



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SINGULARIDADES DE  
POLINOMIOS MODELO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

LUIS HERNÁNDEZ DE LA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SANTIAGO LÓPEZ DE  
MEDRANO SÁNCHEZ

MÉXICO, D. F.

NOVIEMBRE, 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN.

CAPÍTULO I. ESTRUCTURAS CÍCLICAS.

SECCIÓN I.1. ESTRUCTURA CÍCLICA DE UNA FUNCIÓN.

SECCIÓN I.2. EQUIVALENCIA DE FUNCIONES

SECCIÓN I.3. CUÑAS Y ESTRUCTURAS SIN CUÑAS.

CAPÍTULO II. POLINOMIOS MODELO.

SECCIÓN II.1. DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS MODELO.

SECCIÓN II.2. POLINOMIOS MODELO Y FUNCIONES CUASIHOMOGÉNEAS.

SECCIÓN II.3. POLINOMIOS MODELO CON COEFICIENTES.

SECCIÓN II.4. SEPARACIÓN DE VARIABLE DE UN PAR DE POLINOMIOS MODELOS SIN CUÑA.

CAPÍTULO III. POLINOMIOS MODELO Y SINGULARIDADES AISLADAS.

SECCIÓN III.1. SINGULARIDADES AISLADAS.

SECCIÓN III.2. LOS POLINOMIOS MODELO CON SINGULARIDAD AISLADA.

SECCIÓN III 3. SINGULARIDADES REALES AISLADAS.

CAPÍTULO IV. EL ÁLGEBRA DE UNA SINGULARIDAD.

SECCIÓN IV.1. EL IDEAL JACOBIANO Y EL ÁLGEBRA DE UNA SINGULARIDAD.

SECCIÓN IV.2. SOBRE UN ENUNCIADO DE V.I. ARNOLD.

SECCIÓN IV.3. FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA.

CAPÍTULO V. EL ÁLGEBRA DE LOS POLINOMIOS  $n$ -ÁCATL Y  $n$ -CICLO.

SECCIÓN V.1. FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA DEL  $n$ -CICLO.

SECCIÓN V.2. FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA DEL  $n$ -ÁCATL.

SECCIÓN V.3. CARDINALIDAD DE FRONTERAS BÁSICAS.

SECCIÓN V.4. DESCOMPOSICIÓN DE CICLOS.

CAPÍTULO VI. INVARIANTES DE LOS POLINOMIOS MODELO.

SECCIÓN VI.1. MÍNIMA POTENCIA DEL IDEAL MÁXIMO CONTENIDA EN EL IDEAL JACOBIANO.

SECCIÓN VI.2. MÍNIMA POTENCIA DEL IDEAL MÁXIMO CONTENIDA EN EL IDEAL  $m(n)^2 J$ .

SECCIÓN VI.3. GRADO DE DETERMINACIÓN  $C^\infty$ .

SECCIÓN VI.4. GRADO DE DETERMINACIÓN  $C^r$ .

SECCIÓN VI.5. SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES DE LOS POLINOMIOS MODELO.

SECCIÓN VI.6. EL POLINOMIO DE POINCARÉ.

SECCIÓN VI.7. SINGULARIDADES QUE SE OBTIENEN AGREGANDO UN MONOMIO A UN POLINOMIO MODELO.

BIBLIOGRAFÍA.

APÉNDICE. ESTRUCTURAS CÍCLICAS Y POLINOMIOS MODELO PARA VALORES PEQUEÑOS DE  $n$ .

## INTRODUCCIÓN.

El estudio y clasificación de las singularidades de las funciones diferenciables de varias variables (aparte de la consideración de casos particulares) se inicia con el trabajo de Marston Morse, cuyo famoso Lema permite caracterizar y clasificar todas las singularidades en cuyo desarrollo de Taylor la parte cuadrática es no degenerada.

Después vino el estudio de singularidades de funciones entre espacios euclidianos iniciada por Hassler Whitney quien estableció los principios generales que debían regir este estudio, especialmente los aspectos de clasificación, genericidad y estabilidad.

Basándose en el trabajo de Whitney, René Thom dio un enorme paso adelante en la teoría de las singularidades, empezando por su concepto de transversalidad y la utilización de los espacios de jets. En el estudio de las funciones introdujo los conceptos de determinación, codimension y deformación universal de las singularidades inestables. En base a todo esto logró la clasificación de todas las singularidades de codimension menor o igual a 4 y sus deformaciones universales necesarias para el desarrollo de la Teoría de las Catástrofes Elementales.

Las ideas e intuiciones de René Thom fueron continuadas y completadas por numerosos matemáticos, entre los que podemos mencionar a Bernard Malgrange, Jean Paul Tougeron y John Mather. Por otra parte, el estudio de la clasificación y determinación en clase  $C^1$  de las singularidades se inicia con los trabajos de Nicolas Kuiper y Tzee Char Kuo.

Un nuevo impulso a la teoría surgió con el trabajo de Vladimir I. Arnol'd [A] quien llevó la clasificación de las singularidades de funciones a niveles superiores, al introducir el concepto de modalidad y clasificar las funciones de baja modalidad (empezando por las simples, o de modalidad 0), en lugar de seguir el orden definido por su codimension. Al profundizar el estudio de las singularidades cuasihomogéneas y semicuahomogéneas, no sólo obtiene Arnol'd la clasificación de numerosos tipos de singularidades, sino que descubre insospechadas relaciones entre estas clasificaciones y otras que aparecen en las más diversas ramas de las matemáticas y aplica sus resultados al estudio de las integrales oscilantes y otros temas de las matemáticas. El trabajo va mucho más allá de las singularidades cuasihomogéneas y desarrolla muchas otras técnicas basadas en el diagrama de Newton de la singularidad que le permiten avanzar en diversos problemas de clasificación. Este enfoque fue continuado por muchos matemáticos, en especial los de la escuela rusa de Arnol'd (ver, por ejemplo [A,G-Z-V]).

Este texto es una de las fuentes principales de esta tesis. Continuando las ideas del estudio de las funciones cuasihomogéneas y algunas de las técnicas creadas en él, hemos trabajado sobre cierto tipo de estas singularidades que hemos llamado *polinomios modelo* y que juegan un papel importante debido a que son los polinomios cuasihomogéneos con singularidad aislada con el menor número posible de monomios y que, de hecho forman parte del desarrollo de Taylor de cualquier función, cuasihomogénea o no, con singularidad aislada en el origen.

En este trabajo se caracterizan y estudian los polinomios modelo que efectivamente tienen una singularidad aislada y, siguiendo la técnica de las *cadena*s de Arnold, se calculan elementos estructurales importantes de sus ideales jacobianos. Cabe señalar aquí se desarrolla esa técnica de Arnol'd, lo cual nos permite dar resultados más precisos en familias más generales de singularidades. Estos resultados se pueden aplicar para completar algunos de los resultados de Arnol'd, en especial los relativos al cálculo de invariantes que no son abordados en sus trabajos como son ciertos invariantes del álgebra de una singularidad o su grado de determinación preciso. Si bien los resultados de este trabajo se pueden traducir en principio en un algoritmo para calcular estos invariantes para cualquier polinomio modelo en particular, no resulta fácil dar resultados generales, debido a que el número de casos posibles que es necesario analizar por separado crece muy rápidamente con el número de variables. Daremos algunos ejemplos sencillos de cómo es factible realizar esto.

En el Capítulo I se dan algunas definiciones básicas de los esquemas combinatorios sobre los que se construyen los polinomios modelo.

En el Capítulo II se introducen propiamente los polinomios modelo y sus propiedades elementales. Se dan aquí los ejemplos fundamentales llamados el del  $n$ -ciclo y el del  $n$ -ácatl. Se demostrará que los polinomios modelo de orden mayor o igual a tres siempre son cuasihomogéneos de una forma esencialmente única y después, se ve cómo separar sus variables en forma concreta para aislar la parte de grado 2 del resto de orden tres o más. Se verá también que al clasificar los polinomios modelo (todos cuyos monomios tienen coeficiente 1) también se habrán clasificado los que se obtienen poniéndoles coeficientes arbitrarios.

En el Capítulo III se recuerda el concepto de singularidad aislada y se caracterizan los polinomios modelo con singularidad aislada sobre los complejos como aquellos cuyas componentes son de tipo  $n$ -ciclo o  $n$ -ácatl. Se trata en forma breve la cuestión de las singularidades aisladas sobre los reales, para abordar a partir de este momento sólo las singularidades complejas.

En el capítulo IV se recuerdan los conceptos de ideal jacobiano y de álgebra de una singularidad, así como la caracterización de las singularidades aisladas como aquellas cuyas álgebras son de dimensión finita. En relación a estos conceptos señalamos de pasada en la sección IV.2 un error en un enunciado del artículo [A] que al parecer no ha sido señalado previamente. Posteriormente se introducen los conceptos básicos de la técnica de *cadena*s para el estudio de los ideales jacobianos, en particular los de frontera básica y frontera jacobiana, que permiten en principio conocer los invariantes de una singularidad

En el capítulo V. se calculan con todo detalle las fronteras básica y jacobiana de los polinomios  $n$ -ciclo y  $n$ -ácatl para todos los valores de  $n$ . Se describen todos sus elementos y se calcula la cardinalidad de las fronteras básicas, que involucra sorprendentemente a los números de Fibonacci.

En el capítulo VI se muestra cómo aplicar todo lo anterior para el cálculo de diversos invariantes de los polinomios modelo, como son la mínima potencia del ideal máximo contenida en el ideal jacobiano o en otros ideales relacionados, el grado de determinación y el grado de determinación  $C^r$ . Si bien, como dijimos antes, no es fácil dar en este caso resultados generales, debido a que el número de casos posibles que es necesario analizar por separado crece muy rápidamente con el número de variables, damos ejemplos concretos de su aplicación a algunos casos. En particular completamos el estudio de las de singularidades aisladas estrictamente cuasihomogéneas en dos variables calculando sus invariantes y dando la clasificación completa, que puede concluirse de manera directa o bien, en la siguiente sección, mediante el polinomio homogéneo de Poincaré de la singularidad. Finalmente, se ve cómo es posible aplicar todo lo anterior al estudio de las singularidades que se obtienen agregando un monomio a un polinomio modelo.

Si bien este trabajo se basa en [A], desde el punto de vista lógico su desarrollo es independiente y no usamos ningún resultado de ese artículo. Únicamente en el capítulo VI, al aplicar nuestros resultados al cálculo del grado de determinación de los polinomios modelo y a su clasificación, utilizaremos resultados de otros autores.

Los resultados del capítulo III se pueden extender para el estudio de otro tipo de singularidades llamadas *cuasihomogéneas torcidas* que se obtienen al modificar los polinomios modelo tomando en cada sumando en lugar del factor  $x_{\phi(i)}$  su conjugado. Estas singularidades fueron introducidas por José Seade dentro de su trabajo sobre las fibraciones de Milnor reales. y han sido ampliamente estudiadas desde el punto de vista geométrico por él y varios colaboradores (ver [S1], [S2], [R-S-V]). En particular, Seade demostró que cuando  $\phi$  es biyectiva la singularidad es aislada. Para  $\phi$  general es posible demostrar como en el Capítulo III de esta tesis que la singularidad correspondiente es aislada sí y sólo si todas las componentes de la estructura cíclica de  $\phi$  son de tipo ciclo o ácatl.

La demostración es análoga, pero requiere de cálculos más elaborados. A diferencia de los polinomios modelo, estas singularidades deben considerarse como funciones con valores en  $\mathbb{R}^2$  por lo que los resultados algebraicos de esta tesis no se pueden aplicar directamente a ellas y se necesitará un nuevo desarrollo conceptual para extender los resultados de los capítulo V y VI.

## CAPÍTULO I.

### ESTRUCTURAS CÍCLICAS.

#### SECCIÓN I.1.

#### ESTRUCTURA CÍCLICA DE UNA FUNCIÓN.

En esta sección consideraremos el conjunto  $J_n = \{1, \dots, n\}$  y las funciones  $\phi$  de  $J_n$  en  $J_n$ .

Como el subconjunto:  $\{1, \phi(1), \dots, \phi^n(1)\}$  de  $J_n$  tiene cardinalidad menor o igual que  $n$ . se tiene que para algún entero positivo  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) la  $k$ -ésima iteración de  $\phi$ ,  $\phi^k$  contiene algún punto fijo; es decir, existe  $i$  en  $J_n$  tal que  $\phi^k(i) = i$ .

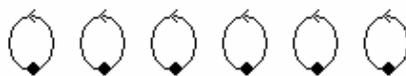
Definición. Se dice que  $i$  es un elemento cíclico de orden  $c$  de la función  $\phi$  sí,  $i$  es un punto fijo de  $\phi^c$  y el conjunto:  $\{i, \phi(i), \dots, \phi^{c-1}(i)\}$  tiene cardinalidad  $c$ . Los elementos cíclicos de  $\phi$  forman  $c$ -ciclos en la gráfica de la función  $\phi$ .

Se dice que un elemento  $j$  de  $J_n$  es un elemento precíclico, de longitud  $l$  ( $l \geq 1$ ), de la función  $\phi$  sí, el conjunto:  $\{j, \phi(j), \dots, \phi^{l-1}(j)\}$  tiene cardinalidad  $1+l$  y  $\phi^l(j)$  es el único elemento cíclico del conjunto.

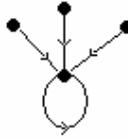
Podemos asociar a la función  $\phi$  una gráfica orientada cuyos vértices son los puntos de  $J_n$  y tiene como aristas flechas que van de cada vértice  $j$  al vértice  $\phi(j)$ . Hablaremos indistintamente de los ciclos de  $\phi$  o los ciclos de la gráfica de  $\phi$ .

#### Ejemplos:

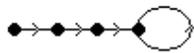
1.- la gráfica de la función identidad contiene  $n$  uniciclos:



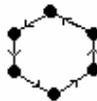
2.- La gráfica de la función constante 1 contiene un unicyclo y  $n-1$  elementos precíclicos, todos de longitud 1:



3.- La función "n- ácatl" (de *ácatl*, carrizo o caña de maíz) está definida como:  $\phi(n)=n-1$ ,  $\phi(n-1)=n-2, \dots, \phi(2)=1$  y  $\phi(1)=1$ . Su gráfica también contiene un unicyclo y  $n-1$  elementos precíclicos, pero ahora sus longitudes van de 1 a  $n-1$ . Esta función será muy importante en este trabajo:



4.- La función "n-ciclo" está definida como:  $\phi(n)=n-1$ ,  $\phi(n-1)=n-2, \dots, \phi(2)=1$  y  $\phi(1)=n$ . Su gráfica también contiene un solo ciclo de orden  $n$  y no tiene elementos precíclicos. Esta función también será muy importante en este trabajo:



Cada componente de la gráfica de una función  $\phi$  de  $J_n$  en  $J_n$  consta de un  $c$ -ciclo y, en algunos casos, de uno o varios elementos precíclicos. En consecuencia tenemos la:

**Observación:** El número de componentes conexas de la gráfica de  $\phi$  es igual al número de ciclos que contiene.

A la distribución de los elementos cíclicos y precíclicos en la gráfica de la función  $\phi$ , se le denominará la "estructura cíclica de  $\phi$ ". Haremos más preciso esto en la siguiente sección.

## SECCIÓN I.2.

### EQUIVALENCIA DE FUNCIONES.

Sea  $F_n$  el conjunto de todas las funciones de  $J_n$  en  $J_n$ .

El grupo de permutaciones  $S_n$  actúa por conjugación sobre  $F_n$ ; esto es, si  $\phi$  es un elemento de  $F_n$  y  $\gamma$  está en  $S_n$ , obtenemos un nuevo elemento  $\gamma\phi\gamma^{-1}$  de  $F_n$ .

Es claro que  $\phi$  y  $\gamma\phi\gamma^{-1}$  tienen el mismo número de ciclos de cada orden y la estructura de los elementos precíclicos que llegan a cada ciclo es la misma. Recíprocamente, si tenemos dos elementos de  $F_n$  que tienen la misma distribución de los elementos cíclicos y precíclicos, podemos claramente definir una permutación que conjugue uno en el otro. En consecuencia es natural dar la siguiente:

**Definición.** Cada clase de equivalencia, obtenida por la acción del grupo  $S_n$  sobre el conjunto  $F_n$ , será denominada "estructura cíclica" y la clase de equivalencia de la función  $\phi$ ; será denominada "estructura cíclica de  $\phi$ ".

**Observación 1.** La estructura cíclica de una función  $\phi$  es la unión de  $s$  estructuras cíclicas de la restricción de  $\phi$  a cada uno de los  $s$  componentes que contiene la gráfica de la función  $\phi$ . Por esto es posible en muchos casos restringirse al estudio de las funciones cuya gráfica es conexa.

La cardinalidad de clases de equivalencia obtenidas, con esta relación, es, en general, considerablemente menor que  $n^n = |F_n|$  (número total de funciones de  $J_n$  en  $J_n$ ). Este conteo involucra, por una parte, el número y la distribución de  $c$ -ciclos distintos y, por otra, la distribución de los elementos precíclicos en los cíclicos, siendo esta última la más complicada, ya que en su contabilidad aparecen variaciones del número de particiones de un entero; por lo que cualquier fórmula para obtener la cardinalidad de todas las estructuras cíclicas es necesariamente asintótica.

Para valores pequeños de  $n$  el número de estructuras cíclicas es como sigue:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
número de estructuras cíclicas	1	3	7	19	47	128	334	909	2434

En el apéndice 1 describiremos estas estructuras cíclicas.

## SECCIÓN I.3.

### CUÑAS Y ESTRUCTURAS SIN CUÑAS.

Ciertas subestructuras particulares juegan un papel importante en nuestro análisis: Diremos que  $\phi$  contiene una *cuña* si existen 3 elementos distintos  $\{k, l, m\}$  de  $J_n$  tales que  $\phi(k) = \phi(l) = m$ .

#### Proposición.

*Las únicas estructuras cíclicas conexas que no contienen cuñas son la  $n$ -ácatl y el  $n$ -ciclo.*

**Demostración.** Consideraremos una estructura cíclica conexas sin cuñas y el ciclo contenido en ella.

Si el orden de este ciclo es mayor que uno, entonces no puede haber ningún elemento precíclico, porque habría uno de longitud 1 que daría lugar a una cuña. Luego la estructura consta únicamente del ciclo.

Si el ciclo es de orden 1, puede haber a lo más un elemento precíclico de longitud 1. Después puede haber un solo elemento precíclico de longitud 2 y así sucesivamente. Al completar el conjunto de precíclicos obtenemos que la estructura cíclica es la  $n$ -ácatl.

## CAPÍTULO II.

### POLINOMIOS MODELO.

#### SECCIÓN II.1.

#### DEFINICIÓN DE LOS POLINOMIOS MODELO.

Dado cualquier conjunto de n-enteros  $p(1), \dots, p(n)$  positivos y una función  $\phi$  en  $F_n$ , se define un polinomio en n variables de la siguiente manera:

$$P_{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{p(1)} x_{\phi(1)} + x_2^{p(2)} x_{\phi(2)} + \dots + x_n^{p(n)} x_{\phi(n)}$$

al cual denominaremos: "un polinomio modelo de la función  $\phi$ "; o simplemente, "un polinomio modelo".

Este polinomio con coeficientes enteros lo podemos considerar indistintamente como un polinomio real o complejo o como una función de n variables reales o complejas.

**Ejemplo 1.-** Si  $\phi$  es la función identidad  $\phi(i)=i$  el correspondiente polinomio modelo de  $\phi$  es una suma de potencias de las variables:

$$P_{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{p(1)+1} + x_2^{p(2)+1} + \dots + x_n^{p(n)+1}.$$

Estos polinomios se conocen como *singularidades* de Pham.

