1$ . Esto es,  $N \in \mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Sus valores propios, digamos  $\lambda_1, \lambda_2$ , son distintos y positivos. Además,  $\lambda_1, \lambda_2$  son recíprocos entre si. Los vectores propios asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  forman una base linealmente independiente para  $\mathbb{R}^2$ . Usando un cambio de base adecuado, podemos hacer que los espacios propios ortogonales asociados a ellos, coincidan con el eje  $x$  y con el eje  $y$  en  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente. Por lo tanto,  $N$  es lo que llamamos *un elemento hiperbólico* de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Y existe  $t_0 \in \mathbb{R}$ , tal que podemos escribir a  $N$  como  $\begin{pmatrix} e^{t_0} & 0 \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}$ .

Consideremos la restricción de  $\Phi$  al 2-toro  $\mathbb{T}^2$ , la cual denotaremos por  $\varphi$ . Extendemos  $\varphi$  a  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente manera

$$(x, y, t) \xrightarrow{\varphi'} (e^{t_0}x, e^{-t_0}y, t + t_0).$$

Sea  $\Gamma$  el grupo generado por  $\varphi'$  y por traslaciones unitarias a lo largo del eje  $x$  y el eje  $y$ . Observemos que  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  es discreto y ya que  $\Gamma \subset \mathfrak{S}$ , actúa libremente en  $\mathfrak{S}$ . Consideremos el espacio cociente de la forma

$$\mathfrak{S}/\Gamma \cong \mathbb{R}^3/\Gamma. \quad (\text{III.28})$$

Nos interesa saber como está actuando  $\Gamma$ , para ello vamos a ver cual es la acción de sus generadores sobre  $\mathfrak{S}$ . Sea  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ , tenemos que

$$\begin{aligned} T_1(x, y, z) &= (x + 1, y, t), & T_2(x, y, z) &= (x, y + 1, t) & \text{y} \\ \varphi'(x, y, t) &= (e^{t_0}x, e^{-t_0}y, t + t_0). \end{aligned}$$

En general,

$$(x, y, z) \longmapsto (e^{nt_0}x + \cdots + e^{t_0} + 1, e^{-nt_0}y + \cdots + e^{-t_0} + 1, t + nt_0).$$

Por otro lado, consideremos

$$(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \langle g \rangle, \text{ tal que } (x, y, t) \xrightarrow{g} (e^{t_0}x + 1, e^{-t_0}y + 1, t + t_0).$$

Observemos que

$$(x, y, t) \xrightarrow{g} (e^{t_0}x + 1, e^{-t_0}y + 1, t + t_0) = (\varphi(x, y), t + t_0),$$

con  $\varphi$  la restricción del automorfismo lineal  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^2$  definido anteriormente. En otras palabras,

$$M_\varphi = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \langle g \rangle, \tag{III.29}$$

es la *suspensión* de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ , la cual es una 3-variedad compacta.

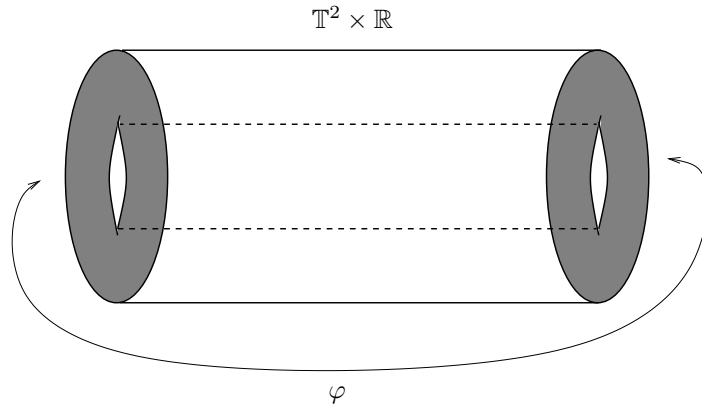


Figura III.49: Suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ .

Más aún, tenemos que la acción de  $\Gamma$  en  $\mathfrak{S}$  y la acción de  $\langle g \rangle$  en  $(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$ , generan el mismo espacio de órbitas. Por lo tanto, podemos pensar al espacio cociente (III.28) como la suspensión de  $\mathbb{T}^2$  dada por (III.29).

El siguiente resultado nos da una caracterización de todo subgrupo discreto  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  que actúa libremente en  $\mathfrak{S}$ . La demostración puede consultarse en [Thu97, pág. 285-286].

**Teorema III.33 (Thurston).** *Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  un subgrupo.  $\Gamma$  es discreto y cocompacto si y sólo si contiene un subgrupo  $H$  de índice finito con centralizador trivial, el cual es una extensión de la forma*

$$\mathbb{Z}^2 \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{Z},$$

con la acción de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}^2$  generada por un elemento hiperbólico de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

Veamos que nos dice este teorema. Sea  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  discreto y cocompacto que actúa libremente en  $\mathfrak{S}$ . Sea  $\Gamma_0 = \Gamma \cap (\mathbf{Isom}(\mathfrak{S}))_0 = \Gamma \cap \mathfrak{S}$ .

Entonces,  $\Gamma_0$  a lo más tiene índice ocho en  $\Gamma$ . De la sucesión exacta (III.26) obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma_0 \cap \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Gamma_0 \longrightarrow p(\Gamma_0) \longrightarrow 0.$$

Ya que  $\Gamma$  es discreto y cocompacto,  $\Gamma_0 \cap \mathbb{R}^2$  debe ser discreto y cocompacto en  $\mathbb{R}^2$ .

Por lo tanto,  $\Gamma_0 \cap \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $p(\Gamma_0) \cong \mathbb{Z}$ . Entonces,  $\mathfrak{S}/\Gamma$  es un haz sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra un 2-toro  $\mathbb{T}^2$ . Más aún,  $\mathfrak{S}/\Gamma$  es la suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por  $\phi$ , que es un difeomorfismo hiperbólico  $\phi: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  cuya matriz asociada es  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ , con respecto a alguna base.

Supongamos que tenemos un haz sobre  $\mathbb{S}^1$  con fibra un 2-toro  $\mathbb{T}^2$  y espacio total  $M$ , que es una suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por una función hiperbólica. Podemos escoger esta función como el levantamiento de un automorfismo lineal  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces,  $\Phi$  dejará invariante alguna retícula, porque precisamente es un levantamiento de un difeomorfismo de  $\mathbb{T}^2$ . Si la traza de la matriz asociada a  $\Phi$  es positiva, los dos valores propios de  $\Phi$  son positivos. Como el producto de estos es uno, podemos escribirlos como  $e^t$ ,  $e^{-t}$  y existe una base de  $\mathbb{R}^2$ , tal que la matriz asociada a  $\Phi$  corresponde a  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ . Concluimos que  $M$  admite una estructura geométrica modelada por  $\mathfrak{S}$ .

En general, cualquier 3-variedad de la forma  $\mathfrak{S}/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathfrak{S})$  discreto y cocompacto, es una suspensión de  $\mathbb{T}^2$  por  $\varphi$ , donde  $\varphi$  es un elemento hiperbólico de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

## CAPÍTULO IV

# Geometrización de 3-variedades.

¿Se acerca el final? **NO**, al contrario.  
Esta gran aventura apenas comienza  
y lo mejor de todo:  
tenemos completas las piezas de Lego.  
De aquí en adelante es cuestión  
de dejar volar la imaginación.

**Liz Barreto**

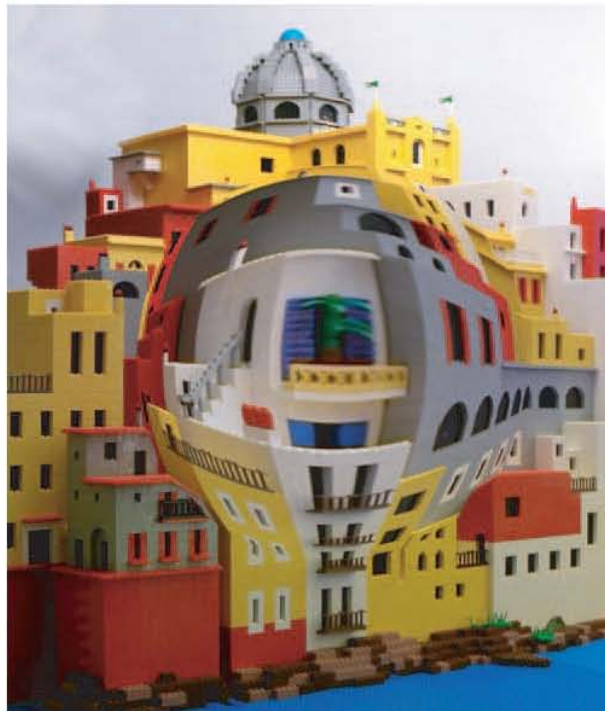


Figura IV.1: Balcón de Escher.

La influencia de las nuevas ideas de W. P. Thurston revolucionó por completo el campo de la topología de 3-variedades. Hoy en día, además de los argumentos clásicos de topología combinatoria, muchas de sus demostraciones utilizan técnicas de geometría diferencial, análisis complejo o sistemas dinámicos. La interacción entre topología y geometría hiperbólica ha beneficiado al análisis de variedades hiperbólicas y grupos discretos de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ ; en particular, a los grupos kleinianos (los cuales sólo estaban relacionados con el análisis complejo) ya que una 3-variedad hiperbólica es un espacio cociente de la forma  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , con  $\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Permitiendo, de esta manera, alcanzar nuevos conocimientos topológicos.

Casi treinta años después, continua siendo difícil, incluso para algunos especialistas en el área de geometría y topología, comprender estas ideas. Esto se debe, en parte, a que no existe bibliografía que contenga todos los resultados de la teoría desarrollada por W. P. Thurston en conjunto. Sin embargo, en los últimos años se han publicado demostraciones completas del **Teorema de Hiperbolización** de Thurston, así como del **Teorema de Geometrización de 3-orbifolds**. Por ejemplo, C. T. McMullen en [McM92], da un esbozo de una prueba del Teorema de Geometrización para 3-variedades Haken que no fibran sobre el círculo, una versión más completa es presentada por J. P. Otal en [Ota98]. Recientemente, M. Kapovich publicó un libro sobre la prueba del Teorema de Geometrización (ver [Kap01]). Un esbozo de la prueba original de Thurston del Teorema de Geometrización fue dada por J. W. Morgan en [Mor84]. Además, J. P. Otal también publicó una prueba del Teorema de Geometrización en el caso de 3-variedades que fibran sobre el círculo en [Ota96]. La prueba original de este teorema debida a W. P. Thurston, puede consultarse en [Thua]. En el caso del Teorema de Geometrización de 3-orbifolds, W. P. Thurston lo enunció a finales de 1981 (ver [Thu82] y [Thub]) pero desafortunadamente nunca publicó la demostración. En el año 2000, dos demostraciones distintas fueron anunciadas. Una por D. Cooper, C. Hodgson y S. Kerckhoff, quienes en [CHK00] presentaron un esbozo de ésta. La otra demostración es debida a M. Boileau, B. Leeb y J. Porti, la cual puede consultarse en [BLP05]. Una demostración para el caso cíclico aparece en [BJ01].

Por otro lado, la situación es un poco distinta con la teoría topológica de descomposición de 3-variedades. Existen publicaciones completas de los resultados correspondientes, por ejemplo [Joh79], [JS79], [Kne29], [Mil62] y han estado a nuestro alrededor por muchos años pero, no son muy accesibles ya que la matemática involucrada es complicada y técnica.

En la primera sección de este capítulo, damos una demostración del Teorema de Clasificación de modelos geométricos en dimensión tres. La demostración puede consultarse en [BMP03], [Sco83], [Thu97] y algunos detalles en [Mil76] y [Kir74]. En la segunda sección presentamos el Teorema de H. Kneser y J. Milnor sobre descomposición prima de 3-variedades (ver [Kne29], [Mil62]) así, como el Teorema de Descomposición Atoroidal debido a W. H. Jaco - P. B Shalen y K. Johannson (ver [JS79], [Joh79]). En la tercera sección enunciamos la **Conjetura de Geometrización** de W. P. Thurston ([Thu82]) y damos una idea general de los trabajos de R. S. Hamilton y G. Perelman (ver [Pera], [Perc], [Perb], [KL]).

## § 1. Clasificación de Modelos Geométricos.

Hemos descrito ocho modelos geométricos en dimensión tres (según la definición II.2), además presentamos ejemplos de 3-variedades geométricas en cada caso. W. P. Thurston demostró que estos son todos los modelos posibles. En otras palabras, demostró que en dimensión tres no existen modelos distintos a éstos satisfaciendo la definición II.2, como mostramos a continuación.

**Teorema IV.1 (Thurston).** *En dimensión tres, existen ocho modelos geométricos  $(M, \mathbf{Isom}(M))$ , con  $M$  una de las siguientes 3-variedades riemannianas:  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{R}_{Nil}^3$ ,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  ó  $Sol$ .*

*Demostración.* Sea  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  un modelo geométrico en dimensión tres. Sea  $\mathbf{Isom}(M)_0$  la componente identidad de  $\mathbf{Isom}(M)$ , cuya acción en  $M$  sigue siendo transitiva. Para  $x \in M$ , sea  $\mathbf{Est}(M)_x^0 < \mathbf{Isom}(M)_0$  su estabilizador; éste preserva el producto interno sobre  $\mathbf{T}_x M$ . Consideremos

$$G = \bigcup_{x \in M} \mathbf{Est}(M)_x^0 / (\mathbf{Est}(M)_x^0)_0,$$

con  $(\mathbf{Est}(M)_x^0)_0$  la componente identidad de  $\mathbf{Est}(M)_x^0$ . Tenemos que  $G$  es un espacio cubriente de  $M$  pero como  $M$  es simplemente conexa, este espacio cubriente es trivial. Es decir, para todo  $x \in M$ ,  $\mathbf{Est}(M)_x^0 = (\mathbf{Est}(M)_x^0)_0$  y por lo tanto,  $\mathbf{Est}(M)_x^0$  es conexo.

Entonces,  $\mathbf{Est}(M)_x^0$  es un subgrupo cerrado y conexo de  $\mathbf{SO}(3)$ . Usando el hecho de que un subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un grupo de Lie y, por lo tanto una variedad, tenemos que  $\mathbf{Est}(M)_x^0$  sólo puede ser  $\mathbf{SO}(3)$ ,  $\mathbf{SO}(2)$  ó el grupo trivial.

■  $\mathbf{Est}(M)_x^0 \cong \mathbf{SO}(3)$ .

En este caso, cualquier 2-plano tangente a cualquier punto  $x \in M$ , es llevado a cualquier otro 2-plano tangente a cualquier otro punto  $y \in M$ . Por lo tanto,  $M$  tiene curvatura seccional constante. Se sigue que,  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  corresponde a  $(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$ ,  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3))$  ó  $(\mathbb{H}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3))$ .

■  $\mathbf{Est}(M)_x^0 \cong \mathbf{SO}(2)$ .

Para cada  $x \in M$  podemos descomponer  $\mathbf{T}_x M$  como  $\mathcal{L}_x \oplus \mathcal{P}_x$ . En este caso,  $\mathcal{L}_x \subset \mathbf{T}_x M$  es un subespacio de dimensión uno, invariante bajo la acción de  $\mathbf{Est}(M)_x^0$  en  $\mathbf{T}_x M$  y  $\mathcal{P}_x \subset \mathbf{T}_x M$  es un 2-plano, ortogonal a  $\mathcal{L}_x$ . Sean

$$\mathcal{L} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{L}_x \quad \text{y} \quad \mathcal{P} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{P}_x.$$

$\mathcal{L}$  es un campo de líneas en  $M$  y  $\mathcal{P}$  un campo de 2-planes, ortogonal a  $\mathcal{L}$ . Ya que  $M$  es simplemente conexa, escogemos orientaciones coherentes sobre los  $\mathcal{L}_x$  de modo que obtenemos un campo de vectores unitarios  $\mathcal{X}$  en  $M$ , tal que la dirección en cada punto nos da el eje de rotación de los elementos de  $\mathbf{Isom}(M)_0$  que dejan fijo cada punto. Además,  $\mathcal{X}$  es invariante bajo la acción de  $\mathbf{Isom}(M)_0$ . Es decir,

$$\mathcal{X}_{g(x)} = dg_x(\mathcal{X}_x) \quad \text{con} \quad \mathcal{X}_{g(x)} \in \mathbf{T}_{g(x)} M, \quad \mathcal{X}_x \in \mathbf{T}_x M \quad \text{y} \quad g \in \mathbf{Isom}(M)_0.$$

Mas aún,  $\mathcal{P}$  es invariante bajo la acción de  $\mathbf{Isom}(M)_0$ .

Las trayectorias de las curvas integrales asociadas a  $\mathcal{X}$ , digamos  $\Phi_t$ , nos dan una foliación orientada  $\mathcal{F}$  de dimensión uno, invariante bajo  $\mathbf{Isom}(M)_0$ . Para toda  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_t$  conmuta con la acción de  $\mathbf{Isom}(M)_0$ . Sea  $F_x$  una hoja de  $\mathcal{F}$ , pasando por  $x \in M$ . Entonces, si  $g \in \mathbf{Isom}(M)_0$  deja fijo algún  $y \in F_x$ , fija cualquier otro punto en  $F_x$ . Concluimos que todos los puntos en la misma hoja tienen el mismo estabilizador. Por lo tanto, si la imagen de un punto  $y \in F_x$  bajo  $g \in \mathbf{Isom}(M)_0$  es otro punto  $z \in F_x$ ,  $g$  conmuta con cualquier elemento del estabilizador  $\mathbf{Est}(M)_x^0 = \mathbf{Est}(M)_y^0 = \mathbf{Est}(M)_z^0$ .

Sean  $x$  un punto en  $M$  y  $\Phi_t(x) \in F_x$ . Escogemos  $g_t \in \mathbf{Isom}(M)_0$ , de tal modo que la imagen de  $\Phi_t(x)$  bajo  $g_t$  sea  $x$ . Entonces,  $g_t \circ \Phi_t$  deja fijo a  $x$  y  $d(g_t \circ \Phi_t)_x : \mathbf{T}_x M \rightarrow \mathbf{T}_x M$  es un automorfismo lineal de  $\mathbf{T}_x M$ . Tenemos que  $d(g_t \circ \Phi_t)_x$  es la identidad en  $\mathcal{L}_x$ , el eje de acción de  $\mathbf{Est}(M)_x^0$ . Además, conmuta con rotaciones alrededor de  $\mathcal{L}_x$ , es decir, con elementos de  $\mathbf{Est}(M)_x^0$ . Por lo tanto,  $d(g_t \circ \Phi_t)_x$  debe ser una



rotación alrededor de  $\mathcal{L}_x$  posiblemente compuesta con una expansión o contracción en  $\mathcal{P}_x$ .

Por otro lado, existe una 3-variedad geométrica  $N$ , que hereda un campo vectorial  $\mathcal{Y}$  y una métrica riemanniana de  $(M, \mathbf{Isom}(M))$ . Como  $N$  es compacta, tiene volumen finito y debe preservarse bajo el campo vectorial heredado. Por lo tanto, éste debe preservar el volumen en cada punto y por consiguiente debe preservar transversalmente el área. Esto implica que  $\Phi_t$  no puede expandirse o contraerse en ninguna dirección sobre  $\mathcal{P}$  y  $g_t \circ \Phi_t$  actúa como una rotación sobre  $\mathbf{T}_x M$ .

Concluimos que la imagen de  $\mathbf{T}_x M$  bajo el diferencial de  $\Phi_t$  es isométrica a  $\mathbf{T}_{\Phi_t(x)} M$ . Como  $x$  es arbitrario,  $\Phi_t$  actúa por isometrías.

