

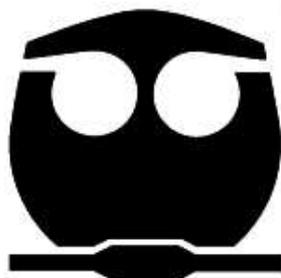


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE QUÍMICA

**DINÁMICA DE FLUIDOS VISCOSOS Y
VISCOELÁSTICOS EN MICROCANALES**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
I N G E N I E R A Q U Í M I C A
P R E S E N T A:
MIREILLE EVANGELINA BRAVO GUTIÉRREZ



MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTEGRANTES DEL JURADO

PROFESORES

- Presidente:** Rafael Herrera Nájera
Vocal: Ángel Enrique Chávez Castellanos
Secretario: Eugenia Corvera Poiré
1º suplente: Minerva Estela Téllez Ortiz
2º suplente: Eduardo Vivaldo Lima

Esta tesis fue desarrollada en:

Departamento de Física y Química Teórica
Cubículo F-210
Facultad de Química
Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México

ASESORA

Dra. Eugenia Corvera Poiré

SUSTENTANTE

Mireille Evangelina Bravo Gutiérrez

*” Los sueños son la semilla
de la realidad de mañana”*

LEÓN FELIPE.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Química por brindarme una excelente preparación profesional, por mostrarme una manera diferente de vivir y por abrirme las puertas a un mundo de posibilidades. A todos los profesores que contribuyeron a mi formación, porque además de transmitirme conocimientos, me enseñaron a buscar la diferencia.

A la Dra. Eugenia Corvera Poiré por darme la oportunidad de trabajar con ella y por involucrarme en importantes proyectos. Por la asesoría y la dirección, por las explicaciones, el análisis y las contribuciones académicas aportadas durante la elaboración de esta tesis. Por nunca limitar los recursos, por impulsarme hacia un mejor desarrollo y sobretodo, por la confianza, el apoyo, la paciencia y la comprensión.

A la Dra. Aurora Hernández Machado, coautora de las publicaciones en proceso de elaboración, por las contribuciones profesionales. Por permitirme trabajar en el Departamento de Estructura y Constituyentes de la Materia de la Universidad de Barcelona y por la calidez humana mostrada durante mis estancias en España.

Al Dr. Mario Castro de la Universidad Ponticia Comillas en Madrid, coautor de las publicaciones en proceso de elaboración, por las importantes aportaciones académicas a este proyecto.

Al Dr. Gabriel Gomila por permitirme trabajar en el Laboratorio de Micro y Nano Electrónica de la Universidad de Barcelona. A Romén Rodríguez por la ayuda, los consejos y la asesoría brindada durante la realización de los experimentos.

A los miembros del H. Jurado. Especialmente al Dr. Rafael Herrera Nájera y al Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos por tomarse el tiempo para revisar el trabajo, por sus correcciones y sugerencias y por su disponibilidad.

A Dios porque sin Él nada hubiese sido posible. Por darme la vida, por guiarme en mi camino. Por llenarme de amor y fuerzas para seguir adelante.

A mis papás y hermanos por su apoyo, ayuda incondicional y consejos. Por todos estos años de felicidad, por demostrarme que pese a las adversidades siempre se puede salir adelante, por permanecer juntos, por nunca dejar de creer en mí y por impulsarme a volar hasta el infinito y no abandonarme en el vuelo.

A mi familia por estar siempre al pendiente de mí y por celebrar mis éxitos. A todos los que ya partieron porque sé que estarían felices de compartir este momento conmigo. Especialmente a mis tíos Miguel, Carmen, Celia, Conchita, Angelina, Iliana, Tita, Bertha y Ángel, por todo el cariño y su constante preocupación. A mi hermanote Javier porque y a Ana y a Paco por el tiempo que dedicaron en la revisión del texto.

A los doctores Jesús Hernández Trujillo y Fernando Colmenares Landín por permitirme trabajar en el cubículo de Física y Química Teórica, pese a que mi asesora no estaba presente. A Luis, a Marco y a Tomás, por incorporarme en su grupo y porque nunca limitaron sus atenciones y ayuda. Muchas gracias por su apoyo personal y profesional. A mis compañeros Marco y Aimeé y, a Julieta y Joaquín por los momentos en Veracruz.

Al Dr. Jesús Gracia Fadrique por su apoyo incondicional, por dejar la puerta del Laboratorio de Superficies siempre abierta y por su amistad. Al grupo de Superficiales, en especial a Esteban Olvera por las asesorías técnicas y por siempre estar dispuesto ayudar.

A las llusas: Amparo, Alma, Karla, Verónica, Ximena, Diana, Yadira y Nancy; porque a lo largo de estos años hemos compartido momentos y aventuras inolvidables, porque siempre tienen una sonrisa para mí y por su apoyo en situaciones difíciles. Por enseñarme a ver la vida como un gran juego y por su amistad. Particularmente a Alma por tus consejos y porque eres la primera que sale al rescate con recursos materiales y emocionales. A Ximena porque has sido mi compañera de toda la carrera y de fugas, porque me has ayudado a saltar muchos obstáculos, por tu infinita ayuda con todos los trámites y por estar siempre al pendiente. A Veroka, mi gemela del DF, por compartir y entender las

locuras, por acompañarme a lo largo de esta travesía y sobretodo por tu cariño y esa sencillez que te caracteriza.

A mis amigos: Osmar, Arturo, Daniel, Bob, Héctor y Manuel; porque sin ustedes no habría podido llegar hasta donde estoy. A mi primo Isaías porque siempre estás al pendiente, por tus sabios consejos y por la simplicidad con la que ves las cosas; a César por no abandonarme cuando estaba en el exilio y a Arturo por escucharme, por tu discreción y por tu infinita ayuda.

A Montse por ser mi amiga infalible, porque siempre que lo necesito estás ahí y por tu gran cariño y confianza. A Roberto, por tu espontaneidad y tus detalles, por no fingir ser diferente, por dejarme compartir tantas cosas y por rescatarme. A Jaime porque siempre me has obligado a ver la parte optimista de las cosas, por escucharme y guardar mis secretos y por tu autenticidad. A todos ustedes muchas gracias por permitirme entrar en su vida y por su amistad.

A mis amigas de toda la vida: Malena, Mariana, Daniela, Vicky y Yadira, por el cariño y el optimismo de siempre. A Tábata por ser mi confidente y por entenderme sin palabras. A Magua porque siempre estás presente, por ser mi cómplice y por comprender mi poca disponibilidad.

A toda la gente que hizo de mis estancias en España una etapa inolvidable. A Rodrigo y a Nessim por adoptarme. A Jesús y a José Luis por rescatarme y ayudarme a encontrar un lugar donde hospedarme. A Isa y a Mahriah por su amistad y compañía. A Ramón por las interminables pláticas y por mostrarme la ciudad. A mis compañeros de la Universidad de Barcelona: Sergio, Óscar, Gonzalo, Marilía, Santiago, Belén, Pau y María. En especial a Romén por el apoyo personal y profesional, por las sugerencias, por escuchar mis quejas y por tu disponibilidad; y a Ivón por abrirme tu corazón y por transmitirme esa felicidad que te hace única.

A la Asociación de Químicos e Ingenieros Químicos Generaciones 40, 41 y 42 por el apoyo económico otorgado durante mis estudios de licenciatura.

A la Dirección General de Investigación (MEC, España) bajo el proyecto FIS2006-12253-C06-06 y al programa PAIP 3190-19 por el financiamiento durante las estancias en Barcelona realizados en abril y septiembre del 2006.

A la Coordinación de Superación Académica por aceptarme en el subprograma 127 de Formación Básica en Investigación durante el periodo de 2006-2007.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través del proyecto 58064 y al programa PAPIIT 101907 por el apoyo para la asistencia al congreso de la División de Plasmas y Fluidos de la Sociedad Mexicana de Física en Boca del Río, Veracruz realizado en noviembre del 2007.

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Los resultados originales de este trabajo son:

1. Expresiones analíticas para velocidades y permeabilidades dinámicas con resbalamiento en el dominio de las frecuencias (ecuaciones: (3.29), (3.31), (3.40), (3.43), (3.44) y (3.46)).
2. Hipótesis de Navier para la velocidad de resbalamiento en el dominio de frecuencias (ecuación 3.37).
3. Todos los resultados del capítulo 4:
 - Relación de escala para las permeabilidades dinámicas de fluidos de Newton en microcanales sin resbalamiento.
 - Propuesta para cuantificar el resbalamiento en microcanales.
 - Propuesta para comprobar la validez de la hipótesis de Navier en situaciones dinámicas.
4. Resultados del capítulo 5:
 - División de los perfiles de velocidad de fluidos de Maxwell en subceldas idénticas a determinadas frecuencias.
5. Resultados del capítulo 6:
 - Flujo anómalo.
 - Cálculo del tamaño de la celda efectiva para un microcanal con resbalamiento.
 - Cálculo de la permeabilidad dinámica de la celda efectiva.
 - Propuesta para comprobar experimentalmente la ausencia o presencia de resbalamiento de acuerdo al tamaño de las subceldas efectivas.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Ecuaciones de Movimiento	7
2.1. Balance de Materia y Cantidad de Movimiento	8
2.1.1. Fluidos de Newton	10
2.1.2. Fluidos de Maxwell	11
2.2. Condiciones de Frontera: Resbalamiento Aparente	13
2.3. Permeabilidad Dinámica y Flujo	15
3. Solución de las Ecuaciones Dinámicas de Flujo en Microcanales	17
3.1. Descripción del Sistema de Estudio	17
3.2. Leyes de Darcy	19
3.2.1. Estado Estacionario	19
3.2.2. Situaciones Dinámicas	22
3.3. Velocidad de Resbalamiento y Esfuerzo Cortante	27
4. Dinámica de Fluidos de Newton con Resbalamiento	29
4.1. Efectos del Resbalamiento	29
4.2. Relación de Escala entre Permeabilidades Dinámicas	33
5. Dinámica de Fluidos de Maxwell	38
5.1. Permeabilidades Dinámicas	38
5.2. Perfiles de Velocidad: Subceldas	40
6. Fluidos de Maxwell: Efecto del Resbalamiento	45
6.1. Flujo Anómalo	45
6.2. Celda Efectiva	51
6.3. Subceldas Efectivas	54

7. Dinámica de Frentes	57
7.1. Ley de Washburn	57
7.2. Microfabricación: Moldeado en PDMS	60
7.3. Montaje Experimental	62
7.4. Resultados Preliminares	64
8. Conclusiones	67
Lista de Símbolos	70
Manuscrito enviado a: Physical Review Letters	72
Bibliografía	77
.1. Artículos y Publicaciones	77
.2. Libros	79

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Microdispositivo para rastrear indicadores moleculares de un gran número de biopartículas	2
2.1. Ejemplo de un flujo reversible	9
2.2. Perfil de velocidad con resbalamiento aparente	14
2.3. Curvas típicas de la parte real de las permeabilidades dinámicas de fluidos de Newton y de Maxwell	16
3.1. Geometría de un microcanal rectangular	18
4.1. Permeabilidades dinámicas con y sin resbalamiento de un fluido de Newton en un microcanal rectangular	31
4.2. Frecuencia de cruce como función de la longitud de resbalamiento	31
4.3. Velocidad y magnitud del flujo volumétrico promedio de un fluido de Newton en microcanales con y sin resbalamiento	32
4.4. Velocidad de resbalamiento y esfuerzo cortante en la pared de un fluido de Newton en microcanales con y sin resbalamiento	32
4.5. Cociente de las permeabilidades dinámicas de un fluido de Newton en microcanales con y sin resbalamiento	36
4.6. Longitud de resbalamiento como función del cociente de las permeabilidades dinámicas de un fluido de Newton	37
5.1. Permeabilidades dinámicas de un fluido de Maxwell	40
5.2. Perfiles de velocidad dinámicos de un fluido de Maxwell	41
5.3. Comparación de las partes reales de las permeabilidades dinámicas y de los perfiles de velocidad de un fluido de Maxwell en un microcanal rectangular, con los de una subcelda	44
6.1. Perfiles de velocidad en estado estacionario de un fluido de Maxwell en microcanales con y sin resbalamiento	46
6.2. Parte real de las permeabilidades dinámicas de un fluido de Maxwell en canales de diferentes alturas	47

6.3.	Permeabilidades dinámicas de un fluido de Maxwell en microcanales con y sin resbalamiento	48
6.4.	Perfiles de velocidad de un fluido de Maxwell en microcanales con y sin resbalamiento a una misma frecuencia	49
6.5.	Velocidad promedio de un fluido de Maxwell en microcanales con y sin resbalamiento	50
6.6.	Magnitud del flujo volumétrico de un fluido de Maxwell en microcanales con y sin resbalamiento	51
6.7.	Longitud efectiva de una celda con resbalamiento	53
6.8.	Parte real de la permeabilidad dinámica de la celda efectiva	54
6.9.	Perfiles de velocidad dinámicos de un fluido de Maxwell con resbalamiento	55
6.10.	Comparación de las partes reales de las permeabilidades dinámicas y de los perfiles de velocidad de un fluido de Maxwell en un microcanal rectangular con resbalamiento, con los de una subcelda efectiva	56
7.1.	Proceso de Fabricación de microcanales por moldeado en PDMS	61
7.2.	Microcanal rectangular de PDMS	61
7.3.	Sistema Experimental	62
7.4.	Frente de Velocidad	63
7.5.	Distancia vs tiempo de un frente de agua en distintos microcanales rectangulares	64
7.6.	Análisis del cambio del exponente conforme avanza un frente de agua en distintos microcanales rectangulares	66

INTRODUCCIÓN

En los últimos años los avances tecnológicos se han caracterizado no sólo por un acelerado y continuo desarrollo de novedosos equipos completos y autosuficientes, sino también porque el tamaño de los dispositivos fabricados es cada vez más pequeño. La miniaturización empezó en el ámbito de la computación y la ingeniería electrónica, en donde la fabricación de microcircuitos integrados permitió economizar recursos y reducir los espacios y tiempos de operación. Las primeras computadoras que se fabricaron ocupaban cuartos enteros y ahora se tienen microcircuitos del tamaño de un insecto, capaces de transmitir grandes cantidades de información.

La posibilidad de extender la automatización de microequipos hacia otros campos ha sido motivo de continuas investigaciones. El poder separar a los biofluidos en los componentes básicos que los forman podría servir, por ejemplo, para fines de caracterización o para realizar estudios de carácter biomédico. Existe un dispositivo integrado por desniveles y poros que facilitan la filtración y clasificación de partículas por tamaño; éste ha resultado eficiente para separar las células blancas de los glóbulos rojos de la sangre [1]. Por otro lado, lograr aislar células malignas ayudaría a un estudio más detallado del mecanismo que propicia el crecimiento anormal de células y podría mejorar la selectividad de las terapias farmacológicas. Recientemente, se realizaron pruebas para la separación de células humanas de cáncer de pecho y de células epiteliales normales a través de microcanales de unos cuantos cientos de nanómetros [2].



Figura 1.1: Microdispositivo desarrollado por el Instituto de Bioinformática de Virginia para rastrear indicadores moleculares de un gran número de biopartículas como células cancerígenas. Este dispositivo está integrado por: una bomba, una válvula, una columna de separación y una interfase de detección dentro en un microcircuito de vidrio de $7.5 \times 2.5 \text{ cm}$. Es capaz de realizar tareas que generalmente requieren equipo instrumental de algunos m^2 [3].

Numerosas aplicaciones tecnológicas están relacionadas con el movimiento de sustancias confinadas en distintas geometrías; por ello ha surgido un interés por lograr comprender los fenómenos que describen el flujo en microcanales. El desarrollo y la optimización de sistemas multifuncionales que permitan la manipulación de fluidos requiere un mejor entendimiento de los fenómenos interfaciales y de los flujos microhidrodinámicos [4]. Esto se podrá lograr solamente a través de la cooperación entre ciencia y tecnología.

En particular, la medicina ha requerido explorar la mecánica de los procesos naturales con el fin de llegar a una mejor comprensión de cómo funcionan los organismos, tanto en condiciones normales como cuando existe alguna alteración [5]. Por ejemplo, la retinopatía es una complicación ocular en la que se deterioran los vasos sanguíneos que irrigan la retina del fondo del ojo. Estos vasos pueden desgarrarse y sangrar dentro del humor vítreo¹; lo que puede distorsionar la visión e incluso desprender la retina del fondo del ojo [6]. Una terapia adecuada para este padecimiento debe consistir en la restauración de los conductos sanguíneos y

¹El líquido intraocular está formado por *humor acuoso* y *humor vítreo*. El equilibrio entre la producción y reabsorción de humor acuoso regula el volumen y la presión total del ojo.

de la razón de flujo normal de sustancias en la retina [7]. Otra afección común, es el aumento de la presión intraocular. Si la reabsorción del líquido ocular es deficiente, la presión interna puede aumentar drásticamente provocando ceguera temporal o definitiva. En ocasiones se puede tratar con fármacos, pero cuando esta terapia fracasa se utilizan técnicas quirúrgicas [20]. Sería muy importante encontrar procedimientos alternativos que regularan el flujo del humor acuoso y controlaran el aumento excesivo de la presión intraocular.

En el caso de algunas enfermedades, el entendimiento de la naturaleza de los fluidos y de la dinámica que define su movimiento a microescalas podría llevar a la elaboración de propuestas que, a través de la manipulación de las condiciones de flujo, permitieran contrarrestar las alteraciones en los procesos naturales perjudiciales a la salud. Por ejemplo, el crecimiento de tumores es posible por un abastecimiento continuo de sangre proveniente de una red de vasos que se forma por la segregación de una sustancia estimulante de la *angiogénesis*². La red de vasos capilares sirve como puente entre el tumor y las arterias cercanas que lo mantienen alimentado mientras incrementa su tamaño [21]. El encontrar la manera de alterar las condiciones de flujo de esta red de capilares, podría llevar a inhibir la alimentación del tumor y frenar su crecimiento y propagación.

Los ejemplos mencionados muestran que el conocimiento de la naturaleza de los fluidos y las condiciones de movimiento, podría aportar soluciones a algunas terapias médicas. Por el tamaño de los sistemas biológicos, el estudio del movimiento de muchos de los biofluidos requiere de la microfluídica. En la dinámica de microsistemas, se presentan una serie de fenómenos de superficie que a escalas macrométricas son de magnitudes tan pequeñas que pueden despreciarse. Debido a que la mayoría de las teorías convencionales no contemplan estos fenómenos, es

²Formación de nuevos vasos capilares. Los capilares son los vasos más pequeños y numerosos de todo el sistema circulatorio; están distribuidos a lo largo de todo el cuerpo y son los responsables del intercambio de sustancias como gases, fluidos, nutrientes y materiales de desperdicio.

necesario rehacer parte de estas teorías, para incluirlos y así describir satisfactoriamente la física de los fluidos confinados en volúmenes pequeños.

Los fenómenos de superficie en microfluídica son importantes porque la cantidad de fluido en contacto con las paredes es muy grande, por tanto las interacciones en esta interfase no son despreciables. Entre los más comunes se encuentran: los *efectos electrocinéticos* provocados por la generación de un campo eléctrico en las paredes, *el flujo acústico* que puede resultar útil para inducir el mezclado de sustancias, y las *interacciones fluido-pared* de tipo mecánico, que pueden ayudar a la manipulación de las paredes para estimular el movimiento de las sustancias [8].

A escalas macroscópicas, la condición de frontera para la velocidad, que se refiere a la completa adherencia del fluido en las paredes, resulta bastante aceptable para la descripción de los sistemas. Sin embargo, en microcanales se ha observado que cuando una sustancia se desplaza bajo un gradiente de presión constante, existe un flujo volumétrico en exceso respecto al que daría una ley de Darcy clásica³ [9, 10, 11]. Este exceso de flujo se atribuye a que el fluido en contacto con las paredes tiene una velocidad diferente de cero, a este fenómeno se le conoce como *resbalamiento aparente*.

Existen muchas hipótesis para explicar el origen de este resbalamiento. Una de ellas sugiere que en el recorrido de un líquido dentro de un microcanal, las moléculas de la capa más cercana a la pared sufren dos fuerzas, una de atracción ejercida por otras moléculas y otra hidrodinámica de corte. La competencia entre estas fuerzas da lugar a la formación de una capa en la interfase fluido-pared que lubrica el recorrido y provoca el efecto de resbalamiento [22]. También se ha llegado a considerar que este resbalamiento aparente surge por inhomogeneidades de los dispositivos. Algunos estudios sostienen que la magnitud del resbalamiento depen-

³La ley de Darcy clásica establece una relación lineal entre la velocidad promediada en la sección transversal y el gradiente de presión.

derá de la rugosidad de las paredes y decrecerá mientras más lisa sea la superficie [8]; otros han encontrado que el deslizamiento diverge conforme la amplitud de las rugosidades incrementa [12].

Los efectos del resbalamiento se han tratado de determinar cualitativamente y cuantitativamente, pero aún queda mucho por investigar. Dadas las dimensiones de los microcanales, una velocidad de resbalamiento por pequeña que sea, puede modificar notablemente el comportamiento del sistema. En este proyecto se analiza la dinámica de movimiento de fluidos viscosos y viscoelásticos, que se desplazan en microcanales con y sin resbalamiento por efecto de gradientes de presión dinámicos. Para ello se estudia la permeabilidad dinámica del sistema [13, 14, 15], esta variable relaciona linealmente la velocidad con el gradiente de presión.

En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, con las respectivas simplificaciones para microsistemas, así como las relaciones constitutivas para fluidos de Newton y de Maxwell. Además, se introduce la condición de frontera de deslizamiento dada por la hipótesis de Navier para la velocidad en las paredes. En el capítulo 3 se describe el sistema de estudio y las suposiciones realizadas para obtener los modelos hidrodinámicos que se resuelven para el estado estacionario, el dominio de frecuencias y situaciones particulares dependientes del tiempo.

El capítulo 4 contiene un estudio analítico del flujo no estacionario con resbalamiento de fluidos de Newton. Se deduce una *relación de escala* entre las permeabilidades de celdas⁴ de diferente tamaño que se rompe en presencia de deslizamiento.

⁴La celda a la que se hace referencia es un dispositivo formado por dos placas paralelas separadas por una distancia mucho menor que el resto de las dimensiones del sistema.

