



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# **POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

## **FACULTAD DE CIENCIAS**

**SINGULARIDADES REALES  
Y VARIETADES DE SEIFERT**

### **TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

### **MAESTRA EN CIENCIAS**

PRESENTA

## **HAYDÉE AGUILAR CABRERA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ SEADE KURI

MÉXICO, D.F.

OCTUBRE, 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A José Luis, mi madre y mi hermano.



—*On ne connaît que les choses que l'on apprivoise, dit le renard.*  
—*Qu'est-ce que signifie « apprivoiser » ?*  
—*C'est une chose trop oubliée, dit le renard. Ça signifie « créer des liens... »*

Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mucha de la gente que ha estado conmigo durante el proceso de hacer este trabajo: desde la emoción de atacar un problema nuevo hasta volver a emocionarme cuando el trabajo ya parecía terminado, incluyendo toda la gama de cosas que se van sintiendo en el camino.

Seguramente no voy a poder agradecer a toda la gente que debería por varias razones: ¿Alguien ha oído hablar de la Ley de Murphy? Ver [http://es.wikipedia.org/wiki/Ley\\_de\\_Murphy](http://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Murphy)), soy muy despistada e olvidadiza e incluso podría echarles la culpa a los astros y argumentar que no es un día propicio para los agradecimientos; sin embargo, hay que imprimir esta tesis, así que una disculpa a los que no estén en la lista.

Finalmente, quisiera mencionar dos cosas: quiero decirles a toda la gente de la lista (y a aquellos que no están en la lista pero deberían estar) que no sólo quiero darles las gracias, quiero decirles: ¡muchas gracias!, han sido muy importantes para mí su ayuda, su comprensión, etc. La segunda cosa es que el orden en que vayan apareciendo los nombres no significa nada, es producto tan sólo del primer café que tomé después de 30 días de abstinencia, espero que lo entiendan.

Y sin más preámbulos, quiero agradecer...

...a **Silvia** (mi mamá), por estar ahí cada vez que te necesito, por amarme y por entender todas las veces que no he podido ir a verte, creo que verás que ha valido la pena.

...a **Julio César** (mi hermano), por seguir siendo mi mejor amigo, por echarme porras y por presentarme a Neil Gaiman.

...a **Pepe**, por tu paciencia, tu guía, tu confianza, tu comprensión y sobre todo, por seguir creyendo en mí.

...à **Anne**, merci beaucoup pour ta patience e ton soutien, pour partager ta connaissance et t'amitié; sans toi, cette thèse ne pourrait pas être possible.

...a **Marcelo**, por aceptar revisar este trabajo y hacer valiosas observaciones para mejorarlo.

...a **Mario**, por aceptar leer este trabajo, escucharme y hallar las “sutilezas” que ni yo misma había visto y darme nuevas ideas para continuar.

...a **Toño**, por aceptar (de nuevo) ser sinodal de un trabajo mío, leerlo, escucharme y sobre todo, hacer preguntas que me ayudaron a entender mejor.

...a **Lorena**, por escucharme y mostrarme que ir a la fuente original no debe dar miedo.

...to **Walter Neumann**, thanks for the talk at the ICTP; in these two years I came back to check your notes many times, I hope to ask you interesting questions someday.

...a **Patrick**, por platicar conmigo, hacer preguntas que no pude contestar, mostrarme mis errores y lo más importante: hacerme creer que la geometría es muy bella.

...to **András Némethi**, for make me understand better the complex singularities and take some time giving me very good references.

...a **Ana Irene**, por tu amabilidad al tomarte el tiempo para ayudarme y escucharme.

...a **Manuel Falconi** (Coordinador del Posgrado), por apoyarme, escucharme y creer en mí; una disculpa porque tardé más de lo que pensaba, pero el trabajo está terminado.

...a **Laura**, por hacer que las cosas sucedieran casi por arte de magia y preocuparte por mí.

...a **Alexia**, por ayudarme con mis trámites cuando yo no sabía ni en qué día vivía y por hacerme reír: ¡Merci beaucoup!

...a **Socorro**, por tus sabios consejos y por estar al pendiente de mí.

...a **Pilar**, por ser más que eficiente y ayudarme a conseguir mucha de la bibliografía en tiempo récord; es una suerte tenerte en Cuernavaca.

...a **Liz**, por toda tu ayuda en este tiempo: desde llevar mi expediente hasta llamarme al celular y seguir cuidando de mí.

...a **Karla**, por todos los té en tu casa que me servían para despejarme y por adoptarme cuando estaba sola.

...a **Catalina**, por estar ahí, en las interminables conversaciones por teléfono y por no dejar que abandonara el francés.

...a **Angélica**, por esta amistad, con palabras o sin ellas.

...a **Assandy**, por apoyarme desde tan lejos y aparecerte en el cielo haciéndome sonreír.

...a **Elsa**, por estar dispuesta a aprender variedades de Seifert conmigo, por muchas pláticas, algunas películas y ser tía de mis gatos.

...a **Zaharahí**, por seguir compartiendo momentos conmigo y aguantándome como hace años.

...a **Juan**, por seguirnos la corriente a Zaharahí y a mí, por tu paciencia y por verme en caras desconocidas.

...a **Carlos**, por ser prudente, cuidadoso y ponerme en condiciones de terminar este trabajo.

...a **Ruth**, por darme asilo político, por preocuparte por mí y por ser una suegra fuera de serie.

...a **Myri y Ruslan**, por su amistad, por dejarme vivir de cerca su proceso de ser papás y por permitirme ser tía y ver al mundo de otra manera.

...a **Sofía**, por haber nacido y mostrarme como una pequeña luz puede iluminar muchas vidas.

...a **Diego**, por tu entusiasmo y tus ganas de hacer las cosas.

...a **José Luis**, por tu amor y tu apoyo incondicional, por tenerme paciencia y animarme a poner en papel las matemáticas, por abrazarme cada vez que tenía ganas de darme por vencida y por seguir estando ahí cada día.

También quisiera mencionar dos proyectos que apoyaron la realización de este trabajo:

- Proyecto CONACYT No. G 36357-E “Sistemas Dinámicos y Geometría Compleja”,
- Proyecto CONACYT No. J 49048-F “Topología de Singularidades”.



# Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	xiii
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Conjuntos algebraicos . . . . .	1
1.2 Aureola de una singularidad . . . . .	4
1.3 Haces vectoriales . . . . .	8
1.4 Homotopía, Homología y Cohomología . . . . .	12
1.4.1 El grado de una función . . . . .	18
1.4.2 La característica de Euler y el género de una superficie . . . . .	19
1.5 La clase de Euler . . . . .	21
1.5.1 La clase de Euler relativa . . . . .	27
<b>2 Variedades de Seifert</b>	<b>29</b>
2.1 El toro sólido fibrado. . . . .	29
2.1.1 Meridianos y longitudes . . . . .	31
2.1.2 Curvas que cruzan y Fibras . . . . .	35
2.2 Fibraciones de Seifert . . . . .	36
2.2.1 Orbidades . . . . .	36
2.2.2 Fibraciones de Seifert . . . . .	40
2.2.3 Fibras excepcionales . . . . .	41
2.2.4 El número de Euler . . . . .	42
2.2.5 Invariantes de Seifert . . . . .	43
2.3 Un ejemplo: Los espacios lente. . . . .	46
2.4 Las $S^1$ -variedades como variedades de Seifert . . . . .	49
2.4.1 $G$ -variedades . . . . .	49
2.4.2 Acciones de $S^1$ . . . . .	52
<b>3 Puntos críticos de funciones reales</b>	<b>57</b>
3.1 Homomorfismos de haces genéricos. . . . .	57
3.2 Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^2$ . . . . .	59
3.3 Funciones con punto crítico aislado . . . . .	62
3.3.1 Los puntos críticos de $F$ y de $f$ . . . . .	63

3.4	Teorema de Fibración de Milnor . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Singularidades reales</b>	<b>69</b>
4.1	Definiciones y propiedades . . . . .	69
4.2	La relación entre las aureolas $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ y $K_{f,\varepsilon'}$ . . . . .	78
4.2.1	Cubrientes . . . . .	79
4.2.2	La aureola $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ como espacio cubriente . . . . .	80
4.2.3	El género de la variedad $B_0$ . . . . .	85
	<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

1	Sombrilla de Whitney . . . . .	xiv
1.1	La cúspide $\{(x, y)   y^2 - x^3 = 0\}$ ( <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cusp.png">http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cusp.png</a> ) . . . . .	4
1.2	La superficie de Cayley ( <a href="http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces.curves/cayley/">http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces.curves/cayley/</a> ) . . . . .	6
1.3	La aureola $K$ . ( <a href="http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces.curves/cayley/">http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/surfaces.curves/cayley/</a> ) ( <a href="http://serc.carleton.edu/usingdata/nasaimages/index4.html">http://serc.carleton.edu/usingdata/nasaimages/index4.html</a> ) . . . . .	7
1.4	El disco $\mathbb{D}^2$ como $C(\mathbb{S}^1, *)$ . . . . .	13
1.5	La esfera $\mathbb{S}^2$ como suspensión de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	13
1.6	Cuña (wedge). . . . .	14
1.7	Cómo calcular el grado de una función. . . . .	18
1.8	Dos descomposiciones celulares de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	20
2.1	Toro sólido fibrado . . . . .	30
2.2	Sistema fundamental de curvas para un toro. . . . .	33
2.3	Longitudes no homólogas. . . . .	33
2.4	La lágrima $WP(1, a)$ . . . . .	39
2.5	Una orbidad de superficie de Riemann . . . . .	40
2.6	Una fibra $H$ de puntos fijos. . . . .	54
4.1	La función $z \mapsto z^n$ en el círculo . . . . .	79
4.2	La función $z \mapsto z^n$ en el disco ( <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Riemann_sqrt.jpg">http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Riemann_sqrt.jpg</a> ) . . . . .	80
4.3	De la esfera $\mathbb{S}^2$ a la figura ocho . . . . .	86



# Introducción

La Topología Diferencial y la Geometría Algebraica han sido dos ramas de las matemáticas que se han desarrollado ampliamente en el siglo XX, tanto como áreas independientes como relacionadas con otras ramas de las matemáticas. Una de las interacciones entre estas dos áreas que ha resultado sumamente fructífera es la que concierne a los aspectos topológicos de la Teoría de Singularidades.

El término *singularidad* se utiliza a menudo en distintas ramas de las matemáticas para reflejar una situación que es contraria a algo que se entiende como regular.

En particular, para la Geometría Algebraica (la cual estudia espacios y aplicaciones definidos por polinomios o ecuaciones analíticas) tenemos que, dado un espacio definido por polinomios (al cual llamaremos *conjunto algebraico*) podemos distinguir dos tipos de puntos: los *regulares* (aquellos donde la diferencial de los polinomios que definen al conjunto alcanza su rango máximo) y los *singulares* (todos aquellos puntos que no son regulares).

Entonces, los conjuntos algebraicos se han estudiado a través de la historia desde dos diferentes puntos de vista: global y localmente. El punto de vista global es uno de los enfoques de la Geometría Algebraica y un ejemplo de los problemas que se han resuelto es el siguiente:

En la década de los 50, **Hassler Whitney** demostró que la parte regular de un conjunto algebraico irreducible (real o complejo) es una variedad diferenciable (ver [53]) y más adelante, **John Nash** demostró que una variedad diferenciable cerrada puede verse dentro de la parte no singular de un conjunto algebraico irreducible real; es decir, que el encaje diferencial de una variedad diferenciable puede ser aproximado por un encaje algebraico (ver [34]).

Esto nos lleva a pensar en el punto de vista local; dada una vecindad de un punto regular, dicha vecindad se ve como un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ; la pregunta que podemos hacernos entonces es: ¿Cómo es la topología de una vecindad de un punto singular?

Esta cuestión ha fascinado a un gran número de matemáticos y mediante una interacción entre la Topología y la Teoría de Singularidades, se ha tratado de saber cómo se “ve” un conjunto algebraico cerca de las singularidades.

Entonces tenemos dos casos: el primero es cuando la dimensión del conjunto de puntos singulares es mayor que cero, lo cual sucede para la mayoría de los conjuntos algebraicos reales; por ejemplo, en la Figura 1, la línea roja es la parte

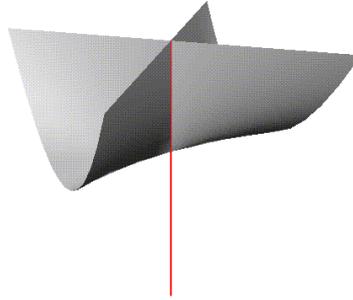


Figura 1: Sombrilla de Whitney:  $h(x, y) = (x, y^2, xy)$  con  $x, y \in \mathbb{R}$

singular del conjunto algebraico y podemos ver que no todos los puntos de esa línea tienen vecindades que se vean como  $\mathbb{R}^2$ .

Por otra parte, tenemos las singularidades aisladas; éstas aparecen con facilidad cuando se trabaja con conjuntos algebraicos complejos; sin embargo, en los reales no es común encontrar ejemplos; por ello, estudiar conjuntos algebraicos reales con singularidades aisladas se ha convertido en una de las direcciones en que se ha desarrollado la Teoría de Singularidades; en particular, este trabajo apunta en esa dirección.

Una de las herramientas para estudiar la topología de una singularidad aislada es la *aureola* de la singularidad, la cual puede definirse como la intersección de una esfera centrada en la singularidad aislada y el conjunto algebraico en cuestión; este objeto es importante ya que es un invariante topológico independiente no sólo del radio de la esfera sino del encaje (en un sentido puramente algebraico) de la variedad algebraica en  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$ , lo que nos permite aplicar resultados topológicos a regiones arbitrariamente cercanas a la singularidad. Esta herramienta fué introducida por **Brauner** en 1928 y **Kähler** la retoma reemplazando la esfera por un *polidisco*.

Para darnos una idea de la importancia de la aureola de una singularidad, podemos hablar de un resultado de **John Milnor** que se volvió fundamental para el trabajo subsecuente en Topología de Singularidades: el *Teorema de fibración de Milnor*; este resultado nos permite, mediante la Topología Diferencial, proporcionar propiedades topológicas de la singularidad gracias a la información de la aureola; por ejemplo, conexidad, tipo de homotopía, etc.

Sumergiéndonos en la historia de este resultado, tenemos que Milnor escribió en 1966 un artículo titulado “*On isolated Singularities of hypersurfaces*” (ver [30]), en el cual presentaba una primera versión del Teorema de fibración; sin embargo, cuando se dió cuenta de que podía reforzarse y de algunos resultados que podía obtener, decidió no publicar dicho artículo y el Teorema de fibración vió la luz en 1968 en el libro “*Singular points of complex hypersurfaces*” (ver [31]), donde además de este resultado pueden encontrarse diversos temas relacionados con

la topología de singularidades como son el que la aureola sea o no una esfera topológica, las variedades de Brieskorn (las cuales veremos como ejemplo en el Capítulo 2), el caso clásico de las curvas en  $\mathbb{C}^2$ , etc.

Tenemos entonces dos versiones de este importante teorema, la versión compleja:

Sea  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica que se anula en el origen; sea  $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$  y sea  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todos los puntos  $z \in \mathbb{C}^n - V$  con  $|z| \leq \varepsilon_0$ , los vectores  $z$  y  $\text{grad} \log f(z)$  son linealmente independientes sobre los números complejos ó

$$\text{grad} \log f(z) = \lambda z$$

con  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que su argumento tiene valor absoluto menor que  $\frac{\pi}{4}$ .

**Teorema 0.1** ([31, Th. 4.8]). *Sea  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ; entonces  $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1} - K$  es un haz fibrado suave sobre  $\mathbb{S}^1$  con proyección*

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} .$$

Y la versión real:

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función polinomial que lleva el origen al origen y que satisface la siguiente

**Hipótesis.** Debe existir una vecindad  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^n$  tal que la matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  tiene rango  $k$  para todo  $x \in U$  con  $x$  diferente del origen.

Se sigue que tenemos un conjunto algebraico

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n | f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$$

y que la intersección  $K = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n - k - 1$  para un  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (Como veremos en el Capítulo 1). Asumamos también que  $k \geq 2$ .

**Teorema** ([31, Th. 11.2]). *El complemento de una vecindad tubular abierta de  $K$  en  $\mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}$  es el espacio total de un haz fibrado suave sobre la esfera  $\mathbb{S}^{k-1}$ , donde cada fibra  $F$  es una variedad suave compacta de dimensión  $n - k$  tal que la frontera  $\partial F$  es difeomorfa a  $K$ .*

Podríamos decir entonces que la versión real del Teorema de Fibración de Milnor no es tan “fuerte” como la versión compleja pero justamente en los reales carecemos de la estructura que tenemos en los complejos que nos da más información.

Sin embargo hay familias de singularidades reales analíticas que tienen propiedades geométricas y topológicas similares a las de algunas singularidades complejas e incluso estas familias de singularidades reales pueden ser definidas vía la geometría compleja.

Por ejemplo: Sea  $F$  una función real analítica definida por:

$$F: \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto \overline{xy}(x^p + y^q) + z^r$$

donde  $\text{mcd}(p, q) = 1$  y  $2 \leq p, r; 2 < q$  ó  $2 \leq q, r; 2 < p$ . Lo que hacemos en este trabajo es dar una descripción de la aureola de la singularidad de esta función ( $F$  tiene una singularidad aislada en el origen) como *variedad de Seifert*.

Las variedades de Seifert (3-variedades que pueden “llenarse” con círculos ajenos de tal manera que cuando tomamos una vecindad de un círculo obtenemos un toro con cierta estructura) fueron presentadas por primera vez por **Seifert** en [47] en 1933, revolucionando la teoría de 3-variedades de ese momento; en los años venideros gente como Orlik ([40]), Raymond, Waldhausen, etc. trabajaron en la clasificación de estas variedades. Dicha clasificación ha sido posible entre otras cosas usando invariantes que permitan decir cuándo dos variedades de Seifert son equivalentes (en el sentido de [23, Def. 1.4]); estos invariantes son llamados *invariantes de Seifert* y gracias al invariante conocido como *número de Euler* (introducido por Neumann y Raymond), se encontraron las conexiones entre diferentes contextos en los cuales aparecían las variedades de Seifert.

Un ejemplo de la importancia de estas variedades es que las variedades de Seifert proporcionan los únicos casos en los cuales se observa que la unicidad de la descomposición canónica en toros de una 3-variedad (descubierta por Johansson, Jaco y Shalen) no puede ser establecida “a la ligera” (ver [19]).

Por supuesto que es en Teoría de Singularidades donde nos interesa ver cómo aparecen las variedades de Seifert; en este campo podemos encontrar trabajos de Neumann ([35], [36], [37]); Orlik y Wagreich ([41], [42]); Orlik ([40]), por poner algunos.

Regresando a nuestro problema, la descripción que damos de la aureola de la singularidad de  $F$  incluye el calcular la característica de Euler y el género del espacio de órbitas de la aureola (vista como variedad de Seifert); se debe entender que este trabajo es un primer avance en los problemas que se desean atacar en el Doctorado.

Algunas de los problemas que quedan por resolver son: calcular los invariantes de Seifert de la aureola de la singularidad de  $F$ ; ver qué información nos puede brindar en este caso el Teorema de fibración de Milnor, etc.

Es así que podemos resumir este trabajo de la siguiente manera:

En el Capítulo 1, se dan algunas definiciones y resultados de geometría algebraica, topología algebraica y topología de singularidades que usaremos en los capítulos posteriores, como pueden ser: la aureola de una singularidad (y propiedades), haces vectoriales, homotopía, homología, cohomología, característica de Euler y clase de Euler, entre otros.

El principal tema del Capítulo 2 son las fibraciones de Seifert; comenzamos por estudiar el modelo de una vecindad típica de una variedad fibrada de Seifert: el toro sólido fibrado, después definimos lo que es una orbidad (pues el espacio

base de una fibración de Seifert es una orbidad de dimensión dos) y hablamos entonces de fibraciones de Seifert, fibras excepcionales e invariantes de Seifert. En la segunda parte del Capítulo vemos la relación entre variedades fibradas de Seifert y las  $S^1$ -variedades de dimensión 3.

En el Capítulo 3 presentamos dos familias de funciones reales analíticas (una familia es de funciones de  $\mathbb{R}^6$  a  $\mathbb{R}^2$  y la otra es de funciones de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^2$ ), probamos que estas funciones reales analíticas tienen punto crítico aislado y ponemos en contexto este resultado; para ello se prueba que esta situación no sucede generalmente y se menciona el Teorema de Fibración de Milnor.

Finalmente, es en el Capítulo 4 donde se mencionan algunos resultados directamente relacionados con nuestro caso: para una función  $F$  como la que definimos arriba, damos una descripción de la aureola de la singularidad de  $F$  como una variedad fibrada de Seifert, además vemos a esta aureola como espacio total de un cubriente ramificado de  $S^3$  (a la cual también vemos como variedad fibrada de Seifert); describimos las fibras excepcionales de ambas variedades, definimos un cubriente de orbidades entre los espacios de órbitas de las variedades fibradas de Seifert y con ello, calculamos la característica de Euler y el género del espacio de órbitas de la aureola de la singularidad de  $F$ .

Es nuestra intención continuar el estudio de este problema en la tesis doctoral y hallar una generalización que nos de más información acerca de las singularidades reales.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo veremos en cuatro secciones los conceptos y resultados de Geometría Algebraica, Topología Algebraica y Topología de Singularidades que usaremos más adelante.

### 1.1 Conjuntos algebraicos

En esta sección daremos la definición de un conjunto algebraico y veremos algunas propiedades de estos conjuntos; para profundizar en el tema se recomienda cualquier libro de Geometría Algebraica como pueden ser [12], [18], [15] o [49]; por nuestra parte, los resultados que damos pueden encontrarse en el primer capítulo de [31].

Sea  $\mathbb{F}$  el campo de los números reales o el campo de los números complejos.

**Definición 1.1.** Un subconjunto  $V \subseteq \mathbb{F}^n$  es llamado un **conjunto algebraico** si  $V = Z(T)$  es el lugar de los ceros comunes de todos los elementos de  $T$ , para algún  $T \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ .

Más adelante veremos que, de hecho, podemos asociar un ideal a un conjunto algebraico.

Usando el hecho de que un campo es un anillo Noetheriano, podemos obtener el siguiente resultado (ver [18, pag. 2]).

**Proposición 1.2.** *Todo conjunto algebraico  $V$  puede ser definido por una colección finita de ecuaciones polinomiales.*

En nuestro caso trabajaremos con conjuntos algebraicos definidos por una sola ecuación a los cuales les llamamos **hipersuperficies**.

**Definición 1.3.** Un conjunto algebraico no vacío  $V \subseteq \mathbb{F}^n$  es llamado **irreducible** si no puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos algebraicos propios.

**Definición 1.4.** Dado cualquier subconjunto  $V \subseteq \mathbb{F}^n$ , llamaremos  $I(V)$  al ideal asociado a  $V$ ; es decir,

$$I(V) = \{f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \text{ para todo } p \in V\}.$$

No es difícil ver que  $I(V)$  es un ideal, sólo debe recordarse la definición de ideal (ver por ejemplo [4, Ch. 1, Ex. 27]).

Sea  $V \subseteq \mathbb{F}^n$  un conjunto algebraico no vacío y sean  $f_1, f_2, \dots, f_r$  un número finito de polinomios generadores de  $I(V)$ ; es decir,

$$I(V) = (f_1, f_2, \dots, f_r)$$

y para cada  $p \in V$  consideramos a la matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  de tamaño  $r \times n$  evaluada en  $p$ , donde las dimensiones de esta matriz se deben a que son  $r$  polinomios y  $n$  coordenadas.

Sea  $\rho$  el mayor rango que una matriz de éstas alcanza en un punto  $p$  de  $V$ , es decir, nos fijamos en el rango de la matriz evaluada en cada punto y llamaremos  $\rho$  al mayor de todos ellos.

Ahora podemos concentrarnos en uno de los conceptos más importantes de este trabajo: *las singularidades*.

**Definición 1.5.** Sea  $V \subseteq \mathbb{F}^n$  un conjunto algebraico irreducible, un punto  $p \in V$  es llamado **no singular** o **simple** si la matriz jacobiana  $(\partial f_i / \partial x_j)$  alcanza su máximo rango  $\rho$  al evaluarla en  $p$ , por el contrario, será llamado **singular** si

$$\text{rango}(\partial f_i / \partial x_j)|_p < \rho.$$

Llamaremos  $\Sigma(V)$  al conjunto de los puntos singulares de  $V$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$  y sea  $V = Z(f)$ , entonces, el máximo rango de  $(-3x^2 - 2x, 2y)$  es 1 y se alcanza en cualquier punto  $(x, y) \neq (0, 0)$ ; de donde  $\Sigma(V) = \{(0, 0)\}$  y cualquier otro punto de  $V$  es un punto regular.

**Definición 1.6.** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función diferenciable, diremos que un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  es **punto crítico** de  $f$  si la diferencial de  $f$ ,  $Df_x: T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^k$  no es sobreyectiva.

Sea debe notar que la definición que damos de punto singular no coincide con la de punto crítico de una función; en el ejemplo anterior, sucede que el punto crítico de la función es la singularidad; sin embargo en general esto no sucede como puede verse en el ejemplo a continuación.

**Ejemplo 2.** Sean  $f_1, f_2$  y  $f_3$  funciones de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}$  dadas por:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= y^2 - x^3, \\ f_2(x, y, z) &= z, \\ f_3(x, y, z) &= y^2 - x^3 + z \end{aligned}$$

y sea  $V$  el conjunto algebraico definido por  $f_1, f_2$  y  $f_3$ ; tenemos entonces que la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 3x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & 1 \end{pmatrix}$$

de donde, todo punto en  $V$  es un punto crítico de la función  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$  y  $\Sigma(V) = \{(0, 0, 0)\}$ ; de manera que  $\Sigma(V)$  está contenido en el conjunto de puntos críticos.

**Nota 1.** Es fácil ver que la Definición 1.5 no depende de la elección de los polinomios  $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$  ya que éstos generan a  $I(V)$ . Así, si añadimos un polinomio más,  $f_{k+1} \in I(V)$ , existen  $g_1, g_2, \dots, g_r$  tales que

$$f_{k+1} = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_r f_r,$$

de donde la nueva fila correspondiente a  $f_{k+1}$  en la matriz será una combinación lineal de las filas 1 a  $r$ .

**Lema 1.7.** *El conjunto  $\Sigma(V)$  es un subconjunto algebraico propio (posiblemente vacío) de  $V$ .*

*Demostración.* Sea  $\{f_i\}$  una base para  $I(V)$  y sea  $D(V)$  el conjunto definido por:

$$D(V) = \{\det(M) \mid M \text{ es una submatriz } \rho \times \rho \text{ de la matriz } (\partial f_i / \partial x_j)\}.$$

El conjunto de todos los puntos singulares es el conjunto de puntos de  $V$  en los cuales los elementos de  $D(V)$  se hacen cero, es decir,

$$\Sigma(V) = V \cap Z(D(V))$$

donde  $Z(D(V))$  es el conjunto de ceros de  $D(V)$ , esto es, el conjunto de puntos donde  $\det(M) = 0$  para toda submatriz  $M$  de la matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  de orden  $\rho \times \rho$ .

Pero  $Z(D(V))$  es un conjunto algebraico por definición y usando que la intersección de dos conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, tenemos que  $\Sigma(V)$  es un conjunto cerrado. Por ende  $\Sigma(V)$  es un conjunto algebraico y como existe  $p \in V$  tal que

$$\text{rango } (\partial f_i / \partial x_j)|_p = \rho,$$

se tiene que este punto es no singular, de donde  $\Sigma(V)$  es subconjunto propio de  $V$ .  $\square$

Por otra parte, el resultado siguiente se encuentra en el artículo clásico de Whitney [53] y describe al conjunto de puntos simples de un conjunto algebraico.

**Teorema 1.8** ([53, Th. 1]). *Dado un conjunto algebraico irreducible  $V \subset \mathbb{F}^n$ , el conjunto  $M_1 = V - \Sigma(V)$  de los puntos simples de  $V$  forman una variedad diferenciable no vacía. De hecho, esta variedad es analítica real (o compleja, según sea el caso) y tiene dimensión  $n - \rho$  sobre  $\mathbb{F}$ .*

**Ejemplo 3.** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$  y sea  $V$  el conjunto algebraico definido por

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) | f(x_1, \dots, x_n) = 0\};$$

esto es,  $V = \mathbb{S}^n$ . Tenemos entonces que  $Df_x = (2x_1, \dots, 2x_n)$  (donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ), de manera que el único punto singular de  $V$  sería el cero, pero  $0 \notin V$ , por lo tanto,  $\Sigma(V) = \emptyset$  y por el Teorema 1.8,  $\mathbb{S}^n$  es una variedad diferenciable.

**Ejemplo 4.** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3$  y sea  $V$  el conjunto algebraico definido por  $V = \{(x_1, x_2) | f(x_1, x_2) = 0\}$ ; tenemos entonces que  $Df_{(x_1, x_2)} = (2x_2, 3x_1^2)$ ; de donde  $\Sigma(V) = \{(0, 0)\}$  y así,  $M_1$  se ve como en la Figura 1.1 donde no estamos tomando al punto  $(0, 0)$ . Mediante una parametrización se puede ver que  $M_1$  es una variedad diferenciable.

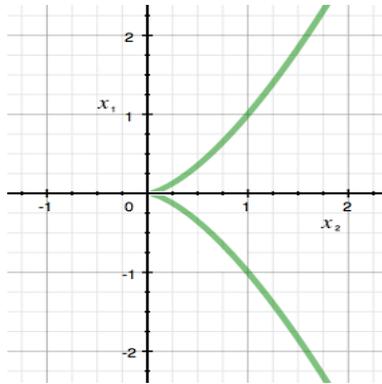


Figura 1.1:  $V = \{(x_1, x_2) | x_2^2 - x_1^3 = 0\}$

## 1.2 Aureola de una singularidad

En esta sección veremos el concepto de aureola de una singularidad; la aureola es un invariante que nos permitirá estudiar la topología de una singularidad, el cual fue usado fuertemente por Brauner al estudiar la topología de singularidades de curvas. Referencias a este concepto pueden encontrarse en [8] o [14] entre muchos otros; los resultados que aquí presentamos son de [31] y [13].

El siguiente resultado se puede encontrar como [31, Corollary 2.8] junto con su demostración.

**Lema 1.9.** *Una función polinomial  $g$  sobre  $M_1 = V - \Sigma(V)$  puede tener a lo más un número finito de valores críticos.*

Sea  $p_0$  un punto en  $M_1$  o un punto aislado de  $\Sigma(V)$ ; entonces definamos la función  $i: M_1 \rightarrow \mathbb{F}^n$  tal que  $i(p) = p$  y una función polinomial  $r: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$  de la siguiente manera:

$$r(p) = |p - p_0|^2;$$

de donde,  $Dr_p: T_p\mathbb{F}^n \rightarrow T_p\mathbb{F} \cong \mathbb{F}$ . Usando el Lema 1.9 sabemos que  $r$  tiene un número finito de valores críticos; de manera que, sea  $\varepsilon$  tal que cumple las dos siguientes condiciones:

- a) El valor  $\varepsilon^2$  es menor que cualquier valor crítico positivo de  $r|_{M_1}$ ; es decir,  $\varepsilon^2$  es un valor regular de  $r|_{M_1}$  y
- b) la intersección  $r^{-1}(\varepsilon^2) \cap \Sigma(V) = \emptyset$ .