Considerando una vecindad de un punto  $x \in F_x$  y el hecho de que  $F_x$  es invariante bajo  $\mathbf{Est}(M)_x^0 \cong \mathbf{SO}(2)$ , concluimos que  $F_x$  no se acumula sobre ella misma, pero es la imagen bajo un encaje de  $\mathbb{S}^1$  ó  $\mathbb{R}$ . De hecho, hojas distintas tienen vecindades ajenas. Por lo tanto, el espacio cociente  $Y := M / \sim_{\Phi_t}$  con  $\Phi_t$  actuando en  $M$  por  $x \sim \Phi_t(x)$ , es una 2-variedad.

Como  $\mathcal{X}$  actúa por isometrías,  $Y$  hereda una métrica riemanniana de  $M$  (basta ignorar la componente de la métrica de  $M$  en la dirección de las trayectorias) y una acción transitiva de  $\mathbf{Isom}(M)_0$  por isometrías. Además,  $Y$  es conexa y simplemente conexa, ya que  $M$  lo es. Por el Teorema de Uniformización (pág. 40),  $Y$  debe ser uno de los modelos geométricos en dimensión dos:  $(\mathbb{E}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^2))$ ,  $(\mathbb{S}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2))$  ó  $(\mathbb{H}^2, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2))$ . Más aún,  $M$  es un fibrado principal sobre  $Y$  con fibra y grupo estructural  $\mathbb{S}^1$  ó  $\mathbb{R}$ .

El campo de 2-planos  $\mathcal{P}$ , ortogonal a  $\mathcal{L}$ , nos da una conexión invariante bajo  $\mathbf{Isom}(M)_0$  para este haz. Como  $\mathbf{Isom}(M)$  actúa transitivamente en  $M$ ,  $\mathcal{P}$  tiene curvatura constante.

**Curvatura cero.** Por el Teorema de Frobenius y la Proposición I.8 (pág. 32),  $\mathcal{P}$  define una foliación. Como  $Y$  es simplemente conexa, el haz principal es trivial (ver [Thu97, pág. 163]). Por consiguiente tenemos tres posibilidades, dependiendo de  $Y$ :

- $Y = \mathbb{S}^2$ . Obtenemos el modelo geométrico  $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1))$ .
- $Y = \mathbb{E}^2$ . En este caso,  $M = \mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^1 = \mathbb{E}^3$ . Entonces,  $\mathbf{Isom}(M)_0$  (y por lo tanto  $\mathbf{Isom}(M)$ ) está contenido en un grupo más grande de isometrías y no obtenemos un nuevo modelo.

- $Y = \mathbb{H}^2$ . Obtenemos el modelo geométrico  $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1, \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1))$ .

**Curvatura distinta de cero.** En este caso,  $\mathcal{P}$  es completamente no integrable y nos define una estructura de contacto. Después de hacer un cambio de escala a la métrica en la dirección de las fibras y escoger orientaciones apropiadas, asumimos que la curvatura es 1. Si  $Y$  tiene curvatura distinta de cero, podemos escoger  $M$  como el haz tangente unitario de  $Y$ , cuyas fibras son círculos (o su espacio cubriente universal) con la conexión de Levi-Civita (ver Corolario I.4, pág. 35). En este caso, el grupo de isometrías de  $M$  es generado por los diferenciales de elementos de  $\mathbf{Isom}(Y)$ , junto con rotaciones de vectores tangentes unitarios, manteniendo fijo el punto base.

- $Y = \mathbb{S}^2$ . El haz tangente unitario de  $\mathbb{S}^2$  es  $\mathbf{SO}(3)$ , cuyo espacio cubriente universal es  $\mathbb{S}^3$ . Por lo tanto, el grupo de isometrías no es maximal.
  - $Y = \mathbb{E}^2$ . Obtenemos el modelo geométrico  $(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3))$ . Ésta puede ser definida como el grupo de automorfismos de contacto de  $\mathbb{R}^3$  que corresponden a levantamientos de isometrías del plano  $xy$ .
  - $Y = \mathbb{H}^2$ . El haz tangente unitario de  $\mathbb{H}^2$  es  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Tomando el espacio cubriente universal de éste, obtenemos  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$ .
- $\mathbf{Est}(M)_x^0$  es trivial.

Como  $\mathbf{Isom}(M)_0$  actúa transitivamente en  $M$ ,

$$M = \mathbf{Isom}(M)_0 / \mathbf{Est}(M)_x^0 = \mathbf{Isom}(M)_0.$$

Por lo tanto,  $M$  es un grupo de Lie y además existe  $\Gamma < \mathbf{Isom}(M)_0$  discreto y cocompacto.

Escogemos un dominio fundamental compacto  $D$  (es decir,  $D$  es el conjunto de representantes de las clases laterales de  $\Gamma$  en  $\mathbf{Isom}(M)_0$ ) para la acción por la derecha de  $\Gamma$  en  $M$ . Sea  $\mu_r$  una medida de Haar derecha en  $M$ . Entonces,  $\mu_r(D\gamma \cap D) = 0$  para cada  $\gamma \neq \mathbf{Id}$ . Se sigue que  $\mu_r(D) \neq 0$  es independiente de la elección de  $D$ , ya que si  $E$  es otro dominio fundamental compacto, entonces

$$\mu_r(E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_r(D\gamma \cap E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_r(D \cap E\gamma^{-1}) = \mu_r(D).$$

Por otro lado, para cualquier  $g \in \mathbf{Isom}(M)_0$ , la traslación por la izquierda  $gD$  es un dominio fundamental para la acción por la derecha de  $\Gamma$  en  $M$ . Entonces,  $\mu_r(D) = \mu_r(gD)$ , concluimos que  $\mu_r$  también es una medida de Haar izquierda. Por lo tanto,  $M$  es unimodular y de [Mil76, Lema 6.3] se sigue que la traza, la cual denotamos por  $\mathbf{Tr}$ , de  $\mathbf{ad}(v) = 0$  para todo  $v$  en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  asociada a  $M$ .

Sea  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  una base ortonormal, con orientación positiva, de  $\mathfrak{g}$ . Definimos la transformación lineal  $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  por

$$L(e_1) = [e_2, e_3], \quad L(e_2) = [e_3, e_1], \quad L(e_3) = [e_1, e_2].$$

Para todo elemento de  $\mathcal{B}$  se satisface la igualdad  $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$  entonces,  $L(v \times w) = [v, w]$ , para todo  $v, w \in \mathfrak{g}$ . Denotamos por  $l_{ij}$  las entradas de la matriz asociada a  $L$ , con respecto a  $\mathcal{B}$ .

Sean

$$L(e_1) = \sum_{i=1}^3 [e_1, e_i] \cdot e_i, \quad L(e_2) = \sum_{i=1}^3 [e_2, e_i] \cdot e_i, \quad L(e_3) = \sum_{i=1}^3 [e_3, e_i] \cdot e_i.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} L(e_1) &= L(e_3) \cdot e_2 - L(e_2) \cdot e_3 = l_{23} - l_{32} = \mathbf{Tr} \mathbf{ad}(e_1), \\ L(e_2) &= L(e_1) \cdot e_3 - L(e_3) \cdot e_1 = l_{31} - l_{13} = \mathbf{Tr} \mathbf{ad}(e_2), \\ L(e_3) &= L(e_2) \cdot e_1 - L(e_1) \cdot e_2 = l_{12} - l_{21} = \mathbf{Tr} \mathbf{ad}(e_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el que  $M$  sea unimodular es equivalente a que la matriz asociada a  $L$  sea simétrica.

Ya que toda transformación lineal simétrica tiene una base ortonormal de vectores propios, cambiamos  $\mathcal{B}$  a esta base. Denotamos por  $c_i = l_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) a las entradas de la matriz asociada a  $L$ , la cual es diagonal. En otras palabras,  $[e_i, e_{i+1}] = c_{i+2}e_{i+2}$  tomando los subíndices mód 3. Si cambiamos la métrica de tal forma que  $\mathcal{B}' = \{a_1e_1, a_2e_2, a_3e_3\}$  es una base ortonormal, con  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), entonces cada  $c_i$  es reemplazado por  $c_i (a_{i+1}a_{i+2}/a_1)$ .

Reordenamos de tal manera que todos los  $c_i$  sean iguales a  $\pm 1$  ó cero. Para tener una mejor normalización, podemos permutar los elementos de  $\mathcal{B}'$ , sólo que si es una permutación impar, debemos cambiar la orientación del espacio vectorial. Por lo tanto, el efecto total es que

los  $c_i$  son permutados y cambian de signo. Para evitar el cambio de signos, podemos reemplazar los elementos de  $\mathcal{B}'$  por sus negativos.

Usando estas operaciones, podemos reordenar los  $c_i$  de tal manera que  $c_1 \geq c_2 \geq c_3$  y tengamos al menos el mismo número de términos positivos como negativos. Salvo isomorfismo, hay seis posibilidades para  $\mathfrak{g}$  y por lo tanto para  $M$  (ver [Mil76, pág 307]), las cuales son:

$(c_1, c_2, c_3)$	$M = \mathbf{Isom}(M)_0$	$(c_1, c_2, c_3)$	$M = \mathbf{Isom}(M)_0$
$(0, 0, 0)$	$\mathbb{R}^3$	$(1, 1, -1)$	$\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$
$(1, 1, 1)$	$\mathbf{SU}(2)$	$(1, 0, 0)$	$\mathcal{N}$
$(1, 1, 0)$	$\widetilde{\mathbf{Isom}}(\mathbb{E}^2)$	$(1, 0, -1)$	$Sol$

Brevemente los describimos:

- $\mathbb{R}^3$ : Grupo de traslaciones de  $\mathbb{E}^3$ .
- $\mathbf{SU}(2)$ : Grupo de matrices unitarias  $2 \times 2$  de determinante uno; isomorfo a  $\mathbb{S}^3$ .
- $\mathbf{SO}(3)$ : Grupo de rotaciones de  $\mathbb{R}^3$ , isomorfo a  $\mathbf{SU}(2)/\{\pm \mathbf{Id}\}$ .
- $\widetilde{\mathbf{Isom}}(\mathbb{E}^2)$ : Espacio cubriente universal del grupo de isometrías de  $\mathbb{E}^2$ .
- $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ : Espacio cubriente universal de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ .
- $\mathcal{N}$ : Grupo de Heisenberg.
- $Sol$ : Grupo de movimientos rígidos del 2-espacio de Minkowski. Este grupo es un producto semidirecto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}$ , donde cada  $t \in \mathbb{R}$  actúa en  $\mathbb{R}^2$  por medio de la matriz  $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ .

Ya que estamos considerando un modelo geométrico  $(M, \mathbf{Isom}(M))$  con  $M = \mathbf{Isom}(M)_0$ , si  $M$  es  $\mathbf{SU}(2)$  ó  $\mathbf{SO}(3)$ , este modelo no es maximal debido a que es una subgeometría de  $(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$ . Si  $M$  es  $\mathbb{R}^3$ , tenemos que  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  es una subgeometría de  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3))$ . Argumentos similares aplican si  $M$  es  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  ó  $\mathcal{N}$ . De igual modo, si  $M$  es  $\widetilde{\mathbf{Isom}}(\mathbb{E}^2) < \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3)$ , obtenemos un modelo geométrico

que no es maximal ya que es una subgeometría de  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{E}^3))$ . Entonces, la única posibilidad es que  $M$  sea el grupo de Lie  $Sol$ .

Sólo nos resta calcular el grupo completo de isometrías de  $Sol$ . Éste consiste de  $Sol$  mismo, de reflexiones independientes a lo largo de los 2-planos  $xz, yz$  y de funciones de la forma  $(x, y, z) \mapsto (y, x, -z)$ .

■

## § 2. Descomposición de 3-variedades.

En esta sección presentamos el primer resultado general sobre 3-variedades: el Teorema de Kneser-Milnor, comúnmente conocido como Teorema de Descomposición Prima para 3-variedades. Más allá de la descomposición prima, hay una descomposición más fuerte para 3-variedades que consiste en cortar a lo largo de 2-toros. Ésta es conocida como Descomposición Atoroïdal de Jaco-Shalen y Johannson o simplemente como Descomposición JSJ. Las demostraciones de los resultados que presentamos a continuación pueden consultarse en [Hat].

Asumiremos en todo el capítulo que toda  $n$ -variedad está orientada, es conexa, cerrada (compacta y con frontera vacía) y posiblemente con frontera cuando se especifique.

### Vecindades Tubulares.

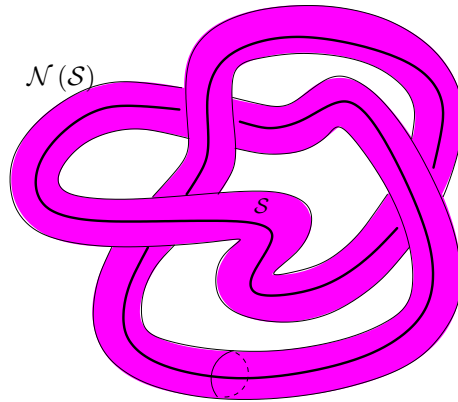


Figura IV.2: Vecindad tubular de  $S$ .

Sean  $M$  una 3-variedad y  $\mathcal{S} \subset M$  una 2-variedad. Decimos que  $\mathcal{S}$  está *propiamente encajada* en  $M$  si  $\mathcal{S} \cap \partial M = \partial \mathcal{S}$ .

**Definición IV.1.** El espacio total de un haz fibrado  $\pi : \mathcal{N}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}$  sobre una 2-variedad  $\mathcal{S} \subset M$  propiamente encajada, con fibra  $[-1, 1]$  y tal que la inclusión  $i : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{S})$  es una sección, es llamado *vecindad tubular* de  $\mathcal{S}$ . (ver figura IV.2).

Sea  $\mathcal{N}(\mathcal{S})$  una vecindad tubular de  $\mathcal{S} \subset M$ . Denotamos por  $M|\mathcal{S}$  a la 3-variedad  $M - \mathcal{N}(\mathcal{S})$ . Si  $M|\mathcal{S}$  es conexa, decimos que  $\mathcal{S}$  *no separa* a  $M$ ; de lo contrario,  $\mathcal{S}$  *separa* a  $M$ .

### Suma Conexa.

Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos 3-variedades y  $\mathbb{B}$  una 3-bola abierta. Escogemos encajes difeomorfos  $\phi_i : \overline{\mathbb{B}} \rightarrow M_i$  de  $\mathbb{B}$  en  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ), tal que uno de ellos invierte orientación, pero no ambos. Denotamos a  $M_i - \phi_i(\mathbb{B})$  por  $M'_i$ .

Identificamos  $\phi_1(\partial \mathbb{B})$  y  $\phi_2(\partial \mathbb{B})$  por el homeomorfismo  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ . En este caso, obtenemos una 3-variedad orientada y bien definida de  $M'_1$  y  $M'_2$ , la cual denotamos por  $M_1 \sharp M_2$ . Decimos que  $M_1 \sharp M_2$  es la *suma conexa* de  $M_1$  y  $M_2$ .

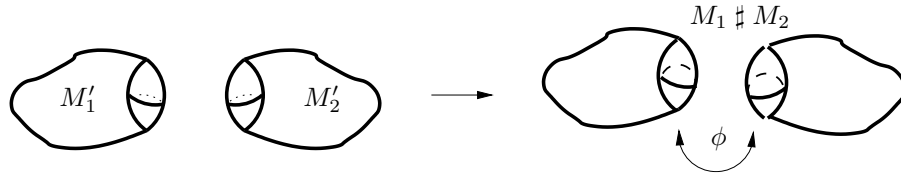


Figura IV.3: Suma conexa de  $M_1$  y  $M_2$ .

**Observación IV.1.** La operación suma conexa es conmutativa, asociativa y tiene a  $\mathbb{S}^3$  como identidad.

**Definición IV.2.** Sea  $M$  la suma conexa de  $M_1$  y  $M_2$ . Si  $M_1$  ó  $M_2$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^3$ , decimos que  $M$  es *prima*.

### § 2.1. Variedades Irreducibles.

**Lema IV.1.** Sea  $\mathcal{S} \subset M$  propiamente encajada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}$  no separa a  $M$ .*
- ii) Hay un lazo  $l \subset M$  propiamente encajado, que interseca a  $\mathcal{S}$  transversalmente en un punto.*
- iii) Hay un lazo  $l \subset M$  propiamente encajado, que interseca a  $\mathcal{S}$  transversalmente en un número impar de puntos.*

*Demostración.*

- i)  $\Rightarrow$  ii)* Supongamos que  $\mathcal{S}$  no separa a  $M$ . Tomamos un arco pequeño que interseca a  $\mathcal{S}$  transversalmente. Los extremos de este arco están contenidos en la misma componente conexa por caminos de  $M|\mathcal{S}$ . Entonces, podemos unirlos por un arco en  $M|\mathcal{S}$ . Uniendo los dos arcos obtenemos un lazo  $l$ , que asumimos está propiamente encajado en  $M$ . Además,  $l$  interseca a  $\mathcal{S}$  en un solo punto.
- ii)  $\Rightarrow$  iii)* Sea  $l \subset M$  un lazo propiamente encajado que interseca transversalmente a  $\mathcal{S}$  en un punto. Se sigue que,  $l$  interseca transversalmente a  $\mathcal{S}$  en un número impar de puntos.
- iii)  $\Rightarrow$  i)* Supongamos que  $\mathcal{S}$  separa a  $M$  en dos componentes. Entonces, cualquier lazo  $l \subset M$  que interseca transversalmente a  $\mathcal{S}$ , alterna entre estas dos componentes. Por lo tanto,  $l$  interseca transversalmente a  $\mathcal{S}$  en un número par de puntos.

■

**Definición IV.3.** Llamamos a  $M$  *irreducible* si toda 2-esfera  $\mathbb{S} \subset M$  es la frontera de una 3-bola  $\mathbb{B} \subset M$ .

La condición de ser prima y ser irreducible son casi equivalentes como lo muestran las siguientes proposiciones.

**Proposición IV.1.** *Toda 3-variedad irreducible es prima.*

*Demostración.* Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Entonces, toda 2-esfera  $\mathbb{S} \subset M$  es la frontera de una 3-bola  $\mathbb{B} \subset M$ . Por lo tanto, cualquier 2-esfera  $\mathbb{S} \subset M$  que separa a  $M$  es la frontera de una 3-bola  $\mathbb{B} \subset M$ . Concluimos que  $M$  es prima. ■

**Proposición IV.2.**  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  es la única 3-variedad prima que no es irreducible.

*Demostración.* Sea  $M$  una 3-variedad prima que no es irreducible. Por lo tanto, toda 2-esfera  $\mathbb{S} \subset M$  que separa a  $M$  en dos componentes es la frontera de una 3-bola  $\mathbb{B} \subset M$ . Existe al menos una 2-esfera que no separa a  $M$ .

Sea  $\mathbb{S} \subset M$  dicha 2-esfera.  $\mathbb{S}$  tiene una vecindad tubular  $\mathcal{N}(\mathbb{S}) \subset M$  con  $\mathcal{N}(\mathbb{S}) = \mathbb{S} \times [-\epsilon, \epsilon]$ ,  $\epsilon > 0$ , la cual es homeomorfa a  $\mathbb{S} \times [-1, 1]$ . Sabemos que hay un lazo  $l \subset M$  propiamente encajado, que interseca a  $\mathbb{S}$  transversalmente en un punto. Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño,  $l \cap \mathcal{N}(\mathbb{S})$  es un arco.

