



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

*MODIFICACIONES AL INFRARROJO EN
RELATIVIDAD GENERAL*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

ALEJANDRO AVILES CERVANTES

TUTOR: DR. JORGE LUIS CERVANTES COTA





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno

Avilés
Cervantes
Alejandro

52 11 89 70

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física

099542582

2. Datos del tutor

Dr
Jorge Luis
Cervantes
Cota

3. Datos del sinodal 1

Dr
Hernando
Quevedo
Cubillos

4. Datos del sinodal 2

Dr
Axel Ricardo
de la Macorra
Pettersson

5. Datos del sinodal 3

Dr
Gerardo
Carmona
Ruiz

6. Datos del sinodal 4

Dr
Miguel
Alcubierre
Moya

7. Datos del trabajo escrito

Modificaciones al Infrarrojo en Relatividad General
67 p
2007

Índice general

Introducción	II
1. Básicos de RG y cosmología	1
1.1. El espacio-tiempo relativista	1
1.2. Campos de materia	3
1.3. Las ecuaciones de Einstein	5
1.4. Cosmología básica	6
1.5. Observaciones actuales del universo	9
1.6. Energía oscura	14
1.7. Quintaesencia	15
2. Teorías $f(R)$	19
2.1. Alternativas a RG	19
2.2. Ecuaciones de campo en teorías $f(R)$	21
2.3. Ecuaciones de Friedmann para teorías $f(R)$	26
2.4. Modelo CDTT	27
3. Teorías $f(R)$ y campos escalares	32
3.1. Teorías escalares-tensoriales	32
3.2. Equivalencia matemática entre teorías $f(R)$ y RG	35
3.3. Modelo CDTT generalizado	39
3.4. Límite newtoniano en teorías $f(R)$	41
4. Otros modelos	44
4.1. Modelos R^n	44
4.2. Otros modelos	47
5. Formulación de Palatini	55
5.1. Ecuaciones de campo en la formulación de Palatini	55
5.2. Soluciones en el vacío	57
5.3. Ecuaciones de Friedmann en la formulación de Palatini	58
5.4. Modelo $1/R$	58
5.5. Teorías $L(R)$ y STG	61
Conclusiones	63

Introducción

En los últimos años ha habido un gran avance en la cosmología observacional. Todas las más modernas mediciones, principalmente las de supernovas tipo Ia [34] y las de la radiación cósmica de fondo [43], indican que el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada. Este resultado ha desatado una carrera teórica y observacional a fin de encontrar la causa que provoca esta expansión.

El universo a grandes escalas parece muy homogéneo e isotrópico, este hecho y el uso de la teoría de la Relatividad General (RG) de Einstein devienen en el modelo estándar de cosmología, el cual había sido muy preciso en sus predicciones. El problema es que con un contenido energético *normal* en el universo, con materia proveniente de la física de partículas, el modelo estándar de cosmología dice que el universo se expande de manera decelerada. Algo no está bien con la teoría.

Las explicaciones más atendidas a la expansión acelerada del universo invocan algún fluido de características exóticas, genéricamente llamados energía oscura, que con una presión negativa es capaz de provocar la expansión. El problema es que no se cuenta a la fecha con ninguna explicación satisfactoria acerca de su naturaleza, su existencia no encaja bien en ningún modelo de partículas conocido. Sin embargo, la energía oscura ha tenido enorme aceptación en la comunidad científica, debido en gran parte a que la mayoría de los modelos que la pueden describir ya habían sido usados para explicar otra etapa de expansión acelerada, la inflación en el universo temprano, teoría que ha sido muy exitosa al grado que forma ya parte del modelo estándar de cosmología.

Es posible que la expansión acelerada del universo no se deba a un fluido aún desconocido, si no al uso de una incorrecta teoría de gravitación. Desde sus inicios, la teoría de RG ha sido muy cuestionada por su incompatibilidad con el otro pilar de la física moderna, la física cuántica. Numerosos intentos de cuantizarla han mostrado que alguna modificación en la acción de Einstein-Hilbert debe ser hecha [46].

Debido a que todas las leyes de la física conocidas son de segundo orden, uno de los principios que conducen a RG es que las ecuaciones que rigen el campo gravitacional sean de segundo orden en la métrica. Casi el único escalar formado a partir del tensor de Riemann del que se obtienen ecuaciones de segundo orden es R . Sin embargo bien podemos proponer otros escalares que entren en el lagrangiano de gravitación capaces de modelar lo que observamos sin recurrir a conceptos extraños como el de energía oscura, pagando el precio de que las ecuaciones de campo resultantes sean de cuarto orden en la métrica. La modificación que aquí nos concierne consiste en la sustitución del lagrangiano de gravitación R por alguna función $f(R)$. En los últimos años ha habido un auge en estas teorías, principalmente desde la publicación de un artículo de S. Capozziello [7] en el que muestra que un lagrangiano $1/R$ es capaz de modelar la expansión acelerada del universo.

En este trabajo estudiamos aspectos físicos de las teorías $f(R)$ y sus implicaciones cosmológicas. En el capítulo 1 hacemos un resumen de algunos aspectos importantes de RG y de la cosmología moderna, hablamos de las observaciones actuales del universo y de sus posibles explicaciones usando modelos de energía oscura como quintesencia. En el capítulo 2 derivamos algunos aspectos fundamentales de las teorías $f(R)$, éstos son, las ecuaciones de campo resultantes y la *cosmología* $f(R)$ bajo el esquema Friedmann-Robertson-Walker (FRW), derivamos también los resultados del modelo $1/R$. En el capítulo 3 revisamos algunas otras teorías alternativas de gravitación y sus posibles conexiones con las teorías $f(R)$. También hablamos de la discusión que existe actualmente sobre el límite newtoniano de estas teorías. En el capítulo 4 proponemos nuevos modelos $f(R)$ capaces de producir la expansión acelerada del universo. Finalmente en el capítulo 5 estudiamos la formulación de Palatini, donde la métrica no es la única variable de campo, si no que hay una segunda, las conexiones. Las conclusiones se presentan en la parte final de este trabajo.

Capítulo 1

Básicos de RG y cosmología

1.1. El espacio-tiempo relativista

Tomamos como espacio-tiempo relativista a un par $(M, g_{\mu\nu})$ donde M , el espacio de eventos, es una variedad conectada suave cuatridimensional y $g_{\mu\nu}$ es una métrica semi-riemanniana definida en M con signatura Lorentz $(-, +, +, +)$. La condición que M sea suave nos permite definir espacios tangentes $T_p M$ en todo evento p en la variedad, lo que introduce sistemas locales de coordenadas. También está definida en M una derivada covariante ∇ que cumple con las reglas de distribución de Leibniz. Por covariante nos referimos a que sus componentes se transforman como un tensor, dadas las componentes de un tensor A_ν y dos sistemas coordenados relacionados por una transformación invertible $x^{\bar{\alpha}}(x^\alpha)$, se tiene

$$\nabla_{\bar{\mu}} A_{\bar{\nu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\bar{\mu}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\bar{\nu}}} \nabla_\mu A_\nu.$$

Si exigimos un operador ∇ sin torsión, i.e., $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]f = 0$ para toda función escalar f , y que cumpla con la condición de metricidad

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{1.1}$$

la derivada covariante queda únicamente determinada por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \partial_\nu &:= \nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \partial_\rho, \\ \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

con ∂_α los vectores base del sistema coordenado $\{x^\alpha\}$.

La métrica \mathbf{g} nos permite clasificar un vector x de acuerdo a si $\mathbf{g}(x, x)$ es mayor, igual o menor que cero. Si $x^\alpha x_\alpha > 0$, el vector x es tipo-espacio, si $x^\alpha x_\alpha < 0$, es tipo-tiempo, y si $x^\alpha x_\alpha = 0$, es vector nulo. De esta manera, la métrica define la estructura causal del espacio-tiempo relativista y se dice que dos eventos están causalmente conectados si existe una curva $\lambda(\tau)$ que los una

con campo vectorial tangente $\partial_\mu \lambda$ tipo-tiempo en todos lados. La relatividad especial asegura que la línea de mundo de todo observador debe ser una curva de éstas.

Decimos que una segunda métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ en M es equivalente conforme a $g_{\mu\nu}$ si existe un mapeo suave $\Omega^2 : M \longrightarrow R^+$ tal que $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ (Ω es llamado factor conforme). Debido a que Ω^2 es estrictamente positivo la nueva métrica preserva la estructura causal de M .

Principios fundacionales de teorías gravitacionales

La primera idea que condujo a RG fue el ahora llamado Principio de Equivalencia Débil (PED). Éste dice que *‘partículas en caída libre siguen geodésicas en el espacio tiempo’*[16]. Debe entonces cumplirse para todo objeto que su masa inercial sea proporcional a su masa gravitacional, lo que ha sido comprobado con muy alta precisión por experimentos tipo Eötvös [48].

El PED es poderoso, pero no nos dice cómo son las leyes de la naturaleza en un sistema de referencia arbitrario. El Principio de Covariancia General (PCG) nos dice que somos libres de escoger cualquier sistema de coordenadas para marcar los eventos del espacio-tiempo. Son los eventos en sí y la geometría de la variedad lo que es importante y no la imposición arbitraria de un sistema coordinado. De acuerdo con este principio, se deben hacer las siguientes identificaciones al transformar las leyes de la física de un sistema inercial a uno arbitrario,

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu .$$

La condición de metricidad se satisface inmediatamente usando estos dos principios: en coordenadas cartesianas se tiene $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = 0$, entonces, $\partial_\lambda \eta_{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. En concordancia con el PCG está el principio de Mach, el cual dice que las fuerzas inerciales que actúan sobre un cuerpo sólo pueden ser definidas con respecto a todos los demás objetos en el universo, y no con respecto a conceptos abstractos como un espacio-tiempo absoluto [32].

Por último tenemos el Principio de Equivalencia Fuerte (PEF), *‘las leyes de la física tienen la misma forma en un marco de referencia en caída libre que aquellas dadas por la relatividad especial’*[16]. De acuerdo con este principio, en un marco de referencia en caída libre es posible escoger un sistema local de coordenadas en el cual las leyes de la física toman la misma forma que en un sistema inercial; i.e., es posible escoger coordenadas para las cuales la métrica $g_{\mu\nu}$ es localmente la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, y las leyes de la física están bien descritas por la relatividad especial.

Aunque el formalismo descrito hasta ahora nos asegura que el PEF se cumple para partículas de prueba (aquellas cuya influencia en el campo gravitacional es despreciable), esto no ha sido probado con precisión para objetos muy masivos y de grandes dimensiones. Estos objetos distorsionan fuertemente el espacio-tiempo en el que se encuentran, y aunque en la teoría de RG sí siguen geodésicas, esto puede no ser cierto para teorías alternativas de gravitación.

1.2. Campos de materia

En RG generalmente se da por hecho que todo lo que sucede en el espacio-tiempo puede ser descrito en términos de geometría y de campos de materia, por ejemplo, fluidos materiales o campos electromagnéticos. Cada uno de tales campos tiene asociado un tensor en el espacio-tiempo y satisface ecuaciones de campo que lo involucran con la métrica $g_{\mu\nu}$.

La suposición más básica de los campos de materia es:

Asociado con cada campo de materia F existe un tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ tal que para todo evento p en M y toda curva tipo tiempo γ con tangente unitaria ξ^α en p , $T^\alpha{}_\beta \xi^\beta$ es la densidad del 4-momento de M en p determinada por el observador γ .

$T_{\mu\nu}$ es llamado *tensor de energía momento* asociado al campo F . Podemos descomponer la densidad $T^\alpha{}_\beta \xi^\beta$ en sus componentes paralela y perpendicular a ξ^μ ,

$$T^\alpha{}_\beta \xi^\beta = (T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) \xi^\alpha + (T^\alpha{}_\beta \xi^\beta - (T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu) \xi^\alpha). \quad (1.3)$$

La componente $T_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu$ es la densidad de energía de F en p relativa al observador γ . La segunda componente es la densidad relativa a p del 3-momento.

El tensor de energía momento nos permite escribir la ley de conservación de la energía de una manera compacta:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4)$$

Otras suposiciones del tensor de energía momento dan lugar a constricciones en los campos de materia asociados. Algunos ejemplos son:

Condición de Energía débil (CED): Dado un vector tipo tiempo t^μ , se cumple $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$, i.e., la densidad de energía medida por cualquier observador es no negativa.

Condición de Energía Dominante (CED): Dado un vector tipo tiempo t^μ , se cumple $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ y $T^\mu{}_\nu t^\nu$ es tipo-tiempo o nulo. Añade a la condición anterior que la densidad del 4-momento no sea tipo-espacio. Es decir, impone un límite (c) a la velocidad de propagación de la energía momento determinada por un observador.

Pueden ser consideradas también las condiciones de energía fuerte y nula. Haciendo uso de las ecuaciones de RG, éstas imponen restricciones en el tensor de energía momento de manera tal que la gravitación resulte siempre atractiva.

Consideramos como ejemplo un fluido perfecto. Éste es caracterizado por tres parámetros: un campo de 4-velocidad u^μ definido en cada lugar del fluido ($u^\mu \doteq (1, 0, 0, 0)$ en coordenadas comóviles con el fluido), una densidad de energía ρ y una presión isotrópica p . Identificando con (1.3), $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$, aquí ρ es la densidad de energía medida por un observador con tangente unitaria u^μ y la presión p es la densidad del 3-momento. En este

trabajo usaremos unidades donde $c = 1$ y $\hbar = 1$ ¹, de esta manera la densidad de momento y la presión tienen las mismas unidades (*masa*⁴). Escribimos entonces el tensor de energía momento asociado a un fluido perfecto como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Las condiciones de energía ahora implican:

$$\begin{aligned} \text{CEd} &\Rightarrow \rho \geq 0 \quad y \quad p \geq -\rho, \\ \text{CED} &\Rightarrow \rho \geq 0 \quad y \quad \rho \geq p \geq -\rho. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ejemplos particulares de fluidos perfectos son caracterizados por una ecuación de estado, que en su forma más sencilla es

$$p = w\rho, \quad (1.7)$$

con w una constante. Por ejemplo, para un fluido de radiación o materia relativista, $w = 1/3$, o para un fluido donde las partículas no interactúan entre ellas, $w = 0$. Este último, conocido como *polvo*, modela en cosmología el fluido de materia observada en épocas donde $k_B T \ll m$, i.e., cuando se tienen velocidades peculiares no relativistas. La CED restringe la ecuación de estado a

$$-1 \leq w \leq 1. \quad (1.8)$$

Es usual introducir el tensor de energía momento con una acción de materia, S_M , como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (1.9)$$

con

$$S_M = \int L_M \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.10)$$

donde L_M es algún lagrangiano² de materia y $g := \det g_{\mu\nu}$. La integración se hace sobre todo el espacio-tiempo y el factor $\sqrt{-g}$ deja invariante el elemento de volumen.

¹Aunque este trabajo es puramente clásico usaremos $\hbar = 1$ por consistencia con los artículos publicados en este tema

²En realidad, ésta es una densidad lagrangiana. Sin embargo, en este trabajo siempre llamaremos lagrangiano a cualquier densidad lagrangiana

1.3. Las ecuaciones de Einstein

Uno de los principios fundamentales en RG es que el espacio-tiempo no funciona como un marco de fondo donde suceden los procesos físicos. Las interacciones gravitacionales no son vistas más como fuerzas que alteran el movimiento natural rectilíneo uniforme de las partículas. En cambio, el espacio-tiempo actúa como un objeto dinámico inherente a los procesos físicos, donde su métrica se ve afectada por las distribuciones de materia y energía que allí suceden, y la gravedad se manifiesta como una deformación de la métrica que cambia la geometría intrínseca del espacio-tiempo. De acuerdo con el PEF, los cuerpos libres (libres de toda fuerza excepto de la gravedad) siguen geodésicas dadas por las conexiones de la métrica; para un cuerpo libre su línea de mundo $\lambda(\tau)$ es la curva integral de la solución a la ecuación

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0, \quad (1.11)$$

con u_μ el vector tangente a $\lambda(\tau)$.

Existe entonces una interacción entre la métrica del espacio-tiempo y los campos de materia. Como postulado, esta interacción está dada por las *Ecuaciones de Campo de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.12)$$

donde R y $R_{\mu\nu}$ son el escalar y el tensor de Ricci. $R_{\mu\nu} := R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu}$ es la primera contracción del tensor de curvatura de Riemann definido por $R^\alpha{}_{\mu\beta\nu}V^\mu = [\nabla_\beta, \nabla_\nu]V^\alpha$ y $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Debido a la simetría del tensor $G_{\mu\nu}$ la expresión (1.12) representa un sistema de 10 ecuaciones acopladas de segundo orden en la métrica. Sin embargo, por la invariancia ante difeomorfismos, el sistema no es linealmente independiente. En caso de que pudiera ser reducido, se obtendrían seis ecuaciones acopladas de segundo orden en la métrica

y a la invarianza ante transformaciones de coordenadas,

El tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, es (casi) el único tensor covariantemente conservado que puede ser formado a partir de la métrica y sus primeras y segundas derivadas (contracción de las identidades de Bianchi). Las ecuaciones de Einstein surgen entonces como consecuencia de suponer que el tensor de energía momento sólo afecta a las primeras y segundas derivadas de la métrica, y claro, de la condición de conservación de $T_{\mu\nu}$. El factor $8\pi G$ se introduce para obtener el límite newtoniano correcto.

En realidad, debido a la condición de metricidad, la ecuación anterior puede ser extendida a

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

donde Λ es una constante, llamada *constante cosmológica*.

1.4. Cosmología básica

A grandes escalas el universo parece muy homogéneo, observamos una densidad promedio uniforme en la distribución, tipo, composición, etc. de galaxias e incluso de cúmulos de galaxias. Más aún, es altamente isotrópico; no importa en qué dirección apuntemos, observamos esencialmente lo mismo, una distribución aleatoriamente uniforme de componentes extragalácticos. Existe una radiación de fondo que nos llega de todas direcciones con un mismo espectro de cuerpo negro a una temperatura $T_\gamma \approx 2,7K$ con ligeras variaciones del orden de $10^{-5}K$. Se concluye que el universo es espacialmente homogéneo e isotrópico, lo que se conoce como *Principio Cosmológico*. Como consecuencia directa, vía Teorema de Schur³ [3, 28], los elementos de línea posibles en el espacio-tiempo resultan sumamente restringidos. Están dados por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [14], en coordenadas esféricas

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.14)$$

donde el factor adimensional $a(t)$ es llamado *Factor de Escala Cósmico* y es función únicamente del tiempo. Esencialmente sólo hay tres de estos espacios: $k = 0$, donde todas las hipersuperficies de tiempo constante son euclidianas; $k = 1$, hiperesferas; y su contraparte negativa, $k = -1$, correspondiente a hiperboloides.

De (1.2) vemos que $\Gamma_{\mu tt} = \frac{1}{2}(2g_{\mu t, t} - g_{tt, \mu}) = 0$, de donde

$$\nabla_{\partial_t} \partial_t = \Gamma^\mu{}_{tt} \partial_\mu = 0 \quad (1.15)$$

y los vectores base ∂_t son geodésicas. Es decir, los observadores $\mathbf{r} = cte$ son los que se encuentran en caída libre, para ellos $d\tau = dt$, y son éstos los que ven el mismo universo homogéneo e isotrópico a un valor fijo de t .

Resolvemos las ecuaciones de campo de Einstein, sin tomar en cuenta por el momento la constante cosmológica, usando la métrica FRW y un fluido perfecto para obtener la dinámica del factor de escala. La componente (00) da

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.16)$$

y para cualquiera de las componentes (ii), debido a la isotropía las tres dan el mismo resultado,

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{2a^2} = -4\pi G p. \quad (1.17)$$

³El Teorema de Schur dice que para un espacio de máxima simetría, i.e. isotrópico y homogéneo, el tensor de Riemann está dado por $R_{\alpha\beta\mu\nu} = K(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu})$ con la curvatura seccional K constante y $R = 12K$.

