UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVERSIÓN EN CARTERAS: TEORÍA Y PRÁCTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

ALBERTO CADENA MARTÍNEZ

TUTOR

ACT. ENRIQUE MATURANO RODRÍGUEZ

2008

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Cadena
Martínez
Alberto
56 49 57 83
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
099064226

2. Datos del tutor
Actuario
Enrique
Maturano
Rodríguez

3. Sinodal 1
Actuario
Roberto
Cánovas
Theriot

4. Sinodal 2
Actuario
Fernando Alonso
Pérez Tejada
López

5. Sinodal 3
Actuario
Sergio Hugo
Delgado
Alonso

6. Sinodal 4
Actuario
Jorge Luis
Silva
Haro

7. Datos de la tesis
Inversión en carteras: teoría y práctica
172 p.
2008

INVERSIÓN EN CARTERAS: TEORÍA Y PRÁCTICA

Í N D I C E   T E M Á T I C O

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

- INTRODUCCIÓN

Hacia mediados del siglo pasado, en los principales países del mundo los instrumentos del mercado financiero se limitaban a las acciones, las obligaciones y los depósitos bancarios, y las decisiones de inversión en esos instrumentos se sustentaban principalmente en la búsqueda de oportunidades únicas e infravaloradas. El análisis de las inversiones bursátiles, con el objetivo de seleccionar los valores idóneos para invertir en ellos, se realizaba tomando como variable de decisión la rentabilidad que el título había producido en periodos anteriores; en la selección de valores subyacía la hipótesis de certeza, sin tener en cuenta el riesgo inherente a la inversión.

Aunque la rentabilidad obtenida era la variable de decisión, esto no significa que fuera la única variable de estudio en el análisis de inversiones bursátiles. A principios del siglo XX, el análisis técnico era una herramienta ampliamente utilizada en el estudio de valores, y el análisis fundamental había cobrado gran importancia a raíz de la gran depresión del ’29. Precisamente esta depresión hizo notar la necesidad de tomar decisiones de inversión en bolsa con criterios no especulativos, sino más bien basados en el estudio de los estados financieros de las empresas y del sector en el que desarrollan su actividad.

Aunque no es el único, la rentabilidad es uno de los parámetros considerados al decidir la conveniencia o no de una inversión; lo importante no es conocer la rentabilidad que hemos obtenido con una inversión, sino la rentabilidad que podemos obtener realizándola, por lo que se trata de un estudio *exante*, no *expost*.

Harry Markowitz, un estudiante de economía de la Universidad de Chicago, publicó su tesis doctoral en 1952 y sugería en ella que el valor de un título para un inversor podría evaluarse mejor utilizando el promedio aritmético del rendimiento, de su desviación normal y de su correlación con otros valores en la cartera, y no basándose en las características fundamentales de la empresa que emitía el título u obligación, es decir, su balance financiero, potencial de ingresos, estructura de capital, mercado, competidores, productos, política de dividendos, etc. Markowitz propuso medir el riesgo mediante la varianza de la rentabilidad, considerando a ésta como una variable aleatoria.

Esta idea marcó el surgimiento de un rubro importante en el análisis de inversiones: la conformación de carteras o portafolios de inversión, esto es, conjuntos o combinaciones de activos financieros, tales como bonos, acciones, bienes raíces, divisas, derivados, etc., lo que cambió la manera de llevar a cabo la mayoría de las inversiones institucionales, pasando de una selección tradicional de cada acción a una construcción de la cartera. Los inversores trataron de comprender el mercado en su totalidad, en vez de concentrarse en un instrumento único, y procuraron reducir el riesgo no sistemático mediante la diversificación.

Sin embargo, los portafolios podían consistir en los activos favoritos del inversionista o del asesor financiero; ¿cómo se podían formar, entonces, carteras que reduzcan el riesgo de un inversionista, o que satisfagan su rendimiento esperado?

La Teoría de la Cartera trata de la selección de carteras óptimas, de acuerdo a diversos criterios basados en el análisis de dos componentes elementales que las integran, a saber, rendimiento y riesgo, y mediante la combinación de diferentes activos, los cuales no todos son igual de atractivos cuando se consideran individualmente. Según la teoría de Markowitz, la selección de portafolios se basa en la sencilla observación de que se minimiza el riesgo a un nivel esperado de rendimiento, o bien, se maximiza el rendimiento esperado a un cierto nivel de riesgo. Así, la aplicación del modelo de Markowitz permite seleccionar, de la infinidad de combinaciones o carteras posibles, aquellas que constituyan el conjunto eficiente de carteras con mínimo riesgo, dado un cierto nivel de riesgo.

La teoría de carteras de Markowitz ha sido ampliamente discutida y criticada por distintos autores, cuyas aportaciones posteriores de autores como Tobin y Sharpe permitieron complementar el modelo de Markowitz introduciendo el equilibrio en el mercado de capitales, donde se puede pedir o prestar dinero a tasa libre de riesgo. Con este concepto se deduce la línea del mercado de capitales (LMC), cuyo aspecto más importante es que describe el precio del mercado del riesgo que usarán todos los individuos que toman decisiones en circunstancias de incertidumbre. Así, una importante contribución del modelo de portafolio es mostrar cómo el riesgo de mercado puede ser medido y cómo diversas herramientas matemáticas pueden ser usadas en la elección de posibles portafolios del universo de combinaciones de una lista de activos.

El principal objetivo de esta investigación consiste en ofrecer una explicación detallada de la Teoría Moderna de la Cartera, con un enfoque integral que permita comprender el carácter multidisciplinario de la misma, esto es, las bases económicas, financieras, de análisis matemático, cálculo diferencial, álgebra lineal, probabilidad, estadística y análisis de regresión, sobre las cuales dicha teoría se sustenta.

Un segundo objetivo es aterrizar dicho planteamiento teórico formal en un plano empírico, a través de la aplicación del modelo para empresas que cotizan actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores (con base en datos históricos y panoramas de inversión reales en un contexto donde la estabilidad económica es exigua), presentar y analizar los resultados.

Finalmente, se pretende que esta investigación constituya un material de referencia concreto y útil para distintos tipos de usuarios potenciales, como pueden serlo profesores y estudiantes de disciplinas relacionadas con las Finanzas, así como el público inversionista o interesado en el área. Los fines pueden ser diversos, ya sean docentes, académicos, y evidentemente, la toma de decisiones al conformar o negociar portafolios de inversión.

Con el fin de presentar el modelo para la creación de carteras de inversión y aplicarlo a las acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, esta investigación se ha dividido en cuatro capítulos;

- El Capítulo I consiste en una revisión de la teoría económica y financiera que constituye la base del modelo de teoría de la cartera; en este capítulo, se explican:
    - (a) Las diversas hipótesis de los mercados de competencia perfecta.
    - (b) El uso y axiomática de las funciones de utilidad para representar las preferencias racionales del inversor.
    - (c) El concepto de utilidad marginal decreciente, para explicar la aversión al riesgo como un factor imprescindible derivado del perfil del inversionista.
    - (d) El uso de curvas de indiferencia como una forma de representar diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento.
- El Capítulo II consiste en la descripción detallada de cada una de las fases de la gestión de carteras, entendiendo dicha gestión como un proceso cíclico. La exposición inicia desde el punto en que el inversionista establece sus políticas, alcances y objetivos de inversión, continúa por el análisis financiero de los múltiples activos disponibles en los mercados, para luego mostrar los distintos modelos que se han propuesto para la selección de carteras, así como algunos criterios de evaluación de la cartera una vez conformada.
- En el Capítulo III se realiza una presentación formal de la Teoría de la Cartera Tradicional surgida a raíz de las aportaciones de Markowitz, Tobin y Sharpe. En esta parte se explican inicialmente las bases, supuestos y deducción del Modelo de Markowitz, como el resultado de una aplicación del Cálculo Diferencial (Teorema de Lagrange), Álgebra Lineal (representaciones matriciales y sistemas de ecuación), Estadística (matrices de varianzas y covarianzas) y la teoría económica previamente revisada, con el fin de encontrar la cartera de mínimo riesgo para un número n de instrumentos. Posteriormente, se retoma la derivación analítica de la frontera eficiente de oportunidades de inversión que realiza Merton en la revista *Journal of Financial and Quantitative Analysis* de septiembre de 1972, que consiste en la adición de una restricción más al modelo de Markowitz. Enseguida se presenta la aportación de Tobin, que consiste en la inclusión de un activo libre de riesgo en el modelo, para luego presentar el Modelo de Mercado de Sharpe; en este modelo destaca la noción del coeficiente beta (β), que relaciona el exceso de rendimiento de la acción respecto de la tasa libre de riesgo y

el exceso de rendimiento de mercado respecto a la tasa libre de riesgo, con base a un ajuste por regresión lineal simple. Finalmente, se revisan algunas teorías complementarias a los modelos anteriores, tales como el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), la *Arbitrage Pricing Theory* y las Hipótesis de Eficiencia de los Mercados.

- El Capítulo IV consiste en la aplicación empírica del modelo desarrollado para el caso específico de una cartera conformada por instrumentos disponibles en el Sistema Financiero Mexicano; básicamente, acciones de emisoras representativas enlistadas en la Bolsa Mexicana de Valores, así como Certificados de la Tesorería del Gobierno Federal (CETES). Se describen los datos y criterios utilizados, la paquetería y programación llevada a cabo en el desarrollo de los cálculos, y los resultados obtenidos, comentándolos finalmente a manera de conclusión.
- Por último, se presentan las diversas fuentes bibliográficas utilizadas durante la investigación, así como algunos cálculos anexos.

CAPÍTULO I
ALGUNOS CONCEPTOS FINANCIEROS Y ECONÓMICOS

1.1. EL RIESGO FINANCIERO Y LA DIVERSIFICACIÓN

La inversión en carteras no puede entenderse si no comenzamos por definir, en general, qué es una inversión. Una definición aceptada generalmente dice que una inversión es el sacrificio de una satisfacción inmediata y cierta a la que se renuncia a cambio de un valor o de una esperanza futura, posiblemente incierta.

Esta definición permite destacar dos peculiaridades que van a identificar a las inversiones: el riesgo inherente a las mismas y el espacio de tiempo –plazo– que transcurre entre el sacrificio actual y la recompensa futura. No obstante, conviene señalar una tercera característica: la rentabilidad que llevan asociadas.

Del universo de diferentes inversiones posibles, nos concretaremos a las realizadas en carteras de valores. Pero ¿qué es una cartera? Se conoce como *cartera* o *portafolio de inversión* a un conjunto, combinación o colección de activos financieros, tales como bonos, acciones, bienes raíces, divisas, derivados, etc. La forma en que se asignan los fondos a las diversas oportunidades de inversión determina el riesgo y la rentabilidad de la inversión.

Así, entenderemos que invertir en carteras es un problema de decisión en el que un inversionista debe repartir un determinado presupuesto monetario entre distintos activos financieros durante un periodo de tiempo dado, en función del objetivo u objetivos que pretenda alcanzar, y suponiendo que al final de dicho espacio de tiempo procederá a liquidarlos (y quizá reinvertirlos).

Estos activos integrarán una cartera de valores, y aunque en principio tendrían cabida en ella tanto valores mobiliarios en sentido estricto como cualquier otro tipo de activos financieros, nuestro desarrollo se centrará exclusivamente en el estudio de carteras integradas por instrumentos de renta variable, particularmente acciones, es decir, por partes alícuotas del capital de una sociedad anónima, que posteriormente serán combinadas con instrumentos libres de riesgo.

Pero ¿qué es el riesgo? Se define *riesgo* como la probabilidad de que se presenten pérdidas o efectos adversos debido a una contingencia, es decir, la ocurrencia de un fenómeno aleatorio. En materia de inversiones, el riesgo queda representado por la posibilidad de obtener resultados insatisfactorios en materia de rentabilidad, lo que origina una pérdida real de capital.

Al decir riesgo financiero, nos referimos al riesgo adicional que corren los accionistas de una entidad cuando ésta es financiada por deudas y fondos de capital contable. Una clasificación propuesta por Sharpe[1] sugiere que la rentabilidad de un valor está afectada por un riesgo total, que puede ser visto como la suma de dos tipos de riesgos:

1. Un riesgo propio o específico que no depende del mercado, sino de las características especificas de cada entidad o empresa emisora, naturaleza de su actividad productiva, competencia de la gerencia, solvencia financiera, temporadas de venta, etc. Este tipo de riesgo es conocido como *Específico, No sistemático* o *Diversificable* y afecta en especial a un pequeño número de activos.
2. Un segundo tipo de riesgo, llamado *Sistemático* o *De Mercado*, que no depende de las características individuales del titulo, sino de otros factores más generales que inciden sobre la coyuntura económica general y el comportamiento de los precios en los mercados financieros; por ejemplo, guerras, recesiones, inflación, volatilidad del tipo de cambio, una caída en el mercado de valores o un colapso en el sistema bancario.

---
[1] SHARPE, W.F. *A simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science, Vol. 9, No. 2, Enero 1963, p. 277-293.

A este segundo tipo de riesgo también se le denomina como *No Diversificable*, ya que a diferencia del anterior no será posible eliminarlo mediante la diversificación, dada la correlación existente entre la rentabilidad del titulo en cuestión con las rentabilidades de otros títulos a través del Índice Bursátil que resume la evolución del mercado.

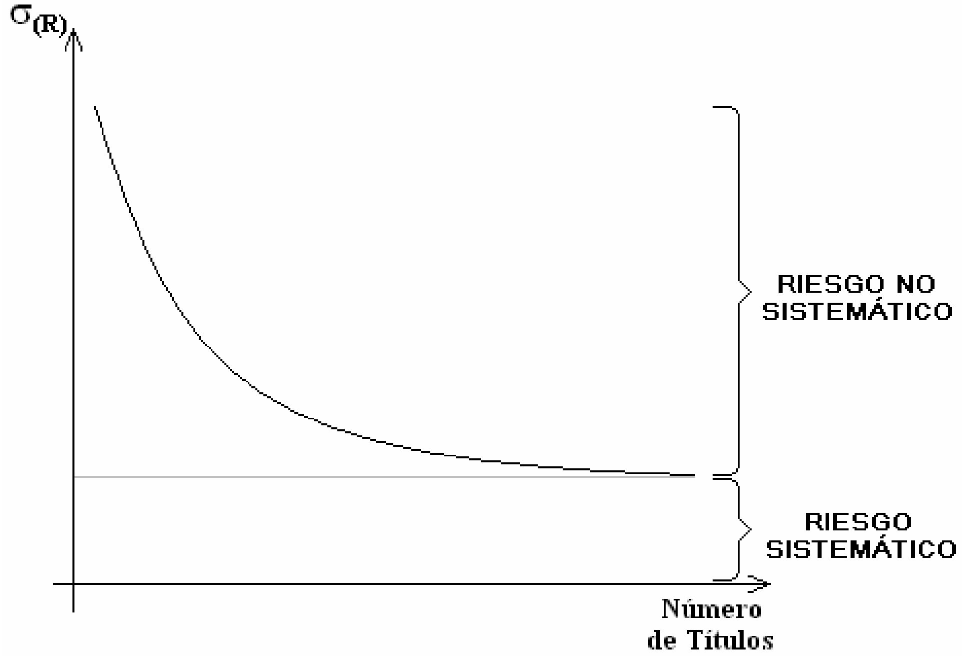


Figura I-1. El riesgo de una cartera al aumentar el número de títulos.

En el sistema bancario, los bancos retienen capital para absorber el riesgo crédito (por ejemplo, préstamos desafortunados), el riesgo de mercado (variaciones en tasas de interés, como ejemplo) y riesgo operacional (por ejemplo, la exposición a una demanda). Por ello, en los últimos años el desarrollo de los mercados de derivados ha llevado a los bancos a cubrir sus riesgos mediante productos financieros derivados.

En operaciones de aseguramiento es difícil obtener protección financiera contra los riesgos no sistemáticos debido a la inexistencia de una contraparte que acepte el riesgo. Por ejemplo, es muy difícil obtener un seguro de vida o propiedad que cubra una eventual guerra nuclear.

La esencia del riesgo sistemático es por consiguiente la correlación de las pérdidas. Mientras la investigación en econometría y negocios ha conducido a una mejora importante para anticipar situaciones macroeconómicas, los riesgos sistemáticos son difíciles de prever, dado el papel crucial que juegan las interdependencias y contrapartes en los mercados financieros. Si un banco se declara en quiebra y remata sus activos, la caída en los precios de los activos podría inducir a problemas de liquidez en otros bancos, lo que llevaría a un pánico bancario general.

Queda en evidencia entonces la potencial fragilidad de algunos mercados financieros; si los participantes están haciendo negocios en niveles muy lejanos a sus bases de capital, entonces la caída de uno de los participantes podría privar a otros de liquidez, y entonces un efecto dominó expone al mercado completo a riesgo sistemático.

1.1.1. La Diversificación

Una vez expuestos los conceptos de cartera de inversión y riesgo, conviene revisar el concepto de *diversificación*, para lo cual echaremos mano del siguiente ejemplo.

Si el inversionista coloca su dinero en un solo instrumento corre el riesgo de perderlo todo ante un eventual impago por parte del emisor. Mientras que si lo invierte en diferentes sectores o instrumentos, puede compensar las pérdidas de unos con las ganancias de otros. El objetivo de la diversificación es que ante una posible eventualidad, los impactos se vean disminuidos; en otras palabras, podemos decir intuitivamente que el riesgo de los rendimientos sobre una cartera de inversión puede ser menor que la suma de los riesgos provenientes de los activos individuales.

Un ejemplo aclarará el argumento anterior. Sabemos que cuando la economía está en auge la demanda de automóviles nuevos es alta, y los rendimientos de la industria automotriz son grandes, pero a medida que el crecimiento económico tiende a bajar la gente no podrá cambiar con facilidad su auto y tendrá que mantenerlo con demanda de refacciones. Entonces la industria de las refacciones, en este periodo, obtendrá altos rendimientos. Debido al comportamiento cíclico de la industria automotriz, y anticíclico de la industria de refacciones, un inversionista con acciones en las dos industrias puede tener rendimientos más estables por la diversificación que si invirtiera sólo en una industria.

Así, la diversificación puede definirse como la asignación de fondos a una variedad de títulos con características de riesgo diferentes con el objeto de que el riesgo del conjunto disminuya. Independientemente de los objetivos propios que cada inversionista puede tener, la diversificación es buena en la práctica, pues provee protección al portafolio manejado. De esta manera, un primer paso consiste en establecer criterios respecto a:

(a) Los títulos en que se va a invertir, ya sea de renta fija o variable.
(b) El riesgo a tomar, medido en base a la clasificación de riesgo de los emisores.
(c) El plazo a invertir.

. Hay dos aspectos de la diversificación que deben ser puntualizados:

- Cuando un inversor compra títulos en el mercado de valores con el fin de reducir el riesgo, la diversificación tiene sentido si las rentabilidades de los diferentes títulos adquiridos no están correlacionados, o tienen distinto grado de correlación con el índice del mercado.
- Por otra parte, la diversificación no es solamente decidir en qué instrumento invertir, sino también en qué plazo y bajo que términos de tolerancia al riesgo hacerlo. Por ejemplo, un inversionista puede colocar su dinero solo en títulos gubernamentales pero diversifica invirtiendo sus fondos en vencimientos de corto, mediano y largo plazo.

De hecho, la diversificación ha dado lugar a toda una industria, los fondos mutualistas. Estas organizaciones financieras aceptan fondos de cientos o miles de inversionistas, reúnen sus fondos y los usan para invertir en una cartera de valores. Cada uno de los inversionistas posee una parte de la totalidad de los valores de la cartera, lo que brinda incluso a los inversionistas muy pequeños la oportunidad de tener muchos valores diferentes y, por consiguiente, lograr un alto grado de diversificación.

Posteriormente, veremos que para tomar este tipo de decisiones se debe de conocer mucho de las estructuras financieras, ya que para invertir capital en las empresas de las cuales se espera un comportamiento futuro, no solo basta con manejar los indicadores (ratios) de las empresas, sino de las expectativas futuras de todo el entorno del mercado, y es en este sentido que el corredor de bolsa presta su valiosa colaboración, orientando mediante criterios técnicos y análisis fundamental al inversionista, para que este tome una decisión mejor evaluada.

1.1.2. Algunas técnicas de diversificación por plazo

La estructura de vencimientos de los instrumentos de una cartera se relaciona con la forma en que estén asignados los fondos a títulos con diferentes vencimientos. Así, podemos ver que el plazo es una forma más de lograr una diversificación, esta vez por plazo, y existen dos enfoques básicos:

A. *Método de la escalera*. Existe la técnica de la escalera o "estrategia escalonada" y consiste en distribuir los fondos en títulos de diferentes plazos, de manera escalonada, por ejemplo en títulos de 2, 4, 6, 8 y 10 años al vencimiento. El título de 2 años en teoría, le debe generar menor interés.

A mayor plazo, mayor riesgo, es decir mayor rentabilidad. Al terminar el plazo del primer valor (2 años), el cliente invierte nuevamente a 10 años, entonces compensa la escalera. Y así sucesivamente con los distintos vencimientos.

B. ***Método de Barbell*.** También llamado método ***dumbbell***, esta estrategia consiste en invertir entre el menor y el mayor plazo posible de distintos instrumentos, lo cual depende de un análisis profundo. Por ejemplo, el cliente invierte un porcentaje de dinero en títulos de 30 días a 3 años y otro porcentaje a largo plazo, digamos a 30 años. Son los extremos de los plazos y el análisis determina el porcentaje de inversión en cada instrumento. Una vez que el tiempo transcurre, habrá que ir recomponiendo la cartera para mantener la relación establecida en un inicio.

1.2. MERCADOS DE COMPETENCIA PERFECTA

La Economía en la que se vive hoy en día es producto de una combinación de factores, tanto macro como microeconómicos, y los tipos de mercado son, sin duda, uno de los elementos primarios del funcionamiento de cualquier economía.

El concepto de mercado, al ser tan amplio, se puede prestar a diferentes interpretaciones diferentes, a saber:

- Un área geográfica en la cual concurren compradores y vendedores de mercancías para realizar transacciones comerciales.
- Un grupo de personas con cierto nivel organizacional en constante comunicación para realizar transacciones comerciales.
- El ámbito dentro del cual las relaciones de oferta y demanda concurren para la fijación de un precio.
- La serie de transacciones que llevan a cabo los productores, intermediarios y consumidores para llegar a la fijación del precio de las mercancías.

Asimismo, los mercados pueden tener diversas clasificaciones, y su división obedece a:

- El área geográfica, distinguiendo mercados locales, regionales, nacionales y mundiales.
- El tipo de productos ofrecido, esto es, mercancías o servicios.
- El tiempo de formación del precio: mercados de oferta instantánea, de corto o de largo plazo.
- El tipo de competencia: de competencia perfecta o imperfecta (monopolios, duopolios, oligopolios, etc.).

Es esta última clasificación la que se abordará en el siguiente apartado.

1.2.1. Características de los Mercados de Competencia Perfecta

El mercado de *competencia perfecta* se define como aquel mercado en el que existe un gran número de compradores y vendedores de una mercancía, además de que se ofrecen productos similares, igualmente existe libertad absoluta para los compradores y vendedores y no hay control sobre los precios ni reglamento para fijarlos. Para que exista competencia perfecta, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- Homogeneidad del Producto

Para que haya libre competencia es necesario que el consumidor sea indiferente a comprar el producto de una empresa o de otra, por tanto los productos tienen que ser exactamente iguales; sólo así se hará realidad que si una empresa pusiera el precio por encima del establecido por el mercado, los consumidores dejarían de comprarlo[2]. La homogeneidad debe incluir todas las condiciones de venta tales como garantías o financiación.

- Movilidad de recursos sin restricciones

Todos los agentes productores, es decir, los fabricantes, deberán tener total libertad para operar en todos los aspectos que el proceso de producción les exija. Es decir, deben tener total libertad de escoger, desde insumos, distribuidores, hasta el momento en el que el producto ya esté terminado. Las empresas deben estar en capacidad de entrar o salir de cualquier industria, los recursos deben poder movilizarse sin ningún problema entre usos alternativos y los bienes y servicios deben ser vendibles donde quiera que el precio sea más alto.

- Liquidación total de productos

El cumplimiento a la perfección del ciclo económico supone la liquidación total de las mercancías, sin dejar lugar a remanentes, para permitir que los espacios sean de nuevo ocupados por las nuevas mercancías. Así, los fabricantes no gastan recursos o tiempo en planear soluciones a lo que significa liquidar o colocar sus remanentes de mercancías.

- Gran número de vendedores y compradores

Para que ningún agente económico pueda ejercer influencia alguna sobre el precio, debe existir un gran número de ellos y cada uno debe actuar de manera independiente. Además, el mayor comprador o el mayor vendedor debe proporcionar solo una pequeña parte de las cantidades totales compradas y vendidas, y el precio se fija cuando la oferta y la demanda son las mismas (precio de equilibrio).

- Libre concurrencia

Ningún agente puede influir en el mercado. El número de compradores y vendedores es muy alto y las cantidades producidas o demandadas por cada uno de ellos son tan pequeñas en relación con el total que su influencia sobre los precios es despreciable. Para que haya libre concurrencia es imprescindible la libertad de entrada y salida en las industrias, es decir, que no haya barreras que impidan a una empresa dedicarse a producir cualquier cosa. (Cualquier empresario que lo desee puede destinar su capital a la fabricación de un producto determinado).

- Información y racionalidad de los agentes

En los mercados de libre competencia, los agentes económicos conocen todos los bienes y servicios existentes en el mercado, y la capacidad técnica de cada uno de ellos para satisfacer una necesidad. Además conoce sus precios, sus características y la existencia de posibles sustitutos, y es consciente que los precios no cambiarán por el hecho de su actuación particular en el mercado. El agente también conoce cuales serán sus ingresos a lo largo del período de planteamiento

Debido a lo anterior, la información en un mercado de competencia perfecta es un bien de costo escaso o nulo. En el momento de decidir entre diferentes alternativas, los consumidores elegirán aquellas que maximicen su utilidad y los productores las que maximicen sus beneficios.

Muchas veces la información puede ser un bien escaso y de alto costo. Debido al costo de adquirir más información, llega un momento en que renunciamos a seguir investigando aunque ello pueda tener como consecuencia una decisión de compra incorrecta. Pero para que la decisión sea la correcta, además de información se necesita racionalidad, es decir, capacidad para analizarla y valorarla. Los agentes deben poder adoptar decisiones que satisfagan sus preferencias. La teoría económica, en

[2] En la realidad, las empresas tratan de diferenciar sus productos mediante campañas publicitarias, envases llamativos o pequeños cambios en el diseño o la composición. Es más, una de las principales virtudes de la libre competencia es precisamente el esfuerzo que obliga a todas las empresas por mejorar continuamente sus productos tratando de diferenciarse por su mayor calidad o menor precio, buscando cautivar al único proveedor de riqueza que existe en el mercado, el consumidor.

principio, considera que los gustos y preferencias están dados, son transitivos e invariables a corto plazo.

En la medida en que determinado mercado no cumpla con las características de la competencia perfecta, se alejará de ella o bien será un mercado con mayor o menor imperfección y con mayor o menor competencia.

1.2.2. El precio de equilibrio en el Mercado Competencia Perfecta

Dadas las condiciones impuestas a los productores para competir dentro del Mercado de Competencia Perfecta, podemos resaltar la condición de que ningún competidor (productor) puede influir de manera directa en la fijación del precio al cual los consumidores finales tendrán esta mercancía, así, las empresas no podrán modificar ni los precios, ni las cantidades de una mercancía determinada en un precio establecido, con lo que la oferta estará garantizada. No así la demanda, que al tener tantas opciones para consumir no solo se diversificará, sino que hará del establecimiento del precio, siempre una oferta a su favor.

¿Cómo es entonces que se establece el precio de equilibrio en una competencia perfecta? El precio se establece basándose en la curva de la oferta, que deberá ser vertical, además de perfectamente inelástica[3], y la función de la curva de la demanda será permanecer ligeramente inclinada, en espera de que la oferta le presente los elementos necesarios para tomar la determinación de cómo debe llevarse a cabo la actividad comercial.

Por otra parte, en el mercado Competencia Perfecta, el precio no solo sirve como el punto de contacto en la actividad comercial, sino que además será el encargado de racionar las cantidades. Si consideramos que la oferta y los costos de producción no están necesariamente ligados, entonces el precio que surge del contacto de la curva de la demanda y la curva de la oferta evitará la producción desmedida de un producto cuya demanda esté perfectamente satisfecha por los productores, y ello se logra gracias al precio, que igualmente separa la oferta de los bienes entre todos los demandantes reales y los demandantes potenciales.

Es así como podemos decir que la competencia perfecta es la forma ideal de comerciar, no tanto para los productores que ven amenazada constantemente su participación en el mercado, sino para los consumidores finales, que son quienes disfrutan de las ventajas que la libre competencia y oferta le ofrecen a los consumidores, que tienen para satisfacer sus necesidades una enorme gama de opciones, amplia, pero limitada a la vez, ya que el supuesto establece que todos los productos deben de ser los mismos.

Así, podemos concluir que no hay un mercado perfecto, ya que el principal defecto de la competencia perfecta es su carácter utópico. Lo único que sí puede existir es un comercio o un proceso económico en el cual prevalezca la ética, los valores empresariales y el anteponer el bienestar común por encima de las ganancias a cualquier precio y ante cualquier costo.

1.3. TEORÍA ECONÓMICA DE LA ELECCIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

Todos los problemas de decisión tienen ciertos elementos en común: por ejemplo, cualquier problema conlleva a delinear las posibles alternativas de solución, la selección del criterio para elegir entre dichas alternativas, y finalmente, la solución del problema. Además, las soluciones individuales pueden a menudo ser agregadas para describir las condiciones de equilibrio que prevalecen en el mercado.

Así, para resolver cualquier problema de decisión sobre inversiones se tiene que definir un conjunto de oportunidades y una función de preferencia, y a menudo se consideran factores decisivos como

---

[3] La oferta es perfectamente inelástica cuando la cantidad ofertada no es sensible ni fluctúa ante las variaciones de precio.

rentabilidad, riesgo y las probabilidades de obtener ciertos rendimientos. Asimismo, se considera a la ***utilidad*** como una medida de la felicidad o satisfacción relativa de una persona al poseer o recibir un bien.

Sin embargo, la mayor parte de las elecciones de las personas implican no tener la certeza de los resultados, lo que obliga a comprender la teoría convencional de la elección del consumidor en condiciones de incertidumbre. Al igual que en la Teoría Microeconómica clásica, las teorías de Finanzas y de Toma de Decisiones buscan modelar el comportamiento de los individuos en base a supuestos que simplifican el análisis. Por ejemplo, se supone que los individuos actúan como si tuvieran una función de utilidad y tomaran sus decisiones (actuaran) intentando maximizar dicha función de utilidad, situación que describiremos a continuación.

1.3.1. Una introducción a las Funciones de Preferencia

Comenzaremos por exponer el concepto de elección entre activos riesgosos a través de un ejemplo.

INVERSIÓN *A*		**INVERSIÓN *B***	
Resultado	**Probabilidad**	**Resultado**	**Probabilidad**
5	1/3	*4*	1/3
10	1/3	*12*	1/3
15	1/3	*20*	1/3

Tabla I-A. Dos alternativas de inversión.

Consideremos dos alternativas de inversión como las de la Tabla I-A. Aunque ambas inversiones presentan tres posibles resultados equiprobables, la inversión A tiene menos variabilidad en sus resultados y estos son menores en promedio que los de la inversión B.

Existen diversas maneras para decidir entre A y B. Primero, podríamos simplemente preguntar al decisor cuál prefiere o si es indiferente entre una y otra, lo cual probablemente sea suficiente con la información de la tabla. Incluso para los problemas más complicados, a veces el análisis directo de las opciones puede ser la alternativa más sensata.

Otro acercamiento a la decisión consiste en especificar en qué medida los resultados mayores son más valiosos con respecto a los menores, ponderar cada resultado por dicho valor y calcular la esperanza de estos valores ponderados. Esta idea de agregar un valor a cada resultado para ponderarlo es bastante común, pues se usa –por ejemplo- en los torneos de fútbol (los partidos ganados se ponderan con tres puntos, los empates con un punto y las derrotas con cero puntos). Antes de continuar con nuestro ejemplo, supongamos que la Tabla I-B resume los resultados de los últimos 70 partidos de dos equipos de la Liga Mexicana y queremos escoger al mejor.

	ÁGUILAS	CHIVAS
Partidos Ganados	40	45
Partidos Empatados	20	5
Partidos Perdidos	10	20

Tabla I-B. Resultados de los últimos 70 partidos entre dos equipos.

Si denotamos como W a cada resultado (partido ganado, perdido o empatado), $U(W)$ al valor de cada resultado (3, 1 o 0 puntos) y $N(W)$ al número de veces o partidos en los que ocurre W, para determinar al mejor equipo calcularíamos:

$$U = \sum_{W} U(W)N(W)$$

El equipo que tenga una U mayor es considerado el mejor. Por ejemplo, si aplicamos la fórmula a ambos equipos, tenemos que

$$U_{\text{ÁGUILAS}} = 3(40) + 1(20) + 0(10) = 140$$
$$U_{\text{CHIVAS}} = 3(45) + 1(5) + 0(20) = 140$$

Mientras la función particular $U(W)$ difiere en cada situación, la idea de asignar un valor a cada valor para ponderar los resultados es la misma. Tradicionalmente, en vez de utilizar el número de resultados de un tipo en particular, se utiliza la proporción de los mismos con respecto al total, lo que no afectará la decisión. Si $P(W)$ es la proporción de partidos en total que terminaron en el resultado W, entonces $P(W) = N(W) / 70$. Ponderar una función –en este caso U – por la proporción de ocurrencia de cada resultado es equivalente a calcular un promedio o valor esperado, es decir, $E(U)$, en función de las probabilidades.

Cuando aplicamos este principio al problema de decisión original, tenemos algunos nombres especiales. La función para ponderar es llamada una ***función de utilidad***, y el principio que usamos para escoger es la llamada ***Teoría de la Utilidad Esperada***. Para nuestro ejemplo, la función de utilidad podría ser la siguiente:

RESULTADO	PONDERACIÓN	UTILIDAD
20	0.9	18.0
15	1.0	15.0
12	1.1	13.2
10	1.2	12.0
5	1.4	7.0
4	1.5	6.0

Tabla I-C. Función de utilidad del inversionista.

Si esta es la función de utilidad que el inversionista consideró adecuada, entonces comparará las inversiones A y B usando esta función:

$$U_A = U(5)(1/3) + U(10)(1/3) + U(15)(1/3) = 7(1/3) + 12(1/3) + 15(1/3) = 11.33$$
$$U_B = U(4)(1/3) + U(12)(1/3) + U(20)(1/3) = 6(1/3) + 13.2(1/3) + 18(1/3) = 12.40$$

En esta situación, el inversionista escogería la opción B pues ofrece la mayor utilidad esperada. En general, podemos decir que un inversionista escogerá entre diversas alternativas aquella que maximice su utilidad esperada, es decir, maximizando $E(U)$.

Muchas firmas de corretaje y bancos han desarrollado programas para tratar de extraer la función de utilidad de los inversionistas, confrontándolos a una elección entre una serie de inversiones simples. Esto no ha resultado exitoso, ya que muchos inversionistas no obedecen todos los postulados de racionalidad en esta situación, aún cuando consideren razonables los principios subyacentes.

Aunque el inversionista o gestor de carteras no crean en las funciones de utilidad, aún existe mucho que aprender del análisis de utilidad. El entendimiento de las propiedades de funciones de utilidad alternativas puede conducir a comprender el proceso de la elección racional, lo que permitiría al inversionista eliminar de antemano algunos portafolios y reducir la posibilidad de tomar una mala decisión.

1.3.2. La Teoría de la Utilidad Esperada

Durante los últimos sesenta años, la Teoría de la Utilidad Esperada (TUE) de John Von Neumann y Oskar Morgenstern ha sido el estándar de la decisión individual en régimen de riesgo.

El primer antecedente histórico de la TUE es debido a Bernoulli (1738), buscando una solución a la paradoja de San Petersburgo[4]. Posteriormente, Von Neumann y Morgenstern (1944) dieron forma axiomática al comportamiento del individuo ante la decisión en riesgo, sentando el precedente para múltiples trabajos posteriores.

1.3.2.1. Los axiomas de Von Neumann y Morgenstern

De acuerdo a Von Neumann y Morgenstern, la TUE puede ser desarrollada a partir de un conjunto de axiomas o postulados sobre la conducta del inversionista. Si el decisor se comporta como lo dictan dichos postulados, entonces la elección entre inversiones es idéntica, ya sea utilizando la TUE o examinando directamente la inversión. Para exponer los axiomas de la TUE es necesario definir antes algunos conceptos.

Como en cualquier modelo de elección en el que la gente actúa racionalmente, esta teoría empieza describiendo de forma general el conjunto de alternativas disponibles. En todo problema de elección con incertidumbre, cada alternativa disponible recibe el nombre de ***lotería*** (ℓ) y se compone de dos aspectos:

- Los estados de la naturaleza, es decir, los diferentes resultados o consecuencias que pueden ocurrir si se escoge un acontecimiento aleatorio como ℓ, denotadas por $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.
- La probabilidad de ocurrencia de cada una de las consecuencias θ_i si escogemos ℓ, denotada como $p(\theta_i) \geq 0$. Ésta puede ser objetiva (basada en frecuencias) o subjetiva (si el agente la asigna en base a su percepción personal).

Así, definimos una lotería simple ℓ como una lista $[p(\theta_1), p(\theta_2), \ldots, p(\theta_m)]$ en la que asumiremos que las probabilidades que el individuo asigna a todas las consecuencias suman uno, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} p(\theta_i) = 1$$

El espacio de todas las loterías disponibles para el consumidor es el conjunto L. Además, toda lotería debe tener al menos una consecuencia con una probabilidad mayor que cero, por lo que una lotería con sólo una consecuencia es un hecho seguro y recibe el nombre de *lotería segura*.

Para poder derivar una teoría de la elección, necesitamos considerar una estructura analítica que consiste en los siguientes axiomas.

i) <u>Ordenación</u>

Primero, es necesario establecer algún tipo de ordenación entre todas las $\ell \in L$. Puesto que este proceso de comparación se lleva a cabo comparando loterías de dos a dos, introducimos una relación binaria $\succeq_i$ sobre L_i denominada ***preferencias del consumidor i***. Así, sean α y β dos loterías cualesquiera dentro de un conjunto de alternativas L para un individuo ***i***, $\alpha \succeq_i \beta$ se lee "para el consumidor ***i***, la lotería α es débilmente preferida a β, o bien, α es al menos tan preferida como β".

---

[4] *"La gente solo arriesgará una pequeña cantidad para obtener una recompensa de valor infinito"*.

En teoría de probabilidad y teoría de decisiones, la Paradoja de San Petersburgo es una paradoja que muestra una variable aleatoria cuyo valor es, con una probabilidad alta, muy bajo, pero con un valor esperado infinito.

Si se aplica ingenuamente la teoría de decisiones sin tener en cuenta la utilidad, se obtiene que merecería la pena pagar cualquier apuesta inicial, sin importar su cuantía. En la práctica, ninguna persona racional pagaría más de unos pocos centavos para jugar, además de que nadie tiene ni el tiempo ni el dinero necesario para jugar una y otra vez para llegar al largo plazo, o siquiera a una aproximación buena del mismo.

Este problema fue planteado por primera vez en 1713 por el matemático suizo Nicolás Bernoulli. Posteriormente fue modificado y publicado por su sobrino Daniel Bernoulli en las *Transactions* de la Academia de San Petersburgo, Rusia, en 1738.

Siguiendo a Villar y Varian[5], las preferencias $\succeq_i$ deben satisfacer las tres propiedades de ***ordenación*** siguientes:

a) ***Completitud***. Un inversionista puede establecer una preferencia (comparar y jerarquizar) entre cualquier par de loterías:

$$\forall\, \alpha, \beta \in L_i, \text{ se cumple que } \alpha \succeq_i \beta,\ \beta \succeq_i \alpha, \text{ o ambos.}$$

b) ***Reflexividad***. Este supuesto es trivial, pues dice que cualquier lotería es al menos tan preferida como sí misma:

$$\forall\, \alpha \in L_i, \text{ se cumple que } \alpha \succeq_i \alpha$$

El axioma de completitud es una condición suficiente para que las preferencias sean reflexivas; sin embargo, la reflexividad no implica completitud.

c) ***Transitividad***. Las preferencias del inversionista son transitivas, para evitar relaciones de preferencia circulares. Esto es:

$$\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in L_i, \text{ si } \alpha \succeq_i \beta \text{ y } \beta \succeq_i \gamma, \text{ entonces se cumple que } \alpha \succeq_i \gamma$$

Una relación binaria que satisfaga las propiedades de completitud, reflexividad y transitividad se denomina ***relación de preferencia*** o un ***preorden completo***[6]. Por lo tanto, la relación binaria $\succeq_i$ es el preorden completo de preferencias del consumidor i, y decimos que $(L_i, \succeq_i)$ es un conjunto completamente preordenado.

El preorden completo de preferencias del consumidor ***i*** permite definir dos relaciones binarias adicionales: la relación de indiferencia y la relación de preferencia estricta.

La ***relación de indiferencia*** se representa como $\sim_i$. Dadas dos loterías α y β, si se verifica que $\alpha \succeq_i \beta$ y $\beta \succeq_i \alpha$, entonces escribimos que $\alpha \sim_i \beta$ y decimos que α es indiferente a β en el sentido que ambas loterías son igualmente valoradas para el decisor.

Los axiomas de completitud, reflexividad y transitividad permiten verificar que la relación de indiferencia $\sim_i$ es reflexiva, transitiva y además simétrica, es decir, $\alpha \sim_i \beta$ implica $\beta \sim_i \alpha$. Por lo tanto, la relación de indiferencia es una relación de equivalencia que permite establecer una ***clase de indiferencia***, es decir, un conjunto de loterías indiferentes entre sí que es una partición del conjunto de loterías L_i. Así, todo elemento $\ell \in L_i$ pertenece a una sola clase de indiferencia $I_i(\ell)$, la intersección de dos clases de indiferencia cualesquiera es vacía, y la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto L_i.

La ***relación de preferencia estricta*** se representa como $\succ_i$. Dadas dos loterías α y β, si se verifica que $\alpha \succeq_i \beta$ y $\alpha \not\sim_i \beta$ –o bien, $\beta \not\succeq_i \alpha$, entonces escribimos $\alpha \succ_i \beta$ y decimos que α es estrictamente preferida a β. La relación $\succ_i$ obviamente no es reflexiva ni simétrica.

Ahora bien, estamos interesados en poder representar la relación de preferencia $\succeq_i$ mediante una función de utilidad u: $L_i \rightarrow \Re$ en el siguiente sentido:

$$\alpha \succeq_i \beta \iff \quad u(\alpha) \geq u(\beta) \quad \forall\, \alpha, \beta \in L_i$$

Claramente, cuando el conjunto L_i de alternativas es numerable, cualquier relación de preferencia se puede representar en este sentido. Sin embargo, si L_i es no numerable, es necesario que las preferencias cumplan otros axiomas como el siguiente.

---

[5] VILLAR, Antonio, ***Lecciones de Microeconomía***, Antoni Bosch, Barcelona, 1996, Cap.2 y 3, y VARIAN, Hall., ***Microeconomía Intermedia***, 3° ed., 1992, Antoni Bosch, Barcelona.

[6] Las definiciones precisas de orden y preorden completo y parcial, así como sus niveles de generalidad, pueden encontrarse en DÉBREU, Gérard. ***Theory of Value: An axiomatic analysis of Economic Equilibrium***, Cowles Foundation Monographs Series, New Haven and London, Yale University Press, 1959.

ii) Continuidad

El axioma de continuidad estipula que no existen premios infinitamente buenos o infinitamente malos. Es decir, si tenemos dos loterías α y β para el agente *i*, tales que α es al menos tan buena como β ($\alpha \succeq_i \beta$), entonces otras loterías 'muy cercanas' a α también serán débilmente preferidas a β.

La definición anterior quiere decir que si un agente tiene preferencias continuas y él prefiere estrictamente una lotería a otra, entonces loterías muy cercanas (o similares) a la primera continuarán siendo estrictamente preferibles a la segunda. Un ejemplo aclarará la situación anterior. Supongamos que tenemos dos loterías: "viajar a París" o "quedarse en casa". Si nuestras preferencias son continuas, la lotería "viajar a Londres con una probabilidad (suficientemente) pequeña de estrellarse" también es preferida a "quedarse en casa".

Formalmente, dadas dos loterías α, $\beta \in L_i$, tales que $\alpha \succ_i \beta$, podemos definir vecindades para estos puntos $\varepsilon(\alpha)$ y $\delta(\beta)$ respectivamente tales que:

$$\forall\, \ell \in \varepsilon(\alpha),\ \ell \succ_i \beta \qquad \text{y} \qquad \forall\, \ell \in \delta(\beta),\ \alpha \succ_i \ell$$

Es decir, $\ell_i^0 \in L_i$, los conjuntos

$$M_i(\ell_i^0) \equiv \{\ell_i \in L_i \mid \ell_i \succ_i \ell_i^0\}$$
$$P_i(\ell_i^0) \equiv \{\ell_i \in L_i \mid \ell_i^0 \succ_i \ell_i\}$$

son abiertos[7]. El conjunto $M_i(\ell_i^0)$ describe las loterías estrictamente preferidas o 'mejores' que ℓ_i^0, mientras que $P_i(\ell_i^0)$ describe las loterías 'peores' que ℓ_i^0. Alternativamente, podemos definir los conjuntos

$$MI_i(\ell_i^0) \equiv \{\ell_i \in L_i \mid \ell_i \succeq_i \ell_i^0\}$$
$$PI_i(\ell_i^0) \equiv \{\ell_i \in L_i \mid \ell_i^0 \succeq_i \ell_i\}$$

donde el conjunto $MI_i(\ell_i^0)$ representa las loterías al menos tan buenas como ℓ_i^0, y el conjunto $PI_i(\ell_i^0)$ describe las loterías 'no mejores' que ℓ_i^0. Los conjuntos $MI_i(\ell_i^0)$ y $PI_i(\ell_i^0)$ son cerrados, puesto que $\succeq_i$ es una relación completa y continua[8].

Otra forma de ver el axioma de continuidad es la siguiente. Sean α, β, $\gamma \in L_i$ tales que $\alpha \succeq_i \beta$ y $\beta \succeq_i \gamma$, y sea φ la alternativa compuesta por las dos alternativas α y γ con probabilidades respectivas de acaecimiento p y (1-p), es decir, $\varphi = p\alpha + (1-p)\gamma$, el axioma de continuidad implica que existe $p \in [0,1]$ tal que $\varphi \succeq_i \beta$. Este axioma a veces es llamado la ***propiedad Arquimediana***.

Gracias a los teoremas de Eilenberg (1941) y Débreu (1954, 1964), sabemos que si (L_i, $\succeq_i$) es un conjunto de preferencias con un preorden completo y continuo, entonces existe una función continua *f*: $(L_i, \succeq_i) \rightarrow (\Re, \geq_i)$ tal que $\forall\, \alpha, \beta \in L_i$, si $\alpha \succeq_i \beta$, entonces se cumple que $f(\alpha) \geq_i f(\beta)$. A tal función *f* la denominamos *función de utilidad*.

El cumplimiento de los axiomas de ordenación y continuidad también implica que:

$$MI_i(\ell_i^0) \cap PI_i(\ell_i^0) = I_i(\ell_i^0)$$
$$MI_i(\ell_i^0) \cup PI_i(\ell_i^0) = L_i$$
$$I_i(\ell_i^0) \text{ es un conjunto cerrado}$$

- Independencia

Sean α, β, γ tres loterías del conjunto L_i y p un escalar tal que $p \in [0,1]$. El axioma de independencia dice que

$$\alpha \succeq_i \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad p\alpha + (1-p)\gamma \succeq_i p\beta + (1-p)\gamma.$$

[7] VILLAR, *op. cit.*, p. 28.
[8] JEHLE, G. RENY, P. *Advanced Microeconomic Theory*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1998, p. 115.

En otras palabras, si mezclamos las dos primeras loterías simples con una tercera, entonces la preferencia entre las dos loterías mixtas resultantes es independiente de la tercera lotería simple considerada. Por ejemplo, si una persona preferiría tener un Porsche a tener un Ferrari, entonces esa persona preferiría comprar un boleto de $100 para la rifa de un Porsche con una probabilidad de ganar de 0.0001 que comprar otro boleto de $100 para la rifa de un Ferrari con la misma probabilidad 0.0001 de ganar.

Von Neumann y Morgenstern demostraron que el cumplimiento de los axiomas de ordenación, continuidad e independencia son condiciones suficientes y necesarias para que las preferencias puedan representarse usando un índice de utilidad numérico. Si una lotería discreta ℓ tiene varios resultados θ_i, cada uno con probabilidad de ocurrencia $p(\theta_i)$, y para cada resultado posible θ_i se asigna un valor de utilidad $u(\theta_i)$, la función de utilidad se construye como la utilidad esperada de los posibles resultados, es decir,

$$U(\ell) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{p}(\theta_i)\mathrm{u}(\theta_i)$$

La utilidad esperada en una situación de incertidumbre es, entonces, un promedio ponderado de la utilidad asociada a cada estado de la naturaleza, con las probabilidades de cada resultado como ponderadores.

Se dice que una relación de preferencia $\succeq_i$ sobre L_i está representada por una *función de utilidad esperada tipo Von Neumann-Morgenstern* (VNM) U: $L_i \rightarrow \Re$ si y sólo si:

$$\alpha \succeq_i \beta \qquad \Leftrightarrow \quad U(\alpha) \equiv \sum_{i=1}^{m} \mathrm{p}(\theta_i)\mathrm{u}(\theta_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{p}(\theta_i)\mathrm{u}(\theta_i) \equiv U(\beta)$$

Es más, sean U y $\tilde{U}$ dos funciones de utilidad esperada tipo VNM, $U(\ell)$ y $\tilde{U}(\ell)$ representan la misma relación de preferencia si y sólo si $\tilde{U}(\ell) = aU(\ell) + b$ para cierto a>0 y $b \in \Re$ (transformación lineal positiva). Los economistas dicen que una función de utilidad esperada es única salvo por transformaciones lineales positivas, lo que significa que puede someterse a una transformación de ese tipo y obtener una función de utilidad esperada que represente las mismas preferencias.

Lo anterior implica también que sólo importa la forma en la que la función de utilidad ordena las loterías, pues su magnitud sólo es relevante en la medida en que nos permite determinar el puesto relativo que ocupan las diferentes loterías. Decimos entonces que dichas funciones de utilidad son ordinales, es decir, los números $u(\theta_i)$ no tienen significado cardinal, sólo ordinal; esto es, el hecho de que $u(\theta_1)=100$ y $u(\theta_2)=10$ sólo indica que θ_1 es preferida a θ_2, no que θ_1 sea 10 veces preferida a θ_2.

1.3.2.2. La axiomática de Luce y Raiffa

Luce y Raiffa[9] retomaron los trabajos de Von Neumann y Morgenstern y propusieron los siguientes axiomas para avalar los criterios de decisión racional:

i) Axioma de Preferencia Puro o de Ordenación de Resultados

Dado un conjunto finito de resultados, todo decisor es capaz de definir una relación binaria de preorden completo, que dota a dicho conjunto de estructura de preferencia-indiferencia. Esto significa que es posible ordenar todos y cada uno de sus elementos desde el más preferido hasta el menos preferido.

[9] LUCE, R. Duncan, y RAIFFA, Howard, *Games and Decisions*, John Wiley & Sons, 1957.

ii) Axioma de Reducción de Loterías Compuestas

Dada una lotería compuesta, es decir, una lotería en la que alguna consecuencia es a su vez otra lotería referida a un mismo conjunto de premios, la mera aplicación del cálculo de probabilidades permite reducir la lotería compuesta a otra, equivalente a ella, definida directamente sobre el conjunto de premios.

Para aclarar esta situación, supongamos que se tira un dado y:

(a) Si cae en un número impar, se tira después una moneda: si sale águila, ganamos \$1, y si sale sol no ganamos nada.

(b) Si cae un número par, se tira de nuevo el dado: si sale 3 o menos, se gana \$2, y si sale 4 o más, se pierde \$1.

El ejemplo anterior constituye una lotería compuesta, que podemos hacer equivalente a una lotería simple con las consecuencias: {“ganar \$1”, “ganar \$0”, “ganar \$2”, “perder \$1”}, con probabilidades (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) respectivamente.

Este axioma implica que todo decisor racional es capaz de aplicar correctamente las reglas de la probabilidad, de modo que le resulten indiferentes una lotería compuesta y su lotería simple equivalente en la que los premios son los mismos y tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

iii) Axioma de Continuidad

Dada la ordenación establecida en el conjunto de premios garantizada por el Axioma *i*), sea ℓ una lotería con tres posibles premios ordenados θ_1, θ_2, θ_3 tales que θ_1 es el mejor, θ_3 el peor del conjunto, y θ_2 está situado entre ambos en la escala de preferencias ($\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$). Sea ℓ^* la lotería compuesta exclusivamente por la mejor y peor alternativas (θ_1 y θ_3) con probabilidades respectivas de acaecimiento p y (1-p), es decir, $p(\theta_1) + (1-p)(\theta_3)$, el axioma de continuidad implica que todo decisor racional está en condiciones de establecer una probabilidad subjetiva ***p*** de acaecimiento de θ_1 tal que le resulte indiferente recibir con certeza el premio intermedio θ_2 o participar en la lotería ℓ^* que combina el mejor y el peor de los premios.

El premio θ_2 recibe el nombre de ***cierto equivalente*** de la lotería ℓ^*, y la probabilidad de acaecimiento del mejor premio en la lotería ℓ^* se denomina ***utilidad*** del premio.

iv) Axioma de Sustitución

A todo decisor racional le resulta indiferente participar en una lotería simple o en una lotería compuesta en la que se han sustituido algunos de sus premios por sus loterías simples equivalentes definidas en el Axioma *iii*).

v) Axioma de Ordenación de Loterías

Todo decisor racional es capaz de ordenar el conjunto L_i de loterías, es decir, el conjunto de loterías está dotado de la relación de preferencia-indiferencia y posee estructura de preorden completo.

vi) Axioma de Monotonía

Dadas dos loterías del mismo conjunto L_i, formadas por los mismos dos únicos premios, será preferida aquella que otorgue mayor probabilidad de acaecimiento al mejor premio.

1.3.2.3. Algunas críticas a los axiomas de la Teoría de la Utilidad Esperada

En economía, cualquier comportamiento que resuelva un problema de optimización es llamado racional; la función que un agente económico maximiza es la denominada función de pagos (función de utilidad para el caso de los consumidores o familias o la función de beneficios en el caso de las empresas), sujetas a determinadas restricciones.

En cualquier caso, es necesario tener en cuenta que el supuesto básico es que los agentes económicos toman sus decisiones como si maximizaran una determinada función de pagos, no que dichos agentes maximicen dicha función de pagos real y conscientemente.

Hemos visto que la representación del comportamiento de un agente económico como maximizador de una función de pagos supone que las preferencias del agente sobre el conjunto de elección cumplen los axiomas mencionados, es decir, las preferencias son completas, reflexivas, transitivas y continuas. Estos axiomas aseguran que el agente, a la hora de tomar una decisión, se comporta como si maximizara una función de utilidad definida sobre el conjunto de elección. En el caso de elección bajo incertidumbre, se añade un axioma adicional: el de la independencia, que implica que la función de utilidad del agente adopte la forma de la utilidad esperada o función de utilidad tipo Von Neumann-Morgenstern. Sin embargo, este planteamiento de la racionalidad de los agentes no está exento de críticas. Dos de ellas serían fundamentales.

El primer grupo de críticas propugnan un cambio radical en el enfoque que la teoría económica hace de la racionalidad del agente económico. Usando la terminología de Simon (1955, 1978), suponen que la economía se ha centrado exclusivamente en la denominada Racionalidad Sustantiva, resultante de los procesos de maximización, opuesta a la idea de Racionalidad Procedimental, en la que los agentes se comportan coherentemente siguiendo procedimientos razonables pero que a veces toman decisiones subóptimas como resultado de este proceso, obviando la cuestión de cómo los agentes racionales alcanzan sus conclusiones y centrándose exclusivamente en la caracterización axiomática de cuales deben ser esas conclusiones. De este grupo, destacan las aportaciones de Coase, Simon, Hey y Radner.

El segundo grupo de autores critican los axiomas propuestos para caracterizar la función de utilidad del agente económico racional, fundamentalmente los axiomas que dan origen a la Función de Utilidad Esperada como paradigma de la elección en condiciones de riesgo, pues autores como Maurice Allais lograron demostrar que dichos axiomas son sistemáticamente violados en las decisiones de los individuos.

Von Neumann y Morgenstern (1944) demostraron que, si las preferencias obedecían a un determinado conjunto de axiomas, entonces éstas podrían ser representadas mediante una función de utilidad esperada. En la teoría de la utilidad esperada, como las probabilidades se consideran objetivas y conocidas, se dice que las decisiones se toman en un ambiente de riesgo. Sin embargo, si las probabilidades se consideran no objetivamente conocidas, hablamos de un entorno de incertidumbre; es la llamada Teoría de la Utilidad Esperada Subjetiva (Savage, 1954).

Savage propuso esta teoría como una combinación de las ideas de Von Neumann-Morgenstern (1944) y el cálculo de probabilidades subjetivas realizado por Finetti (1937). Anscombe y Aumann (1963) combinaron ambas teorías.

Dentro del campo de la economía experimental, que está teniendo un gran desarrollo en los últimos años, se han realizado diversos análisis sobre el comportamiento racional de los agentes. Por ejemplo, Kahneman y Tversky (1979, 1986) han realizado diversos experimentos sobre grupos de individuos que reflejan el estado de sus preferencias bajo incertidumbre. Los resultados obtenidos muestran que el comportamiento de los individuos contradice algunos de los axiomas que se consideran básicos para elaborar la teoría de la elección racional en condiciones de incertidumbre. Por el contrario, Plott (1982, 1986) y Smith (1982), obtienen que una proporción muy elevada de los experimentos realizados confirma los postulados de la racionalidad individual.

Para concluir, se puede decir que evidentemente el concepto de racionalidad presenta bastantes limitaciones, por lo que se hace necesario avanzar en este sentido. En este contexto se insertan los desarrollos recientes en la teoría de los juegos evolutivos y los modelos de aprendizaje (por ejemplo, Weibull, 1996 y Fudenberg y Levine, 1998). Sin embargo, no es posible, en el momento actual, la modelización macroeconómica sin partir de la base del comportamiento racional de los individuos.

1.3.3. El concepto de Aversión al Riesgo

La teoría de la elección plantea que los inversionistas elegirán entre opciones que tienen diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento. Generalmente, para esta teoría el inversionista tiene aversión al riesgo.

Pero ¿qué es la aversión al riesgo? Desafortunadamente, una inversión con mayor rentabilidad implica un riesgo también mayor, y cuanto más segura es una inversión, menos rentabilidad esperada tiene. La aversión al riesgo de un inversor es entonces un indicador que marca hasta que punto el inversionista está dispuesto a arriesgar capital a cambio de que su rentabilidad esperada sea mayor y cómo acepta oscilaciones en el valor de su inversión a lo largo de la vida de ésta.

Así, primero se debe conocer el perfil del inversionista, es decir, identificar el o los objetivos específicos que éste pretende lograr al invertir su dinero y su grado de tolerancia al riesgo. Algunos objetivos que se podría pretender alcanzar serían: ganancias de capital, ahorro, financiamiento de estudios, etc., y estos pueden variar al tratarse de un inversionista institucional o persona física. Podemos identificar entonces los siguientes tipos:

(a) Un inversionista ***conservador*,** es alguien que busca preservar el capital sin incurrir en grandes riesgos; por ejemplo, una decisión primaria es que invierte en instrumentos bajos o libres de riesgo, o en instrumentos gubernamentales de países que tienen una clasificación alta (con alto grado de inversión). Este tipo de inversionista podría centralizar sus inversiones en Bonos del Tesoro de los Estados Unidos y siguiendo con su perfil, tratará de invertir en plazos cortos o medianos. Este tipo de inversionista como comportamiento general, no posee interés en títulos de renta variable, sino que se concentra en instrumentos de renta fija. Dentro de éstos, elige títulos emitidos por gobiernos muy sólidos y que van del corto al mediano plazo; ahí ya ha hecho varias diversificaciones.

(b) Por otro lado, un inversionista *agresivo*, desea mayor rentabilidad**.** Valora la posibilidad de invertir en títulos de renta variable o valores de renta fija que le generen altos rendimientos, e invierte muy poco o nada en títulos clase AAA. Recordemos que el riesgo está medido en gran medida, en base a la capacidad que el emisor tiene para rendir los pagos de los inversionistas. Es aquí donde entran las clasificadoras de riesgo que ayudan a orientar a los inversionistas para tomar una decisión. El inversionista agresivo piensa en qué sector invertir y qué acciones comprar. Arma su inversión a partir de los sectores que le parecen más atractivos y las empresas específicas que a su percepción lograrán desempeños superiores.

El perfil del inversor, a su vez cambia con la edad y la experiencia inversora; así, podemos distinguir las cuatro etapas de la Tabla I-D[10].

Para conocer las necesidades y expectativas de un inversionista y así determinar su perfil o en qué etapa se encuentra, generalmente se recurre a cuestionarios con preguntas como las siguientes:

- ¿Cuál es su edad?
- ¿Qué parte de sus ingresos dedica al ahorro?
- ¿Cuál es el propósito de su ahorro?
- ¿En cuánto tiempo planea hacer uso de sus ahorros?
- ¿Con qué objetivo de rentabilidad mínima se sentiría satisfecho?
- ¿Cuántos dependientes económicos tiene? (hijos, cónyuge, parientes, etc.)
- ¿Cómo calificaría su conocimiento sobre los mercados financieros?

[10] HEYMAN, Timothy. *Inversión en la globalización*, 1998, p. 304.

Acumulación	*Consolidación*	*Gasto*	*Donativo*
Al inicio de su carrera, el inversionista tiene prioridades de gasto o inversión inmediata, como pueden ser la adquisición de casa y coche propios, educación de sus hijos, etc. en esta etapa, el inversionista se puede dar el lujo de correr más riesgo, llevando a cabo proyectos de inversión a mayor plazo y con una estructura de capital apalancado y, por lo tanto, su rentabilidad deberá ser mayor.	En ésta, normalmente el ingreso empieza a ser mayor que los gastos y por lo tanto la tolerancia al riesgo disminuye ya que no queda mucho tiempo para recuperarse de posibles errores en las inversiones.	También llamada de independencia financiera, esta etapa se da cuando los gastos diarios se cubren no del ingreso sino del capital acumulado: rentas, programas de pensiones, intereses provenientes de la bolsa, ahorros, etc.	En esta etapa el inversionista parece darse cuenta de que tiene más activos de los que necesita para su gasto y empieza a pensar en futuras generaciones, ya sea sus hijos o parientes cercanos o causas o ideas que quiere apoyar, como fondos de beneficencia, etc.

Tabla I-D. Las cuatro etapas del inversor propuestas por Heyman.

- ¿Cómo reaccionaría ante una disminución temporal de sus inversiones?
- ¿Con qué afirmación de las siguientes se identifica mejor?
    (a) Quiero mantener mi patrimonio y no acepto variación negativa en el valor de mis inversiones, aunque la rentabilidad sea baja.
    (b) Acepto la posibilidad de variaciones negativas en el valor de mis inversiones siempre que sea durante períodos cortos.
    (c) Entiendo que la obtención de mayor rentabilidad implica la existencia de fluctuaciones a veces duraderas en el valor de mis inversiones.
    (d) Mi visión inversora es a largo plazo por lo que sé que aunque se produzcan retrocesos periódicos en los mercados voy a obtener altas rentabilidades.

Veremos posteriormente que cuando las preferencias del inversionista están representadas por una función de utilidad, algunas características matemáticas de dicha función definen la actitud frente al riesgo del inversionista.

1.3.4. Curvas de Indiferencia

Al igual que un consumidor en la teoría microeconómica elige diferentes combinaciones de bienes que le rinden la misma utilidad, de tal manera que le es indiferente la combinación particular que consuma, el inversionista elegirá diferentes combinaciones de riesgo y rendimiento que le proporcionan la misma utilidad. Por ejemplo, un inversionista muy atrevido quizás busque rendimientos esperados adicionales y esté dispuesto a correr riesgos para obtenerlos, mientras que otro puede estar decidido a evitar el riesgo hasta un grado mayor y quizás esté dispuesto a perder rendimientos esperados adicionales con tal de evitar el riesgo.

Las distintas preferencias por las posibles combinaciones de riesgo y rendimiento pueden ser representadas gráficamente en el espacio riesgo-rendimiento por medio de curvas de indiferencia, llamadas así pues en cualquier punto de ellas el consumidor encuentra el mismo nivel de bienestar o de utilidad, en este caso.

Si suponemos que el riesgo puede medirse por medio de la desviación estándar del rendimiento $\sigma_{(R)}$ y que el rendimiento se mide por el rendimiento esperado $E_{(R)}$, las curvas de indiferencia de un inversionista se pueden mostrar de la siguiente manera:

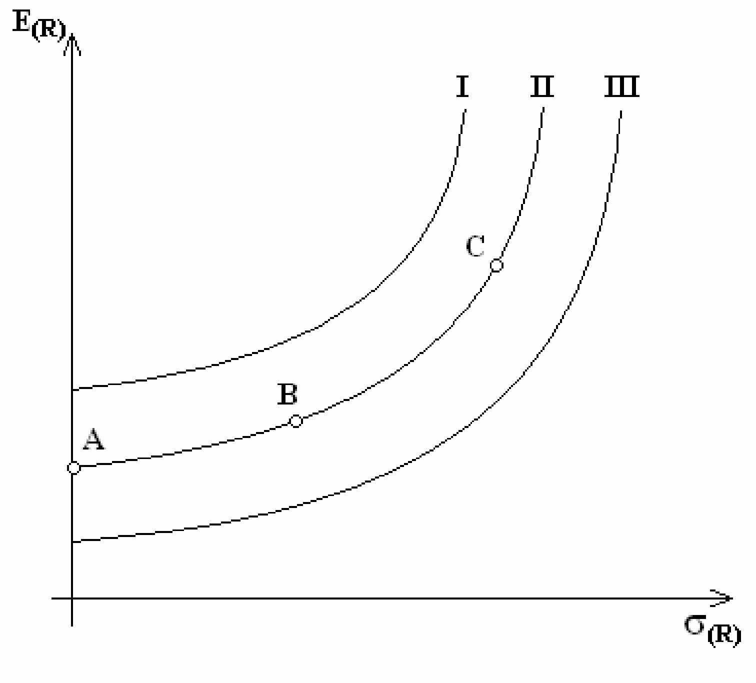


Figura I-2. Curvas de indiferencia de un inversionista.

A lo largo de las curvas en la Fig. I-2, podemos observar que si el inversionista se ubicara en la curva de indiferencia II, los puntos A, B y C le proporcionarían la misma utilidad total porque se encuentran en la misma curva de indiferencia. Pero como el inversionista tiene aversión al riesgo escogerá el punto A, el cual no tiene riesgo y el rendimiento es bajo. Sin embargo, puede ubicarse en el punto C, que tiene un alto rendimiento pero también un alto riesgo. El rendimiento más alto en el punto C bastará para compensar al inversionista por el riesgo adicional. Cuando más inversionistas entren en escena, cada uno de ellos tendrá diferentes conjuntos de curvas de indiferencia o diferentes compensaciones de riesgo-rendimiento. Entre mayor sea la pendiente del conjunto de curvas de indiferencia más alto será el rendimiento que el inversionista espera entre pequeños incrementos de riesgo, y será mayor su aversión al riesgo.

La Fig. I-3 muestra que el inversionista B requiere un rendimiento más alto ante pequeños incrementos de riesgo. Al compararlo con el inversionista A, el B espera mayor rendimiento ante el mismo monto de riesgo.

1.3.5. Las propiedades económicas de las funciones de utilidad

1.3.5.1. Invariantes ante transformaciones lineales positivas

Un atributo importante que deben tener las funciones de utilidad es que sean invariantes ante cualquier transformación lineal positiva, lo que significa que si un inversionista tiene una función de utilidad $U(W)$, el hecho de utilizar $a + bU(W)$ lo conducirá a la misma decisión.

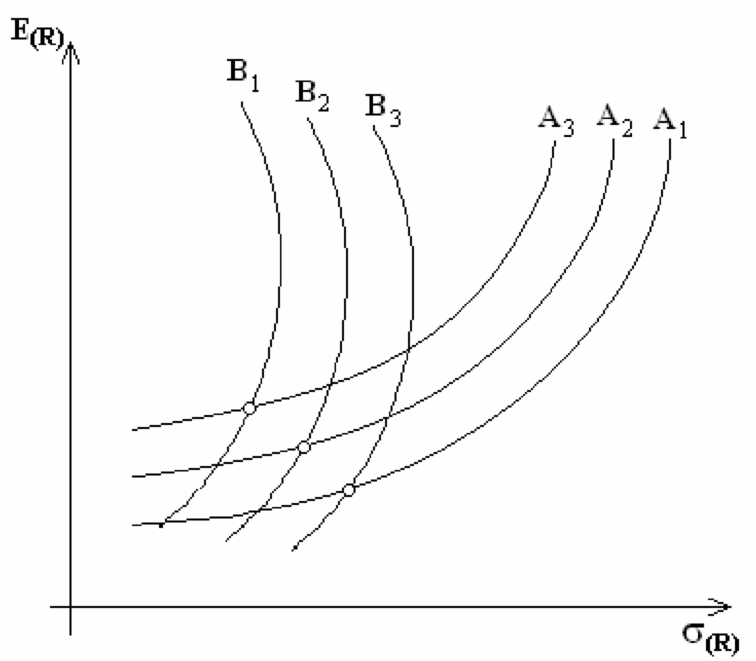


Figura I-3. Comparación entre las curvas de indiferencia de dos inversionistas.

INVERSIÓN *A*		**INVERSIÓN *B***		**INVERSIÓN *C***	
Resultado	**Probabilidad**	**Resultado**	**Probabilidad**	**Resultado**	**Probabilidad**
6	1/15	*5*	2/5	*8*	1/4
10	2/15	*10*	2/5	*12*	1/4
14	4/15	*19*	1/5	*16*	1/4
18	5/15			*18*	1/4
20	3/15				

Tabla I-E. Tres alternativas de inversión.

Consideremos el ejemplo dado por la Tabla I-E. Supongamos que el inversionista tiene como función de utilidad a $U(W) = 4W - 0.1W^2$. En la sección 1.3.1. observamos que la utilidad esperada de las tres inversiones se encuentra al multiplicar la probabilidad de cada resultado por su utilidad respectiva:

$$E(U_A) = 1/15 \cdot U(6) + 2/15 \cdot U(10) + 4/15 \cdot U(14) + 5/15 \cdot U(18) + 3/15 \cdot U(20) = 36.27$$
$$E(U_B) = 2/5 \cdot U(5) + 2/5 \cdot U(10) + 1/5 \cdot U(19) = 26.98$$
$$E(U_C) = 1/4 \cdot U(8) + 1/4 \cdot U(12) + 1/4 \cdot U(16) + 1/4 \cdot U(18) = 34.30$$

Así, un inversionista con la función de utilidad mencionada escogería la inversión *A*. Si utilizamos ahora la transformación lineal $U'(W) = 5 + 2U(W)$, tenemos la siguiente utilidad esperada:

$$E(U'_A) = 1/15 \cdot U'(6) + 2/15 \cdot U'(10) + 4/15 \cdot U'(14) + 5/15 \cdot U'(18) + 3/15 \cdot U'(20) = 77.53$$
$$E(U'_B) = 2/5 \cdot U'(5) + 2/5 \cdot U'(10) + 1/5 \cdot U'(19) = 58.96$$
$$E(U'_C) = 1/4 \cdot U'(8) + 1/4 \cdot U'(12) + 1/4 \cdot U'(16) + 1/4 \cdot U'(18) = 73.60$$

Observamos entonces que la decisión no sólo es la misma, sino que también se conserva el orden de la preferencia.

1.3.5.2. No Saciedad

Una segunda restricción para las funciones de utilidad es que sean consistentes con el principio de no saciedad, que establece que mayor riqueza es siempre preferible a menor riqueza. Es decir, la utilidad de (x + 1) pesos es siempre mayor que la utilidad de (x) pesos, por lo que –entre dos alternativas de inversión– siempre optaremos por aquella con el mayor resultado[11]. Si la utilidad crece cuando la riqueza se incrementa, entonces la primera derivada de la utilidad con respecto a la riqueza es positiva, esto es, las funciones de utilidad son crecientes.

En términos de las preferencias, el principio de no saciedad implica que no existe un punto de máxima felicidad, es decir, $\forall \alpha \in L_i$, $\exists \beta \in L_i$ tal que $\alpha \succ_i \beta$. También se deriva el concepto de no saciedad local, que dice que $\forall \alpha \in L_i$, $\exists \varepsilon > 0$ y $\beta \in L_i$ suficientemente cerca de α ($\|\alpha - \beta\| < \varepsilon$) tal que $\beta \succ_i \alpha$.

1.3.5.3. Actitud frente al riesgo

Otra propiedad de las funciones de utilidad consiste en suponer que el inversionista es averso al riesgo, si bien su actitud frente al riesgo también puede convertirlo en neutral o amante al riesgo. Para estudiar dichos aspectos, consideremos el concepto de ***utilidad marginal***.

El concepto de utilidad marginal, crucial para la ciencia económica, se refiere al aumento o disminución de la utilidad total que acompaña al aumento o disminución de la cantidad que se posee de un bien o conjunto de bienes y es, matemáticamente, igual a la derivada de la curva que describe la función de utilidad a medida que aumentan los bienes a disposición del consumidor.

Cuando un individuo adquiere unidades adicionales de una mercancía la satisfacción o utilidad que obtiene de las mismas va, desde luego, aumentando, pues sabemos que las funciones de utilidad son crecientes para reflejar el principio de no saciedad; pero dicho aumento no sólo puede ser proporcional o constante, sino que también puede ser creciente, o decreciente, lo que resulta en tres posibles actitudes frente al riesgo.

INVERTIR		NO INVERTIR	
Resultado	Probabilidad	Resultado	Probabilidad
0 2	1/2 1/2	1	1

Tabla I-F. Un juego justo con dos opciones.

Para definir dichas actitudes, consideremos un juego justo en el que el valor esperado del juego es exactamente igual a su costo. La opción “INVERTIR” tiene un valor esperado de 1, por lo que el inversionista tendría que pagar $1 para tomar esta inversión y obtener estos resultados. Pero la alternativa consiste en “NO INVERTIR”, con lo que el inversionista conservaría su $1. La posición del inversionista puede mejorar o empeorar al tomar la inversión, y su actitud frente a este riesgo toma tres posibles variantes.

- <u>Neutral al riesgo</u>

Un inversionista con actitud neutral al riesgo es indiferente entre tomar o no un juego justo, lo que significa en nuestro ejemplo que cualquier alternativa le es indiferente. Esto significa que la utilidad esperada de invertir o no invertir es la misma, por lo que –si $U(W)$ es su función de utilidad– tenemos que:

$$U(1) = (1/2)\cdot U(0) + (1/2)\cdot U(2)$$
$$\Rightarrow \quad 2\cdot U(1) = U(0) + U(2)$$

[11] En algunas secciones analizamos las ganancias en términos de riqueza al final del periodo y no de rentabilidad o rendimiento, lo cual no representa un problema conceptual pues la riqueza al final del periodo es simplemente la riqueza inicial multiplicada por uno más la tasa de rendimiento apropiada. Por lo tanto, todas las propiedades discutidas con respecto a la riqueza se aplican igualmente a los rendimientos.

$$\Rightarrow \quad U(1) - U(0) = U(2) - U(1)$$

Esta expresión implica que el cambio en la utilidad debido a un cambio unitario en la riqueza es independiente si nos movemos de 0 a 1 o de 1 a 2, es decir, su utilidad marginal es constante, lo que sucede cuando las funciones de utilidad son lineales y presentan una segunda derivada igual a cero, $U''(W) = 0$.

- Amante del riesgo

El inversionista amante del riesgo es el que seleccionaría un juego justo, lo que en nuestro ejemplo significa que decidiría invertir. Esto implica que la utilidad esperada de invertir debe ser mayor que la utilidad esperada de no invertir, es decir:

$$U(1) < (1/2) \cdot U(0) + (1/2) \cdot U(2)$$
$$\Rightarrow \quad 2 \cdot U(1) < U(0) + U(2)$$
$$\Rightarrow \quad U(1) - U(0) < U(2) - U(1)$$

Esta expresión indica que la utilidad de un cambio unitario de 1 a 2 es mayor que la utilidad de un cambio unitario de 0 a 1, esto es, la utilidad marginal es creciente; esto sucede para funciones de utilidad convexas cuya segunda derivada es positiva, $U''(W) > 0$.

- Averso al riesgo

La aversión al riesgo implica que el inversionista rechazará un juego justo, lo que en términos del ejemplo significa que tener \$1 seguro es preferible a arriesgarlo, aunque exista la misma probabilidad de ganar o perder. Si el inversionista decide no invertir, la utilidad esperada de no invertir debe ser mayor que la utilidad esperada de invertir, es decir:

$$U(1) > (1/2) \cdot U(0) + (1/2) \cdot U(2)$$
$$\Rightarrow \quad 2 \cdot U(1) > U(0) + U(2)$$
$$\Rightarrow \quad U(1) - U(0) > U(2) - U(1)$$

La expresión anterior significa que un aumento unitario de 0 a 1 es más valioso que ese mismo cambio unitario de 1 a 2. Una función de utilidad en la que cada incremento unitario adicional es menos valioso que el incremento unitario anterior es cóncava y presenta una segunda derivada negativa, pues la utilidad marginal es decreciente, es decir, $U''(W) < 0$.

Suponer que existe aversión al riesgo implica que un inversionista rechazará un juego justo debido a que la desutilidad de una pérdida es mayor que la utilidad de una ganancia equivalente, pues cada vez resulta menor la utilidad obtenida de la última unidad considerada. Llegará un punto en que, por lo tanto, se alcance el máximo de utilidad y, a partir de este punto, podrá haber incluso una utilidad negativa, pues unidades adicionales del bien resultarán en definitiva una molestia, produciéndose entonces una desutilidad. Por ejemplo, es posible que a una persona le guste tener un perro, o tal vez dos o tres, pero es casi seguro que estará dispuesta a pagar para que alguien se lleve a su décimo o vigésimo perro.

Este comportamiento del consumidor queda expresado entonces en lo que se llama la *Ley de la utilidad marginal decreciente*, que puede ser enunciada diciendo que a medida que el consumo de una mercancía aumenta en un individuo, manteniéndose constante todo lo demás, su utilidad marginal derivada de esta mercancía decrecerá.

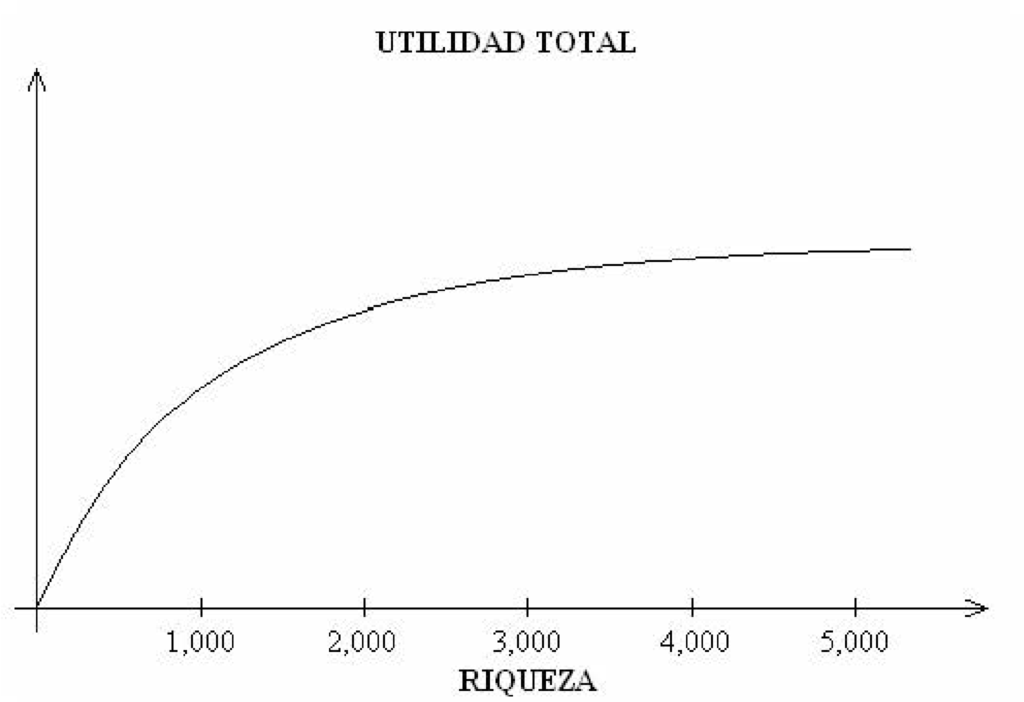


Figura I-4. Utilidad Marginal Decreciente.

