



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACERTIJOS, ROMPECABEZAS
Y
TEORÍA DE LAS GRÁFICAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A :
DAVID LÓPEZ FLORES

DIRECTORA DE TESIS MAT. LAURA PASTRANA RAMÍREZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

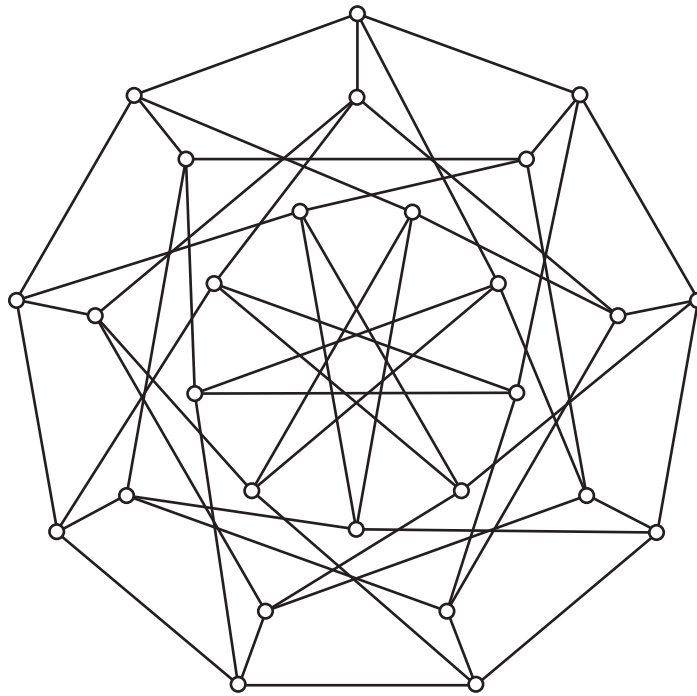
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Acertijos, Rompecabezas y Teoría de las Gráficas

David López Flores



2007

1. Datos del Alumno
López
Flores
David
55 44 27 67
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
401047336
2. Datos del tutor
Mat
Laura
Pastrana
Ramírez
3. Datos del sinodal 1
M en C
Pietra Adriana
Delgado
Escalante
4. Datos del sinodal 2
Mat
Adrián
Girard
Islas
5. Datos del sinodal 3
Mat
Martín
Manrique
Mansour
6. Datos del sinodal 4
Act
Leonardo
López
Monroy
7. Datos del trabajo escrito
Acertijos, Rompecabezas y Teoría de las Gráficas
187 p
2007

A mi mamá, mi papá, mi hermano, mi novia, mi familia (tíos, tías, primos, primas), mis amigos (que afortunadamente son muchos y disculpen si nos los menciono)... gracias por su amor, cariño, amistad y enseñanzas...

Índice general

Introducción	III
1. Conceptos básicos	1
1.1. Gráficas	2
1.1.1. Conexidad	6
1.1.2. Tipos de gráficas	9
1.2. Gráficas dirigidas	15
2. Apareamientos	21
2.1. El problema del baile	21
2.1.1. Definiciones	22
2.1.2. Modelo	23
2.1.3. Solución	24
3. Gráficas eulerianas	33
3.1. Fichas de dominó	33
3.1.1. Teoremas y definiciones	35
3.1.2. Modelo	39
3.1.3. Solución	40
4. Coloración e independencia	45
4.1. Independencia y coloración por vértices	45
4.1.1. El problema de las ocho reinas	45
4.1.2. Definiciones	46
4.1.3. Modelo	46
4.1.4. Solución	48
4.1.5. Coloración y complementos	48
4.1.6. La posición de las reinas	53
4.2. Coloración por aristas	61
4.2.1. Cuadrados latinos	61