Se discute la utilidad de esta relación para comprobar de forma experimental si en determinado sistema realmente existe resbalamiento; en caso de haberlo, se propone una manera de cuantificarlo y de comprobar la validez de la hipótesis de Navier para situaciones dinámicas.

Los capítulos 5 y 6 describen la respuesta dinámica de los fluidos viscoelásticos a partir del modelo de Maxwell. En el capítulo 5 se consideran condiciones de frontera de adherencia. Se calculan las velocidades locales para un gradiente de presión consistente en un coseno. A través de los perfiles de velocidad se encuentra que a determinadas frecuencias, el microcanal se divide en varias subceldas idénticas, las cuales se comparan con el comportamiento que tendría el fluido en un microcanal de menor tamaño. En el capítulo 6 se analiza el efecto del deslizamiento sobre la permeabilidad dinámica y las velocidades locales. Se muestra que respecto al estado estacionario, existe un efecto anómalo del resbalamiento en la magnitud de flujo para algunos rangos de frecuencia. Además, se propone una manera de cuantificar el tamaño de una celda efectiva en un microcanal con deslizamiento y así, se determina el tamaño de las subceldas correspondientes.

Finalmente, el capítulo 7 contiene información experimental sobre la dinámica del avance de un frente en un microcanal. Se analiza brevemente el efecto de las fuerzas de capilaridad en microcanales sobre la velocidad de llenado de una celda. Se describen las pruebas realizadas para medir el avance de un frente de agua en un microcanal rectangular por la aplicación de un gradiente de presión constante y se incluyen algunos resultados preliminares.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

La física detrás de la hidrodinámica de un microsistema está dominada por fenómenos de superficie que se originan por el confinamiento del fluido. Las teorías convencionales no suelen describir estos fenómenos, ya que a escalas macroscópicas resultan despreciables; sin embargo, dadas las pequeñas dimensiones en microfluídica, las barreras estructurales nunca están lejos de las sustancias, por lo que el área superficial del fluido en contacto con las paredes es muy grande [8]. Mientras más se reduzca el tamaño del sistema, las interacciones fluido-pared tendrán mayor importancia.

La microfluídica es un dominio de la mecánica de fluidos que estudia el movimiento de sustancias en canales con secciones transversales entre aproximadamente $1 \mu m$ y $100 \mu m$. Si se tiene información sobre: los gradientes de presión a los que está sujeto un fluido, las funciones de respuesta que lo caracterizan y la geometría por la que se desplaza; la hidrodinámica permite conocer las componentes de la velocidad \bar{v} , para cada punto del espacio y tiempo, y así tener una descripción local del fluido.

A continuación se presentan las ecuaciones de balance de masa y cantidad de movimiento para fluidos de Newton y de Maxwell.

2.1. Balance de Materia y Cantidad de Movimiento

En primera instancia, cualquier sistema debe cumplir con el principio de conservación de la masa. El balance de materia se representa a partir de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0, \quad (2.1)$$

que debido a la condición de incompresibilidad, que supone la densidad del fluido constante para todo punto en el espacio, se puede reescribir como: $\nabla \cdot \bar{v} = 0$.

El balance de cantidad de movimiento es la versión continua de la segunda ley de Newton, de forma general para fluidos incompresibles está dado por:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p - \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \bar{g}. \quad (2.2)$$

El lado izquierdo de esta ecuación corresponde a la acumulación de cantidad de movimiento por unidad de volumen ($\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$) y al término convectivo ($\bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$), ∇p es el gradiente de presión y \bar{g} la fuerza de gravedad; finalmente el término $\nabla \cdot \bar{\tau}$ representa la divergencia del tensor de esfuerzos, que desarrollado en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\tau} = & \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \hat{i} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \hat{j} \\ & + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \hat{k}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La ecuación (2.2) puede simplificarse para microsistemas porque la cantidad de fluido en contacto con las paredes respecto al volumen total es muy grande. Las fuerzas de capilaridad son mucho mayores que las gravitacionales, por lo que estas últimas pueden ser descartadas [22].

Por otra parte, si se comparan las dimensiones de las fuerzas inerciales (término convectivo) y las viscosas (divergencia del tensor de esfuerzos), se obtiene una razón de la forma:

$$\frac{f_i}{f_v} = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu} \equiv Re, \quad (2.4)$$

donde v y L son la velocidad y longitud característica, respectivamente y $\nu = \eta/\rho$ es el coeficiente de difusión. La relación $\frac{f_i}{f_v} \equiv Re$ es conocida como el número de Reynolds. Como en los microcanales se obtienen Re mucho menores a la unidad, se puede afirmar que las fuerzas viscosas dominan sobre las convectivas, por lo que el término convectivo de la ecuación de balance de cantidad de movimiento puede despreciarse; lo que trae como consecuencia reversibilidad en el flujo (ver figura 2.1), linealidad en las ecuaciones y ausencia de turbulencia.

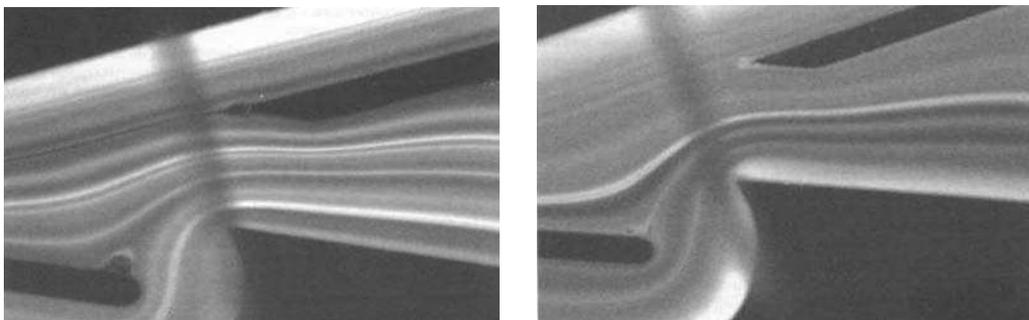


Figura 2.1: Ejemplo de un flujo reversible. Se dice que hay reversibilidad porque no existe diferencia en las líneas de flujo al invertir la dirección de movimiento [22].

De esta manera, la versión linealizada del balance de cantidad de movimiento para un fluido incompresible que se desplaza en un microcanal es:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \bar{\tau} . \quad (2.5)$$

Las características del fluido se introducen a través de una ecuación constitutiva, ésta es una expresión empírica que relaciona el esfuerzo en un sistema con la forma particular en la que se deforma. Debido a que estas relaciones se deducen de observaciones experimentales, o bien simulaciones, únicamente son aplicables a ciertos materiales en situaciones limitadas.

De acuerdo con las propiedades del material, se distinguen dos grandes clasificaciones: sólidos completamente elásticos (sólidos de Hooke), capaces de almacenar energía mecánica y líquidos completamente viscosos (fluidos de Newton), capaces de disiparla. Los fluidos como polímeros, geles, pastas y suspensiones, poseen características intermedias entre estos dos tipos de materiales debido a que tienen estructuras moleculares más complejas y se denominan fluidos viscoelásticos.

2.1.1. Fluidos de Newton

Desde el punto de vista de los fenómenos de transporte, un fluido de Newton es aquel cuyo tensor de esfuerzos es directamente proporcional al gradiente negativo de la velocidad, esto es [23]:

$$\bar{\tau} = -\eta \nabla \bar{v} , \quad (2.6)$$

donde η es la viscosidad del fluido que actúa como constante de proporcionalidad.

El campo de velocidad de este tipo de materiales puede ser descrito por las ecuaciones linealizadas de Navier-Stokes. Al sustituir la ecuación constitutiva de un fluido de Newton (2.6) en el de balance de cantidad de movimiento (ecuación 2.5) se obtiene:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \bar{v}}. \quad (2.7)$$

El desarrollo de las ecuaciones (2.7) para un sistema de coordenadas rectangulares es:

- componente x :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (2.8a)$$

- componente y :

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (2.8b)$$

- componente z :

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (2.8c)$$

2.1.2. Fluidos de Maxwell

Para caracterizar a un fluido viscoelástico no basta con conocer su viscosidad, es necesario recurrir a otras propiedades reológicas como lo son el tiempo de relajación¹ t_r y el módulo de elasticidad² G .

¹ Tiempo necesario para que, en un modelo Maxwell, el esfuerzo disminuya a $1/e$ de su valor inicial bajo deformación constante. Está dado por el cociente de la viscosidad y el módulo elástico: $t_r = \frac{\eta}{G}$. Muchos materiales poseen multiplicidad de tiempos de relajación [24].

² Cociente entre el esfuerzo y la correspondiente deformación elástica [24].

Una ecuación constitutiva simple para fluidos viscoelásticos es el modelo de Maxwell que tiene la forma:

$$t_r \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \bar{\tau} = -\eta \nabla \bar{v} . \quad (2.9)$$

En el límite cuando el tiempo de relajación va a cero, (2.9) se reduce a la ecuación constitutiva de un fluido de Newton:

$$\bar{\tau} = -\eta \nabla \bar{v} . \quad (2.10)$$

Asimismo, al escribir (2.9) tomando en cuenta la definición del tiempo de relajación se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \frac{\bar{\tau}}{t_r} = -G \nabla \bar{v} . \quad (2.11)$$

En el límite cuando $t_r \rightarrow \infty$ se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = -G \nabla \bar{v} . \quad (2.12)$$

Al integrar esta expresión se recupera la ecuación constitutiva de un sólido de Hooke [25]:

$$\bar{\tau} = -G \nabla \bar{u} , \quad (2.13)$$

donde $\nabla \bar{u}$ es el tensor de deformaciones, que está dado por el gradiente del vector de desplazamientos. Por tanto, este es un modelo intermedio entre fluidos de Newton y sólidos de Hooke.

La ecuación diferencial linealizada para la velocidad de un fluido de Maxwell en el dominio del tiempo se obtiene utilizando (2.9) y (2.5), ésta es:

$$\boxed{t_r \rho \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -t_r \frac{\partial \nabla p}{\partial t} - \nabla p + \eta \nabla^2 \bar{v}} . \quad (2.14)$$

Nótese que cuando el tiempo de relajación es cero, esta ecuación se reduce a las ecuaciones de Navier Stokes para un fluido de Newton (ver ecuación 2.7).

2.2. Condiciones de Frontera: Resbalamiento Aparente

La solución de las ecuaciones (2.7) y (2.14) es particular para cada geometría y para cada situación de movimiento; para obtenerla es necesario especificar cómo es la velocidad del fluido en las fronteras, es decir, en contacto directo con las paredes. Usualmente, suponer una condición de frontera de adherencia ha resultado aceptable en macrosistemas, sin embargo, en microfluídica las interacciones *fluido-pared* son muy relevantes, por lo que la validez de esta suposición es altamente cuestionable.

En microfluídica existe un fenómeno de resbalamiento aparente, como se mencionó en el capítulo de introducción, es común explicar este hecho con una velocidad en las paredes distinta de cero. Existen dos problemas asociados con el deslizamiento, uno de ellos se refiere a los factores que lo originan y el otro a los efectos que ocasiona.

En este proyecto se analizan los efectos del resbalamiento sobre las funciones de respuesta dinámicas, las velocidades locales y el flujo de sistemas formados por fluidos que se desplazan en microcanales. Para ello, se define la velocidad en las paredes de acuerdo con la *hipótesis de Navier* que propone que esta velocidad es proporcional a la velocidad de deformación, por lo que se puede calcular a través de la expresión:

$$v_s = \lambda \dot{\gamma} , \quad (2.15)$$

donde v_s es la *velocidad de resbalamiento* del fluido y la velocidad de deformación $\dot{\gamma}$ está dada por la derivada de la velocidad en la dirección perpendicular al movimiento. La *longitud de resbalamiento*, representada por λ , es una constante que en estado estacionario indica la distancia hipotética a la que la velocidad en las paredes se haría cero al extrapolar el perfil (ver figura 2.2).

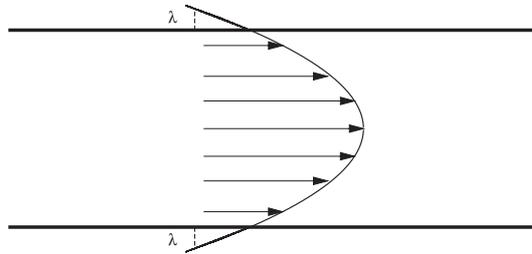


Figura 2.2: Perfil de velocidad con resbalamiento aparente en estado estacionario.

A la fecha son pocas pero convincentes, las evidencias experimentales que confirman la existencia de un resbalamiento aparente en los microsistemas. Se han encontrado longitudes de resbalamiento que van desde cientos de nanómetros hasta una micra [10, 11, 22].

En este trabajo también se estudian las consecuencias del deslizamiento sobre el esfuerzo cortante que se pueden calcular como [23]:

$$\tau = -\eta\dot{\gamma} . \quad (2.16)$$

2.3. Permeabilidad Dinámica y Flujo

La solución de las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento (2.7) y (2.14), puede expresarse en términos de una ley de Darcy, que es una relación lineal entre la velocidad promediada en la sección transversal y el gradiente de presión para una geometría dada. En estado estacionario, la constante de proporcionalidad está dada por el cociente negativo de la permeabilidad y la viscosidad del fluido. Esta permeabilidad sólo depende de la geometría característica del sistema.

Cuando un fluido está sujeto a un gradiente de presión dependiente del tiempo, se puede describir a través de la permeabilidad dinámica \hat{K} . En situaciones dinámicas, la permeabilidad además de ser función de la geometría de confinamiento, también depende de las características del fluido y de la frecuencia. Relaciona la velocidad con el gradiente de presión, a través de una ley de Darcy generalizada en el dominio de frecuencias [13, 14, 15, 16, 17].

La parte real de la permeabilidad dinámica sin deslizamiento para un fluido de Newton decrece monótonamente con la frecuencia, mientras que la de un fluido de Maxwell presenta máximos periódicos a determinadas frecuencias de resonancia. Los valores que la permeabilidad dinámica alcanza en estos máximos, son algunos órdenes de magnitud más grandes que el valor en estado estacionario. Cualitativamente, la permeabilidad de un fluido en un canal rectangular es muy similar a aquella en un canal cilíndrico [14, 15, 17]. En la figura (2.3) se esbozan las curvas típicas de esta variable para ambas clases de fluidos.

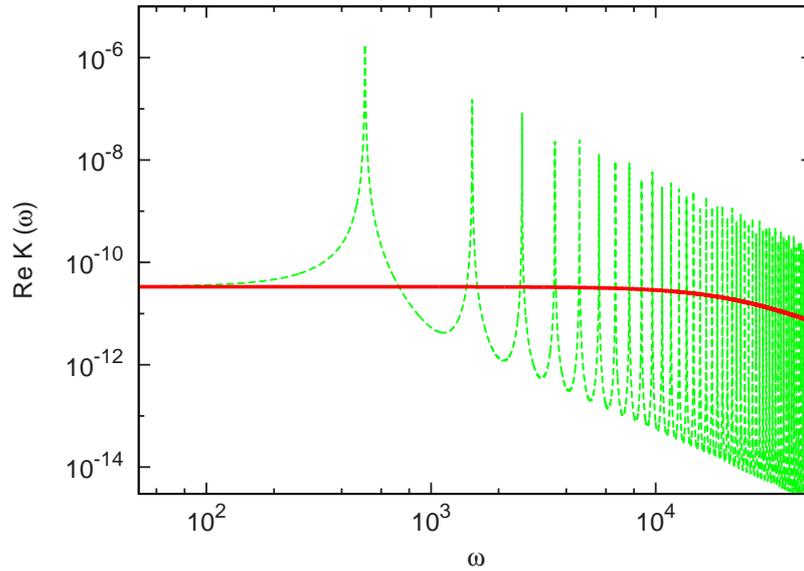


Figura 2.3: Curvas típicas de las partes reales de las permeabilidades dinámicas vs frecuencia angular. La línea punteada corresponde a un fluido de Maxwell y la línea continua a uno de Newton.

Como uno de los objetivos de este trabajo es ver las consecuencias del resbalamiento sobre el flujo volumétrico del sistema denotado por Q , para calcularlo se parte de la definición:

$$Q \equiv \langle v(t) \rangle \mathcal{A}, \quad (2.17)$$

en donde \mathcal{A} es el área transversal del microcanal. La cantidad de flujo depende del promedio de la velocidad en el tiempo para un gradiente de presión específico.

En particular para un gradiente de presión en el tiempo de la forma:

$$\frac{dp(t)}{dx} = \frac{dp_0}{dx} \cos(\omega_0 t), \quad (2.18)$$

se ha demostrado que la expresión para la velocidad promedio en el dominio del tiempo está dada por [15, 16]:

$$\langle v_x(t) \rangle = -\frac{1}{\eta} \left[\text{Re} \hat{K}(\omega_0) \cos(\omega_0 t) + \text{Im} \hat{K}(\omega_0) \text{sen}(\omega_0 t) \right] \frac{dp_0}{dx}. \quad (2.19)$$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DINÁMICAS DE FLUJO EN MICROCANALES

En este trabajo se estudia el desplazamiento de fluidos de Newton y de Maxwell en microcanales rectangulares, tanto en estado estacionario como en situaciones dependientes del tiempo. Se analizan los efectos de la condición de frontera de resbalamiento sobre la respuesta de los fluidos sujetos a una señal de presión dinámica. Concretamente, se examinan las modificaciones que el deslizamiento produce sobre la velocidad, la magnitud del flujo volumétrico y la permeabilidad dinámica; esta variable establece una relación lineal entre la velocidad y el gradiente de presión.

A continuación se describe el sistema de estudio utilizado y las suposiciones realizadas para obtener el modelo de flujo. Se deducen las leyes de Darcy, global y en su versión local, con sus correspondientes permeabilidades. Además, se resuelven las expresiones en el dominio del tiempo para: la velocidad, el flujo, la velocidad de resbalamiento y el esfuerzo cortante, para una señal de presión específica.

3.1. Descripción del Sistema de Estudio

El sistema que se examina consiste en un fluido que se desplaza en un microcanal formado por dos placas paralelas, separadas entre sí por una distancia muy pequeña (ver figura 3.1).

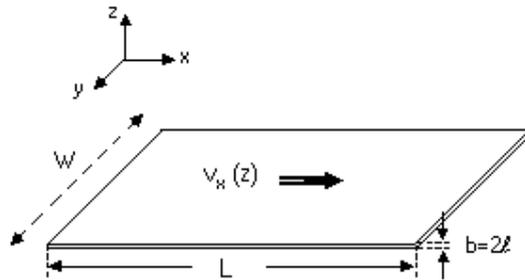


Figura 3.1: Microcanal rectangular. La longitud está denotada por L , el ancho por W y la altura o separación entre placas por $b = 2\ell$, donde: $L \gg W \gg b$.

Se considera que el fluido se desplaza con una velocidad que sólo existe en la dirección de movimiento seleccionada como x , es decir: $\bar{v} = (v_x, 0, 0)$. El flujo es homogéneo en las direcciones x y y , esto es: $v_x \neq v_x(x, y)$; por lo tanto, la velocidad solamente será función de z : $v_x = v_x(z)$. El movimiento se debe a la presencia de un gradiente de presión en la dirección de movimiento, dado por: $\nabla p = \frac{dp}{dx} \hat{i}$. Debido al fenómeno de deslizamiento, la condición de frontera para la velocidad en las paredes será igual a la velocidad de resbalamiento y estará dada por la hipótesis de Navier.

Como se espera que los resultados obtenidos puedan ser útiles para investigaciones posteriores enfocadas al transporte de biofluidos, las dimensiones de los microcanales se designaron tratando de reflejar el tamaño de los vasos capilares, que tienen un diámetro interno igual a $8 \mu m$ y una longitud que varía entre 1 y 2 mm . Se utilizaron las características de la sangre ($\eta = 0.0055 \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) para ejemplificar el comportamiento de un fluido viscoelástico. Se seleccionó esta sustancia, puesto que sus componentes le aportan características tanto viscosas como elásticas, y puede ser descrita utilizando el modelo de Maxwell. En el caso de fluidos de Newton se utilizaron las características del agua ($\eta = 0.001003 \text{ kg}/(m \text{ s})$ y $\rho = 998.2 \text{ kg}/m^3$). En ambos casos se consideró que la viscosidad y la densidad permanecen constantes en el tiempo y el

espacio. Para calcular el valor del gradiente de presión promedio, se utilizó una velocidad de 1 mm/s , que es la rapidez promedio con la que la sangre fluye en los vasos capilares [21].

3.2. Leyes de Darcy

En esta sección se resuelven las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, en estado estacionario y situaciones dinámicas, y se expresan como leyes de Darcy en su versión local y promediada en la sección transversal.

3.2.1. Estado Estacionario

En el estado estacionario las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento, tanto para un fluido de Newton como para uno de Maxwell (ecuaciones 2.7 y 2.14), con las simplificaciones del sistema de estudio se reducen a:

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} . \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) se debe resolver con las siguientes condiciones de frontera:

$$v_x^\lambda(z = \pm \ell) = v_s , \quad (3.2)$$

donde $v_x^\lambda(z)$ es el campo velocidades y v_s es el valor de la velocidad en la pared, es decir, la velocidad de resbalamiento.

La solución de la ecuación (3.1) tiene la forma:

$$v_x^\lambda(z) = Az^2 + Bz + C , \quad (3.3)$$

en donde $A = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx}$. Al evaluar las condiciones de frontera (ecuación 3.2) se obtiene que: $B = 0$ y $C = v_s - \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \ell^2$.

Así, la expresión para la velocidad local con resbalamiento en estado estacionario es:

$$v_x^\lambda(z) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (z^2 - \ell^2) + v_s . \quad (3.4)$$

El promedio de la velocidad en la sección transversal está definido como:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} v_x(z) dz . \quad (3.5)$$

Al sustituir (3.4) en (3.5) se obtiene:

$$\langle v_x^\lambda \rangle = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (\langle z^2 \rangle - \ell^2) + v_s , \quad (3.6)$$

donde

$$\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} z^2 dz = \frac{1}{3} \ell^2 .$$

Por lo tanto, la velocidad promedio en estado estacionario de un fluido de Newton o de Maxwell, en un microcanal rectangular con deslizamiento en las paredes es:

$$\langle v_x^\lambda \rangle = -\frac{\ell^2}{3\eta} \frac{dp}{dx} + v_s . \quad (3.7)$$

Para encontrar explícitamente la velocidad de resbalamiento se requiere de una suposición adicional. La hipótesis de Navier (sección 2.2) propone que esta velocidad es proporcional a la velocidad de deformación evaluada en la pared. La constante de proporcionalidad corresponde a una longitud de resbalamiento denotada por λ , esto es:

$$v_s = \lambda \left. \frac{dv_x^\lambda}{dz} \right|_{z=-\ell} = -\lambda \left. \frac{dv_x^\lambda}{dz} \right|_{z=\ell} . \quad (3.8)$$

Se requiere especial cuidado con el signo de la pendiente, de manera que el flujo y la velocidad de resbalamiento siempre tengan la misma dirección.