Sea  $\mathcal{N}(l')$  la vecindad tubular de  $l - \mathcal{N}(\mathbb{S})$  en  $M - \mathbb{S} \times (-\epsilon, \epsilon)$ . Tenemos que  $\mathcal{N}(l')$  es homeomorfa a una 3-bola  $\mathbb{B}$ . Además,  $\mathbb{B} \cap (\mathbb{S} \times \{-\epsilon\})$  y  $\mathbb{B} \cap (\mathbb{S} \times \{\epsilon\})$  son dos 2-bolas.

Sea  $X = \mathbb{B} \cup \mathcal{N}(\mathbb{S})$ . Tenemos que  $X$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 - \mathbb{B}'$ , con  $\mathbb{B}' \subset M$  una 3-bola. La frontera de  $X$  es, por lo tanto, una 2-esfera  $\mathbb{S}' \subset M$  que separa a  $M$ , ya que es la frontera de una 3-bola. Entonces,  $M$  tiene a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  como sumando conexo. Concluimos que  $M = X \cup \mathbb{B}'' = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , con  $\mathbb{B}'' \subset M$  una 3-bola.

Ahora vamos a mostrar que  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  es prima. Sean  $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  una 2-esfera que separa a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  en dos componentes y  $\mathcal{N}(\mathbb{S}) \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  una vecindad tubular de  $\mathbb{S}$ . Entonces,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 | \mathbb{S}$  consiste de dos 3-variedades compactas  $V$  y  $W$ . La frontera de cada una de estas componentes es una 2-esfera, respectivamente. Por el Teorema de Seifert-Van Kampen, tenemos que

$$\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1) \approx \pi_1(V) * \pi_1(W).$$

Por lo tanto,  $V$  ó  $W$  debe ser simplemente conexas, digamos  $V$ . Tenemos que  $\widetilde{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , el cual puede ser identificado con el espacio  $\mathbb{E}^3 - \{0\}$ . Levantamos de manera difeomorfa  $V$  a  $\widetilde{V}$  en  $\mathbb{E}^3 - \{0\}$ . La frontera de  $\widetilde{V}$ , que denotamos por  $\partial\widetilde{V}$ , es una 2-esfera en  $\mathbb{E}^3 - \{0\}$  y por el Teorema de Alexander (ver [Hat]), es la frontera de una 3-bola en  $\mathbb{E}^3$ . Pero  $\partial\widetilde{V}$  sigue siendo la frontera de  $\widetilde{V}$  en  $\mathbb{E}^3$ . Concluimos que  $\widetilde{V}$  es una 3-bola y por consiguiente,  $V$  es una 3-bola. Entonces, toda 2-esfera  $\mathbb{S} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  que separa a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ , es la frontera de una 3-bola  $\mathbb{B} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ . Por lo tanto,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  es prima. ■

La siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse en [Hat], nos da un criterio para reconocer 3-variedades irreducibles.

**Proposición IV.3.** *Sea  $\widetilde{M}$  una 3-variedad irreducible. Si  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  es una función cubriente, entonces  $M$  es irreducible.*



**Ejemplos.**

- Las 3-variedades geométricas esféricas son irreducibles. Esto incluye a  $\mathbb{R}P^3$  y cada espacio lente  $L_{(p,q)}$  de dimensión tres.
- Sea  $M = \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1$  con  $\mathcal{S}$  una 2-variedad compacta, conexa y orientable, distinta de  $\mathbb{S}^2$ . Ya que el espacio cubriente universal de  $M - \partial M$  es  $\mathbb{E}^3$ ,  $M$  es irreducible.

**Observación IV.2.** Si en la Proposición IV.3 cambiamos la hipótesis de  $\widetilde{M}$  irreducible por  $\widetilde{M}$  prima, ésta resulta falsa. Ya que hay un cubriente doble  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ .

El siguiente teorema se debe a H. Kneser y J. Milnor. No presentamos la demostración, pero puede consultarse en [Hat].

**Descomposición Prima.**

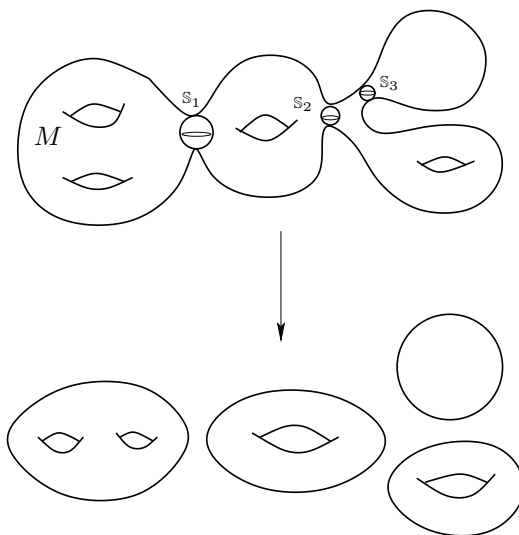


Figura IV.4: Descomposición prima.

**Teorema de Kneser-Milnor.** Sea  $M$  una 3-variedad distinta de  $\mathbb{S}^3$ . Entonces, hay una colección finita  $\{M_1, \dots, M_n\}$  de 3-variedades tal que

- i)  $M = M_1 \# \dots \# M_n$ ;
- ii) para cada  $i$ , si  $M_i = M'_i \# M''_i$ , entonces  $M'_i$  ó  $M''_i$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^3$ .

Más aún, esta descomposición para  $M$  es única, salvo orden y difeomorfismos que preservan orientación.

### § 2.2. Variedades Atoroidales.

Sean  $M$  una 3-variedad y  $\mathcal{S} \subset M$  una 2-variedad propiamente encajada en  $M$ . Decimos que  $\mathcal{S}$  es *bilateral* si tiene una vecindad tubular  $\mathcal{N}(\mathcal{S}) \subset M$ .

**Definición IV.4.** Sea  $\mathcal{S} \subset M$  una 2-variedad bilateral que es distinta de una 2-esfera. Si para cada 2-bola  $\mathbb{B}^2 \subset M$  con  $\mathbb{B}^2 \cap \mathcal{S} = \emptyset$  hay una 2-bola  $\mathbb{B}_1^2 \subset \mathcal{S}$  tal que  $\partial\mathbb{B}_1^2 = \partial\mathbb{B}^2$ , llamamos a  $\mathcal{S}$  *incompresible*.

**Observación IV.3.** Hay una versión algebraica para la noción de ser incompresible (ver [Hat]). Supongamos que  $i : \mathcal{S} \rightarrow M$  es un encaje propio de una 2-variedad. Entonces,  $\mathcal{S}$  es  $\pi_1$ -inyectiva (o algebraicamente incompresible) si la función inducida sobre grupos fundamentales  $i_* : \pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \pi_1(M)$  es inyectiva. El Teorema del Lazo (ver por ejemplo [Hem76]) implica que una 2-variedad bilateral propiamente encajada, distinta de una 2-esfera es incompresible si y sólo si es  $\pi_1$ -inyectiva.

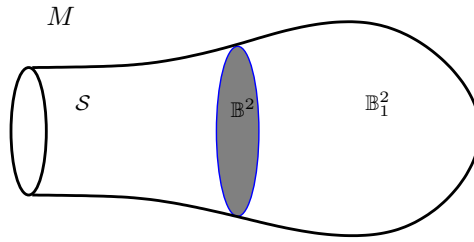


Figura IV.5: 2-variedad incompresible.

**Teorema de Finitud de Kneser-Haken.** Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Existe una cota para el número de componentes en un sistema  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_n$ , de 2-variedades  $\mathcal{S}_i \subset M$  ( $i = 1, \dots, n$ ) cerradas, ajenas e incompresibles, no isotópicas dos a dos.

Una 2-variedad  $\mathcal{S} \subset M$  propiamente encajada, es *paralela a la frontera* si es isotópica, dejando fija su frontera, a una subvariedad de la frontera de  $M$ .

**Definición IV.5.** Una 3-variedad irreducible  $M$  es llamada *atoroidal* si todo 2-toro incompresible en  $M$ , es paralelo a la frontera.

**Corolario IV.1.** Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Existe una colección finita  $\mathbb{T}$  de 2-toros incompresibles y ajenos, tal que cada componente de  $M|\mathbb{T}$  es atoroidal.

*Demostración.* Construimos, de manera inductiva, la colección  $\{\mathbb{T}_1^2, \mathbb{T}_2^2, \dots\}$  que denotamos por  $\mathbb{T}$ , de 2-toros ajenos e incompresibles en  $M$ . Para toda  $i$ ,  $\mathbb{T}_i^2$  es incompresible en  $M_i = M \setminus (\mathbb{T}_1^2 \cup \dots \cup \mathbb{T}_{i-1}^2)$  y no es paralelo a la frontera siempre que,  $M_i$  no sea atoroidal.

$M_i$  se obtiene de  $M_{i-1}$  por cortar a lo largo de un 2-toro que no es paralelo a la frontera. Entonces, hay dos formas en que algún  $M_i$  puede tener una componente que es un producto  $\mathcal{S} \times [-1, 1]$ , con  $\mathcal{S}$  una 2-variedad cerrada.

- i)*  $i = 1$ . En este caso,  $M_1 = M$ . Por lo tanto, si  $M_1 = \mathcal{S} \times [-1, 1]$ ,  $M = \mathcal{S} \times [-1, 1]$ ;
- ii)*  $i = 2$ . Tenemos que  $M_2 = M \setminus \mathbb{T}_1^2$ . Si  $M_2 = \mathcal{S} \times [-1, 1]$ , entonces  $M$  debe ser un haz circular con fibra un 2-toro.

Supongamos que el proceso de construcción de los  $\mathbb{T}_i^2$  no termina. Obtenemos colecciones  $\{\mathbb{T}_1^2 \cup \dots \cup \mathbb{T}_i^2\}$  que satisfacen las condiciones del Teorema de Finitud de Kneser-Haken. Pero como  $i$  puede ser arbitrariamente grande, tenemos una contradicción. Por lo tanto, la colección  $\mathbb{T}$  es finita. ■

**Descomposición Atoroidal.**

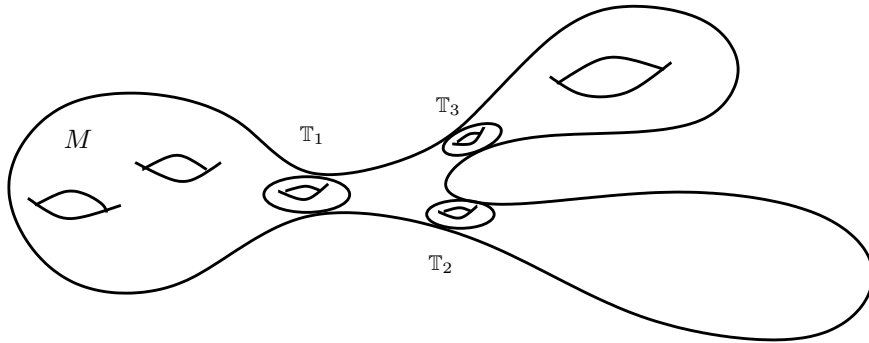


Figura IV.6: Descomposición atoroidal.

**Teorema de Jaco-Shalen y Johannson.** *Sea  $M$  una 3-variedad irreducible. Existe una colección  $\mathbb{T} \subset M$  de 2-toros incompresibles y ajenos tal que, cada componente de  $M \setminus \mathbb{T}$  es atoroidal ó una variedad de Seifert.<sup>1</sup> La colección mínima  $\mathbb{T}$  es única salvo isotopía.*

<sup>1</sup>Ver apéndice I.



**Ejemplo 10.** Sea  $\mathcal{S}$  una 2-variedad de género dos cuya frontera es un círculo. Sean  $M_1 = M_2 = \mathcal{S} \times \mathbb{S}^1$ . Observemos que  $\partial M_1 = \partial M_2 = \mathbb{T}^2$ , es decir, un 2-toro (ver figura IV.7).

La 3-variedad  $M = M_1 \sqcup_f M_2$ , obtenida por identificar  $M_1$  y  $M_2$  a lo largo de sus fronteras por  $f : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ , es una 3-*Grafo* variedad.

En general, en el ejemplo anterior podemos considerar cualquier 2-variedad de género mayor o igual a uno.

**Conjetura de Geometrización de Thurston [Kap].** *Consideremos una 3-variedad  $M$ . Entonces, cada componente de su descomposición prima admite una estructura geométrica o tiene una descomposición atoroidal de la forma  $M_{\mathbb{H}} \cup M_G$ , donde  $M_{\mathbb{H}}$  es una unión disjunta de 3-variedades hiperbólicas y  $M_G$  es una 3-*Grafo* variedad.*

### § 3.1. Trabajos de R. S. Hamilton y G. Perelman.

A principios de los años 80 R. S. Hamilton presentó un programa, basado en el concepto de *flujo de Ricci*, con el propósito de dar una demostración de la Conjetura de Geometrización de Thurston. La idea es la siguiente.

Consideremos una 3-variedad diferenciable cerrada  $M$ , dotada con una métrica riemanniana  $m$ . El flujo de Ricci es un manera de manipular a  $m$ , permitiéndole evolucionar a través del tiempo bajo una ecuación diferencial. En el espacio de todas las métricas riemannianas de  $M$  se pueden proponer muchas ecuaciones diferenciales distintas, pero utilizaremos una que fue introducida por R. S. Hamilton en [Ham82]:

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = -2Ric(m(t)), \quad (\text{IV.1})$$

con  $Ric(m(t))$  la curvatura de Ricci de la métrica  $m(t)$ . Los puntos fijos (salvo cambio de escala) de esta ecuación son las métricas riemannianas de curvatura de Ricci constante.

Una justificación del por qué de la elección de la ecuación (IV.1) es la siguiente. Desde ciertos puntos de vista,  $Ric(m(t))$  puede considerarse como un laplaciano de  $m(t)$ , convirtiendo de esta manera a la ecuación (IV.1) en una variación de la ecuación del calor usual; es decir, en una ecuación diferencial parcial parabólica para métricas riemannianas sobre  $M$ .

Formalmente, un *flujo de Ricci* es una familia  $\{m(t)\}$ , parametrizada por  $t \in [0, T]$ , de métricas riemannianas en  $M$  que son solución de la ecuación (IV.1).

En este caso,  $t$  representa el tiempo y estudiamos la ecuación (IV.1) como un problema con valor inicial: comenzando con cualquier variedad riemanniana  $(M, m_0)$  encontramos un flujo de Ricci con  $m_0$  como métrica inicial. Es decir, encontramos una familia a un parámetro  $(M, m(t))$  de variedades riemannianas, con  $m(0) = m_0$  satisfaciendo la ecuación (IV.1). Observemos que esta ecuación es válida en cualquier dimensión, pero nos concentraremos en dimensión tres.

R. S. Hamilton llegó a los siguientes resultados. Si la métrica inicial tiene curvatura de Ricci positiva, bajo el flujo de Ricci la 3-variedad diferenciable cerrada se contrae a un punto en un tiempo finito. Es decir, hay una singularidad en un tiempo finito y conforme nos aproximamos a éste, el diámetro de la variedad tiende a cero y la curvatura se incrementa en cada punto. En este caso, realizar un cambio de escala por una función dependiente del tiempo de tal manera que el diámetro sea constante, produce una familia a un parámetro de métricas, que cubren de manera diferenciable, a la métrica de curvatura positiva constante.

Por otro lado, supongamos que el flujo de Ricci existe para todo tiempo y se tiene una cota apropiada para la curvatura junto con una cota geométrica. R. S. Hamilton demostró que conforme el tiempo tiende a infinito, después de un cambio de escala, se tiene un diámetro fijo y la métrica converge a una métrica de curvatura negativa constante (ver [Ham99]).

Resultados para el caso general son más difíciles de formular; R. S. Hamilton estableció que la ecuación (IV.1) tiene propiedades de existencia local y que si la topología de la 3-variedad es lo suficientemente complicada, no importa cual sea la métrica inicial debemos encontrar singularidades en algún tiempo finito.

Más aún, si la 3-variedad tiene una topología simple, al comenzar con una métrica arbitraria se espera encontrar singularidades en el flujo de Ricci en un tiempo finito. Estas singularidades no ocurren en la variedad completa. Por lo que no es suficiente, en general, detener el proceso evolutivo en cuanto aparece la primera singularidad en la ecuación (IV.1). Esto motivó el estudio de un proceso evolutivo más general, llamado *flujo de Ricci con cirugía*, el

cual fue introducido por R. S. Hamilton en el contexto de 4-variedades (ver [Ham97]).

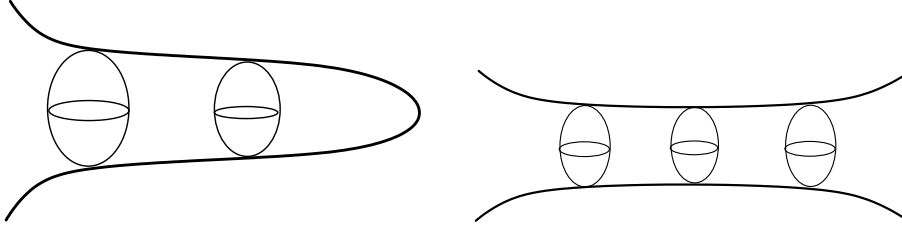


Figura IV.8: Tipos de singularidades.

Este proceso evolutivo continua parametrizado por  $t \in [0, T]$ , tal que para cada  $t$  hay una 3-variedad riemanniana compacta  $M_t$ . Sin embargo, hay un conjunto discreto de tiempos en los cuales las 3-variedades riemannianas son sometidas a ciertas “cirugías”; a dichos tiempos se les conoce como *tiempos singulares*. Fuera de este conjunto discreto de tiempos singulares, la evolución en el flujo de Ricci es la usual, a pesar de que debido a las cirugías la topología de las  $M_t$  cambia, conforme  $t$  varía en los tiempos no singulares.

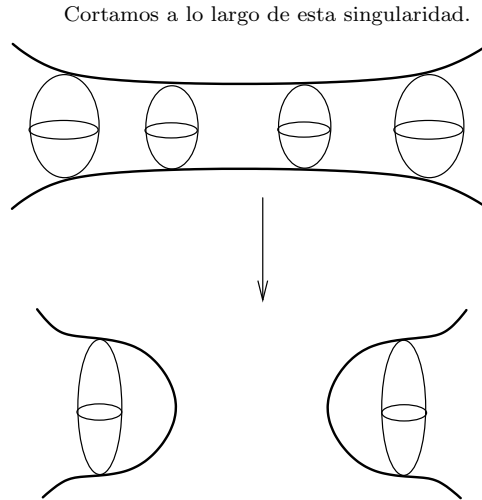


Figura IV.9: Cirugía en 3-variedades.

Desde un punto de vista analítico, las cirugías son introducidas con el fin de “remove” una vecindad de las singularidades conforme se van desarrollando y añadir en su lugar regiones geométricas “agradables”. Esto

permite restaurar el flujo de Ricci con la métrica construida en el tiempo singular. Es importante tener un control sobre los procesos de cirugía, ya que estos producen exactamente las operaciones topológicas necesarias para cortar la 3-variedad en piezas, sobre las cuales el flujo de Ricci puede producir métricas lo suficientemente controladas y de este modo la topología se puede reconocer.

Recientemente, G. Perelman propuso una demostración de la Conjetura de Geometrización de Thurston basada en la existencia de un *flujo de Ricci con cirugía* para todo tiempo positivo, involucrando también un fuerte análisis de los límites de dichos flujos conforme el tiempo tiende a infinito (ver [Pera],[Perc] y [Perb]).

Los argumentos dados por G. Perelman radican en un contexto dado por la teoría general de variedades riemannianas, en particular en varias nociones de convergencia de sucesiones. Siendo la más importante la convergencia geométrica (convergencia diferenciable en subconjuntos compactos). Más aún, dichos argumentos también provienen de la teoría de la ecuación (IV.1). G. Perelman utilizó casi todos los resultados ya conocidos para el flujo de Ricci de 3-variedades, con excepción de la clasificación de resultados para singularidades de dimensión tres propuesta por R. S. Hamilton. Pues él dio su propia descripción de singularidades para flujos de Ricci sobre 3-variedades compactas.