Por las condiciones que cumple  $p_0$ , sabemos que podemos encontrar dicho  $\varepsilon$  y de la propiedad (a) obtenemos que  $Dr_p$  es sobreyectiva para todo  $p \in r^{-1}(\varepsilon^2)$ .

**Proposición 1.10.** *Sea  $V \subset \mathbb{F}^n$  cualquier conjunto algebraico y sea  $p_0$  cualquier punto en  $M_1$  o un punto aislado de  $\Sigma(V)$ . Toda esfera  $S_\varepsilon$  con centro en  $p_0$ , con  $\varepsilon$  suficientemente pequeño (esto es, que cumpla las condiciones (a) y (b)) es transversal a  $M_1$ .*

*Demostración.* En primer lugar, consideremos la siguiente composición:

$$M_1 \xrightarrow{i} \mathbb{F}^n \xrightarrow{r} \mathbb{F};$$

tomemos un punto  $q \in M_1 \cap S_\varepsilon$  (de manera que podamos aplicar esta composición) y veamos que la diferencial de  $r \circ i$  está dada como:

$$D(r \circ i)_q: T_q M_1 \xrightarrow{Di_q} T_q \mathbb{F}^n \xrightarrow{Dr_q} \mathbb{F} .$$

Entonces tenemos que  $D(r \circ i)_q$  es sobreyectiva, pues  $q \in S_\varepsilon$ .

Lo que queremos demostrar es que:

$$T_q M_1 + T_q S_\varepsilon = T_q \mathbb{F}^n .$$

donde  $T_q M_1 = Di_q(T_q M_1)$ ,  $T_q S_\varepsilon = T_{i(q)} S_\varepsilon$  y  $T_q \mathbb{F}^n = T_{i(q)} \mathbb{F}^n$ .

Así, procederemos por contradicción:

Supongamos que

$$T_q M_1 + T_q S_\varepsilon \neq T_q \mathbb{F}^n;$$

además tenemos que  $\dim(S_\varepsilon) = m - 1$ , por lo que  $\dim(T_q S_\varepsilon) = m - 1$ ; así, si existe un vector en  $T_q M_1$  que no está en  $T_q S_\varepsilon$ , dicho vector, junto con una base de  $T_q S_\varepsilon$  nos da un espacio de dimensión  $m$ , con lo que

$$T_q M_1 + T_q S_\varepsilon = T_q \mathbb{F}^n .$$

Entonces para todo vector  $v \in T_q M_1$  tal que  $v \in T_q S_\varepsilon$ ; al evaluarlo con  $Dr_q$ , obtenemos que  $Dr_q(v) = \bar{0}$  (ya que cada curva en la esfera tiene como imagen bajo  $r$  al punto  $\varepsilon^2$  y el vector tangente a un punto es el vector  $\bar{0}$ ).

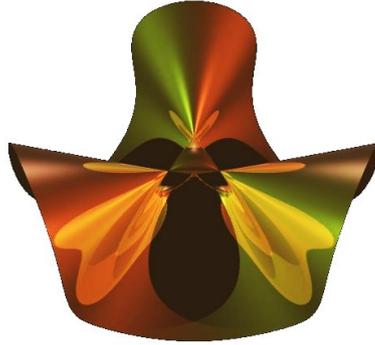


Figura 1.2:  $V = \{(x, y, z) | -5(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 2(xy + xz + yz) = 0\}$

Pero, ya que la diferencial de la identidad es la identidad,  $Di_q(v) = v$  para todo vector en  $T_qM_1$ , por lo que:

$$D(r \circ i)_q(v) = Dr_q(Di_q(v)) = Dr_q(v) = \bar{0}$$

para todo  $v \in T_qM_1$ ; pero esto nos dice que  $D(r \circ i)_q$  es la transformación idénticamente cero, de donde, no es sobreyectiva, lo cual es una contradicción; por lo tanto,

$$T_qM_1 + T_qS_\varepsilon = T_q\mathbb{F}^n;$$

es decir,  $S_\varepsilon$  es transversal a  $M_1$ . □

Entonces, por el Teorema de Transversalidad (ver[17, página 30]), el cual dice que la intersección transversal de dos subvariedades es una subvariedad, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 1.11.** *Toda esfera  $S_\varepsilon$  con centro en  $p_0$ , suficientemente pequeña (es decir, que  $\varepsilon$  cumpla las condiciones (a) y (b)), intersecciona a  $V$  en una variedad diferenciable (posiblemente vacía).*

Ahora definimos la aureola de una singularidad de la siguiente manera:

**Definición 1.12.** Dado un conjunto algebraico irreducible  $V$  con una singularidad aislada  $p_0$  y dada una esfera  $S_\varepsilon$  centrada en  $p_0$  y tal que cumple las condiciones de la Proposición 1.10, llamaremos **aureola de la singularidad**  $p_0$  al conjunto

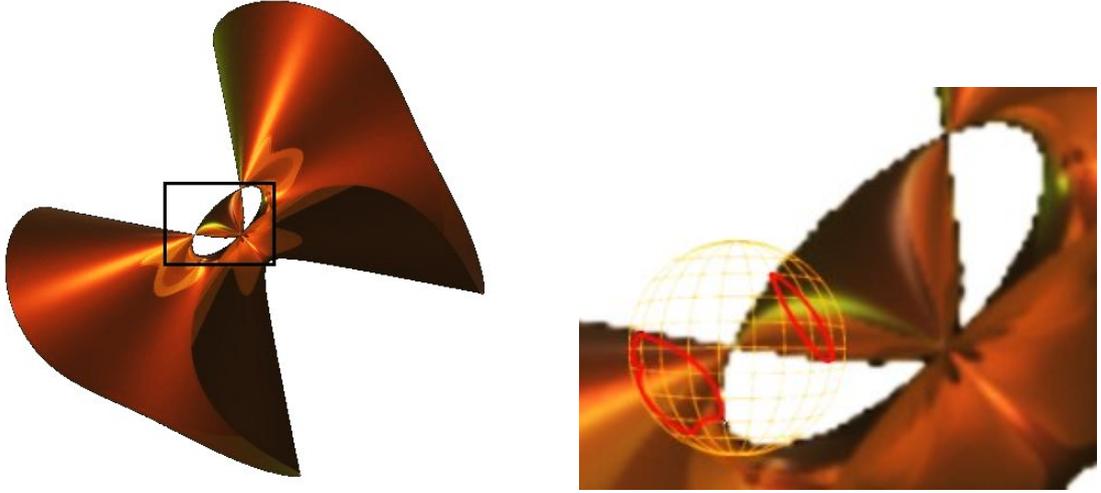
$$K_\varepsilon = M_1 \cap S_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon .$$

**Ejemplo 5.** Sea  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x, y, z) = -5(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 2(xy + xz + yz)$$

y sea  $V = \{(x, y, z) | f(x, y, z) = 0\}$ , la cual podemos ver en la Figura 1.2 y sea  $K_\varepsilon = V \cap S_\varepsilon^2$ ; podemos reconocer a  $K_\varepsilon$  como el borde de la variedad en la figura (pues lo que se ve en la Figura 1.2 es de hecho la intersección  $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon^3$ ).

En este ejemplo,  $\varepsilon$  no cumple con las condiciones (a) y (b).

Figura 1.3: La aureola  $K$  en rojo.

Entonces podemos preguntarnos qué propiedades interesantes tiene la aureola  $K_\varepsilon$ , para verlas, usaremos la siguiente condición extra a las condiciones (a) y (b):

c) el valor  $\varepsilon$  es tal que:

$$\mathbb{B}_\varepsilon \cap \Sigma(V) = \{p_0\} \quad \text{ó} \quad \mathbb{B}_\varepsilon \cap \Sigma(V) = \emptyset ;$$

se puede ver que esta condición implica a (b).

Así, dada la Definición 1.12, tenemos los siguientes resultados:

**Teorema 1.13** ([31, Th. 2.10]). *Para un  $\varepsilon$  tal que cumple la condición (c), la intersección de  $V$  con la bola  $\mathbb{B}_\varepsilon$  es homeomorfa al cono sobre  $K_\varepsilon = V \cap \mathbb{S}_\varepsilon$ . De hecho, la pareja  $(\mathbb{B}_\varepsilon, \mathbb{B}_\varepsilon \cap V)$  es homeomorfa a la pareja  $(\text{cono}(\mathbb{S}_\varepsilon), \text{cono}(K_\varepsilon))$ .*

**Corolario 1.14.** *Dado  $\varepsilon$  tal que se cumplan el Corolario 1.11 y la condición (c), la aureola  $K$  es independiente de dicho  $\varepsilon$ .*

Lo que nos dice este corolario es que partiendo de un  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, la aureola  $K$  seguirá siendo la misma salvo homeomorfismos; de hecho, se sigue fácilmente de la prueba de este resultado que la aureola  $K$  seguirá siendo la misma salvo difeomorfismos.

Si vemos la Figura 1.3, vemos la superficie del Ejemplo 5 pero ahora la esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$  está centrada en una de las singularidades de la superficie y  $\varepsilon$  cumple las condiciones (a) y (c); en esta figura podemos observar a  $K$  como la curva roja en dicha figura.

Además, se puede ver que la aureola también es independiente del “encaje” (en el sentido de [13, pag. 521]) del conjunto algebraico  $V$  en  $\mathbb{R}^m$  si  $V$  es real, o en  $\mathbb{R}^{2m}$  en el caso en que  $V$  sea un conjunto algebraico complejo. Para esto necesitamos:

**Definición 1.15.** Sea  $V$  un conjunto algebraico en  $\mathbb{R}^m$ , sea  $X$  un subconjunto compacto de  $V$  con  $V - X$  no-singular y sea  $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que

- i)  $\alpha$  es polinomial,
- ii)  $\alpha$  es propia,
- iii)  $\alpha(x) \geq 0$  para todo  $x \in V$  y
- iv)  $\alpha^{-1}(0) = X$ ;

entonces un subconjunto  $T$  con  $X \subset T \subset V$  es una **vecindad algebraica** de  $X$  en  $V$  si  $T = \alpha^{-1}([0, \delta])$  para alguna función  $\alpha$  y para algún  $\delta > 0$  más pequeño que cualquier valor crítico de  $\alpha$ . (Ver [13, Def. 1.5]).

Supongamos por ejemplo que  $X = p$  es un punto singular aislado de  $V$ ; sea  $\alpha(x) = |x - p|^2$  para  $x \in V$ ; sea  $T = \alpha^{-1}([0, \delta])$ ; la frontera de la vecindad algebraica  $T$  de  $p$  en  $V$  es lo que hemos llamado **aureola de la singularidad**  $p$  en  $V$ .

**Proposición 1.16** ([13, Prop. 1.7] Unicidad de vecindades algebraicas). *Sean  $T_1$  y  $T_2$  vecindades algebraicas de  $X$  en  $V$ ; entonces, existe una familia continua de homeomorfismos  $h_t: V \rightarrow V$  con  $0 \leq t \leq 1$  tal que:*

- i) el homeomorfismo  $h_0$  es la identidad,
- ii) el homeomorfismo  $h_t|_X$  es la identidad para todo  $t$ ,
- iii)  $h_1(T_1) = T_2$  y
- iv)  $h_1$  es un difeomorfismo  $C^\infty$  de  $T_1 - X$  sobre  $T_2 - X$ .

De donde obtenemos que la **aureola de una singularidad** es independiente no sólo del tamaño de la esfera que intersectemos con nuestra variedad algebraica, sino además es independiente del encaje de la variedad algebraica en el espacio ambiente.

### 1.3 Haces vectoriales

En esta sección veremos el concepto de haces vectoriales, los cuales usaremos en la siguiente sección y en el Capítulo 3; un haz vectorial es una construcción geométrica que precisa la idea de una familia de espacios vectoriales parametrizada por un espacio  $B$  (donde  $B$  puede ser un espacio topológico, una variedad diferenciable, etc.) de tal manera que a cada punto de  $B$  le asociamos un espacio vectorial, de manera que todos estos espacios vectoriales juntos formen un espacio  $E$  del mismo tipo que  $B$  (es decir, un espacio topológico, una variedad diferenciable, etc.).

Nuestra principal referencia en esta sección son [10] y [3]; sin embargo, pueden consultarse libros de topología diferencial o de topología algebraica como [21] y [20], entre otros.

**Definición 1.17.** Un **haz vectorial** real de dimensión  $n$  es una terna  $(E, \pi, B)$  (a la cual se le llama **haz vectorial sobre  $B$** ) que consta de lo siguiente:

H1. Un espacio  $E$  llamado **espacio total**.

H2. Un espacio  $B$  llamado **espacio base**.

H3. una función  $\pi: E \rightarrow B$  tal que  $\pi$  es continua y sobreyectiva, a la cual llamaremos **proyección**.

H4. para todo  $x \in B$  se tiene que  $E_x := \pi^{-1}(x)$  (la **fibra** sobre  $x$ ) tiene la estructura de un espacio vectorial real de dimensión  $n$  de manera que se cumple que dado  $x \in B$ , existe una vecindad  $U$  de  $x$  para la cual existe un homeomorfismo

$$f: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

tal que para todo  $u \in U$

$$f_u := f|_{E_u}: E_u \rightarrow \{u\} \times \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

En algunas ocasiones escribiremos  $E$  en vez de  $(E, \pi, B)$  por simplicidad.

**Ejemplo 6.** Dada una variedad diferenciable  $M$  en  $\mathbb{R}^m$ , los espacios tangentes a  $M$  en varios puntos son subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^m$  que generalmente se traslapan uno sobre otro; el **haz tangente**  $T(M)$  es una herramienta usada para considerarlos a cada uno por separado. Específicamente,  $T(M)$  es el subconjunto de  $M \times \mathbb{R}^m$  definido por

$$T(M) = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^m | v \in T_x M\} .$$

El espacio  $T(M)$  contiene naturalmente una copia  $M_0$  de  $M$  que consiste de todos los puntos  $(x, 0)$ .

**Ejemplo 7.** Una vez que hemos visto el haz tangente  $T(M)$  a una variedad diferenciable  $M$ , también podemos definir el haz normal de  $M$ ; para cada  $x \in M$  definimos el **espacio normal** de  $M$  en  $x$ ,  $N_x M$ , como el complemento ortogonal de  $T_x M$  en  $\mathbb{R}^m$ ; entonces, el **haz normal**  $N(M)$  está definido por

$$N(M) = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^m | v \in N_x M\} .$$

**Definición 1.18.** Dados dos haces vectoriales  $E$  y  $E'$  sobre un espacio base  $B$ , diremos que una función continua  $f: E \rightarrow E'$  es un **homomorfismo de haces** si

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & & B \end{array}$$

conmuta y se tiene que toda  $f_x: E_x \rightarrow E'_x$  es lineal.

**Definición 1.19.** Una **sección** del haz vectorial  $E \xrightarrow{\pi} B$  es una aplicación continua  $s: B \rightarrow E$  tal que  $\pi(s(x)) = x$  para todo  $x \in B$ .

**Ejemplo 8.** Todo haz vectorial  $E$  tiene una “sección cero” dada por

$$\begin{aligned} B &\rightarrow E \\ x &\mapsto 0 \in E_x . \end{aligned}$$

Los haces vectoriales no tienen, en general, secciones no nulas; es decir, secciones globales que sean distintas de cero en todo punto; de manera que su existencia es uno de los problemas de los cuales se ocupa la teoría de clases características (ver por ejemplo [33]).

**Ejemplo 9** (Haz tangente de  $\mathbb{S}^2$ ). Consideremos el haz tangente de la esfera  $(T\mathbb{S}^2, \pi, \mathbb{S}^2)$ , con espacio total

$$T\mathbb{S}^2 = \{(t, v) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_t\mathbb{S}^2\} .$$

Este haz no tiene una sección no nula ya que de lo contrario tendríamos un campo vectorial no nulo sobre  $\mathbb{S}^2$  (lo cual sabemos que no es posible, ver [16, Th 16.5]).

**Definición 1.20.** Dado un haz  $E$ , llamaremos **rango** de  $E$  a la dimensión de  $E_x$  para algún  $x \in B$  y lo denotaremos por  $\text{rango}(E)$ .

**Definición 1.21.** Sea  $E \xrightarrow{\pi} B'$  un haz vectorial sobre  $B'$  y sea  $f: B \rightarrow B'$  una función continua. Definimos entonces un haz vectorial  $(f^*E, f^*\pi, B)$  al cual llamaremos **haz inducido por  $f$** :

$$f^*E = \{(x, e) \in B \times E \mid f(x) = \pi(e)\} \subset B \times E$$

donde la aplicación  $f^*\pi: f^*E \rightarrow B$  está dada por la proyección sobre el primer factor; es decir,  $f^*\pi(x, e) = x$ .

La proyección sobre el segundo factor nos da una aplicación  $\tilde{f}: f^*E \rightarrow E$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ f^*\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

**Definición 1.22.** Sea  $(E, \pi, B)$  un haz vectorial de rango  $n$  con  $E$  y  $B$  variedades diferenciables. A una familia

$$\mathbf{o} = \{\mathbf{o}_x\}_{x \in B}$$

de orientaciones  $\mathfrak{o}_x$  de las fibras  $E_x$  le llamaremos una **orientación** de  $E$  si para todo punto  $x \in B$  existe una vecindad  $U$  y una función  $f$  que cumplen (1.1) de manera que:

$$E_u = \pi^{-1}(u) \xrightarrow{f_u} \{u\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

y tal que la orientación  $\mathfrak{o}_u$  para cada  $u \in U$  es enviada a la misma orientación fija en  $\mathbb{R}^n$ .

Cuando tengamos un haz  $(E, \pi, B)$  junto con una orientación  $\mathfrak{o}$ , diremos que  $E$  es un **haz vectorial orientado**.

**Definición 1.23.** Dado un haz vectorial  $(E, \pi, B)$  de rango  $n$  con  $E$  y  $B$  variedades diferenciables, llamaremos **métrica Riemanniana** a una familia continua de productos escalares

$$\langle -, - \rangle_x: \pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}$$

para  $x \in B$ ; esto es, una función continua

$$\rho: E \times_B E = \{(e, e') | \pi(e) = \pi(e')\} \rightarrow \mathbb{R}$$

cuya restricción  $\langle e, e' \rangle = \rho(e, e')$  con  $e, e' \in \pi^{-1}(x)$ , determina un producto escalar.

**Teorema 1.24.** *Sea  $B$  un espacio paracompacto, entonces todo haz vectorial  $(E, \pi, B)$  admite una métrica Riemanniana.*

*Demostración.* Supongamos que  $\pi: E \rightarrow B$  es un haz vectorial sobre un espacio paracompacto  $B$ . Sea  $\{U_\lambda\}$  una cubierta abierta de  $B$  tal que se tiene un homeomorfismo

$$f_\lambda: E_{U_\lambda} = \pi^{-1}(U_\lambda) \xrightarrow{\cong} U_\lambda \times \mathbb{R}^n$$

para todo  $\lambda$ ; entonces podemos usar el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$  para definir un producto escalar en cada fibra. Sea entonces, para cada  $x \in U_\lambda$ ,

$$\langle -, - \rangle_{\lambda, x}: \pi^{-1}(x) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\langle u, v \rangle_{\lambda, x} = \langle f_{\lambda, x}(u), f_{\lambda, x}(v) \rangle,$$

donde  $f_{\lambda, x} = f_\lambda|_{\pi^{-1}(x)}$  y  $\langle -, - \rangle$  representa el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ .

Ya que  $B$  es un espacio paracompacto, entonces existe una partición de la unidad  $\{\mu_\lambda\}$  subordinada a la cubierta  $\{U_\lambda\}$  (ver [3, Th. 3]) y entonces definimos

$$\rho(u, v) = \langle u, v \rangle_x = \sum_{\lambda} \mu_\lambda(x) \langle u, v \rangle_{\lambda, x},$$

lo cual define una métrica Riemanniana sobre  $(E, \pi, B)$ . □

Por los teoremas [7, Th. 10.1] y [3, Th. 3] tenemos que una variedad diferenciable es paracompacta; de donde,

**Corolario 1.25.** *Sea  $B$  es una variedad diferenciable, entonces todo haz vectorial  $(E, \pi, B)$  admite una métrica Riemanniana.*

**Definición 1.26.** Sea  $(E, \pi, B)$  un haz vectorial de rango  $n$  con  $E$  y  $B$  variedades diferenciables; entonces sabemos por el Corolario 1.25 que existe una métrica Riemanniana sobre el haz que dota a cada fibra  $E_x$  con un producto escalar  $\langle -, - \rangle_x$  que depende continuamente de  $x \in B$ . El **haz de esferas asociado** al haz vectorial  $(E, \pi, B)$  y al cual denotamos por  $(S(E), \pi|_{S(E)}, B)$  es el haz localmente trivial cuyo espacio total está definido como

$$S(E) = \{y \in E | \langle -, - \rangle_x = 1, x = \pi(y)\} .$$

**Ejemplo 10** (Haz tangente unitario de  $\mathbb{S}^2$ ). Consideremos el haz tangente de la esfera  $(T\mathbb{S}^2, \pi, \mathbb{S}^2)$ , entonces podemos definir el haz tangente unitario de  $\mathbb{S}^2$  con espacio total

$$S(T\mathbb{S}^2) = \{v \in T\mathbb{S}^2 | |v| = 1\} ,$$

la misma proyección  $\pi, \mathbb{S}^2$  como espacio base y con fibra  $\mathbb{S}^1$ . Esta haz es el haz de esferas asociado al haz tangente del Ejemplo 9.

## 1.4 Homotopía, Homología y Cohomología

En esta sección recordaremos algunos conceptos que nos serán de gran utilidad más adelante; nosotros nos hemos basado en [51], pero también pueden consultarse [3], [16], [24], entre otros para mayores referencias.

Recordemos entonces la definición de cono y suspensión de un espacio en la categoría de los espacios topológicos punteados.

**Definición 1.27.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado, definimos el **cono** sobre  $X$ ,  $(C(X), *)$  como el cociente

$$C(X) = I \times X / (\{0\} \times X \cup I \times \{x_0\}) ,$$

donde asumimos que el punto base de  $I$  es el cero. Usaremos la notación  $[t, x]$  para la imagen de  $(t, x) \in I \times X$  en  $C(X)$ .

**Ejemplo 11.** Sea  $X = \mathbb{S}^n$ , entonces tenemos que  $C(\mathbb{S}^n) = \mathbb{D}^{n+1}$  (ver Figura 1.4).

Tenemos entonces el siguiente resultado:

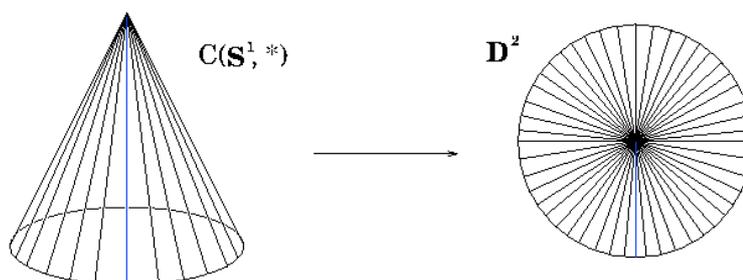


Figura 1.4: El disco  $\mathbb{D}^2$  como  $C(\mathbb{S}^1, *)$ .

**Teorema 1.28** ([51, Proposition 2.32]). *Sea  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una función entre espacios topológicos punteados y sea  $(C(X), *)$  el cono sobre el espacio  $(X, x_0)$ , entonces existe una extensión  $\hat{f}: (C(X), *) \rightarrow (Y, y_0)$  de  $f$  si y sólo si  $f$  es nulhomotópica.*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\
 C(X) & & 
 \end{array}$$

**Definición 1.29.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado, llamaremos la **suspensión** de  $X$  al cociente  $C(X)/X$  y lo denotaremos por  $(S(X), *)$ .

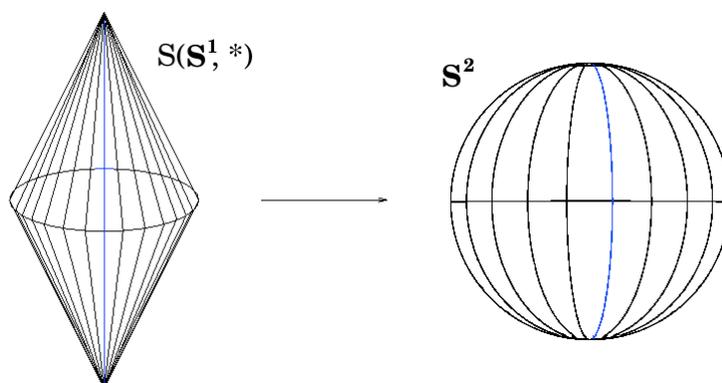


Figura 1.5: La esfera  $\mathbb{S}^2$  como suspensión de  $\mathbb{S}^1$ .

**Ejemplo 12.** Sea  $X = \mathbb{S}^n$ , entonces tenemos que  $(S(\mathbb{S}^n), *) = \mathbb{S}^{n+1}$  (ver Figura 1.5).

**Definición 1.30.** Dados dos espacios topológicos punteados  $(X, x_0)$ ,  $(Y, y_0)$ , definimos la **cuña (wedge)** de ellos,  $X \vee Y$  como:

$$(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$$

y denotaremos como  $*$  al punto base  $(x_0, y_0)$  de  $X \vee Y$ .

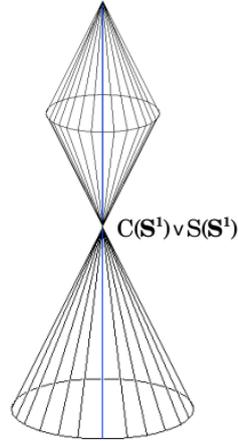


Figura 1.6: La cuña (wedge)  $\mathbb{D}^2 \vee \mathbb{S}^2$ .

En la Figura 1.6 se ilustra la definición anterior.

**Definición 1.31.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado, definimos la aplicación  $\Delta': X \vee X \rightarrow X$  como:

$$\Delta'(x, x_0) = x = \Delta'(x_0, x) .$$

**Definición 1.32.** Dadas dos funciones continuas

$$\begin{aligned} f: (X, x_0) &\rightarrow (X', x'_0) \text{ y} \\ g: (Y, y_0) &\rightarrow (Y', y'_0) , \end{aligned}$$

definiremos la función  $f \vee g: (X \vee Y) \rightarrow (X' \vee Y')$  como:

$$\begin{aligned} f \vee g(x, y_0) &= (f(x), g(y_0)) = (f(x), y'_0) \\ f \vee g(x_0, y) &= (f(x_0), g(y)) = (x'_0, g(y)) . \end{aligned}$$

**Definición 1.33.** Sea  $\mathbb{D}^k$  el disco de dimensión  $k$ , al cual pensaremos como el cono  $C(\mathbb{S}^{k-1})$  y veamos a la esfera  $\mathbb{S}^k$  como la suspensión  $S(\mathbb{S}^{k-1})$ ; definimos entonces la función

$$\alpha': C(\mathbb{S}^{k-1}) \cong \mathbb{D}^k \rightarrow (\mathbb{S}^k \vee D^k) \cong (S(\mathbb{S}^{k-1}) \vee C(\mathbb{S}^{k-1}))$$

dada por:

$$\alpha'[t, x] = \begin{cases} ([2t, x], *) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} , \\ (*, [2t - 1, x]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 . \end{cases}$$

Denotemos por  $[X, Y]$  el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de  $X$  a  $Y$ . Análogamente,  $[X, Y]_*$  será el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas de  $(X, x_0)$  a  $(Y, y_0)$ , es decir,  $[X, Y]_* = [X, x_0; Y, y_0]$ .

**Definición 1.34.** Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado, entonces definimos al  $k$ -ésimo **grupo de homotopía** de  $(X, x_0)$  como:

$$\pi_k(X, x_0) = [\mathbb{S}^k, X]_* .$$

Recordemos que, dada una aplicación continua  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , ésta induce un homomorfismo de grupos

$$f_*: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, y_0) ,$$

definido por

$$f_*([g]) = [f \circ g]$$

donde  $[g]$  es la clase de homotopía de una aplicación punteada  $g: \mathbb{S}^k \rightarrow X$  y  $[f \circ g]$  es la clase de homotopía de la composición  $f \circ g: \mathbb{S}^k \rightarrow Y$ .

**Ejemplo 13.** Los grupos de homotopía de la esfera  $\mathbb{S}^k$  son:

$$\pi_i(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i < k. \end{cases}$$

Los grupos  $\pi_i(\mathbb{S}^k)$  para  $i > k$  no se conocen completamente, muchos se han calculado y su estudio continua siendo un tópico muy importante en topología algebraica.

Entonces podemos dar una definición que generalizaremos más adelante:

**Definición 1.35.** Dada una función  $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ ,  $f$  induce un homomorfismo

$$f_*: \pi_k(\mathbb{S}^k) \rightarrow \pi_k(\mathbb{S}^k) ;$$

esto es,  $f_*$  es un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$  (ver Ejemplo 13); llamaremos a  $f_*(1)$  el **grado** de  $f$  y lo denotaremos como  $\text{grado}(f)$ .

Ahora recordemos algo de homología y cohomología; en este trabajo usaremos la homología y cohomología celular por ser las que más convienen a nuestros propósitos.

Sea  $B$  un complejo  $CW$  compacto; para cada  $i$ , el grupo de  $i$ -cadenas celulares  $C_i(B, \mathbb{Z})$  es el grupo Abelian libre generado por todas las  $i$ -celdas  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ; es decir, sus elementos son combinaciones lineales formales

$$a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n .$$

Para describir los homomorfismos frontera, usaremos la noción de coeficiente de incidencia de las celdas.

**Definición 1.36.** Sea  $\alpha$  una  $(i - 1)$ -celda y sea

$$\psi: \partial\mathbb{D}^i \rightarrow B^{(i-1)}$$

la aplicación de pegado de una  $i$ -celda  $\beta$ . Esta aplicación induce una aplicación  $\bar{\psi}$  definida como:

$$\bar{\psi}: \partial\mathbb{D}^i \xrightarrow{\psi} B^{(i-1)} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^{i-1} ,$$

donde  $p$  es obtenida al contraer el  $(i - 2)$ -esqueleto  $B^{(i-2)}$  en el  $(i - 1)$ -esqueleto de  $B$  y además todas las  $(i - 1)$ -celdas, excepto  $\alpha$ , a un punto.

Entonces el coeficiente de incidencia  $[\beta : \alpha]$  de las celdas  $\alpha$  y  $\beta$  es  $\text{grado}(\bar{\psi})$ .

El significado geométrico del coeficiente de incidencia de las celdas  $\alpha$  y  $\beta$  es que muestra cuantas veces pasa la frontera de  $\beta$  a lo largo de la celda  $\alpha$ .

Así, los homomorfismos frontera  $\partial_i: C_i(B, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{i-1}(B, \mathbb{Z})$  están dados por:

$$\partial_i(\beta) = \sum_{\alpha_j \in B} [\beta : \alpha_j] \alpha_j ,$$

donde la suma se toma sobre todas las  $(i - 1)$ -celdas de  $B$ . Se puede ver (por ejemplo en [16, Ch. 21]) que para cualquier  $i$  tenemos:

$$\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0 , \tag{1.2}$$

es decir, los homomorfismos frontera  $\partial_i$  así definidos convierten a la sucesión de grupos  $C_i(B, \mathbb{Z})$  en un complejo de cadena.