Es útil combinar estas dos ecuaciones para obtener la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.18)$$

Vemos de esta ecuación que la aceleración del factor de escala no depende de la curvatura espacial k . La conservación de energía-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) es

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.19)$$

la primera ley de la termodinámica para una expansión adiabática. A (1.16), (1.18) y (1.19) se les conoce como ecuaciones de Friedmann. Éstas no son independientes; por ejemplo, podemos combinar (1.16) y (1.18) para obtener (1.19). Introduciendo el *parámetro de Hubble* $H(t)$ y el *parámetro de deceleración* $q(t)$ con

$$\begin{aligned} H(t) &:= \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \\ q(t) &:= -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^2}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

las ecuaciones de Friedmann toman la forma

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \\ q &= \frac{4\pi G(\rho + 3p)}{3H^2}, \\ \dot{\rho} &= -3H(\rho + p). \end{aligned} \quad (1.21)$$

También introducimos la *densidad crítica* ρ_c y el *parámetro de densidad* Ω

$$\begin{aligned} \rho_c &:= \frac{3H^2}{8\pi G}, \\ \Omega &:= \frac{\rho}{\rho_c}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

lo que nos permite relacionar la densidad de energía total del universo con su geometría

$$\begin{aligned} \Omega > 1 &\iff k = 1, \\ \Omega = 1 &\iff k = 0, \\ \Omega < 1 &\iff k = -1. \end{aligned}$$

En general, el universo a grandes escalas es modelado con un fluido de componentes de distintas naturalezas; en su descripción más simple cada una cumple con una ecuación de estado $p_i = w_i \rho_i$. En general las cantidades físicas serán la suma de las contribuciones de estas componentes: $\rho = \sum_i \rho_i$, $p = \sum_i p_i$, $\Omega = \sum_i \Omega_i$, etc. Para la evolución de cada una de las componentes de la densidad de energía, usando la ecuación de conservación (1.19), tenemos

$$\rho(a) \propto a(t)^{-3(1+w)}. \quad (1.23)$$

Hasta ahora no hemos incluido la constante cosmológica; al hacerlo, esto resulta ser equivalente a introducir un tensor de energía momento de la forma

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

que corresponde a un fluido perfecto con

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (1.25)$$

El parámetro de la ecuación de estado es entonces $w = -1$ y la densidad de energía es constante. Observaciones cosmológicas modernas, en particular de la radiación cósmica de fondo (CBR, por sus siglas en inglés), muestran al universo actual extremadamente plano, lo que nos permite, no sólo apelando a simplicidad matemática, hacer modelos con $k = 0$. Para un universo plano las ecuaciones (1.16) y (1.23) dan para la dinámica del factor de escala

$$\begin{aligned} a(t) &= a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)}, & (w \neq -1), \\ a(t) &\propto e^{Ht}, & (w = -1), \end{aligned} \quad (1.26)$$

con $a_0 = a(t_0)$ el factor de escala actualmente y $H = \sqrt{\Lambda/3}$ una constante.

Un universo dominado por una constante cosmológica se expande exponencialmente mientras su densidad se mantiene constante, lo que provoca un aumento en su energía total. Nótese cómo el comportamiento de esta solución representa un caso límite para las condiciones CEd y CED; ver ecuación (1.6). En general, el comportamiento de ρ y a se muestra en la tabla 1, dependiendo del tipo de materia-energía del fluido.

Tipo de Energía	$\rho(a)$	$a(t)$
Polvo	a^{-3}	$t^{2/3}$
Radiación	a^{-4}	$t^{1/2}$
Λ	constante	e^{Ht}

Tabla 1. Comportamientos de las más importantes fuentes de energía en cosmología. El comportamiento del factor de escala se aplica al caso de un universo plano, y el de la densidad de energía es en general.

La información más importante del factor de escala proviene del corrimiento al rojo en la frecuencia de la luz emitida de una fuente distante. Supongamos un rayo de luz ($ds^2 = 0$) viajando hacia nosotros ($\mathbf{r} = 0$ por simplicidad) en la dirección radial, tenemos $dt^2 = a^2(t)dr^2/(1 - kr^2)$. Supongamos que la onda deja su fuente localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ en el tiempo $t = t_1$ y nos alcanza en $t = t_0$. Debido al cambio en el factor de escala la onda cambiará su frecuencia de acuerdo con $\nu_0/\nu_1 = a(t_1)/a(t_0)$. Es útil introducir el *parámetro de corrimiento al rojo* z ,

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (1.27)$$

de donde se puede escribir la relación

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}, \quad (t_0 > t_1). \quad (1.28)$$

Así, si observamos un corrimiento al rojo, tenemos $z > 0$ y el universo se expande. En un universo en contracción ($a(t_1) > a(t_0)$) la luz de las galaxias distantes se vería corrida al azul.

1.5. Observaciones actuales del universo

Observaciones de la radiación de fondo

Una clase de observaciones astrofísicas de gran relevancia en cosmología es el estudio de la radiación cósmica de fondo. En las primeras etapas de la evolución del universo la radiación era lo suficientemente energética para ionizar cualquier átomo de hidrógeno que se formara, por lo que se tenía un plasma de fotones, electrones y iones de hidrógeno en interacción, lo que provocaba que la materia fuera opaca a la luz. Con la expansión los fotones se volvieron menos energéticos y empezaron a formarse núcleos estables, etapa conocida como *recombinación*, hasta que el universo tuvo aproximadamente 380000 años la materia se volvió transparente a la luz y ésta pudo escapar, y por la expansión se ha ido enfriando hasta su temperatura actual de $T_0 = 2.7K$. Se asume que la radiación de fondo proviene de una superficie esférica muy lejana alrededor de nosotros ($z \approx 1100$), la llamada *superficie de última dispersión*, y puede ser considerada homogénea e isotrópica en una primera aproximación.

Por las teorías de formación de estructura sabemos que la materia acumulada es resultado de perturbaciones primitivas que actuaron como semillas. Esperamos una influencia de estas perturbaciones en la radiación de fondo, medidas como anisotropías de primero y segundo orden; ver figura (1.1). Las primeras son producidas desde el universo temprano hasta justo la etapa de recombinación y deben estar impresas como inhomogeneidades en la superficie de última dispersión. Las de segundo orden son debido al efecto de procesos dispersivos posteriores a la última dispersión.

Las anisotropías de primer orden asociadas a ángulos grandes ($\Delta\theta \sim 7^\circ$) fueron descubiertas por el satélite COBE (*COsmic Background Explorer*) en 1992, motivo que valió el premio Nobel 2006 otorgado a George Smoot y John Matter. Estas anisotropías están asociadas con regiones causalmente desconectadas en la época de última dispersión. Para ángulos menores que un grado ($\Delta\theta < 1^\circ$) las regiones del universo en esa época están causalmente conectadas, por lo que es posible observar las oscilaciones acústicas del plasma de ese momento. Así, un aspecto relevante del estudio de la CBR es la posibilidad de relacionar la amplitud de sus fluctuaciones, en particular sus espectros, con la geometría del universo. Se ha demostrado [24] que la escala angular o, equivalentemente, el momento multipolar l del primer pico acústico del espectro de potencias puede ser expresado en términos de la curvatura espacial por

$$l \approx \frac{200}{\sqrt{1 - \Omega_k}}. \quad (1.29)$$

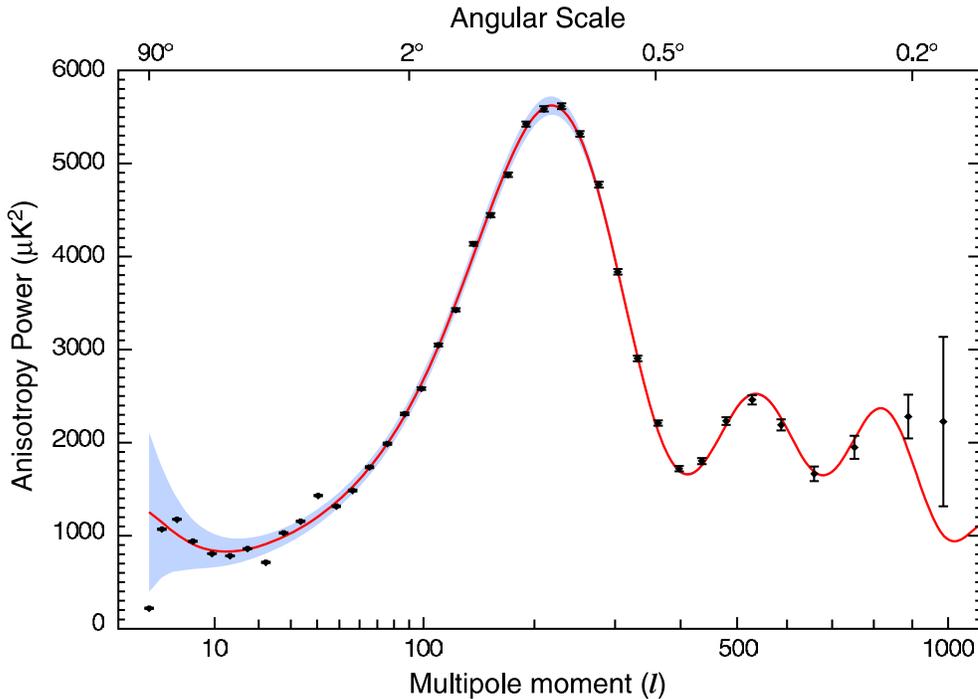


Figura 1.1: Espectro multipolar de la radiación cósmica de fondo. Fuente: WMAP 2006.

A lo largo del segundo lustro de los años noventa, algunos experimentos lograron medir anisotropías para $\Delta\theta < 1^\circ$ como lo fueron BOOMERanG (*Balloon Observations Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics*) y MAXIMA (*Millimetric Anisotropy eXperiment IMaging Array*), habiendo mostrado un valor $l = 197 \pm 6$ (BOOMERanG) y $l \approx 220$ (MAXIMA). El valor estimado del parámetro de curvatura conjuntando ambos resultados es $\Omega_k \approx 0.11 \pm 0.07$ [26]. Estos números han sido obtenidos tomando la constante

de Hubble H_0 deducida con observaciones de supernovas. Más recientemente [43], el satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) ha confirmado estos resultados obteniendo $\Omega_k \approx -0.010_{-0.008}^{+0.013}$. Además, para un universo plano, su contenido energético queda contrinado por

$$\Omega_m h^2 = 0.127_{-0.013}^{+0.007}, \quad \Omega_b h^2 = 0.0223_{-0.0009}^{+0.0007}, \quad h = 0.73_{-0.03}^{+0.03}, \quad (1.30)$$

con Ω_b el parámetro de densidad de masa bariónica y Ω_m el parámetro de densidad de masa. Es decir, vivimos en un universo donde sólo el 4 % corresponde a materia bariónica, 20 % es materia oscura y el restante 76 % es alguna otra forma de energía, conocida como *energía oscura*.

Observaciones de supernovas

Uno de los resultados más impresionantes de la cosmología observacional actual ha sido obtenido del estudio de supernovas del tipo Ia (SNeIa) [34]. La fase supernova es producto del colapso de una estrella supermasiva que degenera en una explosión muy poderosa capaz de incrementar su magnitud luminosa a valores similares a los de la galaxia que la contiene. Se cree que el tipo Ia es originado por enanas blancas con abundancia en oxígeno y carbono que se encuentran en sistemas binarios y ganan masa extrayéndola de su compañera hasta que se produce la explosión. Resultan estas supernovas de gran utilidad porque ha sido encontrada una relación fenomenológica (*relación de Philips*) entre la amplitud de sus curvas de luz y su máximo de luminosidad [23], cuya magnitud absoluta es aproximadamente $M = -19 \text{ mag}$ (se define magnitud absoluta como la magnitud aparente m de una estrella, o galaxia, a una distancia de 10 pc ; por definición, la estrella Vega tiene magnitud 0). El brillo intrínseco de una estrella es llamado luminosidad L , de éste se define la *distancia lumínica*, $d_L^2 = L/4\pi b$, donde b es el brillo aparente. En términos de parámetros cosmológicos la distancia lumínica es [3]

$$d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (1.31)$$

Esta relación es llamada *ley de Hubble*. Definimos ahora los parámetros

$$\Omega_M = \frac{8\pi G \rho_M}{3H^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{8\pi G \rho_\Lambda}{3H^2} = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{(aH)^2}, \quad (1.32)$$

para los distintos componentes del fluido cósmico. Insertándolos en la primera ecuación de Friedmann con constante cosmológica, se tiene la relación

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (1.33)$$

Con estos nuevos parámetros es posible escribir la distancia lumínica, para el caso FRW plano, como [8]

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z dz' [\Omega_M(1+z')^3 + \Omega_\Lambda]^{-1/2} . \quad (1.34)$$

Ahora, usando la relación magnitud- z [23],

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \frac{d_L(z)}{H_0} + 25, \quad (1.35)$$

se obtiene una medida de la *distancia módulo*, $\mu(z) := M - m$, en términos de los parámetros cosmológicos. $\mu(z)$ es obtenido de las observaciones de estrellas SNeI; de hecho, su magnitud aparente m es medida, mientras su magnitud absoluta M es deducida de las propiedades de sus curvas de luz. Finalmente, el corrimiento z de la supernova es determinado a partir del espectro de la galaxia en que se encuentra.

Existen dos equipos que se han dedicado a obtener y procesar las observaciones de pequeños corrimientos z de supernovas. El *Supernova Cosmology Project* (SCP) y el *High-Z Supernova Search Team* (HZT), que junto a las constricciones impuestas por las medidas de la radiación de fondo, han llegado a los resultados conocidos como *concordancia cosmológica* [42]:

$$\Omega_M \simeq 0.27, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.73, \quad \Omega_k \simeq 0.00, \quad (1.36)$$

junto con $\Omega_{barion} \simeq 0.04$, $\Omega_\gamma \simeq 0.00$ y $H_0 = 74 \pm 4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; ver figura (1.2).

En un universo plano, la combinación de los resultados de WMAP y observaciones de supernovas dan para la ecuación de estado de energía oscura [43]

$$w = -0.97_{-0.09}^{+0.07}. \quad (1.37)$$

La mayor parte del contenido energético del universo es desconocida. Estas contribuciones provocan que el universo se expanda aceleradamente desde corrimientos $z \approx 1$.

Una posibilidad fenomenológica

Los resultados son concluyentes, el universo está pasando por una etapa de expansión acelerada, el parámetro de deceleración (1.20) resulta ser negativo. Para esto podríamos invocar un nuevo fluido exótico que contribuya de tal manera que la ecuación de estado total cumpla

$$p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.38)$$

Un fluido de presión negativa, considerando las condiciones de energía. Un amplio debate ha surgido a partir de estas observaciones para explicar qué es esta nueva componente. El candidato inmediato es la constante cosmológica, Λ , inicialmente introducida por Einstein para obtener un universo estático, ahora

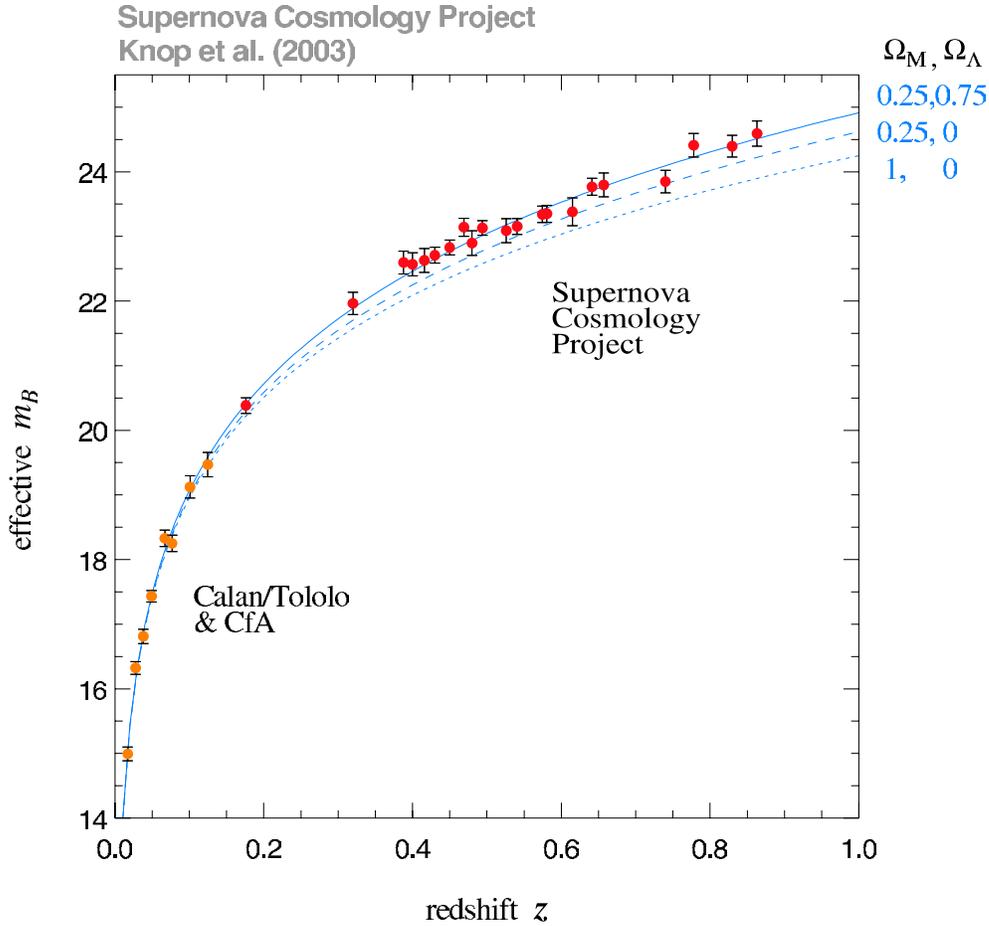


Figura 1.2: Fuente: Supernova Cosmology Project

es usada para modelar aceleración. Considerando una constante cosmológica y materia tipo polvo, el parámetro de deceleración se puede escribir

$$q_0 = (\Omega_M/2) - \Omega_\Lambda. \quad (1.39)$$

De las observaciones, con constante cosmológica se obtiene $q_0 \approx -0.6$. Entonces parece Λ el candidato idóneo para producir aceleración.

Problemas con la constante cosmológica

Los modelos de física de partículas han identificado la constante cosmológica Λ con la energía del vacío de todos los campos cuánticos, y aquí es donde surge el primer problema. El valor que predicen para la energía del vacío es demasiado grande comparado con el valor requerido por las observaciones astrofísicas (alrededor de 120 órdenes de magnitud). Una Λ de tal magnitud generaría una aceleración tan grande que resultaría imposible la formación de estrellas y galaxias. Se ha planteado la existencia de procesos físicos desconocidos que

cancelen estas energías del vacío, pero las observaciones de supernovas requieren que prevalezca una parte de entre 10^{120} : tal ajuste resulta increíble. Esta discrepancia entre teoría y observación, la más grande en toda la física, es llamada *el problema de la constante cosmológica*.

Los valores observados de las densidades de materia y vacío son del mismo orden de magnitud. Sin embargo, el cociente de estas cantidades cambia muy rápidamente con la expansión del universo,

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_M} \propto a^3. \quad (1.40)$$

Como consecuencia, en tiempos tempranos del universo la energía del vacío tenía valores despreciables en comparación con la materia y la radiación, mientras que en tiempos tardíos la energía de materia y radiación son despreciables. Sólo existe un muy breve periodo en la historia del universo donde estas dos densidades tienen valores comparables, y es justo ahora, en nuestros tiempos. Este problema es conocido como *el problema de la coincidencia*.

1.6. Energía oscura

Dados estos problemas con la explicación que da el modelo estándar de cosmología a la expansión acelerada del universo, parece que algo anda mal con él. Quizá necesitemos un tipo diferente de energía que produzca la aceleración, una *energía oscura* que, a diferencia de Λ , no sea constante.

Si las ecuaciones de campo de Einstein son correctas, la aceleración cósmica implica necesariamente que haya una densidad de energía que disminuya con relativa lentitud mientras el universo se expande. De la primera ecuación de Friedmann, (1.16),

$$\dot{a}^2 \propto a^2 \rho + cte. \quad (1.41)$$

es claro que la única manera de obtener aceleración (\dot{a} creciente) es que ρ decrezca más lentamente que a^{-2} . Ni la materia ($\rho_M \propto a^{-3}$) ni la radiación ($\rho_\gamma \propto a^{-4}$) tienen esta característica, entonces es necesario invocar una nueva clase de fluido. Existen buenas razones para pensar en una energía oscura dinámica como alternativa a una constante cosmológica. Primero, su densidad puede variar lentamente hasta su destino final igual a cero, permitiendo así una salida al problema de la constante cosmológica y al problema de la coincidencia. Segundo, plantea una interesante carrera observacional a fin de entender esta dinámica, con lo que podría incluso extenderse el conocimiento físico de la naturaleza.

