



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“Discos en sistemas estelares aislados y en sistemas binarios”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN CIENCIAS**

PRESENTA:

**ERICK NAGEL VEGA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE CANTO ILLA

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. ALEJANDRO RAGA RASMUSSEN

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: DR. RAMON PERALTA Y FABI

**pcf**

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Erick Nagel Vega

FECHA: 11-Junio-2007

FIRMA: 

Nº de cuenta: 8913310-3

Correo electrónico: [enagel@astroscu.unam.mx](mailto:enagel@astroscu.unam.mx)

Tel: 5577-47-90

# Discos en sistemas estelares aislados y en sistemas binarios

Erick Nagel Vega

Asesores:

Dr. Jorge Cantó Illa

Dr. Alejandro Raga Rasmussen

Dr. Ramón Peralta y Fabi

México D.F., Junio 2007

# AGRADECIMIENTOS

La primer piedra de esta tesis la proporcionó mi tutor principal, Jorge Cantó, al plantear objetivos muy claros de lo que quería para este trabajo. La construcción de la obra continuó con el apoyo incondicional de Jorge y con el apoyo en la parte computacional de Alex Raga, otro de los miembros del comité tutorial. Ramón Peralta y Fabi, que fué mi director de tesis en la Licenciatura en la Facultad de Ciencias y miembro de mi comité tutorial, fué el culpable de que optara por Jorge Cantó para realizar mi trabajo de tesis doctoral. A su vez Jorge Cantó fue el culpable de que asistiera a varios congresos con dinero de sus proyectos, hecho que agradezco por que aprendí muchísimo.

Agradezco infinitamente a mi comité tutorial por el apoyo brindado y en particular por la paciencia mostrada durante este largo camino. A los sinodales Rafael Pérez Pascual, Miguel Alcubierre, Bárbara Pichardo, Frederic Masset y Luis Felipe Rodríguez por ayudar en la revisión de la tesis para lograr una mayor claridad en su presentación y con cuya interacción fue posible que se aclararan algunos detalles de los que no estaba consciente, les estoy agradecido

Quiero agradecer a William Lee por prestarme su código SPH para la realización de parte de este trabajo, además de su paciencia para explicarme algunos detalles técnicos. Bárbara Pichardo colaboró en esta tesis, construyendo numéricamente algunas órbitas para el problema restringido circular de tres cuerpos, lo que permitió que resultados analíticos que aquí se presentan tuvieran un punto de comparación.

Asímismo, agradezco a Salvador Curiel, Edmundo Moreno, Paola D'Alessio, Frederic Masset por valiosas discusiones en distintos momentos a lo largo de todos estos años. A Lucero Uscanga por resolverme dudas técnicas sobre programas que no conocía.

Agradezco a los culpables de que siempre tuviera computadora donde trabajar, varias veces Salvador Curiel y el posgrado de Astronomía en otra ocasión. Los problemas técnicos que continuamente surgían en el tiempo fueron amablemente solucionados por el Departamento de Cómputo del Instituto de Astronomía, por lo que estoy en deuda con ellos, y en particular con Alf, quién me tuvo suficiente paciencia para explicarme las soluciones a los problemas computacionales en que en algunos momentos naufragaron mis computadoras.

Deseo agradecer al Posgrado en Ciencias Físicas su colaboración para que toda la cuestión administrativa se pudiera solucionar en tiempo y forma, y en particular a la secretaría del posgrado, Yanalté, por siempre tener una respuesta a todo y saberse los nombres de cada uno de nosotros.

Un agradecimiento muy grande a las instituciones de la UNAM que hicieron posible este trabajo, al Instituto de Astronomía por siempre proporcionarme un espacio donde trabajar y libre acceso a

# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Orbitas perturbadas</b>  | <b>15</b> |
| §2.1     | Introducción . . . . .  | 15        |
| §2.2     | Función perturbadora . . . . .  | 16        |
| §2.2.1   | Problema mecánico de 2 cuerpos . . . . .  | 18        |
| §2.2.2   | Problema mecánico de 3 cuerpos . . . . .  | 20        |
| §2.2.3   | Expansión en elementos orbitales . . . . .  | 22        |
| §2.2.4   | Ecuaciones planetarias de Lagrange . . . . .  | 24        |
| §2.2.5   | Perturbaciones seculares . . . . .  | 28        |
| §2.2.6   | Perturbaciones resonantes . . . . .   | 30        |
| §2.3     | Perturbaciones de órbitas circunestelares debido a la compañera en el sistema binario . . . . .                   | 34        |
| §2.3.1   | Método perturbativo . . . . .   | 34        |
| §2.3.2   | Intersección de órbitas perturbadas contiguas . . . . .   | 39        |
| §2.4     | Perturbaciones de órbitas circumbinarias debido a la compañera en el sistema binario . . . . .                    | 43        |
| §2.4.1   | Método perturbativo . . . . .   | 43        |
| §2.4.2   | Análisis de estabilidad . . . . .   | 45        |
| §2.4.3   | Comparación con resultados numéricos . . . . .  | 47        |
| §2.5     | Perturbación de una órbita acretando hacia un objeto central debido a la presencia de un segundo cuerpo . . . . . | 51        |
| §2.5.1   | Método perturbativo . . . . .   | 53        |
| §2.5.2   | Aplicación sobre la trayectoria parabólica de acreción de una partícula hacia la estrella . . . . .               | 54        |
| §2.6     | Conclusiones . . . . .  | 62        |
| <b>3</b> | <b>Acreción de una nube hacia una estrella</b>  | <b>65</b> |
| §3.1     | Introducción . . . . .  | 65        |
| §3.2     | Simulación hidrodinámica . . . . .  | 66        |
| §3.2.1   | Ecuaciones hidrodinámicas . . . . .   | 66        |
| §3.2.2   | Condición inicial y de frontera . . . . .   | 66        |
| §3.2.3   | Resultados . . . . .  | 67        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| §3.3     | Supervivencia de un disco con dos anillos densos . . . . .                                   | 70        |
| §3.4     | Simulaciones de la formación del anillo externo . . . . .                                    | 70        |
| §3.5     | Conclusiones . . . . .   | 71        |
| <b>4</b> | <b>Acreción de una nube hacia un sistema estelar binario</b>                                 | <b>75</b> |
| §4.1     | Introducción . . . . .   | 75        |
| §4.2     | Problema restringido de tres cuerpos . . . . .   | 76        |
| §4.3     | Ideas básicas . . . . .  | 81        |
| §4.4     | Estimación de masas de los discos usando $C_J$ . . . . .                                     | 82        |
| §4.4.1   | Caso: Masa estrella secundaria igual a cero . . . . .  | 82        |
| §4.4.2   | Caso: Masa estrella secundaria distinta de cero . . . . .                                    | 84        |
| §4.5     | Simulaciones SPH para estimar masas de discos . . . . .                                      | 85        |
| §4.6     | Conclusiones . . . . .   | 85        |
| <b>5</b> | <b>Discusión</b>   | <b>87</b> |
| <b>6</b> | <b>Conclusiones</b>  | <b>93</b> |
| <b>A</b> | <b>Términos relevantes de la función de perturbación</b>                                     | <b>95</b> |
| <b>B</b> | <b>Formation of a Two-Ring Pattern from the Collapse of a Cloud</b>                          | <b>97</b> |
| §B.1     | Abstract . . . . .   | 97        |
| §B.2     | Introduction . . . . .   | 97        |
| §B.3     | Description of the falling of matter towards a star . . . . .                                | 100       |
| §B.4     | Analytical description of the first stage of disk formation . . . . .                        | 101       |
| §B.5     | Hydrodynamical simulation . . . . .  | 104       |
| §B.5.1   | Description of the code . . . . .  | 104       |
| §B.5.2   | Initial and boundary conditions . . . . .  | 104       |
| §B.5.3   | Results . . . . .  | 104       |
| §B.5.4   | About initial conditions and changes in the parameters . . . . .                             | 111       |
| §B.6     | Will a disk with two dense rings survive? . . . . .  | 112       |
| §B.7     | Simulation of an infinitesimal ring accumulating material inside the orbital plane . . . . . | 119       |
| §B.7.1   | Description of the system of equations and initial conditions . . . . .                      | 119       |
| §B.7.2   | Numerical solution . . . . .   | 121       |
| §B.8     | Lagrangian simulation of material in the orbital plane . . . . .                             | 121       |
| §B.8.1   | Lagrangian equations and initial and boundary conditions . . . . .                           | 122       |
| §B.8.2   | Characterization of the initial rings and rules for interaction . . . . .                    | 123       |
| §B.8.3   | Results . . . . .  | 124       |
| §B.9     | Discussion . . . . .   | 126       |
| §B.10    | Conclusions . . . . .  | 127       |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>C</b> | <b>Disk mass estimates in a binary system</b>                          | <b>131</b> |
| §C.1     | Abstract   | 131        |
| §C.2     | Ideas about disc masses  | 131        |
| §C.3     | Observational estimates of disc mass                                   | 133        |
| §C.4     | Main statements  | 134        |
| §C.4.1   | Characterization of material that falls from the cloud                 | 134        |
| §C.4.2   | Importance of angular momentum transport processes                     | 135        |
| §C.4.3   | Accretion of mass towards the star from a disc                         | 136        |
| §C.5     | Estimation of disc masses using the Jacobi constant                    | 137        |
| §C.5.1   | Main ideas regarding the Jacobi constant                               | 137        |
| §C.5.2   | Application to a rigidly rotating cloud                                | 139        |
| §C.5.3   | Restrictions due to $C_J$ in the $M_s = 0.0$ case.                     | 139        |
| §C.5.4   | Restrictions due to $C_J$ in the $M_s \ll 1.0$ case.                   | 144        |
| §C.6     | SPH simulation of accretion in the orbital plane to estimate disc mass | 146        |
| §C.7     | Conclusions  | 152        |



# Resumen

Los discos de acreción resultan un tema fundamental para la astronomía moderna debido a la relación que guardan con la formación de planetas. El modelo tradicional y más referido para la formación de planetas consiste en la acumulación de material que inicialmente se localiza en un disco, donde el material residual (gas y polvo) entre los planetas ya formados es dispersado por un viento que proviene de la estrella. El esfuerzo principal en el estudio de discos se ha concentrado en el caso de estrellas aisladas, debido a la simplicidad de un sistema con una sola estrella respecto a un sistema múltiple. Esto ha cambiado recientemente ya que los astrónomos han reconocido que una proporción apreciable (60%) de estrellas forma parte de un sistema múltiple, con lo que se reconoce que es necesario buscar modelos que puedan describir configuraciones con más de una estrella.

La instrumentación astronómica actual permite generar imágenes de discos alrededor de estrellas, aunque la resolución es aún insuficiente para identificar detalles que permitan clarificar la forma y propiedades físicas de los discos. En otros casos el disco no se resuelve pero se deduce su existencia del espectro observado mediante modelos teóricos.

El primer objetivo de esta tesis es encontrar una configuración estacionaria de un disco que se forma directamente de la acreción de material de una nube, sin imponer *a priori* características del disco. Imponiendo como condición inicial en una simulación hidrodinámica una solución de acreción balística (hipótesis válida debido a que las velocidades características son supersónicas) se encuentra una configuración estacionaria de un disco con dos anillos densos que están estacionados en radios keplerianos. Un disco con estas características difiere completamente de los modelos usados para interpretar observaciones, por lo que es razonable pensar que producirá diferencias entre los espectros de ambos casos.

Otra parte de este trabajo se centra en explorar restricciones generadas para el material que acreta hacia un sistema binario estelar, con énfasis en la extracción de información que nos permita, dentro de un cierto error, asociar material a discos circunestelares (alrededor de una estrella) y circumbinarios (rodean al sistema doble). Estas restricciones surgen al identificar al par de estrellas y a la partícula que acreta, dentro de una configuración consistente con el problema mecánico restringido circular de 3 cuerpos. Este estudio permite estimar la razón de masa entre discos circunestelares y el disco circumbinario que es consistente con estimaciones que se han hecho con otros métodos.

Finalmente, la presencia de un tercer cuerpo se trató como una perturbación a un sistema doble cuya órbita puede encontrarse analíticamente. El primer acercamiento se realizó a través de las ecuaciones planetarias de Lagrange, donde se describe la evolución en el tiempo de los parámetros orbitales que

describen la trayectoria perturbada. La aplicación de este formalismo al caso de una partícula orbitando alrededor de una de las estrellas, perturbada por la otra estrella, permite concluir, dados los términos relevantes, que una órbita originalmente circular solo se verá modificada en la cercanía de la resonancia 2 : 1.

Un paso más adelante se logró tratando el mismo problema con otro enfoque. Las ecuaciones de movimiento del problema de 3 cuerpos se expandieron en términos de un parámetro pequeño, tal que se encuentran un par de ecuaciones a cada orden. Estas ecuaciones se resuelven hasta la aproximación requerida imponiendo que las órbitas resultantes deben ser periódicas, para así obtener trayectorias que naturalmente formarán un disco. Con estas órbitas se puede encontrar una estimación de un tamaño característico para el disco, considerando que el disco termina donde órbitas contiguas empiezan a intersectarse.

La última parte de esta sección consiste en investigar perturbaciones sobre una trayectoria de acreción hacia el centro de masa del sistema binario debidas a la estrella menos masiva, en la aproximación en que la masa de esta estrella es distribuida alrededor de toda su órbita, tal que la perturbación no dependa del tiempo, esta corresponde a la perturbación secular. Promediando el efecto perturbador sobre toda la órbita se concluye que la inclinación de las órbitas varían en el tiempo tal que se produce un choque en una sección esférica del cascarón de la nube que en ese momento está acretando.

# Abstract

Accretion disks are a fundamental issue for the modern astronomy due to their relation with the formation of planets. The traditional way to describe the formation of planets states that the planets form with the accumulation of matter that was originally located in a disc, where the material that remains (gas and dust) between the already formed planets is dispersed by a wind that comes from the star. The main effort in the study of discs has been concentrated in isolated stars, due in part to the simplicity of a one-star system respect to a multiple system. Recently, the last statement has changed, because the astronomers have realized that a great proportion of the stars ( 60%) are part of a multiple system, so, it is necessary to find models that can describe more than one star configuration.

At this moment the astronomical instrumentation allows generating images of discs around stars with impressive resolution, however it is not enough for the identification of details, thus, the form and the physical properties of the discs are not clearly characterized. In other cases the disc cannot be seen, but we can argue its existence by the interpretation of the spectra with simple models.

The first purpose of this work is to find a stationary configuration of a disc directly from the accretion of material from a cloud, without an *a priori* assumption on the characteristics of the disc. We take a ballistic accretion solution as initial condition in a hydrodynamical simulation. This assumption is correct if we realize that the characteristic velocities are supersonic. The code drives the system to a stationary configuration which consists of two dense rings that sit on keplerian radii. A disc with this peculiar features completely differ from the commonly used models in the interpretation of the observations, thus it is reasonable to think that the spectra in both cases will show notorious differences.

Another part of the work focus on restrictions that can be found for the material that falls towards a stellar binary system. We restrict our work on the extraction of the necessary information required to conclude (within some limits) how much material is associated to circumstellar discs (around a star) and to the circumbinary disc (around the double-star system) respectively. These restrictions come when we identify the couple of stars and the accreting particle as a configuration consistent with the three-body restricted circular mechanical problem. This study allows to estimate the ratio between the mass of circumstellar discs and the mass of the circumbinary disc, a value that is consistent with estimations given by other means.

Finally, the existence of a third body was treated as a perturbation on the orbit of the binary system, which can be found analytically. The first approach to this problem was followed within the range of the formalism involved in the planetary equations of Lagrange. These equations describe the time evolution of the orbital parameters that characterize the disturbed trajectory. The application of this method to

the case of a particle that moves around one of the stars, disturbed by the other star, allows to say that taking into account only the main terms, an orbit originally circular can only be modified in the neighbourhood of the 2 : 1 resonance.

One more step can be made, treating the same problem with other light. The equations of motion of the 3-body problem was expanded in terms of a small parameter, finding a couple of equations for each new term on the expansion. These set of equations can be solved until we get the required accuracy, assuming that the orbits must be periodic, trajectories that naturally will form a disc. An estimation of a characteristic size of a disc can be found at the position where contiguous orbits begin to intersect.

The last part of this section describes the results of the interaction between particles falling in a known trajectory towards the center of mass of the binary system, and the less massive star. Here, we simplify the problem distributing homogeneously the star mass along the orbit, thus, the perturbation is time independent, this corresponds to the secular contribution of the perturbation. Adding the effect along the orbit, we can conclude that the orbital inclination vary in time in such a way that a shock can be produced in a spherical section on the shell of the cloud that at such time is falling.

todos los servicios de cómputo y biblioteca. Además a la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) por asignarme una beca para estudios de doctorado. En el rubro de apoyos económicos, Jorge Cantó fué esencial al tenerme como Ayudante de Investigador del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) durante tres años, ya que con ésto fué posible llegar a la otra orilla, con él estoy especialmente agradecido.

A todos mis compañeros de cubículo (Ricardo González, Alenka Negrete y Frederic Masset) por respetar el espacio común de trabajo y a todas las personas del instituto que conocí de distintas formas, con los que siempre intercambiaba alguna palabra y una sonrisa durante los obligados recorridos en los pasillos.

A mis padres, por la simple razón de permitirme existir y de permitirme estudiar e intentar una poco común profesión, por su comprensión, amor, y apoyo de todo tipo. A mis hermanas, tíos y tías por estar presentes en distintos momentos.

Finalmente y de forma muy especial a mi mujer, Leticia, que estuvo siempre presente durante épocas buenas y malas, por su paciencia y su apoyo incondicional durante todos estos años y por que la amo.

# Capítulo 1

## Introducción

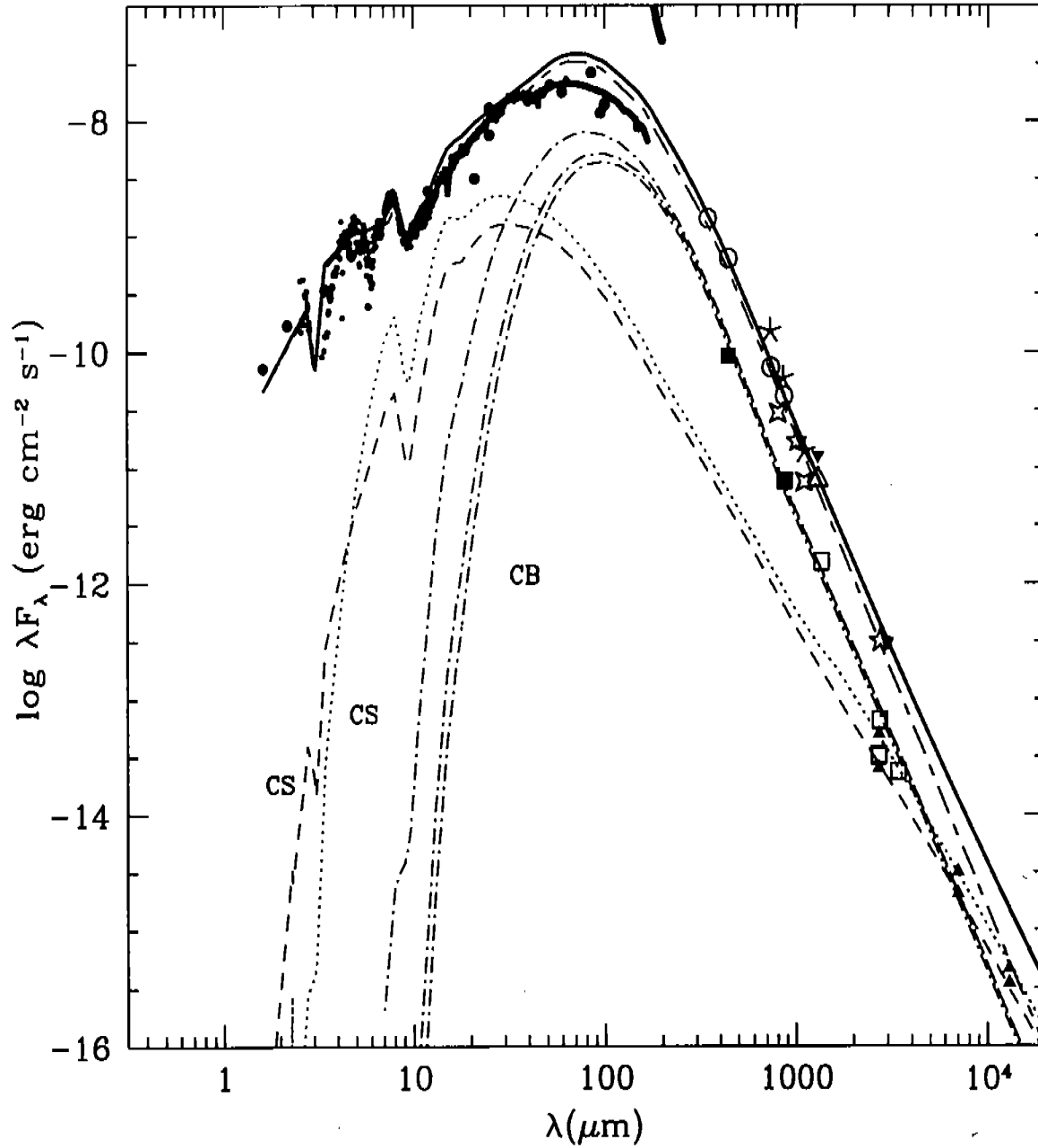
El objetivo principal de esta tesis es el estudio de discos alrededor de estrellas aisladas en etapas tempranas y de discos en sistemas binarios en órbita circular en etapas tempranas y tardías.

A lo largo de su existencia, las estrellas pasan por diferentes etapas. El interés de este trabajo se centra en las primeras etapas (nacimiento) y la última parte de la formación; esto es, cuando se detiene la caída de material de la nube protoestelar hacia el sistema.

Además del material que se encuentra altamente concentrado en forma de estrellas, existen enormes complejos de material en forma gaseosa que permea la Galaxia, la llamada "materia interestelar". La composición del material interestelar puede ir de lo complicado a lo sencillo, puede ser únicamente hidrógeno atómico, hidrógeno molecular o incluir otros elementos, además de gran variedad de moléculas, en muchos niveles de ionización.

Más del 60% se encuentran en sistemas dobles o múltiples (Duquennoy & Mayor 1991), este hecho convierte el estudio de los discos estelares en sistemas binarios, así como la posibilidad de órbitas estables en éstos que pueden ser pobladas por gas o partículas, en un elemento clave para el entendimiento de la formación estelar y planetaria. Observacionalmente existe una evidencia que apoya la presencia de partículas girando alrededor de una o ambas estrellas, éste es su espectro. El espectro electromagnético de una estrella nos da directamente información sobre su masa, temperatura superficial y edad. Algunas estrellas presentan un exceso de emisión en algunas frecuencias (infrarojo, submm, mm, radio) respecto al espectro común bien conocido de las estrellas. Una interpretación del exceso de emisión que se observa es que este surge del gas y polvo que rodea a una o ambas estrellas (Rodríguez et al. 1998, para una revisión ver Mathieu 1994 y Mathieu 2000). Un ejemplo para el que se requiere un modelo de emisión que incluya, además de la estrella, los discos y una envoltura, para poder ajustar los datos observacionales se presenta en Figura 1.1. Un argumento teórico en favor de la presencia de discos es que existen configuraciones orbitales alrededor de una o ambas estrellas que pueden sobrevivir al paso del tiempo, esto es configuraciones estables.

Dado el momento angular específico de una partícula, ésta, al ser atrapada por una estrella, naturalmente puede llegar a una configuración de mínima energía, esto es, establecerse en una órbita circular. El material puede poblar estas órbitas para formar un disco alrededor de la estrella. Para el caso de una estrella binaria, también se puede pensar en configuraciones de disco alrededor de una o ambas



**Figure 1.1:** Modelo de emisión de discos circunestelares (CE) para distintos tamaños. Emisión de discos circumbinarios (CB) para distintos radios de la frontera interna,  $R_{int}$ ; de izquierda a derecha  $R_{int} = 45 UA, 100 UA, 120 UA$ . La línea sólida corresponde a la emisión total que incluye estrella, discos y envoltente. Las figuras geométricas corresponden a datos observacionales. Agradezco a Mayra Osorio por haber elaborado esta gráfica.

estrellas, sin embargo en este caso las órbitas ya no serán circulares sino que se deformarán conforme se acerquen a la otra estrella en el caso de órbitas circunestelares o al sistema binario en el caso de órbitas circumbinarias. El estudio de estas órbitas periódicas es una buena aproximación a las líneas de corriente en un disco de acreción en un régimen de viscosidad y presión pequeñas. Estudios teóricos se han hecho en esta dirección (Lubow & Shu 1975; Paczyński 1977; Papaloizou & Pringle 1977; Rudak & Paczyński 1981; Bonnell & Bastien 1992, Bate 1997; Bate & Bonnell 1997).

Una forma de atacar este problema es que se considere una órbita circular no perturbada girando alrededor de una o ambas estrellas y la presencia de la otra estrella se considere como una perturbación. El formalismo tradicional del estudio de órbitas perturbadas gravitacionalmente por un objeto masivo se basa en la expansión del potencial de perturbación en función de los elementos orbitales de ambas órbitas. Otro enfoque (ver Sección §2.3) es simplemente expandir las ecuaciones de movimiento en términos de un parámetro pequeño, resolviendo las ecuaciones diferenciales resultantes. Las expresiones analíticas que resulten permitirán construir las órbitas alrededor de cada una de las componentes del sistema, información que permite estimar un tamaño típico para los discos circunestelares. De igual forma se pueden tratar las órbitas que rodean a todo el sistema (ver Sección §2.4), estimando en este caso la dimensión radial del borde interno del disco circumbinario. El borde externo de éste se estima con la información del máximo momento angular específico del material que se deposita en el disco proveniente de la nube.

Una cota máxima al tamaño de los discos circunestelares se encuentra en Eggleton (1983). Holman & Wiegert (1999) estiman el tamaño en discos planetarios y Pichardo, Sparke & Aguilar (2005) en discos asociados a estrellas binarias excéntricas. A diferencia de Holman & Wiegert (1999) y Pichardo, Sparke & Aguilar (2005), que se basan en órbitas construidas numéricamente, en este trabajo el análisis se desarrolla sobre órbitas descritas analíticamente, para el caso particular de estrellas binarias circulares.

La relevancia de este trabajo es que no únicamente encuentras el tamaño de los discos sino que se describen razonablemente órbitas a cualquier radio. Las expresiones analíticas con las que se construye la órbita pueden ser usadas como condición inicial en simulaciones hidrodinámicas o balísticas.

Regresando a la etapa inicial del colapso, un problema que surge es cuantificar la influencia gravitacional de una estrella secundaria sobre la órbita de acreción de una partícula que acreta de la nube hacia la estrella central, ver Sección §2.5. En este caso la órbita es una parábola, que debido a su excentricidad alta invalida todas las expansiones que se hacen en términos de los elementos orbitales. La idea que se persigue es la de estimar las fuerzas externas (con la estrella en el plano orbital) sobre la partícula que se perturba, que directamente modifican los elementos orbitales. Estos cambios alteran una configuración no perturbada de órbitas que no se intersectan a una de órbitas con posibilidades de intersectarse entre ellas. La identificación de la localización de estos choques permite estimar cualitativamente la modificación de las órbitas hacia órbitas asociadas a la acreción de material hacia un sistema binario.

La teoría más aceptada para la formación de estrellas es el colapso gravitacional de material dentro de una región suficientemente densa de la nube molecular. Este colapso se debe a la autogravedad del gas y polvo que contiene la región. Al aumentar el contraste de densidad entre la región en colapso y los alrededores, la aglomeración de material se hace más efectiva hasta llegar a valores de densidad para los



cuales ya se puede hablar de una protoestrella. Este colapso se detendrá cuando los mecanismos que se oponen a la caída sean suficientemente fuertes para contrarrestarlo. Los dos mecanismos importantes que actúan en esta dirección ocurren al momento en que la estrella comienza la ignición de hidrógeno, es decir, cuando la densidad y temperatura son suficientemente altas como para fusionar elementos (p.ej. hidrógeno en helio), con la consecuente generación de energía termonuclear que producirá la energía térmica necesaria para oponerse al colapso.

El siguiente mecanismo tiene que ver con un fenómeno muy estudiado pero poco entendido en las estrellas (o protoestrellas), que es la presencia de vientos que emanan de la superficie estelar, que chocan con el material que sigue cayendo y que por lo tanto ayudan a frenarlo.

En esta trabajo el estudio se centrará en la etapa más temprana del colapso, cuando los dos mecanismos opuestos mencionados todavía no están presentes o su contribución no es apreciable. Así, el ingrediente preponderante en este estudio es la fuerza gravitacional de la(s) estrella(s) sobre material alrededor de ella(s). El problema que se propone resolver es el siguiente: el material cae de la nube hacia la estrella, si se supone que las partículas traen consigo momento angular entonces se espera que éstas no se depositen directamente sobre la estrella sino que su caída forme un disco alrededor de la estrella. ¿Cuál es la evolución de este material en el plano orbital? Al caer sobre este plano, cada partícula perderá energía, lo que directamente modificará su órbita. El estudio que entonces se plantea es el de seguir dinámicamente todo el conjunto de partículas, tratando de identificar patrones peculiares en el disco, que puedan interpretarse como firmas de estrellas con discos, durante el proceso de formación de estos últimos, los cuáles pueden ser corroborados observacionalmente. El objetivo principal es encontrar una configuración estacionaria que proporcione elementos para justificar que el disco pueda sobrevivir durante el periodo de formación de la estrella. En este momento vale la pena aclarar que la estrella y el disco se forman simultáneamente, de tal forma que las masas de ambos elementos crecerán proporcionalmente con el paso del tiempo.

La forma de enfrentar este problema se centra en desarrollar una simulación hidrodinámica (ver Capítulo 3), donde la fuerza principal provenga de la gravedad del objeto central. Como esta fuerza dominará a todas las demás contribuciones: autogravedad, variaciones en el término de presión debido a cambios en la termodinámica del gas, etc., entonces una simulación sin autogravedad, axisimétrica e isoterma, generará resultados que muestran las características globales de este sistema. Los efectos debidos a cambios de temperatura serán importantes en una etapa posterior a la formación del disco, al incluir efectos como la radiación de la estrella y el calentamiento viscoso. Cuando la masa del disco sea comparable con la masa de la estrella entonces la autogravedad será importante, sin embargo el caso que aquí se estudia es el de un disco poco masivo. En conclusión, agregar el resto de los ingredientes, únicamente alteraría los detalles del disco, la autogravedad comprimiría condensaciones, gradientes en la temperatura cambiarían el tamaño vertical y radial de estas regiones densas; en general se reflejarían en modificaciones en las dimensiones espaciales del disco. La formación del anillo denso se puede atacar analíticamente dentro del formalismo de la mecánica. Si los resultados son similares entonces se puede considerar que las suposiciones en la simulación hidrodinámica están bien sustentadas, al menos en la preponderancia de la fuerza gravitacional del objeto central respecto al resto de las contribuciones.

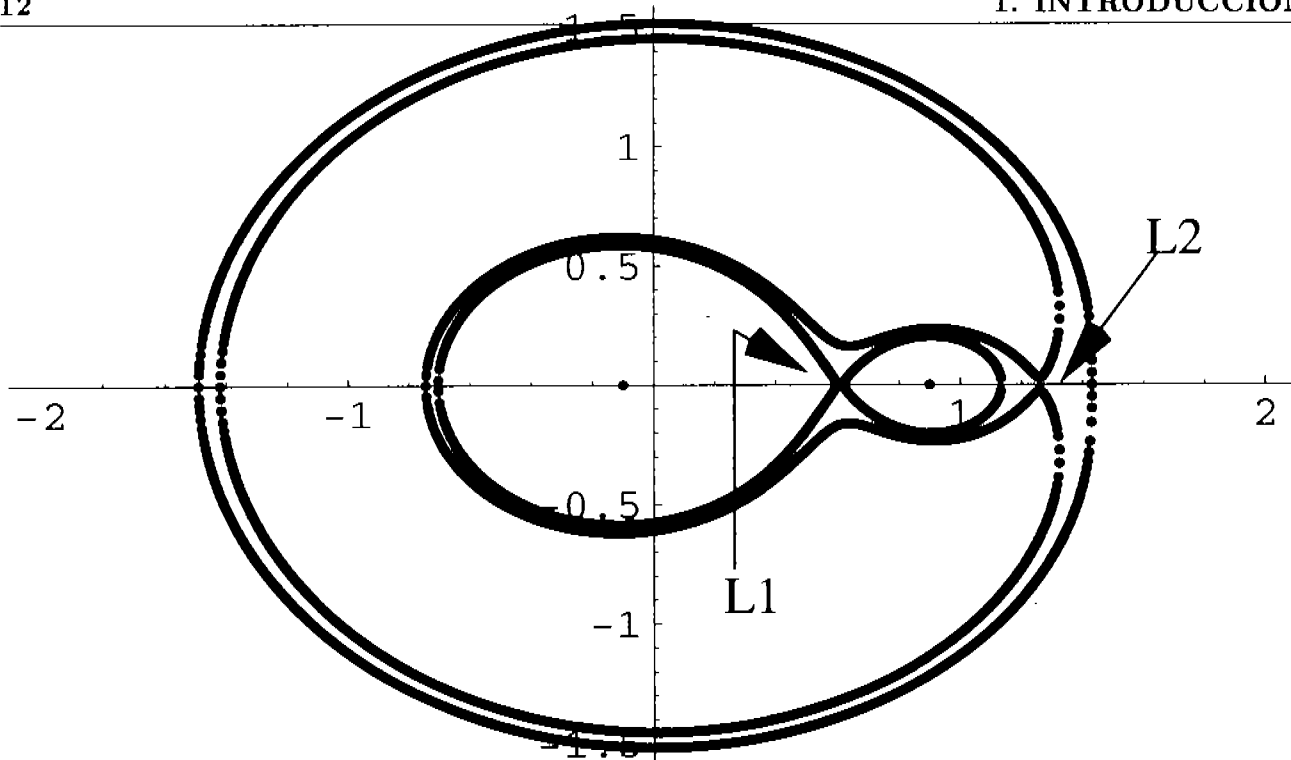
La simulación hidrodinámica proporciona una configuración para un disco alrededor de una estrella

que puede considerarse como un estado no perturbado que puede someterse a una perturbación producida por la cercanía con otro objeto masivo. Podemos pensar este sistema como formado de tres cuerpos, la estrella más masiva donde originalmente se forma el disco, la estrella que perturba y la partícula que evoluciona debido a la influencia gravitacional de ambas masas. Si se tiene un disco poco masivo y la masa de la partícula es despreciable respecto a la masa de las estrellas entonces este sistema se reduce al problema restringido de 3 cuerpos. En otras palabras, la órbita de las estrellas no se modifica por la fuerza de gravedad de la partícula.

En el caso de una binaria en órbita circular existe una cantidad conservada, que se le conoce como la constante de Jacobi, cantidad que depende de la velocidad y posición de la partícula en cuestión. Para el caso de un fluido la cantidad que se conserva es la constante de Bernoulli, que depende de la constante de Jacobi y del estado termodinámico del fluido. La importancia de tener una integral de movimiento es que establece restricciones al movimiento. Dado su valor ésta define regiones permitidas para la partícula. Con esto en cuenta el objetivo es buscar condiciones para las que se pueda restringir el material que cae de la nube para formar el disco, ya sea a discos circunestelares o a discos circumbinarios (ver Capítulo 4). La idea es partir de la evolución temporal del material en el disco, que se observa en la simulación hidrodinámica, en paralelo seguir la evolución de las fronteras que separan las regiones permitidas de las prohibidas.

En la constante de Jacobi ( $C_J$ ) aparece el término  $-v^2$ , donde  $v$  es la magnitud de la velocidad. Este valor es negativo para velocidades positivas y positivo para velocidades imaginarias. Como el primer caso representa un estado físicamente posible y el segundo corresponde a una situación imposible, entonces la superficie en el espacio definida con el caso  $v = 0$  separa las regiones permitidas y prohibidas y se le conoce como superficie de velocidad cero o curva de velocidad cero al restringirnos al plano orbital, como se hará en el resto del trabajo.

Con estas fronteras es posible identificar configuraciones para las cuales cierta región del disco queda restringida a vivir alrededor de una de las estrellas y que otra sección del mismo evita quedar atrapada y escapa hacia la región circumbinaria. Dos motivos nos inducen a pensar en esta posibilidad. La forma de las curvas de velocidad cero para valores grandes de  $C_J$  se parecen a una configuración de discos en un sistema binario. Existe una curva alrededor de cada una de las estrellas de forma casi-circular, además de una curva que rodea a todo el sistema que es prácticamente indistinguible a una circunferencia, ver Figura 1.2. La región permitida está localizada alrededor de cada una de las estrellas o alrededor de ambas componentes. En otra palabras, si las partículas tienen valores de  $C_J$  mayores a  $C_{L1}$  entonces éstas solo tienen dos posibilidades, vivir alrededor de una de las estrellas o alrededor de ambas, dicho de otra forma, estará localizada en discos circunestelares o circumbinarios. El valor  $C_{L1}$  se refiere a la constante de Jacobi cuya curva de velocidad cero contiene el punto lagrangiano  $L1$ , ver Figura 1.2 donde también se presenta la curva de velocidad cero asociada al punto lagrangiano  $L2$ . En un punto lagrangiano la velocidad y aceleración de una partícula son cero. El comportamiento que se requiere para completar esta imagen es que los valores típicos de  $C_J$  en las regiones de interés logren crecer lo suficiente para que este mecanismo sea aplicable. Recordemos que si  $C_J$  se modifica en algún momento en particular, las implicaciones de la integral de movimiento se siguen satisfaciendo pero para un valor distinto de esta variable. En el caso que aquí atañe, la única influencia es que la forma de la curva de



**Figure 1.2:** Las curvas representan las curvas de velocidad cero en el plano orbital para  $C_J = C_{L1}$  (la curva mas interna y la más externa) y para  $C_J = C_{L2}$  (la curva intermedia).  $L1$  y  $L2$  son los respectivos puntos lagrangianos.

velocidad cero cambia en el tiempo. El hecho de que la  $C_J$  se modificará en una posición dada al existir interacciones que modifiquen la velocidad, agregando además que el proceso natural es que la velocidad disminuye como en cualquier proceso disipativo, entonces la tendencia de  $C_J$  irá en el sentido correcto, aumentará de valor. En conclusión, la disipación que sufrirá el material que cae y evoluciona en el plano orbital promoverá que  $C_J$  aumente, lo que justifica la búsqueda de una configuración que naturalmente restrinja al material en discos circunestelares o circumbinarios.

La idea para atacar este problema es extraer información de la simulación hidrodinámica en el plano orbital e imponer las restricciones que surgen del problema restringido de tres cuerpos a través de la constante de Jacobi, para asociar material en discos circunestelares y circumbinarios. Sin embargo, al utilizar los resultados del sistema con una estrella, en el caso binario, obliga a considerar que la estrella secundaria es mucho menos masiva que la primaria, tal que se considere como una perturbación.

La utilización de la constante de Jacobi da entonces la posibilidad de poner cotas al movimiento. Sin embargo, para corroborar que tiene sentido extender el problema de una estrella al de dos, aún para el caso de una estrella secundaria muy poco masiva, se requiere una simulación de la evolución dinámica de partículas en el plano orbital, considerando la presencia de la segunda estrella. La condición inicial proviene de Ulrich (1976), trabajo que presenta una solución para el problema de acreción de material de una nube que rota rígidamente hacia un objeto central. Si se restringen las expresiones de velocidad y densidad al plano orbital entonces se llega a una condición inicial razonable para el caso de una estrella secundaria muy poco masiva. El parámetro importante que caracteriza cada simulación es la razón entre la separación entre las estrellas ( $a$ ) y el radio del disco ( $R_d$ ).  $R_d$  depende de las características

de la nube y principalmente del máximo momento angular específico de ésta (ver Sección §C.6). Un sistema binario es capaz de contener cierta cantidad de momento angular del material que acreció de la nube, que depende de  $a$ , además  $R_d$  depende de la distribución de momento angular de la misma nube; por lo tanto  $a$  y  $R_d$  estarán de alguna forma conectados. Para que tenga sentido que material se asocie a discos circunestelares y circumbinarios,  $a < R_d$ . Una estimación de la razón entre estas dos cantidades, despreciando procesos de transporte de momento angular en la nube que está acreciendo indica que  $a/R_d$  es mayor a uno, por lo tanto de entrada se debe suponer que existen estos mecanismos, tal que menor o mayor importancia de éstos generarán un intervalo de valores razonables de  $a/R_d$ . La idea es realizar una simulación con distintos valores de  $a/R_d$  y buscar en cada caso la fracción de material que se localiza en un disco circunprimario (la masa del disco circunsecundario se desprecia en esta aproximación) y la asociada a un disco circumbinario. La razón entre estas masas se compara con resultados de la literatura. El resultado presentado se busca conectar con las ideas asociadas a la conservación de  $C_J$  en el problema restringido circular de tres cuerpos.

En esta tesis se estudia la formación de discos en sistemas estelares aislados y binarios. Se estudia también, desde un punto de vista analítico, una etapa posterior donde el material ya se ha establecido en órbitas circulares, perturbadas por la presencia de una segunda estrella. La investigación se separó en dos partes principales, la primera se dedica al estudio de un disco alrededor de una estrella aislada y la segunda analiza los discos alrededor de las componentes estelares de un sistema binario circular, además del disco que rodea a las dos estrellas. La etapa que se estudia en la primer parte es la formación del disco debido al colapso de la nube mediante una simulación hidrodinámica. Esto con el objetivo de caracterizar a un disco en la etapa temprana. Con la información que se extrae de este proceso se plantea el problema de la formación de discos en un sistema binario para el caso de una estrella secundaria mucho menos masiva que la estrella primaria. Esto permite estimar la masa de discos circunestelares respecto a discos circumbinarios. La última parte de este trabajo estudia configuraciones orbitales para partículas que se mueven bajo la influencia del potencial gravitacional de dos estrellas, con el objetivo de estimar el tamaño de los discos. Esta investigación en sistemas binarios es la contraparte de una configuración de órbitas keplerianas alrededor de una estrella aislada. La organización de esta investigación se muestra a continuación.

El capítulo 2 plantea la teoría de perturbación clásica donde las órbitas se expresan en términos de los elementos orbitales. Una teoría de perturbación que directamente se expresa en el espacio de coordenadas, es decir, las coordenadas son perturbadas en lugar de los elementos orbitales; permite complementar el estudio anterior para el caso de órbitas circunestelares y circumbinarias perturbadas por otra estrella. El capítulo 3 se basa en una simulación hidrodinámica de la acreción de material de una nube hacia una estrella cuyo resultado es la formación de un disco estacionario que consta de dos anillos densos. El capítulo 4 explora los detalles de la evolución que sigue el material para la formación del patrón estacionario que se extrae de la simulación hidrodinámica, para el caso de la formación de discos en un sistema binario. La presencia de una estrella secundaria se considera como perturbación al caso de un disco con una sola estrella.

## Capítulo 2

# Orbitas perturbadas

### §2.1 Introducción

Sin duda el problema de mecánica celeste de solución más fácil es la descripción del movimiento de dos masas puntuales (planetas, estrellas, satélites) bajo el efecto de su campo gravitatorio, este problema es integrable, por lo que puede resolverse por cuadraturas. Irónicamente al agregar otro objeto masivo, el problema se vuelve no integrable. Una forma de atacar un problema no integrable es con un enfoque perturbativo. Sin embargo, el problema principal es que una solución en series que se extrae de un método perturbativo, en general no es convergente. Para el problema gravitacional de tres cuerpos, Poincaré en el Siglo XIX demostró que no hay forma de encontrar una solución en series convergente (Tabor 1989). El problema principal es que para ciertas posiciones de las partículas existen divisores que tienden a cero en los coeficientes de la serie, lo que invalida el propio método. A este problema Poincaré le llamó "el problema fundamental". Bruns demostró (Tabor 1989) que configuraciones en el espacio fase para las cuáles la solución en serie para la trayectoria de la partícula es absolutamente convergente y configuraciones donde la serie no es convergente se encuentran arbitrariamente cercanas. Esto quiere decir que la serie no es continua. Como la continuidad es un prerequisite dentro del marco del método perturbativo entonces la solución no necesariamente representa el movimiento real. El "problema fundamental" tuvo que esperar hasta principios de la década de los 60's para que Kolmogorov, Arnold y Moser (KAM) lo resolvieran. En pocas palabras se demostró que si la parte no integrable del Hamiltoniano es suficientemente pequeña entonces soluciones periódicas descritas en el espacio fase del sistema perturbado están cercanas a la solución del problema integrable. Esto permite tener confianza en las soluciones en serie obtenidas por un método perturbativo. Sin embargo, es bueno señalar que en ciertas configuraciones espaciales para el sistema de tres cuerpos, la solución no es convergente.

En la Sección §2.2 se desarrolla un enfoque muy utilizado, el cuál consiste en caracterizar la órbita con parámetros asociados a una cónica (semieje mayor, excentricidad, etc.) y parámetros que tienen que ver con su ubicación en el espacio (inclinación de la órbita, ángulo azimutal donde el plano orbital se inclina, etc.). Hay que recordar que las órbitas en el problema gravitacional de dos cuerpos son cónicas y que el movimiento está restringido a un plano. Considerando la perturbación por un tercer cuerpo, los parámetros orbitales se modificarán en el tiempo (ver Sección §2.2.4), tal que a cada tiempo

se coloca a la partícula en una distinta configuración caracterizada por nuevos parámetros orbitales. Este formalismo es válido para excentricidades e inclinaciones pequeñas, lo que restringe su aplicación a casos muy particulares.

Con este formalismo se analiza la perturbación de una estrella secundaria en un sistema binario circular sobre una partícula girando en una circunferencia alrededor de la estrella primaria. La conclusión que se obtiene es que los términos relevantes del potencial perturbador, es decir, términos de periodo largo (seculares y resonantes) tienen poca influencia para perturbar órbitas circunprimarias. Únicamente en la posición de la resonancia 2:1 existe posibilidad de modificar las órbitas tal que se produzca una región con fuertes interacciones que eventualmente puedan trincar el disco en esa posición.

En las Secciones §2.3 y §2.4 se desarrolla una forma de calcular órbitas periódicas circunestelares y circumbinarias al expandir las ecuaciones de movimiento en términos de un parámetro pequeño. Resolviendo las ecuaciones diferenciales a cada orden, se puede construir la posición radial y angular de la órbita perturbada al orden de aproximación que se requiera. Dada una aproximación lineal en el radio se puede estimar la órbita más interna (para material circunestelar) y la órbita más externa (para material circumbinario) que intersecta a la órbita vecina. Esta órbita representará una estimación del tamaño de los discos, usando la restricción de que las órbitas deben ser estables.

El objetivo del trabajo que se presenta en las Secciones §2.3 y §2.4 es comparar las expresiones analíticas aquí encontradas con órbitas encontradas numéricamente, al resolver directamente las ecuaciones de movimiento.

Atacar el problema de perturbar una órbita parabólica, la cuál caracteriza la trayectoria de una partícula que acreta de una nube en rotación hacia un objeto central, requiere otro tipo de formalismo, el cuál se presenta en la Sección §2.5. El proceso que se sigue es el calcular explícitamente la fuerza que produce la estrella secundaria, considerando que la masa la distribuyo uniformemente alrededor de la órbita, para después estimar la influencia en los parámetros orbitales. La inclinación es el parámetro que se modificará, generándose un choque al radio donde inicia la acreción, en una sección de la esfera determinada por un intervalo en el ángulo  $\theta$  para todo ángulo azimuthal  $\phi$ . Estos ángulos se muestran gráficamente en la Figura 2.1.

Finalmente, la Sección §2.6 brevemente muestra las conclusiones finales.

## §2.2 Función perturbadora

La descripción del problema de 2 cuerpos, donde la única fuerza presente es la fuerza gravitacional que ejerce cada partícula sobre la otra se conoce desde mucho tiempo atrás. En este caso las trayectorias posibles son cónicas alrededor del centro de masa del sistema doble. El hecho de considerar la contribución de otra masa transforma al problema en no integrable. La forma tradicional de atacar este problema es considerar que la tercer masa genera un potencial que perturba la solución conocida para el problema de dos cuerpos.

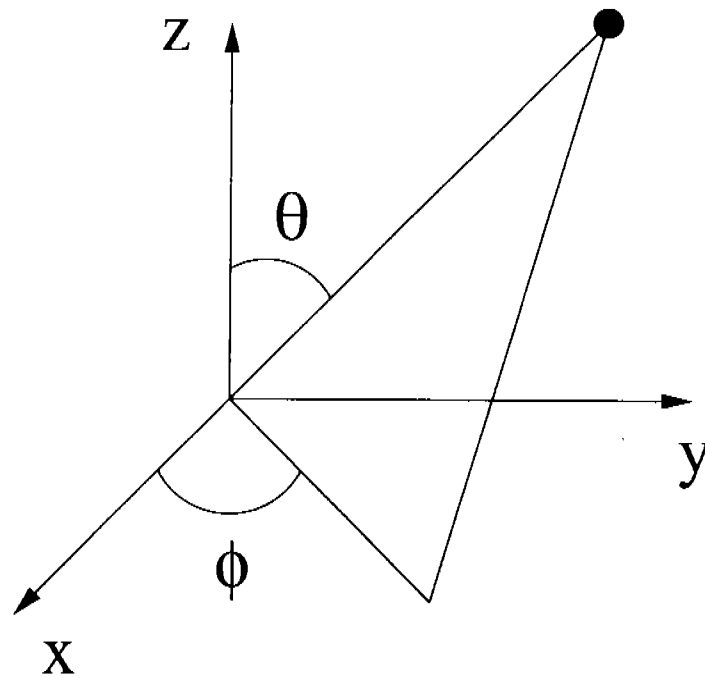


Figure 2.1: Diagrama en el que se muestran los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ , respecto al sistema de coordenadas cartesiano.

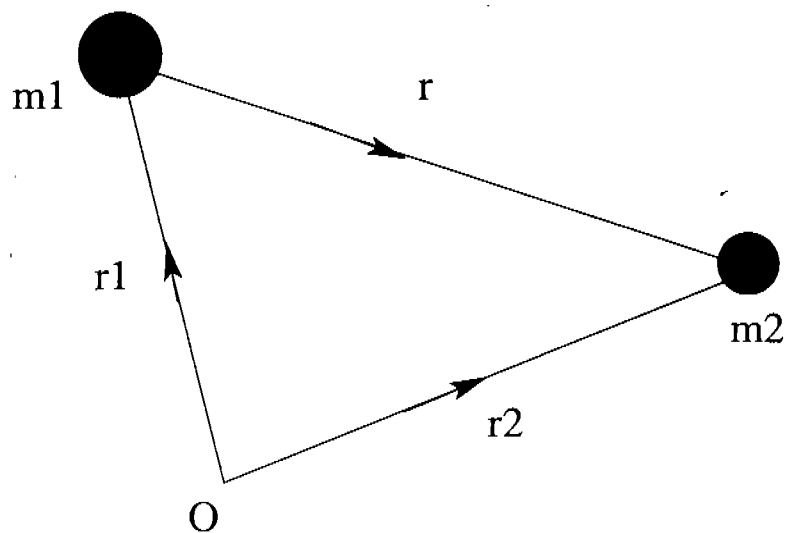


Figure 2.2: Diagrama del sistema coordinado para el problema de 2 cuerpos, ver texto para definición de variables

### §2.2.1 Problema mecánico de 2 cuerpos

En esta parte se analizará someramente el problema gravitacional de 2 cuerpos dada su importancia en este trabajo. El sistema consta de dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  que se encuentran en posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  respectivamente, referidas a un origen fijo en el sistema inercial, ver Figura 2.2. Las ecuaciones de movimiento que rigen la evolución de cada una de las partículas están dadas por:

$$F_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1, \quad (2.1)$$

$$F_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2, \quad (2.2)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  es la posición relativa de la masa  $m_2$  respecto a  $m_1$ . Las ecuaciones (2.1 y 2.2) pueden sumarse e integrarse un par de veces para obtener

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_1 + m_2}, \quad (2.3)$$

donde  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  contienen las constantes de integración y  $\vec{R}$  está definido como  $\vec{R} = \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{(m_1 + m_2)}$ , denotando la posición del centro de masa. Esto indica que el centro de masa se mueve con velocidad constante. La parte restante requerida para terminar de describir el movimiento proviene de la solución de la ecuación del movimiento relativo, que puede escribirse usando las ecuaciones (2.1 y 2.2) como:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad (2.4)$$

donde  $\mu = G(m_1 + m_2)$ . Para buscar una solución es útil encontrar alguna otra integral de movimiento. Si se multiplica vectorialmente la ecuación (2.4) con  $\vec{r}$ , se concluye que  $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0$  puede ser integrado directamente para obtener

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = cte, \quad (2.5)$$

donde  $\vec{h}$  es el momento angular orbital específico y es perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\dot{\vec{r}}$ . Esto directamente indica que el movimiento de ambas partículas está restringido a un plano fijo, que se conoce como plano orbital. Al quedar restringido el movimiento a un plano, se puede describir en coordenadas polares  $(r, \theta)$ . Si  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  son los vectores unitarios a lo largo y perpendicular al radio vector  $\vec{r} = r\hat{r}$ , los vectores velocidad y aceleración pueden escribirse de la siguiente manera

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (2.6)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en (2.5) se obtiene:

$$\vec{h} = r^2\dot{\theta}\hat{z}, \quad (2.8)$$



donde  $\hat{z}$  es un vector unitario perpendicular al plano orbital. La ecuación (2.7) puede sustituirse en la ecuación (2.4) para obtener

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.9)$$

Para resolver  $r$  en términos de  $\theta$  es necesario hacer el cambio de variable  $u = 1/r$  y eliminar el tiempo en favor de  $\theta$  haciendo uso de la constante  $h = r^2\dot{\theta}$ . De esta manera la ecuación (2.9) se puede escribir como:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}, \quad (2.10)$$

cuya solución general es

$$u = \frac{\mu}{h^2}[1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})], \quad (2.11)$$

donde  $e$  y  $\bar{\omega}$  son las constantes de integración. La ecuación (2.11) puede escribirse en función de  $r$ , como:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})}, \quad (2.12)$$

con  $p = h^2/\mu$ . Esta es la forma general de una cónica, si se nombra a la constante  $e$  como la excentricidad. Así,  $e = 0$  representa una circunferencia,  $0 < e < 1$  se refiere a una elipse,  $e = 1$  es una parábola y  $e > 1$  es la hipérbola. El valor de  $p$  varía según la cónica que se está tratando;  $p = a$  es para la circunferencia,  $p = \pm a(1 - e^2)$  corresponde a una elipse e hipérbola respectivamente, mientras que para una parábola  $p = 2q$ . La cantidad  $a$  es el semieje mayor y  $q$  es la distancia de mayor acercamiento entre los dos cuerpos, para el caso de una parábola.

Para describir el problema en función del tiempo se requiere una expresión que lo involucre, la cual está dada por la 3a. ley de Kepler, áreas iguales se recorren en tiempos iguales. Otra integral de movimiento se puede encontrar si se multiplica escalarmente la ecuación (2.4) por  $\vec{r}$  y si se sustituyen las ecuaciones (2.6 y 2.7), con lo que se obtiene

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\dot{r}}{r^2} = 0, \quad (2.13)$$

que puede integrarse para obtener

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = E = cte, \quad (2.14)$$

relación que directamente dice que la energía orbital es constante.

Ahora se define  $f = \theta - \bar{\omega}$  como la anomalía verdadera, notando además que  $\dot{\theta} = \dot{f}$ . Un diagrama que muestra los elementos orbitales se presenta en Figura 2.3. Usando estas expresiones junto con la ecuación (2.6) y la definición  $h = r^2\dot{f}$  se puede encontrar que

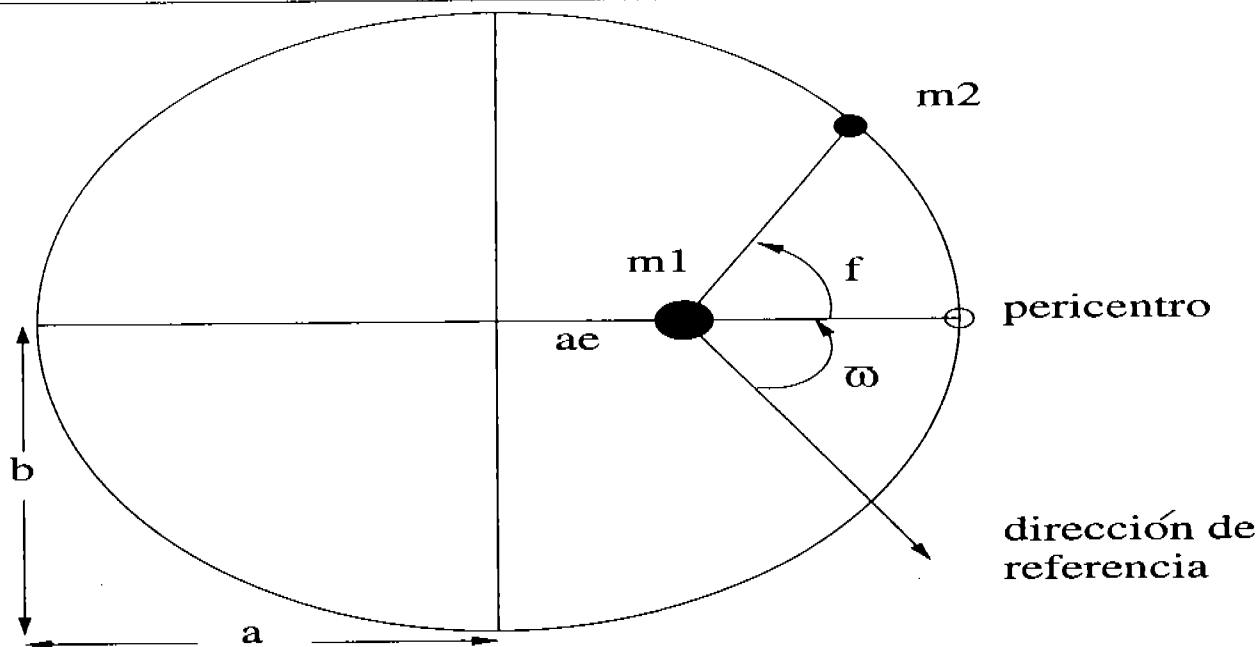


Figure 2.3: Diagrama que muestra los elementos orbitales de una órbita elíptica: excentricidad  $e$ , semieje mayor  $a$ , semieje menor  $b$ , anomalía verdadera  $f$ , longitud de pericentro  $\omega$ .  $m$  representa la posición de una partícula sobre la curva.

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (2.15)$$

al diferenciar la ecuación (2.12). Comparando las ecuaciones (2.14 y 2.15) se puede concluir que

$$E_{\text{elipse}} = -\frac{\mu}{2a}, \quad (2.16)$$

$$E_{\text{parábola}} = 0, \quad (2.17)$$

$$E_{\text{hipérbola}} = \frac{\mu}{2a}, \quad (2.18)$$

para la energía asociada a una partícula moviéndose a lo largo de una elipse, parábola e hipérbola, respectivamente. Es importante resaltar que al cambiar la energía externamente de valores negativos a positivos, se modifica la trayectoria de una elipse a una hipérbola.

### §2.2.2 Problema mecánico de 3 cuerpos

Las masas de los tres cuerpos se expresan como  $m_c, m_i$  y  $m_j$ , tal que  $\vec{R}_c, \vec{R}_i, \vec{R}_j$  son los radio vectores de un origen fijo hasta la posición de cada uno de los cuerpos, respectivamente. El subíndice "c" etiqueta a la partícula central, la más masiva. Respecto a la posición de la masa central, se definen los vectores de posición  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$ , que localizan a las masas  $m_i$  y  $m_j$ , respectivamente. Un diagrama del sistema coordinado se muestra en la Figura 2.4.