La actitud generalizada de aversión al riesgo encuentra su respuesta en la noción de la utilidad marginal decreciente por la riqueza, la cual constituye un axioma de la teoría de la demanda del consumidor. Por ejemplo, supongamos que un inversionista recibe $ 2,000 por concepto de interés, con lo cual satisface sus necesidades más inmediatas; si posteriormente le dan $ 2,000 pesos adicionales, dada la utilidad marginal decreciente, estos segundos no le serán tan necesarios como los primeros.

La Fig. I-4 ilustra gráficamente esta situación; observamos que el inversionista tendrá una utilidad marginal decreciente de la riqueza a medida que aumente su ingreso y, como consecuencia, experimentará más sufrimiento por un peso perdido que placer por un peso ganado.

La disminución en la utilidad marginal conduce directamente a la aversión al riesgo, ya que el inversionista requerirá de un rendimiento más alto sobre cualquier inversión sujeta a un alto riesgo.

1.3.5.4. Aversión absoluta y relativa al riesgo.

La *aversión absoluta al riesgo* es una propiedad de las funciones de utilidad que se refiere a cómo cambian las preferencias del inversionista luego de un cambio en su riqueza. Si la riqueza del inversor se ve incrementada, ¿invertirá lo mismo, más o menos en activos riesgosos?

Si el inversionista incrementa la cantidad invertida en activos riesgosos conforme la riqueza crece, entonces se dice que su aversión absoluta al riesgo es decreciente. Si, en cambio, el inversor no cambia sus preferencias a pesar de los cambios en su riqueza, esto quiere decir que su aversión absoluta al riesgo es constante. Por último, si con el aumento de su riqueza el decisor invierte cada vez menos en activos riesgosos, entonces presenta aversión absoluta al riesgo creciente.

Pero ¿cómo medir el grado de aversión al riesgo de un agente? Cuando se habló de la aversión al riesgo en la sección anterior, vimos que diferentes grados de aversión al riesgo estaban asociados con los diferentes signos de la segunda derivada de la función de utilidad.

Existe un resultado similar para la aversión absoluta al riesgo, con base en las medidas de aversión al riesgo propuestas por John W. Pratt y Kenneth Arrow, en 1964[12]. Si *U'*(*W*) y *U''*(*W*) son respectivamente la primera y segunda derivadas de la función de utilidad al nivel de riqueza *W*, utilizamos el coeficiente *A*(*W*) para medir el grado de aversión absoluta al riesgo de un inversionista, y:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Así, *A'*(*W*) es la derivada de *A*(*W*) con respecto a la riqueza y constituye una medida apropiada para evaluar el comportamiento de la aversión absoluta al riesgo con respecto a cambios en la riqueza, como podemos ver en la Tabla I-G.

PROPIEDAD DE $A'(W)$	CONDICIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
$A(W) < 0$	Aversión absoluta al riesgo decreciente	El monto invertido en activos riesgosos se incrementa conforme la riqueza crece.	$U(W) = \ln W$
$A(W) = 0$	Aversión absoluta al riesgo constante	El monto invertido en activos riesgosos es el mismo aunque la riqueza aumente.	$U(W) = -e^{-CW}$
$A(W) > 0$	Aversión absoluta al riesgo creciente	El monto invertido en activos riesgosos es menor conforme la riqueza aumenta.	$U(W) = W^{-CW^2}$

Tabla I-G. Diferentes tipos de aversión absoluta al riesgo.

La mayoría de la evidencia indica que, a medida que la riqueza crece, el capital invertido en activos riesgosos debe aumentar también, es decir, los inversionistas presentan aversión absoluta al riesgo decreciente. Independientemente de cuál condición de aversión absoluta al riesgo describa el comportamiento de los inversionistas, utilizarlas restringe las posibles funciones de utilidad para describir sus preferencias.

Mientras la aversión absoluta al riesgo se refiere al cambio en el monto invertido en activos riesgosos conforme cambia la riqueza en términos absolutos, la *aversión relativa al riesgo* describe cómo el porcentaje de riqueza invertido en activos riesgosos se modifica conforme la riqueza cambia, en términos de proporciones. Análogamente, existe aversión relativa al riesgo creciente, decreciente y constante, y la medida es el siguiente coeficiente:

$$R(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} = WA(W)$$

De nuevo *R'*(*W*) es la primera derivada con respecto a *W* y nos permite distinguir los casos de la Tabla I-H.

PROPIEDAD DE $R'(W)$	CONDICIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
$R(W) < 0$	Aversión relativa al riesgo decreciente	El porcentaje invertido en activos riesgosos se incrementa conforme la riqueza crece.	$U(W) = -e^{2W-\frac{1}{2}}$
$R(W) = 0$	Aversión relativa al riesgo constante	El porcentaje invertido en activos riesgosos no se altera aunque la riqueza crezca.	$U(W) = \ln W$
$R(W) > 0$	Aversión relativa al riesgo creciente	El porcentaje invertido en activos riesgosos decrece conforme la riqueza aumenta.	$U(W) = W - bW^2$

Tabla I-H. Diferentes tipos de aversión relativa al riesgo.

[12] ARROW, K.J. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Yrjö Hahnsson Foundation, Helsinki, 1965, y PRATT, John W., *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica, Vol. 32, 1964, p. 22-36.

Aunque la mayoría de los autores coinciden en que los inversionistas presentan aversión absoluta al riesgo decreciente, en el caso de la aversión relativa al riesgo no hay un consenso; la mayoría de las personas asumen aversión relativa al riesgo constante

Pero ¿de dónde surgen los coeficientes $A(W)$ y $R(W)$? En el resto de esta sección veremos una aproximación de los mismos.

Para ello, supongamos que un inversionista tiene un nivel W de riqueza y un activo cuyos resultados están representados por la lotería Z, con esperanza $E(Z)=0$ y varianza σ_Z^2. Sea $U(\ )$ la función de utilidad del inversionista, y W_C el nivel de riqueza tal que el inversionista es indiferente entre tener W_C y tener el nivel de riqueza W más la lotería Z. Entonces, las dos opciones son:

- Opción A: $W + Z$
- Opción B: W_C

Por hipótesis, el inversionista es indiferente entre ambas posiciones, por lo que:

$$\begin{aligned} E[U(W+Z)] &= E[U(W_C)] \\ &= U(W_C) \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que W_C se recibe con certeza. La diferencia entre W y W_C son los pesos que el inversionista está dispuesto a ofrecer para no tomar la lotería. Si el inversionista pudiera asegurarse, $W - W_C$ sería lo máximo que el inversionista estaría dispuesto a pagar para evitar el riesgo de la inversión. Mientras mayor sea esta diferencia, mayor será la cantidad de pesos que el inversionista estará dispuesto a pagar para evitar la lotería. Así, resulta natural pensar en $\pi = W - W_C$ como una medida de la aversión absoluta al riesgo del inversionista.

Al expandir $U(W + Z)$ en una serie de Taylor[13] alrededor de W, tenemos:

$$U(W+Z) = U(W) + U'(W)[(W+Z) - W] + (1/2)U''(W)[(W+Z) - W]^2 + \dots$$

Tomamos el valor esperado en ambos miembros de la ecuación e ignoramos los términos a partir de la tercera derivada, por lo que tenemos:

$$E[U(W+Z)] \cong E[U(W)] + U'(W)E(Z - 0) + (1/2)U''(W)E(Z^2)$$

Pero sabemos que $U(W)$ es una constante; considerando también el supuesto de que $E(Z)=0$, la varianza de Z (σ_Z^2) está dada por:

$$\begin{aligned} E[Z - E(Z)]^2 &= E\{Z^2 - 2Z\,E(Z) + [E(Z)]^2\} \\ &= E(Z^2) - 2E(Z)E(Z) + [E(Z)]^2 \\ &= E(Z^2) - [E(Z)]^2 \\ &= E(Z^2) \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$E[U(W+Z)] \cong U(W) + (1/2)U''(W)\,\sigma_Z^2$$

Recordemos que definimos $\pi = W - W_C$, por lo que $W_C = W - \pi$. Expandiendo $U(W - \pi)$ en una serie de Taylor alrededor de W, tenemos que:

$$U(W_C) = U(W - \pi) \cong U(W) + U'(W)[(W - \pi) - W] + \dots$$

---

[13] Una serie de Taylor es un método para aproximar una función usando sus derivadas. Si denotamos como $U'(\ )$ a la primera derivada, $U''(\ )$ la segunda derivada y así sucesivamente, y $\cong$ significa "aproximadamente igual a", entonces la aproximación de Taylor en la vecindad de a es:

$$U(X) \cong U(a) + \frac{U'(a)}{1!}(X-a) + \frac{U''(a)}{2!}(X-a)^2 + \frac{U'''(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots$$

Si ignoramos los términos a partir de la segunda derivada, tenemos que

$$U(W_C) \cong U(W) + U'(W)(-\pi)$$

Por hipótesis, sabemos que E[$U(W + Z)$] = $U(W_C)$, por lo que, podemos igualar las siguientes ecuaciones:

$$E[U(W+Z)] \cong U(W) + (1/2)U''(W)\,\sigma_Z^2 \qquad\qquad U(W_C) \cong U(W) + U'(W)(-\pi)$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$U(W) + (1/2)U''(W)\,\sigma_Z^2 = U(W) + U'(W)(-\pi)$$

Despejamos π:

$$\pi = -(1/2)\sigma_Z^2 \frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Puesto que $(1/2)\sigma_Z^2$ es una constante y, por definición, π es una medida de aversión absoluta al riesgo, tenemos que

$$A(\mathrm{W}) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

mide en términos absolutos la aversión al riesgo.

Es importante notar que si $U'(W) > 0$, es decir, si la función de utilidad es creciente, entonces el signo de $A(W)$ depende del signo de $U''(W)$, esto es, de la utilidad marginal. Así, el comportamiento de la utilidad marginal caracteriza la actitud del inversionista frente al riesgo.

Por otra parte, nótese que $A(W)$ es equivalente para inversionistas con funciones de utilidad similares; como se mencionó en la sección 1.3.5.1, las funciones de utilidad son invariantes ante transformaciones lineales positivas, por lo que $U(W)$ y $V(W) = a + bU(W)$ conducen a la misma elección. Nótese que $V'(W)=bU'(W)$ y que $V''(W)=bU''(W)$. Calculando $A(W)$ para la función $V(W)$, tenemos que:

$$A(\mathrm{W}) = -\frac{bU''(W)}{bU'(W)} = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Así, ambas funciones $U(W)$ y $V(W)$ no sólo evalúan idénticamente la inversión, sino que además tienen el mismo coeficiente de aversión absoluta al riesgo.

Por su parte, el coeficiente de aversión relativa al riesgo puede aproximarse como sigue. De forma análoga al desarrollo anterior,

$$\pi = \frac{W - W_C}{W}$$

es la fracción de riqueza que el inversionista pagaría con tal de evitar la lotería. Con π definida de esta manera, tenemos que $W_C = W(1-\pi)$.

Cambiemos la definición de Z de tal suerte que sea una lotería que representa el resultado por cada peso invertido, por lo que ahora $E(Z)=1$ y su varianza σ_Z^2. Así, si se invierten Z pesos, se obtiene WZ como retorno en pesos, y ahora E[$U(WZ)$] = $U(W_C)$.

Expandiendo WZ en una serie de Taylor alrededor de W se tiene que:

$$U(WZ) = U(W) + U'(W)(WZ - W) + (1/2)U''(W)(WZ - W)^2 + \dots$$

Tomamos el valor esperado en ambos miembros de la igualdad, y puesto que $U(W)$ es una constante, tenemos que:

$$E[U(WZ)] = U(W) + U'(W)E(WZ - W) + (1/2)U''(W)E(WZ - W)^2 + \dots$$

Sabemos por hipótesis que E(Z)=1, por lo que

$$E(WZ - W) = E[W(Z-1)] = 0$$

Por su parte, sabemos que W es constante, por lo que:

$$\begin{aligned} E(WZ - W)^2 &= E\{W^2 Z^2 - 2ZW^2 + W^2\} \\ &= E(W^2 Z^2) - 2E(ZW^2) + E(W^2) \\ &= E(W^2)E(Z^2) - 2E(Z)E(W^2) + E(W^2) \\ &= W^2 E(Z^2) - 2W^2 + W^2 \\ &= W^2 [E(Z^2) - 1] \\ &= W^2 [E(Z^2) - E(Z)] \\ &= W^2 \{E(Z^2) - [E(Z)]^2\} \\ &= W^2 \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en E[$U(WZ)$], de nuevo ignoramos los términos a partir de la tercera derivada, por lo que:

$$\begin{aligned} E[U(WZ)] &= U(W) + U'(W)E(WZ - W) + (1/2)U''(W)E(WZ - W)^2 + \dots \\ &= U(W) + (1/2)U''(W)\, W^2 \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

Recordemos que por la definición de π, $W_C = W(1-\pi)$. Expandiendo $U(W_C) = U[W(1 - \pi)]$ en una serie de Taylor alrededor de W, tenemos que:

$$U(W_C) = U[W(1- \pi)] \cong U(W) + U'(W)[W(1- \pi) - W] + \dots$$

De nuevo ignoramos los términos a partir de la segunda derivada, y tenemos que

$$U(W_C) \cong U(W) + U'(W)(- \pi W)$$

Por hipótesis, sabemos que $E[U(WZ)] = U(W_C)$, por lo que, podemos igualar las siguientes ecuaciones:

$$E[U(WZ)] \cong U(W) + (1/2)U''(W)\, W^2 \sigma_Z^2 \qquad U(W_C) \cong U(W) + U'(W)(- \pi W)$$

Obtenemos así la siguiente ecuación:

$$U(W) + (1/2)U''(W)\, W^2 \sigma_Z^2 = U(W) + U'(W)(- \pi W)$$

Despejando π:

$$\pi = -\frac{\sigma_Z^2}{2} \cdot \frac{WU''(W)}{U'(W)}$$

Ahora π mide el cambio porcentual en el premio por el riesgo; si eliminamos la constante $\frac{\sigma_Z^2}{2}$:

$$R(\mathrm{W}) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)}$$

Así, $R(W)$ es una medida de la aversión al riesgo proporcional o relativa.

En la derivación de $A(W)$ y $R(W)$ que acabamos de presentar, ignoramos algunos términos con derivadas de mayor orden, por lo que sólo es una aproximación. Es posible obtener ambos coeficientes sin usar la expansión de Taylor[14], pero esta derivación –aunque es matemáticamente correcta– aporta una menor posibilidad de interpretación económica del significado de ambos coeficientes.

1.3.5.5. Las funciones cuadráticas de utilidad.

En esta sección examinaremos algunas funciones de utilidad que han sido utilizadas en la literatura económica y financiera para describir el comportamiento del inversionista, y exploraremos sus características.

Las más utilizadas son quizá las funciones de utilidad cuadráticas del tipo:

$$U(W) = W - bW^2$$

Sus derivadas son:

$$U'(W) = 1\text{-}2bW$$
$$U''(W) = \text{-}2b$$

Suponiendo que el inversionista es averso al riesgo, la utilidad marginal es decreciente y la segunda derivada debe ser negativa, por lo que $b > 0$. Pero si se supone también que el inversionista prefiere más a menos, para reflejar el principio de no saciedad, entonces $U(W)$ debe ser creciente y su primera derivada positiva. Sin importar cuan pequeño sea b, ya que es positivo siempre existe algún valor W tal que hace negativa la primera derivada.

Así, para inversionistas que prefieren más a menos, la función de utilidad cuadrática podría representar sus deseos sólo en un intervalo de riqueza restringido. Para ser consistentes con el principio de no saciedad, debemos plantear la siguiente restricción:

$$1 - 2bW > 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 > 2bW$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2b} > W$$

Los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo son los siguientes:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{2b}{1-2bW} \quad \Rightarrow \quad A'(W) = \frac{4b^2}{(1-2bW)^2} > 0$$

$$R(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} = \frac{2bW}{1-2bW} \quad \Rightarrow \quad R'(W) = \frac{4b^2W + 2b(1-2bW)}{(1-2bW)^2} = \frac{2b}{(1-2bW)^2} > 0$$

Lo anterior permite afirmar que las funciones de utilidad cuadráticas de este tipo exhiben aversión absoluta y relativa al riesgo creciente en ambos casos, por lo que es consistente con los inversionistas que reducen la inversión en activos riesgosos a medida que la riqueza crece.

Las funciones de utilidad cuadráticas han tenido siempre un lugar especial en el análisis media-varianza, pues cuando se utilizan, la utilidad esperada puede definirse en términos de medias y varianzas. Si partimos de la definición de varianza de una variable aleatoria:

$$\begin{aligned}
\sigma_W^2 &= E[W - E(W)]^2 \\
&= E\{W^2 - 2W \cdot E(W) + [E(W)]^2\} \\
&= E(W^2) - 2E(W) \cdot E(W) + [E(W)]^2 \\
&= E(W^2) - 2[E(W)]^2 + [E(W)]^2 \\
&= E(W^2) - [E(W)]^2
\end{aligned}$$

[14] Ver, por ejemplo, MOSSIN, Jan. *Theory of Financial Markets*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, N.J., 1973.

Acomodando términos, tenemos que $E(W^2) = \sigma_W^2 + [E(W)]^2$.

Por otra parte, si tomamos el valor esperado de una función cuadrática de utilidad de la forma $U(W) = W - bW^2$:

$$E[U(W)] = E[W - bW^2] = E(W) - bE(W^2)$$

Sustituyendo $E(W^2)$ en la expresión anterior, observamos que la utilidad esperada está dada en términos de medias y varianzas:

$$E[U(W)] = E(W) - b\{\sigma_W^2 + [E(W)]^2\}$$

Pero hemos visto que las funciones cuadráticas tienen algunas características indeseables. Por ello, algunos autores[15] han demostrado que si se cambian algunos parámetros, se puede encontrar una función con características más deseables y que satisface aún el análisis media-varianza. Consideremos la función:

$$U(W) = \ln W$$

Su primera y segunda derivadas son las siguientes:

$$U'(W) = W^{-1}$$
$$U''(W) = -W^{-2}$$

Esta función es creciente y cóncava, pues al examinar la primera derivada, vemos que es positiva para todos los valores positivos de *W*, mientras que la segunda derivada es negativa sin importar el valor que tome *W*; esto satisface el principio de no saciedad y el supuesto de aversión al riesgo. Los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo son los siguientes:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = \frac{W^{-2}}{W^{-1}} = W^{-1} \quad \Rightarrow \quad A'(W) = -W^{-2} < 0$$

$$R(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} = \frac{W \cdot W^{-2}}{W^{-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad R'(W) = 0$$

Entonces, la función exhibe aversión absoluta al riesgo decreciente, pero aversión relativa al riesgo constante, y es consistente con el comportamiento de un inversionista averso al riesgo que prefiere más a menos y cuya proporción invertida en activos riesgosos permanece constante aunque su riqueza aumente.

---

15 MOSSIN, *op. cit.*

CAPÍTULO II
LAS ETAPAS EN LA GESTIÓN DE CARTERAS

Una vez establecido parte del marco teórico necesario para el desarrollo de la Teoría de las Carteras, describiremos las etapas necesarias para la construcción de las mismas. Aunque no existe un estándar sobre el número ni contenido de dichas etapas, se proponen las siguientes:

I. Identificación de la política de inversión

Consiste en la determinación de los objetivos y limitaciones del inversionista, así como el presupuesto o excedente de capital que destinará a la inversión; este paso sirve, entre otras cosas, para reconocer los posibles activos financieros a adquirir en función de lo estipulado por el inversor.

II. Análisis de valores

En esta etapa se analizan objetivamente los valores disponibles para la conformación de la cartera, y se busca determinar en qué medida contribuyen a la consecución de los objetivos establecidos por el inversionista, a través de herramientas de Análisis Bursátil.

III. Análisis y Selección de carteras.

Consiste en considerar todas las posibles carteras que resultan de la combinación de los activos disponibles y examinar la aportación de cada una de ellas al logro de los objetivos establecidos. Una vez conocidas las alternativas, el inversionista selecciona aquella que mejor satisface sus objetivos, de acuerdo a múltiples criterios.

IV. Revisión de la cartera.

Una vez seleccionada la cartera, es común que el inversionista desee mantenerla durante un cierto periodo de tiempo, según lo determine el desempeño de la cartera. Naturalmente, ello implica la necesidad de darle seguimiento y analizar si se han cumplido las previsiones, y si es necesario modificarla debido a los cambios del entorno. Esta fase origina el comienzo de las fases anteriores y un proceso cíclico de retroalimentación que sólo finaliza con la liquidación de la cartera.

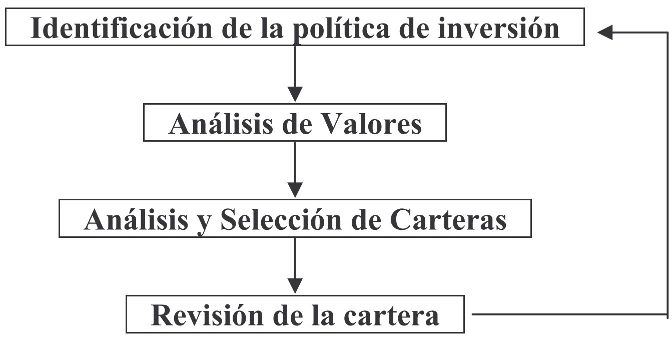


Figura II-1. La gestión de carteras es un proceso cíclico.

Debido a que la puesta en práctica de estas etapas suele ser extremadamente compleja, una solución generalmente aceptada consiste en simplificar la realidad considerando, exclusivamente, aquellos factores más importantes que inciden en el problema y construir, en función de ellos, un modelo normativo en el cual todas las relaciones estén claras y las consecuencias de cualquier posible cambio se puedan determinar con precisión.

Estos modelos que permiten al inversionista construir su cartera integran la denominada Teoría de la Cartera; aunque no son perfectos, pues sabemos que suponen una mera abstracción de la realidad, resultan útiles en la consecución de mejores resultados.

A su vez, todo el conjunto de tareas encaminadas tanto a la construcción como a la revisión de la cartera recibe el nombre de *gestión de la cartera*.

2.1. IDENTIFICACIÓN DE LA POLÍTICA DE INVERSIÓN

La etapa inicial en la gestión de carteras consiste en la identificación de la política de inversión, a veces denominada *Policy Statement*. En esta etapa, se determinan algunas características del inversionista tales como sus objetivos, limitaciones, su presupuesto, sus necesidades, preferencias, restricciones, etc. que servirán para reconocer los posibles activos financieros con los que se conformará la cartera.

Aunque los objetivos del inversionista suelen ser diversos, generalmente hay tres objetivos comunes:

a) Maximizar la rentabilidad de su portafolio de valores, entendiendo por rentabilidad a la relación existente entre las ganancias obtenidas y los gastos originados por la inversión. Estas ganancias pueden ser obtenidas por diferencias positivas entre el precio de compra y el de venta, o por el pago de dividendos.
b) Maximizar la seguridad de su cartera, o dicho de otro modo, minimizar el riesgo asociado a la misma. Generalmente, la minimización se refiere al riesgo sistemático, pues sabemos que el riesgo específico puede eliminarse mediante la diversificación.
c) Maximizar la liquidez de su combinación de valores; este objetivo ofrece una problemática bastante más compleja, debido a las dificultades existentes en su definición y en su medición, y sólo ha sido estudiado a detalle algunas veces.

Lamentablemente, es un hecho conocido que los dos primeros objetivos suelen ser incompatibles, pues los activos más seguros suelen ser los menos rentables, y viceversa. Por lo general, una buena referencia para vincular ambos objetivos es algún activo libre de riesgo; así, surge el concepto de *prima de riesgo*, que consiste en la ganancia adicional exigida a un activo financiero riesgoso para que sea preferido al activo libre de riesgo. Es decir, que un activo con riesgo debe ofrecer una ganancia adicional para que el inversionista lo prefiera sobre otro sin riesgo.

Es fundamental que -en esta etapa de la gestión de carteras- el inversionista imponga ciertas restricciones en la conformación de su cartera, por ejemplo, evitar la inversión en cierta clase de activos, o manifestar su intención de no endeudarse al conformar el portafolio.

Con el establecimiento de las políticas de inversión, los responsables de la gestión de cartera pueden identificar los posibles activos financieros que pueden conformar la cartera, siempre teniendo como premisa lo estipulado por el inversionista.

2.2. ANÁLISIS DE VALORES

Una vez identificadas y establecidas las políticas de inversión, la siguiente fase consiste en el análisis de todos los valores disponibles para conformar la cartera, buscando seleccionar aquellos activos que ofrezcan la mejor consecución de los objetivos del inversionista.

Una forma posible de realizar este análisis es estudiar de todos aquellos factores legales, económicos, micro y macroeconómicos, financieros, etc. que nos permitan explicar el comportamiento de una empresa o mercado como un todo y pronosticar, si es posible, su comportamiento en el futuro; este enfoque recibe el nombre de Análisis Bursátil.

Sabemos que, por lo general, los objetivos de un inversionista tienen que ver con dos factores: rentabilidad y riesgo. Puesto que -la mayoría de las veces- dichos objetivos están relacionados con lo que acontezca en el futuro, es importante encontrar la forma más adecuada de reducir en forma de indicadores toda la información futura relacionada con el binomio rentabilidad-riesgo. Puesto que dichos indicadores constituyen otro criterio fundamental en la selección de activos financieros, es importante revisar las diversas medidas que se han propuesto a lo largo de la literatura financiera para resumir de forma adecuada la información referente al riesgo y rentabilidad de un valor.

2.2.1. El Análisis Bursátil

Los gestores de carteras llevan a cabo diversos tipos de análisis, intentando seleccionar aquellos activos más convenientes para incluirlos en las carteras que manejan. Dado que la información es cada vez más compleja, la toma de decisiones pone a prueba los conocimientos del inversionista, pero también sus corazonadas e intuiciones. Así, el análisis bursátil es un conjunto de técnicas enfocadas a fundamentar decisiones de inversión y pronosticar, si es posible, el comportamiento en el futuro de las decisiones tomadas.

Dicho análisis lo realizan casas de bolsa y agencias calificadoras, tales como Standard & Poors, Moody's, Fitch, etc. Los dos extremos, en ocasiones contrapuestos, son el análisis fundamental y el técnico: mientras el primero se enfoca en las fuerzas y debilidades económicas del mercado, así como en las características individuales de los activos, el segundo busca identificar patrones en las series históricas de precios para predecir la dirección futura de las mismas.

Ambas categorías de análisis parten de suposiciones diferentes al interpretar el comportamiento de los mercados financieros, por lo que generalmente los analistas bursátiles se enfocarán en uno u otro método de análisis. Lo más conveniente es realizar ambos análisis; a través del análisis fundamental, determinarán los activos y los sectores en los que invertir, y por medio del análisis técnico determinarán el momento ideal para comprar o vender.

En cualquiera de los casos, es importante analizar también algunas variables macroeconómicas cuya evolución es determinante en la toma de decisiones de inversión.

2.2.1.1. Variables Macroeconómicas

En el siglo XIX y durante la Gran Depresión de 1929, los economistas no disponían de ningún indicador agregado de la producción al que recurrir. Tenían que recurrir a distintas informaciones, como la producción o las ventas de los grandes almacenes, para deducir lo que estaba ocurriendo en la economía en su conjunto. No fue sino hasta el final de la Segunda Guerra Mundial cuando en algunos países se reunieron las cuentas nacionales de la renta o el producto (o contabilidad nacional), que definían los conceptos que se utilizaban, cómo se elaboraban los correspondientes indicadores y la relación entre ellos.

En la actualidad, cuando los gestores de carteras deben escoger en qué empresas colocar sus activos, generalmente analizarán en algún momento las condiciones macroeconómicas de los países en donde operan las empresas emisoras.

A continuación se revisarán las variables macroeconómicas más importantes por su representatividad en la economía de un país.

- Producto Interno Bruto (PIB)

El producto interno bruto (PIB) es el indicador macroeconómico más utilizado del tamaño de la economía de un país y existen tres formas de concebirlo, a saber:

1. El PIB es el_valor agregado de todos los bienes y servicios finales que produce un país durante un periodo determinado de tiempo, generalmente un año. En esta concepción, la palabra clave es final; por ejemplo, supongamos una economía conformada por las dos empresas de la Tabla II-A.

EMPRESA	1	2
CARACTERÍSTICAS	Produce acero, emplea trabajadores y máquinas.	Compra el acero y produce automóviles.
VENDE	$ 100	$ 210
PAGA	$ 80 a trabajadores	$100 por acero $70 de trabajadores
GANA	$ 20	$ 40

Tabla II-A. Ejemplo de una economía formada por dos empresas.

   Entonces, ¿cuál es el PIB de esta economía: (a) $310 = la suma de los $100 de acero más $210 de la producción de coches (b) $210 (c) $60? La respuesta correcta es $ 210, pues en este caso el acero es un bien intermedio que se utiliza para producir el bien final (los automóviles), y por lo tanto, no debe contabilizarse en el PIB, que es el valor de la producción final.

2. El PIB es la suma del valor añadido de la economía durante un determinado periodo.

$$VALOR\ AÑADIDO = Valor\ de\ su\ producción\ -\ \begin{matrix} Valor\ de\ los\ bienes\ intermedios \\ que\ utiliza\ para\ ello \end{matrix}$$

   La expresión anterior implica que el valor de los bienes y servicios finales siempre puede concebirse como la suma del valor añadido por todas las empresas de la cadena de producción de dichos bienes finales. Siguiendo el ejemplo anterior, el valor añadido por la empresa siderúrgica es de $100 pues no utiliza bienes intermedios, mientras que el de la compañía automotriz es de $110, lo cual suma un PIB de $210.

3. El PIB es la suma de las rentas de la economía durante un periodo determinado. El valor añadido de una empresa tiene tres destinos posibles: es para los trabajadores (en forma de renta de trabajo), para la propia empresa (en forma de beneficios) o para el Estado (en forma de impuestos indirectos). En nuestro ejemplo, de los $100 del valor añadido del fabricante de acero, $80 son para trabajadores y $20 para la empresa. De los $110 de valor añadido del fabricante de automóviles, $70 son para trabajadores y $40 para la empresa. Entonces, en total, del valor añadido de $210, $150 van a parar a los trabajadores y $60 a las empresas, lo que significaría que la renta del trabajo representa un 71% del PIB, los beneficios un 29% y los impuestos un 0%. Hay que tener claro entonces que el PIB no es una medida de riqueza sino de renta.

Ahora, tomemos como ejemplo a los Estados Unidos. En 1960, el PIB de E.U. fue de 513,000 millones de dólares, mientras que en 1994 fue de 6,736 billones. ¿Puede decirse que la producción del país en 1994 fue 13 veces mayor que en 1960? La respuesta es negativa, lo cual nos lleva a distinguir entre PIB nominal y real.

El *PIB nominal* (PIB monetario o en precios corrientes) es simplemente la suma de las cantidades de bienes finales producidos multiplicada por su precio corriente. El PIB nominal aumenta con el paso del tiempo por dos razones: (a) la producción de la mayoría de los bienes aumenta con el paso del tiempo, y (b) El precio de la mayoría de los bienes generalmente sube también con el paso del tiempo. Si el propósito es medir la producción y evolución histórica de la economía, necesitamos eliminar el efecto de la subida de los precios, por lo que los economistas consideran el *PIB real* (PIB expresado en bienes, ajustado por la inflación o en precios constantes). El PIB real y el nominal son siempre iguales en el año base. Los periodos de crecimiento positivo del PIB se denominan *expansiones*, mientras que los de crecimiento negativo se denominan *recesiones*.

Estamos acostumbrados a utilizar el PIB como referencia única del crecimiento de la economía, y es la suma de todo el valor agregado que se genera en el país, en un cierto periodo. Pero este valor agregado no necesariamente puede traducirse en ingreso; una parte del valor agregado debe dedicarse a mantener el valor de los activos, a compensar la depreciación de edificios, máquinas, equipo de transporte, herramientas, etcétera y, por lo tanto, se debe restar del PIB. Cuando lo resta, lo que obtiene es el Producto Interno Neto (PIN, que se llama así porque se mantiene el valor de los activos al pagar la depreciación).

Pero el PIB y el PIN no son todos ingresos nacionales. Parte de este producto no fue realizado por mexicanos, así como parte del valor agregado generado por mexicanos no está incluido aquí. Por eso se llama "interno" y no "nacional". Es interno porque se hizo en México, pero no necesariamente por mexicanos. Para convertir el "interno" en "nacional", lo que tenemos que hacer es quitar la parte del producto que fue hecha por extranjeros en México, y poner la parte que fue hecha por mexicanos en el extranjero. Tradicionalmente, esta cifra ha sido negativa para México, porque el capital extranjero ha sido fundamental para la producción, y hay que pagarles.

Existe también el concepto de Producto Nacional Bruto (PNB), definido como el valor de mercado de todos los bienes y servicios permanentes de un país durante un periodo determinado de tiempo.

- Tasa de Inflación

La inflación se define como un proceso continuo en el que el nivel general de precios aumenta de manera persistente y el dinero pierde poder adquisitivo. La tasa de inflación es aquella tasa a la que se da dicho proceso. Para definir la inflación, se utilizan dos índices de precios:

1) *El deflactor del PIB*. Para el año t, el deflactor del PIB se define como el cociente entre el PIB nominal y el PIB real. Es un número índice, pues no tiene ninguna interpretación económica, aunque su tasa de variación está perfectamente definida y sí tiene interpretación. Así, la tasa de inflación es la tasa de variación del deflactor del PIB, esto es:

$$f = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

   Así, la tasa de inflación es una media ponderada de la tasa de aumento de los distintos precios.

2) *El Índice Nacional de Precios al Consumidor*. El deflactor del PIB indica el precio medio de los bienes finales producidos en la economía. Sin embargo, a los consumidores les interesa el precio medio de los bienes que consumen. Para medir el precio medio del consumo, los macroeconomistas analizan el INPC, el cual indica el costo monetario de una determinada lista de bienes y servicios en el tiempo. Esta lista se basa en un minucioso estudio del gasto de los consumidores, tratando de reproducir la cesta de consumo de un consumidor urbano representativo. El INPC es también un número índice.

Aunque el INPC y el deflactor del PIB varían al unísono la mayor parte del tiempo, existen claras excepciones. Recordemos que el PIB es el precio de los bienes producidos en el país, y el INPC es el precio de los bienes consumidos en el país. Así cuando el precio de los bienes importados sube en relación con el de los bienes producidos en el país, el INPC aumenta más deprisa que el deflactor del PIB.

No podemos dejar de lado la correlación entre las tasas de inflación y otros factores macroeconómicos. Por ejemplo, se dice que existe una clara relación negativa entre la tasa de desempleo y la variación de la inflación, denominada *curva de Phillips*, o bien es sabido que tasas elevadas de inflación están asociadas generalmente con economías que crecen muy rápido, pues la demanda de bienes y servicios sobrepasa la capacidad productiva y habrá una presión alcista en los precios. Los economistas se interesan en la inflación también porque no existe la inflación pura, es decir, no todos los precios y salarios suben proporcionalmente; por lo tanto, la inflación afecta a la distribución de la renta y crea distorsiones (por ejemplo, en impuestos) e incertidumbre.

El fenómeno opuesto a la inflación es la *deflación*, en la cual los precios bajan; la deflación puede provocar presiones recesionarias en una economía, pues precios bajos se traducen en menores ganancias para las compañías y se podría decir que son una manera de desestimular la inversión.

Diversos estudios señalan que la inflación tiene una fuerte repercusión negativa en el rendimiento de las acciones, tanto nominal como real. También parece que las empresas muestran un desarrollo más pobre en periodos de alta inflación.

- <u>Tasa de Desempleo</u>

Es el cociente entre el número de desempleados y la población económicamente activa (PEA), es decir,

$$\textit{Tasa de desempleo} = \frac{\textit{Desempleados}}{\textit{PEA}} = \frac{\textit{Desempleados}}{\textit{Ocupados} + \textit{Desempleados}}$$

Para calcular esta tasa, la mayoría de los países se basan en grandes encuestas o censos. Una persona se considera ocupada si cuenta con trabajo al momento del censo, y desempleada si no tiene trabajo y ha estado buscando empleo en las últimas 4 semanas. Eso significa que en la definición de la tasa de desempleo no se considera como desempleadas a las personas que no están buscando empleo, es decir, *trabajadores desanimados*. Pero, por ejemplo, si todos los desempleados se consideraran desanimados, la tasa de desempleo sería cero, lo cual no reflejaría satisfactoriamente la realidad. En realidad, normalmente una elevada tasa de desempleo va acompañada de una tasa baja de actividad, que es el cociente entre la PEA y la población total en edad activa. Pero ¿porqué les interesa el desempleo a los macroeconomistas?

1. Porque indica en alguna medida si la economía está funcionando por encima o por debajo de su capacidad normal. De acuerdo a la Ley de Okun (1960), existe una relación empírica fiable entre el crecimiento del PIB y la variación de la tasa de desempleo. La tasa de desempleo indica a los macroeconomistas cuál es la situación de la economía y qué tasa de crecimiento es la más deseable.
2. Por sus implicaciones sociales, su influencia directa en el bienestar de los desempleados.

- <u>Los Déficits Presupuestarios y Comerciales</u>

Definimos el déficit presupuestario como el exceso de gasto público sobre los ingresos del Estado, mientras que el déficit comercial es el exceso de importaciones del resto del mundo sobre las exportaciones al resto del mundo.

- El Estado que incurre en un déficit presupuestario va endeudándose cada vez más con el paso del tiempo, lo que significa pagar más intereses sobre la deuda y amortizar menos. Para financiarlos, el Estado debe subir los impuestos o reducir algún gasto. Aún así, tiene sentido que pida un préstamo si los gastos son excepcionalmente elevados, por ejemplo, durante una guerra o tras un terremoto. De lo contrario, los déficits pueden ser imprudentes.
- El país que incurre en un déficit comercial está comprando al extranjero más de lo que le vende y, por lo tanto, acumulando deuda con el resto del mundo. Pedir un préstamo para financiar una inversión que se traducirá en una mayor producción futura es razonable, no así financiar un enorme consumo. Los déficits comerciales se pueden ver en la *balanza comercial* (la diferencia entre exportaciones e importaciones durante un periodo de tiempo).

Por lo tanto, la razón por la que los economistas examinan los déficits presupuestarios y comerciales y por la que les preocupan, se halla en que pueden presagiar la necesidad de realizar dolorosos ajustes en el futuro. Es muy importante para cualquier país tener una balanza comercial positiva; es decir, en superávit, porque de esta forma están entrando más recursos al país a través de las ganancias de las exportaciones que los recursos que salen por el pago de las importaciones, ya que los productores nacionales y la economía en general tienen mayores recursos para realizar sus actividades y desarrollar otras nuevas y, así, incentivar y desarrollar la economía nacional.

- Riesgo País

El riesgo país es un indicador utilizado para evaluar la estabilidad y la capacidad de cumplir obligaciones financieras. La cifra resulta de la diferencia entre las cotizaciones de los instrumentos de deuda soberana (considerados como libres de riesgo crediticio) emitidos por México y las de los bonos con características similares que emite el departamento del Tesoro de Estados Unidos, expresados en centésimos de punto porcentual.

- Tipo de Cambio

El tipo de cambio al que se intercambia la moneda de un país con otra extranjera (generalmente el dólar o el euro) es también un factor que brinda una idea de la situación económica de un país, pues su evolución puede afectar la competitividad internacional de los productos producidos en un país, entre otras cosas.

El tipo de cambio entre dos monedas especifica el precio de una en términos de la otra, y como precio que es, el tipo de cambio cumple un importante papel como orientador de recursos. Si bien existe una gran cantidad de pares de monedas para construir tipos de cambio, casi siempre se publica la relación de las monedas respecto al dólar de Estados Unidos. A un nivel de inversor, hay una serie de monedas, además del dólar, que se suelen utilizar como referencia, entre las cuales se puede encontrar al Euro y al Yen.

Existen diferentes tipos de cambio:

a) *Nominal* (relación a la que una persona puede intercambiar la moneda de un país por la de otro) y *Real* (relación a la que una persona puede intercambiar los bienes y servicios de un país por los de otro).
b) El tipo de cambio FIX, calculado y publicado por el Banco de México para operaciones cambiarias en dólares americanos al mayoreo; este tipo de cambio se aplica para solventar obligaciones denominadas en moneda extranjera, pagaderas en la República Mexicana, y sólo se publican cifras de venta.

c) El tipo de cambio SPOT, que se deriva de operaciones con moneda extranjera (dólares), cuya liquidación es inmediata (al contado) o a muy corto plazo; es decir, es el tipo de cambio corriente.

- Tasas de Interés

Las tasas de interés afectan el valor presente de los flujos de caja futuros –tasas altas reducen el atractivo de las oportunidades de inversión y viceversa- por lo que su evolución es un factor a considerar. Existen tasas de interés *reales* (corregidas para tener en cuenta los efectos de la inflación) y *nominales* (suelen anunciarse sin tener en cuenta los efectos inflacionarios), o bien *activas* (las que cobra el banco) y *pasivas* (las que los inversionistas cobran a los bancos).

- Precio de Energéticos

A partir de 1978, en que se presenta un nuevo choque petrolero, México se inserta al mercado internacional como exportador de petróleo, en un ambiente de precios crecientes, permitiéndole aumentar sus ingresos. La economía comenzó a girar en torno de ese energético y a depender en grado sumo de la exportación de un solo producto.

Es por ello que de 1978 a 1981 se alcanzaron tasas de crecimiento económico muy altas, de 8.4% en promedio anual. De ahí que las finanzas públicas y el comercio exterior se hayan petrolizado, pues el llamado oro negro representó 75% de las exportaciones y del ingreso público.

El alto grado de dependencia de un pequeño número de compradores conlleva altos signos de volatilidad, situación que se hizo evidente en México cuando en 1981 comenzaron a caer los precios internacionales del petróleo; esta situación constituyó uno de los factores determinantes que arrastraron a la economía nacional a la crisis de 1982, cuando el producto interno bruto cayó 2%, el tipo de cambio del peso frente al dólar se desmoronó y la inflación se disparó a 100%.

- Cuentas Externas

Deuda Externa / Interna

Inversión Externa Total

Cuenta de Capital. El conjunto de transacciones que reflejan, las disponibilidades del país para financiar su formación de capital o modificar la posición acreedora o deudora frente al resto del mundo, se engloban en 6 tipos, todos ellos integrantes de la balanza en cuenta de capitales:

- Transferencias unilaterales de capital
- Inversiones directas
- Inversiones en cartera
- Créditos a largo plazo
- Capital a corto plazo

Cuenta corriente. Las transacciones contenidas en la cuenta corriente incluyen, por una parte, las importaciones y exportaciones de mercaderías y servicios y, por la otra, las transferencias unilaterales corrientes, es decir, con destino al gasto, ya sean publicas o privadas.

Reservas internacionales. Es la divisa extranjera poseída por el gobierno o el Banco Central. Entre otras cosas, las reservas internacionales constituyen un factor a considerar al analizar la conveniencia de invertir o no en un país, pues de cierto modo permiten solventar su intercambio comercial y obtener tasas de interés más bajas.

- Políticas Fiscales y Monetarias

El Gobierno Federal utiliza políticas fiscales y monetarias para promover el crecimiento de su PIB, regular niveles de empleo y estabilizar precios. Mientras las políticas monetarias se refieren a las acciones tomadas por el banco central de un país para controlar las tasas de interés y la liquidez de un país, las políticas fiscales se refieren a los impuestos y políticas de gasto del gobierno.

En México, el Banco de México es el organismo descentralizado que funge como banco central y tiene por finalidad proveer a la economía del país de moneda nacional (procurando la estabilidad del poder adquisitivo de la moneda), promover el sano desarrollo del sistema financiero y propiciar el buen funcionamiento de los sistemas de pagos. Entre las políticas más importantes, destaca el *corto monetario*.

El corto monetario es un instrumento de política monetaria que usa el Banco de México para limitar el monto de liquidez en el sistema (menor circulación de billetes y monedas) que, al reducir, eliminan presiones inflacionarias. Básicamente es una señal al mercado, ya que no tiene un efecto cuantitativo. A través del corto, los bancos comerciales se ven obligados a incrementar su saldo en la cuenta única que el Banco de México lleva para cada uno de ellos. De manera indirecta, induce un incremento en las tasas de interés internas, lo que desalienta el consumo con el objetivo final de controlar la inflación.

El corto se ha aumentado cuando los datos reales de la inflación han estado por arriba de la meta oficial, o cuando las expectativas de inflación han ido al alza. En México, todos los rezagos estructurales se van hacia los precios y ello hace difícil mantener la inflación baja. En la economía mexicana continuamente hay fricciones externas en los precios de los energéticos y de las materias primas, lo que significa presiones recurrentes en la inflación. Por otra parte, en la economía mexicana los factores estructurales han generado presiones en el índice general de precios, a pesar de la intervención de la autoridad monetaria mediante el corto. Los precios de algunos alimentos junto con las tarifas de servicio aumentan regularmente. Tal es el caso de los precios de algunas frutas, legumbres y tarifas eléctricas.

2.2.1.2. El Análisis Fundamental

Conocido también como Análisis Financiero, el Análisis Fundamental consiste en el estudio específico de las características y estructura de una empresa, incluyendo su contexto macroeconómico y sectorial, que tiene como fin determinar objetivamente el valor intrínseco de las acciones de una compañía, es decir, el valor que se justifica auténticamente por los hechos (por ejemplo, activos, ganancias, dividendos, etc.).

Una vez determinado dicho valor, se puede ver si el precio de la acción está correctamente valuado: en caso de que la acción tenga un valor intrínseco más alto que su precio actual (está subvaluada o infravaluada), conviene comprar o retener dichas acciones, pero si –por el contrario- el valor intrínseco es menor que el precio actual (está sobrevaluada), lo mejor será vender o abstenerse de comprar las acciones.

El análisis de la información financiera de una empresa busca también conocer el nivel de crecimiento que podemos esperar de esa compañía en un futuro, así como acotar el riesgo existente en tres campos:

- Negocio: definido como la incertidumbre de beneficios y flujos de caja que dependen de las ventas y el nivel de apalancamiento operativo.
- Apalancamiento financiero: capacidad de hacer frente a los pagos de las deudas contraídas que vayan venciendo, así como a la estructura de la empresa en cuanto a qué parte está a largo plazo y cuanto a corto.

- Financiación externa (capacidad de financiar inversiones con capital ajeno) y flexibilidad financiera (habilidad para obtener liquidez con la cual hacer frente a los pagos que pudieran surgir).

En general, este tipo de análisis es preferido por inversionistas con horizonte a largo plazo, esperando que el mercado refleje el valor esperado. El análisis fundamental según el método que se utilice se puede dividir en dos: Bottom-Up y Top-Down; no son excluyentes de ninguna de las formas, es más, un análisis completo debería contrastar las conclusiones obtenidas por ambos métodos para comprobar si los resultados son similares.

- El Análisis Top-Down y Bottom-Up

Como bien expresa su denominación, el análisis Top-Down va desde arriba hacia abajo. Es ir descendiendo empezando, por exagerar un poco, analizando el mundo para terminar examinando a la empresa en sí. Los pasos serían pues los siguientes:

I. Un análisis del mundo, es decir analizar la coyuntura económica a nivel mundial para poder decidir las economías nacionales que gozan de mejor salud y perspectivas. ¿Qué se analiza? Pues fundamentalmente el crecimiento presente y futuro, a través de las variables macroeconómicas mundiales. Se trata de averiguar dónde está la oportunidad de inversión, dónde la razón rentabilidad-riesgo sea más favorable.

II. Análisis sectorial: Ya sabemos el país, o la zona que nos ofrece más seguridad, más posibilidades en definitiva. Ahora el siguiente paso es decidir el sector que dentro de esa coyuntura favorable está mejor situado. Porque dependiendo de por dónde venga el crecimiento habrá sectores que se verán impulsados más que otros. Es decir, si el crecimiento viene por demanda interna, los sectores de consumo estarán mejor posicionados, si viene por demanda exterior los sectores muy exportadores se verán favorecidos.

    El análisis sectorial es muy importante, pues incluso las mejores acciones pueden rendir beneficios mediocres si están en un sector industrial con dificultades. Por ello, se dice que una acción débil en un sector fuerte es preferible a una acción fuerte en un sector débil.

III. La compañía en sí: Aquí ya hemos llegado a la base y hay que examinar la salud financiera de la empresa, su situación comparativa en el sector y su posición competitiva. Habrá que estudiar los condicionantes del sector y cómo afectan a la compañía directamente. Un ejemplo sería ver si el sector tiene barreras de entrada o de salida, lo que influye directamente en el aumento o disminución de la competencia. Así por ejemplo, en el sector del vidrio plano, el coste de transporte es muy elevado, con lo cual no hay peligro de que se produzcan importaciones sustanciales, lo cual favorecería claramente a empresas nacionales en este mercado si ya estuvieran bien posicionadas.

IV. Una vez examinado el entorno sectorial, la competencia, etc., hay que centrarse en la compañía, su estructura financiera, en definitiva ver si presenta buenas o malas perspectivas de negocio en el futuro. Es aquí cuando se estudian los estados financieros de la compañía para obtener toda la información posible, a través de herramientas como el Análisis Vertical, Horizontal, Mixto y de Razones Financieras; habrá que ver y estudiar el grado de apalancamiento tanto operativo como financiero, y hacer previsiones sobre todo de crecimiento, de beneficios, etc.

Tras determinar las condiciones y perspectivas de la economía, el sector y la compañía, el análisis fundamental top-down está preparado para determinar si la compañía está sobrevaluada, subvaluada o correctamente valorada.

Por su parte, el análisis Bottom-Up comienza por estudiar el valor concreto de la empresa, pero ni la coyuntura a nivel sectorial ni la coyuntura económica nacional son tan relevantes como el enfoque Top-Down. Este análisis se centra en el valor y su comportamiento bursátil fundamentalmente.

1) En cuanto a la empresa, hacemos un estudio como el mencionado en el anterior método. Se trata de averiguar la creación de un valor de esa compañía concreta a través del balance, de las razones y en función de lo presente y pasado realizar previsiones futuras. Esto nos dará una idea de lo que podemos esperar en cuanto a la evolución del valor.
2) Una vez analizada la empresa, su estado actual y sus planes de futuro, nuevas inversiones, productos, etc., hay que ver si realmente eso está todo recogido en la cotización porque es a través del análisis conjunto de ambos donde podremos encontrar ineficiencias del mercado y por tanto oportunidades interesantes de inversión.

- El Análisis de Estados Financieros

El análisis de estados financieros es el proceso crítico dirigido a evaluar la posición financiera, presente y pasada, y los resultados de las operaciones de una empresa, con el objetivo primario de establecer las mejores estimaciones y predicciones posibles sobre las condiciones y resultados futuros.

La importancia del análisis de estados financieros radica en que facilita la toma de decisiones a los inversionistas o terceros que estén interesados en la situación económica y financiera de la empresa.

El producto final del proceso contable es presentar información financiera para que los diversos usuarios de los estados financieros puedan tomar decisiones, basados en aspectos como la liquidez, solvencia, rentabilidad y estabilidad de las empresas.

La contabilidad considera 3 informes básicos que debe presentar todo negocio:

1. El Estado de la Situación Financiera (Balance General), que presenta el importe de los activos, pasivos y capital de un negocio en una fecha específica de forma estática.
2. El Estado de Resultados, que muestra la evolución que la empresa tuvo para llegar a lo presentado en el balance, es decir, utilidades o pérdidas; es dinámico.
3. El estado de Flujo de Efectivo, cuyo objetivo es dar información acerca de la liquidez del negocio. Incluye las entradas y/o salidas de efectivo para así determinar el saldo final o el flujo neto.

Entre las limitaciones de los datos contables podemos mencionar: expresión monetaria, simplificaciones y riesgos inherentes a la estructura contable, uso del criterio personal, naturaleza y necesidad de estimación, saldos a precio de adquisición, inestabilidad en la unidad monetaria.

Puesto que el trabajo de análisis e interpretación de estados financieros es arduo, estos deberán ser (a) auditados para garantizar el mínimo de errores en dicha actividad, y (b) consolidados.

En cuanto a los métodos de análisis, distinguimos dos tipos básicos:

a) Métodos Horizontales: Se analiza la información financiera de varios años, a través del crecimiento o disminución de diversas cuentas de activo, pasivo y capital.
b) Métodos Verticales: Los porcentajes que se obtienen corresponden a las cifras de un solo ejercicio.

En el análisis de estados financieros destaca también el de razones financieras, entendiendo por éstas a ciertos indicadores, números, proporciones o relaciones numéricas que miden, señalan o describen la situación financiera de una empresa desde varios ángulos o puntos de vista. El análisis de razones no es sólo la aplicación de una fórmula a la información financiera para calcular una razón determinada; es más importante la interpretación del valor de la razón. Existen tres tipos de comparaciones de razones:

1. *Análisis de corte transversal*. Implica la comparación de las razones financieras de diferentes empresas al mismo tiempo. Este tipo de análisis, denominado de referencia (*benchmarking*), compara los valores de las razones de la empresa con los de un competidor importante o grupo de competidores, sobre todo para identificar áreas con oportunidad de ser mejoradas. Otro tipo

de comparación importante es el que se realiza con los promedios industriales. Es importante que el analista investigue desviaciones significativas hacia cualquier lado de la norma industrial. Este tipo de análisis dirige la atención sólo a las áreas potenciales de interés; no proporciona pruebas concluyentes de la existencia de un problema.

2. *Análisis de serie de tiempo*. Evalúa el rendimiento financiero de la empresa a través del tiempo, mediante el análisis de razones financieras, permite a la empresa determinar si progresa según lo planeado. Las tendencias de crecimiento se observan al comparar varios años, y el conocerlas ayuda a la empresa a prever las operaciones futuras. Al igual que en el análisis de corte transversal, es necesario evaluar cualquier cambio significativo de una año a otro para saber si constituye el síntoma de un problema serio.
3. *Análisis combinado*. Es la estrategia de análisis que ofrece mayor información, combina los análisis de corte transversal y los de serie de tiempo. Permite evaluar la tendencia de comportamiento de una razón en relación con la tendencia de la industria.

- Limitaciones del Análisis Fundamental

- Este análisis da indicaciones sobre las posibles variantes en el rendimiento de acciones, pero no cuenta con ninguna teoría para la medición de riesgos.
- La correcta valoración de la empresa dependería de los flujos de caja futuros que sea capaz de generar descontados a una tasa de descuento determinada. Después del análisis, lo que se obtiene es simplemente una foto de la historia financiera de la compañía, y no permite hacer proyecciones futuras.
- Según la teoría de los mercados eficientes, toda la información está incorporada en el precio de la compañía y, por lo tanto, todos los valores del mercado estarían correctamente valuados, por lo que este tipo de análisis no tendría sentido.[1]

2.2.1.3. El Análisis Técnico

El precio de un valor representa un consenso: es el precio al cual una persona está dispuesta a comprar y otra acepta vender. Este precio, a su vez, depende de expectativas contrarias. Por ello, a la hora de pronosticar el precio de los valores, nos encontramos con que se basan en expectativas humanas que no son ni cuantificables ni previsibles, por lo que cualquier sistema mecánico no funciona consistentemente.

Surge entonces el enfoque conocido como Análisis Técnico, el cual es el proceso de analizar la actividad del mercado, esto es, los datos históricos de cotizaciones y volúmenes de negociación de una acción del mercado, tratando de determinar los precios futuros probables. El análisis técnico tuvo sus orígenes dentro de los mercados accionarios, y posteriormente se extendió al mercado de futuros. Sin embargo, sus principios y herramientas son aplicables al estudio de las gráficas de cualquier instrumento financiero.

El análisis técnico puede subdividirse en una doble categoría:

I. *Análisis Chartista*. Se basa exclusivamente en la información revelada por el estudio de las figuras que forman los precios como indicación de la tendencia que pueden seguir en el futuro, sin utilizar herramientas adicionales.

II. *Análisis Técnico (en sentido estricto)*. Pretende evitar la subjetividad del Análisis Chartista en la interpretación de las figuras; efectúa operaciones estadísticas y matemáticas con los precios, emplea indicadores calculados en función de las diferentes variables, todo con el fin de determinar y detectar situaciones en las tendencias que siguen las cotizaciones.

---

[1] Véase la sección 3.4.3., referente a la Teoría de los Mercados Eficientes.

Como ya se mencionó, el análisis técnico supone que la cotización viene determinada por la interacción de la oferta y la demanda, y que estas pueden responder a factores tanto racionales como irracionales. Consecuentemente con esto último, el análisis fundamental intenta anticipar cuál va a ser la futura evolución de la empresa en cuanto a resultados ya que las expectativas de los mismos es lo que determinará la cotización. Muy al contrario, al análisis técnico le importa muy poco esa evolución, le interesa como ya hemos dicho la actividad del mercado, y analizando ésta, trata de anticiparse a esos movimientos para sacar provecho de esas teóricas oportunidades de inversión.

- Teoría de Dow

La mayoría de los enfoques del Análisis Técnico asumen que los precios siguen un modelo cíclico de mercado, donde se mueven a través de tendencias. El fundador de la teoría de la tendencia más utilizada es Charles Dow, quien desarrolló en 1897 dos amplios índices de mercado:

(a) El *Industrial Average* (12 acciones), que posteriormente se convirtió en el *Dow Jones Industrial Average*
(b) El *Rail Average* (20 acciones ferroviarias), que se convirtió en el *Dow Jones Transportation Average*

Entre 1900 y 1902, Charles Dow publicó una serie de artículos en el *Wall Street Journal*, de cuya compilación surgió la ahora conocida como Teoría de Dow. Originalmente, esta teoría se limitaba a dar un panorama general de las actividades de negocios en la *New York Stock Exchange*, no se destinaba al pronóstico de los precios de las acciones. Las hipótesis que constituyen esta teoría son las siguientes:

1. ***El mercado siempre lo sabe todo.*** El precio de una acción individual refleja todo lo que se sabe del valor. Conforme va llegando nueva información, los participantes del mercado diseminan la información y el precio se ajusta en consecuencia. Quizá el analista no tiene porqué conocer todas las causas que provocan los cambios en los precios, simplemente estudiará las evoluciones de los mismos.
2. *Los precios siempre se mueven por tendencias*. El analista tratará de efectuar un seguimiento de las tendencias de los precios: identificarlas, ver en qué momento se encuentran, intentar prever el momento de su cambio o agotamiento. Dichas tendencias son de tres tipos:
   I. Tendencia Primaria. Determina mercados alcistas o bajistas, dura usualmente más de un año y puede durar varios. Haciendo una analogía con el mar, Dow los llamaba ‘mareas’.
   II. Tendencia Secundaria. Son correcciones intermedias de la tendencia primaria, duran de 1 a 3 meses. Dow los consideraba ‘olas’ en su analogía.
   III. Tendencia Menor. Movimientos a corto plazo, duran de 1 día a 3 o 4 semanas. Carecen de mucha importancia y pueden ser engañosas, puesto que los precios de las acciones están sujetos a corto plazo a cierto grado de manipulación y son difíciles de predecir. Dow los consideraba ‘salpicadas’.
3. *El mercado tiene memoria y la historia se repite.*
4. ***El volumen confirma la tendencia.*** Aunque la Teoría de Dow se concentra principalmente en el precio de las acciones, el volumen se usa para confirmar las situaciones de incertidumbre.

- Análisis Chartista

Este tipo de análisis consiste en observar las gráficas correspondientes a la serie histórica de los precios de cierre de una acción, tratando de identificar figuras y patrones que anticipen un cambio en la tendencia actual, o bien, una confirmación de la misma, y así tomar decisiones de compra o venta. Entre las principales figuras en que se basa el análisis chartista, destacan:

- Líneas de tendencia primaria, secundaria y menor.
- Soportes y resistencias.
- Canales ascendentes y descendentes.
- Figuras de Cambio en la tendencia, tales como:
    - Cabeza y hombros (fantasma) y fantasma invertido.
    - Doble Cresta y doble valle.
    - Fondo redondeado y cresta circular.
    - Cuñas ascendentes y descendentes.
- Figuras de Confirmación en la tendencia, tales como:
    - Banderas y gallardetes.
    - Triángulos ascendentes, descendentes y simétricos.
    - Rectángulos.

Otra herramienta del análisis chartista es el análisis de *candlesticks* japoneses, o gráficos de velas o bujías. Estas gráficas no sólo muestran el precio de cierre, sino que incorporan también el de apertura, el máximo y el mínimo, de la forma siguiente:

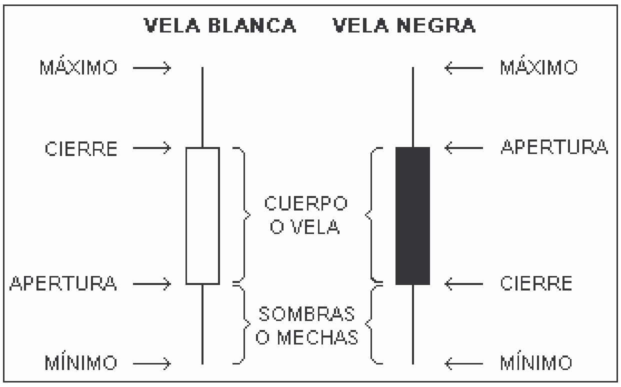


Figura II-2. Velas o *candlesticks* japoneses.

Una vela blanca implica que el precio al cierre fue mayor que el de apertura, mientras que en una vela negra sucede lo contrario. Así, además de presentar la variación de los precios, las velas japonesas indican la fuerza del movimiento y la psicología de los intervinientes del mercado, pues se da mayor énfasis a la relación del precio de apertura con el de cierre y por ello es posible anticipar reacciones.

- Análisis Técnico No Chartista

Entre las principales herramientas del análisis técnico no chartista[2] destacan:

- Indicadores seguidores de tendencia, tales como los promedios o medias móviles:
    - Por su forma de cálculo, pueden ser simples o aritméticos, exponenciales, triangulares, variables, ajustados por el volumen, ponderados, etc.
    - Por su plazo, existen a corto, largo y mediano plazo.
    - Pueden usarse una, dos o hasta tres medias móviles a la vez.
- Indicadores no seguidores de tendencia, como los osciladores:
    - Acotados

    Relative Strength Index (RSI), Oscilador Estocástico, %F de William.

[2] ACHELIS, Steven. El Análisis Técnico de la A a la Z, Valor Editions, Barcelona, 2004.

- No acotados
  Oscilador General, Momentum, Moving Average Convergence-Divergence (MACD), Tasa de Cambio para el Precio (P-ROC), Oscilador Chaikin
- Otros indicadores:
  - Seguidores de Volumen
    On Balance Volume (OBV), Índice de Volumen Positivo y Negativo, Línea de Distribución/Acumulación Simple y de William.
  - Bandas de Bollinger.

2.2.2. Medidas del Rendimiento y Riesgo Esperado de un título

El inversionista que tiene que seleccionar un activo para invertir en él, incluirlo o excluirlo de su cartera, se rige por un doble criterio: la maximización de la rentabilidad y la minimización del riesgo.

La rentabilidad es el motivo principal para realizar la inversión, y para evaluar su perspectiva de futuro será útil conocer su comportamiento en el pasado. En contraparte, el riesgo es el motivo disuasivo de la selección de valores, y debe ser evaluado también *exante*.

2.2.2.1. Medidas de Rentabilidad

La rentabilidad de una acción es la ganancia por unidad monetaria invertida y se considera como una variable aleatoria, que puede adoptar diversos valores a través del tiempo; dichos valores no pueden determinarse con certeza antes de su observación, sino hasta el final del periodo de tenencia, o momento en el cual se liquidará la inversión.

Por ello, es fundamental que el inversionista disponga de un indicador al momento de invertir, el cual le permita resumir toda la información financiera del título y le oriente sobre su comportamiento futuro.

Aunque son diversos las fórmulas alternativas que han sido propuestas para alcanzar este propósito, conviene iniciar revisando algunas medidas de rentabilidad exante y expost, empleadas para medir la rentabilidad real de un título. Estas medidas se basan en los flujos de efectivo totales, dividendos, y las ganancias o pérdidas de capital derivadas de la tenencia del activo, y podemos destacar tres: la tasa interna de retorno, la rentabilidad simple y la compuesta.

a) <u>La Tasa Interna de Retorno</u>

La Tasa Interna de Retorno (TIR) se define como aquella tasa que iguala el precio de mercado inicial del título con el valor presente de los flujos de efectivo del inversionista, es decir:

$$P_0 = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{D_3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{D_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{D_n + P_n}{(1+r)^n}$$

donde

P_0	es el precio de mercado de la acción al inicio del periodo.
D_t	es el dividendo percibido en el periodo t, $t = 1, 2, \ldots, n$.
r	es la tasa interna de retorno (TIR).
P_n	es el precio de mercado de la acción al final del periodo n.

b) <u>Rentabilidad Simple</u>

La rentabilidad simple de un activo para el periodo *t*, comprendido entre los instantes *t*-1 y *t*, se define como:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t \pm O_t}{P_{t-1}}$$

donde

r_t	es la rentabilidad del activo en *t*.
P_t	es el precio de mercado del activo en *t*.
P_{t-1}	es el precio de mercado del activo en *t*-1.
D_t	son los dividendos obtenidos por el activo en *t*.
O_t	son otros ingresos asociados al activo en *t*.

En las series históricas proporcionadas por la bolsa, generalmente los precios de las acciones incorporan ya los dividendos, derechos de suscripción y otras remuneraciones, por lo que la fórmula anterior se reduce a la siguiente:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad P_t = P_{t-1}(1 + r_t)$$

c) <u>Rentabilidad Compuesta</u>

Dependiendo de la frecuencia de conversión, en rentabilidad compuesta podemos distinguir la rentabilidad efectiva anual y la rentabilidad instantánea o continua.

- Rentabilidad Efectiva Anual

Supongamos que se realiza una inversión multiperiódica con reinversión al final de cada periodo. Sean r_1, r_2,…, r_t las rentabilidades simples obtenidas por el activo en los periodos 1,2,…, *t*, respectivamente, por definición sabemos que:

$$\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{P_1}{P_0} - 1 \\ r_2 = \dfrac{P_2}{P_1} - 1 \\ r_3 = \dfrac{P_3}{P_2} - 1 \\ \quad\vdots \\ r_t = \dfrac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} P_1 = P_0(1 + r_1) \\ P_2 = P_1(1 + r_2) \\ P_3 = P_2(1 + r_3) \\ \quad\vdots \\ P_t = P_{t-1}(1 + r_t) \end{array}$$

Podemos sustituir todas las igualdades en la última, por lo que tenemos que

$$P_t = P_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)$$
$$\Rightarrow \frac{P_t}{P_0} = \prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)$$

Si suponemos que la rentabilidad es la misma durante todos los periodos, tenemos que

$$\frac{P_t}{P_0} = \prod_{i=1}^{t} (1+r_i) = [1+r(0,t)]^t \qquad \Rightarrow \qquad r(0,t) = \left[\prod_{i=1}^{t}(1+r_i)\right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

de donde definimos $r(0, t)$ como la rentabilidad efectiva anual media en el intervalo comprendido entre 0 y t. Esta expresión es, en realidad, una media geométrica.

- Rentabilidad Instantánea o Continua

Supongamos ahora que se desea medir la variación de capital en intervalos muy pequeños de tiempo. Así, introducimos el concepto de ***fuerza de interés*** asociada al intervalo [$\underline{t}$, t+h) como:

$$\delta\,[t, t+h) = \frac{C_{t+h} - C_t}{h \cdot C_t}$$

Si tomamos el límite cuando $h \rightarrow 0$ en la expresión anterior, obtenemos el concepto de fuerza de interés continuo, que indica la razón instantánea de cambio en el capital:

$$\delta\,(t) = \lim_{h\rightarrow 0} \frac{C_{t+h} - C_t}{h \cdot C_t} = \frac{1}{C_t} \lim_{h\rightarrow 0} \frac{C_{t+h} - C_t}{h} = \frac{1}{C_t} \cdot \frac{\partial C_t}{\partial\, t} = \frac{\partial(\ln C_t)}{\partial\, t}$$

Al integrar ambos miembros entre 0 y t, tenemos que:

$$\int_0^t \delta\,(\tau)\,\partial\tau = \int_0^t \frac{\partial(\ln C_t)}{\partial\tau} \cdot \partial\tau = [\ln(C_\tau)]_0^t = \ln(C_t) - \ln(C_0) = \ln\left(\frac{C_t}{C_0}\right)$$

De donde deducimos que:

$$C_t = C_0 \cdot \exp\left[\int_0^t \delta(\tau)\partial\tau\right]$$

En el caso particular en el que $\delta(\tau)$ fuera una constante [$\delta(\tau) = \delta$], la ecuación anterior constituiría el modelo de interés nominal capitalizable continuamente, con fuerza de interés constante:

$$C_t = C_0 \cdot e^{\delta\, t}$$

Entre todos los indicadores anteriores, la tasa continua de rentabilidad suele ser la más usada en la bolsa para medir la rentabilidad real de un activo a posteriori. Para calcularla, se parte de la serie histórica de precios del título, la cual incorpora los dividendos pagados y los derechos de suscripción derivados de las ampliaciones de capital. Con esta información, utilizando la expresión anterior es posible obtener la variación que sufre el precio de un activo entre un periodo t-1 y otro t de la siguiente manera:

$$P_t = P_{t-1} \cdot e^{\delta\, t}$$

Si consideramos que las series históricas están constituidas por los precios de mercado diarios de las acciones, es decir, consideramos un único intervalo de tiempo entre una observación y otra (t=1), despejando en la igualdad anterior obtenemos:

$$\delta = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

La expresión anterior representa el valor de la tasa de rentabilidad continua o instantánea; al expresarla en porcentaje, denotamos dicha tasa por r_t y obtenemos la fórmula usada para su medición:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \cdot 100$$

Hemos mencionado que, al momento de invertir, la rentabilidad de un título es una variable aleatoria que adopta diversos valores a lo largo del tiempo; esto ha llevado a intentar predecir dicha rentabilidad con base en medidas que, basadas en su distribución de probabilidad, nos orienten sobre el comportamiento futuro del título. Paradójicamente, son las series históricas las que se emplean para obtener medidas de rentabilidad ex-ante, a pesar de que nada garantiza que los resultados pasados se repitan en el futuro.

Así, el indicador más empleado para estimar la rentabilidad futura de una acción es la media de todas las rentabilidades históricas, multiplicando el resultado por el horizonte en el cual se pretende realizar la estimación. Por ejemplo, si tenemos una serie histórica de precios diarios, calculamos sus rendimientos diarios, y la media de dichos rendimientos sería la rentabilidad esperada a un día; si quisiéramos la rentabilidad esperada mensual, bastaría con multiplicar el resultado anterior por treinta.

Aunque la forma tradicional de estimar las rentabilidades es la descrita en el párrafo anterior, existen modelos que tratan de predecir dicha rentabilidad en función de primas de riesgo, tales como el CAPM y el APT, que se revisarán a detalle posteriormente.

2.2.2.2. Medidas de Riesgo

Evidentemente, la rentabilidad esperada suele no coincidir con la rentabilidad real, lo que obliga a considerar alguna medida que indique qué tanto los resultados difieren de la media.

Aunque las medidas de riesgo tradicionalmente empleadas en los mercados financieros suelen ser la varianza y la desviación estándar, existen otras medidas de riesgo que también revisaremos.

a) La varianza y la desviación estándar.

El riesgo de un activo financiero suele medirse mediante la varianza, definida como la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media:

$$\sigma^2(R_i) = Var(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[R_{i\,j} - E(R_i)]^2$$

donde

- $R_{i\,j}$ es el rendimiento observado del activo i en el periodo j
- $E(R_i)$ es la media de los rendimientos del activo i
- n es el número de rendimientos observados del activo i, lo que significa que la serie histórica contiene los precios de n+1 periodos

Esta medida presenta el inconveniente de que su dimensión no es la misma que la de la variable, ya que las diferencias de los valores de la variable con respecto a su media aparecen elevados al cuadrado. Por ello, suele calcularse la desviación típica o estándar (σ) como la raíz cuadrada de la varianza.

En general, la desviación estándar suele estar expresada en términos anuales, multiplicando la desviación estándar diaria por la raíz cuadrada de 365. [3] Sin embargo, puesto que los precios no varían los fines de semana ni días festivos, algunos autores proponen multiplicar la desviación estándar diaria por el número de días de negociación que haya realmente en ese año. La desviación estándar anualizada recibe el nombre de *volatilidad*.

Por su parte, si suponemos que la serie de rendimientos tiene una distribución normal, se puede valorar –en función de la media [E(R_i)] y la desviación estándar (σ)- el riesgo de una acción en términos de probabilidad y deducir el intervalo más previsible en que caerán los rendimientos reales. Sabemos, por ejemplo, que el 68.27% de las rentabilidades estarán en el intervalo [E(R_i)-σ, E(R_i)+σ], mientras que el 95.45% de las rentabilidades caerán en el intervalo [E(R_i)-2σ, E(R_i)+2σ].

Otro aspecto destacable es que algunos autores consideran que las series históricas utilizadas para el cálculo de la varianza y la desviación estándar no deben ser vistos como una población, sino como una muestra, por lo que tratan de inferir la varianza y desviación estándar poblacionales a través de sus estimadores insesgados, calculados como:

$$\overline{\sigma^2}(R_i) = \overline{Var}(R_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}[R_{i\,j} - E(R_i)]^2 \qquad \overline{\sigma}(R_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}[R_{i\,j} - E(R_i)]^2}$$

Técnicamente, los estimadores anteriores convergen al valor real conforme *n* crece; no así los estimadores máximo-verosímiles (divididos por *n* y no por *n*-1), los cuales no convergen –por muy poco– al valor real, pero son los mejores estimadores para *n* finita.

Algunos autores sugieren considerar a estos indicadores como variables en el tiempo; para ello, existen los modelos ARCH (Heterocedasticidad Condicionada Autorregresiva) que consideran que los nuevos rendimientos dependen de los pasados, y otros modelos que utilizan factores explicativos, excepcionales o cotidianos para conocer el valor del indicador. Sin embargo, esta cuestión ha sido largamente debatida.

b) La semivarianza y la desviación media absoluta.

Entre las medidas alternativas para evaluar el riesgo de un activo destacan la semivarianza[4] y la desviación media absoluta[5].

La varianza y la desviación estándar valoran idénticamente las diferencias con respecto al rendimiento esperado, sean positivas o negativas. Puesto que un rendimiento superior al esperado no constituye una situación de riesgo, la semivarianza sólo considera los rendimientos inferiores a la media:

$$\text{Semivarianza} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[RI_{i\,j} - \mathrm{E}(R_i)]$$

donde *RI* representa el rendimiento inferior a E(R_i) en el periodo *j*. Análogamente a la varianza, se define la semidesviación estándar como la raíz cuadrada de la semivarianza.

---

[3] Si x_1, x_2, x_3,… x_n son *n* variables aleatorias con varianzas σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, $\ldots\sigma_n^2$, y si la covarianza entre cada par de variables aleatorias es cero, entonces la varianza de la suma es la suma de las varianzas. Si además todas las varianzas fueran idénticas e iguales a σ_1^2, se cumple que $\sigma^2(x_1, x_2, x_3,\ldots x_n) = \mathrm{n}\cdot\sigma_1^2$, lo que implica que $\sigma(x_1, x_2, x_3,\ldots x_n) = \sqrt{n}\cdot\sigma_1$.

[4] MARKOWTZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1959, p. 188-201.

[5] KONNO, H., YAMAZAKI, H., *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo Stock Market*, Management Science, vol. 37, 1991, pp. 519-31.

Intuitivamente, la semivarianza es una medida de dispersión razonable y más adecuada para medir el riesgo; el propio Markowitz la propone como sustitutiva de la varianza. Sin embargo, su cálculo se complica para el caso de portafolios y produce dificultades matemáticas. Las ventajas de la varianza son menor costo, comodidad y familiaridad.

Por otra parte, algunos estudios muestran que la mayoría de los activos del mercado tienen rendimientos que se distribuyen de forma más o menos simétrica, por lo que la semivarianza es proporcional a la varianza y resulta innecesaria.

Otros autores proponen, en cambio, no sobreponderar valores extremos que son poco probables, considerando las diferencias con respecto a la media en valores absolutos:

$$\text{Desviación Media Absoluta} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|R_{ij} - E(R_i)\right|$$

c) La beta (β)

El coeficiente β es uno de los indicadores de riesgo que no buscan subsanar los principales inconvenientes de la varianza y la desviación estándar. Propuesto en modelos como el CAPM o el de Mercado de Sharpe, este indicador merecerá una mención posterior en el Capítulo III.

2.3. ANÁLISIS Y SELECCIÓN DE CARTERAS

La siguiente etapa consiste en analizar todas las carteras posibles y seleccionar aquella que mejor satisfaga los objetivos del inversionista. Esta etapa constituye un problema típico de toma de decisiones, por lo que conviene revisar primero los elementos intrínsecos y metodológicos que lo integran desde una perspectiva teórica, para después enumerar los principales modelos de selección de cartera que se han propuesto a lo largo de la historia.

2.3.1. Elementos a considerar para la Toma de Decisiones

2.3.1.1. Elementos Intrínsecos

Podemos distinguir tres elementos intrínsecos del problema de toma de decisiones: el conjunto factible, el conjunto de estados de la naturaleza y la función de evaluación de resultados.

- El Conjunto Factible

Es un conjunto A integrado por todas las posibles carteras de inversión, denotadas por a_i. Para que este conjunto constituya un elemento en la toma de decisiones, debe tener una cardinalidad mayor a uno, es decir, debe haber más de una alternativa posible, aparte de que las alternativas sean disjuntas.

- El Conjunto de Estados de la Naturaleza

Cada una de las carteras del conjunto factible va a poder desarrollarse en un panorama futuro, condicionado por factores o variables que escapan del control del sujeto decisor y que determinan diversos escenarios, llamados *estados de la naturaleza* y denotados por θ_j. El conjunto $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_j\}$ que contiene todos los estados de la naturaleza constituye el segundo elemento intrínseco en el problema de toma de decisiones.

- La Función de Evaluación de Resultados

Esta función trata de establecer algunos resultados previsibles que cuantifiquen las consecuencias derivadas de haber optado por una alternativa y un estado de la naturaleza en concreto. Definida por *f*: $A \times \Theta \rightarrow \Re$, a través de esta función se puede medir la contribución de cada cartera a la consecución del objetivo establecido por el inversionista. Por lo tanto, será necesario definir una función de evaluación de resultados por cada objetivo, si se pretende obtener varios objetivos simultáneamente.

2.3.1.2. Elementos Metodológicos

Entre los elementos metodológicos ligados a la toma de decisiones, destacan el decisor y el ambiente en que opera.

- El Decisor

El decisor es el individuo (o grupo de individuos) que deben solucionar el problema de selección de carteras, guiado por el principio de racionalidad. Aunque en la sección 1.2.2 revisamos los principales axiomas de preferencia racional propuestos en la Teoría de la Utilidad Esperada, en esta sección veremos las propuestas de otros autores, como Simon[6], quien suele caracterizar dicha racionalidad a través de las siguientes condiciones:

a. La enumeración y conocimiento de todas las alternativas y cursos de acción posibles.
b. La determinación de las consecuencias que derivarían de seguir cada una de las alternativas.
c. La evaluación y comparación de las consecuencias asociadas a dichas alternativas.

El comportamiento del decisor racional será esencialmente optimizador, pues elegirá siempre la mejor alternativa. No obstante, las condiciones anteriores resultan ser muy restrictivas en las situaciones reales, por lo que surge el concepto de *racionalidad limitada*, que supone la aceptación de dos premisas básicas: 1) la búsqueda derivada de no conocer todas las alternativas, y 2) la satisfacción, pues quizá el decisor no buscará una alternativa óptima, sino aquella que satisfaga suficientemente sus niveles de aspiración (*alternativa satisfactoria*). Así, se entiende que la optimización no es un enfoque contrapuesto a la satisfacción, sino un caso particular de la misma.

Otros autores[7] consideran que existen cuatro factores que confluyen en la aplicación del principio de racionalidad, a saber:

a. La información disponible por el decisor al momento de decidir.
b. El ambiente o contexto en que el problema se sitúa.
c. El horizonte de tiempo considerado.
d. El objetivo final que se persigue

Se distinguen dos tipos de racionalidad:

1) La racionalidad objetiva. Todos los individuos que partan de la misma información en un contexto dado y actúen fuera de su entorno personal, ordenarán los medios necesarios para alcanzar su objetivo de forma tal que llegarán a conclusiones semejantes, salvo pequeñas diferencias que pueden surgir.
2) La racionalidad subjetiva. Obedece a convicciones personales del individuo, lo que no significa que su actuación sea racional; para que lo sea, la decisión del individuo debe seguir unas reglas de orden conocidas como *sistema de preferencias*.

---

[6] SIMON, Herbert A. *Rational Decisión-Making in Business Organizations*, American Economic Review, Vol. LXIX, 1979, pp. 493-513.

[7] SÁEZ, J.B. *Decisiones Uniperiódicas y Decisiones Multiperiódicas en la Teoría de Selección de Carteras*, Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1994, p. 36.

Aunque el concepto de racionalidad presenta bastantes limitaciones, es evidente que representa una base sobre la que descansan muchos modelos macroeconómicos y financieros en la actualidad.

- El Ambiente

El ambiente en el que opera el decisor afecta al conjunto de estados de la naturaleza y constituye el último elemento metodológico del proceso decisional. En general, según el grado de conocimiento que se tenga del ambiente, se distinguen cuatro tipos:

- *Ambiente de Certidumbre*. El decisor conoce con exactitud y por anticipado el estado de la naturaleza que va a presentarse.
- *Ambiente de Riesgo*. El conjunto de estados de la naturaleza (Θ) es aleatorio y se puede asociar una distribución de probabilidad de ocurrencia a cada estado de la naturaleza θ_i.
- *Ambiente de Incertidumbre*. El conjunto Θ es de carácter aleatorio, pero no se puede definir una distribución de probabilidad asociada a los estados de la naturaleza θ_i.
- *Ambiente Hostil*. Existen múltiples decisores con intereses contrapuestos entre sí.