El candidato más simple a energía oscura es tomar un campo escalar ϕ , que es una forma de materia capaz de generar una ecuación de estado con presión negativa. El problema aquí es que el ingrediente clave de tal dinámica es la forma del potencial de interacción, que es puramente fenomenológico y no está relacionado con ninguna teoría fundamental (hasta ahora).

Las observaciones cosmológicas arriba mencionadas sin considerar un universo plano constriñen el parámetro efectivo de la ecuación de estado de energía oscura [43] a⁴

$$-1.14 < w_{EO} < -0.90. \quad (1.42)$$

Es importante notar que este rango favorece la violación de la CED (1.8). De hecho, J. Santos et al. usando el esquema FRW han mostrado como las observaciones de supernovas parecen violar todas las condiciones de energía, no sólo a pequeños corrimientos al rojo, sino también a altos, donde se cree que el universo es dominado por campos de materia común [37]. La ecuación (1.26) y la desigualdad (1.42) constriñen el factor de escala en un universo dominado por energía oscura a

$$a(t) > a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{6.66}. \quad (1.43)$$

Vemos que para $w < -1$ la ecuación (1.23) implica que la densidad de energía crece con la expansión. Además, en este caso la ecuación (1.26) describe un universo en contracción. Sin embargo existe otra solución de expansión [17],

$$a(t) = (t_s - t)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.44)$$

donde t_s es constante. Esta solución describe un universo superinflacionario donde H y R crecen hasta infinito en un tiempo finito cuando $t \rightarrow t_s$. Esta situación es conocida como *Big Rip*.

1.7. Quintaesencia

El modelo básico de quintaesencia, introducido por Caldwell et al. en [6], es el de un campo escalar ϕ , función de la variedad del espacio-tiempo en los números reales, evolucionando lentamente bajo un potencial $V(\phi)$ y muy homogéneo localmente. Su dinámica está determinada por el lagrangiano

$$L_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi). \quad (1.45)$$

Induce entonces un tensor de energía momento, $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$, al hacer las variaciones de la acción $S_\phi = \int L_\phi \sqrt{-g} d^4x$ respecto a $g^{\mu\nu}$; ver ecuaciones (1.9) y (1.10).

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \delta \int -\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 2V(\phi))\sqrt{-g}d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int [\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda} - g_{\mu\nu}V(\phi)]\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x \end{aligned}$$

donde se usó la relación

⁴Para un universo plano la restricción en w es más estrecha; ver ecuación (1.37)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

que puede encontrarse en prácticamente cualquier texto de RG (e.g. [3]). Tenemos entonces

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda} - g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (1.47)$$

La densidad de energía y la presión se obtienen asociando $\rho_\phi = T_{00}^{(\phi)}$ y $p_\phi = T_{ii}^{(\phi)}$, respectivamente [13]. Para ρ_ϕ ,

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= T_{00}^{(\phi)} = \phi_{,0}\phi_{,0} - \frac{1}{2}g_{00}\phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda} - g_{00}V(\phi) \\ &= \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(g^{00}\phi_{,0}\phi_{,0} + g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}) + V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2}\sum_{i=j}\phi_{,i}\phi_{,j} + V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2a^2} + V(\phi). \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene para p_ϕ

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{6a^2} - V(\phi).$$

Para un campo escalar homogéneo tenemos en un primer orden, $\phi(x^\alpha) = \phi^{(0)}(t) + \delta\phi(x^\alpha)$, y el término $(\vec{\nabla}\phi)^2$ es cero, concluyendo que

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \end{aligned} \quad (1.48)$$

son la densidad de energía y la presión asociadas con quintaesencia. Sustituyendo en (1.19) la ecuación de conservación es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (1.49)$$

Nótese en esta ecuación cómo la expansión ($H > 0$) amortigua la evolución del campo escalar. Las ecuaciones de campo de Einstein con quintaesencia quedan

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}) = T_{\mu\nu}^{(t)}. \quad (1.50)$$

De (1.21) vemos que para obtener aceleración positiva (q negativa) necesitamos

$$p_t < -\frac{\rho_t}{3} < 0.$$

De alguna manera la contribución a p_t de quintaesencia debe hacer cumplir la ecuación anterior. Esto puede ser obtenido con una ecuación de estado del tipo de (1.7) con un parámetro

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} < -\frac{1}{3}, \quad (1.51)$$

lo que se cumple siempre que $V(\phi) > \dot{\phi}^2$, y es plausible bajo la condición de que el campo evolucione lentamente.

Es quintaesencia entonces una componente variable en el tiempo caracterizada por una presión negativa constreñida por

$$-1 \leq w_\phi < -\frac{1}{3},$$

y en el límite $w_\phi = -1$, $\dot{\phi} = 0$, recuperamos la constante cosmológica.

Podemos escribir la restricción observacional (1.37) como $-1,06 < w < 0,9$. De donde vemos que los modelos de quintaesencia encajan bien en el rango permitido por las observaciones.

Las ecuaciones de Friedmann para un universo dominado por quintaesencia, despreciando contribuciones de materia, son

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_\phi}{3} = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (1.52)$$

y

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_\phi + p_\phi) = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (1.53)$$

Se pueden combinar estas ecuaciones para obtener el potencial y la variable de campo en términos de H y \dot{H} ,

$$V(H, \dot{H}) = \frac{3H^2}{8\pi G} \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right). \quad (1.54)$$

$$\phi(\dot{H}) = \int \left(-\frac{\dot{H}}{4\pi G} \right)^{1/2} dt. \quad (1.55)$$

Así, supongamos que queremos un factor de escala del tipo ley de potencia

$$a(t) \propto t^\alpha \quad (\alpha > 1), \quad (1.56)$$

$\dot{a} \propto \alpha t^{\alpha-1}$, $H = \alpha t^{-1}$ y $\dot{H} = -\alpha t^{-2}$. Integrando (1.55) se tiene

$$t \propto \exp \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{\alpha}} \phi \right), \quad (1.57)$$

y sustituyendo estos resultados en (1.54) obtenemos el potencial que deriva en una ley de potencia para el factor de escala

$$V(\phi) \propto \exp\left(-\sqrt{\frac{16\pi G}{\alpha}}\phi\right). \quad (1.58)$$

De la ecuación (1.26) vemos como el potencial anterior, que deriva en el factor de escala $a(t) \propto t^\alpha$, produce una ecuación de estado con

$$w = \frac{2}{3\alpha} - 1. \quad (1.59)$$

Otros ejemplos de potenciales útiles para obtener quintaesencia son [8, 9]

$$\begin{aligned} V(\phi) &\propto \phi^{-\alpha}, & V(\phi) &\propto \exp\frac{1}{\phi}, \\ V(\phi) &\propto \frac{\sqrt{p-1}}{p^2}, & \text{con } p &= \exp(\beta\phi), \end{aligned} \quad (1.60)$$

donde α y β son constantes.

Capítulo 2

Teorías $f(R)$

2.1. Alternativas a RG

Los modelos de energía oscura se basan en alguna modificación al lado derecho de las ecuaciones de campo de Einstein, o en el caso más simple en una constante cosmológica diferente de cero. Suponen entonces la validez de RG e invocan algún fluido de propiedades exóticas que ajuste las observaciones. Tenemos para energía oscura (EO),

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(EO)}).$$

Sin embargo, históricamente se ha planteado como posibilidad que la parte geométrica de la ecuación de Einstein esté mal, que deba ser sustituida por alguna ecuación más general,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

después de todo RG surge de la suposición de que las ecuaciones de campo deben ser de segundo orden en la métrica y de los principios de equivalencia. Además, por supuesto, es acompañada de un notable éxito observacional¹. Pero esto no implica que no podamos recurrir a teorías alternativas a RG que nos expliquen fenómenos como la expansión acelerada del universo sin la necesidad de recurrir a conceptos extraños como el de energía oscura.

La existencia de soluciones con singularidades en la curvatura, como son el Big Bang y los hoyos negros, donde RG ya no es aplicable, pone en evidencia las limitaciones intrínsecas de esta teoría. Éstas han sido consideradas indicadores de que la teoría debe ser reemplazada, a muy altas energías, por una teoría más completa, generalmente identificada como *Teoría Cuántica de la Gravedad*. Numerosos intentos de cuantizar la gravedad han mostrado que alguna modificación de la acción estándar de RG debe ser hecha [46], como la introducción de un término adicional R^2 .

¹Sin embargo, gran parte de este éxito es atribuido más al principio de equivalencia que a RG [48].

Tenemos entonces problemas en RG tanto a altas como a bajas energías. Puede ser que la inexistencia de una teoría aceptable de gravedad cuántica así como la falta de una explicación simple de las observaciones cosmológicas a bajas energías, donde la gravedad debería comportarse esencialmente de manera clásica, sean debidas al uso de una teoría incorrecta de gravedad.

Desde los primeros años de la teoría se han hecho intentos de generalizar la RG. Existen muchos ejemplos de ello: teorías escalares tensoriales [20], donde la constante G es reemplazada por un campo escalar dinámico, teorías de velocidad de la luz variable [31], o teorías donde la gravedad es modelada en presencia de dimensiones extra, muchas de éstas conocidas como Mundos Brana [18], entre otras. Incluso se ha tomado en consideración la idea de que no existen leyes exactas de la física, sino que los lagrangianos de las interacciones son funciones estocásticas con la propiedad de que las leyes de conservación son bien aproximadas en los límites de bajas energías [30].

De hecho, la forma de la acción gravitacional ha sido una de las características más cuestionadas de la RG, ya que la acción de Hilbert-Einstein,

$$S_{EH} [g_{\mu\nu}(x)] = \int L_H \sqrt{-g} d^4x = \int \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.2)$$

es justificada más por un criterio de simplicidad que por principios fundamentales. El principio de equivalencia obliga a que las ecuaciones de campo que rigen la geometría del espacio-tiempo sean tensoriales, en el sentido de ser invariantes ante transformaciones de coordenadas; la única manera de obtener esto a partir de un principio variacional es que el lagrangiano sea un escalar de la geometría de la variedad, es decir, un escalar del tensor de Riemann. R es el escalar más simple que puede ser formado a partir del tensor de Riemann; más aún, es (casi) el único del que se pueden obtener ecuaciones de segundo orden en la métrica. Es de esperarse entonces que el lagrangiano que modela la parte geométrica de las ecuaciones de campo dependa de él. Pero qué hay de otros escalares formados a partir del tensor de Riemann, como $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R \square^n R$, etc., o incluso de funciones de R como R^2 o $1/R$. También se ha investigado la introducción de un escalar $R^2 - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ llamado invariante de Gauss-Bonnet, con la particularidad que de él también se obtienen ecuaciones de segundo orden en la métrica. Estos escalares pueden contener información relevante de la variedad, en cuyo caso tienen un similar derecho de estar en el lagrangiano.

Desde un punto de vista puramente fenomenológico, uno bien podría reemplazar el escalar de curvatura en la acción de Hilbert-Einstein por alguna función $f(R)$ de él, que en principio pueda ser expandible en series de potencias,

$$f(R) = \cdots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} + \cdots,$$

donde los coeficientes α_i y β_i son constantes fenomenológicas con las dimensiones apropiadas. De esta manera la acción de teorías $f(R)$ de gravedad toma

la forma

$$S[g_{\mu\nu}(x)] = \int \sqrt{-g} f(R) d^4x. \quad (2.3)$$

Algunos escenarios de inflación en el universo temprano están basados en estas teorías; por ejemplo, en [44] usan el lagrangiano $f(R) = R + aR^2$, donde el término cuadrático es responsable de la aceleración cósmica.

Las correcciones al lagrangiano de RG que incorporan R grandes son llamadas ultravioletas y las de R pequeñas infrarrojas. Así, dado que $R \sim 1/t^2$, las correcciones actuales son tipo infrarrojo.

2.2. Ecuaciones de campo en teorías $f(R)$

Se quieren encontrar las soluciones al problema $\delta S = 0$,

$$\delta S = S[g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}] - S[g^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.4)$$

Haciendo las variaciones en la integral,

$$\delta S = \int d^4x [\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} f'(R) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + f(R) \delta \sqrt{-g}], \quad (2.5)$$

con $f' = df/dR$. Solamente el segundo término de esta integral está en términos de las variaciones de la métrica, falta ahora poner los restantes respecto a ésta. La variación $\delta \sqrt{-g}$ está dada por (1.46). La dificultad radica en el término $\delta R_{\mu\nu}$, una manera de resolverla es poner el tensor de Ricci en términos de la métrica y luego efectuar la variación; sin embargo, resulta menos tedioso encontrar primero la variación de la conexión en términos de las variaciones de la métrica, para luego insertar este resultado en la variación del tensor de Ricci con respecto a las variaciones de la conexión. Comenzamos entonces considerando las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \delta g_{\rho\nu} &= \delta g_{\rho\nu,\lambda} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta g_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} \delta g_{\nu\sigma}, \\ \nabla_\nu \delta g_{\rho\lambda} &= \delta g_{\rho\lambda,\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \delta g_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta g_{\rho\sigma}, \\ \nabla_\rho \delta g_{\nu\lambda} &= \delta g_{\nu\lambda,\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} \delta g_{\nu\sigma} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \delta g_{\sigma\lambda}. \end{aligned}$$

Ahora, sumando y contrayendo,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\nabla_\lambda \delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho \delta g_{\nu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\delta g_{\rho\nu,\lambda} + \delta g_{\rho\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\rho} - 2\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta g_{\rho\sigma}) \\ &= g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\rho\nu\lambda} - g^{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \delta g_{\rho\sigma} \\ &= g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\rho\nu\lambda} + g_{\rho\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \delta g^{\mu\rho} \\ &= g^{\mu\rho} \delta \Gamma_{\rho\nu\lambda} + \Gamma_{\rho\nu\lambda} \delta g^{\mu\rho} = \delta(g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\nu\lambda}), \end{aligned}$$

obtenemos para $\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$:

$$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\nabla_\lambda\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\rho\delta g_{\nu\lambda}). \quad (2.6)$$

El tensor de Ricci en términos de las conexiones es

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}, \quad (2.7)$$

y haciendo las variaciones

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \\ &\quad + \delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\rho} - \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para ver $\delta R_{\mu\nu}$ en términos de $\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ consideramos las derivadas

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\rho\nu}, \\ \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} &= \partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\rho\mu}. \end{aligned}$$

Comparando con la ecuación (2.8) se tiene

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}, \quad (2.9)$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}), \quad (2.10)$$

e insertando la ecuación (2.6) en este resultado

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\lambda[g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu})] \\ &\quad - \nabla_\nu[g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_\lambda\delta g_{\rho\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\lambda\mu})] \\ &= \frac{1}{2}\nabla^\rho[\nabla^\nu\delta g_{\rho\nu} + \nabla^\mu\delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho\delta g^\mu_\mu] \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla^\mu[\nabla^\rho\delta g_{\rho\mu} + \nabla_\mu\delta g^\rho_\rho - \nabla^\lambda\delta g_{\lambda\mu}] \\ &= \frac{1}{2}\nabla^\rho\nabla^\nu\delta g_{\rho\nu} + \frac{1}{2}\nabla^\rho\nabla^\mu\delta g_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\nabla^\rho\nabla_\rho\delta g^\mu_\mu \\ &\quad - \frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla^\rho\delta g_{\rho\mu} - \frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla_\mu\delta g^\rho_\rho + \frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla^\lambda\delta g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla^\mu\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} - \nabla^\rho\nabla_\rho\delta g^\mu_\mu. \end{aligned}$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = [\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho]\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Tenemos entonces ya todos los términos de (2.5) como variaciones de $\delta g^{\mu\nu}$, sustituyendo,

$$\delta S = \int \sqrt{-g} d^4x [f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + f'(R)(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho)]\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Aquí es necesario integrar por partes, ya que el último término considera derivadas de la variación $\delta g^{\mu\nu}$. Sabemos que ésta es cero en la frontera, la cual en principio podemos ponerla al infinito; sin embargo, sus derivadas no tienen esta restricción. Entonces, al efectuar la integración no podemos deshacernos de estos términos de frontera. Podemos evitarlos si desde un principio se los añadimos al lagrangiano (e.g. Apéndice E.1 Wald) o usando la formulación de Palatini, en la que $g^{\mu\nu}$ y $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ representan variables independientes. En adelante estos términos los consideramos cero tomando en cuenta que pueden ser eliminados con un análisis más detallado. Integrando por partes,

$$\int \sqrt{-g} d^4x [f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R)]\delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.13)$$

Como esto es válido para variaciones arbitrarias de la métrica, obtenemos las ecuaciones de campo en el vacío,

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = 0. \quad (2.14)$$

Éste es un sistema de ecuaciones parciales acopladas no lineales de cuarto orden en la métrica. Para construir una acción cuyas variaciones lleven a ecuaciones de segundo orden, necesitamos encontrar un escalar que dependa de la métrica y de sus primeras derivadas solamente; desafortunadamente éste no existe, ya que $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$, y entonces uno se ve obligado a ir a derivadas más altas y obtiene ecuaciones de cuarto orden. Lo que sucede con la acción de Einstein-Hilbert en RG es que los términos que incluyen derivadas más altas pueden ser colectados en una divergencia total y ser tratados como términos de frontera. Esto también puede ser observado directamente de la ecuación (2.14), si $f(R) = R$, tenemos $f'(R) = 1$ y la parte que incluye las derivadas de alto orden es cero. Aquí podemos plantear la pregunta de qué queda fijo al efectuar las variaciones; en un sistema convencional sólo deben ser fijadas en la frontera las variables del lagrangiano, pero parte de que éste es de primer orden. En gravitación tenemos lagrangianos de segundo orden, es posible que podamos usar condiciones de frontera más restrictivas, como las condiciones de Neumann usadas en mecánica cuántica, donde no sólo las variables sino también sus derivadas son fijadas en la frontera [33]. De esta manera evitaríamos la necesidad de añadir términos de frontera adicionales a la acción gravitacional.

Las ecuaciones completas se obtienen añadiendo el lagrangiano de materia al lagrangiano de curvatura. Éste dependerá de la naturaleza del fenómeno particular; por ejemplo, para un campo electromagnético es $L_{EM} = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$,

con $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$, o para un campo escalar ϕ tenemos $L_\phi = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi)$. Entonces la acción completa de materia y curvatura es

$$S = \frac{1}{2\kappa}S_c + S_M, \quad (2.15)$$

donde el factor κ es una constante de acoplamiento necesaria dimensionalmente y se ajusta para obtener el límite newtoniano correcto. Nótese que el principio de equivalencia débil dice que todos los campos de materia deben acoplarse de la misma manera a RG, por lo que es conveniente poner el factor $\frac{1}{2\kappa}$ delante de la acción de curvatura. Con esto las ecuaciones de campo para teorías $f(R)$ son

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Es inmediato que si $f(R) = R$ se recuperan las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

Definimos

$$\tilde{G}_{\mu\nu} := f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + (g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'(R), \quad (2.17)$$

con lo que se obtiene la ecuación (2.1). Es deseable que este nuevo tensor sea covariantemente conservado, es decir, que $\nabla^\mu\tilde{G}_{\mu\nu} = 0$; para demostrar que esto sucede primero tomamos

$$\begin{aligned} \nabla^\mu[(g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla_\sigma - \nabla_\mu\nabla_\nu)f'] &= (\nabla_\nu\nabla^\sigma\nabla_\sigma - \nabla^\sigma\nabla_\sigma\nabla_\nu)f' \\ &= [\nabla_\nu, \nabla_\sigma\nabla^\sigma]f' = [\nabla_\nu, \nabla_\sigma]\nabla^\sigma f' + \nabla^\sigma[\nabla_\nu, \nabla_\sigma]f' \\ &= R^\sigma{}_{\rho\nu\sigma}\nabla^\rho f' = -R^\sigma{}_{\rho\sigma\nu}\nabla^\rho f' \\ &= -R_{\mu\nu}\nabla^\mu f', \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \nabla^\mu\tilde{G}_{\mu\nu} &= \nabla^\mu(f'R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu f - R_{\mu\nu}\nabla^\mu f' \\ &= f'\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'\nabla^\mu R = f'\nabla^\mu G_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

pero tenemos que el tensor $G_{\mu\nu}$ por construcción es localmente conservado. Llegando así a

$$\nabla^\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Aunque aquí fue derivado explícitamente, este resultado es consecuencia de que el lagrangiano $f(R)$ es un invariante ante transformaciones de coordenadas. Esta simetría es no dinámica² y produce la identidad matemática de covariancia generalizada. En el apéndice A de [29] se puede encontrar una derivación para funciones no sólo dependientes de R sino también de cualquier otro escalar proveniente del tensor de Riemann. A esto se le llama *identidades generalizadas de Bianchi*.