En general los términos de un polinomio modelo que son potencias de una variable se corresponden con los puntos fijos de la función.

Diremos que un polinomio modelo es *conexo* si la gráfica de la función  $\phi$  es conexa.

De estas definiciones y la observación 1 del capítulo 1 se infiere:

**Observación 1** (Separación de variables). Cada polinomio modelo es la suma de  $s$  polinomios modelos que no comparten variable alguna, donde  $s$  es el número de componentes (o, lo que es lo mismo, el número de ciclos) que contiene la estructura de  $\phi$ .

**Ejemplo 2** .- Si  $\phi$  consta de un 3-ciclo, sus polinomios modelo son:

$$P_{\phi}(x,y,z)=x^p y + y^q z + z^r x,$$

**Ejemplo 3**.- Lista de los polinomios modelos con cuatro variables.

1.  $x^p + y^q + z^r + w^s$ .
2.  $x^p + xy^q + z^r + w^s$
3.  $yx^p + xy^q + z^r + w^s$ .
4.  $x^p + xy^q + xz^r + w^s$ .
5.  $x^p + x y^q + y z^r + w^s$ .
6.  $x^p y + xy^q + xz^r + w^s$ .
7.  $x^p y + y^q z + xz^r + w^s$
8.  $x^p + y^q + xz^r + yw^s$ .
9.  $x^p + xy^q + xz^r + xw^s$ .
10.  $x^p + xy^q + xz^r + yw^s$ .
11.  $x^p + xy^q + yz^r + yw^s$ .
12.  $x^p + xy^q + yz^r + zw^s$ .
13.  $x^p + xy^q + z^r w + zw^s$ .
14.  $x^p y + xy^q + xz^r + xw^s$ .
15.  $x^p y + xy^q + xz^r + yw^s$ .
16.  $x^p y + xy^q + xz^r + zw^s$ .
17.  $x^p y + xy^q + z^r w + zw^s$ .
18.  $x^p y + y^q z + xz^r + xw^s$ .
19.  $x^p y + y^q z + z^r + z^r w + xw^s$ .

En el Apéndice 1 detallaremos la descripción y construcción de los polinomios modelo para valores pequeños de  $n$ .

Todos los polinomios modelo comparten muchas de las mismas propiedades, salvo algunos muy especiales que tienen propiedades diferentes del resto, por lo cual hay que considerarlos por separado:

Diremos que un ciclo del polinomio  $P_{\phi}$  es *especial* si tiene orden par y todos sus exponentes  $p(i)$  son iguales a 1.

Diremos que un ciclo del polinomio  $P_{\phi}$  es *semi-especial* si tiene orden par, no es especial y  $n/2$  de sus exponentes  $p(i)$ , no contiguos, son iguales a 1.

**Ejemplos:**

$x y + y z + z w + w x$  es un polinomio especial.

$x^5 y + y z + z^8 w + w x$  es un polinomio semi-especial.

## SECCIÓN II.2.

### POLINOMIOS MODELO Y FUNCIONES CUASIHOMOGÉNEAS.

Cuando todos los exponentes  $p(i)$  son iguales a un entero  $p$ , el polinomio modelo es claramente un polinomio homogéneo de grado  $p+1$ .

Más generalmente, *casi* todo polinomio modelo es cuasihomogéneo. Recordemos la

#### Definición.

Sean  $d, d(1), \dots, d(n)$  números reales, con  $d(i) > 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Se dice que una función  $f$  de  $K^n$  en  $K$  es cuasihomogénea, de pesos  $d(i)$  y cuasigrado  $d$ , si para cada  $\lambda$  en el campo  $K$  ( $K$  es el campo real o complejo); se tiene:

$$f(\lambda^{d(1)} x_1, \dots, \lambda^{d(n)} x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n).$$

Claramente podemos modificar los pesos y el cuasigrado multiplicándolos por una constante arbitraria distinta de cero.

#### Teorema.

(i) Un polinomio modelo es cuasihomogéneo si y sólo si, ninguno de sus ciclos es casi especial. En este caso existen pesos que son enteros positivos sin factor común.

(ii) Estos pesos son únicos si, y sólo si, adicionalmente, el polinomio no tiene un ciclo especial.

(iii) Si los números  $d(1), \dots, d(n)$  son enteros relativamente primos dos a dos, entonces para toda  $\phi$  existe un polinomio modelo de  $\phi$  que es cuasi homogéneo con estos pesos.

(iv) Si existe un polinomio modelo de  $\phi$  que es cuasi homogéneo con pesos enteros  $d(1), \dots, d(n)$  y cuasigrado  $d$ , entonces existen una infinidad con esos pesos y con cuasigrados de la forma  $d+tm$ , donde  $t$  es un entero y  $m$  es el mínimo común múltiplo de  $d(1), \dots, d(n)$ .

**Demostración:** Buscaremos los pesos que hagan que  $P$  sea un polinomio cuasihomogéneo de cuasigrado 1. Para esto hay que resolver el siguiente sistema de  $n$ -ecuaciones con  $n$ -incógnitas  $d(i)$ :

$$p(i)d(i)+d(\phi(i))=1 \tag{1}$$

La matriz  $M$  de este sistema es de la forma:  $P + E_\phi$ , donde  $P$  es la matriz diagonal, que tiene a  $p(i)$  en el  $i$ -ésimo lugar de la diagonal, y  $E_\phi$  es la matriz que tiene unos en las entradas  $(i, \phi(i))$  y 0 en las demás.

Como el sistema se descompone en sistemas independientes correspondientes a las componentes de la gráfica de  $\phi$ , basta con estudiar el caso en que ésta es conexa.

En este caso podemos numerar los vértices de la gráfica de  $\phi$  de manera que los elementos precíclicos sean los primeros  $k$  y la función  $\phi$  sea estrictamente creciente en ellos y los elementos cíclicos sean los  $c$  últimos y  $\phi$  los recorre en el orden cíclico, lo cual siempre supondremos.

La matriz  $M$  se descompone entonces en bloques

$$\begin{matrix} T & X \\ 0 & C \end{matrix}$$

donde:

$T$  es la matriz  $k \times k$  correspondiente a los elementos precíclicos y es una matriz triangular superior con términos  $p(i)$  en la diagonal;

$C$  es la matriz correspondiente al ciclo. Desarrollando el determinante de  $C$  según los menores de la primera columna obtenemos

$$\det(C) = (-1)^{(c+1)} + p(k+1) \dots p(n)$$

y por lo tanto

$$\det(M) = p(1) \dots p(k) ((-1)^{(c+1)} + p(k+1) \dots p(n))$$

Por consiguiente, el sistema (1) tiene una solución única  $d(1), d(2), \dots, d(n)$  salvo en el caso en que  $c$  sea par y todos los exponentes de los elementos del ciclo sean iguales a 1, es decir, que el ciclo sea especial.

Para ver cuando los pesos son positivos consideremos la solución del sistema (1) para un ciclo no especial con pesos  $p(1), \dots, p(n)$ , usando la regla de Cramer. El denominador es el determinante del sistema (que es positivo) y el numerador se obtiene substituyendo en ese determinante la primera columna por unos. Si llamamos  $c_n$  a este determinante, desarrollándolo por el último renglón, tenemos que

$$c_n = p_n c_{n-1} + (-1)^{n+1}$$

de la cual se obtiene por inducción que

$$c_n = p(2) p(3) p(4) \dots p(n) - p(3) p(4) \dots p(n) + p(4) \dots p(n) + \dots + (-1)^n p(n) + (-1)^{n+1}$$

y cada par de términos es la diferencia entre un número y uno menor, que es estrictamente menor si y sólo si el primer factor del primero,  $p(2i)$ , es mayor que 1. Si  $n$  es impar,  $c_n$  tiene adicionalmente el término positivo 1. Luego, si el ciclo no es semi-especial,

la única solución al sistema debe tener  $d(1) > 0$ , siendo el cociente de dos enteros positivos. Permutando cíclicamente las coordenadas obtenemos que todos los pesos  $d(i)$  deben ser también positivos.

Entonces, por las ecuaciones del sistema, se obtiene que todos los pesos del ciclo son además menores que 1.

Si el ciclo es especial podemos tomar dos racionales positivos de suma 1 y asignar estos pesos alternativamente a todos los elementos del ciclo.

En ambos casos, usando las mismas ecuaciones podemos ir obteniendo los pesos de los elementos precíclicos, empezando por los de longitud 1, que serán también racionales positivos menores que 1.

Finalmente, se pueden expresar todos los pesos como racionales con un mínimo común denominador y multiplicando por éste, obtenemos pesos enteros positivos sin factor común, determinados unívocamente por los pesos racionales.

Es claro de la demostración que si el polinomio tiene un ciclo especial entonces estos pesos no serán únicos, y que si tiene un ciclo semi-especial entonces cualquier solución del sistema (1) tendrá algunos valores  $d(i)=0$ .

Para mostrar (iii) basta considerar el sistema de ecuaciones

$$p(i)d(i) + d(\phi(i)) = d \quad (1')$$

donde ahora los valores de  $d(i)$  están dados y se requiere encontrar los valores de  $p(i)$  y de  $d$ . Si los números  $d(i)$  son primos relativos dos a dos siempre es posible encontrarlos por el Teorema Chino del Residuo.

Finalmente para demostrar (iv) basta con substituir una solución  $\{p(i), d\}$  de (1') por la solución  $\{p(i) + t m/d(i), d + tm\}$ . QED.

**Observación:** Este teorema se aplicará especialmente a los polinomios modelo con exponentes  $p(i)$  mayores que 1, que son los que tienen singularidades de orden 3 o más. El estudio de las singularidades de orden 2 se puede en general reducir mediante separación de variables al estudio de las de orden mayor. (Ver sección II.4)

**Ejemplos: 1.-** El polinomio modelo  $x^5 y + y z + z^8 w + w x$  no es cuasihomogéneo, ya que cualquier solución del sistema (1) tiene un valor  $d(i)=0$ .

El cambio de variables local  $x' = x + z^8$ ,  $z' = z + x^5$  lo transforma en el polinomio  $y z + w x$  que ya no es un polinomio modelo, pero sí es cuasihomogéneo (de varias maneras) y es una singularidad de Morse que es muy conocida y estudiada. (Este cambio ilustra el Lema de Morse: la singularidad es equivalente a su parte cuadrática debido a que ésta es no degenerada).

**2.-** No existe un polinomio modelo del 4-ciclo con pesos 2,2,7,3.

Sí existe, sin embargo para los pesos 2, 7, 2, 3, aun cuando estos, sin tener factor común, no son primos relativos dos a dos.

3.- Sea  $q$  un entero mayor que 1. Entonces, el cambio de coordenadas  $x'=x-\frac{1}{2}y^q$ ,  $y'=y$  nos muestra la equivalencia entre el par de polinomios:

$$\begin{aligned} \text{2-ciclo: } & x^2y+xy^{q+1} \\ \text{2-ácatl: } & y^{2q+1}-4yx^2. \end{aligned}$$

En el caso complejo podemos hacer que el coeficiente de la última expresión sea 1 y obtenemos dos polinomios modelo diferentes que son equivalentes bajo cambios de coordenadas (ver sección siguiente). Ambos modelos son cuasihomogéneos con los mismos cuasigrados y pesos  $(2q+1; q, 1)$ . En el caso real, los polinomios  $y^{2q+1} \pm x^2y$  no son equivalentes, por lo cual el polinomio del 2-ciclo y el del 2-ácatl con coeficientes 1 no lo son tampoco.

Este ejemplo nos muestra un polinomio tipo 2-ciclo que es equivalente a uno tipo 2-ácatl. Veremos en la sección VI.4 que esto es excepcional para polinomios de dos variables.

## SECCIÓN II.3.

### POLINOMIOS MODELO CON COEFICIENTES.

Podemos considerar igualmente polinomios con los mismos términos que los polinomios modelo, pero que tienen además coeficientes reales o complejos distintos de 0, pero no necesariamente iguales a 1:

$$Q_{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1^{p(1)} x_{\phi(1)} + a_2 x_2^{p(2)} x_{\phi(2)} + \dots + a_n x_n^{p(n)} x_{\phi(n)}$$

El estudio de estos polinomios se reduce en el caso complejo al de los polinomios modelo:

#### Proposición.

*Si el polinomio  $P_{\phi}$  no es especial, entonces todo polinomio  $Q_{\phi}$  con los mismos exponentes es equivalente a  $P_{\phi}$  bajo un cambio de variables complejo.*

**Demostración:** Efectuaremos el cambio de variables lineal

$$x_i = e^{u(i)} y_i$$

con constantes  $u(i)$  a determinar. Este cambio transforma el polinomio  $Q_{\phi}$  en un polinomio en las variables  $y_i$  con todos los coeficientes iguales a 1 si estas constantes satisfacen el sistema

$$p(i)u(i) + u(\phi(i)) = -\log(a_i)$$

El determinante de este sistema es el mismo que el del sistema (1) de la sección anterior, por lo cual tiene una solución única salvo en el caso de que el polinomio  $P_{\phi}$  sea especial.

Es fácil ver que el polinomio  $axy + yz + zw + wx$  para  $a \neq 1$  no es equivalente al polinomio modelo especial  $xy + yz + zw + wx$ , ya que el primero es una forma cuadrática no degenerada mientras que el modelo es una degenerada.

Es claro de la demostración anterior que un polinomio real no especial de la forma  $Q_{\phi}$  es equivalente mediante un cambio de variables real a uno donde todos los coeficientes son 1 o -1, por lo cual se reduce su análisis a un número finito de casos. Dependiendo de la estructura cíclica y de la paridad de los exponentes, pueden ser o no estos equivalentes al polinomio modelo, cuestión que no abordaremos en detalle. (Ver, sin embargo, el ejemplo final de la sección anterior).

Debido a estos resultados consideraremos en lo que sigue únicamente los polinomios modelo.

## SECCIÓN II.4.

### SEPARACIÓN DE VARIABLE DE UN PAR DE POLINOMIOS MODELOS SIN CUÑA.

El método de separación de variables nos permite expresar a ciertos polinomios conexos como una suma de dos o más polinomios que no comparten variable alguna. En esta sección presentamos una manera de separar a un par de polinomios modelo sin cuña que tienen un representante conexo.

**Ejemplos:** 1.- Cualquier 2-ciclo de la forma:  $xy+xy^q$ , claramente es equivalente con  $xy$ . En tanto que el 3-ciclo dado por  $P(x,y,z) = xy + y^qz + z^r x$  es equivalente con el polinomio  $xy + (-1)^q z^{1+qr}$ , mediante el cambio local de coordenadas:  $y'=y-z^r$  y  $x'=x-zS(y,z)$ , donde  $S(y,z)=[(y-z^r)^q - (-1)^q z^{qr}]/y$ .

En ambos casos, el cambio de coordenadas, además de separar variables también transforma un polinomio modelo en otro polinomio modelo.

2.- En cambio el polinomio modelo:  $P(x,y,z,w) = x^p y + xy^q + xz^r + yw$  satisface:  $P(x,y,z,w-x^p-xy^{q-1}) = xz^r + yw$ ; en este caso, el cambio de coordenadas separa variables pero no transforma un polinomio modelo en otro polinomio modelo.

3.- Modelo:  $G(x,y,z) = xy + xz^3 = x(y+z^3)$  un cambio de coordenadas implica la equivalencia con un polinomio modelo de dos, de las tres, variables:  $G(x+y, x-y-z^3, z) = (x+y)(x-y-z^3+z^3) = x^2 - y^2$ .

**Lema 1.** [*Lema de separación de variables*].

*Si uno de los  $n$  enteros:  $p(1), p(2), \dots, p(n)$ , es igual con uno entonces, un cambio local de coordenadas, aplicado al polinomio modelo  $n$ -ciclo o al polinomio modelo  $n$ -ácatl, separa las  $n$ -variables en la suma de dos o tres polinomios modelos de tipo ácatl o cíclico.*

**Demostración:** Para el caso del Modelo  $n$ -ciclo puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que  $p(1)=1$ . Entonces, el polinomio  $n$ -ciclo adopta la forma:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + x_2^{p(2)} x_3 + \dots + x_n^{p(n)} x_1,$$

definiendo

$$S(x_2, x_n) = [(x_2 - x_n^{p(n)})^{p(2)} - (-x_n^{p(n)})^{p(2)}] / x_2,$$

obtenemos la equivalencia del polinomio  $P(x_1-x_3S(x_2,x_n), x_2-x_n^{p(n)}, x_3, \dots, x_n)$  con  $x_1x_2 + x_3^{p(3)}x_4 + \dots + (-x_n^{p(n)})^{p(2)}x_3$ .

los casos  $n=2$  y  $n=3$  están incluidos en los ejemplos previos al Lema 1.

Sea  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{p(1)+1} + x_1x_2^{p(2)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)}$  el polinomio modelo  $n$ -átatl. Dividimos, esta parte de la demostración, en 4 casos:  $p(1)=1$ ,  $p(2)=1$ ,  $p(j)=1$  ( $3 \leq j < n$ ) y  $p(n)=1$ ; en cada uno de estos casos, el modelo  $n$ -átatl adopta, respectivamente, la forma:

$$Q_1(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + x_1x_2^{p(2)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)},$$

$$Q_2(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p(1)+1} + x_1x_2 + x_2x_3^{p(3)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)},$$

$$Q_3(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p(1)+1} + x_1x_2^{p(2)} + x_2x_3 + x_3x_4^{p(4)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)}, \text{ y}$$

$$Q_n(x_1, \dots, x_n) = x_1^{p(1)+1} + x_1x_2^{p(2)} + x_2x_3^{p(3)} + \dots + x_{n-1}x_n.$$

**Observación:** Para simplificar notación se considera a  $p(1) > 2$  en  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $Q_n$ .

Aplicando los cambios de coordenadas indicados en los argumentos de  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  y  $Q_n$ , donde

$$\begin{aligned} S_2(x_1, x_3) &= [(x_1 - x_3^{p(3)})^{p(1)} - (-x_3^{p(3)})^{p(1)}] / x_1 \text{ y} \\ S_3(x_2, x_4) &= [(x_2 - x_4^{p(4)})^{p(2)} - (-x_4^{p(4)})^{p(2)}] / x_2, \end{aligned}$$

consequimos las cuatro equivalencias:

$$Q_1(x_1 - \frac{1}{2} x_2^{p(2)}, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^2 - \frac{1}{4} x_2^{2p(2)} + x_2x_3^{p(3)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)},$$

$$Q_2(x_1 - x_3^{p(3)}, x_2 - S_2(x_1, x_3), x_3, \dots, x_n) = x_1x_2 + (-1)^{p(1)}x_3^{p(1)}p(3) + x_3x_4^{p(4)} + \dots + x_{n-1}x_n^{p(n)},$$

$$Q_3(x_1, x_2 - x_4^{p(4)}, x_3 - x_1S_3(x_2, x_4), x_4, \dots, x_n) = x_2x_3 + x_1^{p(1)} + (-1)^{p(2)}x_1x_4^{p(2)}p(4) + \dots + x_{(n-1)}x_n^{p(n)}, \text{ y}$$

$$Q_n(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n - x_{n-2}x_{n-1}^{(p(n-1)-1)}) = x_1^{p(1)} + \dots + x_{n-2}x_{n-1}^{p(n-1)} + x_{n-1}x_n.$$

QED.

## CAPÍTULO III.

### POLINOMIOS MODELO Y SINGULARIDADES AISLADAS.

#### SECCIÓN III.1.

#### SINGULARIDADES AISLADAS.

Sea  $f$  una función analítica definida en una vecindad del 0 en  $\mathbb{R}^n$  o una función holomorfa definida en una vecindad del 0 en  $\mathbb{C}^n$ . Supondremos siempre que  $f(0)=0$ .