Aunque la selección de carteras puede calificarse como un típico problema decisional en un ambiente de riesgo, se transforma en uno de ambiente de certidumbre cuando se han establecido objetivos fijos y se han escogido las medidas de riesgo y rentabilidad previstas.

2.3.1.3. Otros elementos

Los elementos mencionados anteriormente son los que tradicionalmente se consideran en un proceso de decisión; no obstante, existen otros factores que condicionan la selección de una cartera, a saber, el tiempo, el tipo de contrato y las condiciones del mercado de valores.

- El tiempo

Esta variable se puede considerar desde una doble perspectiva: el tiempo del problema y el tiempo del individuo. Mientras el primero hace referencia a la variabilidad de las condiciones del problema, el segundo se relaciona con el número de intervalos que el decisor considera representativos de su horizonte temporal.

- El tipo de contrato

El tipo de contrato que vincula al cliente con su gestor de carteras es también un factor determinante en la creación y desempeño de una cartera o portafolio de inversión. Distinguimos dos tipos de contratos: discrecionales y no discrecionales.

La gestión discrecional e individualizada de carteras de inversión va más allá de la mera información sobre los valores y del asesoramiento en operaciones relativas a dichos valores, pues otorga al gestor un amplísimo margen de libertad y sobradas facultades, pudiendo, en nombre y por cuenta del cliente, entre otras operaciones, comprar, suscribir, enajenar, prestar, acudir a las amortizaciones, ejercitar los derechos económicos, realizar los cobros pertinentes, conversión y canje de valores y, en general, de activos financieros sobre los que recaiga la gestión, sin previo aviso o consulta al propietario de la cartera. Evidentemente, aunque el gestor actúa de forma autónoma siempre debe respetar las condiciones estipuladas por cada uno de los clientes según su perfil de inversión, cumpliendo siempre con las condiciones de riesgo-rendimiento previamente establecidas.

Por el contrario, cuando el contrato es no discrecional, el cliente lleva él mismo el control de su portafolio y es quien toma las decisiones sobre la administración de sus recursos (aunque éstas son a menudo propuestas por el ejecutivo especialista). En este caso, el servicio se extiende a la centralización de las inversiones realizadas por cada cliente, incluyendo la ejecución de las órdenes específicas de compra y venta de títulos de inversión, servicio de cobro de dividendos, custodia de títulos y todo lo relativo al soporte administrativo para el debido logro y seguimiento de los objetivos del cliente.

- <u>El Mercado de Valores</u>

Es el marco donde se desarrolla la formación y selección de carteras; en el mercado de valores se reúnen las empresas y el Estado, quienes emiten instrumentos financieros como una alternativa de financiamiento. También se reúnen los ahorradores, que tienen un excedente de capital y transfieren fondos hacia aquellos que lo necesitan, con el fin de obtener una rentabilidad. Otra función importante de un mercado de valores es determinar el precio de los activos, gracias a la libre conjunción de la oferta y la demanda.

Dentro del mercado de valores, podemos distinguir el mercado primario y el secundario. En el primero, el Estado y las empresas emiten activos financieros de renta fija o variable por primera vez; en el secundario, se negocian los valores emitidos anteriormente.

El mercado secundario se divide, a su vez, en tres partes:

- El Mercado de Derivados o *MexDer*, destinado a la negociación de instrumentos financieros derivados tales como opciones, futuros y swaps.
- El Mercado de Deuda Pública, donde se negocian bonos, obligaciones, certificados de la tesorería (CETES) y otros instrumentos de deuda emitida por organismos del Sistema Financiero Mexicano.
- La Bolsa Mexicana de Valores (BMV), en la cual se negocian de forma exclusiva las acciones y valores que otorgan derechos de adquisición o suscripción.

En México, la estructura formal sobre la que descansan y dentro de la cual se desenvuelven las operaciones bursátiles es la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), nacida en 1975. De acuerdo a la Ley del Mercado de Valores, la BMV es una institución privada, constituida legalmente como sociedad anónima de capital variable, que opera por concesión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público; sus accionistas son exclusivamente las casas de bolsa autorizadas cada una de las cuales posee una acción. Principalmente, la BMV se encarga de certificar las cotizaciones de los títulos que se ofrecen en el mercado.

La BMV tiene por objeto proporcionar la infraestructura y los servicios necesarios para la realización eficaz de los procesos de emisión, colocación e intercambio tanto de valores y títulos inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios, como de otros instrumentos financieros.

Las empresas que requieren recursos monetarios para financiar su operación o sus proyectos de expansión, pueden obtenerlos mediante el mercado de valores (acciones, papel comercial, etc.), los cuales son puestos a disposición de los inversionistas e intercambiados en la BMV, en un mercado de libre competencia y con igualdad de oportunidades para todos sus participantes.

Algunas instituciones que apoyan a la Bolsa Mexicana de Valores son el Instituto para el Depósito de Valores (INDEVAL), el Instituto Mexicano del Mercado de Capitales (IMMEC), la Asociación Mexicana de Casas de Bolsa (AMCB), así como diversas agencias calificadoras de valores

En agosto de 1996 fue instaurado el sistema BMV-SENTRA Capitales, el cual permite negociar valores en tiempo real a través de cientos de terminales de computadora interconectadas por una red, ubicadas en las casas de bolsa y controladas por la estación de Control Operativo de la Bolsa

Mexicana de Valores. Control Operativo monitorea toda la sesión de remate, llevando un estricto registro de todos los movimientos, usuarios, las políticas y los parámetros del sistema.

Los accionistas de la BMV son los agentes de valores que integran el mercado mexicano. La ley de Mercado de Valores define a un agente de valores como la persona que está inscrita en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios. Ningún agente de valores podrá poseer más de una acción en la bolsa respectiva. Los agentes de valores, en su gran mayoría son personas morales, reciben el nombre de *casas de bolsa* y los agentes de valores que son personas físicas se denominan *agentes de bolsa*.

Las Casas de Bolsa son intermediarios (corredurías) entre oferentes y demandantes de recursos (público inversionista y emisores), que además realizan operaciones por cuenta propia con el fin de facilitar la colocación de valores o que coadyuvan a dar mayor estabilidad a los precios de éstos. Las casas de bolsa también prestan servicios de asesoría financiera y están constituidas como sociedades anónimas de capital variable. Los agentes de bolsa son las personas autorizadas para suscribir nuevas emisiones de títulos bursátiles en la BMV.

Al no estar facultado el público en general a comprar y vender valores, tenía que utilizar un representante que lo hiciera por él. Este representante que se conoce en el medio como corredor es, en la actualidad, empleado de una Casa de Bolsa. Cabe mencionar que a partir de la Ley del Mercado de Valores de 1975, no se permiten como agentes de valores a personas físicas. Los agentes de valores autorizados para actuar como intermediarios, son sólo sociedades anónimas constituidas.

Las casas de bolsa son los únicos intermediarios facultados para llevar a cabo operaciones de compra y venta de valores cotizados en la Bolsa. Además de esta función, las casas de bolsa actúan como consejeros de sus clientes. Como se ve, las casas de bolsa prestan dos servicios, el de intermediación y el de asesoría, por los cuales cobran comisiones. Sólo eventualmente, cuando tienen tenencia propia de acciones, venden directamente acciones.

La naturaleza del problema de selección de cartera conlleva a que éste se desarrolle concretamente en la BMV. Debido a esto, cobra especial importancia un índice bursátil como el Índice de Precios y Cotizaciones, principal indicador del comportamiento del mercado accionario de la BMV. El IPC permite apreciar de forma sintetizada los cambios en la bolsa., pues expresa el rendimiento de este mercado tomando como referencia las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del total de los títulos accionarios cotizados en la BMV.

Aplicado en su actual estructura desde 1978, el IPC expresa en forma fidedigna la situación del mercado bursátil y constituye un indicador altamente confiable. El IPC es un índice calculado por capitalización de mercado, es decir, pondera la participación de cada una de las empresas que comprende la muestra con base en el valor total de mercado de sus acciones en circulación.

La muestra base para el cálculo del IPC se revisa anualmente y se integra por 35 de las emisoras más bursátiles de distintos sectores de la economía, como veremos en la sección 4.1.

2.3.2. Introducción a los Modelos de Selección de Carteras

Una vez establecidas las políticas de inversión, supongamos que ya se ha seleccionado un conjunto de activos financieros y se tiene la intención de conformar una cartera de inversión con ellos. Buscando diversificar, del total disponible destinamos una proporción de capital a invertir en cada uno de dichos instrumentos. Pero surgen entonces diversas inquietudes: ¿cómo saber cuál es la proporción adecuada a destinar en cada instrumento? ¿Cómo conformar una cartera de forma tal que se cumplan los objetivos planteados?

Hemos revisado ya los elementos que inciden en la toma de una decisión, de acuerdo a la Teoría de las Decisiones. Sin embargo, es tal la variedad de criterios que a lo largo de la historia han surgido diversos modelos de selección de cartera, es decir, modelos de asignación de recursos entre distintas alternativas. Dada una cuantía determinada, se selecciona la combinación óptima de *n* posibilidades de inversión, la cartera óptima, estableciendo la optimalidad tomando fundamentalmente dos índices de referencia: rentabilidad esperada y riesgo asociado a la misma, aunque es posible considerar más índices, como la asimetría, apuntamiento, liquidez, etc.

Los modelos tradicionales maximizan la rentabilidad esperada acotando superiormente el riesgo asociado, o bien, minimizan el riesgo esperado acotando inferiormente la rentabilidad asociada, o maximizan o minimizan alguna combinación lineal o razón de dichos índices de referencia. De ellos, el más común es el modelo media-varianza de Markowitz, llamado así por usar como rentabilidad esperada la media, en principio de rentabilidades históricas, y como riesgo asociado la varianza.

Revisando la literatura queda constancia de la importancia teórica y práctica de la aproximación media-varianza, pero en realidad el problema es bastante más complejo: existen múltiples fuentes de incertidumbre, existen múltiples criterios de elección, que a veces surgen como consecuencia de considerar más índices de referencia, etc. Además, todos los modelos pueden generalizarse considerando, junto a las ineludibles restricciones presupuestarias y de objetivos preestablecidos, imperfecciones de mercado o restricciones de diverso tipo: costes de transacción, impuestos, venta en corto[8] o endeudamiento, lote mínimo y lote máximo de transacción, requerimientos de solvencia, etc. De ahí que el problema de selección de cartera haya evolucionado tanto en el planteamiento como en las técnicas.

No obstante, el binomio rentabilidad-riesgo sigue siendo el principio básico en el planteamiento de los modelos, con el consiguiente conflicto de objetivos, ya que para lograr mayor rendimiento se deben adoptar estrategias más arriesgadas dando lugar a un abanico de posibilidades que van desde las carteras de crecimiento hasta las carteras de seguridad.

Los modelos de selección de carteras pueden dividirse, en función del número de intervalos de tiempo que el decisor considere representativos de su horizonte temporal, en tres grupos:

- Los modelos uniperiódicos, que son aquellos en los cuales el horizonte temporal no se divide en subperiodos, y en caso de que éstos existan, las decisiones adoptadas en cada uno de ellos se consideran independientes entre sí.
- Los modelos multiperiódicos, en los cuales la división en subperiodos del horizonte temporal tiene carácter finito, existiendo dependencia entre las decisiones adoptadas en cada uno de ellos.
- Por último, los modelos dinámicos, en los cuales el horizonte temporal se aborda desde el campo continuo.

De todos ellos, nos centraremos en el estudio de los primeros, es decir, de los modelos uniperiódicos. La razón se debe a que, además de las peculiaridades ya descritas, existen otra serie de rasgos característicos entre los cuales destaca el hecho de ser teorías de carácter estático, es decir, en las cuales las condiciones permanecen inalteradas en el espacio de tiempo considerado.

Puede decirse, entonces, que los modelos uniperiódicos están compuestos por una serie de teorías de carácter estático, según las cuales el inversor selecciona su cartera para un periodo concreto en función del objetivo u objetivos finales que pretenda alcanzar y suponiendo que al término de dicho espacio de tiempo procederá a liquidarla, o bien mantenerla, fijando uno o varios objetivos para el siguiente periodo y seleccionando, en función de los mismos, su nueva combinación de títulos. Si actúa de este modo, dividirá el espacio de tiempo comprendido entre su creación y liquidación en *n* periodos de igual tamaño, en cada uno de los cuales seleccionará su cartera y procederá a revisarla, actuando así hasta que llegue el momento definitivo de la liquidación.

---

[8] La venta en corto es la venta de un valor que no se posee en el momento de la operación, y es necesario comprarlo posteriormente para cubrir la venta.

Una vez descritos los rasgos fundamentales que caracterizan a todo modelo uniperiódico de selección de carteras, una labor fundamental consiste en realizar una clasificación que permita encuadrar a sus principales teorías. En este sentido, de acuerdo al objetivo buscado suelen distinguirse tres grupos:

a) Modelos cuya finalidad es maximizar la utilidad esperada de la rentabilidad de la cartera. Esta categoría engloba a un mayor número de teorías, que se clasifican a su vez en dos grupos:
    - Modelos que determinan previamente el conjunto eficiente, entre los que destacan los Modelos de Markowitz, Baumol, Esperanza-Semivarianza, Esperanza-Entropía y el Criterio de Dominancia Estocástica.
    - Modelos que persiguen directamente la maximización de la utilidad esperada, sin obtención previa del conjunto eficiente.
b) Modelos que maximizan la media geométrica de la rentabilidad de la cartera, dentro de los cuales se incluye el Modelo Media Geométrica.
c) Modelos que buscan la seguridad del inversor (*Safety First*), para lo cual pretenden asegurar un determinado nivel de rentabilidad de la cartera. Dentro de este grupo se encuadran los Modelos de Roy, Sharpe, Kataoka y Telser.

2.3.3. Modelos de Maximización de la Utilidad Esperada

El Modelo de Markowitz, que revisaremos a detalle en un apartado posterior, supuso una gran innovación en el mundo de las finanzas, y son numerosos los trabajos que, inspirados en él, pretenden completarlo y superar sus principales dificultades. No obstante, la mayoría de los modelos alternativos aún consideran como atributos del problema la rentabilidad esperada y el riesgo, y maximizar la rentabilidad esperada o minimizar el riesgo constituyen los objetivos de inversión.

Los Modelos de Baumol, Esperanza-Semivarianza y Esperanza-Entropía son teorías que siguen las pautas establecidas por Markowitz para seleccionar carteras óptimas, pero su principal peculiaridad radica en que juzgan a la varianza como una medida inadecuada para representar el riesgo de la cartera y, como consecuencia, realizan diferentes propuestas para su sustitución.

2.3.3.1. El Modelo de Baumol

También conocido como Modelo Esperanza-Límite inferior de Confianza, el Modelo de Baumol[9] parte de dos premisas básicas constatables en el mundo real del inversor: (a) por un lado, existe la preocupación porque la rentabilidad real de la inversión sea inferior a la rentabilidad esperada, y (b) por el otro, no existe inquietud en caso de que las desviaciones en el rendimiento esperado sean positivas –pues reportarían beneficios al inversor. La varianza, como sabemos, valora idénticamente ambas clases de desviaciones, por lo que Baumol propone sustituirla por una nueva medida denominada *límite inferior de confianza*.

El límite inferior de confianza, L, representa la mínima rentabilidad o la máxima pérdida aceptada por el inversionista y se define como

$$L = \mathrm{E}(R_P) - k\sqrt{\mathrm{Var}(R_P)}$$

donde

$\mathrm{E}(R_P)$ es el rendimiento esperado del portafolio.

---

[9] BAUMOL, W.J. *An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection*, Management Science, Vol. 10, No. 1, Octubre 1963, p. 174-181.

$\mathrm{Var}(R_P)$	es la varianza del portafolio.
k	es el coeficiente de aversión al riesgo del inversionista o el número máximo de desviaciones típicas que se admite que la cartera esté por debajo de $E(R_P)$; se considera que k es un número positivo.

Así, una cartera A será preferible a otra B si y sólo si se cumplen las siguientes desigualdades, al menos una de ellas en sentido estricto:

$$\begin{aligned} E(R_A) &\geq E(R_B) \\ L(R_A) &\geq L(R_B) \end{aligned}$$

Expresado de otro modo, una cartera pertenecerá al conjunto eficiente (X_E) si no existe otra cartera con igual rentabilidad esperada y mayor límite inferior de confianza, o bien, si no existe otra cartera con igual límite inferior de confianza y mayor rentabilidad esperada.

Nótese que el conjunto eficiente resultante tras la aplicación de este criterio está en función del coeficiente k, variando por tanto de un inversionista a otro, e incluso para un mismo sujeto entre distintos periodos. Además, Baumol demuestra que dicho conjunto eficiente es un subconjunto del obtenido al aplicar el criterio media-varianza, y que a medida que aumenta la aversión al riesgo del inversor, el primero se aproxima más al segundo.

Otra novedad de este modelo es que considera una nueva función de utilidad dependiente de ambas medidas, de modo que toda la información disponible se reduce a una sola dimensión. La posterior maximización de su utilidad esperada permitirá obtener, finalmente, la cartera óptima del inversionista:

$$\underset{x \in X_E}{Max}\, E\,[U(R_P)] = \underset{x \in X_E}{Max}\, U\,[E(R_P), L(R_P)]$$

2.3.3.2. El Modelo Esperanza-Semivarianza

Otra de las teorías que propone sustituir a la varianza como medida representativa del riesgo de una cartera es el Modelo Esperanza-Semivarianza, desarrollado por el mismo Markowitz, Mao[10] y Brewster[11]. Los autores proponen este cambio en base a los siguientes inconvenientes que presenta la varianza:

1. El hecho de considerar tanto a las desviaciones positivas como a las negativas de la rentabilidad real con respecto a la media con idéntico carácter, cuando en realidad sabemos que mientras las desviaciones negativas son preocupantes, las positivas, en cambio, son deseables para el inversor.
2. La consideración de la rentabilidad esperada como rentabilidad objetivo a alcanzar por parte el sujeto decisor, lo cual, en principio, no tiene porqué ocurrir en el mundo real.

Por estos motivos, este modelo propone sustituir a la varianza por una nueva medida de riesgo, la Semivarianza negativa (S_h), la cual se define como el valor esperado de las desviaciones negativas de la rentabilidad real [denotadas por $(R_P - h)^-$] respecto a un valor objetivo h, al cuadrado, o sea:

$$S_h = E\,[(R_P - h)^-]^2$$

---

[10] MAO, J.C.T. *Models of Capital Budgeting, E-V vs. E-S*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 5, No. 1, Enero 1970, p. 657-675.

[11] MAO, J.C.T. y BREWSTER, J.F. *An E-Sh Model of Capital Budgeting*, incluido en DICKINSON, J.P. *Portfolio Analysis: A book of readings*, Lexington Books, 1974, p. 85-100.

siendo R_P la variable aleatoria que representa la tasa de rentabilidad de la cartera.

h el valor deseable a alcanzar por la rentabilidad de la cartera y por debajo del cual no se desea que esté R_P.

y en donde, al no tenerse en cuenta las desviaciones positivas de R_P respecto a h (ya que benefician al inversor), $(R_P\text{-}h)^-$ se define del siguiente modo:

$$(R_P - h)^- = \begin{cases} R_P - h & si\ R_P - h \le 0 \\ 0 & si\ R_P - h > 0 \end{cases}$$

La consideración de esta medida de riesgo origina la necesidad de establecer un nuevo criterio de eficiencia basado en la esperanza y en la semivarianza, según el cual una cartera A será preferible a otra B si y sólo si

$$\mathrm{E}(R_A) \ \ge\ \mathrm{E}(R_B) \qquad y \qquad S_{hA} \ <\ S_{hB}$$

o bien,

$$\mathrm{E}(R_A) \ >\ \mathrm{E}(R_B) \qquad y \qquad S_{hA} \ \le\ S_{hB}$$

Es decir, si a mayor o igual rentabilidad esperada presenta menor semivarianza, o bien, a menor o igual semivarianza presenta mayor esperanza.

Tras ello, y una vez determinada la frontera eficiente, se introduce una función de utilidad en consonancia con ambas medidas:

$$U(R_P) = a + bR_P + c[\min(R_P - h, 0)]^2 = \begin{cases} a + bR_P + c(R_P - h)^2 & si\ R_P \le h \\ a + bR_P & si\ R_P > h \end{cases}$$

siendo su utilidad esperada:

$$\mathrm{E}[U(R_P)] = \begin{cases} a + b\mathrm{E}(R_P) + c\mathrm{E}\,[(R_P - h)^2\,] & si\ R_P \le h \\ a + b\mathrm{E}(R_P) & si\ R_P > h \end{cases} = a + b\mathrm{E}(R_P) + cS_h(R_c)$$

Cabe mencionar que la exigencia en el modelo de que el inversionista prefiera más rentabilidad a menos y que su aversión al riesgo esté acotada superiormente, determinará el signo de los coeficientes de la función de utilidad. De este modo, $b>0$ y $c<0$. [12]

La maximización de esta utilidad esperada permitirá obtener, finalmente, la cartera óptima del inversor:

$$\underset{x \in X_E}{Max}\ \mathrm{E}\,[U(R_P)] = \underset{x \in X_E}{Max}\ U\,[\mathrm{E}(R_P), S_h(R_P)]$$

2.3.3.3. El Modelo Esperanza-Entropía

El Modelo Esperanza-Entropía[13] considera que la varianza no es una buena medida del riesgo asociado a una cartera, especialmente cuando sus resultados no se distribuyen simétricamente. Para subsanar este inconveniente, propone emplear otra medida que sea independiente de la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria y que, igualmente, represente el riesgo promedio

---

[12] Para su demostración, véase PREIXENS, M.T. *Hacia una Teoría de Carteras desde el punto de vista de la Revisión,* Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1992, p. 199-200.

[13] PHILIPPATOS, G.C. y WILSON, C.J. *Entropy, Market Risk, and the Selection of Efficient Portfolios*, Applied Economics, Vol. 6, No. 1, Septiembre 1974, p.77-81.

de los resultados de la cartera. Este indicador, también empleado en Física, recibe el nombre de *entropía* o información esperada.

La entropía de una cartera se define como la media ponderada de las entropías asociadas a las rentabilidades de los títulos que la componen, o sea:

$$H_P = \sum_{i=1}^{n} w_i H(R_i)$$

donde

H_P	es la entropía asociada a la rentabilidad de la cartera.
w_i	es la proporción en que interviene el título *i* en la cartera.
$H(R_i)$	es la entropía asociada a la rentabilidad del título *i*.

y en donde la entropía asociada a la rentabilidad de un título se define del siguiente modo:

$$H(R_i) = -\sum_{j=1}^{m} P_j \log_2 P_j$$

donde

R_i	es la variable aleatoria discreta que representa la tasa de rentabilidad del título considerado, la cual puede tomar *m* valores distintos.
P_i	es la probabilidad asociada a cada uno de los valores que puede tomar R_i (j=1,2,….,m)

De este modo, una vez establecidos los dos objetivos de la inversión (maximizar la rentabilidad esperada de la cartera y minimizar el riesgo) medidos, respectivamente, por la esperanza matemática y la entropía, la selección de la cartera del inversionista exige establecer un criterio de eficiencia en base a estos indicadores.

Según éste, una cartera *A* será preferible a una cartera *B*, si y sólo si

$$\mathrm{E}(R_A) \geq \mathrm{E}(R_B) \quad y \quad H_A \leq H_B$$

donde

$\mathrm{E}(R_A)$	Rentabilidad esperada de la cartera *A*.
$\mathrm{E}(R_B)$	Rentabilidad esperada de la cartera *B*.
H_A	Entropía de la cartera *A*.
H_B	Entropía de la cartera *B*.

Cabe destacar que las dos igualdades no pueden darse a la vez. Tras ello, la consideración de una función de utilidad que relacione ambas medidas, así como su posterior maximización permitirá, finalmente, obtener la cartera óptima del inversor.

Philippatos y Gressis se preocuparon, además, de estudiar bajo qué condiciones el criterio Esperanza-Entropía y el Esperanza-Varianza proporcionan el mismo conjunto eficiente, llegando a la conclusión de que esto ocurre cuando la distribución de los rendimientos es normal.[14]

2.3.3.4. El Criterio de Dominancia Estocástica

---

[14] PHILIPPATOS, G.C. y GRESSIS, N. *Conditions of Equivalence among E-V, SSD and E-H Portfolio Selection Criteria: the Case of Uniform, Normal and Lognormal Distributions,* Management Science, Vol. 21, No. 6, Febrero 1975, p.617-625.

La forma más general del criterio de dominancia estocástica no considera supuesto alguno sobre la forma de los rendimientos de probabilidad ni sobre la forma específica de la función de utilidad del inversionista; en lugar de ello, bajo este criterio se definen conjuntos eficientes caracterizando de forma cada vez más restrictiva el comportamiento de las funciones de utilidad en general, con base en tres supuestos progresivamente fuertes que conducen directamente a la dominancia estocástica de primero, segundo y tercer orden.

Así, la dominancia estocástica de primer orden asume que el inversionista prefiere más a menos, es decir, satisface el principio de no saciedad. La dominancia estocástica de segundo orden supone además que el inversionista es averso al riesgo. Finalmente, la dominancia estocástica de tercer orden considera que el inversor presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, además de las dos condiciones anteriores.

Comenzaremos por explicar el criterio de dominancia estocástica de primer orden. Para ello consideremos el ejemplo dado por la Tabla II-B, que muestra los posibles retornos de dos inversiones *A* y *B*, así como la probabilidad acumulada de cada retorno, es decir, la probabilidad de obtener un retorno igual o menor. Al graficar ambas funciones de distribución de probabilidad acumulada (Fig. II-3) observamos que la gráfica de *A* siempre coincide o es mayor que la de *B* en todos los retornos posibles, y ambas gráficas no se entrecruzan, por lo que la probabilidad acumulada de *A* nunca es mayor que la probabilidad acumulada de *B* y se dice que *A* domina estocásticamente a *B*.

	Probabilidad acumulada	
Retorno (%)	***A***	***B***
7	0	1/3
8	1/3	1/3
9	1/3	2/3
10	2/3	2/3
11	2/3	1
12	1	1

Tabla II-B. Probabilidad acumulada de dos inversiones.

En términos más formales, diríamos que –de acuerdo a la dominancia estocástica de primer orden– si los inversionistas prefieren más a menos, y si la probabilidad acumulada de *A* nunca es mayor que la probabilidad acumulada de *B* y a veces menor, entonces A es preferida a B; si $U(x)$ es la función de utilidad de un inversionista, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema (Dominancia Estocástica de Primer Orden)[15]*:* Se dice que *F* domina a *G* si:

i) El inversionista prefiere más a menos, es decir, $U'(x) > 0$.

ii) $F(x) \leq G(x)$ para todo x, y $F(x) < G(x)$ para al menos un valor, donde $F(x)$ y $G(x)$ son las funciones de distribución acumulada de *F* y *G*, respectivamente.

---

[15] Las demostraciones de suficiencia y necesidad de los teoremas de dominancia estocástica pueden consultarse en BAWA, Vigía. *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects*, Journal of Financial Economics, Vol. 2, 1975, p. 95-121.

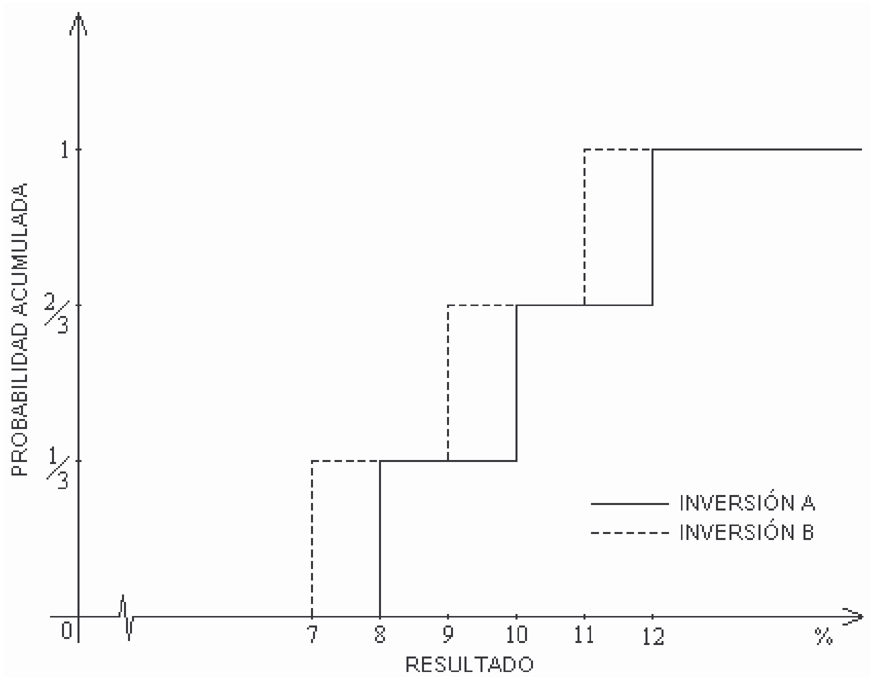


Figura II-3. Ejemplo de Dominancia Estocástica de Primer Orden.

Si en la Fig. II-3, las gráficas de *A* y *B* se entrecruzaran, el criterio de dominancia estocástica de primer orden no resulta útil para hacer una elección, y sería necesario realizar supuestos más fuertes sobre las características de la función de utilidad. Para ilustrar esta situación, consideremos el ejemplo dado por la Tabla II-C.

	Probabilidad acumulada	
Retorno (%)	***A***	***B***
5	0	1/4
6	1/4	1/4
8	1/2	1/2
9	1/2	1/2
10	3/4	3/4
12	1	1

Tabla II-C. Probabilidad acumulada de dos inversiones.

Al graficar como en el caso anterior, obtenemos la Fig. II-4, donde podemos observar que, con una probabilidad de 1/4, la opción *A* alcanza mejores rendimientos que *B*, pero con una probabilidad acumulada de 1/2 la opción *B* presenta rendimientos mayores que *A*, por lo que las gráficas se entrecruzan. Puesto que el criterio de dominancia estocástica de primer orden no resulta útil, es necesario considerar el concepto de aversión al riesgo.

Al suponer aversión al riesgo, además de no saciedad, cada incremento en los retornos es menos valioso que el anterior para el inversionista. Así, aunque un retorno de 9% sea preferible a 8%, el incremento de 8% a 9% es menos valioso que el incremento de 5% a 6%. El inversionista entonces preferirá la inversión *A*, pues obtiene un 1% extra si sucede lo peor. De acuerdo a la Fig. II-4, si el área + no es menor que el área –, entonces se dice que *A* domina a *B* por el criterio de dominancia estocástica de segundo orden.

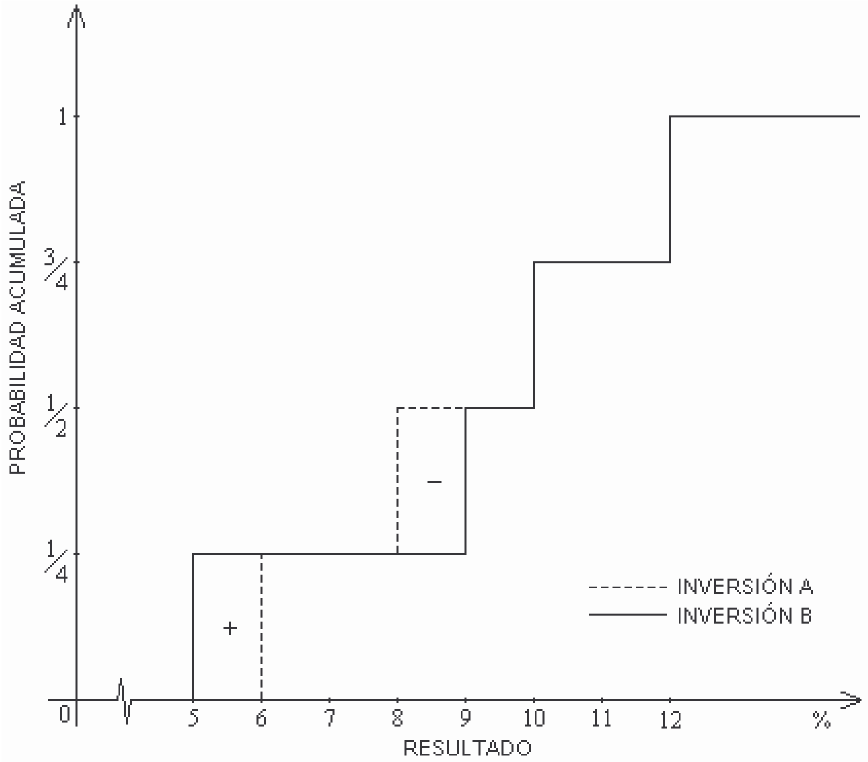


Figura II-4. Ejemplo de Dominancia Estocástica de Segundo Orden.

Formalmente, tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Dominancia Estocástica de Segundo Orden): Se dice que F domina a G si:

i) El inversionista prefiere más a menos, es decir, $U'(x) > 0$.

ii) El inversionista es averso al riesgo, esto es, $U''(x) < 0$.

iii) La suma de las probabilidades acumuladas para todos los retornos de F nunca es mayor que la de G.

Si los retornos tienen una distribución normal, la dominancia estocástica de segundo orden conduce al mismo conjunto eficiente que el criterio media-varianza. Sin embargo, puesto que el criterio de dominancia estocástica realiza comparaciones por pares, su uso se torna complicado al considerar que existe una infinidad de portafolios posibles.

Por último, la dominancia estocástica de tercer orden supone que el inversionista presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, es decir, el monto que invierte en activos riesgosos se incrementa conforme la riqueza crece. De acuerdo a lo visto en la sección 1.3.5.4, esto implica que la derivada del coeficiente de aversión absoluta al riesgo, $A'(W)$, es negativo. De acuerdo a la definición:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Al derivar con respecto a W, tenemos que:

$$A'(W) = \left(\frac{U''(W)}{U'(W)} \right)^2 - \frac{U'''(W)}{U'(W)}$$

Puesto que el inversionista prefiere más a menos, sabemos que $U'(W) > 0$, así que necesariamente $U'''(W)$ es positivo para que $A'(W) < 0$. La dominancia estocástica de tercer orden ocupa este hecho y tenemos el siguiente teorema:

Teorema (Dominancia Estocástica de Tercer Orden): Se dice que F domina a G si:

i) El inversionista prefiere más a menos, esto es, $U'(x) > 0$.
ii) El inversionista es averso al riesgo, es decir, $U''(x) < 0$.
iii) El inversionista presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, por lo que $U'''(x) > 0$.
iv) La media de F es mayor que la de G.
v) La suma acumulada de la distribución de probabilidad acumulada para todos los retornos de F nunca es mayor que la de G.

2.3.4. Modelo de Maximización de la Media Geométrica

Este criterio consiste en seleccionar simplemente aquel portafolio que tenga la mayor media geométrica esperada, sin tener que considerar la forma de la función de utilidad del inversionista o la distribución de los retornos del activo. Los autores de este criterio lo desarrollaron buscando representar lo que ellos consideraron el sentido común de cualquier inversionista, no precisamente buscando que fuera consistente con la maximización de la utilidad esperada.

Autores como Latane[16] han demostrado que el portafolio con mayor media geométrica esperada es también el que maximiza el valor esperado de la riqueza terminal. Aunque sus afirmaciones no son universalmente aceptadas, autores como Brieman[17] sostienen que maximizar la media geométrica presenta la mayor probabilidad de alcanzar o sobrepasar un nivel dado de riqueza dado cierto periodo de tiempo.

Los detractores de este criterio señalan que, en general, maximizar el valor esperado de la riqueza terminal no es lo mismo que maximizar la utilidad de la riqueza terminal[18], y aunque aceptan la idea de que los inversionistas deben maximizar la utilidad esperada de su riqueza terminal, no consideran que esto se logre a través del criterio de la media geométrica.

En resumen, aunque algunos investigadores aceptan este modelo como un criterio universal, otros consideran inaceptable el hecho de que no sea consistente con la maximización de la utilidad esperada. Habiendo discutido los argumentos a favor y en contra, revisemos la definición de media geométrica y algunas propiedades de las carteras óptimas según este criterio.

Es fácil definir la media geométrica, pues consiste en multiplicar las observaciones en vez de sumarlas, y obtener su raíz enésima en vez de dividirlas entre el número de observaciones. Formalmente, sea R_{ij} el i-ésimo retorno posible en el j-ésimo portafolio, y suponiendo que cada uno de los n retornos es igualmente probable, entonces el rendimiento medio geométrico del portafolio ($\overline{R}_{Gj}$) es:

$$\overline{R}_{Gj} = (1 + R_{1j})^{1/n}(1 + R_{2j})^{1/n}(1 + R_{3j})^{1/n} \cdots (1 + R_{1j})^{1/n} - 1$$

[16] LATANE. Henry. *Criteria for Choice among risky ventures*, Journal of Political Economy, Abril 1959, p. 144-155.
[17] BRIEMAN, Leon. *Investment Policies for expanding business optimal in a long run sense*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 7, Diciembre 1960, p. 647-651.
[18] Está demostrado que esto sólo sucede para funciones de utilidad logarítmicas, en las que el portafolio que maximiza el valor esperado es el mismo que maximiza la media geométrica.

En el caso en que las observaciones no sean equiprobables, sea P_{ij} la probabilidad del retorno i para el portafolio j, entonces el rendimiento medio geométrico es:

$$\overline{R}_{Gj} = (1 + R_{1j})^{P_{1j}} (1 + R_{2j})^{P_{2j}} \ (1 + R_{3j})^{P_{3j}} \cdots (1 + R_{1j})^{P_{Nj}} - 1$$

O bien, en su forma resumida, $\overline{R}_{Gj} = \prod_{i=1}^{n} (1 + R_{ij})^{P_{ij}} - 1$

Consideremos tres posibles inversiones A, B y C, y cada una tiene dos posibles resultados que son equiprobables. Si formamos una cartera en la que cada activo tiene la misma proporción (1/3):

Inversiones				
Resultado	*A*	*B*	*C*	*Portafolio*
1	0.70	-0.10	-0.29	0.10
2	-0.25	0.35	0.80	0.30
Media Geométrica	0.13	0.10	0.13	0.20

Tabla II-D. Tres posibles inversiones y sus resultados.

Como puede verse en la Tabla II-D, la cartera formada tiene un rendimiento medio geométrico mayor que las inversiones individualmente, lo cual se explica fácilmente por el hecho de que las medias geométricas penalizan observaciones extremas. De hecho, una estrategia de inversión con cualquier probabilidad de bancarrota jamás podría ser seleccionada puesto que tiene una media geométrica nula o igual a cero. Evidentemente, una cartera tiene menores observaciones extremas que los activos considerados individualmente, por lo que el criterio de la media geométrica generalmente conduce a una estrategia diversificada.

Aunque se espera que el portafolio que maximice la media geométrica esté altamente diversificado, generalmente éste no será eficiente desde el punto de vista del criterio media-varianza. De hecho, las carteras eficientes por criterio media-varianza pueden tener retornos medios geométricos muy bajos. Sin embargo, hay dos casos en los que el análisis media-varianza es significativo para obtener el portafolio con mayor rendimiento medio geométrico.

Primero, maximizar el rendimiento medio geométrico es equivalente a maximizar el valor esperado de una función de utilidad logarítmica., es decir, si W_1 es la riqueza al final del periodo,

$$Max \ \mathrm{E}(\ln W_1)$$

Ahora, puesto que sabemos que las funciones de utilidad son invariantes ante transformaciones lineales positivas, si W_0 es la riqueza que el inversionista puede invertir inicialmente, el problema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} Max \ \mathrm{E}(\ln W_1 - \ln W_0) &= Max \ \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{W_1}{W_0}\right)\right] \\ &= Max \ \mathrm{E}[\ln(1 + R_i)] \\ &= Max \sum_i P_i \ln(1 + R_i) \\ &= Max \sum_i \ln(1 + R_i)^{P_i} \\ &= Max \ \ln \prod_i (1 + R_i)^{P_i} \end{aligned}$$

Y esta expresión es justamente el logaritmo natural de 1 más el rendimiento medio geométrico, por lo que el portafolio con mayor rendimiento medio geométrico también será el preferido si el inversionista tiene una función de utilidad logarítmica.

Por otra parte, autores como Elton y Gruber[19] han demostrado que el portafolio que maximiza el rendimiento medio geométrico es eficiente desde el punto de vista media-varianza si los rendimientos siguen una distribución log-normal.

2.3.5. Modelos *Safety First* (Seguridad ante todo)

Bajo esta denominación se incluyen una serie de teorías, dentro de las cuales podemos encuadrar las propuestas por Roy, Kataoka y Telser. Estas teorías establecen que, una vez definido el conjunto factible del siguiente modo:

$$X = \left\{ w \in \Re^n \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geq 0, \forall\, i = 1,2,.....,n \right\}$$

el inversionista valore cada una de las carteras que lo integran en función de la esperanza y la varianza y que, tras ello, aplique el criterio de decisión E-V.

Hasta aquí, todo parece coincidir con el Modelo de Markowitz; sin embargo, la novedad se produce en la selección de la cartera definitiva, en donde estas teorías proponen seleccionar aquella cartera de la frontera eficiente que maximiza la seguridad del inversor, a diferencia de los modelos anteriores, que transforman el problema mediante la presencia de una función de utilidad.

¿Cómo maximizar la seguridad del inversionista? Cada teoría propone su propia fórmula. No obstante, todas parten de una hipótesis común que consiste en que cada inversionista fije un nivel mínimo de rentabilidad, *D*, denominado nivel de desastre, por debajo del cual no es deseable que caiga la rentabilidad real de la cartera, *R'*. Además, la probabilidad de que dicha rentabilidad real sea menor o igual al nivel de desastre está acotada superiormente:

$$P(R' \leq D) \leq \frac{V(R_P)}{[E(R_P) - D]^2}$$

A continuación analizaremos los diferentes mecanismos que cada una de ellas propone para buscar esa protección ante el riesgo; como en el caso de la maximización de la media geométrica, las carteras que optimizan un criterio S*afety First* a menudo pertenecen al conjunto eficiente.

2.3.5.1. El Modelo de Roy

El criterio *Safety First* de Roy[20] (1952) es una técnica de administración de riesgo que plantea seleccionar entre las carteras del conjunto eficiente X_E aquel portafolio que minimice la probabilidad de que el rendimiento real del portafolio sea menor o igual a un objetivo mínimo deseado, o un margen de seguridad especificado de antemano.

En otras palabras, digamos que el nivel mínimo de rendimiento que el inversionista esta dispuesto a tolerar es -1.00 %. Ante diversas estrategias de inversión disponibles, el inversor tomará el portafolio que presente la mayor probabilidad de que el retorno neto sea mayor (o igual) a -1.00 %.

---

[19] ELTON, Edwin J. GRUBER, Martin J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 5° ed., John Wiley & Sons Inc., E.U., 1995.

[20] ROY, A.D. *Safety First and the Holding of Assets*, Econométrica, Vol. 20, No. 3, Julio 1952, p.431-449.

El criterio de Roy puede ser resumido del modo siguiente:

$$\underset{x \in X_E}{Min}\ P(R_P \leq D)$$

lo que equivale a

$$\underset{x \in X_E}{Min}\ \frac{\mathrm{Var}(R_P)}{[\mathrm{E}(R_P) - D]^2}$$

donde R_P es la variable aleatoria que representa el rendimiento real del portafolio
D es el rendimiento mínimo deseado, a menudo referido como *nivel de desastre*

Si se supone que los rendimientos de los activos que componen el portafolio tienen una distribución normal, el criterio de Roy consiste en el siguiente problema:

$$Min\ \frac{D - \mathrm{E}(R_P)}{\sigma_P}$$

Lo anterior equivale a maximizar lo que llamaremos *Razón Safety First (RSF)*, y el problema se define del modo siguiente:

$$Max\ RSF$$

considerando que

$$RSF = \frac{\mathrm{E}(R_P) - D}{\sigma_P}$$

donde $E(R_P)$ es el rendimiento esperado del portafolio (o rendimiento histórico promedio)
σ_P es la desviación estándar de los rendimientos históricos del portafolio

Así que, supongamos que un inversionista está dispuesto a tolerar como mínimo un retorno de 0% en su inversión. Se presentan dos alternativas: (a) el portafolio A tiene un rendimiento esperado de 10% y una desviación estándar de 15%, y (b) el portafolio B tiene un rendimiento medio de 8% y una desviación estándar de 5%. Calculamos la Razón *Safety First* de cada uno:

$$RSF_A = \frac{0.10 - 0.00}{0.15} = 0.6667 \qquad RSF_B = \frac{0.08 - 0.00}{0.05} = 1.6000$$

Siguiendo el criterio *Safety First* de Roy, se debe elegir el portafolio B como la oportunidad de inversión correcta.

Bajo el criterio de Roy, todas las carteras que son igualmente deseables tendrán la misma *RSF*, por lo que podrían ser descritas por la siguiente expresión:

$$\frac{\mathrm{E}(R_P) - D}{\sigma_P} = K$$

Además, la cartera es más deseable mientras mayor sea K. Si despejamos $\mathrm{E}(R_P)$, tenemos:

$$\mathrm{E}(R_P) = D + K\sigma_P$$

Ésta es la ecuación de una línea con ordenada al origen D y pendiente K. Así, todas las carteras igualmente deseadas (es decir, con la misma K) se sitúan en una línea recta, y la mejor es aquella con mayor pendiente, como se muestra en la Fig. II-5.

En la figura anterior, las K's están ordenadas de tal modo que $K_4 > K_3 > K_2 > K_1$. Nótese que el portafolio eficiente bajo este criterio se encuentra en la recta de mayor pendiente, y si D es el rendimiento esperado de un activo libre de riesgo, el criterio de Roy con rendimientos distribuidos normalmente produce la misma decisión quede el Modelo de Tobin[21]. Es decir, la cartera seleccionada bajo el criterio de Roy es eficiente en el sentido de Markowitz y resulta de la tangencia entre la frontera eficiente y una recta que parte de la cartera con rentabilidad esperada igual a D y varianza nula.

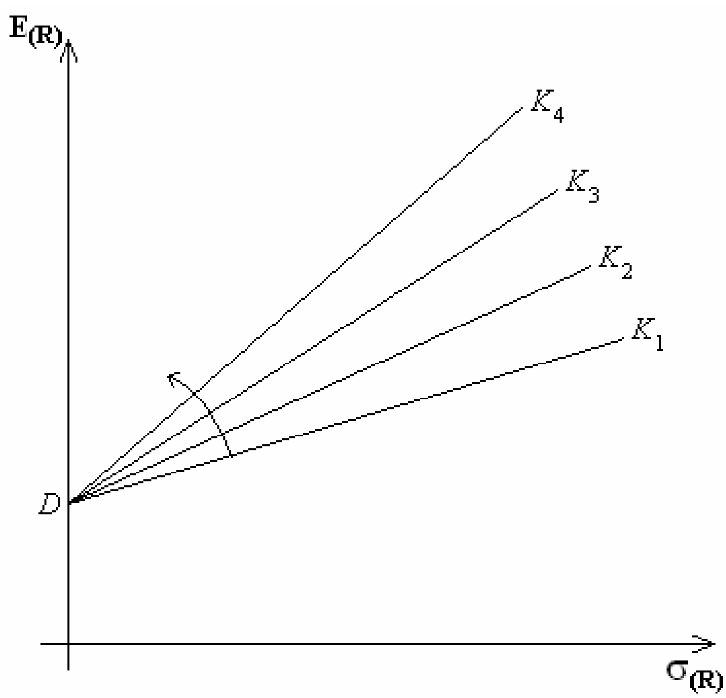


Figura II-5. Carteras igualmente deseadas para cuatro niveles de *K*.

2.3.5.2. El Modelo de Kataoka

Por su parte, el criterio de Kataoka[22] o criterio p-fractil fue introducido en 1963 por Kataoka, quien propone, para maximizar la seguridad, realizar una modificación en el modelo anterior. Dicha modificación consiste en buscar aquella cartera de la frontera eficiente que maximiza el nivel de desastre D, una vez fijada la probabilidad α de obtener una rentabilidad inferior a dicho nivel, es decir,

$$\underset{x \in X_E}{Max}\, D$$

sujeto a

$$P(R_P < D) \leq \alpha$$

lo que resulta equivalente a

$$\underset{x \in X_E}{Max}\, D$$

---

[21] Ver la sección 3.2.
[22] KATAOKA, S. *A Stochastic Programming Model*, Econométrica, Vol. 31, No. 1-2, Enero-Abril 1963, p.181-196.

sujeto a

$$\frac{\mathrm{Var}(R_P)}{[\mathrm{E}(R_P) - D]^2} \leq \alpha$$

Si fijamos una D inferior a la rentabilidad esperada, o sea, $\mathrm{E}(R_P) - D > 0$, la restricción

$$\frac{\mathrm{Var}(R_P)}{[\mathrm{E}(R_P) - D]^2} \leq \alpha$$

se convertiría en

$$D \leq \mathrm{E}(R_P) - \frac{\sigma(R_P)}{\sqrt{\alpha}}$$

y como, además, se desea que D sea tan grande como sea posible, esta desigualdad puede escribirse en forma de igualdad:

$$D = \mathrm{E}(R_P) - \frac{\sigma(R_P)}{\sqrt{\alpha}}$$

con lo cual la resolución del problema planteado equivaldría a

$$\underset{x \in X_E}{Max} \quad \mathrm{E}(R_P) - \frac{\sigma(R_P)}{\sqrt{\alpha}}$$

Si en vez de despejar D despejamos $\mathrm{E}(R_P)$, tenemos:

$$\mathrm{E}(R_P) = D + \frac{\sigma(R_P)}{\sqrt{\alpha}}$$

Ésta es la ecuación de una línea recta con ordenada al origen igual a D. Si el objetivo es maximizar D, tendríamos diversas rectas paralelas para cada valor de D, como se puede ver en la Fig. II-6. Como en el caso del criterio de Roy, el portafolio óptimo coincide con la frontera eficiente del modelo media-varianza.

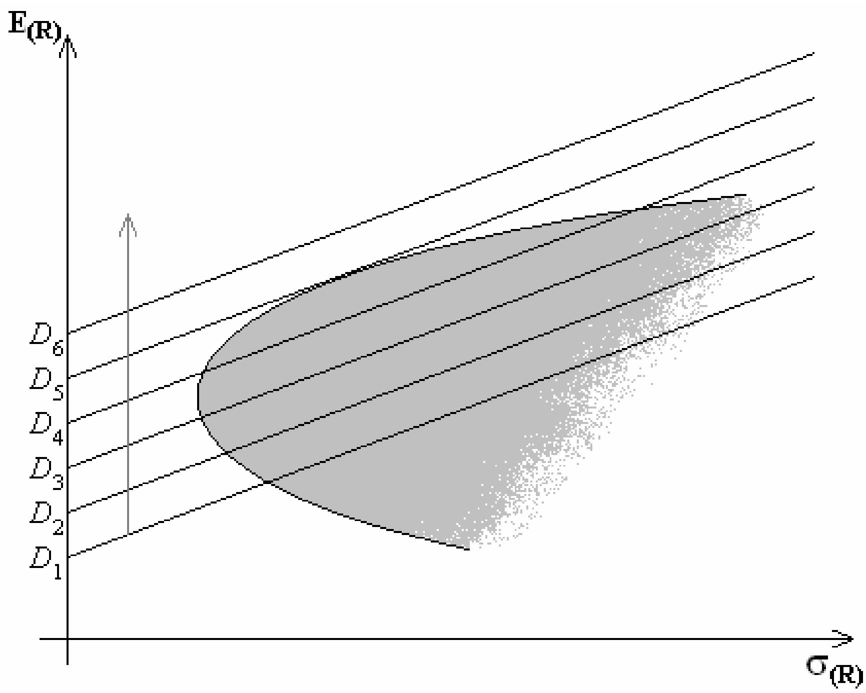


Figura II-6. Diferentes niveles de desastre en el criterio de Kataoka.

2.3.5.3. El Modelo de Telser

A diferencia de Kataoka, Telser[23] propone que el inversionista seleccione aquella cartera de la frontera eficiente que maximiza la rentabilidad esperada una vez fijada la probabilidad α de obtener una rentabilidad real igual o inferior al nivel de desastre, o sea:

$$Max\ \mathrm{E}(R_P)$$

sujeto a

$$P(R_P \leq D) \leq \alpha$$

y en donde la restricción $P(R_P \leq D) \leq \alpha$, al ser equivalente a

$$\frac{\mathrm{Var}(R_P)}{[\mathrm{E}(R_P) - D]^2} \leq \alpha$$

también puede escribirse como

$$\mathrm{Var}(R_P) \leq \alpha[\mathrm{E}(R_P)]^2 - 2\alpha\mathrm{E}(R_P)D + \alpha D^2$$

Con el criterio de Telser, el portafolio óptimo escogido es también eficiente con el criterio media-varianza, o no existe.

2.3.5.4. Estimación de probabilidades en los modelos anteriores

---

[23] TELSER, L.G. *Safety First and Hedging*, Review of Economic Studies, Vol. 23 (1), No. 60, 1955-56, p. 1-16.

¿Cómo estimar las probabilidades en caso de no suponer una distribución normal? Berck, Hihn y Atwood sugirieron métodos en 1982 para estimar dichas probabilidades aún sin tener conocimiento o estimaciones empíricas de la función de distribución acumulada de los rendimientos. Su punto de partida es la desigualdad de Tchebyshev, la cual puede ser usada para calcular límites de probabilidad aún cuando la única información disponible es la media y varianza poblacionales.

La desigualdad de Pafnuty Tchebyshev es un resultado estadístico que ofrece una cota inferior a la probabilidad de que el valor de una variable aleatoria con varianza finita esté a una cierta distancia de su esperanza matemática o de su media; equivalentemente, el teorema proporciona una cota superior a la probabilidad de que los valores caigan fuera de esa distancia respecto de la media. Debido a que este teorema hace suposiciones muy débiles sobre la distribución de probabilidad, el teorema es aplicable incluso en distribuciones que no tienen forma de curva de campana y acota la cantidad de datos que están o no en medio.

Teorema (Desigualdad de Tchebyshev): Sea X una variable aleatoria de media μ y varianza finita σ^2. Entonces, para todo número real $k > 0$,

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Sólo los casos con $k > 1$ proporcionan información útil.

Una consecuencia del teorema es que para cada distribución de media μ y desviación típica finita σ, al menos la mitad de los valores caerán en el intervalo $(\mu - \sqrt{2}\sigma, \mu + \sqrt{2}\sigma)$. Estas cotas, en general, no se pueden mejorar, pero aunque es posible construir una variable aleatoria cuyas cotas de Tchebyshev sean exactamente iguales a las probabilidades reales, en general el teorema proporcionará cotas poco precisas.

El teorema puede ser útil a pesar de las cotas imprecisas porque se aplica a una amplia gama de variables que incluye las que están muy alejadas de la distribución normal, y porque las cotas son fáciles de calcular.

Cuando la distribución de los pagos es asimétrica, Berck y Hihn sugieren una forma diferente de estimar los límites de probabilidad el cual se basa en la media y la semivarianza como medida de riesgo teóricamente más atractiva que la varianza, de acuerdo al enfoque de Markowitz en el que sólo las desviaciones por debajo de la media deben ser elevadas al cuadrado[24].

La desigualdad correspondiente es

$$P(|X \leq \mu| - \bar{\sigma}) < \frac{1}{m^2}$$

donde $\bar{\sigma}$ es la raiz cuadrada de la semivarianza de los pagos y m es una constante mayor que cero.

Atwood sugiere una medida más general, pues dice que el problema principal con una medición de la probabilidad de riesgo es que no refleja la profundidad del desastre pues la medida de riesgo es la misma sin importar si la caída debajo del nivel esperado es muy grande o muy pequeña. Una reducción en los resultados que casi caiga debajo del nivel de tolerancia no cambiará la probabilidad de riesgo aún cuando debería ser percibida como un incremento en el riesgo general.

Cuando la distribución de probabilidad de los resultados –y, por tanto, la probabilidad de pérdida-no es conocida, Roy sugiere utilizar un límite superior basado en la desigualdad de Tchebyshev.

---

[24] Como se describe en el modelo Esperanza-Semivarianza.

2.3.6. Otros modelos

Otro modelo a destacar es el de Konno y Yamazaki (1991), que sustituye la varianza por la desviación absoluta media, una medida del riesgo que cuenta con la ventaja de que no se requiere distribución de probabilidad para las tasas de rendimiento, y que además se transforma dando lugar a un problema de programación lineal.

Frente a estos modelos encontramos los modelos de maximización de la utilidad esperada de la riqueza, que constituyen el referente teórico de la elección racional con incertidumbre. La hipótesis básica es que el inversor tiene preferencias racionales representables mediante una función de utilidad al estilo Von Neumann y Morgenstern que depende de la riqueza terminal, $U(W)$: $R \rightarrow R$.

Una cuestión muy debatida ha sido la consistencia del modelo media-varianza con la teoría de la elección racional, que en principio se da para una distribución conjunta de rendimientos normal multivariante y una función de utilidad exponencial cóncava o con funciones de utilidad cuadráticas, que no son aceptables, así como en general las funciones polinómicas, si se quiere reflejar conjuntamente los axiomas deseables de no saciedad y aversión absoluta al riesgo decreciente.

En general, como condición necesaria, el modelo media-varianza resulta consistente con distribuciones elípticas: normal multivariante, exponencial multivariante, Cauchy multivariante, etc. Dichas distribuciones se caracterizan sólo por dos parámetros, una medida central o de localización y una medida de dispersión o escala, lo que resulta suficiente para la consistencia, y en todo caso son distribuciones simétricas. Otra línea argumental trata de refrendar el modelo media-varianza como aproximación lineal/cuadrática a funciones de utilidad [Levy y Markowitz (1979)]. En todo caso el modelo media-varianza es una aproximación razonable de segundo orden para carteras bien diversificadas si el rendimiento total esperado de la cartera es conocido y la variación del rendimiento total respecto del esperado baja.

Algunos autores han propuesto seleccionar portafolios con base en los tres primeros momentos de la distribución de los rendimientos, en vez de sólo los dos primeros (media y varianza). El tercer momento, llamado asimetría, es una medida del sesgo de una distribución; así, la distribución normal tiene asimetría igual a cero, pues la forma de la distribución sobre la moda es una imagen en espejo de la forma debajo de la moda. La distribución log-normal, en cambio, tiene más observaciones sobre la moda que debajo de ella, por lo que se dice que está sesgada positivamente o exhibe asimetría positiva.

Si el inversionista considera los primeros tres momentos, entonces el problema de selección de portafolios se representa en un espacio tridimensional en el que la frontera eficiente será la 'concha' o superficie exterior del conjunto factible con mayor rendimiento medio, mínima varianza y máxima asimetría. Como la varianza, la asimetría de un portafolio no es simplemente el promedio ponderado de la asimetría de sus componentes, sino que depende también de su movimiento conjunto, lo que obliga a realizar un gran número de estimaciones.

Alternativas a los modelos citados son los llamados *Modelos borrosos*[25], que requieren medidas borrosas a partir de datos históricos y la experiencia de gestores expertos, así como la consideración de escenarios y su aplicación en optimización robusta, con bases en la programación por objetivos y la consideración de restricciones débiles[26]. Aunque tratar distintos escenarios ha sido tradicional en la gestión científico-empresarial, y la idea ya estaba presente en los estados de la naturaleza de la Teoría de la Utilidad de Von Neumann y Morgenstern, en selección de cartera no tuvieron su impulso hasta el Modelo de Escenarios y Factores de Markowitz y Perold (1981). Modelos como el de Hanoch y

[25] TANAKA Y GUO, 1999.
[26] MULVEY, VANDERBEI y ZENIOS, 1995.

Levy[27] consideran –además de la rentabilidad esperada y el riesgo- un tercer atributo, el cual es el tercer momento (μ_3) de la distribución de probabilidad de los retornos.

El uso de las técnicas de Investigación de Operaciones y optimización robusta en la toma de decisiones permite considerar directamente la aversión al riesgo[28], siendo esta una de sus ventajas frente a la programación estocástica con escenarios. En la aplicación a la planificación y gestión financiera de modelos de optimización cabe mencionar, entre otros:

- El Modelo de Inmunización por Escenarios de Dembo (1992), que es un caso particular de optimización robusta.
- El Modelo de Escudero (1995) sobre carteras de activos con respaldo hipotecario.
- El Modelo de Ballestero y Romero[29], que propone usar Programación Compromiso al considerar desconocida la función de utilidad.
- Modelos de selección de carteras que utilizan Programación por Metas, como el de Lee y Lerro[30] o el de Tamiz, Hasham y Jones[31].
- El Modelo de Gestión de Tesorería de Golub y otros (1994).
- El Modelo de carteras *Callable Bond* de Vassiadou-Zeniou y Zenios (1996).

2.3.6.1. Una medida de riesgo para distintos modelos

Hemos visto que una de las principales diferencias entre los distintos modelos que han sido expuestos es la forma de cuantificar el riesgo. Así, la medida del riesgo que se considere es importante ya que de ella depende en gran parte el diseño del modelo matemático de selección de cartera dada la distribución de rentabilidades.

En general, el riesgo surge como consecuencia de la incertidumbre en el resultado y suele considerarse mediante la probabilidad de conseguir resultados distintos a los esperados dada una posición de partida. Si se considera más de una fuente de incertidumbre, el riesgo se transforma en un vector multidimensional, lo que a nivel de modelización lleva a considerar diversos factores de riesgo: riesgo operativo, riesgo de precio, riesgo de tipo de interés, riesgo de volatilidad, riesgo sectorial, riesgo de crédito, riesgo de liquidez, riesgo de cambio, etc. No hay que olvidar que en cada activo financiero cabe diferenciar entre un riesgo general o de mercado y un riesgo específico o residual. Además, cuando se considera más de un factor de riesgo hay que determinar si su efecto es aditivo o multiplicativo, lo que puede resultar de suma importancia.

En la teoría clásica de las finanzas el riesgo ha tenido una consideración arbitraria (primas de riesgo en tasas de descuento, penalización por riesgo en los rendimientos esperados futuros, etc.), pero lo mas habitual es la consideración de la varianza de la cartera, obtenida como una forma cuadrática cuya matriz simétrica es la matriz de varianzas-covarianzas de las rentabilidades, o en su caso la desviación estándar.

Otras medidas del riesgo de la cartera son la desviación absoluta total y la desviación absoluta media, que utiliza el vector de medias muestrales y las realizaciones muestrales del vector de rendimientos, y que a nivel poblacional equivale al modelo media-varianza al ser la desviación

---

[27] HANOCH, G. y LEVY, H. *Efficient Portfolio Selection with Quadratic and Cubic Utility*, Journal of Business, Vol. 43, No. 2, Abril 1970, p. 181-189.
[28] BAI, CARPENTER y MULVEY, 1997.
[29] BALLESTERO, E. y ROMERO, C. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 47, No. 11, 1996, p. 1377-1386.
[30] LEE, S.M. y LERRO, A.J. *Optimizing the Portfolio Selection for Mutual Funds*, Journal of Finance, Vol. 28, No. 5, Diciembre 1973, p. 1087-1101.
[31] TAMIZ, M., HASHAM, R. y JONES, D.F. *A Two-Staged Goal Programming Model for Portfolio Selection*, Multi Objective and Goal Programming Lectures, Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 432, Berlin, p. 286-299.

absoluta media de la distribución normal proporcional a la desviación estándar. Igualmente, destaca la Beta –que será revisada a detalle posteriormente, sobre todo si es importante considerar el riesgo sistemático, siendo la misma una función lineal de las Betas de los activos considerados.

Las distribuciones asimétricas ya fueron tratadas por Markowitz, quien proponía el modelo media-semivarianza, estando ya presente la idea en el criterio *Safety First* de Roy. El tratamiento asimétrico del riesgo es apropiado para carteras con opciones, activos con respaldo hipotecario, y también para factores de riesgo con distribución asimétrica. Además de la semivarianza existen otras medidas del riesgo de dominio parcial inferior, o *Downside Risk*, que consideran sólo rendimientos por debajo de un determinado nivel crítico.

La mayor parte de medidas del riesgo que se manejan en selección de cartera se pueden englobar en la fórmula:

$$L_\alpha(\tau, T) = \int_{-\infty}^{\tau} \left|R - T\right|^\alpha dF(R)$$

donde

F(R)	es la función de distribución de los rendimientos
T	es el nivel mínimo aceptable, nivel de desastre, o un objetivo preestablecido para los mismos, que incluso puede ser un índice
τ	puede ser ∞ si la medida es de dominio global o puede ser *T* si es una medida de dominio parcial
$\alpha \in [0, \infty)$	es un parámetro de importancia relativa de las desviaciones, tal que $\alpha > 1$ supone aversión al riesgo, y para dominio estocástico de grado *n* se exige que $\alpha \geq n$-1.

Sin embargo, existen medidas del riesgo que no quedan recogidas directamente en dicha fórmula, como las medidas lineales-cuadráticas por subdominios de King (1995), que además toma como τ = T el máximo rendimiento.

En la práctica existen muchos y sofisticados métodos más allá de la simple obtención a partir de datos históricos que establece el riesgo en función de errores de predicción pasados que hay que minimizar. No obstante, cabe recordar que el vector de medias muestrales y la matriz de covarianzas muestrales son estadísticos suficientes para distribuciones normales conjuntas.

2.4. REVISIÓN DE LA CARTERA

Una vez seleccionada la cartera, resulta lógico que el inversionista desee mantenerla durante cierto tiempo. A medida que transcurre dicho periodo de tenencia, la combinación de títulos seleccionada puede perder atractivo debido a cambios en el entorno y en los objetivos del inversionista, por lo que resulta importante incluir esta última etapa, en la cual se dará seguimiento a la cartera para adaptarla a estos cambios. A su vez, se origina un proceso continuo de retroalimentación, en el que las primeras etapas de la gestión de carteras comienzan de nuevo en un ciclo que no termina sino hasta la liquidación del portafolio.

Entre los aspectos que pueden interesar al inversionista se encuentran, por ejemplo, el grado de diversificación que ha alcanzado, o aspectos más globales, como el nivel de realización de sus objetivos. ¿Cómo lograrlo? Una buena opción es realizar un proceso de comparación, ya sea contrastando la cartera con su situación en el pasado (comparación subjetiva) o comparándola con otros portafolios ajenos al nuestro (comparación directa u objetiva), lo que a menudo brinda resultados más interesantes.

2.4.1. La Comparación Directa

Este tipo de evaluación de portafolios consiste en tres comparaciones posibles: contra carteras aleatorias (comparación directa), carteras profesionales o contra índices diseñados para este efecto.

De ellas, la primera consiste en contrastar el portafolio seleccionado con otra cartera construida a partir de ciertos títulos integrantes de un determinado índice; por su parte, la comparación con carteras profesionales (como los fondos de inversión) es muy habitual en la prensa financiera especializada.

Para la comparación con un índice determinado, se cotejan la rentabilidad y riesgo de nuestra cartera con los alcanzados por algún índice representativo del mercado, que puede ser el Índice de Sharpe, el de Treynor, el de Jensen y la M^2 de Modigliani. Aunque estos índices utilizan la prima de riesgo (la rentabilidad adicional que percibe la cartera en función del riesgo que soporta) para medir la rentabilidad, se distinguen uno del otro por la medida de riesgo que utilizan.

2.4.1.1. El Índice de Sharpe

La razón o índice de Sharpe (S_P) debe su nombre a su creador, William Forsyth Sharpe[32], y surge en 1966 como una medida del rendimiento por unidad de riesgo asumido; es decir, indica en qué medida el rendimiento del activo compensa al inversionista por el riesgo que asume. Se define como el cociente entre la prima de riesgo, $E(R_P - R_F)$, y el riesgo soportado por la cartera, medido por su desviación estándar:

$$S_P = \frac{E\,(R_P - R_F)}{\sigma(R_P)}$$

donde

- R_P es la variable aleatoria que representa el rendimiento del portafolio.
- R_F es la tasa de rendimiento de un activo libre de riesgo vigente en la evaluación
- $E(R_P - R_F)$ es el valor esperado de exceso del rendimiento del activo riesgoso sobre el activo libre de riesgo
- $\sigma(R_P)$ es la desviación estándar de la cartera, como medida de riesgo

Aunque el mismo Sharpe hizo notar en 1994 que la tasa libre de riesgo cambia con el tiempo, antes de dicha revisión su definición era la siguiente, asumiendo R_{LR} constante:

$$S_P = \frac{E\,(R_P) - R_F}{\sigma(R_P)}$$

Cuando se comparan dos activos o portafolios, se debe escoger el que presente mayor razón de Sharpe de acuerdo a este criterio, lo que permite medir el grado de deseabilidad de la cartera. El criterio de Roy es bastante similar al de Sharpe; incluso, para rendimientos con distribución normal, la alternativa con la razón *Safety First* mayor es también la que presenta la mayor razón de Sharpe.

Existe una gran disparidad de opiniones en lo que respecta a la validez de este indicador, pues mientras algunos autores indican que esta razón falla y no aporta información confiable, otros consideran que su validez aumenta a medida que los intervalos de tiempo usados son menores.

2.4.1.2. El Índice de Treynor

---

[32] SHARPE, W.F. *The Sharpe Ratio*, Journal of Portfolio Management, No. 20, Otoño 1994, p. 49-58. *Mutual Fund Performance*, Journal of Business, Vol. 39, Enero 1966, p. 119-138.

Treynor[33] retomó el Índice de Sharpe y propuso cambiar la medida de riesgo y usar la β en lugar de la desviación estándar:

$$\mathrm{T}_P = \frac{\mathrm{E}(R_P) - R_F}{\beta_P}$$

Donde T_P es el Índice de Treynor.
$\mathrm{E}(R_P)$ es la rentabilidad media de la cartera.
R_F es la tasa libre de riesgo.
β_P es el coeficiente de volatilidad o medida del riesgo sistemático de la cartera.[34]

Al igual que el Índice de Sharpe, esta razón permite medir la deseabilidad de una cartera; así, la combinación de títulos con mayor Índice de Treynor será la mejor.

El Índice de Treynor, a veces llamado razón premio-volatilidad, tampoco está exento de críticas, sobre todo por la dificultad para estimar el coeficiente β; por ejemplo, las carteras no diversificadas (carteras con el mismo riesgo sistemático pero diferente riesgo total) obtendrían la misma evaluación, a pesar de que su riesgo específico sea mayor.

2.4.1.3. El Índice de Jensen

Este indicador, propuesto por Michael Jensen en los setentas, mide la distancia que existe entre el valor real de una cartera y el valor que tendría si el mercado estuviera en equilibrio. Por ello, si un inversionista dispone de distintos portafolios en los que poder invertir, le interesará aquel que presente la máxima diferencia positiva entre la rentabilidad real y la esperada en un mercado en equilibrio, es decir, el más infravalorado.

Para medir esa distancia, Jensen propone emplear un índice J_P, definido como la diferencia entre la rentabilidad real $\mathrm{E}'(R_P)$ y la teórica[35] $\mathrm{E}(R_P)$, es decir,

$$\mathrm{J}_P = \mathrm{E}'(R_P) - \mathrm{E}(R_P)$$

de modo que, a mayor valor del índice, mejor será el portafolio (y viceversa). La expresión anterior permite clasificar a los activos financieros en superiores ($\mathrm{J}_P > 0$), neutros ($\mathrm{J}_P = 0$) o inferiores ($\mathrm{J}_P < 0$). Sea $\mathrm{E}(R_M)$ la rentabilidad esperada del mercado, al sustituir la expresión de J_P por el valor real del activo según el CAPM, tenemos que:

$$\mathrm{J}_P = [\mathrm{E}'(R_P) - R_F] - \beta_P\, [\,\mathrm{E}(R_M) - R_F]$$

Si dividimos ambos miembros entre β_P, obtenemos el llamado Índice de Jensen Modificado (J_P^M):

$$\mathrm{J}_P^M = \frac{\mathrm{J}_P}{\beta_P} = \frac{[\mathrm{E}'(R_P) - R_F]}{\beta_P} - [\mathrm{E}(R_M) - R_F]$$

Este nuevo índice es una medida de la diferencia entre la razón premio-volatilidad obtenida realmente por la cartera P y la que ofrece el mercado, pues $\beta_M = 1$; mientras mayor sea, el portafolio será mejor.

2.4.1.4. La M² de Modigliani

[33] TREYNOR, J.L. *How to rate Management of Investment Funds*, Harvard Business Review, Vol. 43, Enero-Febrero 1965, p. 63-75.
[34] El coeficiente beta (β_P) es estudiado a detalle en la Sección 3.2.
[35] Para medir la rentabilidad teórica generalmente se usa la LMC, del Modelo CAPM (véase la Sección 3.4.1.1.).

En 1997, Franco y Leah Modigliani[36] crean una variante del Índice de Sharpe que busca tener una interpretación económica más fácil. Para ello, combinan una cartera P con un activo libre de riesgo, hasta obtener una cartera P^* de igual volatilidad que la del mercado M. Si $E(R_{P^*})$ representa la rentabilidad media de la cartera P^*, y $E(R_P)$ la rentabilidad esperada de la cartera de mercado, la M^2 se define del siguiente modo:

$$M^2 = E(R_{P^*}) - E(R_M)$$

Esta medida se interpreta como la distancia vertical entre P^* y M.

2.4.2. Evaluación de la Diversificación de una Cartera

Las medidas que han sido expuestas en las secciones anteriores evalúan los resultados obtenidos por nuestra cartera en función de su rentabilidad y riesgo; no obstante, el inversionista podría estar interesado en otros aspectos de la gestión de su cartera, tales como el grado de diversificación.

El Modelo de Mercado de Sharpe[37] trata de explicar el comportamiento de la rentabilidad de un activo o cartera por medio de una regresión lineal que tiene como variable explicativa a la rentabilidad del mercado. Sin embargo, es común que las observaciones reales difieran de las que proporciona la recta de regresión, por lo que resulta conveniente utilizar alguna medida de la bondad del ajuste, que permita determinar qué proporción de la variable dependiente es realmente explicada por su relación lineal con la variable independiente.

Esta medida puede ser el coeficiente de determinación R^2, el cual se define como el cuadrado del coeficiente de correlación ρ, es decir:

$$R^2 = (\rho)^2 = \left[\frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma(R_i)\sigma(R_M)} \right]^2$$

Ya que $\mathrm{Cov}(R_i, R_M) \leq \sigma(R_i)\sigma(R_M)$, sabemos que $0 \leq \rho \leq 1$, y por lo tanto, el coeficiente de determinación R^2 también oscila entre 0 y 1, es decir, $0 \leq R^2 \leq 1$.

El coeficiente de determinación R^2 indica el porcentaje de la variabilidad de la rentabilidad del activo (variable dependiente) que es explicado por el modelo. Así, a medida que R^2 se aproxime más a la unidad, la capacidad explicativa del modelo ajustado será mayor, y viceversa.

Este coeficiente también puede ser útil para medir el grado de diversificación de la cartera; de este modo, a medida que R^2 se acerca más a uno, las variaciones de R_i son mejor explicadas por su relación lineal con R_M, y el riesgo sistemático cobra más importancia que el riesgo específico. En el caso extremo en que R^2 es igual a uno, el riesgo específico o no diversificable habrá desaparecido, lo que significaría que la cartera está perfectamente correlacionada.[38]

---

[36] MODIGLIANI, F. y MODIGLIANI, L. *Risk-Adjusted Performance*, Journal of Portfolio Management, Invierno 1997, p. 45-54.

[37] Véase la Sección 3.2.

[38] Por otra parte, puesto que mide la bondad del ajuste, el coeficiente de determinación R^2 también sirve para medir la validez del coeficiente β (a mayor R^2, mayor validez de β), lo que permite orientarnos sobre la confianza en las predicciones de rentabilidad y riesgo que puedan deducirse del Modelo de Mercado. Sin embargo, la bondad de las predicciones estará condicionada a que todo siga igual, por lo que la confianza en ellas debe disminuir a medida que se refieran a periodos de tiempo más alejados.

CAPÍTULO III
EL ENFOQUE TRADICIONAL: MARKOWITZ, TOBIN Y SHARPE

Los modelos integrantes de la Teoría de Cartera nacieron después de la Segunda Guerra Mundial, cuando el fuerte crecimiento económico y los cambios en la tecnología y en los mercados originaron la necesidad de encontrar nuevos criterios sistemáticos y fiables de selección de inversiones.

Dentro de ellos, son fundamentales las aportaciones realizadas por Markowitz, Tobin y Sharpe, las cuales constituyen el origen del enfoque tradicional de la Teoría de la Cartera.

3.1. EL MODELO DE MARKOWITZ (MODELO MEDIA-VARIANZA)

La primera contribución importante a la hora de orientar al inversionista en la construcción de su cartera óptima se remonta a 1952, cuando Markowitz[1] plantea un modelo cuyo objetivo consiste en buscar aquella combinación de títulos que maximiza la utilidad esperada de su rendimiento al final del periodo de la inversión.

La originalidad de esta investigación reside en el hecho de que, al considerar la utilidad esperada como una función dependiente de la esperanza matemática y de la varianza de la variable aleatoria R_P que describe el rendimiento previsto de la cartera, la elección girará en torno a esos dos primeros momentos de la distribución de probabilidad: la esperanza o rendimiento medio, y la varianza.

Los supuestos de este modelo son:

I. La inversión se da en un periodo finito de tiempo.
II. Los inversionistas se encuentran presionados por fuerzas de sentido opuesto: su deseo de obtener ganancias y su aversión al riesgo. Sin embargo, la racionalidad de su conducta los lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo, y para un determinado nivel de riesgo prefieren la rentabilidad más alta posible. Su aversión al riesgo se refleja en el hecho de que su utilidad marginal es decreciente.
III. Los rendimientos de los precios de activos financieros son una variable aleatoria y, por lo tanto, la rentabilidad de cualquier titulo o cartera, es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocida para el inversionista y se supone normal. El valor medio o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión, y se acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la varianza o la desviación estándar, de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, ya sea de un valor individual o de una cartera.
IV. El mercado es de competencia perfecta.
V. Todos los títulos son negociables –sea en largo o en corto– e infinitamente divisibles.
VI. Las comisiones, impuestos y costos de transacción son despreciables o nulos.

De este modo, y teniendo en cuenta que los rasgos fundamentales que definen a todo inversionista racional son el deseo de ganancias y la insatisfacción que le produce el riesgo, la esperanza matemática o rendimiento medio de R_P se considera como medida de la rentabilidad de la cartera, mientras que su varianza se acepta como medida del riesgo.

Una vez establecidos estos parámetros, Markowitz propone desarrollar la búsqueda de la cartera óptima en dos etapas: determinación de la frontera eficiente y selección de la cartera óptima.

3.1.1. El Criterio Esperanza-Varianza (E-V)

Como se mencionó en la introducción, la teoría de carteras permite evaluar bajo criterios técnicos, cuánto se debe invertir en cada sector (emisor) para que ante una eventualidad que genere pérdidas

[1] MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, No. 7, Marzo 1952, p. 77-91.

existan otros sectores que compensen ese deterioro de la inversión; es decir, consiste en determinar la estrategia de gestión que se seguirá para distribuir la inversión entre las diferentes categorías de activos, buscando satisfacer las necesidades y expectativas del inversionista de acuerdo a su propio perfil. Básicamente, la selección de dicha estrategia se basa en el análisis de dos componentes elementales en una inversión: rendimiento y riesgo.

Basados en estos dos componentes, resulta útil plantear un plano bidimensional donde el eje de las ordenadas corresponda a distintos niveles de riesgo –denotado por $\sigma(R_P)$, mientras que el eje de las abcisas corresponda a los diferentes rendimientos esperados, que denotaremos por $E(R_P)$. Este plano recibe el nombre de *espacio riesgo-rendimiento*.

Ahora, consideremos dos carteras de inversión diferentes (A y B). Sean

$\sigma(R_A)$	el riesgo esperado del portafolio de inversión A
$E(R_A)$	el rendimiento esperado del portafolio de inversión A
$\sigma(R_B)$	el riesgo esperado del portafolio de inversión B
$E(R_B)$	el rendimiento esperado del portafolio de inversión B

Al situar ambas carteras distintas en el espacio riesgo-rendimiento, se establecen los siguientes criterios de predominancia:

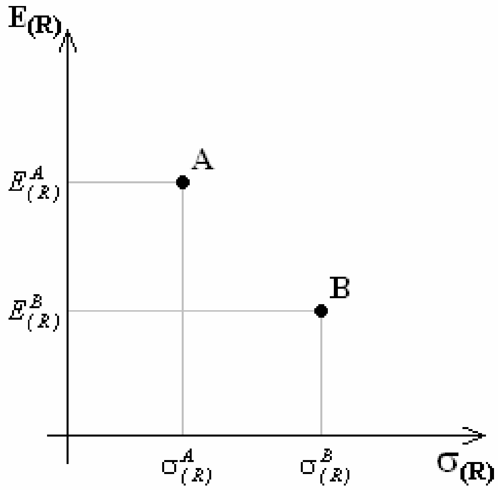


Figura III-1. $E(R_A) > E(R_B)$ y $\sigma(R_A) < \sigma(R_B)$

I. Se dice que el portafolio A domina al portafolio B si se cumplen las siguientes condiciones:

$$E(R_A) > E(R_B)$$
$$\sigma(R_A) < \sigma(R_B)$$

Esto es, la cartera A no sólo es una cartera con un nivel de riesgo inferior al de la cartera B, sino que también ofrece un rendimiento esperado superior al que ofrece la cartera B.