Sacando la traza de la ecuación (2.16) se obtiene

$$3\Box f'(R) + Rf'(R) - 2f(R) = \kappa T, \quad (2.19)$$

mientras la traza de las ecuaciones de Einstein es $R = -\kappa T$. Esta diferencia es sustancial, la ecuación (2.19) es una ley dinámica del escalar de curvatura, más precisamente de la función $f'(R)$, mientras su contraparte en RG es una ley algebraica. Sucede que ha sido introducido un nuevo grado de libertad dinámico al cambiar el lagrangiano $R \rightarrow f(R)$.

Soluciones de curvatura constante

En una teoría métrica de gravitación las interacciones gravitacionales se manifiestan en la curvatura del espacio-tiempo. Es de esperarse que en la ausencia de tales interacciones el espacio-tiempo sea plano, o al menos que su curvatura sea constante. Queremos encontrar las soluciones de la ecuación (2.16) que tengan $\nabla_\mu R = 0$ y $T_{\mu\nu} = 0$. Sacando la traza se obtiene

$$f'(R)R = 2f(R), \quad (2.20)$$

que en general es una ecuación algebraica de R . Por el momento supongamos que una de las soluciones es R_0 . Si $R_0 = 0$ tenemos que el espacio de Minkowski es la solución de curvatura constante como sucede en RG; si $R_0 > 0$ obtenemos el espacio *de Sitter* (dS) como solución; y si $R_0 < 0$ obtenemos el espacio *Anti de Sitter* (AdS).

Para estos espacios, el Teorema de Schur [28] nos dice que la curvatura seccional K y el escalar de Ricci están relacionados por $K = R/12$. Podemos entonces ver el espacio de Sitter como el hiperboloide $-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ inmerso en un espacio plano de 5 dimensiones con la métrica $ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Es útil introducir la parametrización $v = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh t$, $w = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh t$, $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$ y $z = r \cos \theta$, con lo que se obtiene la métrica del espacio dS en coordenadas *estáticas*,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

²Por simetría no dinámica nos referimos a alguna simetría del lagrangiano independientemente de si a éste se le haya aplicado un principio variacional [1].

con $\alpha^2 = 1/K$. Vemos que este espacio tiene una singularidad en $r = \alpha$. De manera similar se encuentra la métrica del espacio AdS, en coordenadas estáticas,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.22)$$

2.3. Ecuaciones de Friedmann para teorías $f(R)$

Tomando la métrica FRW plana encontraremos las ecuaciones de Friedmann para teorías $f(R)$.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2,$$

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] = 6(\dot{H} + 2H^2), \quad (2.23)$$

con R función sólo del tiempo.

Componente tiempo-tiempo

Tenemos $R_{00} = -3\ddot{a}/a = -3(\dot{H} + H^2)$, $g_{00} = -1$ y $\sqrt{-g} = a^3$. Además $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)$.

$$\begin{aligned} g_{00} \nabla^\alpha \nabla_\alpha f' &= -a^{-3} \partial_\mu (a^3 g^{\mu\nu} \partial_\nu f') = -a^{-3} \partial_0 (a^3 g^{00} \partial_0 f') \\ &= a^{-3} \partial_0 (a^3 \partial_0 f') = 3H \partial_0 f' + \partial_0 \partial_0 f', \end{aligned}$$

y

$$\nabla_0 \nabla_0 f' = \partial_0 \partial_0 f' - \Gamma^\sigma_{00} \partial_\sigma f' = \partial_0 \partial_0 f',$$

entonces

$$\begin{aligned} (g_{00} \nabla^\alpha \nabla_\alpha - \nabla_0 \nabla_0) f' &= 3H \partial_0 f' = 3H f'' \partial_0 R \\ &= 18(\ddot{H} H + 4\dot{H} H^2) f''. \end{aligned}$$

Juntando estos resultados en la ecuación (2.16) y considerando un fluido perfecto, tenemos que

$$\frac{1}{2} f - 3(\dot{H} + H^2) f' + 18(\ddot{H} H + 4\dot{H} H^2) f'' = \kappa \rho \quad (2.24)$$

es la primera ecuación de Friedmann para teorías $f(R)$.

Componente espacio-espacio

Todas las componentes ii dan el mismo resultado debido a la isotropía de la métrica considerada. Así, tomando sólo la componente 11: tenemos aquí $g_{11} = a^2$, $R_{11} = (\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2})a^2$. Entonces (2.16) implica

$$(\dot{H} + 3H^2) a^2 f' - \frac{1}{2} a^2 f + a^2 \nabla^\alpha \nabla_\alpha f' - \nabla_1 \nabla_1 f' = \kappa a^2 p,$$

como f sólo depende del tiempo, $\nabla_1 \nabla_1 f' = \partial_1 \partial_1 f' - \Gamma^0_{11} \partial_0 f' = -\Gamma^0_{11} \partial_0 f' = -a^2 H f'$. Además, $\nabla^\alpha \nabla_\alpha f' = -3H \partial_0 f' - \partial_0 \partial_0 f'$, obteniendo la segunda ecuación de Friedmann

$$(\dot{H} + 3H^2) f' - \frac{1}{2} f - 2H \partial_0 f' - \partial_0 \partial_0 f' = \kappa p. \quad (2.25)$$

A estas dos ecuaciones de Friedmann se les añade la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0.$$

2.4. Modelo CDTT

En [7] S. Capozziello reportó que un término $1/R$ es capaz de provocar un crecimiento acelerado en el factor de escala cósmica. En [9] S. Carroll et al. analizaron con más detalle el modelo

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}, \quad (2.26)$$

con μ un parámetro con unidades de masa. Comúnmente este modelo es conocido como modelo $1/R$, modelo de Carroll o modelo CDTT (Carroll, Duvvuri, Trodden, Turner). Típicamente el término geométrico R va como $\propto 1/t^2$ y el término adicional $1/R$ va como $\propto t^2$. Entonces, la época en que éste empieza a dominar la curvatura (t_q) sucede cuando $R \sim \frac{\mu^4}{R}$, o $R \sim \mu^2$. La ecuación $a(t)$ sufre un cambio de concavidad en su gráfica, es decir $\ddot{a}(t \sim t_q) = 0$, y entonces $\mu^2 \sim H_q^2$. Para corrimientos pequeños ($z \simeq 1$) se espera que el valor de H se mantenga del mismo orden. Esperamos entonces algún valor $\mu \sim H_0 \sim 10^{-33} eV$.

Las soluciones de curvatura constante son, usando (2.20), $R = \pm\sqrt{3}\mu^2$, los espacios de Sitter y Anti de Sitter. Insertando el resultado positivo en (2.16) tenemos para curvatura constante en el vacío,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{3}\mu^2}{4} g_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Esto es equivalente a un espacio-tiempo de Einstein con $\Lambda = \frac{\sqrt{3}\mu^2}{4}$. Los elementos de línea para un universo plano de Sitter en coordenadas comóviles y en coordenadas estáticas, ecuación (2.21), son

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(d\mathbf{x})^2, \quad (2.28)$$

$$ds^2 = - (1 - H^2 r^2) dt^2 + (1 - H^2 r^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.29)$$

con $H^2 = \frac{\sqrt{3}\mu^2}{12}$. En la sección 3.3 mostraremos que estas soluciones son inestables.

Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann para este modelo se obtienen a continuación.

Tenemos $f' = 1 + \frac{\mu^4}{R^2}$, $f'' = -\frac{2\mu^4}{R^3}$. $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$, $R^2 = 36(\dot{H} + 2H^2)^2$, $R^3 = 18 \cdot 12(\dot{H} + 2H^2)^3$. Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(R - \frac{\mu^4}{R}\right) &= 3(\dot{H} + 2H^2) - \frac{\mu^4(\dot{H} + 2H^2)^2}{12(\dot{H} + 2H^2)^3}, \\ -3(\dot{H} + H^2)f' &= -3(\dot{H} + H^2) \left(1 + \frac{\mu^4}{36(\dot{H} + 2H^2)^2}\right), \\ &= -3\dot{H} - 3H^2 - \frac{\mu^4(\dot{H} + 2H^2)}{12(\dot{H} + 2H^2)^3}, \\ 18(\ddot{H}H + 4\dot{H}H^2)f'' &= -\frac{2\mu^4(\ddot{H}H + 4\dot{H}H^2)}{12(\dot{H} + 2H^2)^3}. \end{aligned}$$

La suma de estas tres ecuaciones es la primera ecuación de Friedmann (2.24) de este modelo:

$$3H^2 - \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)^3} \{2\ddot{H}H + 2\dot{H}^2 + 15\dot{H}H^2 + 6H^4\} = \kappa \rho. \quad (2.30)$$

Para obtener la segunda ecuación consideremos las relaciones

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f &= -3(\dot{H} + 2H^2) + \frac{\mu^4}{12(\dot{H} + 2H^2)}, \\ (\dot{H} + 3H^2)f' &= (\dot{H} + 3H^2) \left(1 + \frac{\mu^4}{36(\dot{H} + 2H^2)^2}\right), \\ &= \dot{H} + 3H^2 + \frac{\mu^4(\dot{H} + 3H^2)}{36(\dot{H} + 2H^2)^2}, \\ -2H\partial_0 f' &= -2H\mu^4\partial_0 \left(\frac{1}{R^2}\right), \\ -\partial_0\partial_0 f' &= -\mu^4\partial_0\partial_0 \left(\frac{1}{R^2}\right). \end{aligned}$$

Sumando estas contribuciones y multiplicando por $-1/2$ obtenemos la segunda ecuación de Friedmann (2.25) de este modelo:

$$\dot{H} + \frac{2}{3}H^2 - \frac{\mu^4}{72(\dot{H} + 2H^2)^2} \left[4\dot{H} + 9H^2 - 2HR^2\partial_0 \left(\frac{1}{R^2} \right) - R^2\partial_0\partial_0 \left(\frac{1}{R^2} \right) \right] = -\frac{\kappa}{2}p \quad (2.31)$$

Análisis de las ecuaciones de Friedmann

Si bien estas ecuaciones lucen bastante complicadas, en principio pueden ser integradas numéricamente. Dado que son ecuaciones de cuarto orden en a , debemos entonces especificar las condiciones iniciales a_q , \dot{a}_q , \ddot{a}_q y \dddot{a}_q , datos no disponibles al momento. Fijémonos en la primera ecuación de Friedmann (2.30), ésta es de segundo orden en H , pero tiene el término ρ que típicamente introduce al factor de escala, lo que obliga a ver la ecuación (2.30) como una de tercer orden en $a(t)$. En la época de transición, t_q , la densidad de energía es dominada por la materia, $\rho \propto 1/a^3$, en la gravitación de Einstein esto implica que $\rho \propto 1/t^2$. Si bien aquí la gravitación es distinta, intuitivamente esperamos que en la época de transición el valor sea similar y que en general $\rho \propto 1/t^\alpha$, con $\alpha \geq 2$. Usaremos $\rho \propto 1/t^2$ para integrar las ecuaciones. Falta especificar las condiciones iniciales H_q y \dot{H}_q , éstas son simplemente $H_q = \mu$ y $\dot{H}_q = -\mu^2$, según vimos en el análisis posterior a la ecuación (2.26). De esta manera, usando *Mathematica 5.0*, se grafican H^2 y $-\dot{H}$. Vemos que a partir de t_q , $H^2 > -\dot{H}$, lo que implica una aceleración positiva, $\ddot{a} > 0$; ver figura 2.1.

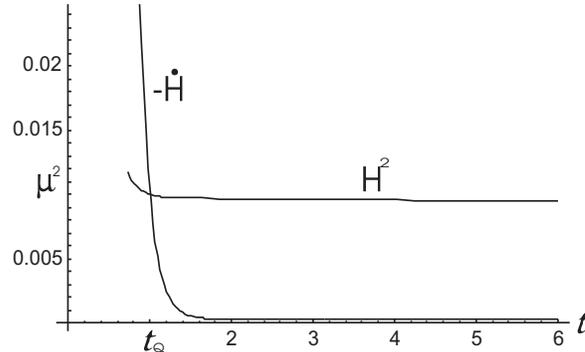


Figura 2.1: En el modelo de Carroll a partir de cierto tiempo t_q se cumple $H^2 > -\dot{H}$, por lo que $\ddot{a}(t > t_q) > 0$.

Este desarrollo nos da un análisis cualitativo de las soluciones cosmológicas del modelo CDTT, pero no nos proporciona soluciones analíticas, si es que existen. Podemos extraer más información estudiando el comportamiento asintótico de (2.30). Vemos que en épocas $t \gg t_q$ sólo el término que contiene a μ^4 prevalece; considerando también $\rho = 0$, la ecuación se reduce a

$$2\ddot{H}H + 2\dot{H}^2 + 15\dot{H}H^2 + 6H^4 = 0. \quad (2.32)$$

Proponemos el ansatz $a(t) \propto t^\alpha$, con lo que se obtiene que α cumple

$$\alpha^2(2\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0. \quad (2.33)$$

Es sencillo, pero requiere algunas páginas de álgebra, verificar que de la ecuación (2.31) se obtienen las mismas raíces.

La primera raíz, $\alpha = 0$, implica que $a(t) = \text{cte.}$ que no se observa, pero puede entrar en la solución general. La segunda es $\alpha = 1/2$; ésta es rápidamente desechada ya que el modelo CDTT es en sí singular para esta solución. Entonces la solución asintótica es

$$a(t) \propto t^2. \quad (2.34)$$

Esto es equivalente a un fluido de energía oscura con

$$w_{ef} = -\frac{2}{3},$$

al que las observaciones no favorecen; ver ecuación (1.42).

En [10] Carrol et al. hacen un análisis del espacio fase de (2.30); concluyen que (2.34) es un atractor y que la solución de Sitter es inestable. Esto último lo demostraremos en el capítulo 3.

Modelo CDTT generalizado

Dado que las correcciones $1/R$ no concuerdan con los resultados observacionales, se propuso un modelo generalizado [9],

$$f(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n} \quad (2.35)$$

En vez de encontrar explícitamente las ecuaciones de Friedmann para este modelo, propondremos nuevamente un ansatz. Del desarrollo que conduce a (2.24) tenemos

$$\frac{1}{2}f(R) - 3\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + 3\frac{\dot{a}}{a}\partial_0 f'(R) = \kappa\rho.$$

A tiempos tardíos el término dominante en $f(R)$ es R^{-n} y hacemos $\rho = 0$. Proponemos el ansatz $a(t) \propto t^\alpha$ y usando (2.23) se tiene

$$R = \frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{t^2},$$

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{t^2}\right) - 3\frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2}f'\left(\frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{t^2}\right) - 36\frac{\alpha^2(2\alpha - 1)}{t^4}\partial_0 f'\left(\frac{6\alpha(2\alpha - 1)}{t^2}\right) = 0.$$

Desarrollando el álgebra se tiene la solución asintótica

$$a(t) = t^q, \quad q = \frac{(2n+1)(n+1)}{n+2}, \quad (2.36)$$

equivalente a un fluido de energía oscura con

$$w_{ef} = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)}, \quad (2.37)$$

que claramente es posible ajustar a las observaciones.

Capítulo 3

Teorías $f(R)$ y campos escalares

La validez del principio de equivalencia débil implica que todas las partículas y los campos no gravitacionales responden de la misma manera al campo gravitacional. Implica también que éste debe ser expresado con un tensor de grado 2, la métrica \mathbf{g} , y existen observadores para los cuales ésta puede ser llevada localmente a la métrica de Minkowski. También el principio de equivalencia débil permite la posibilidad de que la gravitación esté descrita con campos adicionales no geométricos, como campos escalares o campos vectoriales [48]. En una teoría métrica de gravitación la materia y los campos no gravitacionales responden solamente a la métrica del espacio-tiempo \mathbf{g} , mientras los campos adicionales tienen el papel de mediar la manera en que la materia genera a la métrica.

En el capítulo 1 encontramos el campo escalar de quintaesencia. Éste no es una modificación a RG, sino una nueva contribución de energía acoplada a RG a través de la métrica de la misma manera en que lo hacen todos los campos no gravitacionales según el principio de equivalencia. Se dice que un campo como éste es mínimamente acoplado a RG. En este capítulo mostramos alternativas a RG con campos escalares no mínimamente acoplados y sus posibles conexiones con las teorías $f(R)$.

3.1. Teorías escalares-tensoriales

Si escribimos $R_0 = 1/H_0$ como la longitud característica del universo y $M_0 = 4\pi\rho_0 R_0^3/3$ su masa característica, una aparente coincidencia aparece en la naturaleza,

$$\frac{1}{G} \sim \frac{M_0}{R_0}. \quad (3.1)$$

Esto sólo sucede actualmente, si nos remontamos al universo temprano o extrapolamos a un futuro esta igualdad fallaría por muchos órdenes de magnitud. C. Brans y R. Dicke [4] interpretaron esto como una manifestación del principio de Mach, al cual Dicke le dio su propia forma [5]: ‘*La constante gravitacional, G , debe ser una función de la distribución de masa en el universo*’.

Guiados por (3.1) postularon que el inverso de la constante gravitacional es una variable de campo ϕ que satisface alguna ecuación de campo proveniente de un lagrangiano L_ϕ . El lagrangiano más simple sólo contiene un término cinético $L_\phi = -w g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}$, lo que resultaría en una ecuación de onda para ϕ . Sin embargo, esta constante de acoplamiento w tiene las dimensiones de G , la constante que desde un principio se quería evitar. La manera más simple de poner una constante de acoplamiento adimensional es hacer el lagrangiano

$$L_\phi = -\frac{w}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} . \quad (3.2)$$

De esta forma del lagrangiano deviene la acción de Brans-Dicke,

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - \frac{w}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + 16\pi L_m), \quad (3.3)$$

de donde se obtienen las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{w}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\sigma} \phi_{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (3.4)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi T^{(m)}}{2w + 3} . \quad (3.5)$$

Dado que la gravedad es aquí descrita por un campo escalar además de la métrica, la teoría de Brans-Dicke es una teoría escalar tensorial. De (3.5) parece que si $w \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow \text{cte.}$ y de (3.4) obtenemos las ecuaciones de Einstein de RG. De hecho esto es cierto y se puede demostrar fácilmente [32]. Las estimaciones actuales para el parámetro de Brans-Dicke son $w > 3500$ [49], así las desviaciones locales a RG son muy pequeñas para ser notadas localmente, pero bien pueden permitir una influencia cosmológica.

Una generalización a la acción de Brans-Dicke es agregar un potencial de auto-interacción del campo escalar y permitir que el parámetro de Brans-Dicke sea una función (adimensional) de ϕ . A estas teorías se les llama genéricamente gravedad-escalar-tensorial (STG, por sus siglas en inglés) y su acción es la siguiente,

$$S_{STG} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (\phi R - \frac{w(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi)), \quad (3.6)$$

tenemos como caso particular a Brans-Dicke cuando $w(\phi) = \text{cte}$ y $V(\phi) = 0$. Para fines futuros escribimos las ecuaciones de campo que resultan con $w(\phi) = \text{cte.}$,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{w}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\sigma} \phi_{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{V(\phi)}{\phi}, \quad (3.7)$$

$$(2w + 3)\square\phi = 8\pi T^{(m)} + \phi V_{,\phi} - 2V, \quad (3.8)$$

donde se añadió la contribución de materia que proviene de una acción $S_m(\Psi, g)$ que depende de los campos de materia y de la métrica. Al no permitirle depender del campo escalar ϕ se evita la violación del principio de equivalencia débil [12]. Estas teorías han sido de gran utilidad en cosmología: entre otras cosas han mostrado poder predecir la aceleración actual del universo [12].