Para obtener la expresión para la velocidad en las paredes, se deriva (3.4) y evalúa en $z = \ell$. Utilizando (3.8) se determina que la velocidad de resbalamiento es:

$$v_s = -\frac{\lambda \ell}{\eta} \frac{dp}{dx} . \quad (3.9)$$

Al sustituir (3.9) en la expresión para la velocidad local (ecuación 3.4) se tiene:

$$v_x^\lambda(z) = \frac{1}{\eta} \left[\frac{z^2 - \ell^2}{2} - \lambda\ell \right] \frac{dp}{dx}, \quad (3.10)$$

que escrita en términos de una ley de Darcy local la forma:

$$v(z) = -\frac{K_L(z)}{\eta} \frac{dp}{dx}, \quad (3.11)$$

permite identificar a la permeabilidad local como:

$$K_L^\lambda(z) = \frac{z^2 - \ell^2}{2} - \lambda\ell. \quad (3.12)$$

Para la velocidad promedio, al sustituir (3.9) en (3.7) se tiene una ley de Darcy para el caso en que la velocidad de las paredes está dada por la hipótesis de Navier (ecuación 3.8), esto es:

$$\langle v_x^\lambda \rangle = -\frac{1}{\eta} \left[\frac{\ell^2}{3} + \lambda\ell \right] \frac{dp}{dx}, \quad (3.13)$$

que escrita de la forma:

$$\langle v \rangle = -\frac{K}{\eta} \frac{dp}{dx}, \quad (3.14)$$

permite identificar que la permeabilidad con resbalamiento como:

$$K^\lambda = \frac{\ell^2}{3} + \lambda\ell. \quad (3.15)$$

Cuando la longitud de Navier tiende a cero, se recupera la ley de Darcy sin resbalamiento:

$$\langle v_x^{\lambda=0} \rangle = -\frac{\ell^2}{3\eta} \frac{dp}{dx}, \quad (3.16)$$

así como la correspondiente permeabilidad:

$$K^{\lambda=0} = \frac{\ell^2}{3}. \quad (3.17)$$

Es importante recalcar que las deducciones anteriores son válidas tanto para fluidos de Maxwell, como para fluidos de Newton, ya que al tratarse de cálculos en

estado estacionario los términos con derivadas temporales se hacen cero y en la ecuación (2.14) el carácter elástico no está presente.

El esfuerzo cortante evaluado en la pared para este sistema se calcula a partir de la expresión:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{dv_x^\lambda}{dz} \Big|_{z=\ell} = -\eta \frac{dv_x^\lambda}{dz} \Big|_{z=-\ell} . \quad (3.18)$$

3.2.2. Situaciones Dinámicas

La ecuación diferencial para velocidad de un fluido de Maxwell (2.14) puede reescribirse en el dominio de frecuencias a través de la transformada de Fourier, que para una función $f(t)$ está definida como:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.19)$$

donde ω es la frecuencia. La correspondiente antitransformada de Fourier está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega . \quad (3.20)$$

De acuerdo con (3.19), la ecuación (2.14) en el dominio de Fourier es:

$$\rho \hat{v} (t_r \omega^2 + i\omega) + \eta \nabla^2 \hat{v} = \nabla \hat{p} (1 - t_r i\omega) . \quad (3.21)$$

Para las condiciones de flujo del sistema de estudio se reduce a:

$$\frac{d^2 \hat{v}_x^\lambda}{dz^2} + \frac{\rho}{\eta} (t_r \omega^2 + i\omega) \hat{v}_x^\lambda = \frac{1}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx} (1 - t_r i\omega) \quad (3.22)$$

que debe resolverse con las condiciones de frontera:

$$\hat{v}_x^\lambda(z = \pm \ell) = \hat{v}_s , \quad (3.23)$$

en donde la velocidad de resbalamiento no está aún especificada.

Para simplificar la notación se definen: $A \equiv \frac{\rho}{\eta} (t_r \omega^2 + i\omega)$ y $B \equiv \frac{1}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx} (1 - t_r i\omega)$.

Por lo que (3.22) se puede escribir como:

$$\frac{d^2 \hat{v}_x^\lambda}{dz^2} + A \hat{v}_x^\lambda = B. \quad (3.24)$$

La solución de la ecuación (3.24) tiene la forma:

$$\hat{v}_x^\lambda = \alpha e^{i\sqrt{A}z} + \beta e^{-i\sqrt{A}z} + \hat{v}_x^P, \quad (3.25)$$

aquí \hat{v}_x^P es una solución particular dada por:

$$\hat{v}_x^P = \frac{B}{A} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.26)$$

Entonces (3.25) se reescribe como:

$$\hat{v}_x^\lambda = \alpha e^{i\sqrt{A}z} + \beta e^{-i\sqrt{A}z} + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.27)$$

Al aplicar las condiciones de frontera (3.23) en (3.27) se obtiene que:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{e^{i\sqrt{A}\ell} - e^{-i\sqrt{A}\ell}} \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right).$$

Al sustituir α y β en la expresión (3.27) se tiene:

$$\hat{v}_x^\lambda = \frac{e^{i\sqrt{A}z} - e^{-i\sqrt{A}z}}{e^{i\sqrt{A}\ell} - e^{-i\sqrt{A}\ell}} \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right) + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.28)$$

Como $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, la ecuación (3.28) toma la forma:

$$\hat{v}_x^\lambda(z) = \frac{\cos(\sqrt{A}z)}{\cos(\sqrt{A}\ell)} \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right) + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (3.29)$$

que es la expresión para la velocidad con resbalamiento como función de z en el dominio de frecuencias.

La velocidad promediada en el área de la sección transversal es:

$$\langle \hat{v}_x^\lambda \rangle = \frac{\langle \cos(\sqrt{A}z) \rangle}{\cos(\sqrt{A}\ell)} \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right) + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (3.30)$$

donde

$$\langle \cos(\sqrt{A} z) \rangle = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \cos(\sqrt{A} z) dz = \frac{\text{sen}(\sqrt{A} \ell)}{\sqrt{A} \ell} .$$

Por lo tanto, la ley de Darcy de un fluido viscoelástico con resbalamiento en el dominio de frecuencias, antes de cualquier hipótesis para la velocidad en las paredes es:

$$\langle \hat{v}_x^\lambda \rangle = \frac{\tan(\sqrt{A} \ell)}{\sqrt{A} \ell} \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right) + \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} . \quad (3.31)$$

De igual forma que en el caso estacionario, para encontrar la velocidad de resbalamiento es necesario utilizar una suposición adicional. Ésta será la misma hipótesis de Navier (ecuación 3.8) con λ constante, en donde ahora tanto la derivada de la velocidad en la pared, como la velocidad de resbalamiento dependen del tiempo. Para encontrar la expresión de esta condición se procede de la siguiente manera:

La transformada de Fourier de la velocidad de acuerdo con la definición (3.19) es:

$$\hat{v}_x^\lambda(\omega, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^\lambda(t, z) e^{i\omega t} dt . \quad (3.32)$$

Al derivar (3.32) respecto a z y evaluarla en $z = \ell$ se obtiene:

$$\frac{d\hat{v}_x^\lambda}{dz}(\omega, z = \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x^\lambda}{dz}(t, z = \ell) e^{i\omega t} dt . \quad (3.33)$$

Por otro lado, al evaluar directamente (3.32) en $z = \ell$ se tiene:

$$\hat{v}_x^\lambda(\omega, z = \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^\lambda(t, z = \ell) e^{i\omega t} dt . \quad (3.34)$$

De acuerdo con la condición de Navier (ecuación 3.8), el lado derecho de (3.34) se puede escribir como:

$$\hat{v}_x^\lambda(\omega, z = \ell) = -\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x^\lambda}{dz}(t, z = \ell) e^{i\omega t} dt . \quad (3.35)$$

Al utilizar (3.33) y (3.35) se obtiene:

$$\hat{v}_x^\lambda(\omega, z = \ell) = -\lambda \frac{d\hat{v}_x^\lambda}{dz}(\omega, z = \ell). \quad (3.36)$$

De esta manera, se deduce que la hipótesis de Navier en el dominio de las frecuencias, con λ constante, es:

$$\hat{v}_s = \lambda \frac{d\hat{v}_x^\lambda}{dz} \Big|_{z=-\ell} = -\lambda \frac{d\hat{v}_x^\lambda}{dz} \Big|_{z=\ell}. \quad (3.37)$$

Ahora es posible obtener la expresión explícita para la velocidad de resbalamiento, para lo que se deriva la ecuación (3.29) respecto a z y se evalúa en $z = \ell$, esto es:

$$\frac{d\hat{v}_x^\lambda}{dz} \Big|_{z=\ell} = -\sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell) \left(\hat{v}_s - \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx} \right). \quad (3.38)$$

Al sustituir en la ecuación (3.37) se encuentra que la velocidad de resbalamiento en el dominio de las frecuencias está dada por:

$$\hat{v}_s = -\frac{\lambda\sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell)}{1 - \lambda\sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell)} \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.39)$$

Al sustituir la ecuación (3.39) en (3.29) se obtiene la expresión para la velocidad local con resbalamiento de un fluido de Maxwell en el dominio de las frecuencias:

$$\hat{v}_x^\lambda(z, \omega) = \left[1 - \frac{\cos(\sqrt{A} z)}{\cos(\sqrt{A} \ell)} \left(\frac{1}{1 - \lambda\sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell)} \right) \right] \frac{1}{i\omega\rho} \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (3.40)$$

donde A está dada por:

$$A \equiv \frac{i\omega\rho}{\eta} (1 - i\omega t_r). \quad (3.41)$$

Al compararla con una ley de Darcy local de la forma:

$$\hat{v}_x(z, \omega) = -\frac{\hat{K}_L(z, \omega)}{\eta} \frac{d\hat{p}(\omega)}{dx}, \quad (3.42)$$

se obtiene que la permeabilidad dinámica local es:

$$\hat{K}_L^\lambda(z, \omega) = -\frac{\eta}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{\cos(\sqrt{A} z)}{\cos(\sqrt{A} \ell)} \left(\frac{1}{1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell)} \right) \right]. \quad (3.43)$$

Por su parte, al sustituir (3.39) en (3.31) se obtiene una ley de Darcy generalizada para fluidos viscoelásticos cuando la velocidad en las paredes está dada por la hipótesis de Navier:

$$\langle \hat{v}_x^\lambda(\omega) \rangle = \frac{1}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{\tan(\sqrt{A} \ell)}{\sqrt{A} \ell (1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell))} \right] \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.44)$$

Al escribirla como una ley de Darcy:

$$\langle \hat{v}(\omega) \rangle = -\frac{\hat{K}(\omega)}{\eta} \frac{d\hat{p}(\omega)}{dx}, \quad (3.45)$$

se identifica a la permeabilidad dinámica con deslizamiento como¹:

$$\hat{K}^\lambda(\omega) = -\frac{\eta}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{\tan(\sqrt{A} \ell)}{\sqrt{A} \ell (1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell))} \right]. \quad (3.46)$$

Cuando la longitud de resbalamiento es cero, se recupera la ley de Darcy en el dominio de las frecuencias para un fluido viscoelástico sin deslizamiento [17]:

$$\langle \hat{v}_x^{\lambda=0} \rangle = \frac{1}{i\omega\rho} \left[1 - \frac{\tan(\sqrt{A} \ell)}{\sqrt{A} \ell} \right] \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3.47)$$

¹ En la práctica, es posible medir de forma separada la parte real y la imaginaria de la permeabilidad dinámica. Formalmente, cada parte estará dada por:

$$Re\hat{K} = \frac{\hat{K} + \hat{K}^*}{2} \quad y \quad Im\hat{K} = \frac{\hat{K} - \hat{K}^*}{2},$$

donde $\hat{K}^* = Re\hat{K} - iIm\hat{K}$ es el complejo conjugado de la permeabilidad.

Asimismo, si se toma el límite de la ecuación (3.46) cuando $\omega \rightarrow 0^2$, se recupera la permeabilidad en estado estacionario con deslizamiento (ecuación 3.15):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{K}^\lambda = \frac{\ell^2}{3} + \lambda \ell . \quad (3.48)$$

La ley de Darcy dinámica para un fluido de Newton se puede deducir a partir del modelo anterior, al eliminar los términos de carácter elástico, es decir, utilizando $t_r = 0$; es así que (3.41) se reduce a:

$$\boxed{A = \frac{i\omega\rho}{\eta}} \quad (3.49)$$

y las expresiones (3.40), (3.43), (3.44) y (3.46) son válidas para un fluido de Newton cuando A está dada por la ecuación (3.49).

3.3. Velocidad de Resbalamiento y Esfuerzo Cortante

La variación de la velocidad de resbalamiento y del esfuerzo cortante se puede obtener a partir de la expresión para la velocidad local en el dominio del tiempo y su derivada evaluada en la pared para un gradiente de presión determinado. Para obtener el valor de esta velocidad local, se debe seguir un proceso similar al referido en la sección 2.3 para la expresión de la velocidad promedio (ecuación 2.19) [16].

Primero, es necesario imponer un gradiente de presión en el tiempo y obtener la correspondiente expresión en el dominio de las frecuencias a través de una

² Para obtener el límite es necesario expresar la tangente de la ecuación (3.46) como una serie que de forma general es:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots .$$

transformada de Fourier (ecuación 3.19). Si por ejemplo, se utiliza un gradiente de presión en el tiempo de coseno (ecuación 2.18), al escribirlo en el espacio de Fourier y sustituirlo en (3.40), se obtiene la expresión para la velocidad local en el dominio de las frecuencias. Posteriormente, al utilizar la transformada de Fourier inversa (ecuación 3.20) de $\hat{v}(\omega, z)$, se obtiene que la velocidad local en el dominio del tiempo a una frecuencia ω_0 es:

$$v_x(z, t) = -\frac{1}{\eta} \left[\text{Re}\hat{K}_L(z, \omega_0)\cos(\omega_0 t) + \text{Im}\hat{K}_L(z, \omega_0)\text{sen}(\omega_0 t) \right] \frac{dp_0}{dx}. \quad (3.50)$$

Al evaluar directamente (3.50) en $z = \ell$ se obtiene la expresión para la velocidad de resbalamiento en el dominio del tiempo:

$$v_s(t) = -\frac{1}{\eta} \left[\text{Re}\hat{K}_L(z = \ell, \omega_0)\cos(\omega_0 t) + \text{Im}\hat{K}_L(z = \ell, \omega_0)\text{sen}(\omega_0 t) \right] \frac{dp_0}{dx}. \quad (3.51)$$

Por su parte, la derivada de (3.50) respecto a z es:

$$\frac{d}{dz}v_x(z, t) = -\frac{1}{\eta} \left[\cos(\omega_0 t)\frac{d}{dz}\text{Re}\hat{K}_L(z, \omega_0) + \text{sen}(\omega_0 t)\frac{d}{dz}\text{Im}\hat{K}_L(z, \omega_0) \right] \frac{dp_0}{dx}. \quad (3.52)$$

Al utilizar (3.52) y (3.18) se obtiene el esfuerzo cortante en la pared como función del tiempo para este gradiente de presión:

$$\tau_{xz}(t) \Big|_{z=\ell} = - \left[\cos(\omega_0 t)\frac{d}{dz}\text{Re}\hat{K}_L(z, \omega_0) + \text{sen}(\omega_0 t)\frac{d}{dz}\text{Im}\hat{K}_L(z, \omega_0) \right] \Big|_{z=\ell} \frac{dp_0}{dx}. \quad (3.53)$$

DINÁMICA DE FLUIDOS DE NEWTON CON RESBALAMIENTO

En este capítulo se estudia el movimiento no estacionario de fluidos de Newton en microcanales con resbalamiento. Se discute el comportamiento de la permeabilidad dinámica, que contiene información sobre la respuesta de los fluidos ante la imposición de un gradiente de presión dinámico y el efecto que la presencia del resbalamiento produce sobre las condiciones de flujo. Se presenta también una relación de escala entre las permeabilidades de celdas de distinto tamaño, que sólo se cumple en ausencia de deslizamiento y constituye una propuesta para determinar experimentalmente el valor de la longitud de resbalamiento y una manera de establecer la validez de la hipótesis de Navier en situaciones dependientes del tiempo.

4.1. Efectos del Resbalamiento

La parte real de la permeabilidad dinámica de un fluido de Newton decrece monótonamente con la frecuencia, este decaimiento se atribuye a una respuesta viscosa del sistema ante el cambio de sentido de flujo. Este cambio de sentido se debe a que en situaciones en las que existe una sola frecuencia, el movimiento del fluido es periódico y oscila alrededor de un valor promedio, por lo que el sentido se invierte constantemente. Como la viscosidad determina la respuesta del fluido

ante el gradiente de presión dinámico, si el sentido de dicho gradiente se modifica antes de que el fluido haya alcanzado un estado estacionario, se impide que la respuesta termine y la nueva dirección del gradiente de presión induce otra respuesta en sentido contrario.

El efecto del deslizamiento sobre la permeabilidad depende de la frecuencia. Como se muestra en la figura (4.1), en el estado estacionario ($\omega = 0$) el resbalamiento incrementa el valor de la permeabilidad. Existe una frecuencia en la que las partes reales de las permeabilidades con y sin resbalamiento se igualan y para mayores frecuencias, la permeabilidad con resbalamiento es menor. El valor de esta *frecuencia de cruce* decrece con el aumento de la longitud de resbalamiento (ver figura 4.2). Como el deslizamiento introduce una longitud efectiva mayor al sistema, la parte real de la permeabilidad con resbalamiento decaerá más rápidamente que la de la permeabilidad sin resbalamiento. De hecho, las curvas tanto para la parte real como para la parte imaginaria de la permeabilidad con y sin resbalamiento, se comportan tal y como lo hacen las curvas de la permeabilidad sin resbalamiento para distintos tamaños de celda.

Para poder calcular el flujo como una función del tiempo a una frecuencia particular, es necesario considerar la parte real e imaginaria de la permeabilidad dinámica, de acuerdo a lo expuesto en la sección 2.3 (ecuación 2.19).

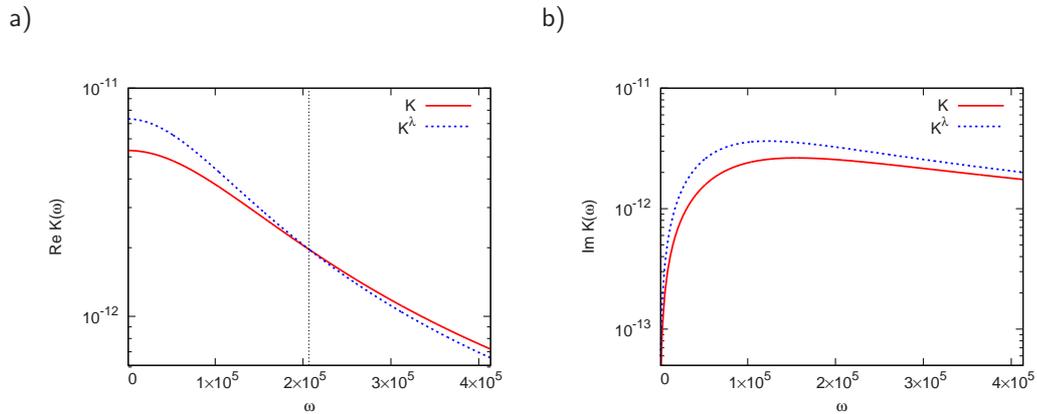


Figura 4.1: Partes real e imaginaria de la permeabilidad dinámica (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} kg/(m s)$ y $\rho = 998.2 kg/m^3$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \mu m$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$.

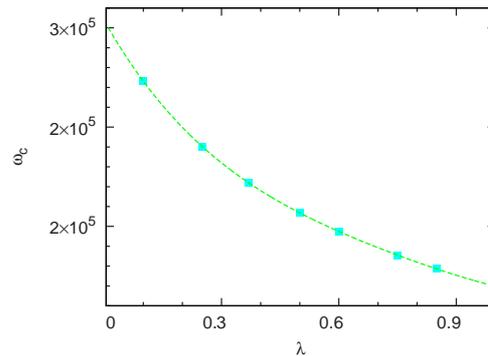


Figura 4.2: Frecuencia de cruce (en rad/s) vs longitud de resbalamiento (en μm) de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} kg/(m s)$ y $\rho = 998.2 kg/m^3$) que se desplaza en un microcanal rectangular con resbalamiento de altura $b = 8 \mu m$.

En la figura (4.3) se muestran los resultados obtenidos para la velocidad promedio y la magnitud del flujo ante un gradiente de presión de coseno (ecuaciones 2.18 y 2.19). Los cálculos se realizaron para la frecuencia de cruce y para una frecuencia anterior y otra posterior a dicho punto. Consistente con el efecto del resbalamiento en estado estacionario, para los tres valores de ω se encontró que el flujo es mayor con deslizamiento y que no hay diferencias cualitativas ocasionadas por la intersección de las partes reales de las permeabilidades con y sin resbalamiento.

