UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL NÚMERO DE ROTACIÓN COMO INVARIANTE EN LA DINÁMICA DEL CÍRCULO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RODRIGO PUCHET DUTRENIT

TUTOR

DR. GERMÁN AUBIN ARROYO CAMACHO

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno Puchet Dutrenit Rodrigo 55 54 63 90 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 401047972
2. Datos del tutor Dr Germán Aubin Arroyo Camacho
3. Datos del sinodal 1 Dr Adolfo Guillot Santiago
4. Datos del sinodal 2 Dr Alberto Santiago Verjovsky Solá
5. Datos del sinodal 3 Dra Laura Ortiz Bobadilla
6. Datos del sinodal 4 Mat Luis Alberto Briseño Aguirre
7. Datos del trabajo escrito El número de rotación como invariante en la dinámica del círculo p98 2007

Agradecimientos

No cabe duda que el verdadero valor de esta tesis recae en la amabilidad, el cariño y la inteligencia de muchísimas personas. Sin embargo, amable lector, sería muy cansado para usted que yo mencionara a todos los que directa o indirectamente me ayudaron en este trabajo. Por lo que he decidido agradecerle solamente a las personas que, mi memoria considera, colaboraron de manera directa en la parte académica o en la parte práctica de esta tesis. Pido de antemano una disculpa a todos aquellos que involuntariamente olvide. Agradezco profundamente a:

Aubin Arroyo Camacho, en primer lugar por haber aceptado ser mi tutor, pero sobre todo por la paciencia y cariño que le tuvo a este proyecto. Por enseñarme a leer y escribir matemáticas a pesar de mis necedades.

Andrés Sambarino Henderson, Martín Puchet Dutrenit y Rafael Potrie Altieri, por ser los correctores de mayor calidad que cualquiera puede tener, pero más importante aún, por haberse involucrado con este trabajo como si fuera propio y empujarme siempre con su amor y su inteligencia infinita.

Adolfo Guillot Santiago, por haber aceptado ser mi sinodal y leer minuciosamente el trabajo, pero principalmente por se un compañero durante este proceso y estar ahí para resolver cada una de mis recurrentes dudas.

Alberto Verjovsky Solá, por haber aceptado ser mi sinodal, pero por sobretodas las cosas por transmitirme cotidianamente ese amor y esa pasión tan maravillosas que tiene él por las matemáticas, que lograron entusiasmarme en los momentos más difíciles.

José Seade Kuri, por ofrecerme su amistad abiertamente y ayudarme a encontrar los motivos para cerrar este ciclo.

Laura Ortiz Bobadilla, por haberse hecho un tiempito para ser mi sinodal, y sobre todo por haberme iniciado, junto con Ernesto Rosales González, en el estudio de las ecuaciones diferenciales de una manera apasionada.

Luis Briseño Aguirre, por haber aceptado ser mi sinodal en medio de su sabático, pero principalmente por enseñarme que no basta la cabeza para hacer matemáticas.

La fundación Chilapa-Zamora y al Refugio de los necios, por apoyarme desinteresadamente con todos los recursos y muchos más de los que un estudiante pueda necesitar.

Carlos Azar Manzur, por ayudarme a corregir el texto en medio de su recuperación.

Todo el personal de la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M. por ayudarme a resolver cada uno de los problemas que tuve. En especial a: Elizabeth Domínguez Soto, Pilar López Rico, Víctor Domínguez Flores, Gonzalo Albarrán Sosa y María Sarabia Ortega.

El proyecto CONACyT No. G-36357-E: "Sistemas dinámicos y geometría compleja"del Instituto de Matemáticas - Unidad Cuernavaca de la U.N.A.M.

Índice general

Introducción

El número de rotación como invariante en la dinámica del círculo. Este conjunto de palabras ha causado un sinnúmero de reacciones cuando las he dicho como respuesta a la pregunta: ¿cuál es el título de tu tesis? En la gran mayoría de los casos, estas reacciones vienen acompañadas de la pregunta: ¿y de qué trata? Pues trata de los sistemas dinámicos en el círculo y espero que después de leer este trabajo, dicho conjunto de palabras provoque una reacción distinta a la extrañeza.

Ya sé, ya sé, ya escuché la siguiente pregunta: ¿y qué son los sistemas dinámicos? Los sistemas dinámicos son una rama de las matemáticas iniciada por Jules Henri Poincaré (1854-1912) y George David Birkhoff (1884-1944) en los primeros años del siglo XX. La primera intención fue la de estudiar el comportamiento cualitativo de las ecuaciones diferenciales, tratando de responder preguntas como: ¿Al pasar un tiempo largo, el sistema podrá estabilizarse? ¿Qué estados son en los que puede entrar el sistema? ¿Qué pasa si se alteran las condiciones iniciales? Los sistemas son el estudio de la acción del tiempo en un espacio a través de una regla dada que lo transoforma. El estudio de los sistemas dinámicos es el universo donde se desarrolla este trabajo.

Cabe señalar que Henri Poincaré fue uno de los científicos más importantes de la historia moderna (ver fotografía de la figura 1), no sólo por sus aportes a las Matemáticas sino también por los aportes que realizó en Física y Filosofía de la Ciencia, siendo protagonista en la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein (1879-1955) y autor de varios textos sobre el método y los valores de la ciencia, los cuales tienen validez hasta el día de hoy. Sobre sus aportes matemáticos hay uno que tiene una relación directa con este texto y es el descubrimiento (o creación, no es lugar de disquisiciones filosóficas) del grupo fundamental de un espacio topológico. Sirva este

Jules Henri Poincaré
1854-1912

George David Birkhoff
1884-1944

aporte de Poincaré para seguir ubicando el contexto en el que se desenvuelve la teoría que estudiaremos en las páginas siguientes.

Figura 1: Algunos de los científicos presentes en esta fotografía son: Marie Curie, Louis-Victor de Broglie, Albert Einstein, Hendrik Antoon Lorentz, Max Planck, Henri Poincaré y Ernest Rutherford

Nuestro universo de estudio, los sistemas dinámicos, tiene muchas galaxias, nosotros viviremos en una de ellas: *los sistemas dinámicos topológicos.* La topología, una de las ramas más importante de las matemáticas, nació un poco antes que los sistemas dinámicos en el siglo XVII. En sus primeros albores Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) la definió como el análisis de la posición:

"...Además de aquella parte de la geometría que trata sobre cantidades y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces desconocida, fue G. Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola posición y de las propiedades provenientes de la posición en todo lo cual no se ha de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo..."

Leonhard Euler (1707-1783)

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

Leonhard Euler
1707-1783

El párrafo anterior es la introducción del artículo en el que se da la solución del famoso problema de los puentes de Königsberg en 1726. Éste ilustra con mucha claridad el objetivo primario de la topología y nos sirve para conocer la razón más primitiva del porqué ubicaremos nuestro estudio dentro de los sistemas dinámicos topológicos, y es que no nos interesa hacer cálculos o hacer aproximaciones númericas, sino estudiar el movimiento y las propiedades en el espacio de nuestro objeto de estudio, aún no definido.

Ahora que sabemos que desarrollaremos nuestro estudio dentro de los sistemas dinámicos topológicos es necesario que conozcamos el lugar donde los vamos a utilizar, que como ya anunciamos rápidamente es el círculo. Sí, leyó usted bien, esa figura que conocemos desde pequeños nos servirá como el espacio en el que ubicaremos nuestro trabajo. Veremos que esta figura tan conocida y utilizada, bien y mal, dentro y fuera de las matemáticas, si la abstraemos matemáticamente se vuelve un espacio tan rico e interesante como un espacio de dos, tres o más dimensiones. Probaremos que nuestro espacio tiene una estructura algebraica y topológica, y estudiaremos indirectamente la importancia del grupo fundamental que investigó Poincaré.

Hasta ahora hemos descrito con qué y en dónde vamos a vivir a través de estas páginas; sabemos que haremos sistemas dinámicos topológicos en el círculo unitario. ¿Pero qué nos queremos responder? Para poder planteasrnos nuestra pregunta debemos explicar un poco más aquellas preguntas iniciales de la teoría de los sistemas dinámicos que se hicieron Poincaré y Birkhoff.

La evolución de la transformación puede representarse como una construcción abstracta cuyas componentes son las coordenadas del espacio. Un buen ejemplo de sistema dinámico es un péndulo simple, en el que las dos coordenadas son la posición y la velocidad. Estas determinan un estado, y nuestro sistema es el espacio de estos estados. Las leyes de Newton dan una regla, expresada matemáticamente por una ecuación diferencial, que describe la evolución del estado del sistema. Conforme el péndulo oscila de un lado a otro, el estado inicial cambia de posición y de velocidad, por lo que recorre un camino en neustro espacio al que llamaremos órbita. Estos caminos pueden ser distintos cada vez o no, esto depende del estado inicial. Estas órbitas determinan los distintos comportamientos dinámicos que puede tener el modelo del péndulo.

Como ya mencionamos no nos interesa estudiar la representación explícita de las órbitas sino su comportamiento cualitativo. Antes de plantearnos la pregunta principal de este trabajo debemos saber cómo comparar sistemas dinámicos. Es posible que un mismo modelo dinámico esté representado en diferentes sistemas de coordenadas; sin embargo, sus órbitas deberán ser las mismas salvo por ese cambio de coordenadas. En general, dos sistemas dinámicos serán equivalentes si sus órbitas son las mismas bajo algún cambio de coordenadas.

Encontrar este cambio de coordenadas no es una tarea fácil, por lo que la idea de construir un objeto asociado a cada sistema dinámico que nos permita determinar cuándo dos sistemas dinámicos son equivalentes o no, comparando dicho objeto, suena fantástica. A un objeto de esta naturaleza se le conoce como un invariante dinámico. Ahora sí podemos intuir qué intenta responder la pregunta principal de este trabajo.

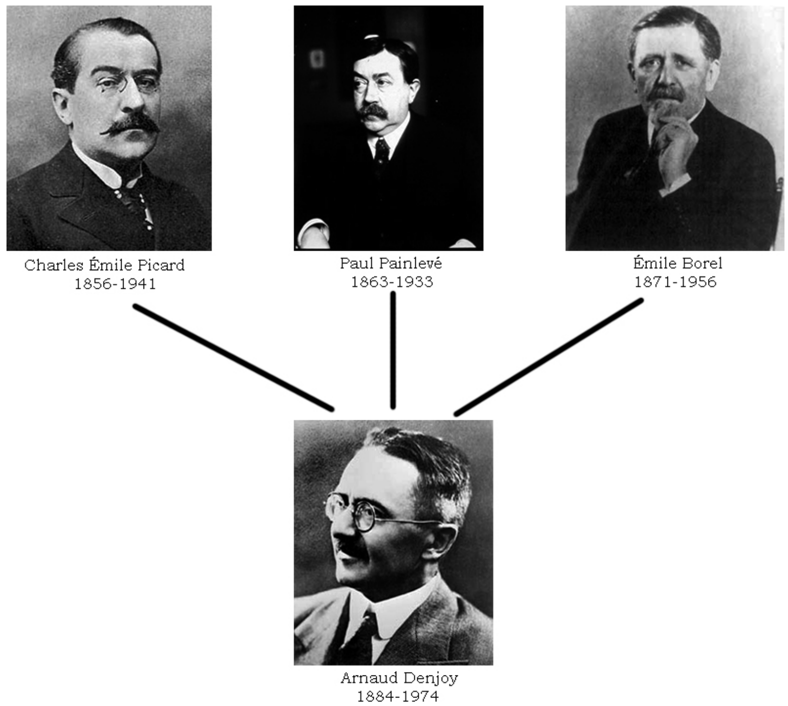
¿Existe un invariante que permita catalogar las diferentes dinámicas de los sistemas dinámicos en el círculo?

Los sistemas dinámicos en el círculo fueron estudiados en primera instancia por Poincaré, quien los necesitaba para su investigación de la ecuaciones diferenciales en el toro[1] que realizaba alrededor de 1894. Posteriormente, hacia 1916, Piers Bohl (1865-1921) aportó resultados a esta teoría mientras estudiaba sistemas dinámicos en la esfera. Entre 1924 y 1928 Hellmuth Kneser (1898-1973) y Jakob Nielsen (1890-1959) esbozaron pruebas de la existencia del número de rotación y mostraron indirectamente propiedades de los levantamientos de las funciones del círculo. Con estos conocimientos, en 1932, Arnaud Denjoy (1884-1974) encontró las condiciones para determinar la dinámica de nuestras funciones. Una vez conocido este trabajo, Kneser publicó, en 1933, un resultado equivalente con otras hipótesis. Bohl, Denjoy y Kneser, continuaron la investigación de Poincaré sobre el toro. El estudio de esta teoría continuó y está vivo hasta nuestros días. Afortunadamente no está cerca de ser un área terminada, siguen apareciendo constantemente nuevos resultados. Durante los últimos 40 años, matemáticos de todo el mundo han presentado sus logros en la investigación de este tema, abriendo más y más líneas de estudio para futuras investigaciones.

Gran parte del trabajo expuesto en estas páginas se lo debemos a Arnaud Denjoy, quien nació en Auch, Francia. Denjoy fue alumno de Émile Borel (1871-1956), Paul Painlevé (1863-1933) y Charles Émile Picard (1856-1941). El Teorema de Denjoy es el resultado que responde a la pregunta de este trabajo. Fue publicado en 1932 [Den], cuando Denjoy tenía 48 años. La motivación que tuvo surgió de querer estudiar bajo qué condiciones cierto tipo de funciones pueden ser catalogadas según la dinámica que generan. La conclusión a la que llegó es que podemos asociarle un número a cada transformación del círculo de manera que si dos transformaciones del círculo tienen este número igual, entonces sus dinámicas son indistinguibles.

El Teorema de Denjoy ha sido estudiado y demostrado por muchos matemáticos. El alma de la prueba que nosotros haremos fue elaborada por Robert S. MacKay (1956-) en [Mac]. Las razones por las que seguiremos esta prueba

[1] Espacio parecido a una dona.



y no la elaborada por Denjoy en [Den] son las siguientes. En primer lugar la notación que utiliza Denjoy quedó obsoleta con la introducción del estudio moderno de los sistemas dinámicos. En segundo término, el trabajo que realiza MacKay está enfocado únicamente al estudio del teorema, a diferencia del de Denjoy, lo que le atribuye la propiedad de ser un texto enfocado y conciso. Por último, y la que considero la razón más importante, la demostración en [Mac] es constructiva y geométrica, tiene una prueba autocontenida y si se tiene paciencia y dedicación puede ser entendida por un estudiante de los últimos semestres de la carrera de matemáticas; estos atributos no los tiene el trabajo [Den], en el cual se realiza una prueba desde el estudio de otros temas y no tiene una estructura lineal, es decir que para comprender la demostración hay que valerse de muchas herramientas y de aprender a leer el trabajo con distintas vistas.

A pesar de que MacKay realiza un estupendo trabajo, no deja de tener partes poco explicadas. En esta tesis la idea de su demostración se siguió, pero se decidió exponer con detalle todos los pasos e inventarse algunos para llenar los huecos de su exposición. Además, el presente texto pretende aclarar, no sólo la elaboración de cada parte de la demostración del teorema, sino también el significado del mismo y de cada uno de los conceptos que nombra. Construye y explica las herramientas que utilizó Denjoy, ahora con un lenguaje moderno, y también las utilizadas por MacKay; pero con la idea de escribir con mayor claridad, antes de llegar al capítulo del teorema, la teoría que contiene a los conceptos que dan lugar al enunciado. Estas caractérísticas conforman un texto, que creo puede de ser interesante para estudiantes primerizos en los sistemas dinámicos, y se escribió con la intención de ser autocontenido, lineal y transparente.

El Teorema del valor medio, uno de los resultados más importantes del cálculo diferencial, es fundamental en las demostraciones que estudiaremos pues nos permite obtener información de la derivada a partir de la dinámica de la transformación y viceversa. Básicamente es la herramienta que garantiza la validez en todas las pruebas donde se habla de la derivada. Lo sorprendente es que un resultado tan intuitivo permita analizar la dinámica del círculo.

Finalmente me gustaría resaltar que los sistemas dinámicos, a pesar de ser una de las ramas más jóvenes de las matemáticas, es una de las más interesantes. Involucra de manera directa a la topología, al análisis y al álgebra, las cuales conforman casi todo el universo matemático, como sus herramientas. En los últimos 50 años ha aportado resultados para numerosas disciplinas distintas, más allá de las ciencias exactas, volviéndose un enlace sólido y moderno de las matemáticas con el resto de las áreas de investigación. No cabe duda que queda mucho por estudiar dentro de esta rama, pero se vuelve cada vez más evidente que este enlace en el que se ha convertido, pasará a ser fundamental, como eje de los estudios interdiciplinarios que cada vez se hacen más. Dentro de esta interesante historia que ha escrito esta disciplina en poco más de cien años es donde vive el presente trabajo. El círculo es un espacio no trivial donde se pueden hacer sistemas dinámicos, por ello es el escenario que permite introducirlos sin las complicaciones que se dan en dimensiones mayores. Aún así, aunque el espacio sea sencillo, los problemas básicos y las herramientas de la dinámica aparecen, produciendo en sí mismo una teoría muy interesante.

Empecemos así, con esta última idea, a reducir nuestra dimensión para poder a adentrarnos en el rico y profundo estudio de los sistemas dinámicos topológicos en el círculo.

* * *

Este trabajo pretende ser un texto que sirva para introducir a los estudiantes de licenciatura al estudio de los sistemas dinámicos en el círculo, para ello, en el capítulo 1, comenzaremos definiendo los conceptos básicos de esta disciplina, tratando de utilizar un lenguaje y una notación sencilla. A partir de estas herramientas, probaremos de manera constructiva las propiedades dinámicas que necesitaremos para adentrarnos a nuestro estudio. Al final de las secciones que versan sobre sistemas dinámicos topológicos describiremos algunos ejemplos que a mí me sirvieron mucho para entender realmente sobre lo que estaba escribiendo.

Una vez expuesta la teoría básica sobre los sistemas dinámicos topológicos, pasamos al capítulo 2. Aquí estudiaremos primero la estructura algebraica del círculo y después su estructura topológica. Dentro de esta sección introduciremos las nociones de espacio cubriente y de levantamiento, que serán fundamentales para la definición del número de rotación. Estudiaremos la familia de rotaciones del círculo y probaremos varias de sus propiedades dinámicas. En este mismo capítulo, definiremos y estudiaremos el concepto del número de rotación.

Finalmente la última sección del capítulo 2, en la que haremos la exposición de la propiedades dinámicas, y sus demostraciones, que genera el número de rotación, dejará el terreno preparado para la lectura del capítulo 3. En éste se demostrará el Teorema de Denjoy, pudiendo así pasar a las conclusiones.

Las imágenes utilizadas de la presente introducción fueron tomadas de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/, http://www.wikipedia.org/.

Capítulo 1

Sistemas dinámicos topológicos

1.1. ¿Qué es un sistema dinámico?

El estudio de la dinámica tiene dos vertientes conceptuales, la primera podría remontarse a Heráclito, el movimiento, lo que fluye: "*Aun los que se bañan en los mismos ríos se bañan en diversas aguas*"[G] y la segunda a Parménides, lo estable, aquello que permanece: "*...del Ente es ser; del Ente no es no ser*"[G].

Los sistemas dinámicos se preguntan cómo evolucionan los estados de un sistema y qué hacen al evolucionar; esto corresponde a un espacio de puntos y a una ley que determina como estos puntos se mueven en el espacio. Plantear tan concretamente una noción básica de lo que es un sistema dinámico requiere al menos comprender como surgió la primera idea. Como no lo podría explicar mejor que en estos párrafos de Arroyo-Seade [AS], los cito:

«*Resolver una ecuación diferencial, en general, no es una tarea fácil e inclusive puede llegar a ser una empresa imposible. Esto ya lo sabía Jules Henri Poincaré (1854-1912), un siglo atrás. En particular, las ecuaciones que rigen el movimiento de más de tres cuerpos bajo el influjo de su atracción gravitacional, de acuerdo con las leyes de Newton, que en ese tiempo estudiaban, han prevalecido intactas, o casi intactas, hasta ahora, con excepción de algunas situaciones particulares.*

Ante la imposibilidad de resolver las ecuaciones diferenciales en general, *el mismo Poincaré propuso enfocar el problema desde otra óptica. En lugar de procurar por una solución exacta, apuntó en dirección de las propiedades de las soluciones, las cuales podríamos determinar sin resolverlas explícitamente, a partir de la estructura del espacio o bien de alguna propiedad de la ecuación...*

A raíz de esto Poincarè fundó una nueva rama de las matemáticas: los sistemas dinámicos. Esta rama también podría llamarse "estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales". Además, mejor si estas propiedades son válidas, no para una ecuación en particular, sino para algún subconjunto de ecuaciones "semejantes".»

Ahora que tenemos una noción de lo que es un sistema dinámico y de dónde surgió la primera idea podemos dar una definición que nos sirva como base para poder precisar algunos conceptos relacionados.

Definición 1. Sea $(M,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Un *sistema dinámico discreto* en M es una función $\varphi : \mathbb{Z} \times M \to M$ continua tal que:

1) $\varphi(0, \cdot)$ es la función identidad y

2) $\varphi(n, \varphi(m, x)) = \varphi(n + m, x)$, para todos n, $m \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in M$.

A pesar de que más adelante repasaremos la noción de espacio topológico, sería útil ejemplificar la definición anterior con un sistema dinámico discreto lo más simple posible. Así, consideramos el espacio topológico $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología usual, es decir, la determinada por el conjunto de abiertos $\mathcal{T}$definido por los intervalos abiertos (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que $\varphi(n, x) = x + n$, con $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, es un sistema dinámico discreto que va de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para mostrar que esto es cierto basta probar que φ cumple con las dos condiciones de la definición. Observe que φ es la traslación a la derecha.

Entonces, $\varphi(0, x) = x + 0 = x$, por lo tanto cumple la primera condición. Ahora, $\varphi(n, \varphi(m, x)) = \varphi(n, x+m) = (x+m)+n = x+(n+m) = \varphi(n+m, x)$, para todos $n, m \in \mathbb{Z}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, así que cumple también con la segunda condición, probando que la φ propuesta es un sistema dinámico discreto.

A partir de esta definición podemos observar que un sistema dinámico es la evolución en el tiempo de un espacio dado a través de una transformación. Esta transformación no depende del tiempo en el que se aplica, es decir, es una ley invariante en el tiempo y se ve reflejado estudiando con atención la segunda condición de la definición: $\varphi(t+s,x) = \varphi(t,\varphi(s,x))$. Esta característica es propia de los *sistemas autónomos*.

Es necesario aclarar que no sólo existen sistemas dinámicos discretos y que a pesar de que en este trabajo no se estudiarán otros tipos presentamos la definición de un sistema dinámico continuo para comprender las diferencias conceptuales.

Definición 2. Sea M un espacio topológico. Un *sistema dinámico continuo* en M es una función $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ continua tal que:

1) $\Phi(0,\cdot)$ es la función identidad y

2) $\Phi(s,\Phi(t,x)) = \Phi(s+t,x)$, para todos s, $t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in M$.

Espacios topológicos

Después de haber leído las definiciones anteriores puede ser que nos hayan sorprendido las palabras *espacio topológico*. Es posible que para algunos sea muy común esta noción, de ser así, los siguientes párrafos son prescindibles.