# Epílogo.

Un solo pensamiento  
acudirá en la noche a la mente del hombre  
y ese pensamiento puede  
elevantarlo hasta la gloria o llevarlo a la locura.

**Gibrán Jalil Gibrán**

*Poeta Libanés*

El trabajo de G. Perelman (ver [Pera], [Perc] y [Perb]) demuestra uno de los resultados más importantes de la matemática moderna en el área de geometría y topología de dimensiones bajas: **la Conjetura de Geometrización de Thurston**. Ésta será una futura herramienta y muchas de sus consecuencias son aún desconocidas.

La siguiente conjetura se catalogó como un problema estremadamente difícil.

**Conjetura de Poincaré.** *Sea  $M$  una 3-variedad cerrada y simplemente conexa. Entonces,  $M$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^3$ .*

De manera natural aparece como un corolario de la Conjetura de Geometrización (ver [BBB06], [Bes06] y [Bes05]). Supongamos que  $M$  es una 3-variedad cerrada y simplemente conexa. Consideremos la descomposición prima de  $M$ , digamos  $M = M_1 \sharp \cdots \sharp M_n$ , tenemos que cada  $M_i$  es cerrada y simplemente conexa. Ya que para toda  $i$ ,  $M_i$  no contiene 2-toros incompresibles, se sigue de la Conjetura de Geometrización que cada  $M_i$  admite una estructura geométrica. Concluimos que  $M_i = \mathbb{S}^3$  para cada  $i$ . Por lo tanto,  $M = \mathbb{S}^3$ .

Asumiendo que la Conjetura de Geometrización es cierta, tendríamos los siguientes resultados (mayores detalles pueden consultarse en [Kap]).

**Corolario IV.2.** *Sea  $M$  una 3-variedad orientada, cerrada y conexa tal que todos sus grupos de homotopía  $\pi_i(M) = 0$  para  $i \geq 2$ . Entonces,*

- *El espacio cubriente universal de  $M$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^3$ .*
- *$M$  homotópicamente equivalente a  $N$  implica que  $M$  es difeomorfa a  $N$ . Por lo tanto,  $M$  está determinada por su  $\pi_1(M)$ .*

Una gran cantidad de resultados topológicos para 3-variedades imponen la hipótesis de que ésta sea *irreducible*. Del Corolario IV.2 se sigue que esta hipótesis podría suprimirse y cambiarse por la hipótesis de que el segundo grupo de homotopía de la 3-variedad sea cero. Esto es,

**Corolario.** *Toda 3-variedad orientada, cerrada y conexa  $M$  con  $\pi_2(M) = 0$  es irreducible.*

Del mismo Corolario IV.2, concluimos que el espacio cubriente universal de cualquier 3-variedad orientada, cerrada y conexa corresponde a  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ó  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , donde  $\mathbb{S}^3$  y  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$  sólo son espacios cubrientes universales de las 3-variedades geométricas esféricas y de las 3-variedades geométricas que admiten una geometría modelada por  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ , respectivamente.

**Corolario IV.3.** *Sea  $M$  una 3-variedad orientada, conexa y cerrada. Entonces,*

- *El problema de palabras, conjugación e isomorfismo en la clase de grupos de 3-variedades son decidibles.*
- *El problema de homeomorfismo es decidible para 3-variedades.*

El siguiente resultado es análogo, en cierto sentido, al hecho de que las superficies pueden ser ordenadas por su género.

**Corolario IV.4.** *Las 3-variedades geométricas hiperbólicas se pueden ordenar por su volumen.*

# Apéndice I.

Presentamos una breve introducción a las *variedades de Seifert*, las cuales fueron definidas y clasificadas por H. Seifert en su artículo [Sei32]. La traducción de este artículo al inglés, la cual puede consultarse en [ST80], fue llevada a cabo por W. Heil. Algunas referencias que tratan sobre estas variedades son [Hat], [Neu99], [Orl72] y [Sco83]. La primera sección de este apéndice consta de definiciones básicas para la teoría de orbifolds, para un estudio mas detallado puede consultarse [BMP03]. En la segunda sección describimos las fibraciones de Seifert.

## A. Orbifolds.

La primera definición formal de orbifolds, bajo el nombre de *V-variedades*, fue dada en 1956 por I. Satake (ver [Sat56]). En la década de los años 70, W. P. Thurston [Thu79], quién desconocía el trabajo de I. Satake, definió estos objetos como espacios topológicos metrizable, localmente homeomorfos a espacios cociente de  $\mathbb{R}^n$  por acciones de grupos finitos y los nombró **orbifolds**.<sup>2</sup>

Sean  $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{O}$  y  $\tilde{\mathcal{U}}_i \subset \mathbb{E}^{n-1} \times [0, \infty]$  abiertos;  $\phi_i : \tilde{\mathcal{U}}_i \rightarrow \mathcal{U}_i$  una función diferenciable, llamada *carta* y  $\Gamma_i$  un grupo finito de difeomorfismos de  $\tilde{\mathcal{U}}_i$ .

**Definición .7.** Un *n-orbifold diferenciable*  $\mathcal{O}$  es un espacio topológico de dimensión  $n$ , metrizable, dotado con una colección  $\left\{ (\mathcal{U}_i, \tilde{\mathcal{U}}_i, \phi_i, \Gamma_i) \right\}_i$  llamada *atlas* que satisface las siguientes condiciones:

- $\bigcup_i \mathcal{U}_i$  es una cubierta abierta de  $\mathcal{O}$ ;
- Cada  $\phi_i$  induce un difeomorfismo entre  $\tilde{\mathcal{U}}_i/\Gamma_i$  y  $\mathcal{U}_i$ ;

---

<sup>2</sup>Utilizamos la palabra *orbifold* ya que, aún no hay una convención sobre su traducción al español.

- Las cartas son compatibles en el siguiente sentido. Para cada  $x \in \tilde{\mathcal{U}}_i$  y  $y \in \tilde{\mathcal{U}}_j$  tal que  $\phi_i(x) = \phi_j(y)$ , hay un difeomorfismo  $\psi$  entre vecindades  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  de  $x$  y  $y$  respectivamente, con

$$\phi_j(\psi(z)) = \phi_i(z), \text{ para toda } z \in \mathcal{V}.$$

Por conveniencia asumiremos que el atlas es maximal. De aquí en adelante por orbifold nos referiremos a un  $n$ -orbifold diferenciable.

**Observación .4.** Algunas veces será necesario distinguir entre orbifold  $\mathcal{O}$  y el espacio topológico  $|\mathcal{O}|$  obtenido por olvidar la estructura de orbifold.

Sean  $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  y  $\phi : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$  una carta. Denotamos por  $\Gamma_x$  al *estabilizador* de cualquier punto de  $\phi^{-1}(x)$  bajo la acción de  $\Gamma$  y es llamado *grupo local* de  $\mathcal{O}$  en  $x$ . Si  $\Gamma_x$  es trivial, decimos que  $x$  es *regular*; de lo contrario,  $x$  es *singular*. El conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{O}$  es llamado *lugar singular*.

Nos restringiremos a 2-orbifolds orientables. Cualquier subgrupo finito de  $\mathbf{SO}(2)$  es un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$ , de orden  $p$ , generado por una rotación de ángulo  $2\pi/p$ . Por lo tanto, el lugar singular es discreto. Puntos singulares de este tipo son llamados *puntos cono*.

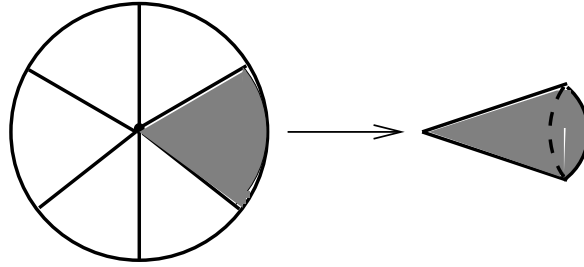


Figura 10: Punto cono.

### Característica de Euler.

Sea  $\mathcal{S}_g$  una 2-variedad de género  $g$  compacta y orientable. Supongamos que tiene un estructura geométrica con curvatura constante  $k$ . Subdividimos  $\mathcal{S}_g$  en pequeños triángulos geodésicos  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, T$ ).

Sean  $V$  el número de vértices de la triangulación y  $E$  el número de ejes. La característica de Euler de  $\mathcal{S}_g$  está dada por

$$\chi(\mathcal{S}_g) = T - E + V = 2 - 2g,$$

y tenemos la siguiente definición.

**Definición .8.** Sea  $\mathcal{O}$  un 2-orbifold con  $s$  puntos cono, cuyos ángulos de rotación son  $2\pi/p_1, \dots, 2\pi/p_s$ , respectivamente y  $|\mathcal{O}|$  es una 2-variedad de género  $g$ . La *característica de Euler* de  $\mathcal{O}$  es

$$\chi(\mathcal{O}) = 2 - 2g - \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

## B. 3-Variedades de Seifert.

Comenzaremos con fibraciones de Seifert “clásicas”, es decir, fibraciones cuyas fibras son círculos y posiblemente alguna fibra excepcional.

### B.1. Fibraciones de Seifert con Fibra un Círculo.

Una *fibración de Seifert* sobre una 3-variedad  $M$  orientable y compacta es una descomposición de  $M$  en círculos, llamados fibras, tal que se cumple la siguiente propiedad: cada fibra tiene una vecindad saturada  $\mathcal{U}$  (i.e.  $\mathcal{U}$  es una unión de fibras). Esta vecindad es difeomorfa al cociente de un 3-toro *fibrado*  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  por un grupo finito que actúa libremente en él. La acción respeta la estructura producto de tal forma que, las fibras de la fibración corresponden a  $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ , con  $x \in \mathbb{B}^2$ .

**Observación .5.** La razón para la terminología “fibra” es que podemos pensar a dicha descomposición de  $M$  como una especie de haz fibrado, digamos  $\pi : M \rightarrow \Sigma$ ; en el cual, los círculos de la descomposición de  $M$  son las fibras.

La vecindad saturada  $\mathcal{U}$  puede ser de dos tipos:

*Orientable.* Existe un difeomorfismo entre  $\mathcal{U}$  y  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . En este caso, las fibras de  $\mathcal{U}$  tienen una parametrización de la forma  $z \mapsto (z^p, z_0 z^q)$ , con  $z \in \mathbb{S}^1$  y  $z_0 \in \mathbb{B}^2$ , la cual depende de la fibra. Además,  $p \in \mathbb{Z}_+$  y  $q \in \mathbb{Z}$  tales que  $(p, q) = 1$  sólo dependen de  $\mathcal{U}$  y de su parametrización.

*No orientable.* Admite un difeomorfismo con  $[0, 1] \times \mathbb{B}^2 / \sim$ , donde  $\sim$  identifica  $\{1\} \times \mathbb{B}^2$  con  $\{0\} \times \mathbb{B}^2$  por conjugación compleja. Las fibras corresponden a los conjuntos  $[0, 1] \times \{z_0, z_0\}$ .

**Definición .9.** Una *3-variedad de Seifert* es una variedad que admite una fibración de Seifert.

Una fibra  $f$  es *genérica* si admite una vecindad saturada orientable, con  $p = 1$  y  $q = 0$ . Es decir, la fibración es un haz localmente trivial cerca de esta fibra. De otro modo, llamamos a  $f$  *excepcional*.

Sean  $M$  una 3-variedad de Seifert y  $\mathcal{U}$  una vecindad saturada de una fibra  $f$  en  $M$ . Definimos el *espacio base*  $\Sigma_M$ , para la fibración de Seifert de  $M$  como, el espacio cociente de  $M$  obtenido por identificar cada fibra a un punto.  $\Sigma_M$  es (topológicamente) una 2-variedad. Tiene una estructura de 2-orbifold en la cual, puntos como corresponden a fibras excepcionales que preservan orientación y puntos sobre curvas de reflexión corresponden a fibras excepcionales que invierten orientación. Dependiendo de como es  $\mathcal{U}$ , tenemos las siguientes posibilidades para  $\Sigma_M$ .

- $\mathcal{U}$  es un toro sólido fibrado trivial  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . En este caso,  $\Sigma_M$  es una 2-bola y la función  $\pi : M \rightarrow \Sigma_M$  es la proyección del haz en el sentido usual.
- $\mathcal{U}$  es un toro sólido fibrado no trivial. La función  $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \rightarrow M$  es una función cubriente de orden  $p$ . La acción de  $\mathbb{Z}_p$  en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  es generada por un homeomorfismo, que es el producto de una rotación de  $2\pi/p$  en  $\mathbb{S}^1$  por una rotación de  $2\pi q/p$  en  $\mathbb{B}^2$ . Además, induce una acción de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $\mathbb{B}^2$  generada por una rotación de  $2\pi/p$ . Podemos identificar a  $\Sigma_M$ , de manera natural, con el espacio cociente  $\mathbb{B}^2/\mathbb{Z}_p$ , el cual es homeomorfo a una 2-bola centrada en  $f$ .
- $\mathcal{U}$  es una botella sólida de Klein fibrada. La función  $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathcal{U}$  es una función cubriente de orden dos. La acción de  $\mathbb{Z}_2$  en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  es generada por un homeomorfismo, que es el producto de una rotación de  $\pi$  en  $\mathbb{S}^1$  por conjugación compleja en  $\mathbb{B}^2$ . Identificamos  $\Sigma_M$  con el cociente de  $\mathbb{B}^2/\mathbb{Z}_2$ , que es homeomorfo a una semi-2-bola con  $f$  sobre su frontera. Como consecuencia,  $\Sigma_M$  es una superficie topológica con frontera, donde los puntos en la frontera corresponden a fibras que invierten orientación.

## B.2. Fibraciones de Seifert con Fibra un 2-Toro.

Existen dos maneras en las que una 3-variedad  $M$  es una 3-variedad de Seifert con 2-toros como fibras. El espacio base  $\Sigma_M$  debe ser de dimensión 1. Por lo tanto, es un círculo ó es el 1-orbifold obtenido por factorizar un círculo, utilizando la involución  $z \mapsto \bar{z}$ . Lo podemos pensar como el intervalo  $[0, 1]$ , considerado como un orbifold.

- $\Sigma_M$  es un círculo. Obtenemos fibras que son 2-toros  $\mathbb{T}^2$  de la siguiente forma. Consideremos  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  e identificamos  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  con  $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$  por medio de un automorfismo  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Pensando a  $\mathbb{T}^2$  como  $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}_2$ , concluimos que la matriz asociada a  $\phi$  es un elemento de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Ahora, si la traza de esta matriz es mayor que dos, entonces  $M$  admite una estructura geométrica modelada por *Sol*.
- $\Sigma_M$  es un 1-orbifold. Obtenemos fibras que son 2-toros  $\mathbb{T}^2$  de la siguiente forma. Hay un único haz de intervalos sobre la botella de Klein con espacio total orientado  $X$  (puede ser obtenido por  $(\mathbb{T}^2 \times [0, 1]) / \mathbb{Z}_2$ , con  $\mathbb{Z}_2$  actuando diagonalmente y de manera libre en  $\mathbb{T}^2$  y espacio cociente la botella de Klein).  $X$  es fibrado por 2-toros, los cuales son frontera de  $\mathbb{T}^2 \times [\epsilon, 1 - \epsilon]$ , con la sección cero de la botella de Klein como fibra especial. Si identificamos dos copias de  $X$  por medio de las fronteras de estos 2-toros, obtenemos  $M$ . Esta  $M$  tiene un espacio cubriente doble que fibra sobre el círculo. Además, es una fibración de Seifert por círculos si y sólo si éste es una fibración de Seifert por círculos. De lo contrario,  $M$  admite una estructura geométrica modelada por *Sol*.

### B.3. Clasificación de 3-variedades de Seifert.

Consideraremos 3-variedades de Seifert orientadas. Por lo tanto, no hay fibras que invierten orientación y como consecuencia, el espacio base es una 2-variedad sin frontera.

Sean  $M$  una 3-variedad de Seifert y  $\Sigma_M$  su espacio base. Asociamos un invariante  $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  a cada fibra  $f$  de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{U}$  una vecindad saturada de  $f$ , la cual es la fibra que corresponde a  $z_0 = 0$ . La orientación de  $\mathcal{U}$  es consistente con la orientación de  $M$  y con la orientación estandar de  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{B}^2$ . Definimos  $\alpha = p$  y  $\beta$  tal que  $\beta q \equiv 1 \pmod{p}$ . Si consideramos  $f$  como un punto de  $\Sigma_M$ , su estabilizador en  $\Sigma_M$  es  $\mathbb{Z}_\alpha$ , actuando por rotaciones. Además, podemos normalizar a  $\beta$  de tal forma que  $0 < \beta < \alpha$ .

Si  $M$  tiene  $r$  fibras excepcionales con invariantes de Seifert normalizados  $(\alpha_i, \beta_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ), definimos el *número de Euler* de  $M$  como

$$e_M = - \sum_{i=1}^r \beta_i / \alpha_i.$$

La siguiente proposición da una clasificación completa por isomorfismo de 3-variedades de Seifert, la demostración puede consultarse en [Hat].

**Proposición .4.** Sean  $M_1$  y  $M_2$  3-variedades de Seifert orientadas con  $r$  fibras excepcionales, cuyos invariantes de Seifert normalizados son  $(\alpha_i, \beta_i)$  y  $(\alpha'_i, \beta'_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ), respectivamente. Entonces, después de posibles permutaciones de los índices, las fibraciones de Seifert de  $M_1$  y  $M_2$  son difeomorfas, por un difeomorfismo que preserva orientación, si y sólo si  $\alpha_i/\beta_i \equiv \alpha'_i/\beta'_i \pmod{1}$  para cada  $i$  y  $\sum_i \alpha_i/\beta_i = \sum_i \alpha'_i/\beta'_i$ .

### C. 3-Variedades de Seifert Geométricas.

Podemos catalogar las 3-variedades de Seifert de acuerdo a la estructura geométrica que admiten. Así como en dimensión dos la estructura geométrica apropiada para una 2-variedad cerrada  $\mathcal{S}$  está determinada por su característica de Euler  $\chi(F)$ , para 3-variedades de Seifert  $M$  la estructura geométrica apropiada está determinada por la característica de Euler  $\chi$  del espacio base y el número de Euler de  $M$ , de acuerdo con la siguiente tabla.

	$\chi > 0$	$\chi = 0$	$\chi < 0$
$e = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$	$\mathbb{E}^3$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
$e \neq 0$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{R}_{Nil}^3$	$\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$

El siguiente resultado nos dice que toda 3-variedad de Seifert admite una estructura geométrica y que hay ciertas 3-variedades geométricas que son 3-variedades de Seifert. La demostración puede consultarse en [Sco83].

**Teorema .2.** [Sco83] Sea  $M$  una 3-variedad cerrada. Entonces,  $M$  admite una de las estructuras geométricas  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  ó  $\mathbb{R}_{Nil}^3$  si y sólo si  $M$  es una 3-variedad de Seifert.



# Apéndice II.

En este capítulo presentamos algunos conceptos básicos sobre 3-variedades de Brieskorn siguiendo a E. Brieskorn, J. Milnor y J. Seade (para un estudio más detallado ver [Bri66a], [Bri66b], [Mil68], [Mil75] y [Sea06]).

## A. Variedades de Pham-Brieskorn.

F. Pham, en su artículo [Pha65], estudió hipersuperficies de la forma

$$\Xi_a(t) = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = t, \ t \in \mathbb{C}\},$$

con  $a = (p, q, r)$  una colección de enteros  $p, q, r$  mayores ó iguales a dos.