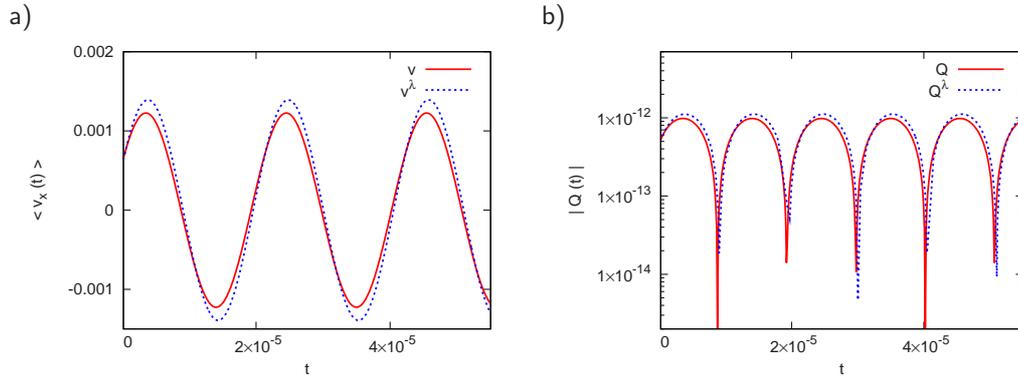


Figura 4.3: a) Velocidad promedio (en m/s), b) magnitud del flujo volumétrico (en m^3/s) vs tiempo (en s), de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$ y $\rho = 998.2 \text{ kg}/m^3$) que se desplaza en un microcanal rectangular de altura $b = 8 \mu m$, ancho $W = 100 \mu m$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$; sujeto a una señal de presión de coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa}/m$ y frecuencia angular $\omega_0 = 300,000 \text{ rad}/s$.

En la figura (4.4) se compara el efecto del resbalamiento sobre la velocidad en las paredes (velocidad de resbalamiento) y el esfuerzo cortante, para un gradiente de presión de coseno a una frecuencia ω_0 . Para estos cálculos se utilizaron las ecuaciones (3.51) y (3.53).

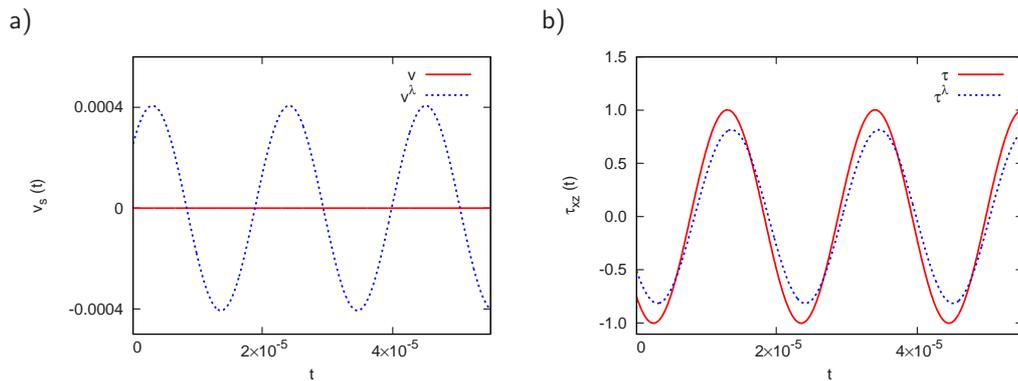


Figura 4.4: a) Velocidad de resbalamiento (en m/s), b) esfuerzo cortante en la pared (en N/m^2) vs tiempo (en s) de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$ y $\rho = 998.2 \text{ kg}/m^3$), que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \mu m$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$; sujeto a una señal de presión de coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = 5 \times 10^5 \text{ Pa}/m$ y frecuencia angular $\omega_0 = 300,000 \text{ rad}/s$.

Cuando no hay deslizamiento, la velocidad en las paredes siempre es cero, pero si se tiene un valor finito de λ , la velocidad de resbalamiento oscila en el tiempo; con el aumento de esta longitud, la amplitud de la oscilación se ve favorecida. El valor del esfuerzo cortante en la pared oscila en el tiempo tanto en ausencia de deslizamiento como en presencia de éste. De acuerdo a lo esperado, presenta una amplitud máxima para $\lambda = 0$ y disminuye conforme aumenta la longitud de resbalamiento. Esto es, el deslizamiento reduce la fricción en la interfase fluido-pared.

4.2. Relación de Escala entre Permeabilidades Dinámicas

En ausencia de resbalamiento, las permeabilidades dinámicas de dos celdas diferentes cumplen una relación de escala que se rompe cuando el resbalamiento está presente. Esta relación podría convertirse en una forma de probar experimentalmente si en un sistema efectivamente existe deslizamiento, y en caso de haberlo, se podría determinar el valor de la longitud de resbalamiento.

Para deducir esta relación es necesario dividir la permeabilidad dinámica (ecuación 3.46) con $\lambda = 0$ entre ℓ^2 y sustituir A de la ecuación (3.49):

$$\frac{\hat{K}}{\ell^2} = -\frac{\eta}{i\rho\omega\ell^2} \left[1 - \frac{\tan\sqrt{\frac{i\rho\omega\ell^2}{\eta}}}{\sqrt{\frac{i\rho\omega\ell^2}{\eta}}} \right]. \quad (4.1)$$

Al agrupar los términos relacionados con la frecuencia con los términos referentes al tamaño de la celda como: $x = \omega \ell^2$, la ecuación (4.1) puede reescribirse de la forma:

$$\frac{\hat{K}}{\ell^2} = -\frac{\eta}{i\rho x} \left[1 - \frac{\tan \sqrt{\frac{i\rho x}{\eta}}}{\sqrt{\frac{i\rho x}{\eta}}} \right]. \quad (4.2)$$

Como se puede observar de la ecuación (4.2), para un mismo fluido en ausencia de resbalamiento, $\frac{\hat{K}}{\ell^2}$ depende del producto $x = \omega \ell^2$. Por lo tanto, para dos experimentos distintos con el mismo valor de x , se obtendrá exactamente el mismo valor de $\frac{\hat{K}}{\ell^2}$.

Por ejemplo, si se realizaran dos experimentos, el primero en un canal con separación entre placas ℓ_1 y frecuencia ω_1 y el segundo, en una celda del doble de tamaño ($\ell_2 = 2\ell_1$) y frecuencia cuatro veces menor ($\omega_2 = \omega_1/4$), x sería en ambos casos: $x = \omega_1 \ell_1^2$ y la razón $\frac{\hat{K}}{\ell^2}$ estaría dada por:

$$\frac{\hat{K}_1}{\ell_1^2} = \frac{\hat{K}_2}{\ell_2^2} = -\frac{1}{\mathcal{X}^2} \left[1 - \frac{\tan \mathcal{X}}{\mathcal{X}} \right], \quad (4.3)$$

donde $\mathcal{X} = \sqrt{\frac{i\rho x}{\eta}}$.

De forma general, se puede escribir una relación de escala como:

$$\frac{\beta^2 \hat{K}(\omega, \ell)}{\hat{K}(\omega/\beta^2, \beta\ell)} = 1 \quad (4.4)$$

donde β es cualquier entero positivo.

Cuando hay deslizamiento, λ toma un valor finito y la permeabilidad con resbalamiento dividida entre ℓ^2 , es una función de la forma: $\frac{\hat{K}^\lambda}{\ell^2}(\mathcal{X}, \frac{\lambda}{\ell})$ y ya no es la misma para dos microcanales distintos. Esto es, la *relación de escala* encontrada para las permeabilidades sin deslizamiento (ecuación 4.4) ya no se cumple debido al efecto de añadir al problema una nueva longitud de escala dada por $\frac{\lambda}{\ell}$.

Generalizando, el cociente de la ecuación (4.4) al caso con resbalamiento se tiene:

$$\xi = \frac{\beta^2 \hat{K}(\omega, \ell, \lambda)}{\hat{K}(\omega/\beta^2, \beta\ell, \lambda)}. \quad (4.5)$$

Al escribir (4.5) de forma desarrollada se tiene:

$$\frac{\beta^2 \hat{K}(\omega, \ell, \lambda)}{\hat{K}(\omega/\beta^2, \beta\ell, \lambda)} = \frac{1 - \frac{\tan \mathcal{X}}{\mathcal{X}(1 - \frac{\lambda}{\ell} \mathcal{X} \tan \mathcal{X})}}{1 - \frac{\tan \mathcal{X}}{\mathcal{X}(1 - \frac{\lambda}{\beta\ell} \mathcal{X} \tan \mathcal{X})}} \neq 1. \quad (4.6)$$

Con la ecuación (4.6) se demuestra explícitamente que el resbalamiento rompe la relación de escala de las permeabilidades y que el cociente ξ , para un mismo fluido que se desplaza en dos microcanales distintos con deslizamiento, en general es diferente de 1.

En el estado estacionario el cociente ξ también será distinto de 1 en presencia de resbalamiento y estará dado por:

$$\xi = \frac{\beta(\ell + 3\lambda)}{\beta\ell + 3\lambda}. \quad (4.7)$$

La figura (4.5) muestra la parte real y la parte imaginaria del cociente ξ . Los cálculos fueron realizados para el ejemplo descrito anteriormente: un microcanal con ℓ_1 y frecuencia ω_1 , y otro microcanal con $\ell_2 = 2\ell_1$ y frecuencia $\omega_2 = \omega_1/4$. En estas gráficas se observa cómo el valor de ξ se desvía de 1 cuando hay deslizamiento. Este resultado podría funcionar para probar experimentalmente si en el sistema existe o no resbalamiento. Esto es, si para el par de experimentos mencionados, el cociente ξ es tal que: $Re\xi = 1$ y $Im\xi = 0$, se concluiría que no existe resbalamiento en las celdas. Por el contrario $Re\xi \neq 1$ y $Im\xi \neq 0$, indicaría que en el sistema hay deslizamiento.

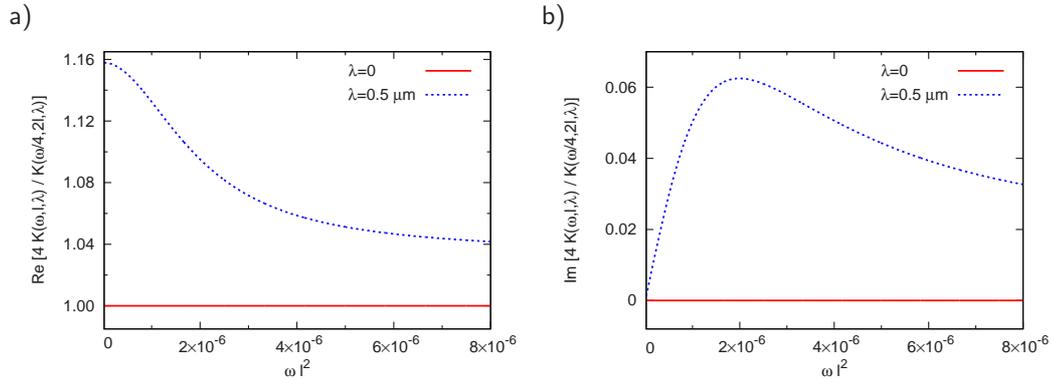


Figura 4.5: Partes real e imaginaria del cociente de las permeabilidades dinámicas de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$ y $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$), que se desplaza en microcanales con $\ell = 4 \text{ }\mu\text{m}$ y longitud de resbalamiento λ .

Conocer el valor de ξ hace posible establecer explícitamente la magnitud de la longitud de resbalamiento. Esto se logra al reescribir la ecuación (4.6) como una expresión cuadrática en $\frac{\lambda}{\ell}$ de la forma:

$$A \left(\frac{\lambda}{\ell} \right)^2 + B \frac{\lambda}{\ell} + C = 0, \quad (4.8)$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mathcal{X}^3 \tan^2 \mathcal{X}}{\beta}, \\ B &= \mathcal{X} \tan \mathcal{X} \left(\frac{\xi^{-\frac{1}{\beta}}}{\xi-1} \tan \mathcal{X} - \frac{\mathcal{X}}{\beta} (\beta + 1) \right) \quad \text{y} \\ C &= \mathcal{X} - \tan \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Sólo una de las raíces de la ecuación (4.8) tendrá sentido físico y ésta corresponderá al valor de la longitud de resbalamiento.

Cada par de experimentos como los descritos en el ejemplo seleccionado, daría un valor particular de $Re\xi$ para una valor seleccionado de ωl^2 . Se calculó la longitud de resbalamiento reescalada por ℓ como función del cociente ξ para distintas frecuencias. Los resultados se muestran en la figura (4.6) en función del parte real de ξ .

La ecuación (4.8) o la figura (4.6) permitirían determinar el valor de $\frac{\lambda}{\ell}$ para un fluido en un tipo específico de paredes a partir de conocer la permeabilidad dinámica en dos experimentos diferentes.

Ahora bien, si la hipótesis de Navier con la longitud de resbalamiento constante fuera válida para situaciones dinámicas, tal como se ha considerado en este trabajo, distintos pares de experimentos deberían dar exactamente el mismo valor de la longitud de resbalamiento. Si el valor de λ fuese distinto, esto implicaría que la hipótesis de Navier con λ constante no es admisible en situaciones dependientes del tiempo para el sistema estudiado. Lo anterior constituye una propuesta para comprobar la validez de esta hipótesis para un sistema específico, en situaciones dinámicas.

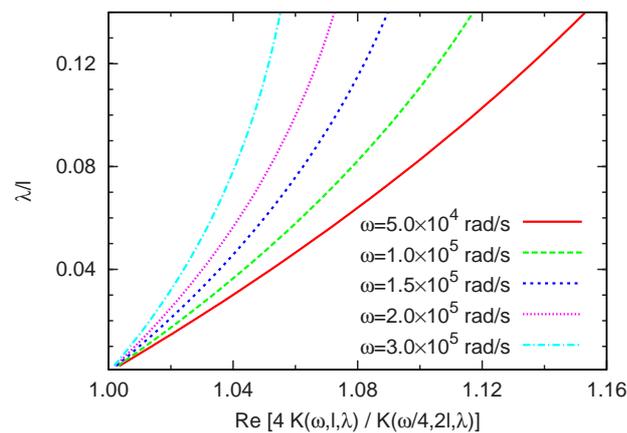


Figura 4.6: Longitud de resbalamiento en dimensiones de ℓ vs parte real del cociente de las permeabilidades dinámicas de un fluido de Newton ($\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m s})$ y $\rho = 998.2 \text{ kg}/\text{m}^3$) que se desplaza en microcanales con $\ell = 4 \mu\text{m}$.

DINÁMICA DE FLUIDOS DE MAXWELL

La respuesta de un fluido viscoelástico ante un gradiente de presión dinámico difiere notablemente de la de un fluido de Newton. En este capítulo se estudia el movimiento de un fluido de Maxwell en microcanales con adherencia total a las paredes. Se discute la tendencia general de la permeabilidad dinámica y se presentan los perfiles de velocidad como función del tiempo para una señal de presión de coseno. Se incluye un análisis de los cambios que dichos perfiles sufren por efecto de la frecuencia.

5.1. Permeabilidades Dinámicas

Como se ha mencionado anteriormente, la respuesta de cualquier fluido ante un gradiente de presión dinámico depende de la frecuencia y se puede deducir a través del estudio de la permeabilidad dinámica. Está demostrado que la permeabilidad de un fluido de Maxwell presenta máximos a determinadas frecuencias, llamadas *frecuencias de resonancia*; a dichas frecuencias, la parte imaginaria de la permeabilidad se hace cero [15].

En general, para estos fluidos, la parte imaginaria de la permeabilidad dinámica es varios órdenes de magnitud menor que la parte real, por ello, para análisis cualitativos se puede inferir mucho sobre el comportamiento del fluido a partir de la observación de la parte real de la permeabilidad (ver figura 5.1a). Esto no ocurre en el caso de fluidos de Newton en donde ambas contribuciones son del mismo orden de magnitud.

El valor de las *frecuencias de resonancia* se puede obtener analíticamente [18]. Desde el punto de vista matemático, la permeabilidad dinámica será máxima cuando la parte real del argumento del término $\tan(\sqrt{A} \ell)$ esté dado por múltiplos nones de $\frac{\pi}{2}$ (ver ecuación 3.46), esto es:

$$\sqrt{A} \ell = \frac{(2n-1)}{2} \pi + iB . \quad (5.1)$$

Al sustituir A de la ecuación (3.41) y elevar (5.1) al cuadrado se obtiene:

$$\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} + i(2n-1) \pi B - B^2 = \frac{i\omega_{res} \rho \ell^2}{\eta} + \frac{\omega_{res}^2 \rho t_r \ell^2}{\eta} . \quad (5.2)$$

Las partes real e imaginaria de esta igualdad dan dos ecuaciones para ω_{res} y para B . La expresión analítica para las frecuencias de resonancia es:

$$\omega_{res} = \left[\frac{(2n-1)^4 \pi^4 \eta^2}{4\rho \ell^2 \{ (2n-1)^2 \pi^2 \eta t_r + \rho \ell^2 \}} \right]^{1/2} , \quad (5.3)$$

donde n corresponde a los distintos máximos de la permeabilidad y toma valores de: $n = 1, 2, 3, \dots$.

La parte real de la permeabilidad dinámica local para el centro de las placas ($z = 0$) presenta máximos y mínimos de forma alternada, su signo depende de la frecuencia. Los valores de las resonancias coinciden con los encontrados para la permeabilidad global; sin embargo, para las resonancias pares la permeabilidad local es menor que cero y está en un mínimo, mientras que para las impares es positiva y está en un máximo (ver figura 5.1b).

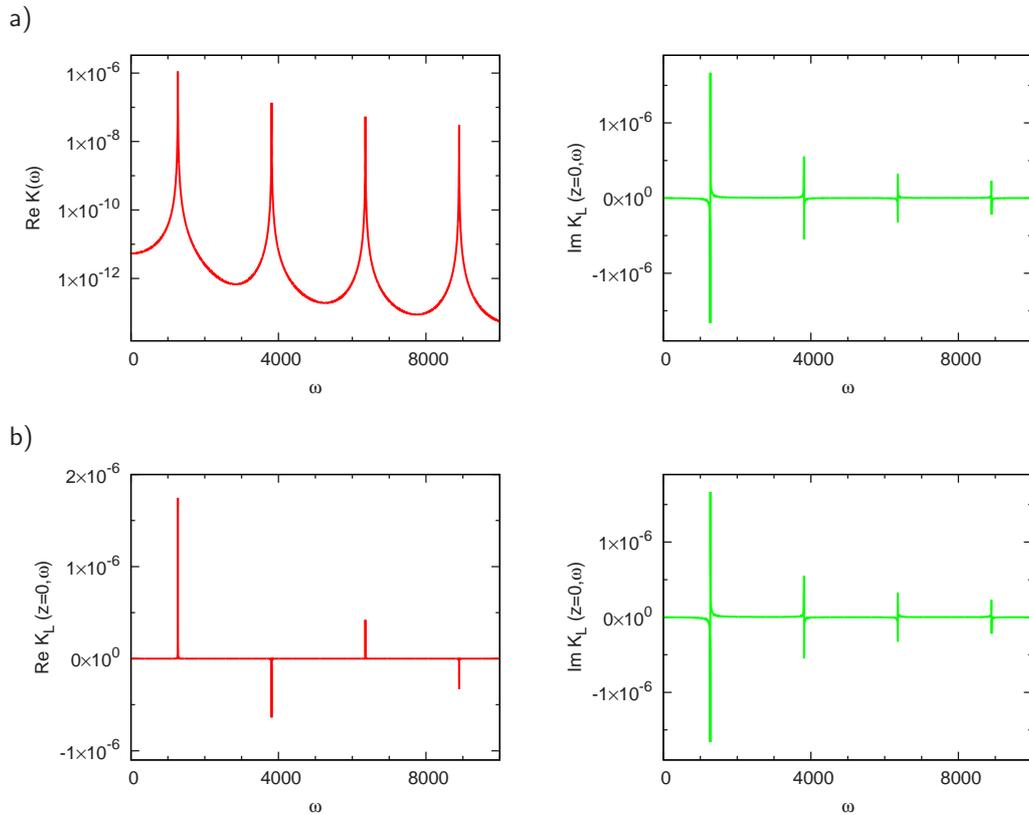


Figura 5.1: Partes real e imaginaria de la permeabilidad dinámica a) global (en m^2), b) local (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \mu m$.

5.2. Perfiles de Velocidad: Subceldas

La figura (5.2) contiene las velocidades locales como función de la dirección perpendicular al movimiento z (ecuación 3.50), para las cuatro primeras frecuencias de resonancia. Cada figura contiene siete perfiles de velocidad calculados para diferentes valores de tiempo t ; éstos fueron seleccionados de forma que se tuviera información suficiente sobre la variación de un periodo completo (desde un máximo y hasta un mínimo) de la velocidad.

La forma de los perfiles de velocidad sugiere una manera de estratificar el flujo, es decir, con el aumento de la frecuencia se presenta un fenómeno que produce un flujo por capas que podría servir por ejemplo, para confinar diferentes sustancias en capas distintas.

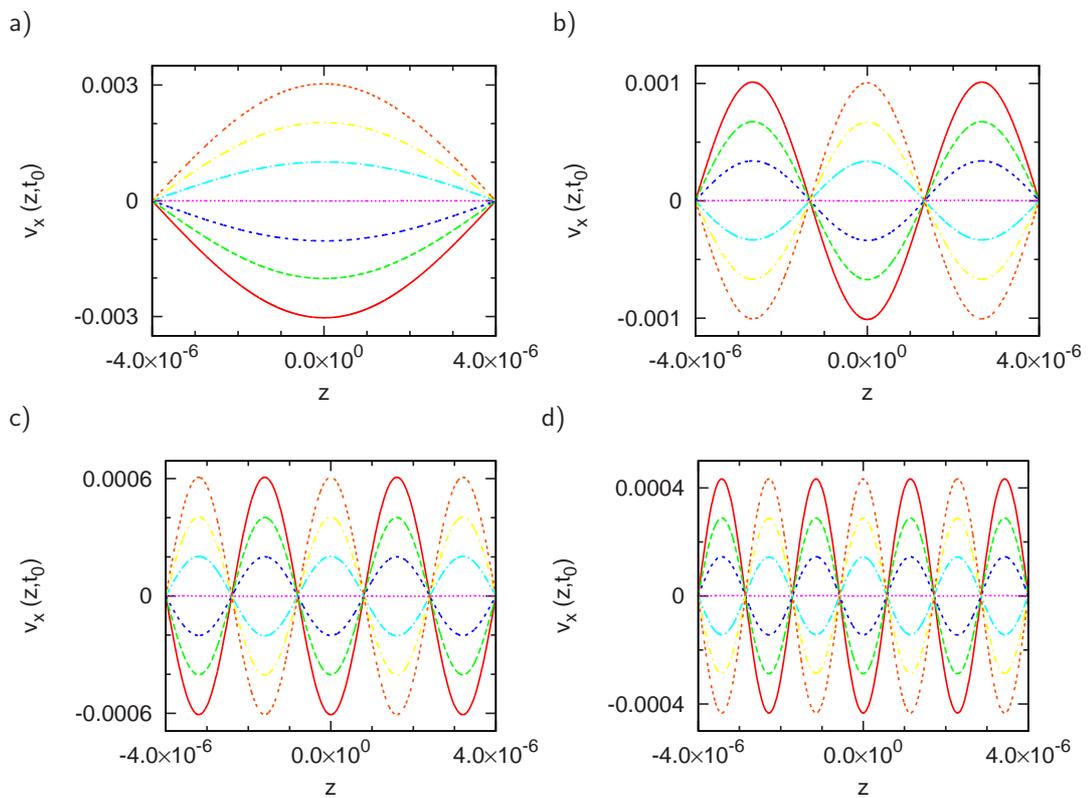


Figura 5.2: Perfiles de velocidad dinámicos de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \text{ }\mu\text{m}$ y está sujeto a una señal de presión de coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa/m}$ y frecuencia de resonancia: a) $\omega_{res}(n = 1) = 1271.05 \text{ rad/s}$, b) $\omega_{res}(n = 2) = 3813.14 \text{ rad/s}$, c) $\omega_{res}(n = 3) = 6355.23 \text{ rad/s}$ y d) $\omega_{res}(n = 4) = 8897.33 \text{ rad/s}$. Cada figura contiene siete curvas distintas, cada una corresponde a una velocidad local (en m/s) vs z (en m) para un tiempo t_0 (en s) dentro de un periodo de oscilación.