Recordemos que un *punto singular* de  $f$  es un punto donde se anulan las derivadas parciales de orden 1 de  $f$  y que  $f$  *tiene orden  $m$  en un punto* si en ese punto todas las derivadas parciales de orden menor que  $m$  de  $f$  se anulan y alguna de orden  $m$  no se anula

Decimos que  $f$  *tiene singularidad aislada en el origen* si existe una vecindad del origen donde éste es el único punto singular de  $f$ .

Los polinomios modelo juegan un papel muy importante en el estudio de las singularidades aisladas, debido a la siguiente propiedad:

#### **Proposición.**

*Si  $f$  tiene singularidad aislada en el origen, entonces el desarrollo de Taylor de  $f$  en el origen contiene un polinomio modelo con coeficientes.*

*En el caso de una función holomorfa de orden mayor que 2 podemos entonces suponer, mediante un sencillo cambio de variables, que el desarrollo de Taylor de  $f$  en el origen contiene un polinomio modelo.*

### Demostración.

Si  $f$  tiene singularidad aislada en el origen entonces, para cada  $i$  las parciales de  $f$  no se anulan todas en el eje  $x_i$ . Luego alguna de ellas, digamos la parcial respecto a  $x_k$ , es no nula y su desarrollo de Taylor en 0 empezará con un término  $x_i^p$  con coeficiente no nulo. O, lo que es lo mismo, la parcial de  $f$  respecto a  $x_k$  tendrá en su desarrollo de Taylor hasta orden  $p$  el término en  $x_i^p$  y todos los demás términos contendrán alguna variable diferente de  $x_i$ . En consecuencia, el desarrollo de Taylor de  $f$  hasta orden  $p+1$  contiene el término  $x_i^p x_k$ . Definiendo  $\phi(i)=k$  vemos que este desarrollo contiene un término  $x_i^p x_{\phi(i)}$ . Haciendo esto para cada  $i$  hemos construido una función  $\phi$  tal que el desarrollo de Taylor de  $f$  contiene un polinomio modelo de  $\phi$  con coeficientes.

Del resultado de la sección II.2 se sigue la segunda parte de la proposición, dado que el correspondiente polinomio modelo no puede ser especial, ya que cada  $p(i)$  es por lo menos 2. QED.

**Observaciones:** Una función puede contener muchos polinomios modelo en su desarrollo de Taylor sin tener necesariamente una singularidad aislada. Por ejemplo, la función de dos variables  $(x+y)^k$  con  $k>1$  contiene todos los polinomios modelo de grado  $k$  en dos variables pero su conjunto singular es  $\{x+y=0\}$ .

Por otra parte no podemos afirmar que una función con singularidad aislada contenga un polinomio modelo con singularidad aislada:

### Ejemplo:

la función

$$x^2z + y^2z + z^3 + x^2y^2$$

tiene singularidad aislada en el origen, según se verifica fácilmente, pero sólo contiene al polinomio cuña que no tiene singularidad aislada.

De hecho, veremos en la sección siguiente que los polinomios modelo con singularidad aislada son pocos.

## SECCIÓN III.2

### LOS POLINOMIOS MODELO CON SINGULARIDAD AISLADA.

A pesar de lo que pudiera sugerir la sección anterior, no todos los polinomios modelo tienen singularidad aislada. De hecho son muy pocos los que la tienen:

#### Proposición.

*En el caso complejo los únicos polinomios modelo de orden mayor o igual a 3 que pueden tener singularidad aislada en el origen son los que las componentes conexas de sus estructuras cíclicas son de tipo  $n$ -ácatl y  $n$ -ciclo.*

**Demostración.** Si la estructura cíclica de  $\phi$  contiene una cuña correspondiente a las variables  $x, y, z$ , entonces el polinomio contiene los términos  $x^p z + y^q z$  y los términos restantes contienen alguna variable distinta de  $x, y$  elevados a una potencia mayor que 1. Sea  $E = E(x, y)$  el subespacio donde se anulan todas las variables distintas de  $x, y$ . Luego las derivadas parciales de  $P$  respecto a  $x$ ,  $y$  se anulan en  $E$ , así como las parciales respecto a cualquier otra variable distinta de  $z$ . La parcial con respecto a  $z$  restringida a  $E$  es igual  $x^p + y^q$  y por lo tanto se anula en el subconjunto de  $E$  dado por  $x^p + y^q = 0$ . Éste consta de puntos singulares y en el caso complejo el origen no es un punto aislado de él.

Por la proposición de la sección I.3, las únicas estructuras cíclicas conexas que no contienen cuñas son la  $n$ -ácatl y la  $n$ -ciclo. QED.

**Observación 1.** Si admitimos que algunos exponentes sean 1 sí puede haber otros polinomios modelo con singularidad aislada, por ejemplo  $x^p z + y^q z + zx + wy$ . Éste es sin embargo equivalente, mediante el sencillo cambio de coordenadas  $x' = x^p + y^q + x$ , a su parte cuadrática que es no degenerada. Cabe también señalar que éste es esencialmente el único caso de un polinomio modelo con singularidad aislada que no corresponde a los modelos ácatl y ciclo, ya que siempre que un tal polinomio tenga una cuña debe contener junto con ella a todo el polinomio anterior.

**Observación 2.** Es posible demostrar directamente que todo polinomio modelo de orden mayor que 2 de tipo ácatl o ciclo tiene singularidad aislada. Sin embargo dejamos la demostración de este resultado para el capítulo V, donde será una consecuencia de un análisis más detallado de estos polinomios.

### SECCIÓN III 3.

#### SINGULARIDADES REALES AISLADAS.

A partir del análisis anterior es muy fácil dar ejemplos de polinomios que tienen una singularidad aislada real, pero que sobre los complejos no la tienen. Un ejemplo sencillo sería el polinomio

$$x^2z + y^2z + z^2$$

cuyo conjunto singular está dado por  $x^2 + y^2 = 0$  y  $z = 0$ . Como función real su única singularidad es el origen. Pero como singularidad compleja sus singularidades son la unión de las rectas  $x = iy$  y  $x = -iy$ .

En este caso existen polinomios modelo con los mismos pesos (1,1,2) y cuasigrado (4) que ésta y que como singularidades complejas son aisladas: por ejemplo  $x^4 + y^4 + z^2$ .

Más interesante resulta el siguiente ejemplo de una singularidad aislada real cuasihomogénea tal que ninguna singularidad compleja con los mismos pesos (3,3,2) y cuasigrado (8) tiene singularidad aislada:

$$x^2z + y^2z + z^4$$

Para demostrar esto basta verificar que, además de los monomios que aparecen en ella, solamente el monomio  $xyz$  tiene cuasigrado 8, por lo cual se pueden escribir todos los polinomios cuasihomogéneos con esos pesos y cuasigrado:

$$ax^2z + by^2z + cz^4 + dxyz$$

cuyo conjunto singular contiene a la curva  $\{z=0, ax^2+by^2+dxy=0\}$ .

## CAPÍTULO IV.

### EL ÁLGEBRA DE UNA SINGULARIDAD.

#### SECCIÓN IV.1.

#### EL IDEAL JACOBIANO Y EL ÁLGEBRA DE UNA SINGULARIDAD.

Los polinomios modelo son elementos del anillo de las series formales con  $n$ -variables y coeficientes en un campo  $K$  ( $K$  es el campo real o complejo); al cual, denotamos como:  $A(n) = K[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ . Es bien sabido que el anillo  $A(n)$  es un anillo local cuyo ideal máximo  $m(n)$  es el conjunto de series con término constante igual a cero.  $m(n)$  está generado como ideal por los monomios de grado 1 ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ). Las unidades de  $A(n)$  son las series con término constante diferente de 0, es decir, las que no están en  $m(n)$ . La potencia  $m(n)^k$  del ideal máximo está generada como ideal por los monomios de grado  $k$  en las  $n$  variables.

Para los fines de este estudio se puede utilizar en lugar de  $A(n)$  el anillo de las series convergentes o el de las funciones infinitamente diferenciables.

Si  $f$  es cualquier elemento de  $A(n)$ , las derivadas parciales de  $f$  de primer orden generan un ideal del anillo  $A(n)$ , al que conocemos como el *ideal jacobiano de  $f$*  y suele denotarse  $J(f)$ .

Sea  $g$  cualquier elemento del anillo  $A(n)$ . A la expresión:  $g \, df/dx_j$  la conocemos como una "combinación de  $f$ "; a la suma de dos o más de estas expresiones también la llamaremos una combinación de  $f$ .

**Ejemplos. 1.-** El ideal jacobiano del modelo identidad (ver: ejemplo 1, sección II.1) está generado por los monomios:  $x_1^{p(1)}, x_2^{p(2)}, \dots, x_n^{p(n)}$ ; los cuales son linealmente independientes en  $A(n)$ .

**2.-** Los  $n-1$  monomios:  $x_1 x_j^{p(j)-1}$  ( $1 < j \leq n$ ) y la combinación  $x_1^{p(1)} + x_2^{p(2)} + \dots + x_n^{p(n)}$  generan al ideal jacobiano del modelo constante 1 [ver ejemplo 2, II.1]. En éste, y en el ejemplo anterior, cada monomio del modelo es combinación de las derivadas parciales, de primer orden, del mismo modelo.

3.- Ninguno de los cuatro sumandos del polinomio  $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xz^2 + y^2z^2$  pertenece al ideal generado por:  $3x^2+y^2+z^2$ ,  $xy+yz^2$ ,  $xz+zy^2$ ; en la próxima sección probaremos que los únicos monomios homogéneos de grado tres que están en  $J(f)$  son:  $xyz$ ,  $x^2y$ ,  $x^2z$ .

Los polinomios modelo tienen algunas ventajas que no comparten otros polinomios del anillo  $A(n)$ , una de éstas está contenida en la

### Proposición.

*Todo monomio contenido en un polinomio modelo pertenece al ideal jacobiano de dicho polinomio.*

**Demostración.** Sea  $P$  un modelo conexo que contiene al monomio  $x_i x_j^{p(i)}$  donde  $j$  es un elemento precíclico de máxima longitud. Entonces,  $x_j dP/dx_j = b x_i x_j^{p(i)}$ ; es decir, el monomio seleccionado está en  $J(P)$ .

Ahora bien,  $x_i dP/dx_i$  es de la forma:

$$a x_i x_k^{p(k)} + b x_k x_i^{p(i)} + [\text{monomios de } P \text{ como } x_j^{p(i)} x_i, \text{ todos ellos en } J(P)] \quad (1)$$

en caso de que  $i$  sea precíclico entonces  $a=0$  y  $x_k x_i^{p(i)}$  está en  $J(P)$  (1.1)

Argumentando recurrentemente como en (1.1), eventualmente arribaremos a la conclusión de que  $i$  es un elemento cíclico de orden  $c \geq 1$ ; en consecuencia:

(1.2) Si  $c=1$ , tenemos en (1):  $a=0$ ,  $i=k$  y  $x_i^{p(i)+1}$  está en  $J(P)$

(1.3) cuando  $c > 1$ , obtenemos  $c$ -combinaciones, similares a las de (1) (con  $a$  y  $b$  constantes no nulas) que involucran a los  $c$ -monomios cíclicos de  $P$ ; de esta clase de monomios nos ocupamos enseguida:

Sea  $P$  el modelo del  $n$ -ciclo. Al desarrollar la combinación:

$$x_1 dP/dx_1 - p(1)x_2 dP/dx_2 + \dots + (-1)^{(n+1)} p(1)p(2)\dots p(n-1)x_n dP/dx_n$$

observamos que los coeficientes de los monomios:  $x_i^{p(i)} x_{i-1}$  (para  $1 < i \leq n$ ) son nulos y únicamente obtenemos:  $x_n^{p(n)} x_1$  por el coeficiente, no nulo,  $1 + (-1)^{(n+1)} p(1)p(2)\dots p(n)$  [ver sección II.2]; es decir, el monomio  $x_n^{p(n)} x_1$  pertenece al ideal jacobiano de  $P$ . La propiedad cíclica del modelo garantiza la pertenencia de los demás monomios del ciclo a  $J(P)$ . QED

Estudiaremos el álgebra cociente del anillo  $A(n)$  por el ideal jacobiano de  $f$ :  $A(n)/J(f)$ , a la que llamaremos simplemente *el álgebra de  $f$*  y nos plantearemos algunas preguntas:

¿Cuántas clases de equivalencia en  $A(n)/J(f)$  son linealmente independientes?, es decir,

¿Cuál es la dimensión de esta álgebra cociente, sobre los reales y sobre los complejos?,

¿Cuáles son los monomios de mayor grado que *no* están en  $J(f)$ .

¿Qué relación tienen estas preguntas con el tipo de singularidad de la función dada?

Iremos respondiendo éstas y otras interrogantes tomando como punto de partida a las álgebras cocientes generadas por algunos polinomios modelo.

**Continuación del ejemplo 1** (modelo identidad). En el álgebra  $A(n)/J(P)$ , las clases de todos los monomios de la forma:  $x_1^{k(1)}x_2^{k(2)}\dots x_n^{k(n)}$  (donde  $k(j)$  es un entero que satisface:  $0 \leq k(j) < p(j)$  para cada  $j$  en  $J_n$ ) resultan ser linealmente independientes en el álgebra cociente; es decir, la dimensión de  $A(n)/J(P)$  es  $p(1)p(2)\dots p(n)$ .

**Continuación del ejemplo 3.** Sabemos que el polinomio  $P(x,y,z) = x^3+xy^2+xz^2$  tiene singularidad aislada real (pero no compleja) en el origen. Además, es fácil comprobar que el monomio  $y^k$  no pertenece al ideal  $J(P)$ , para ningún entero positivo  $k$ ; consecuentemente, la dimensión de  $A(n)/J(P)$  no es finita. Sin embargo, si adicionamos al polinomio  $P$  el término  $y^2z^2$  obtenemos que: el polinomio  $f(x,y,z) = x^3+xy^2+xz^2+y^2z^2$  que tiene singularidad aislada en el cero y determina un álgebra cociente de dimensión finita.

## SECCIÓN IV.2.

### SOBRE UN ENUNCIADO DE V.I. ARNOLD.

En relación a los conceptos anteriores, tenemos un comentario sobre un enunciado del artículo [A]. Como se dijo en la introducción de esta tesis, el artículo [A] es uno de los trabajos más importantes sobre la teoría de singularidades de funciones que se hayan escrito. Resulta sorprendente, entonces, que en este texto aparezca un enunciado incorrecto:

**3.5 REMARK.** *The number of basis monomials of the local ring of a quasihomogeneous or semiquasihomogeneous function  $f$  having given generalized degree  $d$  does not depend on the choice of the basis in the local ring.*

Este enunciado, junto con la demostración que le sigue, ha sido reproducido literalmente en [A-GZ-V] y varios otros textos. Cabe señalar, sin embargo, que este enunciado no parece tener repercusiones importantes respecto a la validez de los resultados posteriores del artículo [A].

A menos de que estemos malinterpretando algo, el siguiente parece ser un contraejemplo, posiblemente el más sencillo:

**Ejemplo.** Sea

$$f(x,y)=x^3 + y^4 + x^2y^2.$$

Esta función es semicuasihomogénea (de acuerdo a la definición en [A]) porque se obtiene agregándole a la función cuasihomogénea no degenerada  $x^3 + y^4$  de pesos (4,3) y cuasigrado 12 el término  $x^2y^2$  de cuasigrado 14. La base usual del álgebra de  $f$  es la misma que la de la parte cuasihomogénea:  $x^i y^j$  con  $i=0, 1$ , y  $j=0,1,2$ . El único monomio de cuasigrado máximo (10) de esta base es  $xy^2$ .

Pero como la derivada parcial respecto a  $x$  de esta función es  $3x^2+2xy^2$ , podemos obtener una nueva base substituyendo el monomio  $xy^2$  por  $x^2$ , que tiene cuasigrado 8. De aquí mismo se ve cuál es el error en la demostración que se hace del enunciado, la que sólo es válida para funciones cuasihomogéneas.

El corolario que sigue a esa observación necesita ser corregido en forma adecuada, al igual que la Proposición 4.2 de la siguiente sección.

En el Capítulo VI.6 veremos cómo este mismo fenómeno se presenta al estudiar el grado homogéneo de funciones cuasihomogéneas,

### SECCIÓN IV.3.

#### FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA.

Dada una función  $f$ , suficientemente diferenciable, podemos distinguir en el anillo  $A(n)$  varias clases de monomios, los cuales son fundamentales para determinar algunas propiedades algebraicas del álgebra de la función  $f$ :

**Definiciones.** Diremos que un monomio del anillo  $A(n)$  es un *monomio jacobiano* de  $f$  si éste pertenece al ideal jacobiano de  $f$ .

A todo monomio del anillo  $A(n)$  que no pertenezca al ideal  $J(f)$  lo llamaremos *monomio básico* de  $f$ . Si al multiplicar a un monomio básico de  $f$  por  $x_j$ , para cada  $j$  en  $J_n$ , obtenemos un monomio jacobiano de  $f$  entonces, diremos que dicho monomio es un *monomio básico frontera* de  $f$ ; formaremos la *frontera básica* de  $f$  con todos los monomios básicos frontera de  $f$ .

Denominaremos *monomio jacobiano frontera* de  $f$  a todo aquel monomio jacobiano de  $f$  que después de factorizarle cualquiera de sus variables obtengamos siempre un monomio básico de  $f$ ; todos los monomios jacobianos frontera de  $f$  determinaran la *frontera jacobiana* de  $f$ .

Denotaremos como  $X^K$  al monomio, del anillo  $A(n)$ , dado por:  $x_1^{k(1)} x_2^{k(2)} \dots x_n^{k(n)}$ .

Denominaremos *eslabón* de  $f$  a la combinación:  $X^K df/dx_i$  ( $i$  es cualquier elemento en  $J_n$ ). A todo eslabón de  $f$  que contenga dos o más monomios básicos de  $f$  y, por lo menos, a un monomio jacobiano de  $f$  lo llamaremos *eslabón abierto* de  $f$ .

Diremos que un monomio básico de  $f$  es un *monomio aislado* de  $f$  si éste no es sumando de ningún eslabón de  $f$ .

Si el monomio  $X^K$  es un sumando de uno y, sólo un, eslabón de  $f$  entonces, a  $X^K$  lo llamaremos *monomio extremo* de  $f$ ; en cambio, diremos que es un *monomio de enlace* de  $f$  si,  $X^K$  es un sumando común de dos o más eslabones de  $f$ .

Una *cadena elemental* de  $f$  será todo eslabón de  $f$ , formado exclusivamente con monomios extremos de  $f$ .

Dos eslabones de  $f$  forman una *pareja conectable* de  $f$  si ambos eslabones comparten, por lo menos, a un monomio de enlace.

A una *trayectoria* de  $f$  la definiremos como una sucesión ordenada de eslabones de  $f$ , en la cual, cada par de eslabones consecutivos forman una pareja conectable de  $f$ .

Llamaremos *cadena* de  $f$  a un conjunto de eslabones de  $f$ , en el cual, para cada par de eslabones del conjunto, existe una trayectoria de  $f$  que inicia en uno de los dos eslabones y termina en el otro. Diremos que una cadena de  $f$  es una *cadena maximal* de  $f$ , si esta no forma parte de ninguna otra cadena de  $f$ . A toda cadena de  $f$  que contenga algún eslabón abierto de  $f$  la denominaremos *cadena básica abierta* de  $f$ .

**Nota.** Es claro que en las definiciones anteriores no se modifica la esencia de las mismas cuando se sustituye al monomio  $X^K$  por  $cX^K$  donde  $c$  es cualquier constante no nula.