En el estudio de los sistemas dinámicos es fundamental la noción de cercanía. El concepto de distancia entre puntos es una primera aproximación.

Definición 3. Un *espacio métrico* es un par (X,d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función que verifica lo siguiente:

1. $d(x,y) \geqslant 0$ para todos x e, $y \in X$, y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$ para todos x e, $y \in X$.
3. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ para todos $x,y,z \in X$.

La función d se denomina *distancia* o *métrica* en X. Si $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ definimos la bola centrada en x de radio r como:

$$B_r(x) = \{y \in X |\ d(x,y) < r\}.$$

Dos ejemplos conocidos de espacios métricos son: $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$ o el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ con $d(\tilde{x},\tilde{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.

En un espacio métrico podemos hablar de sucesiones convergentes y funciones continuas entre ellos, de la misma manera como lo hacemos cuando estudiamos cálculo en la recta real. Sin embargo, la noción de *espacio topológico*, es un concepto mucho más general.

Definición 4. Una *topología* en un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que cumple con las siguientes propiedades:

1) El conjunto vacío $\emptyset$ y el total X están en $\mathcal{T}$.

2) La unión arbitraria de elementos de la colección de subconjuntos de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

3) La intersección de elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un espacio métrico (X,d) nos define una topología en X como sigue: decimos que $A \subset X$ está en $\mathcal{T}$ si $A = \emptyset$ o si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A$.

A un conjunto X para el cual una topología haya sido definida se le llama *espacio topológico*. Más correctamente, un espacio topológico es un par ordenado $(X, \mathcal{T})$ compuesto por un conjunto X y una topología $\mathcal{T}$ de X. A los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama subconjuntos ***abiertos*** de X y decimos que un subconjunto de X es ***cerrado*** si su complemento es abierto.

Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ y un subconjunto $Y \subset X$, decimos que Y hereda la topología de X definida por:

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

En este caso decimos que $(Y,\mathcal{T}_Y)$ es un *subespacio topológico* de $(X,\mathcal{T})$.

Una definición heurística del concepto de vecindad de un punto p es: conjunto que contiene a p tal que si movemos un poco el punto éste no deja de pertenecer al conjunto. Todos los espacios topológicos que usaremos en este trabajo tendrán además la propiedad de ser espacios de Hausdorff.

Definición 5. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado un *espacio de Hausdorff* si para cada par x_1, x_2 de elementos distintos de X existen vecindades U_1 y U_2 de x_1 y x_2, respectivamente, que sean disjuntas.

La definición anterior quiere decir que si un espacio topológico es de Hausdorff puntos distintos del espacio tienen vecindades disjuntas. Ahora que hemos definido el concepto de espacio topológico estamos en condiciones de comentar algunas de sus propiedades.

Decimos que una función $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \sigma)$ es *continua* si la preimagen de abiertos es abierta, es decir, que para todo $U \in \sigma$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Dos espacios topológicos son equivalentes si existe una función biyectiva, continua y con inversa continua entre ellos; una función que cumple esto es llamada *homeomorfismo*. Esta función coordina biunívocamente los abiertos de uno con los abiertos del otro, y por lo tanto todas las propiedades topológicas entre ellos.

A partir de esta definición observamos que un sistema dinámico discreto como lo definimos queda determinado por un homeomorfismo de M, ya que $\varphi(1, \cdot)$ tiene inversa $\varphi(-1, \cdot)$ y para cualquier n la función $\varphi(n, \cdot)$ resulta de componer $\varphi(1, \cdot)$ con sí mismo n veces. Por esto cuando tengamos un homeomorfismo de M en M lo pensaremos como un sistema dinámico discreto.

Para terminar de ilustrar esta sección ejemplificaremos con uno de los sistemas dinámicos más famosos: *el shift*[1] *de Bernoulli.*

Consideremos el espacio de las sucesiones bi infinitas de ceros y unos, es decir, puntos de la forma:

$$x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

Esto es, $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, o sea, $\Sigma_2 = \{x \mid \mathbb{Z} \to \{0,1\}\}$.

Para este espacio podemos considerar la siguiente métrica: si x e y pertenecen a Σ_2 definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}},$$

[1] El significado más apropiado en español de shift es: *movimiento*

como $|x_n - y_n|$ es siempre 0 ó 1, la serie anterior converge, y como son todos términos positivos es fácil ver que $d(x, y) = 0$ implica que $y = x$. A través de esta métrica podemos decir que (Σ_2, d) es un espacio métrico y por lo tanto un espacio topológico.

Tomemos ahora la función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ tal que:

$$\sigma(x) = x^{'} = (\ldots, x^{'}_0, x^{'}_1, \ldots),$$

donde $x^{'}_n = x_{n+1}$. Es decir, la nueva sucesión de ceros y unos $\sigma(x)$ tiene por término n-ésimo el término $(n-1)$-ésimo de la sucesión x. Por ejemplo, si $x_n = 0$ para todo $n \neq 0$ y $x_0 = 1$, entonces $\sigma(x_n)$ es cero para todo x_n distinto de 1 y $\sigma(x_1) = x_{1-1} = x_0 = 1$.

Por último, observemos que la función σ es biyectiva y continua, es decir que es un homeomorfismo. La biyectividad de σ es bastante obvia, para probar la continuidad sugerimos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon)$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $d(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$ con x e $y \in \Sigma_2$.

Esta función σ es un sistema dinámico discreto y, como ya mencionamos anteriormente, es conocido como el *shift* de Bernoulli.

1.2. Dinámica topológica

En todas las ramas de las matemáticas es necesario tener herramientas adecuadas para poder trabajar. Los sistemas dinámicos topológicos no son la excepción y por ello dedicaremos esta sección a dar las definiciones básicas, nuestras herramientas, y a establecer las proposiciones necesarias en las que están involucradas. Convengamos, para facilitar la comprensión y la lectura de la sección, que M es un espacio topológico y $f : M \to M$ un sistema dinámico discreto, a menos de que se especifique algo diferente.

En este sentido estableceremos el estado inicial de nuestro sistema, o nuestro año 0, como $x_0 \in M$. Así el sucesor de $x_0 \in M$ es $x_1 = f(x_0)$; y sucesivamente $x_2 = f^1(x_1) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0)$ es el sucesor de x_1 y suma y sigue. Entendiendo que para cada $x_0 \in M$ es un año cero distinto. De tal manera que la historia futura de x_0 queda únicamente definida por las iteraciones de la función f. Y análogamente la prehistoria de x_0 quedará definida por las iteraciones de f^{-1}. Si f no fuera biyectiva tendríamos muchas prehistorias para cada x_0, pero por ser f una función tendríamos una sola historia ya que ésta queda bien determinada.

Definición 6. Dado $x_0 \in M$, llamaremos la *órbita futura* de x_0 al conjunto de todos los puntos que lo suceden en el tiempo, estos se obtienen mediante la iteración de la función f. La denotamos como:

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{f^k(x_0) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ con } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Por otro lado la *órbita pasada* de un punto está compuesta por todos los posibles antecesores de su historia, es decir los elementos de su prehistoria. La órbita pasada de x_0 es el conjunto de todos los puntos que lo anteceden en el tiempo y se obtienen mediante la iteración de la función f^{-1}. La denotamos como:

$$\mathcal{O}_f^-(x_0) = \{f^{-k}(x_0) \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ con } \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Llamaremos la *órbita completa* de x_0 a la unión de los dos conjuntos, y la denotamos como:

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \mathcal{O}_f^+(x_0) \cup \mathcal{O}_f^-(x_0).$$

Ahora que conocemos las órbitas de los puntos, podemos separar y definir a algunos de ellos.

Definición 7. Un punto $p \in M$ es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$. Un punto $p \in M$ es *periódico* si p es punto fijo de alguna iteración de f, *i.e.* $f^n(p) = p$. El periodo de un punto periódico p es el menor entero positivo tal que $f^n(p) = p$.

Denotamos al conjunto de todos los puntos fijos de f como $\text{fix}(f)$ y al conjunto de todos los puntos periódicos de f como $\text{per}(f)$.

Existen funciones que pueden tener muchos puntos fijos. Por ejemplo, la función identidad $f(x) = x$ tiene como puntos fijos a todos los elementos de $\mathbb{R}$, por otro lado la función $f(x) = -x$ tiene como punto fijo sólo al origen y curiosamente todos los demás puntos de ésta son de período 2.

Los puntos fijos tienen las órbitas más simples ya que contienen un solo punto. Así mismo la órbita de un punto periódico de período k contiene k

elementos. De hecho $f^k(p) = p$ y por definición si $j < k$ entonces $f^j(p) \neq p$ para $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Por lo tanto:

$$\mathcal{O}_f(p) = \{p, f(p), \ldots, f^{k-1}(p)\}.$$

Para obtener mayor información de la órbita de un punto p necesitamos conocer dos conjuntos que son interesantes, el ω-límite de p y el α-límite de p, se leen *omega-límite* y *alfa-límite*, respectivamente. Son interesantes porque describen el comportamiento asintótico de la órbita. Se trata de los conjuntos donde la órbitas de p se acumulan cuando iteramos el sistema f infinitas veces, esto es que si x pertenece al ω-límite o al α-límite de p, entonces la órbita de p visita cualquier vecindad de x infinitas veces. A continuación definimos los conjuntos descritos.

Definición 8. Definimos el *ω-límite* de un punto $x \in M$ como el conjunto de los $y \in M$ tales que para toda vecindad U de y, la relación $f^n(x) \in U$ es satisfecha para infinitos valores de $n \geqslant 0$. Entonces existe una sucesión n_k de números naturales tal que el $\lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y$. Esto se puede escribir así:

$$\omega(x) = \{y \in M \,|\, \text{existe } n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \to y\}.$$

En el caso de que M fuera un espacio métrico es equivalente decir que el:

$$\liminf_{n\to+\infty} d(f^n(x), y) = 0.$$

Para f^{-1} el conjunto es llamado el *α-límite* de x, se denota como $\alpha(x)$ y se puede escribir así:

$$\alpha(x) = \{y \in M \mid \text{existe } n_k \to +\infty \text{ tal que } (f^{-1})^{n_k}(x) \to y\}.$$

A la unión de ambos, $\alpha(x)$ y $\omega(x)$, se le conoce como el *conjunto límite* de x, y se le denota como $L(x) = \alpha(x) \cup \omega(x)$. Este conjunto contiene la prehistoria y la historia de x, su "origen" y su "destino". No es casualidad que las letras α y ω corresponden a la primera y la última letras del alfabeto griego respectivamente. De la misma manera definimos al conjunto límite de f como la cerradura de la unión de los α-límite y los ω-límite para todas las $x \in M$:

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} (\alpha(x) \cup \omega(x))}.$$

Si x pertenece a su propio conjunto límite, su órbita vuelve cerca de él infinitas veces, ya sea para el futuro, para el pasado, o para ambos. Esto es lo que se conoce como un *punto recurrente*.

Definición 9. Un punto x es *recurrente* si: para toda $\varepsilon > 0$ la cardinalidad del conjunto $\{n \mid f^n(x) \in B_\varepsilon(x)\}$ es infinita.

Es claro que todos los puntos periódicos son recurrentes.

Definición 10. La órbita de un punto x es *recurrente* si: para toda $\varepsilon > 0$ la cardinalidad del conjunto $B_\varepsilon(x) \bigcap \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es infinita.

A continuación describiremos algunas propiedades de los conjuntos límite.

Proposición 1. *Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo, entonces:*

1) Si $q \in \mathcal{O}(p)$, entonces $\omega(p) = \omega(q)$ y $\alpha(p) = \alpha(q)$.

2) Si p es un punto periódico, entonces $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}_f(p)$.

3) Para cualquier punto $p \in M$ se tiene que $\omega_f(p) = \alpha_{f^{-1}}(p)$; donde $\alpha_{f^{-1}}(p)$ es el α-límite de p con respecto a f^{-1}.

Demostración.

1) Ya que $q \in \mathcal{O}(p)$ sabemos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f^m(q) = p$. Sea $x \in \omega(p)$, entonces por la definición del ω-límite sabemos que existe una sucesión de números enteros $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(p) \to x$, entonces $f^{n_k}(f^m(q)) \to x$. Esto implica que $f^{n_k+m}(q) \to x$, por lo tanto $x \in \omega(q)$, esto demuestra que $\omega(p) \subseteq \omega(q)$. Teniendo en cuenta que $q = f^{-m}(p)$ podemos demostrar análogamente que $\omega(p) \supseteq \omega(q)$, por lo tanto $\omega(p) = \omega(q)$. Análogamente se demuestra que $\alpha(p) = \alpha(q)$.

2) Ya que p es periódico es obvio que su órbita futura es finita. Sin pérdida de generalidad supongamos que el período de p es n, entonces podemos escribir la órbita futura como:

$$\mathcal{O}_f^+(p) = \{p, f(p), f^2(p), \ldots, f^{n-1}(p)\},$$

recordando que $f^n(p) = p$. Tomemos ahora un elemento $y \in \omega(p)$, entonces existe una sucesión de números naturales $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(p) \to y$. Sabemos que $f^{n_k}(p) \in \mathcal{O}^+(p)$. Por ser y un elemento de $\omega(p)$, sabemos que es un punto de acumulación de la órbita futura de p, pero un elemento de la misma. Como la órbita futura de p es finita podemos encontrar una vecindad U de y donde no haya elementos de $\mathcal{O}^+(p)$, lo cual es una contradicción ya que $f^{n_k}(p) \to y$. Esto implica que y tiene que pertenecer a $\mathcal{O}^+(p)$ para que $U \cap \mathcal{O}^+(p) \neq \emptyset$. Es fácil ver que si y pertenece a la órbita futura pertenece también a su ω-límite, entonces el $\omega(p) = \mathcal{O}^+_f(p)$. Y como f es biyectiva $\mathcal{O}^+(p) = \mathcal{O}^-(p)$. Entonces $\omega(p) = \mathcal{O}_f(p)$. Análogamente se prueba que $\alpha(p) = \mathcal{O}_f(p)$.

Demostramos así que si p es un punto periódico entonces:

$$\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}_f(p).$$

3) Sabemos por definición que $\omega_f(p)$ es:

$$\{y \in M \mid \text{existe } n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(p) \to y\},$$

observando que $f^{n_k} = (f^{-1})^{-n_k}$ tenemos que:

$$\omega_f(p) = \{y \in M \mid \text{existe } n_k \to +\infty \text{ tal que } \left(f^{-1}\right)^{-n_k}(p) \to y\},$$

como $-n_k \to -\infty$ el anterior conjunto es $\alpha_{f^{-1}}(p)$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Definición 11. Un subconjunto $A \subset M$ se dice *invariante* si $f^{-1}(A) = A$.

Observemos que si A es invariante $f^m(A) = A$ para toda $m \in \mathbb{Z}$, ya que f es biyectiva.

Proposición 2. *$\omega(x)$ y $\alpha(x)$ son conjuntos cerrados e invariantes.*

Demostración.

Observemos que $\omega(x) = \bigcap_{k \geqslant 0} \overline{\{f^n(x) \mid n \geqslant k\}}$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A. El conjunto del lado izquierdo contiene a los puntos $y \in M$ para los cuales existe una sucesión $\{n_k\} \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$; como $n_k \to \infty$, entonces $y \in \overline{\{f^n(x) \mid n \geqslant k\}}$, para todo $k \geqslant 0$. Por otro lado, si y

pertenece al conjunto del lado derecho, entonces $y \in \omega(x)$. Por lo tanto $\omega(x)$ es cerrado. Análogamente, el α-límite de x es cerrado.

Ahora queremos demostrar que $f^{-1}(y) \in \omega(x)$. Sea $y \in \omega(x)$ entonces existe una sucesión de números naturales $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Sea $m \in \mathbb{Z}$, entonces $f^{n_k+m}(x) \to f^m(y) \Rightarrow f^m(y) \in \omega(x)$. Esto implica que $f^m(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$ como $m \in \mathbb{Z}$ cualquiera $f(\omega(x)) = \omega(x)$. Análogamente para el α-límite de x. $\square$

Existe otro conjunto clave para poder trabajar y entender un sistema dinámico, éste es conocido como el conjunto no errante y está compuesto por todos los puntos tales que cada vecindad de los mismos intersecta alguna órbita dos veces. Definimos dichos puntos y su conjunto como sigue.

Definición 12. Un punto $p \in M$ es *no errante* si para cualquier vencindad U de p existe $n \neq 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

Al conjunto de todos los puntos no errantes de f lo llamamos *conjunto no errante* de f y lo denotamos como $\Omega(f)$.

El complemento del conjunto $\Omega(f)$ está compuesto por los puntos errantes. Un punto $p \in M$ es *errante* bajo f si tiene una vecindad con *órbita discreta*, esto es, una vecindad U de p, tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ para toda $n \neq 0$. La dinámica de este conjunto no será estudiada ya que resulta poco interesante al ser siempre la misma, es decir que los elementos de un conjunto errante nunca vuelven con el tiempo a ninguna vecindad, por lo tanto no hay recurrencia ni propiedades que estudiar cerca de ellos, viven escapando.

Proposición 3. *El conjunto $\Omega(f)$ es cerrado e invariante.*

Demostración.

Para probar que $\Omega(f)$ es cerrado mostraremos que su complemento, el conjunto de los puntos errantes es abierto. Esto es bastante fácil de ver ya que por la definición para cualquier punto p errante existe una vecindad U de p compuesta de puntos errantes, por lo tanto el conjunto de los puntos errantes es abierto y esto implica que $\Omega(f)$ es cerrado.

Queremos demostrar ahora que si $x \in \Omega(f)$ entonces $f(x) \in \Omega(f)$. Sea $x \in \Omega(f)$ y U un abierto tal que $f(x) \in U$. Como f es continua sabemos que

$f^{-1}(U)$ es un abierto de M y $x \in f^{-1}(U)$. Como $x \in \Omega(f)$ existe $N \in \mathbb{Z}$ e $y \in M$ tal que:

$$y \in f^N(f^{-1}(U) \cap f^{-1}(U)).$$

Observe que $f(y) \in U$ y $f(y) \in f^{N+1}(f^{-1}(U)) = f^N(U)$. Entonces,

$$f(y) \in f^N(U) \cap U.$$

Por lo tanto $f(x) \in \Omega(f)$. Este mismo argumento vale para f^{-1}, lo que demuestra que $\Omega(f)$ es invariante. □

A continuación estudiaremos las inclusiones que existen entre los distintos conjuntos de puntos que hemos descrito en la sección.

Proposición 4. *El conjunto de todos los puntos periódicos de f está contenido en su conjunto límite y éste, a su vez, está contenido en el conjunto no errante, o sea tenemos las siguientes inclusiones:*

$$per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

Demostración.

Por la Proposición 1 sabemos que $\text{per}(f) \subset L(f)$.

Consideramos ahora $p \in L(f)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p \in \omega(x)$ para algún $x \in M$. Esto implica que existe una sucesión de números naturales $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$ y el $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = p$.

Sea U una vecindad de p, como $p \in \omega(x)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in U$, para todo $k \geqslant N$. Por lo tanto $f^{n_k}(x) \in U$ y $f^{n_{k+1}}(x) \in U$. Entonces $f^{n_{k+1}-n_k}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Por lo tanto, $p \in \Omega(p)$ y con esto demostramos que todos los puntos del conjunto límite también son no errantes. Así $L(f) \subset \Omega(f)$. □

1.2.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Los puntos fijos de este sistema son $x = 0, 1, -1$. Observamos que su inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, y que sus iteraciones si n es positivo son $f^n(x) = x^{3^n}$ y $f^{-n}(x) = \sqrt[3^n]{x}$. Tomando $x > 1$ tenemos $f^n(x) = x^{3^n} \to \infty$ si $n \to \infty$, por lo tanto $\omega(x) = \emptyset$. Y como $f^{-n}(x) = \sqrt[3^n]{x} \to 1$ si $n \to \infty$, implica que $\alpha(x) = \{1\}$. Análogamente, si $x < -1$ su $\omega-$límite es vacío y su $\alpha-$límite es $\{-1\}$.

Ahora, si $-1 < x < 1$, y según el párrafo anterior, deducimos que $\omega(x) = \{0\}$; si además x es positivo $\alpha(x) = \{1\}$ y si x es negativo $\alpha(x) = \{-1\}$.

Una vez descrita la dinámica de f concluimos que no tiene otros puntos periódicos que los fijos mencionados anteriormente. Veáse la gráfica de la figura 1.1.

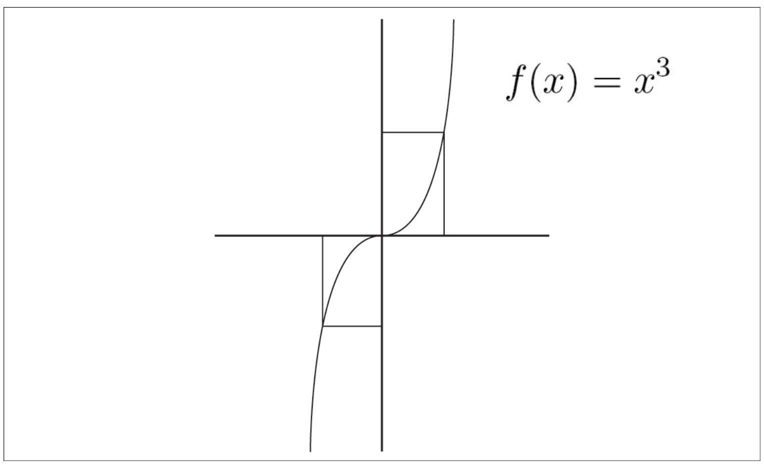


Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x) = x^3$.

Proposición 5. *Si M es compacto, entonces $\alpha(x) \neq \emptyset$ y $\omega(x) \neq \emptyset$.*

La demostración de la Proposición es bastante sencilla. En nuestro contexto la definición adecuada de un espacio topológico compacto es un espacio en el que cualquier sucesión contiene una subsucesión convergente. Por ésta razón los conjuntos límite nunca podrán ser vacíos.

Ejemplo 2. A continuación citamos un ejercicio del libro de Katok-Hasselblat (Ejercicio 3.3.6 de [KH]) que ha sido sumamente útil para el entendimiento de los conceptos enunciados en este capítulo.

Sea X un espacio métrico compacto, conexo y perfecto y $f : X \to X$ un homeomorfismo tal que per(f) es denso en X y f^n no es la identidad para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces hay al menos un punto recurrente que no es periódico.

Un espacio topológico es *conexo* si no se puede escribir como unión de dos abiertos, no vacíos, disjuntos. Y es *perfecto* si es cerrado y todos sus puntos son de acumuluación, es decir que no tiene puntos aislados.