Al tomar el caso de la figura (5.2b) para la segunda frecuencia de resonancia, se observa que los perfiles de velocidad son tales que la celda se divide en tres subceldas de idéntica altura y el flujo de las celdas vecinas ocurre en sentidos opuestos. Para determinar si cada una de estas subceldas tiene propiedades similares a las de un microcanal de altura $b/3$ se comparan, a continuación, la segunda frecuencia de resonancia del microcanal de altura b con la primera, de un microcanal de altura $b/3$. Para ello, se utiliza la expresión analítica para las frecuencias de resonancia (ecuación 5.3).

La primera frecuencia de resonancia del microcanal de altura $b = 2\ell$ es:

$$\omega_{res}(n = 1, \ell) = \left[\frac{\pi^4 \eta^2}{4\rho\ell^2 \{\pi^2 \eta t_r + \rho\ell^2\}} \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

y la segunda frecuencia de resonancia está dada por:

$$\omega_{res}(n = 2, \ell) = \left[\frac{3^4 \pi^4 \eta^2}{4\rho\ell^2 \{3^2 \pi^2 \eta t_r + \rho\ell^2\}} \right]^{1/2} . \quad (5.5)$$

Por otro lado, la primera frecuencia de resonancia de un microcanal de altura $\frac{b}{3} = 2\left(\frac{\ell}{3}\right)$ es:

$$\omega_{res}\left(n = 1, \frac{\ell}{3}\right) = \left[\frac{\pi^4 \eta^2}{4\rho\ell^2 \{\pi^2 \eta t_r + \rho\ell^2\}} \right]^{1/2} , \quad (5.6)$$

por lo tanto:

$$\omega_{res}(n = 2, \ell) = \omega_{res}\left(n = 1, \frac{\ell}{3}\right) . \quad (5.7)$$

Esto es, la primera frecuencia de resonancia de un microcanal de altura $\frac{b}{3}$ es la misma que la segunda frecuencia de resonancia de un microcanal de altura b .

En general, el perfil de velocidades correspondiente a la n -ésima frecuencia de resonancia divide al microcanal en $2n - 1$ subceldas de altura $\frac{b}{2n-1}$. La n -ésima

frecuencia de resonancia del microcanal de altura $b = 2\ell$ es igual que la primera resonancia de un microcanal de altura $\frac{\ell}{2^{n-1}}$:

$$\omega_{res}(n, \ell) = \omega_{res}\left(n = 1, \frac{\ell}{2^{n-1}}\right). \quad (5.8)$$

En la figura (5.3a1, b1, c1) se comparan gráficamente las partes reales de las permeabilidades dinámicas de microcanales de altura b y $\frac{b}{2^{n-1}}$. Consistente con la relación dada por la ecuación (5.8), el primer máximo de la parte real de la permeabilidad de la subcelda, ocurre exactamente en el mismo valor de frecuencia de resonancia que el enésimo máximo de la permeabilidad del microcanal de altura b . La magnitud de la permeabilidad a la primera frecuencia de resonancia es independiente del tamaño del sistema [16], por tanto, es la misma para la celda original y la subcelda.

Las figuras correspondientes a los perfiles de velocidad contienen tres curvas distintas. Las líneas punteadas corresponden a las velocidades locales del microcanal de altura b a la primera y la enésima frecuencia de resonancia respectivamente ($n = 2, 3$ y 4). La línea continua corresponde a la velocidad local de un microcanal de altura $\frac{b}{2^{n-1}}$ a la primera frecuencia de resonancia para el mismo gradiente de presión aplicado. Los resultados muestran que los extremos de los perfiles de velocidad de los microcanales de menor tamaño, coinciden con los nodos de los perfiles del microcanal de altura b para la enésima frecuencia de resonancia; sin embargo, su amplitud es del mismo orden de magnitud que la del perfil de este canal a la primera resonancia. Esto es consecuencia directa del hecho de que el valor de la permeabilidad a la primera frecuencia de resonancia sea independiente del tamaño del sistema y de que la señal de presión sea la misma en ambos casos.

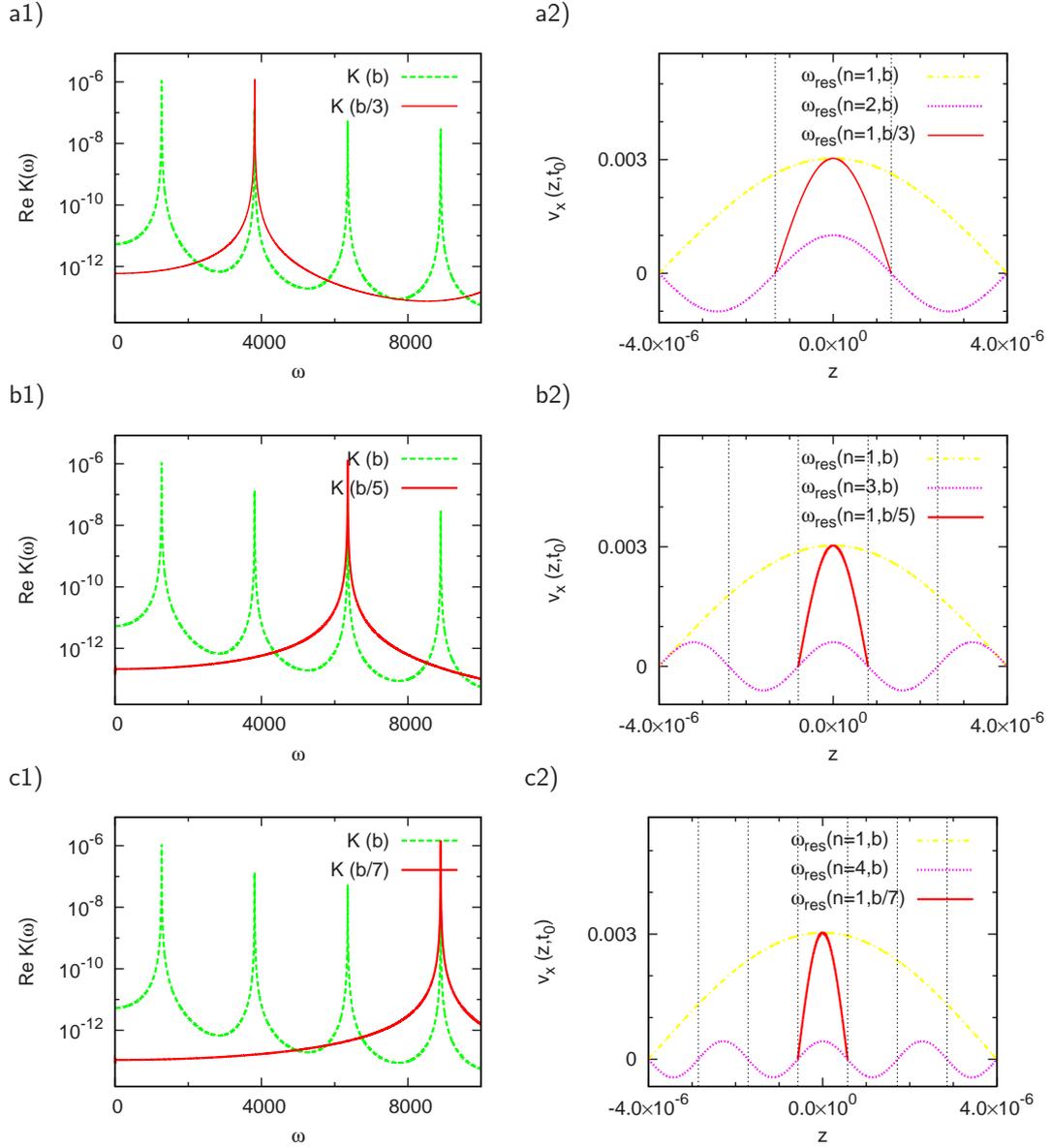


Figura 5.3: 1) Parte real de las permeabilidades dinámicas (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en microcanales de altura $b = 8 \mu m$ y $\frac{b}{2n-1}$; sujeto a una señal de presión de coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa}/m$. 2) Perfiles de velocidad dinámicos con amplitud máxima a las frecuencias de resonancia: $\omega_{\text{res}}(n=1, b) = 1271.05 \text{ rad}/s$, $\omega_{\text{res}}(n=2, b) = 3813.14 \text{ rad}/s$, $\omega_{\text{res}}(n=3, b) = 6355.23 \text{ rad}/s$ y $\omega_{\text{res}}(n=4, b) = 8897.33 \text{ rad}/s$. Las velocidades locales están en m/s y z en m .

FLUIDOS DE MAXWELL: EFECTO DEL RESBALAMIENTO

A continuación se discuten las consecuencias que la presencia del resbalamiento aparente produce sobre un fluido de Maxwell en un microcanal. Se analizan los cambios que este fenómeno ocasiona sobre el movimiento de los fluidos, a través del estudio de la permeabilidad dinámica, el campo de velocidades y la magnitud de flujo en estados dependientes del tiempo.

6.1. Flujo Anómalo

En estado estacionario, la presencia del resbalamiento introduce una separación entre placas mayor a la altura del microcanal (ecuación 3.13). Esto conlleva a un aumento en la parte real de la permeabilidad del sistema (ecuación 3.15), así como a la adición de un término positivo a todo el campo de velocidades (ecuación 3.10), como se muestra en la figura (6.1). Debido a que el flujo en un microcanal está dado por el promedio de la velocidad multiplicado por el área de la sección transversal (ecuación 2.17), una separación efectiva mayor representa un aumento del flujo neto¹.

¹Experimentalmente el aumento del flujo en microcanales lleva a postular el resbalamiento aparente y éste conduce a la conclusión de un tamaño de celda efectiva mayor que el tamaño real del microcanal. Sin embargo, para el análisis realizado es conveniente mostrar cómo un tamaño efectivo mayor afecta al flujo en situaciones dinámicas.

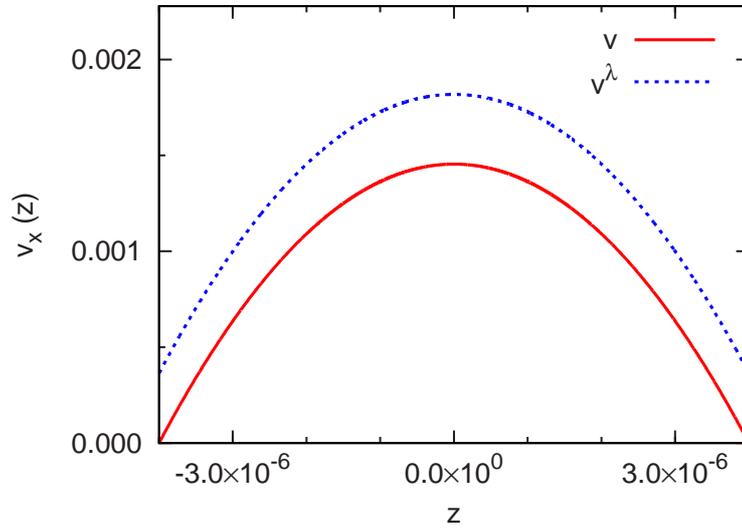


Figura 6.1: Perfiles de velocidad en estado estacionario de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \text{ }\mu\text{m}$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \text{ }\mu\text{m}$; sujeto a una señal de presión constante dada por: $\frac{dp_0}{dx} = -1 \times 10^6 \text{ Pa/m}$. Las velocidades están en m/s y z en m .

Ingenuamente, se podría pensar que el efecto del resbalamiento implica siempre un aumento del flujo volumétrico. Sin embargo, éste no es el caso en situaciones dinámicas, como se discute a continuación.

En investigaciones anteriores [14, 15, 16, 17], a partir del análisis de las curvas de la parte real de las permeabilidades dinámicas para dos celdas de diferente tamaño (ver figura 6.2), se han encontrado las siguientes características:

1. La parte real de la permeabilidad dinámica a bajas frecuencias depende de forma cuadrática de la separación entre placas: $\hat{K}(\omega \approx 0) \sim b^2$.
2. La primera frecuencia de resonancia es aproximadamente proporcional al inverso de la separación entre placas: $\omega_{res} \sim \frac{1}{b}$.
3. Las curvas de la parte real de la permeabilidad dinámica como función de la frecuencia presentan innumerables cruces para frecuencias mayores a la

primera resonancia de la celda mayor. Esto es, existen rangos de frecuencia para los que la parte real de la permeabilidad es mayor para el sistema grande y rangos para los que es mayor para el sistema pequeño.

Para situaciones dinámicas, la presencia del resbalamiento es perfectamente consistente con una longitud efectiva mayor para todo el espectro de frecuencias. Como se puede ver en la figura (6.3) a bajas frecuencias la permeabilidad con resbalamiento es mayor que sin él; las frecuencias de resonancia con resbalamiento son menores que sin él y las curvas de la parte real de la permeabilidad con y sin resbalamiento se entrecruzan continuamente, de modo que en ciertos rangos de frecuencia la permeabilidad con resbalamiento es menor que sin él y en ciertos rangos se tiene el efecto opuesto.

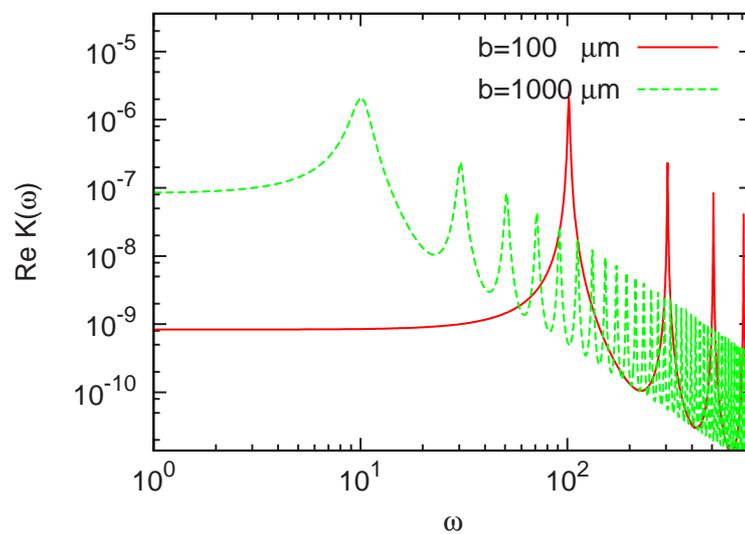
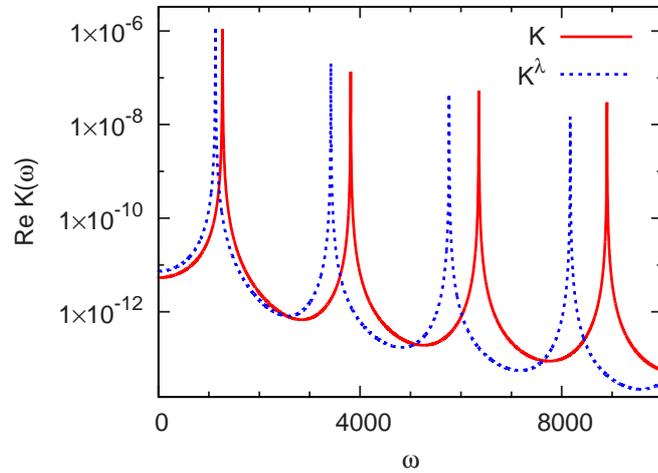


Figura 6.2: Parte real de las permeabilidades dinámicas (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} kg/(m s)$, $\rho = 1050 kg/m^3$ y $t_r = 0.5 s$) que se desplaza en canales de altura b .

a)



b)

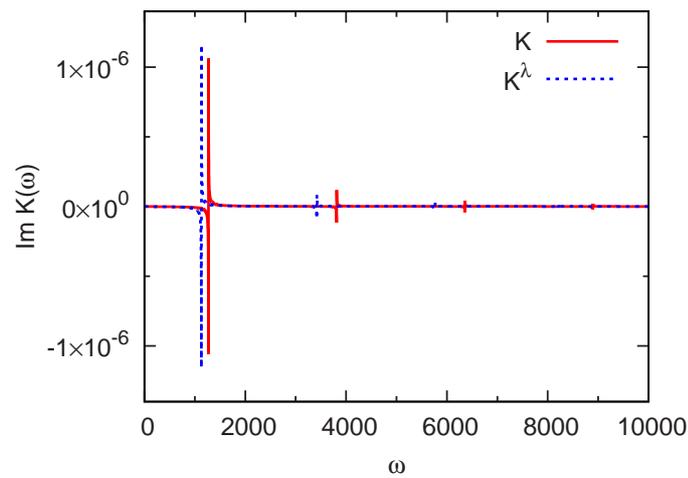


Figura 6.3: Permeabilidades dinámicas con y sin resbalamiento (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \text{ }\mu\text{m}$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \text{ }\mu\text{m}$.

El comportamiento de la parte real de la permeabilidad dinámica se ve reflejado en la velocidad local del fluido. Esta velocidad depende de la frecuencia a la que se imponga una señal de presión (ecuación 3.13). Si se considera por ejemplo, la

primera frecuencia de resonancia en ausencia de deslizamiento, se puede ver que a esa misma frecuencia tanto la parte real como la imaginaria de la permeabilidad con resbalamiento tienen un valor muy pequeño (ver figura 6.3); la amplitud de la velocidad local a la frecuencia de resonancia será máxima, mientras que la de la velocidad con resbalamiento será notablemente menor (ver figura 6.4a)². Por otro lado, si se considera la frecuencia de resonancia con deslizamiento se obtiene un perfil cuya amplitud máxima es del mismo orden que el obtenido en ausencia de resbalamiento, a su respectiva frecuencia de resonancia, pero con un valor distinto de cero en las paredes (ver figura 6.4b); mientras que el perfil para la velocidad sin resbalamiento tiene una amplitud comparativamente menor por estar fuera de la resonancia.

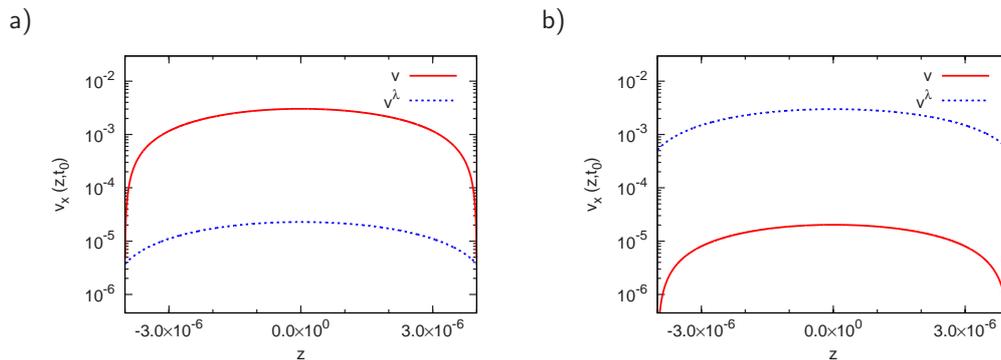


Figura 6.4: Comparación de los perfiles de velocidad con amplitud máxima a las frecuencias de resonancia: a) $\omega_{res}(n=1) = 1271.05$ rad/s y b) $\omega_{res}^\lambda(n=1) = 1131.04$ rad/s; de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3}$ kg/(m s), $\rho = 1050$ kg/m³ y $t_r = 0.5$ s) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8$ μ m y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5$ μ m; sujeto a un gradiente de presión coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5$ Pa/m. Las velocidades locales están en m/s y z en m.

Lo anterior resulta más claro si se observa la variación de la velocidad como función del tiempo y la magnitud del flujo volumétrico. Para ello se utilizó la expresión para la velocidad en el dominio del tiempo con un gradiente de presión coseno

² Para calcular los perfiles de velocidad se utilizan las versiones locales de la velocidad y la permeabilidad, pero para el argumento cualitativo basta con observar el comportamiento de la permeabilidad global.

en su versión promediada en el área transversal (ecuación 2.19). La figura (6.5a) contiene los resultados de las velocidades calculadas a la primera frecuencia de resonancia sin resbalamiento y la figura (6.5b) corresponde a la primera frecuencia de resonancia con resbalamiento. En ambos casos se observa que cada velocidad tiene amplitud máxima a su correspondiente frecuencia de resonancia, mientras que la otra velocidad tiene un valor de amplitud muy cercano a cero.