### Ejemplos:

1.- Para el modelo identidad  $P$ , la frontera básica de  $P$  consta de un sólo monomio:

$$x_1^{p(1)-1} x_2^{p(2)-1} \dots x_n^{p(n)-1}$$

y los demás monomios básicos de  $P$  (todos ellos monomios aislados de  $P$ ) son todos los factores posibles de éste monomio básico frontera. En tanto que, la frontera jacobiana de  $P$  está formada por los  $n$ -monomios:

$$x_1^{p(1)}, x_2^{p(2)}, \dots, x_n^{p(n)};$$

de manera que todo monomio jacobiano de  $P$  contiene necesariamente como factor a uno de estos  $n$ -monomios jacobianos frontera. En este caso, los monomios de la frontera jacobiana resultan ser monomios extremos de  $P$ .

2.- La frontera jacobiana del polinomio  $P(x, y, z) = x^2y + xy^2 + xz^2$  consta de dos monomios extremos y dos monomios de enlace:  $\{x^3, x^2y, xy^2, xz\}$  (2).

En efecto: (2.1)  $xz$  es el único monomio de  $dP/dz$ ; de (2.1) y la combinación  $2xdP/dx - ydP/dy$  deducimos que el monomio de enlace (2.2)  $x^2y$  está en  $J(P)$ . Ahora, de (2.2) en  $xdP/dy$  y  $ydP/dy$  concluimos que el monomio extremo  $x^3$  y el monomio de enlace  $xy^2$  también son elementos de  $J(P)$ .

Por otra parte, la cadena maximal, formada por el par de eslabones:  $dP/dx$ ,  $dP/dy$ , contiene a cuatro monomios (tres extremos y uno de enlace) básicos:  $\{x^2, xy, y^2, z^2\}$ , los dos primeros forman la frontera básica de  $P$ ; por consiguiente, los monomios de (2) resultan ser monomios jacobianos frontera de  $P$ . En este caso, a diferencia del ejemplo anterior, la región de los monomios básicos de  $P$  no está acotada ya que todos los monomios de la forma:  $y^qz^r$  son básicos.

3.- El polinomio  $f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xz^2 + y^2z^2$  determina la frontera jacobiana de  $f$  con diez monomios (7 de enlace y tres extremos):  $\{xyz, x^2y, x^2z, x^4, xy^3, xz^3, yz^3, y^3z, y^5, z^5\}$ .

Una forma de justificar esta afirmación es la siguiente:

Denotamos como  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  a las parciales de primer orden de  $f$ , con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, entonces:

3.1.-  $yz f_x - \frac{1}{2}z f_y - \frac{1}{2}y f_z = 3x^2yz - 2xyz = -\frac{1}{2}xyz(1-6x)$ ; pero  $1-6x$  es una unidad en el anillo  $A(3)$ . Por consiguiente,  $\{xyz, y^3z, yz^3\}$  son elementos de  $J(f)$ .

Ahora, 3.1 en  $xf_y, xf_z, y^2f_y$  y  $z^2f_z$  implican la pertenencia al ideal  $J(f)$  de los monomios:

3.2  $\{x^2y, x^2z, xy^3, xz^3\}$

Luego, 3.2 en  $x^2f_x$ , (3.1 y 3.2) en  $y^3f_x$  y  $z^3f_x$  implican que los tres monomios extremos  $\{x^4, y^5, z^5\}$  también están en  $J(f)$ .

La cadena básica abierta, formada con cinco eslabones:  $xf_x, yf_y, zf_z, \{y^2f_x, z^2f_x$  ambos eslabones abiertos}, contiene a la frontera básica de  $f$  con tres monomios de enlace  $\{xy^2, xz^2, y^2z^2\}$  y tres monomios extremos  $\{x^3, y^4, z^4\}$ . Cualquier combinación de  $f_x, f_y$  y  $f_z$  que involucre a uno de estos monomios contiene, por lo menos, a dos de estos seis monomios (módulo el ideal jacobiano de  $f$ ); por ejemplo, la combinación:  $2(x+y^2+z^2)f_x - yf_y - zf_z = 6x^3 + 2y^4 + 2z^4 + \text{jacobianos}$ , nos muestra que, en la frontera básica de  $f$ , hay dos clases de monomios linealmente independientes en el álgebra cociente  $A(3)/J(f)$ .

Finalmente, podemos agrupar a los otros monomios básicos de  $f$  así:

a) 5 monomios aislados:  $\{1, x, y, z, yz\}$

b)  $\{x^2, y^2, z^2\}$  en  $f_x$ , c)  $\{xy, y^3, yz^2\}$  en  $f_y + 2yf_x$ , y d)  $\{xz, y^2z, z^3\}$  en  $f_z + 2zf_x$ . Por consiguiente, con los 5 monomios de a), 2 de b), uno de c), uno de d) y 2, de los 6 monomios básicos frontera, podemos formar una base para el álgebra cociente  $A(3)/J(f)$ .

## CAPÍTULO V.

### EL ÁLGEBRA DE LOS POLINOMIOS n- ÁCATL Y n- CICLO.

#### SECCIÓN V.1.

#### FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA DEL n-CICLO.

Iniciamos con el caso  $n=2$ :

$$P(x, y) = yx^p + xy^q$$

En la cadena maximal,(integrada por las combinaciones:  $y^{q-2}dP/dx$ ,  $x^{p-2}dP/dy$ ) hay dos monomios extremos y uno de enlace; por lo tanto, los tres monomios siguientes resultan ser básicos:

$$x^{2p-2}, y^{2q-2}, x^{p-1} y^{q-1} \quad (*)$$

De la proposición IV.1 sabemos que los monomios  $yx^p$  y  $xy^q$  son jacobianos y, como  $p$  y  $q$  son mayores que 1 entonces, el par de monomios  $x^{p-1}y^q$  y  $x^p y^{q-1}$  también son jacobianos; pero, cada uno de éstos forma un eslabón, respectivamente, con los monomios  $y^{2q-1}$  y  $x^{2p-1}$  en las combinaciones:  $y^{q-1} dP/dx$  y  $x^{p-1} dP/dy$ . En consecuencia, los cuatro monomios siguientes son jacobianos:

$$x^{2p-1}, yx^p, xy^q, y^{2q-1} \quad (**)$$

Al aplicar la definición de monomios frontera a los monomios descritos en (\*) y (\*\*) nos permite afirmar que los tres monomios básicos y los cuatro monomios jacobianos forman, respectivamente, la frontera básica y la frontera jacobiana de  $P$ .

Una base del álgebra cociente, determinada por el polinomio  $P$ , está formada por las clases de todos los factores posibles del monomio básico frontera  $x^{p-1} y^{q-1}$ . Estos  $pq$  monomios están agrupados de la manera siguiente:

- 1)  $2+(p-1)(q-1)$  monomios aislados:  $x^{p-1}, y^{q-1}, \{x^i y^j: (0,0) \leq (i,j) \leq (p-2, q-2)\}$ .
- 2)  $p+q-4$  cadenas elementales que contienen a los monomios:  $\{x^{p-1} y^{1+j}, x^{1+i} y^{q-1}: 0 \leq i \leq p-3, 0 \leq j \leq q-3\}$ .
- 3) el monomio básico frontera  $x^{p-1} y^{q-1}$ .

Demostraremos que esto es válido en general para el polinomio modelo del n-ciclo en cualquier número de variables:

### Teorema.

Sea  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{p(1)} x_2 + x_2^{p(2)} x_3 + \dots + x_n^{p(n)} x_1$  el polinomio modelo del n-ciclo, donde cada exponente  $p(i)$  es un entero mayor que 1. Entonces,

(i) La frontera básica del n-ciclo es una cadena máxima formada con  $f(n)+f(n-2)$  monomios (donde  $f(k)$  es el k-ésimo número de Fibonacci) que contiene al monomio formado con el producto de las n-variables ( $x_i: 1 \leq i \leq n$ ) con exponentes  $p(i)-1$ .

(ii) El álgebra cociente: anillo de series de potencias módulo el ideal jacobiano del n-ciclo, tiene dimensión  $p(1)p(2)\dots p(n)$ .

### Demostración.

Sea P el polinomio modelo con  $n > 2$  (pues ya consideramos antes el caso  $n=2$ ). Probaremos primero que, además de los n sumandos (ver: Proposición IV.1) contenidos en el modelo n-ciclo, hay otros n monomios distintos en el ideal  $J(P)$ . En efecto, seleccionemos tres variables consecutivas:  $x = x_i, y = x_{i+1}, z = x_{i+2}$  (considérense a los subíndices módulo n) y denotemos como  $p = p(i)$  y  $q = p(i+1)$ . Entonces, como todos los exponentes de P son mayores que 1 y de acuerdo a la Proposición IV.1, obtenemos que el monomio  $x^p y^{q-1} z$  está en el ideal jacobiano de P; pero este monomio es uno de los dos sumandos contenidos en el eslabón:  $x^p DP/dy$ , en consecuencia, el otro sumando  $x^{2p}$  también está en  $J(P)$ . Por lo tanto, tenemos  $2n$  monomios jacobianos de P, a saber:

$$x_1^{p(1)} x_2, x_2^{p(2)} x_3, \dots, x_n^{p(n)} x_1, x_1^{2p(1)}, x_2^{2p(2)}, \dots, x_n^{2p(n)} \quad (1.1)$$

Ahora bien, al factorizar una variable del monomio  $x^p y$  obtenemos que el par de monomios  $x^p$  y  $y x^{p-1}$  son monomios extremos de un par de cadenas elementales; por consiguiente, ambos resultan ser monomios básicos de P.

Por otra parte, el monomio extremo  $x^{2p-1}$  es básico, ya que pertenece a una cadena maximal que contiene a un monomio de enlace  $x^{p-1} y^{q-1} z$  y a otro monomio extremo básico  $w^s y^{q-2} z$ , donde:  $w = x_{i-1}$

y  $s = p(i-1)$  ( $y^{2q-2}$ , para  $n=2$ ); es decir,  $x^p y$  y  $x^{2p}$  (y consecuentemente, los  $2n$  monomios de 1.1) son monomios jacobianos frontera de P. Analizaremos al monomio:

$$X^B = x_1^{p(1)-1} x_2^{p(2)-1} \dots x_n^{p(n)-1} \quad (1.2)$$

Sea  $C[X^B]$  la cadena maximal de  $P$  que contiene a este monomio. Sabemos que dos monomios forman un eslabón de  $P$ , si uno de ellos contiene un par de variables consecutivas:  $x_i, x_{i+1}$  con exponentes mayores o iguales que  $p(i)-1$  y  $1$ , respectivamente; los exponentes del otro monomio son iguales a los del primero, salvo en tres variables, en donde la potencia: disminuye en una unidad en  $x_{i+1}$ , disminuye en  $p(i)-1$  unidades en  $x_i$  y aumenta  $p(i)-1$  unidades en  $x_{i-1}$ . Por consiguiente, si hacemos:

$$B=(p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n)-1)$$

y representamos al vector unitario de  $R^n$  (con 1 en la coordenada  $m$ ) como  $e_m$ , obtenemos:

(1)  $X^B$  y  $X^{B(i)}$  son monomios de enlace que forman un eslabón en una combinación de  $dP/dx_i$ , donde  $B(i)=B+p(i-1)e_{i-1}-(p(i)-1)e_i-e_{i+1}$  para cada  $i$  en  $J_n$ ,

(2)  $X^{B(i)}$  y  $X^{B(ij)}$  forman otro eslabón de  $P$  donde  $B(ij)=B(i)+p(j-1)e_{j-1}-(p(j)-1)e_j-e_{j+1}$ , para cada  $j$  en  $J_n-\{i-1, i, i+1\}$ , y así sucesivamente, hasta obtener:

(3) monomios en  $C[X^B]$  con un máximo de  $[n/2]$  variables con potencia nula, cada una de éstas, alternada con una variable  $x_i$  con exponente  $2p(i)-2$  y, en el caso de que  $n$  sea impar, hay un par de variables consecutivas  $(x_j, x_{j+1})$  con exponentes:  $p(j)-2$  y  $2p(j+1)-1$ , separando a dos de potencia nula.

La cantidad de monomios que acabamos de describir es:  $n$  en (1),  $n-3+(n-3)!$  en (2) y  $2^n$  en (3), según sea  $n$  par o impar; más aún, la cardinalidad de la cadena maximal  $C[X^B]$  coincide con la suma de un par de números de Fibonacci:  $f(n-2)+f(n)$ . [Ver justificación en el Lema 2].

**1.3** No existen monomios en la cadena  $C[X^B]$  que admitan como factor a alguno de los  $2n$  monomios enlistados en 1.2

En efecto, sea  $X^K = x_1^{k(1)} x_2^{k(2)} \dots x_n^{k(n)}$  un monomio en  $C[X^B]$  entonces, de acuerdo a las descripciones hechas en 1), 2) y 3), sabemos que las potencias de un par de variables consecutivas, digamos  $x_1, x_2$  satisfacen:  $k(2)=0$  si, y sólo si,  $k(1)$  es  $2p(1)-1$  ó  $2p(1)-2$ , ó bien,  $k(2)>0$  si, y sólo si,  $k(1)<p(1)$ ; en ninguno de estos casos es posible que los monomios:  $x_1^{p(1)} x_2$  y  $x_1^{2p(1)}$  sean factores de  $X^K$ . La propiedad cíclica del modelo completa la prueba.

**1.4** Sea  $X^K$  cualquier monomio de  $C[X^B]$  entonces, para toda  $h$  en  $J_n$ , tenemos que el monomio  $x_h X^K$  es jacobiano.

En efecto, existe una trayectoria que inicia en  $X^B$  y termina en  $X^K$ , la cual, define una combinación de la forma: (4)  $cX^B+c'X^K$  ( para algunas constantes  $c, c'$  no nulas); como  $x_h X^B$  es jacobiano, porque contiene al factor  $x_h^{p(h)} x_{h+1}$ , resulta que el otro monomio  $x_h X^K$  también es jacobiano.

**1.5** Todo ciclo de  $P$ , formado con monomios de la cadena  $C[X^B]$ , determina combinaciones triviales. La justificación de esta aseveración se realiza en el Lema 3.

Finalmente, como toda trayectoria de  $P$  es unión de ciclos de  $P$  y de otra u otras subtrayectorias que no forman ciclos entre sí, se deduce que: toda combinación, formada con monomios de  $C[X^B]$ , es trivial, o bien, resulta ser la suma de, al menos, un par de monomios. Esto significa que todos los monomios de la cadena  $C[X^B]$  no sólo son básicos (por 1.3) sino que también resultan ser "monomios básicos frontera de  $P$ " (por 1.4) y, en consecuencia,  $C[X^B]$  es la "cadena básica frontera de  $P$ ".

Es claro que todos los monomios aislados de  $P$  resultan ser factores del monomio  $X^B$ , los demás factores, por (1), (2), (3) y (4), determinan cadenas maximales ajenas entre sí; estas cadenas maximales contienen a los otros monomios básicos de  $P$ , así se establece y se justifica en:

**1.6** Sea  $X^T$  un monomio que satisface las dos condiciones siguientes:

- a)  $X^T$  no es factor del monomio  $X^B$  y
- b)  $X^T$  no admite como factor a ningún monomio jacobiano frontera de  $P$ .

Entonces, el monomio  $X^T$  es básico si, y sólo si, pertenece a una cadena maximal generada por algún factor del monomio  $X^B$ .

En efecto, por la condición a), el conjunto de todas aquellas potencias  $t(j)$  del monomio  $X^T$  que satisfacen la desigualdad:  $t(j) \geq p(j)$ , es no vacío; en consecuencia, por la condición b), tenemos:  $t(j+1)=0$ . Luego entonces, los monomios  $X^T$  y  $X^{T(1)}$  forman un eslabón de  $P$ , en una combinación de  $DP/dx_{j+1}$ , donde  $T(1)=T - p(j) e_j + [p(j+1)-1] e_{j+1} + e_{j+2}$ . La prueba concluye si  $X^{T(1)}$  es factor de  $X^B$  ó si algún monomio jacobiano frontera factoriza a  $X^{T(1)}$ ; de no ser así, tenemos que  $X^{T(1)}$  satisface las condiciones a) y b) y al usar este mismo procedimiento, obtenemos otros monomios  $X^{T(2)}, \dots, X^{T(k)}$ , donde  $2 \leq k \leq [n/2]$ , tales que  $X^{T(k)}$  ya no satisface las condiciones a) y b). Por lo tanto, si  $X^{T(k)}$  no es jacobiano entonces, resulta ser un factor de  $X^B$ ; lo cual, justifica 1.6

La colección de todos los monomios que son factores de  $X^B$  [ver 1.2] tiene cardinalidad  $p(1)p(2)\dots p(n)$  y, de la afirmación hecha en 1.6 y del párrafo previo a ésta, concluimos que las clases de estos monomios forman una base del álgebra cociente: anillo de series de potencias con  $n$ -variables módulo el ideal jacobiano del  $n$ -ciclo; es decir,  $A(n)/J(P)$  tiene dimensión  $p(1)p(2)\dots p(n)$ .

## SECCIÓN V.2.

### FRONTERA BÁSICA Y FRONTERA JACOBIANA DEL $n$ -ÁCATL.

Iniciamos nuevamente con el caso  $n=2$ :

$Q(x, y) = x^p + xy^q$ , con enteros  $p > 2$  y  $q > 1$

Es claro que la combinación  $y^{q-2}dQ/dx$  es una cadena elemental, formada con el par de monomios básicos:

$$x^{p-1}y^{q-2}, y^{2q-2} \quad (*)$$

Ahora bien, de la Proposición IV.1 y del par de combinaciones  $dQ/dy$ ,  $y^{q-1}dQ/dx$  obtenemos a los monomios jacobianos:  $x^p$ ,  $xy^{q-1}$ ,  $y^{2q-1}$ ; los cuales (puede verificarse fácilmente), forman la frontera jacobiana de  $Q$ . Por lo tanto, el par de monomios en (\*) forman la frontera básica de  $Q$ .

Una base del álgebra cociente, determinada por el polinomio  $Q$ , está formada por la clase del monomio  $y^{q-1}$  más las clases de todos los factores posibles del monomio básico frontera  $x^{p-1}y^{q-2}$ . En este caso, los  $1+p(q-1)$  monomios están agrupados de la manera siguiente:

- 1)  $1+p(q-1)$  monomios aislados:  $\{x^i y^j : (0,0) \leq (i,j) \leq (p-2, q-2)\}$  y  $y^{q-1}$
- 2) las  $q-1$  cadenas elementales que aportan los monomios:  $\{x^{p-1} y^j : 0 \leq j \leq q-2\}$ .

#### Teorema.

Sea  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{p(1)} + x_1 x_2^{p(2)} + x_2 x_3^{p(3)} + \dots + x_{n-1} x_n^{p(n)}$  el polinomio modelo  $n$ -átatl, donde los exponentes  $p(i)$  son enteros que exceden al 1 y  $p(1)$  es mayor que 2. entonces,

(i) La cardinalidad de la frontera básica del Modelo  $n$ -átatl coincide con el  $n$ -ésimo número de Fibonacci y también es una cadena máxima que contiene al monomio formado con el producto de las  $n$ -variables con exponentes:  $p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n-1)-1$  y  $p(n)-2$ .