Entonces definimos el  $i$ -ésimo grupo de homología  $H_i(B, \mathbb{Z})$  como:

$$H_i(B, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \partial_i}{\text{Im } \partial_{i+1}} .$$

Por otra parte, sea

$$C^i(B) = \text{Hom}(C_i(B), \mathbb{Z}) ,$$

es decir, es el conjunto de homomorfismos de  $C_i(B, \mathbb{Z})$  a  $\mathbb{Z}$  con sus  $n$  generadores duales  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  definidos por:

$$\varphi_i(\sigma_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Dado un elemento  $\epsilon \in C_i(B, \mathbb{Z})$  tal que  $\epsilon = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n$ , tenemos que  $a_i = \varphi_i(\epsilon)$ ; denotaremos  $\langle \epsilon, \sigma_i \rangle$  a la evaluación  $\varphi_i(\epsilon)$ .

Así, dado  $\varpi \in C^i(B, \mathbb{Z})$  y dado un elemento  $\epsilon \in C_i(B, \mathbb{Z})$ , podemos expresar este elemento como:

$$\varpi(\epsilon) = \sum_{\sigma} \langle \epsilon, \sigma \rangle \varpi(\sigma) \tag{1.3}$$

Recordemos que, dada una cadena  $\xi \in C_i(B, \mathbb{Z})$  y una cocadena  $\varpi \in C^{i-1}(B, \mathbb{Z})$ , los homomorfismos cofrontera  $\delta_i: C^{i-1}(B, \mathbb{Z}) \rightarrow C^i(B, \mathbb{Z})$  (ver [29]) están definidos como:

$$\delta_i \varpi(\xi) := \varpi(\partial_i \xi) . \quad (1.4)$$

Esta igualdad significa que el homomorfismo  $\delta_i$  es dual del homomorfismo  $\partial_i$ , de manera que, por la ecuación (1.2) tenemos también que:

$$\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0 .$$

Podemos definir entonces el  $i$ -ésimo grupo de cohomología  $H^i(B, \mathbb{Z})$  como:

$$H^i(B, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \delta_{i+1}}{\text{Im } \delta_i} .$$

**Nota 2.** Cuando se habla de homología celular hay que observar que las orientaciones sean las correctas; por ejemplo, al definir el coeficiente de incidencia de las celdas; en este trabajo hemos obviado esta parte, pero una referencia detallada al respecto puede encontrarse en [7, Ch. 4 Sect. 10]

Ahora, el siguiente concepto y el siguiente resultado nos darán una manera de relacionar la homotopía con la homología.

**Definición 1.37.** Dado un espacio  $X$ , definimos el **homomorfismo de Hurewicz**

$$\Phi: \pi_k(X, x_0) \rightarrow H_k(X)$$

como sigue: una vez que hemos elegido una orientación para  $\mathbb{S}^k$ , hay un isomorfismo canónico  $H_k(\mathbb{S}^k) \cong \mathbb{Z}$ , donde el generador es la **clase fundamental**  $[\mathbb{S}^k] \in H_k(\mathbb{S}^k)$ , de manera que si tenemos una función  $f: (\mathbb{S}^k, p) \rightarrow (X, x_0)$ , su clase de homotopía  $[f] \in \pi_k(X, x_0)$  y la función inducida

$$f_*: H_k(\mathbb{S}^k) \rightarrow H_k(X) ,$$

definimos  $\Phi([f])$  como

$$\Phi([f]) := f_*[\mathbb{S}^k] \in H_k(X)$$

**Teorema 1.38** (del isomorfismo de Hurewicz). *Sea  $k \geq 2$ ; supongamos que  $X$  es conexo por trayectorias y que  $\pi_i(X, x_0) = 0$  para todo  $i < k$ . Entonces el homomorfismo de Hurewicz induce un isomorfismo*

$$\pi_k(X, x_0) \cong H_k(X, \mathbb{Z}) .$$

La demostración de este teorema puede encontrarse por ejemplo, en [22, Sect. 1.2] o en [7, Th. 3.4].

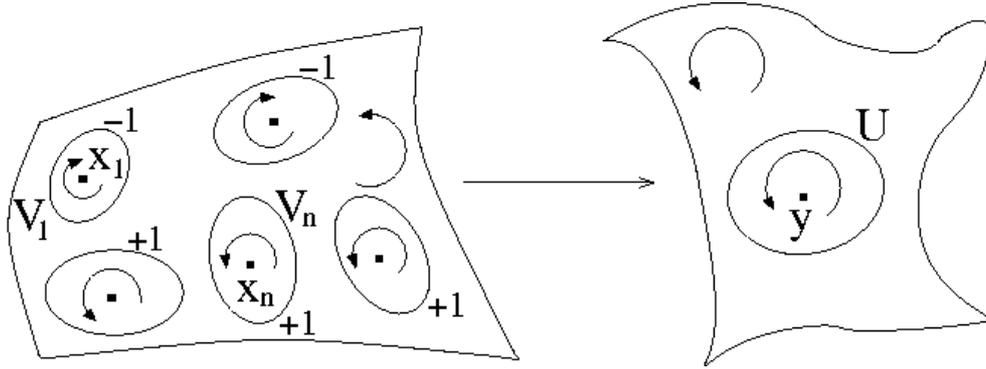


Figura 1.7: Cómo calcular el grado de una función.

### 1.4.1 El grado de una función

**Definición 1.39.** Dada una función  $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ ,  $f$  induce una función

$$f_*: H_k(\mathbb{S}^k) \rightarrow H_k(\mathbb{S}^k);$$

esto es,  $f_*$  es un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$  en  $\mathbb{Z}$ ; llamaremos a  $f_*(1)$  el **grado** de  $f$  y lo denotaremos como  $\text{grado}(f)$ .

**Nota 3.** Aplicando el Teorema 1.38 en el caso de la esfera  $\mathbb{S}^k$ , podemos ver que la Def. 1.35 y la Definición anterior del grado de una función  $f: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ , son equivalentes.

Veremos a continuación que también podemos definir el grado en el caso de que tengamos una función entre variedades diferenciables.

Sea  $M$  una variedad cerrada, conexa y orientada de dimensión  $n$ . Entonces tenemos que

$$H_n(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

**Definición 1.40.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables cerradas, conexas y orientadas de dimensión  $n$  y sea  $f: M \rightarrow N$ ; se tiene entonces que, usando la igualdad (1.5),  $f$  induce un homomorfismo

$$f_*: \mathbb{Z} \cong H_n(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ [M] \mapsto \lambda[N],$$

donde  $H_n(M, \mathbb{Z})$  está generado por la clase fundamental  $[M]$ ,  $H_n(N, \mathbb{Z})$  está generado por la clase fundamental  $[N]$  y  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

Diremos entonces que  $\lambda$  es el **grado** de  $f$ .

Geoméricamente, el grado de la aplicación representa cuantas veces se “envuelve”  $M$  en  $N$  mediante la aplicación  $f$ . El signo del grado indica si se “envuelve” preservando la orientación o invirtiéndola.

**Teorema 1.41** ([17, pag. 26]). *Si  $y$  es un valor regular de  $f: X \rightarrow Y$ , donde  $X$  es compacto y tiene la misma dimensión que  $Y$ , entonces  $f^{-1}(y)$  es un conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_n\}$  y existe una vecindad  $U$  de  $y$  en  $Y$  tal que  $f^{-1}(U)$  es una unión disjunta  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  donde  $V_i$  es una vecindad abierta de  $x_i$  y  $f$  manda cada  $V_i$  difeomorficamente sobre  $U$ .*

Y usando esto, tenemos el siguiente resultado:

**Lema 1.42** ([17, pag. 109]). *Sean  $X$  y  $Y$  dos variedades diferenciables orientadas; tales que  $X$  es compacta,  $Y$  es conexa y  $\dim Y = \dim X$ ; dada una función suave  $f: X \rightarrow Y$ , el grado de  $f$  se puede calcular contando (con signo) las preimágenes de un valor regular  $y \in Y$ .*

**Proposición 1.43** ([17, pag. 110]). *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación suave entre dos variedades orientadas y compactas de la misma dimensión y sea  $W$  una variedad diferenciable compacta, tal que  $X = \partial W$ . Si  $f$  se extiende a  $W$ , entonces  $\text{grado}(f) = 0$ .*

## 1.4.2 La característica de Euler y el género de una superficie

Con los conceptos que hemos visto y algunos más que daremos ahora, podemos definir dos conceptos que necesitaremos en la última parte de nuestro trabajo: la característica de Euler de un espacio  $X$  y el género de una superficie. Recordemos entonces algunos conceptos de grupos:

**Definición 1.44.** Sea  $G$  un grupo. Un elemento  $g \in G$  es de **torsión** si  $g$  tiene orden finito.

**Teorema 1.45.** *Sea  $A$  un grupo Abeliano finitamente generado, entonces los elementos de orden finito forman un subgrupo  $B$  (al que llamaremos subgrupo de torsión) y el grupo cociente  $A/B$  es un grupo Abeliano libre.*

**Definición 1.46.** El mínimo número de generadores del grupo  $A/B$  es llamado el **rango** de  $A$ .

Con este último concepto podemos hablar de la característica de Euler:

**Definición 1.47.** Sea  $X$  un espacio tal que:

- i)  $H_i(X, \mathbb{Z})$  es finitamente generado para cada  $i$ ,
- ii)  $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$  excepto para un número finito de  $i$ .

entonces definimos la **característica de Euler** de  $X$  como:

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \text{rango } H_i(X, \mathbb{Z}) .$$

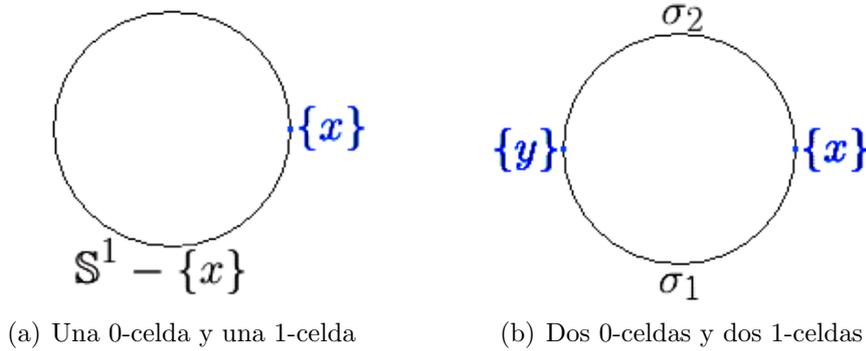


Figura 1.8: Dos descomposiciones celulares de  $\mathbb{S}^1$

Para tener una idea geométrica de lo que significa este número, veamos el siguiente resultado:

**Teorema 1.48** ([7, Th. 13.3]). *Sea  $X$  un complejo CW y sea  $a_i$  el número de  $i$ -celdas en  $X$ . Entonces  $\chi(X)$  está definida y*

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i a_i .$$

Lo que nos dice este teorema es que no importando la descomposición celular que tomemos de un espacio, la característica de Euler se mantiene invariante, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 14.** Dado  $\mathbb{S}^1$ , podemos tener la siguiente descomposición celular: sea  $x \in \mathbb{S}^1$ , entonces  $\{x\}$  es una 0-celda y  $\mathbb{S}^1 - \{x\}$  es una 1-celda (ver Figura 1.8(a)); en este caso tenemos que

$$\chi(\mathbb{S}^1) = (-1)^0(1) + (-1)^1(1) = 1 - 1 = 0 ;$$

por otro lado, si tomamos dos puntos  $x, y \in \mathbb{S}^1$ , tenemos que  $\{x\}$  y  $\{y\}$  son 0-celdas y  $\sigma_1, \sigma_2$  son 1-celdas (ver Figura 1.8(b)); entonces:

$$\chi(\mathbb{S}^1) = (-1)^0(2) + (-1)^1(2) = 2 - 2 = 0 .$$

Por supuesto que este ejemplo sólo ilustra una idea geométrica.

La característica de Euler nos permitirá hablar de otro concepto: el género de una superficie; pero primero enunciaremos un importante teorema acerca de la clasificación de las superficies compactas orientables sin frontera; no damos su demostración en este trabajo por no ser cercana a nuestros propósitos; sin embargo, puede encontrarse una prueba detallada en [28] para aquellos que estén interesados.

**Teorema 1.49** ([28, Th. 5.1]). *Cualquier superficie compacta, orientable y sin frontera es homeomorfa:*

- i) a una esfera ó*
- ii) a una suma conexa de toros.*

Dado este resultado, tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.50.** Sea  $S$  una superficie compacta orientable; si  $S$  es una suma conexa de  $n$  toros, diremos que su **género**  $g(S)$  es  $n$ ; mientras que diremos que el género de  $\mathbb{S}^2$  es cero.

Tenemos entonces la siguiente relación entre el género y la característica de Euler

$$g(S) = \frac{2 - \chi(S)}{2}. \quad (1.6)$$

Otras maneras de ver al género con:

- El género  $g(S)$  es el máximo número de curvas cerradas ajenas que pueden dibujarse sobre la superficie  $S$  sin separarla (ver [50, Sect. 1.1.3]).
- La superficie  $S$  puede ser obtenida por “pegar”  $g(S)$  asas a la esfera  $\mathbb{S}^2$  (ver [7, Sect. III.9]).

## 1.5 La clase de Euler

En esta sección hablaremos de un concepto asociado principalmente a un haz vectorial: la clase de Euler; sin embargo, en nuestro caso estamos interesados en la clase de Euler para un haz de esferas orientado; nuestra principal base es [22]; pero pueden consultarse también [3] o [7] para otro punto de vista.

Sea entonces  $(E, \pi, B)$  un haz vectorial real orientado (la orientación será importante para definir la clase de Euler) de dimensión  $k + 1$  (con  $k \geq 1$ ) tal que  $B$  es un complejo  $CW$  compacto y fibra  $E_x \cong \mathbb{R}^{k+1}$  para todo  $x \in B$ . Entonces tomamos el haz de esferas asociado  $(S(E), \pi|_{S(E)}, B)$ ; de manera que la fibra  $S(E)_x$  será isomorfa a  $\mathbb{S}^k$  y nos referiremos a este haz como  $S(E)$  y a su proyección como  $\pi$  para hacer más sencilla la notación.

Veremos a la clase de Euler,  $e(S(E)) \in H^{k+1}(B, \mathbb{Z})$  como la “obstrucción primaria” a la existencia de una sección de  $S(E)$ ; de manera que trataremos de construir una sección de un haz.

Entonces, primero elegimos una sección  $s_0$  de  $S(E)$  sobre el 0-esqueleto de  $B$ ; es decir, sólo tomamos un punto en la fibra sobre cada 0-celda.

Ahora, si tenemos una sección  $s_{i-1}$  sobre el  $(i-1)$ -esqueleto de  $B$ , donde  $i \leq k$ , entonces podemos extender esta sección a una sección  $s_i$  sobre el  $i$ -esqueleto de la siguiente manera:

Sea  $e : \mathbb{D}^i \rightarrow B$  una  $i$ -celda, entonces tenemos que el haz  $e^*S(E)$  sobre  $\mathbb{D}^i$  es trivial, ya que todo haz sobre un espacio contraíble lo es; de manera que podemos identificar  $e^*S(E) \simeq \mathbb{D}^i \times \mathbb{S}^k$ .

La sección  $s_{i-1}$  induce una función  $\hat{s}_{i-1}: \partial\mathbb{D}_i = \mathbb{S}^{i-1} \rightarrow \mathbb{S}^k$  (al ver esta función, se entiende que trabajemos con el haz inducido  $e^*S(E)$  en vez de la restricción del haz debido a que la función  $e$  puede no ser inyectiva sobre  $\partial\mathbb{D}_i$ ) y dicha función se extiende sobre  $\mathbb{D}^i$  ya que  $\pi_{i-1}(\mathbb{S}^k) = 0$ , usamos el Teorema 1.28 y el hecho de que  $\hat{s}_{i-1}$  es nulhomotópica en cada celda para obtener una sección  $s_i$  ya que el disco es el cono sobre la esfera.

Tenemos entonces que, por inducción, hemos construido una sección  $s_k$  sobre el  $k$ -esqueleto.

Ahora tratemos de extender  $s_k$  sobre el  $(k+1)$ -esqueleto. Sea  $\sigma: \mathbb{D}^{k+1} \rightarrow B$  una  $(k+1)$ -celda. Elegimos una trivialización que preserve orientación  $\sigma^*S(E) \simeq \mathbb{D}^{k+1} \times \mathbb{S}^k$ ; entonces  $s_k$  define una función  $\hat{s}_{k,\sigma}: \partial\mathbb{D}^{k+1} = \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  y la clase de homotopía de esta función es un elemento en  $\pi_k(\mathbb{S}^k) = \mathbb{Z}$ ; de manera que podemos identificar esta función con un elemento de  $\mathbb{Z}$ ; esta asignación de un entero a cada  $(k+1)$ -celda define una cocadena

$$\varpi(s_k) \in C^{k+1}(B, \mathbb{Z});$$

la denotamos así ya que dicha cocadena depende de la sección  $s_k$ ; es decir, dada una  $(k+1)$ -celda  $\sigma$ , tenemos que:

$$\varpi(s_k)(\sigma) = \text{grado}(\hat{s}_{k,\sigma})$$

y para una cadena arbitraria,  $\varpi(s_k)$  se extiende linealmente.

**Lema 1.51.** *La cocadena  $\varpi(s_k)$  es un cociclo; es decir,  $\delta\varpi(s_k) = 0$ .*

*Demostración.* Lo que queremos demostrar es que la cocadena  $\varpi$  es un cociclo; es decir, que  $\delta\varpi$  es el homomorfismo cero; así, dada una  $(k+2)$ -celda  $\xi: \mathbb{D}^{k+2} \rightarrow B$  cualquiera, queremos ver que

$$\delta\varpi(s_k)(\xi) = \varpi(s_k)(\partial\xi) = \sum_{\sigma} \langle \partial\xi, \sigma \rangle \varpi(s_k)(\sigma) = 0 .$$

Elegimos una identificación del interior de cada  $(k+1)$ -celda  $\sigma$  en  $B$  y el interior de  $\mathbb{D}^{k+1}$  y llamaremos  $p_{\sigma}$  al punto “centro” de  $\sigma$ . Entonces, por la estabilidad de la transversalidad ([17, Transversality Homotopy Th.]), podemos hallar una función homotópica a la función  $\xi|_{\mathbb{S}^{k+1}}: \mathbb{S}^{k+1} \rightarrow B$ , de tal manera que pensaremos a cada  $p_{\sigma}$  como valor regular de  $\xi$ .

Entonces aplicando el Teorema 1.41, obtenemos que:

- i) La imagen inversa  $\xi^{-1}(p_{\sigma})$  es un conjunto finito de puntos  $x \in \mathbb{S}^{k+1}$ .
- ii) La imagen inversa de un  $k+1$ -disco pequeño  $\mathbb{D}_{\sigma}$  alrededor de  $p_{\sigma}$  consiste de un  $k+1$ -disco  $\mathbb{D}_x \subset \mathbb{S}^{k+1}$  para cada  $x \in \xi^{-1}(p_{\sigma})$  tal que la restricción de  $\xi$  a  $\mathbb{D}_x$  es un homeomorfismo.

Entonces asignaremos a cada  $x \in \xi^{-1}(p_\sigma)$  un signo  $\epsilon(x)$  que puede valer  $+1$  ó  $-1$ , dependiendo de si el isomorfismo  $d\xi|_{\mathbb{D}_x}: T_x(\mathbb{D}_x) \rightarrow T_{p_\sigma}(\mathbb{D}_\sigma)$  preserva o invierte orientación, de manera que  $\epsilon(x) = 1$  si y sólo si  $\xi|_{\mathbb{D}_x}$  es un homeomorfismo que preserva orientación.

Así, tenemos que

$$\langle \partial\xi, \sigma \rangle = \sum_{x \in \xi^{-1}(p_\sigma)} \epsilon(x), \quad (1.7)$$

ya que  $\langle \cdot, \sigma \rangle$  es una cocadena básica, es decir un generador de  $C^{k+1}(B, \mathbb{Z})$ , así que  $\langle \partial\xi, \sigma \rangle$  es el coeficiente de  $\sigma$  en  $\partial\xi$  y este coeficiente está dado por la suma del lado derecho de la igualdad.

A continuación, podemos extender la sección  $s_k$  a una sección  $\tilde{s}_{k+1}$  sobre

$$B^{k+1} - \bigcup_{\sigma} p_\sigma$$

(ya que, si quitamos cada  $p_\sigma$ , es como si tuviéramos sólo las fronteras de las  $(k+1)$ -celdas) y elegimos entonces una trivialización

$$\xi^* S(E) \simeq \mathbb{D}^{k+2} \times \mathbb{S}^k.$$

Tenemos entonces que la sección  $\tilde{s}_{k+1}$  define una función

$$f: \mathbb{S}^{k+1} - \bigcup_{\sigma} \xi^{-1}(p_\sigma) \rightarrow \mathbb{S}^k$$

y por (ii), para cada  $x \in \xi^{-1}(p_\sigma)$ , tenemos que:

$$\epsilon(x)[f|_{\partial\mathbb{D}_x}] = \varpi(s_k)(\sigma) \in \pi_k(\mathbb{S}^k),$$

lo cual, combinándolo con la ecuación (1.7), nos da:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \langle \partial\xi, \sigma \rangle \varpi(s_k)(\sigma) &= \sum_{\sigma} \langle \partial\xi, \sigma \rangle \epsilon(x)[f|_{\partial\mathbb{D}_x}] \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_\sigma)} \epsilon(x) \epsilon(x)[f|_{\partial\mathbb{D}_x}] \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_\sigma)} [f|_{\partial\mathbb{D}_x}] \in \pi_k(\mathbb{S}^k) \end{aligned}$$

Ahora, sea  $X$  el complemento en  $\mathbb{S}^{k+1}$  de los interiores de las bolas  $\mathbb{D}_x$ , esto es,  $X$  es una variedad diferenciable compacta con frontera. Así, por el isomorfismo

de Hurewicz (Teorema 1.38), tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_{\sigma})} [f|_{\partial \mathbb{D}_x}]\right) &= \sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_{\sigma})} \Phi([f|_{\partial \mathbb{D}_x}]) \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_{\sigma})} f|_{\partial \mathbb{D}_{x*}}[\mathbb{D}_x] \\ &= f|_{\partial \mathbb{D}_{x*}}\left(\sum_{\sigma} \sum_{x \in \xi^{-1}(p_{\sigma})} [\mathbb{D}_x]\right) = -f|_{\partial \mathbb{D}_{x*}}[\partial X] , \end{aligned}$$

ya que cada  $[\mathbb{D}_x]$  es un ciclo y la suma de todos es el ciclo  $[\partial X]$ ; donde

$$-f|_{\partial \mathbb{D}_{x*}}[\partial X] \in \pi_k(\mathbb{S}^k)$$

es el grado de  $f|_{\partial X}$ . Este grado es cero por la Proposición 1.43; así  $\delta \varpi(s_k) = 0$ , de donde la cocadena  $\varpi(s_k)$  es un cociclo.  $\square$

**Definición 1.52.** A la clase de cohomología del cociclo  $\varpi(s_k)$ , le llamaremos la **clase de Euler** de  $S(E)$  y la denotaremos por  $e(S(E))$ .

**Lema 1.53.** *La clase  $e(S(E))$  está bien definida.*

*Demostración.* Sean  $s_k$  y  $t_k$  dos secciones sobre el  $k$ -esqueleto; lo que queremos ver es que  $[\varpi(s_k)] = [\varpi(t_k)]$ ; es decir,  $\varpi(s_k) - \varpi(t_k) \in \text{Im}(\delta)$  de manera que, trataremos de construir una cocadena  $\eta \in C^k(B, \mathbb{Z})$  tal que:

$$\varpi(s_k) - \varpi(t_k) = \delta(\eta) . \quad (1.8)$$

Consideremos el haz inducido  $\pi_1^*S(E)$  de  $S(E)$  a  $B \times I$  con la estructura CW del producto:

$$\begin{array}{ccc} S(E) \times I \simeq \pi_1^*S(E) & \longrightarrow & S(E) \\ (\pi_1, Id) \downarrow & & \downarrow \pi \\ B \times I & \xrightarrow{\pi_1} & B \end{array}$$

Así tenemos que  $\pi_1$  es la proyección sobre la primera coordenada y

$$\pi_1^*S(E) = \{(\pi(e, t, e)) \in B \times I \times S(E)\} .$$

Podemos entonces pensar a  $s_k$  como una sección definida sobre  $B^k \times \{0\}$  y a  $t_k$  como una sección definida sobre  $B^k \times \{1\}$ , entonces es posible extender estas secciones para tener una sección  $u_k$  sobre  $B^{k-1} \times I$ , no hay obstrucción alguna pues estamos extendiendo sobre el  $k$ -esqueleto de  $B \times I$ ; entonces, por el Lema 1.51,  $\varpi(u_k)$  es un cociclo, es decir,

$$\delta \varpi(u_k) = 0 \in C^{k+2}(B \times I, \mathbb{Z}) . \quad (1.9)$$

Definimos entonces la cocadena  $\eta \in C^k(B, \mathbb{Z})$  como sigue:

Sea  $\rho$  es una  $k$ -celda en  $B$ , entonces

$$\eta(\rho) := \varpi(u_k)(\rho \times I) \in \mathbb{Z} .$$

Así, si evaluamos la ecuación (1.9) en una  $(k+2)$ -celda  $\sigma \times I$  en  $B \times I$ , obtenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\varpi(u_k)(\sigma \times I) = \varpi(u_k)(\partial(\sigma \times I)) \\ &= \varpi(u_k)(-\sigma \times \{0\} + \sigma \times \{1\} + (\partial\sigma \times I)) \\ &= -\varpi(u_k)(\sigma \times \{0\}) + \varpi(u_k)(\sigma \times \{1\}) + \varpi(u_k)(\partial\sigma \times I) \\ &= -\varpi(s_k)(\sigma) + \varpi(t_k)(\sigma) + \eta(\partial\sigma) \end{aligned}$$

y recordando la ecuación (1.4), tenemos entonces que

$$\delta(\eta)(\sigma) = \varpi(s_k)(\sigma) - \varpi(t_k)(\sigma)$$

para cualquier  $(k+1)$ -celda  $\sigma$ , de donde obtenemos la ecuación (1.8) y la clase de Euler  $e(S(E))$  está bien definida.  $\square$

**Nota 4.** A continuación obviaremos que el haz  $S(E)$  está asociado a un haz vectorial  $E$  y sólo diremos que  $S(E)$  es un  $\mathbb{S}^k$ -haz; es decir, que es un haz con fibra  $\mathbb{S}^k$ .

Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.54.** *Sea  $S(E)$  un  $\mathbb{S}^k$ -haz orientado sobre un complejo CW  $B$ . Entonces, existe una sección de  $S(E)$  sobre el  $(k+1)$ -esqueleto  $B^{(k+1)}$  si y sólo si  $e(S(E)) = 0 \in H^{k+1}(B; \mathbb{Z})$ .*

*Demostración.* Veamos cada implicación por separado.

$\Rightarrow$  Si existe una sección  $s_k$  sobre el  $k$ -esqueleto tal que  $s_k$  se extiende al  $(k+1)$ -esqueleto, entonces en cada  $(k+1)$ -celda  $\sigma$  tenemos una función

$$f_\sigma: \partial\mathbb{D}^{k+1} \rightarrow \mathbb{S}^k$$

que se extiende a todo  $\mathbb{D}^{k+1}$ ; entonces, por el Teorema 1.28,  $f_\sigma$  es nulhomotópica, de donde el grado de  $f_\sigma$  es cero; entonces

$$\varpi(s_k)(\sigma) = 0$$

para toda  $(k+1)$ -celda  $\sigma$ , por ende, la cocadena  $\varpi(s_k)$  es la cocadena cero y así  $e(S(E)) = 0$ .

$\Leftarrow$  Supongamos que  $e(S(E)) = 0$ . Sea  $s_k$  una sección sobre el  $(k+1)$ -esqueleto, entonces  $[\varpi(s_k)] = 0$ , de manera que  $\varpi(s_k) = \delta(\eta)$  para algún  $\eta \in C^k(B, \mathbb{Z})$ .

Sea  $\rho$  una  $k$ -celda y sea  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\eta(\rho) = n$ .

Por la construcción que hicimos justo antes del Lema 1.51, tenemos una sección  $s_k$  sobre el  $k$ -esqueleto tal que induce una función

$$\hat{s}_k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{S}^k .$$

Tomamos entonces  $g: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  tal que  $\text{grado}(g) = n$  y sea  $\hat{t}_k: \mathbb{D}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  dada por:

$$\hat{t}_k = \Delta' \circ (g \vee \hat{s}_k) \circ \alpha' ,$$

donde  $\hat{t}_k|_{\mathbb{S}^{k-1}} = \hat{s}_k|_{\mathbb{S}^{k-1}}$ .

Así, tenemos una función  $h: \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  dada por  $\hat{s}_k$  en el hemisferio norte de la esfera y por  $\hat{t}_k$  en el hemisferio sur, pegadas a lo largo del ecuador donde ambas son iguales y por el Lema [51, Lemma 2.47],  $\text{grado}(h) = n$ .

Además tenemos que la función  $\hat{t}_k$  nos da una sección  $t_k$  sobre  $B^{(k)}$ .

Ahora, de manera análoga a la construcción que se hizo en la demostración del Lema 1.53, tomamos el haz inducido de  $S(E)$  a  $B \times I$  con la estructura CW del producto.

Consideremos la sección  $s_k$  definida sobre  $B \times \{0\}$  y la sección  $t_k$  definida sobre  $B \times \{1\}$ . Podemos entonces definir una sección  $u_k$  sobre el  $k$ -esqueleto de  $B \times I$  y al querer extender esta sección al  $(k+1)$ -esqueleto de  $B \times I$  obtenemos un  $(k+1)$ -cociclo

$$\varpi(u_k) \in C^{k+1}(B \times I, \mathbb{Z}) .$$

Por otra parte, dada una  $(k+1)$ -celda  $\rho \times I \in B \times I$ ,

$$u_k|_{\partial(\rho \times I)} = u_k|_{(\rho \times \{0\}) \cup (\partial\rho \times I) \cup (\rho \times \{1\})} ,$$

donde

$$\begin{aligned} u_k(x, 0) &= \hat{s}_k(x) , & x \in \rho \\ u_k(x, t) &= \hat{s}_k(x) = \hat{t}_k(x), & x \in \partial\rho, t \in I \\ u_k(x, 1) &= \hat{t}_k(x), & x \in \rho . \end{aligned}$$

Así, vemos que  $u_k|_{\partial(\rho \times I)} \simeq h$ , de donde

$$\text{grado}(u_k|_{\partial(\rho \times I)}) = n ,$$

es decir,

$$\varpi(u_k)(\rho \times I) = n = \eta(\rho) .$$

Entonces, sea  $\sigma$  una  $(k+1)$ -celda, como  $\varpi(u_k)$  es un cociclo, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\varpi(u_k)(\sigma \times I) = \varpi(u_k)(\partial(\sigma \times I)) \\ &= \varpi(u_k)(-(\sigma \times \{0\}) + (\partial\sigma \times I) + (\sigma \times \{1\})) \\ &= -\varpi(u_k)(\sigma \times \{0\}) + \varpi(u_k)(\partial\sigma \times I) + \varpi(u_k)(\sigma \times \{1\}) \\ &= -\varpi(s_k)(\sigma) + \eta(\partial\sigma) + \varpi(t_k)(\sigma) , \end{aligned}$$

como esto se cumple para toda  $(k+1)$ -celda  $\sigma$ , tenemos que:

$$\varpi(t_k) = \varpi(s_k) - \delta\eta = 0 .$$

Por lo tanto,  $t_k$  se extiende sobre el  $(k+1)$ -esqueleto de  $B$ .  $\square$

**Proposición 1.55.** *Un  $\mathbb{S}^1$ -haz orientado sobre un complejo CW tiene una sección si y sólo si su clase de Euler se anula.*

*Demostración.* Si la clase de Euler se anula, entonces por la Proposición 1.54 hay una sección sobre el 2-esqueleto y ya que los grupos de homotopía  $\pi_j(\mathbb{S}^1) = 0$  para  $j \geq 2$ , no hay obstrucción para extender la sección sobre los esqueletos de dimensiones más altas.