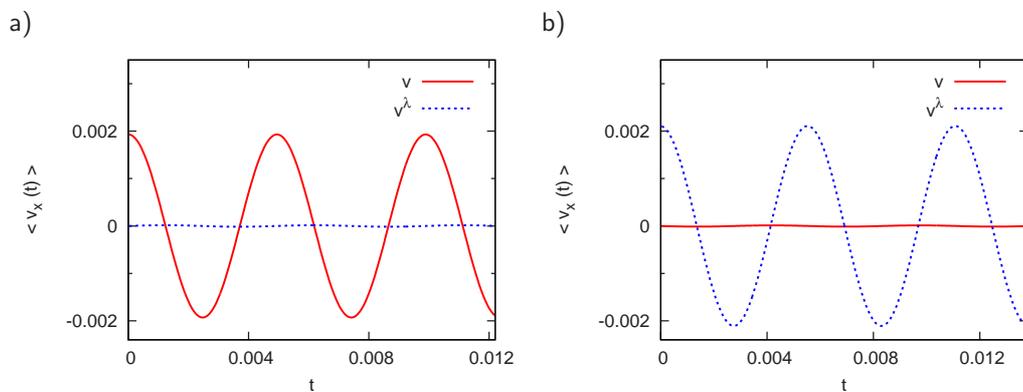


Figura 6.5: Velocidad promedio (en m/s) vs tiempo (en s), de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \mu m$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$; sujeto a un gradiente de presión coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa}/m$ y frecuencia de resonancia a) $\omega_{res}(n=1) = 1271.05 \text{ rad}/s$ y b) $\omega_{res}^\lambda(n=1) = 1131.04 \text{ rad}/s$.

Por lo que respecta a la magnitud del flujo (ecuación 2.17), el efecto se ilustra en la figura (6.6). La diferencia entre los valores del flujo es, para el sistema en resonancia y el sistema fuera de ella, de dos órdenes de magnitud. El hecho de que para fluidos viscoelásticos existan rangos de frecuencias para los cuales la magnitud de flujo es mayor sin resbalamiento que con él, representa una anomalía cuando se compara con el comportamiento en estado estacionario.

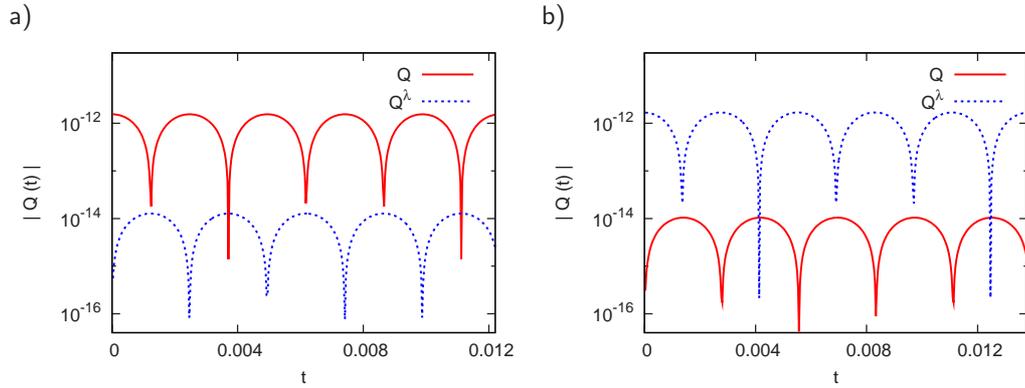


Figura 6.6: Magnitud del flujo volumétrico (en m^3/s) vs tiempo (en s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg}/(m \text{ s})$, $\rho = 1050 \text{ kg}/m^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal rectangular de altura $b = 8 \mu m$, ancho $W = 100 \mu m$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$; sujeto a un gradiente de presión coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa}/m$ y frecuencia de resonancia: a) $\omega_{res}(n = 1) = 1271.05 \text{ rad}/s$ y b) $\omega_{res}^\lambda(n = 1) = 1131.04 \text{ rad}/s$.

6.2. Celda Efectiva

El señalar que un canal con resbalamiento tiene una altura efectiva mayor, es un modo de referirse al tamaño virtual que éste necesitaría para que la velocidad local se hiciera cero en las paredes.

La longitud efectiva denotada por $b' = 2\ell'$ es función de la frecuencia. Se puede calcular utilizando la ecuación (3.43) para la permeabilidad con resbalamiento de un microcanal de altura 2ℓ , e igualándola con la permeabilidad sin resbalamiento de una celda de altura $2\ell'$, de lo que resulta una función de la forma:

$$\cos(\sqrt{A} \ell') = \cos(\sqrt{A} \ell) \left[1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell) \right]. \quad (6.1)$$

En principio bastaría con despejar ℓ' de la ecuación (6.1), esto es:

$$\ell' = \frac{\arccos \left\{ \cos(\sqrt{A} \ell) \left[1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell) \right] \right\}}{\sqrt{A}}, \quad (6.2)$$

en la práctica no se contaba con un software que pudiese resolver la función \arccos de un número complejo, por lo que se procedió de la siguiente manera:

Con las identidades:

$$\cos(-i\alpha) = \cos(i\alpha) = \cosh(\alpha) \text{ y } \sen(-i\alpha) = -\sen(i\alpha) = i\senh(\alpha),$$

el lado izquierdo de (6.1) puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{A} \ell') &= \cos(\operatorname{Re}\sqrt{A} \ell') \cosh(\operatorname{Im}\sqrt{A} \ell') \\ &+ i \sen(\operatorname{Re}\sqrt{A} \ell') \senh(\operatorname{Im}\sqrt{A} \ell'). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Al sustituir (6.3) en (6.1) se obtienen dos expresiones independientes de la forma:

$$\cos(\operatorname{Re}\sqrt{A} \ell') \cosh(\operatorname{Im}\sqrt{A} \ell') = \operatorname{Re}\beta, \quad (6.4a)$$

$$\sen(\operatorname{Re}\sqrt{A} \ell') \senh(\operatorname{Im}\sqrt{A} \ell') = \operatorname{Im}\beta, \quad (6.4b)$$

donde $\beta = \cos(\sqrt{A} \ell) \left[1 - \lambda \sqrt{A} \tan(\sqrt{A} \ell) \right]$.

Como $\cosh^2 \alpha - \senh^2 \alpha = 1$, entonces (6.4) se puede escribir como:

$$\boxed{\frac{\operatorname{Re}\beta^2}{\cos^2(\sqrt{A} \ell')} - \frac{\operatorname{Im}\beta^2}{\sen^2(\sqrt{A} \ell')} = 1} \quad (6.5)$$

El valor de la longitud de la celda efectiva ℓ' puede obtenerse por un proceso iterativo a partir de la ecuación (6.5) y depende de las propiedades del fluido, la geometría y la frecuencia.

Se calculó la longitud efectiva para un microcanal con resbalamiento de altura $b = 8 \mu m$, en un rango de frecuencias de 0 a 6500 rad/s . Los resultados obtenidos se muestran en la figura (6.7). Se encontró que la longitud efectiva siempre es mayor que la verdadera y llega a ser hasta un 20% más grande que ésta.

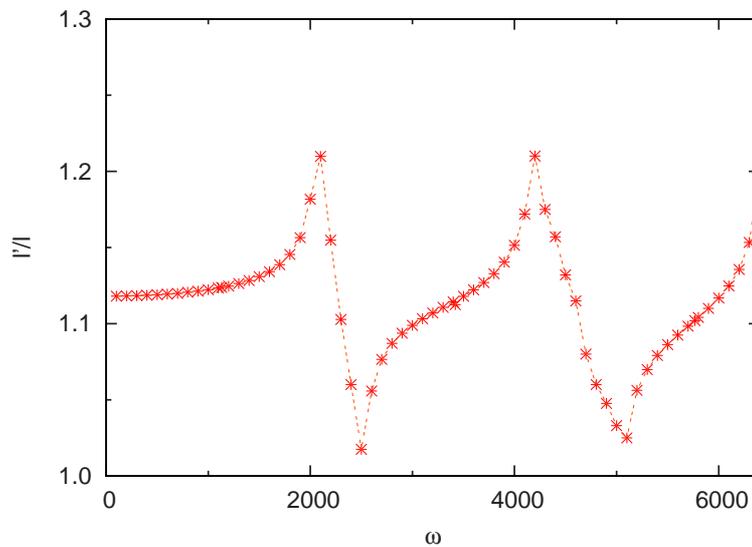


Figura 6.7: Longitud efectiva en unidades de la longitud verdadera l vs frecuencia angular (en rad/s), de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura b y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \mu m$.

La permeabilidad dinámica de la celda efectiva depende además, de las propiedades del fluido, de la frecuencia y de la longitud efectiva, esto es: $\hat{K} = \hat{K}(\omega, \ell', 0)$. Esta permeabilidad debe ser igual a la permeabilidad dinámica con deslizamiento del microcanal verdadero, que es una función de la forma: $\hat{K}^\lambda = \hat{K}^\lambda(\omega, \ell, \lambda)$. En la figura (6.8) se comparan gráficamente la parte real de la permeabilidad para la celda efectiva, que se calculó a partir de los resultados obtenidos (figura 6.7), con la parte real de la permeabilidad dinámica con resbalamiento del microcanal verdadero. De acuerdo con los resultados esperados, ambas curvas coinciden en el rango seleccionado de frecuencias.

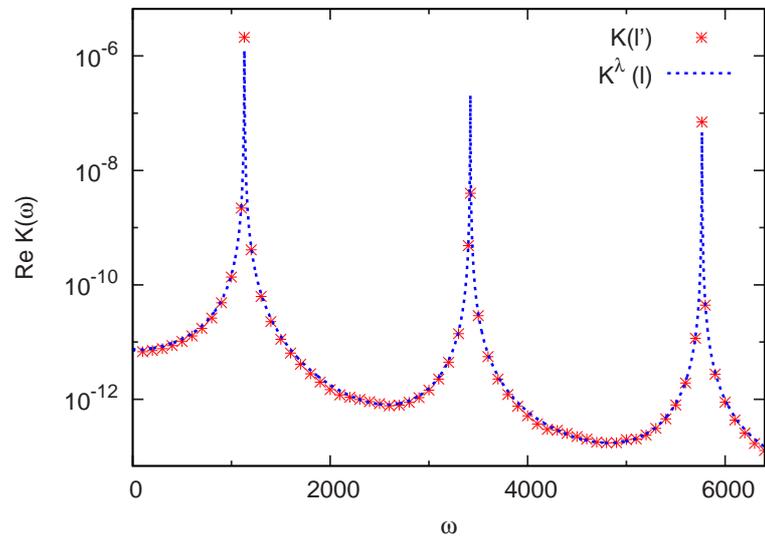


Figura 6.8: Parte real de la permeabilidad dinámica del microcanal con resbalamiento ($b = 8 \mu m$ y $\lambda = 0.5 \mu m$) y de la celda efectiva (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} kg/(m s)$, $\rho = 1050 kg/m^3$ y $t_r = 0.5 s$).

6.3. Subceldas Efectivas

La figura (6.9) muestra las velocidades locales con resbalamiento para las primeras cuatro frecuencias de resonancia a diferentes tiempos. Se encontró que los perfiles con deslizamiento, al igual que ocurre sin él, se dividen en varias subceldas; pero el tamaño de éstas no corresponde exactamente a un submúltiplo de la altura de la celda original, es decir: $2\ell = 2\frac{\ell}{2n-1}$, como sucede cuando no hay deslizamiento. El hecho de que, en general, la velocidad no alcance el valor de cero en las paredes hace que las subceldas de los extremos tengan un tamaño diferente a las centrales.

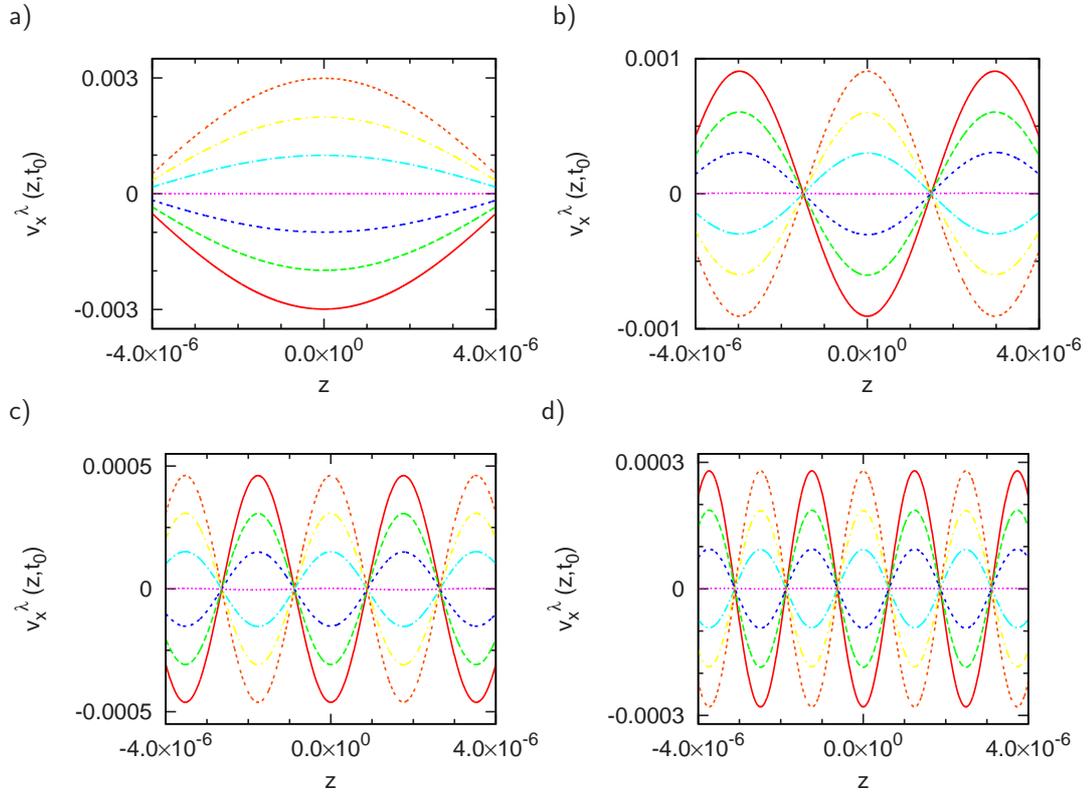


Figura 6.9: Perfiles de velocidad dinámicos con resbalamiento de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} \text{ kg/(m s)}$, $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ y $t_r = 0.5 \text{ s}$) que se desplaza en un microcanal de altura $b = 8 \text{ }\mu\text{m}$ y longitud de resbalamiento $\lambda = 0.5 \text{ }\mu\text{m}$, que está sujeto a una señal de presión coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 \text{ Pa/m}$ y frecuencia de resonancia: a) $\omega_{res}^\lambda(n=1) = 1131.04 \text{ rad/s}$, b) $\omega_{res}^\lambda(n=2) = 3419.90 \text{ rad/s}$, c) $\omega_{res}^\lambda(n=3) = 5766.54 \text{ rad/s}$ y d) $\omega_{res}^\lambda(n=4) = 8168.53 \text{ rad/s}$. Cada figura contiene siete curvas distintas, cada una corresponde a una velocidad local con resbalamiento (en m/s) vs z (en m) para un tiempo t_0 (en s) dentro de un periodo de oscilación.

El tamaño de las subceldas centrales se puede determinar asociando su altura con un submúltiplo de la longitud efectiva del microcanal. Por ejemplo, para la tercera frecuencia de resonancia, la longitud efectiva es $b' = 8.82 \text{ }\mu\text{m}$. Al dividir esta longitud en cinco partes iguales y calcular la permeabilidad dinámica correspondiente, se encontró que el primer máximo de la parte real de la permeabilidad del microcanal de altura $\frac{b'}{5}$ ocurre en el mismo valor de frecuencia de resonancia de la parte real de la permeabilidad de la celda efectiva de altura b' (ver figura 6.10a). Además la magnitud de ambas permeabilidades es la misma en dicha frecuencia.

En la figura (6.10b) se muestran los resultados para las velocidades locales con amplitud máxima de la celda efectiva a la primera y tercera frecuencias de resonancia (líneas punteadas) y del microcanal de altura $\frac{b'}{5}$ a la primera frecuencia de resonancia (línea continua). El perfil del microcanal de menor altura coincide en los extremos con los nodos de la subcelda central a la tercera frecuencia de resonancia; pero en amplitud, coincide con el perfil de la celda efectiva a la primera frecuencia de resonancia, ya que para calcularlo se utilizó el mismo gradiente de presión en ambos casos.

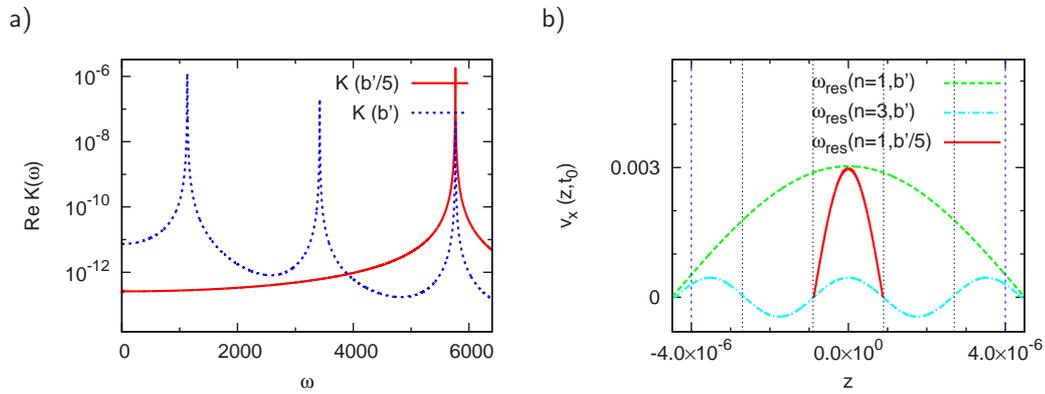


Figura 6.10: a) Partes reales de las permeabilidades dinámicas (en m^2) vs frecuencia angular (en rad/s) de un fluido de Maxwell ($\eta = 5.5 \times 10^{-3} kg/(m \cdot s)$, $\rho = 1050 kg/m^3$ y $\tau_r = 0.5 s$) que se desliza en un microcanal de altura $b' = 8.82 \mu m$ y $\frac{b'}{5}$; sujeto a una señal de presión coseno con amplitud $\frac{dp_0}{dx} = -5 Pa/m$. b) Perfiles de velocidad dinámicos con máxima amplitud a las frecuencias de resonancia: $\omega_{res}^\lambda (n=1) = 1271.05 rad/s$ y $\omega_{res}^\lambda (n=3) = 5766.54 rad/s$. Las líneas punteadas corresponden a las velocidades locales (en m/s) vs z (en m) del microcanal de altura b' y las continuas al de altura $\frac{b'}{5}$.

El hecho de que la división de los perfiles sin deslizamiento en $2n-1$ celdas idénticas de longitud $b = \frac{b}{2n-1}$ se rompa en presencia de resbalamiento, podría servir para identificar si determinado sistema tiene o no, deslizamiento. Por ejemplo, si experimentalmente se observa que el perfil dinámico de velocidad de un fluido de Maxwell se divide exactamente en $2n-1$ subceldas idénticas, se podría afirmar que no existe resbalamiento en el sistema. Mas, si las celdas cercanas a las paredes fuesen de menor tamaño que las centrales, indicaría que hay resbalamiento.

DINÁMICA DE FRENTE

En este capítulo se estudia experimentalmente el avance de un frente de un fluido de Newton en un microcanal rectangular. Se incluye una breve explicación del proceso de fabricación de microcanales, se describe el diseño experimental y se exponen los resultados preliminares.

7.1. Ley de Washburn

Cuando un fluido de Newton se desplaza en una geometría confinada, los efectos viscosos y las interacciones fluido-pared originan un perfil o frente. La velocidad del frente que se forma en el llenado de microcanales de longitud característica ℓ por efecto de una diferencia de presiones Δp a la entrada y salida de la celda, se puede describir a través de una ley de Darcy clásica:

$$v = \dot{L} = \frac{\ell^2}{3\eta} \frac{\Delta p}{L}, \quad (7.1)$$

en donde L representa la posición del frente en el microcanal y \dot{L} es la velocidad del frente.

Conforme L aumenta, el frente va frenando a una razón de:

$$L \sim t^{1/2}. \quad (7.2)$$

La relación dada por (7.2) es conocida como la ley de Washburn para la velocidad de un frente y tiene un exponente característico de $\frac{1}{2}$.

Como ya se ha mencionado, en microfluídica las interacciones fluido-pared originan un resbalamiento aparente; en este caso, la velocidad del fluido con deslizamiento está dada por:

$$v = \frac{\ell^2}{3\eta} \frac{\Delta p}{L} + v_s . \quad (7.3)$$

Si para un sistema en particular la hipótesis de Navier con λ constante fuera válida, entonces la velocidad de resbalamiento sería una función de la forma: $v_s = \lambda \dot{\gamma}$. Como la velocidad de deformación estaría dada por: $\dot{\gamma} = \frac{\ell}{\eta} \frac{\Delta p}{L}$, entonces la velocidad de resbalamiento sería proporcional al gradiente de presión, $v_s \propto \frac{\Delta p}{L}$, y la relación: $L \sim t^{1/2}$ seguiría siendo válida.

Recientemente se han reportado experimentos [9, 11] en los que se encontró que la velocidad del frente en superficies hidrofílicas es consistente con la ecuación (7.1) y que hay adherencia del fluido en las paredes. Para superficies hidrofóbicas [9] se encontró que existe deslizamiento y se propuso que la longitud de resbalamiento podría ser una función de la forma: $\lambda(\dot{\gamma}) = A' + B'\dot{\gamma}$. En este caso, la velocidad de resbalamiento ya no estaría dada por la hipótesis de Navier, sino por una relación de la forma :

$$v_s = \alpha \dot{\gamma} + \beta \dot{\gamma}^2 . \quad (7.4)$$

donde α y β son constantes que se pueden determinar experimentalmente.

Utilizando (7.3) y (7.4) se obtiene una función de la forma:

$$\dot{L} = \frac{A}{L} + \frac{B}{L^2} , \quad (7.5)$$

donde $A \equiv \left(\frac{\ell}{3} + \alpha\right) \frac{\ell}{\eta} \Delta p$ y $B \equiv \beta \left(\frac{\ell}{\eta} \Delta p\right)$.

Para tiempos cortos L es muy pequeña, por tanto domina el segundo término de la ecuación (7.5), esto es: $\dot{L} \sim \frac{1}{L^2}$ y la ley de Washburn se vería modificada como: $L \sim t^{1/3}$. Para tiempos largos, domina el primer término de (7.5), por

lo que el exponente de la dinámica seguiría siendo: $L \sim t^{1/2}$. Por lo tanto, para sistemas en los que la longitud de resbalamiento no es constante, se esperaría una transición entre diferentes exponentes conforme avanza un frente.