4.2.2.	Teoremas y definiciones	62
4.2.3.	Solución	69
4.2.4.	Sudoku	73
4.2.5.	Solución	74
5.	Planaridad	79
5.1.	El problema de los circuitos impresos	79
5.1.1.	Teoremas y definiciones	79
5.1.2.	Modelo y solución	84
5.2.	El teorema de los cuatro colores	90
5.2.1.	Teoremas y definiciones	91
5.2.2.	Modelo y solución	92
6.	Números de Ramsey	99
6.1.	Los excéntricos de Polanco	99
6.1.1.	Modelo y solución	100
7.	Torneos	107
7.1.	La paradoja del deportista	107
7.1.1.	Análisis	111
8.	Gráficas de estados	119
8.1.	Demencia instantánea	119
8.1.1.	Modelo	120
8.1.2.	Solución	121
8.2.	Caníbales y misioneros	140
8.2.1.	Modelo	140
8.2.2.	Solución	144
8.3.	Dividiendo el vino	150
8.3.1.	Un poco de álgebra	150
8.3.2.	Modelo y solución	153
9.	Sucesiones de Bruijn	163
9.1.	Construyendo sucesiones de Bruijn	163
9.1.1.	Definiciones y teoremas	164
9.1.2.	Construcción	165
	Conclusiones	181
	Bibliografía	182

Introducción

Uno de los aspectos importantes en el desarrollo intelectual de la humanidad han sido los acertijos y rompecabezas, éstos nos han servido no sólo para el entretenimiento, sino también han sido una parte importante en la evolución de las matemáticas y en particular en la Teoría de las gráficas. Es por esta razón que considero que la forma más natural de introducirse a la Teoría de las gráficas es a través de acertijos y rompecabezas.

La tesis está hecha para ofrecer una introducción a la Teoría de las gráficas a alumnos universitarios con conocimientos previos en matemáticas. La manera en que abordaremos algunos de los diversos temas de la Teoría de las gráficas será a través de acertijos y rompecabezas. En cada capítulo de la tesis se resuelve uno o más acertijos, usando algún tema específico de la Teoría de las gráficas.

La forma en que está dividida esta tesis es la siguiente: en el capítulo 1 veremos los conceptos básicos que nos enseñarán las bases de esta teoría, en el capítulo 2 hablaremos de los apareamientos, en el capítulo 3 aprenderemos acerca de las gráficas eulerianas, en el capítulo 4 tocaremos el tema de coloración e independencia, en el capítulo 5 aprenderemos del tema de planaridad, en el capítulo 6 hablaremos de los números de Ramsey, en el capítulo 7 veremos lo que son los torneos, en el capítulo 8 hablaremos de las gráficas de estados y finalmente en el capítulo 9 veremos las sucesiones de Bruijn. Para ubicar con facilidad las definiciones se incluye un índice al final de la tesis.

Cada capítulo contienen una breve introducción histórica que habla acerca del problema, de la vida del matemático que descubrió el tema a tratar o de cómo se descubrieron las herramientas que nos ayudarán a encontrar la solución a nuestro problema. Para empezar daremos un breve resumen de la historia de la Teoría de las gráficas.

La Teoría de las gráficas es uno de los temas que ha tenido más impulso en los

últimos años gracias al gran número de aplicaciones que se le han encontrado, por ejemplo en la química, en la economía, en la antropología y hasta en la guerra.

El primer artículo publicado, relacionado con la Teoría de las gráficas, fue el *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* de Leonhard Euler en 1736. En este artículo, Euler resuelve el problema de los *puentes de Königsberg*. Otro problema famoso, que se resuelve usando gráficas, lo propuso Hamilton 1856. Él llamó a este problema el *juego del icosiano* y lo presentó en la reunión de la *British Association* en Dublín. Más adelante hablaremos de este par de problemas.

Uno de los problemas más famosos de la Teoría de las gráficas es el *problema de los cuatro colores*, propuesto por el matemático Francis Guthrie en 1852. El problema dice:

“¿Es verdad que se necesitan al menos cuatro colores para colorear un mapa de manera tal que países fronterizos no tengan el mismo color?”

A lo largo de un siglo diversos matemáticos intentaron probarlo pero su esfuerzo no fue suficiente. No fue hasta 1976 y con la ayuda de varias computadoras que la pareja de matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken, lograron demostrar este problema que por más de un siglo había intrigado a la comunidad matemática.