(ii) El álgebra cociente: anillo de series de potencias módulo el ideal jacobiano del Modelo  $n$ -átatl tiene dimensión  $p(1)[p(2)\dots[p(n)-1]+1]\dots+(-1)^n$

#### Demostración.

Sabemos, por la Proposición IV.1, que los  $n$  monomios del modelo  $n$ -ácatl son jacobianos; más aún,  $x_{n-1} x_n^{p(n)-1}$  también lo es, por ser el único monomio de  $dP/dx_n$ . En consecuencia, el monomio  $x_2^{2p(2)}$  está en  $J(P)$ , porque forma un eslabón con el monomio jacobiano  $x_1^{p(1)-1} x_2^{p(2)}$ ; la misma conclusión es válida para cada monomio de la forma  $x_j^{2p(j)}$  ( $2 < j < n-1$ ) en una combinación de  $dP/dx_{j-1}$  y también vale para el monomio  $x_n^{2p(n)-1}$ . Por consiguiente, tenemos  $2n-1$  monomios jacobianos de  $P$ :

$$x_1^{p(1)}, x_1 x_2^{p(2)}, \dots, x_{n-2} x_{n-1}^{p(n-1)}, x_{n-1} x_n^{p(n)-1}, x_2^{2p(2)}, \dots, x_{n-1}^{2p(n-1)}, x_n^{2p(n)-1} \quad (2.1)$$

Al factorizar una variable del monomio  $x_{n-1} x_n^{p(n)-1}$  se obtiene un par de monomios básicos aislados y cuando se factoriza una variable de los primeros  $n-1$  monomios jacobianos, descritos en 2.1, todos los monomios cofactores que se obtienen, resultan ser monomios extremos de cadenas elementales. Por otra parte,  $x_2^{2p(2)-1}$  es un monomio extremo que pertenece a una cadena maximal, que contiene a otro monomio extremo  $x_1^{p(1)-2} x_3^{p(3)}$  y al monomio eslabón:  $x_1^{p(1)-1} x_2^{p(2)-1}$ ; luego  $x_2^{2p(2)-1}$  es un monomio básico. De manera análoga, sustituyendo  $j$  en lugar de 2,  $j-1$  en lugar de 1 y  $1+j$  en lugar de 3, en la argumentación anterior, a fin de concluir que  $x_j^{2p(j)-1}$  es básico para  $1 < j < n$ . Por último,  $x_n^{2p(n)-2}$  es un monomio extremo de una cadena elemental. Por lo tanto, todos los monomios definidos en 2.1 son monomios jacobianos frontera del polinomio  $P$ .

Con los mismos argumentos realizados para justificar las aseveraciones hechas en 1.3, 1.4 y 1.5 de la sección anterior, adaptadas al polinomio del modelo  $n$ -ácatl, se puede concluir que la frontera básica del polinomio  $P$  es la cadena maximal que contiene al monomio:

$$X^B = x_1^{p(1)-1} x_2^{p(2)-1} \dots x_{n-1}^{p(n-1)-1} x_n^{p(n)-2} \quad (2.2)$$

Los otros monomios de la cadena básica frontera contienen una, dos o hasta  $[n/2]$  variables con potencia nula y los representamos, respectivamente, como:  $X^{B(i)}$ ,  $X^{B(ij)}$ , ...,  $X^K$  donde

$$(1) B(1) = B + p(2)e_2 - (p(1)-1)e_1, B(i) = B + p(i+1)e_{i+1} - (p(i)-1)e_i - e_{i-1} \text{ para } 1 < i < n$$

$$(2) B(ij) = B(i) + p(j+1)e_{j+1} - (p(j)-1)e_j - e_{j-1} \text{ para } j \text{ en } J_n - \{i-1, i, i+1, n\}, \text{ etc.}$$

(3)  $X^K$  contiene  $[n/2]$  variables con potencias nulas, ningún par de éstas son contiguas, y se eslabona con un monomio que contiene una variable menos, con potencia nula, que  $X^K$ .

En este caso, la cardinalidad de  $C[X^B]$  coincide con el  $n$ -ésimo número de Fibonacci; esta aseveración se justifica en el sublema que antecede al Lema 1 del apéndice.

Nótese que el monomio básico  $x_n^{p(n)-1}$  no pertenece a la colección de cadenas maximales determinadas por todos los factores posibles del monomio básico frontera  $X^B$ , descrito en 2.2; pero, no es el único, los  $h = [n/2]$  monomios siguientes

**2.3:**

$$X^{K(1)}: K(1) = (p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n-3)-1, p(n-2)-2, 0, p(n)-1),$$

$$X^{K(2)}: K(2) = (p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n-5)-1, p(n-4)-2, 0, p(n-2)-1, 0, p(n)-1), \dots,$$

$$X^{K(h)}: K(h) = (p(1)-2, 0, p(3)-1, 0, \dots, p(n-2)-1, 0, p(n)-1) \text{ para } n \text{ impar}$$

$$K(h) = (0, p(2)-1, 0, p(4)-1, \dots, 0, p(n-2)-1, 0, p(n)-1) \text{ para } n \text{ par}$$

son básicos, pero ninguno de ellos es monomio básico frontera de P.

En efecto, son básicos porque resultan ser factores de los monomios básicos frontera siguientes:

$$X^{S(1)}: S(1) = (p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n-3)-1, p(n-2)-2, 0, 2p(n)-2),$$

$$X^{S(2)}: S(2) = (p(1)-1, p(2)-1, \dots, p(n-5)-1, p(n-4)-2, 0, 2p(n-2)-2, 0, 2p(n)-2), \dots$$

$$X^{S(h)}: S(h) = (2p(1)-2, 0, 2p(3)-2, 0, \dots, 2p(n-2)-2, 0, 2p(n)-2) \text{ para } n \text{ impar}$$

$$S(h) = (0, 2p(2)-2, 0, 2p(4)-2, \dots, 0, 2p(n-2)-2, 0, 2p(n)-2) \text{ para } n \text{ par.}$$

Más aún, el monomio  $x_n X^{K(i)}$  sigue siendo factor de  $X^{S(i)}$ , para cada  $i: 1 \leq i \leq h$ , pues estamos considerando a cada  $p(i) \geq 2$ . En general, al comparar  $e_j + K(i)$  con  $S(i)$  obtenemos:

**2.4.** El monomio  $x_j X^{K(i)}$  es básico, para cualquier valor de  $j$  en el conjunto  $\{n, n-2, \dots, n-2(i-1)\}$  y es jacobiano, para cada  $j$  en  $J_n - \{n, n-2, \dots, n-2(i-1)\}$ .

Sólo resta por justificar la segunda parte de 2.4, para conseguirlo, proponemos (en caso de que la potencia de  $x_j$  sea nula o  $j$  sea igual a  $n-2i$ , ya que para  $1 \leq j < n-2i$  la conclusión es inmediata) construir la trayectoria más corta que existe entre los monomios  $x_j X^{K(i)}$  y  $X^S$ , donde las dos últimas coordenadas de  $S$  son:  $1$  ó  $p(n-1)$  y  $p(n)-1$ ; en ambos casos, 2.1 y la propiedad transitiva, nos permiten arribar a la conclusión deseada.

**2.5.** Cualquier monomio básico, del modelo  $n$ -ácatl, pertenece a una, y sólo una, cadena maximal que está unívocamente determinada por algún factor de uno, y sólo uno, de los monomios siguientes:  $X^B, X^{K(1)}, X^{K(2)}, \dots, X^{K(h)}$ . [Consulte 2.2 y 2.3]

La prueba de esta afirmación es análoga a la realizada para justificar la afirmación hecha en 1.6 de la sección anterior, con las adaptaciones correspondientes al modelo  $n$ -ácatl.

Finalmente, el número total de todos los factores posibles que contiene cada uno de estos  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  monomios depende de la cantidad de coordenadas fijas que hay en cada una de las  $n$ -adas  $K = (k(1), k(2), \dots, k(n))$  siguientes:

$$\{X^K < X^B: 0 \leq k(1) < p(1), 0 \leq k(2) < p(2), \dots, 0 \leq k(n-1) < p(n-1), 0 \leq k(n) < p(n)-1\}$$

$$\text{cardinalidad: } p(1)p(2)\dots p(n) - p(1)p(2)\dots p(n-1),$$

$$\{X^K < X^{K(1)}: 0 \leq k(1) < p(1), 0 \leq k(2) < p(2), \dots, 0 \leq k(n-3) < p(n-3), 0 \leq k(n-2) < p(n-2)-1, k(n-1)=0, k(n)=p(n)-1\}$$

$$\text{cardinalidad: } p(1)p(2)\dots p(n-2) - p(1)p(2)\dots p(n-3),$$

$$\{X^K < X^{K(2)}: 0 \leq k(1) < p(1), 0 \leq k(2) < p(2), \dots, 0 \leq k(n-5) < p(n-5), 0 \leq k(n-4) < p(n-4)-1, \\ k(n-3)=k(n-1)=0, k(n-2)=p(n-2)-1, k(n)=p(n)-1\}$$

$$\text{cardinalidad: } p(1)p(2)\dots p(n-4)-p(1)p(2)\dots p(n-5), \\ \{X^K < X^{K(h)}: 0 \leq k(1) < p(1)-1, k(2)=k(4)=\dots=k(n-1)=0, k(3)=p(3)-1, k(5)=p(5)-1, \dots, \\ k(n-2)=p(n-2)-1, k(n)=p(n)-1, \text{ para } n \text{ impar}\}$$

$$\text{cardinalidad: } p(1)-1,$$

$$\{X^K < X^{K(h)}: k(1)=k(3)=\dots=k(n-1)=0, k(2)=p(2)-1, k(4)=p(4)-1, \dots, k(n)=p(n)-1, \text{ para } n \text{ par}\}$$

$$\text{cardinalidad: } 1.$$

Al sumar todas estas cardinalidades, independientemente de la paridad de  $n$ , se obtiene :  
 $p(1)[p(2)[p(3)[\dots[p(n)-1]+1]-1]\dots]+(-1)^n$ .

## SECCIÓN V.3

### CARDINALIDAD DE FRONTERAS BÁSICAS.

#### Sublema.

El  $n+1$ -ésimo número de Fibonacci  $f(n+1)$  coincide con la cardinalidad del conjunto de todas las  $n$ -adas, formadas de ceros y unos,  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  tales que  $1 \leq k_j + k_{j+1} \leq 2$ :  $1 \leq j \leq n-1$ .

#### Demostración.

Para  $n=1$  se tiene:  $k_1=0$  ó  $k_1=1$  entonces  $f(1+1)=2$ .

Para  $n=2$  se tiene  $(k_1, k_2)$ :  $\{(1, 1), (1, 0) \text{ y } (0, 1)\}$  entonces  $f(2+1)=3$ .

Último paso de inducción:  $\{K: K = (k_1, \dots, k_n)\} = \{(K: (k_1, \dots, k_{n-1}, 1)) \cup \{(K: (k_1, \dots, k_{n-2}, 1, 0))\}$ , los conjuntos del miembro derecho de esta igualdad tienen, por hipótesis de inducción, cardinalidad  $f(n)$  y  $f(n-1)$ , respectivamente, y por definición se infiere que  $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$ . **QED.**

#### Lema 1.

La cardinalidad de la frontera básica del polinomio modelo  $n$ - ácatl, está dada por el  $n$ -ésimo número de Fibonace.

#### Demostración.

Sea  $X^K$  cualquier monomio básico frontera entonces,  $k_j$  juega el papel de uno, en el sublema, si  $k_j \geq p_j - 2$ ; con esta restricción,  $k_j$  es 0 ó 1 ( $1 \leq j < n$ ), en tanto, que  $k_n$  siempre es 1. [Ver 1.9 ,4) ,5) y 6)].

#### Lema 2.

Denótese por  $B(n)$  el número de monomios básicos frontera de  $P$ , donde  $P$  es el polinomio modelo del " $n$  ciclo" entonces,  $B(n)=B(n-1)+B(n-2)$ ; más aún,  $B(n)=f(n)+f(n-2)$ .

**Demostración.**

$B(1)=1: x_1^{p(1)-2}$ ,  $B(2)=3: \{x_1^{p(1)-1}x_2^{p(2)-1}, x_1^{2p(1)-2}, x_2^{2p(2)-2}\}$ ,  
 $B(3)=4: x_1^{p(1)-1}x_2^{p(2)-1}x_3^{p(3)-1}, x_2^{p(2)-2}x_3^{2p(3)-1}, x_1^{2p(1)-1}x_3^{p(3)-2}$  y  $x_1^{p(1)-2}x_2^{2p(2)-1}$  [consulte 1.3, 1), 2) y 3)].

Último paso de inducción. Si  $X^K = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  es un monomio básico frontera de  $P$  entonces, la  $n$ -ada  $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  tiene asociada una única  $n$ -ada de ceros y unos, considerando  $k_j = 1$  cuando  $k_j \geq p_j - 2$  y  $k_j = 0$  cuando  $k_j < p_j - 2$ . Por consiguiente,  $K$  pertenece a uno, y sólo uno, de los tres casos siguientes:

Caso 1  $\{(k_1, \dots, k_{n-1}, 1)\}$ , caso 2  $\{(0, 1, k_3, \dots, k_{n-3}, 1, 0, 1)\}$  ó caso 3  $\{(1, k_2, \dots, k_{n-2}, 1, 0)\}$

El primer caso contiene a todos los monomios básicos frontera que se pueden determinar con  $n-1$  variables, estos son, por hipótesis de inducción, tantos como  $B(n-1)$ . En el caso 2 hay  $n-5$  coordenadas  $(k_3, \dots, k_{n-3})$  que satisfacen las hipótesis del sublema, en consecuencia, este caso aporta  $f(n-4)$  monomios básicos frontera; finalmente, en el tercer caso hay  $n-3$  coordenadas  $(k_2, \dots, k_{n-2})$  para aplicar el sublema, por consiguiente, este caso aporta  $f(n-2)$  monomios básicos frontera; en consecuencia,  $B(n-2) = f(n-2) + f(n-4)$ .

Por lo tanto,  $B(n) = B(n-1) + B(n-2) = [f(n-1) + f(n-3)] + [f(n-2) + f(n-4)] = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) = f(n) + f(n-2)$ . QED.

## SECCIÓN V.4

### LEMA DE DESCOMPOSICIÓN DE CICLOS.

Recordamos los siguientes conceptos del Capítulo IV:

Se dice que la combinación  $c_1X^{K(1)}dP/dx_1 + c_2X^{K(2)}dP/dx_2 + \dots + c_sX^{K(s)}dP/dx_s$  es una "combinación trivial de P" si algunos, o todos, los coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_s$  son distintos de cero y la combinación es igual al polinomio idénticamente cero.

Notación.  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  representa el s-ciclo formado por el conjunto ordenado de los s monomios:  $X^{K(1)}, X^{K(2)}, \dots, X^{K(s)}$ ; es decir, dos monomios consecutivos del ciclo, forman un eslabón de P, en consecuencia,  $X^{K(s)}$  y  $X^{K(1)}$  son monomios consecutivos.

#### Lema 3. (DESCOMPOSICIÓN DE CICLOS).

Sea  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  un s-ciclo contenido en la frontera básica de P. Entonces

- I) s es par.
- II) El s-ciclo  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  se puede expresar como la unión de, dos o cuatro, ciclos simples.
- III) El s-ciclo  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  determina una combinación trivial.

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que los n-enteros  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  son mayores que 2; adaptar esta prueba al caso en que alguno de los n-enteros sea igual a 2, se resuelve agregando a las frases: "coordenadas nulas" o "variables con potencias nulas" la restricción: no consecutivas.

I) Sea  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  un s-ciclo contenido en la frontera básica de P; para  $s=2$ , no hay nada que demostrar. Considérese entonces, a  $s>2$ , por la descripción realizada en (1), (2) y (3), de la prueba del teorema de la Sección V.1, se infiere que la diferencia que existe entre la cantidad de coordenadas nulas contenidas en  $K(i)$  y  $K(i+1)$  es una unidad. Por consiguiente, las paridades, del número de coordenadas nulas, contenidas en  $K(s), K(2), \dots, K(h)$  (donde h es par) coinciden; lo mismo ocurre con  $K(1), K(3)$  y  $K(r)$  (donde r es impar). Por lo tanto, s es par.

La demostración de las afirmaciones hechas en II) e III), se realiza por inducción sobre la suma total del número de coordenadas nulas que aportan las n-adas que definen al ciclo; aunque, para el primer paso de inducción, no es necesario apelar, explícitamente, a esta característica. El primer paso de inducción inicia con un ciclo simple, éste puede ser: un 2-ciclo ó, un cuatro ciclo simple.

Caso 1 Un 2-ciclo simple  $[K(1), K(2)]$  determina, módulo una reordenación, la combinación:  $c_1 X^l dP/dx_h + c_2 X^l dP/dx_h = c_1(p(h)X^{K(1)} + X^{K(2)}) + c_2(p(h)X^{K(1)} + X^{K(2)}) = (c_1 + c_2)(p(h)X^{K(1)} + X^{K(2)})$ , la cual, es trivial para  $c_1$  diferente de cero y  $c_2 = -c_1$ .

Caso 2. Un 4-ciclo simple:  $[K(1), K(2), K(3), K(4)]$ . Nuevamente, por ser vértices (exponentes de monomios básicos frontera) existen cuatro n-adas DE ENTEROS:  $l(1), l(2), l(3), l(4)$  y un par de sub-índices  $i$  y  $j$  que satisfacen:

$$\begin{aligned} K(1) &= l(1) + (p(i) - 1)E(i) + E(i+1), \\ K(2) &= l(2) + (p(j) - 1)E(j) + E(j+1) \\ K(3) &= l(3) - (p(i) - 1)E(i) - E(i+1) + p(i-1)E(i-1) \text{ y} \\ K(4) &= l(4) - (p(j) - 1)E(j) - E(j+1) + p(j-1)E(j-1) \end{aligned}$$

donde  $E(h)$  es el vector unitario en  $R^n$  que contiene uno en la  $h$ -ésima coordenada y ceros en las demás; estas relaciones determinan la combinación:

$$\begin{aligned} &c_1 X^{l(1)} dP/dx_i + c_2 X^{l(2)} dP/dx_j + c_3 X^{l(3)} dP/dx_i + c_4 X^{l(4)} dP/dx_j \\ &= c_1(p(i)X^{K(1)} + X^{K(2)}) + c_2(p(j)X^{K(2)} + X^{K(3)}) + c_3(p(i)X^{K(4)} + X^{K(3)}) + c_4(p(j)X^{K(1)} + X^{K(4)}) \\ &= (c_1 p(i) + c_4 p(j))X^{K(1)} + (c_1 + c_2 p(j))X^{K(2)} + (c_2 + c_3)X^{K(3)} + (c_3 p(i) + c_4)X^{K(4)} \end{aligned}$$

para que esta combinación sea trivial, se requiere que los coeficientes de los cuatro monomios se anulen; esto ocurre definiendo:

$$c_1 = cp(i), \quad c_2 = -c, \quad c_3 = c \text{ y } c_4 = -cp(j),$$

donde  $c$  es cualquier constante diferente de cero. Por consiguiente, tanto en II), como en III), se verifica el primer paso de inducción.

Último paso de inducción para II) Sea  $[K(1), K(2), K(3), \dots, K(s)]$  un ciclo de  $P$  distinto de un 2-ciclo y de un 4-ciclo simple. Supóngase inductivamente que todo ciclo de  $P$ , cuyo número total de coordenadas nulas sea menor que las que hay en  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$ , se puede expresar como la unión de dos o cuatro ciclos simples. Sin pérdida de generalidad puede asumirse que  $X^{K(2)}$  es uno de los monomios del  $s$ -ciclo que contiene el mayor número de variables con potencias nulas; entonces,  $K(1)$  y  $K(3)$ , vértices adyacentes de  $K(2)$ , poseen una coordenada nula menos que  $K(2)$ ; si  $K(1) = K(3)$  entonces,  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$  se puede descomponer como:

a)  $[K(1), K(2)] \cup [K(3), K(4), \dots, K(s)]$ .

Cuando  $K(1)$  no coincide con  $K(3)$  entonces, el cuarto vértice que sirve para formar un cuatro ciclo es  $K'$ , el cual, contiene dos coordenadas nulas menos que  $K(2)$  (la  $i$  de  $K(1)$  y la  $j$  de  $K(2), i < j$ ); en este caso, a) adopta la forma:

b)  $[K(1), K(2), K(3), K'] \cup [K(1), K', K(3), K(4), \dots, K(s)]$ .