Hasta la fecha, no se cuenta con suficiente información en la literatura que sistemáticamente defina la dependencia de la velocidad de resbalamiento con la velocidad de deformación, ni se conoce a detalle la dependencia de la velocidad de resbalamiento con las interacciones fluido-pared en superficies hidrofóbicas o hidrofílicas.

Lo anterior motivó a iniciar una serie de experimentos en los que se estudia la evolución de la interfase *líquido-gas* de un fluido de Newton que se desplaza en un microcanal sujeto a una diferencia de presión constante. El objetivo es encontrar la relación distancia-tiempo para el avance de un frente y ver si el exponente cambia con el tiempo; se pretende que los resultados obtenidos permitan determinar si en el sistema existe deslizamiento y en caso de haberlo, inferir la dependencia de la velocidad de resbalamiento con la velocidad de deformación.

De forma general, se podría pensar que en cierto intervalo de tiempo, la dinámica de un frente de velocidad está dada por:

$$L = \varepsilon t^\phi, \quad (7.6)$$

o bien,

$$\ln L = \phi \ln t + \ln \varepsilon, \quad (7.7)$$

en donde ϕ es el exponente que determina el avance del frente en ese intervalo.

7.2. Microfabricación: Moldeado en PDMS

La primera etapa de la experimentación consiste en la construcción de los microcanales. Los microcanales se fabricaron por un proceso de moldeado en poli(dimetilsiloxano) (PDMS), que es un elastómero formado por cadenas de: $-Si(CH_3)_2O-$, que lo hacen naturalmente hidrofóbico. El PDMS es muy utilizado en microfluídica porque es transparente, químicamente inerte, aislante térmico y no es tóxico; además, por sus propiedades elásticas, se adapta fácilmente a la forma de cualquier molde. El proceso de fabricación involucra las etapas de: elaboración de un molde, reticulación o curado y separación.

El molde se puede obtener por fotolitografía óptica. Esta técnica consiste en exponer una superficie formada por una máscara, una resina fotosensible y un sustrato, a un haz de luz. La máscara generalmente es una placa de cuarzo con depósitos de cromo que esbozan el diseño del dispositivo que se quiere fabricar (figura 7.1); ésta se recubre con una película de una resina fotosensible y se alinea con un sustrato de vidrio o silicio. La exposición a la luz activa reacciones fisicoquímicas en las regiones de la resina que, de acuerdo con el diseño de la máscara, se iluminan. En seguida, la película se sumerge en un disolvente que permite que se lleven a cabo reacciones de polimerización en las que las partes iluminadas no son afectadas y las otras se disuelven. Cuando acaba la polimerización de la resina, se obtiene un molde con el diseño de la máscara.

En la etapa de curado, se vierte una solución de PDMS en el molde con un agente que estimula el proceso de reticulación¹. El PDMS polimeriza y se solidifica, para asegurar que la reacción haya finalizado, se introduce en un horno a $70^{\circ}C$ durante aproximadamente una hora. Finalmente, la separación consiste en

¹El curado o reticulación consiste en la formación de una red tridimensional por la unión de cadenas poliméricas.

quitar el polímero formado del molde, lo que permite obtener un dispositivo con la estructura del molde pero en negativo [22].

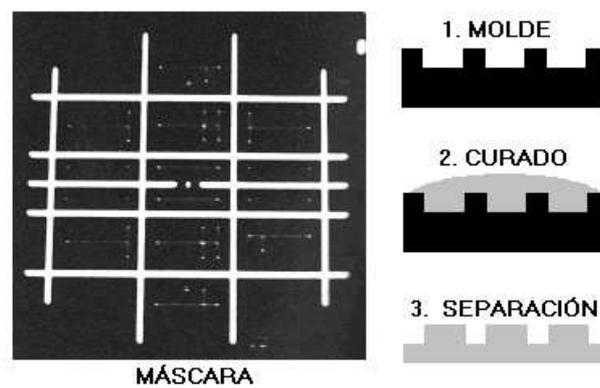


Figura 7.1: Máscara para fotolitografía óptica, las zonas negras corresponden a los depósitos metálicos realizados por microscopía electrónica. El esquema muestra las etapas de moldeo en PDMS para la fabricación de microcanales [22].

Finalmente, la estructura del microcanal en PDMS se adhiere a una superficie de vidrio a través de un proceso de exposición a plasma. Este proceso oxida los grupos metilo de la superficie del PDMS y forma silanos porque se hace temporalmente hidrofílico; pero estas propiedades se pierden rápidamente al contacto con el aire [19].

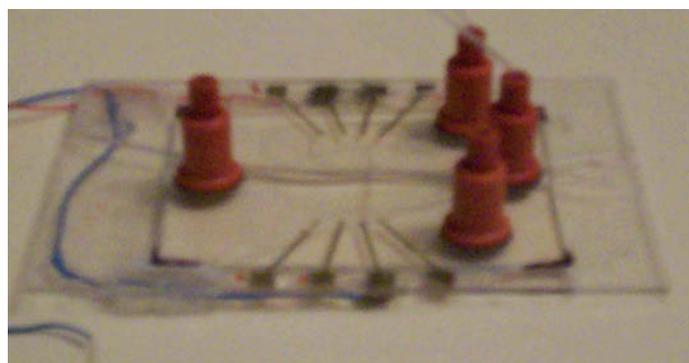


Figura 7.2: Microcanal rectangular de $100 \times 25 \mu\text{m}$ de área transversal, con tres entradas y una salida.

7.3. Montaje Experimental

Los experimentos se realizaron en el Laboratorio de Micro y Nanotecnología de la Universidad de Barcelona. Las pruebas consistieron en estudiar el avance del frente de agua destilada a temperatura ambiente en un microcanal rectangular. El flujo se indujo por una diferencia de presiones constante. El sistema se ilustra en la figura (7.3).

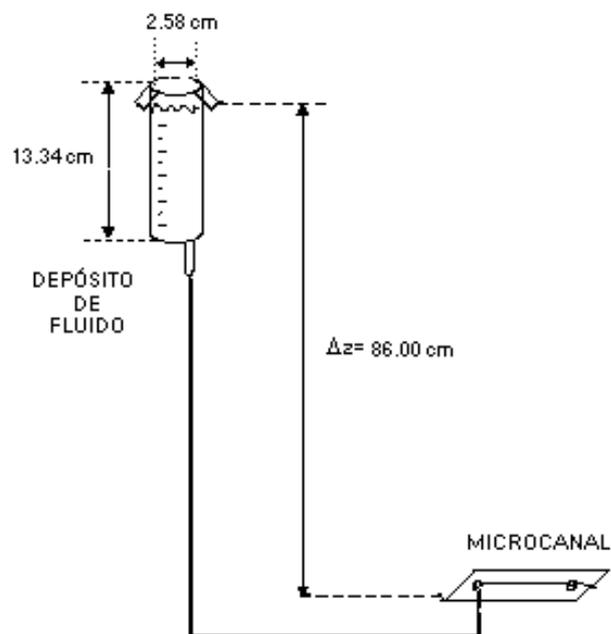


Figura 7.3: Sistema experimental.

El depósito de fluido se llenó hasta el máximo de su capacidad volumétrica (60 mL), sus dimensiones se indican en la figura (7.3). El microcanal se conectó por el extremo de entrada, al depósito de fluido a través de un capilar de 0.75 mm de diámetro. Se utilizaron tres microcanales distintos, que se describen en la tabla 7.1.

Tabla 7.1

Celda	Área transversal (μm)	Observaciones
A	100×25	Paredes muy rugosas. Previamente utilizado, por lo que contenía residuos de otros experimentos adheridos a las paredes.
B	20×6	Previamente llenado con agua destilada, contenía burbujas de líquido dispersadas a lo largo del microcanal, que debido a las dimensiones espaciales, fue imposible evaporar al momento de realizar las pruebas.
C	20×6	Óptimas condiciones. Utilizado por primera vez, aproximadamente 18 horas después de haber sido expuesto a plasma de oxígeno.

La presión en la entrada del microcanal estuvo dada por: $p_{entrada} = p_{atm} - p_1$; donde p_1 se determinó a partir de la ecuación para la presión hidrostática, esto es: $p_1 = \rho g \Delta z$. La presión a la salida del microcanal fue igual a la presión atmosférica: $p_{salida} = p_{atm}$. Por lo tanto, la diferencia de presión del sistema fue: $\Delta p = -8412.83 Pa$.

El avance del frente se observó a través de un microscopio electrónico *Zeiss Axio Imager.A1*, conectado a una computadora en la que se realizaron grabaciones cronometradas del llenado del microcanal. De los videos se extrajeron imágenes (figura 7.4) en las que a través del software *Image J*, se pudo medir la distancia L avanzada por el fluido para diferentes tiempos t .

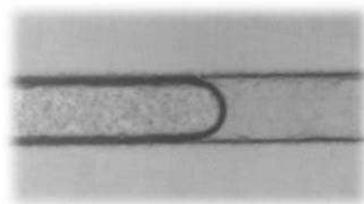


Figura 7.4: Frente de velocidad de agua en un microcanal rectangular de área transversal: $100 \times 25 \mu m$.

7.4. Resultados Preliminares

La distancia recorrida por el fluido durante el llenado de los microcanales **A** y **B** se midió únicamente para tiempos largos, los datos experimentales se encuentran representados gráficamente en las figuras (7.5a y 7.5b). Al utilizar el microcanal **C** fue posible realizar un llenado completo y medir el avance del frente desde la entrada al microcanal (ver figura 7.5c). Las discontinuidades que los datos presentan se deben a que para esos tiempos no se obtuvo información experimental.

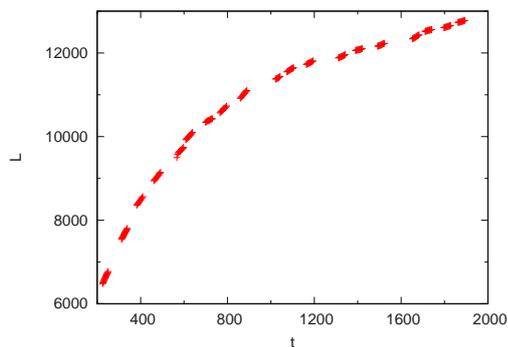
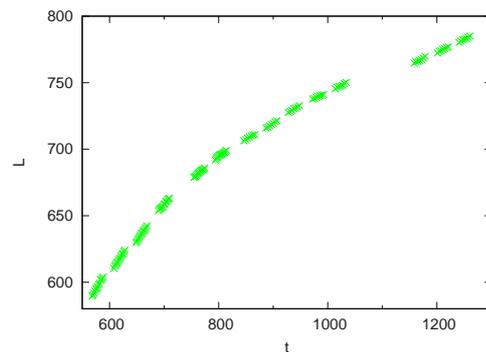
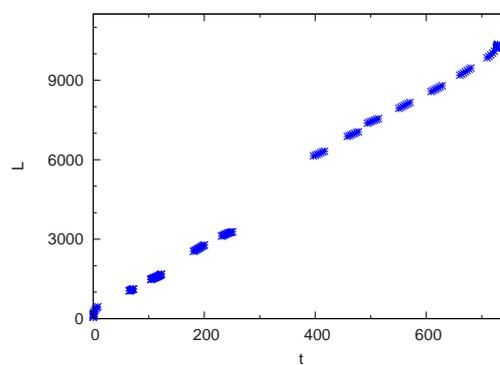
a) Microcanal **A**b) Microcanal **B**c) Microcanal **C**

Figura 7.5: Datos experimentales del avance del frente de agua en microcanales rectangulares. La distancia L está dada en μm y el tiempo t en s .

Los datos obtenidos se analizaron utilizando la ecuación (7.7). Los valores de ϕ y ε se determinaron a través de regresiones lineales para cada zona de cambio de pendiente y se indican en la figura (7.6).

Los resultados para tiempos largos de los microcanales **A** y **B**, muestran tres zonas con diferente pendiente. En la primera región ϕ se puede aproximar a $1/2$; posteriormente desciende hasta $1/3$ y finalmente toma un valor alrededor de $1/5$; lo que indica que el fluido se va frenando con exponentes que decaen conforme avanza el frente. Para el microcanal **C** también se distinguen tres diferentes regiones: en los primeros instantes ($t \leq 0.43$ s), el exponente es $1/2$; enseguida, presenta una zona de transición en la que el exponente del frente disminuye a $1/3$ y finalmente, para tiempos largos, el exponente es $\phi \approx 1$, lo que implicaría un avance con velocidad constante.

El hecho de que los valores de los exponentes obtenidos para los microcanales **A** y **B** no permanezcan en $1/2$, como lo determina la relación dada por (7.2), podría indicar cierta presencia de hidrofobicidad en las paredes de los microcanales. Sin embargo, esto no se puede afirmar con certeza, puesto que las celdas no eran nuevas y no es posible descartar que esta variación en el valor exponente haya sido producto de la presencia de burbujas o residuos sólidos en el canal.

Para el microcanal **C** es razonable pensar que el cambio en los valores de los exponentes de $1/2$ a $1/3$ corresponde a efectos transitorios del frente al momento de ingresar a la geometría de confinamiento. Una vez que el frente es estable, se observa que para casi todos los tiempos avanza con una velocidad constante ($\phi \approx 1$), por tanto se podría decir que el llenado fue demasiado rápido lo que impidió observar el valor real del exponente de Washburn.

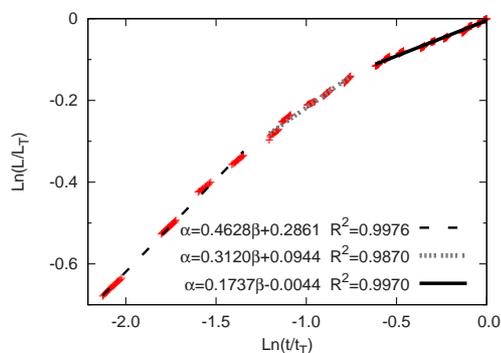
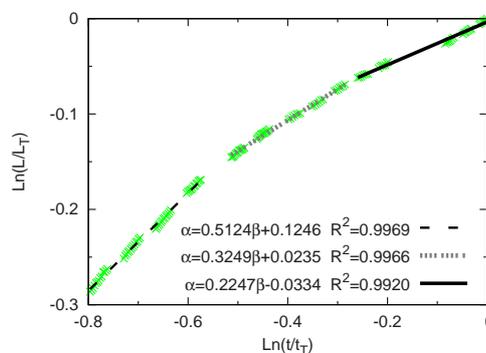
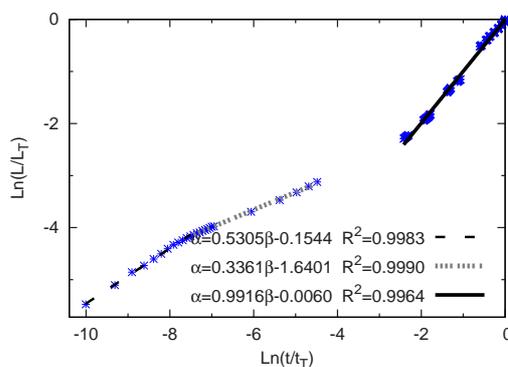
a) Microcanal **A**b) Microcanal **B**c) Microcanal **C**

Figura 7.6: Análisis del cambio del exponente de la Ley de Washburn conforme avanza un frente de agua en distintos microcanales rectangulares.

Desafortunadamente, no se cuenta con la suficiente información experimental para obtener conclusiones contundentes. Los resultados presentados son preliminares y es necesario realizar muchas réplicas, cuidando exhaustivamente los detalles y la precisión al momento de medir, antes de hacer cualquier afirmación. Para garantizar la validez de las pruebas experimentales será necesario tener varios microcanales nuevos, de forma que cada uno se utilice una sola vez; ya que por las dimensiones de éstos, no es posible evaporar las gotas de líquido que permanecen en ellos tras el recorrido del fluido. Además, se debe diseñar un proceso para modificar efectivamente la naturaleza hidrofóbica o hidrofílica de las superficies, a fin de encontrar las diferencias que las interacciones fluido-pared provocan en la dinámica del avance del frente de velocidades.

CONCLUSIONES

El desplazamiento de un fluido en un microcanal bajo un gradiente de presión dinámico está determinado por las propiedades del fluido y la geometría del sistema, pero además depende de la frecuencia de dicho gradiente y de manera muy importante, de las condiciones de frontera.

Las permeabilidades dinámicas de un fluido de Newton que se desplaza en dos microcanales de tamaños diferentes, en ausencia de deslizamiento, obedecen una relación de escala que se rompe cuando el resbalamiento está presente. Este resultado puede ser útil para determinar experimentalmente si en determinado sistema existe o no deslizamiento. Además, en el caso de que exista, se podría estimar el valor de la longitud de resbalamiento utilizando las predicciones teóricas mencionadas en este trabajo y se podría además, probar la validez de la hipótesis de Navier con longitud de resbalamiento constante para situaciones dinámicas.

Como el deslizamiento introduce una longitud efectiva mayor al sistema, un microcanal con resbalamiento se puede asociar con un canal virtual o celda efectiva de mayor área transversal. La longitud efectiva de esta celda cambia con la frecuencia y siempre es mayor que el tamaño del microcanal verdadero. La permeabilidad dinámica de la celda efectiva para fluidos de Maxwell, es igual a la permeabilidad dinámica con deslizamiento del microcanal verdadero para todo el espectro de frecuencias.

Cuando no hay deslizamiento, los perfiles de velocidad dinámicos se dividen en varias subceldas idénticas, dependiendo de la frecuencia de resonancia a la que esté aplicado el gradiente de presión. Esta exactitud en la división de los perfiles se rompe en presencia de resbalamiento, ya que en este caso, se tienen varias subceldas de diferente tamaño. Esto podría servir para identificar experimentalmente si determinado sistema tiene o no, condiciones de frontera de deslizamiento.

En el estado estacionario, la presencia de resbalamiento incrementa la magnitud de la permeabilidad dinámica, tanto para un fluido de Maxwell como para uno de Newton. A frecuencias altas, la parte real de la permeabilidad dinámica de un fluido de Newton es menor que la parte real de la permeabilidad sin deslizamiento, sin embargo, como no existe ningún cambio significativo en las partes imaginarias correspondientes, la magnitud de flujo siempre es mayor en el caso con resbalamiento.

Lo anterior no se cumple para fluidos de Maxwell, puesto que existen rangos de frecuencias en los que la parte real de la permeabilidad con resbalamiento es mayor y rangos en los que es mucho menor que la parte real de la permeabilidad dinámica sin deslizamiento. Como en general, la parte imaginaria de la permeabilidad dinámica es varios órdenes menor que la parte real, la magnitud de flujo y la velocidad promedio se ven afectadas principalmente, por la parte real de esta variable. Por tanto, a determinadas frecuencias el flujo con resbalamiento es mayor y a otras menor que sin deslizamiento; lo anterior representa un efecto anómalo del resbalamiento cuando se compara con el comportamiento en estado estacionario.

Los resultados obtenidos en este proyecto permiten determinar cómo el resbaldamiento modifica las condiciones de flujo de los microsistemas. Particularmente, para sistemas biológicos es importante realizar estudios de flujos no estacionarios a microescalas con frecuencias características.

El estudiar sistemas de flujo de forma teórica ayuda a comprender y explicar los fenómenos a microescalas. Sin embargo es siempre el experimento el que determina si una teoría es correcta o no. Por ello, en este trabajo se hace hincapié en la manera cómo se podrían corroborar experimentalmente los resultados presentados.

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	densidad
η	viscosidad
t_r	tiempo de relajación
G	módulo de elasticidad
λ	longitud de resbamiento
W	ancho del microcanal
L	longitud del microcanal y posición del avance de un frente (capítulo 7)
b	altura del microcanal
ℓ	mitad de la altura del microcanal
b'	altura efectiva del microcanal
ℓ'	mitad de la altura efectiva del microcanal
A	área de la sección transversal
Q	flujo volumétrico
\hat{K}	permeabilidad dinámica
x, y, z	direcciones espaciales
ω	frecuencia
ω_{res}	frecuencia de resonancia
t	tiempo
p	presión
\bar{u}	vector de desplazamientos
\dot{L}	velocidad de un frente
\bar{v}	vector velocidad
v_x	velocidad en dirección x
$\dot{\gamma}$	velocidad de deformación
v_s	velocidad de resbamiento
$\bar{\tau}$	tensor de esfuerzos
τ_{xz}	esfuerzo cortante normal a la superficie x aplicado en dirección z

ξ	cociente de $\frac{\hat{K}}{\ell^2}$ para dos celdas de diferente tamaño
ϕ	exponente de la ley de Washburn

Notación:

a	a en estado estacionario
$\hat{a}, \hat{a}(\omega)$	a en el dominio de Fourier
$a_L, a(z)$	a local
$\langle a \rangle$	a promedio en la sección transversal o global
$a(t)$	a como función del tiempo
a^λ	a con resbalamiento
$Re a$	parte real de a
$Im a$	parte imaginaria de a

donde a representa cualquiera de las siguientes cantidades: $K, v, etc..$

**MANUSCRITO ENVIADO A: PHYSICAL
REVIEW LETTERS**

Dynamic characterization of permeabilities and flows in microchannels

M. Castro,¹ M. E. Bravo-Gutiérrez,² A. Hernández-Machado,³ and E. Corvera Poiré*²

¹*GISC and Grupo de Dinámica No Lineal (DNL), Escuela Téc. Sup. de Ingeniería (ICAI),
Universidad Pontificia Comillas, E-28015 Madrid, Spain*

²*Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química,
Universidad Nacional Autónoma de México. México DF 04510, México*

³*Departament ECM, Facultat de Física, Universitat de Barcelona
Diagonal 647, E-08028 Barcelona, Spain*

We make an analytical study of the non-steady flow of Newtonian fluids in microchannels. We consider the slip boundary condition at the solid walls with Navier hypothesis and calculate the dynamic permeability, which gives the system's response to dynamic pressure gradients. We find a scaling relation in the absence of slip that is broken in its presence. We discuss how this might be useful to determine experimentally, by means of μ PIV technology, the presence of slip in a system. Also, we propose an alternative way to measure the slip at walls in the microchannel as well as the validity of Navier hypothesis in dynamic situations.

PACS numbers: 47.61.-k, 47.45.Gx, 62.60.+v

Introduction. The ability to manipulate viscous fluids in channels at micrometer scales has motivated a huge interest in different fields ranging from physics, to engineering, and biology [1–10]. The cooperation between science and technology requires a deeper understanding of the underlying physics in order to achieve the desired control and extend it to small volumes [2, 5, 6]. One of the most controversial issues in the field of microfluidics concerns the fluid flow in the proximities of a solid wall [3, 4, 7, 9, 11].