El término *gráfica*, la pieza principal de la Teoría de las gráficas, viene del término *notación gráfica* que fue utilizado por primera vez en química por E. Frankland y adoptado en 1884 por A. Cum Brown [13]. Brown representaba cada átomo de una estructura química con un punto y los enlaces entre átomos los representaba con una línea, ver Figura 1. El matemático británico Arthur Cayley notó que en muchas de estas representaciones existía una única forma de ir de un punto a otro siguiendo las líneas que los unían. Cayley llamó a este tipo de gráficas *árboles*. Años atrás Cayley ya había utilizado en concepto de *árbol* en sus estudios de cálculo.

En 1847 el físico alemán Gustav Kirchhoff desarrolló la teoría de *árboles* cuando intentaba resolver problemas de circuitos eléctricos. El logró simplificar los diagramas de circuitos eléctricos con sus resistencias, condensadores, etcétera, en un conjunto de puntos y líneas que unen estos puntos, un ejemplo se muestra en la Figura 2.

En 1936 el psicólogo alemán K. Z. Lewin propuso que la “vida en el espacio” de un individuo se puede representar en forma de mapa, en donde cada región representa alguna actividad de la persona, como el ambiente de trabajo, su casa o

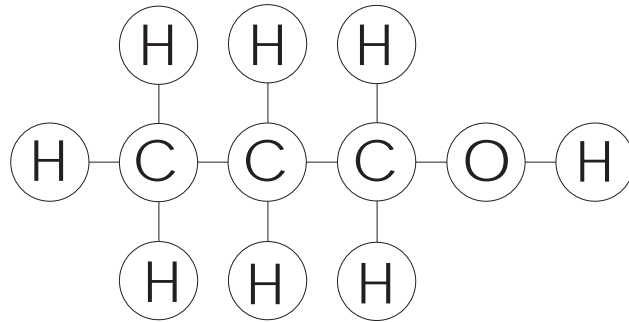
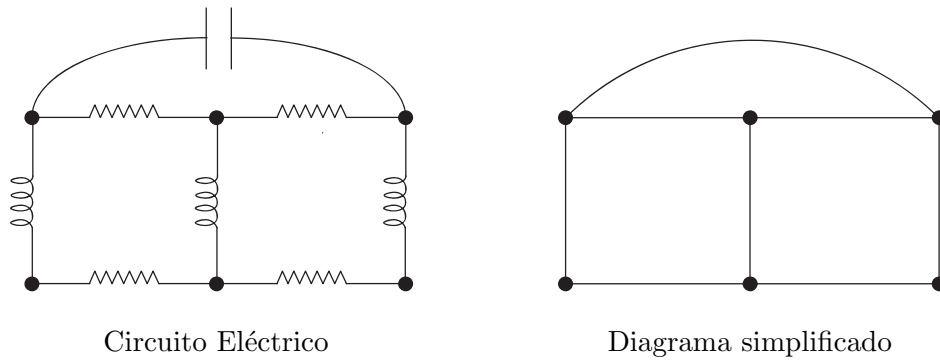
Figura 1. C_3H_7OH 

Figura 2.

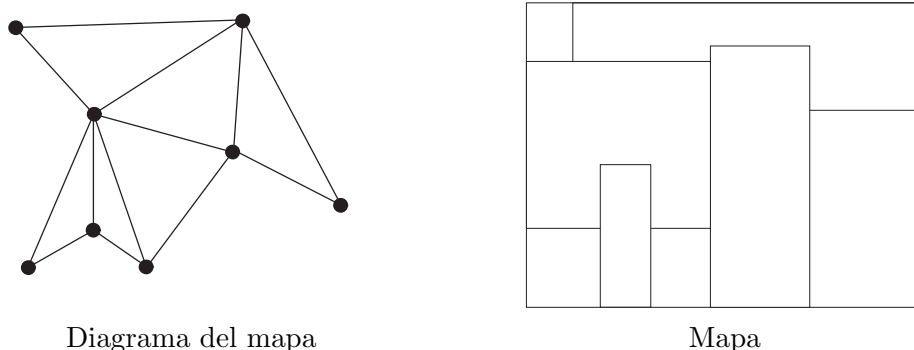


Figura 3.

sus manías. El representó estos mapas en una forma mas simple, cada región del mapa esta asociada a un punto y si dos regiones del mapa son fronteras entonces sus puntos correspondientes están unidos por una línea, un ejemplo se muestra en la Figura 3.