Por otra parte, si el  $\mathbb{S}^1$ -haz tiene una sección, entonces no hay obstrucción y la clase de Euler es cero.  $\square$

### 1.5.1 La clase de Euler relativa

En esta parte veremos el caso en que tenemos un haz orientado con fibra  $\mathbb{S}^1$  sobre una superficie con frontera no vacía y queremos construir la clase de Euler del haz relativa a una sección en la frontera de la superficie.

Sea  $(S(E), \pi, B)$  un haz fibrado con fibra  $\mathbb{S}^1$ , donde  $B$  es una superficie y tal que  $\partial B \neq \emptyset$ .

Sea  $s$  una sección de  $S(E)$  sobre la frontera  $\partial B$ , entonces, de manera análoga a como construimos la clase de Euler previamente, extendemos la sección  $s$  a una sección  $s_0$  sobre  $B^{(0)}$ , con la propiedad de que  $s_0$  está definida no sólo en  $B^{(0)}$  sino en  $\partial B \cup B^{(0)}$ .

Una vez más, como en la construcción de la clase de Euler, extendemos la sección  $s_0$  a una sección  $s_1$  sobre el 1-esqueleto de  $B$  (donde, ya que  $B$  es una superficie, tenemos que  $\partial B \subset B^{(1)}$ ) de tal manera que, dada una 1-celda  $\zeta$ , si  $\zeta \in \partial B$  tenemos que  $s_1 = s$ .

Entonces, si tratamos de extender la sección  $s_1$  a una sección  $s_2$  sobre  $B^{(2)}$ , tenemos que  $s_1$  induce una función  $\hat{s}_1: \partial\mathbb{D}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  y la clase de homotopía de esta función es un elemento en  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ ; esto es, podemos identificar esta función con el elemento que le corresponde en  $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$  y esta asignación de un entero a cada 2-celda define una cocadena  $\varpi(s_2) \in C^2(B, \mathbb{Z})$ .

Por el Lema 1.51, sabemos que  $\varpi(s_2)$  es un cociclo.

Ahora, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.56.** *Si  $B$  es una superficie orientada, compacta y conexa tal que  $\partial B \neq \emptyset$ , entonces*

$$H^2(B, \mathbb{Z}) = 0 .$$

Esto se sigue de que la superficie  $B$  al tener frontera no vacía tiene como retracts por deformación a un 1-esqueleto.

De manera que, si consideramos la clase de homología del cociclo  $\varpi(s_2)$  en  $H^2(B, \mathbb{Z})$ , tenemos que es cero, de donde la clase de Euler (absoluta) es cero.

Sin embargo, podemos ver al cociclo  $\varpi(s_2)$  como un cociclo relativo en

$$C^2(B, \partial B, \mathbb{Z}) ,$$

ya que, recordando, las cocadenas relativas en  $C^2(B, \partial B, \mathbb{Z})$  son aquellas cocadenas en  $C^2(B, \mathbb{Z})$  que se anulan en las cadenas de  $C_2(\partial B, \mathbb{Z})$  (para mayores referencias ver [16, Ch. 23]). Así, como no hay 2-celdas en  $\partial B$ , podemos pensar que  $\varpi(s_2)$  se anula para cualquier cadena en  $C_2(\partial B, \mathbb{Z})$ .

**Definición 1.57.** Llamaremos **clase de Euler relativa** de  $S(E)$  a la clase de cohomología del cociclo  $\varpi(s_2)$  y la denotaremos por  $e_s(S(E))$ ; es decir,

$$e_s(S(E)) = [\varpi(s_2)] \in H^2(B, \partial B, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} .$$

En la definición anterior tenemos que

$$H^2(B, \partial B, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} ;$$

tenemos esto porque  $H^2(B, \partial B, \mathbb{Z}) = H^2(B/\partial B, \mathbb{Z})$  (ver [3, 7.1.3 Remark]) y al hacer el cociente de  $B$  con la frontera  $\partial B$ , obtenemos una superficie sin frontera, de donde  $H^2(B/\partial B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .

# Capítulo 2

## Variedades de Seifert

En este capítulo estudiaremos las variedades de Seifert viéndolas como un elemento de las fibraciones de Seifert; para ello, primero veremos el toro sólido fibrado y algunas de sus propiedades; además también veremos que toda  $\mathbb{S}^1$ -variedad puede verse como una variedad de Seifert.

### 2.1 El toro sólido fibrado.

En esta sección veremos la construcción y algunas propiedades del toro sólido fibrado; este concepto es de gran importancia en este trabajo ya que más adelante, cuando nos refiramos a una vecindad en una variedad de Seifert, dicha vecindad será un toro sólido fibrado. En esta sección nuestras principales referencias son [48], [9], [45] y [50].

Un modelo de un **toro sólido fibrado** es una descomposición de  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  en círculos disjuntos llamados **fibras** construido de la siguiente manera:

Comenzamos con  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  viéndolo como segmentos  $\{x\} \times [0, 1]$  e identificando  $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$  con  $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$  vía una rotación  $2\pi\beta/\alpha$  donde  $\beta/\alpha \in \mathbb{Q}$  con  $\alpha$  y  $\beta$  primos relativos.

Así, el segmento  $\{0\} \times [0, 1]$  se convierte en la fibra  $\{0\} \times \mathbb{S}^1$ , a la cual llamaremos **alma** del toro sólido, mientras que cualquier otra fibra en  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  estará formada por  $\alpha$  segmentos  $\{x_i\} \times [0, 1]$  donde  $i = 0, \dots, \alpha - 1$  y  $x_i = x_0\omega_i$  con  $\omega_i$  la  $i$ -ésima raíz de la unidad; es decir, cualquier punto en  $\mathbb{D}^2 - 0$  se levanta a una fibra que se envuelve  $\alpha$  veces alrededor del alma del toro sólido en la dirección longitudinal y  $-\beta$  veces en la dirección meridional.

En la Figura 2.1 tenemos, por ejemplo, que  $\alpha = 3$  y  $\beta = 2$ .

Seamos entonces más formales:

**Definición 2.1.** Dada una variedad  $M$ , diremos que  $M$  es una **variedad fibrada** si  $M$  puede descomponerse en **fibras**, donde cada fibra es una curva cerrada simple (es decir, un encaje suave del círculo) y cada punto  $x \in M$  vive sobre exactamente una fibra.

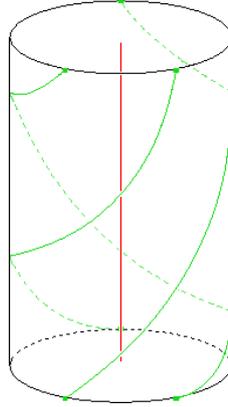


Figura 2.1: Toro sólido fibrado

**Definición 2.2.** Diremos que un homeomorfismo  $\phi$  es un **homeomorfismo que preserva fibras** si manda fibras en fibras.

**Definición 2.3.** Sea  $\mathbb{D}^2 \times I$  un cilindro y sea  $\rho: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  la rotación dada por:

$$\rho(x) = re^{i2\pi\beta/\alpha}x ,$$

para  $x \in \mathbb{D}^2$  y con  $(\alpha, \beta) = 1$ .

Llamaremos **toro sólido fibrado**  $T$  al espacio que se obtiene cuando rotamos  $\mathbb{D}^2 \times \{1\}$  (manteniendo fijo  $\mathbb{D}^2 \times \{0\}$ ) un ángulo de  $2\pi(\beta/\alpha)$  e identificamos a  $\{x\} \times \{0\}$  con  $\rho(x) \times \{1\}$  para cada  $x \in \mathbb{D}^2$ .

**Nota 5.** En este trabajo pensaremos que dos toros sólidos fibrados son equivalentes si uno puede ser enviado en el otro mediante un homeomorfismo que preserva fibras.

Veamos ahora que se pueden dar condiciones más específicas para  $\alpha$  y  $\beta$ .

**Lema 2.4.** Dada la descripción de un toro sólido fibrado  $T$  de la Definición 2.3, es suficiente pensar en una rotación  $\rho: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  dada por

$$\rho(x) = re^{i2\pi\beta/\alpha}x ,$$

con

$$\alpha > 0 \quad y \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\alpha . \quad (2.1)$$

*Demostración.* Sea  $T'$  el toro sólido fibrado que se obtiene gracias a una rotación  $\tau: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  dada por:

$$\tau(x) = re^{-i2\pi\beta/\alpha}x ,$$

entonces podemos definir un homeomorfismo  $\phi: \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  de la siguiente manera:

$$\phi(x, e^{i\lambda}) = (x, e^{-i\lambda}) .$$

Por otro lado, si reemplazamos  $\beta$  por  $\beta + k\alpha$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos un homeomorfismo que será definido por una composición de giros de Dehn (ver definición en [50, Sec. 6.3.2]), que al ser homeomorfismos, nos dan un homeomorfismo entre toros sólidos fibrados, como se muestra en [45, C.10 pag.23].  $\square$

Tenemos entonces que las líneas del cilindro  $\mathbb{D}^2 \times I$  son agrupadas en clases; casi todas ellas contienen  $\alpha$  líneas y la imagen de una clase es una fibra del toro sólido fibrado ya que las  $\alpha$  líneas se “pegan” para dar la fibra correspondiente; sin embargo hay una fibra para la cual esto no sucede, la que corresponde a la clase de la línea  $\{0\} \times I$ , la cual consiste de una sola línea cuya imagen es el alma del toro sólido fibrado (como podemos ver en la Figura 2.1).

**Definición 2.5.** Si  $\alpha = 1$  diremos que el toro sólido fibrado es **ordinario**.

Por las condiciones para  $\alpha$  y  $\beta$  del Lema 2.4, cuando  $\alpha = 1$  tenemos que  $\beta = 0$ ; de manera que el toro sólido fibrado que se obtiene es el toro sólido que se obtiene como espacio cociente al pegar las “tapas” de un cilindro  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  sin rotar.

Como notación, diremos que un toro sólido fibrado  $T$  está determinado por el par  $(\alpha, \beta)$  cuando la rotación  $\rho$  está dada por este par.

### 2.1.1 Meridianos y longitudes

Recordaremos algunas cosas acerca de la homología de un toro sólido  $T$  y su frontera  $\partial T$  y así poder hablar más fácilmente de homeomorfismos entre toros sólidos o entre sus fronteras.

Recordemos los siguientes hechos:

A)  $\pi_1(T) = H_1(T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  [9, Sec. 1.3.1 pag. 10],

B)  $\pi_1(\partial T) = H_1(\partial T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ([45, pag. 18]).

**Teorema 2.6** ([45, Th. D.4]). *El grupo de homeomorfismos de un toro  $\partial T$  en sí mismo salvo isotopía es isomorfo a  $GL(2, \mathbb{Z})$ ; es decir, las matrices  $2 \times 2$ , invertibles y de entradas enteras. Además las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) dos homeomorfismos  $f$  y  $g$  de  $\partial T$  en  $\partial T$  son isotópicos,*
- ii)  $f$  y  $g$  son representados por la misma matriz,*
- iii)  $f$  y  $g$  son homotópicos.*

Para probar este teorema se usa lo siguiente (ver [45]):

- Para ver que dos homeomorfismos  $f$  y  $g$  de  $\partial T$  en sí mismo son homotópicos si y sólo si son isotópicos, se usa que esto pasa para cualesquiera dos homeomorfismos de una superficie en sí misma.

- Los automorfismos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  son el grupo  $GL(2, \mathbb{Z})$ .
- Dado un homeomorfismo  $h: \partial T \rightarrow \partial T$ , tenemos una aplicación inducida  $h_*: \pi_1(\partial T, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1(\partial T, \mathbb{Z})$ ; de manera que podemos pensar en un homeomorfismo

$$*: \{h: \partial T \rightarrow \partial T \mid h \text{ es homeomorfismo}\} \rightarrow GL(2, \mathbb{Z})$$

$$h \mapsto h_* .$$

- El homomorfismo  $*$  es sobreyectivo.
- El kernel de  $*$  son todos los homeomorfismos homotópicos a la identidad; es decir, todos los isotópicos a la identidad.

Así tenemos que, cuando pensamos en un homeomorfismo del toro  $\partial T$  en sí mismo podemos pensarlo como una matriz  $2 \times 2$ , invertible y de entradas enteras; es decir, pensamos en el homeomorfismo inducido en homología; más adelante veremos cómo actúa este homeomorfismo inducido en una clase de homología.

Veamos entonces cómo pueden ser los generadores de  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$ .

**Definición 2.7.** Un **meridiano**  $m$  de un toro sólido  $T$  es una curva simple, cerrada y orientada sobre el toro frontera  $\partial T$  que no es contraíble en  $\partial T$  pero es contraíble en  $T$ .

**Lema 2.8.** *Un homeomorfismo del toro  $T$  en sí mismo envía un meridiano  $m$  a un meridiano  $m'$ .*

*Demostración.* Sea  $m$  un meridiano, por definición, tenemos que la clase  $[m] \in H_1(T, \mathbb{Z})$  es de hecho la clase cero y la clase  $[m] \in H_1(\partial T, \mathbb{Z})$  es diferente de la clase cero. Sean además  $h: T \rightarrow T$  y  $h|_{\partial T}: \partial T \rightarrow \partial T$  homeomorfismos.

Entonces tenemos los homomorfismos inducidos

$$h_*: H_1(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T, \mathbb{Z})$$

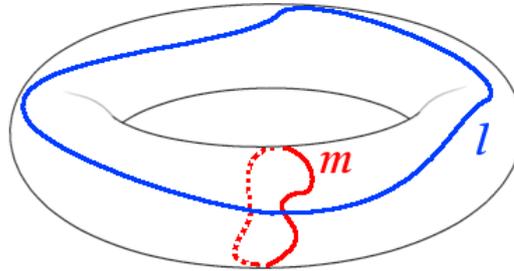
y

$$h_{\partial T*}: H_1(\partial T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\partial T, \mathbb{Z})$$

y al evaluar, obtenemos que  $h_*([m]) = [0]$  y  $h_{\partial T*}([m]) \neq [0]$ .

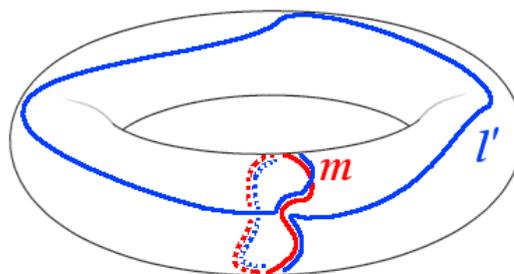
Así, sea  $m' = h(m)$ ; por lo anterior, tenemos que  $m'$  es una curva cerrada simple y orientada sobre  $\partial T$  tal que no es contraíble en  $\partial T$  y que sí es contraíble en  $T$ ; es decir,  $m'$  es un meridiano de  $T$ .  $\square$

**Definición 2.9.** Una **longitud**  $l$  de un toro sólido  $T$  es una curva cerrada simple sobre el toro frontera  $\partial T$  tal que existe un meridiano  $m$  que intersecta transversalmente a  $l$  en exactamente un punto (ver Figura 2.2).

Figura 2.2: Un meridiano  $m$  y una longitud  $l$ .

Así, una longitud  $l$  representa un generador de  $\pi_1(T) = H_1(T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  y un par meridiano-longitud representan un par generador para  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$  (Ver [45, sec. E.3 pag. 29]).

Tenemos entonces que la elección de una longitud  $l$  no es única; por ejemplo, la curva  $l'$  de la Figura 2.3 es una longitud, ya que existe un meridiano que la interseca transversalmente en un sólo punto y es fácil ver que la clase  $[l'] \in H_1(T, \mathbb{Z})$  es la misma que la clase  $[l] \in H_1(T, \mathbb{Z})$  (Ver [50, pag. 208]).

Figura 2.3: Una longitud  $l' \sim l + m$ .

Sin embargo, la longitud  $l$  de la Figura 2.2 no es homóloga en  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$  a la longitud  $l'$  de la Figura 2.3.

**Proposición 2.10** ([9, pag. 13]). *Cualquier par de meridiano y longitud  $(m, l)$  puede ser enviado sobre cualquier otro par  $(m', l')$  mediante un homeomorfismo del toro sólido  $T$  en sí mismo.*

*Demostración.* Sea  $h: T \rightarrow T$  un homeomorfismo; por el Lema 2.8, sabemos que el meridiano  $m$  va a un meridiano  $m'$  y usamos el siguiente Lema:

**Lema 2.11** ([50, Sec. 6.4.3 pag. 210]). *Dados un toro sólido  $T \cong \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  y el par meridiano-longitud canónico  $(m, l)$  ( $m = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ ,  $l = \{1\} \times \mathbb{S}^1$ ), existe un homeomorfismo  $h: T \rightarrow T$  que lleva a este par  $(m, l)$  a cualquier par de curvas que se intersectan transversalmente en un punto.*

Se sigue entonces que podemos llevar cualquier par meridiano-longitud a cualquier otro par meridiano-longitud mediante una composición de homeomorfismos del Lema 2.11.  $\square$

Entonces, vamos a pensar en un elemento de  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$  como vectores columna  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  con entradas enteras donde  $i$  es el coeficiente del primer generador y  $j$  es el coeficiente del segundo generador. Así, denotaremos a la clase de un meridiano  $[m]$  como  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y a la de una longitud  $[l]$  como  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Además, dado un homeomorfismo  $h: \partial T \rightarrow \partial T$ , podemos pensar en el homeomorfismo  $h_*$  como una matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y tales que  $ad - bc = \pm 1$ . Dada una clase  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ , al evaluar  $h_*$  obtenemos:

$$h_* \left( \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai + bj \\ ci + dj \end{pmatrix} .$$

**Teorema 2.12** ([45, Sec. C.2 pag. 19]). *Una clase  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  en  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$  está representada por una curva cerrada simple si y sólo si  $i = j = 0$  ó  $\text{mcd}(i, j) = 1$ .*

**Nota 6.** Abusando de la notación, denotaremos también  $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$  a cualquier curva que represente a la clase de homología correspondiente y como podemos ver a un homeomorfismo de  $\partial T$  en  $\partial T$  como una matriz en  $GL(2, \mathbb{Z})$ , evaluamos como se hizo antes del teorema para  $h_*$  y la clase de homología.

Las demostraciones de los resultados que aquí se han puesto pueden pensarse desde el punto de vista de matrices (homeomorfismos de  $\partial T$  en  $\partial T$ ) y “vectores” (elementos en  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$ ).

### 2.1.2 Curvas que cruzan y Fibras

Regresemos ahora con los toros sólidos fibrados.

Sea  $T$  un toro sólido fibrado, entonces tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 2.13** ([9, Th. 1.3.3]). *Sean  $T$  y  $T'$  toros sólidos fibrados determinados por  $(\alpha, \beta)$  y  $(\alpha', \beta')$  respectivamente. Entonces existe un homeomorfismo que preserva fibras de  $T$  a  $T'$  si y sólo si  $\beta'/\alpha' \equiv \pm\beta/\alpha \pmod{1}$ .*

*El homeomorfismo se puede tomar de manera que preserve orientación si y sólo si  $\beta'/\alpha' \equiv \beta/\alpha \pmod{1}$  y se puede tomar de manera que invierta orientación si y sólo si  $\beta'/\alpha' \equiv -\beta/\alpha \pmod{1}$ .*

Así, por la Nota 5, podemos pensar que los números  $\alpha$  y  $\beta$  no sólo determinan el toro sólido fibrado  $T$ , sino que  $T$  determina a  $\alpha$  y  $\beta$  de manera única.

El siguiente resultado nos da condiciones para extender un homeomorfismo que preserva fibras de la frontera  $\partial T$  al toro sólido  $T$ .

**Teorema 2.14** ([9, Th. 1.3.4]). *Sean  $T$  y  $T'$  dos toros sólidos fibrados y sea  $h: \partial T \rightarrow \partial T'$  un homeomorfismo que preserva fibras. Entonces  $h$  puede extenderse a un homeomorfismo que preserva fibras de  $T$  a  $T'$  si y sólo si  $h$  lleva un meridiano de  $T$  a una curva homóloga a un meridiano de  $T'$  o su inversa.*

Las demostraciones del Teorema anterior y el Teorema 2.13 se hacen utilizando algunos hechos acerca de los subgrupos de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y pueden encontrarse con detalle en [9].

**Definición 2.15.** Sea  $T$  un toro sólido fibrado, a una curva cerrada simple  $Q$  sobre  $\partial T$  la llamaremos una **curva que cruza** si  $Q$  intersecta a cada fibra de  $\partial T$  en exactamente un punto.

Tenemos entonces que una curva que cruza es necesariamente transversal a todas las fibras.

**Lema 2.16** ([50, Sec. 6.4.3 pag 208]). *Sea  $T$  un toro sólido y sean  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  dos curvas sobre  $\partial T$ . Entonces*

$$ad - bc = \pm 1$$

*si y sólo si las curvas se intersectan transversalmente en un solo punto.*

**Proposición 2.17.** *Sea  $T$  un toro sólido fibrado, sea  $H$  una fibra y sea  $Q$  una curva que cruza; entonces  $Q$  y  $H$  representan generadores de  $H_1(\partial T, \mathbb{Z})$ .*

*Demostración.* Como  $H$  y  $Q$  se intersectan transversalmente en un punto, por el Lema 2.16 podemos expresar a  $H$  como  $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$  y a  $Q$  como  $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$  tales que:

$$\beta\delta - \alpha\gamma = \pm 1 ;$$

de donde, la matriz

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \alpha & \delta \end{pmatrix}$$

representa un automorfismo de  $H_1(\partial T)$ ; de manera que las clases  $[Q]$  y  $[H]$  son generadores de  $H_1(\partial T)$ .  $\square$

**Nota 7.** Si  $T$  es un toro sólido fibrado tal que un meridiano  $m$  es a su vez una curva que cruza, entonces  $T$  es un toro sólido ordinario.

Ahora ya estamos en condiciones de hablar de variedades fibradas de Seifert.

## 2.2 Fibraciones de Seifert

En esta sección definiremos lo que es una fibración de Seifert y sus elementos: una 3-variedad a la que llamaremos variedad fibrada de Seifert, una 2-orbitad y una proyección entre ambas; para entender mejor este concepto, se puede pensar en el ejemplo más sencillo: un toro sólido fibrado (ver la Figura 2.1); este ejemplo además nos servirá para entender la estructura local de una variedad de Seifert.

Nuestras principales referencias para esta parte son [48], [38] y [23]; también pueden consultarse [9] y [40] entre otros.

### 2.2.1 Orbitades

Ahora definiremos lo que es una orbitad; para ello, definiremos lo que es una acción de un grupo  $G$  y cómo puede ser esta acción.

**Definición 2.18.** Sea  $G$  un grupo y sea  $X$  un espacio topológico. Una **acción** de  $G$  sobre  $X$  es una aplicación

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned} \tag{2.2}$$

que satisface

- i)  $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$
- ii)  $ex = x$ , donde  $e$  es el elemento identidad de  $G$ .

**Definición 2.19.** Cuando  $G$  es un grupo de Lie compacto, hablaremos de una **acción suave** sobre una variedad diferenciable  $M$  si tenemos una acción tal que la aplicación 2.2 es suave.

**Definición 2.20.** Dado un espacio topológico  $X$ , diremos que la acción de un grupo  $G$  es **libre** si para cada  $x \in X$  se tiene que  $gx = x$  implica que  $g \in G$  es el elemento identidad.

**Definición 2.21.** Sea  $X$  un espacio topológico, diremos que la acción de un grupo  $G$  es **efectiva** si para cualquier  $g \in G$  tal que  $g \neq e$ , entonces existe  $x \in X$  tal que  $gx \neq x$ .

**Definición 2.22.** Dado un punto  $x \in X$ , el subgrupo de  $G$  definido por

$$G_x = \{g \mid gx = x\}$$

es llamado el **grupo de isotropía** en  $x$ .

**Definición 2.23.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $n \in \mathbb{Z}$  con  $n \geq 0$ . Entonces:

- O1. Una **carta de orbidad** de dimensión  $n$  sobre  $X$  está dada por un subconjunto abierto y conexo  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ , un grupo finito de automorfismos suaves de  $\tilde{U}$  y una aplicación  $\phi: \tilde{U} \rightarrow X$  tal que  $\phi$  es  $G$ -invariante e induce un homeomorfismo de  $\tilde{U}/G$  sobre un subconjunto abierto  $U \subset X$ .
- O2. Un **encaje**  $\lambda: (\tilde{U}, G, \phi) \rightarrow (\tilde{V}, H, \psi)$  entre dos cartas de orbidad es un encaje suave  $\lambda: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$  tal que  $\psi\lambda = \phi$ .
- O3. Un **atlas de orbidad** sobre  $X$  es una familia  $\mathcal{U} = \{(\tilde{U}, G, \phi)\}$  de cartas de orbidad, tal que
  - la familia  $\mathcal{U}$  cubre a  $X$ ,
  - las cartas de orbidad son localmente compatibles; es decir, dadas cualesquiera dos cartas de orbidad  $(\tilde{U}, G, \phi)$  con  $U = \phi(\tilde{U}) \subset X$ ,  $(\tilde{V}, H, \psi)$  con  $V = \psi(\tilde{V}) \subset X$  y un punto  $x \in U \cap V$ , existe una vecindad abierta de  $x$ ,  $W \subset U \cap V$  y una carta  $(\tilde{W}, J, \theta)$  con  $W = \theta(\tilde{W}) \subset X$  tal que existen encajes

$$(\tilde{W}, J, \theta) \hookrightarrow (\tilde{U}, G, \phi)$$

y

$$(\tilde{W}, J, \theta) \hookrightarrow (\tilde{V}, H, \psi)$$

- O4. Diremos que un atlas de orbidad  $\mathcal{U}$  refina a otro atlas de orbidad  $\mathcal{V}$  si para cada carta de orbidad en  $\mathcal{U}$  existe un encaje dentro de alguna carta de orbidad de  $\mathcal{V}$ . Dos atlas de orbidad serán equivalentes si tienen un refinamiento común.

**Definición 2.24.** Una **orbidad efectiva**  $X$  de dimensión  $n$  es un espacio Hausdorff paracompacto  $X$  junto con una clase de equivalencia  $[\mathcal{U}]$  de atlas de orbidad de dimensión  $n$ .

**Nota 8.** Cuando hablemos de una **orbidad**, nos referiremos a una orbidad efectiva.

Hay puntos importantes a considerar acerca de nuestra definición:

- a) Suponemos que, para cada carta  $(\tilde{U}, G, \phi)$ , el grupo  $G$  está actuando suave y efectivamente sobre  $\tilde{U}$ . En particular,  $G$  actúa libremente sobre un subconjunto abierto denso de  $\tilde{U}$ .
- b) Ya que las acciones suaves son localmente suaves, cualquier orbidad tiene un atlas de orbidad consistente de cartas de orbidad lineales; es decir, cartas de orbidad de la forma  $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$ , donde  $G$  actúa sobre  $\mathbb{R}^n$  ortogonalmente; i.e.  $G \subset O(n)$ .
- c) Todo atlas de orbidad para  $X$  está contenido en un único atlas maximal y dos atlas son equivalentes si y sólo si están contenidos en el mismo atlas maximal. Como con variedades diferenciables, tendemos a trabajar con un atlas maximal.
- d) Si las acciones de un grupo finito sobre las cartas de orbidad son libres, entonces  $X$  es localmente Euclidiano; es decir,  $X$  es una variedad diferenciable.

**Definición 2.25.** Sea  $X = (X, \mathcal{U})$  una orbidad y sea  $x \in X$ . Si  $(\tilde{U}, G, \phi)$  es cualquier carta de orbidad local alrededor de  $x = \phi(y)$ , definimos el **grupo local** de  $x$  como

$$G_x = \{g \in G \mid gy = y\} .$$

Usamos ahora este concepto para definir el conjunto singular de una orbidad.

**Definición 2.26.** Sea  $X = (X, \mathcal{U})$  una orbidad; definimos su conjunto **singular**  $\Sigma(X)$  como

$$\Sigma(X) = \{x \in X \mid G_x \neq e\} .$$

**Nota 9.** El conjunto singular  $\Sigma(X)$  es justamente el conjunto de puntos singulares de  $X$  desde el punto de vista de la geometría algebraica; una explicación cuidadosa de este hecho puede encontrarse en [1, Sec. 1.5].

**Definición 2.27.** Una orbidad efectiva **cociente**  $X = (X, \mathcal{U})$  es una orbidad dada como cociente de una acción suave, efectiva y casi libre de un grupo de Lie compacto  $G$  sobre una variedad diferenciable  $M$ ; entonces  $X = M/G$  y  $\mathcal{U}$  es construida a partir de un atlas de variedad diferenciable usando la estructura localmente suave.

Una situación especial se da cuando el grupo  $G$  es finito.

**Definición 2.28.** Si un grupo finito  $G$  actúa suave y efectivamente sobre una variedad diferenciable  $M$ , la orbidad asociada  $X = (M/G, \mathcal{U})$  es llamada una orbidad efectiva **cociente global**.

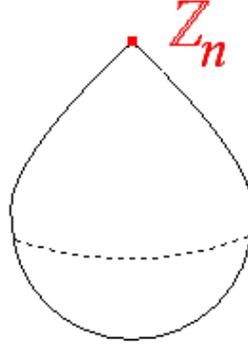


Figura 2.4: El espacio proyectivo pesado  $W\mathbb{P}(1, a)$ : la lágrima.

**Ejemplo 15.** Sea

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \mid \sum_i |z_i|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1},$$

entonces tenemos una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{S}^{2n+1}$  dada por:

$$(\lambda, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\lambda^{a_0} z_0, \dots, \lambda^{a_n} z_n),$$

donde  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  y los  $a_i$  son enteros coprimos. El cociente

$$W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n) = \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$$

es llamado un **espacio proyectivo pesado** y juega el papel de los espacios proyectivos usuales en la teoría de orbidades.

En particular,  $W\mathbb{P}(1, a)$  es la **lágrima**, el ejemplo más sencillo de una orbidad cociente **no** global (ver Figura 2.4).

La variedad diferenciable subyacente para una lágrima es la esfera  $\mathbb{S}^2$  y el conjunto singular  $\Sigma(W\mathbb{P}(1, a))$  consiste de un sólo punto, cuya vecindad está modelada sobre  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}_n$ , donde  $\mathbb{Z}_n$  actúa por rotaciones.

**Ejemplo 16.** Generalizar el ejemplo anterior a otras orbidades de dimensión 2 nos lleva a construir **orbidades de superficies de Riemann**, estas orbidades son importantes y no son difíciles de describir; sólo se necesita especificar los puntos singulares (aislados) y el orden del grupo local en cada uno (ver Figura 2.5).

Si  $x_i$  es un punto singular con orden  $m_i$ , se sobreentiende que la carta local de orbidad en  $x_i$  es  $\mathbb{D}^2 / \mathbb{Z}_{m_i}$ , donde  $\mathbb{D}^2$  es un pequeño disco alrededor del cero y la acción es  $\omega \circ z = \lambda z$  para  $\omega$  el generador de  $\mathbb{Z}_{m_i}$  y  $\lambda^{m_i} = 1$ .

Supongamos que una orbidad de superficie de Riemann  $\Sigma$  tiene género  $g$  y  $r$  puntos singulares. Thurston probó que  $\Sigma$  es cociente global si y sólo si  $g + 2r \geq 3$     $g = 0$  y  $r = 2$  con  $m_1 = m_2$ .