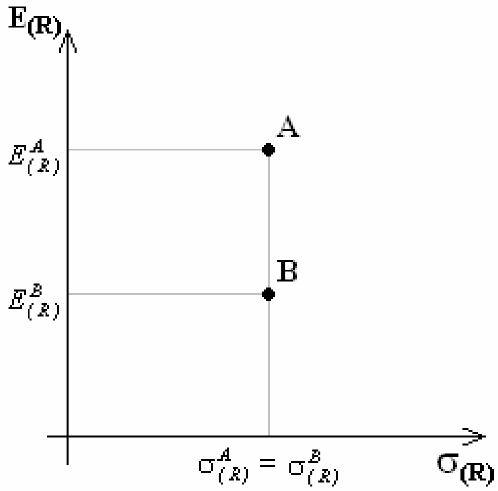


Figura III-2. $E(R_A) > E(R_B)$ y $\sigma(R_A) = \sigma(R_B)$

II. Se dice que el portafolio A domina al portafolio B si se cumplen las siguientes condiciones:

$$E(R_A) > E(R_B)$$
$$\sigma(R_A) = \sigma(R_B)$$

Es decir, a pesar de que ambas carteras presentan el mismo nivel de riesgo, la cartera A domina a la B puesto que ofrece un rendimiento esperado superior al que ofrece la cartera B.

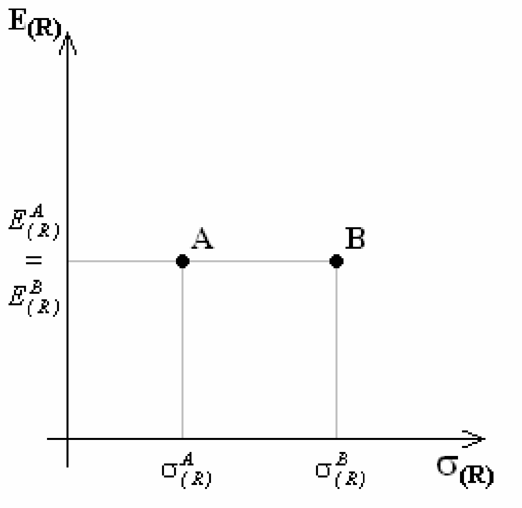


Figura III-3. $E(R_A) = E(R_B)$ y $\sigma(R_A) < \sigma(R_B)$

III. Se dice que el portafolio *A* domina al portafolio *B* si se cumplen las siguientes condiciones:

$$E(R_A) = E(R_B)$$
$$\sigma(R_A) < \sigma(R_B)$$

Lo que significa que la cartera *A* domina la cartera *B* porque ofrece el mismo rendimiento esperado que la cartera *B*, pero asumiendo un nivel de riesgo inferior.

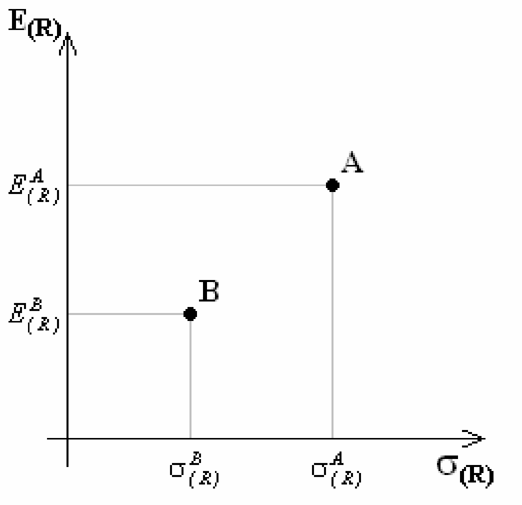


Figura III-4. $E(R_A) > E(R_B)$ y $\sigma(R_A) > \sigma(R_B)$

IV. Sin embargo, en Finanzas es un hecho conocido que al asumir un nivel de riesgo mayor, debe exigirse a la inversión una mayor rentabilidad esperada. El caso de los portafolios de inversión no es la excepción, pues si sucedieran las siguientes condiciones:

$$E(R_A) > E(R_B)$$
$$\sigma(R_A) > \sigma(R_B)$$

la decisión sobre qué cartera domina no es tan trivial y debe considerar otros factores además del riesgo y el rendimiento. Dependerá entonces del propio inversionista decidir cuál de las carteras es la que mejor se ajusta a sus necesidades y expectativas, de acuerdo a su perfil inversor.

3.1.2. Medidas de Rendimiento y Riesgo en el Modelo de Markowitz

Sean

R_i	La variable aleatoria que representa el rendimiento del título *i*.
$E(R_P)$	El rendimiento esperado de la cartera.
w_i	La proporción del presupuesto invertido en el activo *i*.
$E(R_i)$	El rendimiento esperado del título *i*.
n	Número de activos que componen la cartera.
$Var(R_P) = \sigma^2 (R_P)$	La varianza del rendimiento de la cartera.
$\sigma (R_i)$	La desviación estándar del rendimiento del activo *i*.
$Cov(R_i ,R_j) = \sigma_{i,j}$	La covarianza entre los rendimientos de los títulos *i* y *j*.
$\rho_{i,j}$	El coeficiente de correlación de Spearman, $\rho_{x,y} = \dfrac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$.

Definimos la tasa de rendimiento de una cartera como el promedio ponderado de los rendimientos de los valores individuales de la cartera. Matemáticamente la tasa de rendimiento de una cartera es:

Para dos activos, $R_P = wR_1 + (1\text{-}w)R_2$

Para tres activos, $R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3$ con $\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$

Para n activos, $R_P = w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3 + \ldots + w_{n-1}R_{n-1} + w_nR_n = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$ con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

La tasa esperada de rendimiento sobre la cartera es, entonces:

Para dos activos, $E(R_P) = E[\,wR_1 + (1\text{-}w)R_2] = wE(R_1) + (1\text{-}w)E(R_2)$

Para tres activos, $E(R_P) = E[\,w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3] = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + w_3E(R_3)$

Para n activos,
$$
\begin{aligned}
E(R_P) &= E[\,w_1R_1 + w_2R_2 + w_3R_3 + \ldots + w_{n-1}R_{n-1} + w_nR_n] \\
&= w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + w_3E(R_3) + \ldots + w_{n-1}E(R_{n-1}) + w_nE(R_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)
\end{aligned}
$$

recordando en todo momento que se exige al inversionista agotar su presupuesto en la conformación de la cartera[2], es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Por su parte, el riesgo de la cartera no sólo depende de la varianza individual de los valores que la conforman, sino también de la relación existente entre los mismos. Esta relación se puede medir mediante la covarianza de los posibles rendimientos de los valores implicados, por lo que surgen las siguientes fórmulas:

Para dos activos,

$$\sigma^2(R_P) = w^2\,\sigma^2(R_1) + (1\text{-}w)^2\,\sigma^2(R_2) + 2w(1\text{-}w)\sigma_{1,2}$$

Para tres activos,

$$\sigma^2(R_P) = w_1^{\,2}\sigma^2(R_1) + w_2^{\,2}\sigma^2(R_2) + w_3^{\,2}\sigma^2(R_3) + 2w_1w_2\,\sigma_{1,2} + 2w_1w_3\,\sigma_{1,3} + 2w_2w_3\,\sigma_{2,3}$$

Para n activos, $\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\,\sigma_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma(R_i)\sigma(R_j)\rho_{i,j}$

donde

- $\sigma^2(R_P)$ es la varianza del portafolio
- $\sigma^2(R_i)$ representa la varianza de los rendimientos del activo i
- $\sigma_{i,j}$ representa la covarianza entre los rendimientos del activo ***i*** y el activo ***j***

Recordemos que, por definición, la covarianza entre un activo y sí mismo es igual a su varianza, es decir, $\sigma_{i,i} = \sigma^2(R_i)$.

Por conveniencia, podemos establecer las fórmulas anteriores en términos matriciales. Así, el rendimiento de un portafolio con n activos se define como la multiplicación de la matriz de los porcentajes de asignación w_i (un vector renglón de tamaño 1 x n) y la matriz de los rendimientos esperados $E(R_i)$ (un vector columna de tamaño n x 1), que resulta en el rendimiento esperado del portafolio (una matriz de 1 x 1, es decir, un número escalar):[3]

---

[2] Nótese que no se exige que las w_i's sean positivas, lo que significa que el modelo permite ventas en corto.

[3] Esta multiplicación de matrices puede realizarse pues se cumple que el número de columnas de la primera matriz sea igual al de filas de la segunda matriz; la matriz resultante es una con el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la segunda.

$$\mathrm{E}(R_P) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_{n-1} & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}(R_1) \\ \mathrm{E}(R_2) \\ \mathrm{E}(R_3) \\ \vdots \\ \mathrm{E}(R_{n-1}) \\ \mathrm{E}(R_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i)$$

Igualmente, la varianza de una cartera puede ser vista en términos matriciales como la multiplicación de tres matrices: la primera, el vector de porcentajes de asignación w_i (un vector renglón de tamaño 1 x *n*); la segunda, la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los *n* activos (una matriz de tamaño *n* x *n*); y la tercera, de nuevo el vector de porcentajes de asignación w_i (pero esta vez como un vector columna de tamaño *n* x 1), cuyo resultado es la varianza del portafolio (una matriz de 1 x 1, es decir, un escalar):

$$\sigma^2(R_P) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_{n-1} & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n-1} & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n-1} & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n-1} & \sigma_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \sigma_{n-1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n-1,n} \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n-1} & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \, \sigma_{i,j}$$

El segundo factor en la anterior multiplicación de matrices recibe el nombre de *matriz de varianzas y covarianzas*; es una matriz cuadrada, no singular, simétrica y definida positiva ($\sigma_{i,\ j} \geq 0 \ \ \forall i, j$), de tamaño *n* x *n*, en cuya diagonal principal se encuentran las varianzas de los rendimientos de cada uno de los activos que conforman la cartera, y en cada posición *i,j* obtenemos las covarianzas entre el *i*-ésimo y el *j*-ésimo título.

3.1.3. Casos especiales

Hemos visto ya que la relación existente entre los precios –y, por consiguiente- los rendimientos de los activos es un aspecto fundamental al medir el riesgo de la cartera. Hasta ahora, este factor ha sido evaluado mediante la covarianza; sin embargo, la covarianza depende de las unidades de medida de las variables y se modificará si modificamos las unidades de medida de las variables, aparte de carecer de un estándar para comprobar el grado de relación.

Podemos utilizar entonces el coeficiente de correlación de Spearman (ρ), una medida de relación entre dos variables que resume la relación entre ambas variables de forma estandarizada, esto es, no depende de las unidades de medida; este coeficiente se construye dividiendo la covarianza por las desviaciones estándar de ambas variables, y proporciona tres datos principales:

(a) La existencia o no de una relación lineal entre las variables, si es diferente de cero.
(b) La dirección de esta relación, si es que existe, por su signo positivo o negativo.
(c) El grado de esta relación, por el valor absoluto del coeficiente; esto debido a que es una medida estandarizada que oscila entre -1 y 1.

Consideremos una pareja de cualesquiera *i* y *j* activos, y tomemos la fórmula de la varianza de una cartera de dos activos que se mencionó en la sección anterior. Al utilizar el coeficiente de correlación ρ, dicha fórmula puede ser rescrita del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\sigma^2(R_P) &= w^2\sigma^2(R_i) + (1\text{-}w)^2\sigma^2(R_j) + 2w(1\text{-}w)\,\sigma_{i,j}\\ &= w^2\sigma^2(R_i) + (1\text{-}w)^2\sigma^2(R_j) + 2w(1\text{-}w)\sigma_i(R_i)\sigma_j(R_j)\rho_{i,j}\end{aligned}$$

Un índice de correlación ρ = 1 (correlación directa perfecta) muestra que un aumento en el rendimiento para una acción va siempre asociado con un aumento proporcional en el rendimiento del otro valor, es decir, existe una intercompensación proporcional entre el riesgo y el rendimiento entre los activos. De este modo, las carteras que se pueden formar constituyen una línea recta:

$$\begin{aligned}\rho = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2(R_P) &= w^2\sigma^2(R_i) + (1\text{-}w)^2\sigma^2(R_j) + 2w(1\text{-}w)\sigma_i(R_i)\sigma_j(R_j)\\ &= [w\,\sigma(R_i) + (1\text{-}w)\sigma(R_j)]^2\\ \Rightarrow \quad \sigma(R_P) &= \sqrt{[w\,\sigma(R_i)+(1-w)\sigma(R_j)]^2}\\ &= w\,\sigma(R_i) + (1\text{-}w)\sigma(R_j)\\ &= w\,\sigma(R_i) + \sigma(R_j) - w\,\sigma(R_j)\\ &= \sigma(R_j) + w\,[\sigma(R_i) - \sigma(R_j)]\end{aligned}$$

donde $\sigma(R_i)$ y $\sigma(R_j)$ con conocidas, y la única variable independiente es *w*, es decir, el porcentaje asignado al activo *i*. Así, si $w = 0$, quiere decir que se destina todo el capital al activo *j*, por lo que el rendimiento esperado y varianza de la cartera serán iguales a las de dicho activo. Por contrario, si $w = 1$, se destina todo el capital al activo *i*, por lo que el rendimiento esperado y la varianza del portafolio serán iguales a las del activo *i*. En el intervalo [0,1], *w* puede tomar infinitos valores, lo que resultará en una infinidad de carteras que tomarán valores de rentabilidad entre $E(R_i)$ y $E(R_j)$.

Un índice de correlación ρ = –1 (correlación inversa perfecta) señala que un aumento en el rendimiento para un valor va asociado a una disminución proporcional en el otro valor, y viceversa.

$$\begin{aligned}\rho = -1 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2(R_P) &= w^2\sigma^2(R_i) + (1\text{-}w)^2\sigma^2(R_j) - 2w(1\text{-}w)\sigma_i(R_i)\sigma_j(R_j)\\ &= [w\,\sigma(R_i) - (1\text{-}w)\sigma(R_j)]^2\\ \Rightarrow \quad \sigma(R_P) &= \sqrt{[w\,\sigma(R_i)-(1-w)\sigma(R_j)]^2}\\ &= w\,\sigma(R_i) - (1\text{-}w)\sigma(R_j)\\ &= w\,\sigma(R_i) - \sigma(R_j) + w\,\sigma(R_j)\\ &= w\,[\sigma(R_i) + \sigma(R_j)] - \sigma(R_j)\end{aligned}$$

En este caso, como los activos tienen una relación inversa, el riesgo puede ser completamente diversificado, es decir, se puede construir una cartera con $\sigma(R_P) = 0$ con los porcentajes *w* y (1-*w*) adecuados:

$$\sigma(R_P) = w\,[\sigma(R_i) + \sigma(R_j)] - \sigma(R_j) = 0$$

$$\Rightarrow \quad w\,[\sigma(R_i) + \sigma(R_j)] = \sigma(R_j)$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{\sigma(R_j)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}$$

$$\Rightarrow \quad 1\text{-}w = 1\text{-}\ \frac{\sigma(R_j)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)} = \frac{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)-\sigma(R_j)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)} = \frac{\sigma(R_i)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}$$

Con los porcentajes anteriores, se puede formar una cartera libre de riesgo, es decir, una cartera cuya varianza es igual a cero:

$$\sigma^2(R_P)=\left(\frac{\sigma(R_j)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}\right)^2\sigma^2(R_i)+\left(\frac{\sigma(R_i)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}\right)^2\sigma^2(R_j)-\left(\frac{\sigma(R_j)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}\right)\left(\frac{\sigma(R_i)}{\sigma(R_i)+\sigma(R_j)}\right)\sigma_i(R_i)\sigma_j(R_j)$$

$$=\frac{[\sigma(R_i)\sigma(R_j)]^2}{[\sigma(R_i)+\sigma(R_j)]^2}+\frac{[\sigma(R_i)\sigma(R_j)]^2}{[\sigma(R_i)+\sigma(R_j)]^2}-2\frac{[\sigma(R_i)\sigma(R_j)]^2}{[\sigma(R_i)+\sigma(R_j)]^2}$$

$$=0$$

Lamentablemente, en la realidad es poco probable que dos activos presenten una correlación perfecta, sea directa o inversa, pues generalmente $0<|\rho|<1$; el caso $\rho = 0$ mostraría una ausencia total de correlación lineal estocástica (los rendimientos de cada valor varían de manera linealmente independiente[4]), y puesto que los activos no están correlacionados, la relación entre riesgo y rendimiento no es lineal.

Al ubicar en el espacio riesgo-rendimiento las posibles carteras obtenidas con dos activos *i* y *j* suponiendo $\rho = 1$, $\rho = -1$, $\rho = 0$ y $0<|\rho|<1$, la gráfica obtenida corresponde a la Fig. III-5. Vemos que cuando los rendimientos de los activos están perfectamente correlacionados (ρ=1), las posibles carteras se ubican en una recta que une los activos *i* y *j*; conforme el coeficiente ρ de los activos decrece, los rendimientos de los activos no guardan una relación lineal y las carteras posibles describen curvas cada vez más pronunciadas; cuando ambos activos guardan una correlación inversa perfecta (ρ= -1), la curva degenera hasta formar dos rectas, cuyo vértice es la cartera libre de riesgo que se podría formar.

En el caso más común, es decir, cuando $0<|\rho|<1$, la curva formada se denomina *conjunto de oportunidades de la corteza con varianza mínima* dada una tasa de rendimiento, y siempre tendrá una forma de parábola horizontal aunque se trabaje con carteras con más de dos activos; la diferencia, en este caso, es que habrá un número infinito de puntos ineficientes que se encuentran en el interior del conjunto de oportunidades, llamado el *conjunto factible*. En la Fig. III-6, el área gris representa el conjunto factible, pero sólo la curva negra constituye la corteza de mínima varianza.

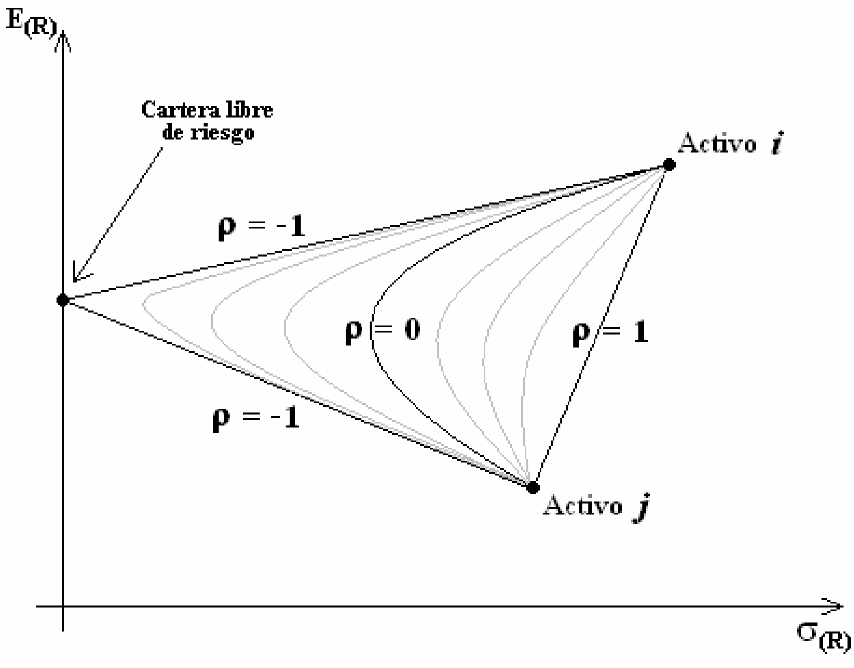


Figura III-5. Los casos ρ= 1, ρ= -1 y ρ= 0.

[4] Este hecho no que no precisamente indica independencia en las variables, ya que puede existir una relación no lineal incluso exacta.

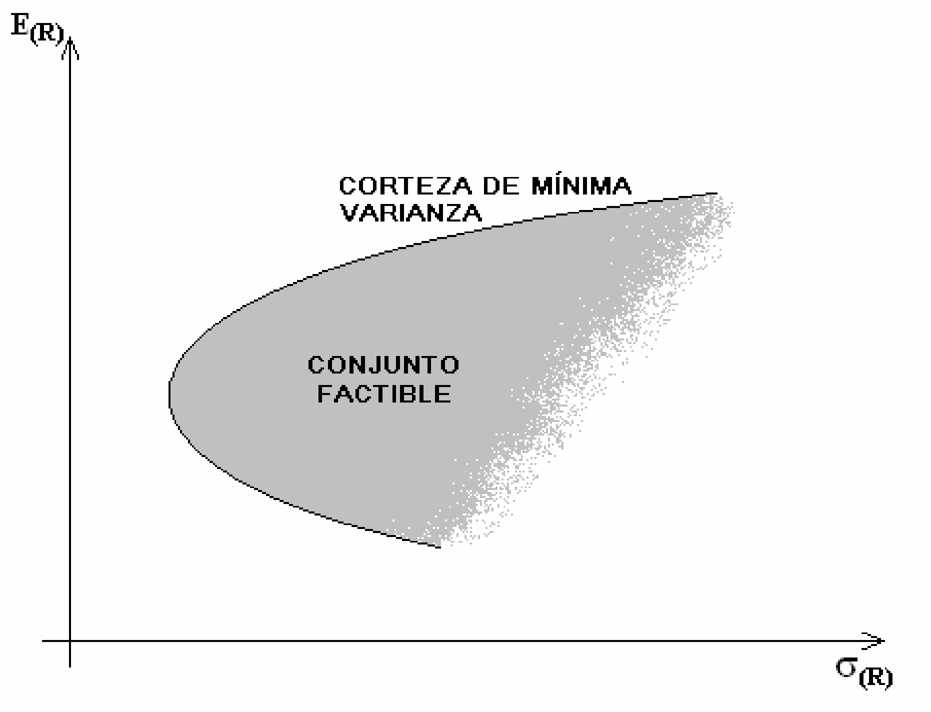


Figura III-6. El conjunto factible y la corteza de mínima varianza.

La siguiente tarea es, entonces, distinguir de entre las oportunidades de la corteza de mínima varianza, el subconjunto integrado por las carteras eficientes, es decir, aquellas carteras que tienen el rendimiento esperado más alto en un nivel dado de riesgo.

3.1.4. Primera Etapa. Determinación del Conjunto Eficiente

Si partimos de la consideración de *n* títulos en los que poder invertir, las combinaciones de éstos dan lugar a un número infinito de posibles portafolios de inversión. En este contexto, al inversionista le sería prácticamente imposible realizar una elección, por lo que Markowitz propone comenzar aplicando el criterio Esperanza-Varianza que revisamos en la sección 2.6.1., lo cual permitirá seleccionar –en función de estos dos momentos- aquellas carteras que todo inversionista racional elegiría de antemano y que reciben el nombre de carteras eficientes.

En primera instancia, conviene encontrar aquella cartera que presenta la menor varianza del infinito de carteras posibles. Esta cartera, que constituye el punto situado más a la izquierda en el espacio riesgo-rendimiento, recibe el nombre de *cartera de mínimo riesgo* (*CMR*) y es la primera de las carteras eficientes. Para encontrar las proporciones w_i que permiten conformar dicha cartera, necesitamos resolver el siguiente problema de programación cuadrática paramétrica:

$$Min\ \sigma^2(R_P) = Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\ \sigma_{i,j}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

es decir, se exige al inversionista agotar su presupuesto de inversión. Para resolver el problema, utilizamos el Método de los Multiplicadores de Lagrange, el cual permite encontrar puntos extremos de

una función (en este caso, la varianza del portafolio) sujeta a otra que la restringe (la condición de que el inversionista agote su capital presupuestado) [5].
Utilizando el teorema, construimos la siguiente Función de Lagrange:

$$L = \sigma^2(R_P) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1) \qquad \Rightarrow \qquad L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \sigma_{i,j} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1)$$

Para hallar los puntos extremos de dicha función, obtenemos las derivadas parciales de L con respecto a cada una de las variables w_i y λ y las igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{1,3} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{1,n-1} + 2w_n\sigma_{1,n} + \lambda \qquad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{2,1} + 2w_3\sigma_{2,3} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{2,n-1} + 2w_n\sigma_{2,n} + \lambda \qquad = 0$$

---

[5] TEOREMA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. Sean $f : U \subset \Re^n \to \Re$ funciones clase C^1 con valores reales dadas. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$, y sea S el conjunto de nivel de g con valor c (es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \Re^n$ que satisface $g(\mathbf{x}) = c$). Suponer que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, donde ∇g denota el gradiente de g, el cual es el vector $\nabla g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Si $f \mid S$, que denota f restringida a S, tiene un máximo o un mínimo local en S, en $\mathbf{x}_0$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$.

En general, el punto $\mathbf{x}_0$ donde se cumple la ecuación anterior recibe el nombre de *punto crítico* de $f \mid S$.

En la ecuación que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$, se dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las de g. Hallar los puntos $\mathbf{x}_0$ en los que ocurre esto significa resolver las siguientes ecuaciones simultáneas

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c
\end{gathered}$$

para x_1, x_2, …, x_n. Otra manera de considerar estas ecuaciones es así: pensar en λ como una variable adicional y formar la función auxiliar L (a veces llamada *función de Lagrange*):

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c]$$

En el Teorema de Multiplicadores de Lagrange se dice que para hallar los puntos extremos de $f \mid S$, debemos examinar los puntos críticos de L. Éstos se encuentran resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered}
0 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
0 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\
\vdots \\
0 = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\
0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c
\end{gathered}$$

que es el mismo que el anterior.
(Véase MARSDEN, J.E. y TROMBA, A.J. *Cálculo* Vectorial, 4° ed., Prentice Hall, México, 1998, p. 120, 209-211)

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{n-1}} = 2w_{n-1}\sigma_{n-1}^2 + 2w_1\sigma_{n-1,1} + 2w_2\sigma_{n-1,2} + \cdots + 2w_{n-2}\sigma_{n-1,n-2} + 2w_n\sigma_{n-1,n} + \lambda \qquad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = 2w_n\sigma_n^2 + 2w_1\sigma_{n,1} + 2w_2\sigma_{n,2} + \cdots + 2w_{n-2}\sigma_{n,n-2} + 2w_{n-1}\sigma_{n,n-1} + \lambda \qquad = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} + w_n - 1 \qquad = 0$$

Obtenemos así un sistema de n+1 ecuaciones con el mismo número de incógnitas (n distintos porcentajes w_i y la variable auxiliar λ). Por conveniencia, en las primeras n ecuaciones eliminamos los coeficientes dividiendo por dos, mientras que en la última sumamos uno en ambos miembros. Obtenemos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
&w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{1,2} + w_3\sigma_{1,3} + \cdots + w_{n-1}\sigma_{1,n-1} + w_n\sigma_{1,n} + \lambda/2 &&= 0\\
&w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{2,1} + w_3\sigma_{2,3} + \cdots + w_{n-1}\sigma_{2,n-1} + w_n\sigma_{2,n} + \lambda/2 &&= 0\\
&\vdots\\
&w_{n-1}\sigma_{n-1}^2 + w_1\sigma_{n-1,1} + w_2\sigma_{n-1,2} + \cdots + w_{n-2}\sigma_{n-1,n-2} + w_n\sigma_{n-1,n} + \lambda/2 &&= 0\\
&w_n\sigma_n^2 + w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \cdots + w_{n-2}\sigma_{n,n-2} + w_{n-1}\sigma_{n,n-1} + \lambda/2 &&= 0\\
&w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} + w_n &&= 1
\end{aligned}$$

Rescribimos el sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n\text{-}1} & \sigma_{1,n} & 1\\
\sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n\text{-}1} & \sigma_{2,n} & 1\\
\sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n\text{-}1} & \sigma_{3,n} & 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\sigma_{n\text{-}1,1} & \sigma_{n\text{-}1,2} & \sigma_{n\text{-}1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n\text{-}1,n} & 1\\
\sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n\text{-}1} & \sigma_n^2 & 1\\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}}_{C_{(n+1)\text{ x }(n+1)}}
\underbrace{\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ \vdots\\ w_{n-1}\\ w_n\\ \lambda/2 \end{pmatrix}}_{W_{(n+1)\text{ x }1}}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}}_{B_{(n+1)\text{ x }1}}$$

Donde C es conocida y es la matriz de varianzas y covarianzas aumentada en un renglón y una columna; C conserva la propiedad de ser definida positiva y no singular, por lo que las w_i que satisfacen C x W = B son únicas. B, por su parte, es un vector columna también conocido, con los términos independientes del sistema de ecuaciones. Por lo tanto, se requiere conocer el vector W, lo que nos brindará los porcentajes que conforman la cartera de mínimo riesgo. Despejamos W:

$$C \text{ x } W = B$$
$$C^{-1} \text{ x } (C \text{ x } W) = C^{-1} \text{ x } B$$
$$(C^{-1} \text{ x } C) \text{ x } W = C^{-1} \text{ x } B$$
$$(I) \text{ x } W = C^{-1} \text{ x } B$$
$$W = C^{-1} \text{ x } B$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \\ \lambda/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n\text{-}1} & \sigma_{1,n} & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n\text{-}1} & \sigma_{2,n} & 1 \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n\text{-}1} & \sigma_{3,n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n\text{-}1,1} & \sigma_{n\text{-}1,2} & \sigma_{n\text{-}1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n\text{-}1,n} & 1 \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n\text{-}1} & \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_{(n+1)\,\mathrm{x}\,1} \qquad C^{-1}_{(n+1)\,\mathrm{x}\,(n+1)} \qquad B_{(n+1)\,\mathrm{x}\,1}$$

Puesto que C es definida positiva, sabemos que su determinante es positivo y, por lo tanto, existe C^{-1} y también es definida positiva. Así, la cartera conformada con los porcentajes de asignación del vector W es, entonces, la cartera de mínimo riesgo (*CMR*)[6]. Por la forma en que planteamos la función lagrangiana L, el valor $-\lambda$ sería el multiplicador de Lagrange que cumple el Teorema, pero resulta irrelevante para los objetivos del problema.

En la sección anterior mencionamos que el conjunto de oportunidades de la corteza con varianza mínima -dada una tasa de rendimiento- siempre tiene una forma curva. Ya conocemos la cartera de mínima varianza, que es la primera cartera eficiente de la corteza con varianza mínima, pero aún falta encontrar el resto de las carteras del conjunto eficiente; cuya representación geométrica recibe el nombre de *frontera eficiente de oportunidades de inversión*.

El conjunto de las carteras eficientes u óptimas está integrado por aquellas carteras que:

- para un nivel de riesgo determinado tienen el mayor rendimiento esperado.
- para cualquier nivel de rendimiento esperado, tienen el riesgo más bajo.

Para encontrar dicho conjunto, Merton[7] retomó el problema de programación cuadrática propuesto por Markowitz para encontrar la cartera de mínima varianza, y le agregó una restricción:

$$Min\ \sigma^2(R_P) = Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\ \sigma_{i,j}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) = \mathrm{E}'(R_P)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

donde $\mathrm{E}'(R_P)$ es un rendimiento esperado propuesto. Dicho $\mathrm{E}'(R_P)$ debe ser mayor que el rendimiento esperado de la cartera de mínimo riesgo $\mathrm{E}(R_{CMR})$, pues se busca ahora encontrar carteras que tengan un rendimiento mejor a $\mathrm{E}(R_{CMR})$, sin dejar de presentar la menor varianza en cada nivel de rendimiento.

[6] El uso del Teorema de Multiplicadores de Lagrange implica haber encontrado un punto extremo; sin embargo, éste punto puede ser un máximo o un mínimo. Existen criterios que permiten distinguir entre ambos casos, como el del determinante hessiano; no obstante, es posible distinguir entre máximos y mínimos por medios geométricos, lo cual con frecuencia resulta más sencillo. (Véase MARSDEN, J.E., *op. cit.*, p. 220)

Éste es el caso de nuestra aplicación, pues recordando lo revisado en la sección 2.7.1.2., sabemos que el conjunto de oportunidades de la corteza con varianza mínima es una parábola horizontal de infinitas carteras con un sólo punto crítico, aquel que presenta la menor ordenada posible –es decir, la cartera de mínima varianza. Esto significa que el extremo que encontramos mediante la función de Lagrange es el vértice de dicha parábola, es decir, es un mínimo.

[7] MERTON, R.C. *An analytic derivation of the efficient portfolio frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Septiembre 1972, p. 1851-1872.

¿Qué rendimiento E'(R_P) debemos proponer? Eso depende del perfil del inversionista, pues cada incremento en el rendimiento esperado implica un aumento de la varianza de la cartera.

Así, de forma análoga al problema previo, usamos el Teorema de Lagrange y construimos una función auxiliar L para encontrar el punto crítico, ahora con dos multiplicadores λ_1 y λ_2 de Lagrange:

$$L = \sigma^2(R_P) + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) + \lambda_2\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) - \mathrm{E}'(R_P)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\, \sigma_{i,j} + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1\right) + \lambda_2\left[\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) - \mathrm{E}'(R_P)\right]$$

Para encontrar los puntos críticos de dicha función, obtenemos las derivadas parciales de L con respecto a cada una de las variables w_i, λ_1 y λ_2, y las igualamos a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2w_1\sigma_1^2 + 2w_2\sigma_{1,2} + 2w_3\sigma_{1,3} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{1,n-1} + 2w_n\sigma_{1,n} + \lambda_1 + \lambda_2\mathrm{E}(R_1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = 2w_2\sigma_2^2 + 2w_1\sigma_{2,1} + 2w_3\sigma_{2,3} + \cdots + 2w_{n-1}\sigma_{2,n-1} + 2w_n\sigma_{2,n} + \lambda_1 + \lambda_2\mathrm{E}(R_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{n-1}} = 2w_{n-1}\sigma_{n-1}^2 + 2w_1\sigma_{n-1,1} + 2w_2\sigma_{n-1,2} + \cdots + 2w_{n-2}\sigma_{n-1,n-2} + 2w_n\sigma_{n-1,n} + \lambda_1 + \lambda_2\mathrm{E}(R_{n-1}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = 2w_n\sigma_n^2 + 2w_1\sigma_{n,1} + 2w_2\sigma_{n,2} + \cdots + 2w_{n-2}\sigma_{n,n-2} + 2w_{n-1}\sigma_{n,n-1} + \lambda_1 + \lambda_2\mathrm{E}(R_n) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} + w_n - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_1\mathrm{E}(R_1) + w_2\mathrm{E}(R_2) + w_3\mathrm{E}(R_3) + \cdots + w_{n-1}\mathrm{E}(R_{n-1}) + w_n\mathrm{E}(R_n) - \mathrm{E}'(R_P) = 0$$

Obtenemos entonces un sistema de n+2 ecuaciones con el mismo número de incógnitas (n distintos porcentajes w_i y las variables auxiliares λ_1 y λ_2). Por conveniencia, en las primeras n ecuaciones eliminamos los coeficientes dividiendo por dos; en la penúltima, sumamos uno en ambos miembros, mientras que en la última ecuación sumamos E'(R_P) de ambos lados. Obtenemos así el siguiente sistema:

$$w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_{1,2} + w_3\sigma_{1,3} + \cdots + w_{n-1}\sigma_{1,n-1} + w_n\sigma_{1,n} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2\mathrm{E}(R_1)}{2} = 0$$

$$w_2\sigma_2^2 + w_1\sigma_{2,1} + w_3\sigma_{2,3} + \cdots + w_{n-1}\sigma_{2,n-1} + w_n\sigma_{2,n} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2\mathrm{E}(R_2)}{2} = 0$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}\sigma_{n-1}^2 + w_1\sigma_{n-1,1} + w_2\sigma_{n-1,2} + \cdots + w_{n-2}\sigma_{n-1,n-2} + w_n\sigma_{n-1,n} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2\mathrm{E}(R_{n-1})}{2} = 0$$

$$w_n\sigma_n^2 + w_1\sigma_{n,1} + w_2\sigma_{n,2} + \cdots + w_{n-2}\sigma_{n,n-2} + w_{n-1}\sigma_{n,n-1} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2\mathrm{E}(R_n)}{2} = 0$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_{n-1} + w_n = 1$$

$$w_1\mathrm{E}(R_1)+w_2\mathrm{E}(R_2)+w_3\mathrm{E}(R_3)+\cdots+w_{n-1}\mathrm{E}(R_{n-1})+w_n\mathrm{E}(R_n) \qquad = \ \mathrm{E}'(R_P)$$

Rescribimos el sistema en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n\text{-}1} & \sigma_{1,n} & 1 & \mathrm{E}(R_1) \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n\text{-}1} & \sigma_{2,n} & 1 & \mathrm{E}(R_2) \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n\text{-}1} & \sigma_{3,n} & 1 & \mathrm{E}(R_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n\text{-}1,1} & \sigma_{n\text{-}1,2} & \sigma_{n\text{-}1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n\text{-}1,n} & 1 & \mathrm{E}(R_{n-1}) \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n\text{-}1} & \sigma_n^2 & 1 & \mathrm{E}(R_n) \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{E}(R_1) & \mathrm{E}(R_2) & \mathrm{E}(R_3) & \cdots & \mathrm{E}(R_{n-1}) & \mathrm{E}(R_n) & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C_{(n+2)\mathrm{x}(n+2)}} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{pmatrix}}_{W_{(n+2)\mathrm{x}1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathrm{E}'(R_P) \end{pmatrix}}_{B_{(n+2)\mathrm{x}1}}$$

Donde C es conocida y es la matriz de varianzas y covarianzas, esta vez aumentada en dos renglones y dos columnas; B, por su parte, es un vector columna también conocido, con los términos independientes del sistema de ecuaciones. Entonces, necesitamos conocer el vector W, que nos dará los porcentajes w_i que conforman la cartera eficiente, y sabemos que $W = C^{-1}$ x B:

$$\Rightarrow W = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{pmatrix}}_{W_{(n+2)\mathrm{x}1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n\text{-}1} & \sigma_{1,n} & 1 & \mathrm{E}(R_1) \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n\text{-}1} & \sigma_{2,n} & 1 & \mathrm{E}(R_2) \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n\text{-}1} & \sigma_{3,n} & 1 & \mathrm{E}(R_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n\text{-}1,1} & \sigma_{n\text{-}1,2} & \sigma_{n\text{-}1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n\text{-}1,n} & 1 & \mathrm{E}(R_{n-1}) \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n\text{-}1} & \sigma_n^2 & 1 & \mathrm{E}(R_n) \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{E}(R_1) & \mathrm{E}(R_2) & \mathrm{E}(R_3) & \cdots & \mathrm{E}(R_{n-1}) & \mathrm{E}(R_n) & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{C_{(n+2)\mathrm{x}(n+2)}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathrm{E}'(R_P) \end{pmatrix}}_{B_{(n+2)\mathrm{x}1}}$$

De nuevo C es definida positiva y no singular, lo que garantiza que existe C^{-1} y es única; a su vez, las w_i que satisfacen C x W = B son únicas también. La cartera conformada con los porcentajes de asignación del vector W es, entonces, una cartera eficiente, pues presenta el menor riesgo dado el nivel de rendimiento E'(R_P). De nuevo, los valores -λ_1 y -λ_2 constituyen los multiplicadores de Lagrange que satisfacen el Teorema, pero carece de trascendencia para los objetivos del problema.

De este modo, para cada valor que demos al parámetro E'(R_P) en el problema anterior, obtendremos como resultado aquella combinación de títulos que minimiza la varianza para el nivel asignado de rentabilidad. Merton demostró que la frontera eficiente es la parte superior de una hipérbola y comienza a partir de la cartera de mínimo riesgo.

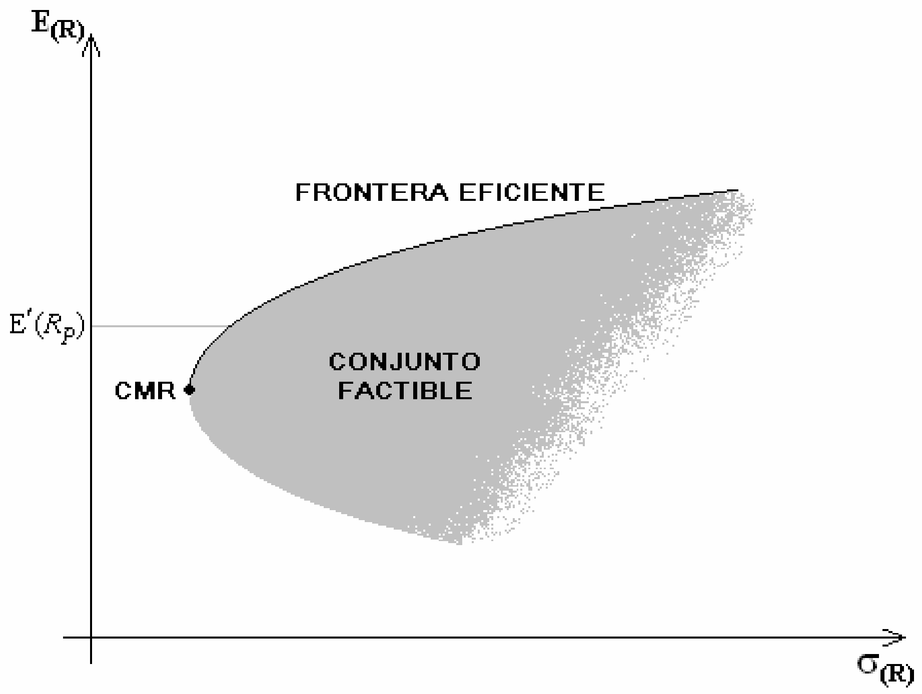


Figura III-7. La *CMR* y la Frontera Eficiente.

Nótese que entre las carteras pertenecientes al conjunto eficiente no existe relación de dominancia, ya que si aumenta o disminuye la rentabilidad también lo hace el riesgo en el mismo sentido. Por tanto, para elegir una u otra es necesario introducir la función de utilidad del inversionista.

3.1.5. Segunda Etapa. Selección de la Cartera Óptima

Una vez determinada la frontera eficiente, el inversionista ha de escoger la cartera que considere óptima para invertir su capital. Para ello se emplea la utilidad, que combina la rentabilidad esperada y el riesgo con la actitud particular y subjetiva del inversor, y determina el orden de preferencia de las distintas carteras.

La función de utilidad es la encargada de describir las preferencias del inversionista en términos de rentabilidad y riesgo. Viene definida por los dos parámetros que se tendrán en cuenta al momento de adoptar la decisión, es decir, el rendimiento medio y el riesgo asociados a la rentabilidad esperada:

$$U = f\,[\,\mathrm{E}(R_P),\ \sigma(R_P)\,]$$

La Fig. III-8 corresponde a la representación gráfica de un ejemplo de función utilizada del tipo:

$$U\,[\mathrm{E}(R_P),\ \sigma(R_P)] = \mathrm{E}(R_P) - a\sigma(R_P) \qquad a>0$$

En este caso, la función de utilidad se representa en el espacio tridimensional [$\sigma(R_P)$, $\mathrm{E}(R_P)$, U] mediante un plano. Otro ejemplo de función de utilidad podría ser un paraboloide hiperbólico (Fig. III-9), de la forma:

$$U\,[\mathrm{E}(R_P),\ \sigma(R_P)] = [\mathrm{E}(R_P) + c]^{2} - b\sigma^{2}(R_P) \qquad b>0$$ [8]

[8] Estas restricciones sobre las constantes suelen utilizarse con el fin de reflejar de forma satisfactoria el deseo natural del inversionista de obtener mayor rentabilidad y la insatisfacción que le produce el riesgo.

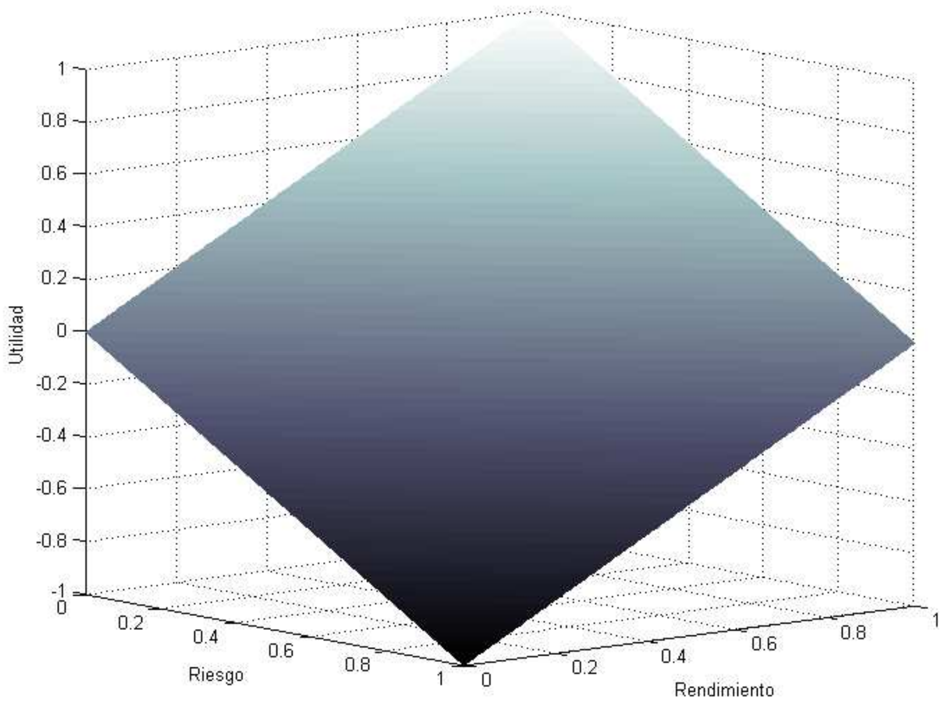


Figura III-8. Gráfica de una función de utilidad de la forma U[E(R_P), σ(R_P)] = E(R_P) - aσ(R_P)

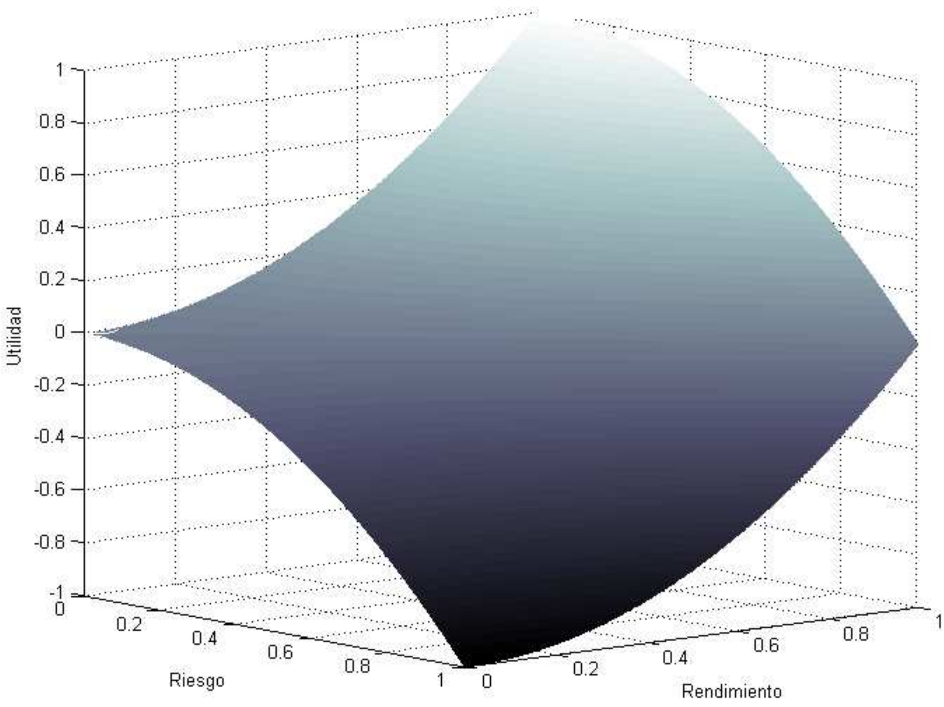


Figura III-9. Gráfica de una función de utilidad de la forma U[E(R_P), σ(R_P)] = [E(R_P) + c]^2 - bσ^2(R_P)

De dichas funciones se puede deducir la correspondiente familia de curvas de indiferencia o conjuntos de nivel, la cual viene definida por:

$$I_k = U\,[\,\mathrm{E}(R_P),\,\sigma(R_P)\,] = k \qquad\qquad I_1, I_2, I_3, \ldots\, I_h, \ldots$$

Cada una de ellas representa el lugar geométrico en el plano media-varianza de las carteras que tienen la misma utilidad para el sujeto decisor.

Ya hemos mencionado que las curvas de indiferencia se caracterizan, entre muchas otras cosas, por ser crecientes, convexas respecto al origen de coordenadas (lo que se interpreta como una exigencia creciente del sujeto decisor sobre la rentabilidad a medida que aumenta el nivel de riesgo), y porque su índice de utilidad aumenta a medida que crece su ordenada al origen.

La obtención de las mismas nos permite alcanzar nuestro objetivo, encontrando por fin aquella combinación de títulos que maximiza la utilidad esperada del inversionista. Para ello, debemos simplemente superponer la figura que representa las curvas de indiferencia con el conjunto de oportunidades de inversión y la frontera eficiente, como se muestra en la Fig. III-10. De este modo, la cartera óptima será aquella cartera eficiente que sea, a la vez, tangente a la curva de utilidad más alta.

Una vez determinada esta cartera, sustituyendo el valor correspondiente de su rentabilidad esperada como $\mathrm{E}(R_P)$, obtendremos la proporción del presupuesto (w_1, w_2, w_3,…, w_{n-1}, w_n) a invertir en cada uno de los activos que la integran.

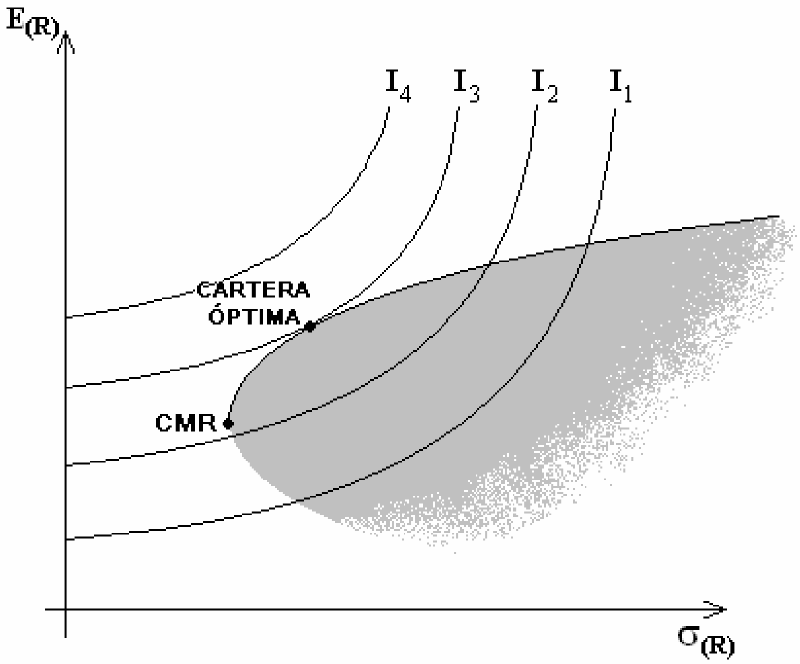


Figura III-10. La intersección entre las curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

3.1.6. La Diversificación en el Modelo de Markowitz

El Modelo de Markowitz no sólo destaca, tal y como acabamos de revisar, por describir el comportamiento racional de un inversionista que optimiza sus decisiones de inversión en el mercado de capitales, sino también por introducir una idea clave: la de diversificación[9].

[9] MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New Haven: Yale University Press, 1959, p. 3.

Con ello, Markowitz rompió con la práctica instaurada hasta ese momento de construir carteras de valores uniendo simplemente títulos infravalorados (según él, “una buena cartera es algo más que una larga lista de acciones y obligaciones”); para ello, centró su atención en la diversificación de carteras y mostró cómo un inversor puede reducir el riesgo de una cartera eligiendo activos cuyas oscilaciones no sean paralelas, es decir, valores poco correlacionados. Aparte, logró mostrar que una cartera bien diversificada puede presentar un riesgo más débil que cada título de forma aislada.

Lograr la diversificación adecuada no es trivial. En la práctica puede conseguirse incluyendo títulos correlacionados negativamente aunque, curiosamente, el mismo efecto puede obtenerse cuando la cartera está integrada por un número suficiente de activos, aunque entre ellos exista una correlación positiva.

Partiendo de la definición de varianza de una cartera:

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \, \sigma_{i,j} \qquad = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{\forall i<j} w_i w_j \sigma_{i,j}$$

y suponiendo que está formada por n títulos en iguales proporciones, es decir, $w_i = w_j = \frac{1}{n} \ \forall\, i, j$, la varianza de la cartera estaría dada por:

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{\forall i<j} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{i,j}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(R_P) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} + 2\,\frac{\sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j}}{n^2} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} + 2\,\frac{\sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j}}{n^2} \left(\frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{n^2-n}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} + 2\left(\frac{n^2-n}{2n^2}\right) \frac{\sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j}}{\frac{n^2-n}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{\sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j}}{\frac{n^2-n}{2}}
\end{aligned}$$

Sabemos que el número de varianzas es n, y el de covarianzas es

$$_nC_2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Definimos entonces, la varianza media [$\overline{\sigma^2(R_P)}$] y la covarianza media [$\overline{\sigma_{i,j}}$] como:

$$\overline{\sigma^2(R_P)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(R_P)}{n} \qquad \overline{\sigma_{i,j}} = \frac{\sum_{\forall i<j} \sigma_{i,j}}{\frac{n^2-n}{2}}$$

Aplicando las definiciones anteriores, y siguiendo el desarrollo anterior:

$$\sigma^2(R_P) = \left(\frac{1}{n}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\sum_{\forall i<j}\sigma_{i,j}}{\frac{n^2-n}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma^2(R_P)} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma_{i,j}}$$

Por último, hacemos que aumente el número de títulos para ver qué sucede con el riesgo de la cartera, es decir, obtenemos el límite cuando *n* tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2(R_P) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma^2(R_P)} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\overline{\sigma_{i,j}}\right] = \overline{\sigma_{i,j}}$$

Así, el riesgo de un portafolio compuesto por un número muy grande de activos tiende a su covarianza media. Es decir, que si pudiéramos formar un portafolio con suficientes activos independientes entre sí, la varianza del portafolio tendería a cero.

Puede concluirse, entonces, que existen dos clases de diversificación o dos fuentes para disminuir el riesgo de la cartera:

1) La diversificación ingenua. Consiste en seleccionar acciones al azar para aumentar el número de activos (*n*) que integran la cartera con el fin de que su riesgo disminuya y tienda hacia la covarianza media. En la práctica, se considera suficiente incluir veinte títulos para alcanzar este propósito[10].
2) La diversificación científica, eficiente o de Markowitz. Consiste en el uso de ciertas técnicas matemáticas de programación con el fin de reforzar aún más la reducción del riesgo incluyendo títulos correlacionados negativamente, para que la covarianza media sea lo más pequeña posible.

3.1.7. Inconvenientes del Modelo

A pesar de la gran innovación que supuso el Modelo de Markowitz en el mundo de las finanzas, no por ello está exento de críticas.

El principal problema que plantea es el elevado número de estimaciones que hay que realizar para poder aplicarlo; para construir la matriz de varianzas y covarianzas, es necesario hacer $(n^2 + n)/2$ estimaciones, es decir, *n* varianzas y $(n^2-n)/2$ covarianzas. Máxime cuando en el mundo real suelen considerarse muchos activos del mercado para aprovechar las ventajas de la diversificación.

Pero además, este modelo presenta otros inconvenientes. Uno de los más importantes consiste en la descripción de las preferencias personales por medio de una función de utilidad dependiente exclusivamente de dos parámetros: la rentabilidad media esperada y la varianza. Markowitz justifica esta simplificación considerando una función de utilidad cuadrática.

[10] Diversos estudios empíricos muestran que una cartera de veinte títulos escogidos aleatoriamente da lugar a una buena diversificación. Véase FAMA, E.F. *Foundations of Finance*, Basic Books, Nueva York, 1976, p. 253-254.

Sin embargo, como este tipo de funciones consideran los bienes de inversión como bienes inferiores y, además, son incapaces de formalizar las preferencias de un inversionista averso al riesgo[11], se han buscado otras formas teóricas que justifiquen la utilización de la media y la varianza como criterios de selección de inversiones.

El supuesto de que la variable aleatoria se distribuya normalmente también ha sido duramente criticado, no sólo porque algunos autores corroboran que no se cumple, sino porque –aunque se acepte- esta distribución carece de cota inferior y permite, en teoría, un rendimiento negativo infinito. En este sentido, existe disparidad de opiniones, pues mientras algunos trabajos avalan la distribución normal de los rendimientos de los activos[12], otros trabajos, en cambio, rechazan esta hipótesis[13].

3.2. LA CONSIDERACIÓN DEL ACTIVO LIBRE DE RIESGO

En 1958, Tobin[14] amplía el Modelo de Markowitz mediante la consideración de un activo libre de riesgo e incorporando la posibilidad de que el inversionista pueda prestar o pedir prestado cualquier cantidad a la tasa especificada por dicho activo.

Con estas novedades, el inversionista se plantea la posibilidad de combinar una cartera con riesgo A, de rentabilidad esperada $E(R_A)$ y varianza $\sigma^2(R_A)$, con el activo libre de riesgo de rentabilidad fija R_F, cuyas características son las siguientes:

$$E(R_F) = R_F \qquad \sigma^2(R_F) = 0 \qquad \sigma_{i,j}(R_A, R_F) = 0$$

En estas últimas ecuaciones, se observa que:

- No es necesario calcular la esperanza o expectativas de rendimiento del activo libre de riesgo, puesto que este tipo de activo tiene el mismo rendimiento en cada estado de la naturaleza.
- La varianza del activo libre de riesgo es cero.
- No hay relación entre el activo libre de riesgo y el activo riesgoso, es decir, que la covarianza entre ambos también es cero.

De la combinación de cada cartera riesgosa y el activo libre de riesgo se obtiene una línea recta ($\overline{R_F AD}$) integrada por una serie de carteras, denominadas mixtas, las cuales vienen definidas por su correspondiente media y varianza como sigue:

$$E(R_P) = x_1 R_F + x_2 E(R_A)$$
$$\sigma^2(R_P) = x_1^2\, \sigma^2(R_A)$$

donde x_1 y x_2 representan las proporciones invertidas, respectivamente, en el activo sin riesgo y en la cartera A, siendo $x_1 + x_2 = 1$.

Como se observa en la Fig. III-11, dichas proporciones caracterizan cada tramo de la recta $\overline{R_F AD}$ del siguiente modo:

---

[11] Véase RUIZ, G., Jiménez, J.I. y TORRES, J.J. *La Gestión del Riesgo Financiero*, Pirámide, Madrid 2000, p. 134-137.

[12] Por ejemplo, LEVY, H. y SARNAT, M. *Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1984, p. 254-256 o GÓMEZ BEZARES, F., MADARIAGA, J.A. y SANTIBÁÑEZ, J. *Valoración de acciones en la Bolsa Española*, Desclee de Brouwer, Bilbao, 1994, p. 65-68, 123-124, KENDALL 1953, MOORE 1962, FAMA 1965, 1970, 1976, MANDELBROT 1963. Estos estudios indican que las distribuciones de las rentabilidades se asemejan a una normal leptocúrtica y levemente asimétrica hacia la derecha.

[13] Entre ellos, TREJO, Bárbara, NÚÑEZ, José Antonio, y LORENZO, Arturo. *Distribución de los rendimientos del Mercado Mexicano Accionario*, Estudios Económicos, Enero-Junio 2006, Vol. 21, No. 001, El Colegio de México, A.C., México, 2006, p. 85-118; o bien, MANDELBROT, B. *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, Vol. 39, No. 41, Octubre 1963, p. 394-419, FAMA, E.F. *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*, Journal of Business, Vol. 36, No. 4, Octubre 1963, p. 420-429, y también del mismo autor, *The Behaviour of Stock Market Prices*, Journal of Business, Vol. 38, No. 1, Enero 1965, p. 34-105.

[14] TOBIN, J. *Liquidity Preference as behaviour towards risk*, Review of Economic Stuides, Vol. 26, No. 1, Febrero 1958, p. 65-86.

R_F	Todo el presupuesto se invierte en el activo libre de riesgo ($x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 0$).
$\overline{R_F A}$	Son carteras mixtas en las que parte del presupuesto se presta a la tasa R_F, y el resto se invierte en la cartera A ($x_1 > 0$, $x_2 < 1$) Reciben el nombre de carteras con préstamo o acreedoras.
A	Todo el presupuesto se invierte en la cartera con riesgo A ($x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$).
$\overline{AD}$	Son carteras mixtas en las que parte del presupuesto se ha pedido prestado, invirtiéndose todo en la cartera con riesgo *A*. Se denominan carteras con endeudamiento o deudoras.

Si en lugar de la cartera *A*, el inversionista decidiera considerar otras carteras del conjunto factible, sus combinaciones con el activo libre de riesgo darían origen a diferentes rectas integradas nuevamente por carteras mixtas; esta modificación provoca que el conjunto total de carteras mixtas generadas esté dentro de un cono convexo.

Además, de todas las rectas generadas, la que tiene mayor pendiente domina al resto, y se le conoce como ***línea del mercado de capitales*** (LMC). El portafolio eficiente que constituye el punto en el que la línea del mercado de capitales es tangente a la frontera eficiente de oportunidades de inversión recibe el nombre de ***cartera de mercado M*** [15] (Fig. III-12).

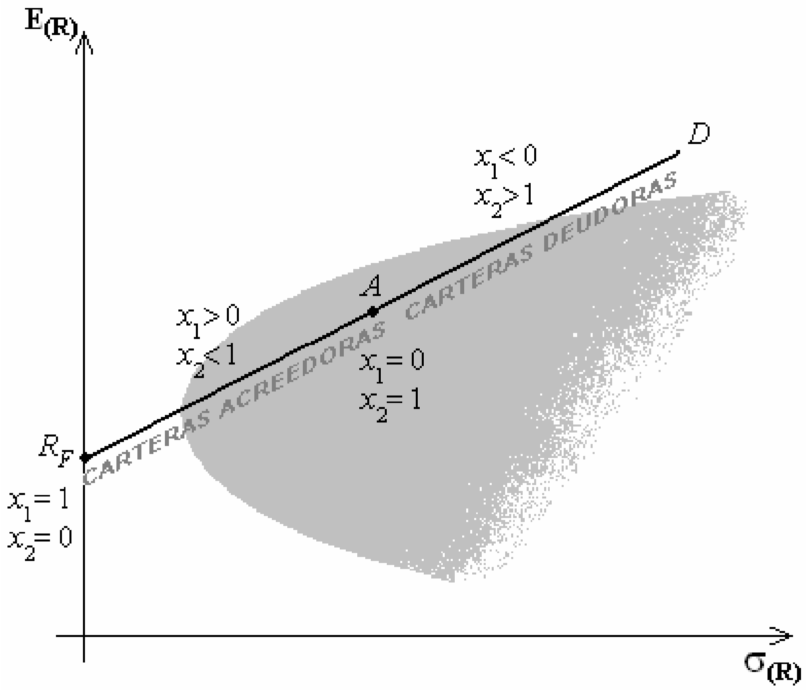


Figura III-11. Distintas posiciones del inversionista sobre la recta $\overline{R_F AD}$

[15] FAMA, E.F. ***Risk, Return and Equilibrium: Some clarifying comments***, Journal of Finance, Vol. 23, Marzo 1968, p. 29-40.

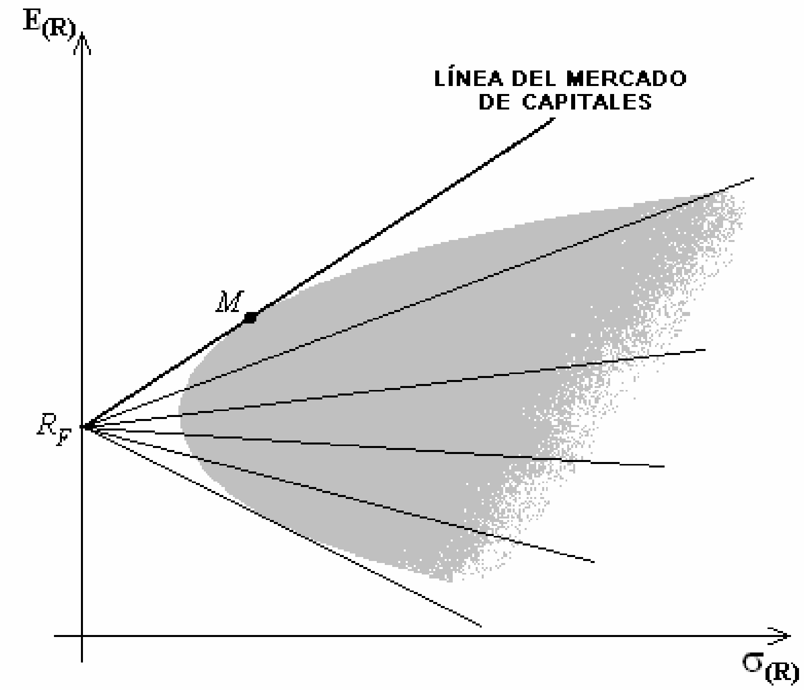


Figura III-12. Carteras mixtas generadas de la combinación del activo sin riesgo con distintas carteras riesgosas.

3.2.1. La Frontera Eficiente con la inclusión del activo libre de riesgo

La inclusión de un activo libre de riesgo da lugar a una nueva frontera eficiente, donde podemos distinguir dos casos:

1) Si el inversionista consigue un préstamo a tasa libre de riesgo[16], la línea del mercado de capitales constituye su nueva frontera eficiente, pues estará en posibilidades de llegar a una curva de indiferencia más alta de lo que sería posible a través de la inversión sólo en activos riesgosos, es decir, podrá encontrar una combinación de inversión que le sea más satisfactoria.
2) Si, como es más común, el inversor no está en posibilidad de acceder a un préstamo a tasa libre de riesgo y pretende conformar una cartera acreedora, su frontera eficiente estará constituida por la línea del mercado de capitales, pero sólo en el tramo que une R_F con M; a partir del portafolio M, la frontera eficiente permanecería como lo estaba antes de la inclusión del activo libre de riesgo, es decir, sobre la corteza de mínima varianza.

Una vez obtenida la frontera eficiente, los gustos personales del sujeto decisor –materializados en sus curvas de indiferencia- permitirán elegir la cartera mixta óptima. Esta política de inversión óptima se obtendrá, al igual que en el Modelo de Markowitz, en aquel punto donde la frontera eficiente sea tangente a las curvas de indiferencia. Los inversionistas conservadores o aversos al riesgo preferirán

[16] Los préstamos a tasa libre de riesgo se conceden a inversionistas institucionales. Se denomina inversionistas institucionales a aquellas entidades financieras especializadas en la administración del ahorro de personas naturales y jurídicas para su inversión en valores por cuenta y riesgo de estas. Los inversionistas institucionales actúan como grandes inversionistas ya que administran y concentran recursos de un gran número de pequeños inversionistas.

Al especializarse en la inversión y al administrar volúmenes importantes de recursos, los inversionistas institucionales tienen posibilidad de acceder a diversas y posiblemente mejores alternativas de inversión y de diversificar más eficientemente las carteras de valores, que los inversionistas que actúan individualmente.

La principal característica de los inversionistas institucionales es que las inversiones que realizan son principalmente a mediano y largo plazo. Entre éstos se incluyen las Instituciones de Seguros, las instituciones de Fianzas, las Sociedades de Inversión, los Fondos de Pensiones y Jubilaciones de personal y los Fondos de Primas de Antigüedad.

carteras acreedoras, mientras que los inversores agresivos preferirán carteras deudoras que les brinden mayor rendimiento esperado, con el consiguiente riesgo.

3.2.2. Obtención de la Cartera de Mercado

Pero ¿cuales son las proporciones W_i necesarias para conformar la cartera *M*? De nuevo se tiene un problema de maximización, pues se requiere encontrar aquella cartera que, combinada con el activo libre de riesgo, maximice la pendiente de la línea del mercado de capitales, es decir,

$$Max\ m = Max\ \frac{\mathrm{E}(R_P) - R_F}{\sigma(R_P)}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

donde

m	simboliza la pendiente de la línea del mercado de capitales
$\mathrm{E}(R_P)$	es el rendimiento esperado de un portafolios *P* constituido por los *n* activos
R_F	es la tasa cierta o la tasa del activo libre de riesgo
$\sigma(R_P)$	es la desviación típica del rendimiento del portafolios *P*

Recordemos que $\mathrm{E}(R_P)$ y $\sigma(R_P)$ están dados por:

$$\mathrm{E}(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) \qquad\qquad \sigma(R_P) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\ \sigma_{i,j}\Big)^{1/2}$$

Si reemplazamos las fórmulas anteriores en la fórmula de *m*, tenemos que:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) - R_F}{\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}\Big)^{1/2}}$$

Ahora, si consideramos que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, resulta que:

$$R_F = 1 \cdot R_F = \sum_{i=1}^{n} w_i R_F$$

Entonces, rescribimos el numerador en la fórmula de *m*:

$$\mathrm{E}(R_P) - R_F = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}(R_i) - \sum_{i=1}^{n} w_i R_F = \sum_{i=1}^{n} w_i [\mathrm{E}(R_i) - R_F]$$

De esta forma, la pendiente a maximizar puede ser expresada como una función de las *n* variables w_1, w_2, w_3, …, w_n:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i [\mathrm{E}(R_i) - R_F]}{\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{i,j}\Big)^{1/2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i [\mathrm{E}(R_i) - R_F]}{\sigma(R_P)}$$

La condición necesaria y suficiente[17] para que esta función tenga un extremo es que sus *n* primeras derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes se anulen, esto es,

$$\frac{\partial m}{\partial w_i} = 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, 3, ..., n$$

Puesto que *m* es un cociente de funciones, se aplica la regla de derivación respectiva:

$$\frac{\partial m}{\partial w_i} = \frac{\sigma(R_P)\cdot \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right) - \left[\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right]\cdot \frac{\partial \sigma(R_P)}{\partial w_i}}{\sigma^2(R_P)}$$

i = 1, 2, 3, …, n

Calculamos la derivada anterior en partes:

$$\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right) = \mathrm{E}(R_i) - R_F$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma(R_P)}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\, \sigma_{i,j}\right)^{1/2} \\
&= (1/2)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\, \sigma_{i,j}\right)^{-1/2} \left(2w_i\sigma_i^2 + 2\sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\, \sigma_{i,j}\right) \\
&= (1/2)\, [\sigma^2(R_P)]^{-1/2}\, (2)\, \left(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\, \sigma_{i,j}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma(R_P)}\left(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\, \sigma_{i,j}\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el numerador:

$$\frac{\partial m}{\partial w_i} = \frac{\sigma(R_P)\cdot[\mathrm{E}(R_i) - R_F] - \left[\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right]\cdot \frac{1}{\sigma(R_P)}\left(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\sigma_{i,j}\right)}{\sigma^2(R_P)}$$

i = 1, 2, 3, …, n

Ya hemos mencionado que cada una de las *n* derivadas anteriores deben anularse, esto es, que se anule su numerador y no a la vez su denominador. Puesto que sabemos que $\sigma^2(R_P) > 0$, necesariamente tenemos que:

$$\frac{\sigma(R_P)\cdot[\mathrm{E}(R_i) - R_F] - \left[\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right]\cdot \frac{1}{\sigma(R_P)}\left(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\sigma_{i,j}\right)}{\sigma^2(R_P)} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(R_P)\cdot[\mathrm{E}(R_i) - R_F] - \left[\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right]\cdot \frac{1}{\sigma(R_P)}\left(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j\neq i}^{n} w_j\sigma_{i,j}\right) = 0$$

[17] LINTNER, J. *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*, The Review of Economics and Statistics, Vol. 47, No. 1, Febrero 1965, p. 13-37.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma(R_P)}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]\right] \cdot (w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} w_j \sigma_{i,j}) = \sigma(R_P) \cdot [\mathrm{E}(R_i) - R_F]$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Pero sabemos que

$$\mathrm{E}(R_P) - R_F = \sum_{i=1}^{n} w_i[\mathrm{E}(R_i) - R_F]$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\frac{1}{\sigma(R_P)}(\mathrm{E}(R_P) - R_F) \cdot (w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} w_j \sigma_{i,j}) = \sigma(R_P) \cdot [\mathrm{E}(R_i) - R_F]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{E}(R_P) - R_F}{\sigma^2(R_P)} \cdot (w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} w_j \sigma_{i,j}) = \mathrm{E}(R_i) - R_F$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Puede observarse que para determinar las incógnitas w_1, w_2, w_3,… w_n se requeriría conocer como datos a $\mathrm{E}(R_P)$ y $\sigma^2(R_P)$, lo que a su vez exige conocer w_1, w_2, w_3,… w_n. Para solucionar este problema es necesario entonces realizar las transformaciones pertinentes que permitan expresar las incógnitas w_1, w_2, w_3,… w_n en función de los datos del problema, es decir, los rendimientos esperados y desviaciones típicas de cada uno de los activos considerados, así como de las covarianzas de todos los posibles pares de ellos.

Sea $\dfrac{\mathrm{E}(R_P) - R_F}{\sigma^2(R_P)} = \lambda$,

$$\Rightarrow \lambda(w_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} w_j \sigma_{i,j}) = \mathrm{E}(R_i) - R_F$$

$$\Rightarrow (\lambda w_i)\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} (\lambda w_j) \sigma_{i,j}) = \mathrm{E}(R_i) - R_F$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Hagamos $\lambda w_i = z_i$, por lo que:

$$z_i\sigma_i^2 + \sum_{\forall j \neq i}^{n} z_j \sigma_{i,j}) = \mathrm{E}(R_i) - R_F$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Éste es un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas z_1, z_2, z_3,… z_n:

$$\begin{array}{ll}
z_1\sigma_1^2 + z_2\sigma_{1,2} + z_3\sigma_{1,3} + \ldots + z_{n-1}\sigma_{1,n-1} + z_n\sigma_{1,n} & = \mathrm{E}(R_1) - R_F \\
z_1\sigma_{2,1} + z_2\sigma_2^2 + z_3\sigma_{2,3} + \ldots + z_{n-1}\sigma_{2,n-1} + z_n\sigma_{2,n} & = \mathrm{E}(R_2) - R_F \\
z_1\sigma_{3,1} + z_2\sigma_{3,2} + z_3\sigma_3^2 + \ldots + z_{n-1}\sigma_{3,n-1} + z_n\sigma_{3,n} & = \mathrm{E}(R_3) - R_F \\
\vdots & \\
z_1\sigma_{n-1,1} + z_2\sigma_{n-1,2} + z_3\sigma_{n-1,3} + \ldots + z_{n-1}\sigma_{n-1}^2 + z_n\sigma_{n-1,n} & = \mathrm{E}(R_{n-1}) - R_F \\
z_1\sigma_{n,1} + z_2\sigma_{n,2} + z_3\sigma_{n,3} + \ldots + z_{n-1}\sigma_{n,n-1} + z_n\sigma_n^2 & = \mathrm{E}(R_n) - R_F
\end{array}$$

Expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n-1} & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n-1} & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n-1} & \sigma_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \sigma_{n-1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n-1,n} \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n-1} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}_{C_{n\,\mathrm{x}\,n}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}_{Z_{n\,\mathrm{x}\,1}} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(R_1) - R_F \\ \mathrm{E}(R_2) - R_F \\ \mathrm{E}(R_3) - R_F \\ \vdots \\ \mathrm{E}(R_{n-1}) - R_F \\ \mathrm{E}(R_n) - R_F \end{pmatrix}_{(E-R)_{n\,\mathrm{x}\,1}}$$

Donde C es conocida y es la matriz de varianzas y covarianzas; Z es el vector columna de incógnitas auxiliares que permitirán el cálculo de las proporciones w_i buscadas, y $(E - R)$ es el vector columna cuyas componentes son los excesos de rendimiento esperado de cada activo con respecto a la tasa fija. Entonces, necesitamos conocer el vector Z, que nos dará las incógnitas auxiliares z_i.

Puesto que $C \text{ x } Z = E – R$, despejamos Z:

$$C \text{ x } Z = E - R$$
$$C^{-1} \text{ x } (C \text{ x } Z) = C^{-1} \text{ x } (E - R)$$
$$(C^{-1} \text{ x } C) \text{ x } Z = C^{-1} \text{ x } (E - R)$$
$$(I) \text{ x } Z = C^{-1} \text{ x } (E - R)$$
$$Z = C^{-1} \text{ x } (E - R)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}_{Z_{n\,\mathrm{x}\,1}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n-1} & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n-1} & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n-1} & \sigma_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \sigma_{n-1,3} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{n-1,n} \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_{n,n-1} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}^{-1}_{C_{n\,\mathrm{x}\,n}} \begin{pmatrix} \mathrm{E}(R_1) - R_F \\ \mathrm{E}(R_2) - R_F \\ \mathrm{E}(R_3) - R_F \\ \vdots \\ \mathrm{E}(R_{n-1}) - R_F \\ \mathrm{E}(R_n) - R_F \end{pmatrix}_{(E-R)_{n\,\mathrm{x}\,1}}$$

Finalmente, para encontrar las proporciones w_i, sabemos que $\lambda w_i = z_i$. Sumando para los n activos:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda w_i = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Pero $\sum_{i=1}^{n} \lambda w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} w_i = \lambda$, por lo que se deduce que

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

Puesto que $\lambda w_i = z_i$, se deduce que:

$$w_i \sum_{i=1}^{n} z_i = z_i$$

De donde finalmente despejamos w_i:

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i}$$

Las proporciones w_i encontradas caracterizan a la cartera de mercado, el punto en el cual la LMC toca tangencialmente la corteza de mínimo riesgo del conjunto eficiente.

3.3. EL MODELO DE MERCADO DE SHARPE: LA β DE UN ACTIVO

El Modelo de Markowitz dio origen a la aparición de una serie de modelos básicos en la Teoría de la Cartera tradicional, los cuales surgieron con el fin de completarlo y superar sus principales dificultades.

Uno de ellos es el Modelo de Mercado de Sharpe[18], el cual parte de la idea de que la correlación que existe entre las rentabilidades de los distintos activos no es directa, sino que se deriva de una serie de factores económicos del mercado que influyen simultáneamente en todos ellos. De este modo, la relación de dependencia entre la rentabilidad de un activo *i* y la del mercado en un momento dado, viene expresada por un modelo de regresión lineal como el siguiente:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

donde

R_i	Es la rentabilidad del activo *i* durante el periodo de tiempo considerado (variable dependiente).
α_i	Es un parámetro a estimar que refleja la parte del rendimiento del activo *i* que es independiente del mercado (ordenada al origen o término de intersección).
β_i	Es un parámetro a estimar que indica la sensibilidad del título *i* ante las variaciones del mercado (pendiente de la recta de regresión).
R_M	Es la rentabilidad del mercado[19] durante el periodo de tiempo considerado (variable independiente o explicativa).
ε_i	Es una perturbación o variable aleatoria no observable que incluye todos aquellos factores, individualmente irrelevantes, que influyen en el valor de R_i y que son independientes del mercado. Estos factores dependen de la propia naturaleza del activo.

Para estimar el valor de los parámetros α_i y β_i, Sharpe propone realizar una serie de observaciones tanto de la rentabilidad del título *i* como de la rentabilidad del mercado durante *T* periodos de tiempo, lo cual permite plantear la siguiente relación:

$$R_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} + \varepsilon_{it} \qquad t = 1, 2, 3, \ldots, T$$

Para cumplir con el proceso de estimación e inferencia derivados del modelo de regresión lineal, suponemos que las rentabilidades R_{it} y R_{Mt} son variables matemáticas sin propiedades probabilísticas, aparte de que son linealmente independientes. Planteamos también las siguientes hipótesis sobre la perturbación aleatoria ε_i:

1. $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $t = 1,2,3,\ldots, T$	(Esperanza matemática nula)
2. $Cov(\varepsilon_{it}, R_{Mt}) = 0$	(Homocedasticidad, es decir, las perturbaciones aleatorias siguen una distribución independiente de *t* y de R_{Mt} y tienen varianza constante σ^2)
3. $Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{it'}) = 0$, $t \neq t'$, $t'=1,2,\ldots,T$	(Independencia entre sí, es decir, ausencia de autocorrelación)
4. $\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2)$	(Distribución Normal)

A partir de lo anterior, se utiliza el método de estimación por mínimos cuadrados para encontrar el valor estimado de los parámetros buscados:

---

[18] SHARPE, W.F. *op. cit.*, p. 277-293.

[19] Inicialmente, Sharpe propuso emplear el valor de un índice representativo de la evolución del mercado (como el IPC) para aproximar la cartera de mercado. Sin embargo, Treynor propuso la sustitución de este índice por el rendimiento de la cartera de mercado.

$$\alpha_i = E(R_i) - \beta_i E(R_M) \qquad\qquad \beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$$

donde

$E(R_i)$	es la rentabilidad esperada del activo *i*.
$E(R_M)$	es la rentabilidad esperada del mercado.
$\mathrm{Cov}(R_i, R_M)$	es la covarianza entre la rentabilidad del activo *i* y la del mercado.
$\mathrm{Var}(R_M)$	es la varianza de la rentabilidad del mercado.