N. L. Biggs, E. K. Lloyd, y R. J. Wilson comentan acerca de la historia de la Teoría de las gráficas en su libro *Graph Theory/1736-1936*:

“Los orígenes de la Teoría de las gráficas, son humildes, hasta frívolos. Mientras que muchas ramas de la matemática fueron motivadas por problemas fundamentales de cálculo, movimiento, y medida, los problemas que dieron origen al desarrollo de la Teoría de las gráficas fueron frecuentemente un poco más que rompecabezas, diseñados para probar la ingenuidad en vez de estimular la imaginación. Pero a pesar de la aparente trivialidad de tales rompecabezas, éstos capturaron el interés de los matemáticos, con el resultado que la Teoría de las gráficas se ha convertido en una materia rica en resultados teóricos de una sorprendente variedad y profundidad.”

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos

Supón que tienes dentro de un salón de clases a cinco personas donde algunos son amigos y otros no, una forma de modelar lo que sucede en este salón es con un par de conjuntos, uno de ellos contiene a las cinco personas dentro del salón y el otro nos dice si dos personas son amigos o no. La forma como modelamos este problema es a lo que llamamos gráfica. A muy grandes rasgos una gráfica esta formada por un conjunto de elementos (como peras, números, personas, ciudades, etc.) y un conjunto que nos indica qué relación guardan estos elementos (en nuestro ejemplo la relación que guardan las personas es: ser o no amigos). Llamaremos al conjunto de elementos, vértices y al conjunto de relaciones, aristas. Lo bonito de este par de conjuntos es que los podemos representar con un dibujo, veamos cómo es posible esto.

Al conjunto de vértices lo vamos a representar por medio de puntos, es decir, a cada uno de los elementos de este conjunto le vamos a asignar un único punto y al conjunto de aristas lo representaremos por medio de líneas, es decir, si un elemento está relacionado con otro, los puntos asociados a estos elementos los vamos a unir con una línea. Para entender mejor cómo es esta representación, retomemos el ejemplo del salón de clases. En el salón hay cinco personas que llamaremos Pedro, María, Juan, David y Ale, entonces a cada persona le asignamos un punto, que llamaremos vértice, y dos vértices están unidos por una línea, que llamaremos arista, si las personas correspondientes a los vértices son amigos, en el caso en que no exista una arista entre dos vértices quiere decir que las personas no son amigos, la Figura 1.1 muestra cómo se vería esta representación.