El siguiente ejemplo muestra que las hipótesis planteadas en el enunciado anterior no son suficientes para que este sea cierto simpre. Construimos un espacio X con las hipótesis arriba citadas de la siguiente manera. Consideramos X_n una esfera en $\mathbb{R}^3$ de radio $r/2^n$ con $n \in \mathbb{N}$ y r dado, de forma que para cada n, X_n es tangente a X_{n-1}. Además, los puntos de tangencia están en una misma recta y son distintos (ver figura 1.2). El espacio X será:

$$X = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n}.$$

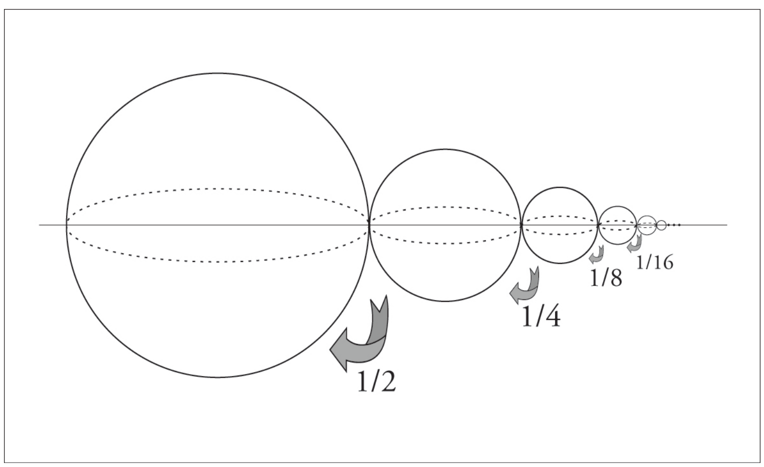


Figura 1.2: Agradecemos a la imaginación de Alberto Verjovsky la imagen de este ejercicio.

Es claro que X verifica las hipótesis del ejercicio propuesto. Resta ahora especificar el homeomorfismo $f : X \to X$. Lo definimos en cada X_n: ya que los puntos de tangencia están alineados, f en cada X_n es una rotación de ángulo $\pi 2^{-n}$ en ese eje. Como todos los puntos de tangencia son fijos, f queda bien definida en todo el espacio. Observamos que todos los puntos de X son periódicos y por lo tanto no hay puntos recurrentes no periódicos. Además, se cumple que ninguna potencia de f es la identidad. Esto muestra que el ejercicio es falso. Observemos además que todas las órbitas del sistema son recurrentes.

Para terminar de ilustrar las definiciones de esta sección daremos un ejemplo donde existen puntos no errantes que no son recurrentes.

Ejemplo 3. Para este ejemplo utilizaremos el *shift* de Bernoulli definido en la Sección §1.1. Sea $x_n = 0$ si n es negativo y $x_n = 1$ si n es positivo ó 0. Observemos ahora la órbita de x por σ. No es difícil ver que $\sigma^m(x)$ tiende a $0_n = 0$ para todo n si m tiende a más infinito, (si m es muy grande, entonces $d(\sigma^m(x), 0)$ es chica porque es la cola de la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ que es convergente) o sea que el ω-límite de x es el punto fijo 0. De forma similar, $\sigma^{-m}(x)$ tiende a $1_n = 1$ para todo n si m tiende a infinito, o sea que el α-límite de x es el punto fijo 1.

Tenemos entonces que el punto x del párrafo anterior no es recurrente porque no está ni en su ω-límite ni en su α-límite. Ahora hay que ver que x es no errante para completar nuestro ejemplo. Para esto basta con mostrar que los puntos periódicos de σ son densos en Σ_2, no olvidemos que $\overline{\mathrm{per}(f)} \subset \Omega(f)$.

Tomemos un elemento $y \in \Sigma_2$ cualquiera y un ε dado, vamos a encontrar un punto periódico a menos de ε de y. Como sabemos que la serie $\sum y_n/2^n$ es convergente podemos tomar un $m \in \mathbb{Z}$ tan grande como queramos para que una nueva sucesión $z_n = y_n$ si $|n| < m$ y $z_n = 0$ si no, por lo tanto z_n queda a menos de $\varepsilon/2$ de y. Esto pasa porque la cola de la serie $\sum y_n/2^n$ tiende a 0, es decir, los m términos centrales de la sucesión z_n coinciden con los de y_n y el resto son ceros. Ahora copiamos los m términos centrales de z_n una y otra vez para obtener una sucesión periódica cerca de y. Por ejemplo, si $z_n = (\ldots 000000010101010000000 \ldots)$ entonces la sucesión periódica que encontramos cerca de y es: $(\ldots 01010101010101 \ldots)$.

Lo que acabamos de mostrar es que para cualquier punto de Σ_2 podemos encontrar un punto periódico tan cerca como queramos. Por lo tanto los puntos periódicos de σ son densos en nuestro espacio. Esto implica que para cualquier vecindad U de nuestro punto x no recurrente existe un k tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$ ya que los puntos periódicos son densos en nuestro espacio.

Así se obtiene un sistema dinámico que presenta puntos no errantes que no son recurrentes.

1.3. Conjugación topológica

La conjugación topológica entre dos funciones consiste en observar la dinámica de un sistema desde otro punto de vista, específicamente, es mirarlo haciendo un cambio de coordenadas. Sin lugar a dudas es una herramienta fundamental en el estudio cualitativo de los sistemas dinámicos, ya que al conocer la dinámica de una función podemos describir completamente la dinámica de cualquiera que esté conjugada con ella. Uno de los teoremas principales de este trabajo trata sobre la existencia de una conjugación topológica, por esto destinamos la presente sección al estudio de esta herramienta.

Definición 13. Decimos que $f : M \to M$ es *conjugada* a $g : N \to N$ si existe una función $h : M \to N$ continua y biyectiva tal que $g = h \circ f \circ h^{-1}$. La función h es un homeomorfismo y diremos que f y g son *topológicamente conjugadas*. Esto quiere decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow[g]{} & N \end{array}$$

Una vez introducida la noción de conjugación topólogica, nos interesaría saber cómo se comporta respecto a los conceptos dinámicos estudiados en la sección anterior. La siguiente Proposición nos servirá para esto.

Proposición 6. *Si $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son topológicamente conjugadas por h, entonces se cumple lo siguiente:*

1. $h \circ f^k = g^k \circ h$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$.
2. $h(\mathcal{O}_f(x)) = \mathcal{O}_g(h(x))$.

3. $h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$ *y análogamente para el* $\alpha-$*límite.*

Demostración.

1) Si $k > 0$ entonces:

$$h \circ f^k = h \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ veces}} = g \circ h \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k-1 \text{ veces}} = \cdots = g^k \circ h.$$

Si $k = -1$, a partir de que $f = h^{-1} \circ g \circ h$ tenemos:

$$f^{-1} = \left(h^{-1} \circ g \circ h\right)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h.$$

Por lo tanto $h \circ f^{-1} = g^{-1} \circ h$. Aplicando ambos resultados obtenemos la fórmula para todos los $k \in \mathbb{Z}$ restantes.

2) A partir de la definición de órbita escribimos:

$$h(\mathcal{O}_f(x)) = h(\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}) = \{h(f^k(x)) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

y aplicando la parte 1) tenemos que $h(f^k(x)) = g^k(h(x))$ entonces:

$$\{h(f^k(x)) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{g^k(h(x)) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

de donde $h(\mathcal{O}_f(x))$ es $\mathcal{O}_g(h(x))$.

3) Primero probaremos que $h(\omega_f(x)) \subset \omega_g(h(x))$. Sea $y \in \omega_f(x)$ entonces existe $n_k \to +\infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Como h es continua $h(f^{n_k}(x)) \to h(y)$, pero sabemos por 1) que $h(f^{n_k}(x)) = g^{n_k}(h(x))$, por lo tanto como $g^{n_k}(h(x)) \to h(y)$ concluimos que $h(y) \in \omega_g(h(x))$.

Ahora nos falta probar que $\omega_g(h(x)) \subset h(\omega_f(x))$, para esto, dado $z \in \omega_g(h(x))$, debemos encontrar $y \in \omega_f(x)$ tal que $h(y) = z$. Como $z \in \omega_g(h(x))$ existe $m_j \to +\infty$ tal que $g^{m_j}(h(x)) \to z$. Sabemos que $g^{m_j}(h(x)) = h(f^{m_j}(x))$ por lo tanto $h(f^{m_j}(x)) \to z$, entonces como h es un homeomorfismo $f^{m_j}(x) \to h^{-1}(z)$ y así $h^{-1}(z) \in \omega_f(x)$. El y buscado es $h^{-1}(z)$.

Se prueba análogamente para el $\alpha-$límite. $\square$

A partir de la Proposición anterior deducimos que si p es periódico para f entonces $h(p)$ es periódico para g y de igual período. Más aún, se tiene que si dos sistemas dinámicos son topológicamente conjugados la conjugación preserva las órbitas y los conjuntos límite, lo que establece una equivalencia dinámica.

Antes de pasar a los ejemplos es necesario incluir una manera más de observar la dinámica de un sistema. A pesar de que la noción de semiconjugación que definiremos ahora es un lente menos fino para observar a nuestro sistema, ésta no deja de ser indispensable para el estudio que haremos a continuación.

Definición 14. Decimos que $f : M \to M$ es *semiconjugada* a $g : N \to N$ si existe una función $h : M \to N$ continua y sobreyectiva tal que $h \circ f = g \circ h$. La función h es llamada una semiconjugación topológica.

Observemos que la diferencia principal entre la semiconjugación topológica y la conjugación topológica es que la primera es una relación de orden y la segunda es una relación de equivalencia asociada a dicha relación de orden.

1.3.1. Ejemplos

Ejemplo 4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados por $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3x$, entonces f y g son conjugados.

Para encontrar la conjugación, supondremos perspicazmente que es de la forma $h(x) = x^\alpha$. En este caso, tendríamos por la fórmula de semiconjugación $h \circ f(x) = g \circ h(x)$, o sea que $h(2x) = 3h(x)$. Es decir, $(2x)^\alpha = 3x^\alpha$, despejando α se obtiene $\alpha = \log_2 3$. Por lo tanto, la conjugación $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estaría dada por $h(x) = x^{\log_2 3}$.

Veamos que esta función efectivamente conjuga f con g:

$$h \circ f(x) = (2x)^{\log_2 3} = 3x^{\log_2 3} = g \circ h(x).$$

Ejemplo 5. Sean $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ homeomorfismos crecientes sin puntos fijos distintos de 0 y 1, tales que $f(0) = g(0) = 0$ y $f(1) = g(1) = 1$. Entonces f y g son conjugados. A continuación mostraremos como encontrar una posible conjugación.

Comenzaremos suponiendo que ambos valores, $f(1/2)$ y $g(1/2)$, son mayores que $1/2$. Definiremos primero la conjugación en el intervalo $[1/2, f(1/2)]$ y la extenderemos luego a todo el intervalo $[0,1]$. Ahora elegimos un homeomorfismo h_0 cualquiera que lleve $[1/2, f(1/2)]$ en $[1/2, g(1/2)]$.

La primera observación es que iterando sucesivamente el intervalo $[1/2, f(1/2)]$, hacia el pasado y hacia el futuro, cubrimos todo el intervalo $[0,1]$. Esto es así porque $\omega(x) = 1$ para todo $x \in (0,1)$ y $\alpha(x) = 0$ para todo $x \in (0,1)$. Para extender h_0 a una conjugación h de todo el intervalo, procedemos de la manera siguiente.

Tomamos $x \in [0,1]$ cualquiera. Entonces $x \in [0,1/2]$ ó $x \in [1/2, f(1/2)]$ ó bien $x \in [f(1/2), 1]$. Si x está en el segundo intervalo, entonces $h = h_0$. Si $x \in [0,1/2]$, entonces:

$$x \in \bigcup_{n \geqslant 1} f^{-n}([1/2, f(1/2))).$$

Por lo tanto, existe un único $n \geqslant 1$ de forma que $x \in f^{-n}([1/2, f(1/2)))$ y $f^n(x) \in [1/2, f(1/2))$, por lo que podemos aplicarle h_0. Así definimos $h(x) = g^{-n} \circ h_0 \circ f^n(x)$. Procedemos análogamente para el intervalo $[f(1/2), 1]$ definiendo $h(x) = g^n \circ h_0 \circ f^{-n}(x)$ para un n adecuado dependiendo de x.

Veamos que la función h así construida es una conjugación. Queremos ver que para todo $x \in [0,1]$, se tiene $h \circ f(x) = g \circ h(x)$. Como antes, $x \in [0,1]$ implica que $x \in f^n([1/2, f(1/2)])$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Suponemos primero $n \geqslant 0$. Entonces $h \circ f(x) = g^{n+1} \circ h_0 \circ f^{-(n+1)}(f(x))$; por otra parte $g \circ h(x) = g^{n+1} \circ h_0 \circ f^{-n}(x)$. Es decir, la función h conjuga f con g. Análogamente se obtiene lo mismo para $n < 0$.

Resta probar que la función h es un homeomorfismo. Sabemos que es biyectiva pues h_0 es un homeomorfismo, y las funciones f y g son biyectivas.

La continuidad se verifica de la forma siguiente: en cualquier punto de la unión $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}((1/2, f(1/2))$ la continuidad se verifica a partir de la continuidad de f, g y sus respectivas inversas. En $1/2$, h está definida por la derecha como $h_0(1/2) = 1/2$ y por la izquierda como:

$$\lim_{x \to 1/2^-} g^{-1} \circ h_0 \circ f(x) = g^{-1}(h_0 f(1/2)) = g^{-1}(g(1/2) = 1/2,$$

donde la primera igualdad es por la continuidad de las funciones involucradas, y la segunda por la construcción de h_0. El mismo argumento prueba la continuidad en todos los puntos $f^n(1/2), n \in \mathbb{Z}$. La continuidad de la inversa de h es completamente análoga, simplemente hay que invertir los órdenes de f y g.

Si ambos valores, $f(1/2)$ y $g(1/2)$, son menores que $1/2$, la construcción de h es completamente análoga, construyendo h_0 de tal forma que lleve el intervalo $[f(1/2), 1/2]$ en $[g(1/2), 1/2]$. Si $f(1/2) > 1/2$ y $g(1/2) < 1/2$, elegimos h_0 un homeomorfismo entre $[1/2, f(1/2)]$ y $[g(1/2), 1/2]$, pero invirtiendo la orientación, de forma de tener las identidades que utilizamos $h_0(f(1/2)) = g(1/2)$ y $h_0(1/2) = 1/2$. Esto completa la prueba de la afirmación.

Es fácil observar que un homeomorfismo creciente f del intervalo $[0, 1]$ tiene al menos 2 puntos fijos: Si $f(0) > 0$ o $f(1) < 1$ la función f no puede ser sobreyectiva, de donde $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

El ejemplo anterior muestra entonces que dos homeomorfismos crecientes del intervalo $[0, 1]$ con la cantidad mínima de puntos fijos son conjugados. Puede mostrarse de forma similar que dos homeomorfismos decrecientes del intervalo con la cantidad mínima de puntos fijos (1 en este caso) y la mínima cantidad de puntos periódicos de período 2 son conjugados.

Veremos en el siguiente ejemplo que un homeomorfismo decreciente y un homeomorfismo creciente del intervalo, ambos con la cantidad mínima de puntos fijos, no son necesariamente conjugados.

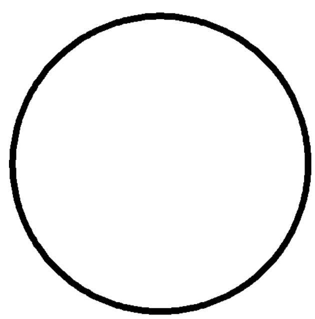
Ejemplo 6. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dada por $f(x) = 1 - x$ y g cualquier homeomorfismo creciente que sólo fija el 0 y el 1. Como observamos luego de la Proposición 6 si f y g fueran conjugados tendrían la misma cantidad de puntos periódicos de cada período, pero f tiene un único punto fijo y g tiene dos. Más aún, f tiene infinitos puntos periódicos de período 2, todos menos el punto fijo, y g no tiene puntos periódicos no fijos.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos en el círculo

2.1. Introducción

La palabra círculo proviene del latín *circulus* que es el diminutivo de *circus* y significa "cerco". Cuando alguien nos menciona la palabra "círculo" por lo general nuestra mente visualiza algo de la siguiente forma:



Esta figura representa, probablemente, el concepto con más significados en la historia de la humanidad. Encierra la idea de los ciclos, de la perfección, del movimiento. Se asemeja a imágenes que van desde los planetas hasta los átomos. Todo lo que hacemos como especie y como seres es comparable a un círculo, desde las actividades cotidianas hasta las historias de nuestras vidas. ¿Pero cómo es y qué significa esta figura en el mundo de las matemáticas?

Es claro que cuando alguien nos menciona al círculo casi nunca imaginamos algo como: $x^2 + y^2 = r^2$ ya que esta representación es menos cercana a nuestra realidad y no es la forma de abstracción más común. Sin embargo para poder estudiar esta maravillosa figura es indispensable encontrar o definir la representación que más amplitud y libertad nos de. Esto implica, por supuesto, una mayor abstracción del concepto, aunque finalmente siempre sepamos que la idea es la misma que en la figura de arriba. Primero definiremos el círculo en el plano real mediante la primer noción algebraica que de él tuvimos, es decir: $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, donde claramente $r \in \mathbb{R}$ determina al radio.

En las matemáticas tenemos muchas herramientas y el uso de estas nos permite enunciar nuestras preguntas de una manera adecuada, así como acercarnos a sus respuestas. En nuestro caso, queremos definir el círculo en el plano complejo $\mathbb{C}$, debido a que los números complejos nos permitirán otorgarle la estructura de grupo a nuestro objeto de estudio y por ende, acceder a sus propiedades dinámicas. Para esto primero necesitamos definir una operación que vaya de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. Recordemos que los números complejos son de la forma $z = a + ib$ con a, $b \in \mathbb{R}$, denotamos la operación que necesitamos como $\bullet$ y la definimos como:

$$(x, iy) \bullet (u, iv) = (xu - yv, i(xv + yu)) \text{ con } x,\ y,\ u \text{ y } v \in \mathbb{R};$$

de esta manera tenemos una operación $\bullet$ asociada a un conjunto, el de los complejos, y queremos ver si juntos conforman el grupo $(\mathbb{C}, \bullet)$. Pero, ¿qué es un grupo?

Definición 15. Un *grupo* es un conjunto G, con una operación binaria $* : G \times G \to G$, que se denota como $(G, *)$ y satisface los siguientes axiomas:

1) Asociatividad. Para cualesquiera a, b, $c \in G$ $(a * b) * c = a * (b * c)$.

2) Elemento neutro. Existe un elemento e en G tal que para todo $a \in G$, $e * a = a * e = a$.

3) Inverso. Para todo $a \in G$, existe un elemento $b \in G$ tal que $a * b = b * a = e$.

Para probar que $(\mathbb{C}, \bullet)$ es un grupo debemos mostrar que cumple con los tres axiomas de la definición. Se puede leer la prueba en el Apéndice, Proposición 17.

Ahora podemos afirmar que $(\mathbb{C}/\{0\}, \bullet)$ es un grupo, lo llamaremos el grupo multiplicativo de los complejos sin el cero y lo denotaremos como $\mathbb{C}^*$.

El segundo paso es definir un conjunto que describa nuestra noción de círculo y mostrar que ese conjunto con la operación $\bullet$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}^*, \bullet)$.

Definición 16. Dado un grupo $(G, *)$, un subconjunto H de G es un *subgrupo* si la restricción de la operación $*$ a H es un grupo; es decir, que la operación $*$ es cerrada en H y los inversos de H están en H.

Definamos entonces nuestro nuevo conjunto como:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

es decir todos los números complejos cuyo módulo vale 1, esto significa que si $z = x + iy$ con x e $y \in \mathbb{R}$ entonces $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$, o sea que son todos los números complejos que distan uno del origen. Ésta noción no debe resultarnos extraña, pues es la misma idea mediante la que conocemos a la circunferencia unitaria en el plano real $x^2 + y^2 = 1$ con x e $y \in \mathbb{R}$.

Probar que el conjunto S^1 es un subgrupo del grupo multiplicativo de los complejos sin el cero es fácil, lo único que hay que observar es que para cualquier elemento $(x, iy) \in S^1$ la suma de sus cuadrados siempre vale uno y por lo tanto todos tienen inverso con la misma forma que los del grupo $(\mathbb{C}^*, \bullet)$.

Observemos que cualquier otro subconjunto de los números complejos con módulo constante distinto de uno no es un subgrupo del grupo multiplicativo de los complejos. Esto es fácil de ver ya que el producto de los módulos debiera ser igual a la unidad para satisfacer el axioma de la existencia de inverso que establece la defininción de grupo. Por esta razón el único subconjunto que le otorga una estructura de grupo a S^1 es el círculo unitario.[1]

De esta manera hemos mostrado que el círculo tiene una estructura de grupo que hereda de la del plano complejo sin el cero, la cual será fundamental en nuestra construcción posterior.

[1]En el Apéndice se puede leer un argumento más detallado del porqué utilizaremos el círculo unitario.

2.2. El círculo es un grupo cociente

Lo que queremos en esta sección es darle al círculo una estructura de grupo aparentemente diferente de la que tiene como grupo en los complejos y probar que esta nueva estructura es equivalente a la que planteamos en la Sección §2.1. ¿Por qué nos interesa que el círculo tenga una estructura de grupo diferente? La estructura de grupo del círculo, la que hereda como subgrupo de $\mathbb{C}^*$, vista ahora como un grupo cociente de los reales por los enteros nos permitirá definir "cómodamente" funciones del círculo en otros conjuntos: en sí mismo, en los números reales, etcétera, lo que es de vital importancia, ya que lo que estamos haciendo es construir lo necesario para estudiar la dinámica de las funciones del círculo en si mismo.

¿Qué quiere decir que dos grupos sean equivalentes? Que dos grupos sean equivalentes quiere decir que existe un isomorfismo entre ellos, esto es una función entre ambos que establece una relación uno a uno entre los elementos de los dos grupos respetando las operaciones correspondientes a cada grupo. Si existe este isomorfismo los grupos son llamados isomorfos y desde el punto de vista algebraico los grupos isomorfos tienen las mismas propiedades y se puede hablar de uno o de otro indistintamente.

Definición 17. Dados dos grupos $(G, *)$ y $(H, \star)$ un *isomorfismo* de $(G, *)$ a $(H, \star)$ es una función biyectiva $f : G \to H$ tal que para todos u, $v \in G$ se cumple que:

$$f(u * v) = f(u) \star f(v).$$

Se dice que los grupos $(G, *)$ y $(H, \star)$ son isomorfos si existe un isomorfismo y se denota como:

$$(G, *) \cong (H, \star).$$

Para comprender mejor la definición anterior me parece interesante citar el siguiente texto de Herstein [Hers]:

«*Cuando dos grupos son isomorfos, entonces, en cierto sentido, son iguales. Difieren en que sus elementos se denominan en forma distinta. El isomorfismo nos da la clase de esta diferencia de denominación, y con ella, conociendo un determinado cálculo en un grupo, podemos efectuar el cálculo ánalogo en el otro. El isomorfismo es como un diccionario que nos permite traducir una frase de un idioma a una frase, de igual significación, en otro idioma. (Desgraciadamente, no existen diccionarios tan perfectos, porque en los idiomas* *las palabras no tienen significado único y no aparecen estos cambios de significación en las traducciones literales.) Pero, decir solamente que una oración dada en un lenguaje puede expresarse en otro no nos lleva muy lejos; lo que se necesita es el diccionario para efectuar la traducción. Análogamente, puede ser de poco interés saber que dos grupos son isomorfos, y lo realmente interesante es el propio isomorfismo. Así siempre que probemos que dos grupos son isomorfos, intentaremos exhibir una aplicación precisa que produzca este isomorfismo.»*

Un ejemplo de dos grupos isomorfos es el siguiente: el grupo de todos los números reales con la suma $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo al grupo de todos los reales positivos con la multiplicación $(\mathbb{R}^+, \times)$, a través del isomorfismo $f(x) = e^x$.