E. Brieskorn en su artículo [Bri68], basándose en los resultados de F. Pham, estudió 3-variedades de la forma  $\Xi_a(0) \cap \mathbb{S}^5$ , con

$$\Xi_a(0) = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\},$$

la cual se conoce como *variedad de Pham-Brieskorn*.

**Definición .10.** La 3-variedad  $\Xi_a(0) \cap \mathbb{S}^5$  es llamada *3-variedad de Brieskorn* y la denotamos por  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

## B. 3-variedades de Brieskorn $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

Enunciamos algunos resultados importantes. Las demostraciones correspondientes pueden consultarse en [Bri68], [Mil75] y [Orl70].

De acuerdo con J. Milnor, estas 3-variedades admiten una estructura geométrica modelada por una geometría que sólo depende del signo del número racional  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1$ , de la siguiente manera.

- $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$ .

- $\mathbf{p}^{-1} + \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{1}$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\mathcal{N}il, \mathbf{Isom}(\mathcal{N}il))$ .

- $\mathbf{p}^{-1} + \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{r}^{-1} < \mathbf{1}$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$ .

### B.1. 3-variedades de Brieskorn Esféricas.

Ya conocemos los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$ , que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$ . En este contexto, vamos a utilizar la siguiente notación.

$\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$	Notación $\langle p, q, r \rangle$	$\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$
$\mathbf{I}^*$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
$\mathbf{T}^*$	$\langle 2, 3, 3 \rangle$	$\langle 2, 2, 2 \rangle$
$\mathbf{O}^*$	$\langle 2, 3, 4 \rangle$	$\langle 2, 3, 3 \rangle$
$\mathbf{D}^*_{2m}$	$\langle 2, 2, m \rangle$	$\mathbb{Z}_{2n}$

**Teorema [Mil75].** Sean  $\Gamma = \langle p, q, r \rangle < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  finito y  $\Gamma'$  su conmutador. Entonces, el espacio cociente  $\mathbb{S}^3/\Gamma'$  es difeomorfo a  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

Por lo tanto, tenemos los siguientes difeomorfismos

- $\mathbb{S}^3/\mathbf{I}^* \cong \mathbf{M}(2, 3, 5)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbf{T}^* \cong \mathbf{M}(2, 3, 4)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbf{D}^*_6 \cong \mathbf{M}(2, 3, 3)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n \cong \mathbf{M}(2, 2, n)$ .

Las variedades de Brieskorn correpondientes a  $\mathbb{S}^3/\mathbf{O}^*$  y  $\mathbb{S}^3/\langle 2, 2, n \rangle$  con  $n > 2$ , tienen una descripción sencilla como *hipersuperficies complejas* de la siguiente forma (ver [Mil68]),

- $\mathbb{S}^3/\mathbf{O}^*$  está definida por la ecuación  $z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 = 0$ ;
- $\mathbb{S}^3/\langle 2, 2, n \rangle$  está definida por la ecuación  $z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{n+1} = 0$ .

**Observaciones.**

- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 2, n)$  es difeomorfa al espacio lente  $L_{p,1}$ .
- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 3, 5)$  es difeomorfa al espacio icosaedro  $\mathbb{S}^3/(\mathbf{Id} \times \mathbf{I}^*)$ . Por lo tanto, es el espacio dodecaedro de Poincaré.
- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 3, 4)$  es difeomorfa al espacio tetraedro  $\mathbb{S}^3/(\mathbf{Id} \times \mathbf{T}^*)$ .

**B.2. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .**

Comenzaremos enunciando algunos resultados.

**Lema .2.** [Mil75] *Consideremos la terna  $(p, q, r)$ , de tal modo que el mínimo común múltiplo de las parejas  $(p, q)$ ,  $(p, r)$  y  $(q, r)$  es el mismo. Entonces, la 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$  es un haz circular sobre una 2-variedad orientable.*

Supongamos que la hipótesis del Lema .2 se satisface y sea  $m$  el mínimo común múltiplo de la terna  $(p, q, r)$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema.** [Mil75] *La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$  es un haz circular sobre una superficie de Riemann  $\mathcal{S}$  con característica de Euler igual a  $[pqr(p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1)]/m$ .*

Las ternas  $(p, q, r)$  tales que  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ , corresponden a  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  y  $(3, 3, 3)$ . Éstas satisfacen la hipótesis del Lema .2 y por consiguiente se cumple el teorema anterior. El valor absoluto de  $-pqr/m^2$  es el máximo común divisor de la terna  $(p, q, r)$ ; que corresponde a 1, 2 y 3 para  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  y  $(3, 3, 3)$ , respectivamente.

Por lo tanto, tenemos los siguientes difeomorfismos,

- $\mathbf{M}(2, 3, 6) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$ ;
- $\mathbf{M}(2, 4, 4) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_2$ ;
- $\mathbf{M}(3, 3, 3) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_3$ ,

con  $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$  y  $\mathcal{N}_i$  ( $i = 2, 3$ ) subgrupos discretos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ , que actúan libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .

**Observaciones.** En términos de la notación utilizada en el capítulo III, pág. 119 tenemos que

- para  $\mathbf{M}(3, 3, 3)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- para  $\mathbf{M}(2, 4, 4)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- para  $\mathbf{M}(2, 3, 6)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$  el grupo entero de Heisenberg (ver pág. 121).

### B.3. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Recordemos que los subgrupos discretos de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  son llamados grupos Fuchsianos. Sean  $\Gamma$  un grupo Fuchsiano,  $\widetilde{\Gamma}$  su levantamiento a  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  y  $\widetilde{\Gamma}'$  el conmutador de  $\widetilde{\Gamma}$ . Consideremos la terna  $(p, q, r)$ , tal que  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema [Mil75].** *El espacio cociente de la forma  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})/\widetilde{\Gamma}'$  es difeomorfo a la 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .*

# Índice de Notación.

## Variedades.

$\mathbb{R}^n$	Espacio real de dimensión $n$ .
$\mathbb{C}^n$	Espacio complejo de dimensión $n$ .
$M$	$n$ -variedad diferenciable.
$\partial M$	Frontera de $M$ .
$\widetilde{M}$	Espacio cubriente universal de $M$ .
$(\mathcal{U}, \phi)$	Sistema de coordenadas locales.
$\mathcal{A}$	Atlas.
$\phi_{\alpha\beta}$	Transición de coordenadas.
$\mathfrak{D}$	Atlas maximal.
$\mathcal{G}$	Seudogrupo.
$\xi(x)$	Conjunto de gérmenes diferenciables en una vecindad de $x$ .
$[\phi_x]$	Gérmén invertible.
$Df$	Matriz jacobiana de $f$ .
$v_x$	Vector tangente en $x$ .
$\mathbf{T}_x M$	Espacio tangente a $M$ en $x \in M$ .
$df_x$	Diferencial de $f$ en $x$ .
$v_x(f)$	Derivada direccional de $f$ en dirección $v_x$ .
$\mathbf{T}M$	Haz tangente de $M$ .
$\widetilde{\mathfrak{D}}$	Estructura diferenciable de $\mathbf{T}M$ .
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	Campo vectorial.
$C^\infty(M)$	Conjunto de funciones diferenciables de $M$ .
$\mathfrak{X}(M)$	Conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en $M$ .
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$	Corchete de campos vectoriales.
$Gr_k(n)$	Grassmanniano.
$\mathcal{P}$	Campo de $k$ planos.
$\mathcal{L}$	Campo de líneas.
$\mathcal{B}$	Base.
$G_0$	Componente identidad del grupo $G$ .

$L_g$	Traslación izquierda.
$R_g$	Traslación derecha.
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie de $G$ .
$\mu_r$	Medida de Haar derecha.
<b>Ad</b> , <b>ad</b>	Representaciones adjuntas.
$x \cdot y$	Producto interno.
$m$	Métrica riemanniana.
$(M, m)$	$n$ -variedad riemanniana.
$(M, B, p, F)$	$G$ -haz.
$\nabla_v \mathcal{X}$	Derivada covariante.
$\mathcal{H}$	Conexión.
$(M, d)$	Espacio métrico.
$\mathcal{F}$	Foliación.
$\mathcal{C}$	Estructura de contacto.
$\mathcal{S}$	2-variedad.
<b>Tr</b> $A$	Traza de $A$ .
<b>det</b> ( $A$ )	Determinante de $A$ .

### Grupos y subgrupos.

$\mathbb{Z}$	Números enteros.
$\mathbb{Q}$	Números racionales.
<b>GL</b> ( $n, \mathbb{R}$ )	Grupo general lineal de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>Aff</b> ( $n$ )	Grupo de funciones afines de $\mathbb{R}^n$ .
<b>SL</b> ( $n, \mathbb{R}$ )	Grupo general especial de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>O</b> ( $n$ )	Grupo ortogonal de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>SO</b> ( $n$ )	Grupo ortogonal especial de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>U</b> ( $2, \mathbb{C}$ )	Grupo unitario.
<b>PSL</b> ( $2, \mathbb{R}$ )	Grupo proyectivo lineal de dimensión dos con entradas reales.
<b>Isom</b> ( $M$ )	Grupo de isometrías de $M$ .
<b>Est</b> ( $M$ ) $_x$	Grupo estabilizador de $x \in M$ .
<b>T</b> , <b>O</b> , <b>I</b>	Grupos poliédricos.
$\mathcal{C}$	Grupo cristalográfico.
$T_\Gamma$	Grupo de traslaciones puras.
$\mathbb{R}^3$	Grupo de traslaciones de $\mathbb{E}^3$ .
$\Psi$	Holonomía.
<b>T*</b> , <b>O*</b> , <b>I*</b>	Grupos poliédricos binarios.
<b>H</b>	Grupo cuaterniónico.
<b>H</b> $_{\mathbb{R}}$	Grupo de cuaterniones reales.
<b>H</b> $_{\text{Im}}$	Grupo de cuaterniones imaginarios puros.

$\text{Möb}_M$	Grupo de transformaciones de Möbius de $M$ .
$\mathcal{N}$	Grupo de Heisenberg.
$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$	Grupo entero de Heisenberg.
$\pi_i(M)$	$i$ -ésimo grupo de homotopía de $M$ .

### Modelos Geométricos.

$(M, \mathbf{Isom}(M))$	Modelo geométrico.
$ds_M^2$	Métrica riemanniana en $M$ .
$M/\Gamma$	$n$ -variedad geométrica
$\hat{\mathbb{E}}^n$	$\mathbb{E}^n \cup \{\infty\}$
$\mathbb{E}^n$	Espacio euclideo de dimensión $n$ .
$\mathbb{S}^n$	$n$ -esfera de radio uno, centrada en el origen.
$\mathbb{T}^n$	$n$ -toro.
$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$	Espacio proyectivo real de dimensión $n$ .
$\mathbf{Id}$	Identidad.
$\mathbb{H}^n, \mathcal{H}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{S}_N^n$	$n$ -espacio hiperbólico.
$\mathbb{C}$	Círculo máximo.
$m_c$	Métrica cordal.
$G(f_1, f_2)$	Producto fibrado de $f_1$ y $f_2$ .
$L_{p,q}$	Espacio lente.
$q$	Cuaternión.
$\mathbf{P}_{n,m}$	Espacio prisma.
$[u, v, x, y]$	Razón cruzada de $u, v, x$ y $y$ .
$\Sigma$	$k$ -esfera generalizada.
$\tilde{\phi}$	Extensión de Poincaré.
$d_{\mathbb{B}^3}$	Distancia hiperbólica.
$(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \sim$	Suspensión de $\mathbb{T}^2$ por $\sim$ .

### Descomposición de Variedades.

$\mathcal{N}(\mathcal{S})$	Vecindad tubular de $\mathcal{S}$
$M \mathcal{S}$	$M - \mathcal{N}(\mathcal{S})$
$M_1\sharp M_2$	Suma conexa de $M_1$ y $M_2$
$l$	Lazo.
$\mathbb{S}$	2-esfera.

**Variedades de Seifert.**

$\mathcal{O}$	$n$ -orbifold
$\mathcal{S}_g$	2-variedad de género $g$
$\chi(M)$	Característica de Euler de $M$
$\Sigma_M$	Espacio base
$e_M$	Número de euler
$\sigma_M$	Espacio base.

**Variedades de Brieskorn.**

$\Xi_a(0)$	Variedad de Pham-Brieskorn
$\mathbf{M}(p, q, r)$	3-variedad de Brieskorn



# Índice de Figuras.

## Temas de Geometría.

Figura I.1	página 3	
Figura I.2	página 6	
Figura I.3	página 9	<a href="http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7">http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7</a>
Figura I.4	página 11	[Bur85]
Figura I.7	página 23	
Figura I.8	página 24	
Figura I.9	página 31	
Figura I.10	página 31	
Figura I.11	página 32	
Figura I.12	página 33	

## Modelos Geométricos.

Figura II.1	página 40	
-------------	-----------	--

## Geometría Euclidiana.

Figura III.1	página 44	
Figura III.2	página 45	
Figura III.3	página 45	
Figura III.5	página 52	
Figura III.4	página 51	
Figura III.6	página 53	
Figura III.7	página 59	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.8	página 59	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.9	página 60	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.10	página 60	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.11	página 61	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.12	página 61	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.13	página 62	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>

**Geometría Esférica.**

Figura III.14	página 63	
Figura III.15	página 63	
Figura III.16	página 65	
Figura III.17	página 79	
Figura III.18	página 79	
Figura III.19	página 80	
Figura III.20	página 80	
Figura III.21	página 81	
Figura III.22	página 81	
Figura III.23	página 82	
Figura III.24	página 82	
Figura III.25	página 83	
Figura III.26	página 83	[Wee02]
Figura III.27	página 84	<a href="http://luth2.obspm.fr/Compress">http://luth2.obspm.fr/Compress</a> , <a href="http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi">http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi</a>

**Geometría Hiperbólica.**

Figura III.28	página 90	
Figura III.29	página 93	
Figura III.30	página 93	
Figura III.31	página 94	
Figura III.32	página 97	
Figura III.33	página 98	
Figura III.34	página 98	
Figura III.35	página 98	
Figura III.36	página 99	
Figura III.37	página 100	[Kru86]
Figura III.38	página 100	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>

**Geometría  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

Figura III.39	página 103	[Wee02]
Figura III.40	página 105	
Figura III.41	página 106	
Figura III.42	página 106	

**Geometría  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

- Figura III.43 página 108 [Wee02]  
 Figura III.44 página 109  
 Figura III.45 página 110 [Wee02]

**Geometría  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ .**

- Figura III.46 página 116 [Thu82]

**Geometría  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .**

- Figura III.47 página 117  
 Figura III.48 página 122 [Thu97]

**Geometría *Sol*.**

- Figura III.49 página 127

**Geometrización de 3-variedades.**

- Figura IV.1 página 129 [www.microsiervos.com](http://www.microsiervos.com)

**Descomposición de 3-variedades.**

- Figura IV.2 página 137  
 Figura IV.3 página 138  
 Figura IV.4 página 141  
 Figura IV.5 página 142  
 Figura IV.6 página 143  
 Figura IV.7 página 144  
 Figura IV.8 página 147  
 Figura IV.9 página 147

**Apéndice I.**

Figura 10 página 152

# Referencias

- [Abi81] William Abikoff. The uniformization theorem. *American Mathematical Monthly*, 88(8):574–592, 1981.
- [Ada04] Colin C. Adams. *The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [Ale23] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 9:93–95, 1923.
- [Arv03] Andreas Arvanitoyeorgos. *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*. Number 22 in Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2003.
- [Aus60] L. Auslander. Bieberbach’s theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. *Ann. of Math.*, 71(2):579–590, 1860.
- [Aus61] L. Auslander. Bieberbach’s theorem on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. ii. *Amer. J. Math.*, 83:276–280, 1861.
- [BBB06] L. Bessières, G. Besson, and M. Boileau. La preuve de la conjecture de Poincaré d’après G. Perelman. *Images des Mathématiques*, pages 18–27, 2006.
- [BC70] F. Brickell and R. S. Clark. *Differentiable Manifolds. An Introduction*. Van Nostrand Reinhold Company LTD, 1970.
- [BD92] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations*. John Wiley, 1992.
- [Bea83] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*, volume 91 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 1983.

- [Bel68] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Opere Mat.*, 1:374–405, 1868.
- [Bes05] L. Bessières. Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman. *Gazette des Mathématiciens*, 106:7–35, 2005.
- [Bes06] G. Besson. Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci, d’après G. Perelman. Séminaire Bourbaki. *Astérisque*, 2004/2005(37):309–347, 2006.
- [Bie11] Bieberbach. über die bewegungsgruppen der euklidischen raume i. *Mathematische Annalen*, 70:297–336, 1911.
- [Bie12] Bieberbach. über die bewegungsgruppen der euklidischen raume ii. *Mathematische Annalen*, 72:400–412, 1912.
- [BJ82] Th. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [BJ01] M. Boileau and Porti J. *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, volume 272. Astérisque, 2001.
- [BLP05] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math.*, 162(1):195–290, 2005.
- [BMP03] Michael Boileau, Sylvian Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et synthèses*. Société Mathématique de France, 2003.
- [Bon02] Francis Bonahon. Geometric structures on 3-manifolds. *Handbook of Geometric Topology*, pages 93–164, 2002.
- [BP92] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitex. Springer-Verlag, 1992.
- [Bri66a] E. Brieskorn. Beispiele zur differentialtopologie von singularitäten. *Invent. Math.*, 2:1–14, 1966.
- [Bri66b] E. Brieskorn. Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 55:1395–1397, 1966.
- [Bri68] E. Brieskorn. Rationale singularitäten komplexer flächen. *Invent. Math.*, 4:336–358, 1968.

- [Bur85] William L. Burker. *Applied Differential Geometry*. Cambridge University, 1985.
- [Ca'] Santiago Cañez. Gauss-bonnet and uniformization. <http://math.berkeley.edu/~scanecz/math.php>.
- [CDFHT01] John H. Conway, Olaf Delgado Friedrichs, Daniel H. Huson, and William P. Thurston. On three-dimensional space groups. *Contributions to Algebra and Geometry*, 42(2):475–507, 2001.
- [CEG87] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, and P. Green. Notes on notes of Thurston. In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space*, number 111 in London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 3–92. Cambridge Univ. Press, 1987. (Coventry/Durham, 1984).
- [Cha86] Leonard S. Charlap. *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, 1986.
- [CHK00] D. Cooper, C. Hodgson, and S. Kerckhoff. Three dimensional orbifolds and cone manifolds. *Mathematical Society of Japan Memoirs*, 5, 2000.
- [CM93] José Luis Cisneros Molina. Ecuaciones de Yang-Mills y Variedades Diferenciables de Dimensión Cuatro. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Septiembre 1993.
- [CN79] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheacoes*. Projeto Euclides. Impa, 1979.
- [CP99] M. Crampin and F.A.E Pirani. *Applicable Differential Geometry*, volume 59 of *Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1999.
- [CR] J. H. Conway and J. P. Rossetti. Describing the platycosms. e-print arXiv:math.DG/0311476, 26 Nov 2003.
- [Cur84] Morton L. Curtis. *Matrix Groups*. Universitext. Springer, 1984. Second Edition.
- [DC88] Manfredo P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Number 59 in Projeto Euclides. Impa, 1988.