Llamemos a la representación geométrica de una gráfica simplemente gráfica y

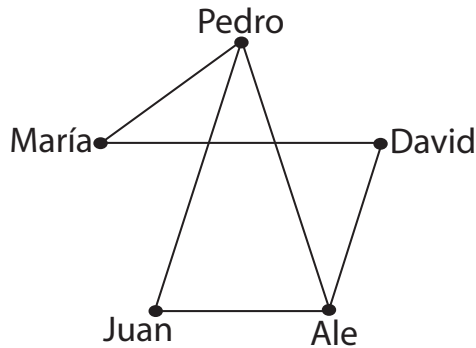


Figura 1.1. Gráfica que modela las amistades dentro de un cuarto

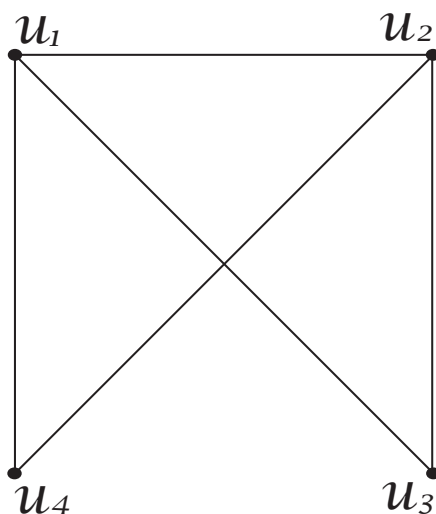
analicemos un poco la gráfica que se muestra en la Figura 1.1. Tenemos que David es amigo de María y Ale ya que hay aristas que unen al vértice *David* con los vértices *María* y *Ale*, por otra parte David no es amigo de Pedro ni Juan pues no hay aristas que unen a estos vértices. Cuando existe una arista entre dos vértices, decimos que los vértices son *adyacentes*, y cuando no existe simplemente decimos que *no son adyacentes*. En nuestro ejemplo David es adyacente a Ale pues entre este par de vértices hay una arista que los une.

En resumen una gráfica consta de dos partes principales que son: vértices y aristas. Veamos ahora las definiciones básicas que nos permitirán entender esta bonita teoría.

1.1. Gráficas

Definición 1.1.1 Una gráfica es una pareja de conjuntos $G = (V, A)$, donde V es un conjunto finito y no vacío de objetos llamados vértices y A es un conjunto de parejas no ordenadas de distintos elementos de V , llamados aristas. Al conjunto de vértices y aristas de G los denotamos por $V(G)$ y $A(G)$ respectivamente.

Para facilitar el estudio de la Teoría de las gráficas es conveniente hacer, como vimos al principio del capítulo, un diagrama de estos dos conjuntos, en dicha representación dibujamos los vértices con puntos o círculos pequeños y las aristas por medio de líneas que unan los vértices indicados en la relación. Por ejemplo podemos definir a una gráfica G por el conjunto de vértices $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y el conjunto de aristas $A = \{(u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_4, u_2)\}$ cuyo diagrama llamado también gráfica se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2. Gráfica de G

Definición 1.1.2 El orden de G es el número de vértices que hay en G y lo denotamos por $|V(G)|$ o con la letra p .^{*} El tamaño de G es el número de aristas que hay en G y lo denotamos por $|A(G)|$ o con la letra q .^{**}

En el caso de la Figura 1.2, $|V(G)| = 4$ y $|A(G)| = 5$.

Definición 1.1.3 Dos vértices u y v son adyacentes en una gráfica G si $(u, v) \in A(G)$. Dos vértices u y v no son adyacentes en una gráfica G si $(u, v) \notin A(G)$.

Definición 1.1.4 Sean u y v vértices de una gráfica G . Si $a = (u, v)$ tal que $a \in A(G)$, entonces decimos que u y v son vértices extremos de a y que a incide en u (o en v).

Definición 1.1.5 Sea v un vértice de una gráfica G . El grado de v es el número de aristas de G que inciden en v y lo denotamos por $\delta_G(v)$ donde el subíndice indica que $v \in V(G)$, si es claro que v es un vértice de G podemos denotar al grado de v por $\delta(v)$.

En el ejemplo del salón de clases, tenemos que Pedro es amigo de María, Juan y Ale, por lo que al vértice Pedro le inciden tres aristas, entonces $\delta(\text{Pedro}) = 3$

^{*}En algunos libros al orden también se le denota con la letra n

^{**}En algunos libros al tamaño también se le denota con la letra m

Definición 1.1.6 Sea G una gráfica. El grado mínimo de G es

$$\delta(G) = \min\{\delta_G(v) \text{ tal que } v \in V(G)\}.$$

El grado máximo de G es

$$\Delta(G) = \max\{\delta_G(v) \text{ tal que } v \in V(G)\}.$$

Por ejemplo en la Figura 1.2 tenemos que $\Delta(G) = 3$, ya que 3 es el más grande de los grados que hay en G . Por otro lado $\delta(G) = 2$, pues 2 es el más pequeño de los grados que hay en G .

Estas definiciones son suficientes para demostrar nuestro primer teorema.