En cualquier caso, una orbidad de superficie es siempre una orbidad cociente que puede ser expresada como  $X^3 / \mathbb{S}^1$  donde  $X^3$  es una 3-variedad diferenciable llamada *variedad fibrada de Seifert*.

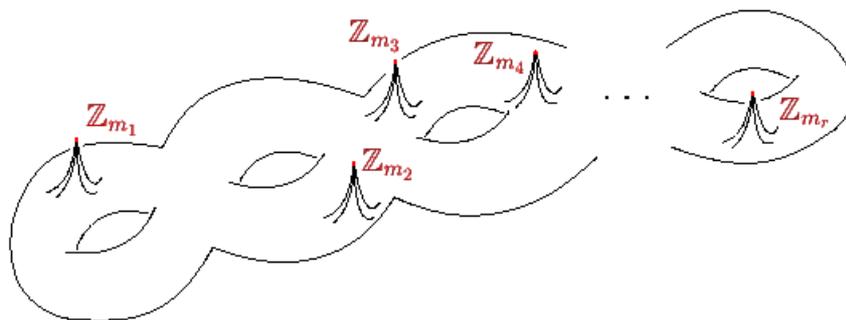


Figura 2.5: Una orbifold de superficie de Riemann

**Nota 10.** Dada una orbifold  $X$ , podemos definir la noción de orientabilidad para  $X$  en términos de las cartas de orbifold y las funciones de transición; sin embargo, como ello implica profundizar en aspectos mucho más técnicos de orbifolds que están más alejados de los objetivos de este trabajo, sólo mencionamos este hecho.

En nuestro caso, como trabajaremos con orbifolds de dimensión 2, cuando queramos pensar en orientaciones lo haremos en la superficie subyacente a la orbifold.

### 2.2.2 Fibraciones de Seifert

**Definición 2.29.** Dada una 3-variedad  $M$ , diremos que  $M$  es una **variedad fibrada de Seifert** si cumple las siguientes propiedades:

- i)  $M$  es una variedad compacta o de Lindelöf; es decir, dada cualquier cubierta abierta de  $M$ ,  $\{O_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ , tenemos que  $M$  puede ser cubierta con una colección  $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .
- ii)  $M$  es conexa.
- iii)  $M$  es una variedad fibrada (ver Definición 2.1).
- iv) Para cada fibra  $H$ , existe una **vecindad fibrada** de  $H$ ; esto es, un subconjunto  $U_H$  de  $M$  que consiste de fibras y que contiene a  $H$  tal que  $U_H$  puede ser enviado bajo un homeomorfismo que preserve fibras sobre un toro sólido fibrado donde  $H$  es enviada sobre el alma del toro.

**Nota 11.** Las vecindades fibradas de las fibras son conjuntos cerrados; es decir, cada vecindad fibrada de una fibra contiene su toro frontera.

Definiremos ahora otro de los conceptos más importantes de este trabajo: las *fibraciones de Seifert*.

**Definición 2.30.** Una **fibración de Seifert** es una terna  $(M, F, \Pi)$  donde  $M$  es una 3-variedad fibrada de Seifert orientada,  $F$  es una orbifold de superficie de

Riemann (que será el espacio base) y  $\Pi: M \rightarrow F$  tales que  $(M, F, \Pi)$  es “casi” un  $\mathbb{S}^1$ -haz orientado localmente trivial; es decir:

Para todo  $x \in F$  existe una vecindad  $U$  de  $x$  homeomorfa a  $\mathbb{D}^2$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\cong} & T \\ \Pi|_U \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ U & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{D}^2 \end{array}$$

donde  $T$  es un toro sólido fibrado y

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}: T &\rightarrow U \cong \mathbb{D}^2 \\ (rt_1, t_2) &\longmapsto rt_1^\alpha t_2^\beta \end{aligned}$$

donde  $t_i \in \mathbb{S}^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  con  $\alpha \neq 0$  y  $\text{mcd}(\alpha, \beta) = 1$ .

Vemos entonces que cuando hablamos de una vecindad  $\Pi^{-1}(U)$  homeomorfa a un toro sólido con  $\alpha = \pm 1$ , el toro sólido  $T$  es ordinario y la terna

$$(\Pi^{-1}(U), \Pi|_{\Pi^{-1}(U)}, U)$$

es un  $\mathbb{S}^1$ -haz; pero cuando  $\alpha \neq \pm 1$ , no tenemos la misma situación.

### Nota 12.

1. En este trabajo sólo consideraremos el caso en que la superficie subyacente a la orbifold  $F$ , es orientada y sin frontera.
2. Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  dependerán del punto  $x \in F$  que estemos tomando.

### 2.2.3 Fibras excepcionales

Una de las cosas que distinguirá a una variedad de Seifert de otra son aquello que llamaremos las fibras excepcionales; es decir, que dos variedades de Seifert tengan las mismas fibras excepcionales será una condición necesaria para que sean equivalentes; sin embargo, no será una razón suficiente y más adelante hablaremos de qué más se necesita.

**Definición 2.31.** Dada una variedad fibrada de Seifert  $M$ , diremos que una fibra  $H$  es **excepcional** si el valor de  $\alpha$  asociado a la fibra  $H$  es diferente de  $\pm 1$ ; en otro caso, diremos que la fibra es **regular**.

**Nota 13.** En la definición anterior, no mencionamos a  $\beta$ , ya que, si  $\alpha = \pm 1$ , tenemos un toro sólido ordinario y el valor de  $\beta$  queda determinado ( $\beta = 0$ ).

**Proposición 2.32** ([9, Sec. 1.4.3 pag. 33]). *Si  $(M, F, \Pi)$  es una fibración de Seifert con  $F$  compacto, el número de fibras excepcionales es finito.*

*Demostración.* Para todo  $x \in F$  existe una vecindad  $U_x \cong \mathbb{D}^2$  tal que  $\Pi^{-1}(U_x)$  contiene a lo más una fibra excepcional a la que llamaremos  $\Pi^{-1}(x)$ . Ya que  $F$  es compacto, dada una cubierta de  $F$  compuesta de vecindades como ésta, podemos encontrar una subcubierta finita formada por vecindades de este tipo, de donde el número de fibras excepcionales es finito. Notemos que  $F$  es compacto si y sólo si  $M$  lo es.  $\square$

### 2.2.4 El número de Euler

Sean  $H_1, \dots, H_r$  una colección de fibras de  $M$ , incluyendo todas las fibras excepcionales y sean  $V_1, \dots, V_r$  vecindades fibradas de  $H_1, \dots, H_r$ . Sea

$$M_0 = M - \text{int}(V_1 \cup \dots \cup V_r)$$

y sea  $F_0$  el espacio base de  $M_0$ ; debido a que hemos removido vecindades fibradas de todas las fibras excepcionales, tenemos que la terna  $(M_0, F_0, \Pi)$  es un  $\mathbb{S}^1$ -haz orientado sobre una superficie conexa con frontera.

Sean  $Q_1, \dots, Q_r$  curvas que cruzan (ver la Definición 2.15) definidas en las fronteras de las vecindades  $V_1, \dots, V_r$ ; es decir, en la frontera  $\partial M_0$ ; entonces podemos definir una sección  $s$  sobre  $\partial F_0$  dada por estas curvas que cruzan y de acuerdo a la construcción hecha en 1.5.1, obtenemos la clase de Euler relativa de  $M_0$  que depende de la sección  $s$ .

Recordemos que dada una variedad diferenciable orientada, a su frontera le es dada la orientación que seguida por un vector normal que “entra” coincide con la orientación de la variedad (ver [44]).

A las fibras regulares de  $M$  les daremos la siguiente orientación natural: las orientaremos de tal forma que la orientación de  $F_0$  seguida de la orientación de las fibras nos de la orientación de  $M_0$  y luego orientaremos a las fibras excepcionales dándoles una orientación compatible con una vecindad de cada una de ellas.

Entonces obtenemos la siguiente definición:

**Definición 2.33.** Llamaremos  $b_s$  al entero asociado a la clase de Euler relativa (ver Def. 1.57) del  $\mathbb{S}^1$ -haz  $(M_0, F_0, \Pi)$  que depende de la sección  $s$ ; es decir,

$$b_s(M_0) = e_s(M_0)[F_0, \partial F_0]$$

donde  $[ , ]$  es el generador positivo de  $H_2(F_0, \partial F_0, \mathbb{Z})$  (es decir, la clase fundamental) y  $s$  es la sección definida sobre  $\partial F_0$  por las curvas que cruzan  $Q_1, \dots, Q_r$ . Diremos entonces que  $b_s$  es el **número de Euler** del  $\mathbb{S}^1$ -haz  $(M_0, F_0, \Pi)$ .

**Nota 14.** La clase  $e_s(M_0)$  no depende de la elección de las curvas que cruzan  $Q_1, \dots, Q_r$  ya que éstas están bien definidas salvo múltiplos de  $H$ ; por lo que, al número de Euler  $b_s$  lo denotaremos de ahora en adelante como  $b$ .

Para ver este hecho, también se puede usar el siguiente lema:

**Lema 2.34.** *Sea  $M_0$  una variedad fibrada de Seifert conexa sin fibras excepcionales y cuya frontera consiste de un solo toro  $\partial T$ . Como  $M_0$  es orientada (pues su base  $F_0$  lo es) existe una sola curva simple cerrada sobre  $\partial T$  salvo isotopía y orientación que es la frontera de una sección sobre el espacio base  $F_0$  de  $M_0$ .*

El siguiente resultado se puede encontrar en [25].

**Lema 2.35.** *Sean  $(M, F, \Pi)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\Pi})$  dos fibraciones de Seifert; sean  $(M_0, F_0, \Pi)$  y  $(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0, \tilde{\Pi})$  los  $\mathbb{S}^1$ -haces orientados que obtenemos al remover las fibras excepcionales, sea  $p: M_0 \rightarrow \tilde{M}_0$  un cubriente finito de  $\tilde{M}_0$  de grado  $d$ , sea  $q: F_0 \rightarrow \tilde{F}_0$  un cubriente finito de  $\tilde{F}_0$  de grado  $l$  y sea  $m$  el grado con el cual las fibras regulares de  $M_0$  cubren fibras de  $\tilde{M}_0$  (es decir,  $d = lm$ ) de tal manera que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{p} & \tilde{M}_0 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ F_0 & \xrightarrow{q} & \tilde{F}_0 \end{array}$$

conmuta; entonces

$$b_s(M_0, F_0, \Pi) = \frac{l}{m} b_s(\tilde{M}_0, \tilde{F}_0, \tilde{\Pi}) .$$

El número de Euler  $b_s$  es importante ya que lo usaremos para distinguir entre dos variedades de Seifert, como se verá más adelante.

### 2.2.5 Invariantes de Seifert

Los invariantes de Seifert son aquellos que nos permitirán decir si dos fibraciones de Seifert son equivalentes o no.

**Definición 2.36.** Dada nuestra colección  $\{H_i\}_{i=1, \dots, r}$  de fibras de la subsección anterior, llamaremos al par  $(\alpha_i, \beta_i)$  determinado por la vecindad fibrada  $V_i$  de  $H_i$  un **par de Seifert**.

**Definición 2.37.** Llamaremos **invariantes de Seifert** de la fibración de Seifert  $(M, F, \Pi)$  a la colección

$$(g; b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) ,$$

donde  $g \geq 0$  es el género de la superficie  $F_0$ ,  $b$  es el número de Euler (Def. 2.33),  $\alpha_i \geq 1$  y  $\text{mcd}(\alpha_i, \beta_i) = 1$ .

Los invariantes de Seifert caracterizan a una fibración de Seifert de la que estemos hablando salvo equivalencia; aunque no son únicos, como podemos ver en el siguiente teorema:

**Teorema 2.38** ([23, Th 1.5]). Sean  $(M, F, \Pi)$  y  $(M', F', \Pi')$  dos fibraciones de Seifert con invariantes de Seifert

$$(g; b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)) \quad (2.3)$$

y

$$(g; b; (\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_t, \beta'_t)) \quad (2.4)$$

respectivamente. Entonces  $M$  y  $M'$  son homeomorfas preservando orientación bajo un homeomorfismo que preserva fibras si y sólo si los invariantes de Seifert

$$(g; b; (\alpha'_1, \beta'_1), \dots, (\alpha'_t, \beta'_t))$$

se pueden obtener a partir de

$$(g; b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

con una secuencia de los siguientes movimientos:

- a) permutar los índices,
- b) añadir o eliminar un par de Seifert  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ,
- c) reemplazar cada  $(\alpha_i, \beta_i)$  por el par  $(\alpha_i, \beta_i + k_i \alpha_i)$  con la condición de que

$$\sum k_i = 0$$

**Nota 15.**

1. Lo que nos dice el inciso (b) es que podemos añadir o remover fibras regulares de nuestra colección  $\{H_i\}_{i=1, \dots, r}$  sin que ello afecte al conjunto de invariantes, lo cual es acorde con la idea geométrica.
2. El inciso (c) es fácil de ver si recordamos el Lema 2.4 pues el reemplazo que se menciona se hace de acuerdo a las condiciones que se piden sobre  $\alpha$  y  $\beta$  para que dos toros sólidos fibrados sean homeomorfos.
3. Es fácil ver que (a), (b) y (c) implican que existe  $k \leq \min\{r, t\}$  tal que:
  - i)  $\alpha_i = \alpha'_i$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $\alpha_i = \alpha'_i = 1$  para  $i, j > k$ ,
  - ii)  $\beta_i \equiv \beta'_i \pmod{\alpha_i}$  para  $i = 1, \dots, k$  y además,
  - iii)  $\sum_{i=1}^r (\beta_i / \alpha_i) = \sum_{i=1}^t (\beta'_i / \alpha'_i)$ .

La demostración del Teorema 2.2.5 se puede encontrar con todo detalle en [23]. Tenemos entonces el número

$$\sum_{i=1}^r (\beta_i / \alpha_i)$$

es un invariante de la variedad  $M$ ; sin embargo, no caracteriza de manera única a la variedad  $M$  ya que, aún teniendo las mismas fibras excepcionales, dos fibraciones de Seifert podrían tener diferente número de Euler; por ejemplo, los  $S^1$ -haces se pueden ver como variedades de Seifert sin fibras excepcionales.

Lo que haremos ahora es reunir toda la información en un solo invariante:

**Definición 2.39.** Dada una fibración de Seifert  $(M, F, \Pi)$ , con número de Euler  $b$  y fibras excepcionales  $((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$ , al número

$$b + \sum_{i=1}^r (\beta_i / \alpha_i) ,$$

le denotaremos como  $\check{e}(M, F, \Pi)$  y le llamaremos el **número de Euler racional** de  $M$ .

Notemos que los invariantes de Seifert son invariantes de la fibración de Seifert  $(M, F, \Pi)$  donde consideramos a la variedad orientada  $M$  con su estructura fibrada; es decir, los invariantes no dependen de la orientación del espacio base  $F$  ya que si revertimos la orientación de  $F$ , debemos revertir también la orientación de las fibras para mantener fija la orientación de  $M$ .

Esto también puede ser interpretado diciendo que existe un difeomorfismo  $f: M \rightarrow M$  que preserva la orientación de  $M$  y tal que la aplicación inducida  $F \rightarrow F$  revierte orientación.

Por otro lado, si cambiamos la orientación de  $M$ , entonces reemplazaremos los invariantes de Seifert  $(\alpha_i, \beta_i)$  por  $(\alpha_i, -\beta_i)$  y obtenemos entonces que

$$\check{e}(-M, F, \Pi) = -\check{e}(M, F, \Pi) .$$

Tenemos entonces el siguiente teorema:

**Teorema 2.40.** Sean  $(M, F, \Pi)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\Pi})$  dos fibraciones de Seifert y sea  $f: M \rightarrow \tilde{M}$  un homeomorfismo que preserva orientación y preserva fibras; es decir, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \tilde{M} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ F & \xrightarrow{g} & \tilde{F} \end{array}$$

conmuta y tal que  $\text{grado}(g) = a$ ,  $\text{grado}(f|_H) = c$  (donde  $H$  es una fibra cualquiera de  $M$ ) y así,  $\text{grado}(f) = ac$ . Entonces

$$\check{e}(M) = \frac{a}{c} \check{e}(\tilde{M}) .$$

En el Teorema anterior es suficiente pedir que  $f$  sea una función que preserve orientación y fibras; sin embargo, nosotros hemos enunciado el teorema pidiendo un homeomorfismo porque éso es lo que usaremos más adelante.

**Ejemplo 17** (Variedades de Brieskorn). Las variedades de Brieskorn son variedades muy estudiadas, como puede verse en [32] y [26].

Sea  $f_{p,q,r}: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f_{p,q,r}(z_1, z_2, z_3) = z_1^p + z_2^q + z_3^r ,$$

con  $p, q, r \geq 2$ . Sea  $V(p, q, r) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid f_{p,q,r}(z_1, z_2, z_3) = 0\}$  y sea  $\Sigma(p, q, r) = V(p, q, r) \cap \mathbb{S}^5$ .

Tenemos entonces que  $\Sigma(p, q, r)$  es una variedad de Seifert (ver [41, Lemma 3.6.4]) y si  $p, q, r$  son tales que  $1/p + 1/q + 1/r > 1$ ; tenemos entonces cuatro casos:

- i)  $\Sigma(2, 3, 3)$ , cuyos invariantes de Seifert son  $(0; -1; (2, 1), (3, 1), (3, 1))$ ,
- ii)  $\Sigma(2, 3, 4)$ , cuyos invariantes de Seifert son  $(0; -1; (2, 1), (3, 1), (4, 1))$ ,
- iii)  $\Sigma(2, 3, 5)$ , cuyos invariantes de Seifert son  $(0; -1; (2, 1), (3, 1), (5, 1))$  y
- iv)  $\Sigma(2, 2, r)$  (donde  $r \geq 2$ ), cuyos invariantes de Seifert son

$$(0; -1; (2, 1), (2, 1), (r, 1)) ,$$

como puede verificarse en [26].

### 2.3 Un ejemplo: Los espacios lente.

Los espacios lente son 3-variedades a las cuales podemos pensarlas como variedades de Seifert como veremos a continuación. Además veremos algunas propiedades.

**Definición 2.41.** Sea  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ . Dados  $p, q \in \mathbb{Z}$  tales que  $\text{mcd}(p, q) = 1$ , entonces  $\mathbb{Z}_p$  actúa libremente sobre  $\mathbb{S}^3$  de la siguiente manera:

$$e^{2\pi i/p}(z_1, z_2) = (e^{2\pi i/p}z_1, e^{2\pi i q/p}z_2) .$$

Al espacio  $\mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}_p)$  se le llama **espacio lente** de tipo  $(p, q)$  y lo denotaremos como  $L(p, q)$ .

Por otro lado, el espacio  $L(p, q)$  puede ser obtenido también pegando dos toros sólidos bajo un difeomorfismo  $\varphi: \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}^2$ , mandando un meridiano  $\{x\} \times \partial\mathbb{D}^2$  a un círculo de pendiente  $q/p$  donde se usa la convención de que un meridiano tiene pendiente  $\infty$  y una longitud  $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$  tiene pendiente 0.

La fracción  $q/p$  determina a  $L(p, q)$  completamente, ya que los círculos  $\mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}^2$  están determinados salvo isotopía por sus pendientes y una vez que un disco

meridiano del segundo  $\mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}^2$  ha sido pegado al primer  $\mathbb{S}^1 \times \partial\mathbb{D}^2$ , sólo hay una manera de pegar la bola  $\mathbb{B}^3$  que resta.

Tenemos entonces que  $L(p, q)$  tiene las siguientes propiedades (como puede verse en [23, Ch. 4]):

- i)  $L(p, q) \cong L(p, q')$  si  $q \equiv q' \pmod{p}$ ,
- ii)  $L(p, q) \cong L(p, q')$  si  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ , puesto que  $e^{2\pi iq'/p}$  es un generador de  $\mathbb{Z}_p$  y en  $L(p, q)$  tenemos que

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi iq'/p} z_1, e^{2\pi iqq'/p} z_2) = (e^{2\pi iq'/p} z_1, e^{2\pi i/p} z_2) ,$$

así, intercambiando  $z_1$  por  $z_2$ , la  $(p, q)$ -acción se convierte en la  $(p, q')$ -acción;

- iii)  $L(p, q) \cong -L(p, -q)$ , ya que la aplicación

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \bar{z}_2)$$

induce el isomorfismo

$$L(p, q) \xrightarrow{\cong} -L(p, -q) .$$

**Nota 16.** Podemos elegir  $M_i, L_i$  un meridiano y una longitud en  $\partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)_i$  de tal manera que

$$\begin{aligned} M_i &= \{(t, 1) \in \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)_i\} , \\ L_i &= \{(1, t) \in \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)_i\} ; \end{aligned}$$

entonces bajo la aplicación con la que pegamos, tenemos que

$$M_1 \mapsto \{(t^{-q}, t^p) \in \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)_2\}$$

y así  $M_1 \sim -qM_2 + pL_2$ . Esta relación homológica determina de qué espacio lente se trata.

**Teorema 2.42.** *Dado un espacio lente  $L(p, q)$ , tenemos que:*

$$L(p, q) \cong M(0; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$$

si

$$\begin{aligned} p &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ q &= \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_2 \\ -\beta_1 & \beta'_2 \end{pmatrix} = \alpha_1\beta'_2 + \alpha'_2\beta_1 \end{aligned}$$

donde

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_2 & \beta'_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \beta'_2 - \beta_2 \alpha'_2 = 1 .$$

*Demostración.* Tenemos que

$$M(0; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) \cong ((\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup (I \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)) \cup (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$$

y las siguientes relaciones homológicas:

$$\begin{aligned} M_1 &\sim \alpha_1 Q_1 + \beta_1 H_1 \\ L_1 &\sim \alpha'_1 Q_1 + \beta'_1 H_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_2 &\sim \alpha_2 Q_2 + \beta_2 H_2 \\ L_2 &\sim \alpha'_2 Q_2 + \beta'_2 H_2 \end{aligned}$$

donde

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_2 & \beta'_2 \end{pmatrix} = 1;$$

además  $Q_1 + Q_2 = \partial(\text{sección de } I \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \sim 0$  en homología, de manera que  $Q_1 \sim -Q_2$ ; por otra parte  $H_1 \sim H_2$ ; es decir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_1 \\ L_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 \\ H_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ -\alpha'_1 & \beta'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_2 & -\beta_2 \\ -\alpha'_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ L_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\alpha_1 \beta'_2 + \alpha'_2 \beta_1) & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \\ -(\alpha'_1 \beta'_2 + \alpha'_2 \beta'_1) & \alpha'_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ L_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y así, por la Nota 16, el teorema está probado.  $\square$

**Ejemplo 18.** Sea  $\mathbb{S}^1$  actuando sobre  $\mathbb{S}^3$  de la siguiente manera:  $t(z_1, z_2) = (t^a z_1, t^b z_2)$  donde  $\text{mcd}(a, b) = 1$ . Los subgrupos de isotropía son  $\mathbb{Z}_a$  y  $\mathbb{Z}_b$ . Por el teorema anterior, tenemos que los invariantes de Seifert de la fibración  $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1, \Pi)$  son  $M(0; (a, a'), (b, b'))$  donde  $ab' + ba' = \pm 1$ .

## 2.4 Las $\mathbb{S}^1$ -variedades como variedades de Seifert

En esta sección veremos que las  $\mathbb{S}^1$ -variedades de dimensión 3 se pueden ver como variedades de Seifert, este punto de vista nos interesa profundamente pues lo usaremos en el Capítulo 4 cuando atacemos el problema principal de este trabajo.

Así, cuando tenemos una 3-variedad  $M$  junto con una acción de  $\mathbb{S}^1$ , veremos que podemos definir una fibración donde  $M$  será el espacio total, el espacio de órbitas de la acción será el espacio base y las órbitas de la acción serán las fibras.

### 2.4.1 $G$ -variedades

Recordemos unos conceptos básicos:

**Definición 2.43.** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto y sea  $M$  una variedad diferenciable. Dada una acción suave (ver Def. 2.19) de  $G$ , llamaremos a  $M$  una  **$G$ -variedad** considerándola junto con la acción suave de  $G$ .

Recordemos que, dado un punto  $x \in M$ , el subgrupo de  $G$  definido por  $G_x = \{g \mid gx = x\}$  es llamado el **grupo de isotropía** en  $x$ .

**Definición 2.44.** El subconjunto de  $M$  definido por  $Orb_G(x) = \{gx \mid g \in G\}$  es llamado la **órbita** de  $x$ .

**Proposición 2.45.** Dado  $x \in M$ , los subgrupos de isotropía de elementos en la órbita  $Orb_G(x)$  son conjugados; es decir, para un elemento  $y \in Orb_G(x)$ ,  $gG_xg^{-1} = G_y$  con  $g \in G$  tal que  $y = gx$ .

*Demostración.* Sean  $g \in G$ ,  $y \in Orb_G(x)$  tales que  $y = gx$  y sea  $g_1 \in G_x$ ; entonces

$$\begin{aligned} gg_1g^{-1}y &= gg_1g^{-1}(gx) = gg_1(g^{-1}g)x = gg_1x = g(g_1x) \\ &= gx = y, \end{aligned}$$

de manera que  $gG_xg^{-1} \subset G_y$ . Por otro lado, dado  $g_2 \in G_y$ , sólo hay que seguir las igualdades de regreso para ver que  $g_2y = gg_1g^{-1}y$  para algún  $g_1 \in G_x$ , de donde  $G_y \subset gG_xg^{-1}$ .  $\square$

**Definición 2.46.** Dada una  $G$ -variedad  $M$ , diremos que la acción de  $G$  es **transitiva** si para cualesquiera  $x, y \in M$ , existe  $g \in G$  tal que  $gx = y$ .

Dada una  $G$ -variedad  $M$ , diremos que la acción de  $G$  es **efectiva** si para cualquier  $g \in G$  tal que  $g \neq e$ , entonces existe  $x \in M$  tal que  $gx \neq x$  (ver Def. 2.21).

**Proposición 2.47.** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto, sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $l: G \times M \rightarrow M$  una acción de  $G$  tal que  $l$  no es efectiva; entonces existe una acción

$$l': G/\{\ker l\} \times M \rightarrow M,$$

tal que  $l'$  es efectiva.

*Demostración.* Dada la acción  $l$ , podemos pensarla también de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l: G &\rightarrow \text{Aut}(M) \\ g &\mapsto (l_g: M \rightarrow M), \end{aligned}$$

donde  $l_g(x) = gx$  para  $x \in M$ . Entonces, decir que  $l$  no es efectiva equivale a decir que  $\ker l \neq \{e\}$ , donde  $e$  es el elemento identidad de  $G$ .

Lo que nosotros deseamos es construir una acción  $l'$  como se ve en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{l} & \text{Aut}(M) \\ \downarrow & \nearrow l' & \\ G/\{\ker l\} & & \end{array}$$

Sea  $l': G/\{\ker l\} \rightarrow \text{Aut}(M)$  definida por:

$$(g \ker l) \mapsto l'_{g \ker l},$$

donde

$$\begin{aligned} l'_{g \ker l}(m) &= (l_g \circ l_k)(m) = l_g(km) \\ &= g(km) = m \end{aligned}$$

para algún  $k \in \ker l$ . Como hemos hecho cociente por  $\ker l$ , tenemos que la acción  $l'$  es inyectiva; i.e. es efectiva.  $\square$

**Definición 2.48.** Sean  $M$  y  $N$   $G$ -variedades y sea  $f$  una función de  $M$  a  $N$ ; diremos que  $f$  es  $\sigma$ -**equivariante** si existe un homomorfismo  $\sigma: G \rightarrow G$  tal que:

$$f(gx) = \sigma(g)f(x)$$

con  $g \in G$  y  $x \in M$ .

**Nota 17.** Cuando  $\sigma$  es la identidad, decimos que  $f$  es **equivariante**.

**Proposición 2.49** ([11, Prop. 4.6]). *Sea  $M$  una  $G$ -variedad tal que la acción de  $G$  es transitiva y sea  $x \in M$ . Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} f_x: G/G_x &\rightarrow M \\ gG_x &\mapsto gx \end{aligned}$$

*está bien definida y es un difeomorfismo.*

Cuando la aplicación no es transitiva, entonces lo que tenemos es que dado  $x \in M$ , hay un difeomorfismo

$$\begin{aligned} f_x: G/G_x &\rightarrow Orb_G(x) \\ gG_x &\mapsto gx . \end{aligned}$$

**Definición 2.50.** Una representación de un grupo de Lie  $G$  sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita es una acción continua  $\rho: G \times V \rightarrow V$  de  $G$  sobre  $V$  tal que para cada  $g \in G$  la traslación

$$l_g: v \mapsto \rho(g, v)$$

es una aplicación lineal. Entonces  $\rho$  nos induce un homomorfismo  $\varrho$  de  $G$  en  $GL(V)$  tal que  $\varrho(g) = l_g$  y viceversa (Ver [11, Ch. 2, Def. 1.1]); de manera que cuando hablemos de una representación pensaremos indistintamente en cualquiera de las funciones  $\rho$  ó  $\varrho$ .

**Ejemplo 19.** Sea  $H$  un grupo de Lie compacto y sea  $\varrho: H \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  una representación. Entonces  $H$  actúa sobre  $\mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\rho(h, x) = \varrho(h)(x)$$

para  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \in H$ .

**Ejemplo 20.** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto, sea  $H \subset G$  un subgrupo cerrado de  $G$  y sea  $\rho$  una acción como la del ejemplo anterior. Definimos entonces

$$G \times_H \mathbb{R}^n := (G \times \mathbb{R}^n)/H$$

donde  $H$  actúa sobre  $G \times \mathbb{R}^n$  por  $\rho(h, (g, x)) = (gh^{-1}, \varrho(h)(x))$ .

**Teorema 2.51** ([23, Th. 2.3]). *Sean  $G, H$  como en el Ejemplo 20, entonces la terna  $(G \times_H \mathbb{R}^n, \pi, G/H)$  es un haz vectorial con fibra  $\mathbb{R}^n$ ; donde  $\pi: G \times_H \mathbb{R}^n \rightarrow G/H$  es tal que:*

$$[(g, v)] \mapsto gH .$$

*El espacio total  $G \times_H \mathbb{R}^n$  tiene una acción natural de  $G$  dada por*

$$g_1[(g, v)] = [(g_1g, v)]$$

**Teorema 2.52** (Representación por rebanadas, [23, Th. 2.4]). *Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $G$  un grupo de Lie compacto tal que tenemos una acción suave  $G \times M \rightarrow M$ . Entonces, dado  $x \in M$ ,*

*i) la órbita  $Orb_G(x) \subset M$  es una subvariedad diferenciable de  $M$ ;*

ii) dado  $N_x \text{Orb}_G(x)$ ; esto es, el haz normal (ver el Ejemplo 7) de  $\text{Orb}_G(x)$  en  $x$ ; el subgrupo  $G_x$  actúa sobre  $N_x \text{Orb}_G(x)$  de la siguiente manera:

Para cada  $g \in G_x$ , la diferencial de  $g: M \rightarrow M$  induce una aplicación lineal  $N_x \text{Orb}_G(x) \rightarrow N_x \text{Orb}_G(x)$  induciendo una representación

$$\rho_x: G_x \rightarrow N_x \text{Orb}_G(x) .$$

Llamaremos a esta representación una **representación por rebanadas**;

iii) el cociente  $G \times_{G_x} N_x \text{Orb}_G(x)$  es equivariantemente difeomorfa a una vecindad de la órbita  $\text{Orb}_G(x) \subset M$  mediante un difeomorfismo que lleva la sección cero  $G/G_x = \{[(g, 0)]\}$  a  $\text{Orb}_G(x)$ ;

iv) después de elegir una métrica Euclidiana invariante sobre  $N_x \text{Orb}_G(x)$ , podemos pensar a la acción  $\rho_x$  como  $\rho_x: G_x \rightarrow O(N_x \text{Orb}_G(x))$ ; es decir, como una función del subgrupo de isotropía  $G_x$  en el grupo de automorfismos de  $N_x \text{Orb}_G(x)$  que preservan el producto interno sobre  $N_x \text{Orb}_G(x)$ .