¿Cómo construimos el círculo como un nuevo grupo? Para dotar de una estructura de grupo al círculo necesitamos la noción de grupo cociente, este tipo de grupo nos permitirá pasar del grupo que contiene a todos los números reales, $(\mathbb{R}, +)$, al círculo.

¿Qué es un grupo cociente? Un *grupo cociente* es, de alguna manera, el grupo que colapsa a un grupo normal N de G al elemento neutro y se denota como G/N. Un *grupo normal* N de un grupo G es un subgrupo invariante bajo conjugación, es decir, que para cada elemento $n \in N$ y cada $a \in G$, el elemento $ana^{-1} \in N$. Podemos también definir la noción de grupo normal a través de las clases de N en G, definidas de la siguiente manera.

Sea aN el conjunto que denota todos los productos an, para $n \in N$, ésta es llamada la *clase izquierda* de N en G. La unión de todas las clases izquierdas forma una partición de G. Análogamente, la unión de todas las *clases derechas* Na de N en G forma una partición de G. Llamamos a N un *grupo normal* de G si $aN = Na$ para cada $a \in G$, por lo tanto las dos particiones de G son la misma.

Cuando N es normal en G, el grupo cociente es:

$$G/N = \{aN \mid a \in G\} = \{Na \mid a \in G\}.$$

En G tanto el neutro e como G son siempre grupos normales de G. Si éstos son los únicos, entonces G se dice simple. Todos los grupos N de un grupo abeliano o conmutativo G son normales, porque $aNa^{-1} = Naa^{-1} = N$. Ahora que tenemos definido a un conjunto como la partición G/N necesitamos asignarle una operación y comprobar que cumple con los axiomas de la definición de grupo para demostrar que el grupo cociente, así definido, es efectivamente un grupo.

La operación de grupo que asignaremos a G/N es el producto de subconjuntos de G obtenidos de la partición antes definida. Para que esta operación sea cerrada, es decir que el producto vaya de $G/N \times G/N \to G/N$, entonces $(aN)(bN)$ deberá ser también una clase lateral para cualesquiera a y b en G, lo que se demuestra fácilmente:

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)NN = (ab)N.$$

Como se puede ver, la normalidad de N se usa ya en esta igualdad. Este producto es claramente asociativo, y tiene a N por elemento neutro. El elemento inverso de aN en G/N será, según la ecuación anterior, $a^{-1}N$, lo que completa la demostración de que G/N forma un grupo con el producto de subconjuntos de la partición dada.

Ahora mostraremos cómo a través de la definición de grupo cociente podemos construir el círculo como el grupo cociente de $\mathbb{R}$ entre $\mathbb{Z}$.

Sea $\mathbb{R}$ el grupo conformado por los reales con la suma, $(\mathbb{R}, +)$, y $\mathbb{Z}$ el grupo de los enteros con la misma operación, $(\mathbb{Z}, +)$. Para construir el círculo con estos dos grupos debemos mostrar que $\mathbb{Z}$ es un grupo normal de $\mathbb{R}$ y definir un isomorfismo entre este grupo cociente y nuestro círculo definido antes como un subgrupo de los complejos.

Que $\mathbb{Z}$ es un grupo normal de $\mathbb{R}$ es obvio, ya que el grupo $(\mathbb{R}, +)$ es abeliano. Los elementos del grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ son de la forma:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\} = \{r\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\} = \{\mathbb{Z}r \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Denotamos por $\oplus$ la operación del grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por $r\mathbb{Z} \oplus r'\mathbb{Z} = (r + r')\mathbb{Z}$, para todos $r, r' \in \mathbb{R}$.

Ahora sólo nos falta construir el isomorfismo entre $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus)$ y $(S^1, \bullet)$. Proponemos la función $f(x) = e^{2\pi i x}$ con $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Por la fórmula de Euler sabemos que $e^{2\pi ix} = \cos(2\pi x) + i\,\mathrm{sen}(2\pi x)$. Veamos que f es un isomorfismo entre nuestros grupos.

Tomemos x e $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces:

$$f(x \oplus y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{(2\pi ix)+(2\pi iy)} = e^{2\pi ix}e^{2\pi iy} = f(x) \bullet f(y).$$

Las igualdades anteriores muestran que $f(x \oplus y) = f(x) \bullet f(y)$, lo que implica que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus) \cong (S^1, \bullet)$, que es lo que queríamos probar. Y por lo tanto hemos demostrado que el círculo es un grupo cociente.

2.3. El círculo es un espacio topológico

El círculo $S^1 \subset \mathbb{C}$ hereda, como subespacio topológico la topología de $\mathbb{C}$. En esta sección mostraremos que el círculo visto como el grupo cociente $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus)$ tiene una topología natural que coincide con la que hereda del plano complejo, es decir, son homeomorfos.

¿Qué tenemos que hacer para ver al círculo como un espacio topológico de otra manera?

Necesitaremos primero algunas definiciones que no tenemos para entender la construcción topológica.

Definición 18. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $p : X \to Y$ una función sobreyectiva. La función p es llamada *función cociente* si satisface que: U es un subconjunto abierto de Y si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X.

Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ y un conjunto A cualquiera, una función sobreyectiva $p : X \to A$ permite transportar la topología de X al conjunto A. Es decir, existe una única topología $\mathcal{T}^*$ en A de modo que $p : X \to A$ es una función cociente. $\mathcal{T}^* = \{V \subset A \mid h^{-1}(V) \in\mathcal{T}\}$. A esta topología se le conoce como la topología cociente.

Por esto, dada una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ podemos dotar de la topología cociente al conjunto de clases de equivalencia $\mathbb{R}/ZZ = \{r\mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\}$, a partir de la función:

$$\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Observe que las clases $r\mathbb{Z}$ están definidas por la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ y que Π es sobreyectiva.

Por todo esto, hemos probado que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathcal{T}^*)$ es un espacio topológico. Sólo nos quedaría mostrar que es homeomorfo a $S^1 \subset \mathbb{C}$. Para esto necesitamos introducir los llamados *espacios cubrientes* y dedicaremos la siguiente sección a su estudio.

2.3.1. Espacios cubrientes

Los conceptos que definiremos a continuación fueron introducidos por Henri Poincaré mientras trabajaba en la clasificación de las propiedades dinámicas de los homeomorfismos del círculo. Para comprender la importancia de estas ideas podemos imaginarnos como habitantes del círculo. Entonces, si camináramos siempre hacia adelante volveríamos eventualemente al mismo lugar. Si quisiéramos contar la cantidad de vueltas que hemos dado podemos pensarnos como caminantes de la recta real que en cada entero regresa al punto de partida. Entender y formalizar esta noción es la clave de la sección.

Definición 19. Sea $p : E \to B$ una función continua y sobreyectiva. El abierto $U \subset B$ es *continuamente cubierto* por p, si $p^{-1}(U)$ es escrita como la unión disjunta de abiertos $\{V_\alpha\}$ en E tal que para todo α, la función $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo.

La función p es llamada una *función cubriente* si todo punto de B tiene un entorno continuamente cubierto por p. Se dice entonces que E es un espacio cubriente de B.

El cubrimiento del círculo

Consideramos $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$, la proyección canónica, dada por:

$$\Pi(\theta) = e^{2\pi i\theta} = \cos(2\pi\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\pi\theta).$$

Ilustrada en la figura 2.1.

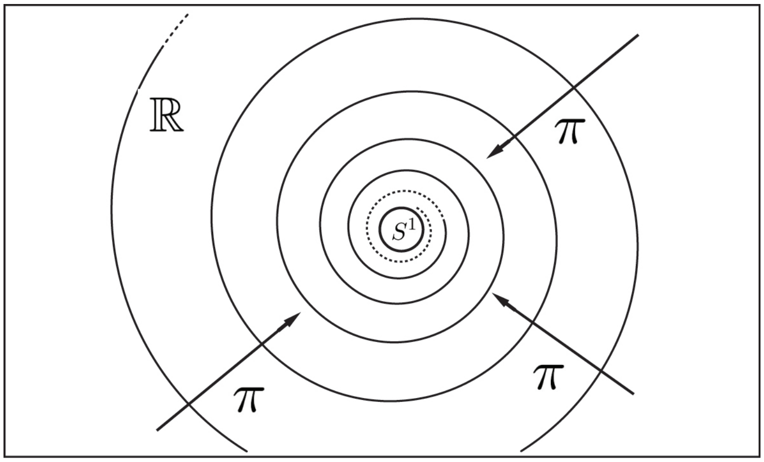


Figura 2.1: Idea de la proyección canónica $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$.

Sea θ un número real. Considerando la recta de $\mathbb{R}^2$ que forma un ángulo $2\pi\theta$ con el eje de las abscisas en el $\{(0,0)\}$, observamos que la intersección de esta recta con el círculo de radio 1 centrado en el origen es exactamente $\Pi(\theta)$.

Consideremos los siguientes abiertos $U_1 = S^1 - \{(1,0)\}$ y $U_2 = S^1 - \{(-1,0)\}$. Es claro que:

$$\Pi^{-1}(U_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+1)$$

y que

$$\Pi^{-1}(U_2) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n+1/2, n+3/2).$$

Cada una de estas uniones es claramente disjunta. Tenemos que probar que $\Pi|_{(n,n+1)} : (n, n+1) \to U_1$ es un homeomorfismo. Recordando los conocimientos de las funciones trigonométricas tenemos que $\Pi|_{(n,n+1)}$ es biyectiva y continua. Observe que Π es una función abierta, es decir que si uno toma un intervalo abierto de $\theta \in \mathbb{R}$ su imagen por Π es abierta en S^1. Una forma de ver esto es observar que la imagen por la proyección es la intersección del ángulo con el círculo. Veáse la figura 2.2.

Como $\Pi|_{(n,n+1)}$ es una función biyectiva y abierta, su inversa es continua. Esto prueba que U_1 es continuamente cubierto por Π. Análogamente obtenemos el resultado para U_2.

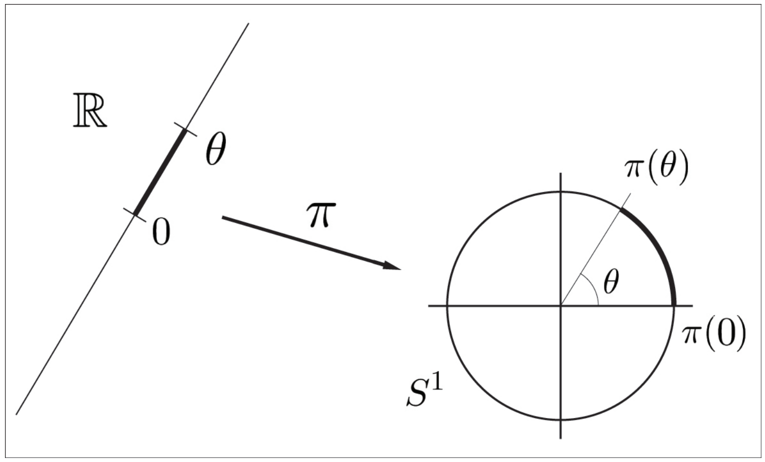


Figura 2.2: Imagen de la proyección de un intervalo abierto a través de Π.

Sea $y \in S^1$, como $U_1 \cup U_2$ es todo el círculo, e y pertenece a U_1 o a U_2, conjuntos abiertos continuamente cubiertos por Π. Es decir, y tiene un entorno continuamente cubierto por Π. Así, hemos probado el siguiente lema:

Lema 1. *La función $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$ es una función cubriente.*

A continuación probaremos que el espacio cociente $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathcal{T}^*)$ es homeomorfo a S^1, completando así el objetivo de esta sección.

Proposición 7. *El espacio $(\mathbb{R}/\mathbb{Z},\mathcal{T}*)$ es homeomorfo a S^1 con la topología que hereda como subconjunto de $\mathbb{C}$.*

Demostración.

Empecemos definiendo el círculo en los complejos a través del isomorfismo de grupos que construímos en la Sección §2.2 como:

$$S^1 := \{(\cos(2\pi\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\pi\theta)) \in \mathbb{C}^* \mid \theta \in [0,1]\}.$$

Utilizaremos la función cociente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y la función cubriente $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$, ya definidas, para proponer una nueva función $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ como:

$$f([x]) = \Pi(h^{-1}(x)) \text{ con } [x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

donde x es un representante de $[x]$ que está en $\mathbb{R}$. El siguiente diagrama sirve para comprender mejor la idea propuesta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ & \underset{\Pi}{\searrow} & \downarrow f \\ & & S^1 \end{array}$$

Debemos mostrar que f está bien definida y que es un homeomorfismo. Probaremos que está bien definida si dados y, $z \in [x]$, se cumple que $[y] = [z]$ entonces $f([y]) = f([z])$. Sabemos que z e y son de la forma $(x+n)$ y $(x+m)$ respectivamente, con n y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$f([y]) = \Pi(h^{-1}(y)) = (\cos(x+n) + i\,\text{sen}(x+n))$$

y

$$f([z]) = (\cos(x+m) + i\,\text{sen}(x+m)).$$

El seno y el coseno son funciones periódicas en $\mathbb{R}$, por lo tanto $f([y]) = f([z])$. Esto muestra que nuestra función está bien definida, ya que para dos representantes distintos de la misma clase de equivalencia su imagen es la misma.

Tenemos ahora que probar que f es un homeomorfismo. Observemos que ya probamos que Π es un homeomorfismo, además probamos que tanto h como h^{-1} son continuas y sobreyectivas, por lo tanto f es un homeomorfismo, que es lo que queríamos demostrar. □

Por lo tanto hemos probado que el círculo es un espacio topológico. Ahora, nos falta probar lo que mencionamos al principio de la Sección: el espacio topológico construído mediante la topología cociente y el espacio topológico con la topología relativa son iguales, es decir que son homeomorfos. Para esto utilizaremos la función $e^{i(2\pi x)}$, con $x \in \mathbb{R}$, que definimos en la Sección §2.2, donde para cada real x le asociamos $e^{i(2\pi x)}$, esta función va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ y su imagen, como lo probamos en la sección antes mencionada, cae justo en el circulo definido en $\mathbb{C}$. Como además $e^{i(2\pi x)} = e^{i(x+2\pi n)}$ coinciden para cualquier entero n esta función lleva los puntos al espacio cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, propiedad que ya demostramos al ser ésta un isomorfismo de grupos. Si probamos que además la función es un homeomorfismo habremos terminado.

Sabemos, por la definición de isomorfismo, que la función es biyectiva, además, como hemos probado que es igual a la suma del seno y del coseno, podemos afirmar que es continua. Sólo nos falta mostrar que la función tiene inversa continua, para esto observemos que $((\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus), \mathcal{T})$ es compacto y que $S^1 \subset \mathbb{C}$ es un espacio de Hausdorff, entonces tenemos una función biyectiva y continua que va de un compacto en un Hausdorff y esto es siempre un homeomorfismo. Por lo tanto hemos demostrado que los espacios son homeomorfos.

A continuación probaremos además que S^1 es un espacio métrico. Gracias a la función cubriente Π de esta Sección sabemos que el círculo hereda una distancia de $\mathbb{R}$ definida como:

$$d([x],[y]) = \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Recordemos que la distancia estándar en $\mathbb{R}$ es definida por la ecuación:

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Por lo tanto el:

$$\text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = \text{mín}\{|(x+n)-(y+m)| \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Lo que implica que nuestra distancia en el círculo está bien definida y que (S^1, d) es un espacio métrico.

Para estudiar la dinámica de S^1 vamos a introducir en esta sección la noción de *levantamiento*. Esta es indispensable para el objetivo fundamental del trabajo.

2.3.2. Levantamientos

¿Cómo podemos operar con funciones del círculo si lo que sabemos es trabajar con funciones reales de variable real? La definición de *número rotación*, central en este trabajo, pasa por asociarle a un homeomorfismo del círculo un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ que refleje sus propiedades dinámicas. Es por esta razón que definimos a continuación la noción de levantamiento.

Definición 20. Sea $p : E \to B$ una función cubriente y sea $f : X \to B$ una función continua, entonces decimos que un *levantamiento* de f es una función continua $F : X \to E$ tal que $p \circ F = f$. Es decir:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \overset{F}{\nearrow} & \downarrow p \\ X & \underset{f}{\to} & B \end{array}$$

Conociendo ya la definición de levantamiento podemos observar que la proyección canónica proporciona a cualquier homeomorfismo f del círculo en si mismo un levantamiento F con la propiedad de que $f \circ p = p \circ F$. Este resultado es fundamental para la construcción del número rotación, por lo que lo formalizamos en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo y sea Π la proyección canónica de $\mathbb{R}$ en S^1. Entonces existe un levantamiento $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de $f \circ \pi : \mathbb{R} \to S^1$. Obteniendo un esquema con la siguiente forma:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \overset{F}{\to} & \mathbb{R} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ S^1 & \underset{f}{\to} & S^1 \end{array}$$

Diremos que F es un levantamiento de f.

A continuación se describe la idea de la demostración, se puede leer la prueba formal en la Sección §54 de [Mun].

La demostración se basa en construir paso a paso el levantamiento, para esto hay que hacerlo localmente. Primero empezaremos definiendo $F(0)$, con $0 \in \mathbb{R}$, ya que $\Pi \circ F(0) = f \circ \Pi(0) = f([1])$, con $[1] \in S^1$ tenemos muchas opciones para $F(0)$, es decir, cualquier $x \in \mathbb{R}$ tal que $\Pi(x) = f(1)$. Tomamos una de estas, sin importar cual, pero que sea fija.

Ahora, como en una vecindad suficientemente pequeña de $F(0)$, que podemos elegir compacta, la proyección Π es un homeomorfismo, la función $F(x)$ queda determinada, en la vecindad donde Π tiene inversa, por $\Pi \circ F(x) = f \circ \Pi(x)$, o sea, $F(x) = \Pi^{-1} \circ f \circ \pi(x)$. Veamos que cuando llegamos al borde de la vecindad, llamémosle a ese punto y, tenemos ya definido $F(y)$; dado que repitiendo lo mismo que antes, como Π es un homeomorfismo en una pequeña vecindad de $F(y)$ podemos definir $F(x)$ en la pequeña vecindad de y aplicando el razonamiento anterior. Es posible que exista un problema, ya que en algunos puntos de la vecindad podríamos tener dos definiciones de $F(x)$, pero observando bien veremos que estas son la misma porque coinciden en el punto y y la función Π es un homeomorfismo.

A continuación repetimos lo mismo hasta cubrir todo $\mathbb{R}$, esto lo podemos hacer porque las vecindades donde Π es un homeomorfismo pueden elegirse todas de longitud 1. Si Π no fuera un homemorfismo en estas vecindades podría pasar que éstas se hicieran cada vez más chicas y no llegáramos a cubrir todo $\mathbb{R}$. Ésta, es la idea para demostrar que F es un levantamiento de f, ya que $\Pi \circ F(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

2.4. La familia de rotaciones

La familia de rotaciones del círculo va a ser nuestro modelo básico para describir la dinámica de los homeomorfismos del círculo. Esta familia nos permitirá tener una noción sencilla y útil para poder adentrarnos en la dinámica con una idea menos confusa en la cabeza.

Para definir una rotación del círculo no necesitamos más que definir el ángulo por el cual queremos hacerlo rotar. Finalmente este no es un concepto nuevo para nadie, pues desde que aprendimos geometría en la escuela sabemos que un ángulo se puede identificar con un punto en el círculo. Por lo tanto rotar por un ángulo α es aplicar la transformación siguiente:

$$S^1 \ni [x] \to [x+\alpha] = [x] \oplus [\alpha] \in S^1.$$

Entonces, para cada ángulo $[\alpha] \in S^1$ definimos R_α, la *rotación* por este ángulo de la siguiente manera:

$$R_\alpha : S^1 \to S^1 \text{ tal que:}$$

$$R_\alpha([x]) = [x+\alpha].$$

Para poder entender la siguiente proposición es necesario que sepamos qué es una isometría. Una isometría es una función que conserva la distancia entre los puntos. Recordemos que en la Sección §1.1 definimos una función distancia en S^1.

Definición 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $f : X \to X$ satisface que:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \text{ para todos } x,\ y \in X.$$

Entonces f es llamada una *isometría* de X.

Proposición 8. *Dado cualquier $[\alpha] \in S^1$, la función $R_\alpha : S^1 \to S^1$ es una isometría.*

Demostración.

Observe que:

$$\begin{aligned}
d(R_\alpha([x]), R_\alpha([y])) &= d([x+\alpha], [y+\alpha]) \\
&= \text{mín}\{|(x+\alpha+n) - (y+\alpha+m)| \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= \text{mín}\{|(x-y) + (n-m)| \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= \text{mín}\{|(x-y) + (n-m)| \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= \text{mín}\{d_{\mathbb{R}}(x+n, y+m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \\
&= d([x], [y]).
\end{aligned}$$

Por lo tanto como $d(R_\alpha([x]), R_\alpha([y])) = d([x], [y])$, R_α es una isometría de S^1. □

Observemos que una vez conociendo la función de las rotaciones del círculo podemos tomar un $[\alpha] \in S^1$ y tomar un levantamiento de R_α como la traslación $T_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T_\alpha(x) = x + \alpha$, estudiando así una función del círculo en si mismo desde los reales.

2.4.1. La dinámica de las rotaciones

Ya que hemos definido la función R_α como una rotación del círculo la idea inmediata es ver qué tipos de rotaciones hay. La dinámica de las rotaciones

R_α se puede dividir en dos tipos, dependiendo de si α es un número racional o irracional. Decimos que un punto $[\alpha] \in S^1$ es racional si $\alpha = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$. De hecho si α es racional todos los $x \in [\alpha]$ son de la forma $x = \frac{p}{q} + n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $[\alpha] \subset \mathbb{Q}$. Análogamente $[\alpha] \in S^1$ es irracional si $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional. A continuación caracterizaremos las rotaciones según sea el caso.

Teorema 2. *$[\alpha] \in S^1$ es racional si y sólo si existe $[x] \in S^1$ tal que $R_\alpha^q([x]) = [x]$ para algún $q \in \mathbb{N}$. Esto implica que todas las órbitas $R_\alpha^n([y])$ con $[y] \in S^1$ son periódicas e $[y]$ es un punto periódico de período q, para todo y.*

Demostración.

Supongamos que existe $[x] \in S^1$ tal que $R_\alpha^q([x]) = [x]$ para algún $q \in \mathbb{N}$. Es decir que la clase de equivalencia de la rotación es igual a la clase de equivalencia de x, $[R_\alpha^q([x])] = [x]$, es decir que $x + q\alpha = x + m$, con $m \in \mathbb{Z}$. Despejando α obtenemos que $\alpha = \frac{m}{q} \in \mathbb{Q}$.