En ambos casos, al  $s$ -ciclo de b) y al  $(s-2)$ -ciclo de a), se les puede aplicar la hipótesis de inducción y así arribar a la conclusión deseada.

Último paso de inducción III)

Las descomposiciones, descritas en a) y b), garantizan la existencia de las n-adas de enteros:  $I(1)$ ,  $I(2)$ ,  $I(3)$ ,  $I(4)$ , ...,  $I(s)$ ,  $J(3)$  y  $J(4)$ , con las cuales es posible expresar, aplicando hipótesis de inducción, las combinaciones triviales siguientes:

$$a1) c_1 X^{I(1)} dP/dx_j + c_2 X^{I(2)} dP/dx_j = 0,$$

$$a2) c_3 X^{I(3)} dP/dx_{I(3)} + c_4 X^{I(4)} dP/dx_{I(4)} + \dots + c_s X^{I(s)} dP/dx_{I(s)} = 0,$$

$$b1) c_1 X^{I(1)} dP/dx_i + c_2 X^{I(2)} dP/dx_j - c_3 X^{J(3)} dP/dx_i - c_4 X^{J(4)} dP/dx_j = 0,$$

$$b2) c_3 X^{J(3)} dP/dx_i + c_4 X^{J(4)} dP/dx_j + c_3 X^{I(3)} dP/dx_{I(3)} + c_4 X^{I(4)} dP/dx_{I(4)} + \dots + c_s X^{I(s)} dP/dx_{I(s)} = 0$$

al considerar el par de sumas:  $a1)+a2)$  y  $b1)+b2)$ , en ambos casos, se obtiene:

$$c_1 X^{I(1)} dP/dx_i + c_2 X^{I(2)} dP/dx_j + c_3 X^{I(3)} dP/dx_{I(3)} + c_4 X^{I(4)} dP/dx_{I(4)} + \dots + c_s X^{I(s)} dP/dx_{I(s)}.$$

Esta expresión resulta ser una combinación trivial para el  $s$ -ciclo  $[K(1), K(2), \dots, K(s)]$ .  
QED

## CAPÍTULO VI.

### INVARIANTES DE LOS POLINOMIOS MODELO.

Las fronteras básica y jacobiana así como las cadenas estudiadas en el capítulo anterior no son, en principio, invariantes de la singularidad bajo cambios de coordenadas, pero sí permiten, en principio, calcular varios otros parámetros del modelo que sí resultan ser invariantes bajo cambios de coordenadas. Varios de estos invariantes se pueden calcular en cada caso específico, y el cálculo del capítulo anterior puede dar lugar a algoritmos eficientes para hacerlo. Lo que parece no resultar eficiente es tratar de dar fórmulas generales para estos invariantes, ya que su valor depende mucho de la relación de orden que exista entre los exponentes del modelo, lo cual da lugar a un gran número de casos diferentes.

Entre los invariantes que estudiaremos están los siguientes:

- a) El orden de la singularidad.
- b) La dimensión  $\mu$  del álgebra de la singularidad.
- c) La mínima potencia del ideal máximo  $m(n)$  del anillo  $A(n)$  contenido en  $J$  o en algún otro ideal relacionado con  $J$ .
- d) El polinomio de Poincaré del álgebra.
- e) El orden de determinación de la singularidad.
- f) El orden de determinación  $C^f$  de la singularidad.

Los dos primeros pueden calcularse directamente de los exponentes de la singularidad. Veremos a continuación con algunos ejemplos sencillos cómo se pueden calcular los otros. Con la ayuda de estos ejemplos es posible llegar a una clasificación completa de los polinomios modelo.

## SECCIÓN VI.1.

### MÍNIMA POTENCIA DEL IDEAL MÁXIMO CONTENIDA EN EL IDEAL JACOBIANO.

La mínima potencia que admite el ideal máximo  $m(n)$  para estar contenido en  $J$  puede leerse directamente de la frontera básica del polinomio modelo del  $n$ -ciclo y del  $n$ -ácatl; sea  $g$  el máximo de los grados de todos los monomios de la frontera básica. Como al menos un monomio con este grado no es jacobiano, entonces,  $m(n)^g$  tampoco está contenido en  $J$ . Pero la potencia  $m(n)^{g+1}$  sí lo está, ya que todos los monomios de ese grado son jacobianos. Luego  $g+1$  es la mínima potencia del ideal máximo contenido en  $J$ .

Este número depende sólo en principio de los exponentes del modelo, pero no resulta sencillo dar una fórmula explícita para calcularlo. Veremos en algunos ejemplos cómo hacerlo:

**Ejemplo 1.** Los polinomios cuasihomogéneos en dos variables con singularidad aislada.

I El modelo identidad en dos variables:  $x^{p+1}+y^{q+1}$  con  $q \geq p \geq 2$ .

Ila El modelo 2-ácatl  $x^p y + y^{q+1}$  con  $q \geq p \geq 2$ .

Ilb El modelo 2-ácatl  $x^p y + y^{q+1}$  con  $p > q \geq 2$ .

III El modelo 2-ciclo  $x^p y + y^q x$  con  $q \geq p \geq 2$ .

Caso I: La cadena máxima consta sólo del monomio  $x^{p-1}y^{q-1}$ . Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$  es  $p+q-1$ .

Caso II: La cadena máxima consta de los monomios  $x^{p-2}y^q$ ,  $x^{2p-2}$ . Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$  es  $p+q-1$  en el caso Ila y  $2p-1$  en el caso Ilb.

Si se quiere, en el caso II podemos dar la fórmula general para la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$ :

$$p + \max(p, q) - 1,$$

pero algo semejante resultará inmanejable al aumentar el número de variables y las posibilidades de orden de sus exponentes.

Caso III: La cadena máxima consta de los monomios  $x^{p-1}y^{q-1}$ ,  $x^{2p-2}$ ,  $y^{2q-2}$ . Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$  es  $2q-1$ .

Si no se quiere especificar cuál de los dos exponentes es mayor se puede expresar este valor como:

$$2 \max(p, q) - 1.$$

Para los polinomios cuasihomogéneos en tres variables con singularidad aislada habrá 19 casos a considerar en base a la estructura cíclica y el orden entre los exponentes:

I El modelo identidad.

II El modelo 2-caña más un unicyclo, con 6 órdenes diferentes en los exponentes.

III. El modelo 2-ciclo más un unicyclo, con 3 órdenes diferentes en los exponentes.

IV El modelo 3-caña, con 6 órdenes diferentes en los exponentes.

V. El modelo 3-ciclo, con 3 órdenes diferentes en los exponentes.

Si bien es claro que es factible analizar todos los casos posibles (apoyándose en parte en lo hecho para los de dos variables), no vamos a desarrollar aquí todos los cálculos. En lugar de ello veremos un ejemplo con más variables:

### Ejemplo 2.

$$f(x,y,z,w,u,v) = x^5 + xy^3 + yz^5 + zw^4 + wu^2 + uv^7.$$

Este corresponde al modelo 6-ácatl, por lo que podemos aplicar los resultados de la sección V.2: El monomio básico frontera que contiene todas las variables es

$$x^4 y^2 z^4 w^3 uv^5$$

y como podemos escribir explícitamente todos los monomios básicos frontera (esto se hará con detalle en la sección VI.2), podemos decir que el máximo grado es el del monomio

$$x^3 z^9 w^2 v^{12}$$

y es igual a 26. Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J(f)$  es 27.

Cuando cambiamos el orden de los exponentes, por ejemplo:

$$g(x,y,z,w,u,v) = x^4 + xy^5 + yz^3 + zw^5 + wu^2 + uv^7,$$

entonces el monomio que contiene todas las variables es  $x^3 y^4 z^2 w^4 uv^5$  y el monomio donde se logra el máximo grado es

$$y^8 w^8 v^{12}$$

y, por lo tanto, la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J(g)$  es 29.

En el caso general, es posible dar cotas para las potencias del ideal máximo contenidas en  $J$ :

Sean  $k(1), k(2), \dots, k(h)$  los  $h = \lfloor n/2 \rfloor$  enteros más grandes del conjunto  $\{p(1), p(2), \dots, p(n)\}$  y sea  $k'$  el mayor del resto de estos  $n$  enteros. Entonces, el máximo grado de todos los monomios básicos frontera de cualquiera de los dos modelos  $n$ -ciclo o  $n$ -ácatl (definidos por los  $n$  exponentes  $p(i)$  sin importar el orden), es mayor o igual a la suma  $S = p(1) + p(2) + \dots + p(n) - (n)$  y, menor o igual a  $S^* = k' + 2(k(1) + k(2) + \dots + k(h)) - n$ .

Dependiendo del modelo, de la paridad de  $n$  y, sobre todo, del orden en que estén ubicados los exponentes puede o no alcanzarse alguna de estas dos cotas. Por ejemplo, si todos los exponentes son iguales a un entero  $p$  entonces, para ambos modelos  $n$ -ácatl y  $n$ -ciclo, el máximo grado de todos los monomios básicos frontera es la cota inferior  $S=n(p-1)$ . En cambio que si  $p(1)=k'$  y  $k(1), k(2), \dots, k(h)$  están ubicados en los exponentes  $p(i)$  donde  $i$  es par entonces, para  $n$  impar, el modelo  $n$ -ciclo alcanza la cota superior  $S^*$  y el modelo  $n$ -ácatl también alcanza este valor si alteramos el orden mediante la transposición  $p(n)$  por  $p(1)$ .

## SECCIÓN VI.2.

### MÍNIMA POTENCIA DEL IDEAL MÁXIMO CONTENIDA EN EL IDEAL $m(n)^2 J$ .

Para calcular el grado de determinación de los polinomios modelo se requiere no tanto la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$ , sino más bien las potencias mínimas que garanticen la contención en  $m(n)J$  y en  $m(n)^2 J$ . Para calcularlas en general basta rehacer el estudio de las cadenas máximas para estos ideales como se hizo en el capítulo 5 ó, aplicar directamente esos resultados. Haremos esto en los ejemplos de la sección anterior. Veremos que, salvo una excepción, esta potencia es la misma para los tres ideales.

#### Ejemplo 1.

Caso I: El modelo identidad en dos variables:  $x^{p+1}+y^{q+1}$  con  $q \geq p \geq 2$ .

El ideal  $m(2)^2 J$  está generado por los monomios:

$$x^{p+2}, x^{p+1}y, x^p y^2, x^2 y^q, xy^{q+1}, y^{q+2}.$$

Todo monomio de grado  $p+q-1$  es múltiplo de alguno de estos monomios, salvo en el caso  $p=2$ . Salvo en ese caso especial, la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$  es la misma que la contenida en  $m(2)J$  y en  $m(2)^2 J$ , pues  $m(2)^{p+q-2}$  no está contenido ni siquiera en  $J$  que es mayor de los tres.

En el caso especial de que  $p=2$ , la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$  o en  $m(2)J$  es  $p+q-1$ , pero la contenida en  $m(2)^2 J$  es  $p+q$ .

Caso II: El modelo 2-ácatl  $x^p y + y^{q+1}$ .

El ideal  $m(2)^2 J$  está generado por:

$$x^{p+1}y, x^p y^2, x^{p-1}y^3, x^{p+2} + (q+1)x^2 y^q, xy^{q+1}, y^{q+2},$$

ya que  $x^{p+1}y$ ,  $x^p y^2$  ya aparecen al principio de la lista.

En el caso IIa ( $q \geq p \geq 2$ ), *salvo en el caso especial  $p=2$* , todo monomio de grado  $p+q-1$  está en este ideal:

$$x^{p+q-1} = x^{p+2+q-3} = (x^{p+2} + (q+1)x^2 y^q) x^{q-3} - (q+1)x^{q-1} y^q,$$

desde  $x^{p+q}y$  hasta  $x^{p+1}y^{q-2}$  son múltiplos de  $x^{p+1}y$ ,

$$x^p y^{q-1} \text{ es múltiplo de } x^p y^2,$$

$$x^{p-1}y^q \text{ es múltiplo de } x^{p-1}y^3,$$

$$\text{desde } x^{p-2}y^{q+1} \text{ hasta } xy^{q+p-2} \text{ son múltiplos de } xy^{q+1},$$

$$y^{q+p-1} \text{ es múltiplo de } y^{q+2}.$$

Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $m(2)^2 J$  es  $p+q-1$ , ya que la potencia  $p+q-2$  no puede estarlo, pues no está contenido ni en  $J$  que contiene a  $m(2)^2 J$ .

En el caso especial  $p=2$  la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$ , y en  $m(2)J$  es  $p+q-1=q+1$ , pero la mínima contenida en  $m(2)^2 J$  es  $p+q=q+2$ , según se verifica directamente de un cálculo semejante al precedente.

En el caso IIb ( $p>q\geq 2$ ), si  $q>2$  todo monomio de grado  $2p-1$  está en  $m(2)^2 J$ :

$$x^{2p-1} = x^{p+2+p-3} = (x^{p+2} + (q+1)x^2y^q)x^{p-3} - (q+1)x^{p-1}y^q,$$

$$\text{desde } x^{2p-2}y \text{ hasta } x^{p+1}y^{q-2} \text{ son múltiplos de } x^{p+1}y,$$

$$x^p y^{p-1} \text{ es múltiplo de } x^p y^2,$$

$$x^{p-1}y^p \text{ es múltiplo de } x^{p-1}y^3,$$

$$\text{desde } x^{p-2}y^{p+1} \text{ hasta } xy^{2p-2} \text{ son múltiplos de } xy^{q+1},$$

$$y^{2p-1} \text{ es múltiplo de } y^{q+2}.$$

Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $m(2)^2 J$  es  $2p-1$ , ya que la potencia  $2p-2$  no puede estarlo, pues no está contenido ni en  $J$  que contiene a  $m(2)^2 J$ .

En el caso especial  $q=2$  la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$ , y en  $m(2)J$  es  $2p-1$ , pero la mínima contenida en  $m(2)^2 J$  es  $2p$ , según se verifica directamente de un cálculo semejante al precedente.

Caso III: El modelo 2-ciclo  $x^p y + y^q x$  con  $q \geq p \geq 2$ .

El ideal  $m(2)^2 J$  está generado por:

$$x^{p+1}y, x^2y^q, x^p y^2, xy^{q+1}, px^{p-1}y^3 + y^{q+2}x^{p+2} + qx^3y^{q-1}$$

(ya que  $px^{p+1}y + x^2y^q$ ,  $x^{p+1}y + qx^2y^q$  pertenecen a  $m(2)^2 J$  y pueden ser substituidos por  $x^{p+1}y$ ,  $x^2y^q$  y por simetría podemos substituir por  $x^p y^2$ ,  $xy^{q+1}$  los dos binomios que los incluyen).

Salvo en el caso especial  $p=q=2$ , todo monomio de grado  $2q-1$  está en este ideal:

$$x^{2q-1} = x^{p+2+(q-p)+q-3} = (x^{p+2} + qx^3y^{q-1})x^{(q-p)+q-3} - q(x^{2(q-p)}y^{q-3})x^p y^2,$$

desde  $x^{2q-2}y$  hasta  $x^{p+1}y^{2q-p-2}$  son múltiplos de  $x^{p+1}y$ ,

$$x^p y^{2q-p-1} \text{ es múltiplo de } x^p y^2,$$

$$x^{p-1} y^{2q-p} \text{ es múltiplo de } x^2 y^q,$$

desde  $x^{p-2}y^{2q-p+1}$  hasta  $xy^{2q-2}$  son múltiplos de  $xy^{q+1}$ ,

$$y^{2q-1} = y^{q+2+q-3} = (y^{q+2} + p x^{p-1}y^3) y^{q-3} - p (x^{p-3}) x^2 y^q,$$

Luego la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $m(2)^2 J$  es  $2q-1$ , ya que la potencia  $2q-2$  no puede estarlo, pues no está contenido ni en  $J$  que contiene a  $m(2)^2 J$ .

En el caso especial  $p=q=2$  la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $J$ , y en  $m(2)J$  es  $2q-1=3$ , pero la mínima contenida en  $m(2)^2 J$  es  $2q=4$ , según se verifica directamente de un cálculo semejante al precedente.

## Ejemplo 2.

$$f(x,y,z,w,u,v) = x^5 + xy^3 + yz^5 + zw^4 + wu^2 + uv^7.$$

Ahora queremos conocer la mínima potencia que admite el ideal máximo  $m(6)$  para estar contenido en  $m(6)^2 J$

Para esto es necesario describir con más cuidado las fronteras básica y jacobiana de  $f$  en base a los resultados de la sección V.2:

El cuasigrado de  $f$  es 150 con los pesos (30, 40, 22, 32, 59, 13).

Cualquier base del álgebra de  $f$  contiene 3836 elementos básicos (proposición V.2) proponemos la formada con todos los factores posibles de los cuatro monomios siguientes:

$$y^2 w^3 v^6, x^4 y w^3 v^6, x^4 y^2 z^4 w^2 v^6, x^4 y^2 z^4 w^3 u v^5.$$

Exponentes de los trece monomios básicos frontera de  $f$ :

$$(4,2,4,3,1,5), (4,2,4,2,0,12), (4,2,3,0,3,5), (4,1,0,7,1,5), (3,0,9,3,1,5), \\ (0,5,4,3,1,5), (4,1,0,6,0,12), (3,0,9,2,0,12), (3,0,8,0,3,5), \\ (0,5,4,2,0,12), (0,5,3,0,3,5), (0,4,0,7,1,5), (0,4,0,6,0,12).$$

Exponentes de los once monomios jacobianos frontera de  $f$ :

$$(5,0,0,0,0,0), (0,6,0,0,0,0), (0,0,10,0,0,0), (0,0,0,8,0,0), (0,0,0,0,4,0), (0,0,0,0,0,13), \\ (1,3,0,0,0,0), (0,1,5,0,0,0), (0,0,1,4,0,0), (0,0,0,1,2,0), (0,0,0,0,1,6).$$

La primera de esta lista nos proporciona explícitamente el grado máximo de los monomios frontera para:

- (1) una variable es 12
- (2) dos variables es 21
- (3) tres variables es 24
- (4) cuatro variables es 26
- (5) cinco variables es 24
- (6) seis variables es 19

Mas aun, también podemos verificar una propiedad importante para los monomios básicos de f:

- (7) la potencia mas grande contenida en las variables x, y, z, w, u, v, que admite un monomio básico es respectivamente 4, 5, 9, 7, 3, 7,

Así mismo, verificamos que el grado máximo de todos los monomios básicos frontera de f es 26 y que la potencia mínima del ideal máximo contenido en J (f) es 27.

Entonces,  $m(6)^2J(f)$  contiene a:

(a)  $x^7, y^8, z^{12}, w^{10}, u^6, v^{15}$ , es decir, a cualquier monomio de una variable con exponente mayor igual que 15.

(b) todos los monomios de grado 22 en dos variables; basta sustituir en la expresión:

$$(9+j)+12-(j-1)=9-(k-1)+(12+k)=22: 1 \leq j \leq 13, 1 \leq k \leq 10$$

al 9 y al 12 por cualquier otro par de exponentes, menos una unidad, de los monomios jacobianos:

$$(b.1) \quad x^5, y^6, z^{10}, w^8, u^4, v^{13}$$

y considerando a los monomios de  $m(6)^2J(f)$  siguientes:

$$(b.2) \quad x^3y^3, x^2y^4, xy^5, y^3z^5, y^2z^6, yz^7, z^3w^4, z^2w^5, zw^6, w^3u^2, w^2u^3, wu^4, u^3v^6, u^2v^7, uv^8$$

La lista de monomios básicos de f, en dos variables, que al agregar una unidad (a uno de los dos exponentes) se convierte en elemento de  $m(6)^2J(f)$  es

$$x^4y^2, y^5z^4, z^9w^3, w^7u, u^3v^5$$

(c) Todos los monomios de tres variables de grado 25.