Utilizando la segunda ley de la gravitación de Newton se pueden escribir las ecuaciones de movimiento asociadas a cada una de las tres partículas de la siguiente manera;

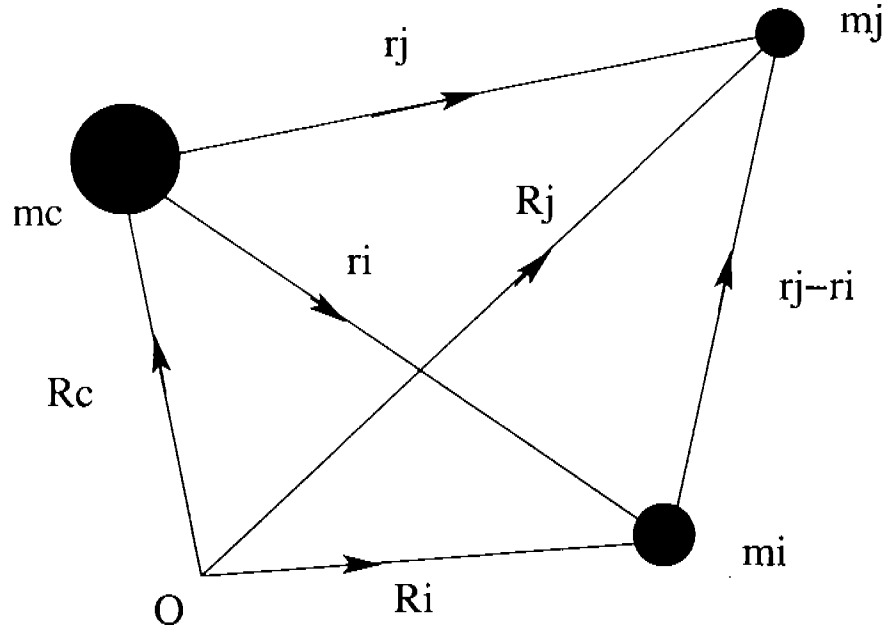


Figure 2.4: Diagrama del sistema coordinado para el problema de 3 cuerpos, ver texto para definición de variables

$$m_c \ddot{\vec{R}}_c = Gm_c m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + Gm_c m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad (2.19)$$

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = Gm_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - Gm_i m_c \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}, \quad (2.20)$$

$$m_j \ddot{\vec{R}}_j = Gm_j m_i \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - Gm_j m_c \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad (2.21)$$

donde  $r_i$  y  $r_j$  representan las normas de los vectores  $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_j$  respectivamente, y  $G$  es la constante de la gravitación universal. De las definiciones se puede despejar  $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}_c$ , además de  $\vec{r}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_c$ , con lo que se reescriben las ecuaciones anteriores como,

$$\ddot{\vec{r}}_i + G(m_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = Gm_j \left( \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (2.22)$$

$$\ddot{\vec{r}}_j + G(m_c + m_j) \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} = Gm_i \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (2.23)$$

que pueden reorganizarse de la siguiente forma;

$$\ddot{\vec{r}}_i = \nabla_i(U_i + R_i), \quad (2.24)$$

$$\ddot{\vec{r}}_j = \nabla_j(U_j + R_j), \quad (2.25)$$

donde

$$U_{i,j} = G \frac{(m_c + m_{i,j})}{r_{i,j}}, \quad (2.26)$$

es el potencial gravitacional asociado al problema de 2 cuerpos, considerando a la masa central y a cada una de las otras dos masas,  $m_i$  y  $m_j$  respectivamente. Los términos

$$R_i = \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} - Gm_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3}, \quad (2.27)$$

$$R_j = \frac{Gm_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - Gm_i \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_i^3}, \quad (2.28)$$

son conocidos como la función de perturbación y corresponden al potencial gravitacional que surge de la presencia del tercer cuerpo. Las ecuaciones (2.22) y (2.23) son equivalentes una a la otra si se intercambian los subíndices  $i$  y  $j$ . En otras palabras la ecuación (2.22) (la ecuación 2.23) describe la modificación de la órbita alrededor del centro de masa asociado a la masa central y a la partícula  $i$  ( $j$ ) debido a la perturbación por la partícula  $j$  ( $i$ ). Si se considera al sistema que contiene a la partícula prueba (masa  $m$ ) y a la partícula central (masa  $m_c$ ), que giran en trayectorias cónicas alrededor de su centro de masa como el problema no perturbado y a la partícula de masa  $m'$  como la masa perturbadora, se puede describir la trayectoria perturbada de la partícula prueba con la siguiente ecuación:

$$\ddot{\vec{r}} + G(m_c + m) \frac{\vec{r}}{r^3} = Gm' \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right), \quad (2.29)$$

que es válida para  $r < r'$ , donde  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  representan las posiciones de las masas  $m$  y  $m'$  respectivamente. Por lo tanto, la función de perturbación se puede escribir como:

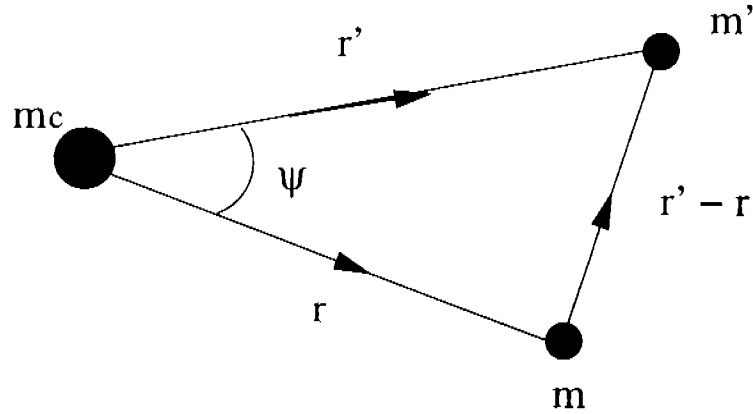
$$R = \frac{\mu'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3}, \quad (2.30)$$

donde  $\mu' = Gm'$ . Los elementos orbitales de la trayectoria no perturbada satisfacen la tercera ley de Kepler, que se puede expresar como  $n^2 a^3 = G(m_c + m)$ , donde  $n$  es la velocidad angular promedio y  $a$  es el semieje mayor de la órbita, una circunferencia o elipse. Si ahora la partíprueba es la perturbadora y viceversa, entonces la ecuación de movimiento que describe al vector de posición  $\vec{r}'$  se encuentra cambiando cantidades primadas por no primadas y viceversa en la ecuación 2.30.

### §2.2.3 Expansión en elementos orbitales

En el resto de la sección, la estrella secundaria corresponde a la masa perturbadora ( $m'$ ), la estrella primaria de masa  $m_c$  y la partícula de prueba de masa  $m$ , que se le llamará partíde polvo; caracterizan al sistema no perturbado.

La expresión para  $R$  dada por la ecuación (2.30) depende de la masa de la estrella secundaria y de la posición respectiva de esta misma estrella con la partícula de polvo, ver Figura 2.5. Este es un problema que depende de la configuración espacial del sistema que a su vez depende del tiempo, lo que indica que es un potencial no trivial. Reescribamos la ecuación (2.30) de la siguiente forma



**Figure 2.5:** Diagrama del sistema coordinado para el problema de 2 cuerpos perturbado por un tercero, ver texto para definición de variables

$$R = \frac{\mu'}{a'} R_D + \frac{\mu'}{a'} \alpha R_E, \quad (2.31)$$

donde

$$R_D = \frac{a'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}, \quad (2.32)$$

$$R_E = -\left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos \psi, \quad (2.33)$$

$$\alpha = \frac{a}{a'}, \quad (2.34)$$

además  $\psi$  es el ángulo subtendido por los dos vectores de posición. Aquí,  $a$  y  $a'$  son los semiejes mayores de la órbita asociada a la estrella primaria y la partícula de polvo y a la órbita asociada a ambas estrellas, respectivamente. El siguiente paso es buscar una expansión en términos de los elementos orbitales de ambas trayectorias. En el caso en que ambas órbitas se encuentran a todo tiempo en el mismo plano, los elementos orbitales que caracterizan a éstas son  $a, e, \bar{\omega}$  y  $\lambda$ , con versiones primadas para la órbita de la partícula perturbadora. Donde  $e$  representa la excentricidad;  $\bar{\omega}$  es un ángulo llamado longitud de pericentro, que equivale a los radianes entre una dirección de referencia y el pericentro (posición de la órbita de mayor acercamiento al foco); finalmente  $\lambda$  se conoce como longitud promedio y se define como  $\lambda = M + \bar{\omega}$ , donde  $M = n(t - \tau)$  y la constante  $\tau$  es el tiempo al que la partícula pasa por el pericentro. Un diagrama donde se presentan geoméricamente los elementos orbitales se muestra en la Figura 2.3.

La expansión de  $R$  se puede escribir de la forma

$$R = \mu' \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} S(a, a', e, e') \cos(j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \bar{\omega}' + j_4 \bar{\omega}), \quad (2.35)$$

ver Sección 6.3 en Murray & Dermott (1999), donde  $S$  es una función asociada a cada argumento particular de la función coseno. La forma general de esta expansión únicamente refleja que la periodicidad

de los ángulos se puede expresar en una función periódica trigonométrica, para todas las posibles combinaciones lineales de estos parámetros orbitales angulares, donde su coeficiente es una función de los parámetros  $(a, e)$  que no son periódicos.

Los términos  $j_1, j_2, j_3$  y  $j_4$  son enteros que satisfacen  $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0$ . Esta condición se puede demostrar de la siguiente manera. En primer lugar, estos valores son enteros ya que si  $\lambda, \lambda', \bar{\omega}, \bar{\omega}'$  varían en un ángulo  $2\pi$ , la configuración del sistema es la misma, lo que obliga a la función coseno correspondiente a adquirir el mismo valor. Además, si se modifican los cuatro ángulos una cantidad  $\alpha$  y usando el hecho de que  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  son vectores de posición respecto a la masa central y que además esta última genera un potencial gravitacional con simetría azimutal, se debe cumplir que:

$$\alpha(j_1 + j_2 + j_3 + j_4) = 2\pi p, \quad (2.36)$$

para toda  $\alpha$  y algún  $p$  entero. Esto sólo se puede satisfacer cuando  $p = 0$ , lo que demuestra la segunda condición.

En la sección 6.5 de Murray & Dermott (1999) se expande la función  $R$ , a través de un desarrollo detallado, hasta términos cuadráticos en la excentricidad y la inclinación de las órbitas, donde esta última se considerará nula en este trabajo, para eventual uso en una posterior aplicación en las Secciones §2.2.5 y §2.2.6. Los argumentos del coseno se pueden reescribir para reducir el número de términos diferentes, la expansión para  $R_D$  se reduce a un mínimo de 11 términos. El coeficiente de cada uno de éstos involucra términos proporcionales a una potencia de la inclinación o excentricidad de un valor máximo de 2 y a una función que involucra a los coeficientes de Laplace  $b_s^{(j)}(\alpha)$ , que pueden definirse mediante la expresión

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos j\psi d\psi}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s}, \quad (2.37)$$

con  $s \in 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ . Esta se puede desarrollar en potencias de  $\alpha = \frac{a}{a'}$ , lo que implica que  $\alpha < 1$ . De esta manera, la expansión se satisface para el caso de órbitas internas perturbadas por órbitas externas, como en el caso de material en una órbita circumprimaria perturbado por la estrella secundaria (ver Sección §2.3). La expansión para  $R_E$  involucra un mínimo de 14 argumentos distintos del coseno. Las expansiones completas para  $R_D$  y  $R_E$  se encuentran en el apéndice A, como ecuaciones A.1 y A.2 respectivamente. Usando estas expresiones se puede construir la expansión para  $R$  sustituyéndolas en la ecuación 2.31, con lo que se obtiene la expresión que se usará en el resto de la sección.

### §2.2.4 Ecuaciones planetarias de Lagrange

Los parámetros orbitales permiten construir la órbita que seguiría la partícula de polvo, si ésta se encontrara en una situación no perturbada. En el caso perturbado estos parámetros dependen del tiempo, por lo tanto la trayectoria perturbada está compuesta de secciones infinitesimales de distintas órbitas cónicas.

La solución de la ecuación (2.29) define las coordenadas de la trayectoria perturbada en función del tiempo. Al escribir la función de perturbación en términos de los parámetros orbitales se necesita

construir un conjunto de ecuaciones que permitan describir la evolución de éstos en términos del tiempo. Estas ecuaciones se conocen como ecuaciones planetarias de Lagrange. La siguiente demostración está basada en Brouwer & Clemence (1961). Notemos que la posición de la partícula de polvo puede calcularse, unívocamente a través de los parámetros orbitales a cada tiempo.

Si se define  $\mu = G(m_c + m)$ , y considerando que la órbita esta contenida en un plano, que se le llama  $XY$ , se puede expresar la ecuación (2.29) de la siguiente manera

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (2.38)$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad (2.39)$$

si  $R = 0$  se recupera la ecuación para el problema de 2 cuerpos.

La solución analítica del problema no perturbado se puede escribir como:

$$x = f_1(a, e, \bar{\omega}, \epsilon, t), \quad (2.40)$$

$$y = f_2(a, e, \bar{\omega}, \epsilon, t), \quad (2.41)$$

tal que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_1}{\partial C_j} \frac{dC_j}{dt}, \quad (2.42)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_2}{\partial C_j} \frac{dC_j}{dt}, \quad (2.43)$$

donde el conjunto de  $C_j$  corresponde a los 4 elementos orbitales requeridos para describir un problema en dos dimensiones espaciales. En este desarrollo utilizo la longitud media de época ( $\epsilon$ ), que se define como  $\epsilon = \lambda - nt$ . Derivando las ecuaciones (2.42 y 2.43) y sustituyéndolas en las ecuaciones (2.38 y 2.39) se obtienen 2 ecuaciones para 4 incógnitas ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ), lo que permite escoger arbitrariamente dos condiciones que se definen como:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_{1,2}}{\partial C_j} \frac{dC_j}{dt} = 0. \quad (2.44)$$

Utilizando las condiciones anteriores y el hecho de que  $x = f_1$  y  $y = f_2$  es la solución del problema no perturbado, el sistema de ecuaciones por resolver es:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial(x, y)}{\partial C_j} \frac{dC_j}{dt} = 0, \quad (2.45)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\partial(\dot{x}, \dot{y})}{\partial C_j} \frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial(x, y)}, \quad (2.46)$$

que equivalen directamente a las ecuaciones (2.38, 2.39 y 2.44). La manipulación algebraica de estas ecuaciones permiten escribirlas de la siguiente forma

$$\Sigma_{j=1}^4 [C_i, C_j] \frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial C_i}, \quad (2.47)$$

donde  $[C_i, C_j]$  es el corchete de Lagrange de  $C_i, C_j$  y se define como

$$[C_i, C_j] = \frac{\partial x}{\partial C_i} \frac{\partial \dot{x}}{\partial C_j} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial C_i} \frac{\partial x}{\partial C_j} + \frac{\partial y}{\partial C_i} \frac{\partial \dot{y}}{\partial C_j} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial C_i} \frac{\partial y}{\partial C_j}, \quad (2.48)$$

que puede simplificarse con la notación

$$[C_i, C_j] = \frac{\partial(x, \dot{x})}{\partial(C_i, C_j)} + \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(C_i, C_j)}. \quad (2.49)$$

De la definición se puede observar que  $[C_i, C_j] = -[C_j, C_i]$  y que además  $[C_i, C_i] = 0$ , por lo tanto solo están presentes 6 corchetes distintos de cero, linealmente independientes. Además, los corchetes de Lagrange no dependen explícitamente del tiempo, por lo que podrán ser expresados en términos de los elementos orbitales para cualquier tiempo.

Una forma de evaluar los corchetes es encontrar una relación entre los corchetes calculados en el sistema de coordenadas  $XY$  y en un sistema  $X'Y'$  rotado un ángulo arbitrario  $\omega$  respecto al anterior; las coordenadas están relacionadas mediante

$$x = x' \cos \omega - y' \sin \omega, \quad (2.50)$$

$$y = x' \sin \omega + y' \cos \omega, \quad (2.51)$$

después de las derivadas correspondientes llegamos a la siguiente igualdad,

$$[p, q] = [p, q]' + \frac{\partial(\bar{\omega}, [\mu a(1 - e^2)]^{1/2})}{\partial(p, q)}, \quad (2.52)$$

donde  $[p, q]' = \frac{\partial(x', \dot{x}')}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(y', \dot{y}')}{\partial(p, q)}$  y se hicieron las sustituciones  $\omega = \bar{\omega}$  y  $x'y' - y'\dot{x}' = [\mu a(1 - e^2)]^{1/2}$ . Esta última igualdad es la definición del momento angular específico asociado a una partícula que se mueve en la órbita correspondiente a estos parámetros orbitales. Como los parámetros orbitales que aparecen en  $f_{1,2}$  corresponden a la situación no perturbada, éstos no dependen del tiempo, por lo tanto los corchetes de Lagrange no dependerán del tiempo y podrán calcularse para un tiempo apropiado. Este momento se escoge como el que corresponde a  $M = 0$ . Las coordenadas primadas pueden escribirse como:

$$x' = a(\cos E - e), \quad (2.53)$$

$$y' = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (2.54)$$

donde  $E$  es la anomalía excéntrica, que está relacionada con  $M$  mediante la ecuación  $M = E - \sin E$  ( $M = n(t - \tau)$ , ver Sección §2.2.3). Como el interés se encuentra en el caso  $M = 0$ , desarrollo para



$M \ll 1$  que equivale a  $E \ll 1$ . Con este desarrollo, se calculan las derivadas requeridas para estimar  $[p, q]'$  sustituyendo  $M = 0$ , obteniendo finalmente

$$[p, q]' = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, (\mu a)^{1/2})}{\partial(p, q)}, \quad (2.55)$$

sustituyendo la ecuación (2.55) en (2.52) se obtiene la expresión que se buscaba,

$$[p, q] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, (\mu a)^{1/2})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\bar{\omega}, (\mu a)^{1/2}(1 - e^2)^{1/2})}{\partial(p, q)}. \quad (2.56)$$

Esta ecuación permite calcular los 6 corchetes requeridos, dados por:

$$[a, \varepsilon] = -\frac{1}{2}na, \quad (2.57)$$

$$[\bar{\omega}, a] = -\frac{1}{2}na(1 - (1 - e^2)^{1/2}), \quad (2.58)$$

$$[\bar{\omega}, e] = -na^2e(1 - e^2)^{-1/2}, \quad (2.59)$$

$$[a, e] = 0, \quad (2.60)$$

$$[e, \varepsilon] = 0, \quad (2.61)$$

$$[\bar{\omega}, \varepsilon] = 0. \quad (2.62)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones (2.47); que pueden ser manipuladas para obtener finalmente,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (2.63)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} - \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2e} (1 - (1 - e^2)^{1/2}) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad (2.64)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}, \quad (2.65)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na^2e} (1 - (1 - e^2)^{1/2}) \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}. \quad (2.66)$$

Esta relación es exacta y la aproximación vendrá, según cuántos términos se consideran para  $R$ . Notar que  $\varepsilon$  únicamente aparece en la combinación  $\lambda = nt + \varepsilon$  y que además  $n$  depende de  $a$ . De esta manera el término proporcional a  $\frac{\partial R}{\partial a}$  en la ecuación (2.66) involucra derivadas de  $a$  partiendo de derivadas de  $\lambda$ , entonces el desarrollo de este término se puede realizar de la siguiente manera

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \text{ explícita} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} t \frac{dn}{da}, \quad (2.67)$$

donde la derivada de  $\varepsilon$  corresponde a la derivada de  $\lambda$ . Sustituyendo la ecuación (2.63) en (2.67) se obtiene:

$$-\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \text{ implícita} - t \frac{dn}{dt}. \quad (2.68)$$

Si se define una nueva longitud de época ( $\varepsilon^*$ ) como

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} + t \frac{dn}{dt}, \quad (2.69)$$

entonces la ecuación (2.66) puede describirse al hacer el cambio de  $\varepsilon$  por  $\varepsilon^*$  y calcular la derivada respecto de  $a$  de forma explícita. Para completar la transformación a su forma final de las ecuaciones de Lagrange (2.63, 2.64, 2.65, 2.66), las derivadas respecto a  $\varepsilon$  se cambian por derivadas respecto a  $\lambda$ .

### §2.2.5 Perturbaciones seculares

Para afrontar un problema en particular en términos de los elementos orbitales, es necesario resolver las ecuaciones planetarias de Lagrange (2.63, 2.64, 2.65, 2.66), ya que a cada tiempo los parámetros orbitales determinan una posición y velocidad de la partícula de polvo. El sistema se describe en este espacio de parámetros, por lo que es innecesario en este momento indicar un sistema de coordenadas espaciales particular.

El problema que se estudia en esta Sección y en la Sección §2.2.6 es la perturbación sobre la órbita de la partícula de polvo (de masa  $m$ ) en un movimiento circular ( $e = 0$ ) alrededor de la estrella primaria, perturbada por la fuerza gravitacional de la estrella secundaria (de masa  $m'$ ), donde  $m \ll m'$ . Las dos estrellas están girando alrededor de su centro de masa en una órbita circular ( $e' = 0$ ). Las variables primadas corresponden a la órbita de la estrella secundaria (la que perturba) y las no primadas a la órbita de la partícula de polvo. Este problema corresponde a material en un disco circumprimario (es decir, alrededor de la estrella más masiva) perturbado por una estrella secundaria en órbita circular.

Al introducir la función de perturbación, el lado derecho de éstas involucrará en principio una cantidad considerable de términos que volverá intratable el sistema de ecuaciones. La forma tradicional de evadir el problema es argumentar en favor de sólo unos cuantos términos relevantes.

En el problema no perturbado  $\lambda'$  y  $\lambda$  son cantidades que varían linealmente en el tiempo a tasas  $n'$  y  $n$  respectivamente, mientras todos los otros elementos se mantienen constantes. Al transferir estas ideas al caso perturbado se puede naturalmente concluir que  $\lambda'$  y  $\lambda$  son cantidades que varían muy rápidamente mientras las demás lo hacen lentamente. Esto permite decir que los términos en la función de perturbación que no involucran  $\lambda'$  o  $\lambda$  varían lentamente, que se conocen como términos seculares o de periodo largo. Al ver la ecuación 2.35, la dependencia en  $\lambda$ ,  $\bar{\omega}$  y  $\Omega$  es a través de una función cosenoidal. Como el periodo asociado a un término secular es mucho mayor que el que corresponde a un término no secular, entonces la función coseno en el segundo caso promediará a cero al integrar sobre un periodo largo.

Esto nos deja con los términos seculares como los que describen dentro de una buena aproximación el comportamiento de la partícula de polvo.

De las ecuaciones A.1 y A.2 se observa que los únicos términos seculares, cuando las 3 masas están contenidas a todo momento en un mismo plano, son:

$$R_{sec} = \frac{\mu'}{a'}(C_0 + C_1(e^2 + e'^2) + C_2ee' \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega})), \quad (2.70)$$

donde

$$C_0 = \frac{1}{2}b_{1/2}^{(0)}(\alpha), \quad (2.71)$$

$$C_1 = \frac{1}{8}(2\alpha \frac{d}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2})b_{1/2}^{(0)}(\alpha), \quad (2.72)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}(2 - 2\alpha \frac{d}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2})b_{1/2}^{(1)}(\alpha), \quad (2.73)$$

sustituyendo la ecuación (2.70) en las ecuaciones planetarias de Lagrange (2.63,2.64,2.65,2.66) se obtienen las siguientes ecuaciones que describen la evolución temporal de los parámetros orbitales,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{sec} = 0, \quad (2.74)$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{sec} = n\alpha(m'/m_c)C_2e' \sin(\bar{\omega} - \bar{\omega}'), \quad (2.75)$$

$$\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_{sec} = n\alpha(m'/m_c)(2C_1 + C_2\left(\frac{e'}{e}\right) \cos(\bar{\omega} - \bar{\omega}')), \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{sec} &= -2n\alpha^2(m'/m_c)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}b_{1/2}^{(0)}(\alpha) + \frac{(e^2 + e'^2)}{8}\left(2\frac{d}{d\alpha} + 4\alpha\frac{d^2}{d\alpha^2} + \alpha^2\frac{d^3}{d\alpha^3}\right)b_{1/2}^{(0)}(\alpha)\right) \\ &+ \frac{d}{d\alpha}C_2ee' \cos(\bar{\omega}' - \bar{\omega}), \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde se ha supuesto que  $m_c \gg m'$ , tal que se puede escribir  $\mu' = n^2a^3\left(\frac{m'}{m_c}\right)$ . Estas ecuaciones suponen que la órbita de la estrella secundaria está fija. Para el caso de estudio, las ecuaciones (2.74,2.75,2.76,2.77) quedan de la forma

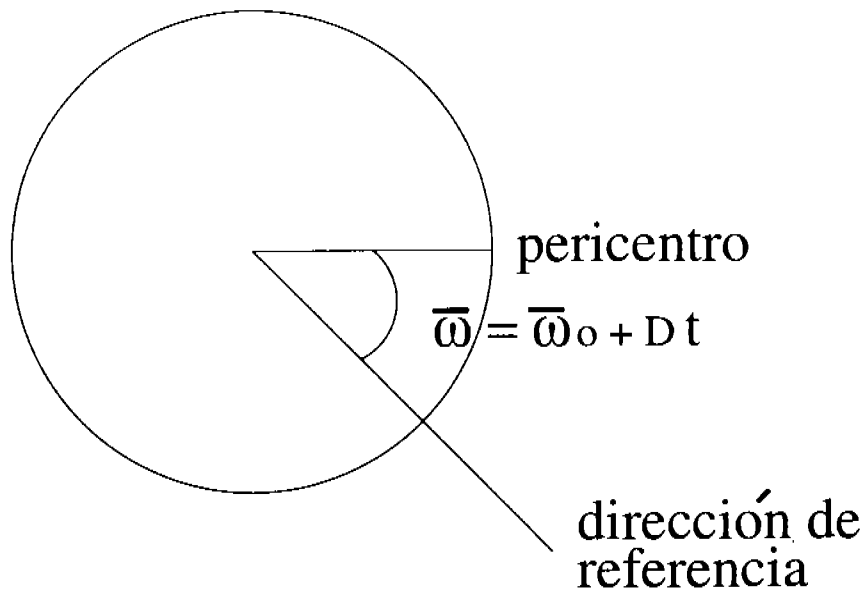
$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{sec} = 0, \quad (2.78)$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{sec} = 0, \quad (2.79)$$

$$\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_{sec} = 2n\alpha\left(\frac{m'}{m_c}\right)C_1, \quad (2.80)$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{sec} = -n\alpha^2\left(\frac{m'}{m_c}\right)\frac{d}{d\alpha}b_{1/2}^{(0)}(\alpha). \quad (2.81)$$

La solución de este sistema indica que  $a$  y  $e$  no varían en el tiempo, mientras  $\bar{\omega}$  y  $\varepsilon$  varían linealmente. Para el caso de una órbita circular, cambios en  $\bar{\omega}$  y  $\varepsilon$  no modifican la trayectoria, ver Figura 2.6. Así, la perturbación no saca de sus órbitas circulares a las partículas que están contenidas en el disco circumprimario.



**Figure 2.6:** Cambio en  $\bar{\omega}$  por la perturbación secular. Notar que la órbita no se modifica.  $D = 2n\alpha(\frac{m'}{m_c})C_1$ , ver ecuación 2.80.

En el Capítulo 3 se trata el problema de acreción de material sobre una estrella, que cae en órbitas parabólicas. Un choque restringe a las partículas en un plano, el material se mueve en éste en trayectorias elípticas cuyo valor mínimo de la excentricidad es  $e_{min} = 0.87$ . Estos valores de la excentricidad son muy grandes, por lo que este formalismo no se puede usar en esta etapa temprana de la formación del disco. El tratamiento para material rotando en un disco circumprimario será extendido en la Sección §2.3 con un enfoque un poco distinto para una exploración más profunda.

### §2.2.6 Perturbaciones resonantes

En la Sección §2.2.5 se mostró que los términos relevantes para describir los efectos de la perturbación secular son los términos de periodo largo, es decir, para los cuáles no aparecen los ángulos  $\lambda$  y  $\lambda'$ . Los términos donde literalmente no están presentes fueron tratados en la Sección §2.2.5, pero existen configuraciones específicas, definidas por

$$j_1 n' + j_2 n = 0, \quad (2.82)$$

donde tampoco aparecen. A estos términos se les conoce como términos resonantes. Usando la 3a. ley de Kepler esta condición se puede escribir como

$$a = \left(\frac{|j_2|}{|j_1|}\right)^{2/3} a', \quad (2.83)$$

lo que indica que éstos sólo son relevantes cuando los semiejes mayores de la órbita de la partícula perturbadora y perturbada satisfacen la ecuación (2.83), en otras palabras, la influencia está restringida a posiciones en el espacio muy particulares. Algunas resonancias importantes se muestran en la Figura 2.7.

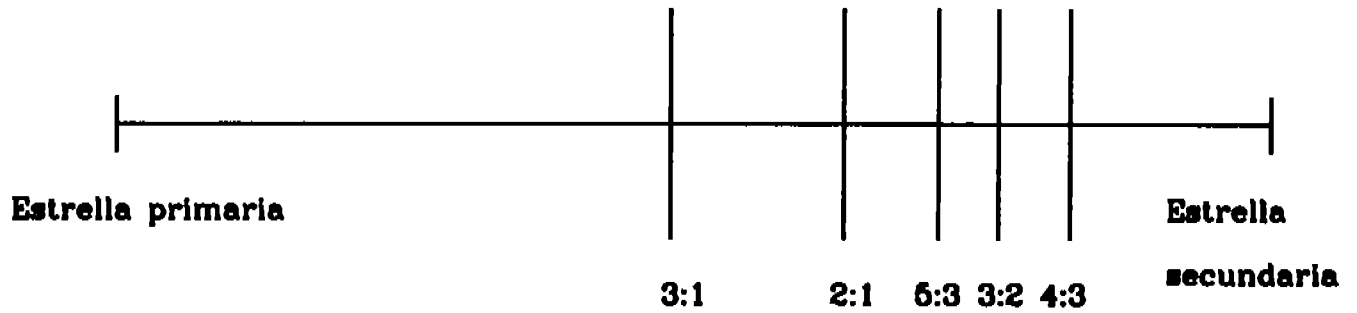


Figure 2.7: Posición relativa a la distancia entre las estrellas de las resonancias 2:1,3:2,4:3,3:1,5:3

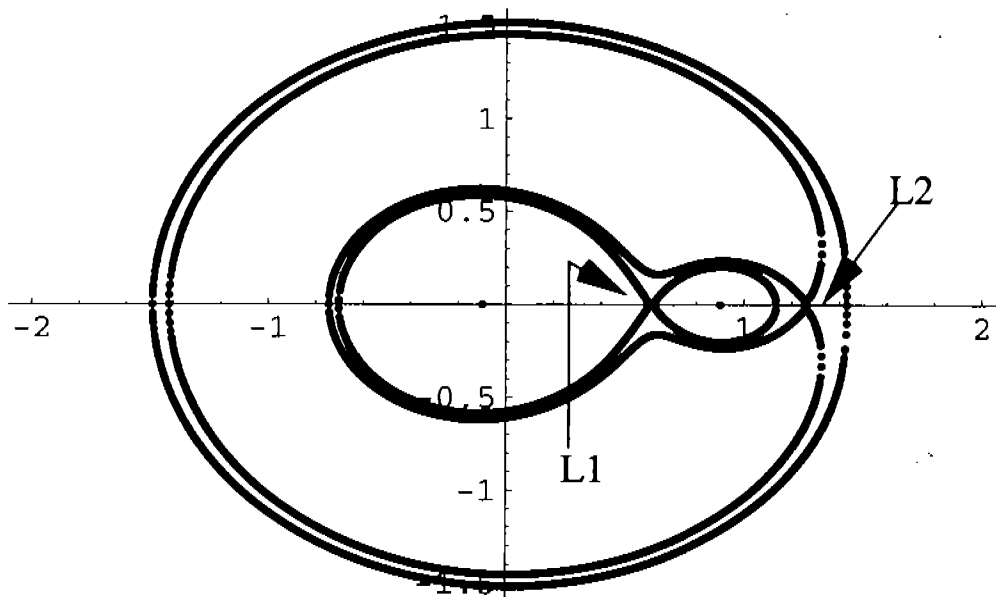


Figure 2.8: Diagrama del lóbulo de Roche que corresponde a la curva de velocidad cero asociada al punto lagrangiano  $L_1$ .

En la sección 6.6 de Murray & Dermott (1999) se muestra que si se considera la expansión de la función de perturbación hasta términos cuadráticos en la excentricidad entonces la mayor diferencia entre  $|j_1|$  y  $|j_2|$  es dos. Para identificar una resonancia específica la denoto como  $|j_1| : |j_2|$ , donde  $|j_1| > |j_2|$  ya que  $a < a'$ . A pesar de restringir las posibilidades para resonancias, todavía queda un conjunto inmenso. Otra restricción razonable por hacer es suponer que un disco real debe estar contenido dentro del lóbulo de Roche, ver Figura 2.8. El lóbulo de Roche corresponde a la curva de velocidad cero que contiene al punto lagrangiano  $L_1$ , con  $C_J = C_{L_1}$ . Este punto se encuentra entre las estrellas en la línea que las une. Una partícon  $C_J = C_{L_1}$  en  $L_1$  tiene una velocidad cero y una aceleración también cero.

La posición del punto lagrangiano  $L_1$  entre las estrellas está definido por la relación

$$\frac{m'}{m_c} = 3r'^3 \frac{(1 - r' + \frac{r'^2}{3})}{(1 + r' + r'^2)(1 - r')^3}, \quad (2.84)$$

donde  $m_c$  y  $m'$  son las masas de la estrella primaria y secundaria respectivamente y  $1 - r'$  es la distancia de la primaria al punto lagrangiano interno ( $L_1$ ), que está adimensionalizado con  $a'$ . La demostración se encuentra en la Sección §4.2. Para un caso típico donde  $\frac{m'}{m_c} = 0.1$  se encuentra que  $1 - r' = 0.717513$ . Se usa la ecuación (2.83) para calcular la posición de cualquier resonancia y se escogen las resonancias que se encuentran a radios menores del punto lagrangiano interno, que se determinó anteriormente. Si además se impone la condición de que el máximo valor para  $|j_1| - |j_2|$  es dos, para una expansión que llega hasta términos cuadráticos en la excentricidad e inclinación (ver Murray & Dermott 1999) entonces se concluye que las resonancias que muy probablemente están presentes dentro del disco y que están presentes en la expansión de la función de perturbación (ecuación 2.35) son la 2 : 1 y la 3 : 1. De esta manera, a continuación el estudio se centrará en estas 2 resonancias solamente.

### Resonancia 2:1

Los términos de la función de perturbación que se requieren son aquellos en los que aparece el argumento  $2\lambda' - \lambda$ . Recurriendo nuevamente a las expansiones para  $R_D$  y  $R_E$  del apéndice A, se observa que los únicos términos que se asocian a esta resonancia son:

$$R_{res} = \frac{\mu'}{a'} C_3 e \cos(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}) + \frac{\mu'}{a'} C_4 e' \cos(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}') - 2 \frac{\mu'}{a'} \alpha e' \cos(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}'), \quad (2.85)$$

donde

$$C_3 = \frac{1}{2} (-4 - \alpha \frac{d}{d\alpha}) b_{1/2}^{(2)}(\alpha), \quad (2.86)$$

$$C_4 = \frac{1}{2} (3 + \alpha \frac{d}{d\alpha}) b_{1/2}^{(1)}(\alpha). \quad (2.87)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (2.85 y 2.70) en las ecuaciones planetarias de Lagrange (2.63 a 2.66), desarrollando las derivadas correspondientes y sustituyendo  $e = e' = 0$  (explorando así el mismo ejemplo que se ha estado analizando), se observa que la única ecuación que resulta modificada respecto al sistema de ecuaciones donde sólo se consideran términos seculares es

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{sec+res} = -n\alpha \left(\frac{m'}{m_c}\right) C_3 \sin(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}), \quad (2.88)$$

cuya solución es:

$$e = e_0 + \frac{n\alpha(m'/m_c)C_3}{2n' - n - \dot{\bar{\omega}}} (\cos(2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}) - \cos(2\lambda'_0 - \lambda_0 - \bar{\omega}_0)), \quad (2.89)$$

donde las variables con subíndice 0 están evaluadas a un tiempo arbitrario. En este caso la excentricidad oscila alrededor de un valor constante con un periodo

$$T = \frac{2\pi}{|2n' - n - \dot{\omega}|} = \frac{2\pi}{\dot{\omega}}. \quad (2.90)$$

El cambio en la excentricidad equivale a un cambio en  $b$  (semieje menor) debido a que  $a$  se mantiene constante. Esto tiene como efecto que la órbita se comprima en una dirección, interaccionando con órbitas internas que se encuentran fuera de la región donde tiene influencia la resonancia. La amplitud de  $b$  ( $\Delta b$ ) que corresponde a la amplitud del cambio en la excentricidad ( $\Delta e$ ) define una región de alta interacción que tendrá como posible resultado que este anillo así definido se limpie de material. Un ejemplo de este fenómeno son las regiones vacías de material ("gaps") entre los anillos de Saturno (por ejemplo) que son interpretados como debidos al efecto de resonancias con satélites que coinciden con esas posiciones.

Para calcular  $\Delta e$ , se necesita estimar  $\dot{\omega}$  que en las ecuaciones (2.78 a 2.81) está dado por

$$\dot{\omega} = 2C_1 n \alpha (m'/m_c), \quad (2.91)$$

desarrollando  $C_1$  en series se obtiene  $C_1 \approx \frac{3}{8}\alpha^2$ , lo que permite rescribir  $\dot{\omega}$  como:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4}n\alpha^3(m'/m_c), \quad (2.92)$$

de la misma forma se desarrolla  $C_3$ , tal que  $C_3 \approx -\frac{9}{4}\alpha^2(1 + \frac{5}{9}\alpha^2)$ , así  $\Delta e$  se puede escribir como

$$\Delta e = \left| \frac{9}{4}\alpha^{*3} \left(1 + \frac{5}{9}\alpha^{*2}\right) (m'/m_c) \left( \frac{1}{2n^{*}/n^* - 1 - \dot{\omega}/n^*} \right) \right|, \quad (2.93)$$

donde las variables con superíndice  $*$  corresponden a las mismas cantidades pero evaluadas en posiciones

$$\alpha^* = \frac{a}{a'}(1 + \Delta a a'), \quad (2.94)$$

donde  $\Delta a a'$  indica que tan lejos de la resonancia se encuentra la partícula a perturbar. Si  $\Delta a a' = 0.14$ ,  $\alpha^* = 0.718156$ , que está ligeramente afuera respecto al punto lagrangiano interno para el caso  $m'/m_c = 0.1$  ( $r/a' = 0.717513$ ). En este caso  $\Delta b = 0.0994378$ , que es un valor no despreciable. Una conclusión que se puede extraer de este análisis simplificado permite sugerir que alrededor de la resonancia 2 : 1 las órbitas se modifican fuertemente, por lo que el considerar los términos asociados a esta resonancia tienen un papel preponderante para la configuración final de un disco circunestelar.

### Resonancia 3:1

Los términos de la función de perturbación asociados a esta resonancia son cuadráticos en la excentricidad. Regresando a las ecuaciones A.1 y A.2, se puede concluir que estos términos son:

$$R_{res} = \frac{\mu'}{a'} \left( \frac{1}{8} e^2 (21 + 10\alpha \frac{d}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}) b_{1/2}^{(3)} \cos(3\lambda' - \lambda - 2\bar{\omega}) + \frac{1}{4} e e' (-20 - 10\alpha \frac{d}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}) b_{1/2}^{(2)} \cos(3\lambda' - \lambda - \bar{\omega} - \bar{\omega}') + \right.$$

$$\frac{1}{8}e'^2(17 + 10\alpha\frac{d}{d\alpha} + \alpha^2\frac{d^2}{d\alpha^2})b_{1/2}^{(1)}\cos(3\lambda' - \lambda - 2\bar{\omega}') - \frac{27}{8}\alpha e'^2\cos(3\lambda' - \lambda - 2\bar{\omega}'), \quad (2.95)$$

sustituyendo la ecuación (2.95) en las ecuaciones planetarias de Lagrange (2.63 a 2.66) y considerando el caso  $e = e' = 0$  se muestra que no existen para esta resonancia contribuciones extra a las seculares.

Resumiendo, la resonancia 2:1, modifica apreciablemente las órbitas alrededor de la posición de esta resonancia, por lo que es importante para definir la configuración final del disco. En el caso de una partícula en una órbita circular en el disco circumprimario ( $e = 0$ ) perturbada externamente por la estrella secundaria igualmente en una órbita circular ( $e' = 0$ ), la resonancia 3 : 1 no genera ninguna influencia, aunque no se pueden descartar papeles importantes en otras configuraciones.

### §2.3 Perturbaciones de órbitas circunestelares debido a la compañera en el sistema binario

El caso de una órbita circunestelar perturbada por una estrella en una órbita circular se trató con el formalismo de la función de perturbación en la Sección §2.2. Allí se concluyó que las órbitas originalmente circulares sólo son modificadas en la cercanía de la resonancia 2 : 1. Para evitar un estudio exhaustivo de la infinidad de términos no seculares y resonantes, en esta sección se utilizará otro enfoque perturbativo, donde el análisis se realiza en el espacio de coordenadas espaciales. Este se basa en una expansión de las ecuaciones de movimiento en términos de un parámetro pequeño, tal que se tenga la solución a distintos niveles de aproximación.

#### §2.3.1 Método perturbativo

El desarrollo aquí presentado se basa en el trabajo de Moulton (1963).

En esta sección se presenta un análisis perturbativo que permite construir órbitas alrededor de una estrella, deformadas por la presencia de la otra. Como la estrella respecto a la cuál está centrada la partícula que se perturba puede ser indistintamente la primaria o la secundaria, se cambia la notación de las masas, cambiando a  $m_1$  y  $m_2$  en lugar de  $m_c$  y  $m'$ . La segunda ley de Newton en coordenadas polares en el sistema inercial donde la estrella central está fija, se puede escribir como:

$$F_r = \ddot{r} - r(\dot{v})^2, \quad (2.96)$$

$$F_v = r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v}. \quad (2.97)$$

donde  $r$  y  $v$  son las coordenadas polares de la partícula prueba. Consideremos las fuerzas producidas por las estrellas de un sistema binario, sobre una masa prueba de masa unitaria que está girando en circunferencias alrededor de la masa  $m_1$ . El origen de coordenadas se encuentra en la posición de la masa  $m_1$ .



Sustituyendo las expresiones de las correspondientes fuerzas gravitacionales, estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\ddot{r} - r(\dot{v})^2 + \frac{Gm_1}{r^2} - Gm_2 \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (2.98)$$

$$r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v} - \frac{Gm_2}{r} \frac{\partial U}{\partial v} = 0, \quad (2.99)$$

donde  $U$  es el potencial perturbador debido a la masa  $m_2$ , y se escribe como:

$$U = \frac{1}{[R^2 - 2rR \cos(v - V) + r^2]^{1/2}} - \frac{r \cos(v - V)}{R^2}, \quad (2.100)$$

donde  $R$  y  $V$  son las coordenadas polares de la masa  $m_2$ .

Considero que  $r/R \ll 1$ , para expandir el potencial en potencias de este parámetro, sustituyendo en la ecuación de movimiento, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{v}^2 + \frac{GM_1}{r^2} &= \frac{GM_2}{2} \frac{r}{R^3} \left[ (1 + 3 \cos 2(v - V)) + \frac{3}{4} \frac{r}{R} (3 \cos(v - V) + 5 \cos 3(v - V)) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( \frac{9}{8} + \frac{5}{2} \cos 2(v - V) + \frac{35}{8} \cos 4(v - V) \right) + \dots \right], \\ r\ddot{v} + 2\dot{r}\dot{v} &= -\frac{GM_2}{2} \frac{r}{R^3} \left[ (3 \sin 2(v - V)) + \frac{3}{4} \frac{r}{R} (\sin(v - V) + 5 \sin 3(v - V)) + \right. \\ &+ \left. \frac{5}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \left( \sin 2(v - V) + \frac{7}{2} \sin 4(v - V) \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.101)$$

En la configuración no perturbada ( $m_2 = 0$ ) se puede definir una velocidad angular orbital del sistema binario ( $n$ ) y el semieje mayor de la órbita ( $a$ ) mediante la 3a. ley de Kepler, que se puede escribir en este caso como:

$$n^2 a^3 = Gm_1, \quad (2.102)$$

tal que  $n$  y  $a$  son parámetros que definirán el problema no perturbado.

Si se considera ahora que el movimiento relativo entre las masas  $m_1$  y  $m_2$  es circular, entonces:

$$R = A, \quad (2.103)$$

$$V = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{A^{3/2}} (t - t_0) = N(t - t_0), \quad (2.104)$$

tal que  $t_0$  representa el tiempo para el cuál la masa  $m_2$  se encuentra en la dirección de referencia.

Las posiciones de la partícula prueba para el caso perturbado pueden escribirse como:

$$r = a(1 + \rho), \quad (2.105)$$

$$v = n(t - t_0) + \omega, \quad (2.106)$$

donde  $a\rho$  y  $\omega$  representan la perturbación de la órbita, en radio y ángulo, debido a la masa perturbadora  $m_2$ .

Ahora, se puede definir el parámetro  $M$  y  $\tau$  definidos por:

$$M = \frac{N}{n - N}, \quad (2.107)$$

$$\tau = (n - N)(t - t_0) = \frac{N}{M}(t - t_0). \quad (2.108)$$

Para que sea válido este análisis  $r \ll R$ , lo que implica que  $a \ll A$ . Usando las definiciones correspondientes junto con  $m_2 \ll m_1$  se puede demostrar que  $n \gg N$ , por lo tanto  $M \ll 1$ , lo que define a  $M$  como un parámetro aceptable respecto al cuál se pueden expandir las ecuaciones.  $\tau$  simplemente representa la diferencia en el ángulo entre la partícula prueba y la masa perturbadora. Así,  $r$  y  $\tau$  representan la posición de la partícula en el sistema de referencia con las estrellas del sistema binario fijas. ya que  $\tau$  se construye restando a la posición angular de la estrella ( $n(t - t_0)$ ), el ángulo de posición de la línea que une las estrellas ( $N(t - t_0)$ ). Sin embargo notar que las ecuaciones se plantean en el sistema inercial, la órbita es la que se grafica en el sistema con las estrellas fijas.

Transformando el sistema de ecuaciones con las variables  $r, v$  y  $t$  a las nuevas variables  $\rho, \omega$  y  $\tau$  en términos del parámetro  $M$ . Además de estos cambios, se sustituye

$$\frac{Gm_1}{a^3} = n^2 = (N/M)^2(1 + M)^2, \quad (2.109)$$

$$\frac{Gm_2}{A^3} = N^2 - \frac{Gm_1}{A^3} = M^2 \left(\frac{N}{M}\right)^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right), \quad (2.110)$$

al dividir entre  $a(\frac{N}{M})^2$  se obtiene

$$\ddot{\rho} - (1 + \rho)(1 + M + \dot{\omega})^2 + \frac{(1 + M)^2}{(1 + \rho)^2} = \frac{M^2}{2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) (1 + \rho)(1 + 3 \cos 2(\tau + \omega)) + \dots, \quad (2.111)$$

$$(1 + \rho)\ddot{\omega} + 2\dot{\rho}(1 + M + \dot{\omega}) = -\frac{M^2}{2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) (1 + \rho)(3 \sin 2(\tau + \omega)) + \dots, \quad (2.112)$$

cuya solución se puede expandir como:

$$\rho = \sum_{j=2}^{\infty} \rho_j M^j, \quad (2.113)$$

$$\omega = \sum_{j=2}^{\infty} \omega_j M^j. \quad (2.114)$$

Existen una infinidad de soluciones de este sistema de ecuaciones, el conjunto de soluciones de interés son las que representan órbitas que se cierran, es decir, soluciones periódicas en  $\tau$  de periodo  $2\pi$ . Las órbitas que nos interesan son periódicas dentro de la aproximación que aquí se presenta, sin embargo esto no quiere decir que existan en la realidad. Los errores que existen en una aproximación se pueden acumular para evitar que la órbita se cierre. Sin embargo, pensando en que el periodo de una órbita es mucho menor que los tiempos de vida de un sistema, ésta aproximación es suficiente. Si ahora se considera que la condición inicial para el ángulo es  $v(t = t_0) = 0$ . Estas restricciones se pueden escribir matemáticamente como:

$$\rho_j(\tau + 2\pi) = \rho_j(\tau), \quad (2.115)$$

$$\omega_j(\tau + 2\pi) = \omega_j(\tau), \quad (2.116)$$

$$\omega_j(t = t_0) = 0. \quad (2.117)$$

Al definir  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  y aproximando  $\tau + \omega$  por  $\tau$ , el sistema de ecuaciones a primer orden (coeficiente del término  $M^2$ ) es:

$$\ddot{\rho}_2 - 3\rho_2 - 2\dot{\omega}_2 = \frac{\mu}{2}(1 + 3 \cos 2\tau), \quad (2.118)$$

$$\ddot{\omega}_2 + 2\rho_2 = -\frac{3}{2}\mu \sin 2\tau. \quad (2.119)$$

Como la solución debe ser periódica, se propone de la siguiente forma:

$$\rho_2 = A + B \cos \tau + C \sin \tau + D \cos 2\tau + E \sin 2\tau, \quad (2.120)$$

$$\omega_2 = A' + B' \cos \tau + C' \sin \tau + D' \cos 2\tau + E' \sin 2\tau. \quad (2.121)$$

Sustituyendo estas expresiones en el sistema de ecuaciones, e imponiendo la condición inicial se obtiene la siguiente solución

$$\rho_2 = -\frac{\mu}{6} + B \cos \tau + C \sin \tau - \mu \cos 2\tau, \quad (2.122)$$

$$\omega_2 = -2C + 2C \cos \tau - 2B \sin \tau + \frac{11}{8}\mu \sin 2\tau, \quad (2.123)$$

donde  $B$  y  $C$  se obtendrán junto con la solución para las ecuaciones para  $\rho_3$  y  $\omega_3$  que involucran a  $\rho_2$  y  $\omega_2$ .

La solución a este orden genera contribuciones a orden  $M^3$ , usando la expresión aproximada  $a/A = (M)(Mp)$ , donde  $Mp$  es una constante independiente de  $M$ . Asociando ahora los términos propor-

cionales a  $M^3$  se obtiene el siguiente par de ecuaciones,

$$\ddot{\rho}_3 - 3\rho_3 - 2\dot{\omega}_3 = 6\rho_2 + 2\dot{\omega}_2 + \frac{3}{8}Mp\mu(3\cos\tau + 5\cos 3\tau), \quad (2.124)$$

$$\ddot{\omega}_3 + 2\dot{\rho}_3 = -2\dot{\rho}_2 - \frac{3}{8}Mp\mu(\sin\tau + 5\sin 3\tau). \quad (2.125)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.122) y (2.123) en las ecuaciones (2.124) y (2.125) e integrando la ecuación (2.125), se obtiene una expresión para  $\dot{\omega}_3$ , la cuál es sustituida en la ecuación (2.124), quedando

$$\ddot{\rho}_3 + \rho_3 = -\mu + 2G - (2B - \frac{15}{8}Mp\mu)\cos\tau - 2C\sin\tau + \frac{7}{2}\mu\cos 2\tau + \frac{25}{8}Mp\mu\cos 3\tau, \quad (2.126)$$

donde  $G$  es la constante de integración. Recordar que el actual interés es el de calcular los valores correspondientes para  $B$  y  $C$ , para completar la solución hasta términos cuadráticos en  $M$ . El siguiente paso es proponer una solución para  $\rho_3$  y  $\omega_3$  de la forma planteada para  $\rho_2$  y  $\omega_2$ . Notar que del lado izquierdo de la ecuación anterior, los términos proporcionales a  $\cos\tau$  y  $\sin\tau$  en  $\rho_3$  se cancelan, por lo tanto los coeficientes correspondientes del lado derecho deben ser nulos, así:

$$B = \frac{15}{16}Mp\mu, \quad (2.127)$$

$$C = 0, \quad (2.128)$$

sustituyendo estos valores en las ecuaciones (2.122) y (2.123), se concluye que

$$\rho_2 = -\frac{\mu}{6} + \frac{15}{16}Mp\mu\cos\tau - \mu\cos 2\tau, \quad (2.129)$$

$$\omega_2 = -\frac{15}{8}Mp\mu\sin\tau + \frac{11}{8}\mu\sin 2\tau. \quad (2.130)$$

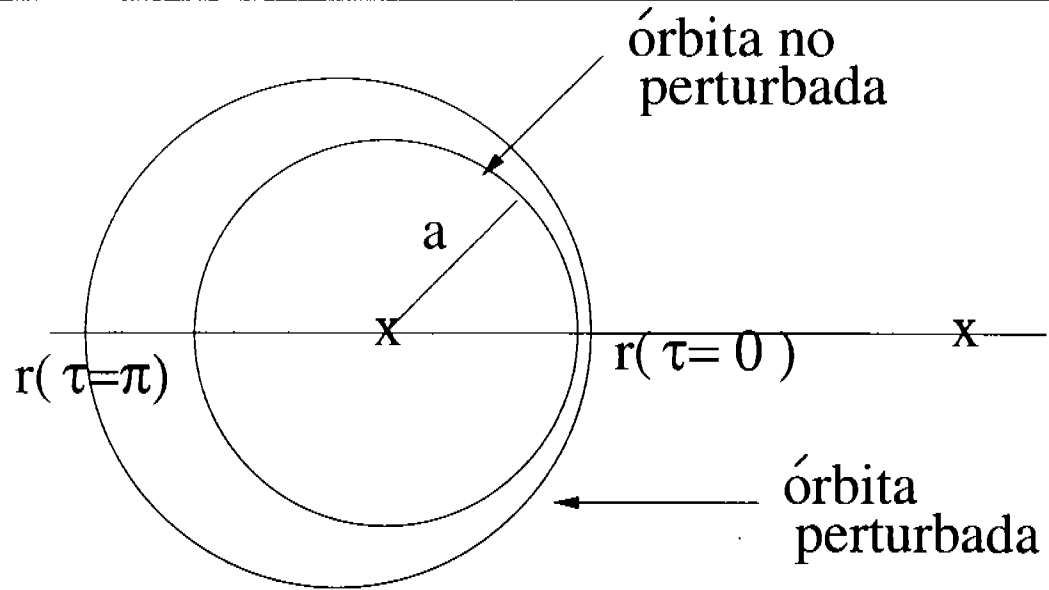
Hasta orden  $M^2$ , se tiene la solución para las órbitas perturbadas, que puedo escribir como:

$$r = a(1 + \rho_2M^2), \quad (2.131)$$

$$v = \tau + \omega_2M^2, \quad (2.132)$$

donde el ángulo  $v$  se expresa en el sistema de referencia con las estrellas fijas, además  $\rho_2$  y  $\omega_2$  son sustituidas por las ecuaciones (2.129) y (2.130). Aquí, las variables importantes que aparecen son  $\mu$  (la masa perturbadora adimensionalizada) y  $a$ , que representa el radio de la órbita no perturbada. Recordar que  $M$  se pueden escribir de la siguiente manera,

$$M = \frac{a^{3/2}}{m_1^{1/2}(1 - a^{3/2}/m_1^{1/2})}, \quad (2.133)$$



**Figure 2.9:** La órbita circular de radio  $a$  es perturbada por la estrella de la derecha, por lo que se deforma. Además se muestra la posición sobre la órbita perturbada de  $r(\tau = 0)$  y  $r(\tau = \pi)$ .

donde se han escogido dimensiones tal que  $m_1 + m_2 = 1$  y  $A = 1$ . El diagrama en la Figura 2.9 muestra un resultado típico de la perturbación de otra estrella sobre una partícula en órbita circular alrededor de una estrella.

### §2.3.2 Intersección de órbitas perturbadas contiguas

Las ecuaciones (2.131) y (2.132) representan las órbitas perturbadas en función de  $m_1$  y  $a$ . Notar que  $\tau$  es un parámetro que indica la posición angular en la órbita no perturbada y la intersección de dos órbitas contiguas asignará un valor particular a  $\tau$ . Los radios asociados a 2 órbitas contiguas son:

$$r_{int} = a_{int}(1 + \rho_{int}M_{int}^2), \quad (2.134)$$

$$r_{ext} = a_{ext}(1 + \rho_{ext}M_{ext}^2), \quad (2.135)$$

donde  $a_{int}$  y  $a_{ext}$  son los radios no perturbados asociados a la órbita interna y externa, respectivamente.  $\rho_{int}$  con  $M_{int}$  y  $\rho_{ext}$  con  $M_{ext}$ , son los valores asignados a  $\rho_2$  y  $M$  para los radios  $a_{int}$  y  $a_{ext}$  respectivamente.

Las posiciones angulares que corresponden a las dos órbitas anteriores son:

$$v_{int} = \tau + \omega_{int}M_{int}^2, \quad (2.136)$$

$$v_{ext} = \tau + \omega_{ext}M_{ext}^2, \quad (2.137)$$

donde  $\omega_{int}$  y  $\omega_{ext}$  indican  $\omega_2$  evaluada en  $a_{int}$  y  $a_{ext}$  respectivamente. Para que exista una intersección

entre ambas órbitas, se debe de satisfacer

$$f = r_{ext} - r_{int} = A + B \cos \tau + C \cos 2\tau = 0, \quad (2.138)$$

$$g = v_{ext} - v_{int} = D \sin \tau + E \sin 2\tau = 0, \quad (2.139)$$

donde

$$A = DR - \frac{\mu}{6}(a_{ext}M_{ext}^2 - a_{int}M_{int}^2), \quad (2.140)$$

$$B = \frac{15}{16}\mu(a_{ext}^2M_{ext} - a_{int}^2M_{int}), \quad (2.141)$$

$$C = -\mu(a_{ext}M_{ext}^2 - a_{int}M_{int}^2), \quad (2.142)$$

$$D = -\frac{15}{8}\mu(a_{ext}M_{ext} - a_{int}M_{int}), \quad (2.143)$$

$$E = \frac{11}{8}\mu(M_{ext}^2 - M_{int}^2). \quad (2.144)$$

La expresión para  $f$ , se puede escribir como:

$$f = A - C + B \cos \tau + 2C \cos^2 \tau = 0, \quad (2.145)$$

cuyas soluciones son:

$$\cos \tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 8C(A - C)}}{4C}, \quad (2.146)$$

que generan 4 soluciones para  $\tau$ .

La ecuación para  $g$ , se puede transformar en:

$$g = \sin \tau (D + 2E \cos \tau), \quad (2.147)$$

cuyas soluciones son:

$$\tau_1 = 0, \quad (2.148)$$

$$\tau_2 = \pi, \quad (2.149)$$

$$\tau_3 = |\arccos(-D/2E)|, \quad (2.150)$$

$$\tau_4 = -\tau_3. \quad (2.151)$$

Un aspecto interesante de notar es que las soluciones muestran simetría respecto al eje que contiene ambas masas, resultado natural ya que el potencial tiene esta simetría. De esta manera uno se fija en las raíces en el intervalo  $0 \leq \tau \leq \pi$ .

Para que físicamente exista una intersección, se deben encontrar soluciones comunes a las ecuaciones

$f = 0$  y  $g = 0$ , lo que se logra al satisfacerse cualquiera de las siguientes condiciones.

$$r_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 8C(A-C)}}{4C} - 1 = 0, \quad (2.152)$$

$$r_{3,4} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 8C(A-C)}}{4C} + 1 = 0, \quad (2.153)$$

$$r_{5,6} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 8C(A-C)}}{4C} + \frac{D}{2E} = 0. \quad (2.154)$$

No se encontraron soluciones para  $r_{5,6} = 0$ , por lo tanto las intersecciones surgen de las ecuaciones  $r_{1,2} = 0$  y  $r_{3,4} = 0$ . Desarrollando la primera ecuación se obtiene:

$$A + B + C = 0, \quad (2.155)$$

en estos términos aparecen las funciones

$$p_1 = a_{ext} M_{ext}^2 - a_{int} M_{int}^2, \quad (2.156)$$

$$q_1 = a_{ext}^2 M_{ext} - a_{int}^2 M_{int}, \quad (2.157)$$

que pueden desarrollarse hasta términos lineales, tomando la forma

$$p_1 = \frac{\partial p}{\partial a} DR, \quad (2.158)$$

$$q_1 = \frac{\partial q}{\partial a} DR, \quad (2.159)$$

donde  $p = aM^2$  y  $q = a^2M$ . Dividiendo la ecuación (2.155) entre  $DR$ , se obtiene:

$$1 - (1 - m_1) \left( \frac{7}{6} \frac{\partial p}{\partial a} - \frac{15}{16} \frac{\partial q}{\partial a} \right) = 0. \quad (2.160)$$

Realizando el mismo ejercicio para el caso  $r_{3,4} = 0$  se obtiene:

$$1 - (1 - m_1) \left( \frac{7}{6} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{15}{16} \frac{\partial q}{\partial a} \right) = 0. \quad (2.161)$$

Para este par de ecuaciones se pueden sustituir valores de  $m_1$  y resolver para  $a$ . Estas estimaciones de  $a$  se registran en la Tabla 1.1 bajo el nombre  $a_{Int}(\tau = 0)$  y  $a_{Int}(\tau = \pi)$ .

Los términos  $\rho_2$  y  $\omega_2$  permiten construir la órbita perturbada a orden  $M^2$ . Las órbitas más internas que se intersectan se etiquetan con el parámetro  $a_{Int}$ , que representa el radio de la órbita no perturbada, cuyo valor siempre se encuentra cerca de las resonancias 2:1 y 3:1. En Pichardo, Sparke & Aguilar (2005) y Paczynski (1977) se resuelven numéricamente órbitas circunestelares en un sistema binario circular, obteniendo los radios donde órbitas contiguas se intersectan, las cuáles difieren de las posiciones de las resonancias relevantes. Para hacer una comparación con estos trabajos expando la perturbación hasta términos  $M^4$ .

En las correcciones  $\omega_3$  y  $\omega_4$  se puede factorizar sin  $\tau$ , por lo tanto  $\tau = 0, \pi$  siguen siendo soluciones de  $g = 0$  (ver ecuación 2.139). Ambas soluciones corresponden a órbitas distintas, pero la que tiene relevancia física es la más interna, ya que ésta corresponde al límite externo del disco, a radios mayores las interacciones entre las órbitas evitará encontrar configuraciones estables. En este caso la intersección más interna corresponde a  $\tau = \pi$  y de aquí en adelante la referencia es a ella.

En la Tabla 1.2 se muestra para distintos valores de  $m_1$  el radio no perturbado  $a_{Int}$  donde se da la intersección, los radios donde esta órbita cruza el eje que contiene las estrellas ( $r(\tau = 0), r(\tau = \pi)$ ). Además se incluye el promedio entre estos valores, junto con el valor calculado por Pichardo et al. (2005).

Tabla 1.1: Parámetros que definen las órbitas interactuantes

| $m_1$ | $a_{Int}(\tau = 0)$ | $a_{Int}(\tau = \pi)$ |
|-------|---------------------|-----------------------|
| 0.1   | 0.221466            | 0.194854              |
| 0.2   | 0.289756            | 0.248712              |
| 0.3   | 0.34288             | 0.290943              |
| 0.4   | 0.389763            | 0.329489              |
| 0.5   | 0.434085            | 0.367823              |
| 0.6   | 0.478344            | 0.408625              |
| 0.7   | 0.525214            | 0.455181              |
| 0.8   | 0.579171            | 0.513398              |
| 0.9   |                     | 0.599322              |

Tabla 1.1: Esta tabla muestra para distintos valores de  $m_1$ , el valor  $a$  de la órbita no perturbada, que genera la órbita mas interna que interacciona con su vecina.