Ahora bien, si $\alpha = \frac{p}{q}$ con p, $q \in \mathbb{Z}$ primos entre si[2] y $[x] \in S^1$ cualquier punto; bastaría probar que $R_\alpha^q([x]) = [x]$. Observemos que:

$$R_{\frac{p}{q}}^n([x]) = \{x + \frac{np}{q} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por lo tanto $R_{\frac{p}{q}}^q([x]) = (x + \frac{qp}{q}) = (x + p) \in [x]$. □

Observación: *Para el caso irracional el comportamiento de las órbitas es distinto, en el sentido de que para cualquier punto éstas son infinitas.*

De hecho si la órbita de un punto es finita implica que el punto es un punto periódico de la rotación y por el teorema anterior esto no es posible pues el ángulo tendría que ser racional.

Para poder trabajar con el caso irracional debemos de introducir las siguientes definiciones generales de los sistemas dinámicos.

Decimos que la órbita de p es *densa* si $\overline{\mathcal{O}(p)} = X$, es decir, la órbita se acumula en cualquier punto del espacio.

[2] Es decir que no tienen otro divisor común distinto al 1 y al -1.

Definición 22. Un sistema dinámico topológico $f : X \to X$ es llamado *minimal* si la órbita de cualquier punto $x \in X$ es densa en X.

Con esta definición probaremos formalmente que si $[\alpha] \in S^1$ es irracional, entonces todas las órbitas son densas.

Teorema 3. *Si $[\alpha] \in S^1$ es irracional entonces la rotación R_α es minimal.*

Demostración.

Sea $[x] \in S^1$ y denotemos por $A = \overline{\mathcal{O}([x])}$, la cerradura de su órbita. Si la órbita no es densa entonces el complemento de A es un conjunto abierto no vacío que está compuesto por intervalos disjuntos. Sea I el intervalo más largo de ellos (o uno de los más largos si es que hay más de uno del mismo tamaño). La rotación es una isometría por lo que preserva el tamaño de cualquier intervalo. Observemos que:

$$J = R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset, \text{ si } n \neq 0.$$

De hecho, si $J \neq \emptyset$ o bien $R_\alpha^n(I) = I$ ó $R_\alpha^n(I) \cup I$ es un intervalo. El segundo caso es imposible, pues $|R_\alpha^n(I) \cup I| > I$; e I era el intervalo más grande de $S^1 \setminus A$.

Si $R_\alpha^n(I) = I$ los extremos de I tendrían que ser periódicos. De hecho, si $I = [a, b]$ entonces $R_\alpha^{2n}(a) = a$ y $R_\alpha^{2n}(b) = b$; cosa que es imposible ya que α es irracional.

Dado que $\{R_\alpha^n(I)\}_n \subset S^1$ es una familia de intervalos disjuntos de la misma longitud, tenemos una contradicción, pues la longitud total de S^1 es finita. Esto implica que no puede existir ningún intervalo en el complemento de la cerradura de la órbita. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{O}([x])} = S^1$, para todo $[x] \in S^1$. En conclusión si α es irracional la rotación R_α es minimal. $\square$

Por el teorema anterior y la Definición 22 de esta sección hemos probado que si el ángulo de rotación es irracional todas las órbitas de nuestro sistema dinámico son densas.

Habiendo probado los dos teoremas de esta sección podemos afirmar que la dinámica de la familia de rotaciones se divide en dos:

1) O todas sus órbitas son periódicas, del mismo periódo y el ω-límite de cualquier punto es su órbita o,

2) todas sus órbitas son densas y el ω-límite de cualquier punto es todo el círculo.

2.5. El número de rotación

Hasta ahora hemos definido al círculo en los reales y en los complejos, lo hemos construído como un grupo, como un espacio topológico y como un espacio métrico. Hemos definido la noción de homeomorfismo y hemos estudiado algunos de ellos. Conocemos ya el concepto de levantamiento y el de rotación. Además, hemos estudiado parte de la dinámica de las rotaciones.

Con estas mismas ideas en mente Henri Poincaré se planteó la pregunta de bajo qué condiciones un homemorfismo dado sería equivalente a una rotación. Es por ello que aquí empezaremos el estudio del tan mencionado número de rotación, el cual le fijará un número a cada homeomorfismo, este, en cierto sentido, mide el promedio de la rotación a la que son sujetos los puntos al aplicarles el homeomorfismo. Dedicaremos la presente la sección a su estudio.

Preservar orientación

Un homeomorfismo f de S^1 en S^1 preserva orientación si dados tres puntos distintos a, b, c en el círculo, ordenados de tal forma que yendo en contra del sentido de las manecillas del reloj, empezando en a llego primero a b y después a c. Entonces la función f preserva ese orden, es decir, que empezando en $f(a)$, y yendo en dirección contraria de las manecillas del reloj, llego antes a $f(b)$ que a $f(c)$.

Si esto no sucede, diremos que el homeomorfismo *invierte la orientación*. Los homeomorfismos de S^1 en S^1 que invierten la orientación no nos interesan porque siempre tienen dos puntos fijos. Para observar esto consideremos un levantamiento F de f, entonces, sin pérdida de generalidad, digamos que 0 es un punto fijo, o sea que $F(1) = -1$; entonces, la función $F(x) - x$ vale 0 en 0, y -2 en 1. Así, podemos ver que debe valer -1 en algún punto entre ellos y este representa el segundo punto fijo de S^1.

Proposición 9. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva orientación y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces el número:*

$$\rho(F) := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n},$$

existe para toda $x \in \mathbb{R}$, es independiente de x y si F_1 y F_2 son levantamientos de f,

$$\rho(F_1) - \rho(F_2) = (F_1 - F_2) \in \mathbb{Z}.$$

A $\rho(F)$ se le llama número de rotación de F.

La tercera propiedad del número de rotación de un levantamiento de f nos permite escribir la siguiente definición.

Definición 23. Se denomina *número de rotación* de f a:

$$\rho(f) := \pi(\rho(F)).$$

A continuación haremos la demostración de la Proposición anterior y la dividiremos en tres partes: i) la independencia de x, ii) la existencia del límite para toda x y iii) que está bien definida salvo por un entero.

Antes de comenzar la prueba de la Proposición necesitamos demostrar el siguiente lema.

Lema 2. *Si f es un homeomorfismo, F cualquier levantamiento de f, y Π la proyección canónica de S^1. Entonces $F(x+1) - F(x)$ es un entero, el cual es independiente de x y del levantamiento.*

Demostración.

Sabemos por la definición de levantamiento que:

$$\Pi(F(x+1)) = f(\Pi(x+1)) = f(\Pi(x)) = \Pi(F(x)),$$

entonces $F(x+1) - F(x) \in \mathbb{Z}$. Este entero es independiente de x por continuidad. Si $\widetilde{F}$ es otro levantamiento de f entonces:

$$\Pi(\widetilde{F}(x)) = f(\Pi(x)) = \Pi(F(x)),$$

así $\widetilde{F} - F$ es una función continua de valores enteros, es decir que es constante, por lo tanto $\widetilde{F}(x+1) - \widetilde{F}(x) = F(x+1) - F(x)$, lo que prueba que es independiente del levantamiento que se tome. □

Observemos que el entero $F(x+1)-F(x)$ tiene que ser positivo, pues f preserva orientación. Además, si ese entero no es igual 1, se puede ver que f no es inyectiva. Esto es cierto porque si encontráramos un $x \in \mathbb{R}$ tal que $F(x+1) = F(x)+2$, entonces existirían dos puntos $y, z \in [x, x+1] \subset \mathbb{R}$ distintos como puntos del círculo tales que $F(y)+1 = F(z)$, o sea $f(y) = f(z)$ lo que implica que f no es inyectiva. Véase la gráfica de la figura 2.3.

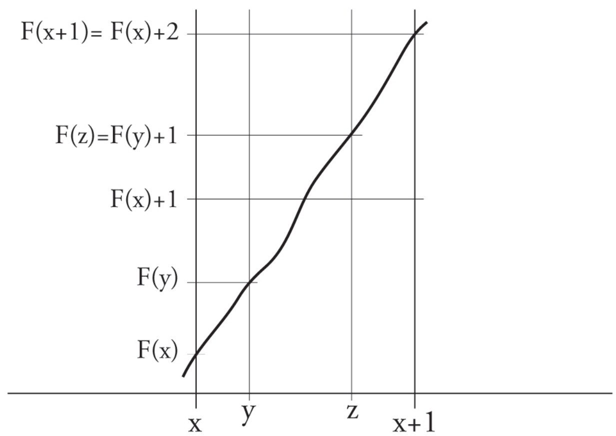


Figura 2.3: Gráfica que muestra por qué $F(x+1)-F(x)=1$.

Con este lema demostrado podemos comenzar con la prueba de la Proposición 9.

Demostración.

i) Por el Lema 2 sabemos que:

$$F(x+1) = F(x)+1,$$

y para cualesquiera x e $y \in [0,1)$ tenemos $|F(y)-F(x)| < 1$. Observemos lo siguiente:

$$\left| \frac{|F^n(x)-x|}{n} - \frac{|F^n(y)-y|}{n} \right| = \left| \frac{1}{n}(|F^n(x)-x| - |F^n(y)-y|) \right|.$$

A continuación mostraremos que:

$$\left| \frac{1}{n}(|F^n(x)-x| - |F^n(y)-y|) \right| \leqslant \frac{1}{n}(|F^n(x)-F^n(y)| + |x-y|).$$

La validez de esta desigualdad se basa en el siguiente ejercicio de análisis:

$$||z-x|-|w-y|| \leqslant |y-x|+|w-z|,$$

con x, y, z y w en un espacio métrico.

Observe que:

$$|a| \leqslant b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant b; \\ \\ -a \leqslant b. \end{cases}$$

Sugerencia: haga $x = F^n(x)$, $y = x$, $z = F^n(y)$ y $w = y$, entonces como para cualesquiera x e $y \in [0,1)$ tenemos $|F(y) - F(x)| < 1$, implica que:

$$\frac{1}{n}(|F^n(x) - F^n(y)| + |x-y|) \leqslant \frac{2}{n},$$

que claramente no depende de x.

ii) A continuación probaremos la existencia del límite para toda x. Para esto tenemos que mostrar que:

$$\frac{F^n(x)-x}{n} \leqslant (F^m(x)-x)+(F^n(x)-x)+1.$$

Tomamos $x \in \mathbb{R}$ y definimos a k como:

$$k = [F^n(x)-x] = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant (F^n(x)-x)\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F^{m+n}(x)-x &= F^m(F^n(x)) - F^n(x) + F^n(x) - x \\ &= (F^m(x+k)-(x+k)) + (F^n(x)-x)+ \\ &\quad +(F^m(F^n(x)) - F^m(x+k)) - (F^n(x)-x-k) \\ &\leqslant (F^m(x)-x)+(F^n(x)-x)+1. \end{aligned}$$

Esto es cierto ya que: $F^m(y) - F^m(z) \leqslant 1$ cuando $y - z \leqslant 1$, y en este caso $y = F^n(x)$ y $z = x + k$, por lo tanto:

$$(F^n(x)-x)-k = (F^n(x)-x)-[F^n(x)-x],$$

que es claramente menor que uno y mayor que cero.

Ahora veamos que:

$$\begin{aligned}\frac{F^n(x)-x}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F^{i+1}(x)-F^i(x))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(F(F^i(x))-F^i(x))\\ &\geqslant \min\{F(y)-y \mid 0\leqslant y\leqslant 1\},\end{aligned}$$

por lo tanto $\frac{1}{n}(F^n(x)-x)$ está acotado inferiormente.

Para poder completar la prueba de la existencia del límite debemos introducir el siguiente lema que daremos como cierto. El enunciado original y su prueba se pueden encontrar en la Proposición 9.6.4 de [KH], Sección §9.6, página 374.

Lema 3. *Si $a_{m+n}\leqslant a_n+a_{m+k}+L$, para toda m y $n\in\mathbb{N}$, alguna k y alguna L, entonces la sucesión $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ es convergente y el límite pertenece a $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.*

En nuestro caso tenemos que,

$$a_{m+n}=(F^{m+n}(x)-(x))$$

y

$$a_n=(F^n(x)-x),$$

con $k=0$ y $L=1$. Además debido a que $\frac{1}{n}(F^n(x)-x)$ está acotada inferiormente el $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F^n(x)-x}{n}$ no vale nunca $-\infty$.

iii) Lo único que falta demostrar para corroborar la validez de la Proposición del número de rotación es que $\rho(F)$ está bien definido salvo por un entero, esto implica que debemos mostrar que:

$$\rho(F_1)-\rho(F_2)=F_1-F_2\in\mathbb{Z}.$$

Supongamos F un levantamiento y $G=F(x)+k$ otro, con $k\in\mathbb{Z}$, Entonces:

$$G^n(x)=F^n(x)+nk.$$

Sabemos, por el Lema 2, que $F(x+1) = F(x)+1$, esto implica que $F(x+k) = F(x) + k$ ya que es de período uno.

De esta manera:

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

y

$$\rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x - nk}{n}.$$

Entonces $\rho(F) - \rho(G) = \lim_{n\to\infty} \frac{nk}{n} = k$ que es lo que queríamos demostrar. Por lo tanto por i), ii) y iii) el número de rotación está bien definido. □

2.6. Homeomorfismos del círculo

Hemos llegado ahora a la última sección del capítulo, el concepto de homeomorfismo ha sido ya estudiado en las páginas anteriores. Las rotaciones nos han servido como ejemplos de estos más allá de su definición. Ahora revisaremos algunas de las propiedades dinámicas que pueden tener éstos a través de su número de rotación.

Para el estudio de los homeomorfismos del círculo que realizaremos a continuación asumiremos que todos estos preservan orientación. Señalaremos los casos donde esta hipótesis cambie.

Comenzaremos demostrando que el número de rotación es invariante bajo conjugaciones topológicas, es decir que es invariante bajo homeomorfismos que son conjugados como se definió y estudió en el capítulo anterior.

Proposición 10. *Si f y g homeomorfismos de S^1 en S^1 son conjugados por un tercer homeomorfismo $h : S^1 \to S^1$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.*

Demostración.

Se pueden elegir levantamientos tales que $f = h \circ g \circ h^{-1}$, es decir que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} & \xrightarrow{H^{-1}} & \mathbb{R} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi & & \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ S^1 & \underset{h}{\rightarrow} & S^1 & \underset{g}{\rightarrow} & S^1 & \underset{h^{-1}}{\rightarrow} & S^1 \end{array}$$

Donde H es el levantamiento de h y H^{-1} de su inversa. Como el diagrama conmuta sabemos que $H \circ G \circ H^{-1}$ es un levantamiento de $h \circ g \circ h^{-1}$.

Para demostrar que $\rho(f) = \rho(g)$ tenemos que probar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H \circ F \circ H^{-1}(0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(0)}{n}.$$

Observemos primero que como h^{-1} es un homemorfismo, entonces existe $k > 0$ tal que:

$$|H^{-1}(x) - x| < k, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Recordamos que los homeomorfismos con los que estamos trabajando preservan orientación. Entonces como $(H^{-1} \circ F \circ H)^n = H^{-1} \circ F^n \circ H$ podemos calcular los límites así:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(H^{-1} \circ F \circ H(0))^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(0)}{n} + \frac{H(0)}{n}.$$

Pero $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{H(0)}{n} = 0$, por lo tanto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(0)}{n},$$

y como por (2.1): $|H^{-1} \circ F^n \circ H(0) - F^n \circ H(0)| < k$, implica que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{H^{-1} \circ F^n \circ H(0)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n \circ H(0)}{n}.$$

Pero ya probamos que $\lim \frac{H(0)}{n} = 0$, por lo tanto la igualdad de arriba es la que estamos buscando y así hemos demostrado que $\rho(f) = \rho(g)$. □

Hemos demostrado que los homeomorfismos topológicamente conjugados del círculo tienen el mismo número de rotación. Gracias a este resultado podemos escribir el corolario siguiente, cuya demostración es fácil de escribir utilizando el razonamiento de la prueba anterior.

Corolario 1. *Si $h : S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo, entonces $\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = \rho(f)$.*

Los siguientes resultados caracterizan los homeomorfismos dependiendo de si su número de rotación es racional o irracional.

Proposición 11. *$\rho(f)$ es irracional si y sólo si el homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ no tiene puntos periódicos.*

Demostración.

Primero probaremos que si f no tiene puntos periódicos entonces $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$. Supongamos que f tiene un punto x periódico de período $q \in \mathbb{Z}$, entonces para algún levantamiento F y algún $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que: $F^q(x) = x + k$. Así para algún $n \in \mathbb{N}$ tendremos:

$$\frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \frac{1}{nq} \sum_{i=0}^{n-1} F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x) = \frac{nk}{nq} = \frac{k}{q},$$

entonces $\rho(F) = k/q$ y como la función Π es continua $\Pi(\rho(F)) = \rho(f) = k/q$. Entonces si f tiene un punto periódico su número de rotación es racional y por lo tanto si f no tiene puntos periódicos $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, que es lo que queríamos demostrar.

Ahora nos falta probar que si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces f no tiene puntos periódicos. Empecemos observando que para cualquier levantamiento F de f, $\rho(F^n + k) = n\rho(F) + k$ donde $(F^n + k)(x) = F^n(x) + k$. Por lo tanto será suficiente con probar que si $\rho(F) = 0$, entonces f tiene un punto periódico, ya que si $\rho(F)$ es racional entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\rho(F^n + k) = 0$.

Supongamos lo contrario, es decir que si $\rho(F) = 0$, entonces f no tiene puntos fijos de ningún período. Entonces podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $F(x) > x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deducimos así que o $F^m(0) < 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ó $F^j(0) > 1$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Ahora si tomamos el segundo caso podemos observar que $F^j(F^j(0)) = F^{2j}(0) > F^j(1) > 2$, etcétera, esto implica que $\frac{F^{mj}(0)}{mj} > 1/j$ y por lo tanto $\rho(F) > 1/j$; pero sabemos por hipótesis que $\rho(F) = 0$, entonces el segundo caso no es posible pero sí el primero, así que $\{F^m(0)\}$ es una sucesión monótona, creciente y acotada por 1. Esta sucesión tiene que converger a algún límite, el cual será un punto fijo de f. Por esto podemos deducir que $\rho(F) \in \mathbb{Z}$ y por lo que probamos primero f tiene puntos periódicos, lo que contradice nuestra hipótesis. Y así hemos demostrado que si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces f no tiene puntos periódicos, completando la prueba de la Proposición. $\square$

A partir de esta Proposición podemos escribir el siguiente corolario.

Corolario 2. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo, entonces $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ si y sólo si f tiene un punto periódico.*

Como hemos demostrado recién el inverso del corolario no escribiremos su prueba en esta ocasión. Pero si lo aprovecharemos para continuar con resultados que involucran a los homeomorfismos con número de rotación de valor racional.

Proposición 12. *Sea $f : S^1 \to S^1$ un homemorfismo con $\rho(f) \in \mathbb{Q}$, entonces todas sus órbitas periódicas tienen el mismo período.*

Demostración.

Si $\rho(f) = k/q$ con $k, q \in \mathbb{Z}$ primos relativos tenemos que probar que para cualquier punto $\Pi(x)$ periódico existe un levantamiento F de f para el cual $F^q(x) = x + k$, lo que implicaría que todas las órbitas periódicas tienen el mismo período.

Si $\Pi(x)$ es periódico y F es un levantamiento, entonces $F^r(x) = x + s$ para algún $r, s \in \mathbb{Z}$ y como vimos ya en la Proposición 11:

$$j + \frac{k}{q} = \rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n\to\infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}.$$

Ahora podemos tomar F tal que $j = 0$ y entonces $s = mk$ y $r = mq$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Si $F^q(x) - k > x$, y al igual que en el caso de los levantamientos de la Proposición 10:

$$F^{2q}(x) - 2k = F^q(F^q(x) - k) - k \geqslant F^q(x) - k > x,$$

podemos razonar inductivamente y ver que $F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mk > x$ contradiciendo nuestra hipótesis. Así, $F^{mq}(x) - mq \leqslant x$ y análogamente $F^{mq}(x) - mk \geqslant x$, por lo tanto $F^{mq}(x) - mk = x$ entonces $F^q(x) = x + k$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ahora seguiremos el estudio de los homeomorfismos en el caso de que su número de rotación tenga valor irracional, es decir, el caso en el que nuestro sistema dinámico no tiene puntos periódicos.

Teorema 4. *Si el número de rotación $\rho(f)$ es irracional, entonces el homeomorfismo f es semiconjugado a la rotación de ángulo $\rho(f)$, es decir a $R_{\rho(f)} : S^1 \to S^1$. Esta semiconjuación es conjugación si y sólo si todas las órbitas de f son densas.*

La siguiente prueba se basa en la demostración del Teorema 2.2.5 de la Sección §2.2.1 de [Na].

Demostración.

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f a la recta real tal que $F(0) \in [0,1)$. Por el Lema 2 y la demostración de la existencia del límite que define al número de rotación, sabemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ el valor de la función:

$$\varphi(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (F^n(x) - n\rho(F)),$$

es finito. Observemos que la función φ verifica las siguientes propiedades:

i) φ es creciente y continua por izquierda;
ii) $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
iii) $\varphi(F(x)) = \varphi(x) + \rho(F)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

La validez de estas propiedades de φ se basa en lo siguiente: i) Es creciente porque F es creciente y simplemente la estamos trasladando (restándole un valor fijo), por lo tanto tiene que serlo. Y que la función sea creciente implica que es continua por izquierda. ii) Esta igualdad se da porque $F^n(x+n) = F^n(x) + n$, en particular se cumple que $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$. Y iii) la propiedad es cierta porque $F^n(F(x)) - n\rho(f) = F^{n+1}(x) - (n+1)\rho(f) + \rho(f)$.

A partir de estas propiedades observemos que para demostrar que φ es una semiconjugación debemos probar que es continua. El impedimento que habría para que φ sea continua es que tenga saltos, probaremos que esto no puede pasar ya que el número de rotación es irracional.

Observemos que, para cada $x \in \varphi(\mathbb{R})$, el conjunto $\varphi^{-1}(x)$ es o un punto o bien un intervalo no degenerado. Denotemos por $\widetilde{P}(F)$ a la unión del interior de estos últimos intervalos, es decir, es el conjunto de puntos donde la preimagen es "plana", donde es plano es un intervalo que va al mismo punto. Y por $\widetilde{S}(F)$ la unión del interior de los intervalos del complemento de $\varphi(\mathbb{R})$, es decir, es el conjunto de "saltos" de la función. Notemos que los conjuntos $\widetilde{P}(F)$ y $\widetilde{S}(F)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$; estos son invariantes por las traslaciones enteras de la recta, por lo que inducen subconjuntos $P(f)$ y $S(f)$ del círculo. Para demostrar que φ es continua tenemos que probar que no tiene saltos, es decir que $S(f)$ es vacío. Veamos que $S(f)$ es invariante por la rotación de ángulo $\rho(f)$, es decir que $R^{-1}_{\rho(f)}(S(f)) = S(f)$, pero la rotación es un homeomorfismo, por lo tanto esta igualdad siempre se da. Ahora, como $\rho(f)$ es irracional y los saltos son invariantes, estos se tendrían que imbricar, apareciendo así puntos periódicos, lo cual no puede pasar. Por lo tanto $S(f)$ es vacío, es decir que no hay saltos, y esto implica que φ es continua e induce una semiconjugación entre f y $R_{\rho(f)}$.