El coeficiente beta (β) estimado indica la pendiente de la recta de regresión o línea característica del título[20], lo que significa que por cada aumento unitario en la rentabilidad del mercado R_M, la rentabilidad del activo *i* aumenta β_i veces. Así, β mide relativamente el riesgo sistemático de un activo al examinar la correlación entre dicho valor y la cartera de mercado.

Este coeficiente permite la siguiente clasificación:

$\beta < 0 \Rightarrow$	El activo es superdefensivo, pues sus variaciones son de signo contrario a las variaciones del mercado; éste es un caso poco frecuente.
$\beta < 1 \Rightarrow$	El activo es poco volátil o defensivo, pues responde con una variación de menor orden en sus rendimientos ante una variación en los rendimientos del mercado.
$\beta = 1 \Rightarrow$	El activo es normal o neutro, pues su rentabilidad responde con una variación de igual orden ante una variación en la rentabilidad del mercado. Evidentemente, la β del mercado es 1.
$\beta > 1 \Rightarrow$	El activo es muy volátil o agresivo, pues sus rendimientos responden con una variación de grado superior ante una variación en los rendimientos del mercado.

Desde el punto de vista de esta clasificación, los títulos más recomendables en periodos de estabilidad serían aquellos con $\beta > 1$, pues ante variaciones positivas de R_M, el cambio en la rentabilidad del activo sería positivo y de mayor grado. No obstante, en periodos de inestabilidad no serían recomendables títulos con $\beta < 1$, pues ante variaciones negativas de R_M las modificaciones en la rentabilidad del título serían negativas y de alto grado.

En su modelo, Sharpe también propone descomponer el riesgo de un activo financiero en dos partes, (como se mencionó en la sección 2.2): el riesgo sistemático y el específico:

$$\mathrm{Var}(R_i) = \beta_i^2 \mathrm{Var}(R_M) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$$

donde

$\mathrm{Var}(R_i)$	es la varianza de la rentabilidad del activo *i*.
β_i^2	es el riesgo sistemático del título *i*.[21]
$\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$	es el riesgo no sistemático o específico del activo *i*.

Al analizar carteras en lugar de títulos individuales, recordemos que la rentabilidad de una cartera es una combinación lineal de las rentabilidades de los activos que la integran, es decir:

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

Recordemos que R_i (la rentabilidad de un título individual) está definido por $R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i$ con i=1, 2, 3, …, n. Sustituyendo:

---

[20] Así llamada por Treynor. Véase TREYNOR, J.L. *How to rate Management of Investment Funds*, Harvard Business Review, Enero-Febrero 1965, p. 63-75.

[21] Para medir dicho riesgo, a veces se emplea β_i en vez de $\beta_i^2 \mathrm{Var}(R_M)$, ya que la varianza del mercado $\mathrm{Var}(R_M)$ es idéntica para todos los activos.

$$
\begin{aligned}
R_P = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i &= \sum_{i=1}^{n} w_i\,(\alpha_i + \beta_i R_M + \varepsilon_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} w_i\,\beta_i R_M + \sum_{i=1}^{n} w_i\,\varepsilon_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha_i + R_M \sum_{i=1}^{n} w_i\,\beta_i + \sum_{i=1}^{n} w_i\,\varepsilon_i \\
&= \alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P
\end{aligned}
$$

donde $\alpha_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\alpha_i$, $\beta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\beta_i$, y $\varepsilon_P = \sum_{i=1}^{n} w_i\,\varepsilon_i$; β_P es la beta de la cartera.

Calculamos entonces, el rendimiento esperado y el riesgo de la cartera:

$$
\begin{aligned}
E(R_P) &= E\,[\alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P] \\
&= E\,[\alpha_P] + E[\beta_P R_M] + E[\varepsilon_P] \\
&= \alpha_P + \beta_P\, E[R_M]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(R_P) &= \mathrm{Var}\,[\alpha_P + \beta_P R_M + \varepsilon_P] \\
&= \mathrm{Var}[\alpha_P] + \mathrm{Var}\,[\beta_P R_M] + \mathrm{Var}\,[\varepsilon_P] \\
&= \beta_P^2\,\mathrm{Var}\,[R_M] + \mathrm{Var}\,[\varepsilon_P]
\end{aligned}
$$

A partir de la fórmula anterior de la varianza, puede verse de nuevo que el riesgo de una cartera tiene dos fuentes:

1) El riesgo sistemático, dado por $\beta_P^2\,\mathrm{Var}[R_M]$
2) El riesgo específico, dado por $\mathrm{Var}[\varepsilon_P]$

3.4. FUNDAMENTOS TEÓRICOS COMPLEMENTARIOS A LA TEORÍA DE LA CARTERA

Paralelamente con la Teoría de la Cartera conviven otros cuerpos teóricos, tales como los Modelos de Valoración de Activos Financieros -dentro de los cuales destacan el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) y el *Arbitrage Pricing Theory* (APT)- y la Teoría del Mercado Eficiente. Conviene distinguirlos de la Teoría de la Cartera debido a que, en ocasiones, la línea separatoria entre ellos no es nítida e, incluso se convierten en áreas complementarias.

3.4.1. El *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)

Además de la Teoría de los Mercados Eficientes, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) convive conjuntamente con la Teoría de la Cartera y describe las relaciones que pueden deducirse en el mercado cuando éste se encuentra en equilibrio y los inversionistas actúan como en las hipótesis de la Teoría de la Cartera.

Este modelo es producto de las aportaciones de Sharpe[22], Lintner[23] y Mossin[24], e intenta simplificar el Modelo de Markowitz basándose en la idea de que la evolución de la rentabilidad de un activo depende en parte de la evolución del mercado, el cual refleja la situación de la economía (o las expectativas que los inversionistas tienen sobre ésta). Plantea que el mercado sólo debe recompensar el riesgo no

[22] SHARPE, W.F. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, Vol. 19, 1964, p. 425-442.
[23] LINTNER, J. *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investmentes in Stock Portfolios and Capital Budgets*, Review of Economics and Statistics, Vol. 47, 1965, p. 13-37.
[24] MOSSIN, J. *Equilibrium in a Capital Asset Market*, Econometrica, Vol. 35, 1966, p. 768-783.

diversificable en condiciones de equilibrio, por lo que el rendimiento que se debe esperar de un activo con riesgo debe ser la suma del rendimiento del activo sin riesgo más una prima adicional que compense al inversionista por el riesgo sistemático que asume.

Las hipótesis del modelo son las siguientes:

- La evaluación de los portafolios estará en función de sus primeros dos momentos, es decir, su rentabilidad esperada y varianza.
- Se da el principio de *no saciedad*, es decir, entre dos carteras con idéntico riesgo, siempre preferirán la que ofrezca mayor rentabilidad esperada.
- Existe aversión al riesgo, por lo que preferirán la cartera con menor varianza ante una elección entre dos carteras con la misma rentabilidad esperada.
- Todos los activos pueden negociarse en el mercado, son infinitamente divisibles y se permiten las ventas en corto.
- El inversionista puede prestar y acceder ilimitadamente a préstamos, ambos a tasa libre de riesgo; esta tasa es la misma para todos los inversionistas.
- Los impuestos, costos de transacción y aumentos en los precios son despreciables o nulos.
- El horizonte temporal es de sólo un periodo y es el mismo para todos los inversionistas.
- La información está disponible para todos los agentes instantáneamente y es libre, y la actuación de cada agente es insignificante sobre el mercado.
- Existe homogeneidad en las expectativas futuras de los inversionistas, y contemplan idénticas distribuciones de probabilidad de la rentabilidad futura.

Asumiendo dichas hipótesis, el CAPM indica que la línea del mercado de capitales es la frontera eficiente para todos los inversionistas. Su ecuación es la siguiente:

$$\mathrm{E}(R_P) = R_F + \frac{\mathrm{E}(R_M)\text{-}R_F}{\sigma(R_M)}\sigma(R_P)$$

La rentabilidad esperada de las carteras situadas sobre la línea del mercado de capitales se caracteriza por tener dos componentes: R_F, que es la tasa libre de riesgo común a todas ellas, y una prima de riesgo adicional que recompensa al inversionista por cada unidad de riesgo que asume en su cartera y que corresponde al segundo sumando de la ecuación anterior.

Por otra parte, la única cartera con riesgo que pertenece a la línea del mercado de capitales es la cartera de mercado M; todas las demás son combinaciones lineales de R_F y M. Es decir, cuando un inversionista se ubica en cualquier punto de la LMC, invierte en M y, en consecuencia, en todos los activos que la integran y en sus mismas proporciones. Si un inversionista es conservador, seguramente invertirá parte de sus fondos en un activo libre de riesgo. En cambio, un inversionista propenso al riesgo solicitara fondos extra a la tasa libre de riesgo para invertir todo en la cartera de mercado. La cantidad que presta o pide prestado es la que lo sitúa en un tramo u otro de la recta, lo que marca la diferencia entre cada punto de la LMC.

Puesto que todos los inversionistas que decidan conservar activos riesgosos se inclinarán por la cartera M, la selección de una cartera riesgosa es independiente de la selección de una cartera mixta en particular. Este hecho es conocido como el *Teorema de Separación de Tobin*, pues la decisión de inversión está *separada* de la decisión de financiamiento; es decir, la decisión financiera de pedir prestado o prestar es independiente de la determinación de la cartera de mercado.

Por otra parte, si el mercado está en equilibrio, esto significa que todos los títulos son poseídos por alguien. Por lo tanto, si todos los inversionistas compran la cartera M, y para que se cumpla que no haya exceso de demanda de ninguno de los activos, M estará realmente integrada por todos los activos con riesgo que existen en el mercado, ponderados en las mismas proporciones en que intervienen en él. Por ello, el portafolio M recibe el nombre de cartera de mercado.

De la nueva frontera eficiente o LMC, cada inversionista elegirá su portafolio óptimo en función de sus preferencias personales. Toda cartera situada sobre esta frontera eficiente tendrá una rentabilidad perfectamente correlacionada con la rentabilidad del mercado, lo que significa que la recta representará totalmente la relación que existe entre ambas rentabilidades; por lo tanto, las carteras sobre la LMC carecerán de riesgo no sistemático, pues la LMC representa una situación de equilibrio en la que el mercado no ofrece ninguna compensación por el riesgo específico, ya que éste se puede eliminar a través de la diversificación.

Sin embargo, en un mercado donde existe la libertad de prestar o pedir prestado a la tasa libre de riesgo siempre es posible alcanzar la cartera de mercado. Esto tiene una implicación importante, pues significa que no se necesita conocer las preferencias del riesgo de los accionistas individuales; ellos tomarán el precio del riesgo que determina el mercado como el correcto.

Es importante resaltar que el Modelo de Markowitz es un modelo de equilibrio particular y no de equilibrio general, ya que no ofrece una valoración de equilibrio de mercado, sino más bien un método de inversión diversificada. En cambio, el Modelo CAPM constituye una versión de equilibrio de mercado de la teoría de la cartera, puesto que trata de determinar el comportamiento del mercado en el cual todos los agentes son diversificadores del tipo Markowitz y los precios de equilibrio. La principal conclusión del CAPM es que el rendimiento de equilibrio de un activo no depende de su volatilidad, sino del riesgo sistemático o riesgo de mercado, el cual se mide con la beta (β).

3.4.1.1. La Línea de Seguridad del Mercado (LSM)

La LMC expresa la relación entre la rentabilidad y riesgo para portafolios eficientes y sin riesgo específico. No obstante, dicha relación no se presenta para el resto de las carteras que sí tienen riesgo específico y son dominados por la LMC.

En estos casos, el CAPM ofrece una relación de equilibrio llamada Línea de Seguridad del Mercado (LSM) o *Security Market Line*; su ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(R_i) &= R_F + \frac{\mathrm{E}(R_M) - R_F}{\mathrm{Var}(R_M)} \mathrm{Cov}(R_i, R_M) \\ &= R_F + \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)} \cdot [\mathrm{E}(R_M) - R_F] \\ &= R_F + \beta_i \, [\mathrm{E}(R_M) - R_F] \end{aligned}$$

Cuando el mercado está en equilibrio, la LSM expresa la idea fundamental del CAPM pues relaciona la rentabilidad y riesgo sistemático del mercado y la de títulos individuales y carteras, sean o no eficientes. Así, la rentabilidad de un título (o una cartera) se compone de una rentabilidad fija R_F y una rentabilidad proporcional al riesgo sistemático, dada por $[\mathrm{E}(R_M) - R_F]\ \beta_i$. Esta compensación adicional se interpreta como la prima de riesgo de mercado, esto es, el rendimiento extra que se puede ganar si se conserva la cartera de mercado en lugar del activo libre de riesgo.

De acuerdo a lo anterior, la rentabilidad adicional de un activo estará en función sólo de su riesgo sistemático y no de su riesgo total. Esto debido a que, en un mercado como el que estamos suponiendo, ningún inversionista comprará un activo individual si puede obtener el mismo rendimiento con menor riesgo al repartir su presupuesto entre varios activos y desaparecer el riesgo diversificable de su cartera. Ya que el riesgo sistemático es la única clase de riesgo a considerar en la cartera, también será el único a considerar al escoger los títulos que la integran. Por lo tanto, el riesgo a atender por los inversionistas es el sistemático, y cuanto mayor sea éste, mayor rentabilidad le exigirán al activo para decidirse a comprarlo o mantenerlo en su cartera.

La recta LSM es ideal, pues permite valorar los activos financieros cuando existe equilibrio en el mercado; sin embargo, en el mundo real los títulos pueden estar infravalorados (su precio es más bajo que el que tendría en equilibrio) o sobrevalorados (el precio es mayor al que tendría en equilibrio). Si el activo está infravalorado, se origina un incremento en su demanda y, por consiguiente, en su precio, hasta que su rentabilidad alcance la LSM; si, por el contrario, el activo está sobrevalorado, su demanda y su precio caerán hasta alcanzar el equilibrio dado por la LSM.

Resulta muy útil comparar la LMC y la LSM para ver que son mutuamente consistentes; los principales puntos de referencia entre las dos se pueden resumir del modo siguiente:

- La medida de riesgo de la LSM es la desviación estándar, una medida del riesgo total, mientras que la medida de riesgo de la LMC es beta, una medida del riesgo sistemático.
- Estando en equilibrio, sólo las carteras completamente diversificadas descansarán sobre la LMC, mientras que los valores individuales quedarán trazados por debajo. En cambio, todos los valores y todas las carteras se encontrarán sobre la LSM.

3.4.1.2. Inconvenientes del CAPM

El CAPM ha sido fuertemente criticado, sobre todo por las hipótesis en que se sustenta. Entre las características insatisfactorias para muchos autores destacan:

- Las dificultades que surgen al calcular en la práctica la cartera de mercado o los coeficientes β.
- La idéntica diversificación de cualquier inversionista.
- El hecho de considerar al mercado como el único factor explicativo de la rentabilidad de los activos.
- La hipótesis de eficiencia del mercado.
- El hecho de suponer que cualquier inversionista tiene acceso a préstamos a tasa libre de riesgo.

No obstante, muchos economistas consideran que, a pesar de sus inconvenientes, este modelo es el más adecuado al enfrentarse a la noción de riesgo, debido a que refleja la exigencia de los inversionistas de cierta rentabilidad extra al asumir riesgos, o la preocupación fundamental por aquellos riesgos que no pueden eliminar por la vía de la diversificación.

3.4.2. *Arbitrage Pricing Theory* (APT)

La falta de unanimidad que muestran los resultados de numerosos trabajos con relación a la validez del CAPM y las críticas que ha recibido han llevado a muchos investigadores a considerar una perspectiva multifactorial más realista en los modelos de valoración, en los que no hay una sola fuente de riesgo sino múltiples. Entre ellos, Stephen Ross[25] propuso este nuevo modelo basado en la idea de que la rentabilidad de un activo depende no sólo del mercado, sino de múltiples factores. Así, el APT supone un modelo factorial para explicar la rentabilidad de un título:

$$R_i = \mathrm{E}(R_i) + \beta_{i1}F_1 + \beta_{i2}F_2 + \ldots + \beta_{ik}F_k + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

donde

- R_i es la rentabilidad observada del activo i.
- $\mathrm{E}(R_i)$ es la rentabilidad esperada del activo i.
- β_{ij} es la sensibilidad de R_i ante las variaciones del factor sistemático j.
- F_j es el cambio en el factor sistemático j.
- ε_i es un error o perturbación aleatoria.

[25] ROSS, S.A. *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, Journal of Economic Theory, Diciembre 1976, p. 341-360.

Esto quiere decir que la rentabilidad de un activo depende, por un lado, de factores sistemáticos o macroeconómicos que afectan a todos los títulos del mercado y, por el otro, de perturbaciones que inciden en particular sobre cada empresa o sector. Si estos factores no afectan el rendimiento esperado de un valor, existirán oportunidades de arbitraje.

El modelo permite deducir que el riesgo total de un activo tiene dos fuentes:

1) El riesgo sistemático, que procede de la variación desconocida de los factores sistemáticos y que se mide por los coeficientes β asociados a dichos factores.
2) El riesgo específico, que puede reducirse mediante diversificación y que está originado por las perturbaciones aleatorias que inciden en el activo en particular.

Esta relación, dada como una combinación lineal, se sustenta en las siguientes hipótesis:

a) Las perturbaciones ε_i de los distintos activos no están correlacionadas.
b) Los factores sistemáticos F_j son independientes entre sí e independientes también de las perturbaciones ε_i.
c) Si el mercado está en equilibrio y el inversionista cambia la composición de su cartera sin invertir fondos adicionales, obtendrá una rentabilidad adicional nula.

Retomando la última hipótesis, supongamos que un inversionista posee una cartera específica. Si denotamos por d_i al cambio en la proporción del i-ésimo título, se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} d_i R_i = 0$$

La primera ecuación implica que las ventas de determinados activos deben de cubrir las compras de otros, para no alterar el valor total de la cartera; por su parte, la segunda ecuación indica que los cambios en la composición de la cartera originarán una rentabilidad igual a cero. Si en esta expresión sustituimos la fórmula de la rentabilidad de un título propuesta en este modelo, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i R_i = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathrm{E}(R_i) + F_1 \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{i1} + F_2 \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{i2} + \cdots + F_k \sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{ik} + \sum_{i=1}^{n} d_i \varepsilon_i = 0$$

Puede demostrarse que:

a) $\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{ij} = 0$

En un mercado en equilibrio es posible suponer que todas las carteras están bien diversificadas y, por lo tanto, su riesgo específico tenderá a cero y sólo importa el riesgo sistemático. (j = 1,2,…, k)

b) $\sum_{i=1}^{n} d_i \varepsilon_i = 0$

Puesto que las perturbaciones aleatorias se suponen independientes, por la Ley de los Grandes Números sabemos que su media ponderada es aproximadamente igual a cero con sólo mantener un número suficiente de activos.

Por lo tanto, retomando la expresión anterior, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i R_i = \sum_{i=1}^{n} d_i E(R_i) = 0$$

Podemos deducir de todo lo anterior que en un mercado en equilibrio se cumplen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$
\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{i1} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{i2} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{ik} &= 0
\end{aligned}\right\}
\qquad\qquad
\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{i1} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} d_i \beta_{ik} &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} d_i E(R_i) &= 0
\end{aligned}\right\}
$$

Estos dos sistemas son equivalentes; en el segundo, es posible demostrar que la última ecuación es una combinación lineal de las ecuaciones restantes, por lo que existen k+1 escalares λ_0, λ_1, λ_2,…, λ_k, tales que:

$$\mathrm{E}(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \lambda_3\beta_{i3} + \cdots + \lambda_k\beta_{ik}$$

Cada factor λ_1, λ_2,…, λ_k se interpreta económicamente como la prima de riesgo asociada al factor ***j***. La relación anterior indica, entonces, que en un mercado en equilibrio, la rentabilidad esperada de un activo es la suma de la rentabilidad del activo sin riesgo más ciertos premios por riesgo ponderados por la sensibilidad a cada factor sistemático.

Esta relación no sólo sirve para estimar la rentabilidad esperada de un activo, sino que también sirve para valorarlo, y conocer si está infra o sobrevalorado; en ambos casos, el activo llegará finalmente a una posición de equilibrio.

3.4.2.1. Inconvenientes de la APT y relación con el CAPM

El APT también ha sido objeto de críticas y dudas respecto a su posibilidad real de ser contrastado en sentido estricto; en este aspecto, autores como Shanken (1982) cuestionan una relación lineal exacta entre rentabilidad y riesgo, por lo que la formulación práctica podría ser inapropiada.

Sin embargo, la mayor crítica que este modelo ha recibido reside en la dificultad de una correcta identificación de los factores sistemáticos que se deben considerar para explicar el rendimiento de un activo. Tratando de subsanar este detalle, Chen, Roll y Ross[26] propusieron considerar determinadas variables macroeconómicas y financieras que –desde su óptica– capturan el riesgo sistemático de una economía, y las redujeron a los siguientes cuatro factores sistemáticos:

1. Los cambios en la inflación anticipada y no anticipada.
2. Las variaciones no anticipadas en la estructura temporal de las tasas de interés.
3. Los cambios no anticipados en la producción industrial, medida por el PIB.
4. Los cambios no anticipados en las expectativas sobre el precio del riesgo o primas por insolvencia.

Este estudio –realizado en la NYSE, la bolsa de Nueva York– reveló que los tres últimos factores fueron los más significativos, y sus autores concluyeron que los rendimientos de las acciones están expuestos a noticias económicas sistemáticas y son valorados en función de su exposición. A pesar de ello, estudios posteriores demostraron que no es posible considerar un número fijo de factores de este tipo, y que la consideración de estos cuatro factores no solventa las dificultades del modelo.

---

[26] CHEN, N., ROLL, R. y ROSS, S.A. *Economic Forces and the Stock Market: Testing the APT and Alternative Asset Pricing Theories*, Graduate School of Business, Universidad de Chicago, Documento No. 119, Diciembre 1983.

Por otra parte, si tanto el APT como el CAPM pueden realizar predicciones sobre el futuro rendimiento de los títulos, es posible encontrar una relación que ligue ambas teorías por medio de sus coeficientes β, la cual es la siguiente:

$$\beta_i = \beta_{i1}\beta_{F1} + \beta_{i2}\beta_{F2} + \beta_{i3}\beta_{F3} + \cdots + \beta_{ik}\beta_{Fk}$$

Es decir, la β del CAPM es una combinación lineal de las β's de cada factor ante cambios en la rentabilidad del mercado (β_{Fj}) ponderadas (a través de β_{ij}) por la sensibilidad del activo ante cambios del factor *j*. En otras palabras, los modelos factoriales en equilibrio como el APT son esencialmente una generalización del modelo CAPM pero expresado en forma de una 'multibeta'.

3.4.3. La Teoría del Mercado Eficiente

Propuesta por el Prof. Eugène Fama[27], de la Universidad de Chicago, esta teoría sostiene que un mercado de valores es eficiente si toda la información relevante respecto a cada activo se refleja en su precio[28]. Partiendo de esta hipótesis, la Teoría del Mercado Eficiente considera que los movimientos de los precios siguen una caminata aleatoria (***random walk***)[29], debido a la necesidad de un ajuste instantáneo ante la llegada de nueva información de carácter impredecible. Esto requiere que las series de rentabilidad mensuales se comporten de acuerdo a un proceso estacionario de 'ruido blanco', es decir, las variables aleatorias que lo forman no guardan correlación estadística.

Esta aproximación asegura que los cambios de los precios de un activo de un periodo a otro son estadísticamente independientes o muy próximos a serlos. Para ello, se supone que el mercado de valores es de competencia perfecta, por lo que la información tiene un costo nulo y el precio del activo refleja toda la información existente; en este mercado ideal, los precios cambiarían sólo ante la llegada de nueva información no disponible hasta ese momento. Así, ya que la nueva información es aleatoria, los movimientos de los precios serán estadísticamente independientes unos de otros.

En este contexto, la mejor estimación el verdadero valor de un título lo constituye su precio. Así, un mercado es eficiente cuando la competencia entre los distintos agentes (inversionistas) que intervienen en el mismo, guiados por el principio del máximo beneficio, conduce a una situación de equilibrio en la que en todo momento el precio de cualquier activo financiero constituye una buena estimación de su valor intrínseco.

Más que racionalidad de los agentes, esta teoría requiere que los intervinientes del mercado tengan expectativas racionales; sin embargo, también admite la posibilidad de que algunos inversionistas reaccionen inadecuadamente ante la nueva información. Pero dichas reacciones son aleatorias y siguen una distribución normal, de forma tal que por el ajuste instantáneo de los precios a la nueva información no se pueden obtener rentabilidades extraordinarias analizando tendencias de precios o cualquier otro tipo de información, por lo que resulta imposible superar a las combinaciones de títulos construidas mediante modelos específicos de selección de carteras.

---

[27] FAMA, E. *Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance, No. 25, Mayo 1970, p.382-417.

[28] En este sentido, existen numerosos trabajos que avalan la hipótesis de existencia de un mercado eficiente, por ejemplo, ELTON, E.J. y GRUBER, M.J. *Modern Portfolio Theory and Investment Análisis*, John WiIley & Sons, 1995. O bien, JENSEN, M. *The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964*, The Journal of Finance, Mayo 1968, p. 389-416.

No obstante, también existen evidencias empíricas que demuestran lo contrario, como por ejemplo GOETZMAN, W.N. e IBBOTSON, R.G. *Do winners repeat? Patterns in Mutual Fund Behaviour*, The Journal of Portfolio Management, No. 20, Invierno 1994, p. 9-18.

[29] Este hecho fue corroborado desde comienzos del siglo XX por el francés Bachelier en BACHELIER, L. ***Théorie de la Spéculation***, Annales de l'École Normale Supériore, Gauthier-Villars, 17, París, Francia, 1900, p. 21-86. Diversos estudios –como el de Urrutia, 1994- aceptan la caminata aleatoria para economías en desarrollo para Argentina, Brasil y México, pero no se cumple para algunos países, como Chile.

Una paradoja de la hipótesis de eficiencia de los mercados es que los que actúen en él –o al menos una parte importante de ellos- crean que no lo es y traten, por tanto, de obtener oportunidades de negocio, a través del análisis de la información disponible y con la esperanza de vender a un precio más alto que el intrínseco o comprar a uno más bajo. Este tipo de actuaciones afectará a los precios, y sólo de este modo estarán incorporando la información. Esto significa que al realizar masivamente análisis técnico, fundamental o de cualquier otra clase, se contribuye a que el mercado gane en eficiencia.

Un mercado eficiente siempre tiene carácter ideal, por lo que es difícil conocer –en la práctica- el grado de proximidad existente entre un mercado concreto y este concepto irreal. De ahí que Fama –y otros autores- haya distinguido entre tres tipos de eficiencia en función del conjunto de información que se considera incorporada en el precio:

1) Eficiencia Débil

   Según la hipótesis débil del mercado eficiente, las series históricas de precios de los títulos no contienen información que pueda ser usada por el inversor para formar una cartera que le permita obtener rentabilidades extraordinarias. Esto es debido a que toda la información pasada (precios de mercado, cifras de volumen, etc.) ya ha sido incorporada al precio de mercado del título, por lo que los precios son la mejor estimación del valor del activo. En este sentido, se dice que los mercados eficientes no tienen memoria[30], pues toda la información de las series históricas es inútil para dirigir una estrategia de negociación.

2) Eficiencia Semifuerte o Intermedia

   La hipótesis intermedia de eficiencia plantea que no sólo la información contenida en la serie histórica de precios, sino toda la información pública, está incorporada a los precios de mercado de los títulos y, en consecuencia, nadie puede ‘ganarle al mercado’ y utilizarla para obtener beneficios anormales.[31] Esta información pública consiste en todos los informes publicados en prensa, televisión, radio y otras investigaciones. En este caso, se dice que los mercados eficientes valoran la información que afecta al valor intrínseco.

3) Eficiencia Fuerte

   La forma fuerte de eficiencia supone que los precios incorporan toda la información relevante para su formación, y en particular, la información privilegiada o no pública. Esto implica que, aunque en la forma intermedia de eficiencia existiera la posibilidad de que algunos inversionistas pudieran obtener beneficios utilizando la información antes de que se hiciera pública, en el caso de la forma fuerte esta opción no es posible. Ante esta hipótesis, nadie puede enriquecerse utilizando información[32].

---

[30] Esta forma de eficiencia supondría una contradicción directa con uno de los principios de la Teoría de Dow, que indica que los mercados de valores tienen memoria y la historia tiende a repetirse; esto anula la posibilidad de utilizar herramientas de Análisis Técnico para obtener rentabilidades extraordinarias de forma sistemática.

[31] De ser cierta esta forma de eficiencia, no tendría sentido realizar el Análisis Fundamental de una empresa. Recordemos que este tipo de análisis busca determinar el valor intrínseco de una empresa mediante la información obtenida a partir de sus estados financieros, su estructura de capital, información corporativa, presencia en el mercado, etc. para obtener oportunidades de negocio; de acuerdo a esta hipótesis de eficiencia, los precios reflejan ya toda la información de la empresa y están valuados en su justo precio, por lo que bastaría con revisar los precios para determinar dicho valor intrínseco, sin necesidad de echar mano de las herramientas de Análisis Fundamental (análisis vertical, horizontal, de razones, etc.).

Sin embargo, puesto que las expectativas de los inversores determinan los precios, y las expectativas se basan en precios pasados, evidentemente la información histórica tiene una influencia significativa en los precios futuros. Por otra parte, aunque los mercados fueran totalmente eficientes, alguien tendría que analizar la información para que fuera útil. Incluso si todos los inversores dispusieran de la misma información al mismo tiempo, la interpretación que podrían hacer de esa información no tiene por qué ser la misma, con lo cual las conclusiones y las decisiones derivadas de la misma información pueden incluso ser opuestas, lo que hará que el valor oscile y no vaya siempre en el mismo sentido que la información disponible al efecto.

[32] GÓMEZ BEZARES, F. *Gestión de carteras (Eficiencia, Teoría de Cartera, CAPM y APT)*, Desclée de Brouwer, Bilbao, España, 1993, p.44-45.

Resulta evidente que cualquier rechazo a la hipótesis de la eficiencia débil también operará contra las versiones semifuerte y fuerte. Así, el que la hipótesis de eficiencia débil sea cierta es una condición necesaria, más no suficiente, para aceptar las versiones semifuerte y fuerte. De igual forma, la versión semifuerte es una condición necesaria para que sea cierta la versión fuerte, pero no es suficiente. En contraste, el hecho de que se confirme la hipótesis de eficiencia fuerte resulta necesario y suficiente para aceptar las hipótesis de eficiencia semifuerte y débil.

A lo largo de la literatura financiera, son numerosos los estudios que han intentado contrastar la eficiencia de los mercados[33]. Sin embargo, entre los mismos no existe consenso sobre qué tipo de eficiencia se evidencia en la práctica. A este hecho se une, además, el descubrimiento de una serie de anomalías que, al permitir obtener rendimientos extraordinarios, ponen en tela de juicio los cimientos de la Teoría del Mercado Eficiente. La mayor parte de ellas son patrones temporales, es decir, los rendimientos son sistemáticamente superiores o inferiores dependiendo de la hora, el día de la semana y el mes del año. Entre dichas y otras irregularidades destacan las siguientes:

- *Patrones de hora y día de la semana.* Este patrón ha sido largamente estudiado por diversos autores, que notaron que los precios tienden a subir tanto en los primeros quince minutos como en los últimos quince minutos del día (efecto hora del día); también se percataron de que el rendimiento medio desde el cierre del viernes al cierre del lunes es sensiblemente menor al de otros días de la semana (efecto fin de semana).
- *Patrones Semanales y Mensuales.* Diversos estudiosos han observado que los rendimientos de enero son sustancialmente superiores a los del resto del año, especialmente para activos pequeños (efecto enero); también han notado que en la primera mitad del mes se obtienen mayores rendimientos que en la segunda (efecto semana del mes).
- *Patrones por Tamaño*. Se ha observado que tanto la rentabilidad total de un título como la ajustada por el riesgo disminuyen a medida que aumenta el tamaño relativo de la empresa.

En realidad, podría decirse que el mercado es eficiente en el largo plazo e ineficiente en el corto, por lo que siempre resulta conveniente analizar la información financiera de una empresa en la fase de Análisis de Valores, antes de invertir en ella.

Por otra parte, el rápido ajuste de los precios del mercado a la nueva información es el mecanismo mediante el cual el mercado se mueve al equilibrio. Si los precios de mercado no responden a nueva información de tal forma que desplacen el mercado hacia el equilibrio, entonces no existe motivo alguno para pensar que los mercados reales se comportan de la forma en que el CAPM supone. Esto significa que existe una íntima relación teórica y práctica entre el CAPM y la hipótesis de los mercados eficientes.

[33] Dichos estudios pueden consultarse en FAMA, E.F. *Efficient Capital Markets:II*, The Journal of Finance, Diciembre 1991, p. 1575-1617;REINGANUM, M.R., *El Colapso de la Hipótesis del Mercado Eficiente*, Análisis Financiero, No. 44, 1991, p. 30-37.

CAPÍTULO IV
APLICACIÓN EMPÍRICA DE LA TEORÍA DE LA CARTERA EN EL SISTEMA FINANCIERO MEXICANO

El marco teórico expuesto en los capítulos anteriores representa una sólida y relativamente moderna rama del conocimiento en el área de Economía y Finanzas; como tal, evidentemente resultan muy diversas sus aplicaciones y usos en las economías de todo el mundo, sin dejar de lado el enorme potencial que representa como base para trabajos y desarrollos posteriores, al complementarse con el avance en otras áreas del conocimiento humano.

Siendo así, la presente investigación no estaría completa de no incluir una aplicación empírica que muestre parte de las posibilidades que ofrece esta multidisciplinaria teoría, ejercicio que naturalmente consiste en la conformación de una cartera enmarcada por el Sistema Financiero Mexicano.

4.1. SELECCIÓN DE ACTIVOS

En este trabajo se conformarán carteras de inversión con base en un conjunto de diez de las 35 acciones que integran actualmente la muestra del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) [1], del total de 133 emisoras enlistadas en la Bolsa Mexicana de Valores.

Buscando seleccionar las acciones más representativas en el cálculo de dicho índice, se ajustó un modelo de regresión lineal simple considerando como variable dependiente a la serie del IPC, y como variables explicativas a las cotizaciones históricas de las 35 series accionarias que conforman la muestra base para el cálculo del IPC, las cuales se presentan en la Tabla IV-A. Los datos provienen de 140 observaciones diarias del IPC y de cada una de las 35 series anteriores a partir de la entrada en vigor de esta muestra (01 de Febrero de 2007) y hasta el 15 de Agosto de 2007. Utilizando el paquete estadístico SPSS 13.0, se ajustó entonces el siguiente modelo:

$$P_{\text{IPC}} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{35} \beta_i P_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, 35$$

donde P_{IPC} es la variable dependiente que simboliza el puntaje del IPC

β_0 es el intercepto u ordenada al origen del modelo

β_i es el coeficiente de cada una de las variables independientes (P_i) del modelo

P_i representa la cotización de cada una de las 35 acciones que fungen como variables explicativas del modelo

Los resultados más importantes de este modelo se resumen en las tablas IV-2 y IV-3. Así, en la Tabla IV-B se observa que el modelo propuesto presenta el coeficiente de determinación más elevado posible ($R^2 = 1$), lo que significa que este modelo explica el 100% de la variabilidad del IPC. Incluso después de ajustarlo por grados de libertad, el coeficiente de correlación múltiple R resulta igual a uno, lo que indica una perfecta relación lineal entre el comportamiento del IPC y el de las 35 acciones; esto era de esperarse, puesto que dichas series constituyen la muestra base para el cálculo del IPC en el periodo estudiado. En las estimaciones existe un error estándar de 16.43 puntos, y no existen indicios de autocorrelación de primer orden dada la cercanía de la estadística Durbin-Watson a 2 (DB = 2.326), lo que significaría una violación a uno de los supuestos del modelo de regresión.[2]

[1] Esta muestra estará vigente en el periodo comprendido del 01 de Febrero de 2007 al 31 de Enero de 2008, de acuerdo al Boletín Informativo de la Bolsa Mexicana de Valores, fechado el 16 de Enero de 2007.

[2] Las hipótesis sobre los errores en un modelo de regresión fueron revisadas en la Sección 3.3.

TICKER	SERIE	EMISORA	SECTOR
ALFA	A	Alfa, S.A.B. de C.V.	Varios
AMX	L	América Móvil, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
ARA	*	Consorcio Ara, S.A. de C.V.	Construcción
ARCA	*	Embotelladoras Arca, S.A.B. de C.V.	Transformación
BIMBO	A	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	Transformación
CEMEX	CPO	Cemex, S.A.B. de C.V.	Construcción
CICSA	B-1	Carso Infraestructura y Construcción, S.A. de C.V.	Varios
COMERCI	UBC	Controladora Comercial Mexicana, S.A.B. de C.V.	Comercio
ELEKTRA	*	Grupo Elektra, S.A. de C.V.	Comercio
FEMSA	UBD	Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.	Transformación
GAP	B	Grupo Aeroportuario del Pacífico, S.A. de C.V.	Servicios
GCARSO	A1	Grupo Carso, S.A. de C.V.	Varios
GEO	B	Corporación Geo, S.A.B. de C.V.	Construcción
GFAMSA	A	Grupo Famsa, S.A.B. de C.V.	Comercio
GFINBUR	O	Grupo Financiero Inbursa, S.A. de C.V.	Servicios
GFNORTE	O	Grupo Financiero Banorte, S.A. de C.V.	Servicios
GMÉXICO	B	Grupo México, S.A.B. de C.V.	Industria Extractiva
GMODELO	C	Grupo Modelo, S.A.B. de C.V.	Transformación
GRUMA	B	Gruma, S.A.B. de C.V.	Transformación
HOMEX	*	Desarrolladora Homex, S.A.B. de C.V.	Construcción
ICA	*	Empresas Ica, S.A.B. de C.V.	Construcción
ICH	B	Industrias CH, S.A.B. de C.V.	Transformación
IDEAL	B-1	Impulsora del Desarrollo y el Empleo en América Latina, S.A.B. de C.V.	Varios
KIMBER	A	Kimberly-Clark de México, S.A.B. de C.V.	Transformación
OMA	B	Grupo Aeroportuario del Centro Norte, S.A.B. de C.V.	Servicios
PE&OLES	*	Industrias Peñoles, S.A. de C.V.	Industria Extractiva
PINFRA	*	Promotora y Operadora de Infraestructura, S.A. de C.V.	Construcción
SARE	B	Sare Holding, S.A.B. de C.V.	Construcción
SORIANA	B	Organización Soriana, S.A.B. de C.V.	Comercio
TELECOM	A-1	Carso Global Telecom, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
TELMEX	L	Teléfonos de México, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
TLEVISA	CPO	Grupo Televisa, S.A.	Comunicaciones y Transportes
TVAZTCA	CPO	TV Azteca, S.A. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
URBI	*	Urbi Desarrollos Urbanos, S.A. de C.V.	Construcción
WALMEX	V	Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V.	Comercio

Tabla IV-A. Las 35 emisoras de la BMV que componen la actual muestra del IPC.

Modelo	R	R^2	R^2 Ajustada	Error Estándar de la Estimación	Durbin-Watson
1	1.000	1.000	1.000	16.42901	2.326

Tabla IV-B. Resumen del Modelo.

	Coeficientes no estandarizados			Coeficientes estandarizados	t	Sig.	Intervalos de Confianza al 95% para β_i	
	β_i	Error Estándar		B			Lím. Inferior	Lím. Superior
β_0	-56.6949	219.3626			-0.2585	0.7966	-491.6991	378.3093
ALFAA	6.6956	1.7400	25.99%	0.0198	3.8480	0.0002	3.2451	10.1462
AMXL	231.0679	4.3342	1.88%	0.4862	53.3125	0.0000	222.4730	239.6628
ARA	**1.6400**	**6.3851**	**389.34%**	**0.0010**	**0.2568**	**0.7978**	**-11.0219**	**14.3019**
ARCA	**9.0226**	**4.8488**	**53.74%**	**0.0053**	**1.8608**	**0.0656**	**-0.5927**	**18.6380**
BIMBOA	11.0928	1.2588	11.35%	0.0405	8.8120	0.0000	8.5965	13.5891
CEMEXCPO	77.5651	2.2988	2.96%	0.1037	33.7413	0.0000	73.0064	82.1237
CICSAB1	**7.4039**	**8.0347**	**108.52%**	**0.0045**	**0.9215**	**0.3589**	**-8.5293**	**23.3371**
COMERCIUBC	**2.4960**	**3.5123**	**140.72%**	**0.0020**	**0.7107**	**0.4789**	**-4.4689**	**9.4609**
ELEKTRA	1.7725	0.3878	21.88%	0.0189	4.5708	0.0000	1.0035	2.5414
FEMSAUBD	17.4529	3.0050	17.22%	0.0242	5.8080	0.0000	11.4939	23.4118
GAPB	**3.1615**	**1.9873**	**62.86%**	**0.0067**	**1.5908**	**0.1147**	**-0.7794**	**7.1024**
GCARSOA1	21.3168	2.2163	10.40%	0.0306	9.6181	0.0000	16.9217	25.7118
GEOB	9.4195	1.8265	19.39%	0.0146	5.1571	0.0000	5.7974	13.0415
GFAMSAA	**1.9519**	**1.4114**	**72.31%**	**0.0075**	**1.3829**	**0.1697**	**-0.8470**	**4.7508**
GFINBURO	30.6623	3.4292	11.18%	0.0575	8.9416	0.0000	23.8621	37.4624
GFNORTEO	19.5896	2.1223	10.83%	0.0304	9.2306	0.0000	15.3811	23.7981
GMEXICOB	25.4727	1.7819	7.00%	0.1464	14.2951	0.0000	21.9391	29.0063
GMODELOC	7.1158	2.6066	36.63%	0.0077	2.7299	0.0074	1.9468	12.2848
GRUMAB	**5.0069**	**3.3109**	**66.13%**	**0.0061**	**1.5123**	**0.1335**	**-1.5587**	**11.5726**
HOMEX	4.0800	1.1927	29.23%	0.0130	3.4208	0.0009	1.7148	6.4452
ICA	2.9290	1.3943	47.60%	0.0174	2.1007	0.0381	0.1641	5.6939
ICHB	**3.5081**	**2.5247**	**71.97%**	**0.0074**	**1.3895**	**0.1677**	**-1.4985**	**8.5146**
IDEALB1	29.5715	6.6859	22.61%	0.0393	4.4230	0.0000	16.3132	42.8298
KIMBERA	6.7020	2.3281	34.74%	0.0099	2.8788	0.0048	2.0853	11.3186
OMAB	**3.4822**	**3.1485**	**90.42%**	**0.0044**	**1.1060**	**0.2713**	**-2.7613**	**9.7258**
PEÑOLES	5.1712	0.6413	12.40%	0.0339	8.0641	0.0000	3.8996	6.4429
PINFRA	**1.1739**	**2.2141**	**188.61%**	**0.0044**	**0.5302**	**0.5971**	**-3.2167**	**5.5645**
SAREB	**6.8615**	**4.4581**	**64.97%**	**0.0040**	**1.5391**	**0.1268**	**-1.9791**	**15.7020**
SORIANAB	17.0263	2.5269	14.84%	0.0178	6.7380	0.0000	12.0153	22.0372
TELECOMA1	36.0347	1.9629	5.45%	0.1357	18.3583	0.0000	32.1423	39.9271
TELMEXL	60.6907	5.9350	9.78%	0.0629	10.2259	0.0000	48.9213	72.4600
TLEVISACPO	25.8062	2.2096	8.56%	0.0524	11.6791	0.0000	21.4245	30.1879
TVAZTCACPO	**8.6057**	**7.0496**	**81.92%**	**0.0054**	**1.2207**	**0.2249**	**-5.3738**	**22.5853**
URBI	5.7004	1.8894	33.15%	0.0093	3.0171	0.0032	1.9537	9.4471
WALMEXV	82.5754	3.2611	3.95%	0.1510	25.3215	0.0000	76.1086	89.0422

Tabla IV-C. Coeficientes del Modelo.

Sin embargo, al observar la Tabla IV-C podemos observar que algunas series accionarias (ARA, ARCA, CICSA, COMERCI, GAP, GFAMSA, GRUMA, ICH, OMA, PINFRA, SARE y TVAZTCA) parecen no haber tenido un efecto significativo en la serie histórica del IPC. Esto se observa a través de varios factores:

1) El error estándar para dichos coeficientes es mayor que para el resto, lo que provoca que sus coeficientes estandarizados sean los más cercanos a cero.
2) Los valores de *t* para estas acciones son los más bajos, por lo que su nivel de significancia descriptivo (***p-value***) es mayor a 0.05, el nivel de significancia con el que se han realizado las pruebas.
3) Los intervalos de confianza para los coeficientes β_i contienen al cero, lo que significa que dichos coeficientes podrían ser iguales a cero con una confianza de 95%; puesto que la prueba de hipótesis consiste en $H_0:\beta_i = 0$ vs $H_a:\beta_i \neq 0$, esto lleva a no rechazar la hipótesis de nulidad de dichos coeficientes.

Este hecho era de esperarse para acciones como GFAMSA, OMA y PINFRA, las cuales no formaban parte de la muestra para el cálculo del IPC hasta su inserción el 01 de Febrero de 2007.

La presencia de un R^2 elevado y de coeficientes no significativos es un indicio de multicolinealidad, es decir, existen relaciones aproximadamente lineales entre las variables explicativas del modelo. Aunque esto es razonable debido a la correlación existente entre las series accionarias, la multicolinealidad resulta un problema pues disminuye la precisión de los estimadores (lo que incrementa su varianza) y complica la posibilidad de aislar adecuadamente la influencia relativa de las diferentes variables explicativas sobre la variable dependiente. Así, se corre el riesgo de eliminar variables del modelo debido a que sus elevados errores estándares pueden inducir a no rechazar la hipótesis de que ciertos coeficientes sean nulos.

Como una medida remedial ante dicho problema, es posible eliminar poco a poco algunas variables explicativas en el modelo para evitar redundancia informativa. Siendo así, se probaron diversos modelos de regresión lineal paso a paso, eliminando una a una las series accionarias que no resultaban significativas, y de acuerdo al método de eliminación hacia atrás (*Backward*) del programa SPSS, el mejor modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{IPC}} = \; & \beta_0 + \beta_1 P_{\mathrm{ALFAA}} + \beta_2 P_{\mathrm{AMXL}} + \beta_3 P_{\mathrm{ARCA}} + \beta_4 P_{\mathrm{BIMBOA}} + \beta_5 P_{\mathrm{CEMEXCPO}} + \beta_6 P_{\mathrm{ELEKTRA}} + \beta_7 P_{\mathrm{FEMSAUBD}} + \\ & + \beta_8 P_{\mathrm{GAPB}} + \beta_9 P_{\mathrm{GCARSOA1}} + \beta_{10} P_{\mathrm{GEOB}} + \beta_{11} P_{\mathrm{GFAMSAA}} + \beta_{12} P_{\mathrm{GFINBURO}} + \beta_{13} P_{\mathrm{GFNORTEO}} + \\ & + \beta_{14} P_{\mathrm{GMEXICOB}} + \beta_{15} P_{\mathrm{GMODELOC}} + \beta_{16} P_{\mathrm{GRUMAB}} + \beta_{17} P_{\mathrm{HOMEX}} + \beta_{18} P_{\mathrm{ICA}} + \beta_{19} P_{\mathrm{IDEALB1}} + \\ & + \beta_{20} P_{\mathrm{KIMBERA}} + \beta_{21} P_{\mathrm{PEÑOLES}} + \beta_{22} P_{\mathrm{SAREB}} + \beta_{23} P_{\mathrm{SORIANAB}} + \beta_{24} P_{\mathrm{TELECOMA1}} + \beta_{25} P_{\mathrm{TELMEXL}} + \\ & + \beta_{26} P_{\mathrm{TLEVISACPO}} + \beta_{27} P_{\mathrm{URBI}} + \beta_{28} P_{\mathrm{WALMEXV}} \end{aligned}$$

Con este nuevo modelo, los resultados son los siguientes:

Modelo	R	R^2	R^2 Ajustada	Error Estándar de la Estimación	Durbin-Watson
1	1.000	1.000	1.000	16.21521	2.324

Tabla IV-D. Resumen del Modelo.

En la Tabla IV-D se observa que este modelo también presenta R^2 ajustado igual a 1, lo que de nuevo indica una perfecta correlación lineal entre la serie histórica del IPC y el las 28 acciones consideradas, al haber eliminado ARA, CICSAB1, COMERCIUBC, ICHB, OMAB, PINFRA y TVAZTCACPO. Observamos también que el error estándar de la estimación disminuyó a 16.22, mientras que la estadística Durbin-Watson también se aproximó más a 2 al ubicarse en 2.324.

Esta vez casi todas las series accionarias tienen un efecto significativo en las cotizaciones históricas del IPC, pues como se aprecia en la Tabla IV-E, existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis de nulidad de todas las series excepto GRUMAB, cuyo nivel de significancia descriptivo excede 0.05, aparte de que el intervalo de confianza para su coeficiente (β_{16}) podría anularse con una confianza del 95%. Sin embargo, esta variable no ha sido eliminada pues de ser así, el error estándar de la estimación se eleva a 16.40, casi como en el primer modelo.

	Coeficientes no estandarizados			Coeficientes estandarizados	t	Sig.	Intervalos de Confianza al 95% para β_i	
	β_i	Error Estándar		B			Lím. Inferior	Lím. Superior
β_0	-106.6192	185.0567			-0.5761	0.5657	-473.3215	260.0831
ALFAA	6.7775	1.5002	22.14%	0.0200	4.5177	0.0000	3.8047	9.7503
AMXL	231.1242	3.9515	1.71%	0.4864	58.4905	0.0000	223.2940	238.9543
ARCA	11.6870	4.2359	36.24%	0.0068	2.7590	0.0068	3.2933	20.0807
BIMBOA	11.0954	1.0126	9.13%	0.0405	10.9575	0.0000	9.0889	13.1019
CEMEXCPO	78.1025	1.9338	2.48%	0.1044	40.3881	0.0000	74.2706	81.9345
ELEKTRA	1.6628	0.3512	21.12%	0.0177	4.7348	0.0000	0.9669	2.3587
FEMSAUBD	18.9157	2.7228	14.39%	0.0262	6.9470	0.0000	13.5202	24.3112
GAPB	3.6986	1.5855	42.87%	0.0078	2.3327	0.0215	0.5568	6.8403
GCARSOA1	21.6012	2.0734	9.60%	0.0310	10.4183	0.0000	17.4926	25.7097
GEOB	9.2340	1.6539	17.91%	0.0144	5.5831	0.0000	5.9566	12.5113
GFAMSAA	3.2021	1.1863	37.05%	0.0123	2.6992	0.0080	0.8513	5.5528
GFINBURO	28.7923	3.2138	11.16%	0.0540	8.9589	0.0000	22.4239	35.1607
GFNORTEO	19.5867	1.8852	9.62%	0.0304	10.3896	0.0000	15.8510	23.3223
GMEXICOB	26.5389	1.2612	4.75%	0.1525	21.0419	0.0000	24.0397	29.0381
GMODELOC	7.6097	2.4482	32.17%	0.0082	3.1083	0.0024	2.7585	12.4609
GRUMAB	**5.0856**	**2.7168**	**53.42%**	**0.0062**	**1.8719**	**0.0639**	**-0.2979**	**10.4692**
HOMEX	4.0398	1.1495	28.45%	0.0129	3.5144	0.0006	1.7620	6.3176
ICA	3.2635	1.0764	32.98%	0.0194	3.0319	0.0030	1.1305	5.3964
IDEALB1	31.0118	5.1996	16.77%	0.0412	5.9643	0.0000	20.7085	41.3151
KIMBERA	6.4568	2.1379	33.11%	0.0095	3.0202	0.0031	2.2204	10.6931
PEÑOLES	5.5302	0.5593	10.11%	0.0363	9.8884	0.0000	4.4220	6.6384
SAREB	9.2708	3.8593	41.63%	0.0054	2.4022	0.0180	1.6233	16.9183
SORIANAB	16.3411	2.3711	14.51%	0.0171	6.8917	0.0000	11.6426	21.0396
TELECOMA1	37.2052	1.6329	4.39%	0.1401	22.7853	0.0000	33.9696	40.4409
TELMEXL	61.7534	5.2950	8.57%	0.0640	11.6627	0.0000	51.2611	72.2458
TLEVISACPO	25.2196	2.0211	8.01%	0.0512	12.4781	0.0000	21.2147	29.2246
URBI	6.7943	1.5202	22.37%	0.0110	4.4694	0.0000	3.7820	9.8066
WALMEXV	85.7023	2.5460	-173.57%	0.1567	33.6616	0.0000	80.6573	90.7474

Tabla IV-E. Coeficientes del Modelo.

A partir de este modelo, seleccionamos las 10 series accionarias que resultaron más significativas en el modelo. Puesto que no podemos comparar directamente los coeficientes β_i por los diferentes rangos de precios de cada acción, fueron considerados los coeficientes estandarizados y así se obtuvieron las diez acciones de la Tabla IV-F.

A pesar de que en conjunto representan apenas el 28.57% de la muestra base para el cálculo del IPC, las 10 acciones de la Tabla IV-F explicaron el 99.8% de la variabilidad de la variable dependiente (la serie del IPC) en el periodo estudiado. Este hecho no resulta sorpresivo, pues de acuerdo a diversos medios informativos[3], tan sólo cuatro emisoras que integran la muestra del IPC explicaron el 77% en el primer semestre de 2007; dichas acciones fueron AMXL, GMEXICOB, TELECOMA-1 y TELMEXL, todas incluidas en nuestra selección. En los meses de mayo y junio de 2007, las acciones AMXL,

[3] Uno de ellos, la columna ***Análisis*** de Arturo Hanono en la edición del 05 de Julio de 2007 del periódico "El Financiero".

CEMEXCPO, GMEXICOB y TELECOMA1 explicaron el 81% del comportamiento del IPC. La influencia es tal, que de acuerdo al modelo, por cada peso que aumentara el precio de la acción AMXL, el IPC se vería incrementado en 231.12 puntos ($\pm$ 3.95), como se aprecia en la columna de coeficientes no estandarizados de la Tabla IV-E

	CLAVE DE LA ACCIÓN	SERIE	EMISORA	SECTOR
1	AMX	L	América Móvil, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
2	WALMEX	V	Wal-Mart de México, S.A.B. de C.V.	Comercio
3	GMEXICO	B	Grupo México, S.A.B. de C.V.	Industria Extractiva
4	TELECOM	A-1	Carso Global Telecom, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
5	CEMEX	CPO	Cemex, S.A.B. de C.V.	Construcción
6	TELMEX	L	Teléfonos de México, S.A.B. de C.V.	Comunicaciones y Transportes
7	GFINBUR	O	Grupo Financiero Inbursa, S.A. de C.V.	Servicios
8	TLEVISA	CPO	Grupo Televisa, S.A.	Comunicaciones y Transportes
9	IDEAL	B-1	Impulsora del Desarrollo y el Empleo en América Latina, S.A.B. de C.V.	Varios
10	BIMBO	A	Grupo Bimbo, S.A.B. de C.V.	Transformación

Tabla IV-F. Emisoras seleccionadas por su representatividad en el IPC.

4.2. DATOS Y ASPECTOS METODOLÓGICOS

De cada una de las acciones de la Tabla IV-F, así como del IPC, se consideraron 440 observaciones diarias del precio al cierre ajustado por reparto de dividendos y *splits*[4], en el periodo comprendido entre el 02 de Enero de 2006 y el 28 de Septiembre de 2007. Como se mencionó en la sección 2.2.2.1, la tasa continua de rentabilidad suele ser la más usada en la bolsa para medir la rentabilidad real de un activo, bajo el supuesto de que la variación que sufre el precio de un activo entre un día y el siguiente está dada por la expresión

$$P_t = P_{t-1} \cdot e^{\delta t}$$

Así, se utilizó la fórmula de la tasa de rentabilidad continua o instantánea con el objeto de medir la rentabilidad diaria de cada activo, esto es,

$$\delta_i = \ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right)$$

De esta manera se obtuvo una serie de 439 rendimientos históricos diarios para cada una de las 10 acciones y el IPC, a partir de los cuales se obtuvieron los rendimientos esperados diarios para cada activo, así como la matriz de varianzas y covarianzas que se muestran en las Tablas IV-7 y IV-8. Estos datos fueron anualizados considerando que el calendario 2007 de la BMV considera 250 días hábiles.

---

[4] Aunque los *splits* o divisiones de acciones no afectan la operación de la empresa ni la riqueza del inversionista, pues no tienen efecto sobre el valor de las acciones preferentes (Ver FAMA), es necesario ajustar los precios de cierre para evitar datos extremos en las rentabilidades históricas. Algunos autores afirman que los splis se llevan a cabo porque existe el convencimiento de la dirección de la empresa de que un menor precio en términos absolutos beneficia la cotización accionaria, tanto en términos de contratación como de mayor rentabilidad futura.

ACTIVO	RENDIMIENTO		VARIANZA		DESVIACIÓN ESTÁNDAR	
	DIARIO	ANUAL	DIARIA	ANUAL	DIARIA	ANUAL (Volatilidad)
AMX L	0.1826%	45.6566%	0.0366%	9.1572%	1.9139%	30.2609%
BIMBO A	0.1175%	29.3739%	0.0288%	7.2110%	1.6984%	26.8533%
CEMEX CPO	0.0104%	2.5922%	0.0345%	8.6142%	1.8563%	29.3500%
GFINBUR O	0.0924%	23.1120%	0.0302%	7.5461%	1.7374%	27.4701%
GMEXICO B	0.2867%	71.6727%	0.0555%	13.8818%	2.3564%	37.2582%
IDEAL B-1	0.0537%	13.4299%	0.0493%	12.3141%	2.2194%	35.0914%
TELECOM A1	0.1247%	31.1636%	0.0423%	10.5633%	2.0556%	32.5012%
TELMEX L	0.0797%	19.9197%	0.0256%	6.3978%	1.5997%	25.2938%
TLEVISA CPO	0.0520%	13.0082%	0.0270%	6.7445%	1.6425%	25.9702%
WALMEX V	0.0746%	18.6477%	0.0364%	9.1079%	1.9087%	30.1792%

Tabla IV-G. Medidas de rendimiento esperado y riesgo de las acciones seleccionadas.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	AMXL	9.157%	3.971%	5.660%	1.794%	5.750%	3.585%	5.132%	4.385%	4.764%	5.557%
2	BIMBOA	3.971%	7.211%	3.085%	1.872%	3.012%	2.876%	3.725%	2.362%	2.697%	3.889%
3	CEMEXCPO	5.660%	3.085%	8.614%	1.838%	5.451%	3.644%	4.456%	4.006%	4.316%	4.675%
4	GFINBURO	1.794%	1.872%	1.838%	7.546%	1.769%	2.683%	2.607%	1.555%	1.459%	2.457%
5	GMEXICOB	5.750%	3.012%	5.451%	1.769%	13.88%	4.490%	4.485%	3.415%	4.511%	5.041%
6	IDEAL B-1	3.585%	2.876%	3.644%	2.683%	4.490%	12.31%	4.366%	2.719%	2.428%	4.201%
7	TELECOMA1	5.132%	3.725%	4.456%	2.607%	4.485%	4.366%	10.56%	5.553%	3.591%	4.723%
8	TELMEXL	4.385%	2.362%	4.006%	1.555%	3.415%	2.719%	5.553%	6.398%	3.047%	3.512%
9	TLEVISACPO	4.764%	2.697%	4.316%	1.459%	4.511%	2.428%	3.591%	3.047%	6.745%	4.259%
10	WALMEXV	5.557%	3.889%	4.675%	2.457%	5.041%	4.201%	4.723%	3.512%	4.259%	9.108%

Tabla IV-H. Matriz de Varianzas y Covarianzas anualizadas de las acciones de la muestra.

En el presente ejercicio se consideró a los Certificados de la Tesorería (Cetes) como el activo libre de riesgo necesario para derivar la línea del mercado de capitales. Puesto que las tasas primarias de Cetes se publican semanalmente, se obtuvo un promedio simple de las tasas vigentes durante cada día del periodo estudiado, para luego expresarlo en términos anuales; esta tasa fue de 7.412655%.

Finalmente, se supuso la existencia de tres inversionistas aversos al riesgo, pero diferenciados por su nivel de tolerancia al mismo. El primero se identifica con aquellos en la etapa de gasto, que prefieren la seguridad de su inversión y sacrifican rendimientos más altos, como podrían ser inversionistas de edad avanzada; el segundo podría ser un inversor maduro que invierte sus excedentes de capital y que puede correr riesgos moderadamente, ubicado en la etapa de consolidación; el tercero representa aquellos individuos en la etapa de acumulación, dispuestos a arriesgar su capital en la espera de obtener rendimientos muy superiores.

Para cada uno de los tres perfiles anteriores se supuso una función de utilidad de la forma

$$U[E(R_P), \sigma(R_P)] = E(R_P) - a\sigma^2(R_P) \quad a>0$$

La gráfica de una función de esta forma puede verse en la Fig. IV-1. En ella se puede apreciar que el inversionista obtiene mayor utilidad cuando los rendimientos son mayores, y que su utilidad disminuye al aumentar el riesgo asumido. La gráfica refleja que se prefieren las carteras con mayor rendimiento y menor riesgo, mientras que portafolios con menor rendimiento y mayor riesgo provocan utilidades menores. En la fórmula podemos observar también que mientras mayor sea a, mayor será la aversión al riesgo del inversionista cuyas preferencias representa.

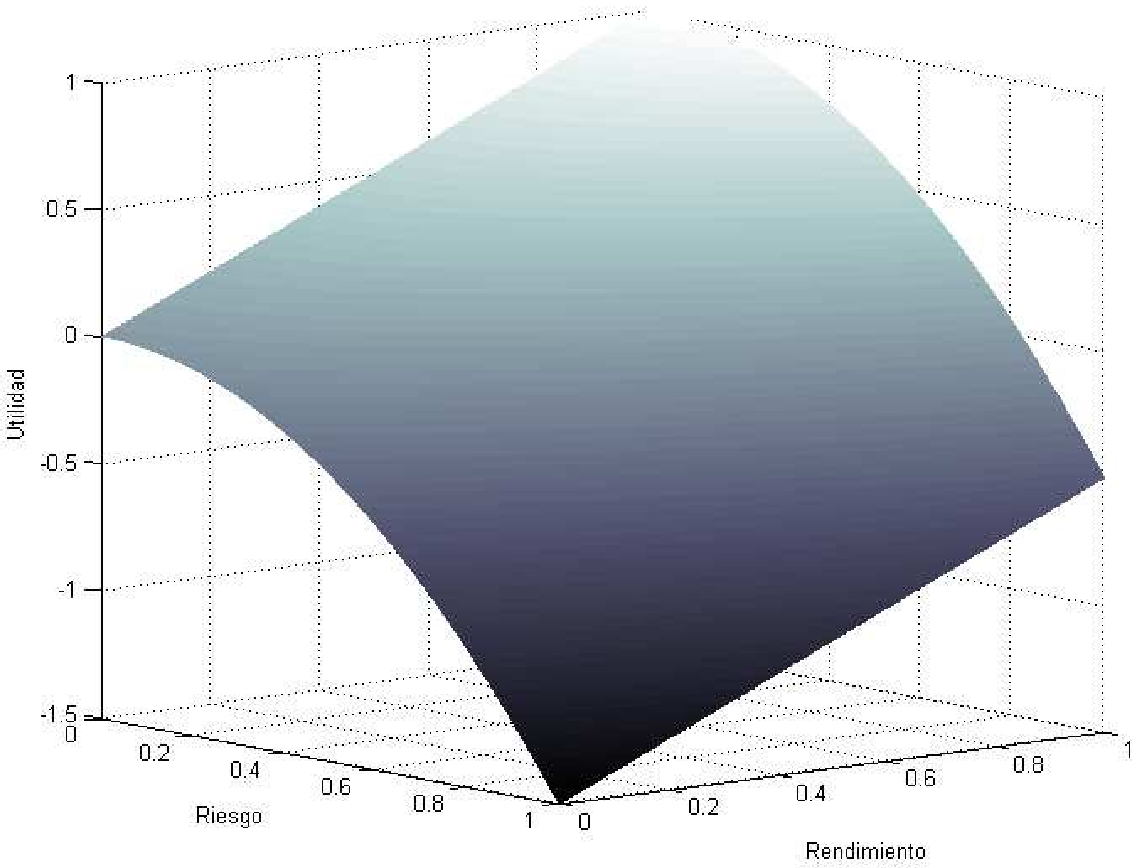


Figura IV-1. Gráfica de una función de utilidad de la forma $U[E(R_P), \sigma(R_P)] = E(R_P) - a\sigma^2(R_P)$

4.3. CARTERA DE MÍNIMO RIESGO Y FRONTERA EFICIENTE

Las combinaciones de las diez acciones consideradas para el siguiente ejercicio dan lugar a una infinidad de posibles carteras de inversión, de las cuales nos interesa el subconjunto integrado por las carteras eficientes, es decir, las que presentan el menor riesgo posible para cada nivel de rendimiento.

La primera de las carteras eficientes es la cartera de mínimo riesgo (*CMR*), que presenta la menor desviación estándar del universo de carteras posibles. Como se revisó en la Sección 3.1.4, se utilizó la siguiente fórmula para encontrar las proporciones w_i que caracterizan dicho portafolio:

$$W=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\\ w_7\\ w_8\\ w_9\\ w_{10}\\ \lambda/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} & \sigma_{1,6} & \sigma_{1,7} & \sigma_{1,8} & \sigma_{1,9} & \sigma_{1,10} & 1\\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} & \sigma_{2,6} & \sigma_{2,7} & \sigma_{2,8} & \sigma_{2,9} & \sigma_{2,10} & 1\\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} & \sigma_{3,6} & \sigma_{3,7} & \sigma_{3,8} & \sigma_{3,9} & \sigma_{3,10} & 1\\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \sigma_4^2 & \sigma_{4,5} & \sigma_{4,6} & \sigma_{4,7} & \sigma_{4,8} & \sigma_{4,9} & \sigma_{4,10} & 1\\ \sigma_{5,1} & \sigma_{5,2} & \sigma_{5,3} & \sigma_{5,4} & \sigma_5^2 & \sigma_{5,6} & \sigma_{5,7} & \sigma_{5,8} & \sigma_{5,9} & \sigma_{5,10} & 1\\ \sigma_{6,1} & \sigma_{6,2} & \sigma_{6,3} & \sigma_{6,4} & \sigma_{6,5} & \sigma_6^2 & \sigma_{6,7} & \sigma_{6,8} & \sigma_{6,9} & \sigma_{6,10} & 1\\ \sigma_{7,1} & \sigma_{7,2} & \sigma_{7,3} & \sigma_{7,4} & \sigma_{7,5} & \sigma_{7,6} & \sigma_7^2 & \sigma_{7,8} & \sigma_{7,9} & \sigma_{7,10} & 1\\ \sigma_{8,1} & \sigma_{8,2} & \sigma_{8,3} & \sigma_{8,4} & \sigma_{8,5} & \sigma_{8,6} & \sigma_{8,7} & \sigma_8^2 & \sigma_{8,9} & \sigma_{8,10} & 1\\ \sigma_{9,1} & \sigma_{9,2} & \sigma_{9,3} & \sigma_{9,4} & \sigma_{9,5} & \sigma_{9,6} & \sigma_{9,7} & \sigma_{9,8} & \sigma_9^2 & \sigma_{9,10} & 1\\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \sigma_{10,4} & \sigma_{10,5} & \sigma_{10,6} & \sigma_{10,7} & \sigma_{10,8} & \sigma_{10,9} & \sigma_{10}^2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

$$W_{11\,x\,1} \qquad C_{11\,x\,11}^{-1} \qquad B_{11\,x\,1}$$

De este modo se obtuvo el siguiente vector *W* cuyas componentes representan los porcentajes de asignación (para cada una de las diez acciones) que caracterizan la *CMR*:

$$W_{CMR}=\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6\\ w_7\\ w_8\\ w_9\\ w_{10}\\ \lambda/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7.3410\%\\ 23.2574\%\\ 2.5959\%\\ 27.6214\%\\ 2.6051\%\\ 7.6691\%\\ -10.8341\%\\ 32.9969\%\\ 23.5503\%\\ -2.0309\%\\ -0.032102 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{AMX L}\\ \text{BIMBO A}\\ \text{CEMEX CPO}\\ \text{GFINBUR O}\\ \text{GMEXICO B}\\ \text{IDEAL B-1}\\ \text{TELECOM A1}\\ \text{TELMEX L}\\ \text{TLEVISA CPO}\\ \text{WALMEX V}\\ \text{Multiplicador de Lagrange div. por dos} \end{matrix}$$

Una vez conocidas dichas proporciones, podemos calcular el rendimiento esperado y el riesgo asociados a la *CMR*:

$$\mathrm{E}(R_{CMR}) = \sum_{i=1}^{10} w_i \mathrm{E}(R_i) = 18.66842118\%$$

$$\sigma^2(R_{CMR}) = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} w_i w_j\, \sigma_{i,j} = 3.21019064\% \quad \Rightarrow \quad \sigma(R_{CMR}) = 17.91700487\%$$

Para encontrar el resto de las carteras que integran el conjunto eficiente, se utilizó la siguiente fórmula:

$$\underset{W_{12\,\mathrm{x}\,1}}{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{pmatrix}} = \underset{C^{-1}_{12\,\mathrm{x}\,12}}{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} & \sigma_{1,6} & \sigma_{1,7} & \sigma_{1,8} & \sigma_{1,9} & \sigma_{1,10} & 1 & \mathrm{E}(R_1) \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} & \sigma_{2,6} & \sigma_{2,7} & \sigma_{2,8} & \sigma_{2,9} & \sigma_{2,10} & 1 & \mathrm{E}(R_2) \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} & \sigma_{3,6} & \sigma_{3,7} & \sigma_{3,8} & \sigma_{3,9} & \sigma_{3,10} & 1 & \mathrm{E}(R_3) \\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \sigma_4^2 & \sigma_{4,5} & \sigma_{4,6} & \sigma_{4,7} & \sigma_{4,8} & \sigma_{4,9} & \sigma_{4,10} & 1 & \mathrm{E}(R_4) \\ \sigma_{5,1} & \sigma_{5,2} & \sigma_{5,3} & \sigma_{5,4} & \sigma_5^2 & \sigma_{5,6} & \sigma_{5,7} & \sigma_{5,8} & \sigma_{5,9} & \sigma_{5,10} & 1 & \mathrm{E}(R_5) \\ \sigma_{6,1} & \sigma_{6,2} & \sigma_{6,3} & \sigma_{6,4} & \sigma_{6,5} & \sigma_6^2 & \sigma_{6,7} & \sigma_{6,8} & \sigma_{6,9} & \sigma_{6,10} & 1 & \mathrm{E}(R_6) \\ \sigma_{7,1} & \sigma_{7,2} & \sigma_{7,3} & \sigma_{7,4} & \sigma_{7,5} & \sigma_{7,6} & \sigma_7^2 & \sigma_{7,8} & \sigma_{7,9} & \sigma_{7,10} & 1 & \mathrm{E}(R_7) \\ \sigma_{8,1} & \sigma_{8,2} & \sigma_{8,3} & \sigma_{8,4} & \sigma_{8,5} & \sigma_{8,6} & \sigma_{8,7} & \sigma_8^2 & \sigma_{8,9} & \sigma_{8,10} & 1 & \mathrm{E}(R_8) \\ \sigma_{9,1} & \sigma_{9,2} & \sigma_{9,3} & \sigma_{9,4} & \sigma_{9,5} & \sigma_{9,6} & \sigma_{9,7} & \sigma_{9,8} & \sigma_9^2 & \sigma_{9,10} & 1 & \mathrm{E}(R_9) \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \sigma_{10,4} & \sigma_{10,5} & \sigma_{10,6} & \sigma_{10,7} & \sigma_{10,8} & \sigma_{10,9} & \sigma_{10}^2 & 1 & \mathrm{E}(R_{10}) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{E}(R_1) & \mathrm{E}(R_2) & \mathrm{E}(R_3) & \mathrm{E}(R_4) & \mathrm{E}(R_5) & \mathrm{E}(R_6) & \mathrm{E}(R_7) & \mathrm{E}(R_8) & \mathrm{E}(R_9) & \mathrm{E}(R_{10}) & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}} \underset{B_{12\,\mathrm{x}\,1}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathrm{E}'(R_P) \end{pmatrix}}$$

Con cada aplicación de la fórmula anterior obtenemos los porcentajes w_i que caracterizan un portafolio eficiente, esto es, una cartera con el menor riesgo posible para cada nivel de rendimiento E'(R_P). Puesto que el rendimiento esperado de la *CMR* es de 18.668421%, se propuso un primer E'(R_P) de 19%, el siguiente igual a 19.5%, y posteriormente con incrementos de 0.5% cada vez. Así fueron calculadas 99 carteras eficientes, que (junto con la *CMR*) constituyen las cien carteras eficientes que integran la Tabla IV-I. La Fig. IV-2 constituye la frontera eficiente de oportunidades de inversión, es decir, la representación gráfica de parte del conjunto eficiente.

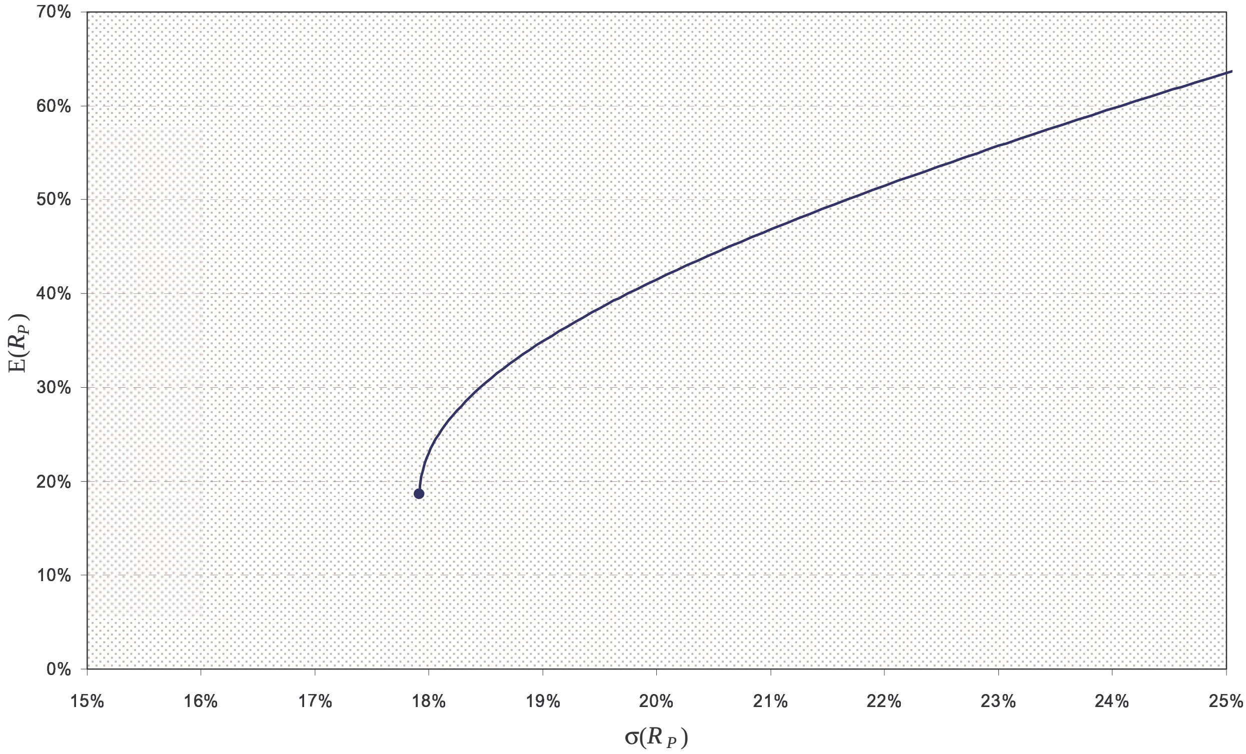


Fig. IV-2. La Cartera de Mínimo Riesgo y la Frontera Eficiente de Oportunidades de Inversión.

	E(R_p)	σ(R_p)		E(R_p)	σ(R_p)		E(R_p)	σ(R_p)		E(R_p)	σ(R_p)
CMR	18.67%	17.92%	26	31.0%	18.55%	51	43.5%	20.36%	76	56.0%	23.06%
2	19.0%	17.92%	27	31.5%	18.60%	52	44.0%	20.45%	77	56.5%	23.19%
3	19.5%	17.92%	28	32.0%	18.65%	53	44.5%	20.54%	78	57.0%	23.31%
4	20.0%	17.92%	29	32.5%	18.71%	54	45.0%	20.64%	79	57.5%	23.44%
5	20.5%	17.93%	30	33.0%	18.76%	55	45.5%	20.74%	80	58.0%	23.56%
6	21.0%	17.94%	31	33.5%	18.82%	56	46.0%	20.83%	81	58.5%	23.69%
7	21.5%	17.95%	32	34.0%	18.88%	57	46.5%	20.93%	82	59.0%	23.82%
8	22.0%	17.96%	33	34.5%	18.95%	58	47.0%	21.04%	83	59.5%	23.94%
9	22.5%	17.98%	34	35.0%	19.01%	59	47.5%	21.14%	84	60.0%	24.07%
10	23.0%	18.00%	35	35.5%	19.08%	60	48.0%	21.24%	85	60.5%	24.20%
11	23.5%	18.02%	36	36.0%	19.14%	61	48.5%	21.35%	86	61.0%	24.34%
12	24.0%	18.04%	37	36.5%	19.21%	62	49.0%	21.45%	87	61.5%	24.47%
13	24.5%	18.06%	38	37.0%	19.28%	63	49.5%	21.56%	88	62.0%	24.60%
14	25.0%	18.09%	39	37.5%	19.36%	64	50.0%	21.67%	89	62.5%	24.73%
15	25.5%	18.11%	40	38.0%	19.43%	65	50.5%	21.78%	90	63.0%	24.87%
16	26.0%	18.14%	41	38.5%	19.51%	66	51.0%	21.89%	91	63.5%	25.00%
17	26.5%	18.17%	42	39.0%	19.59%	67	51.5%	22.00%	92	64.0%	25.14%
18	27.0%	18.21%	43	39.5%	19.66%	68	52.0%	22.12%	93	64.5%	25.28%
19	27.5%	18.24%	44	40.0%	19.75%	69	52.5%	22.23%	94	65.0%	25.41%
20	28.0%	18.28%	45	40.5%	19.83%	70	53.0%	22.35%	95	65.5%	25.55%
21	28.5%	18.32%	46	41.0%	19.91%	71	53.5%	22.46%	96	66.0%	25.69%
22	29.0%	18.36%	47	41.5%	20.00%	72	54.0%	22.58%	97	66.5%	25.83%
23	29.5%	18.41%	48	42.0%	20.09%	73	54.5%	22.70%	98	67.0%	25.97%
24	30.0%	18.45%	49	42.5%	20.17%	74	55.0%	22.82%	99	67.5%	26.11%
25	30.5%	18.50%	50	43.0%	20.26%	75	55.5%	22.94%	100	68.0%	26.26%

Tabla IV-I. Cien de las carteras del Conjunto Eficiente.

4.4. CARTERAS ÓPTIMAS

Sabemos que entre las carteras eficientes de la Tabla IV-I es imposible determinar alguna relación de dominancia, pues observamos que conforme aumenta la rentabilidad esperada también lo hace el riesgo, y la elección depende de la actitud frente al riesgo del inversionista. Es por ello que resulta necesario introducir la función de utilidad del inversionista, a través de curvas de indiferencia.

En la Sección 4.2 se mencionó que en este trabajo se supondrán tres perfiles de inversionista, diferenciados entre sí por su tolerancia al riesgo. Así, la Tabla IV-J muestra las funciones de utilidad empleadas para describir las preferencias del inversionista en términos de rentabilidad y riesgo.

PERFIL DEL INVERSIONISTA	FUNCIÓN DE UTILIDAD
Conservador	$U[E(R_P), \sigma(R_P)] = E(R_P) - 21\sigma^2(R_P)$
Neutral	$U[E(R_P), \sigma(R_P)] = E(R_P) - 7\sigma^2(R_P)$
Agresivo	$U[E(R_P), \sigma(R_P)] = E(R_P) - 4\sigma^2(R_P)$

Tabla IV-J. Funciones de utilidad empleadas para representar tres actitudes frente al riesgo.

Para cada inversionista se obtuvo un mapa de siete curvas de indiferencia, donde cada una de ellas es un lugar geométrico en el plano riesgo-rendimiento que representa una clase de indiferencia I_k, es decir, un conjunto de carteras igualmente preferidas por el inversionista tales que

$$I_k : E(R_P) - a\sigma^2(R_P) = k$$

La pendiente de la curva está determinada por la actitud frente al riesgo del inversionista, pues mientras mayor sea la pendiente del conjunto de curvas de indiferencia, mayor será el rendimiento que el inversor espera por cada incremento de riesgo, y tendrá menor tolerancia al riesgo. Esto se aprecia gráficamente en las Fig. IV-3, IV-4 y IV-5.

Al superponer la frontera eficiente y los mapas de indiferencia para cada perfil de riesgo, obtenemos las carteras óptimas en cada caso, identificadas como aquella cartera eficiente que sea, a la vez, tangente a la curva de utilidad más alta posible (Tabla IV-K), lo que significa que maximiza la utilidad esperada del inversionista.