Tabla 1.2: Comparación de órbitas circunestelares interactuantes entre este trabajo y Pichardo et al. (2005)

| $m_1$ | $a_{Int}$ | $r(\tau = 0)$ | $r(\tau = \pi)$ | $\langle r \rangle$ | $\langle r \rangle_{Pichardo}$ | $r_{LR}$ |
|-------|-----------|---------------|-----------------|---------------------|--------------------------------|----------|
| 0.1   | 0.162813  | 0.164098      | 0.132629        | 0.148364            | 0.125                          | 0.213    |
| 0.2   | 0.207729  | 0.21126       | 0.169007        | 0.190134            | 0.162                          | 0.268    |
| 0.3   | 0.24455   | 0.248587      | 0.198925        | 0.223756            | 0.195                          | 0.308    |
| 0.4   | 0.279552  | 0.282522      | 0.227569        | 0.255046            | 0.228                          | 0.344    |
| 0.5   | 0.31547   | 0.315509      | 0.257322        | 0.286416            | 0.257                          | 0.379    |
| 0.6   | 0.354314  | 0.348941      | 0.29014         | 0.319541            | 0.317                          | 0.414    |
| 0.7   | 0.39825   | 0.384105      | 0.328461        | 0.356283            | 0.350                          | 0.454    |
| 0.8   | 0.450697  | 0.4236        | 0.376594        | 0.400097            | 0.387                          | 0.501    |
| 0.9   | 0.521308  | 0.477439      | 0.446583        | 0.462011            | 0.426                          | 0.570    |

Tabla 1.2: Para distintos valores de  $m_1$  se muestra el valor  $a_{Int}$  asociado a la órbita interactuante;  $r(\tau = 0)$  y  $r(\tau = \pi)$  corresponden a la distancia de la órbita a la estrella de masa  $m_1$ , sobre la línea que une las estrellas;  $\langle r \rangle$  y  $\langle r \rangle_{Pichardo}$  son el promedio entre éstos valores según los cálculos aquí mostrados y de Pichardo et al. (2005), respectivamente.  $r_{LR}$  es un radio aproximado al Lóbulo de Roche, dada por Eggleton (1983).

Las dos últimas columnas de la Tabla 1.2 varían desde un 10% hasta un 20%. Un aspecto relevante de notar es que las órbitas calculadas, las cuáles definen el límite del disco están completamente contenidas en el Lóbulo de Roche (Murray & Dermott 1999).



## §2.4 Perturbaciones de órbitas circumbinarias debido a la compañera en el sistema binario

En esta sección se pretende extender el análisis de perturbación de órbitas desarrollado en Sección §2.3, pero en órbitas que contienen a ambas estrellas.

El desarrollo expuesto a continuación se basa en el trabajo de Moulton (1963).

### §2.4.1 Método perturbativo

Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (2.99), donde el potencial  $U$  ahora corresponde a

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2}, \quad (2.162)$$

donde  $r_{1,2}$  son las distancias entre la partícula prueba y cada una de las estrellas.

Para este problema se coloca el origen en el centro de masa del sistema binario, con lo que el potencial se puede escribir como:

$$U = \frac{Gm_1}{r} \left[ 1 - \frac{2R_1}{r} \cos(v - v_1) + \left( \frac{R_1}{r} \right)^2 \right]^{-1/2} + \frac{Gm_2}{r} \left[ 1 + \frac{2R_2}{r} \cos(v - v_1) + \left( \frac{R_2}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.163)$$

donde  $r$  es el radio a la partícula en el disco circumbinario,  $R_1$  y  $R_2$  son las distancias a las estrellas de masa  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, finalmente  $v - v_1$  es el ángulo de posición de la partícula respecto al eje que une las estrellas, definido por el ángulo  $v_1$  medido respecto a un sistema de referencia fijo.

Las órbitas descritas con este potencial se pueden escribir como:

$$r = a(1 + \rho), v = n(t - t_0) + \theta, \quad (2.164)$$

donde  $a$  y  $n$  son el radio y la velocidad angular de la partícula en el sistema no perturbado, esto último corresponde al caso en que toda la masa del sistema estelar se encuentra contenida en el centro de masa.

En adelante todas las distancias serán adimensionalizadas con  $A$ , que es la separación entre las estrellas. Esto indica que la expansión será válida en órbitas externas a cualquier configuración del sistema binario. A continuación se sustituye la definición  $\tau = (n_1 - n)(t - t_0) = -(v_1 - v)$ , tal que los ángulos se miden respecto al eje que une las estrellas. Sustituyendo  $r$  y  $v$  (ecuaciones 2.164) en ecuaciones (2.99), y notando que  $r = a$  junto con  $v = n(t - t_0)$  representan la trayectoria no perturbada, se obtiene:

$$\ddot{\rho} - (1 + \rho) \left( \frac{\mu}{1 - \mu} + \dot{\theta} \right)^2 + \frac{\mu^2}{(1 - \mu)^2} \frac{1}{(1 + \rho)^2} = \frac{a^2 \mu^2}{G(m_1 + m_2)(1 - \mu)^2} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.165)$$

$$(1 + \rho) \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \left( \frac{\mu}{1 - \mu} + \dot{\theta} \right) = \frac{a^2 \mu^2}{G(m_1 + m_2)(1 - \mu)^2} \frac{1}{a(1 + \rho)} \frac{\partial U}{\partial v}. \quad (2.166)$$

A partir de una solución de la forma,

$$\rho = \sum_{i=4}^{\infty} \rho_i \mu^{i/3}, \theta = \sum_{i=4}^{\infty} \theta_i \mu^{i/3}, U = \sum_{i=4}^{\infty} U_i \mu^{i/3}, \quad (2.167)$$

se igualan los coeficientes del término proporcional a  $\mu^{i/3}$  del lado derecho e izquierdo, para cada una de las ecuaciones (2.165 y 2.166), con lo que se tienen un par de ecuaciones diferenciales a cada orden, las cuáles permiten resolver  $\rho_i$  y  $\theta_i$ .

El objetivo atrás de encontrar la órbita perturbada es buscar intersecciones de órbitas contiguas (ver Sección §2.3.2) que simulen el inicio de la región de fuertes interacciones que hace inestable al disco. A diferencia de las órbitas circunestelares, se busca la órbita mas externa sujeta a interacciones con su vecina. Recordar que órbitas alejadas del sistema binario no sentirán la perturbación, siendo descritas por órbitas circulares centradas en el centro de masa, que por definición nunca se intersectan. En otras palabras, un disco circumbinario sólo podrá acercarse al sistema binario hasta cierta distancia, la cuál dependerá de la distribución de masa estelar entre las componentes.

Siguiendo el proceso descrito en Sección §2.3.2, se puede calcular el radio de la intersección con una solución que considere hasta términos  $\mu^{i/3}$  en su expansión. Para el caso  $i = 18$ , la órbita correspondiente se encuentra alejada de las posiciones calculadas en Pichardo et al. (2005) por lo que se intenta buscar una mejor aproximación. El último término que se considera es proporcional a  $\mu^{21/3}$ , las órbitas perturbadas hasta este orden generan intersecciones para la órbita caracterizada por el radio no perturbado  $a_{Int}$ . Este valor junto con las posiciones de la intersección de la órbita con el eje que contiene a las estrellas ( $r(\tau = 0), r(\tau = \pi)$ ) se muestran en la Tabla 1.3. Además se muestran los radios análogos  $r_{Pichardo}(\tau = 0)$  y  $r_{Pichardo}(\tau = \pi)$  estimados con una construcción explícita de las órbitas, con una integración numérica de las ecuaciones de movimiento, desarrollada en Pichardo et al. (2005). Un trabajo análogo se encuentra en Rudak & Paczynski (1981).

Tabla 1.3: Comparación de órbitas circumbinarias interactuantes entre este trabajo y Pichardo et al. (2005)

| $m_1$ | $a_{Int}$ | $r(\tau = 0)$ | $r(\tau = \pi)$ | $r_{Pichardo}(\tau = 0)$ | $r_{Pichardo}(\tau = \pi)$ |
|-------|-----------|---------------|-----------------|--------------------------|----------------------------|
| 0.1   | 1.3547    | 1.56598       | 1.29565         | 1.87 (1.81)              | 1.80 (1.72)                |
| 0.2   | 1.39199   | 1.62675       | 1.35089         | 2.04 (1.87)              | 2.00 (1.81)                |
| 0.3   | 1.37327   | 1.61791       | 1.36374         | 1.94 (1.90)              | 1.90 (1.86)                |
| 0.4   | 1.31308   | 1.56039       | 1.36419         | 1.92 (1.91)              | 1.90 (1.89)                |
| 0.5   | 1.16426   | 1.41829       | 1.41829         | 2.0 (1.91)               | 2.0 (1.91)                 |

Tabla 1.3: Para distintos valores de  $m_1$  se muestra el valor  $a_{Int}$  asociado a la órbita interactuante;  $r(\tau = 0)$  y  $r(\tau = \pi)$  corresponden a la distancia de la órbita al centro de masa, sobre la línea que une las estrellas;  $r_{Pichardo}(\tau = 0)$  y  $r_{Pichardo}(\tau = \pi)$  son los valores equivalentes de las últimas dos columnas pero extraídas de Pichardo et al. (2005). En estas columnas en paréntesis, aparecen los valores de Rudak & Paczynski (1981).

El tamaño de los discos que se encuentran en esta tesis, se pueden comparar con los resultados obtenidos en Artymowicz & Lubow (1994), donde se calculan los tamaños del disco mediante un balance entre las torcas viscosas, que intentan extender el disco, y las torcas resonantes, que comprimen el disco.

En el caso de una estrella secundaria con masa igual a 0.3 y para distintos valores de la viscosidad, el radio del disco varía entre 0.25 y 0.27, mientras en Pichardo et al. (2005) se encuentra un radio de 0.2. Para la estrella primaria (masa igual a 0.7), el radio varía entre 0.3 y 0.4, comparado con 0.35 obtenido en Pichardo et al. (2005). Para el disco circumbinario, el radio interno es 1.75 (Artymowicz & Lubow 1994) contra 1.90 (Pichardo et al. 2005). La diferencia entre los valores que se extraen de ambos trabajos se debe a que en Artymowicz & Lubow (1994) se consideran efectos viscosos y en este trabajo solo se considera la contribución gravitacional de las estrellas.

### §2.4.2 Análisis de estabilidad

A pesar de que la aproximación es muy buena (correcciones del orden  $a\mu^{21/3} = a^{-9.5}$ ,  $a > 1$ ) los radios  $r(\tau = 0)$  y  $r(\tau = \pi)$  no coinciden con los resultados en Pichardo et al. (2005), con la precisión obtenida para las órbitas circunestelares (ver Sección §2.3.2). La explicación de este comportamiento se puede extraer de un análisis sobre la estabilidad de las órbitas analíticas calculadas. La órbita asociada a la intersección puede ser inestable, pero las órbitas cerradas que se extraen numéricamente deben ser estables, de lo contrario el código no las podría encontrar, debido al algoritmo que usa para acercarse a ellas. Si esto pasara se podría concluir que las órbitas analíticas inestables no son físicamente plausibles, por lo que una comparación con Pichardo et al. (2005) se vuelve irrelevante.

En Message (1959) se estudia la estabilidad de las órbitas para el problema restringido de 3 cuerpos, construyendo la ecuación que describe el desplazamiento perpendicular ( $q$ ) a la órbita de interés. La ecuación se puede escribir como

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + \Theta(\tau)q = 0, \quad (2.168)$$

donde

$$\Theta(\tau) = \frac{1 + 4\frac{d\psi}{dt} + 3\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + X + Y}{(n-1)^2}, \quad X = \frac{\frac{dx_0}{dt} \frac{d^3x_0}{dt^3} + \frac{dy_0}{dt} \frac{d^3y_0}{dt^3}}{\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2}, \quad Y = \frac{1}{y_0} \left[ \frac{d^2y_0}{dt^2} + 2\frac{dx_0}{dt} \right], \quad (2.169)$$

con  $\psi$ , la posición angular de un punto de la órbita;  $x_0$  y  $y_0$ , las coordenadas cartesianas de la órbita sin desplazamientos normales;  $n$  es la velocidad angular asociada a la órbita en unidades de la velocidad angular del sistema binario.

En Message (1959) se resuelve la ecuación (2.169) expandiendo la ecuación diferencial en series de Fourier hasta cierto orden y resolviendo las ecuaciones algebraicas resultantes, donde aparecen los coeficientes de Fourier  $q_r$  y  $\theta_r$ , dados por las expresiones

$$q = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q_r \exp^{i(r+c)u}, \quad (2.170)$$

$$\Theta(\tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \theta_r \exp^{ir u}. \quad (2.171)$$

La ecuación que permite calcular  $c$  está dada en Message(1959), por:

$$c^4 - (4 + \lambda_{-1} + \lambda_1)c^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_{-1})c + \lambda_{-1}\lambda_1 - \nu_1\nu_{-1} = 0, \quad (2.172)$$

donde

$$\lambda_{\pm 1} = \theta_0 - 1 - (\beta_0 + \beta_{\pm 2})\theta_1\theta_{-1} - \beta_{\pm 2}^2\beta_{\pm 3}\theta_1^2\theta_{-1}^2, \quad (2.173)$$

$$\nu_{\pm 1} = -\beta_0\theta_{\pm 1}^2, \quad (2.174)$$

$$\beta_r = (\theta_0 - (r + c)^2)^{-1}, \quad (2.175)$$

considerando  $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}$  como los coeficientes relevantes de la expansión.

La ecuación (2.172) involucra a  $c$  junto con  $a, m_1$  y  $m_2$  a través de los coeficientes de Fourier  $\theta_0, \theta_1$  y  $\theta_{-1}$ . Dada una órbita particular ( $a, m_1, m_2 = 1 - m_1$  conocidos) se pueden estimar los 4 valores de  $c$  de la ecuación (2.172). Si todos estos valores de  $c$  son reales, la variación de la órbita se mantiene acotada y la órbita es estable. Si la parte imaginaria de las soluciones para  $c$  son distintas de cero, se genera un modo que produce desplazamientos normales divergentes, lo que indica que la órbita es inestable.

Las órbitas para las que se analiza la estabilidad se construyen con los radios no perturbados  $a$ , mostrados en la Tabla 1.4, donde  $a_{Pichardo}$  corresponde al parámetro  $a$ , adecuado para generar intersecciones de la órbita en el eje de las estrellas, que aproximadamente coincidan con los valores  $r_{Pichardo}(\tau = 0)$  y  $r_{Pichardo}(\tau = \pi)$  mostrados en Tabla 1.3.

Tabla 1.4: Orbitas para las que se estudia inestabilidad

| $m_1$ | $a_1$ | $a_{Int}$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_{Pichardo}$ | $a_4$ |
|-------|-------|-----------|-------|-------|----------------|-------|
| 0.1   | 1.25  | 1.3547    | 1.45  | 1.65  | 1.8            | 2.75  |
| 0.2   | 1.29  | 1.39199   | 1.49  | 1.69  | 1.99           | 2.79  |
| 0.3   | 1.27  | 1.37327   | 1.47  | 1.67  | 1.87           | 2.77  |
| 0.4   | 1.21  | 1.31308   | 1.41  | 1.61  | 1.86           | 2.71  |
| 0.5   | 1.06  | 1.16426   | 1.26  | 1.46  | 1.96           | 2.56  |

Tabla 1.4: Para distintos valores de  $m_1$  se muestran los valores de  $a$  para los que se construyen órbitas para estudiar su inestabilidad. Se toman valores menores y mayores a  $a_{Int}$  y un valor  $a_{Pichardo}$  que corresponde a la órbita teórica correspondiente a las órbitas interactuantes en Pichardo et al. (2005).

Se calculan  $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}$  para las órbitas perturbadas hasta términos  $\mu^{21/3}$ , para los valores  $a, m_1$  (y  $m_2 = 1 - m_1$ ) dados en la Tabla 1.4, se sustituye en la ecuación (2.172) y se resuelve numéricamente para  $c$ . En la Tabla 1.5 se dan los máximos valores de la parte imaginaria de  $c$  del conjunto de soluciones de la ecuación (2.172).

Para un valor de  $m_1$ , la tendencia de  $\max(\Im(c))$  es a decrecer conforme  $a$  aumenta. Este comportamiento es consistente con el hecho de que órbitas más externas deberán tener tasas, en que crece la inestabilidad, mucho más pequeñas. De hecho para  $a = a_4$ ,  $c$  es real y la órbita es estable, como era de esperarse. Nótese que  $\max(\Im(c(a_{Pichardo}))) \approx 10^{-5}$ , lo que indica que la órbita consistente con Pichardo et al.(2005) es inestable, sin embargo este valor es suficientemente pequeño para considerar que numéricamente  $\max(\Im(c)) = 10^{-5}$  es un umbral, tal que para  $\max(\Im(c)) \leq 10^{-5}$  se tienen órbitas estables e inestables para  $\max(\Im(c)) > 10^{-5}$ .

En esta sección la forma de estimar el radio interno del disco circumbinario se logra con un análisis de estabilidad, tal que la órbita estable más interna se define como el límite del disco circumbinario, en concordancia con el trabajo desarrollado en Pichardo et al. (2005). Un resultado muy importante es que se establece un método analítico para construir órbitas periódicas que sean la estructura donde gas o polvo puedan establecerse para formar este disco. Además se muestra una forma de checar si las órbitas son inestables, tal que se pueda valorar la importancia física de cualquier tipo de órbita en el problema circular de tres cuerpos restringido.

Tabla 1.5: Máximo de la parte imaginaria de  $c$  de las órbitas estudiadas en el análisis de inestabilidad

| $\max(\Im(c)), m_1$ | 0.1                   | 0.2                   | 0.3                   | 0.4                   | 0.5                    |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| $c(a_1)$            | $2.65 \times 10^{-3}$ | $5.64 \times 10^{-3}$ | $8.26 \times 10^{-3}$ | $9.38 \times 10^{-3}$ | $3.60 \times 10^{-11}$ |
| $c(a_{Int})$        | $6.47 \times 10^{-4}$ | $1.43 \times 10^{-3}$ | $1.84 \times 10^{-3}$ | $1.62 \times 10^{-3}$ | $2.76 \times 10^{-12}$ |
| $c(a_2)$            | $2.35 \times 10^{-4}$ | $4.87 \times 10^{-4}$ | $5.83 \times 10^{-4}$ | $4.29 \times 10^{-4}$ | $4.35 \times 10^{-13}$ |
| $c(a_3)$            | $4.96 \times 10^{-5}$ | $9.24 \times 10^{-5}$ | $9.60 \times 10^{-5}$ | $5.53 \times 10^{-5}$ | $2.68 \times 10^{-14}$ |
| $c(a_{Pichardo})$   | $2.09 \times 10^{-5}$ | $2.07 \times 10^{-5}$ | $2.72 \times 10^{-5}$ | $9.87 \times 10^{-6}$ | 0.0                    |
| $c(a_4)$            | 0.0                   | 0.0                   | 0.0                   | 0.0                   | 0.0                    |

Tabla 1.5: Para un conjunto de valores  $m_1$  se muestran el máximo valor de la parte imaginaria de  $c$  de todas las soluciones de la ecuación (2.172)

### §2.4.3 Comparación con resultados numéricos

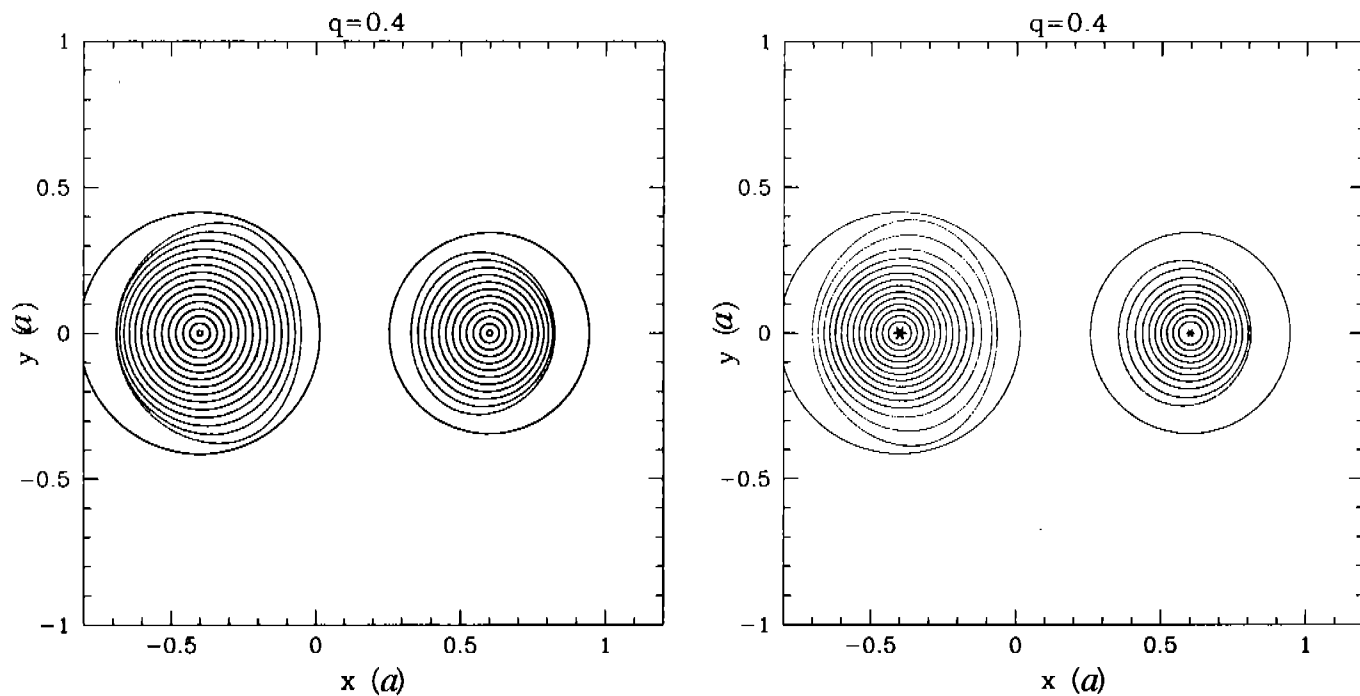
En el caso de sistemas binarios, la forma y extensión de los discos es diferente al caso de una sola estrella, donde las órbitas periódicas son circunferencias, limitadas en tamaño por el máximo momento angular específico de la nube que acreta para formar el sistema. La estrella compañera genera fuerzas que perturban el disco de la otra estrella, creando una brecha en el disco alrededor de la órbita de la estrella perturbadora. Al mismo tiempo, el disco se deforma ligeramente.

#### Orbitas

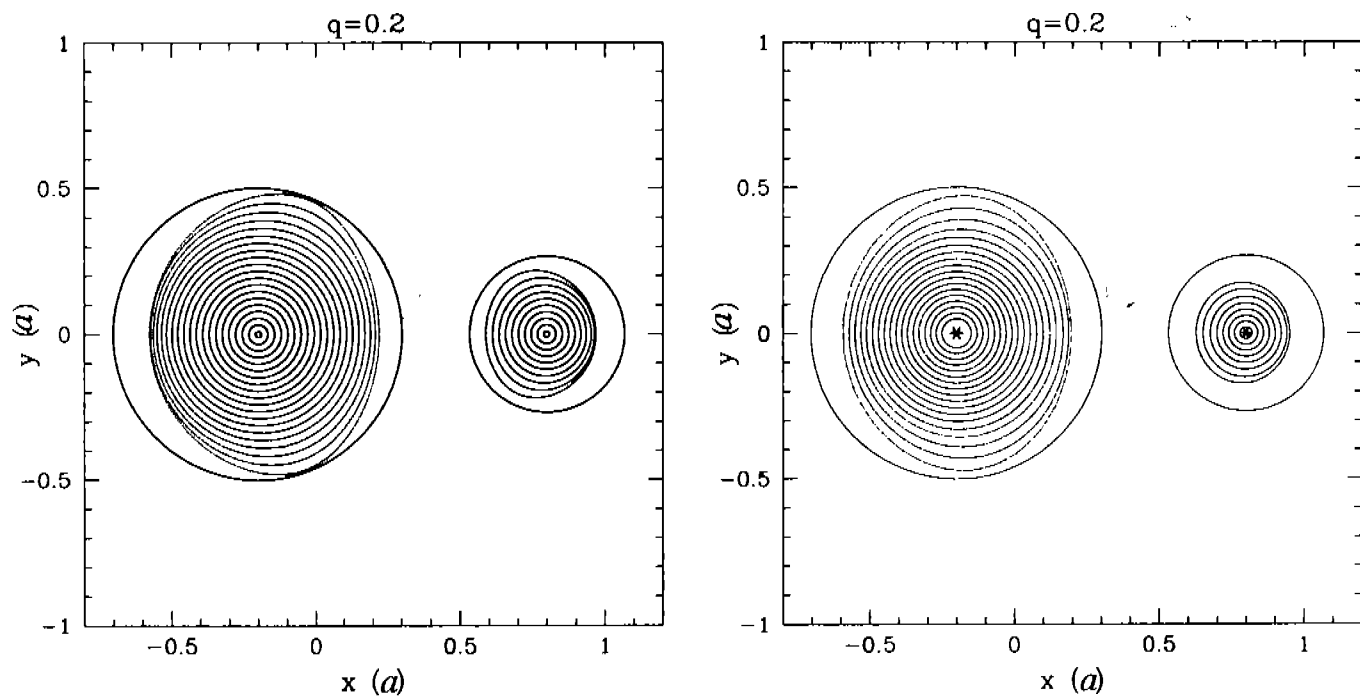
En esta sección se muestra una comparación entre los discos obtenidos con la aproximación analítica de las Secciones §2.3 y §2.4 y una solución numérica desarrollada en Nagel & Pichardo (2007).

En las figuras 2.10, 2.11 y 2.12 se muestra una comparación para discos circunestelares entre la aproximación presentada en Sección §2.3 para órbitas periódicas en sistemas binarios (cuadro de la izquierda) y los cálculos numéricos de Nagel & Pichardo (2007) (cuadro de la derecha). La masa de la estrella secundaria ( $q = m_2/m_1 + m_2$ ) está indicada en la parte superior de cada figura. La circunferencia continua representa un ajuste al radio del Lóbulo de Roche (ver Figura 2.8) calculada por Eggleton (1983).

De igual forma, en figuras 2.13, 2.14 y 2.15 se muestra una comparación cualitativa de los discos circumbinarios entre la aproximación analítica (cuadro de la izquierda) presentada en Sección §2.4 y las órbitas calculadas numéricamente (Nagel & Pichardo 2007) en el cuadro de la derecha. La distancia de las estrellas con respecto al centro de masa del sistema binario se muestra.



**Figure 2.10:** Comparación de los discos circunestelares entre órbitas calculadas con la aproximación presentada en esta tesis y los resultados numéricos presentados en Nagel & Pichardo (2007) para el caso  $q = 0.4$ . El panel izquierdo muestra la aproximación analítica. El panel derecho muestra la aproximación numérica. La línea continua alrededor de los discos es la aproximación de Egelton (1983) al lóbulo de Roche. Los ejes están en unidades de la distancia entre las estrellas.



**Figure 2.11:** Lo mismo, que la figura 2.10 para  $q = 0.2$

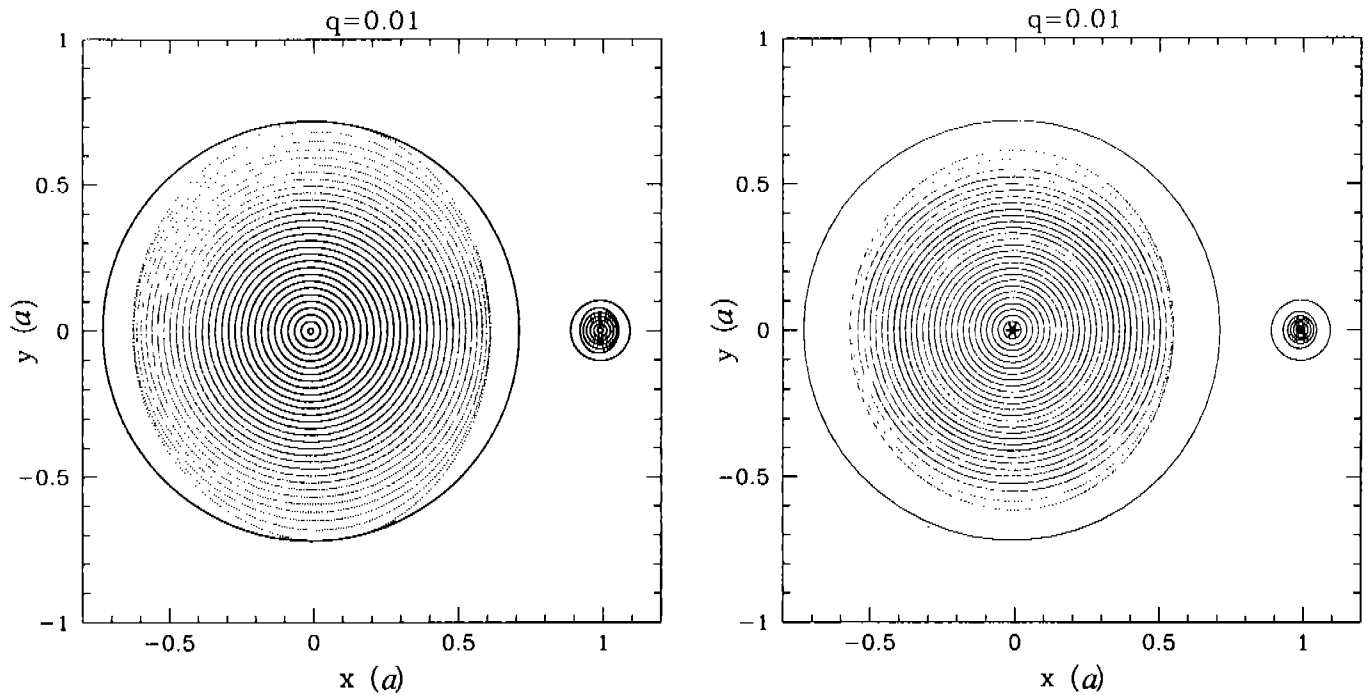


Figure 2.12: Lo mismo que la figura 2.10 para  $q = 0.01$

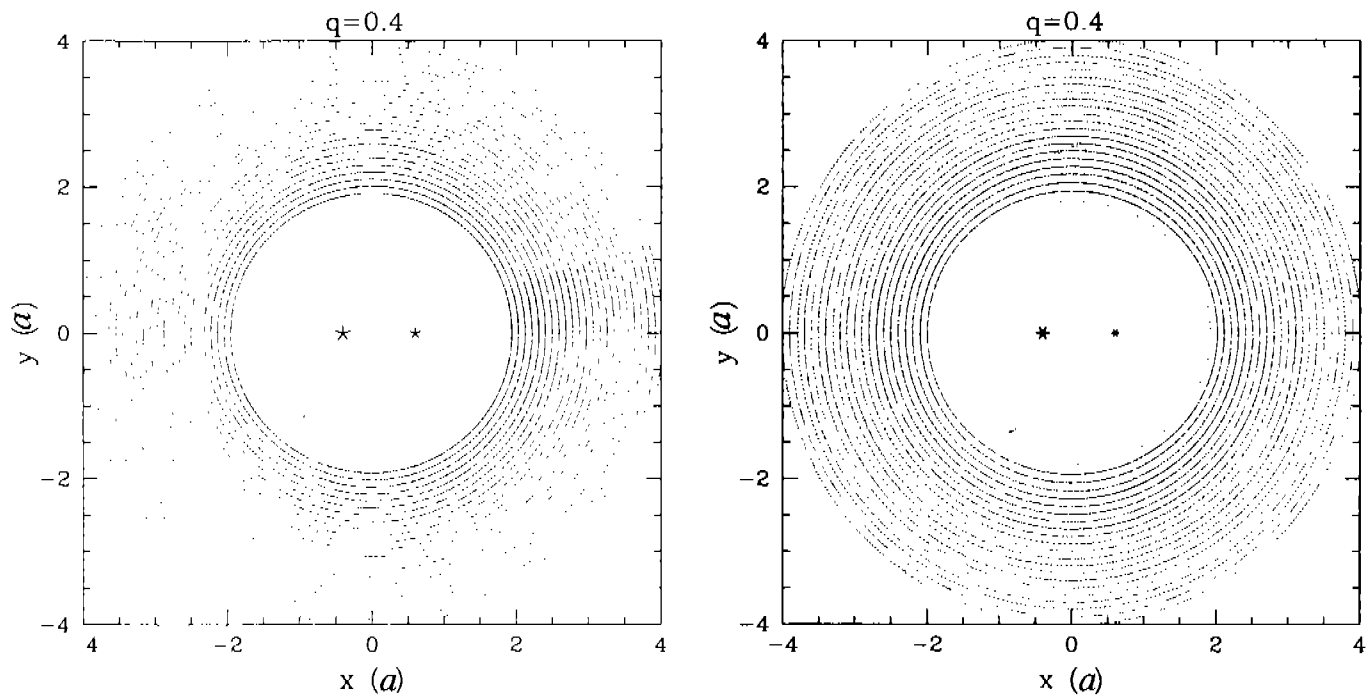


Figure 2.13: Comparación de los discos circumbinarios entre órbitas calculadas con la aproximación presentada en esta tesis y los resultados numéricos presentados en Nagel & Pichardo (2007) para el caso  $q = 0.4$ . El panel izquierdo muestra la aproximación analítica. El panel derecho muestra la aproximación numérica. Los ejes están en unidades de la distancia entre las estrellas. La distancia de la estrella primaria y secundaria respecto al centro de masa del sistema se indica con los asteriscos

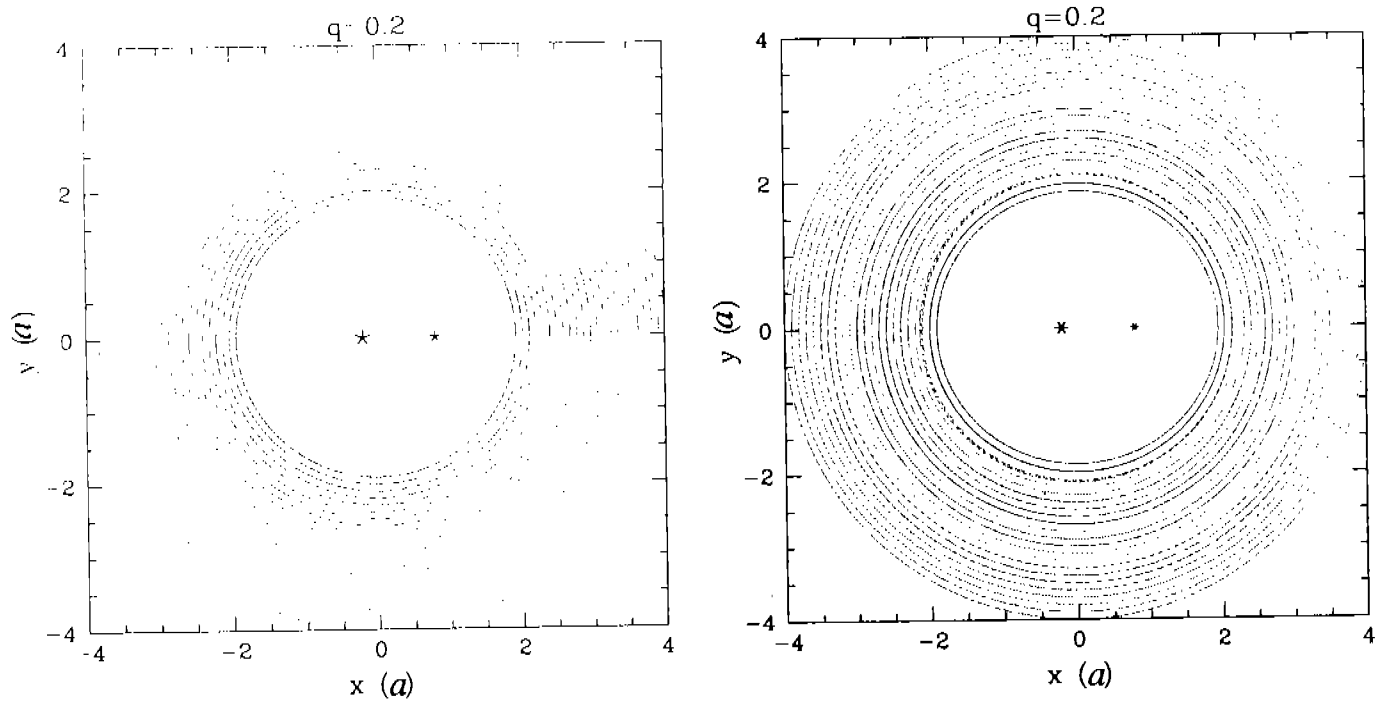


Figure 2.14: Lo mismo que la figura 2.13 para  $q = 0.2$

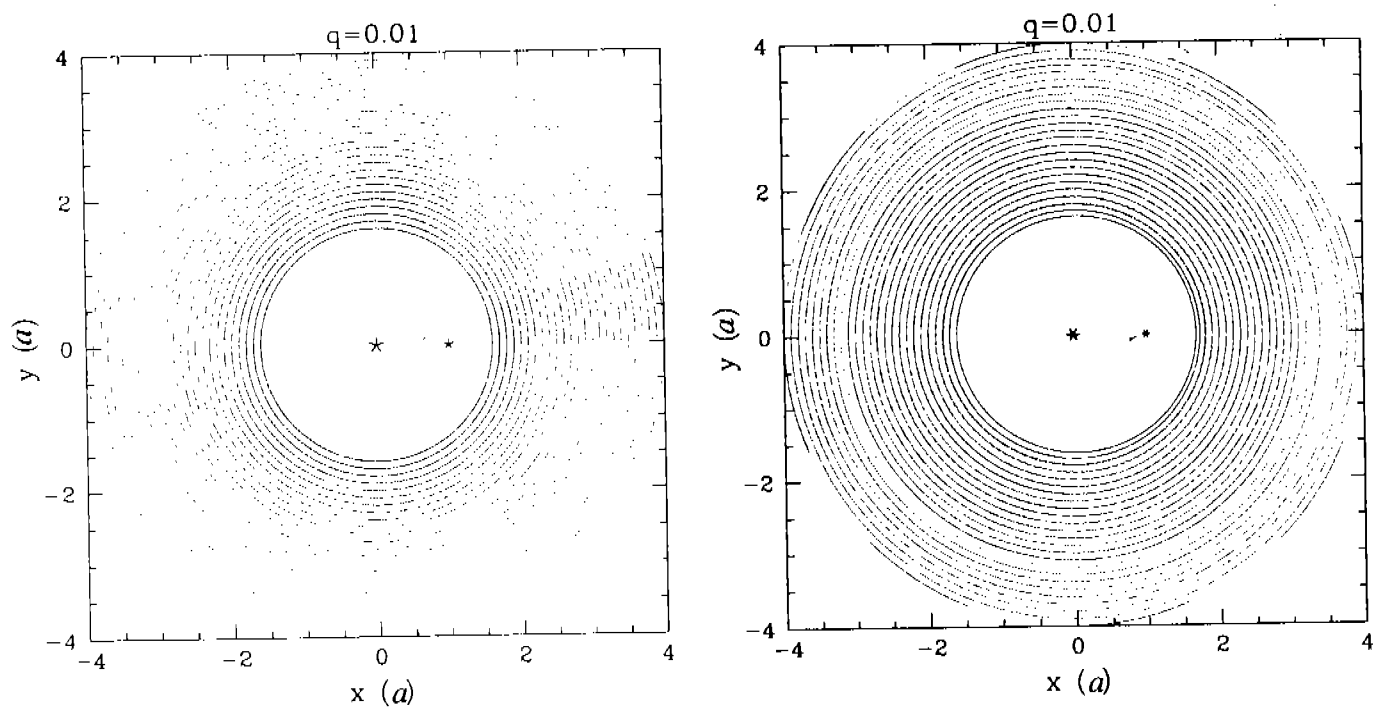


Figure 2.15: Lo mismo que la figura 2.13 para  $q = 0.01$



En general, los discos son iguales en extensión y forma, salvo en el caso extremo con  $q = 0.01$ , donde los discos analíticos resultan de forma similar pero un poco más grandes en extensión radial.

### Curvas de rotación

Aquí se muestran las curvas de rotación, para una comparación cuantitativa que involucra posiciones y velocidades, donde se grafica la posición  $r$  vs velocidad total  $V_c$  para los mismos tres ejemplos dados en la sección anterior.

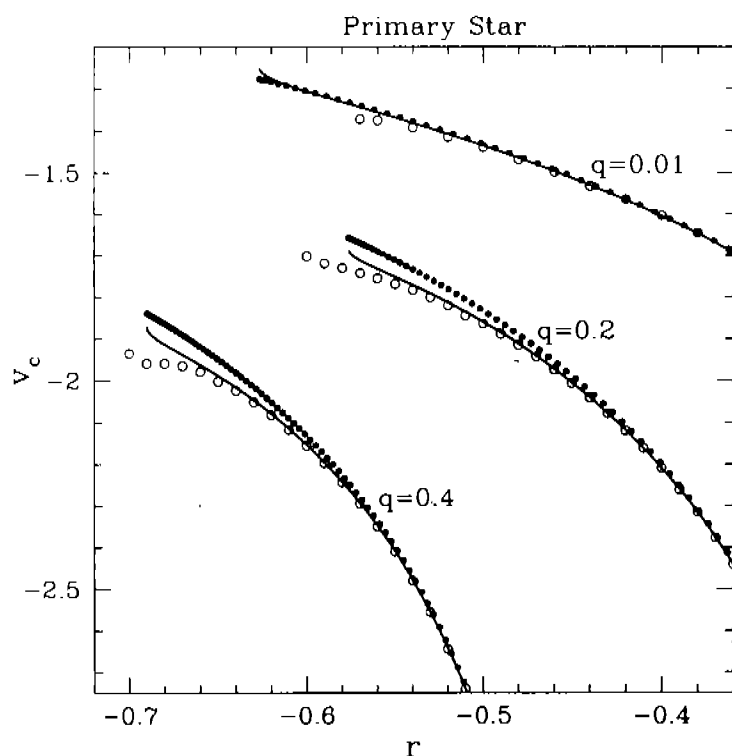
La velocidad total  $V_c$  corresponde a la magnitud de la velocidad. Para los discos primarios se comparan las curvas de rotación obtenidas a lo largo del eje  $x$ , en la parte izquierda de los discos. Para la secundaria se compara la curva de rotación a lo largo del eje  $x$ , pero en la parte derecha de los discos. Las velocidades calculadas son transformadas al marco inercial, simplemente sumando (o restando, dependiendo del disco) la velocidad de la estrella correspondiente, y sumando (o restando) un factor  $\Omega r$ , where  $\Omega$  es la velocidad angular de la estrella y  $r$  es el radio para un punto dado en la curva de rotación. La última parte de la transformación se debe a que el sistema de referencia donde se resuelve el problema, obliga a rotar al disco con el sistema binario.

En la figura 2.16 y 2.17 se muestran las regiones externas de las curvas de rotación de los discos primario y secundario, respectivamente. Para ambas figuras se muestran tres diferentes casos, para  $q = 0.01, 0.2, 0.4$ . Tres diferentes tipos de líneas indican, a) la curva de rotación kepleriana (círculos llenos); b) la aproximación analítica que provee este trabajo (línea continua) y c) la solución numérica (círculos vacíos). La velocidad y radio están dadas en unidades donde  $G = 1, m_1 + m_2 = 1, a = 1$  y  $\Omega = 1$ .

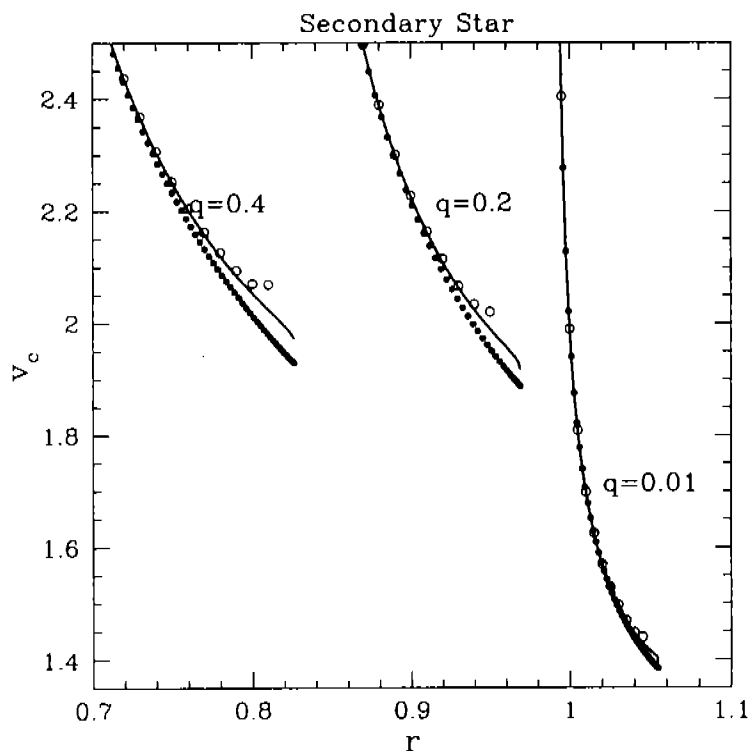
Las curvas de rotación en aproximadamente 70% del disco corresponden con precisión a un disco kepleriano. Para el resto del disco (30%), la velocidad de los discos keplerianos está sistemáticamente arriba del resultado numérico que resuelve con buena precisión, el problema restringido de tres cuerpos. Como era de esperarse, la solución analítica está muy cerca de la solución numérica.

## §2.5 Perturbación de una órbita acretaando hacia un objeto central debido a la presencia de un segundo cuerpo

El problema estudiado hasta ahora está restringido a órbitas ya establecidas en una configuración estacionaria alrededor de una o de ambas estrellas, donde se despreció la contribución de material acretaando de la nube, lo cual corresponde a una etapa posterior a la formación del sistema binario y de los discos. Claramente de interés sería el estudio del material que está cayendo desde la nube en el colapso en el que se forma(n) la(s) estrella(s) junto con el(los) disco(s). Este problema se puede pensar, como material que cae a un objeto central en formación que es perturbado por un segundo objeto, que en este caso corresponde a una estrella secundaria en formación. El formalismo que aquí se expone está basado en Murray & Dermott (1999).



**Figure 2.16:** Comparación entre la curva de rotación kepleriana (círculos llenos), la aproximación analítica (línea continua) y la solución numérica (círculos vacíos), para la región externa del disco primario, para  $q = 0.01, 0.2, 0.4$ .



**Figure 2.17:** Lo mismo que la figura 2.16 pero para la estrella secundaria

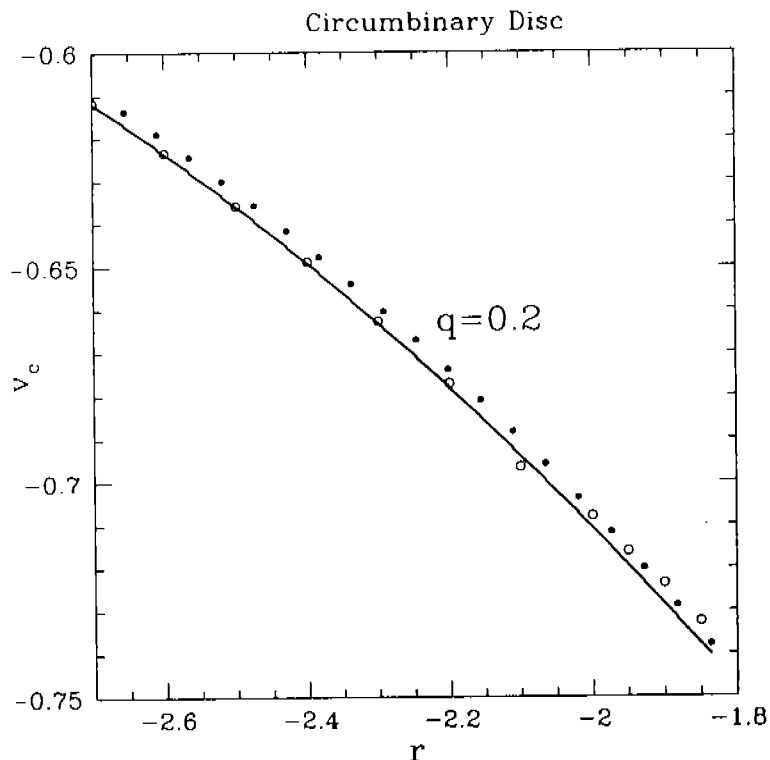


Figure 2.18: Lo mismo que la figura 2.16 pero para el disco circumbinario

### §2.5.1 Método perturbativo

En la sección 7.6 de Murray & Dermott (1999) se estudia la perturbación sobre una masa moviéndose en una órbita elíptica alrededor de una masa central, debido a una masa que también se encuentra en una órbita elíptica alrededor de la misma masa. Ambas órbitas se encuentran en el mismo plano. La órbita de la partícula perturbada está contenida en la órbita de la masa que perturba. El potencial de la perturbación depende del tiempo de una forma periódica (con el periodo de rotación de la masa). Por lo tanto, la trayectoria perturbada sufrirá oscilaciones que harán variar el plano de su órbita de una manera complicada, lo que dificultará el estudio de intersecciones entre trayectorias en el problema perturbado. El caso que aquí se estudia corresponde a órbitas circulares.

Al considerar como aproximación que la masa está distribuida a lo largo de toda la trayectoria, tal que una sección mas densa corresponde a una permanencia mayor de la masa en esa posición, se puede concluir que las expresiones de la tasa en que varían los parámetros orbitales equivale al resultado que se extrae de las ecuaciones planetarias de Lagrange cuando solo se consideran los términos seculares. Es natural pensar que esto sucede así, ya que al distribuir la masa, estamos quitando las contribuciones de periodo corto, como a su vez se hace al extraer los términos seculares de la función de perturbación.

Esta aproximación será buena en tanto el periodo de la perturbación sea mucho menor que un periodo característico del objeto perturbado. En este caso esto último depende de la órbita que estamos considerando y desde que distancia se esta integrando. Las órbitas que interesan serán órbitas parabólicas que provienen de infinito, por lo que no es relevante un periodo sino el tiempo que tarda la partícula a perturbar en caer una distancia característica desde donde sienta apreciablemente la influencia de la

perturbación.

El objetivo de este estudio es identificar regiones en el espacio donde órbitas perturbadas se intersectan produciendo choques, a partir de una configuración donde en cada punto solo pasa una trayectoria (p.ej.: solución de Ulrich(1976)). El problema completo depende del tiempo (posición de la masa perturbada) y del punto sobre la órbita a perturbar. Es bueno aclarar que toda la órbita que sufrirá la perturbación ya que está densamente poblada de partículas, debido a que ésta está continuamente alimentada por material de una nube.

### §2.5.2 Aplicación sobre la trayectoria parabólica de acreción de una partícula hacia la estrella

Para simplificar el problema, extrayendo el comportamiento secular, evitando además la dependencia en el tiempo, se considera que la masa perturbadora (masa de la estrella secundaria) está distribuida a lo largo de toda su órbita. El caso se restringe a una órbita circular, la densidad lineal asociada es constante y está dada por:

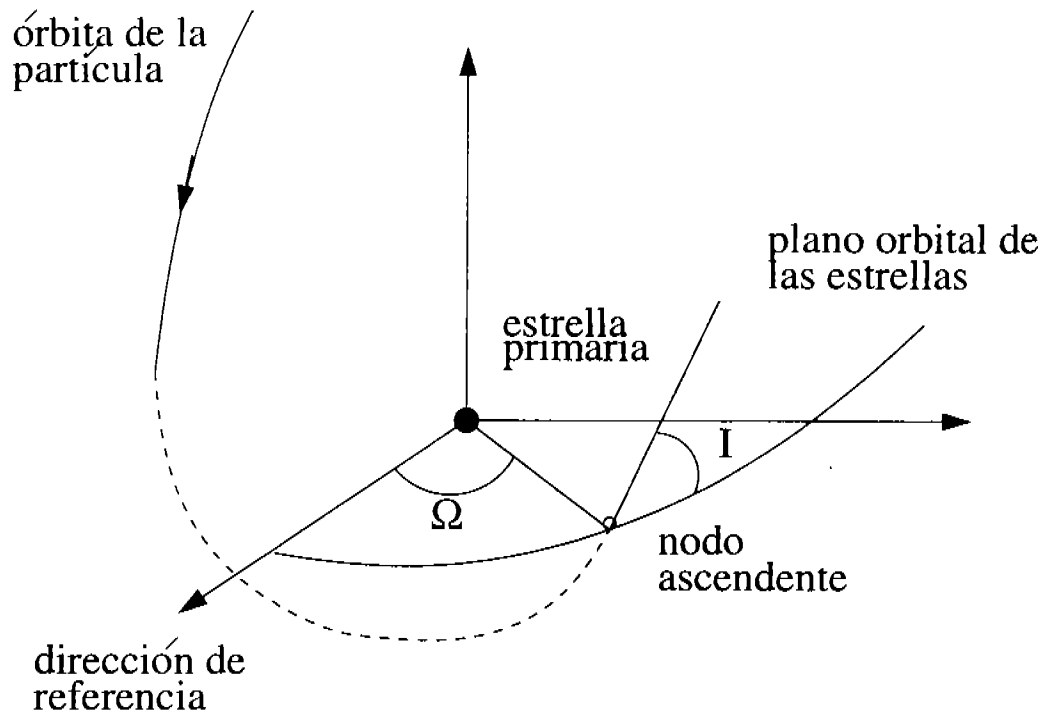
$$\rho' = \frac{m'}{2\pi r'}, \quad (2.176)$$

donde  $m'$  es la masa de la secundaria y  $r'$  el radio de su órbita.

Las trayectorias a perturbar son las órbitas parabólicas que representan la solución del problema de acreción de Ulrich (Ulrich 1976), para material acretando hacia un objeto central, ver Figura 2.19. Esta solución tiene simetría cilíndrica y al tener asociada la perturbación esta misma simetría, indica que las posibles intersecciones tendrán también esta misma característica.

Cada una de estas órbitas parabólicas están contenidas dentro de un plano con una inclinación  $I = \pi/2 - \theta_0$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo respecto al eje  $z$  que define al plano que contiene la órbita particular descrita con la solución de Ulrich(1976). Una característica importante de estos planos es que todos contienen a la estrella primaria. Al considerar una dirección particular en el plano orbital del sistema binario, definida por el ángulo azimutal  $\phi$ , los planos caracterizados por distintos valores de  $\theta_0$  comparten la misma línea de nodos. De esta manera un cambio en  $\theta_0$  corresponde a un cambio en la inclinación, sin modificaciones en los otros parámetros orbitales.

Al considerar la perturbación promediada sobre toda la órbita, los cambios en los parámetros orbitales modifican el plano orbital de la partícula de prueba que acreta. Todos los planos perturbados incluyen a la masa central. Las órbitas perturbadas pueden intersectarse; por la simetría del problema, cualquier intersección es una circunferencia con centro en el eje  $z$ , paralela al plano orbital de las estrellas. El parámetro  $\Omega$  (longitud del nodo ascendente), equivalente al ángulo azimutal  $\phi$ . Las variaciones en el tiempo de  $\Omega$  están etiquetadas para cada  $\theta_0$ , esto indica que la perturbación rotará los planos orbitales de las partículas que acretan en órbitas parabólicas, a una tasa uniforme para todas las partículas caracterizadas con un  $\theta_0$  en particular, lo que asegura que no habrá intersecciones entre este subconjunto de planos. En este análisis no considero variaciones en los parámetros orbitales ( $a, e, \dot{\omega}$ ) que caracterizan a la órbita dentro de su plano orbital. Este conjunto de elementos orbitales se muestran en la Figura 2.3. La definición gráfica de  $I$  y  $\Omega$  se muestra en la Figura 2.19.



**Figure 2.19:** Diagrama en el que se muestra la órbita de la partícula que es perturbada por las estrellas. Además se indica la definición gráfica de los ángulos  $I$  y  $\Omega$ .

Por lo tanto, el único parámetro que se estudia es la inclinación. De esta manera se tendrá una interacción cuando 2 planos converjan en uno, debido a variaciones temporales en la inclinación. Existe un detalle que se necesita aclarar. Al seguir toda la órbita, caracterizada por el ángulo  $\theta_0$ , las coordenadas esféricas estarán caracterizadas por  $(r, \theta)$ , donde  $\theta$  variará desde  $\theta_0$  hasta  $\pi/2$ , al momento de llegar al plano orbital. Además  $r$  variará desde infinito hasta  $r_I = \sin^2 \theta_0$  (Ulrich 1976). De hecho la parte de la trayectoria que está contenida en un cono con ángulo de apertura  $\theta_0$  es únicamente un anillo horizontal al plano orbital (donde se halla el sistema binario) que se encuentra en el infinito (punto de partida de la acreción). Un diagrama del sistema que se estudia se muestra en la Figura 2.19.

En conclusión, un choque se dará al radio donde la partícula prueba empieza a distinguir a ambas estrellas y en consecuencia donde cambios en la inclinación de la órbita produce una intersección. Este choque ocurre para todos los puntos en el anillo caracterizado por el ángulo  $\theta = \pi/2 - I$ , cuando el cambio en la inclinación para este ángulo acercó dos planos orbitales contiguos. De hecho no se puede descartar que el cambio en la inclinación produzca algún otro choque, pero para una partícula que acreta el choque que ocurre primero es el mas importante, ya que a partir de ahí se verá modificada la trayectoria posterior, la cuál ya no será la solución de Ulrich(1976).

A continuación se calculará la ecuación que representa la variación en el tiempo de la inclinación. Claramente al variar la inclinación, cambiará el vector del momento angular, que siempre es perpendicular al plano de la órbita. Si

$$d\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{z}, \quad (2.177)$$

es la fuerza de la perturbación, donde  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$  son vectores unitarios, los dos primeros corresponden a coordenadas sobre el plano orbital y el último a la dimensión perpendicular a él. El cambio en el tiempo del momento angular, se puede escribir como:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{r} \times d\vec{F} = rF_\theta \hat{z} - rF_z \hat{\theta}. \quad (2.178)$$

La componente en la dirección (Z) (paralela al vector velocidad angular del sistema binario) del momento angular de la órbita,

$$h_Z = h \cos I. \quad (2.179)$$

Primero se deriva respecto al tiempo, obteniendo

$$\dot{h}_Z = \dot{h} \cos I - h \sin I \dot{I}, \quad (2.180)$$

sustituyendo

$$\cos I = \frac{h_Z}{h}, \quad (2.181)$$

$$\sin I = \frac{(h^2 - h_Z^2)^{1/2}}{h}, \quad (2.182)$$

se obtiene, al despejar  $\dot{I}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{h}/h - \dot{h}_Z/h_Z}{\sqrt{(h/h_Z)^2 - 1}}. \quad (2.183)$$

La variación temporal de  $h$  ( $\vec{h} = h\hat{z}$ ) solo depende de la componente en la dirección de  $\vec{h}$ , así,

$$\dot{h} = rF_\theta, \quad (2.184)$$

la componente perpendicular a  $\vec{h}$  sólo la hace cambiar de dirección.  $h_Z$  es la componente del momento angular en las coordenadas no rotadas y  $\frac{d\vec{h}}{dt}$  está expresado en las coordenadas sobre el plano orbital inclinado. Para relacionar ambos sistemas se usan las matrices de rotación (ver Murray & Dermott 1999) para obtener  $\dot{h}_Z$ .

Primero se requiere rotar el vector  $\frac{d\vec{h}}{dt}$  (2.178) un ángulo  $\omega + f$  alrededor del eje Z, después un ángulo  $I$  alrededor de la línea de nodos. De esta forma,  $\dot{h}_Z$  se puede escribir como:

$$\dot{h}_Z = r(F_\theta \cos I - F_z \cos(\omega + f) \sin I), \quad (2.185)$$

sustituyendo esta ecuación en la expresión para  $I$ , se obtiene:

$$\dot{I} = \frac{\sqrt{a\mu^{-1}(1-e^2)}F_z \cos(\omega + f)}{1 + e \cos f}, \quad (2.186)$$

donde se ha sustituido la trayectoria de la partícula de una cónica (Murray & Dermott 1999) dada por:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.187)$$

Por otro lado, la expresión correspondiente que describe la órbita en el problema de acreción de Ulrich(1976) es:

$$r = \frac{r_d \sin^2 \theta_0}{1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}}, \quad (2.188)$$

como representa una órbita parabólica, se cumple:  $\lim_{a \rightarrow \infty, e \rightarrow 1} a(1-e^2) = r_d \sin^2 \theta_0$ , además es necesario que se satisfaga  $\cos f = -\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$ . Sustituyendo la primera condición en la expresión para  $\dot{I}$ , se puede describir como:

$$\dot{I} = \frac{\mu^{-1/2} r_d^{1/2} \sin \theta_0 F_z \cos(\omega + f)}{1 + \cos f}. \quad (2.189)$$

El siguiente objetivo es calcular  $F_z(f)$ , la fuerza perpendicular al plano de la órbita a perturbar, que depende de  $f$ , ángulo que etiqueta un punto específico de la órbita.

Para un sistema cartesiano centrado en la estrella central, los puntos del anillo perturbador están representados por:

$$X_a = r' \cos \phi, \quad (2.190)$$

$$Y_a = r' \sin \phi, \quad (2.191)$$

$$Z_a = 0. \quad (2.192)$$

Las coordenadas de un punto arbitrario sobre la órbita parabólica son:

$$X_m = r \sin \theta = \frac{\sin^2 \theta_0 \sin \theta}{1 - \cos \theta / \cos \theta_0}, \quad (2.193)$$

$$Y_m = 0, \quad (2.194)$$

$$Z_m = r \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta_0 \cos \theta}{1 - \cos \theta / \cos \theta_0}, \quad (2.195)$$

escogiendo el sistema de referencia donde el punto no tenga componente en la dirección  $Y$ . Por la simetría impuesta, sin pérdida de generalidad se pueden escoger arbitrariamente los ejes  $X$  y  $Y$ .

La fuerza por unidad de masa que un elemento de masa ( $dm' = \rho' r' d\phi$ ) en el anillo perturbador ejerce sobre una partícula que acreta siguiendo la parábola es:

$$d\vec{F} = -\frac{G\rho'r'd\phi}{d^2} \left( \frac{r \sin \theta - r' \cos \phi}{d} \hat{X} - \frac{r' \sin \phi}{d} \hat{Y} + \frac{r \cos \theta}{d} \hat{Z} \right), \quad (2.196)$$

donde

$$d = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi}, \quad (2.197)$$

es la distancia entre ambos puntos.