STG se basa entonces en una constante gravitacional variable dependiente de toda la materia en el universo. Veamos las ecuaciones de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$. Si permitimos que G simplemente sea variable nos encontramos con un problema de consistencia si queremos que el tensor de energía momento y su divergencia cero retengan su forma usual y su significado físico [2]. Es decir, dado que $G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, si queremos que la conservación de energía momento esté expresada como $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, necesariamente G debe ser constante. Es por esto que en STG la variación de G se hace a través de un campo escalar dinámico que contribuye con su propio tensor de energía momento al lado derecho de las ecuaciones de campo. Una alternativa de mínimo cambio a RG sería permitir que $T_{\mu\nu}$ no tenga divergencia cero, con lo que la energía y el momento no serían conservados en su forma usual.

Veamos otra alternativa a RG. Introduciendo la velocidad de la luz c , el lagrangiano de RG es $L_{EH} = \sqrt{-g}R(c^4/16\pi G)$; es posible obtener resultados similares a STG si mantenemos G fija y permitimos variar c . Haciendo el valor de c en el universo temprano mucho más grande que el valor actual se ha mostrado como estas teorías pueden resolver problemas cosmológicos como el valor actual de la constante cosmológica y los de *planitud*, homogeneidad e isotropía del universo sin recurrir a las teorías de inflación [31]. Sin embargo, variar G sólo afecta a RG, mientras que una variación de c afecta casi todas las teorías de la física moderna. Además estas teorías tienen el problema de no ser covariantes [31].

Es posible demostrar que bajo una transformación conforme de la métrica las teorías STG toman la forma de RG [19]. Las variables en que está expresada STG inicialmente son llamadas *marco de Jordan* $\{g_{\mu\nu}, \phi\}$, después de la transformación conforme, llamada *transformación de Dicke*,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\phi}{16\pi} g_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

la acción de STG (3.6) toma la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \left(w(\phi) + \frac{3}{2} \right) \phi^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - 2V(\phi) + \phi^{-2} L_m \right], \quad (3.10)$$

y con la redefinición del escalar

$$d\psi = \left(w(\phi) + \frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{d\phi}{\phi}, \quad (3.11)$$

($w > -3/2$), STG toma la forma de RG con la métrica conforme más un campo escalar mínimamente acoplado [19],

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \tilde{g}^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} - 2V(\psi) + K(\psi)L_m \right]. \quad (3.12)$$

Decimos que ahora nos encontramos en el marco de Einstein, donde tenemos RG, pero las variables son $\{\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi\}$. En la siguiente sección mostramos más claramente cómo se hacen estas transformaciones. La aparición de la función

$$K(\psi) = \exp \left(-2\sqrt{\frac{1}{2w+3}}\psi \right) \quad (3.13)$$

delante del lagrangiano de materia es de esperarse por dos motivos, la constante G es variable y la materia está acoplada a la métrica \mathbf{g} y no a la métrica $\tilde{\mathbf{g}}$.

3.2. Equivalencia matemática entre teorías $f(R)$ y RG

Empecemos con el lagrangiano de teorías $f(R)$,

$$L = \frac{1}{2\kappa} f(R) \sqrt{-g}, \quad (3.14)$$

con $L = L(g)$. Definimos la variable conjugada

$$p := \frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial R} = f'(R). \quad (3.15)$$

Si $f''(R) \neq 0$ la ecuación anterior es invertible y se puede encontrar $r(p) \equiv R(g)$. El *hamiltoniano* asociado es entonces la transformada de Legendre

$$H(p, g) = \frac{1}{2\kappa} [pr(p) - f[r(p)]] \sqrt{-g}.$$

El lagrangiano de Helmholtz se define como la función

$$L_H \equiv \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} pR(g) - H(p, g) = \frac{1}{2\kappa} \{pR(g) - pr(p) + f[r(p)]\} \sqrt{-g}, \quad (3.16)$$

y es dinámicamente equivalente a (3.14). A la obtención de (3.16) a partir de (3.14) se le llama mapeo de Legendre, y no es más que la generalización de un método viejo, y poco usado, de la mecánica clásica [29, 35]. Las ecuaciones de campo son los puntos estacionarios de la acción construida con este lagrangiano variando respecto a las variables $g_{\mu\nu}$ y p .

$$\delta \int (p[R - r] + f) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (3.17)$$

Variando respecto a p :

$$\int ([R - r] - p r' + f' r') \delta p \sqrt{-g} d^4 x = 0$$

con $f' = df/dr$ y $r' = dr/dp$. Como $f' = p$, obtenemos la ecuación

$$R(g) = r(p) \quad (3.18)$$

Variando respecto a $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta \int (pR\sqrt{-g} + (f - pr)\sqrt{-g}) d^4 x = \\ \int \sqrt{-g} d^4 x [p G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + p g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - pr) \delta g^{\mu\nu}] = \\ \int \sqrt{-g} d^4 x [p G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha p - \nabla_\mu \nabla_\nu p) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f - pr)] \delta g^{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

Obteniendo

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{p} \{ \nabla_\mu \nabla_\nu p - g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha p + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (f[r(p)] - pr(p)) \} + \frac{1}{p} T_{\mu\nu}, \quad (3.19)$$

donde se ha agregado la contribución de la materia. Notemos la similitud de esta ecuación con (3.7). Si identificamos $p = \phi$, implica que las teorías $f(R)$ pueden ser vistas como STG pero sin término cinético, $w = 0$, y con potencial $V = pr(p) - f[r(p)]$.

Las ecuaciones (3.18) y (3.19) son entonces las ecuaciones de campo del lagrangiano de Helmholtz. Un sistema de segundo orden en la métrica $g_{\mu\nu}$ y el momento p . De esto se trata justamente el mapeo de Legendre: originalmente teníamos un sistema de cuarto orden en la métrica y ahora tenemos un sistema de segundo orden pero con una variable adicional. Si sustituimos $p = f'(R)$ y $r(p) = R$ en (3.19) recuperamos las ecuaciones de campo para teorías $f(R)$, (2.16), como era de esperarse. El mismo resultado se obtiene si sustituimos $p = f'(R)$ en las ecuaciones de campo originales (2.16) de teorías $f(R)$ y despejamos. Sin embargo, el mapeo de Legendre es necesario si queremos encontrar el lagrangiano dinámicamente equivalente; además nos dice cuándo esto es posible, $f''(R) \neq 0$, a parte de la condición trivial $f'(R) \neq 0$.

A continuación vemos qué sucede haciendo una transformación conforme directamente en el lagrangiano de Helmholtz,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu}, \quad (3.20)$$

ésta se puede hacer siempre que $p = f'(R) > 0$. Se tiene que bajo una transformación conforme el escalar de Ricci se transforma como [19],

$$R = p \tilde{R} + 6p^{-1/2} \square p^{1/2} \quad (3.21)$$

y además

$$g_{\mu\nu} = p^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = p\tilde{g}^{\mu\nu}, \quad g = p^{-4}\tilde{g}, \quad \sqrt{-g} = p^{-2}\sqrt{-\tilde{g}}. \quad (3.22)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \square p^{1/2} &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu p^{1/2} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu(p^{-1/2}\partial_\nu p) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu p^{-1/2}\partial_\nu p + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p^{-1/2}\nabla_\mu\partial_\nu p \\ &= -\frac{1}{4}g^{\mu\nu}p^{-3/2}p_{,\mu}p_{,\nu} + \frac{1}{2}p^{-1/2}\nabla^\mu p_{,\mu}, \end{aligned}$$

entonces, de (3.21),

$$pR = p^2\tilde{R} + 6p^{1/2}\square p = p^2\tilde{R} - \frac{3}{2}p^{-1}g^{\mu\nu}p_{,\mu}p_{,\nu} + \frac{1}{2}\nabla^\mu p_{,\mu} \approx p^2\tilde{R} - \frac{3}{2}p^{-1}g^{\mu\nu}p_{,\mu}p_{,\nu},$$

donde \approx significa igualdad hasta términos de divergencias totales¹. Usando (3.22),

$$pR\sqrt{-g} = [\tilde{R} - \frac{3}{2}p^{-2}\tilde{g}^{\mu\nu}p_{,\mu}p_{,\nu}]\sqrt{-\tilde{g}}. \quad (3.24)$$

Con este resultado, el Lagrangiano de Helmholtz (3.16) se vuelve

$$L_H = \frac{1}{2\kappa}\tilde{R}\sqrt{-\tilde{g}} - \frac{1}{2\kappa}[\frac{3}{2}p^{-2}\tilde{g}^{\mu\nu}p_{,\mu}p_{,\nu} + p^{-1}r(p) - p^{-2}f[r(p)]]\sqrt{-\tilde{g}}. \quad (3.25)$$

Definimos la variable escalar ϕ con

$$p = \exp\left(\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\phi\right), \quad (3.26)$$

de donde se obtiene

$$L = \frac{1}{2\kappa}\tilde{R}\sqrt{-\tilde{g}} - \frac{1}{2}[\tilde{g}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + 2V(\phi)]\sqrt{-\tilde{g}} \quad (3.27)$$

con

¹Este punto es delicado. Por el teorema de Gauss,

$$\int_M \nabla^\mu p_{,\mu}\sqrt{-g}d^4x = \int_{\partial M} p_{,\mu}n^\mu\sqrt{-K}d^3s, \quad (3.23)$$

con n^μ el vector normal a ∂M . Como $p_{,\mu} = f''(R)R_{,\mu}$, para eliminar los términos de frontera requerimos que el escalar de Ricci tenga un mínimo en la dirección perpendicular a ∂M ; si tomamos la métrica FRW, esto es pedir que la frontera sea una región de curvatura constante. De esta manera no existiría problema en pedir que el gradiente a la variable p esté fijo en la frontera.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}p^{-1}r(p) - \frac{1}{2}p^{-2}f[r(p)]. \quad (3.28)$$

La ecuación (3.27) es igual al lagrangiano de RG con la métrica reescalada y un campo escalar mínimamente acoplado. Haciendo las variaciones respecto a la métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ tenemos,

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + e^{-\sqrt{2/3}\phi} T_{\mu\nu}^{(m)} \equiv T_{\mu\nu}^{(t)}, \quad (3.29)$$

con

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \tilde{g}_{\mu\nu}V(\phi), \quad (3.30)$$

donde hemos introducido la contribución de materia. Notemos el parecido de la segunda ecuación con (1.47). La aparente diferencia entre ambas ecuaciones está en que $\tilde{g}^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} \neq \phi^{,\lambda}\phi_{,\lambda}$ ya que la métrica que realiza contracciones es \mathbf{g} y no $\tilde{\mathbf{g}}$. Sin embargo, se cumple $g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta}$, por lo que, salvo la métrica, las dos ecuaciones son iguales. Vemos que en la ecuación (3.29) la materia tiene un acoplamiento al campo escalar, por lo que no es posible asegurar que el acoplamiento mínimo está dado, es decir, el campo ϕ aquí no puede desempeñar el papel de un campo de materia acoplado mínimamente a través de $\tilde{\mathbf{g}}$, como lo hace quintaesencia a través de \mathbf{g} ; si fuera así, él y los campos de materia Ψ estarían acoplados de la misma manera a RG, como lo demanda el principio de equivalencia débil. Entonces, aun en el marco de Einstein, no es posible perder de vista la naturaleza gravitatoria del campo escalar ϕ .

Vemos que debido a las identidades de Bianchi generalizadas [29], descritas en el capítulo 2, se cumple $\tilde{\nabla}^{\mu}T_{\mu\nu}^{(t)} = 0$.

Resumiendo lo hecho:

$$f(R) : \{g_{\mu\nu}\} \xrightarrow{\text{ML}} \{g_{\mu\nu}, p\} \xrightarrow{\text{TC}} \{\tilde{g}_{\mu\nu}, p\} \xrightarrow{p \rightarrow \phi} \{\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi\} : \tilde{\text{RG}} + \phi$$

Partimos de una teoría $f(R)$ descrita enteramente por la métrica en el marco de Jordan $\{g_{\mu\nu}\}$; mediante el mapeo de Legendre (ML) introducimos la variable p y llegamos al *marco de Helmholtz-Jordan* $\{g_{\mu\nu}, p\}$, con lo que se les baja el orden a las ecuaciones resultantes. Luego de una transformación conforme (TC) de la métrica el campo p es desacoplado de la gravitación, obteniendo las variables $\{\tilde{g}_{\mu\nu}, p\}$ en el marco de Einstein. Finalmente hacemos una redefinición del campo escalar, $p \rightarrow \phi$, y llegamos a las variables $\{\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi\}$, donde la acción es la de RG con la métrica reescalada y un campo escalar mínimamente acoplado.

El isomorfismo entre las dos teorías está dado por (3.20) y existe, al menos localmente, siempre y cuando el mapeo de Legendre sea invertible, es decir, si $f''(R) \neq 0$. De hecho, se ha demostrado que el problema inverso puede ser resuelto [29], i.e., dado un lagrangiano como (3.27) existe el lagrangiano

$L = f(R)\sqrt{-g}$ equivalente; sin embargo, en la mayoría de los casos éste no puede ser escrito en términos de funciones elementales.

Esta equivalencia es de gran importancia ya que nos permite transformar una teoría $f(R)$ a una escalar y obtener resultados para las nuevas variables; luego, estos resultados deben ser devueltos a sus variables originales. En la siguiente sección vemos cómo se hace esto para el modelo CDTT.

Campos de materia

En la obtención de (3.29) consideramos que el lagrangiano de materia es $L_m = L_m(\Psi, g^{\mu\nu})$ y se acopla a las teorías $f(R)$ sólo mediante la métrica \mathbf{g} , es decir, lo inmediato es pensar que bajo la transformación conforme sigamos teniendo $L_m(\Psi, p^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu})$ y se cumpla (1.9). Sin embargo, hay quienes aseguran [29, 39] que la métrica física, aquella que mide las distancias y a la que se deben acoplar los campos de materia, es $\tilde{\mathbf{g}}$ y entonces debemos tener $L_m = L_m(\Psi, \tilde{g}^{\mu\nu})$ y $T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}}\frac{\delta S_M}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}$, y en vez de (3.29),

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (3.31)$$

aquí los tensores $T_{\mu\nu}^{(\phi)}(\phi, \tilde{g}^{\mu\nu})$ y $T_{\mu\nu}^{(m)}(\Psi, \tilde{g}^{\mu\nu})$ se conservan independientemente como consecuencia de las identidades generalizadas de Bianchi ya que los campos ϕ y Ψ no se mezclan entre los dos tensores. Si la métrica física es \mathbf{g} entonces el campo ϕ se encuentra acoplado a la materia; si en cambio la métrica física es $\tilde{\mathbf{g}}$, ϕ se ve totalmente desacoplado a la materia y su evolución sólo dependerá de su acoplamiento al campo gravitacional a través de $\tilde{\mathbf{g}}$.

Vemos que la elección de la métrica física es esencial para ver la completa equivalencia entre las dos teorías, tema en el que no ahondaremos debido a su aparente complejidad y nos quedamos sólo con el resultado de que la equivalencia matemática está bien definida en el vacío. Asumiremos que la métrica física es \mathbf{g} , de otra manera parecería que las teorías $f(R)$ son como un disfraz de teorías escalares en RG.

3.3. Modelo CDTT generalizado

Potencial V de $f(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n}$

$$f'(r) = p \implies 1 + \frac{n\mu^{2(n+1)}}{r^{n+1}} = p \implies r = \frac{n^{\frac{1}{n+1}}\mu^2}{(p-1)^{\frac{1}{n+1}}}$$

\implies

$$f(r) = \frac{n^{\frac{1}{n+1}}\mu^2}{(p-1)^{\frac{1}{n+1}}} - \frac{\mu^2(p-1)^{\frac{n}{n+1}}}{n^{\frac{n}{n+1}}}.$$

Usando (3.28) y desarrollando el álgebra se obtiene

$$V[p(\phi)] = \mu^2 \left(\frac{n+1}{2n} \right) n^{\frac{1}{n+1}} \frac{(p-1)^{\frac{n}{n+1}}}{p^2}. \quad (3.32)$$

Este potencial alcanza su máximo en $p_{max} = 2(n+1)/(n+2)$. Tomando $p_i \gg p_{max}$, el potencial es aproximado a

$$V[p(\phi)] = \mu^2 \left(\frac{n+1}{2n} \right) n^{\frac{1}{n+1}} p^{-\frac{n+2}{n+1}} \quad (3.33)$$

o, usando (3.26),

$$V(\phi) \simeq \frac{\mu^2}{8\pi G} \left(\frac{n+1}{2n} \right) n^{\frac{1}{n+1}} \exp \left[-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \phi \right], \quad (3.34)$$

pero éste es justamente el potencial obtenido para una aceleración potencial en quintaesencia, ecuaciones (1.56) y (1.58); se tiene entonces que para el modelo de Carrol generalizado en el marco de Einstein el factor de escala cósmica es

$$\tilde{a}(\tilde{t}) \propto \tilde{t}^\alpha, \quad \alpha = \frac{3(n+1)^2}{(n+2)^2}. \quad (3.35)$$

Para regresar al marco de Jordan primero tenemos, de (3.20),

$$a(t) = p^{-1/2} \tilde{a}(\tilde{t}) \quad dt = p^{-1/2} d\tilde{t} \quad (3.36)$$

usando de nuevo (3.20) y $\phi \propto \sqrt{\frac{2\alpha}{\kappa}} \ln \tilde{t}$; ver ecuación (1.57),

$$a(t) = \tilde{t}^{\sqrt{\alpha/3}} \tilde{a}(\tilde{t}) \quad dt = \tilde{t}^{\sqrt{\alpha/3}} d\tilde{t} \quad (3.37)$$

Integrando la segunda ecuación obtenemos $t = (1 - \sqrt{\alpha/3})^{-1} \tilde{t}^{1 - \sqrt{\alpha/3}}$. Sustituyendo de vuelta estos resultados en (3.35) obtenemos el factor de escala cósmica en el marco de Jordan

$$a(t) = t^q, \quad q = \frac{(2n+1)(n+1)}{n+2} \quad (3.38)$$

Este resultado ya se había obtenido en el capítulo 2, ecuación (2.36), proponiendo un ansatz para tiempos tardíos en este modelo.

Veamos con $n = 1$ el caso de condición inicial $\phi_i = \phi_c$ en el que el campo alcanza el máximo del potencial ($p = 3/4$, $V(p_{max}) = \mu^2 3\sqrt{3}/16\kappa$) llegando al reposo ($\dot{\phi}_i(p = 3/4) = 0$), se tiene entonces de (3.27) que el lagrangiano en ese punto es $L = [\frac{1}{2\kappa} \tilde{R} - \mu^2 3\sqrt{3}/16\kappa] \sqrt{-\tilde{g}}$. Éste corresponde al universo inflacionario de una constante cosmológica $\Lambda = 3\sqrt{3}\mu^2/8$ en el marco de Einstein. Pero el máximo del potencial requiere condiciones iniciales precisas y es inestable. Llegando así al resultado que habíamos adelantado en el capítulo 2, después de la ecuación (2.29), la solución de Sitter para el modelo CDTT es inestable.

3.4. Límite newtoniano en teorías $f(R)$

Las teorías $f(R)$ admiten tres tipos de soluciones de máxima simetría, o soluciones de curvatura constante. Éstas son los espacios de Minkowski, dS y AdS, caracterizados por las métricas (2.21) y (2.22). Si para una teoría en particular el espacio de Minkowski no es solución, como sucede en las teorías singulares en R , no podemos decir que la métrica de Schwarzschild es la solución esférica que caracteriza el movimiento planetario, ya que ésta proviene de hacer perturbaciones con simetría esférica a la métrica de Minkowski:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.39)$$

Pero es bien conocido que hacer estas perturbaciones alrededor de un espacio dS o AdS da como resultado las siguientes métricas [36]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.40)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.41)$$

con $\Lambda = R_0/4$ y R_0 la solución de curvatura constante; ver ecuación (2.20). Estas métricas son llamadas *Schwarzschild-de Sitter* y *Schwarzschild-Anti de Sitter* respectivamente. Para Λ del orden de la constante cosmológica $\sim (10^{-33} \text{eV})^2$ las desviaciones de RG en el sistema solar están muy lejos de detectarse experimentalmente [27]. La métrica Schwarzschild es singular en $r = 2GM$, lo que define el horizonte de eventos; para la métrica Schwarzschild-AdS esta singularidad se ha movido a

$$r = \frac{(3GM\Lambda^2 + \sqrt{9G^2M^2\Lambda^4 + \Lambda^3})^{2/3} - \Lambda}{\Lambda(3GM\Lambda^2 + \sqrt{9G^2M^2\Lambda^4 + \Lambda^3})^{1/3}}, \quad (3.42)$$

y se tiene $r \rightarrow 2GM$ cuando $\Lambda \rightarrow 0$. Es decir, si $GMA^2 \ll 1$ entonces el horizonte de eventos es prácticamente el mismo que en RG.