- [DFN85] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry-Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. Number 104 in Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, 1985.
- [DS05] Antonio J. Di Scala. Bracket and curvature. *Rev. Colombiana Mat.*, 39(2):113–131, 2005.
- [Dyc84] W. Dyck. On the “analysis situs” of 3-dimensional spaces. *Report of the Brit. Assoc. Adv. Sci.*, page 648, 1884.
- [Etn03] John B. Etnyre. Introductory lectures on contact geometry. *Proc. Sympos. Pure Math, Amer. Math. Soc.*, 71:81–107, 2003.
- [Euc56] Euclides. *The thirteen books of euclids elements, tr. from the text of heiberg with in introd and commentary by Sir Thomas L. Heath*. Dover, 1956. an unabridged and unaltered republications of the second edition published in 1926.
- [Fro11] G. Frobenius. über die unzerlegbaren diskreten bewegungsgruppen. *Sitz. Ber. der Preuss. Akad. Wissen*, page 654, 1911.
- [Gei06] H. Geiges. Contact geometry. *Handbook of differential geometry*, 2:315–382, 2006.
- [GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer.
- [Ham82] R. S. Hamilton. Three manifolds with positive Ricci curvature. *Jour. Diff. Geom.*, 17:255–306, 1982.
- [Ham86] R. S. Hamilton. Four manifolds with positive curvature operator. *Jour. Diff. Geom.*, 24:153–179, 1986.
- [Ham88] R. S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. *Contemp. Math.*, 71:237–261, 1988.
- [Ham93a] R. S. Hamilton. The Harnack estimate for the Ricci flow. *Jour. Diff. Geom.*, 37:225–243, 1993.
- [Ham93b] R. S. Hamilton. A matrix Harnack estimate for the heat equation. *Commun. Anal, Geom.*, 1:113–126, 1993.
- [Ham93c] R. S. Hamilton. Monotonicity formulas for parabolic flows on manifolds. *Commun. Anal, Geom.*, 1:127–137, 1993.



- [Ham95a] R. S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. Jour. Math.*, 117:545–572, 1995.
- [Ham95b] R. S. Hamilton. Hamilton formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in Diff. Geom.*, 2:7–136, 1995.
- [Ham97] R. S. Hamilton. Four manifolds with positive isotropic curvature. *Commun. Anal, Geom.*, 5:1–92, 1997.
- [Ham99] R. S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Commun. Anal, Geom.*, 7:695–729, 1999.
- [Har] Kevin Hartshort. The geometry of  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . <http://math.berkeley.edu/~Ealanw/240termpapers.html>.
- [Hat] A. Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [Hem76] J. Hempel. *3-Manifolds*. Number 86 in Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 1976.
- [Hop26] H. Hopf. Zum Clifford-Kleinschen raumproblem. *Math. Ann.*, 95:313–319, 1925-26.
- [HR31] H. Hopf and W. Rinow. über den begriff der vollständigen differentialgeometrischen flächen. *Comm. Math. Helv.*, 3:209–225, 1931.
- [Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with boundaries*. Number 761 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.
- [Jos99] J. Jost. *Compac Riemann Surfaces*. Universitext. Springer, 1999.
- [JS79] William H. Jaco and Peter B. Shalen. *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*, volume 21. Mem. Amer. Math. Soc., 1979.
- [Kap] M. Kapovich. Geometrization conjecture and the Ricci flow. [www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ricci.ps](http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ricci.ps).
- [Kap01] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups: Lectures on Thurston's Hyperbolization*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2001.

- [Kir74] A. Kirillov. *Éléments de la Théorie des représentations. Traduction française.* Éditions Mir, 1974. Traduct Dui Russe par A. Sossinsky.
- [KL] Bruce Kleiner and John. Lott. Notes on Perelman's papers. e-print arXiv:math.DG/0605667v2, 21 Feb 2007.
- [Kle93] F. Klein. Vergleichende betrachtungen ber neuere geometrische forschungen. *Math. Ann.*, 43:63–100, 1893. Also: *Gesammelte Abh.* Vol. 1, Springer, 1921, pp. 460 - 497.
- [Kne29] H. Kneser. Geschossene flachen in dreedimensionale mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 38:248–260, 1929.
- [Koe07] P. Koebe. über die uniformisierung beliebiger analytischen kurven. *Göttinger Nachr.*, pages 191–210, 1907.
- [Kru86] Samuil L. Krushkal. *Kleinian groups and uniformization in examples and problems.* American Mathematical Society, 1986. Tr. from the russian by H. H. Mcfaden.
- [LH86] Vagn Lundsgaard Hansen. *Collected mathematical papers of Jacob Nielsen.* Birkhäuser, 1986. vol. 1, 1913-1932, xix+458 pp., sFr. 198, vol. 2, 1932-1955, xi+440 pp., sFr. 192.
- [Lim98] Elon Lages Lima. *Grupo Fundamental e Espacos de Recobrimiento.* projeto Euclides. Impa, CNPq, 1998.
- [Lut71] R. Lutz. Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois. *Thèse, Strasbourg*, 1971.
- [Mar71] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium 2*, 209:142–163, 1971.
- [Mas67] Massey. *Algebraic Topology: An Introduction.* Number 56 in GTM. Springer-Verlag, 1967.
- [McM92] C. T. McMullen. Riemann surfaces and the geometrization of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27(2):207–216, 1992.
- [MH99] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis.* New York: W. H. Freeman, 1999.

- [Mil62] J. Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, 84:1–7, 1962.
- [Mil68] J. Milnor. Singular points of complex hypersurfaces. *Annals of Mathematics Studies*, 61, 1968.
- [Mil69] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1969.
- [Mil75] J. Milnor. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $m(p, q, r)$ . Knots, groups and 3-manifolds, papers dedicated to the memory of R. H. Fox. *Annals of Mathematics Studies*, 84:175–225, 1975.
- [Mil76] J. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, 21(3):293–329, 1976.
- [Mon03] J. M. Montesinos. *Calidoscopios y 3-Variedades*. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [Mor84] J. W. Morgan. On Thurston’s uniformization theorem for three-dimensional manifolds. The Smith conjecture. *Pure Appl. Math.*, 112:37–125, 1984.
- [Mos71] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. *Pacific J. Math.*, 38:737–745, 1971.
- [MS38] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 39(4):851–862, 1938.
- [MT98] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford University Press, 1998.
- [Neu99] W. D. Neumann. Notes on geometry and 3-manifolds. *Low Dimensional Topology*, 8:191–267, 1999.
- [Now34] W. Nowacki. Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen raumformen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7:81–93, 1934.
- [Orl70] P. Orlik. Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups. *Topology*, 9:267–273, 1970.
- [Orl72] P. Orlik. *Seifert Manifolds*. Number 291 in Lectures Notes in Mathematics. Springer, 1972.

- [Ota96] J. P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, volume 235. Astérisque, 1996.
- [Ota98] J. P. Otal. Thurston's hyperbolization of Haken manifolds. *Surveys in differential geometry*, 3:77–194, 1998.
- [Pera] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. e-print arXiv:math/0211159v1 [math.DG], 11 Nov 2002.
- [Perb] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. e-print arXiv:math/0307245v1 [math.DG], 17 Jul 2003.
- [Perc] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. e-print arXiv:math/0303109v1 [math.DG], 10 Mar 2003.
- [Pha65] F. Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. math. France*, 93:333–367, 1965.
- [Poi95] H. Poincaré. Analysis situs. *J. École Polytech. Paris*, 1(2):1–121, 1895.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Number 149. Springer-Verlag, 1994.
- [Rie73] B. Riemann. über die hypothesen, welche der geometrie zugrunde liegen. *Das Kontinuum und andere Monographien*, reprint 1973. It was published in 1867.
- [Rin61] W. Rinow. *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, volume 105. Springer-Verlag, 1961.
- [Rol76] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Perish, Inc., 1976.
- [Sas58] Shigeo Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of riemann manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 2(10):338–354, 1958.
- [Sat56] Ichiro Satake. On a generalization of the notion of manifolds. *Proc. of the Nat. Acad. of Sc. U.S.A.*, 42:359–363, 1956.
- [Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15:401–487, 1983.

- [Sea06] José Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, volume 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2006.
- [Sei31] H. Seifert. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener räume. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83:26–66, 1931.
- [Sei32] H. Seifert. Topologie dreidimensionaler gefaserner räume. *Acta Math.*, 60:147–238, 1932.
- [Sin60] I. M. Singer. Infinitesimally homogeneous spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:685–697, 1960.
- [Spi79] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I*. Perish, 1979.
- [ST30] H. Seifert and William Threlfall. Topologische untersuchung der diskontinuitätsbereiche des dreidimensionalen sphärischen raumes i. *Mathematische Annalen*, 104:1–70, 1930. Continuado en **107**, (1932), pp. 543-586.
- [ST80] H. Seifert and William Threlfall. *A Textbook of Topology*. Number 89 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1980.
- [Ste93] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Number 72 in GTM. Springer, 1993.
- [SW33] H. Seifert and C. Weber. Die beiden dodekaederräume. *Mathematische Zeitschrift*, 37(1):237–253, 1933.
- [Thua] W. P. Thurston. Hyperbolic structure on 3-manifolds II:surface groups and 3-manifolds which fibre over the circle. e-print arXiv:math.GT/9801045 v1, 10 Jan 1998.
- [Thub] W. P. Thurston. Three-manifolds with simmetry. preprint 1982.
- [Thu79] W. P. Thurston. *Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lectures Notes. Princeton University, 1979.
- [Thu82] W. P. Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 6(3):357–381, 1982.

- [Thu86] W. P. Thurston. Hyperbolic structure on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds. *Annals of Math*, 124:203–246, 1986.
- [Thu88] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 19(2):417–431, 1988.
- [Thu97] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1997. (Edited by Silvio Levy).
- [Tie08] H. Tietze. über die topologischen invarianten mehrdimensionaler mannigfaltigkeiten. *Monatschr. Math. Phys.*, 19(1):1–118, 1908.
- [Tol74] Jeffrey L. Tolleson. The compact 3-manifolds covered by  $S^2 \times R^1$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(3):461–462, 1974.
- [TW75] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper. On the existence of contact forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1):345–347, 1975.
- [Ver82] Alberto Verjovsky. *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*. Cinvestav, 1982.
- [War83] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Wee02] Jeffrey R. Weeks. *The Shape of Space*. New York: M. Dekker, 2002.
- [Wol62] Joseph A. Wolf. Discrete groups, symmetric spaces, and global of prime order. *Amer. J. of Math.*, 84:527, 1962.
- [Wol84] Joseph A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. Publish of Perish, Inc., 1984.
- [Zas48] H. Zassenhaus. über einen algorithmus, zur bestimmung der raumgruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 21:117–141, 1948.

# Apéndice I.

Presentamos una breve introducción a las *variedades de Seifert*, las cuales fueron definidas y clasificadas por H. Seifert en su artículo [Sei32]. La traducción de este artículo al inglés, la cual puede consultarse en [ST80], fue llevada a cabo por W. Heil. Algunas referencias que tratan sobre estas variedades son [Hat], [Neu99], [Orl72] y [Sco83]. La primera sección de este apéndice consta de definiciones básicas para la teoría de orbifolds, para un estudio mas detallado puede consultarse [BMP03]. En la segunda sección describimos las fibraciones de Seifert.

## A. Orbifolds.

La primera definición formal de orbifolds, bajo el nombre de *V-variedades*, fue dada en 1956 por I. Satake (ver [Sat56]). En la década de los años 70, W. P. Thurston [Thu79], quién desconocía el trabajo de I. Satake, definió estos objetos como espacios topológicos metrizable, localmente homeomorfos a espacios cociente de  $\mathbb{R}^n$  por acciones de grupos finitos y los nombró **orbifolds**.<sup>2</sup>

Sean  $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{O}$  y  $\tilde{\mathcal{U}}_i \subset \mathbb{E}^{n-1} \times [0, \infty]$  abiertos;  $\phi_i : \tilde{\mathcal{U}}_i \rightarrow \mathcal{U}_i$  una función diferenciable, llamada *carta* y  $\Gamma_i$  un grupo finito de difeomorfismos de  $\tilde{\mathcal{U}}_i$ .

**Definición .7.** Un *n-orbifold diferenciable*  $\mathcal{O}$  es un espacio topológico de dimensión  $n$ , metrizable, dotado con una colección  $\left\{ (\mathcal{U}_i, \tilde{\mathcal{U}}_i, \phi_i, \Gamma_i) \right\}_i$  llamada *atlas* que satisface las siguientes condiciones:

- $\bigcup_i \mathcal{U}_i$  es una cubierta abierta de  $\mathcal{O}$ ;
- Cada  $\phi_i$  induce un difeomorfismo entre  $\tilde{\mathcal{U}}_i/\Gamma_i$  y  $\mathcal{U}_i$ ;

---

<sup>2</sup>Utilizamos la palabra *orbifold* ya que, aún no hay una convención sobre su traducción al español.

- Las cartas son compatibles en el siguiente sentido. Para cada  $x \in \tilde{\mathcal{U}}_i$  y  $y \in \tilde{\mathcal{U}}_j$  tal que  $\phi_i(x) = \phi_j(y)$ , hay un difeomorfismo  $\psi$  entre vecindades  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  de  $x$  y  $y$  respectivamente, con

$$\phi_j(\psi(z)) = \phi_i(z), \text{ para toda } z \in \mathcal{V}.$$

Por conveniencia asumiremos que el atlas es maximal. De aquí en adelante por orbifold nos referiremos a un  $n$ -orbifold diferenciable.

**Observación .4.** Algunas veces será necesario distinguir entre orbifold  $\mathcal{O}$  y el espacio topológico  $|\mathcal{O}|$  obtenido por olvidar la estructura de orbifold.

Sean  $x \in \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  y  $\phi : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$  una carta. Denotamos por  $\Gamma_x$  al *estabilizador* de cualquier punto de  $\phi^{-1}(x)$  bajo la acción de  $\Gamma$  y es llamado *grupo local* de  $\mathcal{O}$  en  $x$ . Si  $\Gamma_x$  es trivial, decimos que  $x$  es *regular*; de lo contrario,  $x$  es *singular*. El conjunto de puntos singulares de  $\mathcal{O}$  es llamado *lugar singular*.

Nos restringiremos a 2-orbifolds orientables. Cualquier subgrupo finito de  $\mathbf{SO}(2)$  es un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$ , de orden  $p$ , generado por una rotación de ángulo  $2\pi/p$ . Por lo tanto, el lugar singular es discreto. Puntos singulares de este tipo son llamados *puntos cono*.

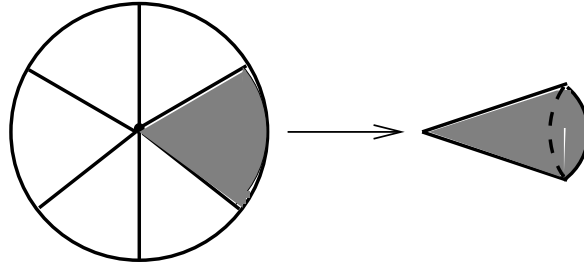


Figura 10: Punto cono.

### Característica de Euler.

Sea  $\mathcal{S}_g$  una 2-variedad de género  $g$  compacta y orientable. Supongamos que tiene un estructura geométrica con curvatura constante  $k$ . Subdividimos  $\mathcal{S}_g$  en pequeños triángulos geodésicos  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, T$ ).

Sean  $V$  el número de vértices de la triangulación y  $E$  el número de ejes. La característica de Euler de  $\mathcal{S}_g$  está dada por

$$\chi(\mathcal{S}_g) = T - E + V = 2 - 2g,$$



y tenemos la siguiente definición.

**Definición .8.** Sea  $\mathcal{O}$  un 2-orbifold con  $s$  puntos cono, cuyos ángulos de rotación son  $2\pi/p_1, \dots, 2\pi/p_s$ , respectivamente y  $|\mathcal{O}|$  es una 2-variedad de género  $g$ . La *característica de Euler* de  $\mathcal{O}$  es

$$\chi(\mathcal{O}) = 2 - 2g - \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

## B. 3-Variedades de Seifert.

Comenzaremos con fibraciones de Seifert “clásicas”, es decir, fibraciones cuyas fibras son círculos y posiblemente alguna fibra excepcional.

### B.1. Fibraciones de Seifert con Fibra un Círculo.

Una *fibración de Seifert* sobre una 3-variedad  $M$  orientable y compacta es una descomposición de  $M$  en círculos, llamados fibras, tal que se cumple la siguiente propiedad: cada fibra tiene una vecindad saturada  $\mathcal{U}$  (i.e.  $\mathcal{U}$  es una unión de fibras). Esta vecindad es difeomorfa al cociente de un 3-toro *fibrado*  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  por un grupo finito que actúa libremente en él. La acción respeta la estructura producto de tal forma que, las fibras de la fibración corresponden a  $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ , con  $x \in \mathbb{B}^2$ .

**Observación .5.** La razón para la terminología “fibra” es que podemos pensar a dicha descomposición de  $M$  como una especie de haz fibrado, digamos  $\pi : M \rightarrow \Sigma$ ; en el cual, los círculos de la descomposición de  $M$  son las fibras.

La vecindad saturada  $\mathcal{U}$  puede ser de dos tipos:

*Orientable.* Existe un difeomorfismo entre  $\mathcal{U}$  y  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . En este caso, las fibras de  $\mathcal{U}$  tienen una parametrización de la forma  $z \mapsto (z^p, z_0 z^q)$ , con  $z \in \mathbb{S}^1$  y  $z_0 \in \mathbb{B}^2$ , la cual depende de la fibra. Además,  $p \in \mathbb{Z}_+$  y  $q \in \mathbb{Z}$  tales que  $(p, q) = 1$  sólo dependen de  $\mathcal{U}$  y de su parametrización.

*No orientable.* Admite un difeomorfismo con  $[0, 1] \times \mathbb{B}^2 / \sim$ , donde  $\sim$  identifica  $\{1\} \times \mathbb{B}^2$  con  $\{0\} \times \mathbb{B}^2$  por conjugación compleja. Las fibras corresponden a los conjuntos  $[0, 1] \times \{z_0, z_0\}$ .

**Definición .9.** Una *3-variedad de Seifert* es una variedad que admite una fibración de Seifert.

Una fibra  $f$  es *genérica* si admite una vecindad saturada orientable, con  $p = 1$  y  $q = 0$ . Es decir, la fibración es un haz localmente trivial cerca de esta fibra. De otro modo, llamamos a  $f$  *excepcional*.

Sean  $M$  una 3-variedad de Seifert y  $\mathcal{U}$  una vecindad saturada de una fibra  $f$  en  $M$ . Definimos el *espacio base*  $\Sigma_M$ , para la fibración de Seifert de  $M$  como, el espacio cociente de  $M$  obtenido por identificar cada fibra a un punto.  $\Sigma_M$  es (topológicamente) una 2-variedad. Tiene una estructura de 2-orbifold en la cual, puntos como corresponden a fibras excepcionales que preservan orientación y puntos sobre curvas de reflexión corresponden a fibras excepcionales que invierten orientación. Dependiendo de como es  $\mathcal{U}$ , tenemos las siguientes posibilidades para  $\Sigma_M$ .