Ahora se necesita calcular la contribución de todo el anillo, lo que requiere realizar una integración sobre  $\phi$  de  $d\vec{F}$  en el intervalo de 0 a  $2\pi$ . Para esto se requieren las integrales,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} = \frac{2(d_0 d E_2(\phi/2, \frac{-4rr' \sin \theta}{d_0^2}) + 2rr' \sin \theta \sin \phi)}{((r^2 + r'^2)^2 - (2rr' \sin \theta)^2) d} \Big|_0^{2\pi}, \quad (2.198)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} = \frac{(r^2 + r'^2) d_0 d E_2(\phi/2, \frac{-4rr' \sin \theta}{d_0^2})}{rr' \sin \theta ((r^2 + r'^2)^2 - (2rr' \sin \theta)^2) d} \Big|_0^{2\pi} - \frac{((r^2 + r'^2)^2 - (2rr' \sin \theta)^2) \frac{d}{d_0} E_1(\phi/2, \frac{-4rr' \sin \theta}{d_0^2}) + (r^2 + r'^2)(2rr' \sin \theta \sin \phi)}{rr' \sin \theta ((r^2 + r'^2)^2 - (2rr' \sin \theta)^2) d} \Big|_0^{2\pi}, \quad (2.199)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi d\phi}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} = -\frac{1}{rr' \sin \theta \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi}} \Big|_0^{2\pi}, \quad (2.200)$$

La función  $E_1$  y  $E_2$  corresponden a la integral elíptica del primer tipo y del segundo tipo, respectivamente. Notar además que se ha definido  $d_0 = d(\phi = 0)$ , con lo que las componentes de la fuerza total están dadas por:

$$F_X = -\frac{Gm'}{2\pi} (r \sin \theta I_1 - r' I_2), \quad (2.201)$$

$$F_Y = -\frac{Gm'}{2\pi} (-r' I_3) = 0, \quad (2.202)$$

$$F_Z = -\frac{Gm'}{2\pi} (r \cos \theta I_1), \quad (2.203)$$

donde se utilizó la expresión para la densidad ( $\rho'$ ) del anillo. Por la forma de elegir el eje  $Y$ , claramente  $F_Y = 0$ . La debilidad de esta elección de los ejes es que al variar el punto sobre la parábola, también lo harán los ejes. A continuación se expresará un punto de la trayectoria de acreción en el sistema de referencia fijo  $X', Y', Z'$ . En las coordenadas sobre el plano de esta trayectoria, se puede representar como:

$$x = r \cos f, \quad (2.204)$$



$$y = r \sin f, \quad (2.205)$$

$$z = 0, \quad (2.206)$$

donde  $x$  contiene el radio vector del foco al pericentro. Para hacer la transformación se gira un ángulo  $\omega$  (ángulo entre el nodo ascendente y el pericentro) alrededor del eje Z, luego un ángulo  $I$  (inclinación) alrededor de la línea de nodos, finalmente rotar un ángulo  $\Omega$ , para que el nodo ascendente coincida con la dirección de referencia  $X'$ .

Dada la forma en que se escoge  $X'$ , el cuál contiene al nodo descendente, se puede concluir que  $\Omega = \pi$ . El pericentro de la órbita se encuentra a un ángulo  $\pi/2$  del nodo descendente, ya que se encuentra a medio camino entre ambos nodos, así,  $\omega = 3\pi/2$ . Además, como se ha mencionado anteriormente,  $I = \pi/2 - \theta_0$ .

Sustituyendo estos valores, la posición rotada correspondiente es:

$$X'_r = -r \sin f, \quad (2.207)$$

$$Y'_r = r \cos f \sin \theta_0, \quad (2.208)$$

$$Z'_r = -r \cos f \cos \theta_0. \quad (2.209)$$

El siguiente paso es sumar toda la contribución sobre la sección de la órbita relevante, la cuál consiste del punto de inyección en el infinito hasta que intersecta con el plano orbital del sistema binario.

Las contribuciones de la fuerza, expresadas en las ecuaciones (2.201, 2.202, 2.203), se refieren al sistema donde:

$$X = X'_r \hat{x}' + Y'_r \hat{y}', \quad (2.210)$$

$$Y = 0, \quad (2.211)$$

$$Z = Z'_r \hat{z}', \quad (2.212)$$

si  $\alpha$  es el ángulo entre  $X'$  y  $X$ , y recordando que  $F_Y = 0$ , se puede expresar

$$F_{X'} = F_X \cos \alpha, \quad (2.213)$$

$$F_{Y'} = -F_X \sin \alpha, \quad (2.214)$$

$$F_{Z'} = F_Z, \quad (2.215)$$

a las fuerzas sobre una posición de la parábola en el sistema de referencia fijo.

Usando

$$X \cdot X' = |X||X'| \cos \alpha, \quad (2.216)$$

se encuentra

$$\cos \alpha = -\frac{\sin f}{(\sin^2 f + \cos^2 f \sin^2 \theta_0)^{1/2}}. \quad (2.217)$$

Con estas componentes para las fuerzas, finalmente se puede calcular la componente perpendicular al plano de la órbita parabólica de la expresión

$$F_z = F_{Y'} \cos \theta_0 + F_{Z'} \sin \theta_0, \quad (2.218)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.213), (2.214) y (2.215) se llega a:

$$F_z = \frac{Gm'}{2\pi} \left( \left( \frac{r_d \sin^2 \theta_0 (1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 f)^{1/2}}{1 + \cos f} I_1 - r' I_2 \right) \left( \frac{\cos f \sin \theta_0 \cos \theta_0}{(\sin^2 f + \cos^2 f \sin^2 \theta_0)^{1/2}} \right) - \frac{r_d \sin^2 \theta_0 (-\cos \theta_0 \cos f)}{1 + \cos f} I_1 \sin \theta_0 \right). \quad (2.219)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.189) junto con  $\omega = 3\pi/2$ , y se obtiene  $\dot{I}(f, \theta_0)$ . El promedio de  $\dot{I}$  ( $\langle \dot{I} \rangle$ ) sobre toda la trayectoria no perturbada corresponde a la variación secular en la inclinación asociada a la órbita contenida en el plano orbital no perturbado que está inclinado un ángulo  $I = \pi/2 - \theta_0$ , que puede expresarse como:

$$\langle \dot{I} \rangle = \frac{\mu^{-1/2} r_d^{1/2} \sin \theta_0}{\Delta s} \int_{f_1}^{f_2} \frac{F_z \sin f}{1 + \cos f} \frac{ds}{df} df, \quad (2.220)$$

donde  $\frac{ds}{df} = \frac{\sqrt{2} \sin^2 \theta_0 r_d}{(1 + \cos f)^{3/2}}$  y  $\Delta s = \int_{f_1}^{f_2} \frac{ds}{df} df$ ,  $s$  es la longitud de arco y  $f_1, f_2$  son los límites de integración que delimitan la sección de la curva que se perturba.

La opción natural para  $f_1, f_2$  es:  $f_1 = \pi, f_2 = 3\pi/2$ ; pero al ser una órbita abierta  $\Delta s \rightarrow \infty$ , entonces se estima un valor típico para  $f_1$  con la siguiente relación:

$$\frac{r_{max}}{r_d} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + \cos f_1} = 10, \quad (2.221)$$

por lo tanto

$$f_1 = a \cos\left(\frac{\sin^2 \theta_0}{10} - 1\right), \quad (2.222)$$

siendo la solución físicamente relevante, la que es mayor a  $\pi$ .

La ecuación (2.220) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\langle \dot{I} \rangle = \dot{I}_0 \frac{q_1}{\Delta s_1}, \quad (2.223)$$

donde  $\dot{I}_0 \equiv \frac{\mu^{-1/2} r_d^{3/2} Gm'}{2\pi r_d^3}$ ,  $\mu = GM_c$ . Como valor típico para la posición de la secundaria se toma  $r' = r_d$ , de esta forma  $q_1$  se puede expresar como:

$$q_1 = \int_{f_1}^{f_2} \frac{F_z(r' = r_d) \sin \theta_0 \sin f}{Gm' r_d r_d^{-3} (1 + \cos f)} \frac{ds/df}{r_d} df, \quad (2.224)$$

habiendo sustituido la ecuación (2.219), definiendo además  $\Delta s_1 = \frac{\Delta \epsilon}{r_d}$ . Para distintos valores de  $\theta_0$  y usando las ecuaciones (2.220, 2.222, 2.224) se puede construir la Tabla 1.6.

Tabla 1.6: Tasas de cambio en la inclinación debido a la perturbación

| $\theta_0 (\times \pi/20)$ | $f_1$   | $\langle \dot{I} \rangle / \dot{I}_0$ | $\langle \dot{I} \rangle (\times 10^{-14} s^{-1})$ |
|----------------------------|---------|---------------------------------------|--|
| 0                          |         | 0.0                                   | 0.0  |
| 1                          | 3.21157 | 0.27504                               | 0.877  |
| 2                          | 3.2799  | 0.539263                              | 1.719  |
| 3                          | 3.34497 | 0.783769                              | 2.498  |
| 4                          | 3.40522 | 0.999575                              | 3.186  |
| 5                          | 3.45915 | 1.17671                               | 3.751  |
| 6                          | 3.5054  | 1.30403                               | 4.156  |
| 7                          | 3.54275 | 1.36865                               | 4.362  |
| 7.1                        | 3.54595 | 1.37107                               | 4.37   |
| 7.2                        | 3.54906 | 1.37273                               | 4.375  |
| 7.3                        | 3.55206 | 1.37355                               | 4.378  |
| 7.4                        | 3.55496 | 1.3735                                | 4.377  |
| 7.5                        | 3.55776 | 1.37262                               | 4.375  |
| 7.6                        | 3.56046 | 1.37087                               | 4.369  |
| 8                          | 3.57019 | 1.35435                               | 4.317  |
| 9                          | 3.58697 | 1.23433                               | 3.934  |
| 10                         | 3.59262 | 0.0                                   | 0.0  |

Tabla 1.6: En la primera columna aparece  $\theta_0$  que corresponde al ángulo subtendido del plano orbital de la partícula no perturbada y el eje Z,  $f_1$  es el ángulo que determina desde que punto de la órbita se está integrando,  $\langle \dot{I} \rangle / \dot{I}_0$  corresponde a la ecuación (2.224) dividido entre la longitud de arco adimensionalizada con  $r_d$ , finalmente,  $\langle \dot{I} \rangle$  es la tasa de variación de la inclinación de la órbita perturbada.

En la Tabla 1.6 se tomaron como valores típicos a  $M_c = 1M_\odot = 1.989 \times 10^{30} kg$ ,  $r_d = 100ua = 1.49 \times 10^{13} m$  y  $m' = 10^{-3} M_c = 1.989 \times 10^{27} kg$ , por lo tanto  $\dot{I}_0 = 3.187 \times 10^{-14} s^{-1}$ . Si se barren los distintos planos orbitales desde  $I = 0$  hasta  $I = \pi/2$  se observa que la variación secular de la inclinación aumenta hasta  $I = \pi/2 - \frac{7.3\pi}{20} = 24.3^\circ$  para después decrecer. Por lo tanto, la formación de choques se dará en el intervalo de  $I$  entre  $24.3^\circ$  y hasta  $90^\circ$ .

El tiempo característico de rotación de la estrella secundaria es  $P = \frac{2\pi}{\mu^{1/2}} r^{3/2}$  y el cambio secular en la inclinación es  $(1/\langle \dot{I} \rangle)$ . La razón entre ambos para el plano donde inician los choques queda:

$$\beta = \frac{1/\langle \dot{I} \rangle}{P} = 728.039, \quad (2.225)$$

lo que indica que muy lentamente se dan los cambios seculares. En conclusión, desde el primer momento en el proceso de acreción se producen los choques. Estos se dan al radio máximo donde la partícula prueba siente gravitacionalmente a ambas estrellas.

El propósito de esta sección es obtener una imagen muy preliminar de como pueden alterarse las órbitas de material que cae de una nube a un sistema estelar binario. Es natural pensar que las órbitas de partículas cayendo sobre un objeto central se verán modificadas debido a la presencia de una masa

secundaria que rota en una órbita circular alrededor de la primera. Así, se puede concluir que la solución de acreción (ver Ulrich(1976)) se verá modificada por un objeto secundario, desde el punto donde se acreta el material, alterando la órbita de la partícula en su evolución posterior.

## §2.6 Conclusiones

En este capítulo se desarrollaron distintos mecanismos para estudiar la perturbación a órbitas que se encuentran situadas alrededor de un objeto central, en este caso se está pensando en una estrella o protoestrella. La perturbación indistintamente se debe a la presencia de una objeto secundario, a través de la fuerza gravitacional que éste ejerce, la cual modifica el potencial que originalmente es central. En la Sección §2.2 se estudiaron órbitas circunestelares perturbadas por la estrella secundaria con el formalismo de la función perturbadora, que representa el potencial gravitacional de la estrella perturbadora expandido en elementos orbitales de la órbita de la partícula prueba que se perturba y los elementos respectivos de la estrella perturbadora. El caso que se estudió es el de una órbita circular alrededor de la estrella primaria, perturbada por una estrella orbitando en una trayectoria circular, externa a ella. Un resultado importante es que ni los términos seculares, ni los términos resonantes alteran la órbita original, salvo en el caso de la resonancia 2 : 1, que sin embargo es una influencia local, es decir, no afecta a todo el conjunto de órbitas.

La Sección §2.3 presenta un enfoque ligeramente distinto al anterior para el caso de órbitas circunestelares perturbadas por la otra estrella. Aquí vale la pena aclarar que no necesariamente la estrella menos masiva es la que perturba, lo que importa es que el parámetro respecto al cuál se hace la perturbación sea pequeño. Las ecuaciones de movimiento se desarrollan en series de potencia, tal que se puede resolver la forma de la órbita a cada nuevo orden en la aproximación. Expresiones analíticas para las órbitas permiten encontrar un algoritmo para hallar la órbita más interna que interacciona con sus vecinas. Esta órbita contiene una configuración donde el material puede establecerse en un patrón de larga duración, debido a la ausencia de interacciones entre las distintas órbitas. De esta forma, la órbita en cuestión define un tamaño típico de discos circunestelares que coincide razonablemente bien con Pichardo et al. (2005) y Paczynski (1977), donde se trata el problema de forma numérica a diferencia de este trabajo que es completamente analítico.

En la Sección §2.4 se extiende el formalismo analizado en el caso anterior, pero para el caso de órbitas circumbinarias. El parámetro respecto al cuál se hace la expansión en serie de potencias es distinto al usado en la Sección §2.3, sin embargo la idea es análoga. A distintos órdenes se encuentran expresiones paramétricas que permiten construir las órbitas. La búsqueda de la órbita interactuante más externa resultó infructuosa al usarse como referencia a Pichardo et al. (2005). La explicación de esta diferencia proviene del hecho de que las órbitas analíticas interactuantes resultan inestables, lo que coincide con el hecho de que numéricamente en Pichardo et al. (2005) ya no se encuentran. De esta forma, el radio interno para los discos circumbinarios, que define la frontera interna al disco (la frontera externa del disco está determinada por el máximo momento angular específico del material que se deposita de la nube en el plano orbital), está definida como la órbita mas interna que es estable. Así, el material externo a esta órbita se podrá establecer en una configuración donde las trayectorias no se intersecten

y por lo tanto sea duradera, lo que la convierta en un estado realista.

Finalmente, en la Sección §2.5 se pasa al estudio de las órbitas que inicialmente siguen las partículas que caen para formar un disco circunestelar y que son perturbadas por la presencia de una estrella (ó protoestrella ó condensación). Las trayectorias calculadas en Ulrich(1976) para el caso de material que cae de una nube rotando rígidamente hacia un objeto central es usada como la configuración no perturbada. La aproximación que se usa para el potencial perturbador es que es axisimétrico e independiente del tiempo, lo que se logra al distribuir homogéneamente la masa de la secundaria alrededor de su órbita circular. La fuerza gravitacional que genera este anillo es integrada para cada punto sobre la trayectoria de acreción. Esta expresión es sumada para toda la sección relevante de la órbita no perturbada, tal que se genera una fuerza que en esta aproximación modifica la inclinación de cada órbita a distintas tasas, lo que genera una interacción entre distintos planos, que se da en la posición desde donde el material se despega de la nube para caer hacia el sistema estelar. Lo importante de este resultado es que las condiciones iniciales del material que cae desde la nube son modificadas por la presencia de una masa perturbadora, pudiéndose identificar regiones que son mas afectadas que otras y además se pudo cuantificar aproximadamente esta modificación.

## Capítulo 3

# Acreción de una nube hacia una estrella

### §3.1 Introducción

La formación de un disco alrededor de una estrella es relevante por el interés que éstos tienen en la formación de un sistema planetario. La teoría más aceptada es que los planetas nacen en discos que originalmente estaban compuestos de gas y polvo, que con el tiempo formaron condensaciones, que a su vez fueron el embrión de los planetas. La acreción de masa de los alrededores hacia el embrión es lo que lo hace crecer en masa hasta llegar a su tamaño final. El material residual será expulsado del sistema debido a las interacciones con la estrella y planetas y con el viento que se enciende en la estrella, el cuál puede barrer material a su paso.

La estrella y el disco se forman en paralelo, durante el colapso gravitacional de una nube hacia un objeto central masivo, que llamaremos protoestrella. Para formar un disco la nube debe contener momento angular, de lo contrario, todo el material se depositará en la superficie estelar. La motivación de este capítulo es estudiar la formación de un disco desde el colapso gravitacional de la nube que forma la estrella. El interés primordial proviene del hecho de que las configuraciones de disco en la literatura se basan en estados de equilibrio, donde la fuerza gravitacional es compensada por la fuerza centrífuga, es decir, un disco kepleriano. Estas configuraciones son relevantes para situaciones posteriores a la formación, cuando el material ha tenido tiempo de establecerse en un estado de equilibrio. La suposición detrás de esto es que la formación *per se* no contribuye a crear patrones que modifiquen su evolución posterior al equilibrio. En general, los discos se suponen con un perfil de la densidad en potencias, pero en realidad esto nunca se justifica razonablemente para la etapa temprana de evolución del disco. Dado este antecedente, en este capítulo se desarrollará una simulación hidrodinámica del colapso de una nube rotando rígidamente hacia una protoestrella, con el objetivo de buscar una configuración estacionaria para el disco que sea un estado físicamente plausible para interpretar observaciones de estrellas con disco que todavía están embebidas en su nube progenitora. La idea de esto es no tener que recurrir a configuraciones razonables, pero que carecen de una justificación basada en simulaciones numéricas o argumentos analíticos.

Los detalles de la investigación mostrada en este capítulo están claramente expresados en el Apéndice B, que corresponde a un artículo aceptado en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, que apare-

cerá publicado en Octubre del 2007 en el Vol.43, Número 2. En el Apéndice B se le agregaron las Secciones §B.6, §B.7 y §B.8 para explicar cuidadosamente algunos puntos esenciales.

### §3.2 Simulación hidrodinámica

El código que se utiliza es IGUAZU-A y se encuentra explicado en Raga et al. (2000). Este código resuelve las ecuaciones de la hidrodinámica, para obtener densidades y velocidades. La ecuación de energía se reduce a que la temperatura es constante. La malla espacial es adaptativa, es decir, refina en regiones donde las variables hidrodinámicas varían rápidamente. Este es un código que se ha usado exitosamente para distintos tipos de problemas, astrofísicos, comparación con resultados analíticos e incluso probado en el campo experimental, al simular explosiones en un fluido generadas por un láser.

#### §3.2.1 Ecuaciones hidrodinámicas

Las ecuaciones que resuelve el código IGUAZU-A son las ecuaciones de fluidos de Euler. Este sistema puede escribirse como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3.1)$$

donde  $U = (\rho V_x, \rho V_y, \rho V_z, \rho)$ ,  $F = (\rho V_x^2 + P, \rho V_x V_y, \rho V_x V_z, \rho V_x)$ ,  $G = (\rho V_x V_y, \rho V_y^2 + P, \rho V_y V_z, \rho V_y)$ ,  $H = (\rho V_x V_z, \rho V_y V_z, \rho V_z^2 + P, \rho V_z)$  y  $S = (F_x, F_y, F_z, 0)$ ; las cuáles definen las 3 componentes de la ecuación de conservación de momento lineal y la ecuación de continuidad, respectivamente.  $V_x, V_y$  y  $V_z$  son las componentes de la velocidad en el sistema cartesiano  $x, y, z$ ,  $P$  es la presión de gas ideal, además  $F_x, F_y$  y  $F_z$  son las componentes de la fuerza gravitacional de la estrella en el mismo sistema de coordenadas.

No se incluye una ecuación de energía, el valor constante de la temperatura se sustituye en la presión, para calcular el sistema consistentemente.

#### §3.2.2 Condición inicial y de frontera

Ulrich (1976) construye una solución para el colapso gravitacional de una nube rotando rígidamente hacia un objeto central masivo. Esta solución es válida para la región cercana a la protoestrella, donde se pueden despreciar las fuerzas hidrodinámicas comparadas con la fuerza gravitacional de la estrella, debido a que las velocidades típicas del material en colapso son supersónicas. Las trayectorias que así se extraen corresponden a órbitas balísticas del problema de 2 cuerpos.

La temperatura de la nube se considera constante ( $T = 15 K$ ), esta suposición es razonable ya que el sistema precolapso tiene tiempo de encontrar un equilibrio térmico. En la etapa supersónica del colapso no son relevantes los procesos térmicos, y en particular el perfil de temperatura en la nube nunca modificará las presiones en el fluido, para obtener fuerzas comparables a las gravitacionales. En resumen, la simulación se considera isoterma. Como la masa típica del disco es mucho menor a la masa

del objeto central, despreciemos la autogravedad, que será importante en etapas posteriores con discos mucho más masivos.

El sistema tiene simetría azimutal, por lo tanto se realiza una simulación hidrodinámica en el plano RZ, coordenada radial y altura respecto al plano medio del disco. Las condiciones de frontera en el lado de la malla con  $R = R_{max}$  y  $Z = Z_{max}$  están dadas por la solución de Ulrich (1976). En estos bordes se pretende simular alimentación de material de la nube en colapso hacia la estrella. En los ejes R y Z se impone una condición de simetría de espejo, las velocidades perpendiculares a cada lado del eje son de igual magnitud pero de sentido opuesto, por lo que la condición que se impone es que en los ejes, éstas velocidades sean cero.

### §3.2.3 Resultados

Los resultados son desglosados detalladamente en el Apéndice B. Aquí, únicamente indicaré que la configuración estacionaria a la que se llega, es un disco con un patrón de dos anillos densos localizados en radios keplerianos. Existe una explicación aceptable para argumentar en favor de tal configuración. El material de la nube se separa en tres pedazos, uno de ellos alimenta directamente a la estrella, y cada uno de los otros dos a los dos anillos densos. En escalas de tiempo mayores a tiempos típicos de la simulación, por efectos viscosos, el material será incorporado a la estrella a través del disco. En la Figura 3.1 se muestran para tres tiempos distintos, isocontornos de densidad y momento angular específico en el plano RZ, incluyendo a la configuración estacionaria. Claramente se observan los anillos densos. Un resultado que no se presenta en el Apéndice B es una gráfica de densidad de energía,  $\epsilon$  (ecuación 3.2) para la configuración estacionaria. La densidad de energía se define como:

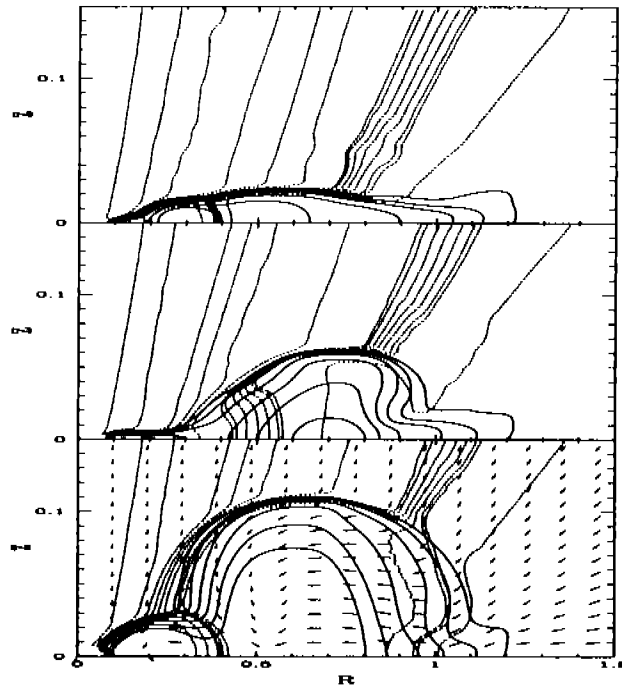
$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho(V^2) + \frac{3}{2}\frac{\rho KT}{m} \quad (3.2)$$

donde  $V$  es la magnitud de la velocidad y  $\rho$  es la densidad. Se considera el valor de la masa de la partícula como  $m = 1.67 \times 10^{-24} g$  y una temperatura  $T = 15 K$ . La gráfica de  $\epsilon$  contra  $R$ , para  $t = 12.64$  (configuración estacionaria) se muestra en la Figura 3.2. En esta figura se observan dos picos en la energía, como se esperaba al notar que  $\epsilon$  es proporcional a  $\rho$ .

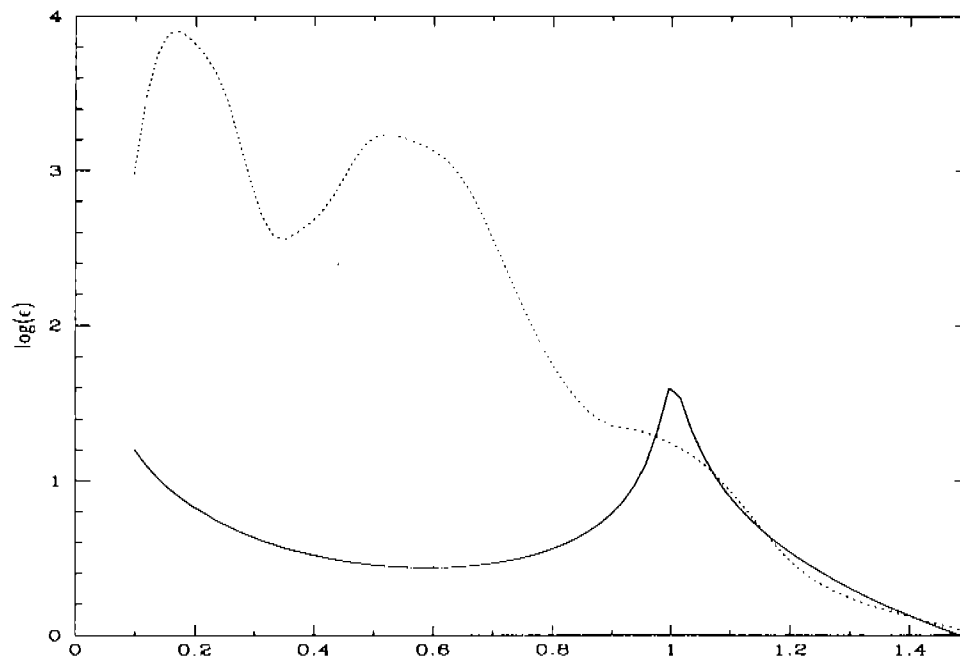
### Convergencia del código

Las simulación mostrada en la Figura 3.1 se realizó en una malla de  $512 \times 512$ . El intervalo radial simulado abarca de 0 (posición de la estrella) a  $10 R_d$ . El intervalo en  $Z$  abarca de 0 (plano medio del disco) a  $1 R_d$ . Para identificar las diferencias en los resultados para distintas resoluciones, se realizaron simulaciones con una malla de  $256 \times 256$  y de  $1024 \times 1024$ . La comparación para la densidad, momento angular específico y velocidad radial se muestran en las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5, respectivamente. Para las tres resoluciones, el resultado principal es el mismo,  $V_R \geq 0$ , un máximo en densidad y una meseta de momento angular específico, para radios pequeños.

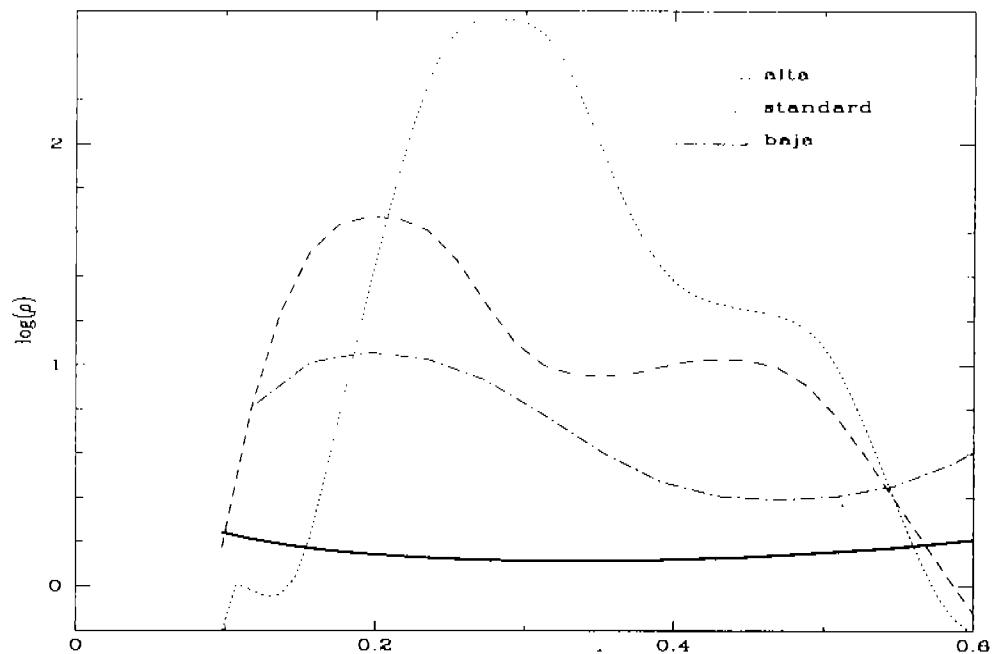




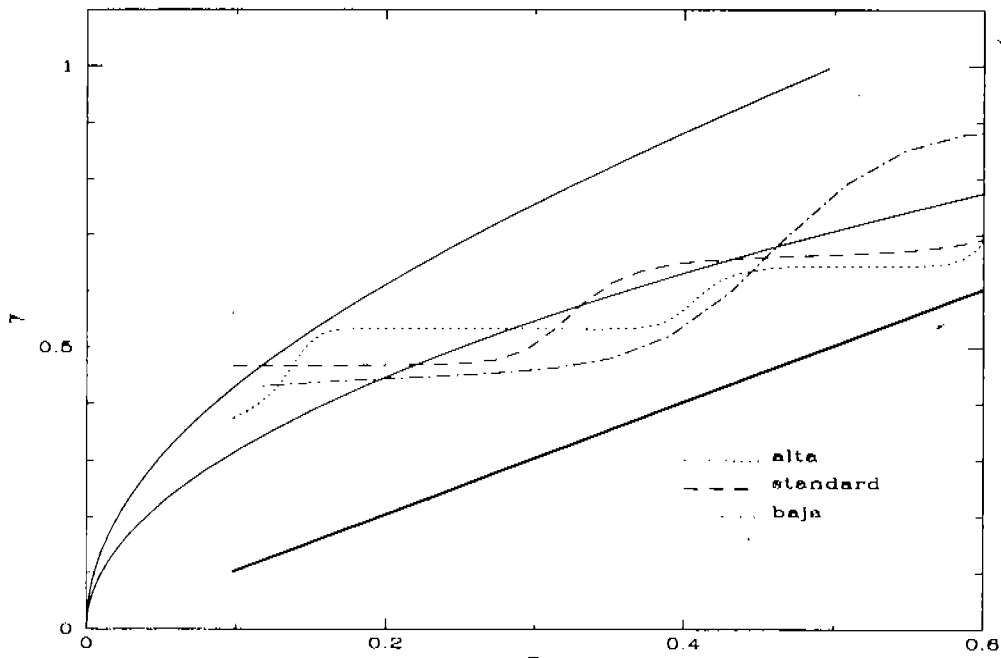
**Figure 3.1:** En un plano RZ de la simulación hidrodinámica se muestran isocontornos de  $\rho$  (línea sólida) e isocontornos de  $\gamma$  (línea punteada). Los valores asociados a los contornos de densidad ( $\rho$ ) están dados por  $\rho_0/2^a$  ( $a=3,4,5,6,7,8$ ). Los valores asociados a los contornos de momento angular específico  $\gamma$  son: 0.1,0.2,...,0.7,0.71,0.73,0.75,0.77,0.79, 0.8,0.9 de izquierda a derecha. De arriba hacia abajo, las gráficas corresponden a los tiempos  $t = 0.569$ ,  $t = 1.264$  y  $t = 12.64$ . A  $t = 12.64$  se alcanza la configuración estacionaria. Las flechas representan el campo de velocidades con magnitud proporcional al tamaño de la flecha.



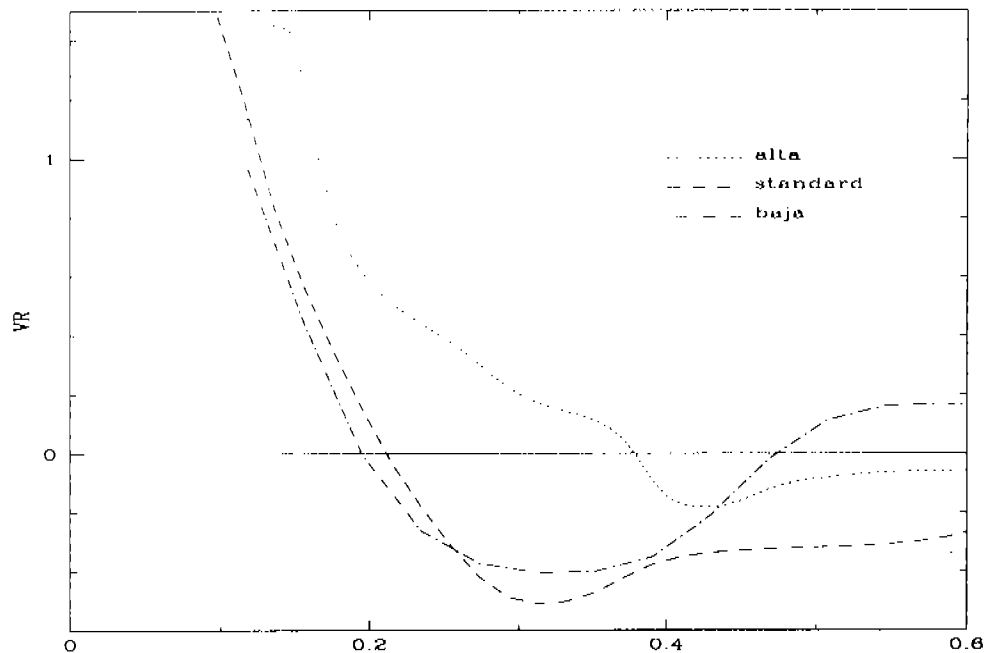
**Figure 3.2:** Gráfica de densidad de energía ( $\epsilon^R$ ) contra  $R$ . La línea sólida representa la condición inicial y la línea punteada corresponde a una configuración estacionaria al tiempo  $t = 12.64$ .



**Figure 3.3:** Gráfica de la densidad ( $\rho$ ) contra  $R$  en el plano medio del disco ( $Z = 0$ ) al tiempo  $t = 2.5$  (400 años para un disco de radio  $R_d = 100 UA$ , una estrella de  $1 M_\odot$  y una tasa de acreción de masa de la nube al disco dada por:  $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot \text{año}^{-1}$ ). La línea sólida corresponde a la condición inicial, la línea punteada a una malla de  $1024 \times 1024$ , la línea rayada a una malla de  $512 \times 512$  y la línea de puntos y rayas a una malla de  $256 \times 256$ .



**Figure 3.4:** Gráfica del momento angular específico ( $\gamma$ ) contra  $R$  en el plano medio del disco ( $Z = 0$ ) al tiempo  $t = 2.5$ . La línea punteada corresponde a una malla de  $1024 \times 1024$ , la línea rayada a una malla de  $512 \times 512$  y la línea de puntos y rayas a una malla de  $256 \times 256$ . Las líneas sólidas representan de izquierda a derecha a la curva de radios mínimos, la curva kepleriana y la condición inicial.



**Figure 3.5:** Gráfica de velocidad radial ( $V_R$ ) contra  $R$  en el plano medio del disco ( $Z = 0$ ) al tiempo  $t = 2.5$ . La línea punteada corresponde a una malla de  $1024 \times 1024$ , la línea rayada a una malla de  $512 \times 512$  y la línea de puntos y rayas a una malla de  $256 \times 256$ . La línea sólida corresponde a  $V_R$  igual a cero.

### §3.3 Supervivencia de un disco con dos anillos densos

La desventaja en la simulación presentada, desde el punto de vista observacional, es que los tiempos de CPU computacionalmente accesibles solo bastan para realizar simulaciones que en la escala temporal del problema corresponden a unos cuantos miles de años. Los tiempos característicos del colapso son al menos un orden de magnitud mayor. Es decir, con una simulación no se puede asegurar que el patrón encontrado sobreviva toda la vida de la estrella embebida en la nube. Una cuidadosa argumentación sugiere que este patrón puede sobrevivir por un tiempo largo, para detalles ver Sección §B.6 en el Apéndice B.

### §3.4 Simulaciones de la formación del anillo externo

A varios tiempos en el proceso de formación del anillo externo, se observa que material sobre el plano orbital evoluciona hacia la estrella hasta un radio mínimo, para después barrer material que sigue acretando. Esta acumulación de material es el que genera que este rasgo sea cada vez más notorio, al aumentar continuamente la densidad. Al plantear la simulación se tiene en mente que la fuerza dominante será la gravedad de la estrella. Esto sugiere tratar la formación de este anillo externo a través de simulaciones sencillas que resalten la gravedad como el ingrediente más importante.

Se plantean dos enfoques distintos pero con el mismo objetivo. Ambos se basan en resolver las ecuaciones de movimiento en el plano orbital (ver Secciones §B.7 y §B.8 en el Apéndice B), poniendo como condición inicial a la solución de Ulrich (1976). Al anularse la velocidad perpendicular a este plano, por el choque entre partículas que provienen de ambos lados del disco, la velocidad queda restringida

al plano orbital. El resultado de este análisis es que el material depositado en el plano se moverá hacia la estrella hasta llegar a un radio mínimo, valor que dependerá del momento angular específico de la partícula en cuestión. A partir de ese lugar, ésta se moverá hacia afuera enfrentando al resto del material. Otra información relevante es que el material más interno llega a su radio mínimo antes que el material de capas exteriores. Estos dos elementos indican que el material más interno, que no es absorbido por la estrella, se moverá hacia afuera arrastrando material a su paso. La acumulación de material lleva consigo un aumento en la densidad, que naturalmente formará un anillo denso, que se moverá hacia afuera. El material absorbido en general tiene velocidades negativas, actuando como un freno para el anillo denso.

El primer enfoque es una simulación donde se resuelven ecuaciones que describen la evolución del momento angular, velocidad radial y posición del mencionado anillo denso. Los detalles de la formulación y resultados se encuentran en Sección §B.4. El resultado principal es que el anillo se frena a un radio menor a  $R_d$ , donde  $R_d$  es el radio del disco. El sistema de ecuaciones se puede construir debido a que se puede caracterizar analíticamente al material que inicialmente se deposita en el plano orbital. Al momento de frenarse, el movimiento posterior será hacia la estrella, sin embargo, el material que encuentra corresponde a material que se deposita cuando el embrión del anillo denso inicia su movimiento hacia afuera. Este material no es fácilmente caracterizable, por lo que no se puede plantear ningún formalismo analítico para tratarlo. Sin embargo, es razonable asegurar que este anillo se moverá ligeramente hasta encontrar una posición de equilibrio. Un argumento a favor de este proceso es que el radio kepleriano de un anillo así formado siempre se encontrará a un radio menor a  $R_d$ . De hecho, si las fuerzas dominantes son la fuerza centrífuga y gravitacional de la estrella, el máximo radio de equilibrio corresponde a  $R_d$ . Por lo tanto, es de esperarse que el material de la nube siempre se establecerá a radios menores a  $R_d$ .

En el siguiente enfoque se siguen todos los anillos de material en su evolución en el disco. Cuando las posiciones de dos anillos contiguos se traslapan, se supone que el material de ambos se mezcla homogéneamente tal que el momento lineal y angular del nuevo anillo se calcula promediando los valores en los anillos individuales. La ventaja de este formalismo es que no se requiere ningún tipo de suposición sobre la evolución del resto del material, necesaria en la simulación anterior. Así, los choques en regiones del disco distintas a la del anillo denso también se resuelven. En este caso, cuando el anillo denso que se está formando interacciona con el resto del material, éste ya tendrá la información sobre interacciones previas. El formalismo usado es lagrangiano, es decir, se resuelven las ecuaciones de movimiento para cada partícula. Únicamente cuando las trayectorias se intersectan, el material siente la presencia de sus vecinas. En esta simulación se concluye que el anillo denso se establece a un radio  $R < R_d$ , en concordancia con la simulación hidrodinámica (ver Sección §B.5) y con la simulación mostrada en la Sección §B.7. Los detalles de la simulación lagrangiana se muestran en Sección §B.8.

### §3.5 Conclusiones

Una simulación hidrodinámica de la caída de material de una nube rotando rígidamente muestra un choque en el plano orbital, que es un resultado directo de la simetría del problema. La evolución del

material depositado en este plano puede describirse físicamente con argumentos simples. El resultado principal es que el sistema llega a una configuración estacionaria después de unos cuantos miles de años. La configuración consta de un disco de radio  $R_d$  con dos anillos densos establecidos en posiciones keplerianas a radios  $R = 0.2R_d$  y  $R = 0.6R_d$ . El material de la nube se divide en tres partes (caracterizadas por diferentes intervalos de momento angular), la región con menos momento angular fluye directamente hacia la estrella. De las regiones restantes, la que corresponde a momentos angulares específicos menores alimentará el anillo denso mas interno, mientras que la última región fluirá hacia el anillo externo. Del lado interno del centro del anillo denso el material se moverá con velocidades positivas y viceversa en el lado externo.

La simulación hidrodinámica es isoterma, suposición válida para el material en colapso, y dado que en la formación del patrón de anillos densos dominan las fuerzas gravitacionales y centrífugas esta suposición no altera el resultado. Para tiempos posteriores a la formación, el sistema ha tenido tiempo de evolucionar internamente para que mecanismos de calentamiento y enfriamiento, modifiquen el marco isoterma. Efectos externos de irradiación, de la estrella o de la misma nube en colapso, claramente alterarán el perfil de temperatura del disco. De esta forma, los anillos densos son rasgos que estarán presentes en discos, en la etapa en que todavía cae material de la nube.

En la Sección §3.3 se presenta un argumento apoyando la supervivencia del patrón en el disco. Este se basa en la disparidad entre el tiempo del colapso y el tiempo en el que se forma el patrón, de tal forma que en las escalas de tiempo del colapso, el disco puede verse como un sistema que continuamente crece en radio, conservando la presencia de los anillos densos.

Al analizar con cuidado la formación del anillo denso externo en la simulación hidrodinámica, se extraen los elementos físicos relevantes al problema. La imagen de este proceso se basa simplemente en el hecho de que el material que se deposita inicialmente en el plano orbital, adquiere energía negativa, que indica que la órbita que seguirá desde ese momento es una elipse y por lo tanto tendrá asociado un radio mínimo. Así, el material más interno que no es absorbido por la estrella, llegará a este radio y comenzará a moverse hacia afuera, barriendo material a su paso. Eventualmente el anillo será frenado por la acumulación de material con velocidades negativas, estableciéndose en una posición de equilibrio kepleriana.

Con esta información se plantean 2 simulaciones en el plano orbital para seguir este proceso y justificar las ideas previas. Las únicas fuerzas que se consideran son la centrífuga y la gravitacional de la estrella. En las simulaciones presentadas en Sección §3.4 se muestra que el barrido de material por un anillo que se mueve hacia afuera permite justificar que éste se establece a un radio  $R < R_d$ , sin embargo su evolución hacia una posición de equilibrio queda fuera de las posibilidades de estas simulaciones.

La conclusión global de este capítulo es que un disco con un patrón de dos anillos densos en posiciones keplerianas es consistente con el colapso de una nube rotando rígidamente hacia una estrella. Estas características peculiares tienen consecuencias en el espectro emitido del sistema respecto a configuraciones estándar de discos, donde en particular el perfil de densidad es una ley de potencias y el material a todo radio se está moviendo keplerianamente. En el apéndice B se muestra la densidad superficial del disco y la diferencia en densidad entre mínimo y máximos es de un orden de magnitud, por lo que se espera que en una observación los anillos sean muy notorios. El colapso de una nube

magnetizada (Galli et al. 2006) no genera las trayectorias que aquí se presentan, por lo tanto este resultado está restringido a una nube en la que se pueda despreciar la influencia del campo magnético.

## Capítulo 4

# Acreción de una nube hacia un sistema estelar binario

### §4.1 Introducción

En el Capítulo 3 se sigue el colapso de una nube rotando rígidamente hacia una estrella usando una simulación hidrodinámica con simetría azimutal. El resultado del colapso es un disco en una configuración estacionaria con dos anillos densos situados en posiciones de equilibrio keplerianas. Para el caso de un sistema binario, una simulación equivalente forzosamente tiene que ser tridimensional, lo que complica el problema desde el punto de vista de tiempo computacional. Además, una condición inicial cerca del sistema no es fácil de conseguir analíticamente. Estos argumentos motivaron que este problema se tratara desde otro punto de vista. La idea importante que se rescata y se explota para decir algo sobre el reacomodo de material alrededor de las estrellas y del sistema binario es la conservación de la constante de Jacobi ( $C_J$ ) en el problema restringido de tres cuerpos. Esta es una función explícita de posición y velocidad que se describe en Sección §4.2.

El objetivo de esta parte del trabajo es buscar estimaciones a las masas de los discos utilizando las restricciones que surgen de la conservación de  $C_J$ . La característica principal en este caso es que surgen regiones prohibidas y permitidas para cada partícula dado el valor de  $C_J$  asociado a ella. La debilidad práctica de esta idea es que las restricciones varían para cada partícula, lo que hace difícil llegar a una conclusión que abarque a todas. Para acotar el problema se estudia la evolución de  $C_J$ , para el anillo denso que inicia su formación en su radio mínimo y que se mueve hacia afuera hasta establecerse en una posición de equilibrio. En otras palabras, la idea es depositar material en el plano orbital con la solución para el colapso hacia una sola estrella y analizar si en su evolución, la perturbación de la estrella secundaria modifica la  $C_J$  asociada, de tal forma que el anillo denso quede en la región permitida alrededor de la primaria o en el espacio permitido que rodea al sistema, formando parte de un disco circunestelar o circumbinario, respectivamente. Con este tipo de argumentos se buscan configuraciones que permitan asociar parte del material en discos circunestelares y el resto en un disco circumbinario. La suposición subyacente, al transportar el resultado de la formación de un anillo denso externo en un disco para el caso de una estrella aislada, al caso de un sistema binario; es que la masa de la estrella

secundaria es pequeña comparada con la masa de la estrella primaria.

Este capítulo está dividido en cuatro partes. La primera desarrolla brevemente las ideas en torno a  $C_J$ , con especial énfasis en las peculiaridades que son relevantes para este estudio. La segunda ofrece algunos antecedentes y elementos que siempre deben estar presentes. La tercera desarrolla el caso en que la masa de la secundaria es cero, extendiendo el caso para cuando esta masa es pequeña. Algunas de estas ideas son validadas en la última parte a través de un conjunto de simulaciones, donde el parámetro importante es la razón entre la distancia entre las estrellas y el tamaño del disco.

Los detalles de este trabajo se encuentran claramente mostrados en el Apéndice C, que se encuentra en una versión preliminar para ser enviado a una revista de investigación de prestigio.

## §4.2 Problema restringido de tres cuerpos

En esta última parte de la tesis se estudiará cualitativamente el problema de la formación de discos en un sistema binario teniendo como base el problema restringido circular de 3 cuerpos. Esta sección esta basada en Murray & Dermott (1999). El término restringido se refiere a que la masa del tercer cuerpo es suficientemente pequeña para no afectar la evolución de las otras dos masas. Esto indica que la trayectoria de las dos masas restantes está descrita por una cónica, en este caso el calificativo circular se refiere a que estas masas se mueven alrededor de su centro de masa en órbitas circulares.

Se consideran  $m_1$  y  $m_2$  como las masas de las partículas mas masivas. El sistema triple puede ser descrito en un sistema de coordenadas inerciales  $(\xi, \eta, \zeta)$  cuyo origen es el centro de masa del sistema. Sea  $\xi$  el eje que coincide con la línea que une las estrellas al tiempo  $t = 0$  y  $\eta$  perpendicular a este último y localizada en el plano orbital. El eje  $\zeta$  es perpendicular al plano orbital y por lo tanto también lo es a los otros dos ejes. En este sistema, las coordenadas de las partículas son,  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  y  $(\xi, \eta, \zeta)$  para la partícula asociada a la masa  $m_1$ , a la masa  $m_2$  y de la partícula prueba (de masa despreciable), respectivamente. Se escojen unidades tales que  $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$  y la separación entre las dos masas es unitaria, además se define  $\mu_1 = Gm_1$  y  $\mu_2 = Gm_2$ . Así, en este sistema inercial, las ecuaciones de movimiento de la partícula prueba son:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \quad (4.1)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \quad (4.2)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}, \quad (4.3)$$

donde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2, \quad (4.4)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2. \quad (4.5)$$

La conservación del momento angular para el problema de 2 cuerpos, permite asegurar para la órbita



circular que la velocidad angular es constante. Asignemos a ésta el nombre  $n$ , que por lo tanto es fija. Naturalmente se puede escoger un nuevo sistema de coordenadas para el cuál las masas  $m_1$  y  $m_2$  están fijas. Para lograr ésto se conserva el mismo origen, pero los nuevos ejes sobre el plano orbital rotan a una velocidad uniforme  $n$  en la dirección positiva. Los nuevos ejes se llaman  $x, y$  y  $z$ , y para este sistema las coordenadas fijas de las partículas son:  $(-\mu_2, 0, 0)$  y  $(\mu_1, 0, 0)$ . Con esta información se pueden escribir las distancias entre la partícula prueba y cada una de estas posiciones fijas de la siguiente forma

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2, \quad (4.6)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2, \quad (4.7)$$

donde  $x, y, z$  son las coordenadas de la partícula menos masiva.

Las coordenadas en ambos sistemas están relacionadas únicamente mediante una rotación, por lo que se satisface

$$\xi = x \cos(nt) - y \sin(nt), \quad (4.8)$$

$$\eta = x \sin(nt) + y \cos(nt), \quad (4.9)$$

$$\zeta = z, \quad (4.10)$$

derivando éstas dos veces, se pueden sustituir en las ecuaciones (4.1,4.2,4.3) que después de manipulación algebraica se pueden escribir como:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\left(\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}\right), \quad (4.11)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)y, \quad (4.12)$$

$$\ddot{z} = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)z, \quad (4.13)$$

donde los términos  $n\dot{x}, n\dot{y}$  corresponden a la aceleración de Coriolis y  $n^2x$  junto con  $n^2y$  se refieren a la aceleración centrífuga.

La función escalar  $U$  es un potencial efectivo, que se define como:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}, \quad (4.14)$$

tal que las ecuaciones (4.11,4.12,4.13) equivalen a

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.15)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.16)$$

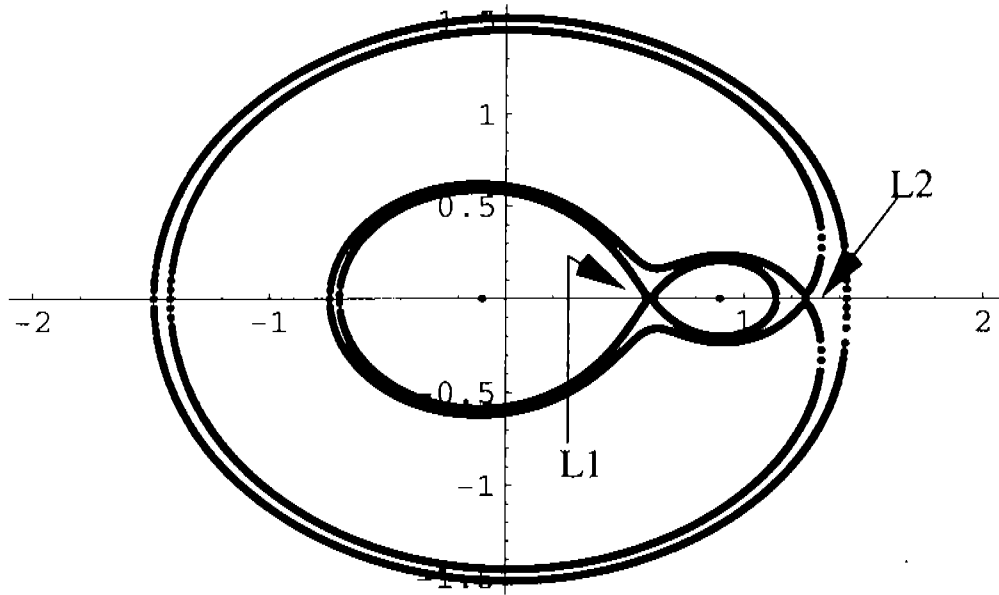


Figure 4.1: En esta figura se muestran las curvas de velocidad cero que pasan por los puntos lagrangianos  $L_1$  y  $L_2$ , determinadas por las constantes  $C_{L1} = 3.598$  y  $C_{L2} = 3.465$ , respectivamente.

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (4.17)$$

si ahora se multiplica la ecuación (4.15) por  $\dot{x}$ , la ecuación (4.16) por  $\dot{y}$  y la ecuación (4.17) por  $\dot{z}$  y se suman los resultados se obtiene

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{dU}{dt}, \quad (4.18)$$

que puede integrarse para llegar a

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J, \quad (4.19)$$

donde  $C_J$  es una constante de integración. Notando que el lado izquierdo de la ecuación (4.19) es la velocidad al cuadrado ( $v^2$ ) en el sistema con las masas  $m_1$  y  $m_2$  fijas y sustituyendo la ecuación (4.14) se puede escribir

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - v^2, \quad (4.20)$$

que representa una integral de movimiento que también es conocida como integral de Jacobi o constante de Jacobi. Esta cantidad puede escribirse en el sistema inercial, tal que

$$C_J = 2(\vec{h} \cdot \hat{z} - E), \quad (4.21)$$

donde  $\vec{h}$  es el momento angular específico y  $E$  es la energía por unidad de masa de la partícula prueba. Al pasar del problema de 2 cuerpos al de 3,  $\vec{h} \cdot \hat{z}$  y  $E$  ya no son integrales de movimiento pero la combinación dada en la ecuación (4.21) sí lo es.

La ecuación (4.20) puede leerse de la siguiente forma. Para un valor específico de  $C_J$ , que se asocia

a cada partícula dadas sus condiciones iniciales, se tiene una expresión matemática que relaciona  $v^2$  con una función positiva de la posición de la partícula prueba. Si se sustituye  $v^2 = 0$ , la ecuación (4.20) define una superficie en el espacio, tal que si la partícula se encuentra en esa posición su velocidad es cero. Esta superficie es conocida como superficie de velocidad cero, la cual divide el espacio en una región donde  $v^2 \geq 0$  y otra donde  $v^2 < 0$ . El aspecto relevante de esta peculiaridad matemática es que el primer caso representa situaciones físicamente posibles a diferencia del otro caso donde pasa lo contrario. Así, el espacio se divide en regiones permitidas y prohibidas para la partícula en cuestión.

En algunos puntos sobre estas curvas, las partículas con la  $C_J$  correspondiente también se encontrarán con aceleraciones nulas ( $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ ) tal que si se encuentran ahí se mantendrán en reposo, en el sistema de coordenadas que está rotando. Un estudio detallado permite demostrar que esta situación solo es posible en el plano orbital en 5 puntos. Estas posiciones son puntos de equilibrio que son conocidos también como puntos lagrangianos.

Los dos puntos de equilibrio de mayor interés en este trabajo son el punto que se localiza en la línea recta que conecta ambas masas ( $L_1$ ) y el punto lagrangiano ( $L_2$ ) sobre esta misma recta, pero del lado de la masa menos masiva del sistema binario que contiene a  $m_1$  y  $m_2$ . Es importante la posición de  $L_1$ , ya que se encuentra sobre la curva de velocidad cero caracterizada por  $C_{L_1}$  y que contiene ambas masas, tal que partículas con  $C_J \geq C_{L_1}$  solo pueden moverse en un espacio cercano de alguna de las masas o alrededor de todo el sistema, pero en una órbita que contiene a las órbitas de las partículas masivas. Las curvas de velocidad cero que contienen a los puntos lagrangianos  $L_1$  y  $L_2$  se muestran en la Figura 4.1. En el caso de un sistema binario estelar, esto sugiere una diferenciación natural para material que se asocia a discos circunestelares y al disco circumbinario mediante la constante de Jacobi, como se discutirá en el resto del capítulo.

El punto lagrangiano  $L_2$  es relevante ya que se encuentra en la curva de velocidad cero caracterizada por  $C_{L_2}$ , tal que partículas con  $C_J \geq C_{L_2}$  están restringidas a moverse en trayectorias en la cercanía de las estrellas o en órbitas externas a las órbitas del sistema binario. En el problema de acreción de material hacia el sistema binario (ver sección 3.6) partículas que cumplan esta condición sobre  $C_J$  nunca podrán acceder a la vecindad de ninguna de las estrellas y por lo tanto no tendrán posibilidad de formar parte de discos circunestelares, únicamente quedando como posibilidad el de asociarse a un disco circumbinario.

Para calcular la posición de estos puntos lagrangianos, usemos el hecho

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2, \quad (4.22)$$

para escribir la ecuación (4.14) como:

$$U = \mu_1 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left( \frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2. \quad (4.23)$$

Si observo las ecuaciones (4.15 y 4.16), los puntos de equilibrio deben cumplir:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0, \quad (4.24)$$

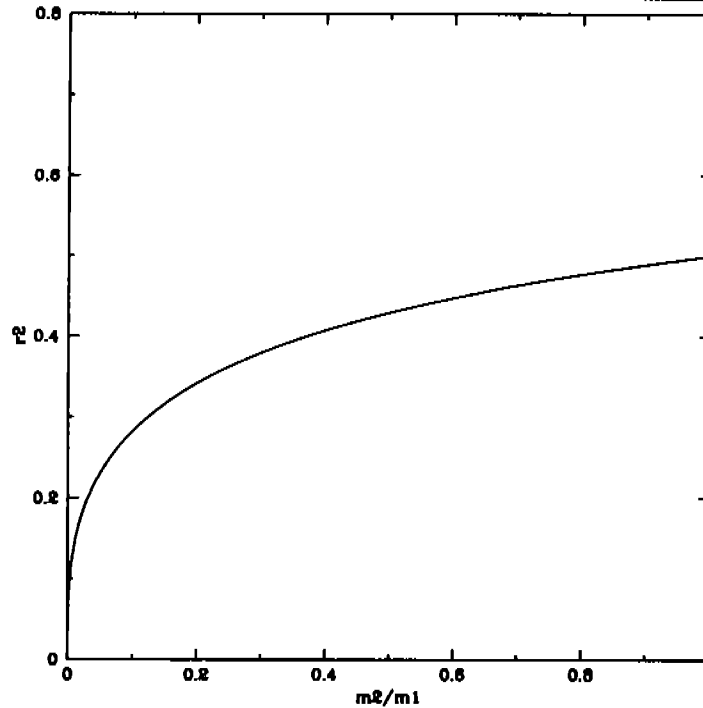


Figure 4.2: Gráfica de la posición del punto lagrangiano  $L_1$  respecto a la estrella de masa  $m_2$  en función de la razón entre las masas,  $m_2/m_1$ .

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0, \quad (4.25)$$

la ecuación (4.25) es proporcional a  $y$ , por lo tanto se satisface trivialmente al buscar los puntos lagrangianos sobre la línea que une las estrellas ( $y = 0$ ). De esta manera solo es relevante la ecuación (4.24) que al sustituirse en ella la ecuación (4.23) se llega a:

$$\mu_1 \left( -\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left( -\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{x - \mu_1}{r_2} = 0. \quad (4.26)$$

El punto  $L_1$  se encuentra entre las estrellas, por lo tanto se satisface  $r_1 + r_2 = 1$ , donde  $r_1 = x + \mu_2$  y  $r_2 = -x + \mu_1$ ; sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.26) para ponerla en términos de  $r_2$  se transforma en:

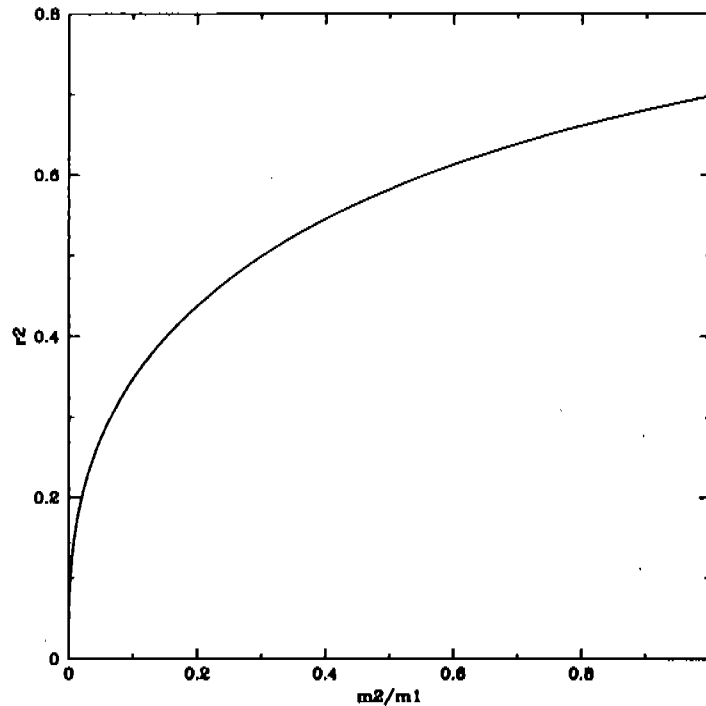
$$\mu_1 \left( -\frac{1}{(1-r_2)^2} + 1 - r_2 \right) - \mu_2 \left( -\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0, \quad (4.27)$$

que a su vez, se puede poner como

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{(1-r_2+r_2^2/3)}{(1+r_2+r_2^2)(1-r_2)^3}, \quad (4.28)$$

ecuación que solo numéricamente se puede resolver para valores dados de  $\mu_2$  y  $\mu_1$ .