CARTERA ÓPTIMA	ACTITUD FRENTE AL RIESGO		
	CONSERVADOR	NEUTRAL	AGRESIVO
$E(R_P)$	35.00%	65.00%	101.00%
$\sigma^2(R_P)$	3.61387616%	6.45912568%	13.46953759%
$\sigma(R_P)$	19.01019768%	25.41481002%	36.70086864%
$w_{\text{AMX L}}$	9.124934%	39.537035%	76.031557%
$w_{\text{BIMBO A}}$	25.781290%	30.417530%	35.981019%
$w_{\text{CEMEX CPO}}$	-14.238219%	-45.161322%	-82.269045%
$w_{\text{IDEAL B-1}}$	29.716503%	33.565032%	38.183268%
$w_{\text{GFINBUR O}}$	17.018000%	43.493600%	75.264318%
$w_{\text{GMEXICO B}}$	3.671605%	-3.671448%	-12.483112%
$w_{\text{TELECOM A1}}$	-7.359015%	-0.975528%	6.684658%
$w_{\text{TELMEX L}}$	29.728523%	23.724770%	16.520266%
$w_{\text{TLEVISA CPO}}$	13.823270%	-4.044602%	-25.486047%
$w_{\text{WALMEX V}}$	-7.266890%	-16.885068%	-28.426882%

Tabla IV-K. Características de las Carteras Óptimas para cada perfil de inversionista.

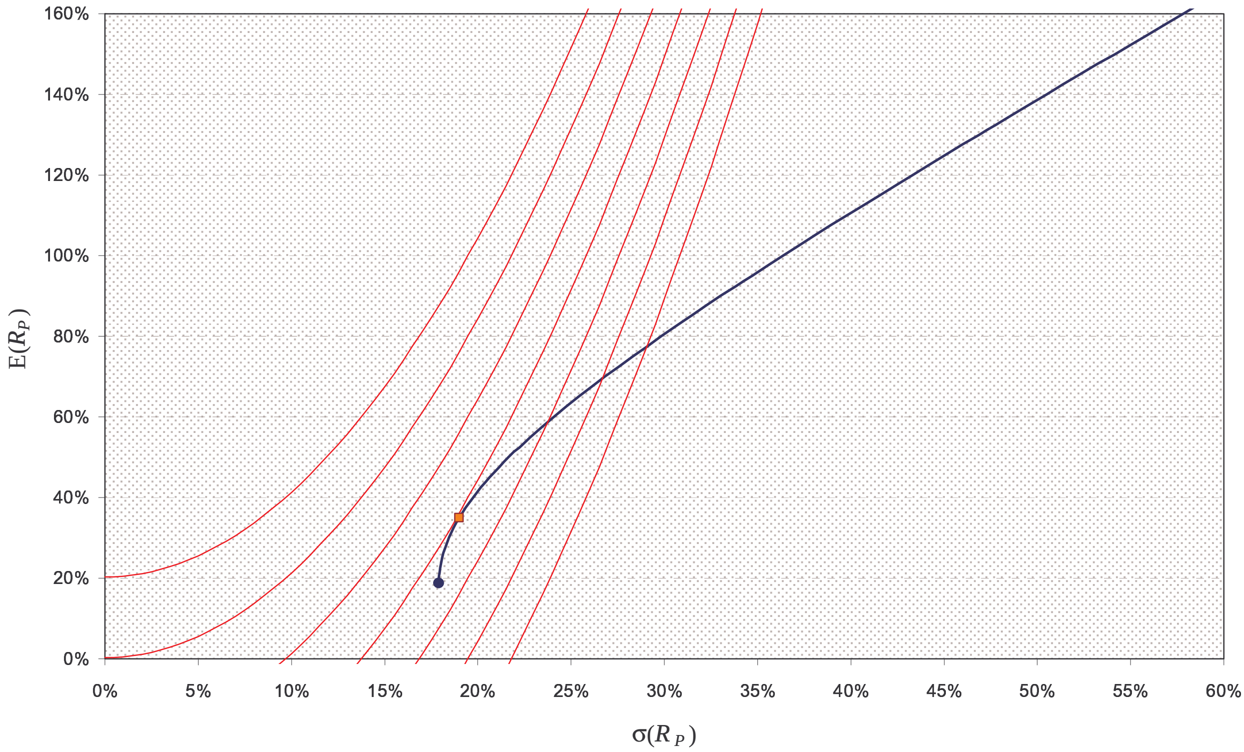


Fig. IV-3. Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista conservador.

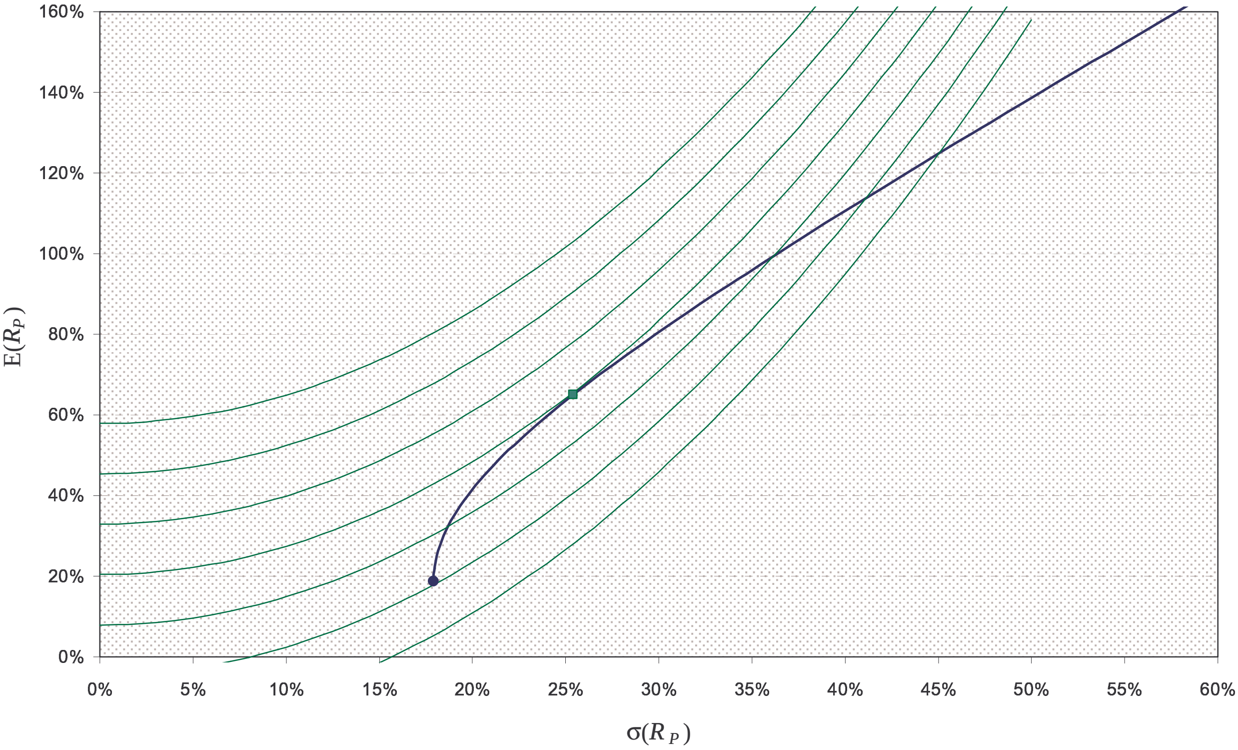


Fig. IV-4. Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista neutral.

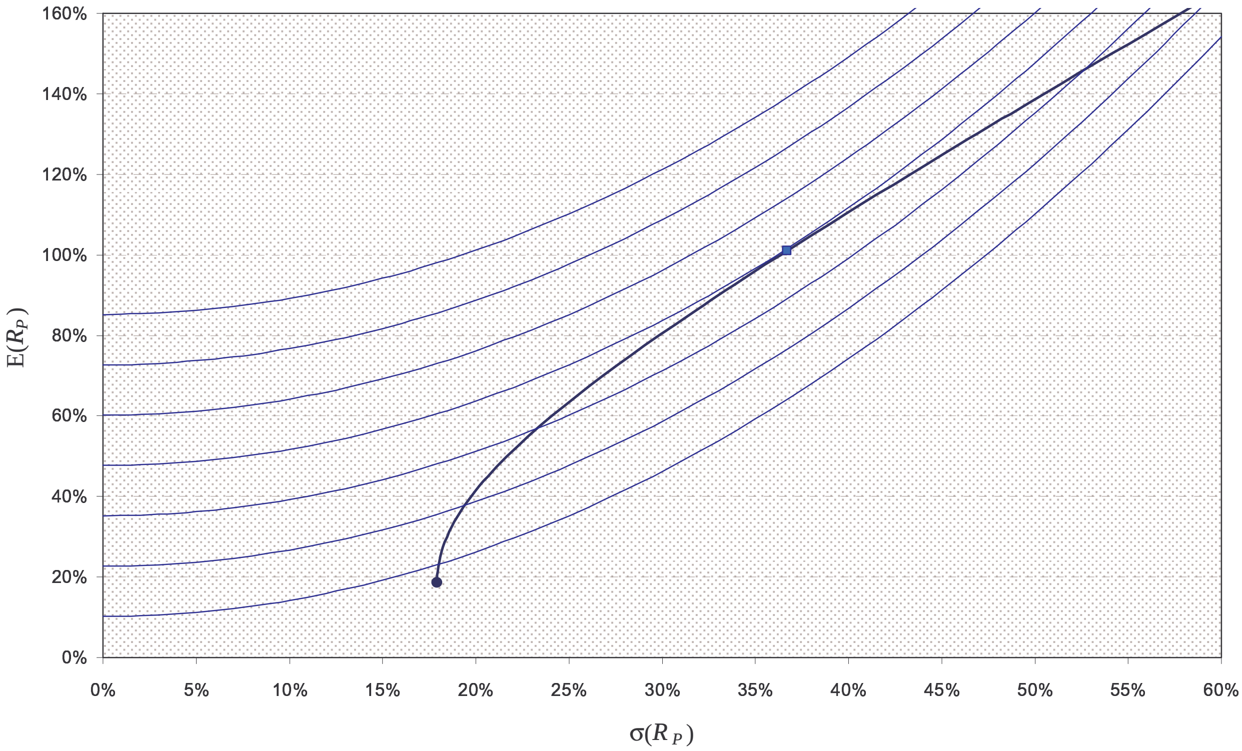


Fig. IV-5. Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista agresivo.

4.5. CARTERA DE MERCADO Y LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITALES

La combinación de un activo libre de riesgo con cada cartera riesgosa produce una línea recta de carteras mixtas, por lo que el conjunto factible adquiere la forma de un cono convexo. De la infinidad de rectas generadas, nos interesa determinar la que tiene mayor pendiente y domina al resto, es decir, la línea del mercado de capitales (LMC). Para ello, es necesario conocer la cartera de mercado teórica (*M*), portafolio en el cual la LMC toca tangencialmente la frontera eficiente.

En la Sección 3.2.2 revisamos que para determinar las incógnitas w_i que permiten conformar la cartera *M* era necesario realizar una transformación que permitiera expresarlas en función de los datos del problema (los rendimientos esperados y la matriz de varianzas y covarianzas). Por ello, se propuso calcular un vector columna de variables auxiliares z_i, (que posteriormente permitiría encontrar las proporciones w_i que caracterizan la cartera *M*) mediante la siguiente fórmula:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{pmatrix}}_{Z_{10\text{x}1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} & \sigma_{1,6} & \sigma_{1,7} & \sigma_{1,8} & \sigma_{1,9} & \sigma_{1,10} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} & \sigma_{2,6} & \sigma_{2,7} & \sigma_{2,8} & \sigma_{2,9} & \sigma_{2,10} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} & \sigma_{3,6} & \sigma_{3,7} & \sigma_{3,8} & \sigma_{3,9} & \sigma_{3,10} \\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \sigma_4^2 & \sigma_{4,5} & \sigma_{4,6} & \sigma_{4,7} & \sigma_{4,8} & \sigma_{4,9} & \sigma_{4,10} \\ \sigma_{5,1} & \sigma_{5,2} & \sigma_{5,3} & \sigma_{5,4} & \sigma_5^2 & \sigma_{5,6} & \sigma_{5,7} & \sigma_{5,8} & \sigma_{5,9} & \sigma_{5,10} \\ \sigma_{6,1} & \sigma_{6,2} & \sigma_{6,3} & \sigma_{6,4} & \sigma_{6,5} & \sigma_6^2 & \sigma_{6,7} & \sigma_{6,8} & \sigma_{6,9} & \sigma_{6,10} \\ \sigma_{7,1} & \sigma_{7,2} & \sigma_{7,3} & \sigma_{7,4} & \sigma_{7,5} & \sigma_{7,6} & \sigma_7^2 & \sigma_{7,8} & \sigma_{7,9} & \sigma_{7,10} \\ \sigma_{8,1} & \sigma_{8,2} & \sigma_{8,3} & \sigma_{8,4} & \sigma_{8,5} & \sigma_{8,6} & \sigma_{8,7} & \sigma_8^2 & \sigma_{8,9} & \sigma_{8,10} \\ \sigma_{9,1} & \sigma_{9,2} & \sigma_{9,3} & \sigma_{9,4} & \sigma_{9,5} & \sigma_{9,6} & \sigma_{9,7} & \sigma_{9,8} & \sigma_9^2 & \sigma_{9,10} \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \sigma_{10,4} & \sigma_{10,5} & \sigma_{10,6} & \sigma_{10,7} & \sigma_{10,8} & \sigma_{10,9} & \sigma_{10}^2 \end{pmatrix}^{-1}}_{C^{-1}_{10\,\text{x}\,10}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{E}(R_1) - R_F \\ \mathrm{E}(R_2) - R_F \\ \mathrm{E}(R_3) - R_F \\ \mathrm{E}(R_4) - R_F \\ \mathrm{E}(R_5) - R_F \\ \mathrm{E}(R_6) - R_F \\ \mathrm{E}(R_7) - R_F \\ \mathrm{E}(R_8) - R_F \\ \mathrm{E}(R_9) - R_F \\ \mathrm{E}(R_{10}) - R_F \end{pmatrix}}_{(E-R)_{10\,\text{x}\,1}}$$

A partir del vector *Z*, obtenemos las proporciones w_i que caracterizan la cartera de mercado:

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i} \quad \Rightarrow \quad W_{CM} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183.595734\% \\ 52.378880\% \\ -191.640577\% \\ 51.795084\% \\ 168.905530\% \\ -38.454664\% \\ 29.262336\% \\ -4.714333\% \\ -88.682694\% \\ -62.445296\% \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{AMX L} \\ \text{BIMBO A} \\ \text{CEMEX CPO} \\ \text{GFINBUR O} \\ \text{GMEXICO B} \\ \text{IDEAL B-1} \\ \text{TELECOM A1} \\ \text{TELMEX L} \\ \text{TLEVISA CPO} \\ \text{WALMEX V} \end{matrix}$$

El rendimiento esperado y el riesgo asociados a la cartera *M* son:

$$\mathrm{E}(R_M) = \sum_{i=1}^{10} w_i \mathrm{E}(R_i) = 207.10662037\%$$

$$\sigma^2(R_M) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} w_i w_j \, \sigma_{i,j} = 56.95353894\,\% \quad \Rightarrow \quad \sigma(R_M) = 75.46756849\%$$

Entonces, la ecuación de la LMC es:

$$
\begin{aligned}
E(R_P) &= E(R_F) + \frac{E(R_M) - E(R_F)}{\sigma(R_M)} \sigma(R_P) \\
&= 0.074127 + \frac{2.071066 - 0.074127}{0.754676} \sigma(R_P)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \qquad E(R_P) = 0.074108 + 2.6460898\sigma(R_P)$$

La Figura IV-6 muestra la LMC y la frontera eficiente, así como la cartera de mercado encontrada, que es el único punto en el que ambas gráficas se tocan.

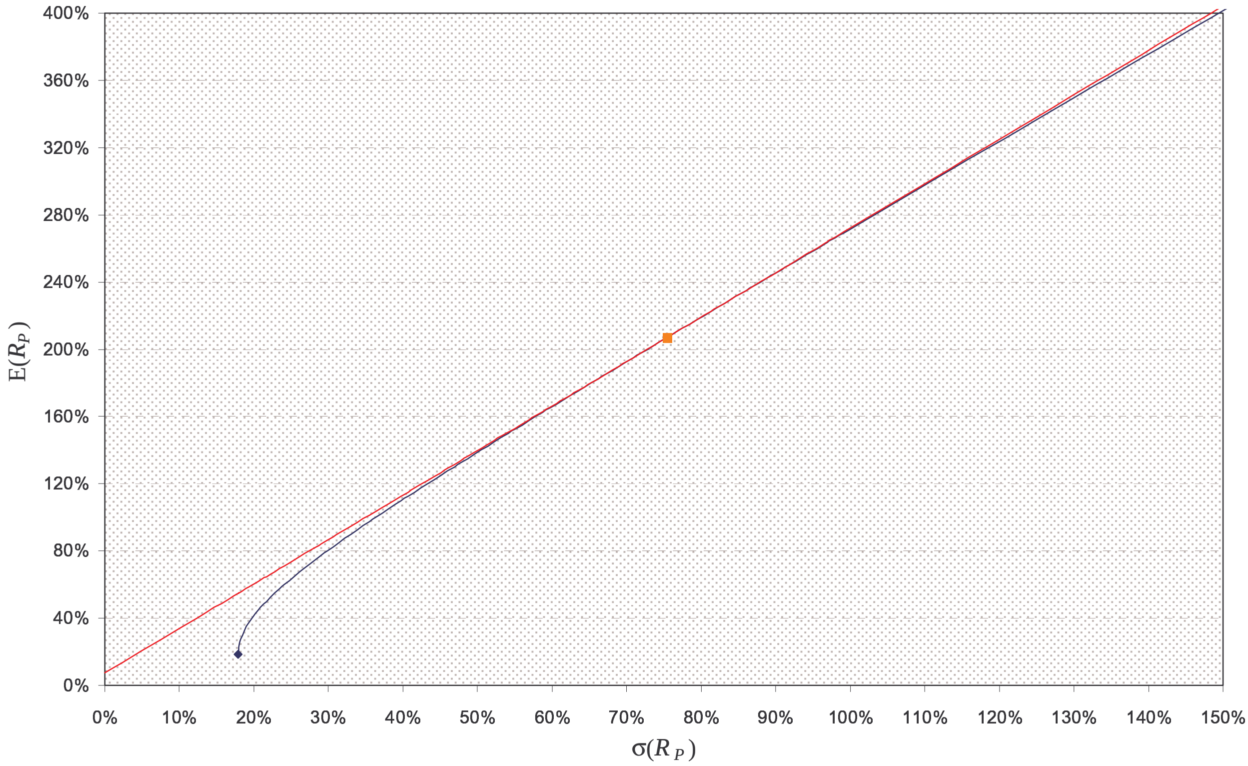


Fig. IV-6. Frontera Eficiente y LMC.

Con la inclusión de un activo libre de riesgo y la posibilidad de acceder a préstamos a tasa libre de riesgo, la línea del mercado de capitales se convierte en la nueva frontera eficiente, pues las carteras mixtas permiten al inversionista acceder a una curva de indiferencia más alta de la que alcanzaría a través de la inversión sólo en carteras riesgosas.

Así, de nuevo dibujaremos un mapa de siete curvas de indiferencia para cada inversionista, cuyas funciones de utilidad son las indicadas en la Tabla IV-J. De forma análoga a lo hecho antes de deducir la LMC, superponemos la nueva frontera eficiente y los mapas de indiferencia para cada perfil inversor y así obtenemos las carteras óptimas para el caso en el que los inversionistas pueden prestar y pedir prestado a tasa libre de riesgo, cuyas características se muestran en la Tabla IV-L.

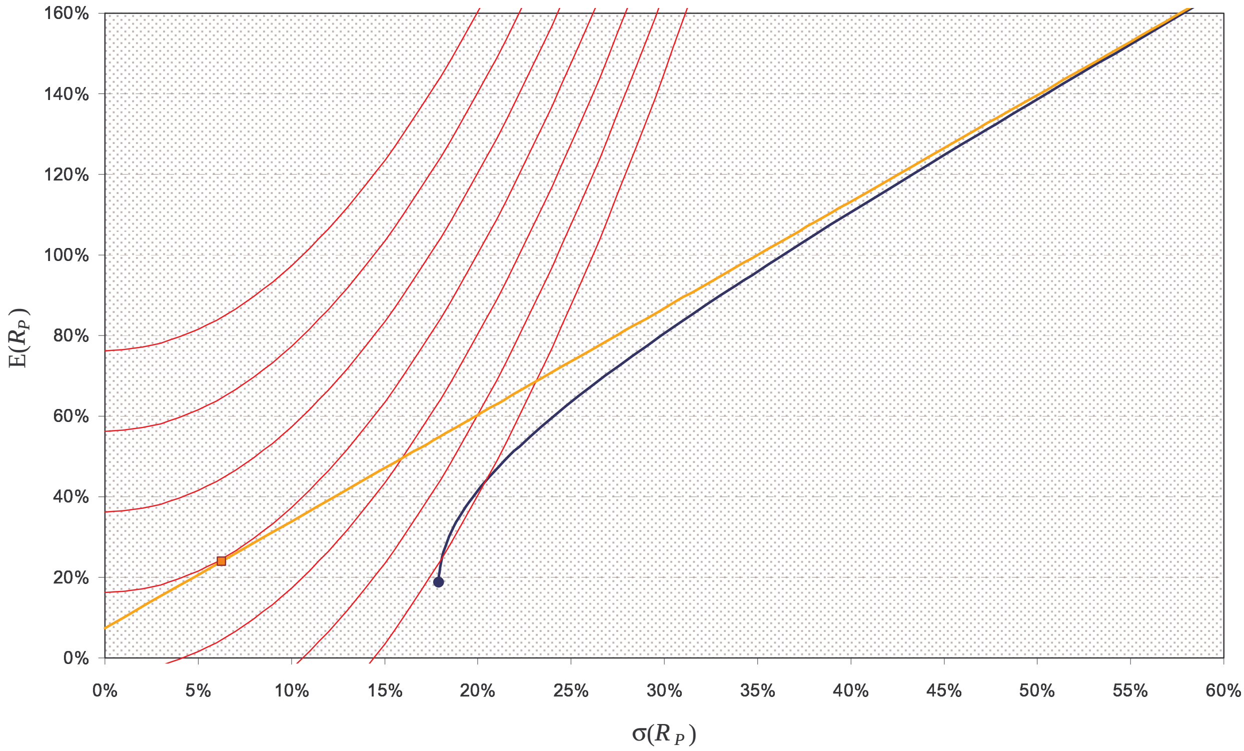


Fig. IV-7. LMC, Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista conservador.

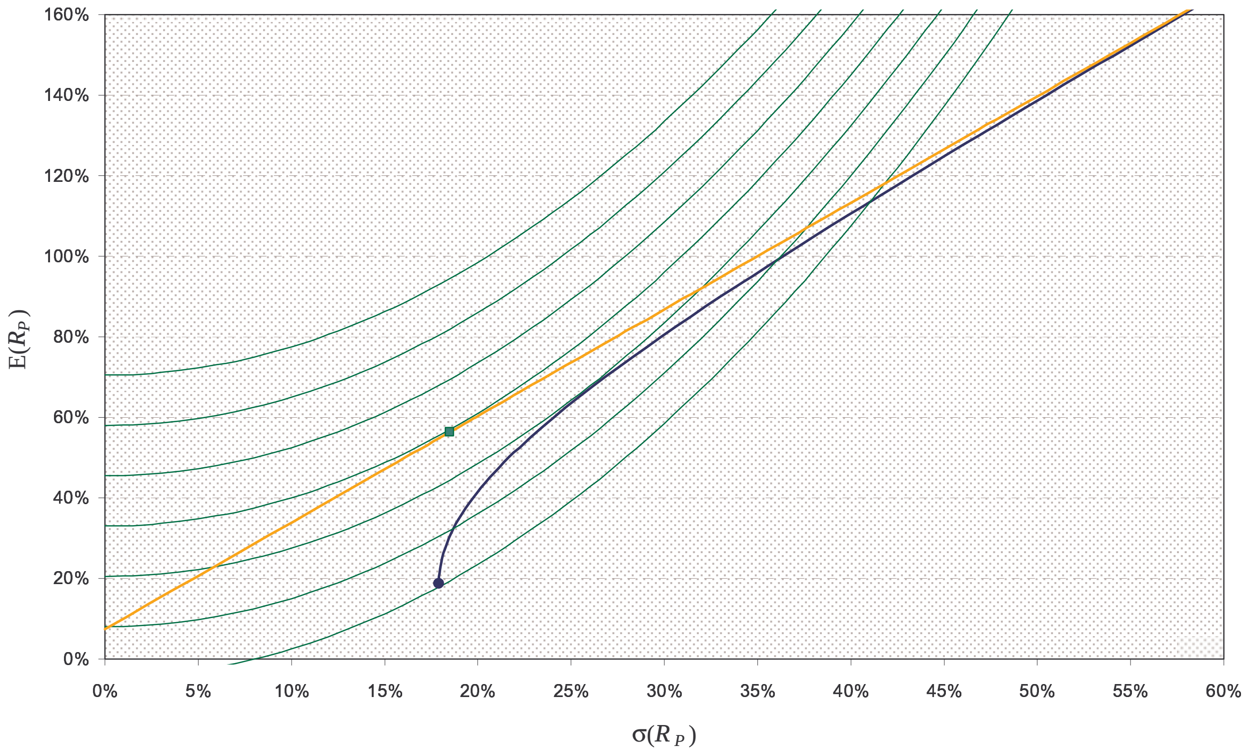


Fig. IV-8. LMC, Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista neutral.

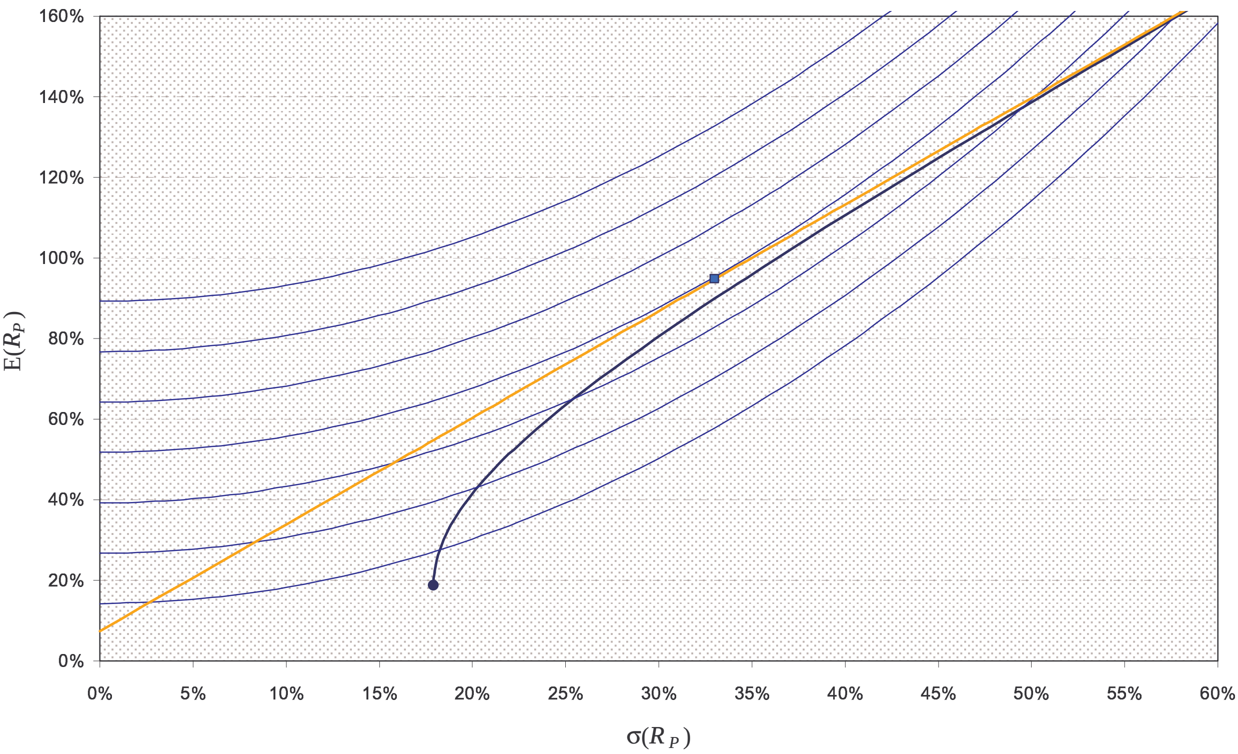


Fig. IV-9. LMC, Frontera Eficiente y Curvas de Indiferencia para un inversionista agresivo.

CARTERA ÓPTIMA	TOLERANCIA AL RIESGO		
	CONSERVADOR	NEUTRAL	AGRESIVO
$E(R_P)$	23.950717%	56.365317%	94.733620%
$\sigma^2(R_P)$	0.390625%	3.422500%	10.890000%
$\sigma(R_P)$	6.25%	18.50%	33.00%
x_M	8.281703%	24.513841%	43.727393%
x_F	91.718297%	75.486159%	56.272607%
Tipo de cartera	Acreedora	Acreedora	Acreedora

Tabla IV-L. Carteras Óptimas con la inclusión del activo sin riesgo, para cada perfil de inversionista.

4.6. BETAS

Una vez identificadas las carteras óptimas con la inclusión del activo libre de riesgo, el siguiente paso consiste en determinar la sensibilidad de cada activo ante las variaciones del mercado, a través de los coeficientes beta (β). De acuerdo al Modelo de Mercado de Sharpe, se ajustaron modelos de regresión lineal para la relación de dependencia entre la rentabilidad del mercado y la de cada uno de los 10 activos considerados en este ejercicio.

Recordemos que la rentabilidad del mercado es la variable explicativa o independiente de los modelos; en la sección anterior, hemos encontrado ya la cartera de mercado teórica. Sin embargo, Sharpe proponía considerar que el mercado está representado por algún índice bursátil como el IPC, y aceptar que la evolución de este índice podía aproximar el comportamiento del mercado.

Es por ello que en el presente trabajo hemos considerado dos carteras de mercado, la teórica y la práctica (IPC), para el cálculo de los coeficientes beta. La fórmula utilizada es la siguiente:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_M)}{\mathrm{Var}(R_M)}$$

ACTIVO	CARTERA DE MERCADO TEÓRICA		IPC	
	Coeficiente β	Clasificación	Coeficiente β	Clasificación
AMX L	0.19151261	*Defensivo*	1.23851768	*Ofensivo*
BIMBO A	0.10997430	*Defensivo*	0.73878780	*Defensivo*
CEMEX CPO	-0.02413920	*Defensivo*	1.05712199	*Ofensivo*
GFINBUR O	0.07861706	*Defensivo*	0.45093513	*Defensivo*
GMEXICO B	0.32179274	*Defensivo*	1.11860446	*Ofensivo*
IDEAL B-1	0.03013224	*Defensivo*	0.78439956	*Defensivo*
TELECOM A1	0.11893655	*Defensivo*	1.01911586	*Ofensivo*
TELMEX L	0.06263111	*Defensivo*	0.78736553	*Defensivo*
TLEVISA CPO	0.02802064	*Defensivo*	0.85896050	*Defensivo*
WALMEX V	0.05626136	*Defensivo*	1.10186474	*Ofensivo*

Tabla IV-M. Coeficientes beta de cada activo.

La Tabla IV-M indica las betas obtenidas para cada activo con respecto a la cartera de mercado teórica y al IPC, cuya importancia radica en el hecho de que constituyen una medida relativa del riesgo sistemático de un activo con respecto al mercado.

Podemos observar además que las betas de la cartera de mercado teórica indican que todos los activos son defensivos o de baja volatilidad, pues cuando varía el rendimiento del mercado todas responden con una variación de menor orden en sus rendimientos. Observamos también que los coeficientes beta de GMEXICOB, AMXL, TELECOMA1 y BIMBOA son los mayores, lo que puede deberse a que su ponderación en la cartera de mercado es también la mayor, mientras que en teoría CEMEXCPO, TLEVISACPO e IDEALB-1 se comportan prácticamente independientes del mercado, pues sus coeficientes beta son los más cercanos a cero.

Por otra parte, las betas con respecto al IPC muestran que AMXL, GMEXICOB, WALMEXV, CEMEXCPO y TELECOMA1 son acciones ofensivas y presentan una variación mayor ante las variaciones del IPC; de hecho, en los últimos meses estas emisoras han sido muy significativas en el comportamiento del IPC, como se comentó en la sección 4.1.

CONCLUSIONES

El principal mensaje de este trabajo señala la conveniencia de combinar valores de diferentes empresas emisoras de manera de evitar el riesgo que amenaza individualmente a las mismas. Si bien esto parece intuitivamente lógico, podemos, a través de teorías con fundamentos matemáticos, optimizar los resultados de nuestro trabajo.

Desde mediados del siglo pasado, académicos como Harry Markowitz, William Sharpe, y James Tobin -entre otros- se ocuparon de desarrollar modelos que permiten al inversionista obtener la cartera que buscan, dentro de las posibilidades del mercado. A largo de este trabajo se buscó desarrollar las teorías que fundamentan la gestión de carteras, y no podemos dejar de observar que todas ellas tuvieron repercusión hasta mucho tiempo después de sus publicaciones. Una de las razones que parecería ser lógica para este hecho encuentra su explicación en la informática, ya que para la aplicación de los modelos que rigen la administración de carteras se requiere realizar un elevado número de cálculos y estimaciones que sería difícil llevarlos a cabo sin las herramientas adecuadas que nos ofrece el actual procesamiento electrónico de datos.

Podemos también señalar la resistencia de muchos gestores de carteras a usar técnicas cuantitativas porque no se actualizan o tienen miedo de carecer las habilidades necesarias para ello, y piensan erróneamente que si se usan métodos cuantitativos su trabajo será redundante. Entonces, se mantienen cerrados a cambios potenciales viendo amenazada la estabilidad aparente en la que se encuentran, y basan sus decisiones en su experiencia. Evidentemente esto significa un desperdicio de las herramientas que esta teoría ofrece, y mantenerse inmutable ante ellas parece un retroceso con relación al entorno teórico en el cual se desarrollan las finanzas actuales.

Por otra parte, numerosas investigaciones realizadas por consultorías de diferentes países han demostrado la viabilidad de las teorías que se han expuesto en este trabajo; sin embargo, de la misma manera se comprobó que para obtener resultados más satisfactorios el mercado en el cual se opera debe estar atravesando un período de crecimiento. Esto es así porque las mencionadas teorías tienen por objeto seguir el mercado, excluyendo los factores que afectan individualmente a las empresas que negocian sus títulos, de manera de evitar riesgos innecesarios eliminados a través de la diversificación. Una respuesta a esta condición sería mantener carteras diversificadas globalmente ya que los ciclos económicos de diferentes países no están completamente sincronizados, y una economía débil en un país puede ser contrarrestada por una fuerte economía en otro.

Durante las últimas décadas, la economía mexicana ha mantenido un esquema de desarrollo basado en un modelo de mercado, con una economía orientada a la apertura al comercio internacional. El mercado ha fungido como el protagonista en la asignación de los recursos, y la relevancia cada vez mayor de los inversionistas institucionales ha permitido incrementar la eficiencia.

El Mercado de Valores constituye uno de los ámbitos financieros importantes de la economía mexicana contemporánea, de gran dinamismo y con un gran potencial de desarrollo; en él concurren importantes flujos financieros del mercado de dinero y de capitales cuya magnitud incide en las decisiones financieras de los emisores como de los inversionistas. Asimismo, su impacto es creciente sobre las tasas de interés, la política monetaria, la inversión extranjera, y en general sobre las tendencias económicas del país. El mercado de valores mexicano participa en el proceso de globalización de la economía nacional, por la constante adaptación y actualización de los instrumentos que en él se manejan, la variedad de operaciones que en él se realizan y la diversidad de títulos que se ofertan.

Dada su habilidad para adelantarse a los ciclos económicos, la Bolsa Mexicana de Valores –única en su tipo en México– ha tomado mayor importancia como un termómetro no oficial de la economía mexicana, por lo menos en la conciencia del público en general. El indicativo de lo anterior, es que hasta en los noticieros más populares se proporciona información de la Bolsa, sea por radio o televisión. Por otra parte, la irrupción en el mercado bursátil de un gran número de pequeños inversionistas, ya sea gestionando sus propias carteras o a través de los fondos de inversión, provocó la llamada "democratización" de la bolsa, es decir, la liberalización y desarrollo del mercado de capitales mexicano. Además, en vista de la creciente globalización de la economía, donde los hechos financieros de importancia repercuten de inmediato en los mercados nacionales, los precios de los activos financieros están cada vez más afectados por diversas variables, como las fluctuaciones inesperadas en el tipo de cambio, inflación, los cambios en las tasas de interés y las caídas de los índices bursátiles de acciones en los ámbitos nacional e internacional.

Estas variables, aunadas a la adopción de tipos de cambio flexibles en muchos países latinoamericanos y la creciente apertura de los mercados internacionales, son factores que generan volatilidad en los resultados de las empresas. Por ello, se han desarrollado nuevos instrumentos para facilitar la administración de riesgos que permitan neutralizar la volatilidad de los mercados y gestionar de un modo más eficaz sus recursos, tales como los productos financieros derivados.

El Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. (MexDer) surge en nuestro país por la necesidad del sector empresarial de contar con herramientas financieras adecuadas para protegerse de dichas fluctuaciones para así poder incrementar su productividad y competir en condiciones de igualdad con las empresas extranjeras. El 15 de abril de 1999 se oficializa la apertura del MexDer, cuyo reto principal ha sido crear un mercado de derivados en un país que emergía de una severa crisis financiera y que se ha visto afectado significativamente por las fluctuaciones en los mercados financieros internacionales (principalmente las devaluaciones que ha sufrido nuestra moneda y las continuas alzas en las tasas de interés).

Todo lo anterior hace fundamental que los ejecutivos y los empresarios aprendan a gestionar el riesgo, con el fin de adoptar medidas que permitan cubrirse de éste y tomar decisiones acertadas oportunamente. En la actualidad, los agentes económicos, sobre todo los inversionistas institucionales, son más conscientes de los riesgos asociados con una inversión en el mercado de capitales y los contrastan cada vez más con el rendimiento, en la toma de decisiones. Por ello, en los últimos cincuenta años se han venido desarrollando múltiples modelos y diferentes técnicas cuantitativas de administración de inversiones, que constituyen la Teoría de la Cartera.

Cada una de las compañías de administración de fondos es responsable de la inversión de grandes cantidades de dinero: instituciones de crédito, compañías aseguradoras, sociedades de inversión, casas de bolsa, etc. obtienen rendimientos a través de la inversión. La selección de un portafolio de inversión apropiado es un componente esencial de la administración de fondos pues contribuye al crecimiento de la economía al permitir una asignación eficiente de capital. Aunque la mayoría de las decisiones en la selección de una cartera sean tomadas en base cualitativa, cada vez es más común utilizar técnicas cuantitativas de optimización como herramienta para mejorar la selección de los componentes de una cartera de inversión.

De tal manera, los gestores de portafolios disponen cada vez más de mayor información y de mejores técnicas (o modelos) de optimización para la toma de sus decisiones de inversión. Por lo general, ven la necesidad de implementar estos modelos en la práctica, con el fin de formar carteras 'óptimas', que muestran la máxima rentabilidad esperada dentro de un riesgo deseado. El uso adecuado de los modelos (técnicas) de administración de inversiones permitirá incrementar la eficiencia y competitividad empresarial y contribuir al desarrollo y profundización del mercado de capitales en el país.

Debido al desarrollo tecnológico y estructural y a los ciclos comerciales generales, se debe efectuar una revisión permanente de las estrategias de la cartera que responda a los cambios periódicos en las coyunturas y a los efectos de los mercados globalizados que alteran cíclicamente la evolución de las empresas y de las perspectivas económicas, a la tolerancia al riesgo del inversor, sus expectativas, la distribución de probabilidades. Incluso con las mejores técnicas de previsión del futuro, se producen cambios estructurales del mercado, por lo que el administrador de la cartera debe monitorear y adaptar las estrategias de cartera a medida que cambian las condiciones del mercado.

Gracias a las diversas aportaciones que han realizado tantos autores, esta teoría integra múltiples ramas del conocimiento financiero, económico y matemático, y se ha convertido en una de las modelizaciones más útiles y fáciles de aplicar en las diferentes etapas de la gestión de portafolios, aparte de ser una herramienta básica para la toma de decisiones de inversión. Como se pudo observar en el presente estudio, la mayor parte de los modelos cuantitativos tiene un fuerte soporte matemático, lo que obliga a los actuales y futuros administradores de portafolios a tener una excelente preparación técnica, con un buen conocimiento de paquetes y software estadístico y, por supuesto, con un buen manejo de la teoría de la cartera, para así poder aplicarla en forma correcta y adecuada en la práctica. Por ello, a nivel académico la enseñanza de estos temas resulta imprescindible y debe incluirse en la formación de los actuarios, administradores, economistas, contadores y otras carreras afines.

Asimismo, su aplicación tiene un gran potencial, ya que el uso adecuado de optimizadores por parte de los administradores de portafolios, junto con el análisis fundamental, experiencia e intuición, les permitirá mejorar su desempeño en el mercado de capitales y la ampliación de su gama de productos para ajustarse a los diversos perfiles y grados de aversión al riesgo del inversionista.

Es inevitable comentar la evidente perfectibilidad de todo este desarrollo teórico, dada la enorme complejidad que ofrece el problema de selección de cartera. Más que representar un defecto, esta situación representa una excelente oportunidad para la crítica y retroalimentación posterior; tal y como ha sucedido desde su nacimiento, la Teoría de la Cartera representa una sólida base para investigaciones y trabajos posteriores, que buscan resolver sus principales dificultades y que para ello incorporan nuevas herramientas científicas, tales como análisis de series de tiempo, procesos estocásticos, administración de riesgos financieros, etc.

Por ejemplo, hemos visto que la Teoría de la Cartera es un buen modelo de diversificación basado en la correlación negativa de los rendimientos de los activos, antes que en el número de activos. Sin embargo, sólo considera los dos primeros momentos de la distribución de los retornos: la media y la varianza. Esta simplificación no supone inconvenientes cuando los retornos de los activos presentan distribución normal, pero infortunadamente en la práctica esto no siempre ocurre. Una característica común en las distribuciones de retornos es la presencia de leptocurtosis, es decir, que hay una concentración considerable de datos alrededor de la media, y colas más pesadas que las de una distribución normal. Al considerar únicamente los dos primeros momentos de la distribución se está omitiendo el comportamiento leptocúrtico de la distribución del retorno, lo que sugiere una línea de investigación posible. Otra posible corrección para el modelo de Markowitz es su carácter estático, pues ofrece un portafolio eficiente en un punto dado del tiempo, lo cual resulta poco adecuado en condiciones de alta volatilidad.

Finalmente, podemos suponer que quizá el verdadero problema radica en el hecho de que el mercado bursátil responde a la libre conjunción de la oferta y demanda. Las expectativas de oferentes y demandantes constituyen variantes difícilmente determinables, pues se manejan por una gran cantidad de seres humanos, con distintas preferencias, objetivos, etc. lo que complica su modelación matemática. Por ello, los modelos en torno al aspecto bursátil implican aproximaciones que han resultado útiles, y que con el avance científico son cada vez más cercanas a la realidad.

ANEXOS

- PRECIOS Y RENDIMIENTOS HISTÓRICOS DE LAS ACCIONES CONSIDERADAS

	AMXL		BIMBO A		CEMEX CPO		GFINBUR O	
FECHA	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**
02/01/2006	15.65		36.46		31.35		17.46	
03/01/2006	16.49	5.2283%	37.41	2.5722%	32.22	2.7373%	17.94	2.7120%
04/01/2006	17.05	3.3396%	36.77	-1.7256%	32.26	0.1241%	17.32	-3.5171%
05/01/2006	16.87	-1.0613%	36.86	0.2445%	31.83	-1.3419%	17.76	2.5087%
06/01/2006	17.09	1.2957%	37.81	2.5447%	31.79	-0.1257%	18.03	1.5088%
09/01/2006	17.50	2.3707%	37.81	0.0000%	31.70	-0.2835%	17.99	-0.2221%
10/01/2006	17.31	-1.0917%	37.90	0.2377%	31.62	-0.2527%	18.05	0.3330%
11/01/2006	17.72	2.3410%	38.38	1.2585%	33.11	4.6046%	18.33	1.5393%
12/01/2006	17.54	-1.0210%	37.64	-1.9469%	32.62	-1.4910%	18.03	-1.6502%
13/01/2006	17.63	0.5118%	38.25	1.6076%	32.51	-0.3378%	18.10	0.3875%
16/01/2006	17.70	0.3963%	38.45	0.5215%	32.78	0.8271%	18.33	1.2627%
17/01/2006	16.84	-4.9808%	38.35	-0.2604%	32.26	-1.5991%	17.69	-3.5540%
18/01/2006	16.87	0.1780%	38.09	-0.6803%	31.64	-1.9406%	16.91	-4.5094%
19/01/2006	17.18	1.8209%	38.22	0.3407%	32.28	2.0026%	17.09	1.0588%
20/01/2006	16.85	-1.9395%	38.39	0.4438%	32.30	0.0619%	16.82	-1.5925%
23/01/2006	16.95	0.5917%	37.82	-1.4959%	32.62	0.9858%	16.75	-0.4170%
24/01/2006	17.71	4.3862%	37.75	-0.1853%	33.16	1.6419%	17.03	1.6578%
25/01/2006	17.62	-0.5095%	37.64	-0.2918%	33.36	0.6013%	16.96	-0.4119%
26/01/2006	18.20	3.2387%	38.04	1.0571%	33.93	1.6942%	17.26	1.7534%
27/01/2006	17.83	-2.0539%	38.38	0.8898%	33.15	-2.3257%	16.69	-3.3582%
30/01/2006	17.63	-1.1280%	37.92	-1.2058%	33.65	1.4970%	17.13	2.6022%
31/01/2006	17.65	0.1134%	37.55	-0.9805%	33.73	0.2375%	16.89	-1.4110%
01/02/2006	17.85	1.1268%	38.33	2.0560%	33.89	0.4732%	16.97	0.4725%
02/02/2006	17.53	-1.8090%	37.47	-2.2692%	33.37	-1.5463%	17.14	0.9968%
03/02/2006	17.30	-1.3207%	38.00	1.4046%	32.81	-1.6924%	17.36	1.2754%
06/02/2006	17.30	0.0000%	38.00	0.0000%	32.81	0.0000%	17.36	0.0000%
07/02/2006	17.26	-0.2315%	37.18	-2.1815%	32.62	-0.5808%	16.88	-2.8039%
08/02/2006	17.77	2.9120%	36.21	-2.6436%	31.97	-2.0128%	15.61	-7.8218%
09/02/2006	17.61	-0.9045%	37.34	3.0730%	31.79	-0.5646%	16.05	2.7797%
10/02/2006	17.66	0.2835%	36.23	-3.0178%	30.39	-4.5038%	15.71	-2.1411%
13/02/2006	17.15	-2.9304%	34.63	-4.5167%	29.29	-3.6867%	15.04	-4.3584%
14/02/2006	17.24	0.5234%	34.72	0.2596%	30.10	2.7279%	15.15	0.7287%
15/02/2006	17.59	2.0098%	34.92	0.5744%	30.65	1.8107%	15.13	-0.1321%
16/02/2006	18.00	2.3041%	35.61	1.9567%	30.86	0.6828%	15.31	1.1827%
17/02/2006	17.84	-0.8929%	35.23	-1.0729%	31.00	0.4526%	15.53	1.4267%
20/02/2006	17.86	0.1120%	35.39	0.4531%	31.08	0.2577%	15.59	0.3856%
21/02/2006	17.77	-0.5052%	34.68	-2.0266%	31.34	0.8331%	15.54	-0.3212%
22/02/2006	18.12	1.9505%	34.79	0.3167%	31.86	1.6456%	16.12	3.6643%
23/02/2006	18.58	2.5069%	36.72	5.3992%	32.63	2.3881%	16.02	-0.6223%
24/02/2006	18.72	0.7507%	37.04	0.8677%	32.66	0.0919%	15.83	-1.1931%
27/02/2006	18.23	-2.6524%	37.12	0.2157%	32.32	-1.0465%	15.52	-1.9777%
28/02/2006	18.16	-0.3847%	36.53	-1.6022%	31.76	-1.7479%	15.87	2.2301%
01/03/2006	18.63	2.5552%	37.47	2.5407%	32.16	1.2516%	15.81	-0.3788%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
02/03/2006	18.64	0.0537%	37.51	0.1067%	31.96	-0.6238%	15.85	0.2527%
03/03/2006	18.62	-0.1074%	37.11	-1.0721%	32.24	0.8723%	15.92	0.4407%
06/03/2006	18.58	-0.2151%	36.11	-2.7317%	31.97	-0.8410%	15.64	-1.7744%
07/03/2006	18.13	-2.4518%	34.69	-4.0118%	31.04	-2.9521%	14.94	-4.5790%
08/03/2006	17.84	-1.6125%	35.02	0.9468%	31.17	0.4179%	15.63	4.5150%
09/03/2006	17.86	0.1120%	34.75	-0.7740%	31.15	-0.0642%	15.45	-1.1583%
10/03/2006	17.78	-0.4489%	34.92	0.4880%	31.27	0.3845%	15.44	-0.0647%
13/03/2006	18.27	2.7186%	35.22	0.8554%	31.65	1.2079%	16.10	4.1858%
14/03/2006	18.62	1.8976%	35.59	1.0451%	31.75	0.3155%	16.02	-0.4981%
15/03/2006	18.57	-0.2689%	35.43	-0.4506%	33.09	4.1338%	15.61	-2.5926%
16/03/2006	18.60	0.1614%	35.93	1.4014%	34.21	3.3287%	15.90	1.8407%
17/03/2006	19.03	2.2855%	37.02	2.9886%	34.20	-0.0292%	15.44	-2.9358%
20/03/2006	19.23	1.0455%	36.94	-0.2163%	34.43	0.6703%	15.98	3.4376%
22/03/2006	19.06	-0.8880%	36.74	-0.5429%	34.92	1.4131%	15.89	-0.5648%
23/03/2006	18.76	-1.5865%	35.97	-2.1181%	34.48	-1.2680%	15.70	-1.2029%
24/03/2006	18.81	0.2662%	36.32	0.9683%	34.71	0.6648%	15.78	0.5083%
27/03/2006	18.68	-0.6935%	35.16	-3.2459%	34.80	0.2590%	15.71	-0.4446%
28/03/2006	18.46	-1.1847%	34.85	-0.8856%	33.63	-3.4199%	15.03	-4.4249%
29/03/2006	18.49	0.1624%	35.04	0.5437%	34.19	1.6515%	15.88	5.5012%
30/03/2006	18.50	0.0541%	35.34	0.8525%	34.56	1.0764%	15.57	-1.9714%
31/03/2006	18.59	0.4853%	35.17	-0.4822%	34.70	0.4043%	15.83	1.6561%
03/04/2006	19.08	2.6017%	35.73	1.5797%	34.95	0.7179%	15.92	0.5669%
04/04/2006	19.00	-0.4202%	36.87	3.1408%	35.76	2.2911%	15.83	-0.5669%
05/04/2006	19.13	0.6819%	36.08	-2.1660%	36.48	1.9934%	15.95	0.7552%
06/04/2006	18.97	-0.8399%	36.18	0.2768%	36.96	1.3072%	15.98	0.1879%
07/04/2006	18.31	-3.5411%	35.64	-1.5038%	36.56	-1.0882%	15.88	-0.6277%
10/04/2006	18.34	0.1637%	35.40	-0.6757%	36.87	0.8443%	16.07	1.1894%
11/04/2006	18.26	-0.4372%	35.46	0.1693%	36.03	-2.3046%	16.39	1.9717%
12/04/2006	18.26	0.0000%	35.60	0.3940%	35.59	-1.2287%	15.90	-3.0352%
17/04/2006	18.97	3.8146%	36.51	2.5241%	35.66	0.1965%	15.99	0.5644%
18/04/2006	18.95	-0.1055%	35.77	-2.0477%	36.47	2.2460%	16.01	0.1250%
19/04/2006	18.90	-0.2642%	35.31	-1.2943%	36.90	1.1722%	16.10	0.5606%
20/04/2006	19.08	0.9479%	35.30	-0.0283%	35.99	-2.4970%	16.47	2.2721%
21/04/2006	19.49	2.1261%	35.36	0.1698%	35.94	-0.1390%	16.49	0.1214%
24/04/2006	19.61	0.6138%	35.15	-0.5957%	35.48	-1.2882%	16.89	2.3968%
25/04/2006	19.84	1.1660%	35.35	0.5674%	36.17	1.9261%	16.89	0.0000%
26/04/2006	20.34	2.4889%	35.58	0.6485%	36.80	1.7268%	16.74	-0.8921%
27/04/2006	20.13	-1.0378%	34.60	-2.7930%	36.12	-1.8651%	16.82	0.4768%
28/04/2006	20.45	1.5772%	34.38	-0.6379%	36.61	1.3475%	16.92	0.5928%
02/05/2006	20.97	2.5110%	34.70	0.9265%	37.56	2.5618%	16.68	-1.4286%
03/05/2006	21.42	2.1232%	34.53	-0.4911%	37.40	-0.4269%	16.79	0.6573%
04/05/2006	21.62	0.9294%	34.90	1.0658%	37.80	1.0638%	16.54	-1.5002%
05/05/2006	21.44	-0.8360%	34.87	-0.0860%	37.52	-0.7435%	16.54	0.0000%
08/05/2006	22.01	2.6239%	34.84	-0.0861%	38.38	2.2662%	16.74	1.2019%
09/05/2006	22.27	1.1744%	34.80	-0.1149%	38.11	-0.7060%	16.82	0.4768%
10/05/2006	22.16	-0.4952%	34.95	0.4301%	37.89	-0.5789%	16.64	-1.0759%
11/05/2006	21.44	-3.3031%	34.77	-0.5164%	38.20	0.8148%	16.85	1.2541%
12/05/2006	21.08	-1.6934%	34.39	-1.0989%	37.29	-2.4110%	16.48	-2.2203%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
15/05/2006	20.52	-2.6925%	34.06	-0.9642%	36.40	-2.4156%	16.20	-1.7136%
16/05/2006	20.81	1.4034%	34.47	1.1966%	35.66	-2.0539%	16.49	1.7743%
17/05/2006	20.31	-2.4320%	34.18	-0.8449%	34.56	-3.1333%	16.33	-0.9750%
18/05/2006	20.26	-0.2465%	34.30	0.3505%	34.02	-1.5748%	16.75	2.5394%
19/05/2006	20.34	0.3941%	34.31	0.0292%	34.14	0.3521%	16.74	-0.0597%
22/05/2006	19.10	-6.2901%	33.81	-1.4680%	32.85	-3.8518%	16.17	-3.4643%
23/05/2006	18.66	-2.3306%	33.52	-0.8614%	32.68	-0.5188%	16.00	-1.0569%
24/05/2006	18.49	-0.9152%	32.29	-3.7385%	31.55	-3.5190%	16.02	0.1249%
25/05/2006	19.03	2.8787%	33.32	3.1400%	32.55	3.1204%	16.19	1.0556%
26/05/2006	19.34	1.6159%	33.66	1.0152%	32.84	0.8870%	16.40	1.2888%
29/05/2006	19.17	-0.8829%	33.61	-0.1487%	32.74	-0.3050%	16.15	-1.5361%
30/05/2006	18.30	-4.6445%	33.17	-1.3178%	31.85	-2.7560%	15.74	-2.5715%
31/05/2006	18.38	0.4362%	32.77	-1.2132%	31.58	-0.8513%	15.91	1.0743%
01/06/2006	18.96	3.1068%	33.37	1.8144%	32.37	2.4708%	16.08	1.0628%
02/06/2006	19.39	2.2426%	33.44	0.2095%	33.31	2.8626%	15.92	-1.0000%
05/06/2006	18.63	-3.9984%	33.49	0.1494%	32.20	-3.3891%	15.71	-1.3279%
06/06/2006	18.40	-1.2423%	33.68	0.5657%	31.11	-3.4437%	15.71	0.0000%
07/06/2006	17.95	-2.4761%	32.99	-2.0700%	30.19	-3.0019%	15.61	-0.6386%
08/06/2006	18.11	0.8874%	33.02	0.0909%	29.59	-2.0074%	15.80	1.2098%
09/06/2006	17.28	-4.6915%	33.12	0.3024%	28.80	-2.7061%	15.84	0.2528%
12/06/2006	16.63	-3.8341%	32.21	-2.7860%	27.55	-4.4373%	15.32	-3.3379%
13/06/2006	16.26	-2.2500%	31.56	-2.0386%	26.94	-2.2390%	15.46	0.9097%
14/06/2006	15.94	-1.9876%	30.46	-3.5476%	27.81	3.1783%	15.79	2.1121%
15/06/2006	17.33	8.3607%	31.16	2.2721%	30.42	8.9705%	16.09	1.8821%
16/06/2006	17.35	0.1153%	31.44	0.8946%	30.23	-0.6265%	16.00	-0.5609%
19/06/2006	16.77	-3.4001%	30.76	-2.1866%	28.90	-4.4993%	15.91	-0.5641%
20/06/2006	17.39	3.6304%	30.87	0.3570%	29.61	2.4271%	15.92	0.0628%
21/06/2006	18.20	4.5526%	31.04	0.5492%	30.75	3.7778%	15.72	-1.2642%
22/06/2006	18.39	1.0385%	30.98	-0.1935%	31.01	0.8420%	16.03	1.9528%
23/06/2006	18.68	1.5646%	33.01	6.3469%	30.89	-0.3877%	16.50	2.8898%
26/06/2006	18.47	-1.1306%	32.00	-3.1075%	30.87	-0.0648%	16.00	-3.0772%
27/06/2006	17.86	-3.3584%	31.91	-0.2816%	29.99	-2.8921%	16.18	1.1187%
28/06/2006	18.00	0.7808%	31.20	-2.2501%	30.05	0.1999%	16.47	1.7765%
29/06/2006	18.93	5.0376%	32.56	4.2666%	31.19	3.7235%	16.58	0.6657%
30/06/2006	18.88	-0.2645%	33.48	2.7864%	31.76	1.8110%	16.26	-1.9489%
03/07/2006	19.70	4.2515%	35.01	4.4685%	33.21	4.4643%	16.60	2.0695%
04/07/2006	20.08	1.9106%	35.40	1.1078%	33.87	1.9679%	16.68	0.4808%
05/07/2006	19.02	-5.4233%	33.76	-4.7435%	32.45	-4.2829%	16.52	-0.9639%
06/07/2006	19.67	3.3604%	35.72	5.6434%	32.81	1.1033%	16.69	1.0238%
07/07/2006	19.21	-2.3664%	35.70	-0.0560%	31.80	-3.1267%	17.14	2.6605%
10/07/2006	18.73	-2.5304%	35.46	-0.6745%	31.39	-1.2977%	17.30	0.9292%
11/07/2006	18.68	-0.2673%	35.05	-1.1630%	31.68	0.9196%	17.27	-0.1736%
12/07/2006	18.38	-1.6190%	35.00	-0.1428%	31.76	0.2522%	17.18	-0.5225%
13/07/2006	17.74	-3.5441%	33.74	-3.6664%	30.79	-3.1018%	16.32	-5.1355%
14/07/2006	17.21	-3.0331%	33.32	-1.2526%	29.75	-3.4361%	16.57	1.5202%
17/07/2006	17.43	1.2702%	33.35	0.0900%	29.44	-1.0475%	16.46	-0.6661%
18/07/2006	17.98	3.1067%	33.39	0.1199%	29.77	1.1147%	17.04	3.4630%
19/07/2006	19.14	6.2520%	34.53	3.3572%	31.46	5.5216%	17.61	3.2903%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
20/07/2006	18.79	-1.8456%	34.10	-1.2531%	30.87	-1.8932%	17.18	-2.4721%
21/07/2006	18.54	-1.3394%	33.69	-1.2096%	30.81	-0.1946%	17.67	2.8122%
24/07/2006	19.14	3.1850%	33.65	-0.1188%	31.89	3.4453%	17.41	-1.4824%
25/07/2006	19.28	0.7288%	34.19	1.5920%	31.78	-0.3455%	17.49	0.4585%
26/07/2006	18.69	-3.1080%	34.36	0.4960%	31.08	-2.2273%	17.07	-2.4307%
27/07/2006	19.43	3.8830%	34.69	0.9558%	30.44	-2.0807%	16.93	-0.8235%
28/07/2006	19.60	0.8711%	34.44	-0.7233%	30.96	1.6939%	16.55	-2.2701%
31/07/2006	19.56	-0.2043%	34.79	1.0111%	30.34	-2.0229%	16.18	-2.2610%
01/08/2006	19.28	-1.4418%	35.24	1.2852%	30.17	-0.5619%	15.88	-1.8715%
02/08/2006	19.50	1.1346%	35.35	0.3117%	30.72	1.8066%	15.87	-0.0630%
03/08/2006	19.50	0.0000%	35.35	0.0000%	31.25	1.7105%	16.01	0.8783%
04/08/2006	19.46	-0.2053%	35.20	-0.4252%	31.12	-0.4169%	16.00	-0.0625%
07/08/2006	19.58	0.6148%	35.35	0.4252%	30.98	-0.4509%	15.92	-0.5013%
08/08/2006	19.38	-1.0267%	35.48	0.3671%	30.60	-1.2342%	15.84	-0.5038%
09/08/2006	19.42	0.2062%	35.06	-1.1908%	29.90	-2.3142%	15.98	0.8800%
10/08/2006	19.56	0.7183%	35.05	-0.0285%	29.46	-1.4825%	15.98	0.0000%
11/08/2006	19.77	1.0679%	35.63	1.6412%	29.70	0.8114%	16.11	0.8102%
14/08/2006	19.88	0.5549%	35.94	0.8663%	29.09	-2.0753%	16.44	2.0277%
15/08/2006	20.12	1.2000%	36.13	0.5273%	29.67	1.9742%	16.57	0.7876%
16/08/2006	20.39	1.3330%	36.40	0.7445%	30.51	2.7918%	16.59	0.1206%
17/08/2006	20.55	0.7816%	37.12	1.9587%	30.66	0.4904%	16.71	0.7207%
18/08/2006	20.58	0.1459%	37.05	-0.1888%	31.14	1.5534%	16.69	-0.1198%
21/08/2006	20.28	-1.4685%	36.39	-1.7974%	30.73	-1.3254%	16.59	-0.6010%
22/08/2006	20.40	0.5900%	36.35	-0.1100%	30.86	0.4221%	16.88	1.7329%
23/08/2006	20.00	-1.9803%	36.41	0.1649%	30.16	-2.2944%	16.87	-0.0593%
24/08/2006	20.02	0.1000%	35.94	-1.2993%	30.12	-0.1327%	16.84	-0.1780%
25/08/2006	20.30	1.3889%	36.57	1.7377%	30.54	1.3848%	17.20	2.1152%
28/08/2006	20.54	1.1753%	36.65	0.2185%	30.53	-0.0327%	17.55	2.0145%
29/08/2006	20.80	1.2579%	36.15	-1.3736%	30.65	0.3923%	17.35	-1.1461%
30/08/2006	21.00	0.9569%	36.34	0.5242%	31.09	1.4254%	17.23	-0.6940%
31/08/2006	20.37	-3.0459%	35.66	-1.8889%	30.79	-0.9696%	17.10	-0.7574%
01/09/2006	20.83	2.2331%	36.06	1.1155%	31.52	2.3432%	17.16	0.3503%
04/09/2006	20.98	0.7175%	36.27	0.5807%	31.84	1.0101%	17.15	-0.0583%
05/09/2006	20.67	-1.4886%	36.12	-0.4144%	31.84	0.0000%	17.11	-0.2335%
06/09/2006	20.09	-2.8461%	35.74	-1.0576%	31.14	-2.2230%	17.20	0.5246%
07/09/2006	20.08	-0.0498%	35.63	-0.3083%	30.92	-0.7090%	17.39	1.0986%
08/09/2006	20.11	0.1493%	35.83	0.5598%	30.60	-1.0403%	17.40	0.0575%
11/09/2006	20.17	0.2979%	35.86	0.0837%	30.33	-0.8863%	17.38	-0.1150%
12/09/2006	20.68	2.4971%	36.66	2.2064%	31.05	2.3461%	17.58	1.1442%
13/09/2006	20.88	0.9625%	36.98	0.8691%	31.46	1.3118%	17.62	0.2273%
14/09/2006	20.72	-0.7692%	36.78	-0.5423%	31.44	-0.0636%	17.55	-0.3981%
15/09/2006	20.90	0.8650%	36.94	0.4341%	31.65	0.6657%	18.62	5.9182%
18/09/2006	21.29	1.8488%	36.82	-0.3254%	32.56	2.8346%	18.47	-0.8088%
19/09/2006	21.33	0.1877%	37.10	0.7576%	32.02	-1.6724%	18.46	-0.0542%
20/09/2006	21.54	0.9797%	37.82	1.9221%	32.36	1.0562%	18.54	0.4324%
21/09/2006	21.24	-1.4025%	37.78	-0.1058%	31.86	-1.5572%	18.18	-1.9608%
22/09/2006	21.00	-1.1364%	38.05	0.7121%	31.43	-1.3588%	18.65	2.5524%
25/09/2006	21.11	0.5224%	38.48	1.1238%	32.28	2.6685%	18.66	0.0536%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
26/09/2006	21.33	1.0368%	38.38	-0.2602%	32.46	0.5561%	18.74	0.4278%
27/09/2006	21.39	0.2809%	38.01	-0.9687%	32.33	-0.4013%	18.87	0.6913%
28/09/2006	21.52	0.6059%	37.70	-0.8189%	32.47	0.4321%	18.77	-0.5314%
29/09/2006	21.71	0.8790%	38.24	1.4222%	32.45	-0.0616%	18.67	-0.5342%
02/10/2006	21.28	-2.0005%	37.29	-2.5157%	32.07	-1.1779%	18.95	1.4886%
03/10/2006	21.30	0.0939%	37.14	-0.4031%	32.34	0.8384%	18.67	-1.4886%
04/10/2006	21.99	3.1881%	37.73	1.5761%	33.13	2.4134%	18.84	0.9064%
05/10/2006	22.21	0.9955%	37.85	0.3175%	33.63	1.4979%	18.54	-1.6052%
06/10/2006	22.20	-0.0450%	37.85	0.0000%	33.57	-0.1786%	18.38	-0.8667%
09/10/2006	22.17	-0.1352%	37.28	-1.5174%	33.37	-0.5976%	18.18	-1.0941%
10/10/2006	22.26	0.4051%	38.29	2.6732%	33.55	0.5380%	18.24	0.3295%
11/10/2006	22.14	-0.5405%	37.76	-1.3938%	33.21	-1.0186%	18.15	-0.4946%
12/10/2006	22.49	1.5685%	38.00	0.6336%	34.22	2.9959%	18.54	2.1260%
13/10/2006	22.79	1.3251%	38.01	0.0263%	34.48	0.7569%	18.68	0.7523%
16/10/2006	22.97	0.7867%	38.26	0.6556%	34.88	1.1534%	18.70	0.1070%
17/10/2006	22.71	-1.1384%	38.71	1.1693%	34.39	-1.4148%	19.06	1.9068%
18/10/2006	22.95	1.0513%	39.60	2.2731%	34.61	0.6377%	19.20	0.7318%
19/10/2006	23.18	0.9972%	39.71	0.2774%	34.44	-0.4924%	19.62	2.1639%
20/10/2006	23.47	1.2433%	40.93	3.0260%	34.29	-0.4365%	19.70	0.4069%
23/10/2006	23.62	0.6371%	40.51	-1.0314%	34.15	-0.4091%	19.83	0.6577%
24/10/2006	23.62	0.0000%	40.27	-0.5942%	34.26	0.3216%	19.82	-0.0504%
25/10/2006	23.61	-0.0423%	40.91	1.5768%	34.53	0.7850%	20.42	2.9823%
26/10/2006	23.84	0.9694%	41.82	2.2000%	33.71	-2.4034%	19.65	-3.8437%
27/10/2006	22.80	-4.4604%	41.81	-0.0239%	32.13	-4.8004%	18.85	-4.1564%
30/10/2006	22.08	-3.2088%	41.34	-1.1305%	31.64	-1.5368%	18.75	-0.5319%
31/10/2006	23.06	4.3427%	42.77	3.4006%	32.45	2.5278%	19.20	2.3717%
01/11/2006	22.90	-0.6963%	43.62	1.9679%	32.22	-0.7113%	19.79	3.0266%
03/11/2006	22.71	-0.8332%	43.20	-0.9675%	32.06	-0.4978%	19.94	0.7551%
06/11/2006	23.49	3.3769%	43.37	0.3927%	32.76	2.1599%	20.21	1.3450%
07/11/2006	23.62	0.5519%	42.98	-0.9033%	32.53	-0.7046%	19.83	-1.8982%
08/11/2006	23.70	0.3381%	43.33	0.8110%	32.63	0.3069%	20.04	1.0534%
09/11/2006	23.36	-1.4450%	43.24	-0.2079%	32.98	1.0669%	20.56	2.5617%
10/11/2006	23.25	-0.4720%	43.19	-0.1157%	33.29	0.9356%	21.12	2.6873%
13/11/2006	23.66	1.7481%	43.77	1.3340%	33.48	0.5691%	21.42	1.4105%
14/11/2006	23.75	0.3797%	43.81	0.0913%	33.85	1.0991%	21.78	1.6667%
15/11/2006	23.59	-0.6760%	43.59	-0.5034%	34.30	1.3206%	21.93	0.6863%
16/11/2006	23.77	0.7601%	43.60	0.0229%	34.10	-0.5848%	22.48	2.4770%
17/11/2006	23.62	-0.6330%	43.69	0.2062%	34.29	0.5556%	22.16	-1.4337%
21/11/2006	24.41	3.2899%	44.11	0.9567%	34.80	1.4764%	21.80	-1.6379%
22/11/2006	24.58	0.6940%	44.04	-0.1588%	34.69	-0.3166%	21.99	0.8678%
23/11/2006	24.60	0.0813%	44.31	0.6112%	34.63	-0.1731%	21.96	-0.1365%
24/11/2006	24.45	-0.6116%	44.20	-0.2486%	34.62	-0.0289%	21.75	-0.9609%
27/11/2006	23.85	-2.4846%	43.97	-0.5217%	34.41	-0.6084%	21.60	-0.6920%
28/11/2006	23.81	-0.1679%	43.95	-0.0455%	34.20	-0.6122%	21.50	-0.4640%
29/11/2006	24.43	2.5706%	44.98	2.3165%	34.64	1.2783%	21.94	2.0259%
30/11/2006	24.41	-0.0819%	45.04	0.1333%	35.11	1.3477%	21.90	-0.1825%
04/12/2006	24.51	0.4088%	45.76	1.5859%	34.89	-0.6286%	22.09	0.8638%
05/12/2006	24.84	1.3374%	47.24	3.1831%	34.97	0.2290%	22.32	1.0358%

FECHA	AMXL		BIMBO A		CEMEX CPO		GFINBUR O	
	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.
06/12/2006	24.57	-1.0929%	49.41	4.4912%	34.74	-0.6599%	22.18	-0.6292%
07/12/2006	24.63	0.2439%	49.06	-0.7109%	34.36	-1.0999%	22.25	0.3151%
08/12/2006	24.71	0.3243%	49.35	0.5894%	34.02	-0.9945%	22.38	0.5826%
11/12/2006	24.61	-0.4055%	48.86	-0.9979%	34.30	0.8197%	22.35	-0.1341%
13/12/2006	24.20	-1.6800%	48.63	-0.4718%	34.63	0.9575%	22.67	1.4216%
14/12/2006	24.34	0.5768%	49.17	1.1043%	34.94	0.8912%	22.58	-0.3978%
15/12/2006	24.11	-0.9494%	49.20	0.0610%	35.39	1.2797%	21.74	-3.7911%
18/12/2006	23.94	-0.7076%	49.50	0.6079%	35.57	0.5073%	22.18	2.0037%
19/12/2006	23.64	-1.2611%	48.98	-1.0561%	35.25	-0.9037%	22.10	-0.3613%
20/12/2006	23.39	-1.0632%	49.20	0.4482%	34.72	-1.5150%	21.39	-3.2654%
21/12/2006	23.48	0.3840%	51.28	4.1407%	34.83	0.3163%	21.08	-1.4599%
22/12/2006	23.17	-1.3291%	51.49	0.4087%	34.24	-1.7085%	21.01	-0.3326%
26/12/2006	23.63	1.9659%	52.79	2.4934%	34.63	1.1326%	20.75	-1.2452%
27/12/2006	24.10	1.9695%	53.13	0.6420%	35.58	2.7063%	20.43	-1.5542%
28/12/2006	24.24	0.5792%	52.97	-0.3016%	35.59	0.0281%	20.70	1.3129%
29/12/2006	24.38	0.5759%	54.00	1.9258%	35.83	0.6721%	20.86	0.7700%
02/01/2007	24.65	1.1014%	53.20	-1.4926%	36.41	1.6058%	21.41	2.6025%
03/01/2007	24.95	1.2097%	55.01	3.3457%	36.10	-0.8551%	20.92	-2.3152%
04/01/2007	25.15	0.7984%	55.16	0.2723%	36.08	-0.0554%	20.78	-0.6715%
05/01/2007	24.47	-2.7410%	53.78	-2.5336%	35.48	-1.6770%	20.59	-0.9185%
08/01/2007	24.51	0.1633%	53.63	-0.2793%	35.76	0.7861%	20.66	0.3394%
09/01/2007	23.87	-2.6459%	52.90	-1.3705%	34.90	-2.4343%	20.43	-1.1195%
10/01/2007	24.10	0.9589%	52.95	0.0945%	35.19	0.8275%	20.49	0.2933%
11/01/2007	24.36	1.0731%	53.96	1.8895%	35.77	1.6348%	20.60	0.5354%
12/01/2007	24.27	-0.3701%	55.00	1.9090%	35.72	-0.1399%	20.60	0.0000%
15/01/2007	24.35	0.3291%	54.99	-0.0182%	36.08	1.0028%	20.73	0.6291%
16/01/2007	24.29	-0.2467%	55.99	1.8022%	36.35	0.7456%	20.66	-0.3382%
17/01/2007	24.12	-0.7023%	55.22	-1.3848%	37.25	2.4458%	20.67	0.0484%
18/01/2007	23.52	-2.5190%	54.04	-2.1601%	37.18	-0.1881%	20.65	-0.0968%
19/01/2007	23.64	0.5089%	53.26	-1.4539%	37.36	0.4830%	20.52	-0.6315%
22/01/2007	23.58	-0.2541%	54.48	2.2648%	37.55	0.5073%	20.60	0.3891%
23/01/2007	24.16	2.4299%	54.75	0.4944%	38.13	1.5328%	21.10	2.3982%
24/01/2007	24.81	2.6548%	55.96	2.1860%	38.21	0.2096%	21.59	2.2957%
25/01/2007	24.42	-1.5844%	55.26	-1.2588%	37.17	-2.7595%	21.28	-1.4463%
26/01/2007	24.09	-1.3606%	55.88	1.1157%	37.32	0.4027%	21.61	1.5389%
29/01/2007	23.84	-1.0432%	54.76	-2.0247%	36.93	-1.0505%	21.60	-0.0463%
30/01/2007	23.84	0.0000%	55.31	0.9994%	37.69	2.0371%	21.45	-0.6969%
31/01/2007	24.46	2.5674%	55.10	-0.3804%	38.10	1.0819%	21.31	-0.6548%
01/02/2007	24.63	0.6926%	57.24	3.8103%	38.45	0.9144%	20.89	-1.9906%
02/02/2007	24.62	-0.0406%	56.84	-0.7013%	38.96	1.3177%	21.27	1.8027%
06/02/2007	24.98	1.4516%	56.79	-0.0880%	38.96	0.0000%	21.13	-0.6604%
07/02/2007	25.27	1.1542%	56.09	-1.2403%	39.34	0.9706%	20.95	-0.8555%
08/02/2007	26.15	3.4231%	55.65	-0.7875%	39.01	-0.8424%	20.89	-0.2868%
09/02/2007	25.78	-1.4250%	55.83	0.3229%	38.57	-1.1343%	20.95	0.2868%
12/02/2007	25.92	0.5416%	55.94	0.1968%	38.24	-0.8593%	21.09	0.6660%
13/02/2007	26.22	1.1508%	55.20	-1.3317%	38.21	-0.0785%	21.23	0.6616%
14/02/2007	26.40	0.6842%	55.38	0.3256%	39.51	3.3457%	21.14	-0.4248%
15/02/2007	26.43	0.1136%	55.58	0.3605%	39.48	-0.0760%	21.04	-0.4742%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
16/02/2007	26.45	0.0756%	55.49	-0.1621%	39.15	-0.8394%	20.82	-1.0511%
19/02/2007	26.44	-0.0378%	55.45	-0.0721%	39.20	0.1276%	21.09	1.2885%
20/02/2007	26.16	-1.0646%	55.50	0.0901%	39.61	1.0405%	21.32	1.0847%
21/02/2007	26.24	0.3053%	55.39	-0.1984%	40.45	2.0985%	21.18	-0.6588%
22/02/2007	26.00	-0.9188%	54.82	-1.0344%	40.32	-0.3219%	21.14	-0.1890%
23/02/2007	25.96	-0.1540%	54.74	-0.1460%	39.54	-1.9535%	21.05	-0.4266%
26/02/2007	25.67	-1.1234%	54.98	0.4375%	39.46	-0.2025%	20.51	-2.5988%
27/02/2007	24.28	-5.5670%	52.96	-3.7433%	37.39	-5.3884%	19.03	-7.4896%
28/02/2007	24.44	0.6568%	51.87	-2.0796%	37.29	-0.2678%	19.77	3.8149%
01/03/2007	24.18	-1.0695%	51.07	-1.5543%	36.32	-2.6357%	20.09	1.6057%
02/03/2007	24.15	-0.1241%	51.08	0.0196%	35.44	-2.4527%	20.13	0.1989%
05/03/2007	23.58	-2.3885%	50.13	-1.8773%	34.99	-1.2779%	20.12	-0.0497%
06/03/2007	24.01	1.8072%	51.17	2.0534%	35.99	2.8179%	20.38	1.2840%
07/03/2007	23.84	-0.7106%	50.33	-1.6552%	35.97	-0.0556%	20.37	-0.0491%
08/03/2007	24.48	2.6492%	51.04	1.4008%	36.71	2.0364%	19.84	-2.6363%
09/03/2007	24.92	1.7814%	51.12	0.1566%	37.12	1.1107%	19.81	-0.1513%
12/03/2007	25.19	1.0776%	51.16	0.0782%	37.14	0.0539%	20.01	1.0045%
13/03/2007	24.52	-2.6958%	50.00	-2.2935%	36.01	-3.0898%	20.02	0.0500%
14/03/2007	24.74	0.8932%	50.88	1.7447%	35.78	-0.6408%	20.13	0.5479%
15/03/2007	24.81	0.2825%	51.06	0.3531%	36.18	1.1117%	19.95	-0.8982%
16/03/2007	24.79	-0.0806%	50.59	-0.9247%	35.53	-1.8129%	20.61	3.2547%
20/03/2007	25.43	2.5489%	51.00	0.8072%	36.06	1.4807%	20.50	-0.5352%
21/03/2007	26.16	2.8302%	52.66	3.2031%	37.38	3.5952%	20.73	1.1157%
22/03/2007	26.05	-0.4214%	53.65	1.8625%	37.47	0.2405%	20.60	-0.6291%
23/03/2007	26.03	-0.0768%	53.68	0.0559%	37.11	-0.9654%	20.60	0.0000%
26/03/2007	25.87	-0.6166%	53.33	-0.6541%	36.96	-0.4050%	20.57	-0.1457%
27/03/2007	25.71	-0.6204%	53.55	0.4117%	36.04	-2.5207%	20.60	0.1457%
28/03/2007	25.82	0.4269%	53.99	0.8183%	35.63	-1.1441%	20.62	0.0970%
29/03/2007	26.39	2.1836%	55.50	2.7584%	35.58	-0.1404%	21.40	3.7129%
30/03/2007	26.44	0.1893%	55.54	0.0720%	35.47	-0.3096%	21.30	-0.4684%
02/04/2007	27.61	4.3300%	55.67	0.2338%	35.61	0.3939%	21.24	-0.2821%
03/04/2007	27.57	-0.1450%	56.10	0.7694%	35.78	0.4763%	20.75	-2.3340%
04/04/2007	27.54	-0.1089%	55.75	-0.6258%	35.23	-1.5491%	20.63	-0.5800%
09/04/2007	27.71	0.6154%	55.37	-0.6839%	35.93	1.9675%	20.71	0.3870%
10/04/2007	27.44	-0.9792%	55.33	-0.0723%	37.93	5.4170%	20.52	-0.9217%
11/04/2007	27.37	-0.2554%	55.03	-0.5437%	37.38	-1.4607%	20.47	-0.2440%
12/04/2007	27.66	1.0540%	56.58	2.7777%	37.75	0.9850%	21.12	3.1260%
13/04/2007	27.97	1.1145%	57.30	1.2645%	37.40	-0.9315%	21.02	-0.4746%
16/04/2007	27.83	-0.5018%	56.81	-0.8588%	37.45	0.1336%	21.42	1.8851%
17/04/2007	27.99	0.5733%	56.61	-0.3527%	37.06	-1.0468%	21.40	-0.0934%
18/04/2007	27.96	-0.1072%	56.34	-0.4781%	36.85	-0.5683%	21.23	-0.7976%
19/04/2007	28.09	0.4639%	56.68	0.6017%	36.73	-0.3262%	21.22	-0.0471%
20/04/2007	28.57	1.6944%	56.98	0.5279%	37.09	0.9754%	21.45	1.0781%
23/04/2007	28.20	-1.3035%	56.39	-1.0408%	36.95	-0.3782%	21.29	-0.7487%
24/04/2007	28.38	0.6363%	57.87	2.5907%	35.91	-2.8550%	21.30	0.0470%
25/04/2007	28.54	0.5622%	59.45	2.6937%	35.62	-0.8109%	21.41	0.5151%
26/04/2007	29.58	3.5792%	57.52	-3.3003%	35.35	-0.7609%	21.04	-1.7433%
27/04/2007	29.79	0.7074%	58.98	2.5066%	34.91	-1.2525%	21.41	1.7433%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
30/04/2007	28.78	-3.4492%	59.21	0.3892%	34.85	-0.1720%	21.41	0.0000%
02/05/2007	29.12	1.1745%	60.24	1.7246%	34.85	0.0000%	21.59	0.8372%
03/05/2007	29.76	2.1740%	62.20	3.2018%	36.25	3.9386%	21.69	0.4621%
04/05/2007	29.94	0.6030%	64.43	3.5224%	37.08	2.2638%	22.21	2.3691%
07/05/2007	30.00	0.2002%	63.11	-2.0700%	37.03	-0.1349%	21.77	-2.0010%
08/05/2007	29.69	-1.0387%	62.91	-0.3174%	36.94	-0.2433%	21.76	-0.0459%
09/05/2007	30.13	1.4711%	64.01	1.7334%	37.46	1.3979%	22.01	1.1423%
10/05/2007	29.35	-2.6229%	65.59	2.4384%	36.93	-1.4249%	22.10	0.4081%
11/05/2007	29.87	1.7562%	67.96	3.5496%	37.23	0.8091%	22.49	1.7493%
14/05/2007	29.59	-0.9418%	67.11	-1.2586%	36.83	-1.0802%	22.05	-1.9758%
15/05/2007	29.67	0.2700%	67.10	-0.0149%	36.61	-0.5991%	22.30	1.1274%
16/05/2007	30.78	3.6729%	70.39	4.7867%	37.20	1.5987%	22.04	-1.1728%
17/05/2007	30.93	0.4861%	71.04	0.9192%	37.59	1.0429%	21.69	-1.6008%
18/05/2007	31.73	2.5536%	72.43	1.9377%	37.80	0.5571%	21.86	0.7807%
21/05/2007	31.68	-0.1577%	71.11	-1.8393%	37.99	0.5014%	21.59	-1.2428%
22/05/2007	31.78	0.3152%	69.52	-2.2613%	38.31	0.8388%	21.75	0.7384%
23/05/2007	31.82	0.1258%	65.51	-5.9412%	38.04	-0.7073%	22.02	1.2337%
24/05/2007	31.13	-2.1923%	63.99	-2.3476%	37.69	-0.9243%	22.25	1.0391%
25/05/2007	31.86	2.3179%	65.23	1.9193%	38.26	1.5010%	22.50	1.1173%
28/05/2007	31.98	0.3759%	66.40	1.7778%	38.55	0.7551%	22.37	-0.5795%
29/05/2007	31.80	-0.5644%	66.29	-0.1658%	39.49	2.4091%	22.54	0.7571%
30/05/2007	32.92	3.4614%	67.92	2.4291%	41.47	4.8923%	22.54	0.0000%
31/05/2007	32.47	-1.3764%	68.97	1.5341%	41.71	0.5771%	23.43	3.8726%
01/06/2007	33.54	3.2422%	70.53	2.2367%	42.50	1.8763%	23.95	2.1951%
04/06/2007	33.48	-0.1791%	71.00	0.6642%	42.81	0.7268%	24.49	2.2297%
05/06/2007	33.73	0.7439%	72.24	1.7314%	43.27	1.0688%	25.40	3.6484%
06/06/2007	32.97	-2.2790%	70.01	-3.1356%	42.65	-1.4432%	25.49	0.3537%
07/06/2007	32.65	-0.9753%	69.07	-1.3518%	41.75	-2.1328%	24.70	-3.1483%
08/06/2007	33.26	1.8511%	69.47	0.5775%	42.57	1.9450%	25.16	1.8452%
11/06/2007	33.49	0.6891%	71.81	3.3129%	43.02	1.0515%	25.00	-0.6380%
12/06/2007	33.14	-1.0506%	71.33	-0.6707%	42.61	-0.9576%	25.15	0.5982%
13/06/2007	33.51	1.1103%	69.99	-1.8965%	42.93	0.7482%	25.20	0.1986%
14/06/2007	33.90	1.1571%	69.71	-0.4009%	42.89	-0.0932%	24.76	-1.7615%
15/06/2007	34.36	1.3478%	68.50	-1.7510%	44.04	2.6460%	24.74	-0.0808%
18/06/2007	34.58	0.6382%	68.46	-0.0584%	43.80	-0.5464%	24.50	-0.9748%
19/06/2007	34.63	0.1445%	68.69	0.3354%	41.85	-4.5542%	25.20	2.8171%
20/06/2007	34.00	-1.8360%	67.34	-1.9849%	41.47	-0.9122%	24.42	-3.1442%
21/06/2007	34.33	0.9659%	68.68	1.9704%	42.09	1.4840%	24.78	1.4634%
22/06/2007	34.13	-0.5843%	66.88	-2.6558%	41.73	-0.8590%	24.91	0.5232%
25/06/2007	33.45	-2.0125%	67.12	0.3582%	41.36	-0.8906%	25.43	2.0660%
26/06/2007	32.74	-2.1454%	66.53	-0.8829%	40.33	-2.5219%	25.38	-0.1968%
27/06/2007	33.24	1.5156%	65.07	-2.2189%	39.77	-1.3983%	25.89	1.9895%
28/06/2007	33.52	0.8388%	65.63	0.8569%	40.14	0.9260%	25.86	-0.1159%
29/06/2007	33.44	-0.2389%	66.67	1.5722%	39.79	-0.8758%	26.04	0.6936%
02/07/2007	33.74	0.8931%	65.00	-2.5368%	40.16	0.9256%	26.07	0.1151%
03/07/2007	35.00	3.6664%	65.94	1.4358%	41.57	3.4507%	26.20	0.4974%
04/07/2007	35.37	1.0516%	65.76	-0.2733%	40.85	-1.7472%	26.10	-0.3824%
05/07/2007	35.56	0.5357%	65.78	0.0304%	40.37	-1.1820%	26.10	0.0000%