Veamos el argumento seguido en [36] para el modelo de Carroll. Tenemos aquí $R_0 = \sqrt{3}\mu^2$, las correcciones a RG serán importantes a escalas $\Lambda r^2 \sim GM/r$, i.e. $r \sim (GM/\Lambda)^{1/3}$. Para masas solares, esta escala es del orden de 10^{17}m , distancia mucho más grande que el sistema solar, por lo que las desviaciones de RG para esta teoría son despreciables.

Si bien las métricas (3.40) y (3.41) son soluciones a una teoría $f(R)$ con curvatura constante R_0 , la pregunta que aparece es si éstas son las únicas soluciones que existen, más precisamente si cuadran bien con las condiciones de frontera, como el interior de un objeto masivo.

STG y el límite newtoniano

Las ecuaciones de campo de STG con un potencial $V(\phi)$ son,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{w}{\phi^2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\sigma \phi_{,\sigma}) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{V(\phi)}{\phi},$$

$$(2w + 3) \square \phi = T + \phi V_{,\phi} - 2V.$$

Sea $\psi \equiv f'(R)$, si esta relación es invertible podemos encontrar $R = R(\psi)$ y tenemos $f = f(\psi)$. Escribimos las ecuaciones de campo (2.16) para teorías $f(R)$ como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\psi} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\psi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho) \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\frac{\psi R(\psi) - f(\psi)}{\psi} \right). \quad (3.43)$$

Esto es equivalente a STG con potencial $V(\psi) = \psi R(\psi) - f(\psi)$ y sin término cinético, $w = 0$, lo que también se puede ver comparando (3.7) con (3.19). Este argumento es usado por Chiba [15] para decir que las teorías $f(R)$ no poseen límite newtoniano, ya que la ausencia de término cinético en (3.43) implica que el parámetro de Brans-Dicke es cero, $w = 0$, o que el parámetro post-newtoniano (PPN) [48], $\gamma = (w + 1)/(w + 2)$, es $\gamma = 1/2$, mientras la cota experimental actual es $|\gamma - 1| < 2.8 \times 10^{-4}$ [49]. Introduciendo el parámetro γ la métrica Schwarzschild se modifica en

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\gamma GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.44)$$

con $\gamma = 1/2$ ésta queda muy afuera del rango permitido por las observaciones.

Sin embargo, la equivalencia dinámica entre ambas teorías tiene un rango de validez; en particular, al hacer el límite newtoniano uno espera que de alguna manera $f(R)$ se reduzca a RG, pero $f(R) = R$ en RG, es decir, tenemos $f''(R) = 0$, donde se rompe la equivalencia entre las dos teorías [21].

En [11] A. Erickcek et al. hicieron una perturbación esféricamente simétrica a la métrica de Sitter para el modelo $1/R$ sin cambiar al marco de Einstein y llegaron al mismo resultado que T. Chiba encontró en [15], la métrica (3.44) con la contribución de dS. Es posible que estos resultados se deban a que en gravitación $1/R$ el espacio de Sitter es inestable; entonces, hacer una pequeña perturbación alrededor de éste carece de sentido, aunque este mismo argumento afecta también la solución (3.41).

Otro problema con el modelo $1/R$ es que éste parece ser altamente inestable en presencia de materia. De hecho, en [38] M. Seifert muestra que cualquier modelo con $f''(R)$ muy pequeña y negativa las soluciones *quasi-newtonianas* son muy inestables.

Lo importante que queremos decir es que aún no existe consenso sobre si el límite newtoniano en teorías $f(R)$ está bien definido y depende de la teoría particular.

Capítulo 4

Otros Modelos

Hasta ahora hemos desarrollado de una manera muy general una serie de técnicas para tratar con modelos geométricos de gravitación diferentes a RG. Hemos puesto énfasis en el modelo CDTT debido a la atención que ha recibido desde su publicación [9]. En este capítulo proponemos nuevos modelos inspirados en la expansión acelerada del universo y no encontrados en la literatura.

4.1. Modelos R^n

Para algunos lagrangianos la función $f(R)$ es bien aproximada en ciertas épocas a una ley de potencia, que después de la ley lineal son las formas más sencillas que podemos encontrar. En esta sección analizaremos estas funciones. Sea

$$f(R) = b^{-2(n-1)} R^n, \quad (4.1)$$

donde b es una constante con unidades de masa y n es un número real distinto de 0 o 1. Usando (2.20) tenemos los espacios de curvatura constante R_0

$$nR_0^n - 2R_0^n = 0, \quad (4.2)$$

para $n > 0, n \neq 2$, obtenemos el espacio de Minkowski como solución; para $n < 0$ el problema está indeterminado, lo que significa que estas funciones no pueden ir solas en el lagrangiano; para $n = 2$ la solución es degenerada y puede ser cualquier valor R_0 .

Las derivadas de (4.1) son

$$f'(R) = nb^{-2(n-1)} R^{n-1}, \quad f''(R) = n(n-1)b^{-2(n-1)} R^{n-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación de Fridmann (2.30) y desarrollando el álgebra,

$$\frac{-b^{2(n-1)} 6^n}{2} (\dot{H} + 2H^2)^{n-2} \{n(n-1)\ddot{H}H + (1-n)\dot{H}^2 + (4n^2 - 7n + 4)\dot{H}H^2 + 2(2-n)H^4\} = \kappa\rho, \quad (4.3)$$

que es la primera ecuación de Friedmann para $f(R) = b^{-2(n-1)}R^n$, $n \neq 0, 1$. Vemos primero que el caso $R = 6(\dot{H} + 2H^2) = 0$ no está permitido para $n < 2$. A diferencia de RG donde $R = 0$ para el vacío o con materia que cumpla $T = 0$.

En el vacío, con $\dot{H} + 2H^2 \neq 0$, la ecuación (4.3) se reduce a

$$n(n-1)\ddot{H}H + (1-n)\dot{H}^2 + (4n^2 - 7n + 4)\dot{H}H^2 + 2(2-n)H^4 = 0. \quad (4.4)$$

Buscamos soluciones particulares del tipo ley de potencias, $a(t) \propto t^\alpha$, $H = \alpha/t$. Sustituyendo arriba, llegamos a la ecuación de segundo grado $2(2-n)\alpha^2 - (4n^2 - 7n + 4)\alpha + 2n^2 - 3n + 1 = 0$. Una de las raíces es $\alpha = 1/2$, que es justamente la solución de $\dot{H} + 2H^2 = 0$, que es solución sólo para $n > 2$ y para $n \leq 2$ no entra en esta descripción. La segunda raíz es

$$\alpha = \frac{2n^2 - 3n + 1}{2 - n}. \quad (4.5)$$

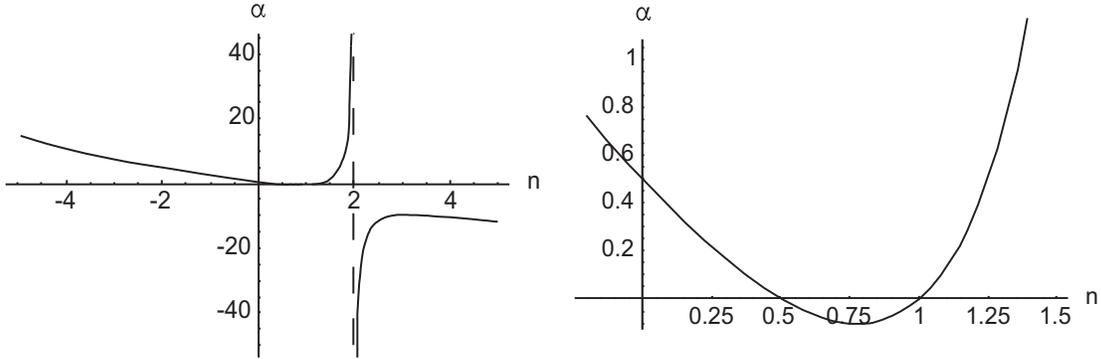


Figura 4.1: Gráfica $n - \alpha$. Una función R^n admite la solución de potencia $a(t) \propto t^\alpha$.

La figura (4.1) muestra este comportamiento. Para toda $n \neq 0, 2$, $f(R) = R^n$ admite una ley de potencia como solución. Vemos que el caso $n = 2$ es especial y lo trataremos en la siguiente sección. Los intervalos $1/2 < n < 1$, $n > 2$ corresponden a un universo en contracción. Para un universo acelerado, $\alpha > 1$ y de (4.5), $1.36 < n < 2$ y $n < -0.36$. La restricción observacional para una ley de potencia en el factor de escala (1.43) es $\alpha > 6.66$; esto se cumple para $1.73 < n < 2$ y $n < -3.56$.

Es importante ver que estas soluciones sean atractores; para esto seguiremos un procedimiento similar al de [10]. Sean

$$x = -H(t) \quad y = \dot{H}(t), \quad (4.6)$$

entonces, $\ddot{H} = -y \frac{dy}{dx}$, con esto la ecuación de Friedmann (4.4) es

$$n(n-1)xy \frac{dy}{dx} + (1-n)y^2 + (4n^2 - 7n + 4)yx^2 + 2(2-n)x^4 = 0, \quad (4.7)$$

una ecuación de primer orden. De hecho, en [45] muestran cómo para cualquier teoría $f(R)$ las ecuaciones de Friedmann en el caso de una métrica plana y en el vacío pueden ser reducidas a primer orden bajo la introducción de (4.6). Para encontrar soluciones de potencia se introduce el siguiente cambio de variable [10]:

$$v(x) = -\frac{x^2}{y}. \quad (4.8)$$

Entonces un comportamiento asintótico hacia una ley de potencia se identifica como $v(x) \rightarrow \alpha = \text{cte}$. Con esta nueva variable la ecuación (4.7) queda

$$n(n-1)\frac{x^5}{v^3} \frac{dv}{dx} - (2n^2 - 3n + 1)\frac{x^4}{v^2} + (4n^2 - 7n + 4)\frac{x^4}{v} + 2(n-2)x^4 = 0. \quad (4.9)$$

Esta ecuación la integramos numéricamente para distintos valores de n y con distintas condiciones iniciales v_0 . En la figura (4.2) se muestran los resultados con $v_0 > 1/2$, $x_0 = -1$.

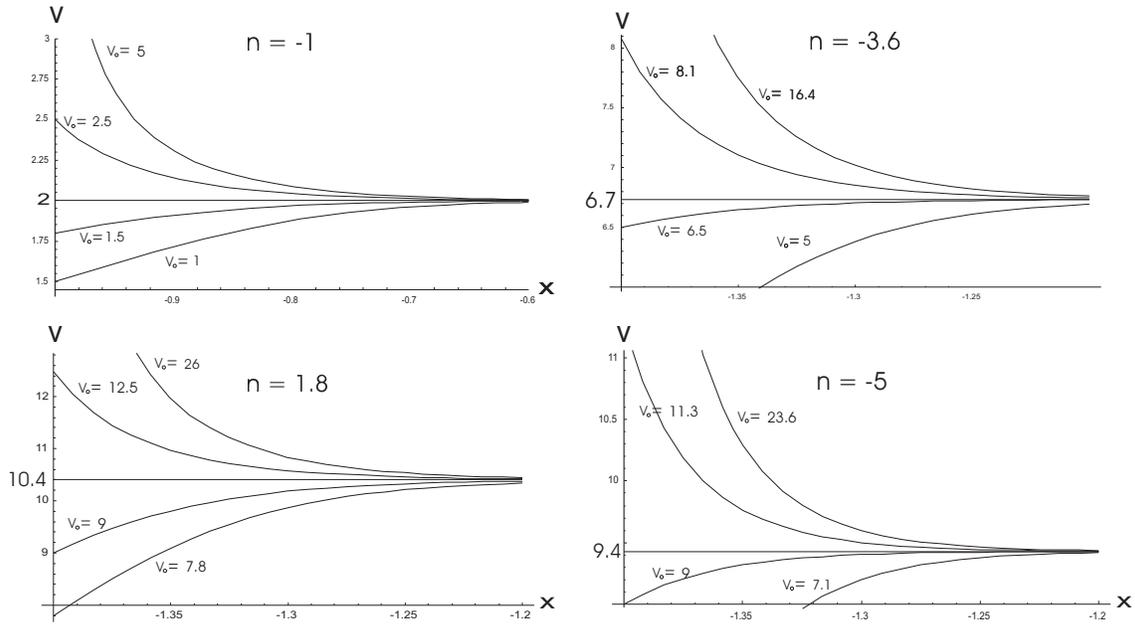


Figura 4.2: Gráfica $v-x$. El comportamiento asintótico a una ley de potencia se identifica como $v(x) \rightarrow \alpha = \text{cte}$.

Se observa cómo siempre que $v_0 > 1/2$ las soluciones tienden asintóticamente a una ley de potencia $a(t) \propto t^\alpha$ con α dada por (4.5) cuando $t \rightarrow \infty$. De igual manera se puede mostrar que si $v_0 < 1/2$, las soluciones tienden a $v = 0$, es decir, tienden a $\dot{a}(t) = 0$. Entonces, para el caso en el vacío, las soluciones dadas por (4.5) y $\alpha = 0$ son atractores y la solución $\alpha = 1/2$ es inestable. Veamos que $v = 1/2$ corresponde a $R = 6(\dot{H} + 2H^2) = 0$. Resumimos estos resultados:

Para teorías $f(R) = b^{-2(n-1)}R^n$, $n \neq 0, 1$, bajo la métrica FRW plana en el vacío se cumple

$$\begin{aligned} \text{Si } R > 0 &\Rightarrow a(t) \rightarrow a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2n^2-3n+1}{2-n}}, \\ \text{Si } R < 0 &\Rightarrow a(t) \rightarrow a_0, \\ \text{Si } R = 0 &\Rightarrow a(t) \rightarrow a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

con la opción $R = 0$ inestable y únicamente válida para modelos $n > 2$.

Ahora, cambiémonos al marco de Einstein, el lagrangiano resultante es (3.27) con el potencial

$$V(\phi) = b^2 |n|^{\frac{1}{1-n}} \left(\frac{1-n}{2n}\right) \exp\left(-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \frac{n-2}{n-1} \phi\right), \quad (4.11)$$

que es igual al potencial (1.58) encontrado en el capítulo 1 y que produce una ley de potencia para el factor de escala $a(t) \propto t^\alpha$. Tenemos entonces que en el marco de Einstein $\tilde{\alpha} = 3(n-1)^2/(n-2)^2$, y regresando a nuestras variables originales,

$$a(t) \propto t^{\frac{2n^2-3n+1}{2-n}}, \quad (4.12)$$

que es justo lo que habíamos encontrado. Nótese cómo el potencial (4.11) es una constante para el caso $n = 2$ y no está definido para $n = 1$.

4.2. Otros modelos

Con la finalidad de explorar más en teorías $f(R)$ buscamos modelos que difieran drásticamente de los comúnmente estudiados. Es posible que alguna teoría $f(R)$ que no diverja en $R = 0$, como $1/R$ o $\ln R$, puede ser librada de inestabilidades como las encontradas en [38]. En particular teorías con $f'''(R) < 0$ y $|f''(R)| \ll 1$, con una influencia tardía en la evolución del universo¹, parecen estar cerca de ser desechadas debido a su incapacidad de formar estrellas estables [38]. Aquí no ahondaremos en estos complejos problemas, sólo hacemos notar que han sido detectados y tratamos de evitarlos.

¹Éste no es el caso de teorías como $f(R) = R + aR^2$, capaces de modelar la etapa inflacionaria en el universo temprano.

Modelo Arco Tangente I

Proponemos el modelo

$$f(R) = \frac{2}{\pi} R \tan^{-1}(R/\beta^2), \quad (4.13)$$

con β una constante con unidades de masa. En la figura (4.3) graficamos esta función con una línea continua. Las líneas punteadas son $f(R) = R$ y $f(R) = R - \frac{2}{\pi}\beta^2$.

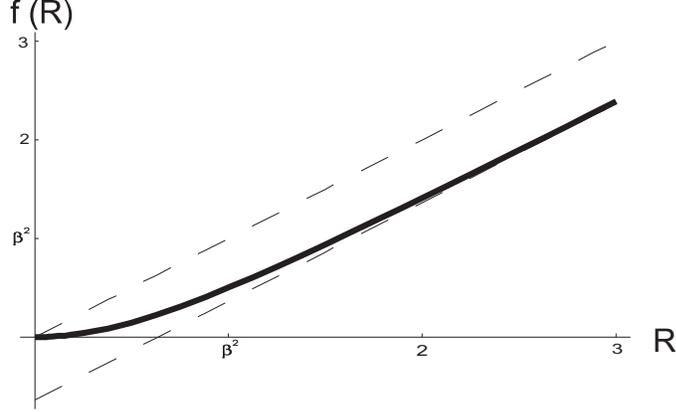


Figura 4.3: Gráfica $f(R) = \frac{2}{\pi} R \tan^{-1}(R/\beta^2)$.

Para $R \gg \beta^2$ el modelo es básicamente $f(R) \rightarrow R - \frac{2}{\pi}\beta^2$ y obtenemos RG más una constante cosmológica. Nuevamente, como en el modelo CDTT, nos encontramos con una época de transición cuando $R \sim \beta^2$ a un tiempo $t = t_q$. Para ajustar las observaciones el valor de β debe ser del orden de H_0 , $\beta \sim 10^{-33} eV$. Para $R < \beta^2$ tenemos que la nueva geometría difiere considerablemente de RG, lo que analizaremos a continuación.

Las derivadas de (4.13) son

$$f'(R) = \frac{2}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{R}{\beta^2} + \frac{R/\beta^2}{1 + R^2/\beta^4} \right), \quad (4.14)$$

$$f''(R) = \frac{4/\pi\beta^2}{(1 + R^2/\beta^4)^2} > 0. \quad (4.15)$$

La solución de curvatura constante, ecuación (2.20), es $R_0 = 0$, es decir, el espacio Minkowski.

En $R < \beta^2$ usamos las aproximaciones

$$\tan^{-1} \frac{R}{\beta} = \frac{R}{\beta^2} - \frac{R^3}{3\beta^6} + \mathcal{O}_5 \left(\frac{R}{\beta^2} \right),$$

$$\frac{1}{1 + R^2/\beta^4} = 1 - \frac{R^2}{\beta^4} + \frac{R^4}{\beta^8} + \mathcal{O}_6 \left(\frac{R}{\beta^2} \right).$$

A primer orden en R/β^2 obtenemos

$$\begin{aligned} f(R) &= \frac{2R^2}{\pi\beta^2}, \\ f'(R) &= \frac{4R}{\pi\beta^2}, \\ f''(R) &= \frac{4}{\pi\beta^2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Usamos la primera ecuación de Friedmann (2.24), con $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$, y obtenemos la ecuación diferencial

$$2\ddot{H}H + 6\dot{H}H^2 - \dot{H}^2 = \frac{2}{9}\pi^2\beta^2 G\rho. \tag{4.17}$$

Ésta es la primera ecuación de Friedmann para el modelo (4.13) a tiempos tardíos. Primero analizaremos el caso de la evolución de H en el vacío:

$$2\ddot{H}H + 6\dot{H}H^2 - \dot{H}^2 = 0. \tag{4.18}$$

De la sección anterior sabemos que esta aproximación no admite como solución una ley de potencia. Haciendo la sustitución $W = \dot{H}$ en la ecuación (4.18) llegamos a

$$\frac{dW}{dH} - \frac{1}{2H}W = -3H, \tag{4.19}$$

que es una ecuación lineal con solución

$$\dot{H} + 2H^2 - CH^{1/2} = 0, \tag{4.20}$$

con C una constante de integración. Si $C = 0$ obtenemos de nuevo la expansión $a \propto t^{1/2}$. Vemos que cualquier solución con $C > 0$ converge asintóticamente a la solución $C = 0$ cuando $H \rightarrow \infty$. Claramente, cualquiera de las ecuaciones (4.18) y (4.20) contiene la misma dinámica para H , pero en su análisis el uso de las dos resulta muy útil. En la figura (4.4) se grafica el espacio fase (4.20) usando distintos valores de C . Las curvas punteadas son la ecuación $\dot{H} = -H^2$, por lo cual la condición de aceleración es que la solución se sitúe por encima de ésta, y la curva $\dot{H} = 6H^2$, que es el lugar común de los máximos que ocurren para todos los valores $C > 0$.