Al escribir las ecuaciones (4.6 y 4.7) de esa forma, se está suponiendo que  $m_1$  se encuentra en posiciones negativas de  $x$  y  $m_2$  del lado positivo. Si supongo que  $m_2 < m_1$  entonces para el punto lagrangiano  $L_2$  se cumple  $r_1 - r_2 = 1$  con  $r_1 = x + \mu_2$  y  $r_2 = x - \mu_1$ , que al sustituir en la ecuación (4.26) se puede transformar en



**Figure 4.3:** Gráfica de la posición del punto lagrangiano  $L_2$  respecto a la estrella de masa  $m_2$  en función de la razón entre las masas,  $m_2/m_1$ .

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r^3 \frac{(1 + r_2 + r_2^2/3)}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)}, \quad (4.29)$$

que como el caso anterior solo tiene una solución numérica. Las gráficas de las ecuaciones 4.28 y 4.29 ( $r_2$  vs  $\mu_2/\mu_1 = m_2/m_1$ ) se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

### §4.3 Ideas básicas

Desde el punto de vista observacional la estimación de masas de discos es un problema no resuelto. La primera dificultad surge del hecho de que a las distancias a que se encuentran las regiones más cercanas de formación estelar es difícil resolver los discos. En muchos casos la emisión del sistema se debe interpretar con un modelo subyacente que caracterice físicamente al disco (densidad, temperatura, tamaño, composición química, altura, etc.). Este modelo permite estimar la masa del disco, sin embargo, los errores observacionales de la emisión y en los parámetros del sistema que requiere el modelo, equivalen a una gran incertidumbre en esta estimación. Además se debe agregar el hecho de que cada modelo particular genera una masa y los modelos que se favorecen observacionalmente son suficientes para tener grandes variaciones en las estimaciones. Una forma de estimar observacionalmente la masa es utilizar la emisión milimétrica, que se supone ópticamente delgada y que por lo tanto proviene de todo el material, desde cualquier punto del disco. En este caso la masa es proporcional a la emisión. En conclusión, las estimaciones observacionales de masas de los discos tienen muchas fuentes de error, por lo que son relevantes trabajos que con argumentos analíticos puedan generar un esquema cualitativo desde donde se pueda extraer una estimación de las masas de discos en sistemas estelares binarios, que a su vez se

pueda comparar con estimaciones reales.

La condición inicial que se utiliza es que el material es depositado en el plano orbital con la solución de Ulrich (1976), que corresponde al problema de acreción sobre una sola estrella central. Esta solución restringida al plano orbital aplicada a un sistema binario, es válida para puntos lejos de la estrella. Las escalas de distancia relevantes son la separación entre las estrellas  $a$  y el tamaño del disco  $R_d$ . Si  $a \ll R_d$  entonces la solución es buena para la parte externa del disco.

El sistema binario se forma del colapso de material de la región esférica interna de una nube con momento angular. Suponiendo conservación de momento angular, el momento angular de esta región en la nube debe igualarse al momento angular del sistema binario así formado, para extraer una relación entre  $a$  y  $R_d$ . Un cálculo sencillo indica que  $a \geq R_d$ , lo que sugiere que deben existir procesos de transporte de momento angular hacia afuera de la nube, que permitan concluir que la región que forma el sistema es mas grande, tal que el máximo momento angular de la cáscara que forma el disco es mayor, lo que equivale a un aumento en  $R_d$ , tendencia requerida para llegar al caso con  $a < R_d$ .

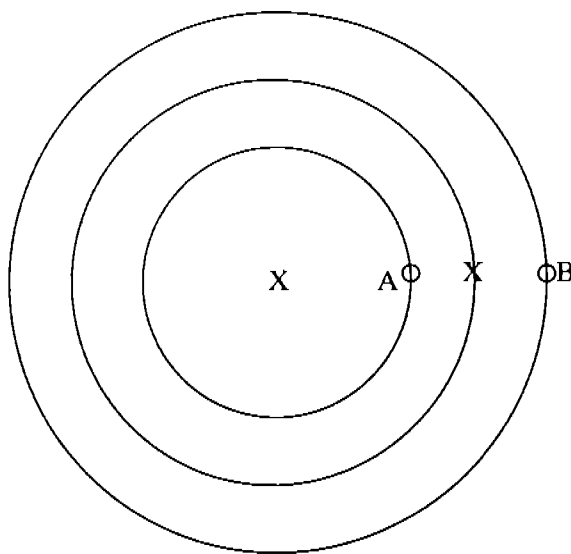
#### §4.4 Estimación de masas de los discos usando $C_J$

La conservación de  $C_J$  se puede aplicar al caso donde la masa de la estrella secundaria es cero. Como este sistema corresponde al caso de una estrella aislada, los resultados obtenidos en Capítulo 3 no se verán alterados. Sin embargo, es importante analizar este caso como referencia para el caso en que la masa de la secundaria sea distinta de cero. Para analizar este caso, se modifica el modelo usado en el primer caso, pensando en la secundaria como una perturbación.

##### §4.4.1 Caso: Masa estrella secundaria igual a cero

La conservación de  $C_J$  es válida para el caso donde la masa de la estrella secundaria es nula. Por lo tanto, para este caso también se pueden graficar las curvas de velocidad cero (ver Sección §4.2) en el plano orbital. Sin la secundaria la simetría es azimutal, así estas curvas son circunferencias. Para  $C_J < 3$  las superficies de velocidad cero no intersectan el plano orbital, por lo tanto partículas dentro de este rango de  $C_J$  tienen libertad de moverse a todo lo largo del disco. El caso con  $C_J = 3$  corresponde a una situación donde surge una sola circunferencia de velocidad cero al radio  $R = a$ . Estrictamente esta posición corresponde a la región prohibida. Para  $C_J \geq 3$  surgen dos curvas de velocidad cero, una con  $R < a$  y otra con  $R \geq a$ . La región prohibida corresponde a la zona entre estas dos curvas, la región permitida se divide en una región alrededor de la estrella primaria y otra alrededor de todo el sistema, mas allá de la órbita hipotética de la secundaria. Esto directamente sugiere que material en este intervalo de  $C_J$ , podrá asociarse a un disco circumprimario o a un disco circumbinario. En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo sobre las restricciones que se generan, debido a las superficies de velocidad cero, sobre una partícula con  $C_J$  alrededor de 3 en distintas regiones del espacio.

El material que cae al plano orbital de la nube rotando rígidamente con la solución de Ulrich (1976), que en este caso es una solución exacta, modificará su constante de Jacobi debido al choque en el plano orbital (ver Capítulo 3). Las partículas depositadas se moverán hacia la estrella conservando el valor



**Figure 4.4:** Los asteriscos muestran la posición de las estrellas. La curva intermedia corresponde a la órbita de la estrella secundaria. Si una partícula se encuentra en la órbita A con  $C_J \geq 3$  y una perturbación aumenta la  $C_J$ , entonces no tiene ninguna posibilidad de moverse hacia la órbita B, ya que antes de llegar a la órbita de la secundaria se encuentra la curva de velocidad cero asociada a ella. Si la perturbación hace que  $C_J < 3$  entonces si existe la posibilidad de que la órbita B sea la perturbada. En el primer caso, la partícula se quedará restringida a una órbita circunestelar. En el segundo caso, la partícula podrá formar parte de un disco circumbinario.

de  $C_J$ . Los valores de  $C_J$  dependen del parámetro  $a/R_d$ . La condición  $C_J = 3$ , permite calcular en función de  $a/R_d$ , el intervalo en radio donde las partículas depositadas de la nube en el plano orbital adquieren  $C_J \geq 3$  y que por lo tanto se encontrarán restringidas. Los valores que surgen de esta relación se encuentran detallados en Sección §C.5. Al seguir a las partículas a su radio mínimo, éstas se mantendrán dentro de la región permitida como se espera.

El anillo en particular para el que se sigue la evolución es el más interno, que también es el primero que llega al radio mínimo. Las simulaciones mostradas en Sección §B.7 y §B.8 sugieren que un modelo sencillo para la cinemática de este anillo es que se mueve a lo largo de la curva de radios mínimos (ver Sección §B.4) con la velocidad a la que llega el material a esta curva. Así, el material es acumulado en el anillo denso sobre esta curva. El proceso continúa hasta que el anillo absorbe todo el material originalmente depositado dentro del radio  $R_d$ . En este momento, para valores típicos de  $a/R_d$ , el anillo tiene  $C_J \geq 3$ , apareciendo así regiones prohibidas. Sin embargo, el anillo se encuentra en un radio  $R \geq a$ , con la región prohibida localizada en radios menores. De esta forma, el movimiento del anillo a radios mayores no se ve restringido. El anillo formará parte de material circumbinario.

En la siguiente etapa el anillo absorbe material con momento angular específico ( $\gamma$ ) igual a 1, en unidades del máximo momento angular de la nube. La absorción de este material modifica el valor de  $C_J$  y en general siempre aumenta, lo que tiene como resultado que la curva de velocidad cero se mueva hacia afuera, aumentando el área de la región prohibida y moviéndola hacia afuera. Sin embargo, este resultado no altera la evolución del anillo hacia una posición de equilibrio en un radio kepleriano. El elemento relevante en este caso, es que la parte del disco que corresponde al anillo denso externo

está asociado con material circumbinario. En el modelo mostrado en el Apéndice B, la masa de la nube que alimenta al anillo denso interno es mucho menor que la asociada al otro anillo, por lo que se desprecia esta contribución en este trabajo. Este resultado se puede comparar con las masas de discos circumbinarios en sistemas como GG Tau (Guilloteau, Dutrey & Simon 1999) y UY Aur (Close et al. 1998). De hecho, en el disco de GG Tau se observa un rasgo anular muy marcado, lo que coincide con que el anillo denso externo corresponde al disco circumbinario. La Sección §C.5.3 en el Apéndice C desarrolla estas ideas con mayor profundidad.

#### §4.4.2 Caso: Masa estrella secundaria distinta de cero

La presencia de la estrella secundaria modifica la trayectoria del anillo denso externo sobre la curva de radios mínimos. La trayectoria perturbada se modela al considerar que la acumulación de material se realiza hacia afuera de la curva de radios mínimos. Así, el parámetro que caracteriza al conjunto de modelos en el caso perturbado es la posición  $R \geq R_{min}$  donde el anillo denso acumula material. Para intervalos razonables para la posición  $R$  (un valor  $R - R_{min}$  muy grande, físicamente no es aceptable) la constante de Jacobi aumenta respecto al valor no perturbado. Esta tendencia indica que existe la posibilidad de identificación de configuraciones donde  $C_J \geq 3$  en radios  $R < a$ , lo que directamente obliga al material a poblar regiones circunestelares. En la Sección §C.5.4 se presenta una tabla que muestra dada la posición  $R/a < 1$  del anillo denso, el intervalo en  $a/R_d$  para el cual el valor de  $C_J$  es mayor que 3, que corresponde al intervalo donde aparecen curvas de velocidad cero en el plano orbital. Si el sistema tiene asociada una  $a/R_d$  en ese rango y además  $R/a < 1$ , entonces se puede concluir que el anillo quedará restringido a un disco circunestelar.

La transferencia de momento angular en la nube disminuye el valor de  $a/R_d$ , para llegar a valores  $a/R_d < 1$  que son necesarios para que la aproximación con la solución de Ulrich sea válida y que además se pueda suponer que el disco circumbinario se forme con material que se deposita de la nube dentro de  $R_d$ . En este proceso es difícil suponer que  $a/R_d$  adquiera valores muy cercanos a cero. Utilizando todas estas restricciones, el intervalo en  $a/R_d$ , físicamente aceptable desde el punto de vista de transferencia de momento angular es  $a/R_d < 1$  pero  $a/R_d \gg 0$ . Para que sea válida la modelación del problema usando la formación del anillo denso mostrada en Sección §B.8,  $a/R_d$  se debe encontrar en una región intermedia para el intervalo anterior. Si imponemos la condición  $C_J \geq 3$ , para que el disco quede restringido a poblar la zona circunestelar y usando la Tabla 1 en Sección §C.5.4, podemos concluir que cuando el anillo absorbe el material sembrado en el plano orbital con  $\gamma < 0.5$  entonces éste forma parte del disco circunestelar. De esta forma, un nuevo anillo que acumule el material dentro del intervalo  $0.5 < \gamma < 1.0$  logrará moverse hasta radios  $R \geq a$  y convertirse en el disco circumbinario. De la misma Tabla se puede observar que a mayores  $a/R_d$ , el rango en  $\gamma$  del material que queda asociado a un disco circunestelar crece, con un consecuente aumento en la masa de este disco, en detrimento de la masa del disco circumbinario.

En conclusión, existe una justificación mecánica proveniente de la conservación de  $C_J$  en el problema restringido de tres cuerpos que permite separar el anillo denso que se está formando en dos partes, la primera forma el disco circunestelar y la segunda forma el disco circumbinario.



## §4.5 Simulaciones SPH para estimar masas de discos

Aquí se pretende probar en una simulación, que las ideas extraídas con el análisis en la Sección §C.5 tienen sentido físico. El parámetro que identifica una simulación de otra es  $a/R_d$ , los valores que se toman son  $a/R_d = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ . La hipótesis que se quiere probar es que mayores valores de  $a/R_d$  equivalen a mayores masas para el disco circunestelar. Para las simulaciones se fija la masa de la primaria en  $M_p = 1 M_\odot$  y para la secundaria en  $M_s = 0.01 M_\odot$ . La diferencia de masas es requerida para que sea válido el planteamiento en la hipótesis, que directamente indica que se ignora la masa que se asocia al disco circunsecundario. Las características del código y condiciones iniciales están detalladas en la Sección §C.6. Aquí, únicamente se indica que es un código que sigue partículas y utiliza funciones que describen las interacciones hidrodinámicas, sumando la contribución sobre un conjunto de partículas vecinas. El formalismo que usa el código se le conoce como SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) y la versión usada fué desarrollada por el Dr. William Lee del Instituto de Astronomía, la cuál amablemente nos proporcionó para esta investigación.

En estas simulaciones, el material sembrado en el plano orbital con la solución de Ulrich (1976) se moverá hacia la estrella, siguiendo en términos generales la evolución para el caso de una estrella aislada, incluyendo la formación del anillo denso y su movimiento hacia afuera. Obviamente el material del disco que pasa cerca de la secundaria será perturbado por ella, sin embargo esto altera sólo cualitativamente el esquema del caso de una estrella aislada. Concluyendo, la formación del anillo denso se presenta en el caso  $M_s \ll M_p$ .

Para el caso  $a/R_d = 0.3$ , el anillo mas interno se desconecta del anillo denso, evolucionando hacia una configuración donde claramente está asociada a una órbita alrededor de la primaria. La simulación con  $a/R_d = 0.4$  muestra el mismo comportamiento pero el anillo se separa antes. Para  $a/R_d = 0.6$ , los dos anillos internos se separan, aumentando así la masa asociada al disco circunprimario. La masa del disco para la simulación con  $a/R_d = 0.7$  aumenta y disminuye el tiempo al que esto ocurre. Esto permite corroborar la hipótesis planteada en un principio, mayores valores de  $a/R_d$  corresponden a mayores masas asociadas al disco circunprimario.

Usando los últimos dos valores de  $a/R_d$  como típicos para un sistema real, se obtiene la razón entre la masa del disco circunprimario y del disco circumbinario. Para el primer caso, se tiene 0.12 y para el otro caso se llega a 0.2. La estimación para el sistema UY Aur (Duvert et al. 1998) es 0.1, que resulta consistente con los valores estimados con las simulaciones respectivas. La estimación de la masa se obtiene con la ecuación (B.31). Figuras que muestran las distintas etapas de la simulación y la diferencia entre las distintas simulaciones se presentan en la Sección §C.6.

## §4.6 Conclusiones

El análisis desarrollado en este capítulo permite estimar la razón entre las masas del disco circunprimario y del disco circumbinario. La evolución posterior se supone que se desarrolla de forma análoga al caso de una estrella aislada, tal que el material de la nube se reparte proporcionalmente a cada disco y a la estrella. Si el sistema, nube sistema binario discos es estacionario, la masa crecerá con la misma

proporción para las últimas dos componentes, hasta llegar a las masas observadas.

Para estimar las masas de los discos se explota la conservación de  $C_J$ , para el sistema restringido circular de 3 cuerpos. Aplicado a este caso, los cuerpos en órbita circular son las estrellas y el tercer cuerpo corresponde al anillo denso externo, que se forma de la acreción de material en el plano orbital, para el caso de una estrella aislada, ver Capítulo 3. Motivados por las simulaciones que describen la evolución de este anillo (Secciones §B.7 y §B.8) se plantea un modelo cinemático que describe su trayectoria y velocidad en el tiempo. Con esta información se calcula el valor de  $C_J$  en función de la posición. El caso  $M_s = 0$  se analiza cuidadosamente como antecedente para estudiar el caso con  $M_s > 0$ . El resultado de este análisis muestra que el anillo externo se establece afuera de la órbita de la secundaria, asociando este material a un disco circumbinario. El caso  $M_s > 0$  se plantea como una perturbación del primer caso, que se caracteriza mediante la modificación de las posiciones donde el anillo denso acumula el material que barre durante su trayectoria hacia afuera. Valores de  $a/R_d$  alrededor de 0.5 presentan configuraciones propensas a que el anillo denso se disocie en dos partes, la parte interna quedará asociada a un disco circumprimario y el resto a un disco circumbinario. El análisis hasta este punto es cualitativo, ya que las suposiciones en el modelo sólo son aproximadas, con incertidumbres asociadas a la modificación de un modelo que es válido para el caso de una estrella aislada.

Para extraer una estimación a las masas de los discos, se realizan simulaciones donde se varía el parámetro  $a/R_d$ . La conclusión que se obtiene, es la siguiente. Dentro de un intervalo físicamente razonable para  $a/R_d$ , los valores más grandes crean configuraciones con discos circumprimarios más masivos a costa del disco circumbinario que es proporcionalmente menos masivo. En Mathieu et al. (1995) se estiman las masas de un disco circumprimario y circumbinario en el sistema GW Ori, la razón es igual a 0.13, similar a la simulación con  $a/R_d = 0.6$  donde se obtiene 0.12.

## Capítulo 5

# Discusión

El estudio de perturbaciones de órbitas alrededor de un sistema estelar binario es relevante debido a que aunque el problema mecánico de dos cuerpos puntuales es integrable, el problema de tres cuerpos no lo es. Así, se considera la influencia gravitacional de un cuerpo como una perturbación a la órbita analítica descrita por los otros dos cuerpos. La configuración que se estudia con un análisis perturbativo es una órbita circular alrededor de una estrella, perturbada por otra estrella que se encuentra en una órbita circular alrededor de la primera. Este análisis se realiza con dos formalismos, expresados en las Secciones §2.2 y §2.3. En la primera se realiza una expansión en parámetros orbitales del potencial perturbador de la estrella secundaria, que se incluye en las ecuaciones de movimiento del problema de dos cuerpos. Estas se transforman en ecuaciones que describen el cambio en el tiempo de los parámetros orbitales (ver Sección §2.2.4). Los términos principales que contribuyen se dividen en seculares y resonantes, los cuáles actúan en periodos de tiempo largos. En esta aproximación, la suma de los términos de periodo corto es cero. La contribución de los términos seculares es nula para la órbita no perturbada tratada aquí. Los términos resonantes son relevantes únicamente en posiciones específicas. La resonancia que es capaz de contribuir apreciablemente es la resonancia 2 : 1, esta configuración corresponde al caso en que la órbita no perturbada rota dos veces alrededor de la primaria mientras la estrella secundaria rota solo una vez. La influencia en esta posición es suficientemente fuerte como para que esta región se vea perturbada de tal forma que el disco se trunque. Uno se refiere a un truncamiento, para el caso en que órbitas cercanas se deforman de tal manera que partículas que pueblen éstas, interactuarán fuertemente, siendo una región donde el material no se podrá establecer y que por lo tanto se convierte en una configuración físicamente improbable.

En la Sección §2.3 también se trata el problema de perturbación de una órbita circular alrededor de una estrella, la cuál es perturbada por la otra estrella. El problema está restringido al plano orbital. Las ecuaciones de movimiento se expanden en una serie de potencias respecto a un parámetro pequeño. Las ecuaciones resultantes se resuelven a distintos órdenes y se llega a una expresión para la posición de la órbita en el espacio. En la Sección §2.2 se muestra la importancia de perturbaciones locales, resonancias, como causantes de fuertes interacciones. Siguiendo un poco esta línea, se identifican regiones de alta interacción en la posición en que dos órbitas contiguas se cruzan.

Las órbitas cercanas a la estrella son aproximadamente circunferencias ya que se encuentran lejos

de la perturbación, al considerar órbitas más externas, éstas se deforman debido al aumento de la contribución de la perturbación. Esta deformación avanza hasta que las órbitas se cruzan tangencialmente, hacia afuera los cruces se hacen oblicuos. Esta órbita más interna que se intersecta define una estimación del tamaño de los discos circunestelares. Los resultados así obtenidos coinciden dentro de un error menor al 20%, a lo que se obtiene con cálculos numéricos mucho más precisos, como en Pichardo, Sparke & Aguilar (2005).

Otro tipo de trayectorias al que se puede aplicar este formalismo son las órbitas circumbinarias. En la Sección §2.4 se hace un desarrollo análogo al anterior, pero aplicado a estas órbitas. Se encuentran expresiones que permiten construir las órbitas en el plano orbital. La órbita más interna se intersecta con su vecina en una posición distinta al resultado en Pichardo et al. (2005), sin embargo esto se debe a que en este último trabajo nunca se llega a la intersección, ya que el código no puede llegar más allá de cierto radio, al entrar a una región de inestabilidad.

Esto se explica en Sección §2.4.2 donde se muestra una forma de averiguar si una órbita (ya sea numérica o analítica) es estable o inestable, para el problema restringido de 3 cuerpos. Todo se reduce a resolver una ecuación de cuarto grado, y cuyas raíces indican el comportamiento de una perturbación a la órbita. Soluciones reales equivalen a que la perturbación se mantiene acotada, una solución imaginaria equivale a que la órbita se aleja exponencialmente de la configuración original. Este análisis permite decir que la órbita circumbinaria más interna estimada por Pichardo et al. (2005) aproximadamente corresponde al límite de inestabilidad, órbitas más internas son inestables y órbitas más externas son estables. Esto último era de esperarse ya que al alejarse la partícula del sistema binario, el potencial gravitacional se aproximará al potencial central generado por la suma de la masa de las estrellas colocada en el centro de masa.

Los casos considerados hasta ahora corresponden a una situación donde el material alrededor del sistema binario, ya se ha establecido en una configuración de equilibrio. La órbita principal en una etapa anterior es la asociada a acreción de material de la nube hacia un sistema binario. La estrella secundaria se considera como perturbación a la órbita parabólica que describe al material que proviene de una nube rotando rígidamente (Ulrich 1976). El formalismo que aquí se utiliza proviene de Murray & Dermott (1999) y se desarrolla cuidadosamente en la Sección §2.5. Un primer ingrediente es considerar que la masa de la secundaria está distribuida a todo lo largo de su órbita, con el objetivo de considerar únicamente las contribuciones de periodo largo, que en Sección §2.2 corresponden a considerar los términos seculares. Esta masa corresponde a componentes de una fuerza gravitacional, paralela y perpendicular al plano donde está contenida la órbita que se pretende estudiar. La órbita parabólica se modifica en sus parámetros orbitales debido a estas fuerzas. Debido a la simetría del problema, únicamente cambios que modifiquen el plano orbital serán relevantes para encontrar intersecciones en las órbitas perturbadas. Las intersecciones alteran una condición inicial que corresponde al problema de un solo cuerpo. El parámetro cuya modificación cambia el plano orbital es la inclinación. La derivada en el tiempo de la inclinación únicamente depende de la componente de la fuerza perturbadora perpendicular a este plano. Esta variación dependerá de la partícula sobre la órbita a la que se está aplicando este formalismo. Notar que en un caso real, ésta estará densamente poblada de material. Así, una forma de considerar la influencia sobre toda la órbita y de esta forma sobre todo el plano orbital es

calcular el promedio de la tasa de cambio en el tiempo de la inclinación, sobre una sección relevante de la órbita. Este cambio se tabula en la Sección §2.5 para distintos planos, caracterizados por el ángulo ( $\theta_0$ ) que este hace con el eje del momento angular de la nube. La tasa aumenta al aumentar  $\theta_0$  y disminuye a partir de  $\theta_0 = 24.3^\circ$ . Estos valores surgen de considerar una estrella central de masa solar, un disco de radio  $R_d = 100 AU$ , la masa de la estrella secundaria es un centésimo de masa solar. La interpretación geométrica es que se produce un choque en la posición donde se alimenta el material, entre el plano con  $\theta_0 = 24.3^\circ$  y  $\theta_0 = 90^\circ$ . Este choque cambiará la condición inicial de acreción, que a su vez alterará la órbita de caída de material, generando zonas de fuerte interacción que tendrán como resultado final un nuevo patrón de alimentación que ahora se dividirá entre ambas estrellas. Nunca olvidar que esta es una estimación basada en una serie de aproximaciones, por lo que únicamente equivale a un primer acercamiento al problema.

En el Capítulo 3 se estudió la evolución de material que cae de una nube hacia una estrella en la etapa final del colapso, cuando el material ya está muy cerca de la estrella. En una simulación hidrodinámica se impone como condición inicial la solución dada por Ulrich (1976) que corresponde a caída de material de una nube rotando rígidamente. En el plano orbital se produce un choque que restringe al material a moverse paralelamente a este plano, formando así un disco. Este material se mueve hacia la estrella hasta que llega a un radio mínimo determinado por el momento angular específico de cada partícula. El material más interno que no es absorbido por la estrella se mueve hacia afuera acumulando material a su paso hasta que se establece en una posición kepleriana. El hueco que se forma en este proceso es cubierto con material que sigue cayendo de la nube, el cuál forma otro anillo de material que también se establece en una posición kepleriana. Esta configuración estacionaria permite separar el material que cae de la nube en tres partes, etiquetadas por diferentes intervalos de momento angular. Una parte es acumulada por la estrella y las otras dos alimentan a cada uno de los anillos. Estos anillos son rasgos muy densos que resaltan y que por lo tanto serán firmas de discos en formación.

Una simulación que incluya todo el colapso es computacionalmente cara por lo que en el Apéndice §B.6 se usa el hecho de que el tiempo que se necesita para formar el patrón de dos anillos densos es mucho menor que el tiempo en que el momento angular específico de la cáscara de la nube que está cayendo se modifica apreciablemente. Así, se puede decir que la configuración, en las escalas de tiempo de formación estelar, es cuasiestacionaria, en otras palabras, la evolución en el tiempo será un disco que continuamente crece en tamaño y en masa, conservando el patrón de dos anillos densos. Es natural pensar que en algún momento se llegue a un disco masivo que sea propenso a inestabilidades gravitacionales que destruyan el patrón establecido. La fortaleza de este proceso es que, aunque el patrón se pierda, la caída de material fresco es capaz de formar los anillos densos nuevamente.

Un rasgo muy importante que se detecta en la simulación es un anillo denso que se mueve hacia afuera, acumulando material a su paso y aumentando claramente su densidad. La solución de Ulrich restringida al plano orbital define las velocidades y densidad superficial del material que al inicio de la caída se deposita en él. El movimiento del material en este plano hacia la estrella se resuelve analíticamente, obteniendo una relación para la velocidad en función del momento angular específico de la partícula en cuestión. El material más interno, que no es absorbido por la estrella, llega a un radio mínimo desde donde empieza a moverse hacia afuera. La expresión analítica para la velocidad permite

caracterizar al material que se incorpora a este anillo interno. Numéricamente se resuelven ecuaciones que describen la evolución de la velocidad radial, momento angular específico y posición de este anillo en función del tiempo (ver Apéndice §B.7). El resultado principal para resaltar es que este anillo logra ser frenado a un radio menor al radio del disco  $R_d$ . En la simulación hidrodinámica este anillo también se establece a un radio menor a  $R_d$ . De esta forma se puede justificar que la evolución del anillo está regida principalmente por la interacción gravitacional de la estrella con el material del disco.

Para ahondar más en esto, en el Apéndice §B.8 se siembra un disco con la solución de Ulrich(1976) y se sigue cada partícula (equivalente a un anillo debido a la simetría del problema) en su evolución. Cuando las órbitas de dos anillos se cruzan entonces se considera que la masa, momento angular y momento radial se mezclan, para que así ambos se fundan en un solo ente. En este tenor se estudia la evolución del anillo más interno hasta la posición en que se frena (hay que recordar que el material siempre sigue cayendo sobre el plano orbital en la simulación hidrodinámica). El radio donde esto sucede es menor a  $R_d$  por lo que coincide con los resultados del Apéndice §B.5 y de la Sección §B.7. La conclusión principal es que los anillos en el disco estacionario se establecen keplerianamente por la preponderancia de la fuerza gravitacional de la estrella respecto a las fuerzas hidrodinámicas presentes. El anillo externo corresponde al anillo estudiado en el Apéndice §B.7 y §B.8 mientras que el anillo interno se forma con material que posteriormente se deposita en el plano después de que el otro anillo se mueve hacia afuera dejando un hueco. La importancia de este resultado es que se demuestra la existencia de una configuración estacionaria para un disco en la etapa de acreción de material de la nube hacia la estrella, que se aleja del estado tradicionalmente utilizado, un disco rotando keplerianamente con un perfil de densidad en potencias que decrece del centro hacia afuera. De aceptarse este resultado por la comunidad astronómica, cambiaría la forma de interpretar los espectros no resueltos, es decir, en observaciones para las que no se tiene la resolución espacial suficiente para ver alguna estructura, donde solo se detecta la emisión integrada sobre todas las componentes, para cada frecuencia.

Las Secciones §2.2, §2.3 y §2.4 atacan el problema de discos circunestelares y circumbinarios, generando una estructura orbital donde material pueda establecerse. Sin embargo, ninguno de estos formalismos es capaz de dar una estimación de la masa asociada a cada uno de estos discos. En el Capítulo 4 se muestra una forma de estimar la masa de estos discos usando las restricciones que se extraen de la conservación de la constante de Jacobi ( $C_J$ ) en el problema restringido circular de tres cuerpos. Para una  $C_J$  grande, las curvas de velocidad cero sobre el plano orbital, definen regiones permitidas y prohibidas para cada partícula (ver Sección §4.2), cuya forma sugiere naturalmente la idea de discos alrededor de cada una de las estrellas y un disco que rodea todo el sistema. En este caso, las curvas de velocidad cero se separan en tres partes, las primeras dos son curvas casi circulares alrededor de cada una de las componentes estelares y la tercera tiene la misma forma, sin embargo rodea a todo el sistema. Las zonas permitidas son adentro de las curvas circunestelares y afuera de la circumbinaria, en otras palabras, material con  $C_J$  suficientemente grande (aproximadamente  $C_J > 4$ ) solo podrá incorporarse a cualquiera de los discos, sin tener permitido que viva en alguna órbita que conecte a los discos. Motivados por ésto en la Capítulo 4 se calcula el valor de  $C_J$  para el material que se deposita de la nube en el disco y se recalcula para cada etapa en su evolución, de tal forma que se identifique el material del disco con las características adecuadas para quedar restringido a discos circunestelares o circumbinarios. El

primer momento en que se ve modificada la  $C_J$  de cada partícula es cuando se da el choque en el plano orbital que es causante de formar el disco. Para calcular la constante de Jacobi es necesario tener un modelo aproximado que caracterice a las trayectorias del material en el disco. El modelo al que podemos acceder es el asociado a formación de un disco alrededor de una estrella, que está caracterizado en la Sección §B.5. Así, inicialmente se estudia el caso con la masa de la estrella secundaria igual a cero. Este análisis puede ser aplicado a cada anillo, sin embargo, la simulación hidrodinámica indica que gran cantidad del material estará contenida en el anillo denso externo, así que el estudio se centrará en el anillo estudiado en el Apéndice §B.7. Este anillo a cada momento ve modificado el valor de  $C_J$ , pero nunca adquiere valores adecuados para que quede restringido a vivir en el disco circumprimario, evoluciona hasta la zona circumbinaria.

En el ejercicio anterior se supone que el anillo acumula el material en la posición de la curva de radios mínimos, como se sugiere en la Apéndice §B.8. Esta curva es una restricción debido a la conservación del momento angular específico de la partícula, ver Apéndice §B.4. Para extender el caso de una estrella al de dos estrellas se plantea la idea de que la segunda estrella perturba al anillo de tal forma que la acumulación de material se da fuera de esta curva. Esta suposición aumenta el valor de  $C_J$  para el anillo respecto al caso de una sola estrella, hecho favorable en la búsqueda de configuraciones restringidas. El parámetro importante en esta investigación es la razón entre la distancia entre las componentes y el tamaño del disco simulado,  $a/R_d$ . Los resultados sugieren que para valores grandes de  $a/R_d$ , el anillo es susceptible de pasar el umbral en  $C_J$  antes de llegar a la órbita de la secundaria, así las curvas de velocidad cero la restringen a formar parte de un disco circumprimario. Para que estas conclusiones sean relevantes es necesario cuantificar el efecto con una simulación donde esté presente la estrella secundaria.

En el Apéndice §C.6 se presentan 5 simulaciones caracterizadas por  $a/R_d = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ . Para todos los casos el material acreta hacia la estrella, tal que parte del disco atraviesa la región alrededor de la secundaria y es perturbada. La perturbación no es suficiente como para evitar que el anillo evolucione hacia la curva de radios mínimos. Ahí inicia la formación del anillo denso, al moverse hacia afuera hasta atravesar de nueva cuenta la órbita de la secundaria. El material que pasa muy cerca de la estrella es perturbado por ésta, sin embargo en global se puede decir que se muestra al anillo moviéndose en la región circumbinaria hacia una configuración de equilibrio. El aspecto relevante para esta investigación es que a cierto tiempo en cada simulación, la región interna del anillo se desconecta del resto y se queda asociado a un disco circumprimario. Este tiempo decrece al crecer  $a/R_d$  como era de esperarse debido a la tendencia de los resultados mostrados en el Apéndice §C.5.4. Además al aumentar  $a/R_d$ , aumentan la cantidad de anillos desconectados, aumentando la masa asociada a un disco circumprimario. El resto de la masa se asocia a un disco circumbinario, ya que el material restante atravesó la órbita de la estrella secundaria. La razón entre la masa del disco circumprimario y la masa del disco circumbinario es del orden de 0.1, que coincide con las estimaciones para el sistema binario UY Aur (Duvert et al. 1998).

En conclusión, los discos circunestelares y circumbinarios son perturbados por la presencia de una segunda estrella a partir de una configuración donde las órbitas son circulares. El conjunto de órbitas pueden ser pobladas por material, pero este formalismo no permite estimar la masa de los discos. Al imponer la conservación de  $C_J$  se pueden estimar masas asociadas a un disco circumprimario respecto a

un disco circumbinario, resultado que debe tomarse con cuidado, debido a los detalles de la aproximación. Resumiendo, la configuración estacionaria a la que se llega por la acreción de material de una nube, es un punto de partida para estimar masas de discos en un sistema estelar binario, concluyendo que discos circumbinarios mostrarán un anillo denso, como se observa en el sistema GG Tau.



## Capítulo 6

# Conclusiones

La tesis trata sobre discos en sistemas estelares aislados y en sistemas binarios. Para el caso de una estrella aislada se estudió la formación de un disco a través de una simulación hidrodinámica del colapso de una nube hacia una estrella. La evolución dinámica del material en el plano orbital lo lleva a una configuración estacionaria donde el material se acomoda en un disco con dos anillos densos situados en radios keplerianos. Las partículas que continúan cayendo de la nube se separan en tres partes, una de ellas alimenta a la estrella y las otras dos alimentan a cada uno de los dos anillos densos. Con simulaciones en el plano orbital que sólo consideran la fuerza gravitacional de la estrella y la fuerza centrífuga, sobre una partícula prueba que se mueve en órbitas alrededor de la estrella, se concluye que la formación del anillo denso externo no depende de las fuerzas hidrodinámicas. Un disco con un patrón de densidad y velocidad peculiar es relevante desde el punto de vista observacional en etapas embebidas, es decir, cuando el material de la nube sigue alimentando al sistema de la estrella y el disco.

La formación de discos alrededor de las componentes estelares de un sistema binario y del disco alrededor de todo el sistema se estudia con un enfoque perturbativo. El resultado de la formación de un disco alrededor de una estrella aislada se extiende al caso de un sistema binario considerando a la estrella secundaria como una perturbación. El concepto de integrales de movimiento se utiliza en el problema restringido circular de tres cuerpos, donde existe una cantidad conservada, conocida como constante de Jacobi,  $C_J$ . Esta constante define regiones permitidas y prohibidas para cada partícula. La aplicación de este formalismo en el anillo denso externo que se forma en la simulación hidrodinámica del colapso de una nube sobre una estrella aislada, permite cualitativamente seguir su evolución para el caso en que la estrella secundaria es una perturbación que modifica la órbita no perturbada. La conclusión que se extrae de este análisis es que parte del material del anillo denso quedará restringido a órbitas circunestelares y el resto a órbitas circumbinarias. Una cuantificación de este proceso se realiza a través de simulaciones SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) parametrizadas con la razón  $a/R_d$ , donde  $a$  es la separación entre las estrellas y  $R_d$  es el tamaño del disco. El resultado principal que se extrae es que la razón entre la masa del disco circunprimario y la masa del disco circumbinario es del orden de 0.1, que coincide con las estimaciones para el sistema binario UY Aur (Duvert et al. 1998).

Además se estudió una etapa posterior a la formación de discos en un sistema binario, cuando el sistema ya no es alimentado por una nube en colapso y el material ya se ha establecido en órbitas

estables. El estudio se separó en dos partes. La primera es un análisis perturbativo sobre los elementos orbitales de la órbita de la partícula prueba, que se expresan en ecuaciones que describen el cambio en el tiempo de estos elementos, las cuáles son conocidas como ecuaciones planetarias de Lagrange. El potencial sobre la partícula prueba se puede separar en una parte asociada a la estrella más masiva (primaria) y una parte a la estrella menos masiva (secundaria), a esta última parte se le conoce como potencial de perturbación. Este potencial está dominado por términos de periodo largo (seculares) y términos resonantes. La importancia de estos últimos está restringida a radios específicos respecto a la estrella primaria. El caso que se estudió con este formalismo es el de una partícula de polvo en una órbita circular alrededor de la estrella primaria, perturbada por una estrella secundaria que se encuentra en una órbita circular alrededor de la misma estrella, que contiene a la partícula de polvo. La conclusión que se obtiene es que ni los términos seculares, ni la resonancia 3:1 modifican la órbita de la partícula. En la resonancia 2:1 la excentricidad de la órbita oscila alrededor de un valor promedio, deformando las órbitas en la vecindad de esta resonancia.

El estudio de este mismo caso se desarrolla con un análisis de perturbación en series de un parámetro pequeño. El tamaño de un disco circunestelar se estima al considerar como límite a la órbita más interna que se intersecta con su vecina. Para el caso de un disco circumbinario, la frontera interna del disco se define con un análisis de estabilidad, de tal forma que sólo órbitas estables forman parte del disco. La comparación de éstos resultados analíticos con resultados numéricos es aceptable como se muestra en Nagel & Pichardo (2007).

Por último se analiza la perturbación por una estrella secundaria sobre partículas que acretan de la nube hacia el sistema binario. En el análisis sólo se considera la contribución secular (de periodo largo). El resultado que se encuentra es que la inclinación del plano orbital de la partícula que se perturba varía en el tiempo. Esto tiene como resultado que planos con inclinaciones entre  $I = 24.3^\circ$  y  $I = 90^\circ$  se intersectan en el radio donde inicia la acreción, produciendo un choque. Estos choques modifican la configuración inicial y por lo tanto las trayectorias de acreción hacia un sistema binario, respecto al caso de una estrella aislada.

## Apéndice A

# Términos relevantes de la función de perturbación

Forma simplificada de la expansión a segundo orden de la parte directa ( $R_D$ ) y la parte indirecta ( $R_E$ ) de la función de perturbación para perturbación externa, es decir, para el caso de que el perturbador se encuentre en una órbita exterior a la trayectoria del material a perturbar. Extraído de las páginas 245-246 en Murray & Dermott (1999).

$$\begin{aligned}
 R_D = & \left( \frac{1}{2} b_{1/2}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2\alpha \frac{d}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}] b_{1/2}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' - j\lambda] \\
 & + \left( \frac{1}{4} e e' [2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha \frac{d}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}] b_{1/2}^{(j+1)} \right) \cos[j\lambda' - j\lambda + \bar{\omega}' - \bar{\omega}] \\
 & + \left( \frac{1}{2} e [-2j - \alpha \frac{d}{d\alpha}] b_{1/2}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \bar{\omega}] \\
 & + \left( \frac{1}{2} e' [-1 + 2j + \alpha \frac{d}{d\alpha}] b_{1/2}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (1-j)\lambda - \bar{\omega}'] \\
 & + \left( \frac{1}{8} e^2 [-5j + 4j^2 - 2\alpha \frac{d}{d\alpha} + 4j\alpha \frac{d}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}] b_{1/2}^{(j)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\bar{\omega}] \\
 & + \left( \frac{1}{4} e e' [-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha \frac{d}{d\alpha} - 4j\alpha \frac{d}{d\alpha} - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}] b_{1/2}^{(j-1)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - \bar{\omega}' - \bar{\omega}] \\
 & + \left( \frac{1}{8} e'^2 [2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha \frac{d}{d\alpha} + 4j\alpha \frac{d}{d\alpha} + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}] b_{1/2}^{(j-2)} \right) \cos[j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\bar{\omega}'] \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_E = & \left( -1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e'^2 \right) \cos[\lambda' - \lambda] - e e' \cos[2\lambda' - 2\lambda - \bar{\omega}' + \bar{\omega}] \\
 & - \frac{1}{2} e \cos[\lambda' - 2\lambda + \bar{\omega}] + \frac{3}{2} e \cos[\lambda' - \bar{\omega}] \\
 & - 2e' \cos[2\lambda' - \lambda - \bar{\omega}'] - \frac{3}{8} e^2 \cos[\lambda' - 3\lambda + 2\bar{\omega}] \\
 & - \frac{1}{8} e^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\bar{\omega}] + 3e e' \cos[2\lambda - \bar{\omega}' - \bar{\omega}] \\
 & - \frac{1}{8} e'^2 \cos[\lambda' + \lambda - 2\bar{\omega}'] - \frac{27}{8} e'^2 \cos[3\lambda' - \lambda - 2\bar{\omega}'] \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

donde se considera una suma sobre todos los valores de  $j$  enteros.

## Apéndice B

# Formation of a Two-Ring Pattern from the Collapse of a Cloud

### §B.1 Abstract

In this paper \* we study the formation of a disc resulting from the collapse of a rigidly-rotating cloud. A hydrodynamical axisymmetric and isothermal simulation is developed using as initial condition a ballistic approximation for the trajectories of the particles located in the vicinity of the star. The plane perpendicular to the angular velocity axis that contains the star is the locus where materials falling from both sides face each other with the consequent formation of a shock. The shocked material that moves almost parallel to this plane, is the material that forms the disc. The dynamical evolution of this material, including the material that is continuously incorporated from the cloud, drives the disc to a stationary configuration composed of two dense rings with constant specific angular momentum that sit on Keplerian positions. The difference in density between these rings and the zone between them is at least of an order of magnitude, thus, this feature probably will have strong consequences for the spectra observed of stars with discs.

Following the solution of the collapse of the singular isothermal sphere we can argue that the configuration is long-lived. Neglecting pressure effects, we can construct two simple models that account for the formation of the outer ring, consistent with the result of the hydrodynamical simulation. An analytic solution is found which describes the kinematics for a non-interacting ring in the orbital plane, in terms of its specific angular momentum.

### §B.2 Introduction

One of the main topics in interstellar studies is the formation of a star from material of a molecular cloud. Also, a result of this process is the formation of a rotating disc around the stellar system. This part of the phenomenon is a natural outcome of the collapse of a cloud with angular momentum

---

\* Artículo aceptado en la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica, para su publicación en Octubre de 2007, Volumen 43, Número 2

(Shu, Adams & Lizano 1987). Observationally, the presence of a disc is by now accepted for many objects (Padgett, Stapelfeldt & Sargent 2000, Hayashi, Ohashi & Miyama 1993, Strom, Edwards & Skrutskie 1993, Mundy, Looney & Welch 2000). owing to the information of infrared and millimeter wavelengths that trace dust or molecular gas in the vicinity of the star. The natural state of the disc is that in which its material is moving in circular orbits around the star with keplerian velocity, slowly accreting towards the star via viscosity dissipation (Lynden-Bell & Pringle 1974), working in a slower time scale than the free-fall time of the collapse of the cloud (Tscharnuter & Boss 1993) to form the star-disc system.

The lack of information on the early stages of disc formation is surmounted with collapse calculations using numerical codes (Larson 1972, Hueso & Guillot 2002, Hueso & Guillot 2005, Belloche, Hennebelle & André 2006, Tscharnuter & Boss 1993, Shu et al. 1987) or the semi-analytic description of the infall from a cloud with angular momentum (Terebey, Shu & Cassen 1984). The description of the formation of a disc requires a solution that is valid near the star which asymptotically joins the similarity solution given in Terebey et al. (1984). Under a free-pressure assumption (valid for supersonic velocities), two body solutions (Cassen & Moosman 1981, Ulrich 1976) correctly represent the trajectories of the particles that are falling from a rigidly rotating cloud at infinite.

In this paper we are interested in the formation and early evolution of a disc. So, we use the solution given in Ulrich (1976) to describe the material that falls close to the star. The angular velocity axis defines a symmetry plane called orbital plane, which is perpendicular to this axis and contains the star. Thus, a collapse of a cloud naturally produces a shock almost parallel to this plane (Yorke & Bodenheimer 1999, Laughlin & Bodenheimer 1994, Cassen & Moosman 1981, Bodenheimer & Laughlin 1995), above the disc that is forming.

A detailed study of this stage is missing in previous studies because almost everyone (Nakamoto & Nakagawa 1994, Lin & Pringle 1990, Cassen & Moosman 1981) demands that the material falling from the cloud to the disc quickly dissipate energy and the radial component of its velocity to smoothly incorporate to a keplerian disc with the help of strong turbulent interactions in the post-shock region. Stahler et al. (1994) tell us something more about this early stage, solving the inviscid and pressure free fluid equations on the orbital plane with a term that represents the contribution from the material that falls from the cloud with the solution given by Cassen & Moosman (1981). Using typical quantities, the partial time derivatives can be neglected to end up with a steady state solution as a good approximation. Interesting enough is the formation of a dense ring, a feature always present in the disc description of Stahler et al. (1994), and also in our hydrodynamical simulation.

The existence of dense structures inside a disc is relevant to the study of the formation of planets or companion stars. Many cloud collapse simulations (Tohline 1980, Pickett et al. 2003, Boss 1980, Larson 1972, Black & Bodenheimer 1976, Bodenheimer & Tscharnuter 1979) have as an outcome the formation of rings. The idea behind this process (for details see Tohline 1980) is that certain configurations allow the existence of a zone where positive forces (centrifugal, pressure,...) can compete with net gravitational forces, which in a collapse situation are always pointing in the negative direction, towards the center of mass.

At a certain location inside this region, positive and negative forces cancel each other. During some span of time, after the fulfillment of the last situation some material moves in the opposite direction,

sweeping particles on its way out, getting denser to become a well-defined structure.

Gravitational instabilities are recognized as a major cause of outward transport of angular momentum with the corresponding accretion of mass towards the star. Also Shu et al. (1994) speculate that these instabilities self-regulate the amount of mass in the disc during the stage of infall of material from the cloud to the disc. In other words, massive discs easily develop instabilities that transport mass to the star until the disc is well below a threshold mass. This kind of instability is observed in numerical simulations (Bodenheimer & Laughlin 1995, Yorke & Bodenheimer 1999, Nakamoto & Nakagawa 1994, Boss 1998) of a rotating disc and studied analytically in Hunter (1963), clearly identifying an infinite number of axisymmetric and non-axisymmetric modes in which a disc is unstable. Of course, the details depend on the density and angular velocity profile along the disc. Any of these instabilities could be responsible for the destruction of axisymmetric structures like rings; its relevance in the problem at hand is beyond the scope of this paper.

The aim of this paper is to fill a part of the gap existing in the study of the very early stage of disc formation. Most of the time, the disc exists in a state of non-accretion from the cloud (Shu et al. 1994), so an observation will commonly show an evolved disc, established in a Keplerian configuration, that Mundy et al. (2000) use to describe their observations. However in this paper, we want to stress that it is natural to think of other stationary disc configurations to compare with observations. We do not intend to impose any kind of assumption on the final configuration of the disc, allowing it to find its way to a stationary configuration. The basic idea of this work is to initially impose the density and velocity field given in Ulrich (1976) on the collapsing envelope around the star, allowing a shock in the orbital plane to form naturally a disc, and follow this system until it comes to a stationary state.

This paper is organized as follows. Section §B.3 gives a detailed explanation of the problem at hand, and all the ingredients its solution requires. Section §B.4 gives an analytic solution which allows us to describe the evolution of a non-interacting ring of material in the disc, as a function of angular momentum. The main result is presented in Section §B.5 where we describe an axisymmetric 2D hydrodynamical simulation, using as initial condition the density and velocity field given in Ulrich (1976). Because the stationary configuration is reached in a relatively short time as compared with the lifetime of the infall stage, in Section §B.6 we discuss the viability of sustaining the specific configuration we found in the previous section. The two following sections show the results of two different simulations, that, with several assumptions, address the dynamic problem in the orbital plane, in a quest to understand the involved physics by means of a simple model.

Our first model (Section §B.7) follows a ring of shocked material described with a set of differential equations that account for the material that is being incorporated. The second model (Section §B.8) also follows the same ring but described in a lagrangian frame. Importance is clearly given to the evolution of the innermost section of the disc, which accumulates material inside it under the well-mixed assumptions. Section §B.9 is a summary of our study, while the conclusions are given in Section §B.10.

### §B.3 Description of the falling of matter towards a star

The two parts into which we divide the system are the central star and the material that is falling in due to the gravitational potential of the star. The interaction between these parts is manifold but the one considered here is only the gravitational force between an individual particle and the central mass. A strong assumption is that the gravity between the particles of the cloud around the star is weak as compared to the interaction with the star itself.

We study the first stages of the formation of a disc, when material from the cloud is just arriving at the vicinity of the star. The principal condition for a disc to be formed is that the particles that fall in shall have some angular momentum; otherwise, they move directly to the central mass with no chances for a disc to exist, even to form.

The simplest assumption for the infalling cloud is that it is rigidly rotating; it is the one we use here. A model with all these hypotheses was developed in Ulrich (1976) where the particle begins at infinity with null radial velocity and a total velocity that is too low as compared with the acquired velocity at the time when it is reaching the vicinity of the star. Thus, a good approximation is to set a null energy to every particle (so, the trajectories are parabolas), which is conserved in a central potential, as well as the specific angular momentum. Ulrich (1976) found the following velocity field,

$$v_r = -\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.1})$$

$$v_\theta = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \theta_o - \cos \theta}{\sin \theta} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.2})$$

$$v_\phi = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \theta_o}{\sin \theta}, \quad (\text{B.3})$$

and the orbit is described by the equation

$$r = \frac{\sin^2 \theta_o}{\left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o}\right)}, \quad (\text{B.4})$$

and finally the density is given by,

$$\rho = r^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_o}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{3 \cos^2 \theta_o - 1}{r}\right)^{-1}, \quad (\text{B.5})$$

where  $(r, \theta, \phi)$  are the spherical coordinates of a particular point in space and  $\theta_o$  is the angle with respect to the rotational axis of the cloud, that defines the plane containing the trajectory of the particle.

The velocity, radius and density are in units of:

$$v_o = \left(\frac{GM}{R_d}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_d = \frac{\Gamma_\infty^2}{GM}, \quad \rho_o = \frac{M}{4\pi R_d^2 v_o}, \quad (\text{B.6})$$

respectively, where  $R_d$  is the keplerian radius for a particle with specific angular momentum  $\Gamma_\infty$ , the maximum value in a spherical shell of the cloud. For the case of rigid rotation, the maximum occurs in



the equator; this plane also defines the orbital plane, the locus where the disc is formed. These definitions allow us to interpret  $v_o$  as the keplerian velocity at radius  $R_d$ ; this radius naturally represents the typical radius of the disc. In equation (B.6),  $\dot{M}$  is the mass accretion rate from the cloud, so  $\rho_o$  represents the density of the material from a spherical shell of radius  $R_d$ , moving with the velocity  $v_o$ .

If we use the configuration given in Ulrich (1976) as an initial condition for a simulation, the typical velocity has to be supersonic. Assuming  $v_o$  as the characteristic velocity, calculated with  $R_d = 100au$  and  $M = 1M_\odot$  and the velocity of sound calculated with  $T = 15^\circ K$  as the temperature of the cloud, we can conclude that the latter is an order of magnitude less than the former, allowing the flow to be considered as supersonic. Satisfying this condition, the pressure gradients can be neglected and therefore a two body model for the flow is a good approximation.

The orbital plane divides the space into two parts, being each a "mirror image" of the other. The solution of Ulrich (1976) gives two different velocities for each point in the plane, the perpendicular component having the same magnitude but in opposite directions. When the particles associated with the two velocities face each other, the perpendicular velocity to the plane for both is lost in an inelastic collision. In other words, two shocks are formed parallel to the plane, forcing the velocity of the shocked material to lie on that plane. Particles that are incorporated in such a way will remain there and will belong to the disc that is forming.

Using equation (B.4) we can show that the orbits intersect the orbital plane ( $\theta = \pi/2$ ) at a radius  $R_I$  given by,

$$R_I = \sin^2 \theta_o. \quad (B.7)$$

This relation shows that the typical size of the disc ( $R_d$ ) is the maximum of  $R_I$ . From this we can conclude that the larger radius where the shock is present is also the maximum position of a stable orbit, where stable has the meaning here of a keplerian orbit, the locus where the centrifugal force plus the gravitational one gives zero.

## §B.4 Analytical description of the first stage of disk formation

Here, we describe the orbits in the orbital plane. First of all, we substitute the radius in equation (B.7) in the set of equations (B.1 - B.3) to obtain,

$$v_{R_o} = -\left(\frac{1}{R_I}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad v_{\phi_o} = 1, \quad (B.8)$$

where we have also substituted  $\theta = \pi/2$ .

Since the particle has lost the energy associated with its velocity perpendicular to the disc, it now has a negative total energy, which means that the resulting orbits are ellipses. The energy of the shocked particles is given by:

$$\epsilon_o = \frac{1}{2}(v_{R_o}^2 + v_{\phi_o}^2) - \frac{1}{R_I}. \quad (\text{B.9})$$

Using equation(B.8) in equation(B.9) and expressing the result in terms of the specific angular momentum  $\gamma$ , defined by  $\gamma = R_I v_{\phi_o}$ , we have,

$$\epsilon_o = -\frac{1}{2} \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}. \quad (\text{B.10})$$

We can now calculate the radial velocity of a particle characterized by  $\gamma$  and located at radius  $R$  by using conservation of energy and angular momentum. The energy per unit mass is given by

$$\epsilon_o = \frac{1}{2}(v_R^2 + v_\phi^2) - \frac{1}{R}, \quad (\text{B.11})$$

and the next equation is just a definition,

$$\gamma = R v_\phi. \quad (\text{B.12})$$

Substituting equation (B.12) in equation (B.11) and solving for the radial velocity  $v_R$ , we obtain,

$$v_R = \pm \left[ 2\left(\epsilon_o + \frac{1}{R}\right) - \frac{\gamma^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.13})$$

As we mentioned before, the orbits in the orbital plane are closed; then we can calculate the minimum and maximum distance to the star. The minimum and maximum distances are defined as the point where  $v_R = 0$ , and using equations (B.13) and (B.10) we get,

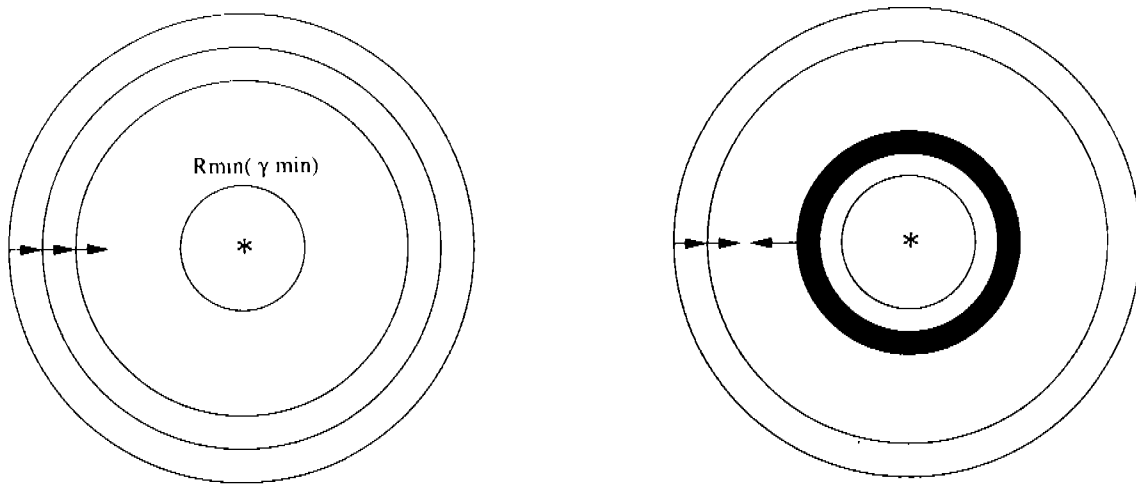
$$R_{min,max} = \frac{\gamma(1 \pm \sqrt{1 - \gamma + \gamma^2})}{1 - \gamma}. \quad (\text{B.14})$$

Notice in equation(B.13) that the solution of  $v_R$  has both signs (+ or -), representing either the section of the orbit towards the star or the one in the opposite direction. We see in equation(B.8) that the radial velocity is negative, indicating that the first part of the trajectory is approaching the star, and ending when the particles reach the minimum radius ( $R_{min}$ ).

Without interactions the particles will get there and start to move in the opposite direction. The description of the approaching stage begins with the solution of the equation given by

$$\frac{dR}{dt} = v_R, \quad (\text{B.15})$$

where  $v_R$  is given by equation(B.13). Because  $v_R$  is not a function of time, we transform the differential equation into the following integral,



**Figure B.1:** The figure at the left shows three inner rings moving towards the minimum radius curve. At the right, the inner ring is moving outwards. This ring accumulates material that still is moving towards the star.

$$t = \int v_R^{-1} dR, \quad (\text{B.16})$$

whose solution can be expressed as,

$$t = \pm \frac{1}{(-2\epsilon_o)^{1/2}} \left[ -(R - R_{min})^{1/2} (R_{max} - R)^{1/2} - \frac{1}{2} (R_{min} + R_{max}) \operatorname{atan} \left( \frac{(R_{min} + R_{max}) - 2R}{2(R - R_{min})^{1/2} (R_{max} - R)^{1/2}} \right) \right]. \quad (\text{B.17})$$

From the practical point of view, the difference in the evaluation of  $t$  (equation B.17) for any two points, tells us, for material with angular momentum  $\gamma$ , the time that a specific particle needs to travel the distance between these points. In other words, we know the time of arrival of any ring of material, at any position in the orbital plane. In the remaining part of this paper, the word “ring” refer to a thin circular section of the disc. Due to the cylindrical symmetry of the problem, the particles contained in a ring evolves exactly in the same way.

The main drawback is that only the description of the evolution of an isolated ring, labeled with the angular momentum (conserved quantity), is obtained. If there are processes that change this value, then the description becomes more complicated. In a hydrodynamical simulation, a ring is always subjected to artificial or explicit viscosity, so the assumption of conservation of angular momentum has to be somewhat relaxed.

Although, for equation(B.17) to be of any practical use, the essential condition to satisfy is that the original rings evolve long enough without interactions between them. If we use equation(B.17) to

calculate the time for the initial rings to get to  $R_{min}$ , we see that the time increases with  $\gamma$ . Because  $R_{min}$  has the same trend, we can confidently say that any ring will arrive at  $R_{min}$  earlier than any outside ring to their minimum radii, which in the latter case is larger. The physical conclusion is that when the material is moving towards the star, a ring has no interactions with any other ring. The first interaction for material in the orbital plane occurs when a ring arrives at  $R = R_{min}$ , and begins its journey away from the star. Eventually, this ring will encounter others, forming a shock that will move along with it. The Figure B.1 explains this with a drawing. The study of this regime will be developed in Sections (§B.7 and §B.8), being our next subject a hydrodynamical simulation.

## §B.5 Hydrodynamical simulation

### §B.5.1 Description of the code

For this simulation, we use the hydrodynamical code written by Raga, Navarro-González & Villagrán-Muniz (2000), named IGUAZU-A. Fluid equations are numerically solved in a rectangular grid that automatically refines when some criteria is fulfilled. As an example, in a shock some quantities change rapidly with position, and to resolve it, the code creates the necessary cells.

The problem we want to address has cylindrical symmetry, so the simulation is made in a 2D grid with R and Z as its axis. Assuming that the system is isothermal, the equation of energy reduces to the statement that the temperature is constant. The code requires an explicit viscosity term. The viscosity coefficient is made as small as possible so as not to disturb the essential physics of the problem.

### §B.5.2 Initial and boundary conditions

In Section §B.3, we show that equations (B.1, B.2, B.3 and B.5) represent a good approximation for the material that is falling towards the star. Thus, we use the velocity field and the density expressed there as an initial condition for the simulation. The terms dependent on  $\theta_o$  are expressed in terms of  $r$  and  $\theta$  using equation (B.4).

The remaining thing that we require to run the code is to define the boundary conditions. Two of the sides of the grid are the R-axis and the Z-axis, for particles there we demand that the perpendicular velocity to them be null. The two other boundaries are defined by  $Z = Z_{max}$  and  $R = R_{max}$ ; there the density and velocity field are always given by equations (B.1, B.2, B.3 and B.5). Physically this condition means that the material is always fed from the cloud with Ulrich (1976)'s solution.

### §B.5.3 Results

The simulation that we describe now has the following parameters:  $R_d = 100au$ ,  $M = 1M_{\odot}$ ,  $\dot{M} = 10^{-6}M_{\odot}yr^{-1}$ ,  $T = 15^{\circ}K$ ,  $\mu = 1.0$  (atomic hydrogen). Avoiding the singularity at the origin, we define a radius ( $R_{acr}$ ) such that the material that arrives there is lost from the simulation. The physical dimension of the axis that defines the computational grid are:  $R_{max} = 1000au$  and  $Z_{max} = 100au$ . Each direction has the same number of cells, that is 512.