Teorema 1.1.1 Para cualquier gráfica G , la suma de los grados de todos los vértices de G es igual a dos veces el número de aristas de G . O bien, si G tiene p vértices y q aristas, entonces

$$\sum_{i=1}^p \delta(v_i) = 2q \quad v_i \in V(G)$$

Demostración. Sean u y v en los vértices de G tales que u es adyacente a v . Si sumamos el grado de u más el grado de v , estamos contando la arista (u, v) dos veces. Por lo tanto al hacer la suma del grado de cada vértice de G , estamos contando las aristas de G dos veces, una por cada uno de sus vértices extremos.

■

Un corolario directo de este teorema es el siguiente.

Corolario 1.1.1 Sea G una gráfica. G tiene un número par de vértices de grado impar.

Demostración. Vamos a demostrar el corolario por contradicción, es decir, vamos a suponer que el resultado no es cierto y vamos a llegar a un hecho que es falso.

Sea G una gráfica y supongamos que G tiene un número impar de vértices de grado impar. Por el Teorema 1.1.1 sabemos que

$$\sum_{i=1}^p \delta(v_i) = 2q \quad v_i \in V(G),$$

es decir, el resultado de la suma del grado de cada vértice es un número par. Como supusimos que G tiene un número impar de vértices de grado impar, si sumamos el grado de cada uno de estos vértices el resultado es un número impar (el por

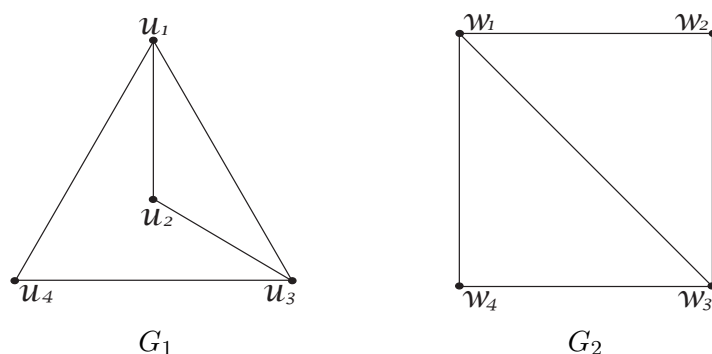


Figura 1.3. Podemos redibujar G_2 de manera que sea idéntica a G_1

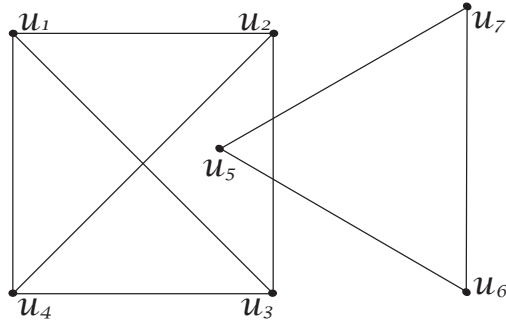
qué el resultado es impar se deja al lector), mientras que si sumamos el grado de los vértices de grado par, no importa cuántos sean, el resultado va a ser siempre un número par (el por qué el resultado es par se deja al lector). Entonces la suma de los vértices de grado impar más la suma de los vértices de grado par es igual a la suma del grado de los vértices de G , que a su vez es igual a un número impar (recuerda que estamos sumando un número par más un impar), que en símbolos matemáticos se expresaría como,

$$\sum_{\substack{v \in V(G) \text{ tal que} \\ \delta(v) \text{ es par}}} \delta(v) + \sum_{\substack{u \in V(G) \text{ tal que} \\ \delta(u) \text{ es impar}}} \delta(u) = r + s = \sum_{w \in V(G)} \delta(w),$$

como r es un número par y s es un número impar, entonces la suma del grado de los vértices de G es un número impar, lo que contradice el Teorema 1.1.1, ya que la suma del grado de los vértices de G siempre es un número par. Entonces suponer que G tiene un número impar de vértices de grado impar nos lleva a una contradicción, por lo tanto G debe de tener un número par de vértices de grado impar. ■