Por el inciso 3 y el inciso 7 únicamente tenemos que ocuparnos del monomio  $x^4, z^9, v^{12}$ , el cual forma un eslabón con el monomio jacobiano  $y^3, z^9, v^{12}$  este ultimo múltiplo de  $y^3, z^5$

(d) Todos los monomios con cuatro variables de grado más grande que 26, el grado del monomio básico frontera  $x^3z^3w^2v^{12}$ .

(e) Todos los monomios de cinco variables de grado mayor que el monomio básico frontera  $x^4y^2z^4w^2v^{12}$ .

(f) Cualquier monomio de grado 20 con todas las variables pues  $x^4y^2z^4w^3uv^5$  tiene grado 19.

Conclusión:  $m(6)^{27}$  está contenido en el ideal  $m(6)^2J(f)$ .

## SECCIÓN VI.3.

### GRADO DE DETERMINACIÓN $C^\infty$ .

A partir de los cálculos anteriores, el Teorema de Mather nos permite encontrar el grado de determinación de los polinomios con singularidad aislada.:

#### **Teorema (Mather).**

Sea  $f: R^n \rightarrow R$  una función singular en 0: Entonces

- a) Si  $m(n)^{k+1}$  está contenido en  $m(n)^2 J$ , entonces  $f$  es  $k$ -determinada.
- b) Si  $f$  es  $k$ -determinada, entonces  $m(n)^{k+1}$  está contenido en  $m(n)J$ .

Esto se aplica a los ejemplos anteriores:

#### **Ejemplo 1:**

Caso I. El modelo identidad en dos variables:  $x^{p+1} + y^{q+1}$  con  $q \geq p \geq 2$ .

Salvo en el caso en que  $p=2$ ,  $m(2)^{p+q-1}$  está contenido en  $m(2)^2 J$ , entonces la función es  $(p+q-2)$ -determinada. Como  $m(2)^{p+q-2}$  no está contenido en  $m(2)J$ , no es  $(p+q-3)$ -determinada.

En el caso especial  $p=2$   $m(2)^{q+2}$  está contenido en  $m(2)^2 J$  y  $f$  es  $(q+1)$ -determinada, que es lo óptimo porque  $x^3$  no es equivalente a  $x^3 + y^{q+1}$ .

Caso IIa,  $x^p y + y^{q+1}$  con  $q \geq p \geq 2$ .

III El modelo 2-ciclo  $x^p y + y^q x$  con  $q \geq p \geq 2$ .

Salvo en el caso especial  $p=2$ ,  $m(2)^{p+q-1}$  está contenido en  $m(2)^2 J$ , luego la función es  $(p+q-2)$ -determinada. Como  $m(2)^{p+q-2}$  no está contenido en  $m(2)J$ , no es  $(p+q-3)$ -determinada.

En el caso especial  $p=2$  la función es  $(q+1)$ -determinada ya que la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $m(2)^2 J$ , es  $q+2$ , pero claramente no queda determinada por su  $q$ -jet que es de grado 3.

Caso IIb,  $x^p y + y^{q+1}$  con  $p > q \geq 2$ .

Salvo en el caso especial  $q=2$ ,  $m(2)^{2p-1}$  está contenido en  $m(2)^2 J$ , luego la función es  $(2p-2)$ -determinada. Como  $m(2)^{2p-2}$  no está contenido en  $m(2)J$ , no es  $(2p-3)$ -determinada.

En el caso especial  $q=2$  la función es  $(2p-1)$ -determinada ya que la mínima potencia del ideal máximo contenida en  $m(2)^2 J$ , es  $2p$ , pero no es  $(2p-2)$ -determinada.

Caso III: Salvo en el caso especial  $q=2$ ,  $m(2)^{2q-1}$  está contenido en  $m(2)^2 J$ , por lo tanto la función es  $(2q-2)$ -determinada. Como  $m(2)^{2q-2}$  no está contenido en  $m(2)J$ , no es  $(2q-3)$ -determinada.

En el caso especial  $p=q=2$  la función es 3-determinada, pero no es 2-determinada.

**Ejemplo 2:** La función

$$f(x,y,z,w,u,v) = x^5 + xy^3 + yz^5 + zw^4 + wu^2 + uv^7$$

es 26-determinada, pero no 25-determinada.

## SECCIÓN VI.4

### GRADO DE DETERMINACIÓN $C^r$ .

Es posible también estimar el grado de determinación  $C^r$  utilizando un resultado de [B-LdM] que reformularemos de la siguiente forma para adecuarlo a nuestra situación particular:

**Teorema:**

Sea  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  una función quasihomogénea con singularidad aislada en 0 de cuasigrado  $d$  y pesos  $d(1), \dots, d(n)$ . Sean  $M = \max(d(1), \dots, d(n))$  y  $m = \min(d(1), \dots, d(n))$ . Entonces para toda función  $R$  de clase  $C^\infty$  de filtración mayor que  $d+rM-m$ , se tiene que la función  $f+R$  es  $C^r$  equivalente a  $f$ .

Veamos como utilizar esto para encontrar el grado de determinación  $C^r$  en los casos que hemos estudiado:

Caso I: En este caso  $d=(p+1)(q+1)$ ,  $M=q+1$ ,  $m=p+1$ . Supongamos que agregamos a  $f$  una función  $R(x,y)$  de orden  $g$ . Puede suponerse que  $R(0,y)=0$  ya que  $R(0,y)$  puede eliminarse mediante un cambio de variables  $C^\infty$  en la variable  $y$  únicamente. El monomio de cuasigrado menor de  $R$  será entonces  $xy^{g-1}$  que tiene filtración  $(p+1)(g-1)+q+1$ . Por lo tanto para garantizar que  $R$  tenga filtración mayor que  $d+rM-m=(q+1)(p+1+r)-(p+1)$  necesitamos que

$$g > (q+1)(p+r)/(p+1).$$

Luego la función es  $[(q+1)(p+r)/(p+1)]-C^r$ -determinada, donde  $[s]$  denota la parte entera del real  $s$ .

En particular, se tiene que la función es  $(q+1)-C^1$ -determinada. Obsérvese que este resultado es óptimo, ya que  $(q+1)$  es el grado de la función.

Más generalmente, en [B-LdM] se demuestra que todo polinomio modelo correspondiente a la función identidad (es decir toda singularidad de Pham, ver sección II.1, ejemplo 1) es  $C^1$ -determinada en su grado.

Caso IIa En este caso  $d=p(q+1)$ ,  $M=q$ ,  $m=p$ . Supongamos que agregamos a  $f$  una función  $R(x,y)$  de orden  $g$ . Puede suponerse que  $R(0,y)=0$  ya que  $R(0,y)$  puede eliminarse mediante un cambio de variables  $C^\infty$  en la variable  $y$  únicamente. El monomio de quasigrado menor de  $R$  será entonces  $xy^{g-1}$  que tiene filtración  $q+(g-1)p$ . Por lo tanto para garantizar que  $R$  tenga filtración mayor que  $d+rM-m=(p+r)q$  necesitamos que

$$g > 1 + q(p+r-1)/p.$$

Luego la función es  $[1+q(p+r-1)/p]-C^f$ - determinada.

En este caso también se tiene el resultado óptimo de que la función es  $(q+1)-C^1$ -determinada.

Caso IIb En este caso  $d=p(q+1)$ ,  $M=p$ ,  $m=q$ . Supongamos que agregamos a  $f$  una función  $R(x,y)$  de orden  $g$ . El monomio de quasigrado menor de  $R$  será entonces  $x^g$  que tiene filtración  $gq$  (y que no puede en este caso eliminarse mediante un cambio de variables). Por lo tanto, para garantizar que  $R$  tenga filtración mayor que  $d+rM-m=(p+q+r+1)q$  necesitamos que

$$g > -1 + p(q+r+1)/q.$$

Luego la función es  $[-1+p(q+r+1)/q]-C^f$ - determinada.

En este caso no se tiene el resultado óptimo, es decir, que la función sea en general  $(p+1)-C^1$ -determinada. Por ejemplo,  $x^9y+y^3$  no es 10-determinada ya que  $x^9y+y^3+x^{11}$  no es  $C^1$ -equivalente a ella porque las dimensiones de sus álgebras son diferentes.

Caso III En este caso  $d=pq-1$ ,  $M=q-1$ ,  $m=p-1$ . Supongamos que agregamos a  $f$  una función  $R(x,y)$  de orden  $g$ . El monomio de quasigrado menor de  $R$  será entonces  $y^g$  que tiene filtración  $gq$  (y que no puede tampoco eliminarse mediante un cambio de variables). Por lo tanto, para garantizar que  $R$  tenga filtración mayor que  $d+rM-m=(p+r)(q-1)$  necesitamos que

$$g > (p+r)(q-1)/(p-1).$$

Luego la función es  $[(p+r)(q-1)/(p-1)]-C^f$ - determinada.

En este caso tampoco se tiene el resultado óptimo de que la función sea en general  $(q+1)-C^1$ -determinada. Por ejemplo,  $x^3y+xy^9$  no es 10-determinada ya que  $x^3y+xy^9+y^{11}$  no es  $C^1$ -equivalente a ella porque la dimensión de sus álgebras es diferente (ver [RT]).

## SECCIÓN VI.5.

### SOBRE LA CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES DE LOS POLINOMIOS MODELO.

Los polinomios modelo homogéneos son difíciles de clasificar, porque hay pocos invariantes que en general permitan demostrar que dos polinomios homogéneos no son equivalentes. Lo mismo sucede si el polinomio modelo es homogéneo respecto a un subconjunto de variables. El caso más factible es el de los polinomios modelo con todos los pesos diferentes.

Esto lo podemos ver en los casos estudiados anteriormente, donde con excepción de los casos del ejemplo 3 de la sección II.2, lo proponemos como:

#### Teorema.

*Si dos polinomios modelo en dos variables de orden  $\geq 3$  no homogéneos son equivalentes, entonces son iguales, con la sola excepción de los pares de polinomios equivalentes:*

$$\begin{aligned} \text{2-ciclo: } & x^2y + xy^{q+1} \\ \text{2-Ácatl: } & x^2y + y^{2q+1} \end{aligned}$$

#### Demostración:

Dentro de cada caso I,IIa, IIb y III los distintos polinomios modelo son no equivalentes, como se ve por simple inspección de los invariantes que hemos calculado (incluyendo aquí también los homogéneos). Si  $P(x, y)$  es el polinomio modelo entonces el menor de los dos exponentes determina el orden del polinomio (denotado como  $O(P)$ ), y con el otro exponente y la frontera básica se determinan la dimensión del álgebra de  $P$  (denotada como  $\text{Dim}(P)$ ) así como la  $K$  mínima del ideal máximo contenido en el ideal jacobiano del polinomio.

Caso I.  $\text{Id}(x, y) = x^{p+1} + y^{q+1}$ :  $O(\text{Id})=p+1$ ,  $\text{dim}(\text{Id})=pq$  y potencia mínima  $p+q-1$ .

Caso IIa  $Q(x, y) = x^p y + y^{q+1}$ :  $O(Q)=p+1$ ,  $\text{dim}(Q)=(p-1)(q+1)+1$  y potencia mínima  $p+q-1$ .

Caso IIb  $Q'(x, y) = yx^q + y^{p+1}$ :  $O(Q')=q+1$ ,  $\text{dim}(Q')=(q-1)(p+1)+1$  y potencia mínima  $2p-1$ .

Caso III:  $P(x, y) = yx^p + xy^q$ :  $O(P)=p+1$ ,  $\text{dim}(P)=pq$  y potencia mínima  $2q-1$ .

Basta ahora ver si puede haber polinomios equivalentes en dos casos distintos:

Casos I y IIa: Supongamos que  $Id$  y  $Q(x,y) = x^p y + y^{q'+1}$  con  $q > p$   $q' > p'$ , son equivalentes. Entonces,  $O(Id) = p+1$  y  $O(Q) = p'+1$ , luego  $p = p'$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Id)$  es  $p+q-1$  y en el ideal  $J(Q)$  es  $p+q'-1$ . Luego  $q' = q$ . Ahora bien,  $\dim(Id) = pq$  y  $\dim(Q) = (p-1)(q+1) + 1 = pq + (p-q)$  y por lo tanto  $p = q = p' = q'$  estaríamos en el caso homogéneo.

Casos I y IIb: Supongamos que  $Id(x,y)$  y  $Q'(x,y) = x^{q'} y + y^{p'+1}$  con  $q' > p'$ , son equivalentes. Entonces,  $O(Id) = p+1$  y  $O(Q') = p'+1$ , luego  $p = p'$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Id)$  es  $p+q-1 = p'+q-1$  y en el ideal  $J(Q')$  es  $2q'-1$ ; en consecuencia,  

$$p = 2q' - q \quad (*)$$

Ahora,  $\dim(Id) = pq$  y  $\dim(Q') = (p'+1)(q'-1) + 1 = p'q' + (q'-p) = pq' + (q'-p)$  Por (\*) obtenemos  $\dim(Q') = pq' + (q'-q')$ ; luego, al igualar ambas dimensiones concluimos que  $pq = pq' + (q'-q')$  o equivalentemente  $p(q-q') = q-q'$ . Esta igualdad sólo es posible si  $p=1$  (orden 2) o bien, cuando  $q=q'$  que junto con (\*) implicaría el caso homogéneo. (Se verifica fácilmente que  $x^p y + y^2$ , es equivalente a  $x^{2p} + y^2$  al separar las variables).

Casos I y III. Supongamos que  $Id$  y  $P(x,y) = x^p y + xy^{q'}$ , con  $q' > p'$ , son equivalentes. Entonces,  $O(Id) = p+1$  y  $O(P) = p'+1$  luego  $p = p'$ ; además,  $\dim(Id) = pq$  y  $\dim(P) = p'q'$ ; en consecuencia,  $q' = q$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Id)$  es  $p+q-1$  y en  $J(P)$  es  $2q'-1$ ; luego  $p = q'$  y estaríamos en el caso homogéneo.

Casos IIa y IIb. Supongamos que  $Q$  y  $Q'(x,y) = yx^{q'} + y^{p'+1}$ , con  $q > p, q' > p'$ , son equivalentes. Entonces  $O(Q) = p+1$  y  $O(Q') = p'+1$  luego  $p = p'$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Q)$  es  $p+q-1$ , y en  $J(Q')$  es  $2q'-1$ ; luego

$$p = 2q' - q \quad (*)$$

Ahora,  $\dim(Q) = pq + p - q$  y  $\dim(Q') = p'q' + q' - p' = pq' + q' - p$  que al igualarlas obtenemos  $p(q'-q) = 2p + q - q'$  después de sustituir  $2p$  como en \* se obtiene  $p(q'-q) = 3(q'-q)$  lo cual es sólo posible si  $q' = q$  (caso homogéneo) o, si  $p=3$  estamos en la situación del

Ejemplo:  $Q(x,y) = x^3 y + y^{2q-2}$ ,  $Q'(x,y) = x^q y + y^4$  En estos casos los tres invariantes que hemos usado en esta sección son los mismos para  $Q$  y para  $Q'$ . Sin embargo, no son equivalentes, porque la derivada en el origen de una equivalencia sería una equivalencia lineal entre los términos de grado 4. Pero las formas de grado 4  $x^3 y$ ,  $y^4$  no son linealmente equivalentes. (De hecho, este argumento demuestra que  $Q$ ,  $Q'$  no son  $C^1$  equivalentes).

Veremos en la sección siguiente como distinguirlos mediante un invariante general.

Casos IIa y III. Supongamos que  $Q(x,y)$  y  $P(x,y) = x^p y + xy^{q'}$ , con,  $q > p, q' > p'$ , son equivalentes. Entonces,  $O(Q) = p+1$  y  $O(P) = p'+1$  luego  $p = p'$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Q)$  es  $p+q-1$ , y la de  $J(P)$  es  $2q'-1$  luego  $q = 2q' - p'$ . Al igualar las dimensiones:  $\dim(Q) = pq + p - q = p'(2q' - p') + 2p' - 2q'$  y  $\dim(P) = p'q'$ , se obtiene la igualdad

$$p'(q' - p') = 2(p' - q')$$

la cual es sólo posible si  $p'=q'$  (caso homogéneo), o bien, si  $p'=2$  estamos en la situación del ejemplo 3 de la sección II.2, que es la excepción considerada en el teorema.

Casos IIb y III. Supongamos que  $Q'(x, y)=yx^q +xy^p$  y  $P(x,y)= x^{p'}y+xy^{q'}$ , con  $q>p, q'>p'$ , son equivalentes. Entonces,  $O(Q')=p+1$  y  $O(P)=p'+1$  luego  $p=p'$ . La mínima potencia del ideal máximo contenido en el ideal  $J(Q')$  es  $2q-1$  y en  $J(P)$  es  $2q'-1$ ; luego  $q=q'$ . Al igualar las dimensiones:  $\dim(Q')=1+(q-1)(p+1)=pq+q-p$  y  $\dim(P)=p'q'$ , se obtiene  $pq+q-p=pq$  que sólo es posible si  $p=q$  (caso homogéneo).

Con esto queda demostrado el teorema.

## SECCIÓN VI.6.

### EL POLINOMIO DE POINCARÉ.

En [A] el estudio de los polinomios cuasihomogéneos con singularidad aislada gira en torno al cálculo del polinomio de Poincaré, definido como aquel polinomio en  $t$  con coeficiente de  $t^i$  igual al número de monomios básicos del álgebra de la singularidad de cuasigrado  $i$ . El polinomio de Poincaré depende únicamente de los pesos y cuasigrado del polinomio.

A pesar de la importancia de este polinomio, no es, en principio, un invariante de la singularidad, ya que al cambiar de coordenadas de manera arbitraria no se garantiza que la función siga siendo cuasihomogénea, o de serlo, que tenga los mismo pesos. (Pero, obsérvese que en el caso de dos variables hemos visto que los exponentes, y por lo tanto los pesos y el cuasigrado, son invariantes).

Vamos a considerar aquí el polinomio de Poincaré de la singularidad respecto a la filtración del anillo de funciones dada por el grado usual de los monomios. En este caso, lo definiremos para cualquier singularidad aislada como el polinomio, con coeficiente de  $t^i$  igual a la dimensión del cociente

$$c_i = \dim(m(n)^i + J) / (m(n)^{i+1} + J)$$

Para distinguirlo del utilizado en [A] lo denominaremos el polinomio homogéneo de Poincaré de la singularidad. Para una singularidad homogénea ambos polinomios coinciden si damos peso 1 a cada variable.

Por ser este número un invariante del álgebra de la singularidad, es inmediato que es un invariante de la singularidad bajo cambios de coordenadas.

Este invariante contiene a varios de los que hemos estudiado anteriormente:

1) El orden de la singularidad puede leerse a partir de los términos de grado más pequeño. En efecto, si la singularidad tiene orden  $a$ , entonces sus parciales son de orden  $a-1$  y  $J$  está contenido en  $m(n)^{a-1}$ . Luego, para  $i < a-1$ ,  $c_i$  es igual a la dimensión del cociente  $m(n)^i / (m(n)^{i+1})$ , que es independiente de la singularidad, pero es menor que esta dimensión si  $i$  es por lo menos  $a-1$ .

2) La mínima potencia del ideal máximo contenido en  $J$  es igual al grado de este polinomio más 1, ya que si  $m(n)^i$  está contenido en  $J$  el cociente en la definición de  $c_i$  es  $J/J$  de dimensión 0.

3) La dimensión del álgebra es la suma de todos los coeficientes  $c_i$ , es decir, el valor del polinomio evaluado en  $t=1$ .