When a particular value for  $R_{acr}$  is chosen ( in this case  $R_{acr} = 0.1R_d$  ), the solution of  $R_{acr} = R_{min}$  ( $R_{min}$  described in equation B.14) determines the minimum angular momentum ( $\gamma_{min}$ ) of the material that remains in the plane after the accreting stage. We take equation (B.6) to construct a time  $t = R_d/v_o$  (in this case,  $t = 158$  yr), which we can give times without units. Using equation (B.17), the time of arrival is  $t_{min} = 0.197$ . Besides, the ring with that particular angular momentum is the first one to arrive to its minimum radius. As mentioned in Section §B.4, with no interactions of the rings when they are moving towards the star, naturally the first interaction occurs when the inner ring changes its direction of motion. Putting it all in one sentence, the ring with  $\gamma = \gamma_{min}$  produces the first interaction with the material that is still falling into the orbital plane, at position  $R = R_{acr}$ . The exact characteristics of the interaction is not easily described.

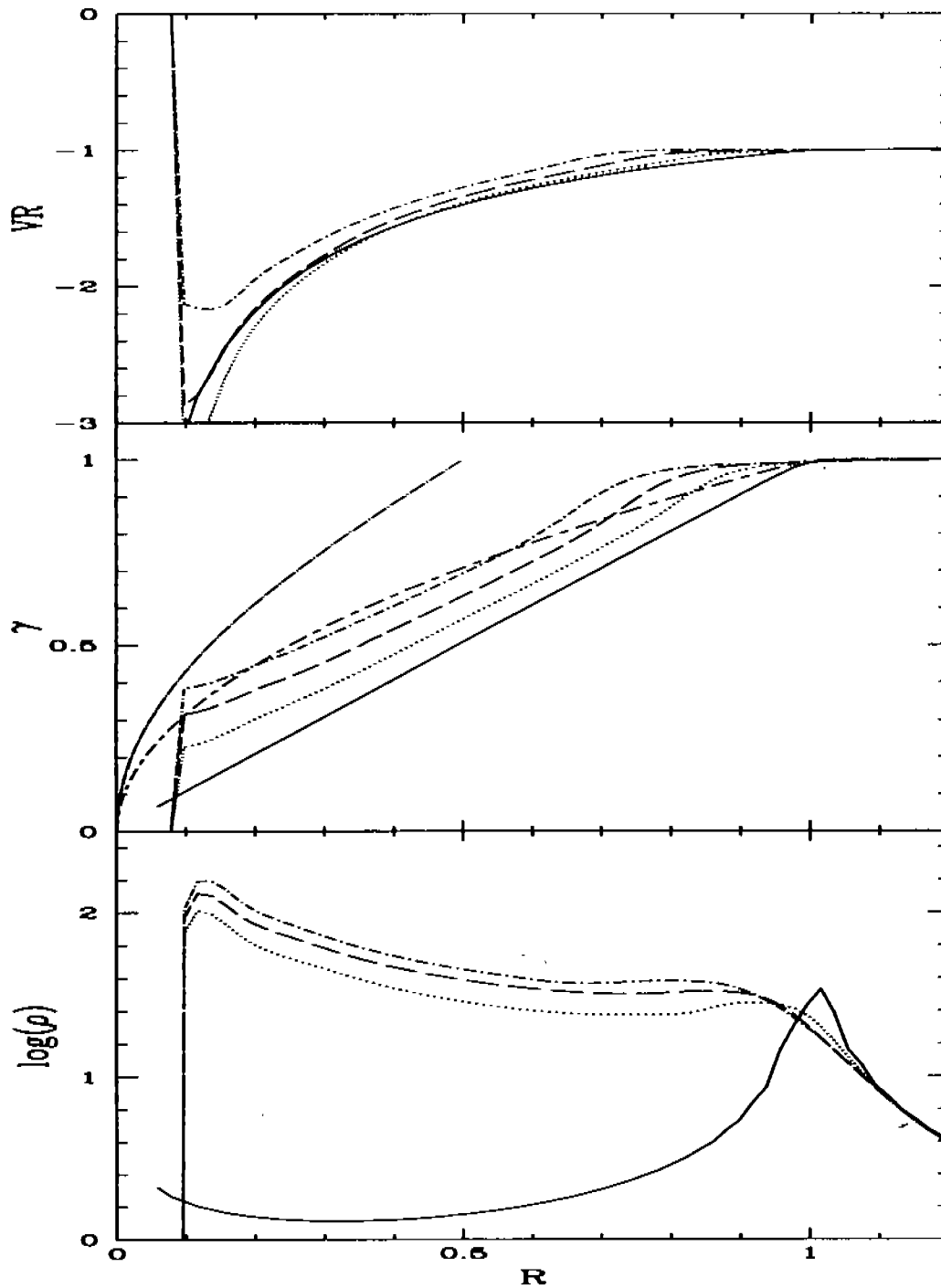
In Fig.B.2, we plot, for times less than  $t_{min}$ , the radial velocity as a function of position. At these times the velocity is always negative, as expected, and we can also notice that there is a tendency toward a decreasing magnitude. The above statement is an obvious result of the deceleration process that a particle experiences when approaching  $R_{min}$ , where  $v_R = 0$ .

For the same times in Fig.B.2, we plot the angular momentum as a function of radius. The important characteristic to describe is that as time increases, the plot is moving towards the origin nearly preserving its original form, giving a clear indication of the conservation of angular momentum. Of course, every plot is to the right of the curve of minimum radius, this will be designated as the plot  $\gamma$  vs  $R_{min}$  (equation B.14) from now on.

Fig.B.2 shows the evolution of density in terms of  $R$ , for times less than  $t_{min}$ . From the time,  $t = t_{min}$ , a different picture evolves, the ring of material with  $\gamma = \gamma_{min}$  will begin to move away from the star. The particles that it encounters will be absorbed into a working surface, accumulating the angular momentum along with the linear momentum. If we assume that the material is perfectly mixed, the ring composed of shocked material will move with the velocity of the center of mass of the components, with a new associated angular momentum, the weighted average of the values of the components. We will not enlarge this description here, as the simulation described in Section §B.8 extend this point further.

The evolution of the inner ring is ruled by the material that gets into it from the orbital plane and also from above it. Particles are continually arriving at the plane and interacting with the material that is already in it. The results in Section §B.4 just analyze the particles that initially arrive at the orbital plane without mentioning any further feeding from any other place. At this point of the simulation it is crucial to consider the feeding because the positive velocity of the inner ring creates a void that will interact strongly with material external to the plane, ending with particles that in some way are incorporated into it.

At this moment it is difficult to characterize with some degree of precision the material that falls into the void that is forming as a function of time. We can mention two main reasons for that. The first one is that we do not know for sure how the ring evolves in time, and the second one is that a well defined disc is growing in thickness. The thickness is at least an order of magnitude less than the radial size of the disc but it is not constant along the radius. The upper boundary of the disc is the surface that divides the accreting material that is not perturbed from the material that already has strong



**Figure B.2:** Hydrodynamical simulation: From top to bottom radial velocity  $v_R$ , angular momentum  $\gamma$  and  $\log(\rho)$  vs cylindrical radius  $R$  in the middle plane of the disc ( $Z=0$ ), for times  $t = 0$  (solid line),  $t = 0.063$  (dotted line),  $t = 0.126$  (dashed line), and  $t = 0.189$  (dot-dashed line). Also it is shown the keplerian radius ( $R_k$ ) as a function of  $\gamma$  ( $\gamma = R_k^{1/2}$ ) in the dot-long-dashed line. The dashed-long-dashed line represent  $R_{min}$ .  $R, v_R, \gamma$  and  $\rho$  are given in units of  $R_d, v_0, \gamma_\infty$  and  $\rho_0$  respectively. (see text)

interactions and is no longer represented by the two body solution (Ulrich 1976). We can characterize precisely the material outside the disc, but to say which particles are incorporated into the disc at some radius demands a clear understanding of the structure of the disc.

Let's follow the evolution of the material in the disc for times  $t > t_{min}$ . In Fig.B.3, for a time a little longer than  $t_{min}$  ( $t_{min} = 0.197$ ), the innermost part of the disc has positive velocities, representing the ring that begins to move away from the star. As time advances, a region opens with the motion of the inner ring and it is fed with external material that at some time begins to move towards the star. This configuration clearly divides the ring and the material that is incorporated into it, defined as the pattern with positive velocities; from the particles beside it that have negative velocities, and which represent the material moving inwards that avoids the ring mentioned above.

Eventually material in the innermost part of the disc will move with positive velocities, indicating that there exists a point inside the disc where  $v_R = 0$ . One can explain that as a particular region of the disc which is fed with external material from the inside of it with positive velocity particles, and from the outside of it with negative velocity particles. Looking at Fig.B.3, where the density vs radius is plotted, we directly identify that region as a dense ring that early in the evolution finds a stationary configuration around the position  $R = 0.2R_d$ . Completing the radial graph, also in Fig.B.3 we show the radius vs angular momentum for  $t > t_{min}$ . The ring moves from an angular momentum plateau to another with a larger value, indicating that a perfect mix is occurring with the material that incorporates into it, permitting to associate a constant angular momentum to the ring, which increases in time. We can visually identify in a 2D graph (R,Z plane) the statements made before on the plot of equal density and angular momentum contours. In Fig.B.4, at time  $t = 0.569$ , we can see how the ring moves away from  $R_{acr}$  towards regions of steep gradient in angular momentum. Here, the ring is characterized by a maximum in density and constant specific angular momentum.

The information that could be extracted from Figure B.4, must be taken with care, in particular in what refers to the thickness of the disk. This feature strongly depends on the details of the heating and cooling mechanisms that here are not taken into account. However, the surface density as a function of radius in the plane of the disk is something that can be compared with real disks.

Fig.B.3 also show the stationary configuration to which the system arrives, at a time around  $t = 12.64$ . The disc consists of two dense rings on keplerian orbits at positions around  $R = 0.2R_d$  and  $R = 0.6R_d$ . Between them, a minimum density ring is also at a keplerian position ( $R = 0.4R_d$ ) but it is not characterized by a plateau of angular momentum; instead, it is a region of transition between the both plateaus (constant angular momentum).

Returning to the visualization of the system in the R-Z plane for a time  $t = 1.264$ , Fig.B.4 shows the next qualitative step in the evolution, where we can see a dense ring that forms with material that comes from the cloud and is located inside the early ring that is formed. At this time, all the material that originally falls into the orbital plane was added to the external ring that is still forming. Now the feeding of that ring from the orbital plane proceeds only with material with  $\gamma = 1.0$ . Particles with less angular momentum come from beyond that plane. The positive velocity pattern is restricted to radius of less than one; the meaning of it is that the system has not enough lineal momentum to push it beyond radius one.

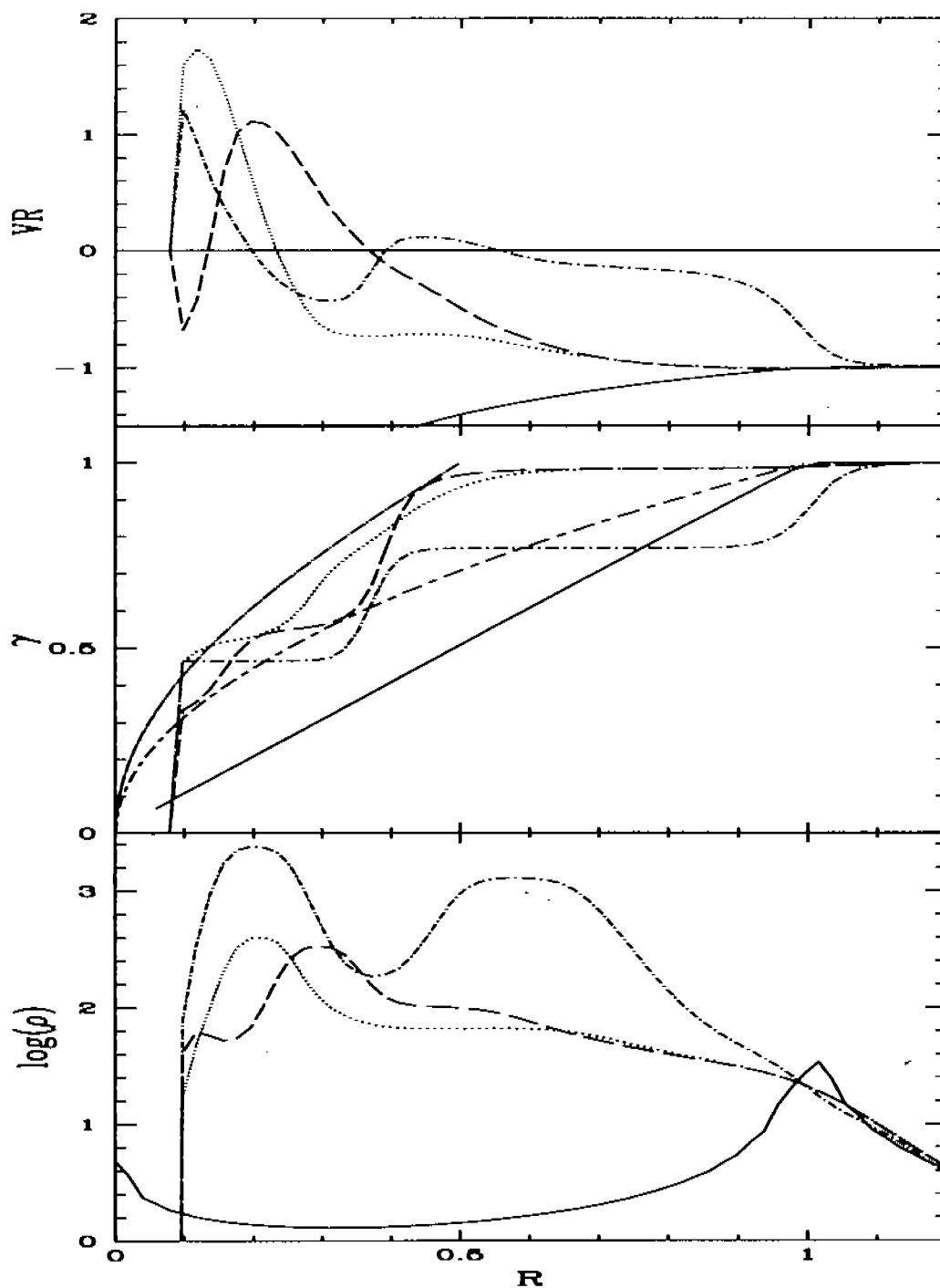
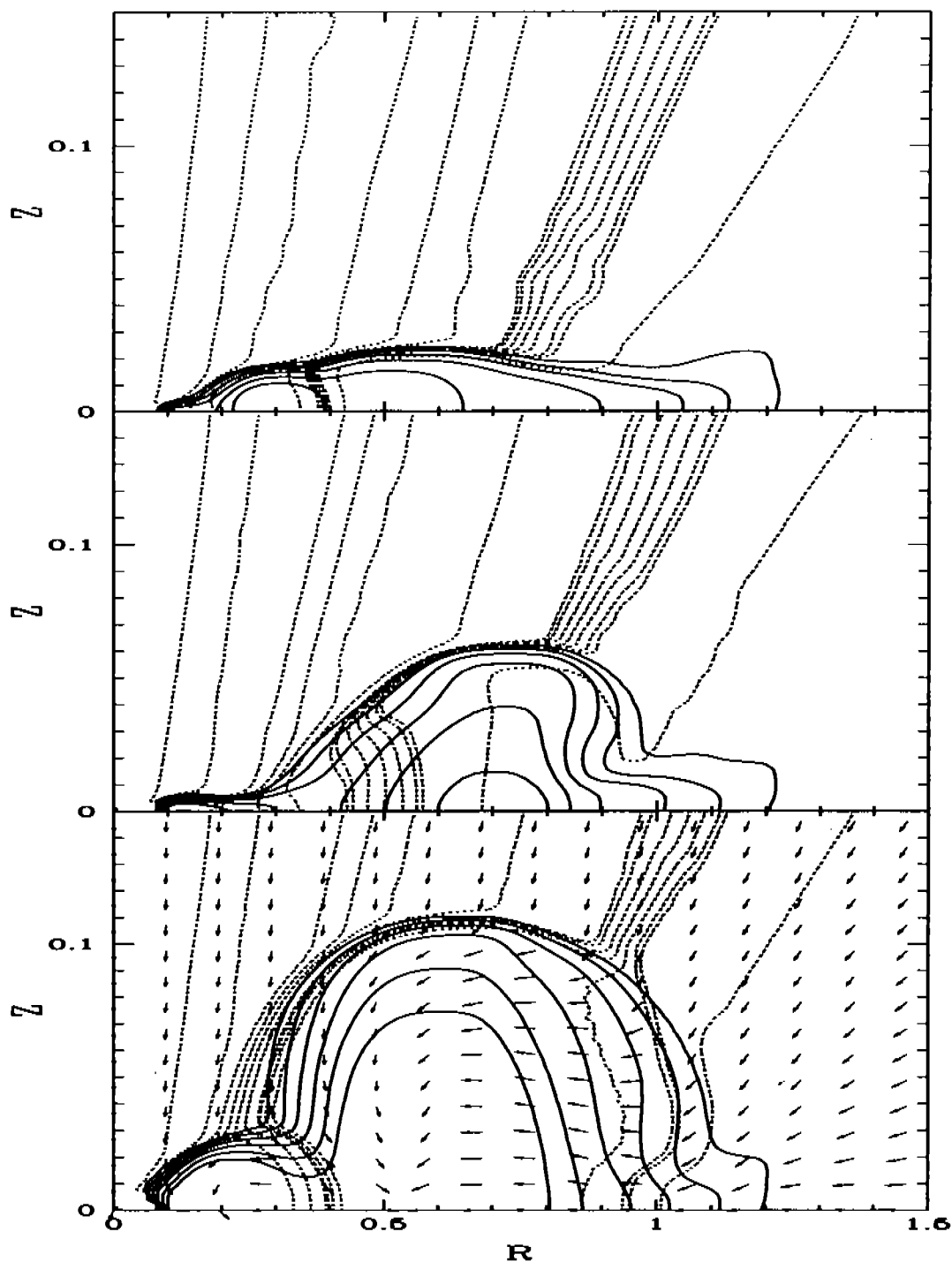


Figure B.3: Similar to Fig.B.2 but for times  $t = 0$  (solid line),  $t = 0.442$  (dotted line),  $t = 0.569$  (dashed line), and  $t = 12.64$  (dot-dashed line). The other curves represent the same, as in Fig.B.2.





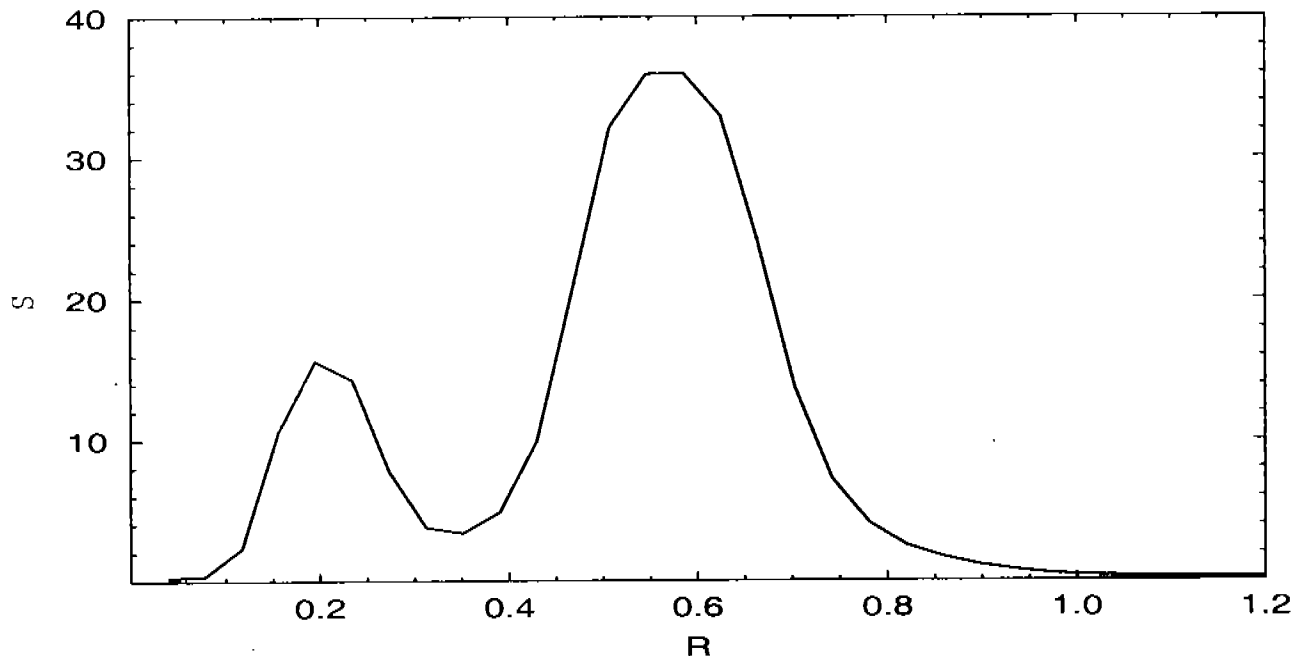
**Figure B.4:** A RZ plane in the hydrodynamical simulation is shown with contours of equal  $\rho$  (solid line) and contours of equal  $\gamma$  (dotted line). The values of the density ( $\rho$ ) contours are given by  $\rho_0/2^a$  ( $a=3,4,5,6,7,8$ ). The values of the  $\gamma$  contours are: 0.1,0.2,...,0.7,0.71,0.73,0.75,0.77,0.79, 0.8,0.9 from left to right. Plots are made at times  $t = 0.569$ ,  $t = 1.264$  and  $t = 12.64$  from top to bottom. At  $t = 12.64$  a stationary configuration is reached. The arrows represent the velocity field with magnitude proportional to the size of the arrow.

In Fig.B.4, for  $t = 12.64$  (the plot for the stationary situation), we see that the disc is restricted to  $R < 1$  as it was expected, and that the thickness of the external part of the disc is about three times that of the internal one. The contours of constant angular momentum give us an idea about the way the material incorporates itself into the disc. For the extraction of this information we supposed that when we follow a specific contour, the trajectory of the particle is also followed. For the last sentence to be true, the flux must be time independent and the conservation of angular momentum should be valid for every particle, true for stationary fluxes with cylindrical symmetry in the case of unimportant viscous torques.

Supposing what we stated before is true, we can conclude that when the material intersects the disc, the direction of the flow is deflected by a shock, finally sliding along the surface of the disc until it finds its way to the orbital plane. Remembering the form of the disc, the main position where the material is being channelled to the orbital plane is the radius associated with the minimum in density, that is the region between the two dense rings, as we can see in Fig.B.4.

In Figure B.5 we show the surface density ( $S$ ) in the disk as a function of radius ( $R$ ), calculated by vertical integration of the volume density extracted from the hydrodynamical simulation. In this way the thickness of the disk is irrelevant, giving a quantity that can be compared with results of observations of disks, which helps to ignore the thermodynamical details. The mass of the simulated disk presented at the bottom of Figure B.4 is  $M_d = 8 \times 10^{-4} M_\odot$ . The fact that the disk is in a stationary configuration can be used to scale the mass to any value. Kikuchi et al. (2002) find a disk-model with  $M_d = 0.02 M_\odot$  for HL Tau, capable of explaining the spectral energy distribution (SED) for the surroundings of this star in a range of frequencies. The scaled simulated disk has densities around  $10 \text{ gcm}^{-2}$ , as the modeled disk in Kikuchi et al. (2002). Lay et al. (1997) and Adams et al. (1990), as well as Kikuchi et al. (2002) use power-law density profiles corresponding to surface densities ( $S$ ) in the same range as the ones obtained in this work. D'Alessio et al. (1997) show a detailed model for a disk around HL Tau, which fits the SED for wavelengths from sub-mm to radio. There, an expression for  $S$  is found, consistent with a stationary configuration. In the spatial range of interest  $S < 100 \text{ gcm}^{-2}$  is also in agreement with the simulated disk shown in this paper. Note that the difference between minimum and maximum densities in Figure B.5 is more than an order of magnitude, thus, the pattern should be identified in an observation.

The last plot in Fig.B.4 also shows the velocity field, represented by arrows with longitude proportional to the magnitude, so, the rings have been fed with material at the left and at the right of the center of each ring located at an equilibrium position. Notice that at that point the pressure gradient is zero, because the position corresponds to a maximum in density. Allowing the presence of this hydrodynamical force, a keplerian radius is still an equilibrium state at the center of the ring. Because each ring as a whole is not moving, the addition of lineal momentum from right and left must cancel. Although the condition says something about the kinematics of the incoming material, it could not disentangle the peculiarities in the velocity of every piece of material with a particular value of the angular momentum. As a matter of fact, the velocities of the particles that are just entering the ring have not direct (analytic) connection with the known solution of Ulrich (1976), so we are unable to characterize that material.



**Figure B.5:** Surface density  $S$  vs radius  $R$  is shown for a disk with a mass  $M_d = 0.02 M_\odot$ .  $R$  is given in units of  $R_d$  and  $S$  in  $gcm^{-2}$ . This surface density corresponds to an axisymmetric disk viewed pole-on.

#### §B.5.4 About initial conditions and changes in the parameters

For sure, initial conditions can change the outcome of the simulation. However, the relevant gravitational mechanism forming the pattern with two rings in the disk dominates initial conditions, as a lower-mass disk already formed. One way to face the problem is to think that a stationary configuration, as the one found here, can act as an initial configuration that would naturally preserve the features of the disk. However, this configuration will not last, because after a certain time the disk will have accumulated enough mass, arriving at a configuration prone to gravitational instabilities. After the action of the instability, the disk will achieve a stable state that, at a first guess, can be described with a power-law density profile.

Thus, a natural initial condition (other than no-disk) to prove in a simulation is a disk with a surface density of the form  $S = S_0 R^{-3/2}$ , where the constant  $S_0$  is fixed with the choice of the mass of the disk. The chosen exponent is selected according to Kikuchi et al. (2002) which was used to fit the flat-spectrum of T Tauri stars, besides the fitting of HL Tau by Lay et al. (1997) also requires an exponent of less than minus one. As a matter of fact, changing the exponent do not change appreciably the typical densities in the disk, therefore, this simulation pretends to be characteristic. The initial velocity field is keplerian. The disk is thin with a thickness of  $\Delta Z = 0.01 R_d$  and the mass of the disk is  $M_d = 0.01 M_\odot$ . The simulation was followed until a time  $t = 9.48$ , shown in Figure B.6 for the radial velocity ( $V_R$ ), specific angular momentum ( $\gamma$ ) and density ( $\rho$ ), on the orbital plane, in terms of radius

( $R$ ). The times shown are  $t = 3.16, 6.32, 9.48$ .

The simulation was run sufficient time affording to look for trends. The density in the initial disk is larger than the typical density in the cloud. Thus, a strong discontinuity in the boundary between disk and cloud is responsible for a transient in the simulation, not seen in the main simulation. At the top of Figure B.6, the feature of positive radial velocity close to the star can be seen at the three times, analogous to the same plot in Figure B.3. At  $t = 9.48$ , there are three positions where  $V_R = 0$ , corresponding to places where the inner and outer rings are fed. At the bottom of Figure B.6 the presence of the former becomes obvious, while, the latter is in the process of formation. The middle plot in Figure B.6 clearly shows that the dense rings sit in a keplerian radius according to their specific angular momentum. As a conclusion, a not very massive disk initially seeded presents no qualitative changes to the picture already formed, as shown in Figure B.6.

The problem depends on dimensionless parameters; in this case, the size of the disk, mass of the star, angular velocity of the cloud and mass accretion rate of the cloud into the star-disk system are variables that can be given any value; the results are just scaled to the new configuration. However, there is another variable that should be treated separately, that is  $R_{acr}$ , the radial size of the inner region of the mesh, where the material is lost.

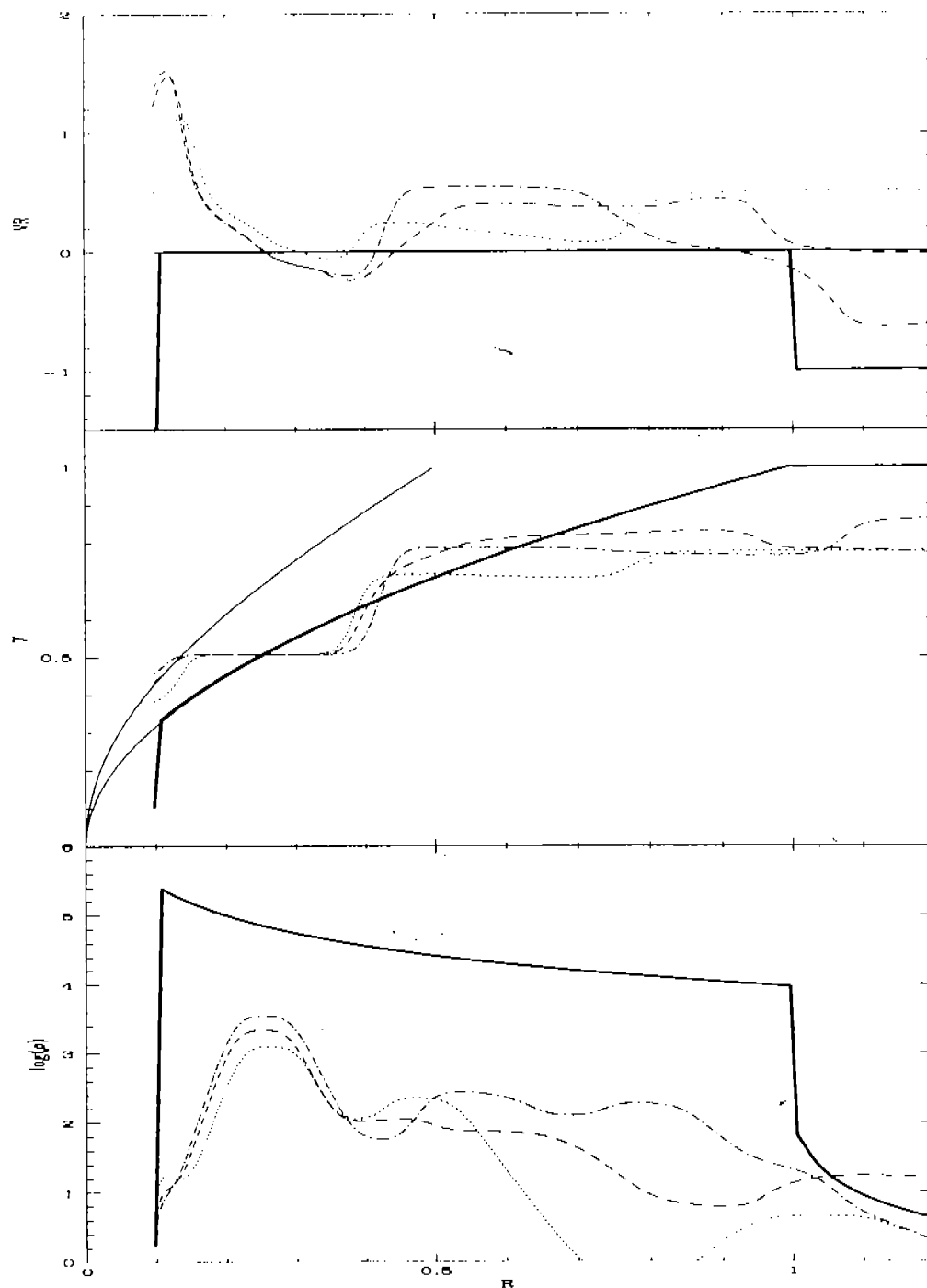
For computational convenience, a specific value for  $R_{acr}$  was chosen to remove material from the center of the disk. As stressed in Section §B.4,  $R_{acr}$  allows to estimate the specific angular momentum of the innermost material that turns around in the early evolution of the particles in the disk. Afterwards this material will become the outer ring, and the material that falls from the cloud with values of specific angular momentum around this value will eventually form the inner ring. As noted, the general features of this process do not depend on the value of  $R_{acr}$ , thus, the two dense rings pattern disk will form, with the only difference that the rings will be located at different positions.

In order to check this theoretical statements, a simulation with  $R_{acr} = 0.2 R_d$  was run (the double of the value used). Figure B.7 shows  $V_R, \gamma$  and  $\rho$  vs  $R$ , in the middle of the disk, for  $t = 3.16, 6.32, 25.28$ . At the first two times, the transition towards the configuration shown at the last time,  $t = 25.28$  is shown. The radial velocity plot in Figure B.7 shows the same features as in the stationary configuration of Figure B.3. The density profile clearly identifies the two dense rings, which as expected, are moved to larger radii, because the average  $\gamma$  in the disk is larger than the one in the case with  $R_{acr} = 0.1 R_d$ . The middle plot in Fig B.7 again shows that the specific angular momentum of the rings is constant and that they sit on keplerian radii.

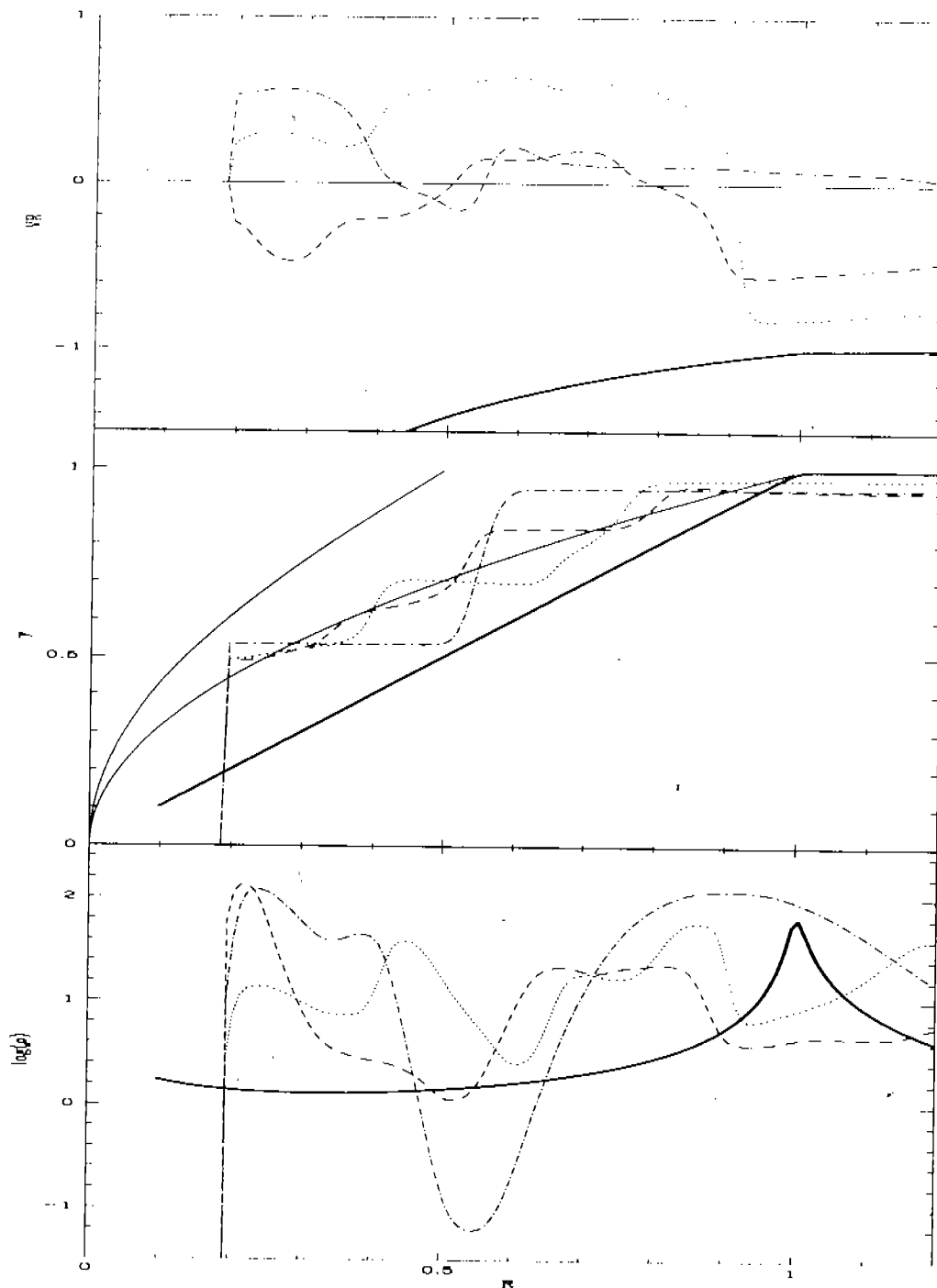
This result proves that  $R_{acr}$  is irrelevant for the formation of the pattern in the disk, changing only the equilibrium positions of the rings.

### §B.6 Will a disk with two dense rings survive?

The simulation described in Section §B.5 shows the way the material from a thin spherical shell of the cloud falls towards the star, forming a disc around it with a pattern of two dense rings, in a time scale of thousands of years, which is two orders of magnitude less than the free fall time. The disparity in the typical times for these processes allows us to say that this pattern will be formed before a new shell



**Figure B.6:** Similar to Figure B.2 but for times  $t = 0$  (solid line),  $t = 3.16$  (dotted line),  $t = 6.32$  (dashed line), and  $t = 9.48$  (dot-dashed line). The other curves represent the same, as in Figure B.2. A keplerian disk with power density profile is given as an initial condition. The thickness of the disk is  $\Delta Z = 0.01 R_d$  and the mass of the disk is  $M_d = 0.01 M_\odot$ .



**Figure B.7:** Similar to Figure B.2 but for times  $t = 0$  (solid line),  $t = 3.16$  (dotted line),  $t = 6.32$  (dashed line), and  $t = 25.28$  (dot-dashed line). The other curves represent the same, as in Figure B.2. The difference with the simulation presented in Figure B.2 is that  $R_{\text{acr}} = 0.2 R_d$  instead of  $R_{\text{acr}} = 0.1 R_d$ .

will fall to form a new one. This strong statement will be proved in this section.

Even with a small central mass, the trajectories of the particles are described by Ulrich (1976)'s solution. As a matter of fact, using this solution as initial condition in a simulation, the two-ring pattern always appears. The conclusion is that we can scale all the results for any specific time using:

$$v_k(t) = \left( \frac{GM(t)}{R_d(t)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad R_d(t) = \frac{\Gamma_{\infty}^2(t)}{GM(t)}, \quad (\text{B.18})$$

where  $\Gamma_{\infty}(t) = R_i^2(t)\Omega$ ,  $R_i(t)$  is the radius of the shell in the cloud that at this time is falling and  $\Omega$  is the constant angular velocity of the cloud.

If we find the functional dependence on time of  $M(t)$  and  $R_i(t)$ , we can construct  $v_k(t)$  and  $R_d(t)$  as the expressions that give us the quantitative result for any time. As a good approximation, on the assumption that the angular velocity is much less than the radial velocities ( $R\Omega \ll v_R$ ), we can use the inside-out collapse model of Shu (1977). Once a central condensation forms inside the cloud, the infalling zone spreads out with an external boundary defined by the position of a wave at the isothermal sound speed that travels with the information of the collapse. This position is just the radius  $R_i(t)$  (see above) and then we can define

$$R_i(t) = c_s t. \quad (\text{B.19})$$

The model of Shu (1977) demands a constant rate of infall mass, that can be expressed as,

$$\dot{M} = \frac{m_o c_s^3}{G}, \quad (\text{B.20})$$

where  $m_o = 0.975$ . Directly from equation (B.20), we get

$$M(t) = \frac{m_o c_s^3}{G} t, \quad (\text{B.21})$$

for the mass of the central condensation (protostellar mass), for the time  $t$  since the infall began.

From equation(B.18) we get the following equation,

$$R_d(t) = \frac{R_i^4(t - \Delta t)\Omega^2}{GM(t)}, \quad (\text{B.22})$$

for the disc radius, when we take into account the time delay  $\Delta t$  for a spherical shell of matter to arrive to the orbital plane since the infall began. If we use a typical free fall velocity and equations(B.19,B.21) then equation (B.22) can be expressed as:

$$R_d(t) = (6.66 \times 10^{-3}) c_s \Omega^2 t^3. \quad (\text{B.23})$$

Equation(B.23) allows us to obtain the typical velocity  $v_k(t)$  in terms of time, using equation(B.18), we get,

$$v_k(t) = 12.0982 \frac{c_s}{\Omega t}. \quad (\text{B.24})$$

For an isothermal flow,  $c_s$  is constant and here  $\Omega$  is also constant; then the required supersonic condition ( $v_k \gg c_s$ ) depends only on time. As time increases the typical velocity  $v_k(t)$  decreases and with constant temperature it means that the accretion becomes subsonic at some critical time ( $t_c$ ). In Jijina, Myers & Adams (1999) a characteristic value for  $\Omega$  in cloud cores is  $10^{-14} \text{s}^{-1}$ , using it in equation (B.24),  $t_c = 10^7 \text{yr}$ .  $t_c$  is of the same order of magnitude or larger than a typical time for the life of a disc  $t = 10^7 \text{yr}$  (Shu et al. 1994); thus we can be quite sure that the supersonic requirement will be met.

The formation of a  $1M_\odot$  star lasts  $t_o = 0.95 \times 10^5 \text{yr}$ , as we can show using equation (B.21). Using equation (B.23) and  $R_d = 100 \text{au}$ , with the sound speed  $c_s = 3.57 \times 10^4 \text{cm s}^{-1}$  given for an isothermal cloud of temperature  $T = 15^\circ \text{K}$  composed of atomic hydrogen and time  $t_o$  here obtained, we can find a value for the angular velocity given by  $\Omega = 4.84 \times 10^{-13} \text{s}^{-1}$ , close to the values obtained observationally by Jijina et al. (1999).

A characteristic measure of how far the disc evolves with the two-ring formation process is

$$\Delta R_d = \frac{R_d(t_o + t_m) - R_d(t_o)}{R_d(t_o)}, \quad (\text{B.25})$$

where  $t_m$  is the time for establishing the two-ring pattern, which in the simulation described in Section §B.5 is about 2000yr. Coming back to equation (B.25),

$$\Delta R_d = \left(1 + \frac{t_m}{t_o}\right)^3 - 1 = 0.03, \quad (\text{B.26})$$

this allows us to conclude that the disc just increases about 3% of its size. So, the formation of a two dense rings disc is a quasi-stationary process, its size slowly increasing.

Thus, a shell of matter falls to the orbital plane forming a disc with two dense rings; then the next shell arrives at the already formed disc. The question here is: How the new material accommodates itself in the new configuration it encounters? The particle that arrives at the disc will find, besides the always present potential well of the star, a well defined gravitational potential of the two dense rings. What relevance has the presence of the rings depends on how the density of the material that is constantly arriving varies with time.

A characteristic density in the problem of Ulrich (1976), and also for the simulations described in Section §B.5 is

$$\rho_o = \frac{M}{4\pi R_d^2 v_k}, \quad (\text{B.27})$$

and from equations (B.21, B.23, B.24) we find,



$$\rho_o = (2.16679 \times 10^{12}) \Omega^{-3} t^{-5}. \quad (\text{B.28})$$

Notice here that  $\rho_o$  does not depend on  $c_s$ , in other words, we do not have to know at this point anything about the constituents of the cloud and not even of its temperature.

For a specific case,  $\Omega$  is constant, so increments in time produce decreases in  $\rho_o$ . With that value, we can calculate the characteristic density of the dense rings. Looking at the hydrodynamical simulation (see Section §B.5) we see that the density for the maximum is about  $\rho_{max} = 10^3 \rho_o$ .

If we look at the solution of Ulrich (1976) and its numerical application (see Section §B.5), we can show that the maximum density at the time of arrival is somewhere around  $10^2 \rho_o$ . This density is an order of magnitude less than the density of the rings. Furthermore, the fact that  $\rho_o$  decreases with time, allows us to conclude that the material that falls into an already formed disc, strongly feel the gravitational influence of the dense rings, in other words, the new particles could feed the rings.

The fact that the characteristic density always diminishes with time is just an effect of the spread of the disc and, at the same time, of having an equal rate of material falling into it for each unit of time.

Coming back to the problem at hand, if we use the positions of the rings obtained with a specific set of parameters and for instance, change the central mass, thus, a change in  $R_{acr}$  from 0.1 to  $0.1(t/t_o)^3$  will move the dense rings to the scaled positions  $0.2(R_d(t)/R_d(t_o))^3$  and  $0.6(R_d(t)/R_d(t_o))^3$ , using  $R_d(t_o)$  as the unit of distance. A justification for the variation of  $R_{acr}$  emerges by arguing that a more massive star has a magnetosphere or surface with a larger radius.

The physical implications of the above statement is that the section of a previous disc entering the region with radius  $R_{acr}$  will be lost from the disc into the star. Now we need to justify a smooth transition from the configuration at some time to the scaled configuration at a later time.

A stationary configuration with continuous fall of matter from the cloud allows us to say that the material incorporates in some way into both rings without disturbing the pattern already formed.

Looking back at Section §B.3, equation(B.7) gives us the radial position of the intersection of the particle trajectories with the orbital plane. We also know that the specific angular momentum is equal to  $\sin^2 \theta_o$ , which indicates a relation between the angle from which the particles begin to fall and its specific angular momentum.

Arguments in the last paragraph allow us to relate a differential of solid angle with a differential in specific angular momentum. Our main purpose here is to derive a function for the angular momentum and the mass contained in a spherical shell of the cloud in a range of a specific angular momentum. First of all, the solid angle  $S$  defined by a cone with an angle  $\theta$  from the Z-axis is

$$S = 2\pi(1 - \cos \theta). \quad (\text{B.29})$$

Using the fact that the mass accretion rate ( $\dot{M}$ ) is assumed constant, the total mass that falls between angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  in an interval of time  $\Delta t$  is:

$$M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\dot{M} \Delta t}{4\pi} dS. \quad (\text{B.30})$$

In terms of a specific angular momenta  $\gamma_1 = \sin^2 \theta_1$  and  $\gamma_2 = \sin^2 \theta_2$ , we get

$$M = \dot{M} \Delta t \left[ -(1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2}, \quad (\text{B.31})$$

where we already take into account the accretion from the other side of the plane. In the same way, the angular momentum can be expressed by

$$\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sin^2 \theta_o) \frac{\dot{M} \Delta t}{4\pi} dS, \quad (\text{B.32})$$

that can be written as

$$\Gamma = \dot{M} \Delta t \left\{ \left[ \frac{1}{3} (1 - \gamma)^{\frac{3}{2}} - (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}_{\gamma_1}^{\gamma_2}. \quad (\text{B.33})$$

A stationary configuration naturally suggests that all the material that is falling from the cloud will separate into three parts, the first one will arrive to the star and the other two to the dense rings. If we suppose a clear cut of the material from the cloud in just three parts, an estimation can be made (recalling the well-mixed hypothesis) of the specific angular momentum associated with the two dense rings.

Using equations(B.31,B.33), we can construct the mean specific angular momentum, dividing the former by the latter, that we name as ( $\bar{\gamma}$ ), then

$$\bar{\gamma} = \frac{\Gamma}{M}. \quad (\text{B.34})$$

The values that we need to establish before using equation(B.34) in our case, are the limits of  $\gamma$  for every section. To do it we have to go back to Section §B.5 and look at Fig.B.4. Following the angular momentum contours, we see that material from the cloud with  $\gamma < \gamma_{min} = 0.43$  slides on the surface of the section of the disc that contains the inner ring, until it finds its way towards the star.

We saw that the inner ring sits at the keplerian radius,  $R_k = 0.2$ , then the specific angular momentum is ( $\bar{\gamma}$ ) =  $R_k^{1/2} = 0.45$ . Solving  $\bar{\gamma} = 0.45$  using equation(B.34) and  $\gamma_1 = 0.43$  for  $\gamma_2$ , gives us  $\gamma_2 = 0.46$ , consistent with the limits associated with the inner ring. The last value automatically fixes the limits of  $\gamma$ ,  $\gamma_1 = 0.46$  and  $\gamma_2 = 1.0$  for the material that incorporates into the external ring. Again using equation(B.34), we get ( $\bar{\gamma}$ ) = 0.82, equivalent to  $R_k = 0.67$ . This keplerian radius is close to the value obtained in the simulation (see again Fig.B.4),  $R_k = 0.6$ .

In this way the pattern with two dense rings in the proto-disc will form at any time  $t$ , with a range in specific angular momentum between  $\gamma_1 = 0.43(t/t_o)^2$  and  $\gamma_2 = 0.46(t/t_o)^2$  for the inner ring, where we use  $\Gamma_{\infty}(t_o)$  as a global unit of  $\gamma$ . The expression for  $\Gamma_{\infty}(t_o)$  is obtained by solving together

equations(B.18,B.21,B.23). The outer ring will be continually fed with matter with  $\gamma$  in the range between  $\gamma_1 = 0.46(t/t_o)^2$  and  $\gamma_2 = 1.0(t/t_o)^2$ .

In this approximate interpretation of the evolution of the pattern with two rings, the configuration will pass smoothly from one time to another. As time passes, the accretion radius ( $R_{acr}$ ) also increases in size with the following absorption of material towards the star, producing an increment in mass of the star. We also have a contribution of mass for the central mass in a viscosity time, quantity that varies in time according to the expression  $t_{visc}(t) = R_d(t)^2/\nu$ . If the coefficient of viscosity is constant for all the evolution, then the ratio of this time in units of  $t_{visc}(t_o)$  gives  $(t/t_o)^6$ . Early in the evolution this time is too short indicating that material from the first stages is quickly absorbed by the star. As a matter of fact, the minimum mass of the star after a time  $t_o$  is  $M_{star,min} = 0.25$  using equation(B.31) in units of  $(\dot{M})\Delta t$ . Ignoring transport effects of mass from the disc to the star, in the same way we can derive masses (upper limits) for the dense rings,  $M_{inner\_ring,max} = 0.02$   $M_{outer\_ring,max} = 0.73$ .

## §B.7 Simulation of an infinitesimal ring accumulating material inside the orbital plane

In Section §B.5 is clearly shown that the most important feature in the disc is the dense ring that is moving outwards. The evolution of this ring (here, infinitesimal ring) can be described with a set of differential equations that take into account all the interactions that change the state of the ring. The main result that we use here is equation (B.17), which implicitly give us the position  $R$  of the infinitesimal ring, the time  $t$  of the simulation, and the angular momentum of the particles  $\gamma$  that are just being incorporated into that ring.

### §B.7.1 Description of the system of equations and initial conditions

The variables that characterize the ring are its velocity  $v_a(s)$ , position  $R(s)$  and the specific angular momentum  $\gamma(s)$  of the material that is being accumulated at time  $s$  by the infinitesimal ring. A zero-thickness hypothesis indicates that mass is incorporated but the density remains unbound. So, the effects derived from the density are ignored.

Let's begin with the construction of the differential equation that describes the evolution of  $\gamma(s)$ . First of all, let's take equation (B.17) and calculate the time it takes a particle, from the moment of arrival to the orbital plane, to get to radius  $R$ ; we obtain,

$$s = t(\gamma, \gamma) - t(R, \gamma), \tag{B.35}$$

getting a differential equation if we differentiate it,

$$ds = \left( \frac{\partial t(\gamma, \gamma)}{\partial \gamma} - \frac{\partial t(R, \gamma)}{\partial \gamma} \right) d\gamma - \frac{\partial t(R, \gamma)}{\partial R} dR, \tag{B.36}$$

dividing by  $ds$  and recognizing  $v_R = -\frac{\delta R}{\delta t(R,\gamma)}$  by definition, with the physically required minus sign, we can solve for  $\frac{d\gamma}{ds}$ ,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1 - \frac{v_a(s)}{v_R}}{\left( \frac{\partial t(\gamma,\gamma)}{\partial \gamma} - \frac{\partial t(R,\gamma)}{\partial \gamma} \right)}, \quad (\text{B.37})$$

where  $v_R$  is given by equation (B.13).

The equation for the velocity  $v_a(s)$  must contain three terms, of which the first is the gravitational force, the second is the centrifugal force and the last one takes into account the contribution of the lineal momentum of the material that accumulates inside the infinitesimal ring. So, the equation for the evolution of  $v_a$  is:

$$\frac{dv_a}{ds} = -\frac{1}{R^2} + \frac{\bar{\gamma}^2}{R^3} + \frac{\dot{M}_R}{M_R}(v_R - v_a), \quad (\text{B.38})$$

where  $\bar{\gamma}$  is given in equation (B.34).

$\gamma_1$  is the initial angular momentum of the ring and  $\gamma_2 = \gamma(s)$ . This equation also requires expressions for  $M_R$  and  $\dot{M}_R$ .  $M_R$  defines the mass of the infinitesimal ring and was just given by equation (B.31), where  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  have the same meaning as before.

Differentiating the equation (B.31) and substituting in it equation (B.37) allows to get

$$\dot{M}_R = \frac{\dot{M}\Delta t}{2} \frac{1 - \frac{v_a}{v_R}}{(1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\partial t(\gamma,\gamma)}{\partial \gamma} - \frac{\partial t(R,\gamma)}{\partial \gamma} \right)}. \quad (\text{B.39})$$

The last equation to define is that of  $R$ , but that is just

$$\frac{dR}{ds} = v_a. \quad (\text{B.40})$$

The set of coupled equations (B.37, B.38 and B.40) are numerically solved for  $R(s), v_a(s)$  and  $\gamma(s)$  as a function of time. Solving the problem requires to set the initial conditions. We have learned in the past simulations that the natural initial situation is the one where the ring with  $\gamma = \gamma_{min} = 0.43$  arrives at the minimum radius  $R = 0.1$  with null radial velocity. However,  $M_R = 0.0$  and  $v_R = 0.0$  at this position give singularities in the last term of equation (B.37); in order to avoid this problem, the ring is followed to a new initial condition using equation (B.17).

The set of equations depends on the sign of the velocity  $v_R$ . The choice of the sign is made using equation (B.17) to deduce in which direction the material that is going to be incorporated is moving, and to change the equations accordingly.

### §B.7.2 Numerical solution

The evolution of the inner ring is followed to a position  $R = 0.297$ , arriving there with a radial velocity  $v_R = 0.679$  and  $\gamma = 0.752$ . The values  $R$  and  $v_R$  given, locate the dense ring in the minimum radius curve (equation B.14 with the minus sign), so, the material contiguous to it has  $v_R = 0.0$  and a new singularity arises in the equations, resulting in the code to get stucked.

At this time, the inner ring having accumulated all the material initially located between a radius  $R = 0.43$  and  $R = 0.752$  with the same range in specific angular momentum, is unable to accumulate anymore of the accreting material. So, a ring with  $\gamma = 0.752$  begins to accumulate the material remaining in the disc. We follow this ring with the same set of equations (B.37, B.38 and B.40), until it accumulates all the particles with  $\gamma < 1.0$ . At the end, the variables acquire the values:  $R = 0.524, v_R = 0.739$  and  $\gamma = 1.0$  at a time  $t = 0.778$ .

At this point of the evolution the inner ring moves too close to the ring just described. There also forms another dense ring, beginning with the innermost material with  $\gamma = 1.0$ ; it arrives to its minimum radius  $R_{min}(\gamma = 1.0) = 0.5$  (using equation B.14) and finally moves to radius  $R = 0.524$ , where the three rings merge into one.

We follow the evolution up to longer times, using equation (B.38 and B.40) (equation B.37 is meaningless because  $\gamma$  is always one), where in equation (B.38)  $M_R$  evolves linearly in time at this stage. These changes allow to follow the ring to a position  $R = 0.919$  at a time  $t = 9.85$ , when it acquires a null radial velocity. As was noted in the hydrodynamical simulation (Section §B.5), in the orbital plane there is always material accreting with  $\gamma = 1.0$ , which is important as a way to stop the inner ring that it is moving with positive velocity. As a matter of fact, in the hydrodynamical simulation (see: Section §B.5) a dense ring sets up in a radius less than one, like here, thus, an explanation of the formation of the dense ring which continually accumulates the original material of the disc in it is reasonable. The simulation gives rise to a meaningless results if followed longer because we need a condition (what kind of material enters) at the inner side of the ring when it begins to move the other way. As a matter of fact, a realistic situation always requires material at the inner part of the ring, because it is not out of the question that material could be incorporated into it from this side. Due to our restricted model and the difficulty to resolve the characteristics of the material, suggested by the complicated shape of the disc as seen in Fig. B.4, this study is only an approximation.

## §B.8 Lagrangian simulation of material in the orbital plane

A strong assumption made in the previous simulation (see Section §B.7) is when a block of material with  $\gamma = 1.0$ , that forms outside the inner ring described with the set of equations (B.37, B.38 and B.40) is characterized. In Section §B.7 to the  $\gamma = 1.0$  - ring is assigned a non-perturbed velocity (equation B.13) in spite of all the interactions that start when the innermost ring with  $\gamma = 1.0$ , arrives to its minimum radius.

The simulation in this section, avoids this kind of problems using a lagrangian frame, where a set of rings is followed individually in time. So, many rings could be evolving independently and when time

comes, merge two or more blocks, each one containing all the information of its individual evolution. This kind of simulation will only need some initial configuration, a set of equations to solve for every ring, and specific rules when two rings meet, thus enabling us to proceed.

### §B.8.1 Lagrangian equations and initial and boundary conditions

First of all, the velocity and radius are given in units of  $v_o$  and  $R_d$  (see equation B.6). The initial conditions for the velocity are given by equation (B.8), and the surface density can be constructed as follows, for material that lies initially at radius of less than one. Differentiate equation (B.31) with respect to  $\gamma$ , obtaining,

$$\frac{dM}{d\gamma} = \frac{M\Delta t}{2} \frac{1}{(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.41})$$

The definition of surface density can be written as,

$$\frac{dM}{dR} = 2\pi R\Sigma. \quad (\text{B.42})$$

The equality between equations (B.41 and B.42) becomes evident when we remember that  $\gamma = R$  at time zero. Solving the system after the substitution  $R = \gamma$ , gives:

$$\Sigma = \frac{\Sigma_o}{R(1-R)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.43})$$

where  $\Sigma_o = \frac{M\Delta t}{4\pi}$ .

The rings we want to simulate are initially radially distributed between 0.43 and 6.0. The initial conditions for the rings located at a radius larger than one are different from the others, because there all the rings have specific angular momentum equal to one. The velocity is given by equation (B.13), substituting the value  $\gamma = 1.0$ . Because here we are not including pressure or viscosity effects, the interaction will be restricted to the central potential and according to that, the rings will evolve freely. This non-interaction condition allows us to say that boundary conditions are meaningless.

Before we begin the simulation, we have to divide the system into rings, characterized by an inner ( $R_i$ ) and outer ( $R_{i+1}$ ) radius. The positions will change in time, representing the position evolution of the ring labeled with the subindex  $i$ . This evolution is mathematically given by the equation,

$$R_i(t + \Delta t) = R_i(t) + v_i(t)\Delta t, \quad (\text{B.44})$$

where  $\Delta t$  is the timestep and  $v_i(t)$  is the former velocity of this particular ring. Instead of a better method like Runge-Kutta, we have chosen a simpler one. The results of the first stage of the evolution can be successfully compared with the analytical solution (see equation B.17), thus this method is enough to the objective at hand.

When a ring is being followed, a natural assumption is that the mass is conserved. This assumption and the definition of surface density allow us to get the relation that gives us the surface density after a timestep, as:

$$\Sigma_i(t + \Delta t) = \frac{\Delta m_i}{2\pi R_i(t + \Delta t)(R_{i+1}(t + \Delta t) - R_i(t + \Delta t))}, \quad (\text{B.45})$$

here  $\Delta m_i$  is the mass of the ring.

Restricting the external influence to a central potential gives us as the natural outcome the conservation of the specific angular momentum; putting it into a formula and solving for the angular velocity we get

$$v_{\phi_i}(t + \Delta t) = \frac{\gamma_i}{R_i(t + \Delta t)}, \quad (\text{B.46})$$

where  $\gamma_i$  is the angular momentum of the ring  $i$ .

Another conclusion of the central potential assumption is that the only forces present are the centrifugal and gravitational ones. So, the evolution equation for the radial velocity is:

$$v_{R_i}(t + \Delta t) = v_{R_i}(t) + \left( -\frac{1}{R_i(t)^2} + \frac{\gamma_i^2}{R_i(t)^3} \right) \Delta t. \quad (\text{B.47})$$

The set of equations (B.44, B.45, B.46 and B.47) describes in time the system we want to study in the orbital plane. It will be solved in the next sections.

### §B.8.2 Characterization of the initial rings and rules for interaction

If we solve nothing else but the equations (B.44, B.45, B.46 and B.47), the rings will go through each other without notice. Physically contiguous rings can not interchange positions, so an interaction (shock) occurs when  $R_i(t + \Delta t) > R_{i+1}(t + \Delta t)$ .

In an interaction, the  $(i + 1)$  - ring will disappear to be incorporated into the  $(i)$  - ring. The result of this accumulation is that the new ring, after the shock, will have the added mass of the components at time  $t$ . The velocity will be the center of mass velocity and the specific angular momentum will be a mean value, based on the well-mixed assumption. One last requirement is to fix some parameters. We choose  $\Delta m = 0.01$  for the mass of the inner rings (defined as those with  $\gamma < 1.0$ ). Because the typical density of the matter with  $\gamma = 1.0$  is quite large with respect to the other rings, we decided to choose a large associated mass,  $\Delta m = 0.31$ . To agree with the last simulation, the innermost ring lies at  $R_{in} = 0.43$  which corresponds to a specific angular momentum of 0.43 and a minimum radius of  $R_{min} = 0.1$ . The outer side lies at  $R_{ext} = 6.0$ . We consider a large enough value that allows us to see all the evolution until the ring acquires a null radial velocity. All these parameters give 899 inner rings and 3910 outer rings. The maximum density in the disc (at position  $R = 1.0$ ) takes initially a value of 26.54.

### §B.8.3 Results

The first part of this simulation ( $t < t_{min}$ ) occurs in the same way as the simulation described in Section §B.5: the material accreting towards the star, conserving the angular momentum, and without shocks. These last two conclusions are clearly seen in this kind of simulation, because we monitored every single ring.