## 2.4.2 Acciones de $\mathbb{S}^1$ .

Nosotros estamos interesados en el grupo del círculo  $G = \mathbb{S}^1$ . Recordemos entonces que hay diferentes maneras de pensar este grupo:

- 1)  $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ , números complejos de módulo 1;
- 2)  $G = SO(2)$ , matrices ortogonales reales de determinante 1;
- 3)  $G \cong T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , reales módulo los enteros. (Donde convenientemente estamos pensando en la forma equivalente  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ; esto es, los elementos de  $G$  serán ángulos  $\phi$  donde  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ).

Isomorfismos explícitos pueden ser fácilmente construidos entre (1), (2) y (3).

**Nota 18.** Cuando hablemos de una acción de  $\mathbb{S}^1$  en una variedad diferenciable  $M$ , supondremos siempre que la acción es efectiva; esto se deberá a que cuando no tenemos una acción efectiva siempre podemos obtener una acción efectiva de  $\mathbb{S}^1$ :

Por la Proposición 2.47, cuando tenemos una acción  $l: \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{Aut}(M)$  tal que  $l$  no es efectiva, tenemos que el  $\ker l \neq \{1\}$ ; es decir,  $\ker l = \mathbb{S}^1$  ó  $\ker l = \mathbb{Z}_\alpha$ ; en el primer caso tenemos que la acción  $l': \{1\} \rightarrow \text{Aut}(M)$  (cuya existencia enuncia la Proposición) es  $Id_M$ .

Por otro lado, cuando  $\ker l = \mathbb{Z}_\alpha$ , podemos obtener una acción efectiva del grupo cociente  $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_\alpha$  pero

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_\alpha &= \{[e^{2\pi i\theta} \mathbb{Z}_\alpha] \mid 0 \leq \theta < 1\} \\ &= \{e^{2\pi i\theta_1} \mid 0 \leq \theta_1 < 1/p\} \simeq \mathbb{S}^1 . \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 21** ([40, Sect. 1.5]). Sea  $\mathbb{S}^3 = \{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1\}$  y definamos una acción de  $U(1)$  dada por

$$t(z_1, z_2) = (t^\beta z_1, t^\alpha z_2), \text{ donde } t \in U(1).$$

Esta acción es efectiva cuando  $(\alpha, \beta) = 1$ . La órbita  $\{z_1 = 0, z_2\bar{z}_2 = 1\}$  tiene grupo de isotropía  $\mathbb{Z}_\alpha$  y la órbita  $\{z_2 = 0, z_1\bar{z}_1 = 1\}$  tiene grupo de isotropía  $\mathbb{Z}_\beta$ . Todas las otras órbitas tienen grupo de isotropía trivial.

**Ejemplo 22.** Consideremos  $\mathbb{S}^3$  como en el ejemplo anterior con la siguiente acción de  $U(1)$ :

$$t(z_1, z_2) = (z_1, tz_2), \text{ donde } t \in U(1).$$

Esta acción tiene un círculo de puntos fijos:  $\{z_2 = 0, z_1\bar{z}_1 = 1\}$  y las demás órbitas tienen grupo de isotropía trivial.

**Ejemplo 23.** Sea  $B$  una 2-variedad diferenciable cerrada y sea  $M = B \times \mathbb{S}^1$ . Definamos una acción de  $\mathbb{S}^1$  de tal manera que sea trivial en el primer factor y la usual en el segundo factor. Esto da una acción libre de  $\mathbb{S}^1$  con espacio de órbitas  $B$ .

Por el inciso (iii) del Teorema 2.52, si estudiamos todas las posibles representaciones por rebanadas de los subgrupos de isotropía de  $\mathbb{S}^1$ , conoceremos como lucen las órbitas localmente.

Tenemos entonces que los posibles subgrupos de isotropía de  $\mathbb{S}^1$  son  $(e)$ , los grupos cíclicos  $\mathbb{Z}_\alpha$  (dados por las  $\alpha$ -ésimas raíces de la unidad) y  $\mathbb{S}^1$ .

**Caso 1.**  $\mathbb{S}_x^1 = \{1\}$

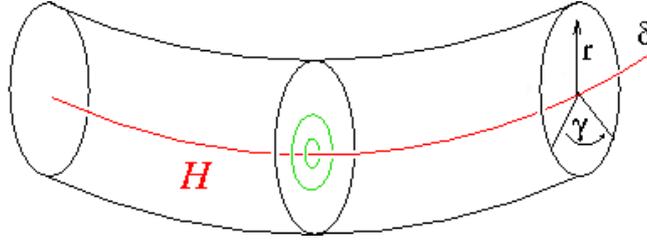
Sea  $x \in M$  y supongamos que  $\mathbb{S}_x^1 = \{1\}$ . Entonces la órbita  $Orb_{\mathbb{S}^1}(x)$  es difeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ , el haz normal de  $Orb_{\mathbb{S}^1}(x)$  en  $x$  es  $\mathbb{R}^2$  y

$$\mathbb{S}^1 \times_{\{1\}} \mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 .$$

**Caso 2.**  $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{S}^1$

Sea  $x \in M$  tal que  $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{S}^1$ ; es decir,  $x$  es un punto fijo. En este caso tenemos que  $\dim(N_x Orb_{\mathbb{S}^1}(x)) = 3$

Como  $\varrho$  es una acción efectiva, tenemos que  $\varrho: \mathbb{S}^1 \rightarrow O(N_x Orb_{\mathbb{S}^1}(x))$  debe ser inyectiva. Sólo existe entonces una representación, escribiendo a  $N_x Orb_{\mathbb{S}^1}(x)$  como  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$  donde  $\mathbb{S}^1$  rota a  $\mathbb{R}^2$  y deja fijo a  $\mathbb{R}^1$ . Esto es equivalente a la rotación de  $\mathbb{D}^3$  con eje de rotación a través de  $x$ . El espacio de órbitas de esta acción sobre  $\mathbb{D}^3$  es un 2-disco cerrado con  $x$  en la frontera. Así los puntos fijos viven sobre subvariedades topológicas de dimensión 1 y por compacidad, estas variedades son círculos (ver Figura 2.6).

Figura 2.6: Una fibra  $H$  de puntos fijos.

Una vecindad tubular suficientemente pequeña de una componente de puntos fijos es entonces un toro sólido con sólo puntos fijos y órbitas principales. Si parametrizamos este toro sólido  $V = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  por  $(r, \gamma, \delta)$  con  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \gamma, \delta < 2\pi$  y dejamos a  $\mathbb{S}^1$  actuar por suma de ángulos, entonces la acción es equivalente a

$$\theta(r, \gamma, \delta) = (r, \gamma + \theta, \delta), \text{ donde } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

### Caso 3. $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{Z}_\mu$

Sea  $x \in M$  tal que  $\mathbb{S}_x^1 = \mathbb{Z}_\mu$ , como  $\mathbb{S}^1 \times_{\mathbb{Z}_\mu} N_x \text{Orb}_{\mathbb{S}^1}(x)$  es de dimensión 3 y  $\mathbb{S}_x^1$  es discreto, tenemos que  $\dim(N_x \text{Orb}_{\mathbb{S}^1}(x)) = 2$ ; de manera que la órbita  $\text{Orb}_{\mathbb{S}^1}(x)$  es de dimensión 1 y una “rebanada” de  $M$  en  $x$  podemos pensarla como un 2-disco  $\mathbb{D}^2$  tal que la acción de  $\mathbb{S}_x^1$  es la acción ortogonal de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{D}^2$ . Las acciones de  $\mathbb{Z}_\mu$  sobre  $\mathbb{D}^2$  son equivalentes a la rotación (cuando  $\mu > 2$ ) y a la rotación o reflexión (cuando  $\mu = 2$ ).

Consideremos las rotaciones. Sea  $\xi = 2\pi/\mu$  actuando sobre el disco unitario de la siguiente manera:

$$\xi(r, \gamma) = (r, \gamma + \nu\xi), \text{ donde } (\mu, \nu) = 1 \text{ y } 0 < \nu < \mu.$$

Llamaremos a esta acción una **acción lineal estándar** de tipo  $[\mu, \nu]$ . Ya que ésta es una acción en cada rebanada de una órbita excepcional como la que tenemos, una pequeña vecindad tubular es un toro sólido  $T$  con una acción equivalente a

$$\theta(r, \gamma, \delta) = (r, \gamma + \nu\theta, \delta + \mu\theta);$$

de donde podemos ver que la órbita que corresponde a  $r = 0$  tiene grupo de isotropía de orden  $\mu$ . Llamaremos a  $[\mu, \nu]$  los **invariantes de órbita orientados**. Los correspondientes **invariantes de Seifert**  $(\alpha, \beta)$  están definidos por

$$\alpha = \mu, \quad \beta\nu \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Así, obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.53** ([23, Th. 2.1]). *Sea  $M$  una  $\mathbb{S}^1$ -variedad de dimensión 3 junto con una aplicación órbita  $\Pi$  y un espacio de órbitas  $M/\mathbb{S}^1$ . Entonces  $(M, M/\mathbb{S}^1, \Pi)$  es una fibración de Seifert.*

**Nota 19.** Tenemos, sin embargo, que no toda variedad de Seifert puede verse como una  $\mathbb{S}^1$ -variedad, como lo dice el siguiente resultado:

**Proposición 2.54** ([40, Sec. 5.2 Prop. 1]). *Dada una fibración de Seifert  $(M, \pi, F)$  junto con la estructura de grupo  $O(2)$ , si la estructura de grupo se reduce a  $SO(2)$ , entonces  $M$  admite una acción de  $\mathbb{S}^1$ .*

**Ejemplo 24.** Los espacios lente (definidos en la Sección 2.3) son un ejemplo de  $\mathbb{S}^1$ -variedad a la cual se le puede ver como variedad de Seifert.

Para ver que un espacio lente es una  $\mathbb{S}^1$ -variedad, basta recordar que un espacio lente de tipo  $(p, q)$  es el espacio  $\mathbb{S}^3/(\mathbb{Z}_p)$  con  $\text{mcd}(p, q) = 1$ . Veamos entonces los siguientes resultados:

**Lema 2.55** ([40, Sect. 6.1 Lemma 3]). *Al grupo  $\mathbb{Z}_p$  lo podemos ver como subgrupo de  $SO(4)$ .*

**Teorema 2.56.** *Sea  $G$  un subgrupo finito de  $SO(4)$  actuando libremente sobre  $\mathbb{S}^3$ . Entonces existe una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{S}^3$  tal que las acciones de  $G$  y de  $\mathbb{S}^1$  conmutan, de manera que el espacio  $\mathbb{S}^3/G$  es también una  $\mathbb{S}^1$ -variedad.*

Combinando estos dos últimos resultados, obtenemos que un espacio lente  $L(p, q)$  es una  $\mathbb{S}^1$ -variedad.



# Capítulo 3

## Puntos críticos de funciones reales

En este capítulo estamos interesados en conocer la dimensión del conjunto de puntos críticos de una función real, hablaremos del caso “genérico” y estudiaremos el caso de una familia particular de funciones reales.

### 3.1 Homomorfismos de haces genéricos.

En esta sección haremos una construcción que nos ayudará en nuestro objetivo de decir cuál es la dimensión del conjunto de puntos críticos de una función real; para lo cual usaremos haces vectoriales y homomorfismos entre ellos (ver Sección 1.3). Nuestra base ha sido [2]; sin embargo, la construcción viene de [52] y también hay una generalización en [6], las cuales pueden consultarse para mayores referencias.

Sea  $M$  una variedad diferenciable, sean  $\zeta$  y  $\xi$  haces vectoriales reales sobre  $M$  y sea  $h$  un homomorfismo de haces  $h: \zeta \rightarrow \xi$ .

Así, para cada punto  $x \in M$ , tenemos la aplicación lineal  $h_x: \zeta_x \rightarrow \xi_x$ , donde  $\zeta_x$  y  $\xi_x$  son las fibras correspondientes a  $x$  en  $\zeta$  y  $\xi$  respectivamente.

Sea además

$$Hom(\zeta, \xi) \xrightarrow{\pi} M$$

el haz de homomorfismos de  $\zeta$  a  $\xi$ ; recordemos que dado  $x \in M$ , la fibra de  $Hom(\zeta, \xi)$  sobre  $x$  es el espacio vectorial  $Hom(\zeta, \xi)_x$  de transformaciones lineales de  $\zeta_x$  a  $\xi_x$ .

Supongamos ahora que  $\text{rango}(\zeta) = k$  y  $\text{rango}(\xi) = l$  (ver la Definición 1.20), entonces

$$Hom(\zeta, \xi)_x \simeq M_{k,l}(\mathbb{R}) ,$$

esto es, podemos ver a  $Hom(\zeta, \xi)_x$  como las matrices  $k \times l$  con entradas reales.

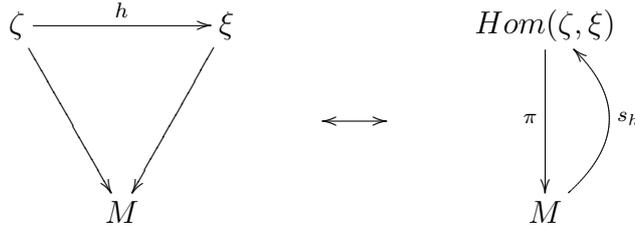
Tenemos también que existe una correspondencia entre homomorfismos de

haces  $h: \zeta \rightarrow \xi$  y secciones de  $Hom(\zeta, \xi)$ :

$$s_h: M \rightarrow Hom(\zeta, \xi)$$

$$x \longmapsto h_x .$$

la cual podemos ilustrar:



Tenemos entonces que  $h$  induce una partición sobre  $M$  dada por subconjuntos “singulares”

$$Z_j(h) = \{x \in M \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(h_x)) = j\}$$

$$= \{x \in M \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(s_h(x))) = j\} , \tag{3.1}$$

donde  $0 \leq j \leq \text{rango}(\zeta)$ .

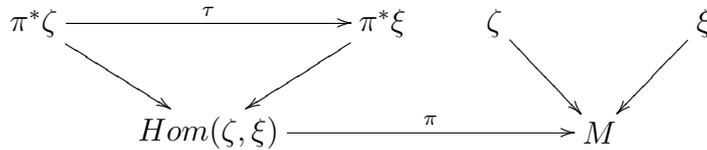
Por otra parte, tomamos los haces inducidos de  $\zeta$  y  $\xi$  con respecto a  $\pi$  y definimos el homomorfismo de haces **tautológico**  $\tau$  entre  $\pi^*\zeta$  y  $\pi^*\xi$ , de la siguiente manera:

Sea  $v \in Hom(\zeta, \xi)$ ; entonces tenemos una aplicación lineal  $\tau_v$  tal que

$$\tau_v: \pi^*\zeta_v \simeq \zeta_{\pi(v)} \xrightarrow{v} \xi_{\pi(v)} \simeq \pi^*\xi_v ,$$

de donde vemos que  $\tau_v = v$  (de ahí el nombre de tautológico).

Para darnos una idea más clara, lo que obtenemos puede verse en el siguiente diagrama:



En este caso, tenemos una partición de  $Hom(\zeta, \xi)$  dada por  $\tau$ :

$$Z_j(\tau) = \{v \in Hom(\zeta, \xi) \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\tau_v)) = j\}$$

$$= \{v \in Hom(\zeta, \xi) \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(v)) = j\} .$$

Entonces tenemos el siguiente resultado, probado por Thom [52] y generalizado por Boardman [6] (véase también [2, Ecuación (1)]):

**Proposición 3.1.** *El conjunto  $Z_j(\tau)$  es una subvariedad diferenciable de  $\text{Hom}(\zeta, \xi)$  tal que su codimensión es  $j(l - k + j)$ , para todo  $0 \leq j \leq \text{rango } \zeta$ .*

Así podemos pensar en la siguiente noción de “genericidad”.

**Definición 3.2.** Dado un homomorfismo de haces vectoriales  $h$ , diremos que es **genérico** si la sección correspondiente  $s_h$  es transversal a la subvariedad  $Z_j(\tau)$  para todo  $j$ .

Entonces tenemos que los homomorfismos genéricos de haces vectoriales forman un subconjunto denso del espacio de morfismos de haces vectoriales con la topología  $\mathcal{C}^\infty$  de Whitney (ver [27, § 1]).

Usando la definición anterior, obtenemos que:

**Proposición 3.3** ([2, Proposition 3]). *Sea  $h: \zeta \rightarrow \xi$  un homomorfismo de haces vectoriales genérico, entonces el conjunto  $Z_j(h)$  es una subvariedad de  $M$  tal que  $\text{codim}_{\mathbb{R}}(Z_j(h)) = j(l - k + j)$ .*

*Demostración.* Sea  $s_h$  la sección de  $\text{Hom}(\zeta, \xi)$  correspondiente a  $h$ . Tenemos que

$$Z_j(h) = s_h^{-1}(Z_j(\tau))$$

y ya que  $s_h$  es transversal a  $Z_j(\tau)$  para todo  $j$ , por el Teorema de la preimagen [17, página 28],  $Z_j(h)$  es subvariedad de  $M$  de codimensión real  $j(l - k + j)$ .  $\square$

### 3.2 Funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^2$ .

Veamos ahora cómo nos pueden servir los resultados anteriores para estudiar la dimensión de los puntos críticos de una función real usando la noción de haz tangente (ver Ejemplo 6).

Sea  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ . Denotaremos por  $\text{Crit}(f)$  el conjunto de puntos críticos (ver Def. 1.6) de  $f$ , esto es,

$$\text{Crit}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{rango}(Df_x) < 2\} ;$$

es decir,

$$\text{Crit}(f) = C_0(Df) \cup C_1(Df) , \tag{3.2}$$

donde  $C_i(Df) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(Df_x)) = n - i\}$ .

Entonces tomamos el haz inducido de  $T\mathbb{R}^2$  con respecto a  $f$  y obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 T\mathbb{R}^n & \xrightarrow{Df} & T\mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \varphi_f & \searrow & \downarrow \pi \\
 f^*T\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{f}} & T\mathbb{R}^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 ,
 \end{array} \tag{3.3}$$

donde queremos encontrar  $\varphi_f: T\mathbb{R}^n \rightarrow f^*T\mathbb{R}^2$  tal que  $Df = \hat{f} \circ \varphi_f$ .

Notemos entonces que:

$$\begin{aligned} f^*T\mathbb{R}^2 &= \{(x, y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid f(x) = \pi(y, v)\} \\ &= \{(x, f(x), v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\} \\ &\simeq \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2\}, \end{aligned}$$

de manera que  $f^*T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$ . Si ahora pensamos el diagrama (3.3) en elementos, tenemos, dados  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in T\mathbb{R}_x^n$  y  $w \in T\mathbb{R}_{f(x)}^2$  tal que  $Df_x(v) = w$ , el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (x, v) & \xrightarrow{Df} & & & \\ & \searrow \varphi_f & & & \\ & & (x, w) & \xrightarrow{\hat{f}} & (f(x), w) \\ & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & x & \xrightarrow{f} & f(x); \end{array}$$

entonces podemos definir a la función  $\varphi_f$  que buscamos como:

$$\begin{aligned} \varphi_f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \\ (x, v) &\longmapsto (x, Df_x(v)). \end{aligned}$$

Así, obtenemos dos haces vectoriales sobre  $\mathbb{R}^n$  y un homomorfismo  $\varphi_f$  entre dichos haces:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_f} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \simeq f^*T\mathbb{R}^2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

de donde, recordando la notación de la sección anterior,

$$\begin{aligned} \varphi_{f_x}: \{x\} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^2 \\ (x, v) &\longmapsto (x, Df_x(v)), \end{aligned}$$

de manera que podemos pensar a  $\varphi_{f_x}$  como  $Df_x$ .

Entonces el haz de homomorfismos

$$\begin{array}{c} \text{Hom}(T\mathbb{R}^n, f^*T\mathbb{R}^2) \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^n \end{array} \quad (3.4)$$

es tal que

$$\text{Hom}(T\mathbb{R}^n, f^*T\mathbb{R}^2) \simeq \text{Hom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^n \times M_{n,2}(\mathbb{R})$$

y la sección dada por  $\varphi_f$  en el haz (3.4) es:

$$s_{\varphi_f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times M_{n,2}(\mathbb{R})$$

$$x \longmapsto (x, Df_x);$$

como el haz es trivial, esto es equivalente a dar la función  $x \mapsto Df_x$ .

Ahora, la noción de genericidad dada en la Definición 3.2, nos induce el siguiente concepto.

**Definición 3.4.** Sea  $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ . Diremos que  $f$  es una función **genérica** cuando el homomorfismo de haces  $\varphi_f$  (el cual, claramente depende de  $f$ ) es genérico (recordar la Definición 3.2).

Además, las funciones genéricas forman un subconjunto denso del espacio de todas las funciones (pensando en funciones entre variedades diferenciables), como se puede ver en [27].

Supongamos entonces que nuestra función  $f$  es genérica.

Así, tenemos que  $\varphi_f$  induce una partición sobre  $\mathbb{R}^n$  dada por los conjuntos  $Z_j(\varphi_f)$  (ver (3.1)), de tal manera que:

$$\begin{aligned} Z_j(\varphi_f) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi_{f_x})) = j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dim_{\mathbb{R}}(\ker(Df_x)) = j\}. \end{aligned}$$

Es decir que, recordando (3.2), tenemos:

$$\text{Crit}(f) = C_0(Df) \cup C_1(Df) = Z_n(\varphi_f) \cup Z_{n-1}(\varphi_f).$$

Entonces, usando la Definición 3.2 y la Proposición 3.3, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathbb{R}}(Z_{n-1}(\varphi_f)) &= (n-1)(2-n+n-1) = n-1 \\ \text{codim}_{\mathbb{R}}(Z_n(\varphi_f)) &= n(2-n+n) = 2n. \end{aligned}$$

Lo cual nos lleva a preguntarnos la dimensión de  $Z_n(\varphi_f)$ ; para encontrar la respuesta debemos pensar en la construcción que se hizo en la sección anterior.

En nuestro caso, el conjunto “singular”  $Z_j(\tau)$  que nos da el homomorfismo de haces tautológico  $\tau$  es de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} Z_j(\tau) \subset \text{Hom}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow \uparrow s_{\varphi_f} \\ \mathbb{R}^n \end{array}$$

Además, por la Proposición 3.1 sabemos que

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathbb{R}}(Z_{n-1}(\tau)) &= n - 1 ; & \text{esto es, } \dim_{\mathbb{R}}(Z_{n-1}(\tau)) &= 2n + 1 \\ \text{codim}_{\mathbb{R}}(Z_n(\tau)) &= 2n ; & \text{esto es, } \dim_{\mathbb{R}}(Z_n(\tau)) &= n . \end{aligned}$$

Por definición de un homomorfismo genérico de haces vectoriales, si  $\varphi_f$  es genérica, entonces debe cumplir que la sección  $s_{\varphi_f}$  es transversal a todos los conjuntos  $Z_j(\tau)$ ; en particular a  $Z_n(\tau)$ ; es decir, que

$$T_{\alpha}Z_n(\tau) \oplus Ds_{\varphi_f x}(T_x\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} ,$$

donde  $s_{\varphi_f}(x) = \alpha$ , pero  $\dim(T_{\alpha}Z_n(\tau)) = n$  y  $\dim(Ds_{\varphi_f x}(T_x\mathbb{R}^n)) \leq n$ , de manera que no se puede dar la igualdad anterior.

Así vemos que la única manera de que  $s_{\varphi_f}$  sea transversal a  $Z_n(\tau)$  es que  $\text{Im}(s_{\varphi_f})$  y  $Z_n(\tau)$  no se intersecten, lo cual nos dice que  $Z_n(\varphi_f) = \emptyset$ .

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 3.5.** *Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $f$  es una función genérica, con  $n \geq 3$ . Entonces*

$$\text{Crit}(f) = Z_{n-1}(\varphi_f) \quad \text{y} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\text{Crit}(f)) = 1 .$$

### 3.3 Funciones con punto crítico aislado

En esta sección daremos dos familias de funciones reales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^2$  que no son genéricas de acuerdo a la Definición 3.4; lo cual en principio nos diría que la dimensión del conjunto de puntos críticos es cero (por el Corolario 3.5); pero demostraremos además que estas funciones tienen punto crítico aislado.

Sea  $F: \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  una función real definida de la siguiente forma:

$$F(x, y, z) = \overline{xy}(x^p + y^q) + z^r, \quad (3.5)$$

donde  $2 \leq p, r < q$  ó  $2 \leq q, r < p$ .

Lo que queremos encontrar es el conjunto  $\text{Crit}(F)$ , de manera que lo primero que hacemos es fijarnos en la matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial z} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial z} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

donde:

$$\text{Re}(F) = \frac{1}{2}(\overline{xy}x^p + \overline{xy}y^q + z^r + xy\bar{x}^p + xy\bar{y}^q + \bar{z}^r)$$

e

$$\text{Im}(F) = \frac{1}{2}(\overline{xy}x^p + \overline{xy}y^q + z^r - xy\bar{x}^p - xy\bar{y}^q - \bar{z}^r) .$$

Tenemos entonces que  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  será un punto crítico de  $F$  si al evaluar la matriz (3.6) en  $(x, y, z)$ , el rango es menor que 2; esto nos dice que debemos analizar los menores de tamaño 2 de dicha matriz para encontrar  $\text{Crit}(F)$ .

Nos falta todavía analizar los puntos críticos de una familia más de funciones reales, la cual usaremos en el Capítulo 4.

Sea entonces  $f: \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  la función:

$$f(x, y) = \overline{xy}(x^p + y^q), \quad (3.7)$$

con las mismas condiciones para  $p$  y  $q$  que en la definición de  $F$ .

Se conoce bien que esta familia de funciones tiene punto crítico aislado (como se menciona, por ejemplo, en [43]); sin embargo, creemos que es interesante una nueva manera de ver este hecho.

Así, la matriz jacobiana de  $f$  está dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial x} & \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial \overline{x}} & \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial y} & \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial \overline{y}} \\ \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial x} & \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial \overline{x}} & \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial y} & \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial \overline{y}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

donde:

$$\text{Re}(f) = \frac{1}{2}(\overline{xy}x^p + \overline{xy}y^q + xy\overline{x}^p + xy\overline{y}^q)$$

e

$$\text{Im}(f) = \frac{1}{2}(\overline{xy}x^p + \overline{xy}y^q - xy\overline{x}^p - xy\overline{y}^q).$$

Análogamente al caso de  $F$ , debemos analizar los menores de tamaño dos de la matriz (3.8) para encontrar  $\text{Crit}(f)$  para ver en qué puntos esta matriz tiene rango menor que dos.

### 3.3.1 Los puntos críticos de $F$ y de $f$ .

Primero veamos cómo es  $\text{Crit}(F)$ .

El menor formado por las dos últimas columnas es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial z} & \frac{\partial \text{Re}(F)}{\partial \overline{z}} \\ \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial z} & \frac{\partial \text{Im}(F)}{\partial \overline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}rz^{r-1} & \frac{1}{2}r\overline{z}^{r-1} \\ \frac{1}{2i}rz^{r-1} & -\frac{1}{2i}r\overline{z}^{r-1} \end{pmatrix}; \quad (3.9)$$

de donde, el determinante de dicha submatriz es

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}rz^{r-1}\right)\left(-\frac{1}{2i}r\overline{z}^{r-1}\right) - \left(\frac{1}{2}r\overline{z}^{r-1}\right)\left(\frac{1}{2i}rz^{r-1}\right) &= -\frac{1}{4i}z\overline{z}^{r-1} - \frac{1}{4i}z\overline{z}^{r-1} \\ &= -\frac{1}{2i}r^2|z|^{2(r-1)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Así, para un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  con  $z \neq 0$ , tenemos que  $(x, y, z)$  es un punto regular pues el rango de la matriz es igual a 2.

Y por la definición de  $F$ , para un punto  $(x, y, z) \in V$  tal que  $z = 0$ , tenemos que

$$\overline{xy}x^p = -\overline{xy}y^q . \quad (3.11)$$

Tomemos ahora el menor formado por las dos primeras columnas de la matriz (3.6):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \overline{x}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \overline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(p\overline{xy}x^{p-1} + \overline{x}^p y + \overline{y}^q y) & \frac{1}{2}(\overline{y}x^p + \overline{y}y^q + p\overline{x}^{p-1}xy) \\ \frac{1}{2i}(p\overline{xy}x^{p-1} - \overline{x}^p y - \overline{y}^q y) & \frac{1}{2i}(\overline{y}x^p + \overline{y}y^q - p\overline{x}^{p-1}xy) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

El determinante de este menor está dado por:

$$\frac{1}{2i}(\overline{x}^p \overline{y} x^p y + \overline{y}^{q+1} x^p y + \overline{x}^p \overline{y} y^{q+1} + \overline{y}^{q+1} y^{q+1} - p^2 \overline{x}^p \overline{y} x^p y) . \quad (3.13)$$

Usando la ecuación (3.11), el primer término de la ecuación anterior nos da:

$$\overline{x}^p \overline{y} x^p y = \overline{x}^{p-1}(\overline{xy}x^p)y = \overline{x}^{p-1}(-\overline{xy}y^q)y = -\overline{x}^p \overline{y} y^q + 1 ;$$

así, (3.13) se convierte en

$$\frac{1}{2i}(\overline{y}^{q+1} x^p y + \overline{y}^{q+1} y^{q+1} - p^2 \overline{x}^p \overline{y} x^p y) . \quad (3.14)$$

De donde, tenemos dos casos:

- i) Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , tenemos por (3.11) que  $x^p = -y^q$ , sustituyendo en (3.14), obtenemos que

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \overline{x}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \overline{x}} \end{array} \right| = \frac{1}{2i}(-p\overline{x}^p \overline{y} x^p y) = -\frac{1}{2i}p|x|^{2p}|y|^2 \neq 0 .$$

- ii) Si  $x = 0$ ,  $y \neq 0$ , tenemos que

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \overline{x}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \overline{x}} \end{array} \right| = \frac{1}{2i}(\overline{y}^{q+1} y^{q+1}) = \frac{1}{2i}|y|^{2q+2} \neq 0 .$$

Finalmente, tenemos que el menor formado por las columnas tercera y cuarta de (3.6) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \overline{y}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \overline{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q\overline{xy}y^{q-1} + x\overline{x}^p + x\overline{y}^q) & \frac{1}{2}(\overline{xx}^p + \overline{xy}^q + q\overline{y}^{q-1}xy) \\ \frac{1}{2i}(q\overline{xy}y^{q-1} - x\overline{x}^p - x\overline{y}^q) & \frac{1}{2i}(\overline{xx}^p + \overline{xy}^q - q\overline{y}^{q-1}xy) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Suponiendo todavía que  $z = 0$ , usamos la ecuación (3.11) y obtenemos que el determinante de esta matriz es:

$$\frac{1}{2i}(-q\overline{xy}^q xy^q + \overline{x}^p + 1x^{p+1} + \overline{x}^{p+1} xy^q)$$

De donde, podemos distinguir los dos siguientes casos:

i') Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , de manera análoga a (i), tenemos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i}(-q^2 \bar{x} \bar{y}^q x y^q) = -\frac{1}{2i} q^2 |x|^2 |y|^2 q \neq 0 .$$

ii') Si  $x \neq 0$  y  $y = 0$ , entonces

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} |x|^{2p+2} \neq 0 .$$

De manera que un punto  $(x, y, z)$  es un punto regular de la función si alguna de sus coordenadas  $x, y, z$  es diferente de cero.