Un aspecto trascendente en la Teoría de las gráficas es saber si dos gráficas son “isomorfas”, esta importancia recae en el hecho de que si G_1 y G_2 fueran dos gráficas isomorfas que son modelos de dos situaciones diferentes, entonces hay algo en estas situaciones que es básicamente lo mismo. Intuitivamente dos gráficas G_1 y G_2 son isomorfas si es posible redibujar una de estas gráficas, de manera tal que el nuevo dibujo de ésta sea idéntico al dibujo de la otra. Por ejemplo, las gráficas G_1 y G_2 del Figura 1.3 tienen esta propiedad (intenta imaginarte como redibujarías a G_1 de manera que fuera idéntica a G_2). Una definición más formal es la siguiente.

Definición 1.1.7 Sean G_1 y G_2 dos gráficas. Un isomorfismo de G_1 en G_2 es un mapeo uno-a-uno $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, tal que dos vértices u y v son adyacentes

Figura 1.4. G

en G_1 si y sólo si los vértices $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son adyacentes en G_2 . Decimos que G_1 y G_2 son isomorfas si existe un isomorfismo de G_1 en G_2 .

Veamos con la definición formal de isomorfismo, que las gráficas que se muestran en la Figura 1.3 son isomorfas. Tomemos el mapeo ϕ de la siguiente forma; al vértice u_i lo mandamos al vértice w_i , es decir $\phi(u_i) = w_i$ para toda $1 \leq i \leq 4$, este mapeo cumple que u_i es adyacente a u_j si y sólo si $\phi(u_i)$ es adyacente a $\phi(u_j)$, por lo tanto estas gráficas son isomorfas. Por ejemplo, el vértice u_1 es adyacente al vértice u_2 y $\phi(u_1) = w_1$ es adyacente al vértice $\phi(u_2) = w_2$. Revisar que el mapeo es válido para el resto de los vértices se deja como ejercicio para el lector.

Definición 1.1.8 Sea G una gráfica. Una gráfica H es una subgráfica de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $A(H) \subseteq A(G)$.

Definición 1.1.9 Sea G una gráfica y $U \subseteq V(G)$. Decimos que $G[U]$ es una subgráfica inducida por U de $V(G)$, si $G[U]$ es subgráfica de G y cumple que $(u, v) \in A(G)$ si y sólo si $(u, v) \in A(G[U])$, tal que $\{u, v\} \subset V(U)$. Alternativamente, podemos decir que cumple que u es adyacente a v en $G[U]$ si y sólo si u es adyacente a v en G .

Sea G una gráfica como se muestra en la Figura 1.4. Sea H una gráfica con el conjunto de vértices $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de G y el conjunto de aristas $\{(u_1, u_2), (u_1, u_3)\}$ de G , H es una subgráfica de G . Sea $U = \{u_1, u_3, u_4\}$, $G[U]$ es la subgráfica inducida por los vértices u_1, u_3 y u_4 y sus aristas son (u_1, u_3) , (u_3, u_4) y (u_4, u_1) .

1.1.1. Conexidad

En el estudio de la Teoría de las gráficas, una de las clases más importantes es la de las gráficas conexas. A continuación daremos las definiciones que nos servirán para entender qué es una gráfica conexa.

Definición 1.1.10 Sean u y v vértices de una gráfica G . Un uv -camino en G es una sucesión de vértices $C = (u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ en G , tal que vértices consecutivos en la sucesión son adyacentes. Un camino cerrado es aquel que empieza y termina en el mismo vértice.

La sucesión de vértices $C = (u_1, u_2, u_3, u_2, u_4, u_3)$ en la gráfica que se muestra en la Figura 1.4 es un u_1u_3 -camino de G .

Definición 1.1.11 Sean u y v vértices de una gráfica G . Un uv -paseo es un uv -camino que no repite aristas.

La sucesión de vértices $C = (u_1, u_2, u_3, u_1, u_4, u_2)$ en la gráfica que se muestra en la Figura 1.4 es un u_1u_2 -paseo de G .