The plot of  $R$  vs  $v_R$ , at time  $t = 0.442$  is shown in Fig.B.8. Already we see that the inner ring lies at the radius  $R = 0.297$  with a velocity  $v_R = 0.673$ , and having absorbed all the material with an angular momentum of less than  $\gamma = 0.751$ . In the last simulation, the ring at this position has a radial velocity of  $v_R = 0.679$  and the next ring about to be accumulated has an angular momentum of  $\gamma = 0.752$ . This whole set of numbers agrees very well with each other and the only difference is that the latter occurs at a time  $t = 0.454$ . Although the times do not coincide, they are quite close, so we can confidently conclude that up to this point the simulations are quite similar. The information on the former simulation with respect to angular momentum is also represented in Fig.B.8. The angular momentum of the shocked ring is the same in both cases, because the algorithm that is used is also the same.

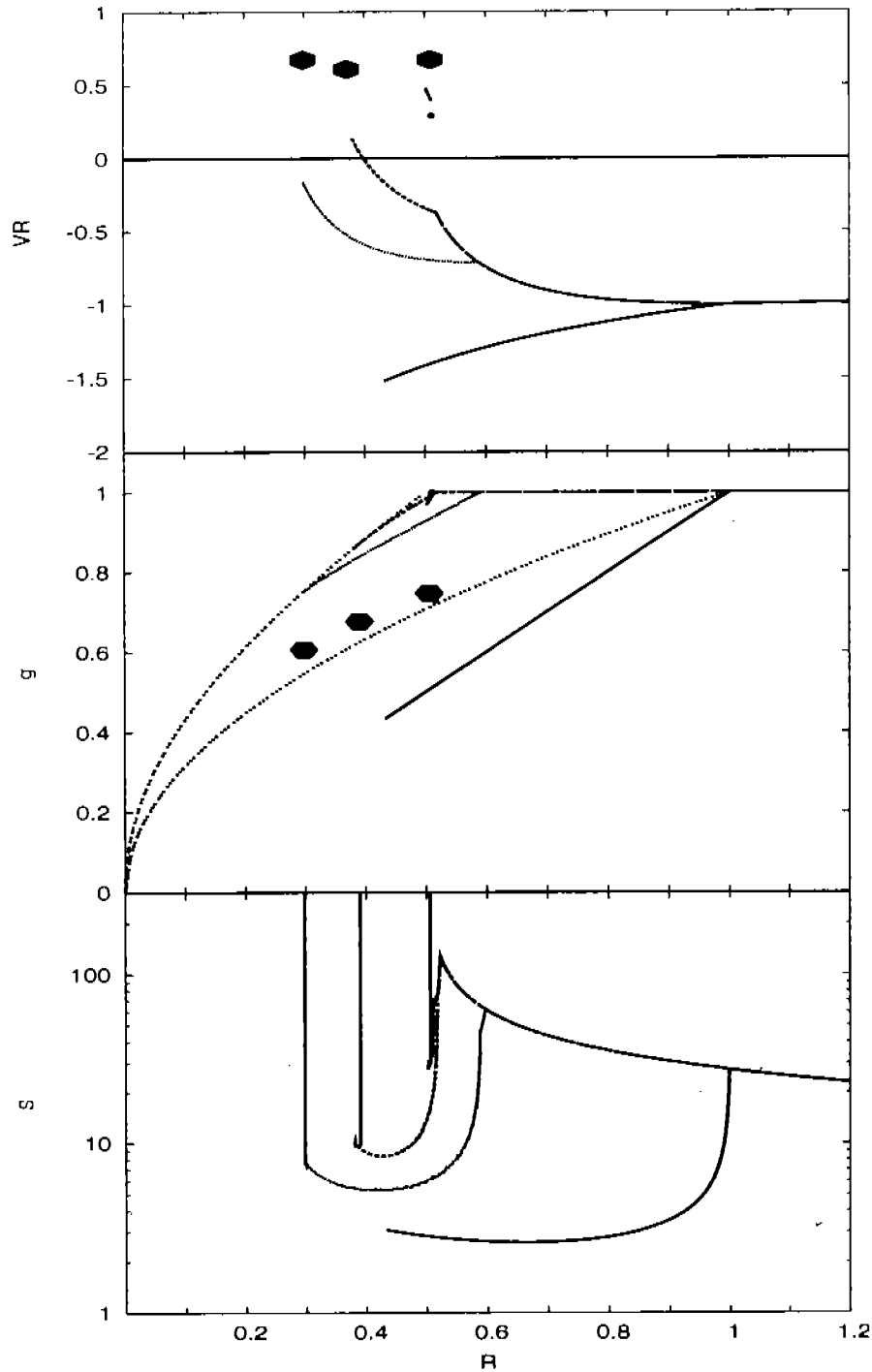
The density as a function of position is presented for this time and others in Fig.B.8. The density associated with the sweeping ring is just an order of magnitude estimation, as we ignore the spreading effect of pressure gradients, so we should take with care that particular data. Leaving aside this point, the rest of the plot gives us the density evolution of the rings, growing when the ring moves towards the star and decreasing in the opposite direction. Additionally, in Fig.B.8 the velocity ( $v_R$ ) and the angular momentum ( $\gamma$ ) is also plotted for some values of time.

Looking closely at the extracted values for  $t = 0.57$  of this lagrangian simulation, all the material between the ring and the particles with  $\gamma = 0.88$  is moving with positive velocities. Using equation (B.17) this fact can be demonstrated analytically. This is consistent with the fact that the last simulation shows, from this time on, that the matter will be caught by the inner ring, moving in the same direction.

Our next important situation to refer to is the time when the first ring with  $\gamma = 1.0$  arrives at its minimum radius. Analytically this time is given by the use of equation (B.17), obtaining a value of  $t = 0.667$ . What we see here is that from a time  $t = 0.667$ , two different blocks are formed and each one is evolving independently; eventually, these two appear collapsed into one. In the last simulation (see Section §B.7) the details of this merger is imposed, although here the lagrangian frame solves clearly the interaction without any assumption. This last statement describes for sure the best advantage of this code with respect to the last one.

After this, all we want to extract for the system is the position and time, when the inner ring reaches a null radial velocity. Finally the ring comes to that configuration at a radius  $R = 0.83$  for a time  $t = 3.6$ . A common result of all the simulations described in this paper (up to now) is that the inner ring is restricted to lie inside the original disc ( $R < 1.0$ ).





**Figure B.8:** Lagrangian simulation: From top to bottom, radial velocity  $v_R$ , angular momentum  $\gamma$  and surface density  $\Sigma$  vs cylindrical radius  $R$  in the orbital plane, for times  $t = 0$  (bottom curve),  $t = 0.442$ ,  $t = 0.569$  and  $t = 0.756$  are the curves associated with the full hexagons. At each time, the hexagons represent the inner ring. In the bottom figure the hexagons are out of the plot. The vertical axis in the plot at the bottom is logarithmic.  $R, v_R, \gamma$  and  $\Sigma$  are given in units of  $R_d, v_o, \gamma_\infty$  and  $\Sigma_o$ , respectively (see text). Also it is shown  $R_{min}$  (double-dashed line), see Section §B.4 for definition, and the keplerian radius ( $R_k$ ) as a function of  $\gamma$  ( $\gamma = R_k^{1/2}$ ) in the triple-dashed line.

## §B.9 Discussion

As mentioned in the introduction and pointed out by many authors (Bodenheimer & Laughlin 1995, Yorke & Bodenheimer 1999, Nakamoto & Nakagawa 1994, Boss 1998), the formation of gravitational instabilities in a disc is present at the early stage of the formation of planets. Thus, the axisymmetric configuration obtained in the simulation of Section §B.5 will be subjected to perturbations that can break the rings. The two dense rings pattern forms naturally, considering a continuous accretion from the cloud. The outer ring is constructed by sweeping the original matter in the orbital plane and comes to an equilibrium configuration due to all the material that is still falling from the cloud.

The inner ring is composed mostly of particles with angular momentum around  $\gamma_{min}$ . and almost completely fed with material that comes from above the orbital plane. The details of the formation are complex, and that is why we decided not to follow further this path. So, the simulations made in the orbital plane (Section: §B.7, §B.8) just pretend to study the evolution of the outer ring but not its evolution to a stationary configuration, because that demands the incorporation of matter from above, that we neglect here.

The hydrodynamical simulation (see Section §B.5) avoids the identification of a precise radius where the shock stops, but surely it is less than but close to one, as noted in the simulations described in Sections §B.7 and §B.8, which pretend to analyze this feature.

All the simulations show the positive velocity feature, our first guess is that it is all composed of shocked material. In the lagrangian simulation, a clear cut of the disc in rings allows us to separate this feature into two differentiated zones. The inner one just forms with shocked matter, the outer one is material that has been able to turn around its minimum radius and to begin to move outwards without any shock. Of course, the existence or not of this last zone depends on the time we are looking at.

These statements establish the fact that the particles are being accumulated in the sweeping ring both with negative and positive velocities. In both cases a deceleration of the ring is produced. Obviously in the first case the ring is decelerated and also in the other because for a ring with  $v_r > 0$  to be incorporated by the inner ring it has to move slower; then the absorption by the inner ring has as a result a decrease in its velocity.

An important situation of the phenomenon is when all the material with  $\gamma < 1.0$  is absorbed by the sweeping ring. Extracted from the lagrangian simulation we get  $t = 0.79$  and in the simulation of the infinitesimal ring  $t = 0.78$  was obtained. Notice that despite the differences in the way each simulation is developed and all the different hypothesis that are used, the times are similar.

The simulations (Section §B.7, §B.8) share an evolution that consists of a few blocks evolving independently, along with the single rings that by that time show no interaction with the others. In both of them, these bigger blocks collapse into one by the time when all the material with  $\gamma < 1.0$  has been incorporated into some of them.

The infinitesimal ring simulation require a velocity assignation to the  $\gamma = 1$  block, at the time when the accumulation of negative velocity material with  $\gamma = 1.0$  starts. There we use the maximum possible value, assigning the non-interaction solution (eq.( B.13)). A more realistic velocity will be less than that; as a guess we can use the velocity given in the lagrangian simulation at the suitable radius. Using

that to remake the last part of the infinitesimal ring simulation, we end with a different result for the time and the position where  $v_r = 0.0$ . Here, the values are  $t = 6.1$  and  $r = 0.89$ ; the time is much less than the one obtained before ( $t = 9.85$ ). However, there is still a discrepancy in the times for both simulations.

As it was mentioned, a change in the initial velocity has strong consequences on the time (less on position) when the sweeping ring arrives to null velocity. It is necessary to assume a little variation in the initial velocity to get the first minimum at  $v_r = 0.0$ . A gross estimation allows one to find a time  $t = 2.83$ , that compares better with the time  $t = 3.6$  deduced from the lagrangian simulation.

By now, a qualitative picture can be extracted from the way the material in the orbital plane is being incorporated into the ring at the first stage, finding a stationary position later on, when continuous feeding of the cloud is assumed ( see Section §B.5 ).

An important feature common to all the orbital plane simulations is that pressure effects are neglected, so that the inner ring is thin. Including the corresponding terms it could change quantitatively the results obtained here but not the essential features. Notwithstanding, a completed picture will be developed in a following paper.

## §B.10 Conclusions

The collapse of a core (observational characteristics of the cloud Jijina et al. 1999) is studied with the purpose of describing the formation and early evolution of a disc. We ask for a situation where a central mass exists inside the cloud, which is responsible for the main force that the particle feels. Neglecting self-gravity and pressure is a valid assumption if we consider a disc much less massive than the central object and supersonic typical velocities. All these assumptions are naturally taken into account in the collapse solution in Ulrich 1976. So, in Section §B.5 this solution is used as an initial condition for an axisymmetric hydrodynamical simulation. The material falls to the orbital plane with the subsequent formation of a disc, through two shocks, one in the top of the disc and the other at the bottom. Afterwards all the material moves towards the star until the inner part of the disc (we call it the inner ring) begins to move in the opposite direction. This ring begins to sweep material that is still accreting towards the central mass, finally finding an equilibrium position at a keplerian radius ( $r_k = 0.6$ , see Fig B.4).

The matter incorporated to this dense ring mixes perfectly, giving to it its lineal and angular momentum. The first quantity is a contribution to the velocity of the shocked ring and the last one allows to associate to the ring just one value for its specific angular momentum. From this value we can assign a keplerian radius to this ring.

The positive velocity stage of the ring creates a region inside it, fed with material that is still falling from the cloud. These particles have restricted possibilities for the specific angular momentum, with values close to  $\gamma_{min}$  (see Section §B.4). Early in the evolution this material evolves to form a dense ring with constant specific angular momentum that sits at the appropriate keplerian radius ( $r_k = 0.2$ , see Fig B.4).

Formation of rings (Tohline 1980, Pickett et al. 2003, Boss 1980, Larson 1972, Black & Bodenheimer,

Bodenheimer & Tscharnuter 1979) is an important outcome if we are interested in mechanisms forming denser zones in a disc as progenitors of planets or companion stars. But the question we always make is about the life-time of the feature (Boss 1980), as its viability as a way to form a stable structure like a planet depends on it. Thus, in Section §B.6 we use the isothermal spherically symmetric collapse model of Shu 1977, that gives us a similarity solution in terms of the disc radius at any time, as a first order approximation. All the arguments used in this explanation require that material would still be falling from the cloud, so, if the cloud is exhausted, the survival of the two dense rings disc pattern at larger times is not clear, thus reducing the possibilities of observation. To clarify this doubt, we take the simulation of Section §B.5 and after the formation of the pattern reduce the density of the falling material in a factor of 10, in order to simulate the exhaustion of the cloud. We see that after 40000yr, the dense rings are still there but located at different positions, still at  $R < 1.0$ . Therefore, in some cases this feature can be observed, if we can detect a disc deeply embedded in its parental cloud. As a matter of fact, Piétu et al. (2005) found a bright, spiral-like feature at about 140au from AB Auriga that they say could be produced in an early stage of star formation.

Using a typical value for the time required for the formation of the two dense rings pattern (Section §B.5) we can argue that the positions of the two rings and the radius of the disc expand as  $t^3$ , as long as there is material in the cloud. In Stahler et al.(1994) a similar structure, but with just one ring, expands in the same way. The position of the ring in Stahler et al. 1994 ( $R = 0.345$ ) is closer to the minimum density on the orbital plane in the hydrodynamical simulation of Section §B.5, that coincides with the boundary between the two dense rings. What we conjecture about the reason for the nonexistence of the two rings (that we found here) in Stahler et al. 1994 is that there the formation of the ring is linked to the assumption that the material at the left of this ring strongly dissipates energy inside a turbulent layer to coming finally to a keplerian orbit. What we say here is that the streamlines of the “outer disc” (see details in Stahler et al. 1994) intersect at the position of the ring, making it unable to change the sense of its movement to face this established part of the disc. This means that the outer ring in Fig B.4 is represented by the ring in Stahler et al.(1994). According to the construction, an inner ring in the “inner disc” (the keplerian part of the disc) in Stahler et al.(1994) cannot exist.

The main idea for the formation of the ring in the simulation of Section §B.5 is that at some point the material in the disc is halted, so afterwards a positive net force dominates (here, the centrifugal dominates over the gravitational), driving this ring to a larger radius. Arguments like this for explaining the ring formation are not new (Tohline 1980,Boss 1980,Larson 1972, Black & Bodenheimer 1976, Bodenheimer & Tscharnuter 1979), but the purpose there was only to study this formation in cloud collapse without any central mass. In the simulations (Tohline 1980,Boss 1980,Larson 1972, Black & Bodenheimer 1976, Bodenheimer & Tscharnuter 1979) the gravitational potential comes from self-gravity; in our work the gravitational contribution only comes from the proto-star, although the ideas used for explaining the ring formation are the same in both cases.

The simulations in Sections §B.7 and §B.8) are developed with the purpose of a clearer physical interpretation of the formation of the outer ring (see Fig B.4). Returning to the outer ring formation, the simple idea that we follow is that the first material that turns around to begin a positive velocity evolution is the seed of the ring that evolves outwards. Our final purpose in any of the simulations

is to follow the ring until it acquires a null velocity and to compare it with the stationary position of the outer ring in the hydrodynamical simulation of Section §B.5. All the simulations show the ring at radius of less than one: essentially this fact, tells us that these dense features are restricted at a smaller radius than the radius of the disc, defined as the position of the larger keplerian orbit.

The radial velocities in the stationary configuration are small as compared with the angular velocities in a keplerian disc: thus, a kinematic observation of the disc can easily ignore the small radial velocities to conclude that the observed disc is keplerian. Therefore, we hope that this result can motivate an effort in the estimation of radial velocities in discs to compare with the state found here. Such pattern in the disc has more chances to exist in sources deeply embedded in a cloud, where observations are more difficult to obtain, however, recent observations (Velusamy, Langer & Goldsmith 2002) show methanol emission tracing an infall-disc interface, so, I expect that in the future observations can put more restrictions for discs in an embedded stage. An observational consequence of the disc here described occurs if the dense rings are optically thick while the remaining of the disc is optically thin. In such a situation the emission of radiation should be dominated by the rings, producing a peculiar spectrum of energy with preference to some frequencies.

## Apéndice C

# Disk mass estimates in a binary system

### §C.1 Abstract

\* Analytical restrictions for the mass of a disc in isolated or multiple stellar systems are required to elaborate a reasonable picture of the formation and evolution of these discs. A complete scheme needs to take into account a lot of ingredients, such as the physical characteristics of the cloud that collapses to form the stellar components and the discs, and the efficiency of angular momentum transport mechanisms that promote the accretion of mass through the disc into the star(s).

Observational estimate of disc masses are highly uncertain because in most of the cases the disc is not resolved, so, the value is model-dependent. In the cases where the disc is resolved, assignation of values to some parameters like temperature of the disc and the optical depth in the line of sight, is again clearly unavoidable.

From the analytical point of view, a natural aspect for exploration of a binary system in circular orbit are the consequences of the conservation of the Jacobi constant ( $C_J$ ). The main implication is that for every particle, there exist prohibited and allowed zones. This scheme is valid with the inclusion of interactions between the particles; this only means that  $C_J$  and the allowed-prohibited configuration space depend on time.

The formation and initial evolution of a disc around an isolated star is interpreted according to this frame. We urge to use this model in the case where there is a small secondary star and argue that observational estimates of the ratio between circumprimary and circumbinary disc masses of GW Ori, for instance, are consistent with a set of SPH simulations in which the ratio between the separation of the stars and the disc radius is the parameter that varies.

### §C.2 Ideas about disc masses

Specific values of disc masses clearly depend on the details of their formation, including the characteristics of the parent cloud, and the recount of all the interactions between the disc and the binary system, or any other external influence. This first issue is complemented with the fact that direct observations

---

\* Artículo enviado a la Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica

of discs require very high spatial resolution; a difficult task that is reflected in the fact that for the same system, either circumstellar or circumbinary discs lack a resolved observation. On top of that, the estimation of disc masses are clearly model-dependent (see Section 2).

Numerical simulations (Bate 2000) of binary system formation suggest that a continuous fall of matter from the cloud feeds the system until it arrives to its final configuration. During all this stage, discs continually form and accrete towards the stars due to interactions producing angular momentum transport, necessary for the material to accrete. This argument suggests that the final discs, form during the last part of the falling stage, that is, during a characteristic time  $\Delta t \ll t_{ff}$  (where  $t_{ff}$  is the free fall time, the time when the last section of the cloud that forms the binary system, arrives to it), and the double dense ring pattern discs described in Nagel (2007) is the natural outcome. Following Nagel (2007), we can estimate disc masses by dividing the material that falls from the cloud during the time  $\Delta t$  in three parts. The first part will be absorbed by the star, the second one will be associated to circumstellar discs, and the last one will feed the circumbinary disc. These parts correspond to the different ranges in the specific angular momentum ( $\gamma$ ) of the cloud and strongly depend on the assumption that the mass of the secondary star ( $M_s$ ) is much less than the primary star mass ( $M_p$ ).

The main purpose of this paper is to assume that  $M_s \ll M_p$  and to approximate the problem to three-body interactions (a falling particle and two stars) in order to explore the effects of the conservation of the Jacobi constant ( $C_J$ ). All this leads us to configurations with allowed and prohibited regions, where the well-known zero-velocity surfaces (Szebehely (1967), Murray & Dermott (1999)) are the boundaries between these zones. Relevant configurations are the ones that restrict some of the material inside the orbit of the secondary to form a circumprimary disc, and outside of it, to form a circumbinary disc. Also, the assumption  $M_s \ll M_p$  is an indication that the material around the secondary is neglected, and therefore, an estimation of the secondary disc mass is beyond the scope of this paper.

The radii where the curves of zero-velocity are located in the orbital plane are given in units of the separation between the stars ( $a$ ), and the size of the disc ( $R_d$ ) is a reference distance that clearly indicates the real positions of different rings on the disc. So,  $y = a/R_d$  is an important parameter, that is also a measure of the importance of the angular momentum transport processes during the binary system formation.

We have organized the paper as follows. Section §C.3 gives us a review of the difficulties and uncertainties of the estimates of disc masses from the observational point of view. The next section (Section §C.4) characterizes the falling cloud, pointing out the processes of angular momentum transport that allow the material to eventually arrive to the star. In Section §C.5 we move in to a description of the restrictions obtained from the conservation of  $C_J$  when the 3-body approximation is used. Section §C.6 analyzes a series of simulations that confirms the idea that sometimes the influence of the secondary star is able to restrict the material to circumprimary and circumbinary discs. The next section (Section §C.7) contains the main conclusions and at the end we give the references.

### §C.3 Observational estimates of disc mass

The aim of this paper is to give an estimate both of the circumprimary and the circumbinary disc mass. It is beyond the scope of this qualitative approach to associate a value to the mass of a disc around a secondary star. For a reliable estimation of the disc mass, a model that would describe in some detail the interaction of the particles that are falling from the cloud with this star is very much required.

From the point of view of the observations, at present, astronomers are unable to easily disentangle the contributions of every disc, from the total flux that they detect. The first targets were isolated stars, where it is easier to separate the contribution of the disc and that of the star, using some models for the disc (Osorio et al.2003,D'Alessio,Calvet & Hartmann 1997). Both the identification and characterization of a disc in isolated stars or in binary systems require a model for the disc. An estimation of the mass of the disc due to the situation where a disc seen edge-on hides some of the radiation of the star (Stapelfeldt et al.1998, for HK Tau/c) requires the assumption of some characteristics of the disc, such as temperature and opacity of the material.

In many cases the disc is not resolved; so the spectral energy distributions (SEDs) should be interpreted with a model for the disc (designating surface density, temperature, inner and outer radius, opacity,etc.), having a lot of free parameters to fix. Isolated star studies are highly successful (Osorio et al.2003, D'Alessio et al.1997) but in those of binary systems, the number of free parameters increases (there are more discs), and the uncertainty attached to them makes the estimates not very reliable (Mathieu 1994).

Other sets of observations, mainly from mm and radio (Jensen & Akeson 2003,Weintraub,Zuckerman & Masson 1989, Guilloteau,Dutrey & Simon 1999), resolve the disc but impose very strong restrictions on the spatial distribution of material, at least a minimum value for the radius of this region (there could exist undetected material outside it). But an assumption about the optical characteristics of the material inside the disc is still required. On the other hand, if we want to trace all the disc material from the intensity observed, then the assumption almost always accepted is that the material is optically thin (Jensen,Koerner & Mathieu 1996 ; Jensen & Akeson 2003 for HK Tau, DK Tau and UX Tau and Mathieu et al.1995 for GW Ori). Thus, a value for the opacity should be given; in GW Ori (Mathieu et al.1995), a typical error in this quantity involves a factor of 3 in the estimate of the disc mass. An important parameter to fix is the temperature. Mass estimates in Mathieu et al.(1995) vary by a factor of two if the temperature does the same.

For some cases, in unresolved discs, the natural choice is an optically thick  $\alpha$ -disc ( $\alpha$  prescription for the viscosity,Shakura & Sunyaev 1973) for the adjustment of the SED. In the case of UY Aur (Close et al.1998), a suitable  $\alpha$  gives disc-mass accretion rates in the range  $\dot{M} \approx 10^{-8} - 10^{-7} M_{\odot} yr^{-1}$  and disc masses ranging from  $M_d \approx 10^{-6} M_{\odot}$  to  $10^{-5} M_{\odot}$ , accounting for both circumstellar discs.

The most simple configuration of discs in a binary system is a disc around the primary; a gap that contains the orbit of the secondary mimics the clearing effect of the binary (see Artymowicz & Lubow 1994), so, there is no circumsecondary disc, but only a circumbinary disc (Mathieu et al.1995,Jensen & Mathieu 1997 ). This configuration corresponds to the  $M_s = 0.0$  case (Section 4.3).

The binary system GW Ori is analyzed imposing this configuration; Mathieu et al.(1995) find



$M_p \approx 2.5M_\odot$  and  $M_s \approx (0.3 - 1.3)M_\odot$ , so, a reasonable zero order approximation is that  $M_s = 0.0$ . Moreover the eccentricity of the binary orbit can be taken as  $\epsilon = 0.0$  ( $\epsilon = 0.04 \pm 0.06$ , is used in Mathieu, Adams & Latham 1991). Both choices, make this an example in which the conclusions in Sections (§C.5.3, §C.5.4) should be used for comparing both disc-mass estimates.

From the observational side of the problem, finding better choices is restricted because until now, there are no images for circumstellar and circumbinary discs for the same system which allow to get a better estimate for both disc-masses. Therefore, the estimates of these masses are strongly model-dependent, as well as any kind of comparison with results from analysis like the one we develop in this paper.

Systems with stars separated only a fraction of an au are also very useful for the purposes addressed here, because such a configuration allows to easily find circumbinary discs (Bate 2000, Mathieu et al.1995). One such system is UZ Tau E, for which  $\epsilon = 0.237 \pm 0.030$  (in spite of all, this represents an orbit resembling a circular one) and  $q = M_s/M_p = 0.28 \pm 0.01$ ;  $\epsilon = 0.0$  and  $q \ll 1.0$  are necessary assumptions for the models in Sections (§C.5.3, §C.5.4). Another important assumption throughout this work is that the circumbinary disc and the binary orbit are coplanar. A system very much studied is T Tau (Hogerheijde et al.1997, Weintraub et al.1989), and masses of the circumstellar and circumbinary discs are estimated. Unfortunately there is evidence that the binary orbit and discs are not in the same plane (Hogerheijde et al.1997). For HK Tau (Duchene 2000), a 1.3mm flux is observed either around the secondary or around the primary, but the material in the latter is not detected in the optical or near-infrared, so, it is again suggested that the discs are not coplanar. It should be remembered that the model of material falling from a rigidly rotating cloud (see Section §C.4.1), naturally defines a symmetry plane (orbital plane) where the stars and discs should lie.

Four spectroscopic binary systems ( $a < 1au$ ) are studied in Jensen & Mathieu (1997), but only one of them has a circular orbit (V4046 Sgr,  $a=0.04au$ ) being the only one that we can use in this paper. Depletion of emission in the near-infrared allows to suggest the existence of a gap cleared by the binary. Jensen & Mathieu (1997) use the typical radii for the boundaries of the gap,  $R_{in} = 0.4a$  and  $R_{out} = 1.8a$  (Artymowicz & Lubow 1994) but without finding a good agreement with the observed SED. They allow variations in  $R_{in}$  and  $R_{out}$  and the best fit is for  $R_{in} = R_\star$  ( $R_\star$  is the star radius) and  $R_{out} = 0.18au$ , so in this case, only a circumbinary disc is present. This does not contradict our conclusions or typical observations (Dutrey, Guilloteau & Simon 1994) because circumbinary discs are always present, and they are at least an order of magnitude more massive than the circumstellar ones (Duvert et al.1998).

## §C.4 Main statements

### §C.4.1 Characterization of material that falls from the cloud

Our attention will now focus on the characteristics of the material that falls from the cloud towards the stellar system, thus permitting us to study the formation of a disk in that case. The matter begins its collapse far away from the stars. Assuming that the cloud is rigidly rotating, the well-known solution of Ulrich(1976) can be used to describe the velocity and trajectory of each particle. At this stage, a good

approximation is that a particle is only subjected to the force of a central object, and so the solution is a good one.

If  $R_d$  (the largest keplerian orbit that can be formed) is much larger than  $a$  (distance between the stars in a binary system), we can assume that the material arrives to the orbital plane with Ulrich(1976)'s solution; in any case, this assumption is always used here. In Nagel (2007) the velocity field and surface density on the orbital plane were deduced, but now we only require the fact that the radius (in units of  $R_d$ ) where a particle first intersects the orbital plane is equal to the specific angular momentum in units of  $\gamma_\infty$ , which is the maximum specific angular momentum on the orbital plane at that moment. As described in Nagel (2007), the angular momentum completely determines the evolution of the particles in this plane. Thus, the model used in this paper shows to be a good choice, when eventually we come to describe the restrictions that emerge using the fact that a quantity called the Jacobi constant  $C_J$  is conserved in the three-body restricted model (two stars and a particle).

#### §C.4.2 Importance of angular momentum transport processes

As stated before, it is of crucial importance to compare the two characteristic magnitudes of the problem,  $R_d$  and  $a$ . The latter is a parameter that can be obtained directly from the observation of a particular system. The disk radius ( $R_d$ ) is something observationally difficult to distinguish, as it depends on the cloud, which must be related to  $a$ , because the binary system forms from the collapse of this and no other cloud. So, our first assumption is that the angular momentum of the binary system ( $\Gamma_b$ ) is equal to the angular momentum contained in the inner region of a rigidly rotating cloud ( $\Gamma_c$ ); their expressions are given by:

$$\Gamma_b = \sqrt{GM_\star^3 a} \frac{q}{(1+q)^2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\Gamma_c = \frac{2}{5} M_\star R_c^2 \Omega_c, \quad (\text{C.2})$$

where  $\Omega_c$  is the angular velocity of the cloud,  $R_c$  is the spherical radius that contains the stellar mass  $M_\star$  and the density of the cloud prior to collapse is assumed constant. Also,  $q$  is the stellar mass ratio  $M_s/M_p$ , where  $M_s$  and  $M_p$  are the secondary and primary stellar masses. For a reliable value for  $a = 40au$ ,  $\Omega_c = 3.13 \times 10^{-14} s^{-1}$  and  $M_\star = 2M_\odot$ , we find  $R_d = 0.4a$ , so  $R_d < a$ .

This result is contrary to the requirement that the edge of the disc must lie outside the orbit of the star. So, the processes that transport angular momentum outside of the cloud are extremely necessary. Some can be located in circumstellar and circumbinary discs, but to form the latter it is clearly required that  $R_d > a$  in the first place, so some mechanisms are still required to remove the angular momentum that remains.

A way to address this issue is to note that in the problem of a particle falling towards a two body system, the angular momentum is no longer constant, but a detailed study is still necessary to quantify the losses in such a case. Here, we take into consideration Bate(2000)'s work, where the evolution of a proto-binary seeded at the center of a collapsing cloud is studied. Using the simulation of his test

(1) (collapse of a rigidly rotating constant density cloud) we calculate, for the final configuration (all the mass of the cloud has accreted), the angular momentum assigned to the binary system that is  $\Gamma_b = 1.46 \times 10^{50} \text{kgcm}^2 \text{s}^{-1}$ , and finding for the cloud  $\Gamma_c = 2.49 \times 10^{50} \text{kgcm}^2 \text{s}^{-1}$ . There is also angular momentum in a disc-like structure that forms during his simulation. If we assume that it rotates with a keplerian velocity and lies between a radius equal to  $a$  and  $2a$ , that is, typical values extracted from the configuration plots of Bate(2000), we find  $\Gamma_{cb} = 1.0 \times 10^{50} \text{kgcm}^2 \text{s}^{-1}$  for the angular momentum associated to the circumbinary disc. Assuming conservation of angular momentum,  $\Gamma_b + \Gamma_{cb} = \Gamma_c$  should be satisfied, but this is not the case here. The main point deduced from these calculations is that in a simulation, some of the angular momentum disappears from the disc-stars system, favoring the occurrence of such situation in the real case. Such effects are required to justify the formation of at least the circumbinary disc.

### §C.4.3 Accretion of mass towards the star from a disc

During the collapse phase, a protobinary system evolves with already formed discs, as there is nothing to prevent it. The time ( $t_d$ ) needed to transport a typical amount of mass through the disc to the star can be estimated using a typical value for the mass accretion rate ( $\dot{M} \approx 5 \times 10^{-8} M_\odot \text{yr}^{-1}$ , Hartmann & Kenyon 1990) and the mass of observed discs ( $M_d \approx 2 \times 10^{-2} M_\odot$ , Beckwith et al.1990). With these values, we get  $t_d \approx 4 \times 10^5 \text{yrs}$ , a time of the same order of the free-fall time ( $t_{ff}$ ), indicating that a large amount of the mass that falls on the orbital plane is accumulated by the star at the end of the collapse.

The model developed in Nagel (2007) shows that a disc around a star contains the mass of the cloud in the range of the angular momentum between some  $\gamma_*$  and  $\gamma_\infty$ . The first value depends on a characteristic radius for the magnetosphere ( $R_{mag}$ ) of the star upon the understanding that it estimates the inner edge of the disc. For an ample range for  $\gamma_*$  ( $\gamma_* = 0.432$  if  $R_{mag} = 0.1R_d$ ) and assuming that the disc is formed coeval with the star, the mass of the star reaches a value of  $M_* = 0.247$ , and the disc accumulates more than three times this value,  $M_d = 0.753$ ; these masses are given in units of the total mass that fallen from the cloud since the beginning of the collapse.

This configuration is clearly far from an equilibrium state, so, naturally, a gravitational instability arises, whose effect is to transfer enough material from the disc to the star until  $M_d \ll M_*$ . This instability could work to regulate the mass of the disc (Shu et al.1993), considering that the last condition is always satisfied.

Another process that acts in the same direction derives from thermal instabilities, which are commonly used in the context of dwarf-nova systems (Lin, Papaloizou & Faulkner 1985) and FU Orionis outbursts (Clarke, Lin & Pringle 1990). These instabilities arise when the hydrogen ionization is not complete; in this situation the opacity strongly depends on temperature and thermally-unstable regions are produced (Lin et al.1985). The result is that at some time the mass accretion rate in the disc steeply increases, showing from the observational point of view epochs of high luminosity, which can be sustained during  $\sim 10^3 \text{yrs}$  after the outburst (see Clarke et al.1990).

## §C.5 Estimation of disc masses using the Jacobi constant

### §C.5.1 Main ideas regarding the Jacobi constant

The main goal in this work is to push further the formalism of the circular-restricted three body problem, trying to get some information about likely configurations for a binary system and its discs. First of all we assume that the system is well-represented by three particles, so, that the evolution of the particle would only depend on the force exerted by the two stars. Besides, if the orbit of the two stars is circular,  $C_J$  is constant, and can be written in the coordinate system rotating with the stars as:

$$C_J = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{M_p}{r_p} + \frac{M_s}{r_s}\right) - v^2, \quad (\text{C.3})$$

where the units of mass, time and distance are deduced by choosing  $G = 1$ ,  $M_* = 1$ , and the distance in units of the separation of the two stars. Here  $r_p$  and  $r_s$  are the distances to a particular point  $(x, y, z)$  from the primary and secondary stars, respectively and, finally,  $v$  is the magnitude of the velocity of the particle.

If the substitution  $v^2 = 0.0$  is made, an implicit relation is found, which represents, for a particle with an associated  $C_J$ , the location of what is called surface of zero-velocity. This surface is the boundary between zones that have  $v^2 < 0.0$ , and  $v^2 > 0.0$ . The former is not allowed to a particle because it does not represent a physical configuration. The latter obviously does, and the particle can lie there.

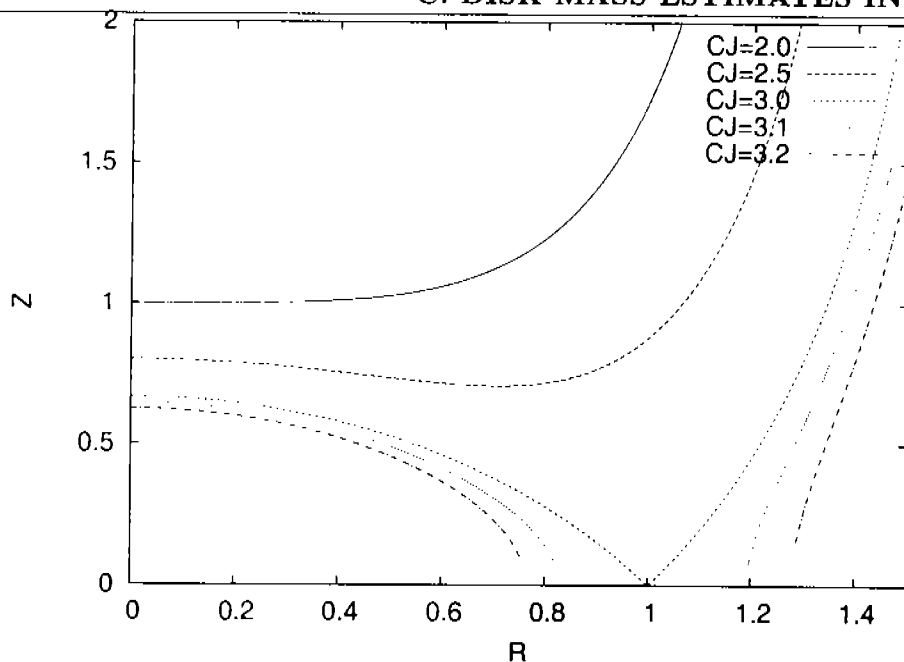
The central point in this paper is to comment on the restrictions resulting from this formalism, in the case that the mass of the secondary star ( $M_s$ ) is zero. First of all, we note that this is the case of an isolated star. A study of the formation of a disc in such a case is found in Nagel (2007). In that paper the evolution of a dense ring that evolves as a constant angular momentum feature towards a Keplerian radius is described. Of course, this ring is always located in a permissible region but regarding the  $M_s \ll 1.0$  case approximately, we hope to identify configurations that restrict a particle to a specific region in space. The most interesting situation for us is that the material could be associated inside the orbit of the secondary, therefore it would be considered as particles belonging to circumprimary disc and existing in a circumbinary disc in the case when the region is outside the secondary orbit.

As the first step, we take the equation (C.3) and by substituting  $v^2 = 0.0$  and  $M_s = 0.0$  (thus  $M_p = 1$ ), we obtain

$$C_J = R^2 + \frac{2}{\sqrt{R^2 + Z^2}}, \quad (\text{C.4})$$

this relation gives us the location of the surface of the zero-velocity, for each value of  $C_J$ . The only existing coordinates are the cylindrical radius ( $R$ ) and the coordinate perpendicular to the plane of the disk ( $Z$ ), so that these surfaces have azimuthal symmetry.

This plane, that is the orbital plane, is located in  $Z = 0$ . In Fig. C.1 are plotted some of these surfaces projected in a RZ plane for various values of  $C_J$ ; we only plot  $Z \geq 0$  as the curves at the lower part of the orbital plane can easily be obtained by drawing the mirror image on the lower quadrants. For example, a particle with  $C_J = 2$  cannot live in the physical space, above the curve characterized



**Figure C.1:** Curves of zero-velocity in the plane  $RZ$ , for  $C_J = 2$  (solid line),  $C_J = 2.5$  (long-dashed line),  $C_J = 3$  (short-dashed line),  $C_J = 3.1$  (dotted line) and  $C_J = 3.2$  (dot-dashed line) for the case  $M_s = 0$ .

with that particular value for  $C_J$ . Also, the whole orbital plane is located in an allowed region for this material, therefore a particle falling from the cloud would have a trajectory that in principle could move all the way to the star. In other words, some of the particles of the cloud will end their evolution in the star. Increasing the value for  $C_J$ , we note that the materials with  $C_J = 3$  are the first ones to have a surface of zero-velocity touching the orbital plane, in this case only at  $R = 1.0$ . If we follow the trend of the surfaces at larger values of  $C_J$ , a couple of intersections are found in this plane, one of them at  $R < 1.0$  and the other at  $R > 1.0$ .

Even in the case of just one star, for particles with  $C_J \geq 3$  there is an inner and an outer region permitted for them. This configuration resembles a binary system with a circumprimary and circumbinary disc; note that in this approximation ( $M_s = 0.0$ ) there is not a circumsecondary disc. Such a model is used in Mathieu (1994) and Mathieu et al.(1991,1995), describing the spectral energy distributions (SEDs) of spectroscopic binaries like GW Orionis. A gap between these two regions represents the space cleared by the binary, of course this gap is real only in the case  $M_s > 0$ . This phenomenon is studied numerically and analytically in Artymowicz & Lubow (1994). However, in practice the particles falling from the cloud will have a range in  $C_J$ , and so some of the particles are restricted to lie at certain zones but others are able to populate this space; in the end we can arrive at a continuous configuration of matter, which of course depends on the particular initial configuration (see Section §C.5.2).

From equation (C.4) and  $Z = 0.0$ , we obtain

$$R^3 - C_J R + 2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

a cubic equation that gives the location in the orbital plane of the zero-velocity surface for particles with given  $C_J$ .

Analytically, we can find the three solutions. As expected, none of the solutions is real positive for  $C_J \leq 3$ . For  $C_J \geq 3$ , there are two real positive solutions, that can be written as:

$$R1 = 2(C_J/3)^{1/2} \cos\left[\frac{\arccos[-(3/C_J)^{3/2}]}{3}\right], \quad (\text{C.6})$$

$$R2 = (C_J/3)^{1/2} \left[ -\cos\left[\frac{\arccos[-(3/C_J)^{3/2}]}{3}\right] + 3^{1/2} \sin\left[\frac{\arccos[-(3/C_J)^{3/2}]}{3}\right] \right]. \quad (\text{C.7})$$

The first one satisfies  $R1 \geq 1.0$  and the other  $R2 \leq 1.0$ . The zone between these radii is prohibited for material with Jacobi constant equal to  $C_J$ . For the case  $M_s = 0$ , this restriction means that the trajectory of a particle in the one-star gravitational potential is located in an allowed zone.

### §C.5.2 Application to a rigidly rotating cloud

All the ideas expressed in the last section can be applied to the collapse model developed in Ulrich(1976), where the cloud is rigidly rotating and the initial energy of the particles is zero. The expression for  $C_J$  using the inertial coordinate system is  $C_J = 2(\Gamma_Z - E)$ , where  $\Gamma_Z$  is the angular momentum perpendicular to the orbital plane, and  $E$  is the energy. The Jacobi constant of the falling particles in this case is given by:

$$C_J = 2\left(\frac{R_d}{a}\right)^{1/2} \sin^2 \theta_o, \quad (\text{C.8})$$

where  $\theta_o$  is the angle with respect to the Z-axis, where the plane of the trajectory of the particle is located.

The application of the ideas of the last section requires giving a specific value to  $R_d/a$ . In Section §C.4.2, a first estimate gives us  $R_d/a \ll 1.0$ , which is smaller than that required for a natural configuration for the formation of circumbinary discs, essential for developing the issue in this paper. As stated in the same section, the need of processes for angular momentum transport is a key ingredient in raising the value of  $R_d/a$  in order to end with a reasonable configuration.

For an approximate situation like the one to which the problem is reduced ( $M_s = 0.0$ ), the distance  $a$  is nonsense, as there is no secondary star. Therefore, the evolution of a particle with the velocity field given by Ulrich(1976) is not subjected to any restrictions due to a particular value for  $C_J$  that should produce a change in the already-known analytic solution given in the paper. This conclusion does not mean that at some time, for certain particles,  $C_J \geq 3$ , there being then a zero-velocity surface that restricts the trajectory inside an allowed zone.

### §C.5.3 Restrictions due to $C_J$ in the $M_s = 0.0$ case.

The next analysis intends to describe, for the particle moving in the orbital plane, the existence or not of zero-velocity curves as the particle evolves through different stages. The approximate case ( $M_s = 0.0$ ) that we study here, reduces to the problem of formation and evolution of a disc around an isolated star which is carefully described in Nagel (2007). From there, the different stages which are explored here

are extracted.

### Restrictions due to a shock in the orbital plane

The material falls to the orbital plane with  $C_J$  given in equation (C.8); at its arrival there, a shock is produced. The shock involves the dissipation of the velocity perpendicular to this plane, which results in a variation of  $C_J$ , that can be written as:

$$C_J = 2\left(\frac{a}{R_d}\right)^{1/2}R_I + \frac{[1 - (\frac{a}{R_d})R_I]}{R_I}, \quad (\text{C.9})$$

relation given in terms of  $R_I$ , the radius that defines the position where such particle intersects the orbital plane and  $a/R_d$ . The  $R$  and  $R^{-1}$  terms in equation (C.9) mean that  $C_J$  increases either at large  $R$  or small  $R$ . This feature permits us to find a couple of solutions  $R_{I\pm}$  where  $C_J = 3$ ; they are expressed as:

$$R_{I\pm} = \frac{(3 + (a/R_d)) \pm \sqrt{(3 + (a/R_d))^2 - 8(a/R_d)^{1/2}}}{4(a/R_d)^{1/2}}. \quad (\text{C.10})$$

Particles with  $R \leq R_{I-}$  and particles with  $R \geq R_{I+}$  have  $C_J \geq 3$ . For them exist a zero velocity curve in the orbital plane. Particles at  $R \leq R_{I-}$  cannot move to  $R \geq R_{I+}$ , without changing their  $C_J$ .

Because the condition for circumbinary formation is  $R_d/a \geq 1.0$ , the physical range of  $a/R_d$  is  $0 \leq a/R_d \leq 1.0$ . Thus,  $R_{I-}$  ranges between 0.292893 and 0.347296, signifying that without any further interactions, the material initially located at radii of less than 0.292893 will be unable to reach positions larger than 1.0. For  $R_{I+}$ , the range is from 1.70711 to infinity, so particles at initial positions larger than 1.70711 could not move at radii of less than 1.0. Remember that for  $C_J = 3$ , the curve of zero velocity is located at  $R = 1.0$ . As a matter of fact  $R_I \leq R_d/a$ ; solving the equation (C.10) we obtain  $R_d/a \geq 9/4$ . Therefore, configurations satisfying this last inequality will always have external material with  $C_J \geq 3$ .

### Motion towards minimum-radius curve

Nagel (2007) gives us a detailed analysis of the implications related to this curve. Here, we only point out that it represents the minimum positions for particles evolving from  $R_I$ , in the first stage of disk formation. At the beginning, the material settles in allowed regions, then the evolution will move them also to allowed zones ( $v^2 \geq 0$ ); as a function of time, the regions modify their size or even disappear, depending on the particular value for  $C_J$  assigned to the particle that is being studied. Looking again in Nagel (2007), they show that the particles move all the way towards the minimum-radius curve without interactions between them. In this case, the  $C_J$  for each particle is conserved, and the curves of zero-velocity do not move somewhere else. An inner region of the disc is absorbed by the star; the inner material of the remaining disc will eventually arrive to its minimum radius and at the same time will acquire a radial velocity  $v_R \geq 0.0$ . Further evolution is described in Nagel (2007), but the main feature is an inner dense ring continually moving outwards, stopping at a Keplerian position. The purpose of

this section, that is the analysis of such a dense ring, is given next.

### Dense ring formation

At this stage, the relevant feature is the inner ring, which moving outwards captures material and becomes dense. A good objective is to follow its evolution of  $C_J$ . First of all, a model that resembles the behavior of the ring as evolves is required, that is, a set of positions with appropriate velocity. The model allows to calculate the  $C_J$ , for different locations of the dense ring.

A natural option for the model is that the ring accumulates material with specific angular momentum ( $\gamma$ ) at position  $R_{min}(\gamma)$ , as can be seen in Nagel (2007). A velocity  $v_{min}$  is required for the consistency of the model just described, and represents the velocity at which the falling rings are arriving to  $R_{min}$ .

If we take equation (C.3), and substitute the previous position ( $R_{min}$ ) and velocity ( $v_{min}$ ) then we obtain:

$$C_J = \left( \frac{2}{R_{min}} - v_{min}^2 - \frac{\gamma_a^2}{R_{min}^2} \right) (a/R_d) + 2\gamma_a (a/R_d)^{-1/2}, \quad (\text{C.11})$$

where  $\gamma_a$  is the mean angular momentum of all the material that has been absorbed by the ring (an expression for  $\gamma_a$  is deduced in Nagel (2007)) and depends on  $\gamma$ . Thus,  $C_J$  depends on  $\gamma$  and  $a/R_d$ ; if we change  $a/R_d$ , the size of the disc ( $R_d$ ) will be modified, and, different real positions ( $R/a = (R_{min}(\gamma)/R_d)(a/R_d)$ ) are obtained for the ring and, of course, a new value of  $C_J$  arises.

In this relation, we can fix  $\gamma$  to see the behavior in terms of  $a/R_d$ . The relevant configurations for us are obtained with  $a/R_d$  in the range where  $C_J \geq 3$ , and looking again for situations with restrictions given by the presence of zero-velocity curves in the orbital plane.

The model is useful while  $\gamma \leq 1.0$ , where the last configuration positions the ring in  $R_{min}(\gamma = 1.0)$ . At this time, the ring contains material with some range in initial angular momentum; there are three cases worth noticing: 1)  $0.43 \leq \gamma \leq 1.0$ , 2)  $0.752 \leq \gamma \leq 1.0$ , and 3)  $\gamma = 1.0$ . These cases are based on Nagel (2007); in the first one the formation begins at  $R = R_{min}(\gamma = 0.43) = 0.1R_d$  and all the material is accumulated in the dense ring. The second case only takes into account a limited range in angular momentum, the smaller value is associated in Nagel (2007) with a ring that begins to accumulate material disconnected from the inner dense ring. The last case just indicates the presence of the innermost ring with  $\gamma = 1.0$ .

The restricted state ( $C_J \geq 3$ ) in 1) puts the ring in  $R/a \geq 1.65$ , the 2nd case in  $R/a \geq 1.51$  and the third in  $R/a \geq 1.45$ . All these cases place the ring outside the curves of zero-velocity, so that the ring can move in principle to any larger radius, but inwards evolution will be limited to the position of that curve. However, such a conclusion can only be reached assuming that at longer times the ring is free of interactions.

The process described with equation (C.11) can be seen from the other side: giving a value to  $a/R_d$ , and seeing the behaviour in terms of  $\gamma$ ; increases in  $\gamma$  mean that the ring is moving to larger positions. Making the choice  $a/R_d = 0.25$  as typical, and  $\gamma_{min} = 0.43$  (specific angular momentum of the innermost ring that is not absorbed by the star), then  $C_J$  is a monotonous increasing function in terms of  $\gamma$ , beginning with  $C_J = 1.95$  ( $\gamma = 0.43$ ) and finishing with  $C_J = 3.28$  ( $\gamma = 0.99$ ). At the



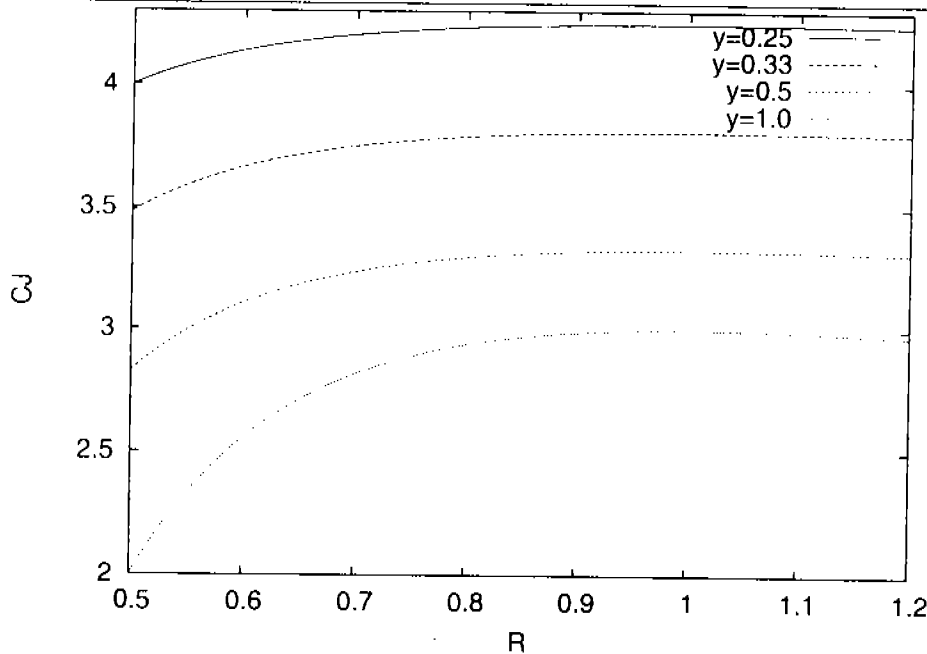


Figure C.2: Plots of  $C_J$  vs  $R/R_d$ , for a particle with  $\gamma = 1.0$ , and  $v_R = 0.0$ . The different curves correspond to  $a/R_d = 0.25$  (solid line),  $a/R_d = 0.33$  (long-dashed line),  $a/R_d = 0.5$  (short-dashed line), and  $a/R_d = 1.0$  (dotted line). In the figure  $y = a/R_d$ .

arrival to  $R = R_{min}(\gamma = 0.87)$  the ring acquires  $C_J = 3$ , therefore, the position of the dense ring with associated curves of zero-velocity, satisfies the following inequality:

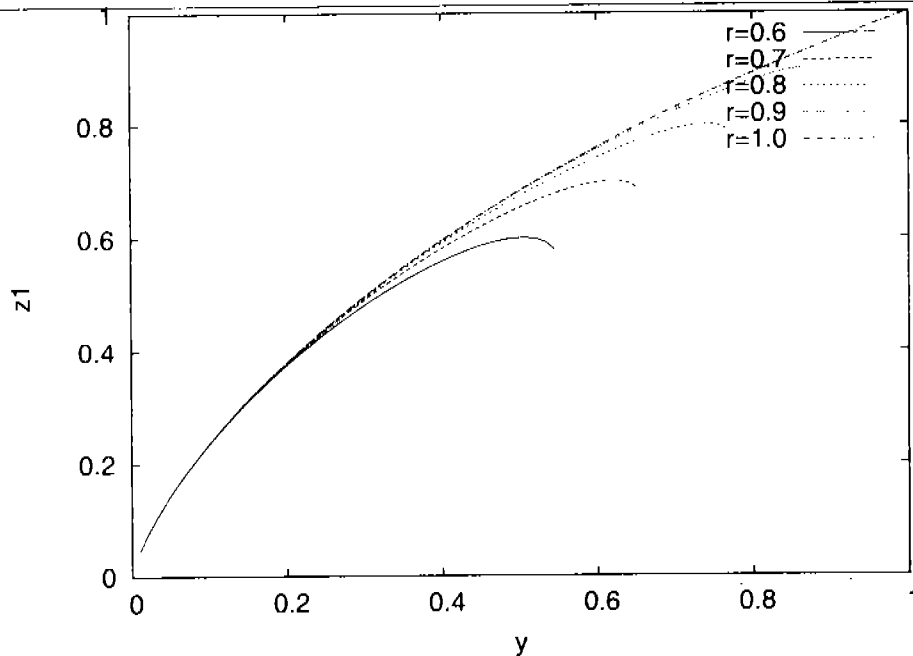
$$R/a \geq \frac{R_{min}(\gamma = 0.87)}{R_d} (a/R_d)^{-1} = 1.56. \quad (\text{C.12})$$

From this point of view and the former, we conclude that the ring moves through  $R/a = 1.0$  with  $C_J \leq 3$ , so, when it finally acquires  $C_J = 3$ , lies safely in the outer allowed zone with the zero-velocity curves at its left side.

The next stage involves the accumulation of material with  $\gamma = 1.0$ . However, to develop a model is not an easy task although the characteristics of the particles falling in with  $\gamma = 1.0$  are known (Nagel 2007) but the position at which the absorption occurs is difficult to infer; also, it is not clear whether the inner ring is chasing or not a large block with  $\gamma = 1.0$ , composed of many individual rings that in the course of time have merged.

Examining closely the simulations in Nagel (2007) at this stage, we note that the ring quickly acquires a specific angular momentum close to unity, because of the large amount of material that is falling in with such characteristics. Thus, an approximation unaware of the accumulation details has to consider that the ring has  $\gamma = 1.0$ . In this case, the only way to change the value of  $C_J$  is by means of interactions that modify the radial velocity at some particular point. The accumulation of material with  $\gamma = 1.0$  produces such a change; the radial velocity will be always decreasing, therefore the effect on  $C_J$  is of increase. As pointed out before, the zero-velocity curve is inside the ring but the consequence of this trend on  $C_J$  is that will move outwards spreading the zone prohibited for the dense ring.

As an example, we use a configuration extracted from the lagrangian simulation described in Nagel (2007), where the ring has null-velocity in  $R/R_d = 0.83$  and  $\gamma = 0.99$ . A calculation of the energy



**Figure C.3:** Plots of  $R1/R_d$  vs  $a/R_d$ , for various radii.  $R_* = 0.6$  (solid line),  $R_* = 0.7$  (long-dashed line),  $R_* = 0.8$  (short-dashed line),  $R_* = 0.9$  (dotted line) and  $R_* = 1.0$  (dot-dashed line).  $R_*$  represents the position where the dense ring stops.  $Z1$  represents  $R1/R_d$  and  $y = a/R_d$ .

allows us to estimate the edges of the elliptical trajectory that the particle will follow in the case of no interactions; the inner edge is located precisely at  $R/R_d = 0.83$ . So, leaving it to its own, the ring will move further out, and the material still falling onto the orbital plane will be required to stop the evolution. If the material moves on and it is stopped in  $R/R_d = 1.0$ , where a very good approximation is  $\gamma = 1.0$ , it arrives to a Keplerian position; if material is still falling, the motion is inwards, so the expectation is a dense ring that lies at a radius of less than one.

The last stage, indicated in the last paragraph, occurs at the time when the ring acquires a null radial velocity. Assuming that  $\gamma = 1.0$ , with  $v_R = 0.0$ , and using equation (C.11) we find

$$C_J = \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{R^2}\right)(a/R_d) + 2(a/R_d)^{-1/2}, \quad (\text{C.13})$$

which is the Jacobi constant for a particle with  $v(R/R_d) = 0.0$  at the position  $R/R_d$ .

In Fig. C.2 there are the plots of  $C_J$  vs  $R$  for various values of  $a/R_d$ . The maximum of  $C_J$  occurs at  $R/R_d = 1.0$  for every  $a/R_d$ , and so the most restricted configuration occurs when the dense ring stops at the edge of the disc. The position of the secondary in these units ( $R_d$ ) is  $a/R_d$ . Looking at the plots (Fig. C.2) for  $a/R_d \leq 0.5$  it becomes obvious that the ring stops outside the secondary orbit. For  $a/R_d = 1.0$  the ring will stop inside this orbit, however in this case there are no restrictions because  $C_J \leq 3$ . Anyhow, this is the extreme case that is considered here, where particles falling with Ulrich(1976)'s solution represent the worst approximation. Thus, we can argue that the dense ring becomes part of the circumbinary material with a strong annular feature, according to some observations of GG Tau (Guilloteau, Dutrey & Simon 1999), and UY Aur (Close et al. 1998). Note that the dense ring could have inner prohibited regions, however, this does not mean that the material falling from the cloud can not incorporate into this zone.

Proceeding with this analysis, plots can be made of the positions ( $R1/R_d$ ) of the zero-velocity curves vs  $a/R_d$  for different  $R_*$  (here  $R_*$  represents the location where  $v_R = 0.0$ ). The procedure is to take equation (C.12) and substitute it in equation (C.6), thus obtaining a relation that depends on  $R_*$  and  $a/R_d$ . The first conclusion that can be extracted is that always  $R_* \geq R1/R_d$ , something that is clearly expected. Fig. C.3 shows these plots for values  $R_* = (0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$  and it is worth noting that the range of  $a/R_d$  plotted is the one where  $C_J \geq 3$ , that can be expressed as  $[0, (a/R_d)_*], (a/R_d)_*$  depends on  $R_*$ .

There is some  $a/R_d$  ( $(a/R_d)_o$ ) where the ring is located on the zero-velocity curve. It is interesting to note that  $(a/R_d)_o$  is close to  $(a/R_d)_*$ , and both coincide for the case  $R_* = 1.0$ . It should be remembered (see Section 3.2) that angular momentum transport processes are required to obtain reasonable values for  $a/R_d$ ; therefore by increasing the importance of such processes we will eventually get  $a/R_d = 1.0$  and values of less than 1.0, but not too close to zero. Following this trend of thought, values close to  $(a/R_d)_*$  are the best choices regarding the physical arguments just expressed. Putting together both results, we can argue that in a real situation the zero-velocity curve is near the ring, if at this stage the ring is free to move, the likely evolution is an outward motion, allowing just small inwards displacements. For the case  $R_* = 1.0$ , if  $a/R_d = (a/R_d)_* = 1.0$ , the dense ring lies on the zero-velocity curve, a further inwards motion is forbidden, a conclusion expected for particles moving in a Keplerian orbit, again assuming a non-interaction scheme.

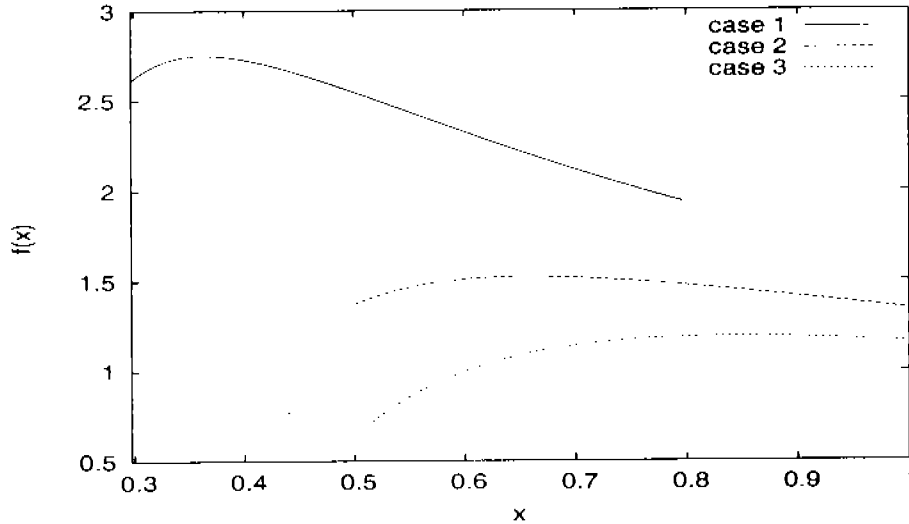
All these arguments are extracted from the results for the case  $M_s = 0.0$ . Here, we only describe an already known evolution (Nagel 2007) with the viewpoint of the conservation of  $C_J$ . In the next section we will examine the problem of the  $M_s \ll 1.0$  case.