Las soluciones que presentan aceleración ocurren sólo y para todos los valores $C > 0$. El problema de condiciones iniciales es especificar \dot{H}_0 y H_0 , de donde, usando la ecuación (4.20), es posible encontrar C ,

$$C = \frac{\dot{H}_0 + 2H_0^2}{H_0^{1/2}}. \tag{4.21}$$

Reescribimos la ecuación (4.18) como

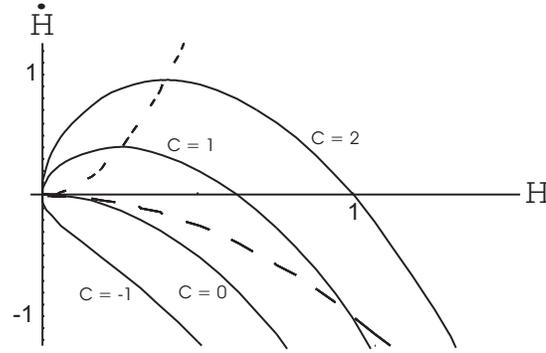


Figura 4.4: Espacio fase. Muestra las curvas del espacio fase para distintos valores de C . La línea punteada inferior es $\dot{H} = -H^2$, por lo que la condición de aceleración es que la solución se sitúe por encima de ésta.

$$\ddot{H} = \frac{\dot{H}^2 - 6\dot{H}H^2}{2H}. \quad (4.22)$$

Para un punto **A** en el espacio fase, ver figura (4.5), con $(H_0 > 0, \dot{H}_0 < 0)$ de (4.22) tenemos $\ddot{H} > 0$, por lo que la solución evoluciona en el tiempo hacia H_a . Para un punto **B** $(H_0 > 0, \dot{H}_0 > 0)$ tenemos que $\ddot{H} > 0$ si $\dot{H} > 6H^2$ y $\ddot{H} < 0$ si $\dot{H} < 6H^2$. Es decir, que para toda $C > 0$ fija, las soluciones tienden a $H_a = C^{2/3}/4^{1/3}$; véase también la figura (4.6). Nótese que el punto máximo de cualquier curva en el espacio fase, \dot{H}_M , coincide con la curva $\dot{H} = 6H^2$ en $\dot{H}_c = \dot{H}_M$; de no haber sido así existiría otro atractor, H_c .

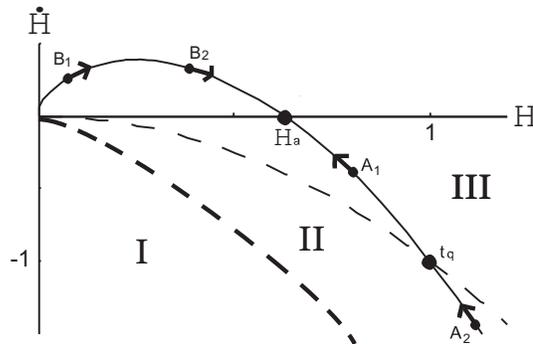


Figura 4.5: Espacio fase, $C = 1$. Con la ayuda de la ecuación (4.22) muestra que H_a es un atractor para las soluciones con $C > 0$. Divide el espacio de soluciones en tres regiones.

El modelo describe entonces un espacio-tiempo que en el vacío evoluciona al espacio de Sitter para un conjunto enorme de condiciones iniciales. Siempre que $C > 0$ la solución tendrá una etapa de aceleración. Escribimos la ecuación (4.20) como $R = 6CH^{1/2}$, es decir, siempre que tengamos $R > 0$ la solución

tendrá una etapa acelerada. Podemos dividir el espacio fase en tres regiones, ver figura (4.5):

I: Corresponde a $R < 0$; las soluciones nunca presentan aceleración y tienden a $a(t) \rightarrow a_0 = \text{cte.}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

II: Es la región entre $R = 0$ ($\dot{H} = -2H^2$) y $\dot{H} = -H^2$. Las soluciones aquí no son aceleradas pero alcanzan a t_q en un tiempo finito y entran a la región III.

III: Las soluciones son asintóticamente de Sitter. $a(t) \rightarrow a_0 e^{H_a t}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

La figura (4.6) grafica las soluciones para distintos valores de $\dot{H}_0 = \dot{H}(0)$ con $C = 1$. Las curvas A_1, A_2, B_1 y B_2 corresponden a los puntos etiquetados así en la figura (4.5).

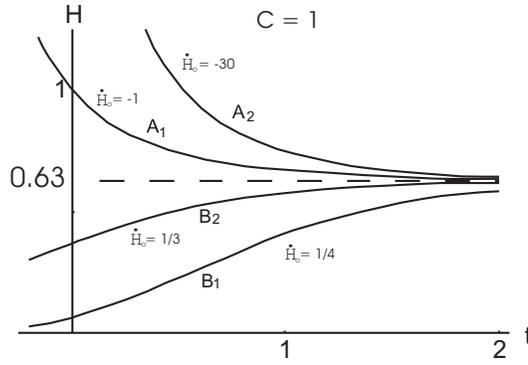


Figura 4.6: H contra t. Muestra cómo las soluciones con $C = 1$ tienen un comportamiento asintótico al espacio de Sitter.

Vemos que para condiciones iniciales $\dot{H}_0 < 0$ obtenemos soluciones en que H cae con el tiempo; esto corresponde a un factor de escala $a(t)$ que crece más lentamente que el crecimiento exponencial. Mientras que para condiciones iniciales $\dot{H}_0 > 0$ tenemos un crecimiento superinflacionario.

Para ajustar el valor de C a las observaciones notemos que en t_q , el tiempo en que sucede el cambio de concavidad en $a(t)$, $H(t_q) \sim \beta$, pero dada una C tenemos $H(t_q) = C^{2/3}$. Es decir, $C \sim \beta^{3/2} \sim 10^{-51} e^{V^{3/2}}$.

Escribimos de nuevo la ecuación (4.20) como $R = 6CH^{1/2}$, tenemos que R evoluciona a $R_0 = 6CH_a^{1/2}$. Usando el análisis anterior la solución de curvatura constante para este modelo en esta aproximación es $R_0 \sim 6\beta^2/2^{1/3}$. Esto sólo dependió de la condición inicial C ; esta condición define entonces a qué universo de Sitter evoluciona un modelo R^2 .

Para ver qué tan rápidamente tienden las soluciones al universo de Sitter, proponemos el ansatz

$$a(t) = e^{st} + b(t), \quad (4.23)$$

con $b(t) \ll e^{st}$ y $s := H_a$. Haremos aproximaciones a primer orden en $e^{-st}b(t)$.

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{se^{st} + \dot{b}}{e^{st} + b} = \frac{s + \dot{b}e^{-st}}{1 + be^{-st}} \simeq (s + \dot{b}e^{-st})(1 - be^{-st}),$$

donde en la última igualdad se usó $(1 - x)^{-1} \simeq 1 + x$, entonces,

$$H \simeq s - sbe^{-st} + \dot{b}e^{-st}, \quad (4.24)$$

$$H^2 \simeq s^2 - 2s^2be^{-st} + 2s\dot{b}e^{-st}, \quad (4.25)$$

$$\dot{H} \simeq \ddot{b}e^{-st} - 2s\dot{b}e^{-st} + s^2be^{-st}, \quad (4.26)$$

donde se despreciaron términos de segundo orden en $e^{-st}b(t)$. Además,

$$\begin{aligned} H^{1/2} &\simeq (s - sbe^{-st} + \dot{b}e^{-st})^{1/2} = s^{1/2}(1 - (b - \frac{\dot{b}}{s})e^{-st})^{1/2} \\ &\simeq s^{1/2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(b - \frac{\dot{b}}{s} \right) e^{-st} \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tenemos entonces que la ecuación (4.20) es,

$$\dot{H} + 2H^2 - CH^{1/2} \simeq e^{-st} \left[\ddot{b} + 2s\dot{b} - 3s^2b + \frac{Cs^{1/2}}{2} \left(b - \frac{\dot{b}}{s} \right) \right] + 2s^2 - Cs^{1/2} = 0.$$

Ahora, $C = (4^{1/3}H_a)^{3/2} = 2s^{3/2} \implies Cs^{1/2} = 2s^2$, y finalmente la ecuación diferencial para $b(t)$ es,

$$\ddot{b} + s\dot{b} - 2s^2b = 0, \quad (4.28)$$

cuyas dos soluciones son $b_1(t) = A_1e^{st}$ y $b_2(t) = A_2e^{-2st}$, non A_i constante. Entonces la solución buscada a primer orden en be^{st} es

$$a(t) = e^{H_a t} + Ae^{-2H_a t}. \quad (4.29)$$

El modelo Arco Tangente I (4.13) describe entonces un universo que evoluciona de aproximadamente RG más una constante cosmológica, del orden de magnitud de la constante cosmológica del modelo estándar, para luego entrar en una etapa de expansión dominada por un término cuadrático del escalar de curvatura y termina en un espacio que se aproxima exponencialmente al universo de Sitter.

Modelo Arco Tangente II

Proponemos un segundo modelo

$$f(R) = \frac{2}{\pi} \left(R + \frac{2}{\pi} \beta^2 \right) \arctan(R/\beta^2) \quad (4.30)$$

El modelo es bien aproximado a $f(R) \rightarrow R$ cuando $R \gg \beta^2$. Luego, expandiendo (4.30) alrededor de 0,

$$f(R) = \frac{4}{\pi^2} R \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (R/\beta^2)^{2n} + \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} (R/\beta^2)^{2n+1} \right). \quad (4.31)$$

Hasta un segundo orden tenemos

$$f(R) = \frac{4}{\pi^2} R \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{R}{\beta^2} \right). \quad (4.32)$$

Esta función $f(R)$ modela un universo que a $R \gg \beta^2$ es prácticamente RG, luego cuando $R \sim \beta^2$ pasa por un periodo dominado por la expansión geométrica, y de nuevo cuando $R \ll \beta^2$ volvemos a tener RG pero con una constante gravitacional distinta, $4/\pi^2 \simeq 0.4$. Tenemos entonces que cuando $t \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{8\pi G} \sqrt{-g} R \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{0.4}{8\pi G} \sqrt{-g} R. \quad (4.33)$$

Si actualmente estuviéramos al final de la expansión significaría que la G que medimos en el sistema solar es $G/0.4$, siendo G el valor en la época temprana del universo, en particular en la época de nucleosíntesis, donde hay muy poco rango de variación permitido para este valor [32]. Estas constricciones impiden que estemos al final de la expansión. Ahora, supongamos que nos encontramos actualmente con un valor R del orden y ligeramente por debajo de β^2 ; tiene sentido quedarnos con la expansión a segundo orden (4.32) y hacer $R/\beta^2 \simeq 1$. Tenemos entonces que actualmente $\mathcal{L} \simeq \frac{1.04}{8\pi G} \sqrt{-g} R$, lo que sí concuerda perfectamente con las medidas de nucleosíntesis.

Modelo Exponencial

Por último proponemos el modelo

$$f(R) = R(1 - e^{-R/\beta^2}). \quad (4.34)$$

Las soluciones de curvatura constante son el espacio de Minkowski y $R_0 \simeq -1.14\beta^2$.

A tiempos tempranos ($R \gg \beta^2$) el modelo es prácticamente RG. Luego, a tiempos tardíos ($R \ll \beta^2$), se aproxima muy bien a una función cuadrática,

$$f(R) \simeq \frac{R^2}{\beta^2}. \quad (4.35)$$

Todos los resultados obtenidos en el modelo Arco Tangente I son entonces igual de válidos para este modelo. Cualitativamente la principal diferencia entre ambos modelos es que el modelo exponencial a tiempos tempranos es como RG; mientras el modelo Arco Tangente I es como RG con constante cosmológica.

Capítulo 5

Formulación de Palatini

Hasta ahora hemos considerado la métrica y las conexiones objetos relacionados por la condición de metricidad, ecuación (1.1). Sin embargo esto puede no ser cierto, puede ser que sean entidades geométricas independientes. Si éste es el caso, las variaciones de la acción gravitacional deben ser hechas respecto a ambas variables. Es decir, la acción, que inicialmente era $S[g]$, debe ser sustituida por $S[g, \Gamma]$. La conexión surge de la derivada covariante y está relacionada con el transporte paralelo, por lo que es el objeto geométrico que contiene la información de los cambios de orientación de una variedad; mientras la métrica sigue su papel de medir distancias, subir y bajar índices y definir la estructura causal de la variedad. Incluso es posible que la conexión no sea simétrica en sus índices inferiores, en cuyo caso obtenemos un espacio con torsión. A esta manera de abordar la gravitación, en la que g y Γ son independientes, se le llama *formulación de Palatini*.

Las teorías no lineales en el escalar de Ricci en la formulación de Palatini son comúnmente llamadas teorías $L(R)$, esto sólo para distinguirlas de las teorías púramente métricas $f(R)$.

5.1. Ecuaciones de campo en la formulación de Palatini

Aquí tenemos entonces $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}[\Gamma]$ y $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R[g, \Gamma]$.

Se quiere encontrar las soluciones a

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{S[g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}] - S[g^{\mu\nu}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}]}{\delta g^{\mu\nu}}, \\ \frac{\delta S}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} &= \frac{S[g^{\mu\nu}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}] - S[g^{\mu\nu}, \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}]}{\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}},\end{aligned}$$

con

$$S = \frac{1}{2\kappa} S_G + S_M,$$

$$S_G [g, \Gamma] = \int \sqrt{-g} L(R) d^4x, \quad (5.1)$$

y el tensor de energía momento dependiente únicamente de la métrica

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}, \\ 0 &:= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}. \end{aligned}$$

Las teorías donde esta última ecuación no es cero también pueden ser consideradas [40] y son llamadas *teorías métricas-afines*.

Por simplicidad usaremos una conexión simétrica. Haciendo las variaciones en la acción,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left\{ \frac{1}{2\kappa} (L'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L(R)) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right\} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \\ &+ L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \{ \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde usamos (2.9). Manteniendo constante las conexiones, el segundo renglón es cero y se obtienen la ecuaciones de campo

$$L'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} L(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

Ahora, manteniendo la métrica constante, el primer renglón de la ecuación (5.2) es cero, e integrando por partes el segundo renglón se tiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int [-\nabla_\lambda (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \nabla_\nu (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}] d^4x \\ &= \int [-\nabla_\lambda (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) + \nabla_\sigma (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\sigma}) \delta^\nu{}_\lambda] \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} d^4x = 0. \end{aligned}$$

Como esto sucede para variaciones arbitrarias, se tiene la ecuación

$$\nabla_\lambda (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \nabla_\sigma (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\sigma}) \delta^\nu{}_\lambda = 0. \quad (5.4)$$

Calculando la traza de λ con ν y usando el resultado de vuelta en la ecuación se tiene

$$\nabla_\lambda (L'(R) \sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.5)$$

Las ecuaciones de segundo orden (5.3) y (5.5) en la métrica son las ecuaciones de campo para teorías $L(R)$. Vemos que si $L(R) = R$ se recuperan las ecuaciones de campo de Einstein y, de (5.5), las conexiones son los símbolos de Christoffel de la métrica \mathbf{g} . Más aún, en la formulación de Palatini no es necesario añadirle los términos de frontera a la acción de Einstein-Hilbert;

estos son cero porque las variaciones de la conexión son cero en la frontera. Esto representa una ventaja conceptual de la formulación de Palatini sobre la formulación puramente métrica.

La ecuación (5.5) dice $\partial_\lambda(L'\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) + L'\sqrt{-g}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}g^{\sigma\nu} + L'\sqrt{-g}\Gamma^\nu_{\lambda\sigma}g^{\mu\sigma} = 0$. Si intercambiamos los índices $\lambda \leftrightarrow \mu$ y luego $\lambda \leftrightarrow \nu$, sumamos las dos ecuaciones obtenidas y le restamos la original se obtiene

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \{\lambda_{\mu\nu}\} + \frac{1}{2L'}\{2\delta^\lambda_{(\mu}L_{,\nu)} - g^{\lambda\alpha}g_{\mu\nu}L_{,\alpha}\}, \quad (5.6)$$

con $\{\lambda_{\mu\nu}\}$ los símbolos de Christoffel con respecto a la métrica \mathbf{g} . Pero éstas son justamente las conexiones asociadas a una métrica $h_{\mu\nu}$ dada por la transformación conforme $h_{\mu\nu} = L'g_{\mu\nu}$, ver [25]. El tensor de Ricci para esta conexión es entonces $R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(h_{\mu\nu})$,

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(g) + \frac{3}{2}(L')^{-2}\nabla_\mu L'\nabla_\nu L' - (L')^{-1}\nabla_\mu\nabla_\nu L' - \frac{1}{2}(L')^{-1}g_{\mu\nu}\square L'. \quad (5.7)$$

La ecuación de la traza se obtiene de (5.3),

$$RL'(R) - 2L(R) = \kappa T, \quad (5.8)$$

una ecuación algebraica de R y T .

5.2. Soluciones en el vacío

La ecuación de la traza en el vacío es

$$RL'(R) - 2L(R) = 0. \quad (5.9)$$

Supongamos que una solución real (si es que tiene alguna) es R_i y que $L'(R_i) \neq 0$, entonces de la ecuación anterior, $R_i = 2L(R_i)/L'(R_i)$ y sustituyendo en (5.3) y (5.5) las ecuaciones de campo en el vacío son

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_i}{4}g_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

$$\nabla_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.11)$$

La segunda ecuación dice que las conexiones son los símbolos de Christoffel de la métrica \mathbf{g} , y la primera son las ecuaciones de campo de RG en el vacío con constante cosmológica $\Lambda = R_i/4$. Es decir, para cualquier función $L(R)$ tal que (5.9) tenga soluciones reales, en el vacío o con materia $T = 0$, las ecuaciones resultantes son las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica. Por otro lado, si (5.9) no tiene soluciones reales entonces las ecuaciones de campo en el vacío tampoco tienen soluciones reales [22].

5.3. Ecuaciones de Friedmann en la formulación de Palatini

Usando la ecuación (5.7) y $R_{00}(g) = -3\ddot{a}/a$, $R_{ij}(g) = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\delta_{ij}$, llegamos a

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{2}(L')^{-2}(\partial_0 L')^2 - \frac{3}{2}(L')^{-1}\nabla_0\nabla_0 L', \quad (5.12)$$

$$R_{ij} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + \frac{a^2}{2}\nabla_0\nabla_0 L')\delta_{ij} + (L')^{-1}\partial_0 L'\Gamma^0_{ij}. \quad (5.13)$$

Tenemos además $\Gamma^0_{ij} = \{^0_{ij}\} + \frac{1}{2f'}\{2\delta^0_{(i}L_{,j)} - g^{0\alpha}g_{ij}L_{,\alpha}\} = \dot{a}a\delta_{ij} + \frac{1}{2L'}L_{,0}g_{ij} = \dot{a}a\delta_{ij} + \frac{1}{2}R_{,0}g_{ij}$, $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$, $R_{,0} = 6(\ddot{H} + 4\dot{H}H)$,

$$\Gamma^0_{ij} = \dot{a}a\delta_{ij} + 3a^2(\ddot{H} + 4\dot{H}H)\delta_{ij}. \quad (5.14)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de campo (5.3) y usando un fluido perfecto obtenemos las ecuaciones de Friedmann para teorías $L(R)$,

$$\frac{1}{2}L - \frac{\ddot{a}}{a}L' + \frac{3}{2}(L')^{-2}(\partial_0 L')^2 - \frac{3}{2}\nabla_0\nabla_0 L' = \kappa\rho, \quad (5.15)$$

$$L'(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + \frac{1}{2}(L')^{-1}\nabla_0\nabla_0 L' + H(L')^{-1}\partial_0 f') - \frac{a^2}{2}L = \kappa a^2 L, \quad (5.16)$$

y combinando estas dos ecuaciones tenemos

$$6H^2 + 3H(L')^{-1}\partial_0 L' + \frac{3}{2}(L')^{-2}(\partial_0 L')^2 = \frac{\kappa(\rho + 3p) + L}{L'}. \quad (5.17)$$

Vemos como esta ecuación se reduce a (1.18) para $L(R) = R$. Para una $L(R)$ en particular podemos intentar resolver la ecuación de la traza (5.8) para R en términos de T y luego sustituir $L(T)$ y $L'(T)$ en (5.17) obteniendo la ecuación diferencial de evolución de H .