Finalmente observemos que $P(f)$ es invariante por f, razonamos análogamente que en el caso de la invariancia de $S(f)$. Ahora, si $P(f)$ no es vacío en los o el intervalo que va todo a un punto, veremos que no es inyectiva, por lo tanto no podría inducir una conjugación. Pero al ser todas las órbitas de f densas, podemos observar que como $P(f)$ es invariante y contiene un abierto, al haber una órbita densa que no contiene ningún elemento que pertenezca a $P(f)$, encontramos un absurdo ya que esa órbita no va a pasar por $P(f)$, entonces $P(f)$ es vacío; y en este caso φ es inyectiva, por lo que induce una conjugación entre f y $R_{[\rho(f)]}$. □

Ahora que sabemos bajo qué condiciones un homeomorfismo con número de rotación irracional es topológicamente conjugado a otro homeomorfismo, en este caso a una rotación, probaremos entonces que estos tienen el mismo número de rotación.

Para continuar el estudio de los homeomorfismos del círculo con número de rotación irracional incluiremos una definición indispensable para nuestras posteriores demostraciones.

Definición 24. Un conjunto $B \subset M$ es *minimal* si a través de f es cerrado, invariante y no tiene subconjuntos propios cerrados e invariantes distintos del $\emptyset$.

Observemos que si B es minimal para cada $x \in B$ tendremos que $\omega(x) = \emptyset$ ó $\omega(x) = B$. En el caso de que nuestro espacio fuera compacto, $\omega(x) \neq \emptyset$ para cualquier $x \in M$, y por lo tanto en este caso cualquier punto de un conjunto minimal es recurrente.

Recordemos que un conjunto es *perfecto* si es cerrado y todos sus puntos son de acumulación, es decir que no tiene puntos aislados. Ademas, el interior de A es el mayor conjunto abierto contenido en A y se denota por A°; esto es, si $U \subset A$ es abierto, entonces $U \subset A^\circ$.

Proposición 13. *Supongamos que $\rho(f)$ es irracional. Entonces:*

1) El conjunto $\omega(x)$ es independiente de x.

2) Sea $E = \omega(x)$ para algún $x \in S^1$. El conjunto E es cerrado, invariante y perfecto. Además, si $E \neq S^1$ entonces tiene interior vacío.

Cuando $E \neq S^1$ el conjunto E es un conjunto de Cantor, pues se trata de un conjunto cerrado, perfecto, con interior vacío y que contiene una infinidad de puntos.

La siguiente prueba se basa en la demostración de la Proposición 3 de la Sección §1.1 de [Ni]. Es necesario observar el lema siguiente.

Lema 4. *Dado $x \in S^1$ y $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $m \neq n$, definimos el intervalo $I = [f^m(x), f^n(x)]$; entonces cualquier órbita futura intersecta I, es decir: para todo $y \in S^1$ existe un entero $k > 0$ tal que $f^k(y) \in I$.*

Demostración.

Fijemos $m, n \in \mathbb{Z}$, observemos que los intervalos $f^{-k(m-n)}(I)$ se intersectan sólo en sus extremos, entonces o bien llenan el círculo en una cantidad finita de iteraciones ó sus extremos convergen monótonamente a un punto fijo de f^{m-n}. Ver la figura 2.4.

La segunda posibilidad, como ya hemos visto antes en la Proposición 11, nos haría contradecir la hipótesis de que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, por lo tanto y es un elemento de alguno de los intervalos $f^{-k(m-n)}(I)$ ó $f^{k(m-n)}(y) \in I$, que es lo que queríamos probar. □

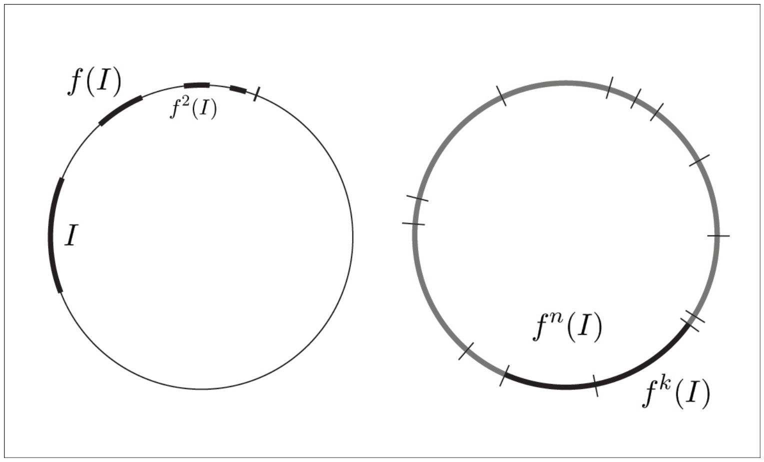


Figura 2.4: Representación de los dos casos posibles del Lema 4.

Ahora si, demostraremos la Proposición anterior.

Demostración.

1) Para mostrar que $\omega(x)$ es independiente de x, debemos observar que si tenemos una sucesión $\{f^{r_j}(x)\}$ de iteraciones de x convergente a un $x_0 \in \omega(x)$, y $r_j \to +\infty$, entonces podemos usar nuestra afirmación para escoger una sucesión $s_j \to +\infty$, con $f^{s_j}(y) \in [f^{r_{j-1}}(x), f^{r_j}(x)]$, y por lo tanto $f^{s_j}(y) \to x_0$, así $x_0 \in \omega(y)$. Esto implica que $\omega(x) \subset \omega(y)$, razonando análogamente con y en lugar de x podemos concluir que $\omega(x) = \omega(y)$, lo que implica que cuando el número de rotación es irracional el ω-límite es independiente del punto que se tome.

Sea $E = \omega(x)$, para alguna $x \in S^1$. La Proposición 2 muestra que E es un conjunto cerrado e invariante.

2) Para probar que E es perfecto, veamos que si $z \in E$, entonces $z \in \omega(z)$ y $z = \lim\limits_{j\to+\infty} f^{r_j}(z)$, donde cada $f^{r_j}(z)$ es distinto pues z no puede ser periódico, y por lo tanto ningún punto es aislado

Observemos que E es un conjunto minimal de f. Si existiera $E' \neq \emptyset$ cerrado e invariante, entonces $x' \in E'$ implica que $\mathcal{O}(x') \subset E'$ y como

$E = \omega(x') \subset \overline{\mathcal{O}(x')} \subset \overline{E'} = E'$. Por lo tanto $E = E'$.

Sea $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$. Observe que ∂E es invariante. De hecho, $E^\circ = f^{-1}(E^\circ)$. Esto es verdad porque $f^{-1}(E^\circ) \subset E$ es un abierto. Por lo tanto $f^{-1}(E^\circ) \subset E^\circ$. Para mostrar la otra contención basta observar que si $x \in E^\circ$ entonces existe un abierto V tal que $x \in V \subset E^\circ$. Por lo tanto $f^{-1}(x) \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(E^\circ)$.

Observe que el complemento de ∂E es un conjunto abierto, de hecho $(\partial E)^c = E^\circ \cup E^c$. Por lo tanto ∂E es un cerrado.

Como $\partial E \subset E$ y E es minimal, podemos concluir que: $\partial E = E$, o bien $\partial E = \emptyset$. Si $\partial E = \emptyset$ entonces $E = S^1$, pues E es abierto y cerrado. Si $\partial E = E$ entonces interior$(E) = \emptyset$, que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Con los resultados conocidos hasta ahora podemos concluir que el estudio de la dinámica de un homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional pasa por estudiar la dinámica de la rotación respectiva.

A partir de este resultado distinguiremos los dos posibles casos dinámicos de los homeomorfismos con número de rotación irracional. Diremos que un homeomorfismo f es *transitivo* si $E = S^1$ y *no transitivo* en caso contrario. En general, un sistema dinámico definido en un espacio topológico cualquiera es *transitivo* si existe un punto cuya órbita es densa.

Con esta caracterización de los homeomorfismos concluimos el presente capítulo, dando lugar al estudio del *Teorema de Denjoy* que es el objetivo principal de este trabajo. Esto se hará en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Teorema de Denjoy

3.1. El teorema

Como ya hemos mencionado, la mayoría de los temas que se han presentado hasta ahora fueron estudiados en primera instancia por Poincaré. Sin embargo, las hipótesis de diferenciabilidad fueron estudiadas realmente a profundidad por Denjoy, al dedicarse a la investigación sobre los difeomorfismos del círculo.

Hemos probado que cualquier homeomorfismo f del círculo con número de rotación irracional o bien todas sus órbitas son densas (el minimal es todo S^1), o bien el minimal es un conjunto de Cantor. También demostramos que cuando todas las órbitas son densas el sistema dinámico es conjugado a una rotación. Arnaud Denjoy descubre en [Den], tratando de entender cuándo un homeomorfismo del círculo es transitivo o no, que para descartar la situación en que el minimal sea un conjunto de Cantor, es suficiente controlar la dinámica de f a través de su derivada. Por lo tanto debemos restringirnos al dominio de los difeomorfismos del círculo.

Diremos que un homeomorfismo del círculo es un *difeomorfismo* si él y su inversa son diferenciables. Recordemos que una función es diferenciable si tiene derivada en cada punto de su dominio. Para nuestros propósitos debemos considerar difeomorfismos con mayor regularidad. De hecho, necesitamos que su derivada sea una función continua. Un difeomorfismo que tiene esta característica se denomina que es de *clase* C^1.

Para poder enunciar el Teorema de Denjoy debemos recordar la noción de la variación de una función $f : [a, a+1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuándo esta es acotada o no, y sobre todo, cómo utilizarla en funciones $f : S^1 \to \mathbb{R}$. Recordemos que $\Pi : \mathbb{R} \to S^1$ denota la proyección canónica.

Definición 25. Una función $g : S^1 \to \mathbb{R}$ tiene *variación acotada* si existe $V > 0$ tal que para cualquier sucesión de números reales $x_0 < x_1 < ... < x_n = x_0 + 1$ se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g \circ \Pi(x_{i+1}) - g \circ \Pi(x_i)| \leqslant V. \tag{3.1}$$

Denotamos la variación de g por $\mathrm{Var}(g) = \inf\{V > 0 \mid V \text{ satisface } (3.1)\}$.

Por supuesto, una función no tiene variación acotada si no existe dicha V.

Ejemplo 7. Una función Lipschitz $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisface que existe $C > 0$ tal que para todo x_1 y $x_2 \in [0, 1]$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$. Toda función Lipschitz tiene variación acotada.

La validez de este resultado se basa en la siguiente desigualdad $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$. La cual, por ser cierta para todo x_j, nos garantiza que $|f(x_{j_1}) - f(x_{j_2})| \leqslant C|x_{j_1} - x_{j_2}|$, para todo $x_1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant x_2$, y para cada partición distinta. Por lo tanto si una función es Lipschitz ésta tiene variación acotada.

Ejemplo 8. La función $f = \mathrm{sen}(1/x)$ no tiene variación acotada. Observe que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\left| f\left(\frac{\pi(4n+1)}{2}\right) - f\left(\frac{\pi(4n+3)}{2}\right) \right| = 2.$

Teorema 5 (de Denjoy). *Sea f un difeomorfismo del círculo de clase C^1, cuya derivada f' tiene variación acotada y que preserva orientación. Si el número de rotación $\rho(f)$ es irracional entonces f es topológicamente conjugado a $R_{\rho(f)}$, la rotación por $\rho(f)$.*

La demostración del Teorema de Denjoy recae en las siguientes tres proposiciones.

Proposición 14. *Sea f como en el Teorema de Denjoy, entonces para todo $x \in S^1$, la órbita de x es recurrente, es decir, $x \in \omega(x)$.*

Proposición 15. *Sea f un homeomorfismo del círculo que preserva orientación. Si la órbita de todo punto es recurrente entonces toda órbita es densa, es decir, $\omega(x) = S^1$.*

Proposición 16. *Sea f un homeomorfismo del círculo que preserva orientación con número de rotación irracional. Si existe un punto con órbita densa entonces f es topológicamente conjugado a una rotación.*

La prueba de la Proposición 14 está basada en una herramienta conocida como los *sistemas de pares que conmutan* y su *renormalización*. Esta herramienta nos permitirá construir una prueba transparente del Teorema de Denjoy.

La idea fundamental es construir una sucesión de sistemas dinámicos que represente a los sucesivos retornos, por las iteraciones de f, a intervalos encajados construídos alrededor de un punto arbitrario. Si estos intervalos se reducen al punto entonces la órbita de éste es recurrente. Si no, se demostrará que la derivada f' no puede ser de variación acotada, lo que sería una contradicción a las hipótesis del teorema.

La prueba del Teorema de Denjoy recae fuertemente en la demostración de la Proposición 14; de hecho las Proposiciones 15 y 16 son consecuencia de lo que ya trabajamos en los capítulos anteriores.

Demostración de la Proposición 15.

Como mostramos en la Proposición 13 de la Sección §2.6 , al tener número de rotación irracional, el conjunto no errante es minimal implicando así que toda órbita es densa. □

Demostración de la Proposición 16.

El Teorema 4 de la Sección §2.6 dice que si el minimal de f es todo el círculo, entonces f es topológicamente conjugado a la rotación $R_{\rho(f)}$. □

A continuación comenzaremos la demostración del Teorema de Denjoy, siguiendo la prueba que expone R. MacKay en [Mac]. Empecemos entonces explicando la noción de un sistema de pares que conmutan y su renormalización.

3.1.1. Renormalización

La renormalización de un sistema de pares que conmutan nos permitirá, a través de sucesiones de intervalos y de sucesiones de funciones, aproximarnos a un punto mientras observamos paso a paso la dinámica de su órbita. Esta herramienta funciona como un lupa especializada en encontrar el mejor ángulo para estudiar nuestro sistema dinámico. En nuestro caso nos permitirá ir acércandonos a un punto no recurrente mientras analizamos el comportamiento de su órbita.

El concepto de un sistema de pares que conmutan surge del siguiente planteamiento. Dado un homeomorfismo f que preserva orientación, F un levantamiento de él tal que $F(0) \in [0, 1)$ y una traslación $T(x) = x - 1$, con $x \in \mathbb{R}$, definimos los intervalos L_0 y R_0 de la siguiente manera:

$$L_0 = [F \circ T(0), 0] \text{ y } R_0 = [0, F(0)].$$

Ahora, definimos las funciones l_0 y r_0 como la restricción del levantamiento F a L_0 en el primer caso y como la restricción de la función $F \circ T$ a R_0 en el segundo, así:

$$l_0 : L_0 \to L_0 \cup R_0 \text{ y } r_0 : R_0 \to L_0 \cup R_0.$$

Observe que, por naturaleza, F y T conmutan entre sí, esto es:

$$F \circ T = T \circ F.$$

Definición 26. Un *sistema de pares que conmutan* (*s.p.c.*), (L, R, l, r) está formado por un par de intervalos L y R (que pueden llegar a ser puntos) a la izquierda y a la derecha del cero respectivamente, que se intersectan en él, y un par de funciones crecientes l y r que van de L y R a $L \cup R$, respectivamente, donde $L = [r(0), 0]$, $R = [0, l(0)]$ y $l \circ r(0) = r \circ l(0)$. Ver la figura 3.1.

El motivo fundamental para considerar los *s.p.c.* es que podemos definir, inductivamente, a través de iteraciones del sistema original, otro *s.p.c.* Este procedimiento es llamado de *renormalización*, y se utiliza fuertemente en el

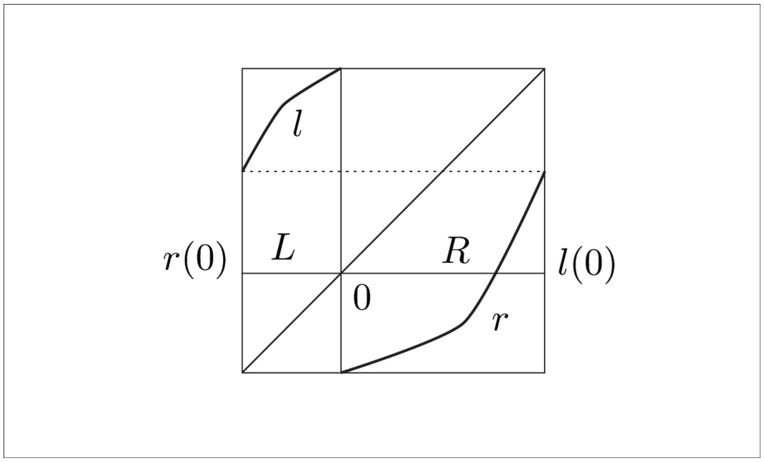


Figura 3.1: Gráfica de un sistema de pares que conmutan.

estudio “moderno” de los sistemas dinámicos. A partir de una transformación $f : X \to X$, este procedimiento consiste en encontrar $\widetilde{X} \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n_{|_{\tilde{X}}}$ tenga el mismo tipo de propiedades que $f : X \to X$; salvo que $\widetilde{X}$ sea un subconjunto muy pequeño. Si abusamos un poco y pensamos que $\widetilde{X} \cong X$ entonces:

$$\text{dado } (f : X \to X) \xmapsto{\text{renormalizamos}} (Rf = F^n_{|_{\tilde{X}}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}).$$

Observemos concretamente cómo construir la renormalización de un *s.p.c.* El procedimiento es el siguiente:

Dado (L_0, R_0, l_0, r_0) un *s.p.c.*, entonces para obtener el sistema (L_1, R_1, l_1, r_1) aplicamos la siguiente regla que depende del signo de $l_0 \circ r_0(0)$.

• Caso positivo. Si $l_0 \circ r_0(0) \geqslant 0$, entonces definimos el nuevo intervalo izquierdo $L_1 = L_0$, y el derecho $R_1 = [0, l_0 \circ r_0(0)]$. Ahora bien, definimos la función $l_1 = r_0 \circ l_0$ que va de $L_1 = L_0 \to L \cup R$ y $r_1 = r_0|_{R_1}$. Ver la figura 3.2.

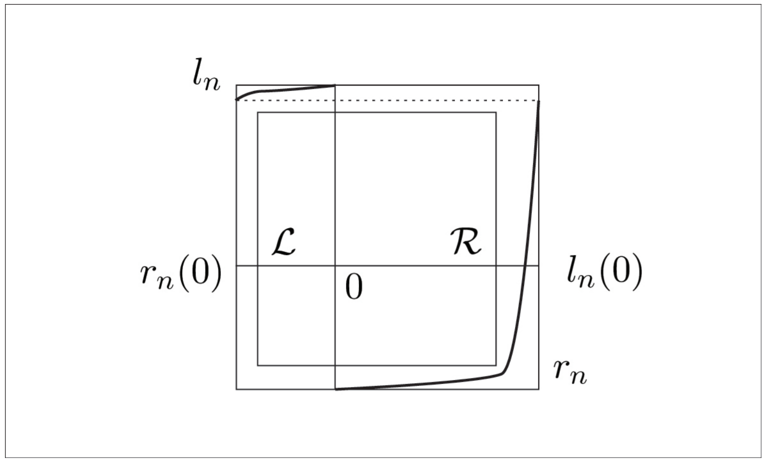


Figura 3.2: Caso positivo.

• Caso negativo. Si $l_0 \circ r_0(0) \leqslant 0$, el nuevo intervalo izquierdo será $L_1 = [l_0 \circ r_0(0), 0]$ y el derecho $R_1 = R_0$. Por su parte, defimos $l_1 = l_0|_{L_1}$ y $r_1 = l_0 \circ r_0$ que va de $R_1 = R_0 \to L \cup R$. Ver la figura 3.3.

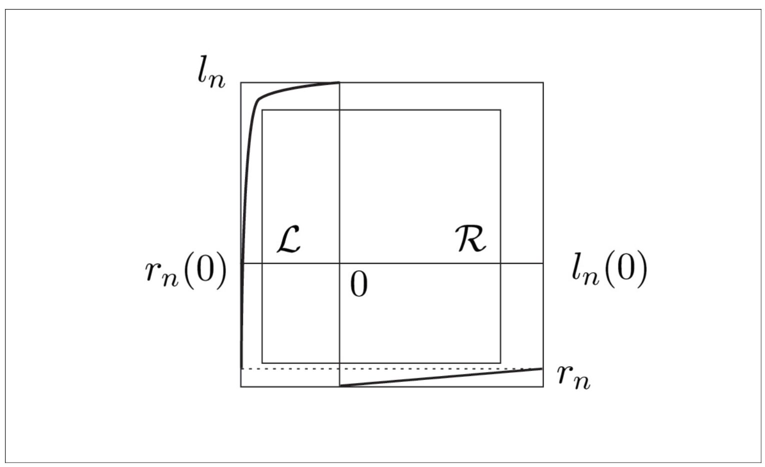


Figura 3.3: Caso negativo.

De esta manera, al proceso que transforma un *s.p.c.* en otro *s.p.c.* lo llamaremos *renormalización*:

$$(L_0, R_0, l_0, r_0) \xmapsto{\text{renormalización}} (L_1, R_1, l_1, r_1).$$

Observemos que si $l_0 \circ r_0(0) = 0$ la renormalización se puede llevar a cabo con cualquiera de las dos reglas, y en ambos casos alguno de los intervalos R_1 o L_1 se reducirá al punto 0.

Por lo tanto, si tenemos un sistema (L_0, R_0, l_0, r_0) podemos obtener una sucesión de sistemas (L_n, R_n, l_n, r_n) a través de la repetición de las reglas arriba descritas (haciendo una elección si $l_n \circ r_n(0) = 0$). A partir de esta construcción se genera una sucesión σ de signos $+$ y $-$, de manera que $\sigma_n = +$ si $(L_{n+1}, R_{n+1}, l_{n+1}, r_{n+1})$ es generado por el caso positivo y $\sigma_n = -$ en caso contrario.

3.1.2. Número de rotación

El proceso de renormalización nos permite recuperar el número de rotación de f. De hecho, a partir de la sucesión $\{\sigma_n\}$ y la propiedad de que el levantamiento de f y la traslación T conmutan, podemos construir una sucesión de racionales que convergen a $\rho(f)$.

Para hacer esto procedemos de la siguiente manera. La base de la inducción es $\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$ y $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{1}$, así construimos el intervalo $\left[\frac{p_0}{q_0}, \frac{P_0}{Q_0}\right] = [0,1]$.

Inductivamente construimos la siguiente sucesión de intervalos encajados: $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{P_n}{Q_n}\right] \subset [0,1]$.

El intervalo $\left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right]$ está determinado de acuerdo a σ_{n+1} de la siguiente manera:

$$\text{si } \sigma_{n+1} = + \text{ entonces } \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n+P_n}{q_n+Q_n} \text{ y } \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n}{Q_n};$$

$$\text{si } \sigma_{n+1} = - \text{ entonces } \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} \text{ y } \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{p_n+P_n}{q_n+Q_n}.$$

Observe que en ambos casos sustituimos un extremo del intervalo anterior por un punto intermedio.

A continuación probaremos por inducción tres propiedades relacionadas con esta construcción que nos ayudarán para la prueba del teorema.

Lema 5. *Las siguientes relaciones se satisfacen para toda $n \in \mathbb{N}$:*

i) $l_n = F^{q_n} \circ T^{p_n}$,

ii) $r_n = F^{Q_n} \circ T^{P_n}$,

iii) $P_n q_n - p_n Q_n = 1$.