#### §C.5.4 Restrictions due to $C_J$ in the $M_s \ll 1.0$ case.

The analysis followed in this paper is just a qualitative one, because just this kind of information can be extracted from a conservation argument with only one variable that it is conserved. Thus, the next step to discuss the  $M_s \ll 1.0$  case is to argue that the presence of a secondary star will slightly disturb the trajectory and velocity of a particle following the evolution for the  $M_s = 0.0$  case. From this point of view, some of the material in the orbital plane will move away from the known solution (see Nagel 2007). Therefore, we are looking for configurations where a section of the disc is restricted ( $C_J \geq 3$ ) to lie inside the secondary orbit, becoming a part of the circumprimary disc, or outside of this orbit becoming circumbinary material.

Here, we make the assumption that the material arrives to the orbital plane with Ulrich(1976)'s solution and moves towards the minimum radius curve without interactions. For the material moving near the secondary star, it is true that interactions with it will appreciably modify its trajectories and velocities but, in the end, a ring will follow the evolution to the minimum radius curve as in the previous model. The simulations of the next section, reinforce this point.

Equation (C.11) gives us the value  $C_J$  of the dense ring for a model that represents a fine choice for its evolution (Nagel 2007). There are two parameters, that can be tuned to build a set of variations of this model,  $v_{min}$  and  $R_{min}$ ; a variation of them indicates that they can no longer be called this way, so



**Figure C.4:** Plots of  $f(x, \gamma_a)$  vs  $x$  (see text for definition of  $f(x, \gamma_a)$ ), where  $\gamma_a$  is the specific angular momentum of the dense ring. Three cases are analyzed, according to the angular momentum range of the material that the dense ring has absorbed, so, 1)  $[0.432281, 0.752]$  (solid line), 2)  $[0.432281, 1.0]$  (long-dashed line) and 3)  $[0.752, 1.0]$  (short-dashed line). The ranges in  $x$  are: 1)  $R_{min}(0.752) = 0.297329$  to 1.0, 2) and 3)  $R_{min} = 0.5$  to 1.0.

instead we use  $v_R$  and  $R$ .

In the first part ( $\gamma \leq 0.752$ ) of the simulations in Nagel 2007  $v_R \approx v_{min}$ , later on  $v_R \leq v_{min}$  giving a positive change in  $C_J$ . Thus, the case  $v_R = v_{min}$  gives a minimum in  $C_J$ ; so, analyzing the variations in  $R$  that move the configuration to a ring with  $C_J \geq 3$  are without doubt enough to make sure that the curves of zero-velocity are there in a real situation.

A variation in  $R$  must satisfy  $R \geq R_{min}(\gamma)$ , so, the study of the function  $f(R)$ ,

$$f(R) = \frac{2}{R} - \frac{\gamma_a^2}{R^2}, \tag{C.14}$$

that contains all the position( $R$ ) dependence, should tell us how much the change in  $C_J$  influences the position where the dense ring accumulates material of initial specific angular momentum  $\gamma$ . Remember that  $\gamma_a$  depends on  $\gamma_{min}$ , the minimum specific angular momentum that absorbs the dense ring.

Fig. C.4 represents the plot of  $f(R)$  for various ranges of the specific angular momentum that contains the dense ring. The first one (Fig. C.4) uses the range  $[0.43, 0.752]$  and the plot shows that  $f(R)$  increases from  $R_{min}(0.752) = 0.297$  to 0.363. In the last two cases (also Fig. C.4) the ranges are  $[0.43, 1.0]$  and  $[0.752, 1.0]$  respectively, and also the function increases from  $R_{min}(1.0) = 0.5$  to 0.657 in the former and to 0.84 in the latter. The ranges in position where the function rises are large enough to contain the configuration that occurs in the real case with a secondary star disturbing the trajectories of the dense ring. So this suggests that the trend for  $C_J$  in the  $M_s \ll 1.0$  case is to grow, meaning that it is likely to find restrictions ( $C_J \geq 3$ ) earlier than those in the  $M_s = 0.0$  case.

As noted, in equation (C.11) the change  $R_{min} \rightarrow R$ , produces a relation for  $C_J$  in terms of  $\gamma, a/R_d$  and  $R$ . We explore this relation giving particular values to  $\gamma$  and  $R$ , and finding the value  $a/R_d$  where  $C_J = 3$ . Table C.1 contains a set of such configurations.

As noted in the last paragraph in Section §C.5.3, the likely values for  $a/R_d$  in a real case are the

values not close to zero. However,  $a/R_d$  too near one is not the best choice, because the assumption of material falling with Ulrich(1976)'s solution is free of a proper justification and all the conclusions pointed out in this paper are based on it.

Table C.1: Configurations with  $C_J \geq 3$  for the outer dense ring

| $\gamma$ | $R_{ring}/a$ | $R_{ring}/R_d$ | $(a/R_d)_{min} (C_J \geq 3)$ |
|----------|--------------|----------------|------------------------------|
| 0.43     | 0.213        | 0.12           | 0.564                        |
|          | 0.547        | 0.16           | 0.293                        |
|          | 0.728        | 0.2            | 0.274                        |
| 0.5      | 0.276        | 0.15           | 0.543                        |
|          | 0.532        | 0.19           | 0.357                        |
|          | 0.675        | 0.23           | 0.341                        |
| 0.6      | 0.322        | 0.2            | 0.622                        |
|          | 0.489        | 0.24           | 0.491                        |
|          | 0.588        | 0.28           | 0.476                        |
| 0.7      | 0.355        | 0.27           | 0.761                        |
|          | 0.449        | 0.31           | 0.690                        |
|          | 0.507        | 0.35           | 0.690                        |

Table C.1: The first column gives the specific angular momentum ( $\gamma$ ) of the last material absorbed by the dense ring. In the second one are given, for every  $\gamma$ , likely positions for the ring ( $R_{ring}/a$ ). The third column gives the left edge  $a/R_d$ , of the range where  $C_J \geq 3$ .

The cases in Table C.1 that fits better the restrictions stated before are the ones with  $\gamma = 0.43$  and  $\gamma = 0.5$ ; the relevant range in  $a/R_d$  is  $[0.274, 0.564]$  in the former and  $[0.341, 0.543]$  for the latter. The different values for  $a/R_d$  in these ranges correspond to different positions  $R$ , indicating the position of the ring where it is accumulating particles with angular momentum  $\gamma$ . For a particular configuration,  $R$  is fixed, so  $a/R_d$  is the smaller value for the ring having  $C_J \geq 3$ .

Another condition that should be fulfilled (it is) is  $R_{ring}/a \leq 1.0$ , in order to give us likely configurations leading to a circumprimary disc. Remember that such restricted configurations could occur at one time but further evolution can lead to none zero-velocity curve, changing the space for the ring to lie in.

All this suggests that the circumprimary disc is composed of particles with initial angular momentum that ranges from  $\gamma = 0.43$  to  $\gamma = 0.5$ . The remains of the disc,  $\gamma$  ranging from 0.5 to 1.0, will form a circumbinary disc. This conclusion can be made into a consistent picture if the dense ring begins to form and stops the absorption with material with  $\gamma = 0.5$ . So this ring is free to move, always lying as circumprimary material. The rest of the disc could evolve as a dense ring (Nagel 2007), finding an equilibrium configuration in a circumbinary orbit. In the following section, a set of simulations will shed light on this issue.

## §C.6 SPH simulation of accretion in the orbital plane to estimate disc mass

In this section, we intend to prove with some simulations that the comment stressed at the end of the last section is credible in a real situation. To do that we chose a  $1M_\odot$  primary star and a  $0.01M_\odot$  secondary

one, a set of simulations was made for various  $a/R_d$  values (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7). What we want to prove is that larger values of  $a/R_d$  are more susceptible to create a configuration with a circumporary disc.

These simulations are developed using a Smooth Particle Hydrodynamics code, described in Monaghan (1992). In this method the system is described as a set of particles which are followed individually in a lagrangian frame, that can interact with their neighbours. Pressure and viscosity terms are included, and their contribution strongly depend on the characteristics of the particles around any position we are interested in. The simulations that we describe use the isothermal equation of state  $P = \rho c_s^2$ , where  $c_s$  is the sound speed with  $T = 10 K$  as a typical temperature for a cloud. The initial temperature gives a sound velocity lower than typical velocities, so, in the first stage of the evolution, hydrodynamical effects are not important, here the specific value of the temperature is meaningless. At this stage the SPH code can be seen as a N-body code, however afterwards, the strong hydrodynamical interactions are the ones that dominate the evolution, and changes in the temperature just vary the quantitative but not the qualitative picture.

The physical space is restricted to the orbital plane and the initial surface density is given by the equation (B.43). The mass of the particles that initially lie at  $R \leq R_d$  is  $m_i$  (the value depends on the simulation). This set of particles is surrounded by more massive particles (10 times  $m_i$ ), that spread to a radius (6, 5, 4, 3.5, 3) times the separation of the stars, the total number of particles is (7727, 8559, 8559, 8975, 8975) for the cases  $a/R_d = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7)$ . The rate of mass accretion from the cloud is  $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot yr^{-1}$ . The initial inner side of the disc is located at  $R/R_d = 0.43$  ( $\gamma/\gamma_\infty = 0.43$ ), thus, the minimum radius (equation B.14) for this ring is  $0.1R_d$ . The distance between the stars is always 40 AU and the size of the stars is 4 AU (material inside this radius disappears from the simulation).

First of all, we give a general description for any of these simulations, in particular we plot the case  $a/R_d = 0.25$ . All the material in the orbital plane, will move initially towards the star, eventually the inner edge of the ring arrives at the secondary orbit. The side of the ring closer to this star is disturbed, so the azimuthal symmetry of the ring is lost. This does not impede the rest of the ring to continue its evolution towards its minimum radius. A dense ring (Nagel 2007) passing again through  $R/a = 1.0$  forms, and the secondary star again disperses some of the material. A large amount of mass of the ring will follow the behavior of the  $M_s = 0.0$  case, with only minor disturbances. At the end, the qualitative picture that emerges resembles the basic characteristics of the formation of the dense ring in the  $M_s = 0.0$  case, thus reinforcing all the conclusions obtained in this section.

The problem is solved in an inertial frame, however the plots in coordinate space are made rotating the axis and all the physical space and velocities, so, the stars are always in the X-axis. A set of plots presented in Figs.( C.5, C.6, C.7, C.8), show the main effects described before. A plot of the particle positions in the orbital plane is given in Fig. C.9 for the  $a/R_d = 0.3$  case at time 0.45; at such a low value of  $a/R_d$  the inner ring disconnects itself from the dense ring, eventually arriving at the configuration shown in Fig. C.9 where it is clearly associated with orbits around the primary. For the case  $a/R_d = 0.4$  (Fig. C.10), a ring of material also detaches from the dense ring but this occurs earlier, from this point on the detachment always occurs when we increase  $a/R_d$ . The next ring unsuccessfully disconnects from

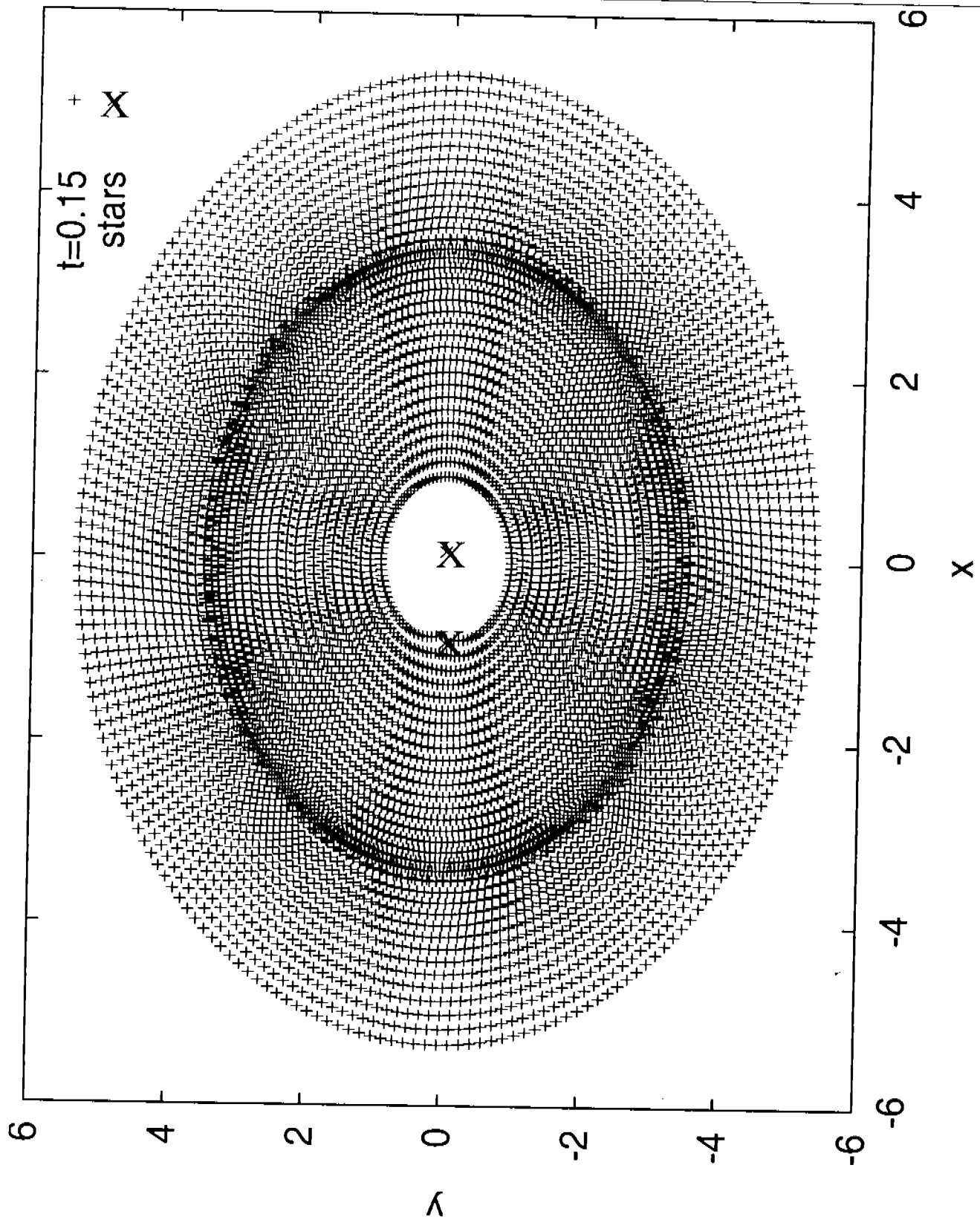


Figure C.5: A typical space configuration, at the time of arrival of the inner ring to the secondary orbit. The time is  $t = 0.15$  and the secondary star mass is  $m = 0.1$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

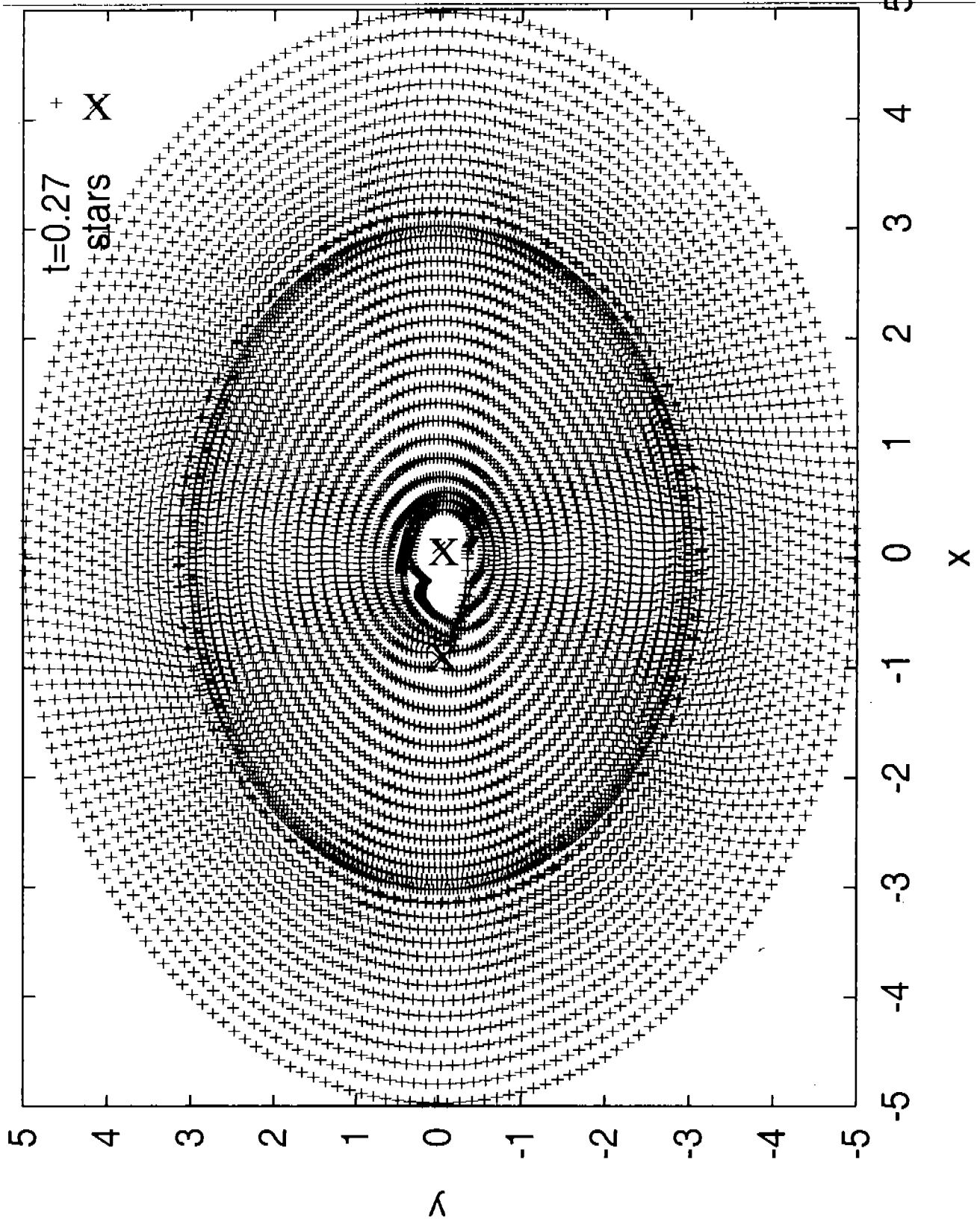


Figure C.6: Formation of a dense ring, in spite of the presence of the secondary star. The time is  $t = 0.27$  and the secondary star mass is  $m = 0.1$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.



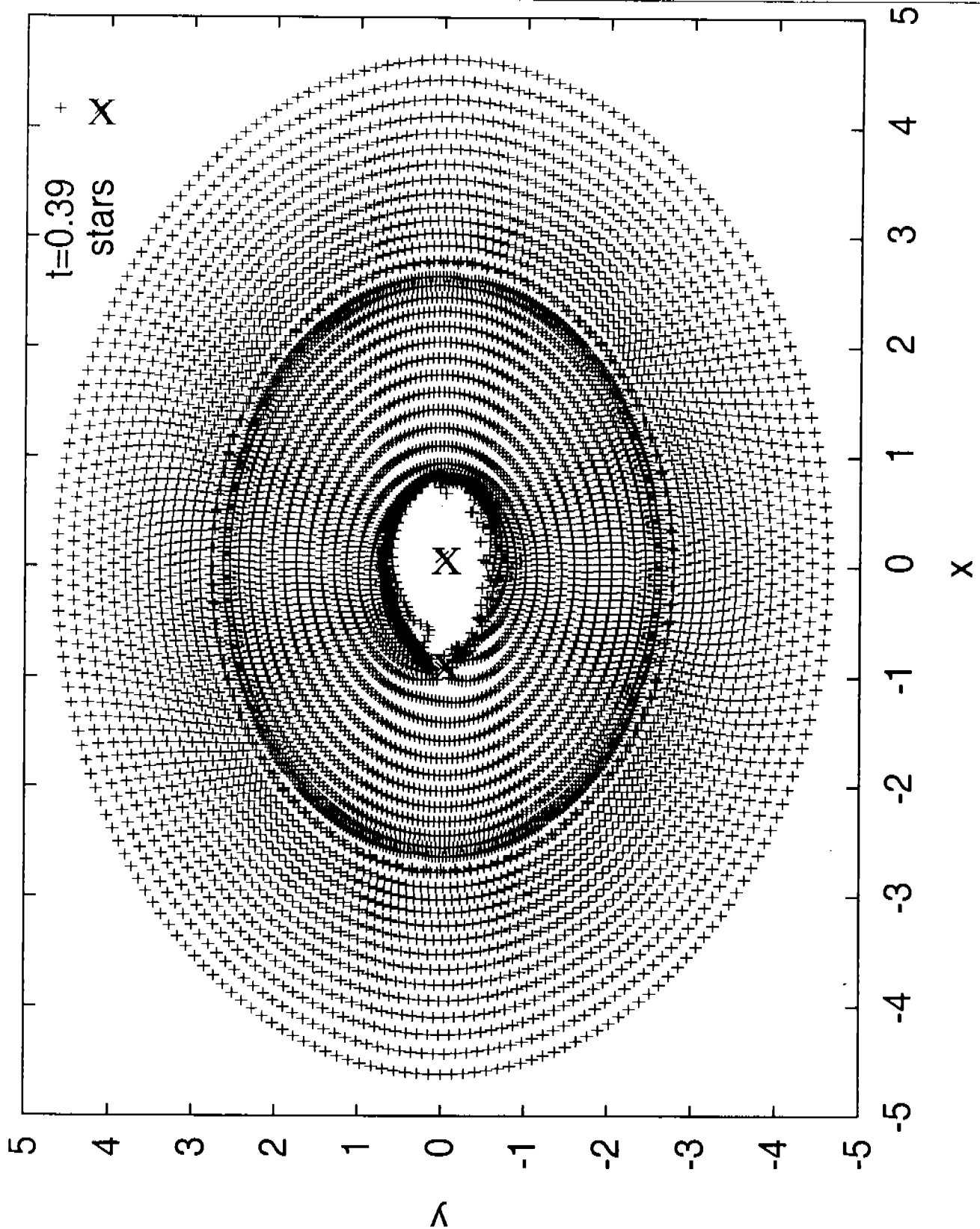


Figure C.7: The dense ring pass through the secondary orbit. The time is  $t = 0.39$  and the secondary star mass is  $m = 0.1$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

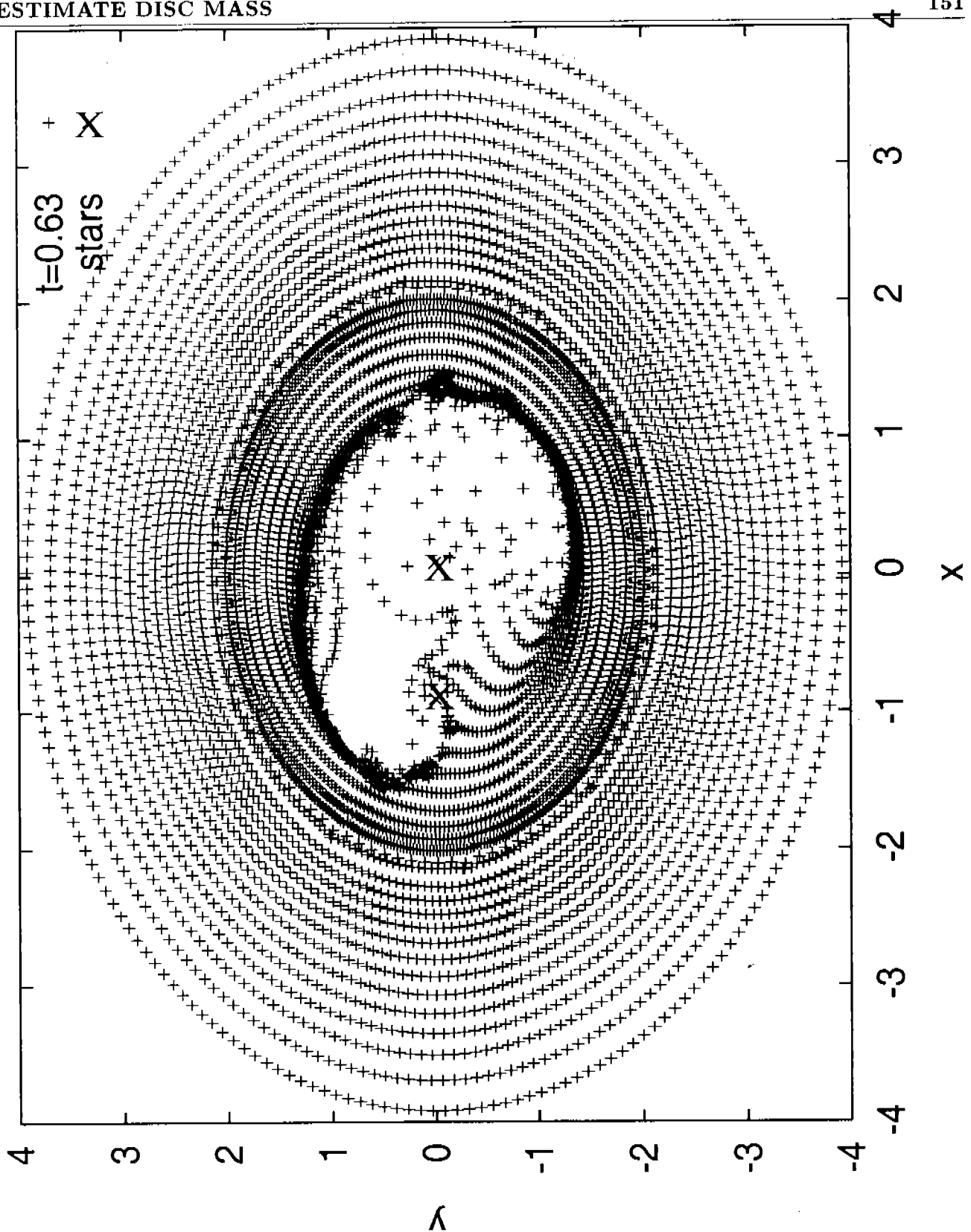


Figure C.8: An almost complete ring with outwards evolution. The time is  $t = 0.63$  and the secondary star mass is  $m = 0.1$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

the dense ring. The next simulation ( $a/R_d = 0.5$ , Fig. C.11) is similar qualitatively to the previous ones, the inner ring evolves inside the secondary orbit becoming a part of the proto-circumprimary disc.

The effect of increasing the  $a/R_d$  value up to  $a/R_d = 0.6$  can be seen in Fig. C.12. There, the two inner rings detach themselves from the dense ring, so the material forming the circumprimary disc has an initial specific angular momentum ranging from 0.43 to 0.55. The last simulation ( $a/R_d = 0.7$ , Fig. C.13), is analogous in the main lines to the previous one, however, the range in  $\gamma$  of the material orbiting inside the radius  $R/a = 1.0$  is larger,  $0.43 \leq \gamma \leq 0.61$ . Also, the time when the inner ring is detached decreases with increases in  $a/R_d$ . The simulation with  $a/R_d = 0.5$  was repeated taking a factor of 4 more points. A comparison between both simulations tells us that all the essential features are present despite the difference in resolution. Thus, we are certain that the conclusions extracted from the lower resolution simulations are real.

The ranges in  $\gamma$  assigned to the material in the circumprimary disc for the previous two cases allow us to estimate the mass associated to the disc. Using equation (B.31), the mass of the circumprimary disc ( $M_{cp}$ ) for the case with  $a/R_d = 0.6$  is 0.08; for the case with  $a/R_d = 0.7$ , the disc mass is 0.13. Naturally, we can say that material with larger values of  $\gamma$  is associated with a circumbinary disc. So, in the first case, the circumbinary mass ( $M_{cb}$ ) is 0.67; the other has a disc with  $M_{cb} = 0.63$ . The sum of  $M_*$ ,  $M_{cp}$  and  $M_{cb}$  is always one. So we consider that the material of the discs continually accretes towards the star, therefore, the estimate of  $M_*$  is a lower limit for the final configuration, when no more material falls from the cloud. Just to give an estimate, we can assume that both discs evolve at the same rate, so  $M_{cp}$  and  $M_{cb}$  are good estimates of the disc masses. The ratio between both is 0.12 and 0.20 respectively, according to the binary stellar system *UY Aur* (Duvert et al.1998) where  $M_{cb} \approx 10^{-2}$  and  $M_{cp} \approx 10^{-3}$ , so,  $M_{cp}/M_{cb} \approx 0.1$ .

These simulations allow us to conclude that the larger the value of  $a/R_d$ , the larger the amount of material that it is forced to lie in a circumprimary disc. Thus, agreement is found between the conclusions in Section §C.5 and the simulations here described.

## §C.7 Conclusions

Following the results of the simulation of the collapse of a rigidly rotating cloud to form a disc around an isolated star (Nagel 2007), it is natural to separate all the material that is falling into two parts, one will quickly incorporate into the star and the other into the disc. Due to the absence of angular momentum transport processes in the disc, this assignation produces too heavy discs, in which it is easy for instabilities to appear (Shu et al. 1993). The effect of these is to remove angular momentum in the disc, allowing some of the material to accrete. A common expectation is that the instabilities work faster when the disc is heavier, so the disc will safely lie, most of the time, with masses quite lower as compared with the mass of the star ( $M_*$ ), see Shu et al. (1993). This statement allows us to conclude that the mass of the disc(s) ( $M_d$ ) is composed of a section of the cloud falling during a time  $\Delta t$ , which is smaller than the free-fall time ( $t_{ff}$ ). Said otherwise, the consequence of the disparity in these times is that  $M_d \ll M_*$ .

An estimate of  $t_{ff}$  can be calculated if we assume that the relation  $\dot{M}t_{ff} = M_*$  holds. Here,  $M_*$  is

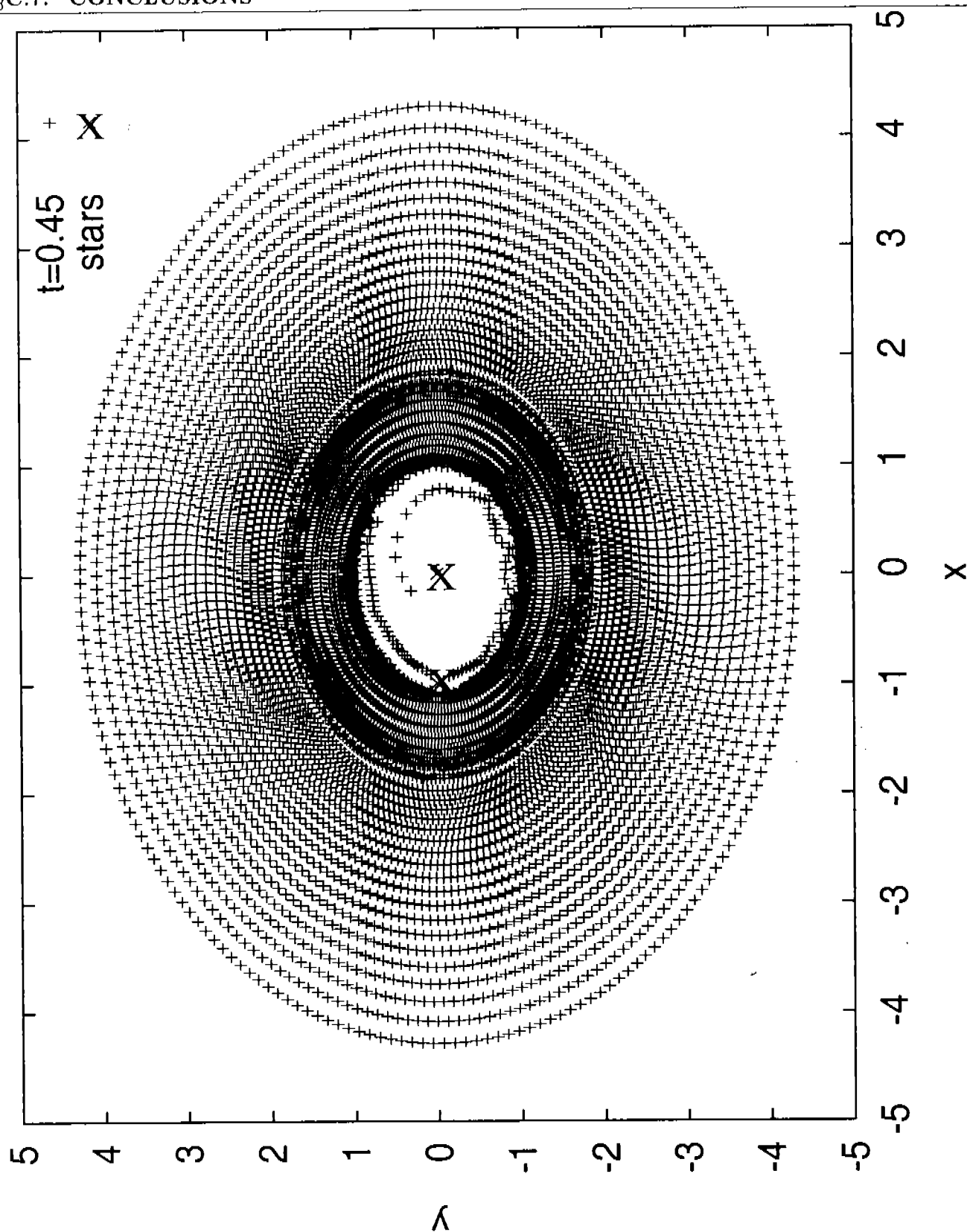


Figure C.9: Picture of the disc, for  $a/R_d = 0.3$ . An inner ring disconnects from the dense ring. The time is  $t = 0.45$  and the secondary star mass is  $m = 0.01$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

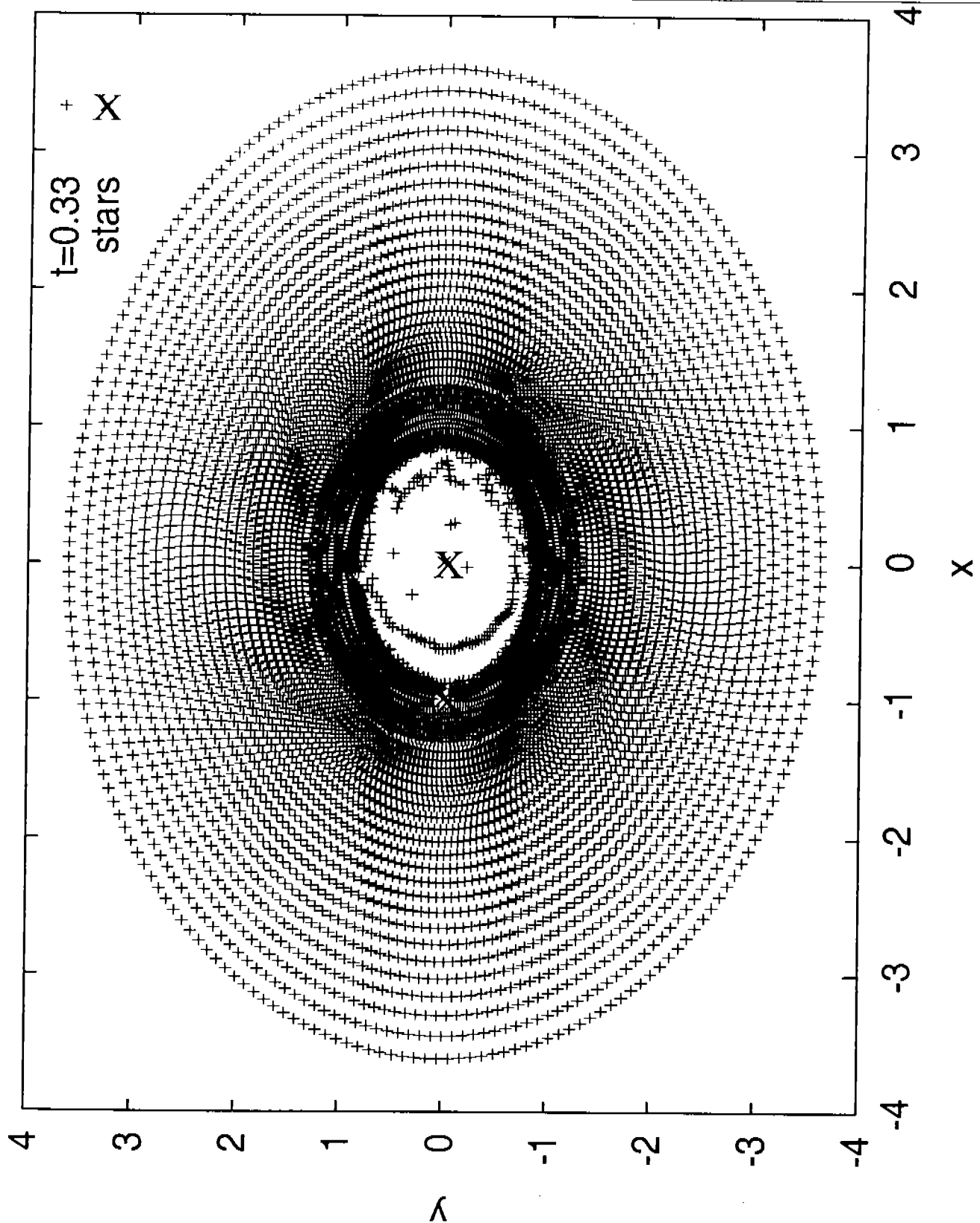


Figure C.10: Picture of the disc, for  $a/R_d = 0.4$ . The time is  $t = 0.33$  and the secondary star mass is  $m = 0.01$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

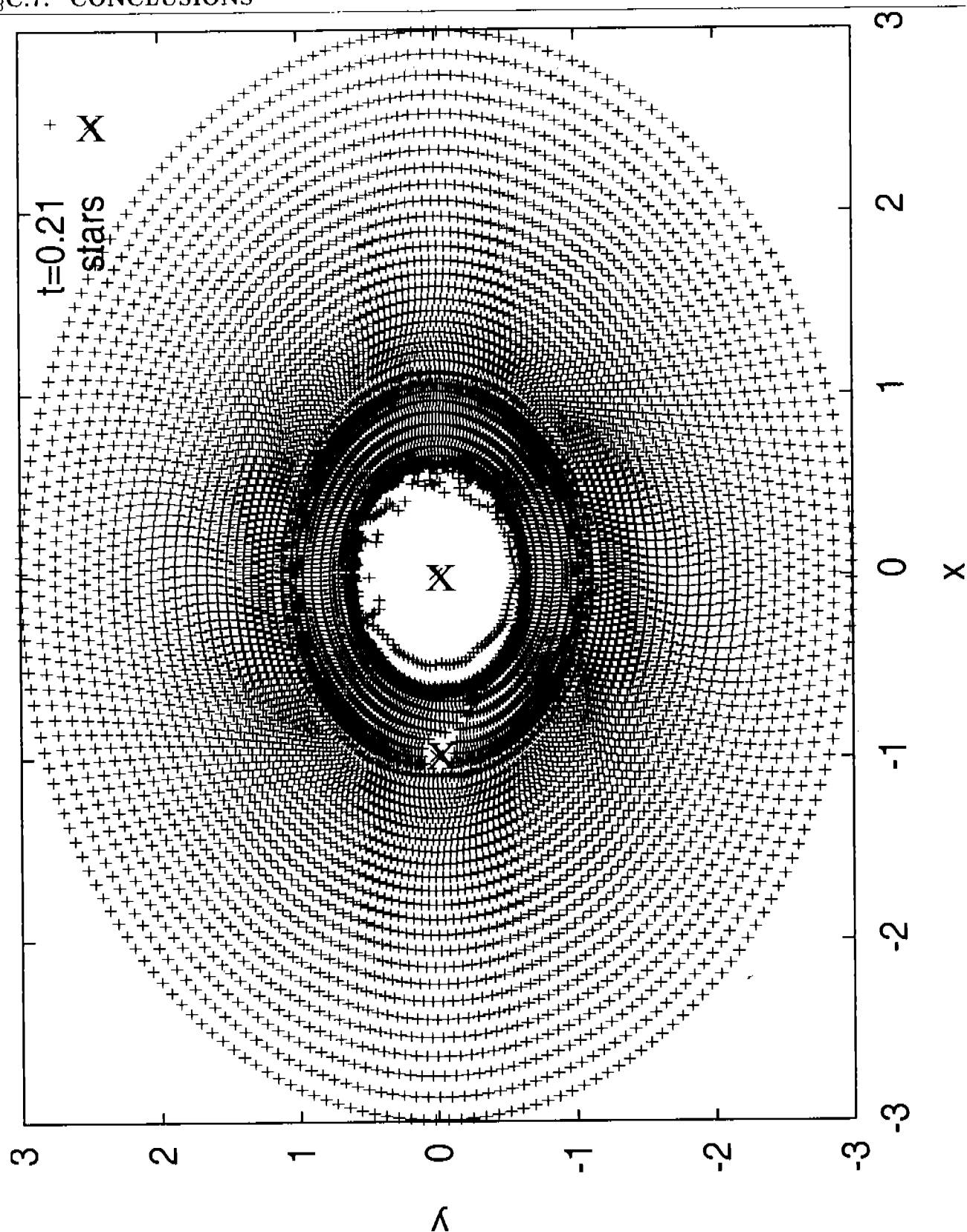


Figure C.11: Picture of the disc, for  $a/R_d = 0.5$ . The time is  $t = 0.21$  and the secondary star mass is  $m = 0.01$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.

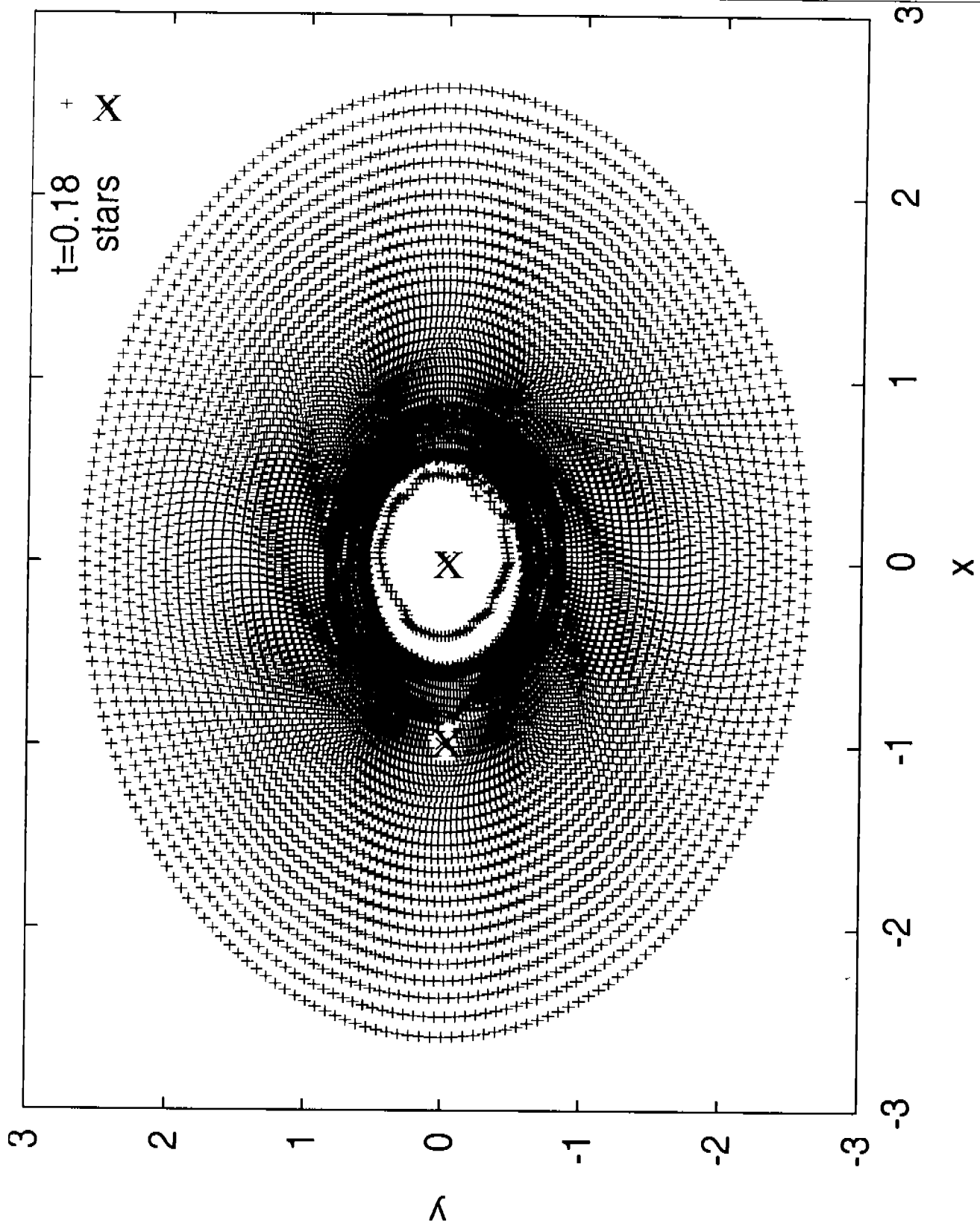
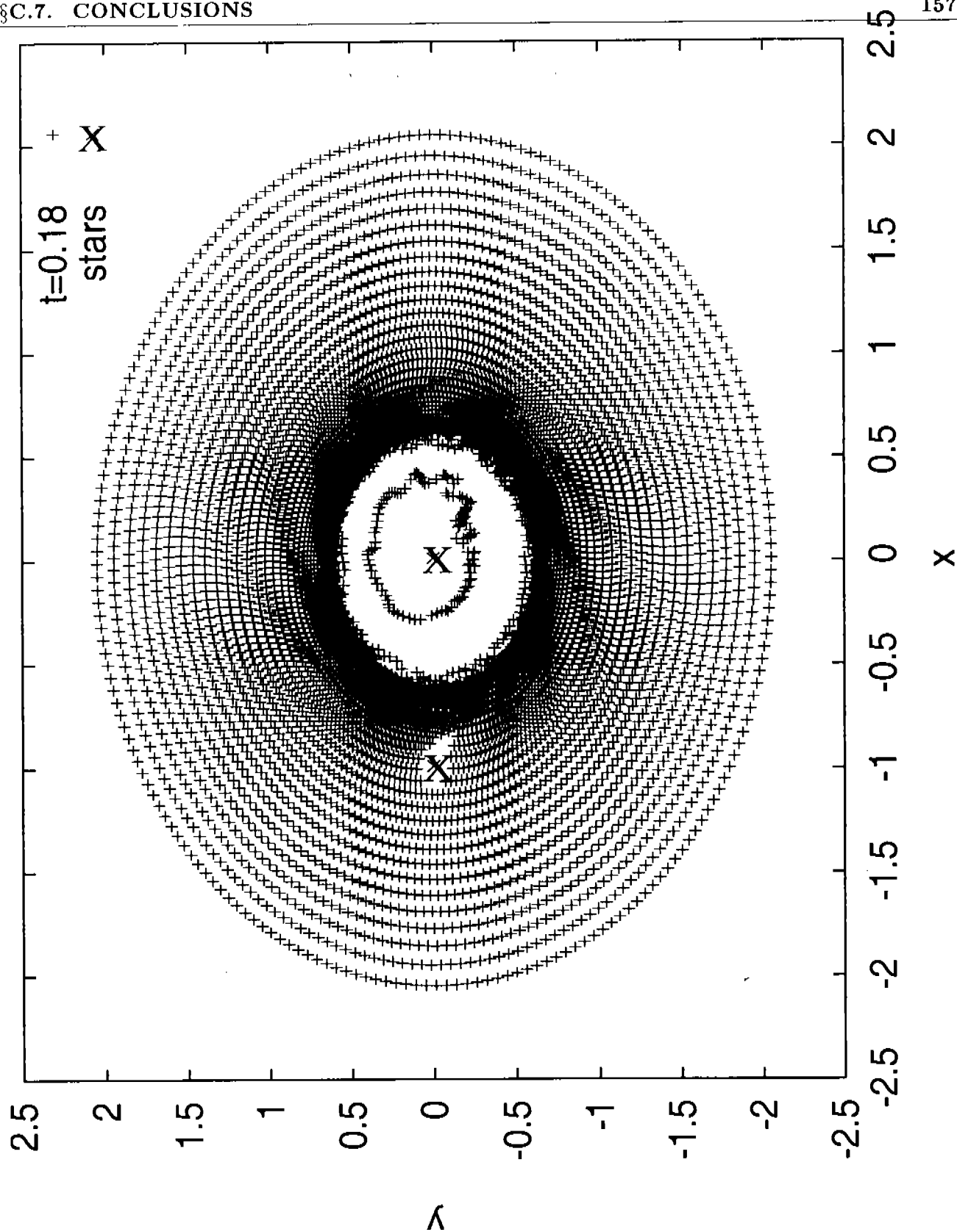


Figure C.12: Picture of the disc, for  $a/R_d = 0.6$ . The time is  $t = 0.18$  and the secondary star mass is  $m = 0.01$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.



**Figure C.13:** Picture of the disc, for  $a/R_d = 0.7$ . The time is  $t = 0.18$  and the secondary star mass is  $m = 0.01$ . The two crosses in the center of the figure represent the position of the stars. Any symbol + indicates the position of a particle in space.



the total stellar mass and  $\dot{M}$  is the mass accretion rate from the cloud. The latter is easily estimated if we use  $\dot{M} = m_0 c_s^3 / G$  (Shu 1977), taken from the isothermal spherical case;  $m_0 = 0.975$  and  $c_s$  is the velocity of sound. For a  $T = 10^\circ K$  cloud,  $\dot{M}$  equals  $5.56 \times 10^{-6} M_\odot yr^{-1}$ . GW Ori primary star mass is about  $2.5 M_\odot$ , and the largest estimate for the secondary star mass is  $1.3 M_\odot$  (Mathieu et al.1995), so,  $t_{ff} = 6.83 \times 10^5 yr$ . An estimate for the circumbinary disc mass is  $0.3 M_\odot$  (Mathieu et al.1995); using this mass and the same value for  $\dot{M}$ , we obtain  $\Delta t = 5.39 \times 10^4 yr$ . For the binary system V4046 Sgr (Jensen & Mathieu 1997), the total stellar mass is  $1.4657 M_\odot$ ; using the same value for  $\dot{M}$ ,  $t_{ff} = 2.63 \times 10^5 yr$ . The estimate of the circumbinary disc mass is  $8.36 \times 10^{-3} M_\odot$ , so,  $\Delta t = 1.50 \times 10^3 yr$ . Thus,  $\Delta t \ll t_{ff}$ , and the disc in both cases safely lie in a configuration where self-gravity can be neglected, thus, it is susceptible for the treatment described in this paper.

We restrict our problem to the three-body case, in order to explore the consequences of the conservation of the Jacobi constant. Such a simplification does not mean that a non-interacting scheme is always required. We can see the situation as a particle continually changing its value of  $C_J$ , as long as interactions are present. The consequence is that for every particle, the locations of its associated zero-velocity surfaces also changes. All this in mind, a description for the  $M_s = 0.0$  case of the evolution of the material at the first stages of disc formation, including the dense ring that has outwards motion until it settles down in a keplerian radius (Nagel 2007) is made. Study of the dense ring requires a model that gives us pairs of values for the position and velocity; a reasonable configuration is that the ring evolves along the minimum radius curve (see Section §C.5.3) with appropriate velocity.

Stretching out this model to the  $M_s \ll 1.0$  case, we can obtain likely configurations that suggest the existence of material restricted to move inside the secondary-star orbit and some other that will always lie outside of it. Naturally, the first set will represent a circumprimary disc and the other a circumbinary disc. An important parameter that comes to play a role is the ratio between the separation of the stars ( $a$ ) and the disc radius ( $R_d$  is the largest possible keplerian position),  $a/R_d$ , which is a measure of the importance of the angular momentum transport mechanisms at the stage of the binary system formation. Semi-analytic arguments (Section §C.5.4) and simulations (Section §C.6) lead us to the conclusion that  $a/R_d$  values larger than 0.0 but not too close to 1.0 are the best choices for the formation of massive circumprimary discs.

As an example, for  $a/R_d = 0.6$ , the estimate of the circumprimary disc mass ( $M_{cp}$ ) is 0.08 times the mass that accretes from the cloud during the time  $\Delta t$ . The circumbinary disc mass ( $M_{cb}$ ) is 0.67 times the same total accreted mass. The main drawback of this result is that  $a/R_d$  is a parameter that is not fit for a clear observational estimate, so, a comparison between simulations and observations is not obvious at this time. The model of a disc with a gap that separates the circumprimary and circumbinary disc is used by Mathieu et al.(1995) to interpret the observed SED of GW Ori; the ratio between the disc masses ( $M_{cp}/M_{cb}$ ) is equal to 0.13, that is almost the same value as that calculated in the model for  $a/R_d = 0.6$ , where  $M_{cp}/M_{cb} = 0.12$ . A conclusion that follows is that for GW Ori,  $a/R_d = 0.6$ , although we should be careful not to believe it completely, due to all the assumptions made in the observational interpretation (Mathieu 1991,1994,Mathieu et al.1995) and those given in this paper.

# BIBLIOGRAFIA

- Adams F.C., Emerson J.P., Fuller G.A., 1990, *ApJ*, 357, 606
- Andre P., Ward-Thompson D., Barsony M., 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell (University of Arizona Press: Tucson), p. 59
- Artymowicz P., Lubow S.H., 1994, *ApJ*, 421, 651
- Bate M.R., 1997, *MNRAS*, 285, 16
- Bate M.R., 2000, *MNRAS*, 314, 33
- Bate M.R. & Bonnell I.A., 1997, *MNRAS*, 285, 33
- Beckwith S.V.W., Sargent A.I., Chini R.S., Guesten R., 1990, *AJ*, 99, 924
- Belloche A., Hennebelle P. & André P., 2006, *A&A*, 453, 145
- Black D.C., Bodenheimer P. 1976, *ApJ*, 206, 138
- Bodenheimer P. 1995, *ARA&A*, 33, 199
- Bodenheimer P., Laughlin G. 1995, *RevMexA&A* (Serie de Conferencias), 1, 157
- Bodenheimer P., Tscharnuter W. 1979, *AJ*, 74, 288
- Bonnell I.A. & Bastien P., 1992, *IAU Colloquium* 135, 32, 206
- Boss A.P. 1980, *ApJ*, 237, 563
- Boss A.P. 1998, *ApJ*, 503, 923
- Brandner W., et al. 2000, *AJ*, 120, 950
- Brouwer D. & Clemence G.M., 1961, *Methods of Celestial Mechanics*, ed. Academic Press, New York.
- Calvet N. et al. 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell (University of Arizona Press: Tucson), p. 377
- Cassen P.M., Moosman A., 1981, *Icarus*, 48, 353
- Clarke C.J., Lin D.N.C., Pringle J.E., 1990, *MNRAS*, 242, 439
- Close L.M., et al., 1998, *ApJ*, 499, 883
- D'Alessio P., Calvet N., Hartmann L., 1997, *ApJ*, 474, 397
- Duchene G., Menard F., Duvert G., Stapelfeldt K., 2000, *BAAS*, 33, 717
- Duquennoy A. & Mayor M., 1991, *A&A*, 248, 485
- Dutrey A., Guilloteau S., Simon M., 1994, *A&A*, 286, 149
- Duvert G., Dutrey A., Guilloteau S., Menard F., Schuster K., Prato L., Simon M., 1998, *A&A*, 332, 867
- Eggleton P.P., 1983, *ApJ*, 268, 368

- Galli D., Lizano S., Shu F.H. & Allen A., 2006, *ApJ*, 647, 374
- Goldstein H., Poole C. & Safko J., 2002, *Classical Mechanics*, (3d ed.; Addison Wesley)
- Guilloteau S., Dutrey A., Simon M., 1999, *A&A*, 348, 570
- Hartmann L.W., Kenyon S.J., 1990, *ApJ*, 349, 190
- Hayashi M., Ohashi N., Miyama S., 1993, *ApJL*, 418, L71
- Hogerheijde M.R., van Langevelde H.J., Mundy L.G., Blake G.A., van Dishoeck E.F., 1997, *ApJL*, 490, L99
- Holman M.J. & Wiegert P.A., 1999, *AJ*, 117, 621
- Hueso R. et al. 2002, *BAAS*, 34, 888
- Hueso R., Guillot T., 2005, *A&A*, 442, 703
- Hunter C. 1963, *MNRAS*, 126, 299
- Jensen E.L.N., Akeson R.L., 2003, *ApJ*, 584, 875
- Jensen E.L.N., Mathieu R.D., 1997, *AJ*, 114, 301
- Jensen E.L.N., Koerner D.W., Mathieu R.D., 1996, *AJ*, 111, 2431
- Jijina J., Myers P.C., Adams F.C., 1999, *ApJS*, 125, 161
- Kikuchi N., Nakamoto T., Ogochi K., 2002, *PASJ*, 54, 589
- Lada C.J., et al., 2000, *AJ*, 120, 3162
- Larson R.B., 1972, *MNRAS*, 156, 437
- Laughlin G., Bodenheimer P., 1994, *ApJ*, 436, 335
- Lay O.P., Carlstrom J.E., Hills R.E., 1997, *ApJ*, 489, 917
- Lin D.N.C., Papaloizou J., Faulkner J., 1985, *MNRAS*, 212, 105
- Lin D.N.C., Pringle J.E., 1990, *ApJ*, 358, 515
- Lizano S., Shu F.H., 1989, *ApJ*, 342, 834
- Lubow S.H. & Shu F.H., 1975, *ApJ*, 198, 383
- Lynden-Bell D., Pringle J.E., 1974, *MNRAS*, 168, 603
- Mathieu R.D., 1994, *ARA&A*, 32, 465
- Mathieu R.D., Adams F.C., Latham D.W., 1991, *AJ*, 101, 2184
- Mathieu R.D., Adams F.C., Fuller G.A., Jensen E.L.N., Koerner D.W., Sargent A.I., 1995, *AJ*, 109, 2655
- Mathieu R.D., Guez A.M., Jensen E.L.N. & Simon M., 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss & S.S. Russell (Tucson: Univ. Arizona Press), 731
- Message P.J., 1959, *AJ*, 64, 226
- Miller R.H., Smith B.F., 1979, *ApJ*, 227, 407
- Monaghan J.J., 1992, *ARAA*, 30, 543
- Mundy L.G., Looney L.W., Welch W.J., 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell (University of Arizona Press: Tucson), p. 355
- Murray C.D., Dermott S.F., 1999, *Solar system dynamics*, ed Cambridge University, pp. 592
- Myers P.C., Evans II N.J., Ohashi N., 2000, in *Protostars and Planets IV*, ed. V. Mannings, A.P. Boss and S.S. Russell (University of Arizona Press: Tucson), p. 217
- Nagel E., 2007, aceptado en *RMAA*, Vol. 43, Num. 2

- Nagel E. Pichardo B.,2007, enviado a MNRAS  
Najita J.R.,Shu F.H.,1994,ApJ,429,808  
Nakamoto T., Nakagawa Y.,1994,ApJ,421,640  
Osorio M.,D'Alessio P.,Muzerolle J.,Calvet N.,Hartmann L.,2003,ApJ,586, 1148  
Ostriker J.P.,1964,ApJ,140,1067  
Paczyński B.,1977,ApJ,216,822  
Padgett D.L.,et al.,2000,BAAS,32,1481  
Papaloizou J.,Pringle J.E.,1977,MNRAS,181,441  
Pichardo B.,Sparke L.S.,Aguilar L.A.,2005,MNRAS,359,521  
Pickett,et al.,2003,ApJ,590,1060  
Piétu V.,Guilloteau S.,Dutrey A.,2005,A&A,443,945  
Raga A.C.,Navarro-González R.,Villagrán-Muniz M.,2000,RevMexA&A, 36,67  
Rice W.K.M.,et al.,2003,MNRAS,339,1025  
Rodríguez L.F.,D'alessio P.,Wilner D.J.,Jo P.T.P., Torrelles J.M.,Curiel S.,Gómez Y.,Lizano S.,Pedlars  
A.,Cantó J. & Raga A.C.,1998,Nature,395,355  
Rudak B.,Paczyński B.,1981,Acta Astron,31,13  
Shakura N.I.,Sunyaev R.,1973,A&A,24,337  
Shu F.H.,1977,ApJ,214,488  
Shu F.H.,Adams F.C.,Lizano S.,1987,ARA&A,25,23  
Shu F.H.,Najita J.,Galli D.,Ostriker E.,Lizano S.,1993,in Levy E.H., Lunine J.I.,  
eds,Protostars and Planets III.University of Arizona Press, Tucson,p.3  
Stahler S. et al.,1994,ApJ,431,341  
Stapelfeldt K.R.,Krist J.E.,Menard F.,Bouvier J.,Padgett D.L., Burrows  
C.J.,1998,ApJL,502,L65  
Strom S.E.,Edwards S.,Skrutskie M.F.,1994,in Protostars and Planets III,ed.E.Levy and J.Lunine  
(University of Arizona Press:Tucson),p.837  
Szebehely V.,1967,Theory of orbits:the restricted problem of three bodies, ed. Academic Press,pp.668  
Tabor M.,1989,Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction, ed. John Wiley &  
Sons, pp.364  
Terebey S.,Shu F.H.,Cassen P.,1984,ApJ,286,529  
Tohline J.E.,1980,ApJ,236,160  
Tscharnuter W.M.,Boss A.P.,1993,in Protostars and Planets III, ed.E.Levy and J.Lunine (Uni-  
versity of Arizona Press:Tucson),p.921  
Ulrich R.K.,1976,ApJ,210,377  
Velusamy T.,Langer W.D.,Goldsmith P.F.,2002,ApJ,565,L43  
Ward-Thompson D.,et al.,1999,MNRAS,305,143  
Weintraub D.A.,Zuckerman B.,Masson C.R.,1989,ApJ,344,915  
Wilking B.A.,Lada C.J.,1983,ApJ,274,698  
Yorke H.W.,Bodenheimer P.,1999,ApJ,525,330