5.4. Modelo $1/R$

Consideremos el modelo $1/R$ [7, 9], pero ahora en la formulación de Palatini. Haremos aquí el desarrollo hecho por D.Vollick en [47]. Tenemos

$$L(R) = R - \mu^4/R, \quad (5.18)$$

en el vacío el escalar de Ricci es $R = \pm\sqrt{3}\mu^2$, y de (5.10) la solución con la métrica FRW plana es

$$a(t) = e^{Ht}, \quad (5.19)$$

con $\sqrt{3}\mu^2 = 12H^2$; véase también la ecuación (2.28). Analizaremos ahora el caso con materia; de la ecuación de la traza (5.8) obtenemos

$$R = \frac{1}{2}(-\kappa T \pm \sqrt{\kappa^2 T^2 + 12\mu^4}). \quad (5.20)$$

Tenemos aquí que cuando T tiende a cero R tiende a $\pm\sqrt{3}\mu^2$, como era de esperarse. Es más, si modelamos el universo como un fluido relativista, como en el universo temprano, $T = 0$ y se obtiene de nuevo $R = \pm\sqrt{3}\mu^2$, un universo (anti-)de Sitter. A tiempos tardíos, $\kappa T \ll \sqrt{3}\mu^2$, despreciando términos de segundo orden en $\kappa T/\sqrt{3}\mu^2$, la ecuación anterior se aproxima a

$$R \simeq \sqrt{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\kappa T, \quad (5.21)$$

donde se usa el signo $+$ en la ecuación (5.20) para obtener el modelo asintóticamente de Sitter al que las observaciones favorecen. Usando esta aproximación y la relación $1/(1-x) = 1+x+x^2+\dots$ (con $x < 1$) se obtienen las aproximaciones de $L(R)$ y $L'(R)$ a tiempos tardíos.

$$L(T) \simeq \frac{2\mu^2}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\kappa T}{\sqrt{3}\mu^2}\right), \quad (5.22)$$

$$L'(T) \simeq \frac{4}{3} \left(1 + \frac{\kappa T}{4\sqrt{3}\mu^2}\right). \quad (5.23)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación de campo (5.3) y despreciando términos de segundo orden en $\kappa T/\sqrt{3}\mu^2$, tenemos

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{\sqrt{3}\mu^2}{4}g_{\mu\nu} + \kappa\left\{\frac{3}{4}T_{\mu\nu} - \frac{5}{16}Tg_{\mu\nu}\right\}. \quad (5.24)$$

Podemos modelar el universo como polvo, $T = -T_{tt} = -\rho_0 a_0^3/a^3$ con ρ_0 y a_0 constantes, obtenemos $L'(a) = \frac{4}{3}(1 - \kappa\rho_0 a_0^3/4\sqrt{3}\mu^2 a^3)$, entonces, $\nabla_t L' = \partial_t L' = (\kappa\rho_0 a_0^3/\sqrt{3}\mu^2 a^4)\dot{a}$.

Ahora, $\nabla_\mu \nabla_\nu L' = \partial_\mu \partial_\nu L' - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda L' = \partial_\mu \partial_\nu L' - \{\}_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda L' - \frac{1}{2L'(R)}\{2\delta^\lambda_{(\mu} L_{,\nu)} - g^{\lambda\alpha} g_{\mu\nu} L_{,\alpha}\} \partial_\lambda L'$, donde en la última igualdad se usó la ecuación (5.6). Para el modelo de Carroll a tiempos tardíos el último término se puede aproximar a un polinomio de segundo grado en $\kappa T/\sqrt{3}\mu^2$; despreciándolo llegamos al resultado $\nabla_\mu \nabla_\nu L' \simeq \partial_\mu \partial_\nu L' - \{\}_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda L' = \nabla(g)_\mu \nabla(g)_\nu L'$. De manera similar, $\square L' \simeq g^{-1/2} \partial_\mu (g^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu L') = \square(g) L'$. Esto facilita los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
\nabla_t \nabla_t L' &\simeq \frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{\sqrt{3} \mu^2 a^3} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 4 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right), \\
g_{tt} \square L' &\simeq \frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{\sqrt{3} \mu^2 a^3} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right), \\
(L')^{-1} &\simeq \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{4\sqrt{3} \mu^2 a^3} \right)^{-1} \simeq \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{4\sqrt{3} \mu^2 a^3} \right), \\
(L')^{-1} \nabla_t f' \nabla_t f' &\simeq \mathcal{O}_2 \left(\frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{\sqrt{3} \mu^2 a^3} \right) \simeq 0.
\end{aligned}$$

Considerando una métrica FRW plana ($R(g)_{tt} = -3\ddot{a}/a$) y usando la ecuación (5.7) llegamos a la componente (tt) del tensor de Ricci:

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{9 \kappa \rho_0 a_0^3}{8\sqrt{3} \mu^2 a^3} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right). \quad (5.25)$$

De manera similar se obtienen sus componentes espaciales

$$R_{ij} = \left[a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + \frac{3 \kappa \rho_0 a_0^3}{8\sqrt{3} \mu^2 a^3} (a\ddot{a} + \dot{a}^2) \right] \delta_{ij}. \quad (5.26)$$

De las ecuaciones anteriores y de (5.24) se obtienen las ecuaciones de Friedmann a tiempos tardíos para este modelo:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{\sqrt{3}\mu}{4} + \frac{9 \kappa \rho_0 a_0^3}{8\sqrt{3} \mu^2 a^3} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{7\sqrt{3}\mu}{18} \right) = 0, \quad (5.27)$$

$$\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 - \frac{\sqrt{3}\mu^2 a^2}{4} + \frac{\kappa \rho_0 a_0^3}{16\sqrt{3} \mu^2 a^3} (6\ddot{a}a + 6\dot{a}^2 - 5\sqrt{3}\mu^2 a^2) = 0. \quad (5.28)$$

Podemos plantear una solución $a(t)$ que sea asintóticamente la solución en el vacío (5.19),

$$a(t) = e^{Ht} + b(t), \quad (5.29)$$

con $\sqrt{3}\mu = 12H^2$ y $b(t) \ll e^{Ht}$.

De las ecuaciones de Friedmann, a primer orden en $b(t)$ ¹, se tienen

$$\ddot{b} - H^2 b = -\frac{\kappa \rho_0}{12} e^{-2Ht}$$

y

$$\ddot{b} + 4H\dot{b} - 5H^2 b = \frac{\kappa \rho_0}{4} e^{-2Ht}.$$

Restando estas dos ecuaciones,

¹En estas aproximaciones los términos como b^2 , $\dot{b}b$, $\ddot{b}b$, be^{-2Ht} , etc. se desprecian. También se usa $1/(1-x) \simeq 1+x$ ($x \ll 1$). Así por ejemplo, $\ddot{a}/a \simeq be^{-Ht} - bH^2 e^{-Ht} + H^2$.

$$\dot{b} - Hb = \frac{\kappa\rho_0}{12}e^{-2Ht}, \quad (5.30)$$

de donde se obtiene

$$a(t) = e^{Ht} - \frac{\kappa\rho_0}{36H}e^{-2Ht}. \quad (5.31)$$

Las soluciones a tiempos tardíos se aproximan exponencialmente al universo de Sitter.

Entonces para el modelo $1/R$ en la formulación de Palatini tenemos a tiempos muy tempranos, cuando modelamos con un fluido relativista, un universo de Sitter; luego, en épocas donde $\kappa T \gg \sqrt{3}\mu^2$, de la ecuación (5.20) obtenemos RG, para terminar a tiempos tardíos con soluciones asintóticamente de Sitter. Esta última solución contrasta con la expansión tipo $a \propto t^2$ del modelo de Carroll.

5.5. Teorías $L(R)$ y STG

De la misma forma en que definimos el lagrangiano de Helmholtz en el capítulo 3, lo podemos hacer aquí en la formulación de Palatini. Sea

$$\phi := L'(R). \quad (5.32)$$

La acción construida con el lagrangiano de Helmholtz es entonces

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R(\Gamma) - V(\phi)] + S_m(g^{\mu\nu}, \Psi), \quad (5.33)$$

con

$$V(\phi) = \chi(\phi)\phi - L(\chi(\phi)). \quad (5.34)$$

Nuevamente² $\chi(\phi)$ está definido como $\chi(\phi) := R(\Gamma, g)$ lo que requiere que la relación (5.32) sea invertible. Contrayendo la ecuación (5.7) tenemos para el escalar de Ricci

$$R(\Gamma, g) = R(g) + \frac{3}{2}\phi^{-2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - 3\phi^{-1}\square\phi. \quad (5.35)$$

Sutituyendo en la acción (5.33) tenemos,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R(g) + \frac{3}{2}\phi^{-1}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi)] + S_m(g^{\mu\nu}, \Psi), \quad (5.36)$$

donde el término de divergencia total $\square\phi$ ha sido despreciado. La acción (5.36) es una teoría STG con un parámetro de Brans-Dicke $w = -3/2$. Lo que se debe notar aquí es que no hemos cambiado de marco; comenzamos en el marco de Jordan y seguimos en el marco de Jordan, no se ha hecho más que una redefinición de las variables y hemos llegado a STG, donde la función $L(R)$ se

²Las diferencias con el capítulo 3 son de notación: χ corresponde a r y ϕ corresponde a p

presenta en el potencial. La acción de materia quedó intacta. Esto representa una diferencia sustancial a lo encontrado en el capítulo 3; aquí la ambigüedad se pierde: las teorías $L(R)$ (con $L'(R), L''(R) \neq 0$) son STG con $w = -3/2$; la única diferencia es la representación, lo cual es físicamente irrelevante.

Más aún, una conexión simétrica tiene 40 grados de libertad y ha sido reemplazada por un campo escalar que sólo tiene uno [41]. Este resultado no parece tan sorprendente ya que existe una relación entre la conexión y la métrica: Γ es la conexión de la métrica conforme $h_{\mu\nu} = L'g_{\mu\nu}$, por tanto el único grado de libertad que tiene es el campo escalar ϕ , cuya dinámica es la ecuación de la traza (5.8), que escrita en estas variables es

$$\chi(\phi)\phi - 2L(\chi(\phi)) = \kappa T. \quad (5.37)$$

Conclusiones

Hemos estudiado de una manera muy general a las teorías $f(R)$, encontramos las ecuaciones de campo resultantes y su cosmología en el esquema FRW. Hemos puesto especial atención en la posibilidad de obtener un crecimiento acelerado del factor de escala cósmico y en este sentido algunos modelos $f(R)$ son exitosos. Sin embargo, estas teorías son muy dudosas cuando intentamos reproducir otros aspectos gravitacionales donde RG es exitosa, en especial aquellos relacionados con las observaciones en el sistema solar.

Resulta extraño que una teoría gravitacional con una sola variable de campo tenga dinámica en el vacío, cómo es que podemos hablar de dinámica en el vacío contenida totalmente en un lagrangiano que no posee explícitamente alguna expresión de autointeracción. En este sentido parecen conceptualmente ventajosas las teorías escalares tensoriales, donde la gravitación tiene variables no geométricas inherentes al espacio-tiempo. Más aún, una teoría puramente métrica $f(R)$ en el vacío puede ser llevada a STG mediante una transformada de Legendre, donde sus aspectos de autointeracción son revelados, entonces surge la pregunta si en una teoría $f(R)$ la métrica es en realidad una mezcla de distintos campos tanto geométricos como no geométricos. De ser esto cierto entonces el marco de Einstein es el marco de las variables físicas, de otra manera se violaría el principio de equivalencia débil al no todos los campos acoplarse de la misma manera a la gravitación, entonces podríamos decir que las teorías $f(R)$ son otra manera de escribir STG, quizá ventajosa en el sentido algebraico para algún modelo particular.

Los modelos $f(R)$ que aquí proponemos además de poder explicar la expansión acelerada del universo tienen la ventaja de no ser singulares en el escalar de curvatura, con lo que aceptan como solución al espacio de Minkowski. Después de todo los experimentos dicen que vivimos en un espacio-tiempo localmente Minkowski. Para un completo análisis de estos modelos faltan muchos pasos, primero éstos deben ser capaces de formar estructuras galácticas, lo que va más allá de este trabajo. También deben tener un aceptable límite newtoniano que bien podría ser una métrica Schwarzschild-deSitter.

En conclusión, la única ventaja que parecen tener las teorías $f(R)$ sobre RG es que éstas explican el crecimiento acelerado del universo sin utilizar el extraño concepto de energía oscura, que no tiene otro fundamento que esta misma aceleración. En este sentido son casi lo mismo, son sólo una manera de introducir la expansión acelerada del universo. Hacerlo con energía oscura tiene como desventaja que uno introduce el problema de la constante cosmológica, que en física de partículas representa el problema teórico moderno más importante a resolver. Ahora bien, en la mayoría de los modelos de energía oscura, ésta no es aglutinante y permea todo el espacio, en este sentido ¿no bien podría ser un aspecto no geométrico de la gravitación?, es decir, una propiedad inherente al espacio-tiempo, como sucede con la constante cosmológica. Justamente esta posibilidad se puede contemplar en las teorías $f(R)$ cuando al hacer el mapeo de Legendre quedan revelados sus aspectos gravitacionales no

geométricos que dan lugar a la expansión acelerada del factor de escala. La interpretación alternativa es considerar a las teorías $f(R)$ en su marco no-lineal y considerar su dinámica acelerada como resultado de la geometría. Ambas interpretaciones son, en principio, posibles.

Bibliografía

- [1] Bertschiger E. *Symmetry Transformations, the Einstein-Hilbert Action, and Gauge Invariance*, MIT OpenCoursesWare/Physics/8.962. Spring 2002.
- [2] Barrow J.D. *Mon. Not. R. astron. Soc* **282**, 1397 (1996)
- [3] Blau M., *Lecture Notes in General Relativity*, (2006). [www.unin.ch/phys/string/lecturenotes.html].
- [4] Brans C.H., Dicke R.H. *Phys. Rev.* **124** 925 (1961).
- [5] Brans C.H. *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history*. [arXiv: gr-qc/0506063].
- [6] Caldwell R.R., Dave R., Steinhardt P.J., *Cosmological imprint of an energy component with general equation of state*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582-1585, (1998).
- [7] Capozziello S. *Curvature Quintessence* *Int.J.Mod.Phys. D11* (2002) 483-492, [arXiv: gr-qc/0201033].
- [8] Capozziello S., Carloni S., Troisi A., *Quintessence without scalar fields* *Recent Research Developments in Astronomy & Astrophysics - RSP/AA/21-2003*. [arXiv:astro-ph/0303041].
- [9] Carrol S.M., Duvvuri V., Trodden M., Turner M.S., *Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics*, *Phys. Rev. D* **70**, 043528 (2004), [arXiv: astro-ph/0306438].
- [10] Carrol S.M. et al. *The Cosmology of Generalized Modified Gravity Models*, [arXiv: astro-ph/0410031].
- [11] Erickcek A.L., et al. *Solar System tests do rule out $1/R$ gravity*. *Phys. Rev. D* **74**, 121501(R) (2006). [arXiv: astro-ph/0610483].
- [12] Esposito-Farèse G., Polarski D., *Scalar-tensor gravity in an accelerating universe*, [arXiv: gr-qc/0009034].
- [13] Cervantes-Cota J.L., *Induced Gravity and Cosmology*, *Konstanzer Dissertation* 506 (1996).

- [14] Cervantes-Cota J.L., *An Introduction to Standard Cosmology*, Lect. Notes Phys., 646 (2004).
- [15] Chiba T., *1/R Gravity and Scalar-Tensor Gravity*, [arXiv: astro-ph/0307338].
- [16] Clifton T., *Alternatives Theories of Gravity*, Doctoral Dissertation, King's College (2006), [arXiv: gr-qc/0610071].
- [17] Copeland E. J., Sami M., Tsujikawa S., *Dynamics of Dark Energy*, [arXiv: hep-th/0603057].
- [18] Dvalli G.R., Gabadadze G., Purrati M., *Phys. Lett. B* 485 (2000) 208.
- [19] Faraoni V., *Conformal transformations in classical gravitational theories and cosmology*. [arXiv:gr-qc/9811047].
- [20] Faraoni V., *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands (2004).
- [21] Faraoni V., *Solar System experiments do not yet veto modified gravity models*. *Phys. Rev. D* 74, 023529 (2006). [arXiv: gr-qc/0607016]
- [22] Ferraris M., Francaviglia M., *The Universality of Einstein Equations*, *Class. Quantum Grav.* **11** 1505-1517 (1994). [arXiv: gr-qc/9303007].
- [23] Filippenko A., *The Accelerating Universe and Dark Energy: Evidence from Type Ia Supernovae*, Lect. Notes Phys., 646 (2004).
- [24] Hanany S. et al. *Ap. J.* **545**, L5 (2000).
- [25] Hawking S.W. and Ellis G.F.R , *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press (1973).
- [26] Jaffe A.F. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 3475 (2001).
- [27] Kagramanova V. et. al *Solar system effects in Schwarzschild-de Sitter spacetime*, *Phys.Lett. B*634 (2006) 465-470. [arXiv:gr-qc/0602002].
- [28] Lass H., *Análisis Vectorial y Tensorial*, C.E.C.S.A, (1973).
- [29] Magnano G., Sokolowski L. M., *Phys. Rev. D* **50**, 5039 (1994) [arXiv: gr-qc/9312008].
- [30] Magnano G., Ferraris M., Fracaviglia M., *Gen. Rel. Grav.*, **19**, 465 (1987).
- [31] Magueijo J., Albrecht A., *A time varying speed of light as a solution of cosmological puzzles*. [arXiv: astro-ph/9811018].

- [32] Narlikar J.V. *Introduction to Cosmology*, 2 ed., Cambridge University Press (1993).
- [33] de la Peña L., *Introducción a la mecánica cuántica*. Tercera edición. Ed. FCE (2006).
- [34] Perlmutter S. et al., *Ap.J.* **517**, 565 (1999). [arXiv: astro-ph/9812473].
- [35] Poincaré H., *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, vol. III Paris (1899).
- [36] Rajaraman A., *Newtonian Gravity in Theories with Inverse Powers of R*, [arXiv: astro-ph/0311160].
- [37] Santos J., et.al. *Energy Conditions and Supernovae Observations* [arXiv: astro-ph/0608031].
- [38] Seifert M.D. *Stability of spherically symmetric solutions in modified theories of gravity*. [arxiv: gr-qc/0703060]
- [39] Sokolowski L.M., *Class. Quantum. Grav.* **24** (2007) 3391-3411
- [40] Sotiriou T.P., *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity* [arXiv:gr-qc/0604006].
- [41] Sotiriou T.P., et al. *Theory of gravitation theories: a no-progress report* [arXiv.0707.2748 v1 [gr-qc]].
- [42] Spergel D.N. et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [arXiv: astro-ph/0302209].
- [43] Spergel D.N. et al., *WMAP 3yr Collaboration: Implications to Cosmology*.
- [44] Starobinsky A. A., *JETP Lett.* **30**, 682 (1979)
- [45] Starobinsky A. A., *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980)
- [46] Utiyama R., De Witt B.S., *J Math. Phys.* (1962) 608.
- [47] Vollick D.N., *Phys. Rev. D* **68**, 063510 (2003). [arXiv: astro-ph/0306630].
- [48] Will C.M, *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press, Revised Ed. (1993)
- [49] Will C.M., *The confrontation between GR and experiment*, [arXiv:gr-qc/0103036].