Demostración.

Supongamos $m = 0$, entonces $l_0(x) = F(x)$, $r_0(x) = F \circ T(x)$ y $P_0 q_0 - p_0 Q_0 = 1 - 0 = 1$. Las dos primeras igualdades son ciertas por la Definición 26 de los *s.p.c.* y la tercera es cierta por los valores definidos para: p_0, q_0, P_0 y Q_0.

Ahora suponemos cierto para $m = n$, quedando la hipótesis de inducción de la siguiente manera: $l_n = F^{q_n} \circ T^{p_n}$, $r_n = F^{Q_n} \circ T^{P_n}$ y $P_n q_n - p_n Q_n = 1$, y hay que demostrar que vale para $m = n + 1$.

Primero probaremos que $l_{n+1} = F^{q_{n+1}} \circ T^{p_{n+1}}$. Observemos que para el caso en el que $\sigma_{n+1} = +$ sabemos que $q_{n+1} = q_n + Q_n$ y $p_{n+1} = p_n + P_n$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} F^{q_{n+1}} \circ T^{p_{n+1}} &= F^{q_n + Q_n} \circ T^{p_n + P_n} = \\ &= F^{q_n} \circ T^{p_n} \circ F^{Q_n} \circ T^{P_n} = \\ &= l_n \circ r_n = r_n \circ l_n = l_{n+1}. \end{aligned}$$

Observe que para obtener esta igualdad es fundamental que: $F \circ T = T \circ F$; por esto se denomina un sistema de pares que conmutan.

Y para el caso en el que $\sigma_{n+1} = -$ sabemos que $q_{n+1} = q_n$ y $p_{n+1} = p_n$, por lo tanto:

$$F^{q_{n+1}} \circ T^{p_{n+1}} = F^{q_n} \circ T^{p_n} = l_n = l_{n+1}.$$

Hemos demostrado que el inciso i) es verdad. Para verificar el segundo, es decir que $r_{n+1} = F^{Q_{n+1}} \circ T^{P_{n+1}}$ hay que proceder análogamente que para l_{n+1} tomando los valores correctos para Q_{n+1} y P_{n+1} cuando $\sigma = +$ o cuando $\sigma = -$.

Así, sólo nos falta demostrar que $P_{n+1} q_{n+1} - p_{n+1} Q_{n+1} = 1$. Observemos que sucede para $\sigma = +$:

$$\begin{aligned} P_n(q_n + Q_n) - (p_n + P_n) Q_n &= P_n q_n + P_n Q_n - p_n Q_n - P_n Q_n = \\ &= P_n q_n - p_n Q_n = 1. \end{aligned}$$

Se demuestra análogamente para $\sigma = -$. De esta manera hemos demostrado por inducción las tres propiedades mencionadas previamente. $\square$

A continuación probaremos que la sucesión de intervalos encajados que mencionamos anteriormente converge a $\rho(f)$, el número de rotación.

Lema 6. *Los intervalos* $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{P_n}{Q_n}\right]$ *son encajados y* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{P_n}{Q_n}\right] = \{\rho(f)\}$.

Demostración.

Observemos que tanto q_n como Q_n tienden a infinito cuando $n \to \infty$, sin importar el signo σ_n en cada paso. Ahora, sabemos por construcción que:

$$l_n(x) = F^{q_n} \circ T^{p_n}(x) = F^{q_n}(x - p_n) = F^{q_n}(x) - p_n.$$

Por lo tanto, $F^{q_n}(0) = p_n + l_n(0)$. De la misma manera:

$$r_n(x) = F^{Q_n} \circ T^{P_n}(x) = F^{Q_n}(x - P_n) = F^{Q_n}(x) - P_n.$$

Y así, $F^{Q_n}(0) = P_n + r_n(0)$. Observemos que $l_n(0)$ y $r_n(0) \in L_n \cup R_n$, por lo tanto ambos son acotados.

Ahora bien, como $\rho(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$, para todo $x \in S^1$ y F es un levantamiento de f, podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{q_n}(0)}{q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n + l_n(0)}{q_n} = \rho(F)$$

y que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^{Q_n}(0)}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n + r_n(0)}{Q_n} = \rho(F)$$

Terminando así la demostración de que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{P_n}{Q_n}\right] = \{\rho(f)\}$. $\square$

En particular, tenemos el siguiente corolario que utilizaremos más adelante.

Corolario 3. *Si* $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ *entonces* σ_n *no es eventualmente constante, es decir, existen sucesiones no acotadas de números enteros* n_j *y* m_j *tales que* $\sigma_{n_j} = +$ *y* $\sigma_{m_j} = -$.

Demostración.

Observe que si σ_n es siempre el mismo signo, entonces sustituimos siempre el mismo extremo por un punto intermedio. Por lo tanto, la sucesión converge al racional que determina el otro extremo. □

Conociendo ahora los conceptos de los sistemas de pares que conmutan y de su renormalización, y con el conocimiento de que a través de estos el número de rotación es el límite de los intervalos encajados $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{P_n}{Q_n}\right]$. Podemos comenzar con la demostración del Teorema de Denjoy.

3.1.3. La prueba de la Proposición 14

Para demostrar la Proposición 14 a través del proceso de renormalización probaremos que la variación de la derivada de f explota bajo la hipótesis de la existencia de una órbita no recurrente. A partir de ésta sección es importante observar que L_n y R_n pueden ser intervalos o puntos, esto depende del enunciado que se esté estudiando y se podrá ver la diferencia.

Supongamos que existe un punto $x \in S^1$ tal que su órbita bajo f es no recurrente, es decir $x \notin \omega(x)$. Sin pérdida de generalidad, digamos que $x = 0$. A través de la renormalización formemos una sucesión de sistemas de pares que conmutan (L_n, R_n, l_n, r_n). Y mediante ella definamos el siguiente intervalo:

$$[\mathcal{L}, \mathcal{R}] = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n \cup R_n.$$

Lema 7. *Si existe un punto no recurrente entonces $\mathcal{R} - \mathcal{L} > 0$, es decir $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ es un intervalo no trivial.*

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{L} = 0$. Cada intervalo L_n es de la forma $L_n = [\lambda_n, 0]$. Ver la figura 3.4.

Entonces, como $\mathcal{L} = 0$, la sucesión $\lambda_n \to 0$, cuando $n \to \infty$, así:

$$F^{q_n} \circ T^{p_n}(0) = \lambda_n \to 0,$$

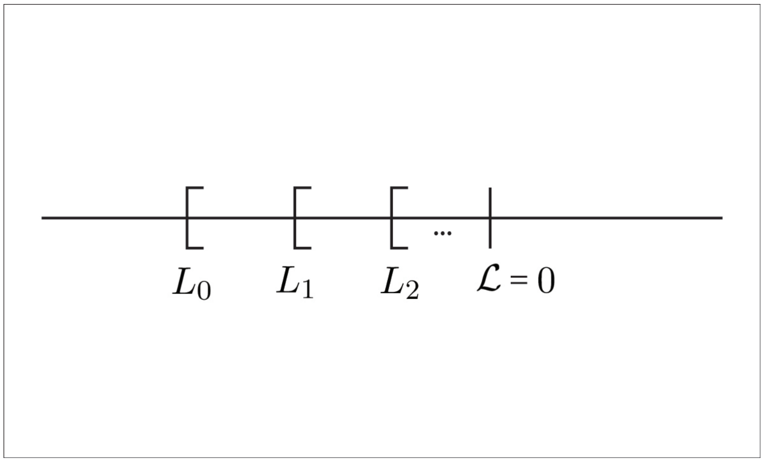


Figura 3.4: Representación de la sucesión de intervalos L_n.

y sabemos que $F^{q_n} \circ T^{p_n}(0) = F^{q_n}(0) - p_n$ entonces:

$$\Pi(F^{q_n}(0) - p_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Pi(0),$$

donde Π es la proyección canónica definida en la Sección §2.3, pero:

$$\Pi(F^{q_n}(0) - p_n) = f^{q_n}([0]) \text{ entonces } f^{q_n}([0]) \to [0].$$

Esto prueba que $[0] \in \omega([0])$, lo que contradice la hipótesis de que la órbita es no recurrente. Por lo tanto, $\mathcal{L} \neq 0$ y como $\mathcal{L} \in \bigcap_n L_n$ entonces $\mathcal{L} < 0$, que es lo primero que queríamos demostrar. Se razona análogamente para probar que $\mathcal{R} > 0$. □

A continuación estudiaremos la dinámica del intervalo $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ bajo las funciones l_n y r_n obtenidas a partir del proceso de renormalización. En particular nos interesa la imagen de los extremos. Recordemos que $\mathcal{L}$ pertenece al dominio de l_n y $\mathcal{R}$ pertenece al dominio de r_n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 8. *$r_n(\mathcal{R}) \leqslant \mathcal{L}$ y $l_n(\mathcal{L}) \geqslant \mathcal{R}$, para todo $n \geqslant 0$.*

Demostración.

Supongamos que para algún n, $l_n(\mathcal{L}) < \mathcal{R}$. Entonces, $l_m(\mathcal{L}) < \mathcal{R}$, para todo $m \geqslant n$. Queremos probar que $l_m(x)$ es una sucesión no creciente para

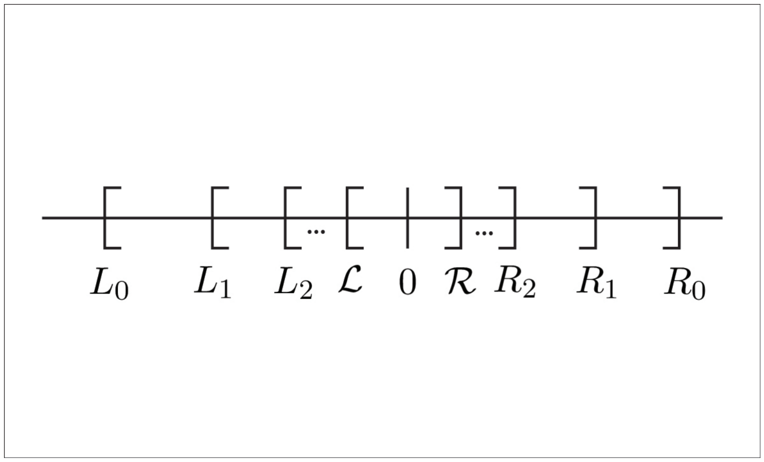


Figura 3.5: Visualización de sucesión de intervalos $[\mathcal{L},\mathcal{R}] = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n \cup R_n$.

todo punto $x \in [\mathcal{L},\mathcal{R}]$, es decir que si $k > k'$, $l_k(x) \leqslant l_{k'}(x)$.

Sabemos que $r_m(0) \leqslant \mathcal{L}$, ya que $L_m = [r_m(0), 0]$ y $\mathcal{L} \in \bigcap_n L_n$ y también que $l_m(x)$ es una función creciente para todo $m \in \mathbb{N}$, es decir que para todo entero m, $l_m(x) < l_m(y)$ con $x < y$. Para conocer el valor de la función $l_{m+1}(x)$ conociendo $l_m(x)$ recurriremos a la renormalización. Entonces se tiene que:

Caso positivo. Si $l_m \circ r_m(0) \geqslant 0$ entonces $l_{m+1}(x) = l_m \circ r_m(x)$. Por definición de un *s.p.c.* sabemos que las funciones l y r son crecientes y por lo tanto $r_m(x) \leqslant x$ y $l_m(x) \geqslant x$, para todo x. Entonces $l_m \circ r_m(0) \leqslant l_m(x)$ ya que $x \geqslant r_m(x)$, para todo x, esto implica que la sucesión $l_m(x)$ es no creciente.

Caso negativo. Si $l_m \circ r_m(0) \leqslant 0$ entonces $l_{m+1}(x) = l_m(x)$, en este caso es claro que $l_m(x)$ es no creciente para todo x.

Por lo tanto $r_m(0) \leqslant \mathcal{L}$ y $l_m(x)$ es no creciente. Queremos probar ahora que si $l_m \circ r_m(0) < \mathcal{R}$ entonces $r_m \circ l_m(0) < r_m(\mathcal{R})$. Observemos que $l_m \circ r_m(0)$ es un extremo de $L_{m+1} \cup R_{m+1}$, es decir que $l_m \circ r_m(0) \notin (\mathcal{L},\mathcal{R})$. Véase la figura 3.5.

Entonces $l_m \circ r_m(0) \leqslant \mathcal{L} < 0$, para todo $m \geqslant n$. Esto implica que $\sigma_m = -$, para todo $m \geqslant n$. Aplicando entonces el caso negativo en la construcción del número de rotación obtenemos:

$$\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{m-1}+P_{m-1}}{q_{m-1}+Q_{m-1}}\right] \to \left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}.$$

Es decir que el número de rotación de F es racional, pero esto contradice la hipótesis de nuestro lema, por lo tanto $l_n(\mathcal{L}) \geqslant \mathcal{R}$, para todo n. De esta manera hemos demostrado la primera parte de nuestro lema. Se demuestra análogamente que $r_n(\mathcal{R}) \leqslant \mathcal{L}$, para todo n. □

La dinámica del intervalo $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ nos permitirá mostrar que tanto la variación de la derivada de l_n como la de r_n son cada vez más grandes, conforme n crece. Para hacer esto utilizaremos el *Teorema del valor medio*. A continuación introducimos una discusión sobre este teorema que nos ayudará para comprender la prueba de los lemas siguientes.

El Teorema del valor medio

El concepto de diferencia, en el caso del Teorema del valor medio, considera los valores de una función para distintos valores de x, mientras que la definición de derivada en un punto no nos dice nada acerca de la función en cualquier otro punto. La diferencia expresa propiedades globales de la función, mientras que la derivada exhibe una propiedad local. El Teorema del valor medio nos permite deducir propiedades globales de una función a partir de propiedades locales dadas por su derivada.

Consideremos la diferencia de valores de una función f de la siguiente manera:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

Ahora, supongamos que la derivada existe en todo el intervalo $[x_1, x_2]$, donde la gráfica de la función tiene tangente en todos sus puntos. La diferencia de valores de la función f es la tangente del ángulo de inclinación α de la secante que pasa por p_1 y p_2. Ver la figura 3.6[1].

Imaginemos esta secante trasladada paralelamente a sí misma. Es fácil concluir que al menos una paralela estará en una posición en la cual será tangente a algún punto en la curva entre x_1 y x_2, esto ocurrirá en un punto p de la gráfica, el cual se encuentra a la máxima distancia que hay entre la

[1] Imagen tomada de [CJ].

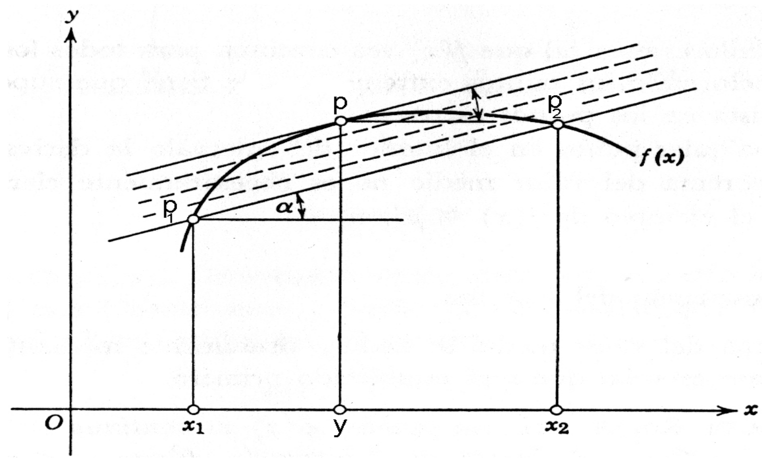


Figura 3.6: Teorema del valor medio.

secante $[p_1, p_2]$ y $f(x)$. Por lo tanto existe un valor intermedio $x = y$ en el intervalo, tal que:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(y).$$

Esta Proposición es el Teorema del valor medio.

Teorema 6. *Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ y derivable en todo punto del intervalo abierto $x_1 < x < x_2$, entonces existe al menos un valor θ, con $0 < \theta < 1$, tal que:*

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'[x_1 + \theta(x_2 - x_1)].$$

Si se substituye x_1 por x y x_2 por $x + h$, el Teorema del valor medio puede ser expresado como:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(y) = f'(x + \theta h), \text{ con } x < y < x + h.$$

Aún cuando es esencial que $f(x)$ sea continua para todos los puntos del intervalo, incluyendo los puntos extremos, no se tiene que suponer que la derivada exista en los puntos extremos.

La demostración del teorema se puede leer directamente en [CJ] o en casi cualquier libro de cálculo diferencial.

La variación de la derivada explota

Ahora que conocemos la definición de variación y el Teorema del valor medio, el siguiente paso es encontrar puntos adecuados donde la derivada de l_n es arbitrariamente grande y puntos donde es arbitrariamente cercana a 0, y lo mismo para r_n.

La idea es observar que dado que $\mathcal{L} < 0 < \mathcal{R}$, entonces se debe cumplir que las funciones l_n y r_n tienen que mandar intervalos de tamaño fijo en intervalos de tamaño arbitrariamente pequeño. Al mismo tiempo, mostraremos que para algunos valores de n se puede conseguir que, l_n ó r_n, hagan lo contrario, es decir, manden intervalos arbitrariamente pequeños en intervalos de tamaño fijo. Esto, aunado al Teorema del valor medio, probará que se pueden encontrar valores de n donde la derivada de l_n ó r_n, tiene variación arbitrariamente grande. A partir de aquí denotaremos a las derivadas de las funciones por D.

Lema 9. *Existe una sucesión de enteros $n_j \to \infty$ y puntos $b_j \in [0, \mathcal{R})$ y $c_j \in [\mathcal{R}, R_{n_j}]$ tales que:*

i) $0 \leqslant Dr_{n_j}(b_j) < \mathcal{R}^{-1}$ *para toda* $j \in \mathbb{N}$.

ii) $Dr_{n_j}(c_j) \to \infty$ *cuando* $j \to \infty$.

Notemos que b_j y c_j pertenecen al intervalo $[0, R_n]$.

Demostración.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_{n+1} = +$. El Teorema del valor medio nos asegura que existe $b \in [0, \mathcal{R})$ tal que:

$$Dr_n(b) = \frac{r_n(\mathcal{R}) - r_n(0)}{\mathcal{R}}.$$

El lema anterior garantiza que $r_n(\mathcal{R}) \leqslant \mathcal{L}$. Al mismo tiempo, $r_n(0) = L_n$, donde $r_n(0) < \mathcal{L}$.

Observe que $\mathcal{L} - L_n < 1$, entonces, $r_n(\mathcal{R}) - r_n(0) \leqslant \mathcal{L} - L_n < 1$. Por lo tanto,

$$0 \leqslant Dr_n(b) = \frac{r_n(\mathcal{R}) - r_n(0)}{\mathcal{R}} \leqslant \frac{\mathcal{L} - L_n}{\mathcal{R}} \leqslant \mathcal{R}^{-1}. \tag{3.2}$$

El hecho de que la derivada $Dr_n(b) \geqslant 0$ es porque f preserva orientación.

Por otro lado el Teorema del valor medio nos asegura que existe $c \in [\mathcal{R}, R_n]$ tal que:

$$Dr_n(c) = \frac{r_n(R_n) - r_n(\mathcal{R})}{\mathcal{R} - R_n}.$$

Observemos que $r_n([\mathcal{R}, R_n]) \supset [\mathcal{L}, \mathcal{R}]$. De hecho, el lema anterior nos garantiza que $r_n(\mathcal{R}) \leqslant \mathcal{L}$ y, como estamos en el caso $\sigma_{n+1} = +$, sabemos que $r_n(R_n) = r_n \circ l_n(0) = l_n \circ r_n(0) \geqslant 0$ y como $l_n \circ r_n \notin (\mathcal{L}, \mathcal{R})$ tenemos que $r_n(R_n) > \mathcal{R}$.

Entonces, $r_n(R_n) - r_n(\mathcal{R}) \geqslant \mathcal{R} - \mathcal{L}$. Por lo tanto,

$$Dr_n(c) = \frac{r_n(R_n) - r_n(\mathcal{R})}{\mathcal{R} - R_n} \geqslant \frac{\mathcal{R} - \mathcal{L}}{\mathcal{R} - R_n}. \tag{3.3}$$

Recordemos que $l_n(0) = R_n \to \mathcal{R}$ por que así lo construímos.

Gracias al Corolario 3 existe una sucesión $\{n_j\}$ tal que $\sigma_{n_j+1} = +$. Por eso podemos concluir que existen $b_j \in [0, \mathcal{R})$ y $c_j \in [\mathcal{R}, R_{n_j}]$ tales que:

i) $0 \leqslant Dr_{n_j}(b_j) < \mathcal{R}^{-1}$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

ii) $Dr_{n_j}(c_j) \to \infty$ cuando $j \to \infty$.

Esto es verdad porque en (3.3) el numerador es fijo y el denominador tiende a 0, lo que prueba ii). Veáse la figura 3.7. □

Observemos que en esta prueba utilizamos las propiedades de la renormalización para el caso positivo. En el caso negativo el mismo razonamiento demuestra un resultado análogo para l_n. Veáse la figura 3.8.

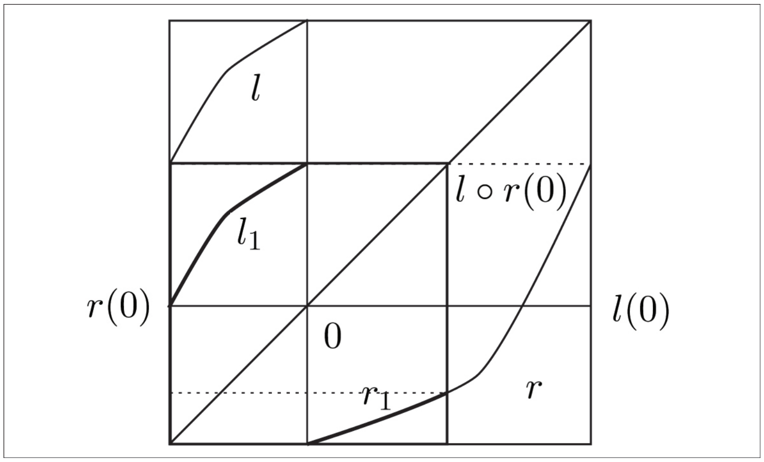


Figura 3.7: La gráfica describe la renormalización de un *s.p.c.* en el caso que $\sigma_0 = +$.

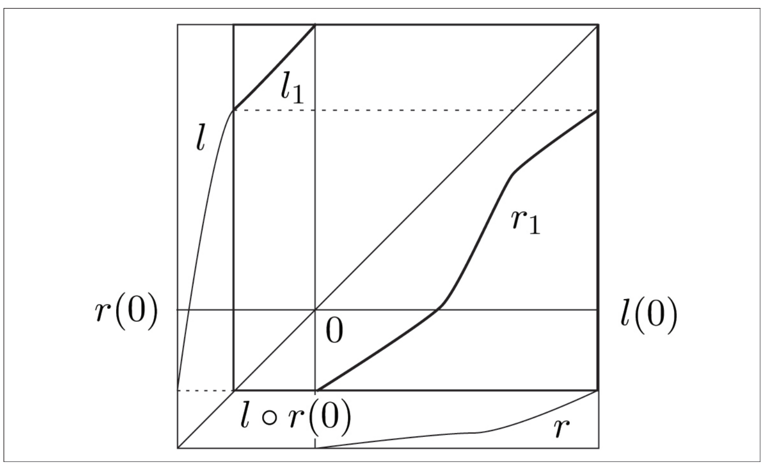


Figura 3.8: La gráfica describe la renormalización de un *s.p.c.* en el caso que $\sigma_0 = -$.