FECHA	AMXL CIERRE AJ.	AMXL REND.	BIMBO A CIERRE AJ.	BIMBO A REND.	CEMEX CPO CIERRE AJ.	CEMEX CPO REND.	GFINBUR O CIERRE AJ.	GFINBUR O REND.
06/07/2007	35.57	0.0281%	65.74	-0.0608%	40.12	-0.6212%	26.16	0.2296%
09/07/2007	34.40	-3.3446%	65.36	-0.5797%	39.84	-0.7004%	26.11	-0.1913%
10/07/2007	34.02	-1.1108%	63.99	-2.1184%	39.82	-0.0502%	26.25	0.5348%
11/07/2007	34.65	1.8349%	63.09	-1.4165%	39.58	-0.6045%	26.12	-0.4965%
12/07/2007	35.01	1.0336%	64.29	1.8842%	39.72	0.3531%	26.50	1.4443%
13/07/2007	35.11	0.2852%	64.32	0.0467%	40.12	1.0020%	27.43	3.4493%
16/07/2007	34.91	-0.5713%	64.40	0.1243%	39.05	-2.7032%	27.88	1.6272%
17/07/2007	34.56	-1.0076%	63.82	-0.9047%	38.10	-2.4629%	28.01	0.4652%
18/07/2007	34.35	-0.6095%	64.09	0.4222%	38.46	0.9404%	29.45	5.0132%
19/07/2007	34.71	1.0426%	64.90	1.2559%	38.58	0.3115%	29.79	1.1479%
20/07/2007	34.26	-1.3049%	65.12	0.3384%	37.69	-2.3339%	30.49	2.3226%
23/07/2007	35.26	2.8771%	65.59	0.7192%	37.55	-0.3721%	30.94	1.4651%
24/07/2007	34.03	-3.5507%	63.93	-2.5635%	37.02	-1.4215%	31.20	0.8368%
25/07/2007	33.31	-2.1385%	63.48	-0.7064%	36.95	-0.1893%	31.00	-0.6431%
26/07/2007	31.71	-4.9226%	61.14	-3.7559%	36.10	-2.3273%	30.99	-0.0323%
27/07/2007	32.04	1.0353%	61.24	0.1634%	35.67	-1.1983%	30.74	-0.8100%
30/07/2007	33.06	3.1339%	62.19	1.5394%	35.78	0.3079%	30.57	-0.5546%
31/07/2007	32.71	-1.0643%	61.38	-1.3110%	35.47	-0.8702%	30.51	-0.1965%
01/08/2007	31.73	-3.0418%	61.66	0.4551%	34.52	-2.7148%	30.50	-0.0328%
02/08/2007	32.60	2.7050%	62.33	1.0807%	35.27	2.1494%	30.05	-1.4864%
03/08/2007	31.57	-3.2105%	62.60	0.4322%	34.81	-1.3128%	30.00	-0.1665%
06/08/2007	31.97	1.2591%	63.50	1.4275%	34.22	-1.7094%	29.75	-0.8368%
07/08/2007	32.70	2.2577%	62.04	-2.3261%	35.46	3.5595%	29.19	-1.9003%
08/08/2007	33.11	1.2460%	63.72	2.6719%	35.99	1.4836%	29.45	0.8868%
09/08/2007	32.19	-2.8180%	61.69	-3.2377%	36.07	0.2220%	28.78	-2.3013%
10/08/2007	31.51	-2.1351%	59.80	-3.1116%	35.37	-1.9597%	28.70	-0.2784%
13/08/2007	31.63	0.3801%	60.13	0.5503%	35.89	1.4595%	28.75	0.1741%
14/08/2007	30.81	-2.6267%	58.81	-2.2197%	35.36	-1.4877%	27.62	-4.0098%
15/08/2007	29.81	-3.2995%	58.80	-0.0170%	33.54	-5.2842%	27.76	0.5056%
16/08/2007	30.31	1.6634%	59.21	0.6949%	33.13	-1.2300%	28.09	1.1818%
17/08/2007	32.12	5.8001%	60.00	1.3254%	33.40	0.8117%	27.15	-3.4037%
20/08/2007	31.64	-1.5057%	60.36	0.5982%	33.34	-0.1798%	27.60	1.6439%
21/08/2007	31.50	-0.4435%	62.12	2.8741%	32.97	-1.1160%	27.80	0.7220%
22/08/2007	32.29	2.4770%	61.90	-0.3548%	34.30	3.9547%	27.69	-0.3965%
23/08/2007	32.87	1.7803%	62.33	0.6923%	34.21	-0.2627%	26.92	-2.8202%
24/08/2007	33.31	1.3297%	63.79	2.3154%	35.11	2.5968%	26.25	-2.5204%
27/08/2007	33.34	0.0900%	64.00	0.3287%	35.03	-0.2281%	26.40	0.5698%
28/08/2007	32.13	-3.6968%	63.64	-0.5641%	33.53	-4.3764%	26.84	1.6529%
29/08/2007	32.67	1.6667%	64.19	0.8605%	34.18	1.9200%	26.54	-1.1240%
30/08/2007	32.70	0.0918%	64.49	0.4663%	34.59	1.1924%	26.52	-0.0754%
31/08/2007	33.37	2.0282%	64.96	0.7262%	35.59	2.8500%	26.89	1.3855%
03/09/2007	33.70	0.9841%	65.50	0.8278%	36.19	1.6718%	26.64	-0.9341%
04/09/2007	33.93	0.6802%	65.22	-0.4284%	36.18	-0.0276%	26.69	0.1875%
05/09/2007	33.88	-0.1475%	66.65	2.1689%	35.72	-1.2796%	26.85	0.5977%
06/09/2007	33.68	-0.5921%	65.84	-1.2227%	35.73	0.0280%	26.97	0.4459%
07/09/2007	32.91	-2.3128%	65.14	-1.0689%	34.85	-2.4938%	27.07	0.3701%
10/09/2007	32.86	-0.1520%	63.19	-3.0393%	33.43	-4.1599%	27.00	-0.2589%
11/09/2007	33.37	1.5401%	64.30	1.7414%	33.38	-0.1497%	26.90	-0.3711%

	AMXL		BIMBO A		CEMEX CPO		GFINBUR O	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.
12/09/2007	33.26	-0.3302%	62.94	-2.1378%	33.09	-0.8726%	26.05	-3.2109%
13/09/2007	33.99	2.1711%	62.02	-1.4725%	33.43	1.0223%	26.30	0.9551%
14/09/2007	33.86	-0.3832%	61.52	-0.8095%	32.37	-3.2222%	25.90	-1.5326%
17/09/2007	33.71	-0.4440%	60.63	-1.4573%	31.67	-2.1862%	26.54	2.4410%
18/09/2007	34.70	2.8945%	62.27	2.6690%	32.98	4.0531%	26.32	-0.8324%
19/09/2007	34.74	0.1152%	60.36	-3.1153%	32.55	-1.3124%	26.44	0.4549%
20/09/2007	34.62	-0.3460%	60.64	0.4628%	32.39	-0.4928%	26.70	0.9786%
21/09/2007	35.04	1.2059%	61.88	2.0242%	32.12	-0.8371%	26.53	-0.6387%
24/09/2007	35.02	-0.0571%	61.40	-0.7787%	31.75	-1.1586%	26.08	-1.7107%
25/09/2007	34.53	-1.4091%	60.04	-2.2399%	31.45	-0.9494%	25.98	-0.3842%
26/09/2007	34.94	1.1804%	61.57	2.5164%	30.94	-1.6349%	26.42	1.6794%
27/09/2007	35.30	1.0251%	61.70	0.2109%	31.99	3.3374%	26.10	-1.2186%
28/09/2007	34.89	-1.1683%	61.07	-1.0263%	32.81	2.5310%	26.20	0.3824%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
02/01/2006	22.31		13.16		27.51		12.68	
03/01/2006	22.83	2.3040%	13.42	1.9564%	28.41	3.2192%	13.21	4.0948%
04/01/2006	23.84	4.3289%	13.26	-1.1994%	28.38	-0.1057%	13.05	-1.2186%
05/01/2006	23.15	-2.9370%	13.02	-1.8265%	28.36	-0.0705%	13.05	0.0000%
06/01/2006	23.09	-0.2595%	13.05	0.2301%	28.35	-0.0353%	12.97	-0.6149%
09/01/2006	23.09	0.0000%	13.79	5.5156%	29.49	3.9424%	12.99	0.1541%
10/01/2006	22.96	-0.5646%	14.87	7.5402%	28.94	-1.8827%	12.82	-1.3173%
11/01/2006	22.94	-0.0871%	14.42	-3.0730%	28.65	-1.0071%	12.95	1.0089%
12/01/2006	22.44	-2.2037%	14.05	-2.5994%	28.20	-1.5831%	12.75	-1.5565%
13/01/2006	22.80	1.5915%	14.00	-0.3565%	27.71	-1.7529%	12.62	-1.0248%
16/01/2006	22.67	-0.5718%	13.99	-0.0715%	27.77	0.2163%	12.64	0.1584%
17/01/2006	22.51	-0.7083%	13.66	-2.3871%	26.66	-4.0792%	12.33	-2.4831%
18/01/2006	22.19	-1.4318%	13.14	-3.8811%	25.50	-4.4486%	12.12	-1.7178%
19/01/2006	22.38	0.8526%	13.22	0.6070%	25.51	0.0392%	12.21	0.7398%
20/01/2006	22.12	-1.1686%	13.03	-1.4476%	25.25	-1.0244%	11.95	-2.1524%
23/01/2006	22.40	1.2579%	12.94	-0.6931%	25.75	1.9608%	11.83	-1.0093%
24/01/2006	23.18	3.4229%	13.49	4.1625%	26.51	2.9087%	12.03	1.6765%
25/01/2006	23.45	1.1581%	13.47	-0.1484%	26.01	-1.9041%	11.96	-0.5836%
26/01/2006	24.09	2.6926%	13.10	-2.7853%	26.70	2.6182%	12.31	2.8844%
27/01/2006	25.29	4.8612%	12.98	-0.9203%	26.52	-0.6764%	11.99	-2.6339%
30/01/2006	25.82	2.0740%	12.80	-1.3965%	25.95	-2.1728%	11.75	-2.0220%
31/01/2006	26.41	2.2593%	12.93	1.0105%	26.31	1.3777%	11.86	0.9318%
01/02/2006	27.23	3.0577%	13.77	6.2942%	26.47	0.6063%	11.96	0.8396%
02/02/2006	27.41	0.6589%	14.07	2.1553%	26.00	-1.7915%	11.83	-1.0929%
03/02/2006	27.66	0.9079%	14.07	0.0000%	25.60	-1.5504%	11.60	-1.9634%
06/02/2006	27.66	0.0000%	14.07	0.0000%	25.60	0.0000%	11.60	0.0000%
07/02/2006	26.50	-4.2843%	13.63	-3.1772%	25.15	-1.7734%	11.41	-1.6515%
08/02/2006	26.00	-1.9048%	13.22	-3.0542%	24.02	-4.5971%	11.12	-2.5745%
09/02/2006	26.22	0.8426%	13.37	1.1283%	23.47	-2.3164%	11.06	-0.5410%
10/02/2006	26.78	2.1133%	13.26	-0.8261%	22.85	-2.6772%	11.14	0.7207%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
13/02/2006	26.20	-2.1896%	13.12	-1.0614%	22.49	-1.5880%	11.14	0.0000%
14/02/2006	26.70	1.8904%	13.34	1.6629%	23.10	2.6762%	11.13	-0.0898%
15/02/2006	26.15	-2.0814%	13.44	0.7468%	22.97	-0.5644%	11.16	0.2692%
16/02/2006	26.32	0.6480%	13.30	-1.0471%	23.62	2.7905%	11.53	3.2616%
17/02/2006	26.29	-0.1140%	13.49	1.4185%	24.32	2.9205%	11.39	-1.2217%
20/02/2006	26.15	-0.5339%	13.64	1.1058%	24.31	-0.0411%	11.35	-0.3518%
21/02/2006	26.42	1.0272%	13.45	-1.4028%	24.56	1.0231%	11.37	0.1761%
22/02/2006	26.40	-0.0757%	13.49	0.2970%	25.36	3.2054%	11.43	0.5263%
23/02/2006	26.30	-0.3795%	13.59	0.7386%	25.51	0.5897%	11.46	0.2621%
24/02/2006	26.35	0.1899%	13.45	-1.0355%	25.16	-1.3815%	11.21	-2.2056%
27/02/2006	25.47	-3.3967%	13.11	-2.5604%	24.93	-0.9184%	11.26	0.4450%
28/02/2006	24.72	-2.9889%	13.12	0.0762%	25.01	0.3204%	11.23	-0.2668%
01/03/2006	26.18	5.7383%	13.12	0.0000%	25.53	2.0578%	11.50	2.3758%
02/03/2006	26.91	2.7502%	12.90	-1.6910%	25.60	0.2738%	11.50	0.0000%
03/03/2006	27.71	2.9295%	12.91	0.0775%	25.62	0.0781%	11.72	1.8950%
06/03/2006	27.07	-2.3367%	12.87	-0.3103%	25.01	-2.4098%	11.64	-0.6849%
07/03/2006	26.16	-3.4195%	12.59	-2.1996%	24.51	-2.0195%	11.52	-1.0363%
08/03/2006	26.15	-0.0382%	12.55	-0.3182%	24.21	-1.2315%	11.42	-0.8718%
09/03/2006	25.67	-1.8526%	12.35	-1.6065%	24.33	0.4944%	11.48	0.5240%
10/03/2006	26.51	3.2199%	12.43	0.6457%	24.64	1.2661%	11.48	0.0000%
13/03/2006	26.56	0.1884%	12.50	0.5616%	25.17	2.1282%	11.56	0.6944%
14/03/2006	27.14	2.1602%	12.48	-0.1601%	26.02	3.3213%	11.70	1.2038%
15/03/2006	27.02	-0.4431%	12.28	-1.6155%	25.34	-2.6481%	11.66	-0.3425%
16/03/2006	27.04	0.0740%	12.75	3.7559%	24.90	-1.7516%	11.58	-0.6885%
17/03/2006	28.11	3.8808%	12.51	-1.9003%	25.31	1.6332%	11.57	-0.0864%
20/03/2006	28.36	0.8854%	12.61	0.7962%	25.89	2.2657%	11.90	2.8123%
22/03/2006	28.50	0.4924%	12.61	0.0000%	25.95	0.2315%	12.10	1.6667%
23/03/2006	27.29	-4.3384%	12.37	-1.9216%	25.57	-1.4752%	12.09	-0.0827%
24/03/2006	27.04	-0.9203%	12.68	2.4752%	25.65	0.3124%	12.22	1.0695%
27/03/2006	27.34	1.1034%	12.56	-0.9509%	25.39	-1.0188%	12.15	-0.5745%
28/03/2006	27.07	-0.9925%	12.28	-2.2545%	24.77	-2.4722%	11.77	-3.1775%
29/03/2006	27.76	2.5170%	12.33	0.4063%	24.79	0.0807%	11.72	-0.4257%
30/03/2006	28.33	2.0325%	12.37	0.3239%	24.63	-0.6475%	11.74	0.1705%
31/03/2006	28.47	0.4930%	12.35	-0.1618%	25.07	1.7707%	11.75	0.0851%
03/04/2006	29.47	3.4522%	12.27	-0.6499%	25.50	1.7007%	11.84	0.7630%
04/04/2006	30.34	2.9094%	12.08	-1.5606%	25.77	1.0533%	11.86	0.1688%
05/04/2006	31.30	3.1151%	11.68	-3.3673%	25.94	0.6575%	12.05	1.5893%
06/04/2006	31.73	1.3645%	11.08	-5.2736%	25.64	-1.1633%	12.04	-0.0830%
07/04/2006	30.85	-2.8126%	10.54	-4.9964%	25.64	0.0000%	11.79	-2.0983%
10/04/2006	31.17	1.0319%	10.75	1.9728%	25.47	-0.6652%	11.69	-0.8518%
11/04/2006	30.87	-0.9671%	11.49	6.6571%	25.14	-1.3041%	11.56	-1.1183%
12/04/2006	31.32	1.4472%	11.07	-3.7238%	24.66	-1.9278%	11.21	-3.0745%
17/04/2006	32.78	4.5562%	11.00	-0.6343%	24.41	-1.0190%	11.00	-1.8911%
18/04/2006	34.77	5.8936%	11.35	3.1322%	24.44	0.1228%	11.05	0.4535%
19/04/2006	34.96	0.5450%	11.41	0.5272%	24.35	-0.3689%	11.15	0.9009%
20/04/2006	33.45	-4.4153%	11.06	-3.1155%	23.97	-1.5729%	11.13	-0.1795%
21/04/2006	35.17	5.0142%	10.93	-1.1824%	23.88	-0.3762%	11.18	0.4482%
24/04/2006	34.53	-1.8365%	10.99	0.5474%	24.47	2.4407%	11.18	0.0000%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**FECHA**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**
25/04/2006	34.43	-0.2900%	10.98	-0.0910%	24.60	0.5299%	11.39	1.8609%
26/04/2006	34.18	-0.7288%	10.71	-2.4898%	24.76	0.6483%	11.54	1.3083%
27/04/2006	33.57	-1.8008%	10.89	1.6667%	24.76	0.0000%	11.57	0.2596%
28/04/2006	35.70	6.1518%	10.88	-0.0919%	25.55	3.1408%	11.65	0.6891%
02/05/2006	35.73	0.0840%	11.04	1.4599%	26.34	3.0451%	11.76	0.9398%
03/05/2006	34.87	-2.4364%	10.77	-2.4761%	26.24	-0.3804%	11.66	-0.8540%
04/05/2006	35.62	2.1280%	10.72	-0.4653%	26.25	0.0381%	11.78	1.0239%
05/05/2006	36.10	1.3386%	10.80	0.7435%	25.76	-1.8843%	11.86	0.6768%
08/05/2006	36.59	1.3482%	11.03	2.1073%	25.95	0.7349%	12.15	2.4158%
09/05/2006	36.36	-0.6306%	11.71	5.9824%	26.33	1.4537%	12.09	-0.4951%
10/05/2006	36.43	0.1923%	12.01	2.5296%	26.38	0.1897%	12.07	-0.1656%
11/05/2006	36.24	-0.5229%	11.56	-3.8189%	25.81	-2.1844%	11.87	-1.6709%
12/05/2006	35.74	-1.3893%	11.42	-1.2185%	25.41	-1.5619%	11.72	-1.2717%
15/05/2006	33.91	-5.2561%	11.18	-2.1240%	25.51	0.3928%	11.86	1.1875%
16/05/2006	34.61	2.0433%	11.12	-0.5381%	26.20	2.6689%	12.10	2.0034%
17/05/2006	32.72	-5.6156%	10.72	-3.6634%	25.26	-3.6537%	11.77	-2.7652%
18/05/2006	32.34	-1.1682%	10.63	-0.8431%	26.07	3.1563%	11.78	0.0849%
19/05/2006	31.01	-4.1995%	10.37	-2.4763%	25.79	-1.0798%	11.74	-0.3401%
22/05/2006	29.75	-4.1481%	10.08	-2.8364%	25.00	-3.1111%	11.32	-3.6431%
23/05/2006	30.23	1.6006%	9.97	-1.0973%	24.27	-2.9635%	11.27	-0.4427%
24/05/2006	30.91	2.2245%	9.50	-4.8289%	23.97	-1.2438%	11.05	-1.9714%
25/05/2006	31.90	3.1526%	9.68	1.8770%	25.19	4.9644%	11.40	3.1183%
26/05/2006	32.02	0.3755%	9.54	-1.4568%	25.15	-0.1589%	11.48	0.6993%
29/05/2006	32.45	1.3340%	9.54	0.0000%	25.26	0.4364%	11.45	-0.2617%
30/05/2006	30.93	-4.7974%	9.25	-3.0870%	24.90	-1.4354%	11.12	-2.9244%
31/05/2006	30.22	-2.3223%	8.71	-6.0152%	23.27	-6.7703%	10.75	-3.3840%
01/06/2006	30.01	-0.6973%	8.88	1.9330%	23.89	2.6295%	11.00	2.2990%
02/06/2006	31.29	4.1768%	9.03	1.6751%	24.33	1.8250%	11.18	1.6231%
05/06/2006	30.32	-3.1491%	8.90	-1.4501%	23.51	-3.4284%	11.00	-1.6231%
06/06/2006	29.74	-1.9315%	8.96	0.6719%	23.93	1.7707%	10.95	-0.4556%
07/06/2006	28.59	-3.9436%	8.83	-1.4615%	23.16	-3.2706%	10.89	-0.5495%
08/06/2006	27.83	-2.6942%	8.82	-0.1133%	23.05	-0.4761%	10.59	-2.7935%
09/06/2006	26.95	-3.2131%	8.65	-1.9463%	22.58	-2.0601%	10.54	-0.4733%
12/06/2006	25.14	-6.9523%	8.40	-2.9328%	21.25	-6.0708%	10.09	-4.3633%
13/06/2006	24.55	-2.3748%	8.67	3.1637%	21.13	-0.5663%	10.05	-0.3972%
14/06/2006	24.69	0.5686%	8.86	2.1678%	21.98	3.9439%	10.24	1.8729%
15/06/2006	27.69	11.4673%	9.74	9.4694%	22.92	4.1877%	10.75	4.8604%
16/06/2006	27.52	-0.6158%	10.07	3.3320%	22.84	-0.3497%	10.86	1.0181%
19/06/2006	26.33	-4.4204%	9.90	-1.7026%	22.81	-0.1314%	10.66	-1.8588%
20/06/2006	26.79	1.7320%	9.72	-1.8349%	22.80	-0.0439%	10.54	-1.1321%
21/06/2006	27.32	1.9590%	9.84	1.2270%	22.33	-2.0829%	10.71	1.6000%
22/06/2006	27.12	-0.7348%	9.85	0.1016%	22.89	2.4769%	10.86	1.3908%
23/06/2006	26.99	-0.4805%	10.38	5.2409%	24.42	6.4702%	11.01	1.3718%
26/06/2006	28.40	5.0923%	10.41	0.2886%	24.30	-0.4926%	10.94	-0.6378%
27/06/2006	28.13	-0.9553%	9.94	-4.6200%	23.08	-5.1510%	10.67	-2.4990%
28/06/2006	28.62	1.7269%	9.97	0.3014%	22.83	-1.0891%	10.85	1.6729%
29/06/2006	30.04	4.8424%	10.37	3.9336%	23.84	4.3289%	11.17	2.9067%
30/06/2006	30.24	0.6636%	10.03	-3.3336%	23.75	-0.3782%	11.41	2.1259%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**FECHA**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**
03/07/2006	31.32	3.5091%	10.30	2.6563%	25.29	6.2827%	11.73	2.7659%
04/07/2006	32.46	3.5752%	10.40	0.9662%	26.00	2.7687%	11.88	1.2707%
05/07/2006	30.75	-5.4119%	9.98	-4.1223%	25.30	-2.7292%	11.29	-5.0939%
06/07/2006	30.71	-0.1302%	9.99	0.1002%	26.03	2.8445%	11.50	1.8430%
07/07/2006	30.84	0.4224%	9.75	-2.4317%	25.22	-3.1612%	11.35	-1.3129%
10/07/2006	31.05	0.6786%	9.80	0.5115%	25.59	1.4564%	11.37	0.1761%
11/07/2006	30.88	-0.5490%	9.83	0.3057%	25.04	-2.1727%	11.32	-0.4407%
12/07/2006	29.89	-3.2585%	9.74	-0.9198%	25.36	1.2699%	11.27	-0.4427%
13/07/2006	29.25	-2.1644%	9.55	-1.9700%	24.19	-4.7234%	10.93	-3.0633%
14/07/2006	30.10	2.8646%	9.57	0.2092%	24.06	-0.5389%	11.09	1.4532%
17/07/2006	29.69	-1.3715%	9.47	-1.0504%	24.85	3.2307%	11.49	3.5433%
18/07/2006	30.28	1.9677%	9.50	0.3163%	25.83	3.8679%	11.69	1.7257%
19/07/2006	31.92	5.2745%	9.78	2.9048%	27.55	6.4466%	12.21	4.3522%
20/07/2006	30.97	-3.0214%	9.53	-2.5895%	26.70	-3.1339%	11.89	-2.6558%
21/07/2006	29.95	-3.3490%	9.59	0.6276%	26.87	0.6347%	11.90	0.0841%
24/07/2006	29.90	-0.1671%	9.73	1.4493%	27.29	1.5510%	12.33	3.5497%
25/07/2006	30.90	3.2898%	9.54	-1.9720%	27.69	1.4551%	12.45	0.9685%
26/07/2006	30.98	0.2586%	9.27	-2.8710%	27.92	0.8272%	12.61	1.2770%
27/07/2006	32.31	4.2035%	9.03	-2.6231%	28.12	0.7138%	12.58	-0.2382%
28/07/2006	33.75	4.3604%	9.00	-0.3328%	28.09	-0.1067%	12.46	-0.9585%
31/07/2006	33.75	0.0000%	9.03	0.3328%	28.16	0.2489%	12.37	-0.7249%
01/08/2006	34.22	1.3830%	9.08	0.5522%	28.78	2.1778%	12.60	1.8423%
02/08/2006	34.39	0.4956%	9.41	3.5699%	29.29	1.7565%	12.74	1.1050%
03/08/2006	33.95	-1.2877%	9.37	-0.4260%	29.30	0.0341%	12.86	0.9375%
04/08/2006	33.39	-1.6632%	9.55	1.9028%	30.35	3.5209%	13.12	2.0016%
07/08/2006	33.13	-0.7817%	9.46	-0.9469%	30.35	0.0000%	13.01	-0.8419%
08/08/2006	33.18	0.1508%	9.57	1.1561%	30.48	0.4274%	12.85	-1.2374%
09/08/2006	32.84	-1.0300%	9.40	-1.7924%	29.44	-3.4716%	12.68	-1.3318%
10/08/2006	32.66	-0.5496%	9.45	0.5305%	29.29	-0.5108%	12.59	-0.7123%
11/08/2006	32.30	-1.1084%	9.98	5.4568%	29.89	2.0278%	12.65	0.4754%
14/08/2006	32.16	-0.4344%	9.51	-4.8239%	29.81	-0.2680%	12.46	-1.5134%
15/08/2006	32.55	1.2054%	9.63	1.2539%	30.00	0.6353%	12.53	0.5602%
16/08/2006	33.14	1.7964%	9.98	3.5700%	30.87	2.8587%	12.54	0.0798%
17/08/2006	32.36	-2.3818%	10.16	1.7875%	30.64	-0.7478%	12.51	-0.2395%
18/08/2006	32.72	1.1063%	10.31	1.4656%	30.65	0.0326%	12.46	-0.4005%
21/08/2006	32.86	0.4270%	10.20	-1.0727%	30.14	-1.6779%	12.42	-0.3215%
22/08/2006	33.00	0.4251%	10.28	0.7813%	30.23	0.2982%	12.50	0.6421%
23/08/2006	33.05	0.1514%	10.68	3.8173%	30.26	0.0992%	12.45	-0.4008%
24/08/2006	32.83	-0.6679%	10.70	0.1871%	30.43	0.5602%	12.63	1.4354%
25/08/2006	33.15	0.9700%	10.89	1.7601%	31.22	2.5630%	12.97	2.6564%
28/08/2006	33.15	0.0000%	11.15	2.3595%	32.93	5.3325%	13.06	0.6915%
29/08/2006	32.97	-0.5445%	11.36	1.8659%	32.43	-1.5300%	12.94	-0.9231%
30/08/2006	32.74	-0.7000%	10.96	-3.5846%	31.69	-2.3083%	12.98	0.3086%
31/08/2006	33.14	1.2143%	10.79	-1.5633%	30.45	-3.9915%	12.72	-2.0234%
01/09/2006	33.72	1.7350%	10.60	-1.7766%	30.46	0.0328%	12.95	1.7920%
04/09/2006	33.98	0.7681%	10.70	0.9390%	31.01	1.7895%	13.16	1.6086%
05/09/2006	34.65	1.9526%	10.82	1.1153%	30.65	-1.1677%	12.98	-1.3772%
06/09/2006	34.30	-1.0152%	10.94	1.1030%	30.37	-0.9177%	12.97	-0.0771%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
07/09/2006	33.61	-2.0322%	10.71	-2.1248%	30.71	1.1133%	13.03	0.4615%
08/09/2006	33.43	-0.5370%	10.92	1.9418%	30.33	-1.2451%	12.83	-1.5468%
11/09/2006	32.29	-3.4696%	10.80	-1.1050%	30.21	-0.3964%	12.85	0.1558%
12/09/2006	32.32	0.0929%	10.90	0.9217%	30.99	2.5492%	12.90	0.3884%
13/09/2006	32.53	0.6477%	10.95	0.4577%	31.53	1.7275%	13.05	1.1561%
14/09/2006	32.37	-0.4931%	10.88	-0.6413%	31.33	-0.6363%	12.99	-0.4608%
15/09/2006	32.28	-0.2784%	10.87	-0.0920%	31.52	0.6046%	12.81	-1.3954%
18/09/2006	32.36	0.2475%	10.83	-0.3687%	31.68	0.5063%	13.05	1.8562%
19/09/2006	31.61	-2.3450%	10.78	-0.4627%	31.55	-0.4112%	13.06	0.0766%
20/09/2006	31.26	-1.1134%	10.89	1.0152%	31.93	1.1972%	13.30	1.8210%
21/09/2006	30.73	-1.7100%	10.86	-0.2759%	31.28	-2.0567%	13.17	-0.9823%
22/09/2006	30.53	-0.6530%	10.95	0.8253%	31.07	-0.6736%	13.04	-0.9920%
25/09/2006	31.38	2.7461%	10.87	-0.7333%	31.67	1.9127%	13.15	0.8400%
26/09/2006	32.23	2.6727%	10.80	-0.6461%	32.04	1.1615%	13.22	0.5309%
27/09/2006	32.48	0.7727%	10.72	-0.7435%	32.11	0.2182%	13.38	1.2030%
28/09/2006	32.71	0.7056%	10.67	-0.4675%	32.87	2.3393%	13.58	1.4837%
29/09/2006	32.73	0.0611%	10.62	-0.4697%	33.53	1.9880%	13.69	0.8068%
02/10/2006	32.44	-0.8900%	10.80	1.6807%	32.60	-2.8128%	13.53	-1.1756%
03/10/2006	31.67	-2.4022%	10.78	-0.1854%	32.61	0.0307%	13.38	-1.1148%
04/10/2006	30.99	-2.1705%	10.78	0.0000%	33.30	2.0938%	13.69	2.2905%
05/10/2006	31.94	3.0195%	10.67	-1.0257%	33.99	2.0509%	13.89	1.4504%
06/10/2006	32.16	0.6864%	10.71	0.3742%	33.87	-0.3537%	13.94	0.3593%
09/10/2006	32.37	0.6509%	10.61	-0.9381%	33.76	-0.3253%	13.97	0.2150%
10/10/2006	32.92	1.6848%	10.88	2.5129%	34.33	1.6743%	14.19	1.5625%
11/10/2006	33.16	0.7264%	10.90	0.1837%	34.30	-0.0874%	14.14	-0.3530%
12/10/2006	33.47	0.9305%	11.35	4.0455%	34.65	1.0152%	14.28	0.9852%
13/10/2006	34.24	2.2745%	11.25	-0.8850%	34.76	0.3170%	14.38	0.6978%
16/10/2006	34.80	1.6223%	10.87	-3.4361%	34.79	0.0863%	14.29	-0.6278%
17/10/2006	35.17	1.0576%	10.88	0.0920%	34.77	-0.0575%	13.99	-2.1217%
18/10/2006	35.25	0.2272%	11.16	2.5410%	34.78	0.0288%	14.10	0.7832%
19/10/2006	36.45	3.3476%	11.23	0.6253%	34.63	-0.4322%	14.10	0.0000%
20/10/2006	36.46	0.0274%	11.12	-0.9843%	34.37	-0.7536%	14.16	0.4246%
23/10/2006	36.15	-0.8539%	11.10	-0.1800%	34.25	-0.3498%	14.18	0.1411%
24/10/2006	36.10	-0.1384%	11.16	0.5391%	33.92	-0.9682%	14.17	-0.0705%
25/10/2006	36.34	0.6626%	11.19	0.2685%	33.97	0.1473%	14.27	0.7032%
26/10/2006	36.26	-0.2204%	10.91	-2.5341%	33.96	-0.0294%	14.32	0.3498%
27/10/2006	35.67	-1.6405%	10.65	-2.4120%	32.99	-2.8979%	13.89	-3.0488%
30/10/2006	35.07	-1.6964%	10.50	-1.4185%	32.39	-1.8355%	13.74	-1.0858%
31/10/2006	35.79	2.0322%	10.70	1.8868%	33.29	2.7407%	13.82	0.5806%
01/11/2006	35.56	-0.6447%	10.75	0.4662%	33.08	-0.6328%	13.80	-0.1448%
03/11/2006	36.75	3.2917%	10.92	1.5690%	33.54	1.3810%	13.75	-0.3630%
06/11/2006	38.52	4.7039%	10.92	0.0000%	34.93	4.0607%	14.17	3.0088%
07/11/2006	38.34	-0.4684%	10.64	-2.5975%	34.08	-2.4635%	13.96	-1.4931%
08/11/2006	37.36	-2.5893%	10.70	0.5623%	34.17	0.2637%	14.00	0.2861%
09/11/2006	38.31	2.5110%	10.60	-0.9390%	34.36	0.5545%	13.95	-0.3578%
10/11/2006	36.85	-3.8855%	10.91	2.8826%	33.81	-1.6136%	13.83	-0.8639%
13/11/2006	36.30	-1.5038%	10.94	0.2746%	33.89	0.2363%	13.95	0.8639%
14/11/2006	35.78	-1.4429%	10.93	-0.0914%	33.98	0.2652%	14.14	1.3528%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
15/11/2006	35.82	0.1117%	10.87	-0.5505%	34.45	1.3737%	14.16	0.1413%
16/11/2006	35.51	-0.8692%	10.86	-0.0920%	34.49	0.1160%	14.19	0.2116%
17/11/2006	35.17	-0.9621%	10.90	0.3676%	34.30	-0.5524%	14.22	0.2112%
21/11/2006	36.81	4.5576%	10.97	0.6401%	34.14	-0.4676%	14.14	-0.5642%
22/11/2006	37.43	1.6703%	10.88	-0.8238%	34.13	-0.0293%	14.16	0.1413%
23/11/2006	37.24	-0.5089%	10.96	0.7326%	34.27	0.4094%	14.16	0.0000%
24/11/2006	37.51	0.7224%	10.91	-0.4572%	34.20	-0.2045%	14.31	1.0538%
27/11/2006	37.39	-0.3204%	10.89	-0.1835%	33.53	-1.9785%	14.07	-1.6914%
28/11/2006	37.75	0.9582%	10.94	0.4581%	32.65	-2.6596%	13.84	-1.6482%
29/11/2006	38.38	1.6551%	11.22	2.5272%	33.75	3.3136%	14.05	1.5059%
30/11/2006	38.48	0.2602%	11.60	3.3307%	33.89	0.4140%	13.95	-0.7143%
04/12/2006	38.70	0.5701%	12.02	3.5567%	34.09	0.5884%	14.26	2.1979%
05/12/2006	39.29	1.5130%	12.10	0.6634%	35.21	3.2326%	14.39	0.9075%
06/12/2006	39.74	1.1388%	12.92	6.5571%	35.31	0.2836%	14.40	0.0695%
07/12/2006	40.03	0.7271%	12.61	-2.4286%	36.81	4.1603%	14.91	3.4804%
08/12/2006	39.17	-2.1718%	12.43	-1.4377%	37.13	0.8656%	14.85	-0.4032%
11/12/2006	39.60	1.0918%	12.45	0.1608%	39.40	5.9341%	14.81	-0.2697%
13/12/2006	39.00	-1.5267%	12.78	2.6161%	38.60	-2.0514%	14.56	-1.7025%
14/12/2006	39.73	1.8545%	13.00	1.7068%	38.31	-0.7541%	14.44	-0.8276%
15/12/2006	39.48	-0.6312%	13.24	1.8293%	36.92	-3.6958%	14.47	0.2075%
18/12/2006	39.83	0.8826%	13.04	-1.5221%	37.88	2.5670%	14.66	1.3045%
19/12/2006	39.33	-1.2633%	12.77	-2.0923%	38.06	0.4741%	14.72	0.4084%
20/12/2006	38.65	-1.7441%	12.65	-0.9441%	37.29	-2.0439%	14.68	-0.2721%
21/12/2006	37.96	-1.8014%	12.71	0.4732%	38.11	2.1752%	14.64	-0.2729%
22/12/2006	37.65	-0.8200%	12.70	-0.0787%	37.99	-0.3154%	14.61	-0.2051%
26/12/2006	37.98	0.8727%	13.06	2.7952%	38.25	0.6821%	14.75	0.9537%
27/12/2006	39.13	2.9830%	13.20	1.0663%	38.54	0.7553%	14.87	0.8103%
28/12/2006	39.01	-0.3071%	13.56	2.6907%	38.65	0.2850%	14.92	0.3357%
29/12/2006	38.25	-1.9674%	13.69	0.9541%	39.63	2.5040%	14.96	0.2677%
02/01/2007	38.21	-0.1046%	13.64	-0.3659%	39.48	-0.3792%	15.02	0.4003%
03/01/2007	36.84	-3.6513%	13.19	-3.3548%	38.67	-2.0730%	15.02	0.0000%
04/01/2007	36.17	-1.8354%	13.17	-0.1517%	38.94	0.6958%	15.13	0.7297%
05/01/2007	35.94	-0.6379%	13.27	0.7564%	38.62	-0.8252%	14.79	-2.2728%
08/01/2007	36.64	1.9290%	13.17	-0.7564%	38.20	-1.0935%	14.60	-1.2930%
09/01/2007	36.60	-0.1092%	12.84	-2.5376%	37.23	-2.5721%	14.18	-2.9189%
10/01/2007	37.42	2.2157%	13.02	1.3921%	36.56	-1.8160%	14.12	-0.4240%
11/01/2007	38.12	1.8534%	12.97	-0.3848%	37.22	1.7892%	14.48	2.5176%
12/01/2007	38.50	0.9919%	13.20	1.7578%	37.76	1.4404%	14.58	0.6882%
15/01/2007	38.10	-1.0444%	13.45	1.8762%	38.25	1.2893%	14.60	0.1371%
16/01/2007	37.72	-1.0024%	13.47	0.1486%	37.89	-0.9456%	14.47	-0.8944%
17/01/2007	38.17	1.1859%	13.61	1.0340%	38.12	0.6052%	14.50	0.2071%
18/01/2007	37.61	-1.4780%	13.36	-1.8540%	37.51	-1.6132%	14.41	-0.6226%
19/01/2007	38.19	1.5304%	13.31	-0.3750%	37.39	-0.3204%	14.41	0.0000%
22/01/2007	38.89	1.8163%	13.09	-1.6667%	37.02	-0.9945%	14.44	0.2080%
23/01/2007	39.97	2.7392%	13.08	-0.0764%	37.50	1.2883%	14.55	0.7589%
24/01/2007	41.55	3.8768%	13.81	5.4309%	38.32	2.1631%	14.86	2.1082%
25/01/2007	42.07	1.2437%	13.50	-2.2703%	37.54	-2.0565%	15.01	1.0044%
26/01/2007	43.34	2.9741%	13.57	0.5172%	39.04	3.9180%	15.71	4.5581%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**FECHA**	**CIERRE AJ.**	**REND.**	**CIERRE AJ.**
29/01/2007	43.11	-0.5321%	13.34	-1.7094%	38.99	-0.1282%	15.71	0.0000%
30/01/2007	43.16	0.1159%	13.10	-1.8155%	40.11	2.8320%	16.31	3.7481%
31/01/2007	43.69	1.2205%	13.26	1.2140%	41.69	3.8636%	16.51	1.2188%
01/02/2007	44.87	2.6650%	13.25	-0.0754%	43.40	4.0198%	16.78	1.6221%
02/02/2007	43.93	-2.1172%	13.46	1.5725%	44.18	1.7813%	16.79	0.0596%
06/02/2007	43.79	-0.3192%	13.31	-1.1207%	44.28	0.2261%	16.53	-1.5607%
07/02/2007	43.80	0.0228%	13.05	-1.9727%	43.58	-1.5935%	16.65	0.7233%
08/02/2007	43.71	-0.2057%	13.19	1.0671%	43.83	0.5720%	16.68	0.1800%
09/02/2007	43.51	-0.4586%	12.85	-2.6115%	43.81	-0.0456%	16.62	-0.3604%
12/02/2007	45.11	3.6113%	12.97	0.9295%	43.71	-0.2285%	16.39	-1.3935%
13/02/2007	47.42	4.9940%	13.21	1.8335%	42.95	-1.7540%	15.97	-2.5959%
14/02/2007	48.12	1.4654%	13.21	0.0000%	43.47	1.2034%	16.45	2.9614%
15/02/2007	48.61	1.0131%	13.10	-0.8362%	42.96	-1.1802%	16.66	1.2685%
16/02/2007	48.03	-1.2003%	13.13	0.2287%	43.14	0.4181%	16.91	1.4895%
19/02/2007	47.88	-0.3128%	13.16	0.2282%	43.34	0.4625%	17.00	0.5308%
20/02/2007	48.68	1.6570%	13.12	-0.3044%	43.30	-0.0923%	16.96	-0.2356%
21/02/2007	49.69	2.0535%	13.61	3.6667%	42.94	-0.8349%	16.79	-1.0074%
22/02/2007	50.93	2.4648%	13.61	0.0000%	42.04	-2.1182%	16.67	-0.7173%
23/02/2007	51.50	1.1130%	13.40	-1.5550%	41.79	-0.5964%	16.59	-0.4811%
26/02/2007	50.02	-2.9159%	13.09	-2.3406%	40.95	-2.0305%	16.56	-0.1810%
27/02/2007	45.84	-8.7266%	12.34	-5.9003%	39.22	-4.3165%	15.95	-3.7531%
28/02/2007	48.01	4.6252%	12.63	2.3229%	38.51	-1.8269%	15.85	-0.6289%
01/03/2007	47.71	-0.6268%	12.62	-0.0792%	39.09	1.4949%	15.87	0.1261%
02/03/2007	46.00	-3.6500%	12.80	1.4162%	39.04	-0.1280%	15.76	-0.6955%
05/03/2007	43.90	-4.6727%	12.23	-4.5553%	38.97	-0.1795%	15.60	-1.0204%
06/03/2007	44.92	2.2969%	12.32	0.7332%	39.49	1.3255%	16.04	2.7815%
07/03/2007	45.62	1.5463%	12.28	-0.3252%	39.49	0.0000%	16.12	0.4975%
08/03/2007	47.39	3.8065%	12.80	4.1473%	39.98	1.2332%	16.25	0.8032%
09/03/2007	47.85	0.9660%	12.89	0.7007%	40.79	2.0058%	16.62	2.2514%
12/03/2007	47.73	-0.2511%	13.10	1.6160%	41.70	2.2064%	16.89	1.6115%
13/03/2007	45.36	-5.0929%	12.50	-4.6884%	41.37	-0.7945%	16.24	-3.9244%
14/03/2007	46.33	2.1159%	12.34	-1.2883%	41.76	0.9383%	16.19	-0.3084%
15/03/2007	47.26	1.9875%	12.51	1.3682%	42.00	0.5731%	16.22	0.1851%
16/03/2007	47.49	0.4855%	12.75	1.9003%	42.43	1.0186%	16.20	-0.1234%
20/03/2007	49.63	4.4076%	12.73	-0.1570%	42.73	0.7046%	16.70	3.0397%
21/03/2007	49.88	0.5025%	12.98	1.9448%	44.42	3.8789%	17.33	3.7030%
22/03/2007	49.01	-1.7596%	13.49	3.8539%	46.22	3.9723%	17.47	0.8046%
23/03/2007	48.20	-1.6665%	13.59	0.7386%	47.12	1.9285%	17.53	0.3429%
26/03/2007	48.29	0.1865%	13.67	0.5869%	47.50	0.8032%	17.42	-0.6295%
27/03/2007	49.13	1.7245%	13.66	-0.0732%	49.14	3.3944%	17.74	1.8203%
28/03/2007	49.18	0.1017%	13.49	-1.2523%	49.93	1.5949%	17.77	0.1690%
29/03/2007	50.16	1.9731%	13.79	2.1995%	51.07	2.2575%	18.30	2.9389%
30/03/2007	50.49	0.6557%	13.79	0.0000%	50.15	-1.8179%	18.24	-0.3284%
02/04/2007	51.18	1.3574%	13.51	-2.0514%	48.48	-3.3867%	18.61	2.0082%
03/04/2007	52.07	1.7240%	13.60	0.6640%	50.12	3.3269%	19.13	2.7559%
04/04/2007	52.79	1.3733%	13.81	1.5323%	50.88	1.5050%	19.35	1.1435%
09/04/2007	53.87	2.0252%	13.81	0.0000%	52.30	2.7526%	19.72	1.8941%
10/04/2007	54.99	2.0578%	13.52	-2.1223%	51.14	-2.2429%	19.56	-0.8147%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
11/04/2007	54.50	-0.8951%	13.42	-0.7424%	50.57	-1.1208%	19.34	-1.1311%
12/04/2007	55.15	1.1856%	13.80	2.7922%	51.00	0.8467%	19.24	-0.5184%
13/04/2007	55.91	1.3687%	13.84	0.2894%	50.89	-0.2159%	19.25	0.0520%
16/04/2007	56.91	1.7728%	13.64	-1.4556%	50.74	-0.2952%	19.36	0.5698%
17/04/2007	57.19	0.4908%	13.78	1.0212%	50.74	0.0000%	19.39	0.1548%
18/04/2007	57.77	1.0091%	13.80	0.1450%	50.17	-1.1297%	19.20	-0.9847%
19/04/2007	57.94	0.2938%	13.86	0.4338%	49.82	-0.7001%	18.94	-1.3634%
20/04/2007	58.67	1.2521%	14.55	4.8584%	49.72	-0.2009%	19.04	0.5266%
23/04/2007	58.88	0.3573%	14.36	-1.3144%	50.17	0.9010%	18.84	-1.0560%
24/04/2007	58.56	-0.5450%	14.32	-0.2789%	50.68	1.0114%	18.78	-0.3190%
25/04/2007	57.97	-1.0126%	14.23	-0.6305%	50.75	0.1380%	18.83	0.2659%
26/04/2007	55.98	-3.4931%	13.89	-2.4183%	51.16	0.8046%	19.31	2.5172%
27/04/2007	58.14	3.7859%	13.63	-1.8896%	50.25	-1.7947%	18.87	-2.3050%
30/04/2007	57.63	-0.8811%	13.68	0.3662%	49.90	-0.6990%	18.52	-1.8722%
02/05/2007	57.86	0.3983%	13.79	0.8009%	49.26	-1.2909%	18.84	1.7131%
03/05/2007	58.02	0.2761%	13.19	-4.4485%	50.03	1.5510%	19.29	2.3605%
04/05/2007	60.67	4.4662%	13.26	0.5293%	50.63	1.1921%	19.28	-0.0519%
07/05/2007	60.67	0.0000%	13.35	0.6764%	50.23	-0.7932%	19.27	-0.0519%
08/05/2007	60.50	-0.2806%	13.30	-0.3752%	50.06	-0.3390%	19.29	0.1037%
09/05/2007	62.00	2.4491%	13.32	0.1503%	51.91	3.6289%	19.69	2.0524%
10/05/2007	61.34	-1.0702%	13.62	2.2273%	53.07	2.2100%	19.53	-0.8159%
11/05/2007	62.56	1.9694%	13.68	0.4396%	54.62	2.8788%	19.55	0.1024%
14/05/2007	61.78	-1.2546%	13.69	0.0731%	53.55	-1.9784%	19.41	-0.7187%
15/05/2007	61.47	-0.5030%	13.70	0.0730%	52.26	-2.4385%	19.39	-0.1031%
16/05/2007	61.48	0.0163%	13.93	1.6649%	54.03	3.3308%	19.82	2.1934%
17/05/2007	60.13	-2.2203%	14.46	3.7341%	54.69	1.2141%	20.14	1.6016%
18/05/2007	59.23	-1.5081%	14.27	-1.3227%	54.35	-0.6236%	20.67	2.5975%
21/05/2007	60.82	2.6491%	14.02	-1.7675%	55.47	2.0398%	21.15	2.2957%
22/05/2007	61.31	0.8024%	14.15	0.9230%	55.12	-0.6330%	21.43	1.3152%
23/05/2007	61.82	0.8284%	14.31	1.1244%	57.79	4.7303%	22.46	4.6944%
24/05/2007	59.07	-4.5504%	14.39	0.5575%	57.99	0.3455%	22.21	-1.1193%
25/05/2007	60.18	1.8617%	14.91	3.5499%	57.94	-0.0863%	21.93	-1.2687%
28/05/2007	60.79	1.0085%	15.00	0.6018%	60.01	3.5103%	21.91	-0.0912%
29/05/2007	60.13	-1.0916%	15.29	1.9149%	60.48	0.7802%	21.85	-0.2742%
30/05/2007	60.67	0.8940%	15.98	4.4139%	62.59	3.4293%	21.78	-0.3209%
31/05/2007	62.74	3.3550%	16.01	0.1876%	63.31	1.1438%	21.44	-1.5734%
01/06/2007	63.94	1.8946%	16.52	3.1358%	63.46	0.2366%	21.69	1.1593%
04/06/2007	63.79	-0.2349%	17.10	3.4507%	64.11	1.0191%	21.85	0.7350%
05/06/2007	63.39	-0.6290%	17.09	-0.0585%	63.13	-1.5404%	21.91	0.2742%
06/06/2007	63.01	-0.6013%	17.01	-0.4692%	61.09	-3.2848%	21.33	-2.6829%
07/06/2007	62.45	-0.8927%	17.00	-0.0588%	58.91	-3.6337%	20.91	-1.9887%
08/06/2007	62.34	-0.1763%	16.89	-0.6492%	59.24	0.5586%	21.21	1.4245%
11/06/2007	64.40	3.2510%	16.94	0.2956%	60.06	1.3747%	21.67	2.1456%
12/06/2007	64.01	-0.6074%	16.60	-2.0275%	59.55	-0.8528%	21.25	-1.9572%
13/06/2007	64.87	1.3346%	16.57	-0.1809%	59.38	-0.2859%	21.08	-0.8032%
14/06/2007	64.79	-0.1234%	16.86	1.7350%	59.48	0.1683%	21.26	0.8503%
15/06/2007	63.43	-2.1214%	16.71	-0.8937%	59.42	-0.1009%	21.33	0.3287%
18/06/2007	64.69	1.9670%	17.00	1.7206%	58.27	-1.9543%	21.14	-0.8948%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
19/06/2007	65.21	0.8006%	16.66	-2.0203%	57.32	-1.6438%	20.91	-1.0939%
20/06/2007	63.77	-2.2330%	16.63	-0.1802%	56.46	-1.5117%	20.60	-1.4936%
21/06/2007	65.38	2.4934%	17.02	2.3181%	56.27	-0.3371%	20.23	-1.8124%
22/06/2007	65.72	0.5187%	16.97	-0.2942%	56.43	0.2839%	20.47	1.1794%
25/06/2007	65.49	-0.3506%	16.70	-1.6038%	56.37	-0.1064%	20.36	-0.5388%
26/06/2007	63.44	-3.1803%	16.20	-3.0397%	55.99	-0.6764%	20.24	-0.5911%
27/06/2007	62.49	-1.5088%	16.07	-0.8057%	56.91	1.6298%	20.48	1.1788%
28/06/2007	64.27	2.8086%	16.08	0.0622%	56.93	0.0351%	20.50	0.0976%
29/06/2007	64.99	1.1140%	16.85	4.6774%	56.05	-1.5578%	20.37	-0.6362%
02/07/2007	67.86	4.3213%	17.49	3.7279%	56.15	0.1783%	20.34	-0.1474%
03/07/2007	68.96	1.6080%	17.68	1.0805%	58.07	3.3622%	21.23	4.2826%
04/07/2007	69.14	0.2607%	17.48	-1.1377%	58.72	1.1131%	21.13	-0.4721%
05/07/2007	69.85	1.0217%	17.69	1.1942%	58.99	0.4588%	21.39	1.2230%
06/07/2007	71.34	2.1107%	18.01	1.7928%	60.48	2.4945%	21.91	2.4020%
09/07/2007	71.61	0.3778%	18.26	1.3786%	58.73	-2.9362%	20.75	-5.4397%
10/07/2007	72.11	0.6958%	18.28	0.1095%	57.07	-2.8672%	20.43	-1.5542%
11/07/2007	73.47	1.8684%	18.20	-0.4386%	57.11	0.0701%	20.77	1.6505%
12/07/2007	76.64	4.2242%	18.42	1.2015%	56.92	-0.3332%	20.76	-0.0482%
13/07/2007	76.12	-0.6808%	18.95	2.8367%	56.24	-1.2019%	20.65	-0.5313%
16/07/2007	76.34	0.2886%	19.40	2.3469%	56.83	1.0436%	20.49	-0.7778%
17/07/2007	76.28	-0.0786%	19.38	-0.1031%	55.60	-2.1881%	19.86	-3.1229%
18/07/2007	76.38	0.1310%	19.37	-0.0516%	53.77	-3.3468%	19.63	-1.1649%
19/07/2007	77.33	1.2361%	20.47	5.5235%	53.82	0.0929%	19.95	1.6170%
20/07/2007	78.22	1.1443%	20.72	1.2139%	53.85	0.0557%	19.45	-2.5382%
23/07/2007	78.74	0.6626%	20.84	0.5775%	53.44	-0.7643%	19.26	-0.9817%
24/07/2007	77.88	-1.0982%	19.84	-4.9174%	51.54	-3.6201%	18.83	-2.2579%
25/07/2007	78.01	0.1668%	19.82	-0.1009%	49.90	-3.2337%	18.56	-1.4443%
26/07/2007	74.54	-4.5501%	18.55	-6.6222%	49.07	-1.6773%	18.09	-2.5649%
27/07/2007	73.41	-1.5276%	18.82	1.4450%	48.61	-0.9419%	18.66	3.1023%
30/07/2007	74.88	1.9827%	18.74	-0.4260%	50.76	4.3279%	18.72	0.3210%
31/07/2007	76.14	1.6687%	18.76	0.1067%	49.18	-3.1622%	18.73	0.0534%
01/08/2007	71.55	-6.2177%	17.86	-4.9163%	48.57	-1.2481%	18.53	-1.0735%
02/08/2007	71.72	0.2373%	17.67	-1.0695%	48.04	-1.0972%	18.47	-0.3243%
03/08/2007	68.96	-3.9243%	17.85	1.0135%	46.46	-3.3442%	18.12	-1.9131%
06/08/2007	68.43	-0.7715%	17.88	0.1679%	47.88	3.0106%	17.87	-1.3893%
07/08/2007	70.61	3.1360%	17.92	0.2235%	48.02	0.2920%	18.00	0.7248%
08/08/2007	70.40	-0.2979%	18.28	1.9890%	49.01	2.0407%	18.29	1.5983%
09/08/2007	67.38	-4.3845%	17.80	-2.6609%	47.60	-2.9192%	17.82	-2.6033%
10/08/2007	64.50	-4.3683%	17.65	-0.8463%	47.81	0.4402%	18.23	2.2747%
13/08/2007	65.93	2.1928%	16.99	-3.8111%	48.86	2.1724%	18.56	1.7940%
14/08/2007	64.46	-2.2549%	16.82	-1.0056%	48.02	-1.7341%	18.22	-1.8489%
15/08/2007	61.65	-4.4572%	16.61	-1.2564%	47.50	-1.0888%	17.73	-2.7262%
16/08/2007	56.51	-8.7056%	16.24	-2.2528%	46.69	-1.7200%	17.79	0.3378%
17/08/2007	58.32	3.1527%	15.70	-3.3817%	47.48	1.6779%	17.61	-1.0170%
20/08/2007	59.24	1.5652%	15.81	0.6982%	47.69	0.4413%	17.93	1.8008%
21/08/2007	63.03	6.2014%	16.45	3.9683%	47.79	0.2095%	17.87	-0.3352%
22/08/2007	65.53	3.8897%	16.65	1.2085%	49.67	3.8585%	18.65	4.2723%
23/08/2007	65.95	0.6389%	16.60	-0.3008%	49.98	0.6222%	18.84	1.0136%

	GMEXICO B		IDEAL B-1		TELECOM A1		TELMEX L	
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.
24/08/2007	67.02	1.6094%	17.00	2.3811%	51.72	3.4222%	19.24	2.1009%
27/08/2007	68.01	1.4664%	17.23	1.3439%	52.59	1.6681%	19.36	0.6218%
28/08/2007	65.95	-3.0758%	16.63	-3.5444%	50.62	-3.8179%	18.83	-2.7758%
29/08/2007	67.66	2.5598%	16.80	1.0171%	51.37	1.4708%	18.93	0.5297%
30/08/2007	67.24	-0.6227%	16.86	0.3565%	51.06	-0.6053%	19.00	0.3691%
31/08/2007	69.03	2.6273%	16.88	0.1186%	52.42	2.6287%	19.45	2.3408%
03/09/2007	71.89	4.0596%	17.19	1.8198%	53.37	1.7961%	19.85	2.0357%
04/09/2007	71.40	-0.6839%	17.63	2.5274%	54.28	1.6907%	19.61	-1.2164%
05/09/2007	71.77	0.5169%	18.00	2.0770%	54.41	0.2392%	19.64	0.1529%
06/09/2007	72.86	1.5073%	17.92	-0.4454%	54.42	0.0184%	19.65	0.0509%
07/09/2007	70.51	-3.2785%	16.91	-5.8012%	54.11	-0.5713%	19.80	0.7605%
10/09/2007	70.21	-0.4264%	16.88	-0.1776%	52.36	-3.2876%	19.41	-1.9894%
11/09/2007	71.95	2.4481%	16.91	0.1776%	52.67	0.5903%	19.55	0.7187%
12/09/2007	73.71	2.4167%	16.98	0.4131%	53.19	0.9824%	19.36	-0.9766%
13/09/2007	75.04	1.7883%	17.00	0.1177%	52.37	-1.5537%	19.45	0.4638%
14/09/2007	75.51	0.6244%	16.84	-0.9456%	52.08	-0.5553%	19.35	-0.5155%
17/09/2007	74.44	-1.4272%	17.53	4.0157%	52.39	0.5935%	19.14	-1.0912%
18/09/2007	76.96	3.3292%	17.02	-2.9525%	53.65	2.3766%	19.00	-0.7341%
19/09/2007	77.51	0.7121%	16.51	-3.0423%	52.09	-2.9508%	18.38	-3.3176%
20/09/2007	78.31	1.0268%	16.03	-2.9504%	51.00	-2.1147%	18.13	-1.3695%
21/09/2007	78.81	0.6365%	15.94	-0.5630%	50.66	-0.6689%	17.90	-1.2767%
24/09/2007	79.50	0.8717%	16.64	4.2978%	49.33	-2.6604%	17.76	-0.7852%
25/09/2007	79.57	0.0880%	16.28	-2.1872%	48.47	-1.7587%	17.60	-0.9050%
26/09/2007	78.61	-1.2138%	15.99	-1.7974%	47.91	-1.1621%	17.79	1.0738%
27/09/2007	79.67	1.3394%	16.40	2.5318%	48.41	1.0382%	18.08	1.6170%
28/09/2007	78.54	-1.4285%	16.66	1.5729%	47.55	-1.7925%	17.99	-0.4990%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
02/01/2006	41.93		14.48		17,925.70		8.02%
03/01/2006	43.08	2.7057%	14.80	2.1859%	18,500.69	3.1573%	8.02%
04/01/2006	42.88	-0.4653%	14.85	0.3373%	18,669.23	0.9069%	8.02%
05/01/2006	42.71	-0.3972%	15.01	1.0717%	18,608.34	-0.3267%	7.98%
06/01/2006	42.89	0.4206%	14.95	-0.4005%	18,736.78	0.6879%	7.98%
09/01/2006	43.58	1.5960%	14.98	0.2005%	18,998.83	1.3889%	7.98%
10/01/2006	43.52	-0.1378%	14.87	-0.7370%	18,912.38	-0.4561%	7.98%
11/01/2006	43.43	-0.2070%	14.83	-0.2694%	19,160.44	1.3031%	7.98%
12/01/2006	42.89	-1.2512%	14.58	-1.7001%	18,925.01	-1.2363%	7.92%
13/01/2006	42.01	-2.0731%	14.42	-1.1035%	18,889.20	-0.1894%	7.92%
16/01/2006	42.07	0.1427%	14.46	0.2770%	18,958.29	0.3651%	7.92%
17/01/2006	41.38	-1.6537%	14.34	-0.8333%	18,489.63	-2.5031%	7.92%
18/01/2006	41.00	-0.9226%	14.37	0.2090%	18,265.96	-1.2171%	7.92%
19/01/2006	42.14	2.7425%	14.51	0.9695%	18,521.45	1.3890%	7.89%
20/01/2006	41.72	-1.0017%	14.41	-0.6916%	18,346.23	-0.9505%	7.89%
23/01/2006	42.42	1.6639%	14.54	0.8981%	18,447.11	0.5484%	7.89%
24/01/2006	42.85	1.0086%	14.67	0.8901%	18,875.41	2.2952%	7.89%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
25/01/2006	43.33	1.1140%	14.99	2.1579%	18,866.37	-0.0479%	7.89%
26/01/2006	43.47	0.3226%	15.25	1.7196%	19,216.75	1.8401%	7.73%
27/01/2006	42.57	-2.0921%	14.79	-3.0628%	18,956.50	-1.3635%	7.73%
30/01/2006	42.56	-0.0235%	14.54	-1.7048%	18,849.24	-0.5674%	7.73%
31/01/2006	42.29	-0.6364%	14.82	1.9074%	18,907.10	0.3065%	7.73%
01/02/2006	42.89	1.4088%	15.14	2.1363%	19,162.38	1.3411%	7.73%
02/02/2006	42.52	-0.8664%	15.08	-0.3971%	19,060.38	-0.5337%	7.72%
03/02/2006	41.78	-1.7557%	14.94	-0.9327%	18,862.18	-1.0453%	7.72%
06/02/2006	41.78	0.0000%	14.94	0.0000%	18,862.18	0.0000%	7.72%
07/02/2006	41.47	-0.7447%	14.94	0.0000%	18,665.06	-1.0506%	7.72%
08/02/2006	41.00	-1.1398%	14.61	-2.2336%	18,410.24	-1.3746%	7.72%
09/02/2006	41.41	0.9950%	14.92	2.0996%	18,518.33	0.5854%	7.68%
10/02/2006	40.94	-1.1415%	14.73	-1.2816%	18,298.58	-1.1938%	7.68%
13/02/2006	40.49	-1.1053%	14.60	-0.8865%	17,883.63	-2.2938%	7.68%
14/02/2006	40.05	-1.0926%	28.63	-1.9714%	18,023.01	0.7764%	7.68%
15/02/2006	40.25	0.4981%	28.66	0.1047%	18,169.16	0.8076%	7.68%
16/02/2006	40.86	1.5042%	29.03	1.2827%	18,457.24	1.5731%	7.55%
17/02/2006	41.57	1.7227%	28.75	-0.9692%	18,480.78	0.1275%	7.55%
20/02/2006	41.72	0.3602%	29.14	1.3474%	18,542.58	0.3338%	7.55%
21/02/2006	41.36	-0.8666%	28.58	-1.9405%	18,497.38	-0.2441%	7.55%
22/02/2006	42.31	2.2709%	28.98	1.3899%	18,780.46	1.5188%	7.55%
23/02/2006	42.57	0.6126%	30.02	3.5258%	19,117.72	1.7799%	7.48%
24/02/2006	41.61	-2.2809%	29.99	-0.1000%	19,100.89	-0.0881%	7.48%
27/02/2006	41.23	-0.9174%	29.45	-1.8170%	18,854.67	-1.2974%	7.48%
28/02/2006	40.38	-2.0832%	29.28	-0.5789%	18,706.32	-0.7899%	7.48%
01/03/2006	40.36	-0.0495%	29.52	0.8163%	19,058.74	1.8664%	7.48%
02/03/2006	39.96	-0.9960%	29.83	1.0447%	19,102.33	0.2285%	7.42%
03/03/2006	39.94	-0.0501%	29.80	-0.1006%	19,189.25	0.4540%	7.42%
06/03/2006	40.23	0.7235%	29.28	-1.7604%	18,991.46	-1.0361%	7.42%
07/03/2006	39.25	-2.4662%	28.97	-1.0644%	18,551.07	-2.3462%	7.42%
08/03/2006	39.62	0.9383%	28.41	-1.9520%	18,398.82	-0.8241%	7.42%
09/03/2006	39.84	0.5537%	27.55	-3.0739%	18,310.57	-0.4808%	7.46%
10/03/2006	40.04	0.5008%	28.12	2.0479%	18,420.17	0.5968%	7.46%
13/03/2006	40.98	2.3205%	28.40	0.9908%	18,706.19	1.5408%	7.46%
14/03/2006	40.95	-0.0732%	28.62	0.7717%	18,941.04	1.2477%	7.46%
15/03/2006	40.71	-0.5878%	28.53	-0.3150%	18,999.64	0.3089%	7.46%
16/03/2006	40.43	-0.6902%	29.01	1.6684%	19,166.43	0.8740%	7.37%
17/03/2006	40.49	0.1483%	29.11	0.3441%	19,345.80	0.9315%	7.37%
20/03/2006	40.76	0.6646%	29.47	1.2291%	19,581.12	1.2090%	7.37%
22/03/2006	40.68	-0.1965%	29.71	0.8111%	19,598.11	0.0867%	7.37%
23/03/2006	40.06	-1.5358%	28.93	-2.6605%	19,255.87	-1.7617%	7.31%
24/03/2006	40.29	0.5725%	28.96	0.1036%	19,339.30	0.4323%	7.31%
27/03/2006	40.65	0.8896%	28.41	-1.9174%	19,226.32	-0.5859%	7.31%
28/03/2006	41.28	1.5379%	27.68	-2.6031%	18,929.98	-1.5533%	7.31%
29/03/2006	42.15	2.0857%	28.04	1.2922%	19,132.34	1.0633%	7.31%
30/03/2006	41.90	-0.5949%	28.15	0.3915%	19,214.00	0.4259%	7.27%
31/03/2006	41.84	-0.1433%	28.09	-0.2134%	19,272.63	0.3047%	7.27%
03/04/2006	41.84	0.0000%	28.94	2.9811%	19,634.21	1.8587%	7.27%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
04/04/2006	41.97	0.3102%	29.27	1.1338%	19,764.08	0.6593%	7.27%
05/04/2006	43.35	3.2352%	29.78	1.7274%	19,930.63	0.8392%	7.27%
06/04/2006	44.79	3.2678%	29.54	-0.8092%	19,869.71	-0.3061%	7.22%
07/04/2006	44.11	-1.5298%	29.01	-1.8105%	19,472.36	-2.0200%	7.22%
10/04/2006	44.20	0.2038%	29.77	2.5861%	19,548.35	0.3895%	7.22%
11/04/2006	43.10	-2.5202%	30.06	0.9694%	19,465.15	-0.4265%	7.22%
12/04/2006	42.69	-0.9558%	29.71	-1.1712%	19,322.62	-0.7349%	7.22%
17/04/2006	42.84	0.3508%	29.59	-0.4047%	19,632.34	1.5902%	7.22%
18/04/2006	43.45	1.4139%	29.29	-1.0190%	19,820.07	0.9517%	7.22%
19/04/2006	44.22	1.7566%	30.09	2.6947%	19,933.09	0.5686%	7.22%
20/04/2006	45.64	3.1607%	31.32	4.0064%	19,979.54	0.2328%	7.21%
21/04/2006	46.89	2.7020%	31.16	-0.5122%	20,174.64	0.9718%	7.21%
24/04/2006	46.77	-0.2562%	31.57	1.3072%	20,198.71	0.1192%	7.21%
25/04/2006	45.96	-1.7471%	32.08	1.6025%	20,360.61	0.7983%	7.21%
26/04/2006	46.37	0.8881%	31.88	-0.6254%	20,566.91	1.0081%	7.21%
27/04/2006	45.63	-1.6087%	31.26	-1.9640%	20,390.62	-0.8608%	7.03%
28/04/2006	45.60	-0.0658%	31.21	-0.1601%	20,646.19	1.2456%	7.03%
02/05/2006	47.28	3.6180%	32.03	2.5934%	21,079.87	2.0788%	7.03%
03/05/2006	47.23	-0.1058%	32.14	0.3428%	21,159.16	0.3754%	7.03%
04/05/2006	46.93	-0.6372%	32.16	0.0622%	21,293.66	0.6336%	7.03%
05/05/2006	47.49	1.1862%	31.42	-2.3279%	21,237.45	-0.2643%	7.03%
08/05/2006	48.20	1.4840%	32.36	2.9478%	21,608.67	1.7328%	7.03%
09/05/2006	48.04	-0.3325%	33.79	4.3242%	21,822.93	0.9867%	7.03%
10/05/2006	47.96	-0.1667%	34.15	1.0598%	21,781.07	-0.1920%	7.03%
11/05/2006	46.69	-2.6837%	33.31	-2.4905%	21,435.27	-1.6004%	7.02%
12/05/2006	46.82	0.2780%	33.32	0.0300%	21,154.90	-1.3166%	7.02%
15/05/2006	45.60	-2.6403%	32.40	-2.7999%	20,722.13	-2.0669%	7.02%
16/05/2006	44.89	-1.5693%	32.86	1.4098%	20,851.06	0.6203%	7.02%
17/05/2006	43.56	-3.0076%	31.53	-4.1317%	20,261.86	-2.8664%	7.02%
18/05/2006	43.03	-1.2242%	31.45	-0.2540%	20,217.02	-0.2215%	7.01%
19/05/2006	43.07	0.0929%	31.93	1.5147%	20,182.14	-0.1727%	7.01%
22/05/2006	41.80	-2.9930%	31.22	-2.2487%	19,369.29	-4.1109%	7.01%
23/05/2006	41.24	-1.3488%	30.29	-3.0241%	19,084.83	-1.4795%	7.01%
24/05/2006	41.09	-0.3644%	29.89	-1.3294%	18,805.57	-1.4741%	7.01%
25/05/2006	42.22	2.7129%	30.57	2.2495%	19,405.71	3.1414%	7.01%
26/05/2006	42.43	0.4962%	30.71	0.4569%	19,585.21	0.9207%	7.01%
29/05/2006	42.25	-0.4251%	30.73	0.0651%	19,500.54	-0.4333%	7.01%
30/05/2006	41.69	-1.3343%	29.42	-4.3565%	18,841.34	-3.4389%	7.01%
31/05/2006	40.63	-2.5755%	29.33	-0.3064%	18,677.92	-0.8711%	7.01%
01/06/2006	42.50	4.4997%	29.55	0.7473%	19,128.63	2.3844%	7.02%
02/06/2006	41.92	-1.3741%	30.00	1.5114%	19,421.73	1.5206%	7.02%
05/06/2006	41.00	-2.2191%	29.57	-1.4437%	18,954.92	-2.4329%	7.02%
06/06/2006	40.91	-0.2198%	29.43	-0.4746%	18,798.28	-0.8298%	7.02%
07/06/2006	39.96	-2.3496%	28.89	-1.8519%	18,413.44	-2.0685%	7.02%
08/06/2006	39.93	-0.0751%	28.47	-1.4645%	18,257.64	-0.8497%	7.01%
09/06/2006	38.77	-2.9481%	27.94	-1.8792%	17,748.74	-2.8269%	7.01%
12/06/2006	37.72	-2.7456%	26.57	-5.0277%	16,986.27	-4.3909%	7.01%
13/06/2006	36.81	-2.4421%	25.95	-2.3611%	16,653.15	-1.9806%	7.01%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
14/06/2006	37.14	0.8925%	27.42	5.5101%	16,802.10	0.8904%	7.01%
15/06/2006	39.53	6.2365%	29.78	8.2564%	17,932.33	6.5101%	7.02%
16/06/2006	39.65	0.3031%	29.82	0.1342%	18,041.79	0.6086%	7.02%
19/06/2006	39.21	-1.1159%	28.78	-3.5499%	17,581.88	-2.5822%	7.02%
20/06/2006	39.25	0.1020%	28.38	-1.3996%	17,781.28	1.1277%	7.02%
21/06/2006	41.08	4.5570%	28.69	1.0864%	18,156.21	2.0866%	7.02%
22/06/2006	40.88	-0.4880%	28.32	-1.2980%	18,188.40	0.1771%	7.03%
23/06/2006	40.84	-0.0979%	29.44	3.8786%	18,545.73	1.9456%	7.03%
26/06/2006	40.81	-0.0735%	28.86	-1.9898%	18,491.40	-0.2934%	7.03%
27/06/2006	40.29	-1.2824%	28.16	-2.4554%	18,021.47	-2.5742%	7.03%
28/06/2006	40.84	1.3559%	28.14	-0.0710%	18,101.83	0.4449%	7.03%
29/06/2006	42.66	4.3600%	29.56	4.9230%	18,908.33	4.3590%	7.02%
30/06/2006	42.82	0.3744%	30.84	4.2390%	19,147.17	1.2552%	7.02%
03/07/2006	44.56	3.9831%	33.06	6.9512%	20,060.82	4.6614%	7.02%
04/07/2006	45.69	2.5043%	32.73	-1.0032%	20,329.49	1.3304%	7.02%
05/07/2006	42.87	-6.3707%	31.30	-4.4674%	19,514.62	-4.0909%	7.02%
06/07/2006	42.88	0.0233%	33.20	5.8932%	20,047.62	2.6947%	7.02%
07/07/2006	42.03	-2.0022%	33.61	1.2274%	19,829.60	-1.0935%	7.02%
10/07/2006	41.54	-1.1727%	33.54	-0.2085%	19,700.15	-0.6550%	7.02%
11/07/2006	41.52	-0.0482%	32.68	-2.5975%	19,570.21	-0.6618%	7.02%
12/07/2006	41.61	0.2165%	32.03	-2.0090%	19,419.44	-0.7734%	7.02%
13/07/2006	39.77	-4.5228%	30.87	-3.6888%	18,725.26	-3.6401%	7.04%
14/07/2006	38.98	-2.0064%	29.83	-3.4270%	18,328.66	-2.1407%	7.04%
17/07/2006	39.66	1.7294%	29.77	-0.2013%	18,437.98	0.5947%	7.04%
18/07/2006	40.09	1.0784%	30.60	2.7499%	18,885.67	2.3991%	7.04%
19/07/2006	41.23	2.8039%	32.29	5.3758%	19,871.78	5.0897%	7.04%
20/07/2006	40.52	-1.7370%	31.93	-1.1212%	19,510.52	-1.8347%	7.05%
21/07/2006	39.80	-1.7929%	32.80	2.6883%	19,527.37	0.0863%	7.05%
24/07/2006	40.86	2.6285%	33.59	2.3800%	19,938.70	2.0845%	7.05%
25/07/2006	40.56	-0.7369%	33.66	0.2082%	20,082.00	0.7161%	7.05%
26/07/2006	39.98	-1.4403%	34.13	1.3867%	19,913.19	-0.8442%	7.05%
27/07/2006	39.59	-0.9803%	34.54	1.1941%	20,138.79	1.1265%	7.02%
28/07/2006	39.98	0.9803%	34.10	-1.2821%	20,252.33	0.5622%	7.02%
31/07/2006	39.62	-0.9045%	33.56	-1.5963%	20,095.93	-0.7753%	7.02%
01/08/2006	39.70	0.2017%	32.59	-2.9329%	19,973.20	-0.6126%	7.02%
02/08/2006	39.94	0.6027%	32.61	0.0613%	20,145.10	0.8570%	7.02%
03/08/2006	40.17	0.5742%	33.46	2.5732%	20,261.81	0.5777%	7.05%
04/08/2006	39.84	-0.8249%	34.38	2.7124%	20,354.99	0.4588%	7.05%
07/08/2006	39.74	-0.2513%	35.14	2.1865%	20,412.49	0.2821%	7.05%
08/08/2006	39.77	0.0755%	35.00	-0.3992%	20,342.78	-0.3421%	7.05%
09/08/2006	39.23	-1.3671%	34.18	-2.3707%	20,062.37	-1.3880%	7.05%
10/08/2006	39.68	1.1406%	34.48	0.8739%	20,048.18	-0.0708%	7.03%
11/08/2006	40.14	1.1526%	35.43	2.7179%	20,273.86	1.1194%	7.03%
14/08/2006	40.26	0.2985%	35.45	0.0564%	20,290.49	0.0820%	7.03%
15/08/2006	41.30	2.5504%	35.92	1.3171%	20,544.44	1.2438%	7.03%
16/08/2006	41.82	1.2512%	37.22	3.5552%	20,900.00	1.7159%	7.03%
17/08/2006	42.07	0.5960%	37.23	0.0269%	20,971.78	0.3429%	7.03%
18/08/2006	42.20	0.3085%	36.94	-0.7820%	21,046.63	0.3563%	7.03%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
21/08/2006	41.80	-0.9524%	36.81	-0.3525%	20,861.56	-0.8832%	7.03%
22/08/2006	42.03	0.5487%	36.66	-0.4083%	20,986.89	0.5990%	7.03%
23/08/2006	40.57	-3.5355%	35.92	-2.0392%	20,742.44	-1.1716%	7.03%
24/08/2006	41.08	1.2493%	36.06	0.3890%	20,751.45	0.0434%	7.03%
25/08/2006	41.57	1.1857%	36.72	1.8137%	20,994.94	1.1665%	7.03%
28/08/2006	41.45	-0.2891%	37.22	1.3525%	21,228.87	1.1081%	7.03%
29/08/2006	40.94	-1.2380%	36.83	-1.0534%	21,282.08	0.2503%	7.03%
30/08/2006	40.78	-0.3916%	36.90	0.1899%	21,331.09	0.2300%	7.03%
31/08/2006	40.60	-0.4424%	36.94	0.1083%	21,049.35	-1.3296%	7.02%
01/09/2006	40.87	0.6628%	36.21	-1.9960%	21,192.26	0.6766%	7.02%
04/09/2006	41.41	1.3126%	36.73	1.4259%	21,385.63	0.9083%	7.02%
05/09/2006	41.30	-0.2660%	36.11	-1.7024%	21,256.11	-0.6075%	7.02%
06/09/2006	41.07	-0.5585%	35.70	-1.1419%	20,965.24	-1.3779%	7.02%
07/09/2006	40.84	-0.5616%	35.29	-1.1551%	20,833.23	-0.6317%	7.04%
08/09/2006	40.89	0.1224%	35.23	-0.1702%	20,795.82	-0.1797%	7.04%
11/09/2006	40.93	0.0978%	34.77	-1.3143%	20,612.89	-0.8835%	7.04%
12/09/2006	40.54	-0.9574%	36.51	4.8831%	21,102.77	2.3488%	7.04%
13/09/2006	41.30	1.8573%	36.94	1.1709%	21,320.21	1.0251%	7.04%
14/09/2006	43.26	4.6366%	37.02	0.2163%	21,334.02	0.0648%	7.08%
15/09/2006	44.69	3.2521%	37.83	2.1644%	21,548.87	1.0020%	7.08%
18/09/2006	44.71	0.0447%	37.64	-0.5035%	21,666.07	0.5424%	7.08%
19/09/2006	45.49	1.7295%	37.91	0.7148%	21,659.02	-0.0325%	7.08%
20/09/2006	45.93	0.9626%	38.06	0.3949%	21,841.45	0.8388%	7.08%
21/09/2006	44.79	-2.5134%	36.97	-2.9057%	21,498.09	-1.5845%	7.05%
22/09/2006	44.32	-1.0549%	37.10	0.3510%	21,390.43	-0.5020%	7.05%
25/09/2006	45.29	2.1650%	37.19	0.2423%	21,674.74	1.3204%	7.05%
26/09/2006	45.44	0.3307%	37.49	0.8034%	21,792.30	0.5409%	7.05%
27/09/2006	45.56	0.2637%	37.10	-1.0457%	21,748.57	-0.2009%	7.05%
28/09/2006	45.55	-0.0220%	36.91	-0.5134%	21,854.48	0.4858%	7.05%
29/09/2006	45.87	0.7001%	37.01	0.2706%	21,937.11	0.3774%	7.05%
02/10/2006	45.12	-1.6486%	36.61	-1.0867%	21,619.96	-1.4563%	7.05%
03/10/2006	46.05	2.0402%	36.41	-0.5478%	21,631.00	0.0511%	7.05%
04/10/2006	47.16	2.3818%	37.79	3.7201%	22,105.97	2.1720%	7.05%
05/10/2006	48.39	2.5747%	37.80	0.0265%	22,326.86	0.9943%	7.05%
06/10/2006	48.81	0.8642%	38.12	0.8430%	22,350.05	0.1038%	7.05%
09/10/2006	49.15	0.6942%	37.99	-0.3416%	22,313.42	-0.1640%	7.05%
10/10/2006	49.86	1.4342%	38.23	0.6298%	22,523.56	0.9374%	7.05%
11/10/2006	49.22	-1.2919%	37.54	-1.8214%	22,387.08	-0.6078%	7.05%
12/10/2006	48.84	-0.7750%	37.57	0.0799%	22,661.82	1.2198%	7.06%
13/10/2006	48.79	-0.1024%	37.87	0.7953%	22,848.32	0.8196%	7.06%
16/10/2006	49.17	0.7758%	37.84	-0.0792%	22,950.18	0.4448%	7.06%
17/10/2006	48.73	-0.8989%	37.44	-1.0627%	22,799.42	-0.6591%	7.06%
18/10/2006	48.72	-0.0205%	37.63	0.5062%	23,012.87	0.9319%	7.06%
19/10/2006	49.15	0.8787%	37.83	0.5301%	23,168.52	0.6741%	7.05%
20/10/2006	49.87	1.4543%	37.72	-0.2912%	23,233.48	0.2800%	7.05%
23/10/2006	50.85	1.9461%	37.94	0.5816%	23,321.41	0.3777%	7.05%
24/10/2006	50.59	-0.5126%	37.70	-0.6346%	23,279.77	-0.1787%	7.05%
25/10/2006	51.20	1.1986%	37.60	-0.2656%	23,397.69	0.5053%	7.05%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
26/10/2006	51.64	0.8557%	37.54	-0.1597%	23,361.42	-0.1551%	7.04%
27/10/2006	52.10	0.8868%	36.66	-2.3721%	22,762.86	-2.5956%	7.04%
30/10/2006	51.63	-0.9062%	35.43	-3.4127%	22,370.09	-1.7405%	7.04%
31/10/2006	51.98	0.6756%	37.07	4.5249%	23,046.95	2.9809%	7.04%
01/11/2006	51.37	-1.1805%	37.43	0.9665%	23,042.28	-0.0203%	7.04%
03/11/2006	50.98	-0.7621%	38.05	1.6429%	23,169.87	0.5522%	7.04%
06/11/2006	53.17	4.2061%	38.31	0.6810%	23,733.07	2.4017%	7.04%
07/11/2006	52.45	-1.3634%	37.73	-1.5255%	23,585.14	-0.6253%	7.04%
08/11/2006	53.03	1.0997%	38.63	2.3574%	23,930.64	1.4543%	7.04%
09/11/2006	53.54	0.9571%	38.56	-0.1814%	23,941.80	0.0466%	7.04%
10/11/2006	52.95	-1.1081%	38.63	0.1814%	23,951.63	0.0410%	7.04%
13/11/2006	52.93	-0.0378%	39.00	0.9532%	24,188.59	0.9845%	7.04%
14/11/2006	53.27	0.6403%	38.94	-0.1540%	24,288.06	0.4104%	7.04%
15/11/2006	53.07	-0.3762%	38.41	-1.3704%	24,315.60	0.1133%	7.04%
16/11/2006	52.79	-0.5290%	38.06	-0.9154%	24,266.03	-0.2041%	7.04%
17/11/2006	52.60	-0.3606%	38.06	0.0000%	24,196.05	-0.2888%	7.04%
21/11/2006	53.44	1.5843%	38.86	2.0802%	24,585.68	1.5975%	7.04%
22/11/2006	53.43	-0.0187%	39.06	0.5133%	24,674.75	0.3616%	7.04%
23/11/2006	53.01	-0.7892%	39.44	0.9682%	24,730.01	0.2237%	7.04%
24/11/2006	54.27	2.3491%	39.94	1.2598%	24,792.89	0.2539%	7.04%
27/11/2006	54.21	-0.1106%	39.58	-0.9054%	24,442.79	-1.4222%	7.04%
28/11/2006	53.92	-0.5364%	40.04	1.1555%	24,344.95	-0.4011%	7.04%
29/11/2006	54.37	0.8311%	40.37	0.8208%	24,776.09	1.7555%	7.04%
30/11/2006	56.56	3.9489%	40.62	0.6174%	24,962.01	0.7476%	7.05%
04/12/2006	58.00	2.5141%	41.34	1.7570%	25,207.48	0.9786%	7.05%
05/12/2006	58.49	0.8413%	41.79	1.0827%	25,593.92	1.5214%	7.05%
06/12/2006	58.69	0.3414%	42.16	0.8815%	25,615.85	0.0856%	7.05%
07/12/2006	58.95	0.4420%	42.14	-0.0474%	25,639.31	0.0915%	7.04%
08/12/2006	58.55	-0.6809%	43.61	3.4289%	25,756.81	0.4572%	7.04%
11/12/2006	58.60	0.0854%	43.20	-0.9446%	25,828.48	0.2779%	7.04%
13/12/2006	58.55	-0.0854%	43.03	-0.3943%	25,690.39	-0.5361%	7.04%
14/12/2006	59.49	1.5927%	43.55	1.2012%	25,863.39	0.6711%	7.03%
15/12/2006	58.91	-0.9797%	43.15	-0.9227%	25,757.68	-0.4096%	7.03%
18/12/2006	58.91	0.0000%	43.29	0.3239%	25,857.44	0.3866%	7.03%
19/12/2006	58.52	-0.6642%	42.59	-1.6302%	25,621.50	-0.9167%	7.03%
20/12/2006	58.22	-0.5140%	42.54	-0.1175%	25,394.69	-0.8892%	7.03%
21/12/2006	57.58	-1.1054%	43.33	1.8400%	25,546.82	0.5973%	7.05%
22/12/2006	56.89	-1.2056%	43.81	1.1017%	25,432.64	-0.4479%	7.05%
26/12/2006	56.99	0.1756%	44.17	0.8184%	25,705.04	1.0654%	7.05%
27/12/2006	57.76	1.3421%	45.97	3.9943%	26,196.66	1.8945%	7.05%
28/12/2006	57.27	-0.8520%	46.53	1.2108%	26,295.21	0.3755%	7.02%
29/12/2006	57.17	-0.1748%	47.05	1.1114%	26,448.32	0.5806%	7.02%
02/01/2007	58.29	1.9401%	47.04	-0.0213%	26,664.45	0.8139%	7.02%
03/01/2007	58.30	0.0172%	46.65	-0.8325%	26,619.37	-0.1692%	7.02%
04/01/2007	58.58	0.4791%	45.69	-2.0793%	26,566.28	-0.1996%	7.01%
05/01/2007	57.79	-1.3578%	45.04	-1.4328%	26,135.60	-1.6344%	7.01%
08/01/2007	59.97	3.7029%	45.70	1.4547%	26,281.64	0.5572%	7.01%
09/01/2007	58.66	-2.2086%	45.49	-0.4606%	25,783.04	-1.9154%	7.01%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
10/01/2007	58.77	0.1873%	45.53	0.0879%	25,885.80	0.3978%	7.01%
11/01/2007	59.52	1.2681%	46.09	1.2225%	26,247.90	1.3891%	7.02%
12/01/2007	60.19	1.1194%	46.04	-0.1085%	26,324.38	0.2910%	7.02%
15/01/2007	60.20	0.0166%	46.32	0.6063%	26,480.03	0.5895%	7.02%
16/01/2007	60.93	1.2053%	46.27	-0.1080%	26,480.33	0.0011%	7.02%
17/01/2007	61.36	0.7032%	46.12	-0.3247%	26,558.50	0.2948%	7.02%
18/01/2007	59.88	-2.4416%	45.38	-1.6175%	26,112.87	-1.6922%	7.05%
19/01/2007	59.94	0.1002%	45.47	0.1981%	26,213.38	0.3842%	7.05%
22/01/2007	61.40	2.4066%	46.22	1.6360%	26,432.25	0.8315%	7.05%
23/01/2007	62.17	1.2463%	46.78	1.2043%	26,810.00	1.4190%	7.05%
24/01/2007	62.97	1.2786%	48.18	2.9488%	27,338.30	1.9514%	7.05%
25/01/2007	62.26	-1.1339%	47.10	-2.2671%	26,899.34	-1.6187%	7.06%
26/01/2007	63.17	1.4510%	46.92	-0.3829%	27,045.71	0.5427%	7.06%
29/01/2007	63.29	0.1898%	46.49	-0.9207%	26,834.05	-0.7857%	7.06%
30/01/2007	62.89	-0.6340%	47.40	1.9385%	27,135.37	1.1166%	7.06%
31/01/2007	63.50	0.9653%	48.30	1.8809%	27,561.49	1.5581%	7.06%
01/02/2007	63.23	-0.4261%	48.45	0.3101%	27,842.76	1.0153%	7.05%
02/02/2007	62.64	-0.9375%	48.51	0.1238%	27,933.07	0.3238%	7.05%
06/02/2007	62.16	-0.7692%	48.83	0.6575%	28,067.40	0.4797%	7.05%
07/02/2007	61.97	-0.3061%	48.70	-0.2666%	28,123.76	0.2006%	7.05%
08/02/2007	61.13	-1.3648%	48.35	-0.7213%	28,197.26	0.2610%	7.05%
09/02/2007	60.76	-0.6071%	47.22	-2.3649%	27,906.89	-1.0351%	7.05%
12/02/2007	61.47	1.1618%	47.17	-0.1059%	27,972.23	0.2339%	7.05%
13/02/2007	63.16	2.7122%	48.14	2.0355%	28,262.65	1.0329%	7.05%
14/02/2007	64.29	1.7733%	47.81	-0.6879%	28,539.69	0.9755%	7.05%
15/02/2007	63.96	-0.5146%	47.26	-1.1571%	28,498.75	-0.1436%	7.03%
16/02/2007	63.81	-0.2348%	47.26	0.0000%	28,491.07	-0.0270%	7.03%
19/02/2007	65.18	2.1243%	47.41	0.3169%	28,590.17	0.3472%	7.03%
20/02/2007	64.33	-1.3127%	47.82	0.8611%	28,589.66	-0.0018%	7.03%
21/02/2007	64.04	-0.4518%	47.31	-1.0722%	28,715.96	0.4408%	7.03%
22/02/2007	63.88	-0.2502%	46.70	-1.2978%	28,676.48	-0.1376%	7.03%
23/02/2007	64.18	0.4685%	46.19	-1.0981%	28,505.72	-0.5973%	7.03%
26/02/2007	62.97	-1.9033%	45.36	-1.8133%	28,046.16	-1.6253%	7.03%
27/02/2007	59.76	-5.2322%	41.99	-7.7199%	26,418.82	-5.9775%	7.03%
28/02/2007	59.71	-0.0837%	42.69	1.6533%	26,638.95	0.8298%	7.03%
01/03/2007	59.01	-1.1793%	44.22	3.5212%	26,647.65	0.0327%	7.05%
02/03/2007	58.73	-0.4756%	43.13	-2.4958%	26,321.12	-1.2329%	7.05%
05/03/2007	57.64	-1.8734%	42.62	-1.1895%	25,788.37	-2.0448%	7.05%
06/03/2007	59.43	3.0582%	43.89	2.9363%	26,355.64	2.1759%	7.05%
07/03/2007	59.04	-0.6584%	43.22	-1.5383%	26,184.39	-0.6519%	7.05%
08/03/2007	61.34	3.8217%	44.07	1.9476%	26,773.79	2.2260%	7.05%
09/03/2007	61.75	0.6662%	44.74	1.5089%	27,106.53	1.2351%	7.05%
12/03/2007	61.93	0.2911%	44.74	0.0000%	27,261.17	0.5689%	7.05%
13/03/2007	60.91	-1.6607%	44.30	-0.9883%	26,589.20	-2.4958%	7.05%
14/03/2007	60.87	-0.0657%	44.12	-0.4071%	26,719.32	0.4882%	7.05%
15/03/2007	60.83	-0.0657%	44.48	0.8126%	26,883.53	0.6127%	7.05%
16/03/2007	61.01	0.2955%	44.60	0.2694%	26,901.42	0.0665%	7.05%
20/03/2007	62.02	1.6419%	45.30	1.5573%	27,407.46	1.8636%	7.05%