Pero el polinomio homogéneo de Poincaré contiene más información. Para ilustrar esto veremos que permite distinguir los polinomios modelo del ejemplo de la sección anterior, los cuales tienen los mismos tres invariantes anteriores:

Ejemplo:  $P(x,y) = x^3y + y^{2a-2}$ ,  $Q(x,y) = x^ay + y^4$

En el caso de P, una base para el álgebra está dada por los monomios

$$1, y, \dots, y^{2a-3}, x, xy, \dots, xy^{2a-3}, x^2.$$

Por lo tanto:

$m(2)^i$  está contenido en J si  $i > 2a-2$ ; luego  $c_i = 0$  para esos valores de i.

Al ideal  $m(2)^{2a-2}$  le falta el generador  $xy^{2a-3}$  para estar contenido en J; luego  $c_{2a-2} = 1$ .

Ahora para  $i = 2a-3, \dots, 3$ , se tiene que al ideal  $m(2)^i$  le faltan, adicionalmente, el par de generadores  $y^i, xy^{i-1}$  para estar contenido en J luego  $c_i = 2$  para esos valores de i. (obsérvese  $x^4, x^3$  aunque no son jacobianos, ya han sido considerados porque son congruentes módulo J con múltiplos de  $xy^{2a-3}, y^{2a-3}$ , respectivamente, y ya no es necesario agregarlos).

Al ideal  $m(2)^2$  le faltan, adicionalmente, la terna de generadores  $y^2, xy, x^2$  para estar contenido en J; luego  $c_2 = 3$ .

Al ideal  $m(2)$  le faltan, adicionalmente, el par de generadores  $y, x$  para estar contenido en J; luego  $c_1 = 2$ .

Al ideal  $m(2)^0 = A(2)$  le falta, adicionalmente, el generador 1 para estar contenido en J; luego  $c_0 = 1$ .

Por lo tanto el polinomio homogéneo de Poincaré de P es

$$1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 + \dots + 2t^{2a-3} + t^{2a-2}.$$

En el caso de Q, una base para el álgebra está dada por los monomios

$$1, x, \dots, x^{2a-2}, y, xy, \dots, x^{a-2}y, y^2, xy^2, \dots, x^{a-2}y^2.$$

Por lo tanto:

$m(2)^i$  está contenido en J si  $i > 2a-2$ ; luego  $c_i = 0$  para esos valores de i.

Al ideal  $m(2)^{2a-2}$  le falta el generador  $x^{2a-2}$  para estar contenido en J; luego  $c_{2a-2} = 1$ .

Para  $i = 2a-3, \dots, a+1$ , se tiene que al ideal  $m(2)^i$  le falta, adicionalmente, el generador  $x^i$  para estar contenido en J; luego  $c_i = 1$  para esos valores de i.

Al ideal  $m(2)^a$  le faltan, adicionalmente, el par de generadores  $x^a, x^{a-1}y$  para estar contenido en  $J$ ; luego  $c_a = 2$ .

Ahora para  $i=a-1, \dots, 2$ , se tiene que al ideal  $m(2)^i$  le faltan, adicionalmente la terna de generadores,  $x^i, x^{a-1}y, x^{a-2}y^2$  para estar contenido en  $J$ ; luego  $c_i = 3$  para esos valores de  $i$ .

Al ideal  $m(2)$  le faltan adicionalmente el par de generadores  $x, y$  para estar contenido en  $J$ ; luego,  $c_1 = 2$ .

Al ideal  $m(2)^0 = A(2)$  le falta, adicionalmente, el generador  $1$  para estar contenido en  $J$ ; luego  $c_0 = 1$ .

Por lo tanto el polinomio homogéneo de Poincaré de  $Q$  es

$$1 + 2t + 3t^2 + 3t^3 + \dots + 3t^{a-1} + 2t^a + t^{a+1} + \dots + t^{2a-2}.$$

Con lo cual el polinomio homogéneo de Poincaré permite demostrar que  $P$  y  $Q$  no son equivalentes.

Si quisiéramos especificar un número que los distinguiera bastaría con tomar el invariante

$$\dim(m(2)^{2a-3} + J) / J$$

que para  $P$  vale 3 (faltan los generadores  $y^{2a-2}, y^{2a-3}, xy^{2a-4}$ ) y para  $Q$  vale 2 (faltan los generadores  $x^{2a-2}, x^{2a-3}$ ).

Como en la sección VI.2, podrían considerarse también los invariantes

$$c_{i,j} = \dim(m(n)^i + m(n)^j J) / (m(n)^{i+1} + m(n)^j J)$$

(que pueden dar información adicional, como se vió en los casos especiales considerados en esa sección) e integrarlos todos en un polinomio de dos variables adecuado.

## SECCIÓN VI.7.

### SINGULARIDADES QUE SE OBTIENEN AGREGANDO UN MONOMIO A UN POLINOMIO MODELO.

La misma técnica se puede aplicar al estudio de otras singularidades que se obtiene al agregar un monomio a un polinomio modelo, viendo cómo se alteran las fronteras básica y jacobiana.

Veamos algunos ejemplos:

a) El polinomio modelo identidad en tres variables (con exponentes: 3, 4 y 5) determina un álgebra cociente de dimensión  $24=2 \cdot 3 \cdot 4$  y su frontera básica consta únicamente del monomio  $x^2 y^2 z^3$ ; en tanto, que su frontera jacobiana está formada por los tres monomios:  $x^2, y^3, z^4$ .

b) Sea  $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^5 + txyz$ . Entonces, la frontera básica que determina este polinomio está contenida en la cadena maximal definida por las combinaciones:  $xdf/dx, ydf/dy, zdf/dz$ ; la cual, contiene a los cuatro monomios del polinomio  $f(x, y, z)$ .

La frontera jacobiana de  $f$  contiene a los monomios:

$$x^4, y^5, z^6, x^2 y, x^2 z, y^2 z, xz^2, yz^2.$$

En efecto, la trayectoria que inicia en  $yx^2$  y concluye en  $x^2 y^2 z^2$  pasando por los monomios  $xz^4$  y  $y^3 z^3$  en una combinación de  $xdf/dz, z^3 df/y$  y  $y^2 z^2 df/dx$ , nos permite usar el criterio de las unidades para concluir que  $x^2$  y es jacobiano. Análogamente, las trayectorias y las combinaciones siguientes (ambas entre llaves y las primeras entre corchetes, escribimos  $f_x$  en vez de  $df/dx$ ), justifican la conformación de la frontera jacobiana:

$$\begin{aligned} & \{[x^2 y, xy^3, y^2 z^4, x^2 y z^3] x f_y, y^2 f_z, yz^3 f_x\}, \\ & \{[xy^2, yz^4, x^2 z^3, xy^3 z^2] y f_z, z^3 f_x, xz^2 f_y\}, \\ & \{[xz^2, y^3 z, x^2 y^2, xyz^4] z f_y, y^2 f_x, xy f_z\}, \\ & \{[y^2 z, x^2 y] y f_x\}, \\ & \{[yz^2, x^2 z] z f_x\}, \\ & \{[x^4, x^2 yz] x^2 f_x\}, \\ & \{[y^5, xy^2 z] y^2 f_y\}, \\ & \{[z^6, xyz^2] z^2 f_z\} \end{aligned}$$

La dimensión del álgebra cociente que determina el polinomio  $f$  es 11. Una base de monomios consta de los siete monomios aislados:  $\{1, x, y, y^2, z, z^2, z^3\}$ , tres monomios de las cadenas elementales:  $\{x^2, yz\}, \{y^3, xz\}, \{z^4, xy\}$  y un monomio de la frontera básica.

**Observación.** Con estos mismos argumentos se puede probar que el polinomio  $f(x, y, z) = x^{1+p} + y^{1+q} + z^{1+r} + xyz$  genera un álgebra cociente de dimensión  $p+q+r+2$ , con la frontera básica:  $\{x^{1+p}, y^{1+q}, z^{1+r}, xyz\}$  y la frontera jacobiana:  $\{x^{2+p}, y^{2+q}, z^{2+r}, x^2 y, x^2 z, y^2 z, xz^2, y^2 z, yz^2\}$

c) Sea  $g(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^5 + xy^2z^3$ , aquí también los cuatro sumandos del polinomio  $g$  forman la frontera básica, basta considerar la cadena maximal determinada por  $xf_x$ ,  $yf_y$  y  $zf_z$ ; en tanto que, la frontera jacobiana está formada por los nueve monomios siguientes:

$$x^4, x^2 y, x^2 z, xy^3, xz^4, y^5, y^3z^3, yz^4, z^6$$

Primero mostraremos, con el criterio de las unidades, que al incrementar en una unidad a cualquiera de los exponentes del monomio  $xy^2z^3$  obtenemos tres monomios jacobianos; luego, con la ayuda de éstos iremos delineando a la frontera jacobiana.

$$\begin{aligned} & \{[x^2y^2z^3, y^4z^6, xy^2z^9, x^2y^4z^7] y^2z^3g_x, yz^6g_y, xy^2z^5g_z\}, \\ & \{[xy^3z^3, x^2yz^6, x^3y^3z^4] xz^3g_y, x^2yz^2g_z\}, \\ & \{[y^5, xy^3z^3] y^2g_y\}, \\ & \{[xy^2z^4, x^2y^4z^2, x^3y^2z^5] xy^2g_z, x^2yz^2g_y\}, \\ & \{[z^6, xy^2z^4] z^2g_z\}, \\ & \{[x^2y, y^3z^3, xyz^6] yg_x, z^3g_z\}, \\ & \{[xy^3, x^2yz^3] xg_y\}, \\ & \{[yz^4, xy^3z^2] yg_z\}, \\ & \{[x^4, x^2y^2z^3] x^2g_x\}, \\ & \{[xz^4, x^2y^2z^2] xg_z\}, \\ & \{[x^2z, y^2z^4] zg_x\} \end{aligned}$$

De la misma forma que para los polinomios modelo, se pueden aplicar estos cálculos al estudio de la potencia mínima del ideal máximo contenido en el ideal jacobiano, al grado de determinación de las singularidades y a su clasificación.

## BIBLIOGRAFÍA.

**[A]** Arnold, V.I. Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  and Lagrangian singularities, *Functional Analysis and its applications*, 6(4),1972, 254-272.

**[A-GZ-V]** Arnol'd, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N., *Singularities of Differentiable Maps*, Volume I. Birkhäuser, 1985.

**[B-LdM]** Bromberg, S., López de Medrano, S.  $C^r$  sufficiency of quasihomogeneous jets and functions. *Real and Complex Singularities*, W. Marar, ed. Pitman, 1995, 179-188.

**[Kui]** Kuiper, N.H.,  $C^1$ -equivalence of functions near isolated critical points, *Sym.Infinite Dimen.Topology*, Princeton University Press, 1972, 199-218.

**[Kuo]** Kuo, T.-C, On  $C^0$ -sufficiency of jets of potential functions, *Topology* 8(1969), 167-171.

**[R-S-V]**, Ruas, M.A., Seade, J., Verjovsky, A., On real singularities with a Milnor Fibration. En *Trens in singularities* , Birkhauser 2002, p. 191-213.

**[R-T]** Risler, JJ , Trotman, D., Bilipschitz invariance of the multiplicity, *Bulletin of the London Mathematical Society* 29 (1997),200-204.

**[S1]** Seade, J., Open book decompositios associated to holomorphic vector fields. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* 3 (1997), 323-335.

**[S2]**, Seade, J., On the topology of isolated singularities in analytic spaces. *Series Progress in Mathematics* vol.241, 2005, Birkhauser Verlag.

## APÉNDICE.

### ESTRUCTURAS CÍCLICAS Y POLINOMIOS MODELO PARA VALORES PEQUEÑOS DE $n$ .

Para cualquier entero  $n > 1$ , hay:

Una sólo estructura cíclica con  $n$  componentes, que son unicyclos.

Dos con  $n-1$  componentes:  $n-2$  unicyclos junto con un 2-ciclo ó con un 2-ácatl.

Cuando  $n > 3$  hay 7 estructuras con  $n-2$  componentes:

$n-3$  unicyclos con

- (1) un 3-ciclo, o
- (2) un 2-ciclo con un precíclico, o
- (3) un unicyclo con dos precíclicos, o
- (4) un 3-ácatl.

O bien  $n-4$  unicyclos con

- (5) dos 2-ciclos, o
- (6) un 2-ciclo y un 2-ácatl, o
- (7) dos 2-ácatl.

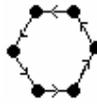
Luego, el número de estructuras cíclicas para  $n=1, 2, 3$  es, respectivamente, 1, 3, 7.

Procediendo de esta manera, se puede probar que el número de estructuras cíclicas con

- (8)  $n-3$  componentes, para  $n > 5$ , es 21,
- (9)  $n-4$  componentes, para  $n > 7$ , es 65,
- (10)  $n-5$  componentes, para  $n > 9$ , es 194, etc.

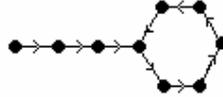
Ahora describimos explícitamente las 19 estructuras cíclicas, para  $n=4$ , haciendo uso de a siguiente notación:

$c_k$  representa un k-ciclo.



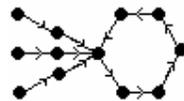
$C_6$

$c_k(l_j)$  representa a un segmento de longitud  $j$  de precíclicos que converge a un elemento de un k-ciclo.



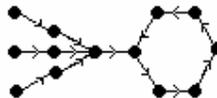
$c_6(l_3)$

$c_k(s l_j)$  representa a  $s$  segmentos ajenos de longitud  $j$  de precíclicos que convergen a un mismo elemento de un k-ciclo.



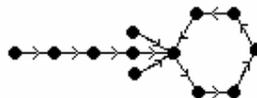
$c_6(3l_2)$

$c_k(l_i + s l_j)$  representa a  $s$  segmentos ajenos de longitud  $j$  de precíclicos que convergen a un precíclico del que parte un segmento de longitud  $i$  de precíclicos que converge a un elemento de un k-ciclo (aquí hay  $k+s(j-k)$  precíclicos).



$c_6(l_1+3l_3)$

$c_k(s l_j + l_i)$  representa a un segmento de longitud  $i$  de precíclicos que converge al elemento inicial de uno de los segmentos de un  $s l_j$  (aquí hay  $i+j+s j$  precíclicos),



$c_6(3l_1+l_4)$

$c_k(t l_i, s l_j)$  representa a un  $t l_i$  y un  $s l_j$  que convergen a dos puntos diferentes de un k-ciclo, (aquí necesariamente  $k>1$ ).



$c_6(3l_2, 2l_1)$

Además:

$e_n$  denota la cardinalidad de estructuras en  $F_n$ ,

$e_n(j)$  es el número de estructuras en  $F_n$  con  $j$  componentes,

$$(\text{luego } e_n = e_n(1) + e_n(2) + \dots + e_n(n)),$$

$d_k$  denota el número de formas distintas en que se pueden distribuir  $k$  elementos precíclicos en un elemento de un ciclo.

$d_k(j)$  denota el número de formas distintas en que se pueden distribuir  $k$  elementos precíclicos en un elemento de un ciclo de manera que el máximo de las longitudes de los precíclicos sea exactamente igual a  $j$

$$(\text{luego } d_k = d_k(1) + d_k(2) + \dots + d_k(k)),$$

#### Estructuras cíclicas de $F_4$ :

- 1 {  $C_1, C_1, C_1, C_1$ },
- 2 {  $C_1(l_1), C_1, C_1$ },
- 3 {  $C_2, C_1, C_1$ },
- 4 {  $C_1(2l_1), C_1$ },
- 5 {  $C_1(l_2), C_1$ },
- 6 {  $C_2(l_1), C_1$ },
- 7 {  $C_3, C_1$ }
- 8 {  $C_1(l_1), C_1(l_1)$ },
- 9 {  $C_1(3l_1)$ }
- 10 {  $C_1(2l_1+l_2)$ },
- 11 {  $C_1(l_1+2l_2)$ },
- 12 {  $C_1(l_3)$ },
- 13 {  $C_1(l_1), C_2$ },
- 14 {  $C_2(2l_1)$ },
- 15 {  $C_2(l_1, l_1)$ },
- 16 {  $C_2(l_2)$ },
- 17 {  $C_2, C_2$ },
- 18 {  $C_3(l_1)$ },
- 19 {  $C_3$ }.

En esta lista pueden identificarse 9 estructuras con una sola componente, 7 con dos componentes, 2 con tres componentes y una con cuatro componentes.

**Estructuras cíclicas de  $F_5$ : con una sólo componente:**

$c_5$ ,

$c_4(l_1)$ ,

$c_3(l_2), c_3(2l_1)$ ,

$c_2(l_1, l_1), c_2(l_3), c_2(l_1+2l_2), c_2(2l_1+l_2), c_2(l_2, l_1), c_2(3l_1), c_2(2l_1, l_1)$ ,

$c_1(l_4), c_1(l_2+2l_3), c_1(l_1+2l_2+l_3), c_1(2l_1+l_2+l_3), c_1(l_1+3l_2),$   
 $c_1(2l_2), c_1(l_1+(l_1+2l_2)), c_1(3l_1+l_2)$  y  $c_1(4l_1)$ .

Una forma de contar estas 20 estructuras es la siguiente:

$$e_5(1) = 1 + d_1 + (d_2 + d_1 d_1) + (d_3 + d_2 d_1) + d_4 = 1 + 1 + (2 + 1) + (4 + 2) + 9 = 20.$$

En tanto que

$$e_5(2) = e_4(1)e_1(1) + e_3(1)e_2(1) = 9 \times 1 + 4 \times 2 = 17.$$

Para cualquier  $n$ , puede formularse en general que si  $h = \lfloor n/2 \rfloor$  entonces:

$$e_n(2) = e_{n-1}(1)e_1(1) + e_{n-2}(1)e_2(1) + \dots + e_{h+1}(1)e_h(1), \text{ para } n \text{ impar y}$$

$$e_n(2) = e_{n-1}(1)e_1(1) + e_{n-2}(1)e_2(1) + \dots + e_{h+1}(1)e_{h-1}(1) + (1 + 2 + \dots + e_h), \text{ para } n \text{ par.}$$

En la Tabla 1 se dan los valores de  $e_n$  y de  $e_n(j)$  hasta  $n=9$ , que se calculan en base a las fórmulas anteriores y a la Tabla 2.

La Tabla 2 da los valores de  $d_k$  y de  $d_k(j)$  hasta  $n=9$ .

**TABLA 1**  
**VALORES DE  $e_n$  Y DE  $e_n(j)$  PARA  $n \leq 9$ .**

$n$	$e_n$	$e_n(1)$	$e_n(2)$	$e_n(3)$	$e_n(4)$	$e_n(5)$	$e_n(6)$	$e_n(7)$	$e_n(8)$	$e_n(9)$
1	1	1								
2	3	2	1							
3	7	4	2	1						
4	19	9	7	2	1					
5	47	20	17	7	2	1				
6	128	49	48	21	7	2	1			
7	334	118	125	60	21	7	2	1		
8	909	300	341	172	65	21	7	2	1	
9	2434	751	912	487	188	65	21	7	2	1

**TABLA 2**  
**VALORES DE  $d_k$  Y DE  $d_k(j)$  PARA  $n \leq 8$ .**

$k$	$d_k$	$d_k(1)$	$d_k(2)$	$d_k(3)$	$d_k(4)$	$d_k(5)$	$d_k(6)$	$d_k(7)$	$d_k(8)$
1	1	1							
2	2	1	1						
3	4	1	2	1					
4	9	1	4	3	1				
5	20	1	6	8	4	1			
6	48	1	10	18	13	5	1		
7	115	1	14	38	36	19	6	1	
8	276	1	21	74	92	54	26	7	1