Ahora que conocemos el comportamiento de las derivadas de l_n y r_n, vamos a definir la variación de un sistema de pares que conmutan.

Definición 27. Un *s.p.c.* tiene *variación acotada* si $\log Dl, \log Dr$ tienen variación acotada y definimos:

$$\mathrm{Var}(L, R, l, r) = \mathrm{Var}_L \log Dl + \mathrm{Var}_R \log Dr.$$

La razón para considerar el $\log(Df)$ en lugar de simplemente la derivada Df es porque gracias a la regla de la cadena:

$$\log D(r \circ l)(x) = \log Dr(l(x)) + \log Dl(x).$$

Probaremos entonces que la variación de un *s.p.c.* disminuye a medida que lo renormalizamos, ya que sus intervalos de definición son cada vez de menor tamaño.

Lema 10. *Sea* (L_0, R_0, l_0, r_0) *un s.p.c y denotemos por* (L_1, R_1, l_1, r_1) *su renormalizado, entonces se cumple que:*

$$Var_{L_0} \log Dl_0 + Var_{R_0} \log Dr_0 \geqslant Var_{L_1} \log Dl_1 + Var_{R_1} \log Dr_1;$$

es decir,

$$Var(L_1, R_1, l_1, r_1) \leqslant Var(L_0, R_0, l_0, r_0).$$

Demostración.

Lo hacemos en el caso $+$ (el caso $-$ es análogo). Observemos que:

$$\log Dl_1 = \log Dr_0 \circ l_0 + \log Dl_0,$$

esto es cierto por la regla de la cadena y las propiedades del logaritmo. Además, $r_0 = r_1$ por lo que $\log Dr_1 = \log Dr_0$.

Calculemos ahora la variación:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{L_1} \log Dl_1 + \mathrm{Var}_{R_1} \log Dr_1 \leqslant\ & \mathrm{Var}_{[R_1,R_0]} \log Dr_0 + \\ & + \mathrm{Var}_{L_0} \log Dl_0 + \mathrm{Var}_{R_1} \log Dr_0.\end{aligned}$$

Recuerde que $l_0 \circ r_0(0) = R_1$ y $l_0(0) = R_0$. Como $R_0 = R_1 \cup [l_0 \circ r_0(0), l_0(0)]$ tenemos que:

$$\mathrm{Var}_{L_1} \log Dl_1 + \mathrm{Var}_{R_1} \log Dr_1 \leqslant \mathrm{Var}_{L_0} \log Dl_0 + \mathrm{Var}_{R_0} \log Dr_0,$$

utilizando que $\mathrm{Var}_I(f) + \mathrm{Var}_J(f) = \mathrm{Var}_{I \cup J}(f)$, siempre que I sea disjunto de J. Esta última igualdad hace posible probar la desigualdad de nuestro lema. $\square$

Con este lema demostrado es fácil llegar a un absurdo, suponiendo la existencia de un punto no recurrente, como veremos en la demostración de la Proposición 14.

Demostración de la Proposición 14.

La existencia de una órbita no recurrente implica que el intervalo $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ sea no trivial, hipótesis fundamental en el Lema 9. Este lema implica que la variación $\mathrm{Var}(L_n, R_n, l_n, r_n)$ es arbitrariamente grande conforme n crece. Recordemos que:

$$\mathrm{Var}(L_n, R_n, l_n, r_n) = \mathrm{Var}_{L_n} \log Dl_n + \mathrm{Var}_{R_n} \log Dr_n.$$

Como el Lema 9 nos garantiza que existen b_n y c_n tales que:

i) $\log Dr_n(b_n) < -\log \mathcal{R}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\log Dr_n(c_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Entonces observe que por la definición de la variación,

$$\mathrm{Var}_{R_n} \log Dr_n \geqslant |\log Dr_n(c_n) - \log Dr_n(b_n)|. \tag{3.4}$$

Sabemos que $-\log Dr_n(b_n) \leqslant \log \mathcal{R}$ está acotado y $\log Dr_n(c_n)$ tiende a infinito. Además la $\mathrm{Var}_{L_n} \log Dl_n \geqslant 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Var}(L_n, R_n, l_n, r_n)$ es arbitrariamente grande conforme n crece.

El Lema 10 dice que:

$$\mathrm{Var}(L_n, R_n, l_n, r_n) \leqslant \mathrm{Var}(L_0, R_0, l_0, r_0).$$

Pero la derivada de f tiene variación acotada lo que implica que las derivadas de $l_0 = F_{|_{L_0}}$ y $r_0 = F \circ T_{|_{R_0}}$ tienen variación acotada. Como la función logaritmo es derivable con derivada continua se cumple que las funciones $\log Dl_0$ y $\log Dr_0$ han de ser de variación acotada también. Lo cual es una contradicción y ésta nos garantiza que toda órbita es recurrente, que es lo que queríamos demostrar.

■

3.2. Un contraejemplo C^0 del Teorema de Denjoy

En la última sección de este capítulo queremos exponer el hecho de que el Teorema de Denjoy deja de ser verdadero si se debilitan un poco las hipótesis sobre la regularidad del sistema dinámico f. Es decir, que la conjugación topológica a la rotación $R_{\rho(f)}$ no se da. Hemos demostrado que todas las órbitas de una rotación irracional son densas, es decir, el conjunto no errante $\Omega(f) = S^1$. Hemos estudiado la dinámica de los homeomorfismos con número de rotación racional y hemos descubierto que no es tan complicada por la existencia de órbitas periódicas del mismo período. Podríamos creer entonces, por el Teorema de Denjoy, que existe un único modelo dinámico para los homeomorfismos del círculo: las rotaciones. Sin embargo, esto no es cierto, ya que es posible construir ejemplos de homeomorfismos (como veremos más adelante), inclusive de difeomorfismos, que no son topológicamente conjugados a la rotación de ángulo $\rho(f)$.

Michel Herman, quien fue un sobresaliente matemático francés, dedicó gran parte de su tiempo a investigar los grupos de difeomorfismos del círculo y a raíz de ello expresó, en [Herm2], que:

"*Todo investigador deseoso de trabajar en los difeomorfismos del círculo debe habituarse a construir y estudiar ejemplos. Este punto de vista está ilustrado por el hecho de que Denjoy llegó a su célebre teorema porque no podía construir contraejemplos de clase C^2 (contraejemplos que, sin embargo, parecían plausibles a Poincaré). En este mismo espíritu, si intentamos construir contraejemplos en regularidad inferior a C^2 en algunos resultados de dinámica unidimensional, observamos obstrucciones para clases de diferenciabilidad intermedia muy precisas. La primera esta ligada a las acciones de grupos abelianos sobre el círculo.*"

Es así que debilitando las hipótesis del Teorema de Denjoy de distintas maneras no es posible obtener algo más que una semiconjugación. Daremos algunas ideas para ilustrar lo que decimos, aunque el único caso donde se esbozará una prueba es para el caso donde f es C^0. Se puede leer en [Ni], [Rob] y [S] el caso donde anulando la hipótesis de variación acotada la conjugación no se da. También existe el caso, que muestran [Herm1], [KH] y [Na], donde se anula la hipótesis de variación acotada pero se considera un difeomorfismo cuya derivada satisface una condición de Hölder con exponente $\alpha < 1$, es decir, de clase $C^{1+\alpha}$, en el cual tampoco se da la conjugación con la rotación respectiva. Para un estudio detallado de los distintos contrajemplos que se conocen del Teorema de Denjoy se recomienda la lectura de [HS].

Las herramientas que construímos a lo largo de todo el capítulo, que garantizan la existencia del intervalo $J_0 = [\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ además de proporcionarnos el espacio suficiente para explotar la variación de la derivada f y obtener una contradicción a la hipótesis de la existencia de una órbita no recurrente, nos plantean una pregunta. Si prescindimos de la hipotesis de la variación acotada, entonces ¿cuál es la dinámica de los iterados del intervalo $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$?

Resulta que: Si $J_n := f^n(J_0)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, entonces $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ si y sólo si $n = m$. De hecho, por la construcción de $[\mathcal{L}, \mathcal{R}]$ sabemos que la órbita del $f^n([0])$ se acumula del lado derecho de $\mathcal{L}$ y del lado izquierdo de $\mathcal{R}$. Si $f^k(\mathcal{L}) \in J_0$, para alguna $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f^{n+k}([0])$ se acumula en $f^k(\mathcal{L})$. Esto es imposible porque la órbita del cero no es recurrente y por eso $\mathcal{O}([0]) \cap [\mathcal{L}, \mathcal{R}] = \emptyset$. Las otras posibles intersecciones nos llevan al mismo absurdo. Por lo tanto, todos los puntos de $\bigcup_n J_n$ son no errantes. Si E denota al conjunto de Cantor obtenido en la Proposición 13, entonces $E \subset S^1 \setminus \bigcup\limits_n J_n$. Observemos además que $\sum\limits_n \text{long}(J_n) < 2\pi$, el perímetro del círculo.

Esto nos da pie para una construcción basada en la siguiente idea: a partir de una rotación irracional, reemplazar todos los elementos de la órbita de un punto por una sucesión de intervalos ajenos.

Consideremos una rotación cualquiera R_α tal que α es irracional. Tomemos un $[x] = x \in S^1$ arbitrario y sea $\{J_n\}$ una sucesión de intervalos disjuntos tales que $\sum\limits_n \text{long}(J_n)$ sea finita. Reemplacemos cada $f^n(x)$ con $n \in \mathbb{Z}$ por el intervalo J_n correspondiente.

Una vez que insertamos todos los intervalos J_n obtenemos un espacio topológico $\tilde{S}^1$ que es homeomorfo a un círculo de diámetro mayor.

Observe que $f : \tilde{S}^1 \setminus \bigcup\limits_n J_n \to \tilde{S}^1 \setminus \bigcup\limits_n J_n$ está bien definida por $f(z) = R_\alpha(z)$

y podemos extender f a $\bigcup J_n$ de manera que $f(J_n) = J_{n+1}$ sea un homeomorfismo que preserva los extremos, para cada n. Por lo tanto $f : \tilde{S}^1 \to \tilde{S}^1$ es un homeomorfismo.

Como ya estudiamos en la sección §2.6 las rotaciones R_α y f son topológicamente semiconjugadas. Por lo tanto sus números de rotación son iguales, es decir:

$$\alpha = \rho(R_\alpha) = \rho(f).$$

Sin embargo, ninguna de las órbitas de f es densa en $\tilde{S}^1$. Por lo tanto, en este caso existe una función f en C^0, con número de rotación irracional tal que esta f no es topológicamente conjugada a R_α. Esta construcción nos proporciona un contraejemplo C^0 al Teorema de Denjoy.

Conclusiones

Recordemos para iniciar las conclusiones de este trabajo la pregunta que nos hicimos en la introducción: ¿Existe un invariante que permita catalogar las diferentes dinámicas de los sistemas dinámicos en el círculo?

La respuesta es sí, si nos restringimos al universo de los difeomorfismos del círculo cuya derivada tiene variación acotada y que preservan orientación. En este universo el número de rotación permite saber cuándo son topológicamente conjugados a una rotación irracional y cuándo no. De hecho, el catálogo es el conjunto de todas las rotaciones del círculo. Esta es la conclusión del Teorema de Denjoy.

Ahora bien, en el universo de los homeomorfismos del circulo concluimos que si el número de rotación es irracional existe un único modelo dinámico módulo semiconjugación topológica y podemos separarlos en transitivos o no transitivos.

Por último y como parte de las preguntas que surgieron desarrollando este trabajo, podemos concluir que la conjugación topológica garantiza que la dinámica de dos homeomorfismos del círculo es la misma pero no necesariamente su diferenciabilidad ni sus propiedades analíticas.

Apéndice

Para facilitar la comprensión de la tesis se presentan en este apéndice algunas construcciones y definiciones particulares sobre el círculo. Hemos dividido estas herramientas por grupos, dependiendo el capítulo y secciones en donde son utilizados.

Capítulo 1 - Sistemas dinámicos topológicos - ¿Qué es un sistema dinámico?

La siguiente definición se da para contextualizar los espacios topológicos en los que se desarrolla el presente trabajo.

Definición 28. La *topología usual* asociada a $\mathbb{R}$ es la colección de abiertos U tales que U es abierto en $\mathbb{R}$ si y sólo si para toda x en U existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola de radio ε y centro en x está contenida en U.

Para ilustrar mejor la noción de espacio compacto damos a continuación una definicón distinta y un ejemplo.

Definición 29. Un espacio topológico X es *compacto* si cualquier cubrimiento por abiertos de X contiene un subcubrimiento finito que también cubra a X. Y decimos que es *conexo* si no se puede escribir como unión de abiertos disjuntos.

Un ejemplo de un espacio que no es compacto es la recta real con el cubrimiento generado por los intervalos abiertos $\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Así mismo el intervalo $(0,1]$ tampoco es compacto, el cubrimiento $\mathcal{A} = \{(\frac{1}{n}, 1] \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ no contiene un subcubrimiento finito que cubra al $(0,1]$. Con los mismos razonamientos podemos ver que tampoco es compacto el intervalo $(0,1)$. Por otro lado el intervalo $[0,1]$ si es compacto, y su prueba es un ejercicio clásico de análisis.

Capítulo 2 - Sistemas dinámicos en el círculo - Introducción

Proposición 17. $(\mathbb{C}, \bullet)$ *es un grupo.*

Demostración.

1)Asociatividad. Sean (x, iy), (a, ib) y $(u, iv) \in \mathbb{C}$ entonces:

$$((x, iy) \bullet (a, ib)) \bullet (u, iv) = (xa - yb, i(xb + ya)) \bullet (u, iv) =$$

$$(u(xa - yb) - v(xa + yb), i(u(xb + ya) + v(xa - yb))) =$$

$$((uxa - uyb - vxb - vya), i(uxb + uya + vxa - vyb)) =$$

$$(x(ua - vb) - y(ub + va), i(x(ub + va) + y(ua - vb))) =$$

$$(x, iy) \bullet (ua - vb, i(ub + va)) = (x, iy) \bullet ((a, ib) \bullet (u, iv)).$$

Por lo tanto $\bullet$ es asociativa.

2)Elemento neutro. Sean (x, iy) y $(1, i0) \in \mathbb{C}$ entonces:

$$(x, iy) \bullet (1, i0) = (1, i0) \bullet (x, iy) =$$

$$(1x - 0y, i(1y - 0x)) = (1x, i1y) = (x, iy).$$

Por lo tanto el elemento $(1, i0)$ es neutro para cualquiera $(x, iy) \in \mathbb{C}$.

3)Inverso. Sean (x, iy) y $(a, ib) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$(x, iy) \bullet (a, ib) = (1, i0),$$

es decir que: $(xa - yb, i(xb + ya) = (1, i0)$ esto implica que:

$$xa - yb = 1yxb + ya = 0.$$

A partir de estas ecuaciones sabemos que $a = \frac{x}{x^2+y^2}$ y $b = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Observemos que cuando $x = y = 0$ nuestras ecuaciones se indeterminan, así que tendremos que restringir nuestro dominio a: $\mathbb{C}/\{0\}$, es decir que todos los $(x, iy) \in \mathbb{C}/\{0\}$ tienen inverso de la forma $(\frac{x}{x^2+y^2}, i\frac{-y}{x^2+y^2})$. $\square$

¿Por qué tomar el círculo de radio uno como nuestro espacio? La respuesta escrita de dos maneras distintas, primero formalmente y después intuitivamente:

1) El círculo unitario es el único subgrupo multiplicativo compacto del plano complejo. ¿Por qué es el único compacto? En un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}$, las normas de los elementos forman un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{R}$. Si este es acotado, todos tienen norma 1, esto es porque si tuviéramos uno de norma mayor, sus potencias tenderían en norma a infinito y si tuviéramos uno de norma menor, su inverso tendría norma mayor, entonces todo subgrupo compacto esta contenido en el círculo. Es decir, que si el grupo original es compacto, entonces el grupo multiplicativo de las normas se reduce al elemento $\{1\}$, así que el grupo original es un subgrupo del círculo. Y por lo tanto el único círculo en el plano complejo que es un grupo es el de radio uno.

2)Si tomáramos un círculo de radio mayor, al tomar cualquier punto en él su tamaño r sería mayor que 1, entonces al multiplicarlo por si mismo, $r^2 = r \cdot r$, el tamaño de r^2 sería mayor que r e implicaría que r^2 no está en el círculo original. De la misma manera, si tomáramos un círculo de radio menor, al multiplicarlo por si mismo, el tamaño del punto obtenido será menor que el del punto original y así éste no pertenecería al círculo original. En los dos casos pasaría lo mismo si multiplicaramos cualquier par de puntos distintos, es decir, que el punto resultante no pertenecería al círculo original. Claramente esto no pasa en el círculo de radio 1, donde el tamaño de todos sus puntos es uno y al multiplicar cualquier par el nuevo punto sigue perteneciendo al círculo unitario. Esto implica que el único círculo en el plano complejo que es un grupo es el de radio 1, propiedad fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos en este espacio.

Capítulo 2 - Sistemas dinámicos en el círculo - El círculo es un grupo cociente

Proposición 18. $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus)$ *es un grupo.*

Denotamos ahora a la operación que necesitamos como $\oplus$ y la definimos como $r\mathbb{Z} \oplus r'\mathbb{Z} = (r + r')\mathbb{Z}$, con r y $r' \in \mathbb{R}$. Observamos que la operación es cerrada pues va de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y está bien definida ya que $r + r'$ es una suma de números reales y esto siempre es un real.

Para probar que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo nos falta mostrar que la operación cumple los tres axiomas de la definición de grupo.

1)Asociatividad. Sean $r\mathbb{Z}$, $p\mathbb{Z}$ y $q\mathbb{Z}$ con r, p y $q \in \mathbb{R}$ tres elementos de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces:

$$(r\mathbb{Z}\oplus p\mathbb{Z})\oplus q\mathbb{Z} = (r+p)\mathbb{Z}\oplus q\mathbb{Z} = (r+p+q)\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}\oplus(p+q)\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}\oplus(p\mathbb{Z}\oplus q\mathbb{Z}).$$

Por lo tanto $\oplus$ es asociativa.

2)Elemento neutro. Sea $r\mathbb{Z}$ con $r \in \mathbb{R}$ un elemento de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $0\mathbb{Z}$ con $0 \in \mathbb{R}$ el elemento neutro del grupo $(\mathbb{R}, +)$, entonces:

$$r\mathbb{Z} \oplus 0\mathbb{Z} = (r + 0)\mathbb{Z} = (0 + r)\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z} \oplus r\mathbb{Z} = r\mathbb{Z},$$

ya que $r + 0 = 0 + r = r$. Por lo tanto $0\mathbb{Z}$ es neutro bajo $\oplus$.

3)Inverso. Sean $r\mathbb{Z}$ y $-r\mathbb{R}$ con r y $-r \in \mathbb{R}$ dos elementos de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, entonces:

$$r\mathbb{Z} \oplus -r\mathbb{Z} = (r + (-r))\mathbb{Z} = (r - r)\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z}.$$

Y como sabemos que $0\mathbb{Z}$ es el elemento neutro, para cualquier $r\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ existe un inverso que se encuentra tomando el inverso de r de los números reales, es decir, $-r$.

Capítulo 2 - Sistemas dinámicos en el círculo - El círculo es un espacio topológico

Para definir la topología que hereda $S^1 \subset \mathbb{C}$ relativa a $\mathbb{C}$, debemos dar una familia de subconjuntos del círculo que verifique las condiciones de la definición de topología. La familia es la siguiente.

Definición 30. Decimos que A pertenece a la topología que hereda el círculo de $\mathbb{C}$ si A se puede escribir como un abierto de $\mathbb{C}$ intersección S^1. Es decir que todos los $A = B \cap S^1$, donde B denota algún abierto de $\mathbb{C}$, es decir un elemento de su topología usual; estos A conforman la familia de subconjuntos abiertos que componen la topología relativa de S^1 como subespacio de $\mathbb{C}$. Denotemos, para facilitar la notación de la sección, como $(S^1, \mathcal{T}^r)$ este espacio topológico.

Dejamos al lector pensar la prueba de que $(S^1, \mathcal{T}^r)$ cumple los tres axiomas para ser un espacio topológico.

Capítulo 2 - Sistemas dinámicos en el círculo - Homeomorfismos del círculo

Definición 31. Si $A \subset C$ y $A \neq C$, se dice que A es un *subconjunto propio* de C y se denota como $A \subsetneq C$.

Bibliografía

[AS] A. Arroyo y J. Seade; *Sistemas dinámicos discretos*, por aparecer.

[CJ] R. Courant y F. John; *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Volumen 1, Editorial Limusa, (1979).

[Den] A. Denjoy; Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *Journal de Mathématiques II*, **Fasc. IV**, (1932), pp. 333-375.

[Dev] R. Devaney; *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second edition, Addison - Wesley, (1989).

[G] J. García Bacca; *Los presocráticos*, Fondo de Cultura Económica, (1944).

[Herm1] M. Herman; Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Mémoires de la S.M.F.*, **46**, (1976), pp. 181-188.

[Herm2] M. Herman; Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, tome **49**, (1979), pp. 5-233.

[Hers] I. N. Herstein; *Álgebra moderna*, Trillas, (1983).

[HS] J. Hu y D. Sullivan; Topological Conjugacy of Circle Diffeomorphisms, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **17**, (1997), pp. 173-186.

[KH] A. Katok y B. Hasselblatt; *Introduction to the modern theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, (1995).

[J] Y. Jiang; *Renormalization and geometry in One - Dimensional and Complex Dynamics*, Advanced Series in NonLinear Dynamics, Vol. 10, (1996).

[Mac] R. MacKay; A simple proof of Denjoy's theorem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **103**, (1988), pp. 299-303.

[Mil] J. Milnor; *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, (1965).

[Mil2] J. Milnor; *Introductory Dynamics Lectures*, notas disponibles en: http://www.math.sunysb.edu/ jack/DYNOTES/.

[Mun] J. Munkres; *Topology*, Second edition, Prentice Hall, (2000).

[Na] A. Navas; *Grupos de difeomorfismos del círculo*, notas disponibles en: http://arxiv.org/abs/math/0607481v2.

[Ni] Z. Nitecki; *Differentiable Dynamics*, M.I.T. Press, (1971).

[PM] J. Palis y W. de Melo; *Geometric theory of dynamical systems*, Springer, (1982).

[Rey] J. Rey Pastor; *Elementos de análisis algebraico*, Talleres Lusy, (1939).

[Rob] C. Robinson; *Dynamical Systems*, CRS Press, (1995).

[S] M. Sambarino; *Tópicos en sistemas dinámicos*, notas del curso impartido en la EMALCA - Costa Rica, (2005).

[V] E. Van Kampen; The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Amer. Journal of Math.*, **57**, (1935), pp. 142-152.

[W] S. Wiggins; *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer, (1990).