- $\mathcal{U}$  es un toro sólido fibrado trivial  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ . En este caso,  $\Sigma_M$  es una 2-bola y la función  $\pi : M \rightarrow \Sigma_M$  es la proyección del haz en el sentido usual.
- $\mathcal{U}$  es un toro sólido fibrado no trivial. La función  $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \rightarrow M$  es una función cubriente de orden  $p$ . La acción de  $\mathbb{Z}_p$  en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  es generada por un homeomorfismo, que es el producto de una rotación de  $2\pi/p$  en  $\mathbb{S}^1$  por una rotación de  $2\pi q/p$  en  $\mathbb{B}^2$ . Además, induce una acción de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $\mathbb{B}^2$  generada por una rotación de  $2\pi/p$ . Podemos identificar a  $\Sigma_M$ , de manera natural, con el espacio cociente  $\mathbb{B}^2/\mathbb{Z}_p$ , el cual es homeomorfo a una 2-bola centrada en  $f$ .
- $\mathcal{U}$  es una botella sólida de Klein fibrada. La función  $g : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathcal{U}$  es una función cubriente de orden dos. La acción de  $\mathbb{Z}_2$  en  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$  es generada por un homeomorfismo, que es el producto de una rotación de  $\pi$  en  $\mathbb{S}^1$  por conjugación compleja en  $\mathbb{B}^2$ . Identificamos  $\Sigma_M$  con el cociente de  $\mathbb{B}^2/\mathbb{Z}_2$ , que es homeomorfo a una semi-2-bola con  $f$  sobre su frontera. Como consecuencia,  $\Sigma_M$  es una superficie topológica con frontera, donde los puntos en la frontera corresponden a fibras que invierten orientación.

## B.2. Fibraciones de Seifert con Fibra un 2-Toro.

Existen dos maneras en las que una 3-variedad  $M$  es una 3-variedad de Seifert con 2-toros como fibras. El espacio base  $\Sigma_M$  debe ser de dimensión 1. Por lo tanto, es un círculo ó es el 1-orbifold obtenido por factorizar un círculo, utilizando la involución  $z \mapsto \bar{z}$ . Lo podemos pensar como el intervalo  $[0, 1]$ , considerado como un orbifold.

- $\Sigma_M$  es un círculo. Obtenemos fibras que son 2-toros  $\mathbb{T}^2$  de la siguiente forma. Consideremos  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$  e identificamos  $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$  con  $\mathbb{T}^2 \times \{1\}$  por medio de un automorfismo  $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Pensando a  $\mathbb{T}^2$  como  $\mathbb{E}^2/\mathbb{Z}_2$ , concluimos que la matriz asociada a  $\phi$  es un elemento de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Ahora, si la traza de esta matriz es mayor que dos, entonces  $M$  admite una estructura geométrica modelada por *Sol*.
- $\Sigma_M$  es un 1-orbifold. Obtenemos fibras que son 2-toros  $\mathbb{T}^2$  de la siguiente forma. Hay un único haz de intervalos sobre la botella de Klein con espacio total orientado  $X$  (puede ser obtenido por  $(\mathbb{T}^2 \times [0, 1])/\mathbb{Z}_2$ , con  $\mathbb{Z}_2$  actuando diagonalmente y de manera libre en  $\mathbb{T}^2$  y espacio cociente la botella de Klein).  $X$  es fibrado por 2-toros, los cuales son frontera de  $\mathbb{T}^2 \times [\epsilon, 1 - \epsilon]$ , con la sección cero de la botella de Klein como fibra especial. Si identificamos dos copias de  $X$  por medio de las fronteras de estos 2-toros, obtenemos  $M$ . Esta  $M$  tiene un espacio cubriente doble que fibra sobre el círculo. Además, es una fibración de Seifert por círculos si y sólo si éste es una fibración de Seifert por círculos. De lo contrario,  $M$  admite una estructura geométrica modelada por *Sol*.

### B.3. Clasificación de 3-variedades de Seifert.

Consideraremos 3-variedades de Seifert orientadas. Por lo tanto, no hay fibras que invierten orientación y como consecuencia, el espacio base es una 2-variedad sin frontera.

Sean  $M$  una 3-variedad de Seifert y  $\Sigma_M$  su espacio base. Asociamos un invariante  $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  a cada fibra  $f$  de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{U}$  una vecindad saturada de  $f$ , la cual es la fibra que corresponde a  $z_0 = 0$ . La orientación de  $\mathcal{U}$  es consistente con la orientación de  $M$  y con la orientación estandar de  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{B}^2$ . Definimos  $\alpha = p$  y  $\beta$  tal que  $\beta q \equiv 1 \pmod{p}$ . Si consideramos  $f$  como un punto de  $\Sigma_M$ , su estabilizador en  $\Sigma_M$  es  $\mathbb{Z}_\alpha$ , actuando por rotaciones. Además, podemos normalizar a  $\beta$  de tal forma que  $0 < \beta < \alpha$ .

Si  $M$  tiene  $r$  fibras excepcionales con invariantes de Seifert normalizados  $(\alpha_i, \beta_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ), definimos el *número de Euler* de  $M$  como

$$e_M = - \sum_{i=1}^r \beta_i / \alpha_i.$$

La siguiente proposición da una clasificación completa por isomorfismo de 3-variedades de Seifert, la demostración puede consultarse en [Hat].

**Proposición .4.** *Sean  $M_1$  y  $M_2$  3-variedades de Seifert orientadas con  $r$  fibras excepcionales, cuyos invariantes de Seifert normalizados son  $(\alpha_i, \beta_i)$  y  $(\alpha'_i, \beta'_i)$  ( $i = 1, \dots, r$ ), respectivamente. Entonces, después de posibles permutaciones de los índices, las fibraciones de Seifert de  $M_1$  y  $M_2$  son difeomorfas, por un difeomorfismo que preserva orientación, si y sólo si  $\alpha_i/\beta_i \equiv \alpha'_i/\beta'_i \pmod{1}$  para cada  $i$  y  $\sum_i \alpha_i/\beta_i = \sum_i \alpha'_i/\beta'_i$ .*

### C. 3-Variedades de Seifert Geométricas.

Podemos catalogar las 3-variedades de Seifert de acuerdo a la estructura geométrica que admiten. Así como en dimensión dos la estructura geométrica apropiada para una 2-variedad cerrada  $\mathcal{S}$  está determinada por su característica de Euler  $\chi(F)$ , para 3-variedades de Seifert  $M$  la estructura geométrica apropiada está determinada por la característica de Euler  $\chi$  del espacio base y el número de Euler de  $M$ , de acuerdo con la siguiente tabla.

	$\chi > 0$	$\chi = 0$	$\chi < 0$
$e = 0$	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$	$\mathbb{E}^3$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$
$e \neq 0$	$\mathbb{S}^3$	$\mathbb{R}_{Nil}^3$	$\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$

El siguiente resultado nos dice que toda 3-variedad de Seifert admite una estructura geométrica y que hay ciertas 3-variedades geométricas que son 3-variedades de Seifert. La demostración puede consultarse en [Sco83].

**Teorema .2.** [Sco83] *Sea  $M$  una 3-variedad cerrada. Entonces,  $M$  admite una de las estructuras geométricas  $\mathbb{E}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ,  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  ó  $\mathbb{R}_{Nil}^3$  si y sólo si  $M$  es una 3-variedad de Seifert.*

# Apéndice II.

En este capítulo presentamos algunos conceptos básicos sobre 3-variedades de Brieskorn siguiendo a E. Brieskorn, J. Milnor y J. Seade (para un estudio más detallado ver [Bri66a], [Bri66b], [Mil68], [Mil75] y [Sea06]).

## A. Variedades de Pham-Brieskorn.

F. Pham, en su artículo [Pha65], estudió hipersuperficies de la forma

$$\Xi_a(t) = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = t, \ t \in \mathbb{C}\},$$

con  $a = (p, q, r)$  una colección de enteros  $p, q, r$  mayores ó iguales a dos.

E. Brieskorn en su artículo [Bri68], basándose en los resultados de F. Pham, estudió 3-variedades de la forma  $\Xi_a(0) \cap \mathbb{S}^5$ , con

$$\Xi_a(0) = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0\},$$

la cual se conoce como *variedad de Pham-Brieskorn*.

**Definición .10.** La 3-variedad  $\Xi_a(0) \cap \mathbb{S}^5$  es llamada *3-variedad de Brieskorn* y la denotamos por  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

## B. 3-variedades de Brieskorn $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

Enunciamos algunos resultados importantes. Las demostraciones correspondientes pueden consultarse en [Bri68], [Mil75] y [Orl70].

De acuerdo con J. Milnor, estas 3-variedades admiten una estructura geométrica modelada por una geometría que sólo depende del signo del número racional  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1$ , de la siguiente manera.

- $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\mathbb{S}^3, \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3))$ .

- $\mathbf{p}^{-1} + \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{1}$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\mathcal{N}il, \mathbf{Isom}(\mathcal{N}il))$ .

- $\mathbf{p}^{-1} + \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{r}^{-1} < \mathbf{1}$ .

$\mathbf{M}(p, q, r)$  admite una estructura geométrica modelada por  $(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathbf{Isom}(\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})))$ .

### B.1. 3-variedades de Brieskorn Esféricas.

Ya conocemos los subgrupos finitos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$ , que actúan libremente en  $\mathbb{S}^3$ . En este contexto, vamos a utilizar la siguiente notación.

$\Gamma < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$	Notación $\langle p, q, r \rangle$	$\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$
$\mathbf{I}^*$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$	$\langle 2, 3, 5 \rangle$
$\mathbf{T}^*$	$\langle 2, 3, 3 \rangle$	$\langle 2, 2, 2 \rangle$
$\mathbf{O}^*$	$\langle 2, 3, 4 \rangle$	$\langle 2, 3, 3 \rangle$
$\mathbf{D}^*_{2m}$	$\langle 2, 2, m \rangle$	$\mathbb{Z}_{2n}$

**Teorema [Mil75].** Sean  $\Gamma = \langle p, q, r \rangle < \mathbf{Isom}(\mathbb{S}^3)$  finito y  $\Gamma'$  su conmutador. Entonces, el espacio cociente  $\mathbb{S}^3/\Gamma'$  es difeomorfo a  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .

Por lo tanto, tenemos los siguientes difeomorfismos

- $\mathbb{S}^3/\mathbf{I}^* \cong \mathbf{M}(2, 3, 5)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbf{T}^* \cong \mathbf{M}(2, 3, 4)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbf{D}^*_6 \cong \mathbf{M}(2, 3, 3)$ ;
- $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n \cong \mathbf{M}(2, 2, n)$ .

Las variedades de Brieskorn correpondientes a  $\mathbb{S}^3/\mathbf{O}^*$  y  $\mathbb{S}^3/\langle 2, 2, n \rangle$  con  $n > 2$ , tienen una descripción sencilla como *hipersuperficies complejas* de la siguiente forma (ver [Mil68]),

- $\mathbb{S}^3/\mathbf{O}^*$  está definida por la ecuación  $z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 = 0$ ;
- $\mathbb{S}^3/\langle 2, 2, n \rangle$  está definida por la ecuación  $z_1^2 + z_2^2 z_3 + z_3^{n+1} = 0$ .

**Observaciones.**

- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 2, n)$  es difeomorfa al espacio lente  $L_{p,1}$ .
- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 3, 5)$  es difeomorfa al espacio icosaedro  $\mathbb{S}^3/(\mathbf{Id} \times \mathbf{I}^*)$ . Por lo tanto, es el espacio dodecaedro de Poincaré.
- La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(2, 3, 4)$  es difeomorfa al espacio tetraedro  $\mathbb{S}^3/(\mathbf{Id} \times \mathbf{T}^*)$ .

**B.2. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .**

Comenzaremos enunciando algunos resultados.

**Lema .2.** [Mil75] *Consideremos la terna  $(p, q, r)$ , de tal modo que el mínimo común múltiplo de las parejas  $(p, q)$ ,  $(p, r)$  y  $(q, r)$  es el mismo. Entonces, la 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$  es un haz circular sobre una 2-variedad orientable.*

Supongamos que la hipótesis del Lema .2 se satisface y sea  $m$  el mínimo común múltiplo de la terna  $(p, q, r)$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema.** [Mil75] *La 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$  es un haz circular sobre una superficie de Riemann  $\mathcal{S}$  con característica de Euler igual a  $[pqr(p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} - 1)]/m$ .*

Las ternas  $(p, q, r)$  tales que  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ , corresponden a  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  y  $(3, 3, 3)$ . Éstas satisfacen la hipótesis del Lema .2 y por consiguiente se cumple el teorema anterior. El valor absoluto de  $-pqr/m^2$  es el máximo común divisor de la terna  $(p, q, r)$ ; que corresponde a 1, 2 y 3 para  $(2, 3, 6)$ ,  $(2, 4, 4)$  y  $(3, 3, 3)$ , respectivamente.

Por lo tanto, tenemos los siguientes difeomorfismos,

- $\mathbf{M}(2, 3, 6) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$ ;
- $\mathbf{M}(2, 4, 4) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_2$ ;
- $\mathbf{M}(3, 3, 3) \cong \mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3/\mathcal{N}_3$ ,

con  $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$  y  $\mathcal{N}_i$  ( $i = 2, 3$ ) subgrupos discretos de  $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3)$ , que actúan libremente en  $\mathbb{R}_{\mathcal{N}il}^3$ .

**Observaciones.** En términos de la notación utilizada en el capítulo III, pág. 119 tenemos que

- para  $\mathbf{M}(3, 3, 3)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- para  $\mathbf{M}(2, 4, 4)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- para  $\mathbf{M}(2, 3, 6)$ , la matriz asociada al automorfismo lineal de  $\mathbb{R}^2$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$  el grupo entero de Heisenberg (ver pág. 121).

### B.3. 3-variedades de Brieskorn Modeladas por $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ .

Recordemos que los subgrupos discretos de  $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$  son llamados grupos Fuchsianos. Sean  $\Gamma$  un grupo Fuchsiano,  $\widetilde{\Gamma}$  su levantamiento a  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$  y  $\widetilde{\Gamma}'$  el conmutador de  $\widetilde{\Gamma}$ . Consideremos la terna  $(p, q, r)$ , tal que  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} = 1$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema [Mil75].** *El espacio cociente de la forma  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})/\widetilde{\Gamma}'$  es difeomorfo a la 3-variedad de Brieskorn  $\mathbf{M}(p, q, r)$ .*



# Índice de Notación.

## Variedades.

$\mathbb{R}^n$	Espacio real de dimensión $n$ .
$\mathbb{C}^n$	Espacio complejo de dimensión $n$ .
$M$	$n$ -variedad diferenciable.
$\partial M$	Frontera de $M$ .
$\widetilde{M}$	Espacio cubriente universal de $M$ .
$(\mathcal{U}, \phi)$	Sistema de coordenadas locales.
$\mathcal{A}$	Atlas.
$\phi_{\alpha\beta}$	Transición de coordenadas.
$\mathfrak{D}$	Atlas maximal.
$\mathcal{G}$	Seudogrupo.
$\xi(x)$	Conjunto de gérmenes diferenciables en una vecindad de $x$ .
$[\phi_x]$	Gérmene invertible.
$Df$	Matriz jacobiana de $f$ .
$v_x$	Vector tangente en $x$ .
$\mathbf{T}_x M$	Espacio tangente a $M$ en $x \in M$ .
$df_x$	Diferencial de $f$ en $x$ .
$v_x(f)$	Derivada direccional de $f$ en dirección $v_x$ .
$\mathbf{T}M$	Haz tangente de $M$ .
$\widetilde{\mathfrak{D}}$	Estructura diferenciable de $\mathbf{T}M$ .
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	Campo vectorial.
$C^\infty(M)$	Conjunto de funciones diferenciables de $M$ .
$\mathfrak{X}(M)$	Conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables en $M$ .
$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$	Corchete de campos vectoriales.
$Gr_k(n)$	Grassmanniano.
$\mathcal{P}$	Campo de $k$ planos.
$\mathcal{L}$	Campo de líneas.
$\mathcal{B}$	Base.
$G_0$	Componente identidad del grupo $G$ .

$L_g$	Traslación izquierda.
$R_g$	Traslación derecha.
$\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie de $G$ .
$\mu_r$	Medida de Haar derecha.
<b>Ad</b> , <b>ad</b>	Representaciones adjuntas.
$x \cdot y$	Producto interno.
$m$	Métrica riemanniana.
$(M, m)$	$n$ -variedad riemanniana.
$(M, B, p, F)$	$G$ -haz.
$\nabla_v \mathcal{X}$	Derivada covariante.
$\mathcal{H}$	Conexión.
$(M, d)$	Espacio métrico.
$\mathcal{F}$	Foliación.
$\mathcal{C}$	Estructura de contacto.
$\mathcal{S}$	2-variedad.
<b>Tr</b> $A$	Traza de $A$ .
<b>det</b> ( $A$ )	Determinante de $A$ .

### Grupos y subgrupos.

$\mathbb{Z}$	Números enteros.
$\mathbb{Q}$	Números racionales.
<b>GL</b> ( $n, \mathbb{R}$ )	Grupo general lineal de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>Aff</b> ( $n$ )	Grupo de funciones afines de $\mathbb{R}^n$ .
<b>SL</b> ( $n, \mathbb{R}$ )	Grupo general especial de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>O</b> ( $n$ )	Grupo ortogonal de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>SO</b> ( $n$ )	Grupo ortogonal especial de dimensión $n$ con entradas reales.
<b>U</b> ( $2, \mathbb{C}$ )	Grupo unitario.
<b>PSL</b> ( $2, \mathbb{R}$ )	Grupo proyectivo lineal de dimensión dos con entradas reales.
<b>Isom</b> ( $M$ )	Grupo de isometrías de $M$ .
<b>Est</b> ( $M$ ) $_x$	Grupo estabilizador de $x \in M$ .
<b>T</b> , <b>O</b> , <b>I</b>	Grupos poliédricos.
$\mathcal{C}$	Grupo cristalográfico.
$T_\Gamma$	Grupo de traslaciones puras.
$\mathbb{R}^3$	Grupo de traslaciones de $\mathbb{E}^3$ .
$\Psi$	Holonomía.
<b>T*</b> , <b>O*</b> , <b>I*</b>	Grupos poliédricos binarios.
<b>H</b>	Grupo cuaterniónico.
<b>H</b> $_{\mathbb{R}}$	Grupo de cuaterniones reales.
<b>H</b> $_{\text{Im}}$	Grupo de cuaterniones imaginarios puros.

$\text{Möb}_M$	Grupo de transformaciones de Möbius de $M$ .
$\mathcal{N}$	Grupo de Heisenberg.
$\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$	Grupo entero de Heisenberg.
$\pi_i(M)$	$i$ -ésimo grupo de homotopía de $M$ .

### Modelos Geométricos.

$(M, \mathbf{Isom}(M))$	Modelo geométrico.
$ds_M^2$	Métrica riemanniana en $M$ .
$M/\Gamma$	$n$ -variedad geométrica
$\hat{\mathbb{E}}^n$	$\mathbb{E}^n \cup \{\infty\}$
$\mathbb{E}^n$	Espacio euclideo de dimensión $n$ .
$\mathbb{S}^n$	$n$ -esfera de radio uno, centrada en el origen.
$\mathbb{T}^n$	$n$ -toro.
$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$	Espacio proyectivo real de dimensión $n$ .
<b>Id</b>	Identidad.
$\mathbb{H}^n, \mathcal{H}^n, \mathbb{B}^n, \mathbb{S}_N^n$	$n$ -espacio hiperbólico.
<b>C</b>	Círculo máximo.
$m_c$	Métrica cordal.
$G(f_1, f_2)$	Producto fibrado de $f_1$ y $f_2$ .
$L_{p,q}$	Espacio lente.
$q$	Cuaternión.
$\mathbf{P}_{n,m}$	Espacio prisma.
$[u, v, x, y]$	Razón cruzada de $u, v, x$ y $y$ .
$\Sigma$	$k$ -esfera generalizada.
$\tilde{\phi}$	Extensión de Poincaré.
$d_{\mathbb{B}^3}$	Distancia hiperbólica.
$(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) / \sim$	Suspensión de $\mathbb{T}^2$ por $\sim$ .

### Descomposición de Variedades.

$\mathcal{N}(\mathcal{S})$	Vecindad tubular de $\mathcal{S}$
$M \mathcal{S}$	$M - \mathcal{N}(\mathcal{S})$
$M_1\sharp M_2$	Suma conexa de $M_1$ y $M_2$
$l$	Lazo.
$\mathbb{S}$	2-esfera.