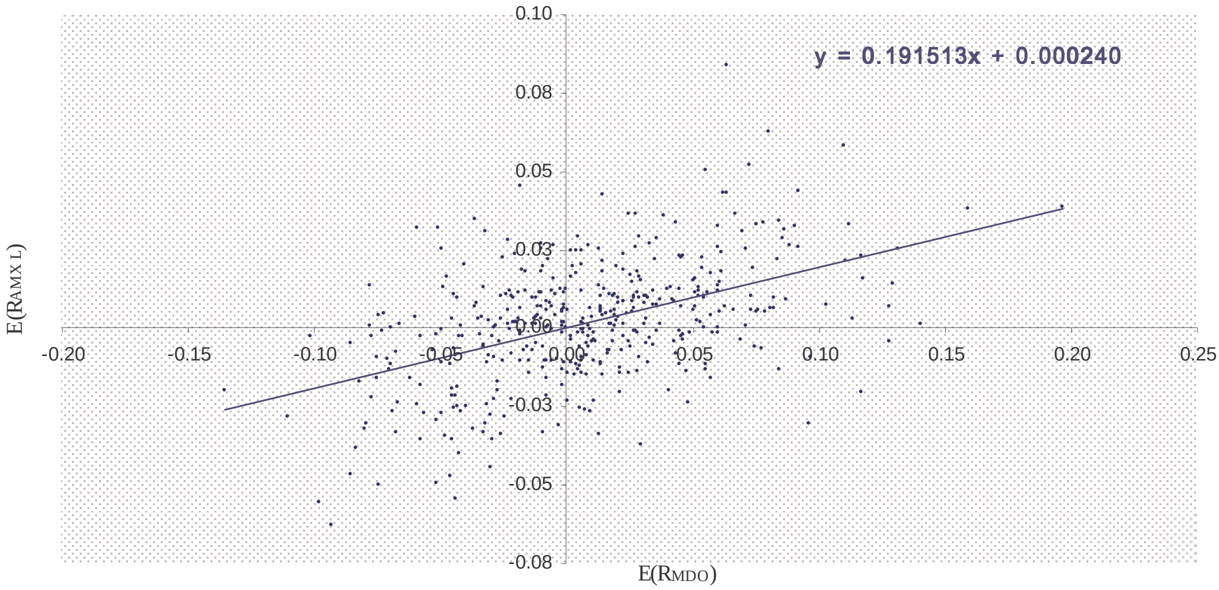
	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
21/03/2007	64.01	3.1582%	46.15	1.8590%	28,219.55	2.9200%	7.05%
22/03/2007	63.39	-0.9733%	45.89	-0.5650%	28,258.80	0.1390%	7.04%
23/03/2007	64.09	1.0982%	45.90	0.0218%	28,272.03	0.0468%	7.04%
26/03/2007	63.54	-0.8619%	45.49	-0.8973%	28,158.97	-0.4007%	7.04%
27/03/2007	63.59	0.0787%	45.53	0.0879%	28,124.33	-0.1231%	7.04%
28/03/2007	63.18	-0.6468%	45.09	-0.9711%	28,098.28	-0.0927%	7.04%
29/03/2007	63.53	0.5524%	46.42	2.9070%	28,704.24	2.1336%	7.03%
30/03/2007	64.40	1.3601%	46.63	0.4514%	28,747.69	0.1513%	7.03%
02/04/2007	65.66	1.9376%	47.44	1.7222%	29,171.52	1.4635%	7.03%
03/04/2007	65.96	0.4559%	47.77	0.6932%	29,348.09	0.6035%	7.03%
04/04/2007	66.53	0.8604%	47.72	-0.1047%	29,370.94	0.0778%	7.02%
09/04/2007	66.46	-0.1053%	48.09	0.7724%	29,632.20	0.8856%	7.02%
10/04/2007	66.21	-0.3769%	46.89	-2.5270%	29,515.64	-0.3941%	7.02%
11/04/2007	65.64	-0.8646%	46.09	-1.7208%	29,278.75	-0.8058%	7.02%
12/04/2007	65.98	0.5166%	46.61	1.1219%	29,606.97	1.1148%	7.00%
13/04/2007	66.42	0.6647%	47.14	1.1307%	29,762.22	0.5230%	7.00%
16/04/2007	66.55	0.1955%	46.73	-0.8736%	29,718.66	-0.1465%	7.00%
17/04/2007	65.19	-2.0647%	46.78	0.1069%	29,598.99	-0.4035%	7.00%
18/04/2007	64.61	-0.8937%	47.19	0.8726%	29,559.52	-0.1334%	7.00%
19/04/2007	64.89	0.4324%	47.19	0.0000%	29,614.05	0.1843%	7.00%
20/04/2007	64.56	-0.5099%	47.29	0.2117%	29,832.48	0.7349%	7.00%
23/04/2007	63.59	-1.5139%	47.08	-0.4451%	29,593.85	-0.8031%	7.00%
24/04/2007	63.44	-0.2362%	46.72	-0.7676%	29,544.18	-0.1680%	7.00%
25/04/2007	62.61	-1.3170%	44.79	-4.2187%	29,444.15	-0.3392%	7.00%
26/04/2007	61.66	-1.5290%	43.42	-3.1065%	29,342.70	-0.3451%	7.00%
27/04/2007	61.34	-0.5203%	43.61	0.4366%	29,372.93	0.1030%	7.00%
30/04/2007	60.10	-2.0422%	42.95	-1.5250%	28,996.71	-1.2891%	7.00%
02/05/2007	61.78	2.7570%	43.21	0.6035%	29,259.92	0.9036%	7.00%
03/05/2007	62.29	0.8221%	43.80	1.3562%	29,752.95	1.6710%	7.25%
04/05/2007	61.79	-0.8059%	44.27	1.0673%	30,013.85	0.8731%	7.25%
07/05/2007	61.25	-0.8778%	43.02	-2.8642%	29,776.57	-0.7937%	7.25%
08/05/2007	61.02	-0.3762%	42.87	-0.3493%	29,572.40	-0.6880%	7.25%
09/05/2007	61.33	0.5067%	42.90	0.0700%	29,992.83	1.4117%	7.25%
10/05/2007	59.82	-2.4929%	42.14	-1.7874%	29,653.82	-1.1367%	7.24%
11/05/2007	61.41	2.6233%	42.42	0.6623%	30,058.75	1.3563%	7.24%
14/05/2007	61.16	-0.4079%	41.86	-1.3289%	29,766.33	-0.9776%	7.24%
15/05/2007	60.59	-0.9364%	41.53	-0.7915%	29,619.91	-0.4931%	7.24%
16/05/2007	62.20	2.6225%	42.24	1.6952%	30,341.25	2.4061%	7.24%
17/05/2007	62.38	0.2890%	42.66	0.9894%	30,478.37	0.4509%	7.23%
18/05/2007	63.03	1.0366%	42.98	0.7473%	30,676.34	0.6474%	7.23%
21/05/2007	63.18	0.2377%	42.83	-0.3496%	30,708.73	0.1055%	7.23%
22/05/2007	63.95	1.2114%	42.67	-0.3743%	30,802.25	0.3041%	7.23%
23/05/2007	63.63	-0.5016%	42.26	-0.9655%	30,869.84	0.2192%	7.23%
24/05/2007	62.09	-2.4500%	41.71	-1.3100%	30,338.58	-1.7359%	7.24%
25/05/2007	62.11	0.0322%	41.91	0.4784%	30,700.01	1.1843%	7.24%
28/05/2007	63.10	1.5814%	41.87	-0.0955%	30,928.43	0.7413%	7.24%
29/05/2007	60.34	-4.4726%	40.02	-4.5190%	30,664.73	-0.8563%	7.24%
30/05/2007	60.93	0.9730%	41.25	3.0272%	31,380.00	2.3058%	7.24%

	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
31/05/2007	61.87	1.5310%	40.64	-1.4898%	31,398.96	0.0604%	7.22%
01/06/2007	62.06	0.3066%	40.90	0.6377%	31,946.40	1.7285%	7.22%
04/06/2007	61.91	-0.2420%	41.16	0.6337%	32,096.21	0.4678%	7.22%
05/06/2007	60.94	-1.5792%	42.58	3.3918%	32,271.38	0.5443%	7.22%
06/06/2007	60.15	-1.3048%	42.25	-0.7780%	31,681.76	-1.8440%	7.22%
07/06/2007	59.13	-1.7103%	41.86	-0.9274%	31,184.49	-1.5820%	7.21%
08/06/2007	58.64	-0.8321%	41.49	-0.8878%	31,466.60	0.9006%	7.21%
11/06/2007	58.97	0.5612%	42.35	2.0516%	31,833.44	1.1591%	7.21%
12/06/2007	58.95	-0.0339%	42.53	0.4241%	31,608.59	-0.7088%	7.21%
13/06/2007	59.35	0.6762%	43.82	2.9881%	31,884.06	0.8677%	7.21%
14/06/2007	59.87	0.8723%	44.19	0.8408%	32,114.09	0.7189%	7.20%
15/06/2007	61.42	2.5560%	43.26	-2.1270%	32,128.97	0.0463%	7.20%
18/06/2007	61.93	0.8269%	43.53	0.6222%	32,218.17	0.2772%	7.20%
19/06/2007	60.88	-1.7100%	43.39	-0.3221%	32,064.99	-0.4766%	7.20%
20/06/2007	59.74	-1.8903%	42.75	-1.4860%	31,550.76	-1.6167%	7.20%
21/06/2007	60.02	0.4676%	42.99	0.5598%	31,830.84	0.8838%	7.18%
22/06/2007	59.36	-1.1057%	42.27	-1.6890%	31,642.26	-0.5942%	7.18%
25/06/2007	58.49	-1.4765%	41.27	-2.3942%	31,296.01	-1.1003%	7.18%
26/06/2007	57.19	-2.2477%	40.46	-1.9822%	30,744.71	-1.7773%	7.18%
27/06/2007	57.26	0.1223%	40.77	0.7633%	30,804.21	0.1933%	7.18%
28/06/2007	58.91	2.8409%	40.83	0.1471%	31,079.24	0.8889%	7.19%
29/06/2007	59.57	1.1141%	40.98	0.3667%	31,151.05	0.2308%	7.19%
02/07/2007	59.48	-0.1512%	41.29	0.7536%	31,420.69	0.8619%	7.19%
03/07/2007	60.10	1.0370%	41.64	0.8441%	32,117.83	2.1945%	7.19%
04/07/2007	60.35	0.4151%	41.85	0.5031%	32,201.63	0.2606%	7.19%
05/07/2007	60.04	-0.5150%	41.18	-1.6139%	32,177.83	-0.0739%	7.18%
06/07/2007	59.90	-0.2335%	40.90	-0.6823%	32,411.84	0.7246%	7.18%
09/07/2007	60.05	0.2501%	41.45	1.3358%	32,088.25	-1.0034%	7.18%
10/07/2007	59.14	-1.5270%	40.81	-1.5561%	31,743.02	-1.0817%	7.18%
11/07/2007	59.73	0.9927%	40.68	-0.3191%	31,916.27	0.5443%	7.18%
12/07/2007	60.99	2.0876%	40.91	0.5638%	32,261.10	1.0746%	7.18%
13/07/2007	61.90	1.4810%	41.62	1.7206%	32,386.51	0.3880%	7.18%
16/07/2007	60.50	-2.2877%	41.30	-0.7718%	32,265.93	-0.3730%	7.18%
17/07/2007	61.25	1.2320%	41.20	-0.2424%	31,979.14	-0.8928%	7.18%
18/07/2007	62.06	1.3138%	40.94	-0.6331%	31,886.74	-0.2894%	7.18%
19/07/2007	61.58	-0.7765%	40.98	0.0977%	32,150.65	0.8242%	7.19%
20/07/2007	59.71	-3.0838%	40.56	-1.0302%	31,922.62	-0.7118%	7.19%
23/07/2007	59.41	-0.5037%	40.37	-0.4695%	32,168.43	0.7671%	7.19%
24/07/2007	59.41	0.0000%	39.67	-1.7492%	31,462.15	-2.2200%	7.19%
25/07/2007	59.76	0.5874%	39.06	-1.5496%	31,103.53	-1.1464%	7.19%
26/07/2007	57.29	-4.2210%	37.13	-5.0674%	29,996.60	-3.6237%	7.19%
27/07/2007	56.93	-0.6304%	38.98	4.8623%	30,235.17	0.7922%	7.19%
30/07/2007	57.02	0.1580%	40.02	2.6331%	30,900.68	2.1772%	7.19%
31/07/2007	55.56	-2.5939%	39.93	-0.2251%	30,659.66	-0.7830%	7.19%
01/08/2007	55.25	-0.5595%	39.53	-1.0068%	30,048.37	-2.0139%	7.19%
02/08/2007	55.89	1.1517%	40.25	1.8050%	30,394.81	1.1463%	7.19%
03/08/2007	54.81	-1.9513%	39.33	-2.3122%	29,671.77	-2.4076%	7.19%
06/08/2007	55.57	1.3771%	39.19	-0.3566%	29,721.63	0.1679%	7.19%

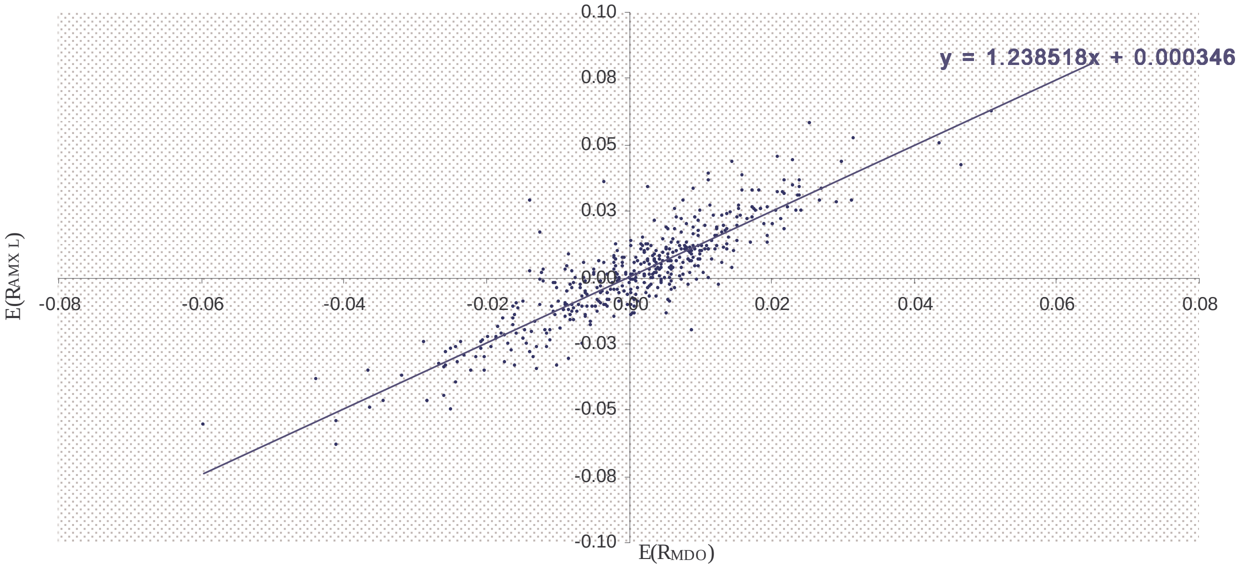
	TLEVISA CPO		WALMEX V		IPC		CETES 28 días
FECHA	CIERRE AJ.	REND.	CIERRE AJ.	REND.	FECHA	CIERRE AJ.	REND. ANUAL
07/08/2007	56.73	2.0660%	39.88	1.7453%	30,239.92	1.7288%	7.19%
08/08/2007	56.98	0.4397%	40.15	0.6747%	30,661.87	1.3857%	7.19%
09/08/2007	54.91	-3.7005%	39.34	-2.0381%	29,883.96	-2.5698%	7.19%
10/08/2007	53.29	-2.9947%	38.24	-2.8360%	29,420.47	-1.5631%	7.19%
13/08/2007	54.47	2.1901%	38.25	0.0261%	29,607.20	0.6327%	7.19%
14/08/2007	52.87	-2.9814%	36.93	-3.5119%	28,895.73	-2.4324%	7.19%
15/08/2007	53.01	0.2645%	35.65	-3.5275%	28,140.73	-2.6476%	7.19%
16/08/2007	52.50	-0.9667%	34.31	-3.8312%	27,793.16	-1.2428%	7.21%
17/08/2007	54.21	3.2052%	35.08	2.2194%	28,510.66	2.5488%	7.21%
20/08/2007	53.65	-1.0384%	35.47	1.1056%	28,453.55	-0.2005%	7.21%
21/08/2007	53.19	-0.8611%	35.58	0.3096%	28,568.43	0.4029%	7.21%
22/08/2007	54.31	2.0838%	36.38	2.2235%	29,269.34	2.4238%	7.21%
23/08/2007	55.00	1.2625%	36.43	0.1373%	29,459.82	0.6487%	7.20%
24/08/2007	56.73	3.0970%	37.75	3.5593%	30,041.54	1.9554%	7.20%
27/08/2007	56.33	-0.7076%	39.09	3.4881%	30,275.84	0.7769%	7.20%
28/08/2007	54.63	-3.0644%	37.34	-4.5802%	29,326.76	-3.1850%	7.20%
29/08/2007	56.27	2.9578%	37.80	1.2244%	29,710.78	1.3010%	7.20%
30/08/2007	56.57	0.5317%	38.05	0.6592%	29,744.07	0.1120%	7.23%
31/08/2007	57.75	2.0645%	39.26	3.1305%	30,347.86	2.0096%	7.23%
03/09/2007	58.30	0.9479%	40.29	2.5897%	30,797.60	1.4711%	7.23%
04/09/2007	58.93	1.0748%	40.15	-0.3481%	30,932.71	0.4377%	7.23%
05/09/2007	58.72	-0.3570%	39.62	-1.3288%	30,809.55	-0.3989%	7.23%
06/09/2007	59.11	0.6620%	39.64	0.0505%	30,816.95	0.0240%	7.21%
07/09/2007	58.05	-1.8095%	38.51	-2.8921%	30,252.77	-1.8477%	7.21%
10/09/2007	57.10	-1.6501%	38.47	-0.1039%	29,893.18	-1.1957%	7.21%
11/09/2007	58.64	2.6613%	38.86	1.0087%	30,191.14	0.9918%	7.21%
12/09/2007	57.96	-1.1664%	39.02	0.4109%	30,076.33	-0.3810%	7.21%
13/09/2007	58.23	0.4648%	39.22	0.5112%	30,302.23	0.7483%	7.20%
14/09/2007	57.29	-1.6275%	39.25	0.0765%	30,096.03	-0.6828%	7.20%
17/09/2007	55.67	-2.8685%	38.29	-2.4763%	29,794.49	-1.0070%	7.20%
18/09/2007	57.38	3.0254%	40.09	4.5938%	30,603.42	2.6788%	7.20%
19/09/2007	57.20	-0.3142%	39.80	-0.7260%	30,512.64	-0.2971%	7.20%
20/09/2007	55.72	-2.6215%	40.50	1.7435%	30,485.75	-0.0882%	7.22%
21/09/2007	54.89	-1.5008%	41.19	1.6894%	30,583.07	0.3187%	7.22%
24/09/2007	53.80	-2.0058%	41.87	1.6374%	30,543.45	-0.1296%	7.22%
25/09/2007	53.79	-0.0186%	41.78	-0.2152%	30,294.77	-0.8175%	7.22%
26/09/2007	54.20	0.7593%	41.66	-0.2876%	30,303.18	0.0278%	7.22%
27/09/2007	54.05	-0.2771%	41.23	-1.0375%	30,528.00	0.7392%	7.19%
28/09/2007	52.69	-2.5484%	40.18	-2.5797%	30,296.19	-0.7622%	7.19%

- RECTAS DE REGRESIÓN DE LAS ACCIONES CONSIDERADAS

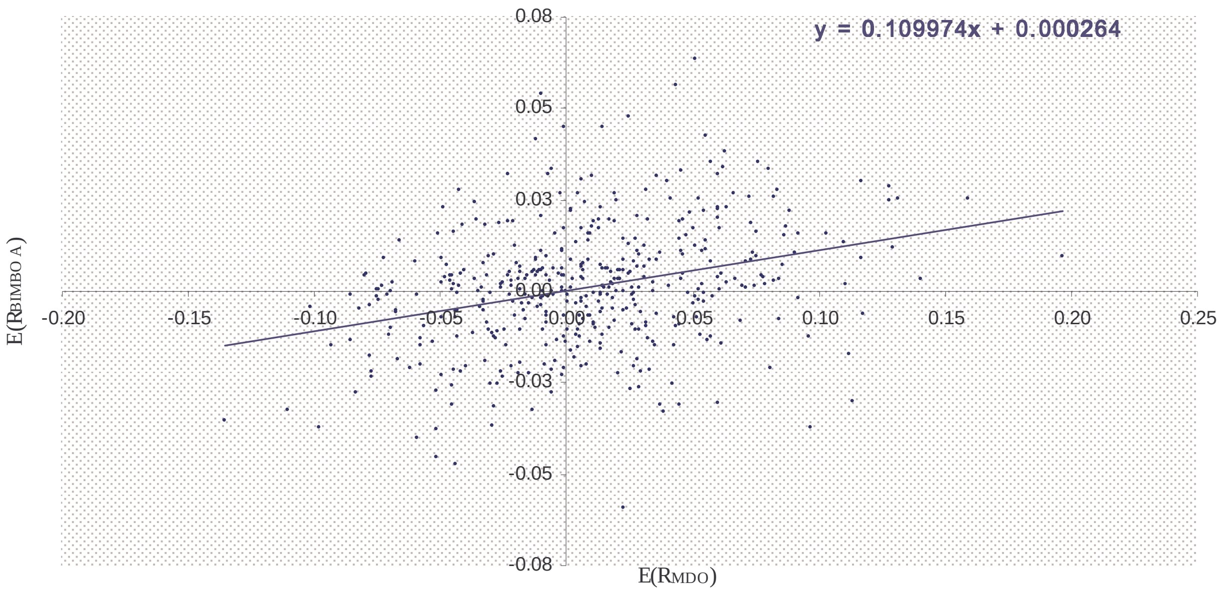
AMX-L – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



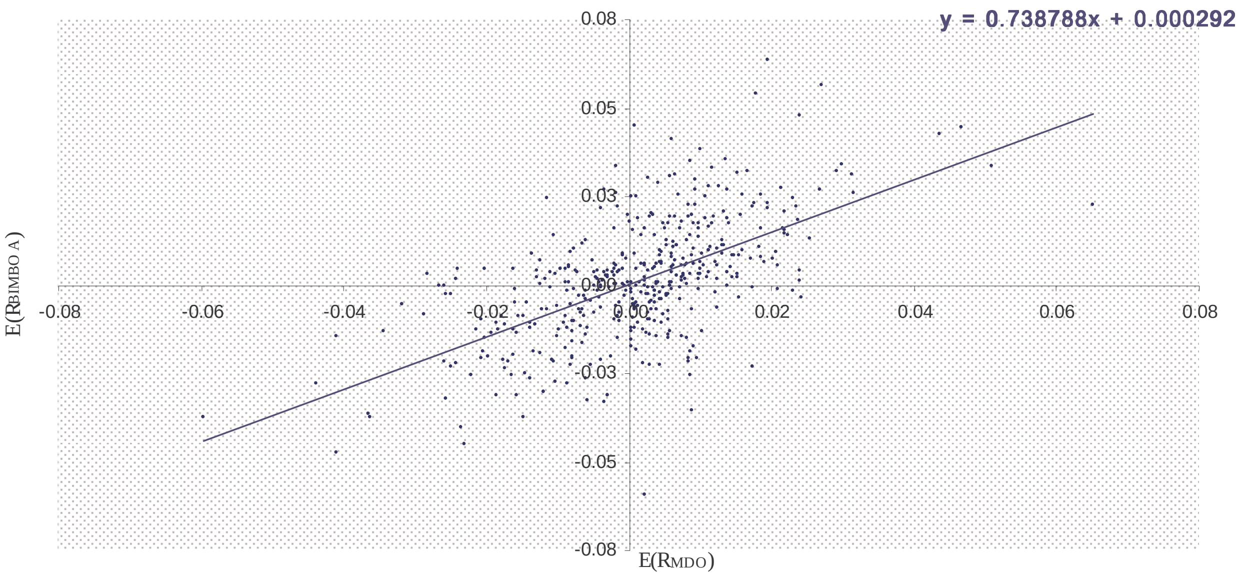
AMX-L – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



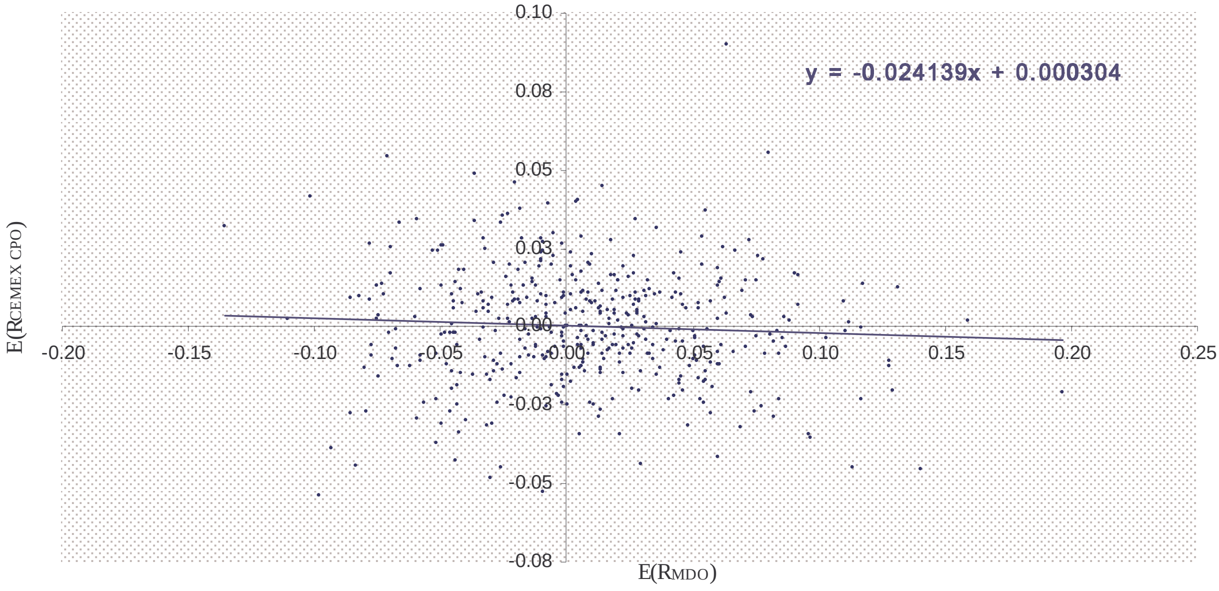
BIMBO A – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



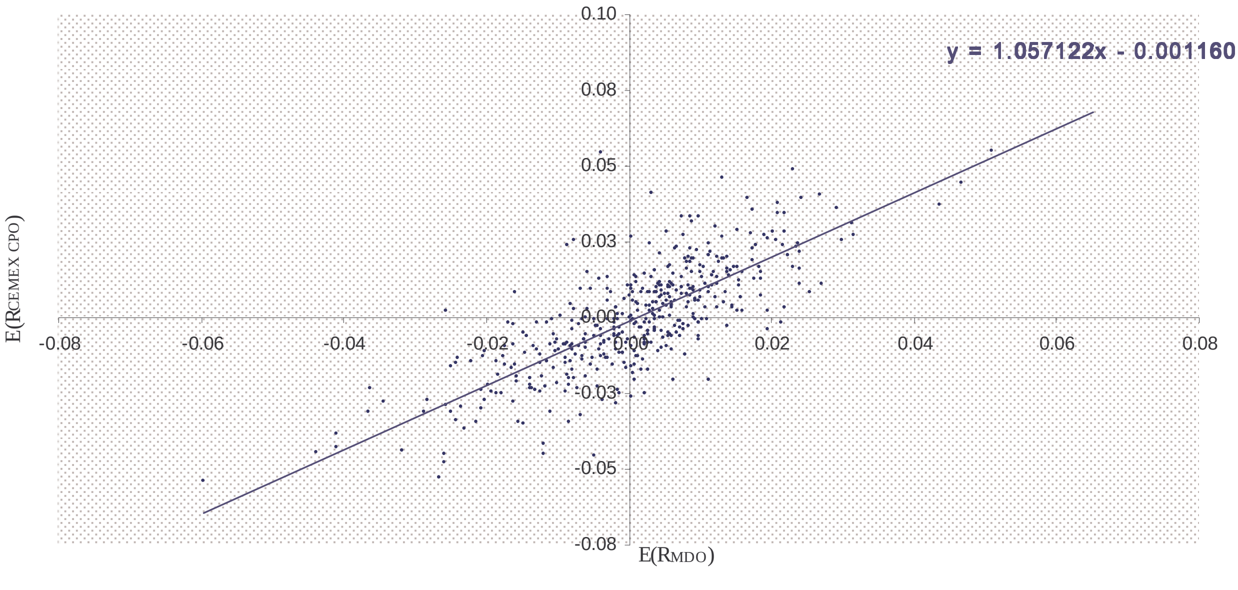
BIMBO A – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



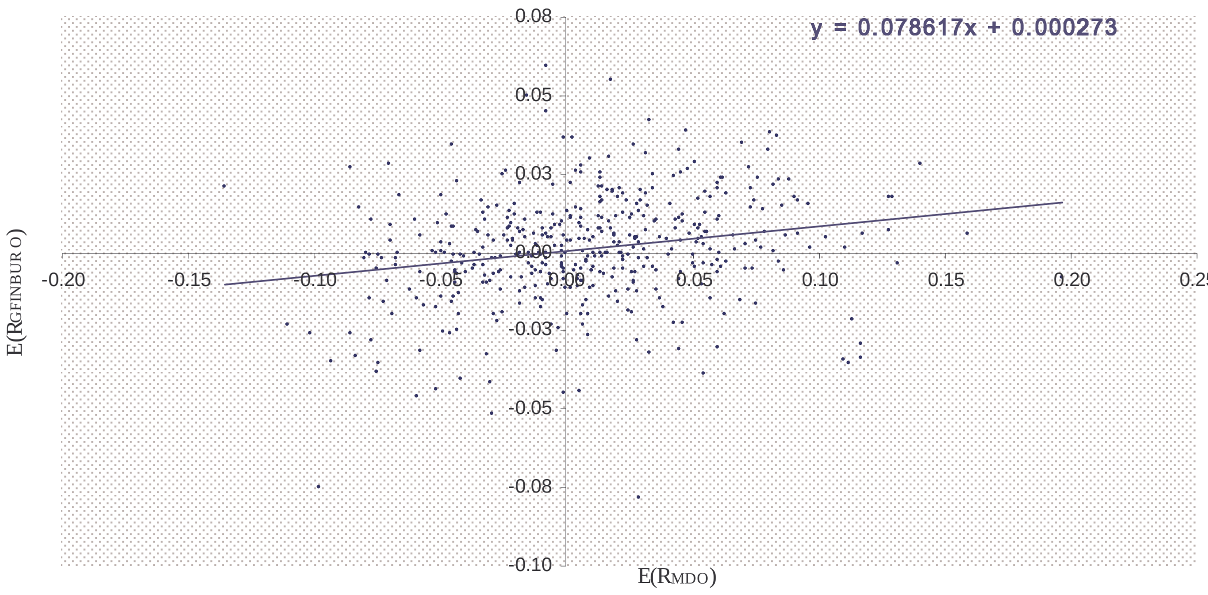
CEMEX CPO – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



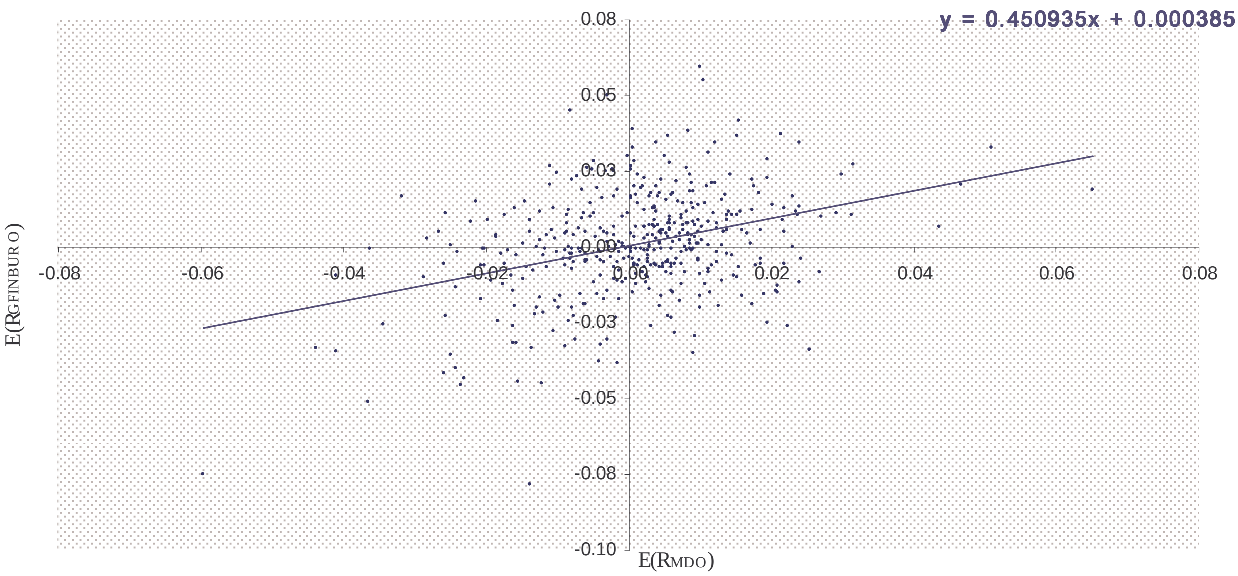
CEMEX CPO – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



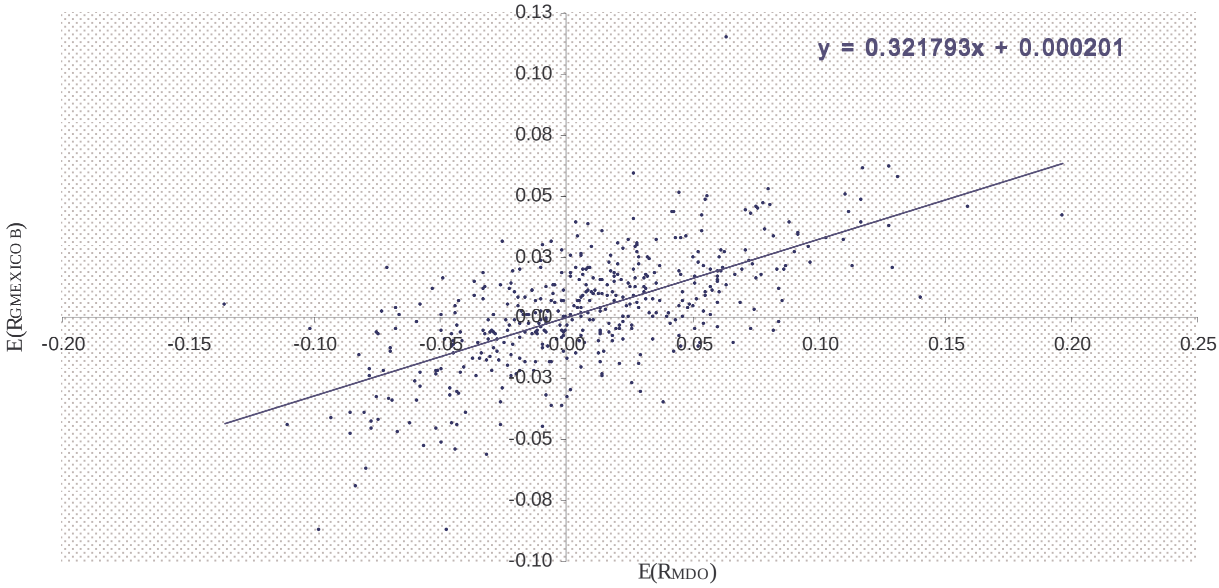
GFINBUR O – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



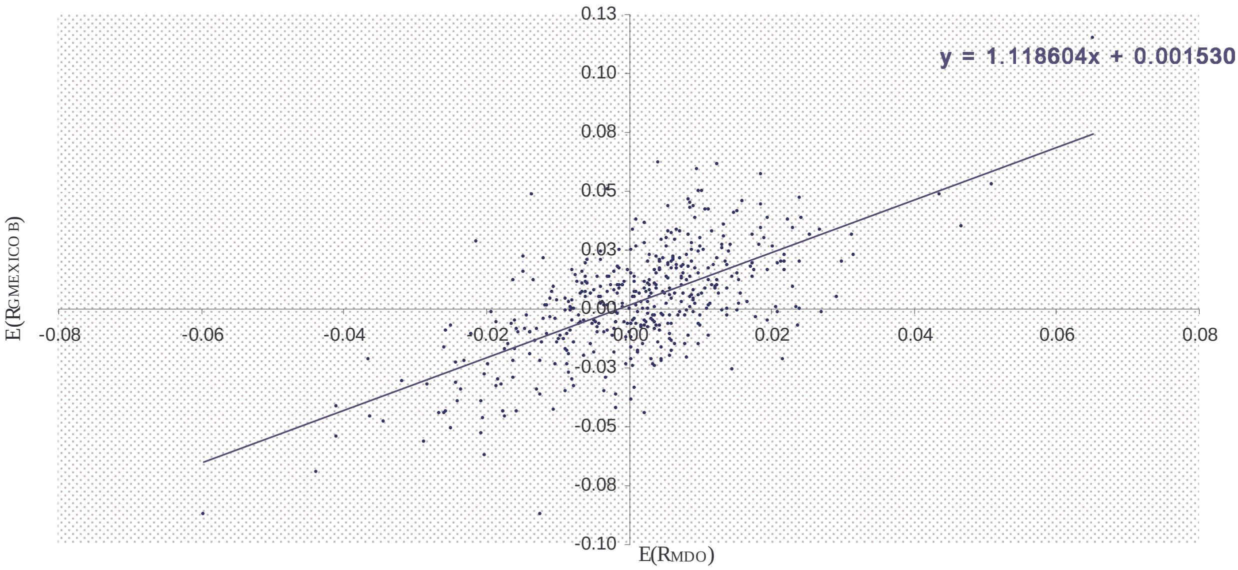
GFINBUR O – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



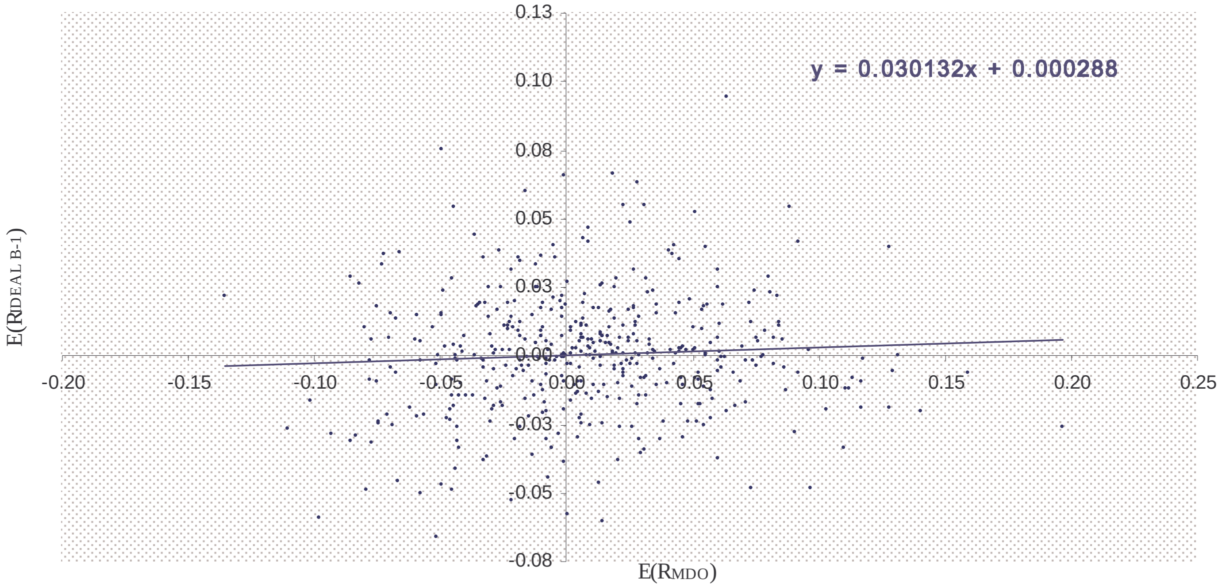
GMÉXICO B – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



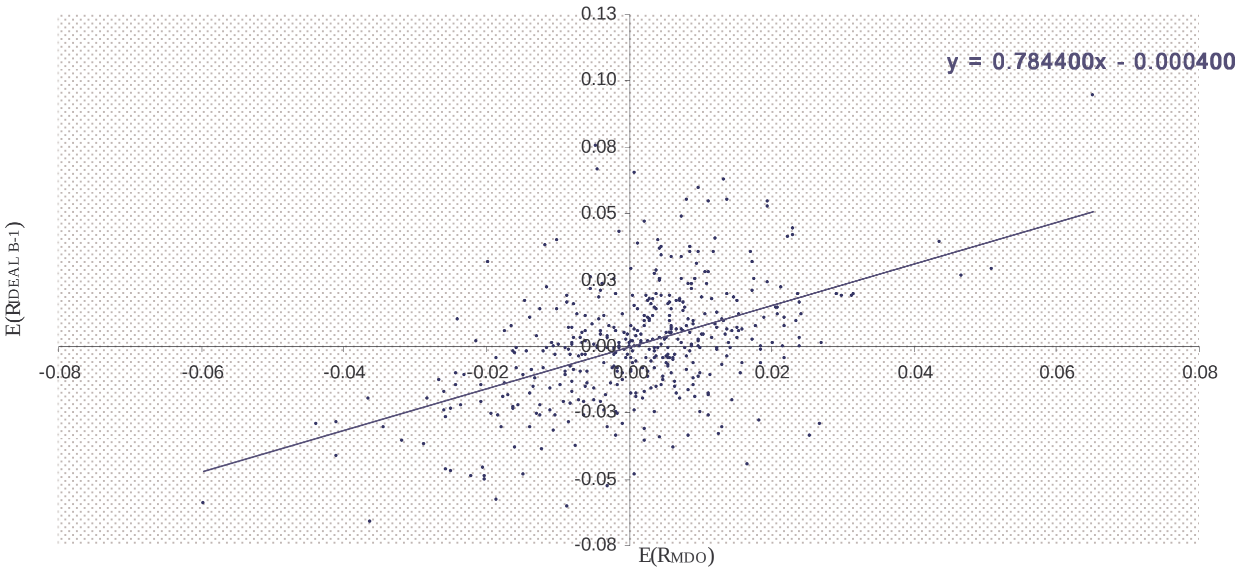
GMÉXICO B – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



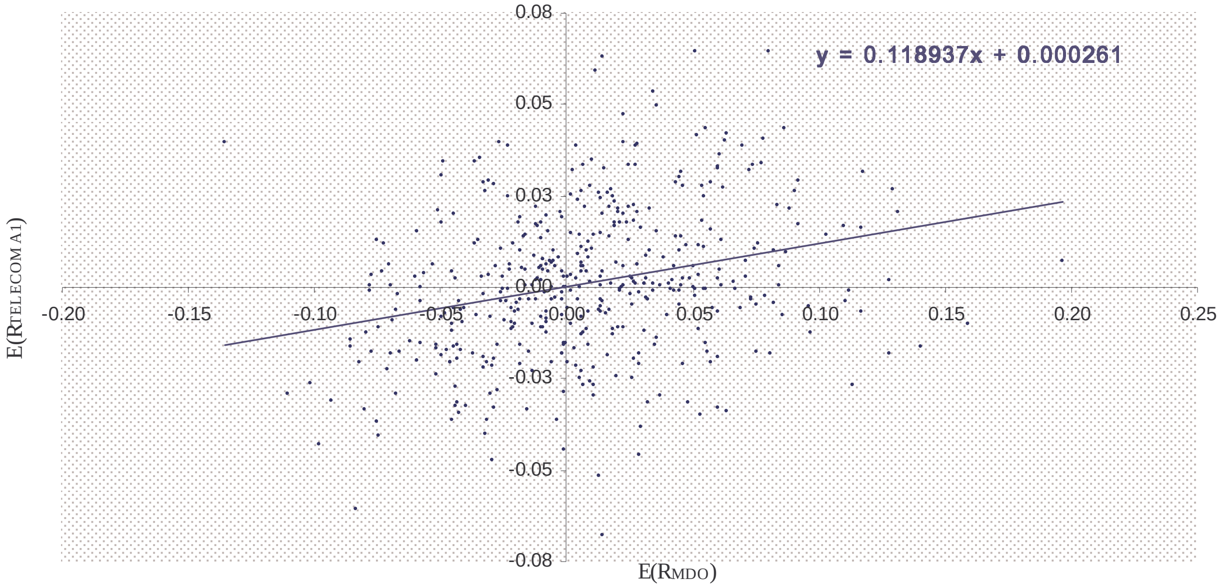
IDEAL B-1 – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



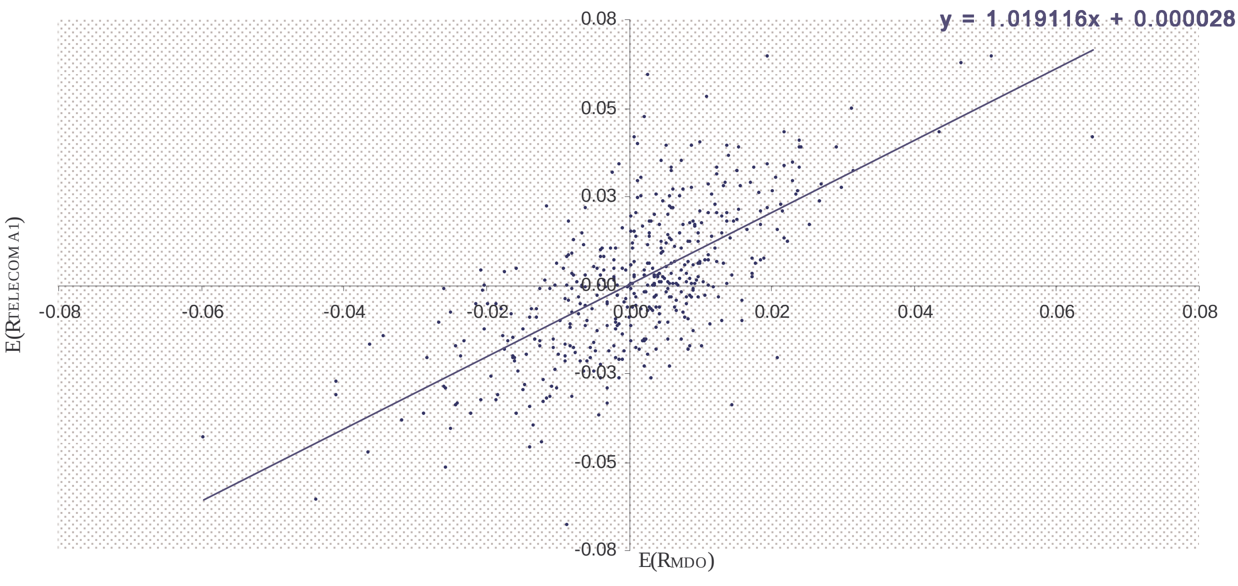
IDEAL B-1 – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



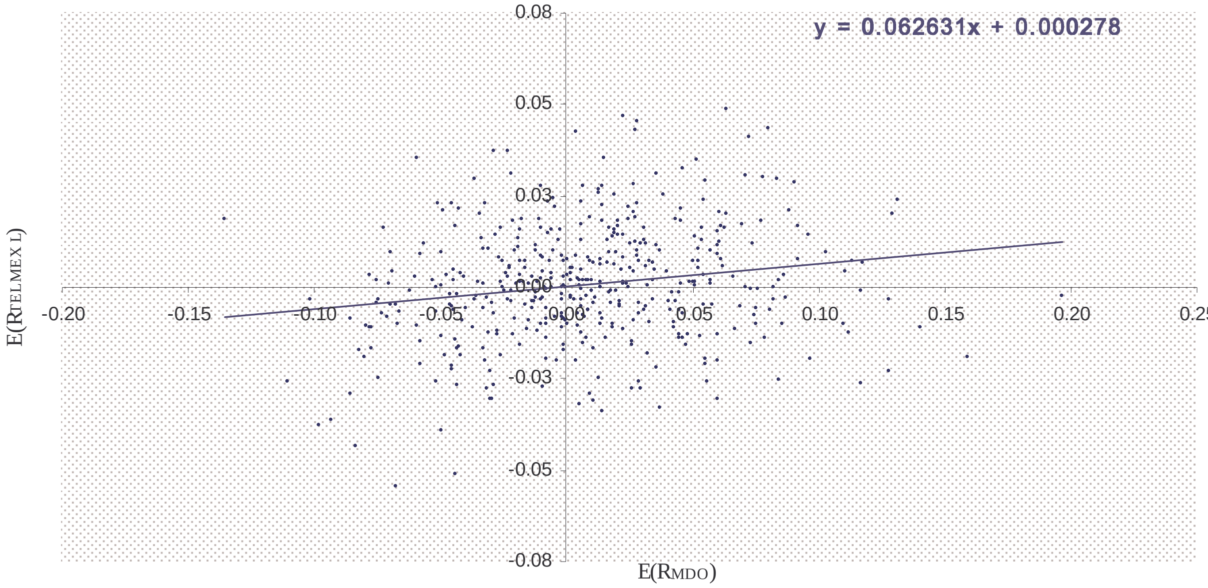
TELECOM A-1 – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



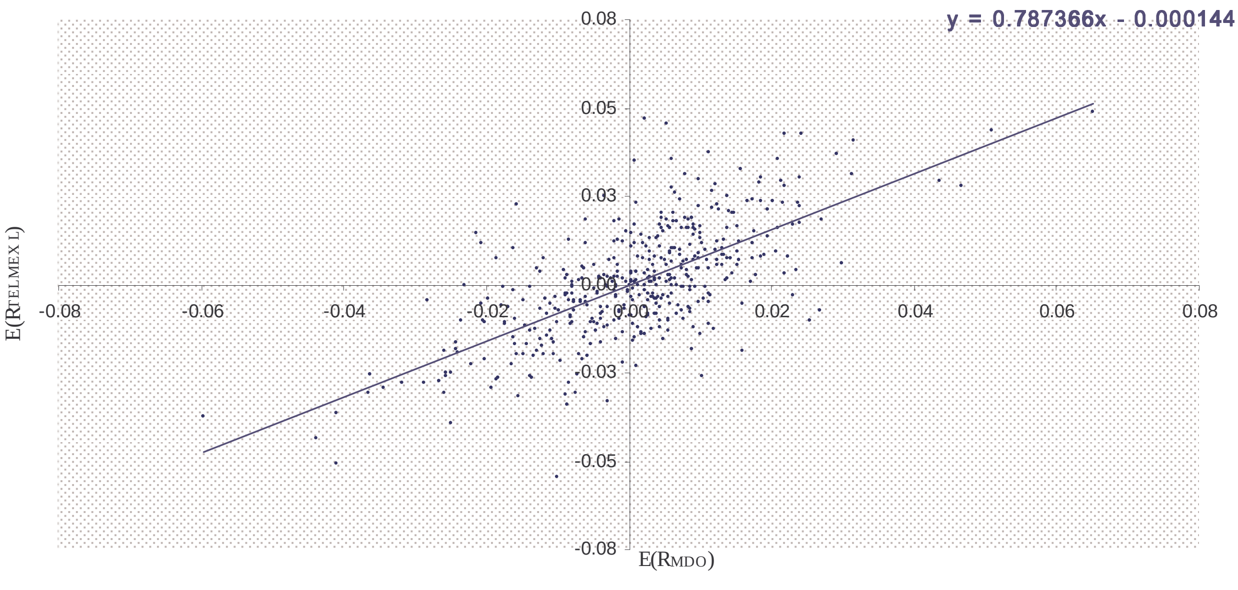
TELECOM A-1 – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



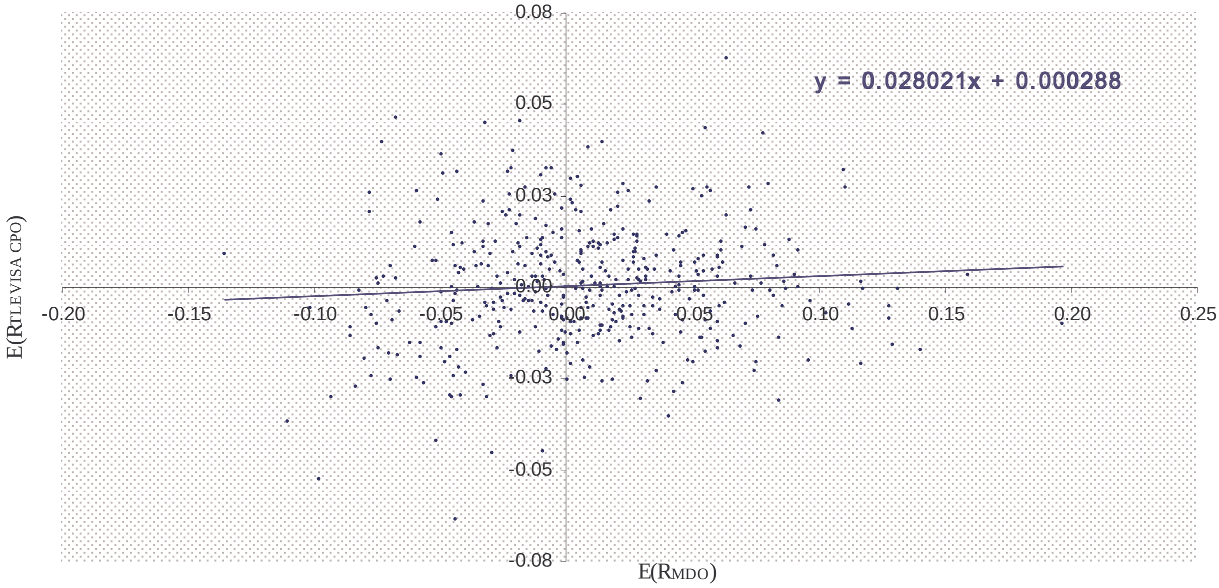
TELMEX L – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



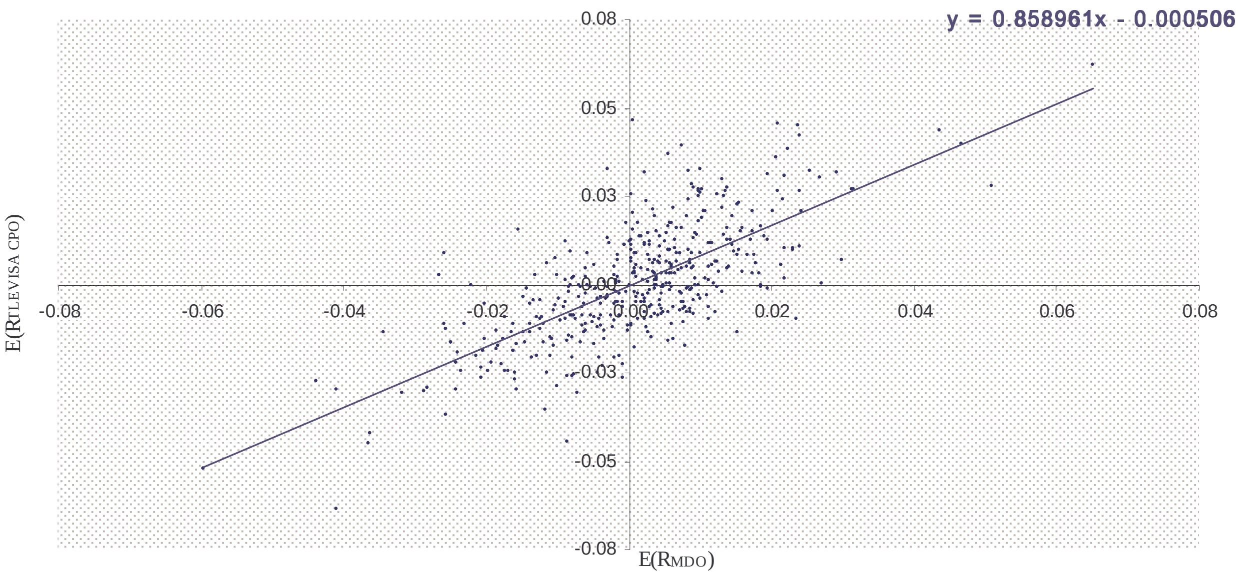
TELMEX L – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



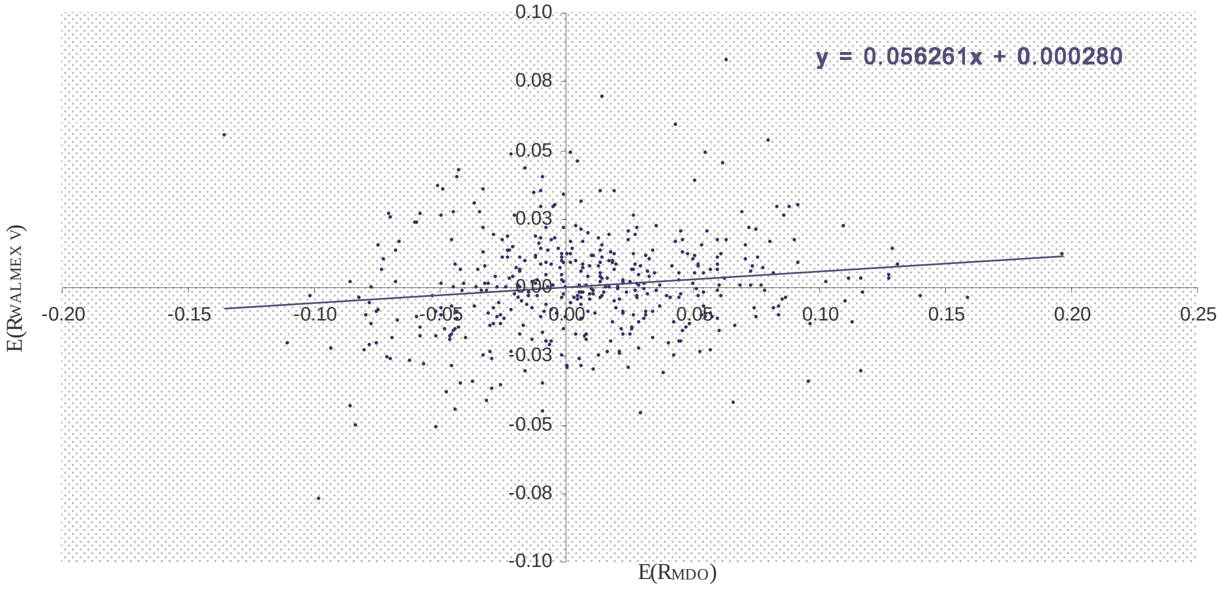
TLEVISA CPO – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



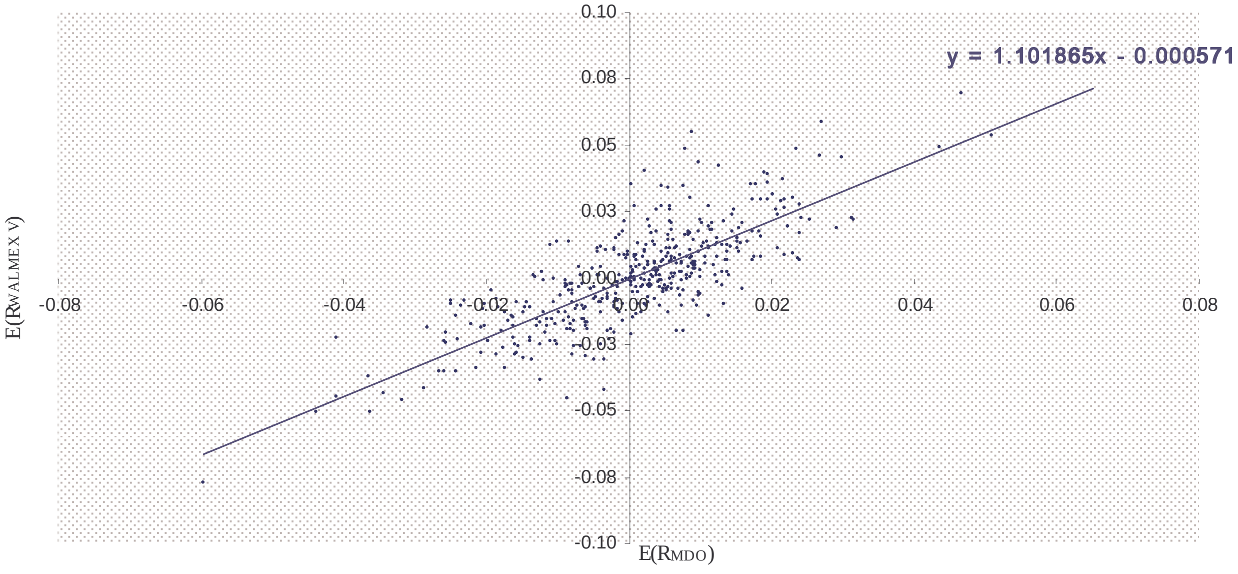
TLEVISA CPO – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



WALMEX V – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Teórica



WALMEX V – Rentabilidad histórica individual vs. Rentabilidad de la Cartera de Mercado Práctica (IPC)



BIBLIOGRAFÍA

ELTON, Edwin J. GRUBER, Martin J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. 5° ed., John Wiley & Sons Inc., E.U., 1995.

LUCE, R. Duncan, y RAIFFA, Howard, *Games and Decisions*, John Wiley & Sons, 1957

MARKOWITZ, Harry M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1959, p. 188-201.

MARKOWITZ, Harry M. *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, No. 7, Marzo 1952, p. 77-91

MERTON, R. C. *Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Septiembre 1972, págs. 1851-1872.

NEUMANN, John Von. MORGENSTERN, Oskar. *Theory of Games and Economic Behaviour*, 2° ed., Princeton University Press, E.U., 1944.

PADILLA GARRIDO, Nuria. *Análisis Multicriterio aplicado a la selección de carteras*, Universidad de Huelva, España, 2004, p. 31-33.

ROLL, R. ROSS, S.A. (1984) The Arbitrage Pricing Theory Approach to Strategic Portfolio Planning. Journal of Financial Analysts, Mayo-Junio, págs. 14-26.

ROSS, S.A. *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, Journal of Economic Theory, No. 13, Diciembre 1976, p. 341-360.

SHARPE, W.F. *A simplified Model for Portfolio Analysis*, Management Science, Vol. 9, No. 2, Enero 1963, p. 277-293.

SHARPE, W.F. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, Journal of Finance, Vol. 19, No. 3, 1964, p. 425-442.

SHARPE, W.F. (1966). Mutual Fund Performance. *Journal of Business, a supplement*, Vol. 39, Parte 2, Enero 1966, p. 119-138.

TOBIN, J. *Liquidity Preference as behaviour towards risk*, Review of Economic Studies, Vol. 26, No. 1, Febrero 1958, p. 65-86

VARIAN, Hall., *Microeconomía Intermedia*, 3° ed., 1992, Antoni Bosch, Barcelona.