Entonces la pregunta que queda es de qué tipo es el punto  $(0, 0, 0) \in V$ .

En los tres menores que ya hemos visto, es claro que cuando evaluamos en el punto  $(0, 0, 0)$ , los determinantes de estos menores son iguales a cero; para los otros menores tenemos que:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \bar{x} \bar{y} (q y^q - p x^p) (\bar{x}^p + \bar{y}^q) ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \bar{x} \bar{y} (-p q \bar{y}^q x^p + (x^p + y^q) (\bar{x}^p + \bar{y}^q)) ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial z} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} r y z^{r-1} (\bar{x}^p + \bar{y}^q) ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{z}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} p r \bar{x} \bar{y} z^{r-1} x^{p-1} ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} \bar{y} x (p q \bar{x}^p y^q - (x^p + y^q) (\bar{x}^p - \bar{y}^q)) ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} x y (p q \bar{x}^{p-1} \bar{y}^{q-1} x y + (p \bar{x}^p - q \bar{y}^q) (x^p + y^q)) ,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial z} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2i} p r \bar{x}^{p-1} x y z^{r-1} ,$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{z}} \end{array} \right| &= -\frac{1}{2i} r \bar{y} z^{r-1} (x^p + y^q) , \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial z} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial z} \end{array} \right| &= \frac{1}{2i} r x z^{r-1} (\bar{x}^p + \bar{y}^q) , \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{z}} \end{array} \right| &= -\frac{1}{2i} q r \bar{x} \bar{y} z^{r-1} y^{q-1} , \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial z} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial z} \end{array} \right| &= \frac{1}{2i} q r \bar{y}^{q-1} x y z^{r-1} , \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \operatorname{Re}(F)}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial \operatorname{Im}(F)}{\partial \bar{z}} \end{array} \right| &= -\frac{1}{2i} r \bar{x} \bar{z}^{r-1} (x^p + y^q) , \end{aligned}$$

De donde podemos ver que el punto  $(0, 0, 0)$  es un punto crítico aislado de  $F$ .

Tenemos además que la matriz jacobiana (3.6) evaluada en el punto  $(0, 0, 0)$  tiene rango cero; para ver esto, sólo hay que analizar las entradas de esta matriz que podemos ver por separado en las ecuaciones (3.9), (3.12) y (3.15).

Así, recordando la sección anterior, tenemos que  $F$  no es una función genérica; es decir,  $\varphi_F$  no es un homomorfismo genérico de haces vectoriales y más aún,  $Z_{n-1}(\varphi_F) = \emptyset$  y

$$Z_n(\varphi_F) = (0, 0, 0) .$$

Veamos ahora cómo es  $\operatorname{Crit}(f)$ .

No es difícil ver que la matriz jacobiana de  $f$ , (3.8), es de hecho la submatriz de (3.6) formada por las primeras cuatro columnas; de manera que el análisis es análogo al que hicimos en el caso de  $F$ ; de donde obtenemos que un punto  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  es un punto regular de la función si alguna de sus coordenadas  $x, y$  es diferente de cero.

Así, el punto  $(0, 0)$  es el único punto crítico de  $f$ ; de donde  $f$  tampoco es una función genérica y análogamente a  $F$ ,

$$Z_{n-1}(\varphi_f) = \emptyset \quad \text{y} \quad Z_n(\varphi_f) = (0, 0, 0) .$$

Esto es importante por lo que veremos a continuación.

### 3.4 Teorema de Fibración de Milnor

En nuestro caso hemos encontrado una familia de funciones que tienen punto crítico aislado y por ello cumplen la Condición de Milnor (descrita en [31]) requerida para el Teorema de Fibración de Milnor en el caso real:

Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  una función polinomial que lleva el origen al origen y que satisface

**Hipótesis** (Condición de Milnor). Debe existir una vecindad  $U$  del origen en  $\mathbb{R}^n$  tal que la matriz  $(\partial f_i / \partial x_j)$  tiene rango  $k$  para todo  $x \in U$  con  $x$  diferente del origen.

Asumamos también que  $k \geq 2$ .

**Teorema 3.6** (Fibración de Milnor, [31, Th. 11.2]). *El complemento de una vecindad tubular abierta de  $K$  en  $\mathbb{S}_\epsilon^{n-1}$  es el espacio total de un haz fibrado suave sobre la esfera  $\mathbb{S}^{k-1}$ , donde cada fibra  $F$  es una variedad suave compacta de dimensión  $n - k$  tal que la frontera  $\partial F$  es difeomorfa a  $K$ .*

Ahora, sabemos por el Corolario 3.5, que la Condición de Milnor no es fácil de satisfacer y podemos citar a Milnor:

*“The major weakness of Theorem 11.2 is that the hypothesis is so strong that examples are very difficult to find.*

*Problem. For which dimensions  $n \geq k \geq 2$  do non-trivial examples exists? ”*

Debido a esto, en un futuro se puede pensar en un estudio de las singularidades de las funciones que hemos encontrado desde el punto de vista del Teorema de Fibración de Milnor. Para ahondar en este tema se puede ver [46].



# Capítulo 4

## Singularidades reales

Retomando la función  $F$  de la Sección 3.3, en este capítulo estudiaremos la aureola de la singularidad aislada de  $V = F^{-1}(0)$  y veremos que esta aureola es una variedad de Seifert.

Además, trataremos de relacionar dicha aureola con la aureola de la singularidad aislada de  $V' = f^{-1}(0)$  mediante cubrientes ramificados.

### 4.1 Definiciones y propiedades

En esta sección estableceremos la notación y los objetos con los cuales trabajaremos.

Sean  $F$  y  $f$  como en la Sección 3.3; es decir, tenemos:

$$F: \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

$$(x, y, z) \longmapsto \overline{xy}(x^p + y^q) + z^r \quad (4.2)$$

y

$$f: \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \quad (4.3)$$

$$(x, y) \longmapsto \overline{xy}(x^p + y^q) \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

donde  $\text{mcd}(p, q) = 1$  y  $2 \leq p, r; 2 < q$  ó  $2 \leq q, r; 2 < p$ .

Sean además  $V$  y  $V'$  las hipersuperficies (complejas, pues su codimensión compleja es 1) definidas por:

$$\begin{aligned} V &= F^{-1}(0) , \\ V' &= f^{-1}(0) . \end{aligned}$$

Ahora definiremos unas acciones que convengan a nuestros propósitos de describir a las aureolas de las singularidades de  $V$  y  $V'$ , para ello, recordemos que  $\mathbb{S}^1$  es un grupo de Lie compacto.

Sea

$$\delta = \text{mcd}(pq - p - q, r) ,$$

entonces definimos una acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{C}^3$  dada por:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^3 \quad (4.6)$$

$$(t, (x, y, z)) \longmapsto (t^a x, t^b y, t^c z) ,$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{qr}{\delta} \in \mathbb{Z} \\ b &= \frac{pr}{\delta} \in \mathbb{Z} \\ c &= \frac{pq - p - q}{\delta} \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Por las definiciones de  $a$ ,  $b$  y  $c$  tenemos las siguientes igualdades:

$$pa - a - b = \frac{pqr - qr - pr}{\delta} = cr \quad (4.7)$$

$$= \frac{pqr - qr - pr}{\delta} = qb - a - b \quad (4.8)$$

de donde, comparando el primer y último términos, obtenemos que:

$$pa = qb . \quad (4.9)$$

Usando las igualdades (4.8) y (4.9) podemos ver que:

**Lema 4.1.** *La variedad  $V$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ .*

*Demostración.* Sea  $(x, y, z) \in V$ ; es decir,

$$\overline{xy}(x^p + y^q) + z^r = 0 .$$

Entonces, dado un  $t \in \mathbb{S}^1$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{(t^a x)(t^b y)}((t^a x)^p + (t^b y)^q) + (t^c z)^r &= \overline{t^a t^b xy}(t^{ap} x^p + t^{bq} y^q) + t^{cr} z^r \\ &= \overline{t^a t^b t^{pa} xy}(x^p + y^q) + t^{cr} z^r \\ &= t^{pa-a-b} \overline{xy}(x^p + y^q) + t^{cr} z^r \\ &= t^{pa-a-b} (\overline{xy}(x^p + y^q) + z^r) \\ &= t^{pa-a-b} (0) = 0 , \end{aligned}$$

de donde,  $\varphi(t(x, y, z)) \in V$ ; es decir,  $V$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ . □

Tenemos además:

**Lema 4.2.** *La esfera  $\mathbb{S}^5$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ .*

*Demostración.* Dado un punto  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^5$  y  $t \in \mathbb{S}^1$ , se tiene que  $\varphi(t, (x, y, z)) = (t^a x, t^b y, t^c z)$ ; si nos fijamos en la norma  $|(t^a x, t^b y, t^c z)|$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{(t^a x)(\overline{t^a x}) + (t^b y)(\overline{t^b y}) + (t^c z)(\overline{t^c z})} &= \sqrt[2]{(t^a \overline{t^a} x \overline{x}) + (t^b \overline{t^b} y \overline{y}) + (t^c \overline{t^c} z \overline{z})} \\ &= \sqrt[2]{|t^a|^2 |x|^2 + |t^b|^2 |y|^2 + |t^c|^2 |z|^2} \\ &= \sqrt[2]{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}, \end{aligned}$$

ya que  $|t| = 1$ ; de manera que  $\varphi(x, y, z) \in \mathbb{S}^5$ . □

Llamaremos entonces  $K_F$  a la intersección  $V \cap \mathbb{S}^5$  (es decir, a la aureola del  $(0, 0, 0)$ ) y se sigue de los Lemas 4.1 y 4.2 que  $K_F$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ .

Llamaremos también  $K_f$  a la aureola del  $(0, 0)$ ; es decir, a la intersección de  $V'$  con la esfera  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}_{\{x, y\}}^2$ .

Ahora daremos ciertas condiciones sobre las aureolas para poder relacionarlas más adelante.

Sean  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  suficientemente pequeños de tal manera que se cumple el Teorema 1.13 para las aureolas  $K_{F, \varepsilon_1} = V \cap \mathbb{S}_{\varepsilon_1}^5$  y  $K_{f, \varepsilon_2} = V' \cap \mathbb{S}_{\varepsilon_2}^3$  y sea

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\};$$

sea entonces  $\varepsilon'$  tal que, para todo  $(x, y, z) \in V$  con  $(x, y) \in \mathbb{B}_{\varepsilon'}^4$ , se tiene que  $|f(x, y)|^{1/r} < \varepsilon$ .

Con estas condiciones para  $\varepsilon$  y  $\varepsilon'$ , usaremos ahora otra manera de ver a  $K_F$  que usa la noción de **polidisco** (al cual por abuso de notación, llamaremos  $\mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}^6$ ):

$$\mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}^6 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathbb{B}_{\varepsilon'}^4, |z| \leq \varepsilon\},$$

donde  $\mathbb{B}_{\varepsilon'}^4$  es la 4-bola de radio  $\varepsilon'$  centrada en el origen en  $\mathbb{C}_{\{x, y\}}^2 \subset \mathbb{C}^3$ .

De acuerdo a [13, Application 3.8], a la aureola asociada a una singularidad aislada también podemos describirla como la frontera de una vecindad algebraica de la singularidad; de manera que  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  definida como

$$\tilde{K}_{F, \varepsilon} = V \cap \partial \mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}^6$$

es la aureola de la singularidad en el origen de  $V$ ; tenemos además, por [13, Th. 3.5] que el par  $(\partial \mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}^6, \tilde{K}_{F, \varepsilon})$  es difeomorfo al par  $(\mathbb{S}_{\varepsilon}^5, K_{F, \varepsilon})$ .

**Lema 4.3.** *El polidisco  $\mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}^6$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ .*

*Demostración.* Dado un punto  $(x, y, z)$  en el polidisco  $\mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}$  y  $t \in \mathbb{S}^1$ , tenemos que  $\varphi(t, (x, y, z)) = (t^a x, t^b y, t^c z)$ ; si nos fijamos en la norma del punto  $(t^a x, t^b y)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} |(t^a x, t^b y)| &= \sqrt[2]{(t^a x)(\overline{t^a x}) + (t^b y)(\overline{t^b y})} \\ &= \sqrt[2]{(t^a \bar{t}^a x \bar{x}) + (t^b \bar{t}^b y \bar{y})} \\ &= \sqrt[2]{|t^a|^2 |x|^2 + |t^b|^2 |y|^2} \\ &= \sqrt[2]{|x|^2 + |y|^2} , \end{aligned}$$

puesto que  $|t| = 1$ ; además,

$$|t^c z| = |t^c| |z| = |t|^c |z| = |z| \leq \varepsilon ,$$

de manera que  $\varphi(t, (x, y, z)) \in \mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}$ .  $\square$

Así, se sigue de los Lemas 4.1 y 4.3 que:

**Proposición 4.4.** *La aureola  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  es invariante bajo la acción  $\varphi$ .*

Podemos entonces pensar en la acción  $\varphi$  restringida a  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$ ; abusando de la notación, seguiremos llamando  $\varphi$  a esta acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$ ; es decir,

$$\varphi: \mathbb{S}^1 \times \tilde{K}_{F, \varepsilon} \rightarrow \tilde{K}_{F, \varepsilon} ,$$

donde  $\varphi$  está definida como en (4.6).

Además, como  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  es la intersección de la hipersuperficie compleja  $V$  y el polidisco  $\mathbb{B}_{\varepsilon, \varepsilon'}$ , tenemos que  $\dim(\tilde{K}_{F, \varepsilon}) = 3$ .

De esta manera, por la Proposición 2.53 obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.5.** *La terna  $(\tilde{K}_{F, \varepsilon}, \pi, B)$  es una fibración de Seifert; donde  $B$  es el espacio de órbitas de la acción  $\varphi$  y  $\pi$  es la proyección de  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  a  $B$ .*

Ya que  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  es una variedad fibrada de Seifert, podemos preguntarnos cuantas fibras excepcionales tiene y cuales son.

Recordemos que las fibras excepcionales corresponderán a las órbitas de la acción  $\varphi$  cuyos puntos tengan subgrupos de isotropía diferentes del trivial.

**Lema 4.6.** *Las fibras excepcionales de  $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$  son tres:*

$$\{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F, \varepsilon} | x = 0, z = 0\} , \quad (4.10)$$

$$\{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F, \varepsilon} | y = 0, z = 0\} , \quad (4.11)$$

$$\{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F, \varepsilon} | x \neq 0, y \neq 0, z = 0\} . \quad (4.12)$$

*Demostración.* Recordemos que  $\delta = \text{mcd}(pq - p - q, r)$  para  $p, q$  y  $r$  dados en 4.1; es decir,  $\text{mcd}(p, q) = 1$  y  $2 \leq p, r$ ;  $2 < q$  ó  $2 \leq q, r$ ;  $2 < p$ .

Sea

$$r' = \frac{r}{\delta};$$

entonces podemos ver a la acción  $\varphi: \tilde{K}_{F,\varepsilon} \rightarrow \tilde{K}_{F,\varepsilon}$  (esta restricción podemos hacerla por los Lemas 4.1 y 4.3) como:

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, y, z)) = (e^{2\pi i\theta a}x, e^{2\pi i\theta b}y, e^{2\pi i\theta c}z),$$

con  $a = qr'$ ,  $b = pr'$  y  $c = \frac{pq-p-q}{\delta}$ ; por definición,  $\text{mcd}(r', c) = 1$ .

Deseamos ver cuales órbitas de  $\varphi$  pueden ser excepcionales, para ello, veremos cómo pueden ser los puntos que pertenecen a  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ :

Sea  $(x, y, z) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon}$ , entonces:

- Si  $x = 0, y = 0$  y  $z = 0$ , entonces tenemos al punto  $(0, 0, 0)$  y es claro que  $(0, 0, 0) \notin \tilde{K}_{F,\varepsilon}$ .
- Si  $x = 0, y = 0$  y  $z \neq 0$ , entonces  $f(x, y) = 0$ , pero  $F(x, y, z) \neq 0$  de manera que un punto de la forma  $(0, 0, z)$  no está en  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ .
- Si  $x = 0, y \neq 0$  y  $z = 0$ , entonces  $F(x, y, z) = 0$ ; de manera que  $(0, y, 0) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon}$  si y sólo si  $|y| = \varepsilon'$ ; veamos cuál es el subgrupo de isotropía del punto  $(0, y, 0)$ .

Tenemos que:

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (0, y, 0)) = (0, e^{2\pi i\theta b}y, 0) = (0, e^{2\pi i\theta pr'}y, 0),$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; así que, cuando  $\theta pr' \in \mathbb{Z}$  tendremos que

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (0, y, 0)) = (0, y, 0);$$

entonces, un elemento  $e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(0, y, 0)$  cuando

$$\theta = \frac{\gamma_2}{pr'},$$

con  $\gamma_2 \in \mathbb{Z}$ ; es decir,  $\mathbb{S}_{(0,y,0)}^1 = \mathbb{Z}_{pr'}$ .

Además, dado un punto  $(0, y, 0)$  con  $|y| = \varepsilon'$  su órbita está formada sólo por puntos de la forma  $(0, y', 0)$  con  $|y'| = \varepsilon'$  pero esto nos da un círculo; es decir,

$$\text{Orb}_{\mathbb{S}^1}(0, y, 0) = \{(0, y', 0) \mid |y'| = \varepsilon'\} \simeq \mathbb{S}^1;$$

de manera que tenemos una órbita excepcional, la órbita (4.10).

- Si  $x \neq 0, y = 0$  y  $z = 0$ , entonces  $F(x, y, z) = 0$ ; de manera que  $(x, 0, 0) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon}$  si y sólo si  $|x| = \varepsilon'$ ; veamos cuál es el subgrupo de isotropía del punto  $(x, 0, 0)$ .

Tenemos que:

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, 0, 0)) = (e^{2\pi i\theta a}x, 0, 0) = (e^{2\pi i\theta qr'}x, 0, 0),$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; así que, un elemento  $e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(x, 0, 0)$  cuando

$$\theta = \frac{\gamma_1}{qr'},$$

con  $\gamma_1 \in \mathbb{Z}$ ; es decir,  $\mathbb{S}_{(x,0,0)}^1 = \mathbb{Z}_{qr'}$ .

Además, dado un punto  $(x, 0, 0)$  con  $|x| = \varepsilon'$ ,

$$Orb_{\mathbb{S}^1}(x, 0, 0) = \{(x', 0, 0) \mid |x'| = \varepsilon'\} \simeq \mathbb{S}^1 ;$$

de manera que tenemos una órbita excepcional, la órbita (4.11).

- Si  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  y  $z \neq 0$ , entonces  $f(x, y) = 0$  pero  $F(x, y, z) \neq 0$ , de manera que un punto de la forma  $(0, y, z)$  no está en  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $y = 0$  y  $z \neq 0$ , análogamente al caso anterior, un punto de la forma  $(x, 0, z)$  no está en  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ .
- Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  y  $z = 0$ , entonces  $f(x, y) = 0$  si y sólo si  $x^p + y^q = 0$ ; de manera que un punto de la forma  $(x, y, 0)$  está en  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  si y sólo si  $x^p + y^q = 0$ . Veamos de cuántas órbitas estamos hablando y si son excepcionales o no.

En este caso,

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, y, 0)) = (e^{2\pi i\theta a} x, e^{2\pi i\theta b} y, 0) = (e^{2\pi i\theta qr'} x, e^{2\pi i\theta pr'} y, 0) ,$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; así que, cuando  $\theta pr' \in \mathbb{Z}$  y  $\theta qr' \in \mathbb{Z}$  tendremos que

$$\varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, y, 0)) = (x, y, 0) ;$$

entonces, un elemento  $e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(0, y, 0)$  cuando

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\gamma_1}{qr'} , \\ \theta &= \frac{\gamma_2}{pr'} ; \end{aligned}$$

sea  $u \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= uqr' , \\ \gamma_2 &= upr' ; \end{aligned}$$

entonces el valor que andamos buscando de  $\theta$  es  $\theta = \frac{u}{r'}$ ; así,  $\mathbb{S}_{(x,y,0)}^1 = \mathbb{Z}_{r'}$ .

Enunciaremos ahora un resultado de Brauner que nos servirá para ver de cuántas órbitas estamos hablando:

**Proposición 4.7** ([8, Prop 1, pag. 224]). *Sea  $C \in \mathbb{C}^2$  la curva con ecuación  $x^p + y^q = 0$ , con  $\text{med}(p, q) = 1$ . Entonces el par  $(\mathbb{C}^2, C)$  es homeomorfo al par  $(\mathbb{C}^2, \hat{C})$ , donde  $\hat{C}$  es el cono sobre un nudo tórico de tipo  $(p, q)$ .*

Lo que nos dice esta proposición es que la intersección de la curva compleja  $x^p + y^q = 0$  y la esfera  $\mathbb{S}^3$  es un  $\mathbb{S}^1$  “enrollado” en el toro  $p$  veces en la dirección longitudinal y  $q$  veces en la dirección meridional.

Además, podemos establecer una biyección entre el conjunto

$$\{(x, y, 0) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon} | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\}$$

y el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{S}^3 | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\}$ :

$$(x, y, 0) \xrightarrow{\mathcal{P}} (x, y) \longmapsto (x, y, 0) ;$$

claramente la proyección  $\mathcal{P}$  es inyectiva y la segunda función es sobreyectiva pues dado un punto  $(x, y, 0)$  con  $x^p + y^q = 0$  siempre será imagen del punto  $(x, y)$  con la misma condición  $x^p + y^q = 0$ .

Entonces, por la Proposición 4.7, tenemos que:

$$\{(x, y) \in \mathbb{S}^3 | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\} \simeq \mathbb{S}^1,$$

de manera que

$$Orb_{\mathbb{S}^1}(x, y, 0) = \{(x, y, 0) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon} | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\} \simeq \mathbb{S}^1 ,$$

así, tenemos una órbita excepcional, la órbita (4.12).

• Si  $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ , entonces  $f(x, y) \neq 0$  pero  $F(x, y, z) = 0$ . En este caso,

$$\begin{aligned} \varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, y, z)) &= (e^{2\pi i\theta a}x, e^{2\pi i\theta b}y, e^{2\pi i\theta c}z) \\ &= (e^{2\pi i\theta q r'}x, e^{2\pi i\theta p r'}y, e^{2\pi i\theta c}z) , \end{aligned}$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; así que cuando

$$\theta = \frac{\gamma_1}{q r'} ,$$

$$\theta = \frac{\gamma_2}{p r'} ,$$

$$\theta = \frac{\gamma_3}{c} ,$$

tendremos que  $\varphi(e^{2\pi i\theta}, (x, y, z)) = (x, y, z)$ ; sea  $u \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\gamma_1 = u p r' ,$$

$$\gamma_2 = u q r' ,$$

$$\gamma_3 = u c ;$$

entonces el valor que andamos buscando de  $\theta$  es  $\theta = u$  pues  $\text{mcd}(p r', q r', c) = 1$ ; así,  $\mathbb{S}^1_{(x,y,z)} = \{1\}$  para  $(x, y, z) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon}$ .

En este caso ya no nos interesa saber si se trata de una o más órbitas porque no son excepcionales; de manera que queda demostrado el lema.  $\square$

Por otra parte, en cuanto a la variedad  $V'$ , tenemos lo siguiente:  
Sea  $\vartheta$  la acción de  $\mathbb{S}^1$  sobre  $\mathbb{C}^2$  dada por:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{C}^2 \quad (4.13)$$

$$(t, (x, y)) \longmapsto (t^q x, t^p y) .$$

En este caso también tenemos

**Lema 4.8.** *La esfera  $\mathbb{S}^3$  es invariante bajo la acción  $\vartheta$ .*

La demostración es análoga a la demostración del Lema 4.2.  
Entonces podemos pensar en la acción como:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{S}^3 . \quad (4.14)$$

Es claro que el Lema 4.8 funciona para una esfera  $\mathbb{S}^3$  de cualquier radio; pero para nuestra conveniencia, de ahora en adelante hablaremos de  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3$ ; en este caso, nuevamente por la Proposición 2.53, obtenemos:

**Corolario 4.9.** *La terna  $(\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3, \pi', \mathbb{S}^2)$  es una fibración de Seifert; donde consideramos a  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3$  como una  $\mathbb{S}^1$ -variedad con la acción  $\vartheta$ ,  $\mathbb{S}^2$  es el espacio de órbitas de la acción y  $\pi'$  es la proyección de  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3$  a  $\mathbb{S}^2$ .*

Para distinguir a la esfera  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3$  con la acción  $\vartheta$ , le denotaremos por  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ .

**Nota 20.** Sabemos que el espacio de órbitas es  $\mathbb{S}^2$  gracias a [48, §3, pag. 370], que nos dice que cuando  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}^3$  es una variedad fibrada de Seifert, siempre se tiene que  $\mathbb{S}^2$  es el espacio base.

También tenemos el siguiente resultado:

**Lema 4.10.** *La variedad  $V'$  es invariante bajo la acción  $\vartheta$ .*

*Demostración.* Sea  $(x, y) \in V'$ ; entonces

$$\overline{xy}(x^p + y^q) = 0 ;$$

además,  $\vartheta(x, y) = (t^q x, t^p y)$  con  $t \in \mathbb{S}^1$ ; veamos si  $\vartheta(x, y)$  está en  $V'$ :

$$\begin{aligned} \overline{(t^q x)(t^p y)}((t^q x)^p + (t^p y)^q) &= \overline{t^q t^p xy}(t^{qp} x^p + t^{pq} y^q) \\ &= \overline{t^{pq} xy} t^{pq} (x^p + y^q) \\ &= \overline{t^{pq} t^{pq} xy} (x^p + y^q) \\ &= t^{pq-pq} \overline{xy} (x^p + y^q) \\ &= \overline{xy} (x^p + y^q) = 0 ; \end{aligned}$$

por lo tanto,  $\vartheta(x, y) \in V'$ . □

Se sigue entonces, de los lemas 4.8 y 4.10, que:

**Proposición 4.11.** *La aureola  $K_{f,\varepsilon'} = V' \cap \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  es unión de órbitas de la acción  $\vartheta$ .*

Decir que la aureola  $K_{f,\varepsilon'}$  es unión de órbitas de la acción  $\vartheta$  es lo mismo que decir que es invariante bajo la acción; sin embargo, hemos cambiado la redacción para precisar lo que usaremos más adelante.

Nosotros afirmamos además que las fibras excepcionales de  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  (vista como variedad fibrada de Seifert) están en  $K_{f,\varepsilon'}$  e incluso podemos decir cuántas son:

**Lema 4.12.** *Las fibras excepcionales de  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  son dos:*

$$\{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} \mid x = 0\} , \quad (4.15)$$

$$\{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} \mid y = 0\} , \quad (4.16)$$

*Demostración.* Recordemos que las fibras excepcionales corresponderán a las órbitas de la acción  $\vartheta$  cuyos puntos tengan subgrupos de isotropía diferentes del trivial.

Así como lo hicimos para la demostración del Lema 4.6, veremos cómo puede ser un punto en  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ :

Sea  $(x, y) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ ,

- Si  $x = 0$  y  $y = 0$ , entonces tenemos al punto  $(0, 0)$  y es claro que  $(0, 0) \notin \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ .
- Si  $x \neq 0$  y  $y = 0$ , entonces  $f(x, y) = 0$ ; de manera que  $(x, 0) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  si y sólo si  $(x, 0) \in K_{f,\varepsilon'}$  y  $|x| = \varepsilon'$ ; veamos cuál es el subgrupo de isotropía del punto  $(x, 0)$ .

Tenemos que:

$$\vartheta(e^{2\pi i\theta}, (x, 0)) = (e^{2\pi i\theta q} x, 0) ,$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; así que, cuando  $\theta q \in \mathbb{Z}$ ,

$$\vartheta(e^{2\pi i\theta}, (x, 0)) = (x, 0) ;$$

entonces, un elemento  $e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(x, 0)$  si y sólo si

$$\theta = \frac{\zeta_1}{q}$$

con  $\zeta_1 \in \mathbb{Z}$ ; es decir,  $\mathbb{S}_{(x,0)}^1 = \mathbb{Z}_q$ .

Además, dado un punto  $(x, 0)$  con  $|x| = \varepsilon'$ , su órbita está formada sólo por puntos de la forma  $(x', 0)$  con  $|x'| = \varepsilon'$ ; es decir,

$$Orb_{\mathbb{S}^1}(x, 0) = \{(x', 0) \mid |x'| = \varepsilon'\} \simeq \mathbb{S}^1 ;$$

de manera que tenemos una órbita excepcional, la órbita (4.16).

- Si  $x = 0$  y  $y \neq 0$ , entonces  $f(x, y) = 0$ , así que análogamente al caso anterior,  $(0, y) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  si y sólo si  $(0, y) \in K_{f, \varepsilon'}$  y  $|y| = \varepsilon'$ ; veamos entonces cuál es el subgrupo de isotropía del punto  $(0, y)$ :

$$\vartheta(e^{2\pi i \theta}, (0, y)) = (0, e^{2\pi i \theta p} y),$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; entonces, un elemento  $e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(0, y)$  si y sólo si

$$\theta = \frac{\zeta_2}{p}$$

con  $\zeta_2 \in \mathbb{Z}$ ; es decir,  $\mathbb{S}_{(0, y)}^1 = \mathbb{Z}_p$ .

Además, dado un punto  $(0, y)$  con  $|y| = \varepsilon'$ , su órbita es un círculo:

$$Orb_{\mathbb{S}^1}(0, y) = \{(0, y') \mid |y'| = \varepsilon'\} \simeq \mathbb{S}^1;$$

de manera que tenemos una órbita excepcional, la órbita (4.15).

- Si  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ , entonces  $(x, y)$  puede estar en la aureola  $K_{f, \varepsilon'}$  o no; veamos cómo es el subgrupo de isotropía en este caso:

Ahora tenemos que:

$$\vartheta(e^{2\pi i \theta}, (x, y)) = (e^{2\pi i \theta q} x, e^{2\pi i \theta p} y),$$

con  $0 \leq \theta < 1$ ; de manera que un elemento  $e^{2\pi i \theta} \in \mathbb{S}^1$  dejará fijo al punto  $(x, y)$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\zeta_1}{q}, \\ \theta &= \frac{\zeta_2}{p}, \end{aligned}$$

donde  $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{Z}$ ; ya que  $\text{mcd}(p, q) = 1$ , para que  $\theta$  pueda cumplir las dos igualdades anteriores, se necesita que

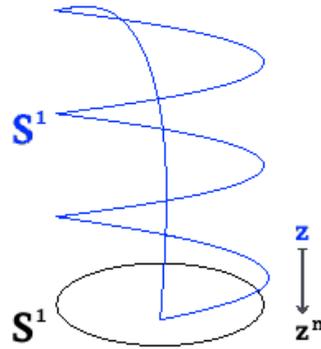
$$\begin{aligned} \zeta_1 &= uq, \\ \zeta_2 &= up, \end{aligned}$$

con  $u \in \mathbb{Z}$ ; de manera que el valor de  $\theta$  que estamos buscando es  $\theta = u$ ; es decir,  $\mathbb{S}_{(x, y)}^1 = \{1\}$  para  $(x, y) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  con  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ .

En este caso, como no tenemos un subgrupo de isotropía diferente del trivial, vemos que  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - K_{f, \varepsilon'}$  está fibrado por fibras regulares y con esto terminamos la demostración del lema.  $\square$

## 4.2 La relación entre las aureolas $\tilde{K}_{F, \varepsilon}$ y $K_{f, \varepsilon'}$

Antes de continuar con el problema principal de este trabajo, debemos introducir varias definiciones acerca de cubrientes: cubrientes, cubrientes ramificados y cubrientes de Hurwitz; después usaremos estos conceptos para relacionar las fibriciones de Seifert que hemos obtenido en los Corolarios 4.5 y 4.9.

Figura 4.1: La función  $z \mapsto z^n$  de  $\mathbb{S}^1$  a  $\mathbb{S}^1$ .

### 4.2.1 Cubrientes

Primero recordemos lo que es un cubriente:

**Definición 4.13.** Sean  $E$  y  $X$  espacios topológicos; sea  $p: E \rightarrow X$  una función continua; diremos que  $(E, p, X)$  es un **espacio cubriente** de  $X$  si para todo  $x \in X$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U)$  es una unión de conjuntos abiertos ajenos  $S_i \subset E$  y  $p|_{S_i}: S_i \rightarrow U$  es un homeomorfismo.

A los conjuntos  $S_i$  se les llama las **hojas** del cubriente.

Se tiene entonces que (ver [16]):

- i) la fibra  $p^{-1}(x)$  es discreta,
- ii)  $p$  es un homeomorfismo local.

**Ejemplo 25.** Un ejemplo es la aplicación  $p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $p(z) = z^n$  donde  $z$  es un número complejo con  $|z| = 1$  y  $n$  es cualquier entero positivo. Lo más cerca que uno puede estar de visualizar este espacio cubriente es una proyección en el espacio análoga a proyectar una hélice; es decir, dibujamos un círculo enredándose alrededor de un cilindro  $n$  veces (ver Figura 4.1).

El siguiente concepto puede encontrarse en [5] usando funciones lineales a pedazos; sin embargo, los autores mencionan que los mismos resultados pueden establecerse para funciones continuas o incluso, diferenciables. Nosotros pensaremos que nuestras funciones son continuas.

**Definición 4.14.** Sean  $M, N$  variedades diferenciables y sea  $\psi: M \rightarrow N$  una función propia, abierta y finito a uno; llamamos entonces a  $\psi$  un **cubriente ramificado**.

En la práctica (ver [5] o [39]), para ver que una función abierta  $\psi: M \rightarrow N$  es un cubriente ramificado, lo que se hace es encontrar  $L \subset N$  de codimensión 2

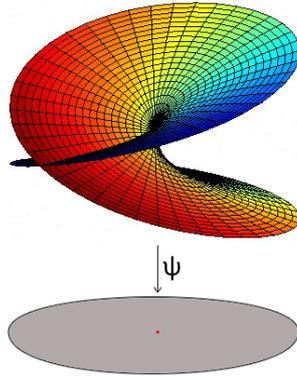


Figura 4.2: La función  $z \mapsto z^n$  de  $\mathbb{D}^2$  a  $\mathbb{D}^2$ .

tal que la restricción  $(M - \psi^{-1}(L), \psi|_{M - \psi^{-1}(L)}, N - L)$  es un cubriente finito; es decir,  $\psi|_L$  falla es ser un homeomorfismo local.

Al subconjunto  $L$  (que usualmente es una variedad diferenciable) le llamaremos el conjunto de ramificación de  $\psi$ ,  $\psi^{-1}(L)$  es el conjunto singular y

$$(M - \psi^{-1}(L), \psi|_{M - \psi^{-1}(L)}, N - L)$$

es el cubriente asociado a  $\psi$ .

**Ejemplo 26.** Un ejemplo es la aplicación  $\psi: \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  tal que  $\psi(z) = z^n$  donde  $z$  es un número complejo con  $|z| \leq 1$  y  $n$  es cualquier entero positivo. En este caso tenemos que dado  $z \in \mathbb{D}^2$  tal que  $z \neq 0$ , tenemos  $n$  puntos en  $\psi^{-1}(z)$ ; sin embargo, el cero tiene sólo una preimagen; es decir,  $L = \{0\}$  y  $(\mathbb{D}^2 - L, \psi|_{\mathbb{D}^2 - L}, \mathbb{D}^2 - 0)$  es un cubriente de  $n$  hojas (ver en la Figura 4.2 el caso  $n = 2$ ).

### 4.2.2 La aureola $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ como espacio cubriente

En esta parte veremos cómo se relacionan la aureolas  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  y  $K_{f,\varepsilon'}$ .

Sea  $\mathcal{P}: \tilde{K}_{F,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  la proyección dada por:

$$\mathcal{P}(x, y, z) = (x, y) .$$

Tenemos entonces que:

- i) dado un punto  $(x, y) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - K_{f,\varepsilon'}$ ,  $f(x, y) \neq 0$ ; es decir,

$$f(x, y) = \overline{xy}(x^p + y^q) = w$$

con  $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ , sea  $e^{\frac{2\pi i}{r}}$  la  $r$ -ésima raíz de la unidad principal; entonces, dados los puntos de la forma  $(x, y, (e^{\frac{2\pi ki}{r}})(-w^{1/r}))$  donde  $k = 0, \dots, r - 1$ ; al evaluar  $F$  en ellos, obtenemos:

$$\begin{aligned} F(x, y, (e^{\frac{2\pi ki}{r}})(-w^{1/r})) &= \overline{xy}(x^p + y^q) + ((e^{\frac{2\pi ki}{r}})(-w^{1/r}))^r \\ &= \overline{xy}(x^p + y^q) - w \\ &= f(x, y) - w = 0 , \end{aligned}$$

así,  $\mathcal{P}^{-1}(x, y)$  consta de  $r$  puntos.

- ii) dado un punto  $(x, y) \in K_{f,\varepsilon'}$ , tenemos que  $f(x, y) = 0$ ; de donde la preimagen  $\mathcal{P}^{-1}(x, y)$  consta de un solo punto:

$$\mathcal{P}^{-1}(x, y) = \{(x, y, 0)\}$$

Entonces, podemos decir que  $\mathcal{P}$  es una función continua (pues es una proyección) y finito a uno.

Por otro lado, sea  $\bar{\mathcal{P}}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección dada por  $\bar{\mathcal{P}}(x, y, z) = (x, y)$ ; es claro que  $\mathcal{P}$  es la restricción  $\bar{\mathcal{P}}|_{\tilde{K}_{F,\varepsilon}}$ ; además, dado un subconjunto abierto  $U \subset \tilde{K}_{F,\varepsilon}$ , podemos decir que  $U = \bar{U} \cap \tilde{K}_{F,\varepsilon}$ , donde  $\bar{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^6$ ; así

$$\bar{\mathcal{P}}(\bar{U}) = \bar{W} ,$$

donde  $\bar{W}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ; como

$$\mathcal{P}(U) = \bar{\mathcal{P}}(U) \subset \bar{\mathcal{P}}(\bar{U}) = \bar{V} ,$$

sea  $W = \bar{W} \cap \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ , entonces  $W$  es un abierto en  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ ; de donde  $\mathcal{P}$  es una función abierta.

Finalmente, como  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  es compacto (pues es subconjunto cerrado de un compacto), tenemos que  $\mathcal{P}$  es una función propia.

Hemos probado entonces el siguiente resultado:

**Proposición 4.15.** *La proyección  $\mathcal{P}$  es la aplicación de un cubriente ramificado con espacio cubriente  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ , espacio base  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  y tal que el número de hojas del cubriente fuera del lugar de ramificación es  $r$ .*

Ahora sólo nos falta decir quién es el lugar de ramificación, nosotros afirmamos que  $K_{f,\varepsilon'}$  lo es.

Sea  $(x, y) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - K_{f,\varepsilon'}$ ; entonces, por el inciso (i) tenemos que las  $r$  preimágenes de  $(x, y)$  bajo  $\mathcal{P}$  son de la forma

$$(x, y, (e^{\frac{2\pi ki}{r}})(-w^{1/r})) ,$$

con  $k = 0, \dots, r-1$ ; sea entonces  $W$  una vecindad de  $(x, y)$  tal que  $U \simeq B_\eta^2$  con  $\eta < \frac{(1-\cos(2\pi/r))(w^{1/r})}{4}$ , como  $\mathcal{P}$  es una proyección, cuando tomamos  $\mathcal{P}^{-1}(W)$ , obtenemos una vecindad  $U_k$  alrededor del punto  $(x, y, (e^{\frac{2\pi ki}{r}})(-w^{1/r}))$  tal que  $U_k \simeq B_\eta^3$ .

Tenemos entonces que  $U_j \cap U_l = \emptyset$  para  $j, l \in \{0, \dots, r-1\}$  con  $j \neq l$  pues:

$$\begin{aligned} d((x, y, (e^{\frac{2\pi ji}{r}})(-w^{1/r})), (x, y, (e^{\frac{2\pi li}{r}})(-w^{1/r}))) &= \\ \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2 + ((e^{\frac{2\pi ji}{r}})(-w^{1/r}) - (e^{\frac{2\pi li}{r}})(-w^{1/r}))^2} &= \\ \sqrt{(e^{\frac{2\pi ji}{r}})^2(-w^{1/r})^2 - (e^{\frac{2\pi li}{r}})^2(-w^{1/r})^2} &= \\ d(e^{\frac{2\pi ji}{r}}, e^{\frac{2\pi li}{r}})(-w^{1/r}) & \end{aligned}$$

y la distancia más corta entre dos  $r$ -raíces de la unidad es  $\frac{(1-\cos(2\pi/r))}{2}$ , de donde

$$2\eta < d\left(e^{\frac{2\pi ji}{r}}, e^{\frac{2\pi li}{r}}\right)(-w^{1/r})$$

y así,  $U_j \cap U_l = \emptyset$ .

Por lo tanto,  $K_{f,\varepsilon'}$  es una variedad de codimensión dos en  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  tal que  $(\tilde{K}_{F,\varepsilon}, \mathcal{P}, \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'})$  es un cubriente finito de  $r$  hojas.

Si juntamos la información de los Corolarios 4.5 y 4.9 y la Proposición 4.15, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{F,\varepsilon} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Lo que deseamos ahora es encontrar una función  $\mathcal{R}: B \rightarrow \mathbb{S}^2$  para poder encontrar más relaciones que nos lleven a dar una descripción de las aureolas de las singularidades de  $F$  y  $f$  como variedades fibradas de Seifert. Desafortunadamente calcular los invariantes de Seifert de una variedad es un trabajo que exige más tiempo, por lo que nos restringiremos a dar información acerca de la orbidad  $B$ .

Para encontrar  $\mathcal{R}$ , primero veamos que la proyección  $\mathcal{P}$  es  $\sigma$ -equivariante, donde  $\sigma$  es un homomorfismo dado de  $\mathbb{S}^1$  a  $\mathbb{S}^1$ .

Sea  $\sigma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $t \mapsto t^{\frac{r}{\delta}}$ ; entonces:

$$\begin{aligned} P(\varphi(t, (x, y, z))) &= (t^{\frac{qr}{\delta}} x, t^{\frac{pr}{\delta}} y) = \vartheta(t^{\frac{r}{\delta}}, (x, y)) \\ &= \vartheta(t^{\frac{r}{\delta}}, P(x, y, z)) = \vartheta(\sigma(t), P(x, y, z)) \end{aligned}$$

Por lo tanto existe la función  $\mathcal{R}$  y está bien definida pues las órbitas de  $\varphi$  van a órbitas de  $\vartheta$ . Podemos completar entonces nuestro diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{F,\varepsilon} & \xrightarrow{\mathcal{P}} & \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Ahora queremos entender cómo es la aplicación  $\mathcal{R}$ :

Sea  $(x_0, y_0) \in K_{f,\varepsilon'}$ , entonces la preimagen  $\mathcal{P}^{-1}(x_0, y_0)$  es el conjunto

$$\{(x_0, y_0, 0) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon}\}$$

que consta de un sólo punto, de manera que si  $\pi(x_0, y_0, 0) = b \in B$ , podemos definir

$$\mathcal{R}(b) := \pi'(x_0, y_0) .$$

Por otra parte, sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - K_{f,\varepsilon'}$ , lo que deseamos saber es cuántos puntos hay en la preimagen  $\mathcal{R}^{-1}(\pi'(x_0, y_0))$ .

Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - K_{f,\varepsilon'}$ , entonces la preimagen  $\mathcal{P}^{-1}(x_0, y_0)$  consta de  $r$  puntos de la forma

$$(x_0, y_0, w^{1/r} e^{\frac{2\pi ki}{r}}),$$

donde  $w = f(x_0, y_0)$  y  $e^{\frac{2\pi ki}{r}}$  es una  $r$ -ésima raíz de la unidad con  $k = 0, \dots, r-1$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $k = 0$  para facilitar los cálculos y sea  $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$  con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; entonces tenemos que:

$$\varphi(e^{i\theta}, (x_0, y_0, w^{1/r} e^{\frac{2\pi i}{r}})) = (e^{\frac{qri\theta}{\delta}} x_0, e^{\frac{pri\theta}{\delta}} y_0, e^{\frac{(pq-p-q)i\theta}{\delta}} w^{1/r}).$$

La idea que desarrollaremos a continuación es contar las preimágenes del punto  $(x_0, y_0)$  que están en una misma órbita de la acción  $\varphi$ , de manera que nos fijamos en los puntos dados por la acción que tengan las dos coordenadas iguales a  $(x_0, y_0)$  y obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{qri\theta}{\delta} &= 2\pi i \lambda_1, \\ \frac{pri\theta}{\delta} &= 2\pi i \lambda_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ . Estas igualdades son fáciles de ver si pensamos que deseamos que  $e^{\frac{qri\theta}{\delta}} x_0 = x_0$  y  $e^{\frac{pri\theta}{\delta}} y_0 = y_0$ .

Haciendo los despejes necesarios obtenemos que:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2\pi\delta}{r} \frac{\lambda_1}{q}, \\ \theta &= \frac{2\pi\delta}{r} \frac{\lambda_2}{p}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{up}{uq},$$

con  $u \in \mathbb{Z}$ ; por lo tanto,

$$\theta = \frac{2\pi\delta u}{r}.$$

Entonces, cuando  $0 \leq u \leq \frac{r}{\delta} - 1$ , tenemos  $\frac{r}{\delta}$  puntos que están en la órbita y cuando  $u = \frac{r}{\delta}$ , tenemos que:

$$\varphi(e^{\frac{2\pi i\delta}{r} u}, (x_0, y_0, w^{1/r} e^{\frac{2\pi i}{r}})) = (x_0, y_0, w^{1/r} e^{\frac{2\pi i}{r}}),$$

lo cual nos dice que estamos volviendo a contar los puntos.

Así, los  $r$  puntos de las preimágenes de  $(x_0, y_0)$  se agrupan en  $\delta$  órbitas; es decir, tenemos  $\delta$  puntos en la preimagen  $\mathcal{R}^{-1}(\pi'(x_0, y_0))$ .

Para poder dar una descripción completa, debemos saber además de cuántas órbitas se componen la aureola  $K_{f,\varepsilon'}$  y su preimagen  $\mathcal{P}^{-1}(K_{f,\varepsilon'})$ .

Por el Lema 4.12, sabemos que  $K_{f,\varepsilon'}$  contiene a dos fibras excepcionales:

$$\{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | x = 0\} , \quad (4.18)$$

$$\{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | y = 0\} , \quad (4.19)$$

pero ahora también queremos saber cuántas fibras regulares están dentro de  $K_{f,\varepsilon'}$ . Nos resta entonces ver cuántas órbitas de la acción  $\vartheta$  podemos tener para puntos de la forma  $(x, y)$  con  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ :

Sea  $(x, y) \in K_{f,\varepsilon'}$  con  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$ ; entonces, como  $f(x, y) = 0$  tenemos que

$$x^p + y^q = 0$$

y por la Proposición 4.7 sabemos que la intersección de esta curva compleja con la esfera  $\mathbb{S}^3$  (de cualquier radio) es un nudo tórico; es decir, es un  $\mathbb{S}^1$ , de manera que:

**Corolario 4.16.** *La aureola  $K_{f,\varepsilon'}$  se compone de tres órbitas de la acción  $\vartheta$ , donde dos de ellas son fibras excepcionales de  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$  y la órbita*

$$\{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\}$$

*es una fibra regular.*

Así, sean

$$H_1 = \{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon} | y = 0, z = 0\} ,$$

$$H_2 = \{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon} | x = 0, z = 0\} ,$$

$$H_3 = \{(x, y, z) \in \tilde{K}_{F,\varepsilon} | x \neq 0, y \neq 0, z = 0\} ,$$

y

$$H'_1 = \{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | y = 0\} ,$$

$$H'_2 = \{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | x = 0\} ,$$

$$J' = \{(x, y) \in K_{f,\varepsilon'} | x \neq 0, y \neq 0, x^p + y^q = 0\} ;$$

entonces  $H'_1$ ,  $H'_2$  y  $J'$  son las órbitas del lugar de ramificación  $K_{f,\varepsilon'}$  y  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  son las órbitas de la preimagen  $\mathcal{P}^{-1}(K_{f,\varepsilon'})$ .

Sean además,

$$b_1 = \pi(H_1) \quad s_1 = \pi'(H'_1)$$

$$b_2 = \pi(H_2) \quad s_2 = \pi'(H'_2)$$

$$b_3 = \pi(H_3) \quad s' = \pi'(J') ;$$

es decir,  $b_1, b_2, b_3 \in B$  y  $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{S}^2$ .

Tenemos entonces que, por la definición de  $\mathcal{P}$ , la definición de  $\mathcal{R}$ , los Lemas 4.6 y 4.12 y el Corolario anterior, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_1 \cup H_2 \cup H_3 & \xrightarrow{\mathcal{P}} & H'_1 \cup H'_2 \cup J' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \{b_1, b_2, b_3\} & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \{s_1, s_2, s'\} . \end{array}$$

De donde obtenemos que:

**Proposición 4.17.** *Las ternas*

$$\left( \tilde{K}_{F,\varepsilon} - (H_1 \cup H_2 \cup H_3), \mathcal{P}, \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - (H'_1 \cup H'_2 \cup J') \right)$$

y

$$\left( B - \{b_1, b_2, b_3\}, \mathcal{R}, \mathbb{S}^2 - \{s_1, s_2, s'\} \right) ,$$

son cubrientes; donde estamos abusando de la notación ya que nos referimos a las restricciones de  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{R}$  a  $\tilde{K}_{F,\varepsilon} - (H_1 \cup H_2 \cup H_3)$  y  $B - \{b_1, b_2, b_3\}$  respectivamente.

*Demostración.* Por la Proposición 4.15, la terna

$$\left( \tilde{K}_{F,\varepsilon} - (H_1 \cup H_2 \cup H_3), \mathcal{P}, \mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'} - (H'_1 \cup H'_2 \cup J') \right)$$

es un cubriente pues hemos removido el lugar de ramificación

$$K_{f,\varepsilon'} = H'_1 \cup H'_2 \cup J'$$

y su preimagen  $(H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ .

Respecto a la segunda terna, al quitar las fibras excepcionales de  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$ , estamos removiendo puntos excepcionales de la orbifold  $B$ , de manera que  $B - \{b_1, b_2, b_3\}$  es una variedad diferenciable, al igual que  $\mathbb{S}^2 - \{s_1, s_2, s'\}$ ; entonces tenemos una función  $\mathcal{R}: B - \{b_1, b_2, b_3\} \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{s_1, s_2, s'\}$  tal que, dado  $s \in \mathbb{S}^2$ , la preimagen  $\mathcal{R}^{-1}(s)$  consta de  $\delta$  puntos y análogamente a como vimos que  $\mathcal{P}$  era un cubriente fuera de  $K_{f,\varepsilon'}$  se ve que  $\mathcal{R}$  lo es.  $\square$

### 4.2.3 El género de la variedad $B_0$

Sea  $B_0 = B - \{b_1, b_2, b_3\}$ ; como vimos en la sección anterior,  $B_0$  es una variedad diferenciable, de manera que podemos decir que  $B_0$  es la superficie subyacente a la orbifold  $B$ ; además, sea  $\mathbb{S}_0^2 = \mathbb{S}^2 - \{s_1, s_2, s'\}$ .

Es claro que si tenemos la esfera  $\mathbb{S}^2$ , cuando quitamos un punto nos queda algo homotópicamente equivalente al plano; si al plano le quitamos dos puntos, nos queda algo homotópicamente equivalente a la cuña (wedge) de dos círculos (ver Figura 4.3).

Usaremos el siguiente resultado:

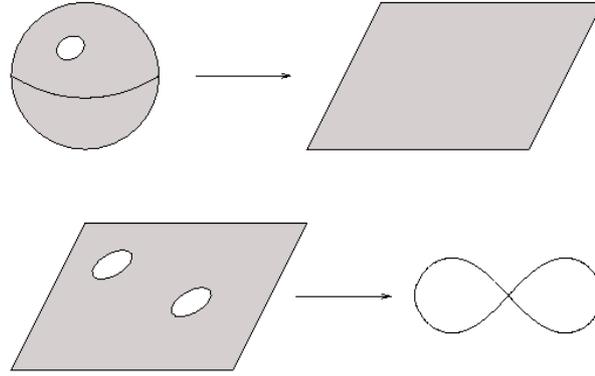


Figura 4.3: De la esfera  $\mathbb{S}^2$  a la figura ocho

**Proposición 4.18** ([16, App. 17.12]). *Sea  $G_r$  la cuña de  $r$  círculos (o una rosa de  $r$  pétalos); entonces*

$$\text{rango } H_i(G_r, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ r & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i > 1; \end{cases}$$

de donde obtenemos que:

$$\chi(G_r) = 1 - r .$$

Tenemos entonces:

**Corolario 4.19.** *La característica de Euler de  $\mathbb{S}_0^2$  es*

$$\chi(\mathbb{S}_0^2) = 1 - 2 = -1 .$$

Como  $(B_0, \mathcal{R}, \mathbb{S}_0^2)$  es un cubriente de  $\delta$  hojas, podemos aplicar el siguiente resultado:

**Proposición 4.20** ([7, Prop. 13.5]). *Si  $X \rightarrow Y$  es un cubriente de  $k$  hojas y  $Y$  es un complejo CW, entonces  $X$  es también un complejo CW y  $\chi(X) = k\chi(Y)$ .*

De donde,

**Corolario 4.21.** *Dado el cubriente  $(B_0, \mathcal{R}, \mathbb{S}_0^2)$  de  $\delta$  hojas, tenemos entonces que:*

$$\chi(B_0) = \delta\chi(\mathbb{S}_0^2) = -\delta .$$

Lo que deseamos hacer ahora es obtener una descripción de la superficie  $B_0$ .

**Definición 4.22.** El **género** de una superficie compacta con frontera  $M$  está definido como el género de la superficie compacta  $M^*$  obtenida al pegar un disco a cada componente de la frontera de  $M$ .

**Proposición 4.23.** *Dada una superficie compacta con frontera  $M$ , sea  $M^*$  la superficie compacta  $M^*$  obtenida al pegar un disco a cada componente de la frontera de  $M$ ; se tiene entonces una relación entre las características de Euler  $\chi(M)$  y  $\chi(M^*)$  de la siguiente manera:*

$$\chi M = \chi(M^*) - k .$$

Se sigue entonces que:

**Corolario 4.24.** *Sea  $B^*$  la superficie que se obtiene al pegar un disco en cada una de las tres componentes de la frontera de  $B_0$ . La característica de Euler de  $B^*$  es*

$$\chi(B^*) = 3 - \delta .$$

*Demostración.* Aplicamos la proposición anterior y obtenemos que

$$-\delta = \chi(B_0) = \chi(B^*) - 3$$

y despejamos el valor de  $\chi(B^*)$ . □

Finalmente, podemos hablar del género de  $B_0$ :

**Corolario 4.25.** *El género de  $B_0$  es  $(\delta - 1)/2$ .*

*Demostración.* Por la definición 4.22, tenemos que  $g(B_0) = g(B^*)$ , aplicando la igualdad (1.6), obtenemos que

$$\begin{aligned} g(B^*) &= \frac{2 - \chi(B^*)}{2} = \frac{2 - (3 - \delta)}{2} \\ &= \frac{-1 + \delta}{2} . \end{aligned}$$

□

Así, podemos decir que tenemos una descripción más completa de la situación; hemos visto que la relación entre las aureolas  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  y nos ha permitido obtener información de la aureola  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  gracias a lo que sabemos de  $K_{f,\varepsilon'}$ , lo cual es, en cierta forma, como reducir nuestro problema a situaciones más sencillas.

Por supuesto que puede obtenerse mucha más información; por ejemplo, el paso siguiente podría ser encontrar los invariantes de Seifert de  $\tilde{K}_{F,\varepsilon}$  a partir de los invariantes de  $\mathbb{S}^3(p, q)_{\varepsilon'}$ ; sin embargo, éste y otros problemas se tratarán de resolver en un futuro como parte del trabajo del doctorado.



# Bibliografía

- [1] ADEM, A., JOHANN, L., Y RUAN, Y. *Orbifolds and Stringy Theory*, vol. 171 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] AGUILAR, M., CISNEROS-MOLINA, J. L., Y FRÍAS-ARMENTA, M. E. Characteristic classes and transversality. *Topology Appl.* 154, 7 (2007), 1220–1235.
- [3] AGUILAR, M., GITLER, S., Y PRIETO, C. *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002. Traducido del español por Stephen Bruce Sontz.
- [4] ATIYAH, M. F., Y MACDONALD, I. G. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [5] BERSTEIN, I., Y EDMONDS, A. L. On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* 247 (1979), 87–124.
- [6] BOARDMAN, J. M. Singularities of differentiable maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 33 (1967), 21–57.
- [7] BREDON, G. E. *Topology and geometry*, vol. 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] BRIESKORN, E., Y KNÖRRER, H. *Plane algebraic curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Traducido del alemán por John Stillwell.
- [9] BRIN, M. Seifert Fibered Spaces. Notas para un curso deado en la primavera de 1993 <ftp://ftp.math.binghamton.edu/pub/matt/seifert.pdf>, 1993.
- [10] BRÖCKER, T., Y JÄNICH, K. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982. Traducido del alemán por C. B. Thomas y M. J. Thomas.
- [11] BRÖCKER, T., Y TOM DIECK, T. *Representations of compact Lie groups*, vol. 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985. Traducido del original en alemán.

- [12] BUMP, D. *Algebraic geometry*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1998.
- [13] DURFEE, A. H. Neighborhoods of algebraic sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* 276, 2 (abril 1983), 517–530.
- [14] DURFEE, A. H. Singularities. In *History of topology*. North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 417–434.
- [15] EISENBUD, D. *Commutative algebra - With a view toward algebraic geometry*, vol. 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] GREENBERG, M. J., Y HARPER, J. R. *Algebraic topology - A first course*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [17] GUILLEMIN, V., Y POLLACK, A. *Differential topology*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [18] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*, vol. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [19] HATCHER, A. Basic Topology of 3-Manifolds. <http://www.math.cornell.edu/hatcher/>.
- [20] HATCHER, A. Vector Bundles and K-Theory. <http://www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VB.pdf>, 2003.
- [21] HUSEMOLLER, D. *Fibre bundles*, third ed., vol. 20 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [22] HUTCHINGS, M. Notes for second semester algebraic topology. <http://math.berkeley.edu/hutching/teach/215b-2005/215b.pdf>, 2005.
- [23] JANKINS, M., Y NEUMANN, W. D. *Lectures on Seifert manifolds*, vol. 2 of *Brandeis Lecture Notes*. Brandeis University, Waltham, MA, 1983.
- [24] KOSNIOWSKI, C. *Topología Algebraica*. Ed. Reverté, S.A., 1989.
- [25] KOTLER, S. 3-M Seminar: Notes for Lecture on Seifert Fibered Spaces. <http://www.ma.huji.ac.il/kotler/notes/notes.html>, 2001.
- [26] LUTZ, F. H. *Triangulated Manifolds*. Springer, 2007, ch. Triangulated Manifolds with Few Vertices: Geometric 3-Manifolds. Por aparecer.
- [27] MACPHERSON, R. Generic vector bundle maps. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*. Academic Press, New York, 1973, pp. 165–175.

- [28] MASSEY, W. S. *Algebraic topology: an introduction*. Springer-Verlag, New York, 1977. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.
- [29] MATVEEV, S. V. *Lectures on algebraic topology*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006. Traducido del original en ruso de 2003 por Ekaterina Pervova y revisado por el autor.
- [30] MILNOR, J. On isolated singularities of hypersurfaces. Unpublished, june 1966.
- [31] MILNOR, J. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.
- [32] MILNOR, J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$ . In *Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox)*. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1975, pp. 175–225. Ann. of Math. Studies, No. 84.
- [33] MILNOR, J., Y STASHEFF, J. D. *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
- [34] NASH, J. Real algebraic manifolds. *Ann. of Math. (2)* 56 (1952), 405–421.
- [35] NEUMANN, W. D. A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves. *Trans. Amer. Math. Soc.* 268, 2 (1981), 299–344.
- [36] NEUMANN, W. D. Geometry of quasihomogeneous surface singularities. In *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, vol. 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 245–258.
- [37] NEUMANN, W. D. Invariants of plane curve singularities. In *Knots, braids and singularities (Plans-sur-Bex, 1982)*, vol. 31 of *Monogr. Enseign. Math.* Enseignement Math., Geneva, 1983, pp. 223–232.
- [38] NEUMANN, W. D., Y RAYMOND, F. Seifert manifolds, plumbing,  $\mu$ -invariant and orientation reversing maps. In *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos., Univ. California, Santa Barbara, Calif., 1977)*, vol. 664 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1978, pp. 163–196.
- [39] NÚÑEZ, V., Y RAMÍREZ-LOSADA, E. The trefoil knot is as universal as it can be. *Topology Appl.* 130, 1 (2003), 1–17.
- [40] ORLIK, P. *Seifert manifolds*, vol. 291 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

- [41] ORLIK, P., Y WAGREICH, P. Isolated singularities of algebraic surfaces with  $C^*$  action. *Ann. of Math. (2)* 93 (1971), 205–228.
- [42] ORLIK, P., Y WAGREICH, P. Singularities of algebraic surfaces with  $C^*$  action. *Math. Ann.* 193 (1971), 121–135.
- [43] PICHON, A., Y SEADE, J. Real singularities and open-book decompositions of the 3-sphere. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 12, 2 (2003), 245–265.
- [44] RAYMOND, F. Classification of the actions of the circle on 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.* 131 (1968), 51–78.
- [45] ROLFSEN, D. Knots and links. xiv+439. Reimpresión corregida del original de 1976.
- [46] SEADE, J. *On the topology of isolated singularities in analytic spaces*, vol. 241 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [47] SEIFERT, H. Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume. *Acta Math.* 60 (1933), 147–238.
- [48] SEIFERT, H. Topology of 3-dimensional fibered spaces. 359–422. En el libro “Seifert and Threlfall: a textbook of topology”; Academic Press Inc. New York 1980; traducido del alemán por Wolfgang Heil.
- [49] SHAFAREVICH, I. R. *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1974. Traducido del ruso por K. A. Hirsch.
- [50] STILLWELL, J. *Classical topology and combinatorial group theory*, second ed., vol. 72 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [51] SWITZER, R. M. *Algebraic topology—homotopy and homology*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [52] THOM, R. Les singularités des applications différentiables. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 6 (1955), 43–87.
- [53] WHITNEY, H. Elementary structure of real algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)* 66, 3 (noviembre 1957), 545–556.