**Variedades de Seifert.**

$\mathcal{O}$	$n$ -orbifold
$\mathcal{S}_g$	2-variedad de género $g$
$\chi(M)$	Característica de Euler de $M$
$\Sigma_M$	Espacio base
$e_M$	Número de euler
$\sigma_M$	Espacio base.

**Variedades de Brieskorn.**

$\Xi_a(0)$	Variedad de Pham-Brieskorn
$\mathbf{M}(p, q, r)$	3-variedad de Brieskorn

# Índice de Figuras.

## Temas de Geometría.

Figura I.1	página 3	
Figura I.2	página 6	
Figura I.3	página 9	<a href="http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7">http://www.ciencia.net/VerArticulo/matematicas/Campos-Vectoriales?idArticulo=7</a>
Figura I.4	página 11	[Bur85]
Figura I.7	página 23	
Figura I.8	página 24	
Figura I.9	página 31	
Figura I.10	página 31	
Figura I.11	página 32	
Figura I.12	página 33	

## Modelos Geométricos.

Figura II.1	página 40	
-------------	-----------	--

## Geometría Euclidiana.

Figura III.1	página 44	
Figura III.2	página 45	
Figura III.3	página 45	
Figura III.5	página 52	
Figura III.4	página 51	
Figura III.6	página 53	
Figura III.7	página 59	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.8	página 59	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.9	página 60	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.10	página 60	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.11	página 61	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.12	página 61	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>
Figura III.13	página 62	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>

**Geometría Esférica.**

Figura III.14	página 63	
Figura III.15	página 63	
Figura III.16	página 65	
Figura III.17	página 79	
Figura III.18	página 79	
Figura III.19	página 80	
Figura III.20	página 80	
Figura III.21	página 81	
Figura III.22	página 81	
Figura III.23	página 82	
Figura III.24	página 82	
Figura III.25	página 83	
Figura III.26	página 83	[Wee02]
Figura III.27	página 84	<a href="http://luth2.obspm.fr/Compress">http://luth2.obspm.fr/Compress</a> ,
		<a href="http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi">http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi</a>

**Geometría Hiperbólica.**

Figura III.28	página 90	
Figura III.29	página 93	
Figura III.30	página 93	
Figura III.31	página 94	
Figura III.32	página 97	
Figura III.33	página 98	
Figura III.34	página 98	
Figura III.35	página 98	
Figura III.36	página 99	
Figura III.37	página 100	[Kru86]
Figura III.38	página 100	<a href="http://www.geometrygames.org">www.geometrygames.org</a>

**Geometría  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

Figura III.39	página 103	[Wee02]
Figura III.40	página 105	
Figura III.41	página 106	
Figura III.42	página 106	

**Geometría  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ .**

- Figura III.43 página 108 [Wee02]  
 Figura III.44 página 109  
 Figura III.45 página 110 [Wee02]

**Geometría  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ .**

- Figura III.46 página 116 [Thu82]

**Geometría  $\mathbb{R}_{\text{Nil}}^3$ .**

- Figura III.47 página 117  
 Figura III.48 página 122 [Thu97]

**Geometría *Sol*.**

- Figura III.49 página 127

**Geometrización de 3-variedades.**

- Figura IV.1 página 129 [www.microsiervos.com](http://www.microsiervos.com)

**Descomposición de 3-variedades.**

- Figura IV.2 página 137  
 Figura IV.3 página 138  
 Figura IV.4 página 141  
 Figura IV.5 página 142  
 Figura IV.6 página 143  
 Figura IV.7 página 144  
 Figura IV.8 página 147  
 Figura IV.9 página 147

**Apéndice I.**

Figura 10 página 152



# Referencias

- [Abi81] William Abikoff. The uniformization theorem. *American Mathematical Monthly*, 88(8):574–592, 1981.
- [Ada04] Colin C. Adams. *The Knot Book. An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [Ale23] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 9:93–95, 1923.
- [Arv03] Andreas Arvanitoyeorgos. *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*. Number 22 in Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2003.
- [Aus60] L. Auslander. Bieberbach’s theorems on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. *Ann. of Math.*, 71(2):579–590, 1860.
- [Aus61] L. Auslander. Bieberbach’s theorem on space groups and discrete uniform subgroups of Lie groups. ii. *Amer. J. Math.*, 83:276–280, 1861.
- [BBB06] L. Bessières, G. Besson, and M. Boileau. La preuve de la conjecture de Poincaré d’après G. Perelman. *Images des Mathématiques*, pages 18–27, 2006.
- [BC70] F. Brickell and R. S. Clark. *Differentiable Manifolds. An Introduction*. Van Nostrand Reinhold Company LTD, 1970.
- [BD92] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations*. John Wiley, 1992.
- [Bea83] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*, volume 91 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 1983.

- [Bel68] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Opere Mat.*, 1:374–405, 1868.
- [Bes05] L. Bessières. Conjecture de Poincaré: la preuve de R. Hamilton et G. Perelman. *Gazette des Mathématiciens*, 106:7–35, 2005.
- [Bes06] G. Besson. Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci, d’après G. Perelman. Séminaire Bourbaki. *Astérisque*, 2004/2005(37):309–347, 2006.
- [Bie11] Bieberbach. über die bewegungsgruppen der euklidischen raume i. *Mathematische Annalen*, 70:297–336, 1911.
- [Bie12] Bieberbach. über die bewegungsgruppen der euklidischen raume ii. *Mathematische Annalen*, 72:400–412, 1912.
- [BJ82] Th. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.
- [BJ01] M. Boileau and Porti J. *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, volume 272. Astérisque, 2001.
- [BLP05] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math.*, 162(1):195–290, 2005.
- [BMP03] Michael Boileau, Sylvian Maillot, and Joan Porti. *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, volume 15 of *Panoramas et synthèses*. Société Mathématique de France, 2003.
- [Bon02] Francis Bonahon. Geometric structures on 3-manifolds. *Handbook of Geometric Topology*, pages 93–164, 2002.
- [BP92] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitex. Springer-Verlag, 1992.
- [Bri66a] E. Brieskorn. Beispiele zur differentialtopologie von singularitäten. *Invent. Math.*, 2:1–14, 1966.
- [Bri66b] E. Brieskorn. Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 55:1395–1397, 1966.
- [Bri68] E. Brieskorn. Rationale singularitäten komplexer flächen. *Invent. Math.*, 4:336–358, 1968.

- [Bur85] William L. Burker. *Applied Differential Geometry*. Cambridge University, 1985.
- [Ca'] Santiago Cañez. Gauss-bonnet and uniformization. <http://math.berkeley.edu/~scanecz/math.php>.
- [CDFHT01] John H. Conway, Olaf Delgado Friedrichs, Daniel H. Huson, and William P. Thurston. On three-dimensional space groups. *Contributions to Algebra and Geometry*, 42(2):475–507, 2001.
- [CEG87] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, and P. Green. Notes on notes of Thurston. In *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space*, number 111 in London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 3–92. Cambridge Univ. Press, 1987. (Coventry/Durham, 1984).
- [Cha86] Leonard S. Charlap. *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*. Universitext. Springer-Verlag, 1986.
- [CHK00] D. Cooper, C. Hodgson, and S. Kerckhoff. Three dimensional orbifolds and cone manifolds. *Mathematical Society of Japan Memoirs*, 5, 2000.
- [CM93] José Luis Cisneros Molina. Ecuaciones de Yang-Mills y Variedades Diferenciables de Dimensión Cuatro. Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Septiembre 1993.
- [CN79] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Teoria geométrica das folheacoes*. Projeto Euclides. Impa, 1979.
- [CP99] M. Crampin and F.A.E Pirani. *Applicable Differential Geometry*, volume 59 of *Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, 1999.
- [CR] J. H. Conway and J. P. Rossetti. Describing the platycosms. e-print arXiv:math.DG/0311476, 26 Nov 2003.
- [Cur84] Morton L. Curtis. *Matrix Groups*. Universitext. Springer, 1984. Second Edition.
- [DC88] Manfredo P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Number 59 in Projeto Euclides. Impa, 1988.

- [DFN85] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, and S. P. Novikov. *Modern Geometry-Methods and Applications. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*. Number 104 in Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, 1985.
- [DS05] Antonio J. Di Scala. Bracket and curvature. *Rev. Colombiana Mat.*, 39(2):113–131, 2005.
- [Dyc84] W. Dyck. On the “analysis situs” of 3-dimensional spaces. *Report of the Brit. Assoc. Adv. Sci.*, page 648, 1884.
- [Etn03] John B. Etnyre. Introductory lectures on contact geometry. *Proc. Sympos. Pure Math, Amer. Math. Soc.*, 71:81–107, 2003.
- [Euc56] Euclides. *The thirteen books of euclids elements, tr. from the text of heiberg with in introd and commentary by Sir Thomas L. Heath*. Dover, 1956. an unabridged and unaltered republications of the second edition published in 1926.
- [Fro11] G. Frobenius. über die unzerlegbaren diskreten bewegungsgruppen. *Sitz. Ber. der Preuss. Akad. Wissen*, page 654, 1911.
- [Gei06] H. Geiges. Contact geometry. *Handbook of differential geometry*, 2:315–382, 2006.
- [GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Universitext. Springer.
- [Ham82] R. S. Hamilton. Three manifolds with positive Ricci curvature. *Jour. Diff. Geom.*, 17:255–306, 1982.
- [Ham86] R. S. Hamilton. Four manifolds with positive curvature operator. *Jour. Diff. Geom.*, 24:153–179, 1986.
- [Ham88] R. S. Hamilton. The Ricci flow on surfaces. *Contemp. Math.*, 71:237–261, 1988.
- [Ham93a] R. S. Hamilton. The Harnack estimate for the Ricci flow. *Jour. Diff. Geom.*, 37:225–243, 1993.
- [Ham93b] R. S. Hamilton. A matrix Harnack estimate for the heat equation. *Commun. Anal, Geom.*, 1:113–126, 1993.
- [Ham93c] R. S. Hamilton. Monotonicity formulas for parabolic flows on manifolds. *Commun. Anal, Geom.*, 1:127–137, 1993.

- [Ham95a] R. S. Hamilton. A compactness property for solutions of the Ricci flow. *Amer. Jour. Math.*, 117:545–572, 1995.
- [Ham95b] R. S. Hamilton. Hamilton formation of singularities in the Ricci flow. *Surveys in Diff. Geom.*, 2:7–136, 1995.
- [Ham97] R. S. Hamilton. Four manifolds with positive isotropic curvature. *Commun. Anal, Geom.*, 5:1–92, 1997.
- [Ham99] R. S. Hamilton. Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds. *Commun. Anal, Geom.*, 7:695–729, 1999.
- [Har] Kevin Hartshort. The geometry of  $\widetilde{\mathbf{SL}}(2, \mathbb{R})$ . <http://math.berkeley.edu/~Ealanw/240termpapers.html>.
- [Hat] A. Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [Hem76] J. Hempel. *3-Manifolds*. Number 86 in Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 1976.
- [Hop26] H. Hopf. Zum Clifford-Kleinschen raumproblem. *Math. Ann.*, 95:313–319, 1925-26.
- [HR31] H. Hopf and W. Rinow. über den begriff der vollständigen differentialgeometrischen flächen. *Comm. Math. Helv.*, 3:209–225, 1931.
- [Joh79] Klaus Johannson. *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with boundaries*. Number 761 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1979.
- [Jos99] J. Jost. *Compac Riemann Surfaces*. Universitext. Springer, 1999.
- [JS79] Willian H. Jaco and Peter B. Shalen. *Seifert Fibered Spaces in 3-Manifolds*, volume 21. Mem. Amer. Math. Soc., 1979.
- [Kap] M. Kapovich. Geometrization conjecture and the Ricci flow. [www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ricci.ps](http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/ricci.ps).
- [Kap01] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups: Lectures on Thurston's Hyperbolization*, volume 183 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2001.

- [Kir74] A. Kirillov. *Éléments de la Théorie des représentations. Traduction française.* Éditions Mir, 1974. Traduct Dui Russe par A. Sossinsky.
- [KL] Bruce Kleiner and John. Lott. Notes on Perelman's papers. e-print arXiv:math.DG/0605667v2, 21 Feb 2007.
- [Kle93] F. Klein. Vergleichende betrachtungen ber neuere geometrische forschungen. *Math. Ann.*, 43:63–100, 1893. Also: *Gesammelte Abh.* Vol. 1, Springer, 1921, pp. 460 - 497.
- [Kne29] H. Kneser. Geschossene flachen in dreedimensionale mannigfaltigkeiten. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 38:248–260, 1929.
- [Koe07] P. Koebe. über die uniformisierung beliebiger analytischen kurven. *Göttinger Nachr.*, pages 191–210, 1907.
- [Kru86] Samuil L. Krushkal. *Kleinian groups and uniformization in examples and problems.* American Mathematical Society, 1986. Tr. from the russian by H. H. Mcfaden.
- [LH86] Vagn Lundsgaard Hansen. *Collected mathematical papers of Jacob Nielsen.* Birkhäuser, 1986. vol. 1, 1913-1932, xix+458 pp., sFr. 198, vol. 2, 1932-1955, xi+440 pp., sFr. 192.
- [Lim98] Elon Lages Lima. *Grupo Fundamental e Espacos de Recobrimiento.* projeto Euclides. Impa, CNPq, 1998.
- [Lut71] R. Lutz. Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois. *Thèse, Strasbourg*, 1971.
- [Mar71] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium 2*, 209:142–163, 1971.
- [Mas67] Massey. *Algebraic Topology: An Introduction.* Number 56 in GTM. Springer-Verlag, 1967.
- [McM92] C. T. McMullen. Riemann surfaces and the geometrization of 3-manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27(2):207–216, 1992.
- [MH99] J. E. Marsden and M. J. Hoffman. *Basic Complex Analysis.* New York: W. H. Freeman, 1999.

- [Mil62] J. Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *Amer. J. Math.*, 84:1–7, 1962.
- [Mil68] J. Milnor. Singular points of complex hypersurfaces. *Annals of Mathematics Studies*, 61, 1968.
- [Mil69] J. Milnor. *Morse Theory*, volume 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1969.
- [Mil75] J. Milnor. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $m(p, q, r)$ . Knots, groups and 3-manifolds, papers dedicated to the memory of R. H. Fox. *Annals of Mathematics Studies*, 84:175–225, 1975.
- [Mil76] J. Milnor. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Advances in Mathematics*, 21(3):293–329, 1976.
- [Mon03] J. M. Montesinos. *Calidoscopios y 3-Variedades*. Universidad Nacional de Colombia, 2003.
- [Mor84] J. W. Morgan. On Thurston’s uniformization theorem for three-dimensional manifolds. The Smith conjecture. *Pure Appl. Math.*, 112:37–125, 1984.
- [Mos71] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. *Pacific J. Math.*, 38:737–745, 1971.
- [MS38] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 39(4):851–862, 1938.
- [MT98] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups*. Oxford University Press, 1998.
- [Neu99] W. D. Neumann. Notes on geometry and 3-manifolds. *Low Dimensional Topology*, 8:191–267, 1999.
- [Now34] W. Nowacki. Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen raumformen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 7:81–93, 1934.
- [Orl70] P. Orlik. Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups. *Topology*, 9:267–273, 1970.
- [Orl72] P. Orlik. *Seifert Manifolds*. Number 291 in Lectures Notes in Mathematics. Springer, 1972.

- [Ota96] J. P. Otal. *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, volume 235. Astérisque, 1996.
- [Ota98] J. P. Otal. Thurston's hyperbolization of Haken manifolds. *Surveys in differential geometry*, 3:77–194, 1998.
- [Pera] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. e-print arXiv:math/0211159v1 [math.DG], 11 Nov 2002.
- [Perb] G. Perelman. Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. e-print arXiv:math/0307245v1 [math.DG], 17 Jul 2003.
- [Perc] G. Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. e-print arXiv:math/0303109v1 [math.DG], 10 Mar 2003.
- [Pha65] F. Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. math. France*, 93:333–367, 1965.
- [Poi95] H. Poincaré. Analysis situs. *J. École Polytech. Paris*, 1(2):1–121, 1895.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Number 149. Springer-Verlag, 1994.
- [Rie73] B. Riemann. über die hypothesen, welche der geometrie zugrunde liegen. *Das Kontinuum und andere Monographien*, reprint 1973. It was published in 1867.
- [Rin61] W. Rinow. *Die innere Geometrie der metrischen Räume*, volume 105. Springer-Verlag, 1961.
- [Rol76] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Perish, Inc., 1976.
- [Sas58] Shigeo Sasaki. On the differential geometry of tangent bundles of riemann manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 2(10):338–354, 1958.
- [Sat56] Ichiro Satake. On a generalization of the notion of manifolds. *Proc. of the Nat. Acad. of Sc. U.S.A.*, 42:359–363, 1956.
- [Sco83] Peter Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15:401–487, 1983.



- [Sea06] José Seade. *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, volume 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 2006.
- [Sei31] H. Seifert. Konstruktion dreidimensionaler geschlossener räume. *Ber. Sächs. Akad. Wiss.*, 83:26–66, 1931.
- [Sei32] H. Seifert. Topologie dreidimensionaler gefaserner räume. *Acta Math.*, 60:147–238, 1932.
- [Sin60] I. M. Singer. Infinitesimally homogeneous spaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13:685–697, 1960.
- [Spi79] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I*. Perish, 1979.
- [ST30] H. Seifert and William Threlfall. Topologische untersuchung der diskontinuitätsbereiche des dreidimensionalen sphärischen raumes i. *Mathematische Annalen*, 104:1–70, 1930. Continuado en **107**, (1932), pp. 543-586.
- [ST80] H. Seifert and William Threlfall. *A Textbook of Topology*. Number 89 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 1980.
- [Ste93] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Number 72 in GTM. Springer, 1993.
- [SW33] H. Seifert and C. Weber. Die beiden dodekaederräume. *Mathematische Zeitschrift*, 37(1):237–253, 1933.
- [Thua] W. P. Thurston. Hyperbolic structure on 3-manifolds II:surface groups and 3-manifolds which fibre over the circle. e-print arXiv:math.GT/9801045 v1, 10 Jan 1998.
- [Thub] W. P. Thurston. Three-manifolds with simmetry. preprint 1982.
- [Thu79] W. P. Thurston. *Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lectures Notes. Princeton University, 1979.
- [Thu82] W. P. Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 6(3):357–381, 1982.

- [Thu86] W. P. Thurston. Hyperbolic structure on 3-manifolds I: Deformation of acylindrical manifolds. *Annals of Math*, 124:203–246, 1986.
- [Thu88] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 19(2):417–431, 1988.
- [Thu97] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1997. (Edited by Silvio Levy).
- [Tie08] H. Tietze. über die topologischen invarianten mehrdimensionaler mannigfaltigkeiten. *Monatschr. Math. Phys.*, 19(1):1–118, 1908.
- [Tol74] Jeffrey L. Tolleson. The compact 3-manifolds covered by  $S^2 \times R^1$ . *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(3):461–462, 1974.
- [TW75] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper. On the existence of contact forms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1):345–347, 1975.
- [Ver82] Alberto Verjovsky. *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*. Cinvestav, 1982.
- [War83] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Wee02] Jeffrey R. Weeks. *The Shape of Space*. New York: M. Dekker, 2002.
- [Wol62] Joseph A. Wolf. Discrete groups, symmetric spaces, and global of prime order. *Amer. J. of Math.*, 84:527, 1962.
- [Wol84] Joseph A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. Publish of Perish, Inc., 1984.
- [Zas48] H. Zassenhaus. über einen algorithmus, zur bestimmung der raumgruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 21:117–141, 1948.