Whether the fluid slips at a solid wall or not, has been questioned since the times of Navier. Experiments with Newtonian fluids [12] at macroscales have traditionally been in good agreement with the no-slip assumption, which states that the tangential velocity of the fluid at the solid wall vanishes. However, at microscopic scales recent experiments seem to indicate that the no-slip condition does not longer hold in all cases [3, 7, 9]. The concept of an apparent slip has then arisen in microfluidics. Explanations of the origin of this apparent slip have included the formation of a gaseous film lying between the fluid and the solid, and the difference in the interaction energy between fluid-fluid or fluid-solid [13–16]. Despite from being far to be understood [3, 17–19], the apparent slip is theoretically consistent with a slip velocity at the solid walls.

According to Navier's hypothesis, the slip velocity (the tangential fluid velocity at the solid wall) is given by

$$\mathbf{u}_{slip} \equiv \lambda \dot{\gamma}, \quad (1)$$

where $\dot{\gamma}$ is the local shear rate and λ the so-called

slip length, which according to experiments ranges from tens of nanometers to a micron. This equation is the boundary condition at the solid walls of the evolution equation for a Newtonian fluid, namely, the Navier-Stokes equation

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

Equation (1) was originally proposed by Navier with constant λ . However, recent experimental observations [8, 14], as well as molecular dynamics simulations [13], suggest that for certain systems (for example with hydrophobic interactions between fluid and solid) λ may be function of the shear rate $\dot{\gamma}$.

Up to now, all of the experiments to determine the slip length have worked in stationary conditions, where an excess flow of the order of nanoliters has to be measured. Moreover, the effect that the apparent slip has on the fluid response to time dependent pressure gradients has not been explored in literature. Such situations arise in countless amounts of biological systems, where periodic pumping determines the flow.

In this letter we analyze the dynamic behavior of a Newtonian fluid that obeys Navier hypothesis with slip length λ , independent of the shear rate, at the walls of a microchannel. We make an analytical characterization of the dynamic permeability [20], which contains the information of the fluid response to a dynamic pressure gradient. We also compute the flow for a particular pressure gradient and the slip velocity at the walls as a function of time. Our theoretical results might be useful to experimentally determine the presence or absence of slip and the value of the slip length in dynamic situations. Furthermore, we believe that experimental dynamic measurements might provide a way to test the validity of Navier hypothesis for dynamic situa-

*Author to whom correspondence should be addressed; eugenia.corvera@gmail.com

tions.

Theory. We consider the flow of a Newtonian fluid in a rectangular microchannel since this is the geometry that experiments normally use in microfluidics [21]. The walls of the microchannel are two flat plates parallel to each other, separated by a distance $2l$ that is much smaller than the plates length. We consider channels whose characteristic length l is of the order of tens of microns. As a consequence, the Reynolds number is low enough to neglect the inertial (nonlinear) term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. We solve the linearized Eq. (2) subject to Navier boundary condition. We choose the x - *axis* as the flow direction, and the z - *axis* perpendicular to the microchannel.

We consider that the system is subjected to a non-stationary pressure gradient ∇p , which is function of time. In frequency domain Eq.(2) can be rewritten as [22]

$$\frac{d^2 \hat{v}}{dz^2} + \frac{i\omega\rho}{\eta} \hat{v} = \frac{1}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (3)$$

On the other hand, Navier hypothesis (Eq.1) in frequency domain with constant λ can be written for our geometry as

$$\hat{u}_{slip} = \mp \lambda \frac{d\hat{v}}{dz} \Big|_{\pm l}. \quad (4)$$

We solve Eq.(3) subject to boundary condition Eq.(4). We then average over the cross sectional area of the microchannel and write a generalized Darcy's law in frequency domain as

$$\langle \hat{v}(\omega) \rangle \equiv - \frac{K(\omega; l, \lambda)}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (5)$$

where $K(\omega; l, \lambda)$ is the dynamic permeability. Our result for the dynamic permeability of a fluid in a microchannel with slip is

$$K(\omega, l, \lambda) = -A^{-2} \left(1 - \frac{\tan(A l)}{A l (1 - A \lambda \tan(A l))} \right), \quad (6)$$

where $A = \sqrt{i\omega\rho/\eta}$. We have written explicitly the dependence of K on ω , λ and l to facilitate the analysis. Eq.(6) contains the information about the non-stationary response of the fluid in the microchannel. It is a measure of the resistance to flow, for instance it has been shown [23] that for a pressure gradient consisting only on one mode $\nabla p(t) = \nabla p_0 \cos \omega_0 t$, the velocity in time domain averaged over the cross-sectional area is given by

$$\langle v(t) \rangle = - \frac{\nabla p_0}{\eta} \left[\text{Re} \hat{K}(\omega_0) \cos(\omega_0 t) + \text{Im} \hat{K}(\omega_0) \text{sen}(\omega_0 t) \right] \quad (7)$$

Note that both, the real and the imaginary parts of the dynamic permeability contribute to the flow.

Note also, that the experimental determination of the velocity profiles in time domain, provides a way of determining the real and imaginary parts of the permeability by constructing the convolution over the proper period of the average velocity $\langle v(t) \rangle$, with the sine or cosine functions respectively [24].

Analysis. We find that in the absence of slip, the dynamic permeabilities of two microchannels obey a scaling relation that it is broken when slip is present. This result might be useful to experimentally determine the absence or presence of slip in a system. Moreover, if slip does exist, this might provide a way to experimentally determine the slip length λ . We do this by means of the following argument: first of all, we note that in the absence of slip ($\lambda = 0$), $K(\omega, l, 0)/l^2$ depends only on the product Al as can be seen from Eq.(6). For a given fluid, this implies that $K(\omega, l, 0)/l^2$ depends only on the product ωl^2 . This allows us to write the following scaling relation for the dynamic permeabilities of two different experiments, one with plate separation $2l$ and frequency ω and another one with plate separation $2\beta l$ and frequency ω/β^2 :

$$\frac{\beta^2 K(\omega, l, 0)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, 0)} = 1, \quad (8)$$

which holds for any arbitrary positive constant β .

This scaling relation breaks down when $\lambda \neq 0$ due to the non-trivial effect of adding a new length scale to the problem. In other words, there is a new non-dimensional number (λ/l) known as Knudsen number [1] that in the presence of slip, causes the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$ to be no longer one. This is shown in Fig. 1 where the real and imaginary parts of the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$ as a function of ωl^2 deviate systematically from the constant values 1 and 0 respectively.

Now, it is possible to know explicitly the slip length λ by knowing the value for the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$. We can solve explicitly for λ as a function of such ratio, and plot curves that might be experimentally used to determine the value of λ from knowing the chosen ωl^2 , and for example the real part of the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$. This is shown in Fig.2.

Each pair of experiments would give a value of the real part of $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$ and a value of ωl^2 . By using Fig.2 λ could be estimated. If Navier hypothesis holds in dynamic situations (as it is assumed in the present work), any pair of experiments (one with plate separation $2l$ and frequency ω and another one with plate separation $2\beta l$ and frequency ω/β^2) should give exactly the same value of λ . If the value of λ obtained for two different pair of experiments were not the same, it would imply that the

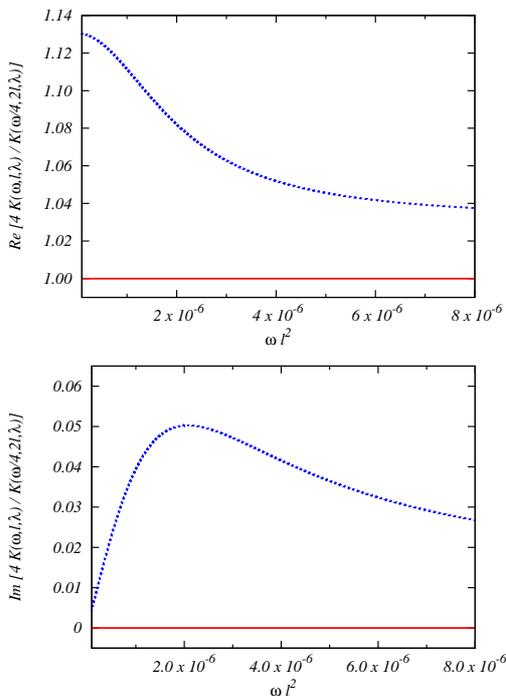


FIG. 1: Real and imaginary parts of the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$ vs ωl^2 (in $\text{rad m}^2/\text{s}$) with $\beta = 2$, $\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{ms})$, $\rho = 9.982 \times 10^2 \text{ kg}/\text{m}^3$ and $l = 10 \mu\text{m}$ in the absence of slip (continuous line) and for a slip length $\lambda = 1 \mu\text{m}$ (dotted line).

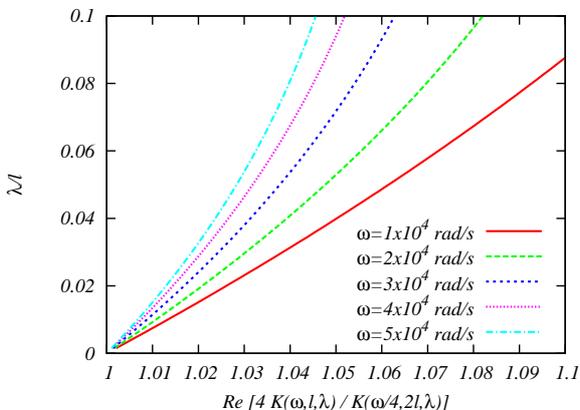


FIG. 2: Slip length in units of l vs the real part of the ratio $\frac{\beta^2 K(\omega, l, \lambda)}{K(\omega/\beta^2, \beta l, \lambda)}$ with $\beta = 2$, $\eta = 1.003 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{ms})$, $\rho = 9.982 \times 10^2 \text{ kg}/\text{m}^3$ and $l = 10 \mu\text{m}$ at different values of angular frequency.

hypothesis of constant λ does not hold in dynamic situations. In other words, we are proposing a way of testing if Navier hypothesis in dynamic situations is valid for a particular system.

In order to experimentally determine the dynamic permeabilities a micro particle image velocimetry

(μPIV) could be used [7]. For our theoretical calculations we have worked with microchannels of $20 \mu\text{m}$ high and slip lengths of $1 \mu\text{m}$ for water since these are dimensions comparable to the ones used in [7], where it has been found that for this slip length, slip flow must be considered at the micro and nano scales.

In Fig. 3 we plot the real and imaginary parts of the dynamic permeability (Eq.6) as a function of frequency for water in a microchannel. Consistent with results for the steady state known in literature, we obtain that when $\omega \rightarrow 0$ the stationary permeability of a rectangular microchannel with Navier hypothesis is $K(0, l, \lambda) = \frac{l^2}{3} + \lambda l$. This means that slip enhances the flow magnitude of the steady state making smaller the resistance to flow. As Fig. 3 shows, the effect of slip on the permeability depends on frequency. Note that there is a crossing frequency (on the range of sound: $\nu_c = 2\pi\omega_c \sim 5500 \text{ Hz}$) of the curves of the real part of the permeability (with and without slip). However, there is no particular signature at this frequency for the imaginary part of the dynamic permeability which, contrary to its zero value in the steady state, has a finite value for an arbitrary frequency. In order to know the flow as a function of time for a particular frequency, both contributions should be taken into account as can be seen from Eq.(7). We have computed the flow for a cosine pressure gradient for frequencies before, during, and after the crossing and have found no qualitative difference for the flow. In all cases, the magnitude of the flow with slip has been found to be larger than the one with no slip.

Fig.4 shows the slip velocity as a function of time for an oscillatory pressure gradient consisting of a cosine wave with $\omega = 65000 \text{ rad/s}$. In order to compute it, we have worked with the local version of the velocity in time domain evaluated at the wall. We have plotted it in the absence of slip and for a slip length of $1 \mu\text{m}$. We can observe that in the case of having a finite slip length, the slip velocity at the wall oscillates in time while for no slip it is always zero.

In conclusion, we have analyzed the dynamical response of Newtonian fluids that obey Navier hypothesis in microchannels subject to non-stationary pressure gradients. In particular, we have analytically computed the dynamic permeability, which contains the information of the fluid response to a dynamic pressure gradient. We have found that in the absence of slip, the dynamic permeabilities of two microchannels obey a scaling relation that is broken when slip is present. This result might be useful to experimentally determine the absence or presence of slip in a system. In addition, if slip exists, this might provide a way to experimentally estimate the

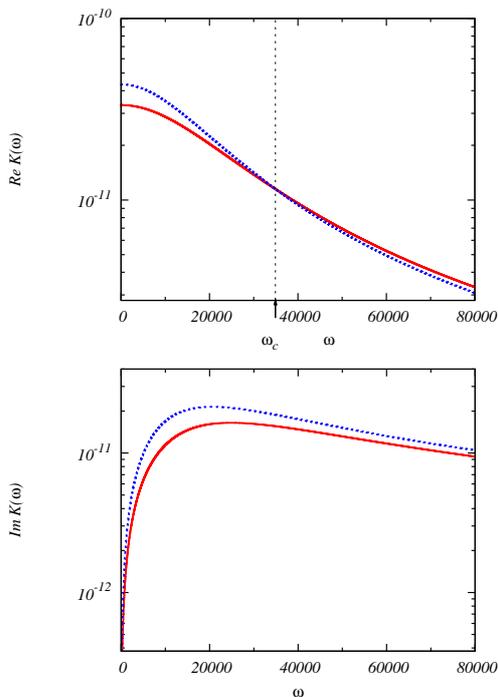


FIG. 3: Real and imaginary parts of the dynamic permeability (in m^2) vs angular frequency (in rad/s) with $\eta = 1.003 \times 10^{-3} kg/(ms)$, $\rho = 9.982 \times 10^2 kg/m^3$ and $l = 10 \mu m$ in the absence of slip (continuous line) and for a slip length $\lambda = 1 \mu m$ (dotted line).

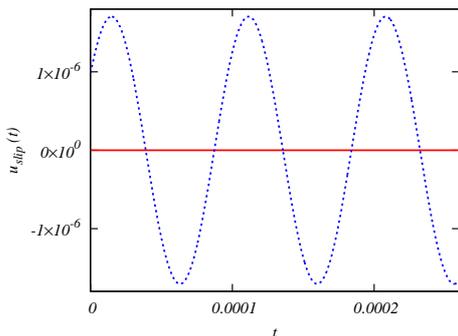


FIG. 4: Typical behavior of the slip velocity (in m/s) as a function of time (in s) for an oscillatory pressure gradient consisting of a cosine wave. Continuous lines are for no slip and dotted lines correspond to a slip length $\lambda = 1 \mu m$.

slip length λ , and test the validity of Navier hypothesis in dynamic situations. Our results could be experimentally tested using frequencies of sound and μPIV technology since we have worked in the range of parameters relevant in microfluidics [7].

Finally, we want to stress the importance that non-stationary flows at microscales, have in biological systems which flow with characteristic frequencies.

This work has been supported by *Dirección General de Investigación* (MEC, Spain) under projects FIS2006-12253-C06-05 and FIS2006-12253-C06-06, by DGAPA, UNAM (Mexico) through PAPIIT project IN101907, and by CONACYT (Mexico) under project 58064.

-
- [1] T. Squires and S. Quake, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 977 (2005).
 - [2] P. Tabeling, *Introduction to Microfluidics* (Oxford Univ. Press, 2006).
 - [3] E. Lauga, M. Brenner, and H. Stone, *Handbook of Experimental Fluid Dynamics* (2005).
 - [4] C. Cottin-Bizonne, J.-L. Barrat, L. Bocquet, and E. Charlaix, *Nature Materials* **2**, 237 (2003).
 - [5] G. Whitesides, *Nature* **442**, 368 (2006).
 - [6] J. Ottino and S. Wiggins, *ScienceNature* **305**, 485 (2004).
 - [7] D. Trethewey and C. Meinhart, *Phys. of Fluids* **14**, L9 (2002).
 - [8] V. Craig, C. Neto, and D. Williams, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 054504 (2001).
 - [9] C.-H. Choi and B. K.S., *Phys. of Fluids* **15**, 2897 (2003).
 - [10] J. Koplik and B. J.R., *Phys. Rev. Lett.* **96**, 044505 (2006).
 - [11] S. Granick, Y. Zhu, and H. Lee, *Nature Materials* **2**, 221 (2003).
 - [12] Not always so for polymer melts [25].
 - [13] P. Thompson and S. Troian, *Nature* **389**, 360 (1997).
 - [14] Y. Zhu and S. Granick, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 96105 (2001).
 - [15] E. Lauga and M. Brenner, *Phys. Rev. E* **70**, 26311 (2004).
 - [16] P. de Gennes, *Langmuir* **18**, 3413 (2002).
 - [17] E. Lauga and H. Stone, *Journal of Fluid Mechanics* **489**, 55 (2003).
 - [18] P. Joseph and P. Tabeling, *Phys. Rev. E* **71**, 35303 (2005).
 - [19] C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso, H. Butt, and V. Craig, *Reports on Progress in Physics* **68**, 2859 (2005).
 - [20] M. L. de Haro, J. A. del Río, and S. Whitaker, *Phys. Rev. E* **58**, 6323 (1998).
 - [21] Analogous results to the ones presented on this letter are obtained for cylindrical geometry, we have not considered necessary to explicitly state them.
 - [22] E. Corvera-Poiré and J. A. del Río, *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, S2055 (2004).
 - [23] R. Collepardo-Guevara and E. Corvera-Poiré, *Phys. Rev. E* **76**, 1 (2007).
 - [24] Local versions of Eqs.(5), (6) and (7) can be easily written if one wishes to experimentally determine the velocity at only one plain of the microchannel (for example the middle plain with $z = 0$).
 - [25] W. Schowalter, *J. Non-Newtonian Fluid Mech* **29**, 25 (1988).

BIBLIOGRAFÍA

.1. Artículos y Publicaciones

- [1] Sungyoung Choi, *et al.*, *Continuous Blood Cell Separation by Hydrophoretic Filtration*, *Lab-on-a-Chip*, **7**, 1532 (2007).
- [2] Keon Woo Kwon, *et al.*, *Label-Free, Microfluidic Separation and Enrichment of Human Breast Cancer Cells by Adhesion Difference*, *Lab-on-a-Chip*, **7**, 1461 (2007).
- [3] Lazar, Trisiripisal P. y Sarvaiya H.A., *Microfluidic Liquid Chromatography System for Proteomic Applications and Biomarker Screening*, *Analytical Chemistry*, **78**, 5513 (2006).
- [4] Darhuber A. y Troian S., *Principles of Microfluidic Actuation by Modulation of Surface Stresses*, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **37**, 425 (2005).
- [5] Peppas N. y Langer R. *Origins and Development of Biomedical Engineering within Chemical Engineering*, *Bioengineering, Food, and Natural Products*, **50**, 536 (2004).
- [6] Wegewitz U., Göhring I. y Spranger J., *Novel Approaches in the Treatment of Angiogenic Eye Disease*, *Current Pharmaceutical Design*, **11**, 2311 (2005).

- [7] Gupta K. y Zhang J., *Angiogenesis: a Curse or Cure?*, Journal of Postgraduate Medicine, **81**, 236 (2005).
- [8] Squires T.M. y Quake S.R., *Microfluidics: Fluid Physics at the Nanoliter Scale*, Reviews of Modern Physics, **77**, 977 (2005).
- [9] Choi Ch-H., Johan K. y Breuer K.S., *Apparent Slip Flows in Hydrophillic and Hydrophobic Microchannels*, Physics of Fluids, **15**, 2897 (2003).
- [10] Zhu Yingxi y Granick Steve, *Rate-Dependent Slip of Newtonian Liquid at Smooth Surfaces*, Physical Review Letters, **87**, 096105 (2001).
- [11] Tretheway D.C. y Meinhart C.D., *Apparent Fluid Slip at Hydrophobic Microchannel Walls*, Physics of Fluids, **14**, L9 (2002).
- [12] Kunert C. y Harting J., *Roughness Induced Boundary Slip in Microchannel Flows*, Physical Review Letters, **99**, 176001 (2007).
- [13] Castrejón-Pita J.R., Del Río J.A. y Huelsz G., *Experimental Observation of the Dynamic Response of Newtonian and Maxwellian Fluids*, Physical Review E, **68**, 046301 (2003).
- [14] Del Río J.A., López de Haro M. y Whitaker W., *Enhancement in the Dynamic Response of a Viscoelastic Fluid Flowing in a Tube*, Physical Review E, **58**, 6323 (1998).
- [15] Collepardo-Guevara R. y Corvera Poiré E., *Controlling Viscoelastic Flow by Tuning Frequency During Occlusions*, Physical Review E, **76**, 026301 (2007).
- [16] Collepardo R., *Propuesta para Aumentar el Flujo Sanguíneo en Obstrucciones Trombóticas y Ateroscleróticas*, UNAM, Facultad de Química, México DF, 2004.

- [17] Corvera Poiré E. y Del Río J.A., *Viscoelastic Fingering with a Pulsed Pressure Signal*, *Journal of Physics Condensed Matter*, **16**, S2055 (2004).
- [18] Corvera Poiré E., *Cálculo Analítico de las Frecuencias de Resonancia para fluidos de Maxwell en Microcanales Rectangulares*, Inédito.
- [19] Bodas D. y Khan-Malek Ch., *Formation of More Stable Hydrophilic Surfaces of PDMS by Plasma and Chemical Treatments*, *Microelectronic Engineering*, **83**, 1277 (2006).

.2. Libros

- [20] Guyton A.C. y Hall J.E., *Tratado de Fisiología Médica*, Interamericana Mc Graw Hill, México, 1997.
- [21] Van Wynsberghe D., Noback Ch.R. y Carola R., *Human Anatomy and Physiology*, 3^a ed., Mc Graw Hill, E.U., 1995.
- [22] Tabeling P., *Introduction à la Microfluidique*, Belin, París, Francia, 2003.
- [23] Bird, R.B., Stewart W.E. y Lightfoot E.N., *Fenómenos de Transporte*, Reverté, México, 1960.
- [24] Barnes, Hutton y Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [25] Bird, R.B., Armstrong R.C. y Hassager O., *Dynamics of Polymeric Liquids*, 2^a ed., vol. 1, John Wiley & Sons, E.U., 1987.