Definición 1.1.12 La longitud de un camino es igual al número de aristas que recorre el camino. Se denota con la letra \mathcal{L}

Definición 1.1.13 Sean u y v vértices de una gráfica G . Una uv -trayectoria es un uv -camino que no repite vértices.

Definición 1.1.14 Un ciclo es un camino cerrado de longitud mayor o igual a tres, que no repite vértices excepto el primero y el último.

La sucesión de vértices $C = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ en la gráfica que se muestra en la Figura 1.4 es una u_1u_4 -trayectoria de G de longitud $\mathcal{L}(C) = 3$. La sucesión de vértices $C' = (u_5, u_6, u_7, u_5)$ en la gráfica que se muestra en la Figura 1.4 es un ciclo de G de longitud $\mathcal{L}(C') = 3$.

El siguiente teorema relaciona los conceptos de ciclo y camino. A pesar de su sencillez es muy utilizado para la demostración de varios teoremas en la Teoría de las gráficas.

Teorema 1.1.2 Todo camino cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.

Demostración. Sea C un camino cerrado de longitud impar. Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre la longitud del camino cerrado de longitud impar. Para demostrar una afirmación por inducción en general necesitamos tres pasos. Primero demostramos el teorema para un caso particular, después suponemos que el teorema se cumple para un número finito de casos y por último demostramos el teorema en general (es decir, para cualquier caso).

Observemos primero que no existen caminos cerrados de longitud uno, por lo que no es necesario demostrar este caso. Si $\mathcal{L}(C) = 3$ el único camino cerrado

de longitud tres que existe es el formado por tres vértices u, v y w y las aristas $(u, v), (v, w)$ y (w, v) , por lo que el camino $C = (u, v, w, v)$ es un ciclo de longitud impar.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el teorema se cumple para caminos cerrados C' de longitud impar tales que $\mathcal{L}(C') < n$.

Ahora vamos a demostrar que el teorema se cumple para caminos cerrados de longitud impar e iguales a n tal que n es impar. Sea C un camino cerrado tal que $\mathcal{L}(C) = n$ y n es un número impar. Consideremos dos casos:

Caso i. Si el único vértice que repite C es el primero y el último vértice, entonces por la definición 1.1.14, tenemos que C es un ciclo. Además por la hipótesis del teorema sabemos que $\mathcal{L}(C)$ es un número impar.

Caso ii. El camino C repite más de dos vértices. Sea $C = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$ un camino cerrado de longitud impar, tal que $x_i \in V(C)$ para toda i , en $1 \leq i \leq n$. Tomemos el primer vértice x_i de C tal que $x_i = x_j$ para alguna $i \neq j$. Ahora, consideremos los caminos cerrados C_1 y C_2 tales que

$$C_1 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j = x_i) \text{ y } C_2 = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n, x_1).$$

Por construcción sabemos que $\mathcal{L}(C_1) + \mathcal{L}(C_2) = \mathcal{L}(C)$. Como la longitud de C es un número impar, entonces necesariamente se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones: la longitud del camino C_1 es un número impar o la longitud del camino C_2 es un número impar (demostrar este hecho se deja como ejercicio para el lector).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la longitud de C_1 es impar (decimos “sin pérdida de generalidad” pues resultaría lo mismo suponer que la longitud de C_2 es impar). Hasta el momento sabemos que C_1 es un camino cerrado de longitud impar y además que $\mathcal{L}(C_1) < n$, entonces por hipótesis de inducción C_1 contiene un ciclo C' de longitud impar. Como $C' \subset C_1$ y $C_1 \subset C$, entonces C contiene un ciclo de longitud impar, que era lo que queríamos demostrar. ■

Definición 1.1.15 *Dos vértices u y v de una gráfica G están conectados si existe un uv -camino en G .*

Definición 1.1.16 *Sea G una gráfica. G es conexa si para todo $u, v \in V(G)$ existe un uv -camino en G . Si existen dos vértices de G tales que no exista un uv -camino en G , entonces G es desconexa.*

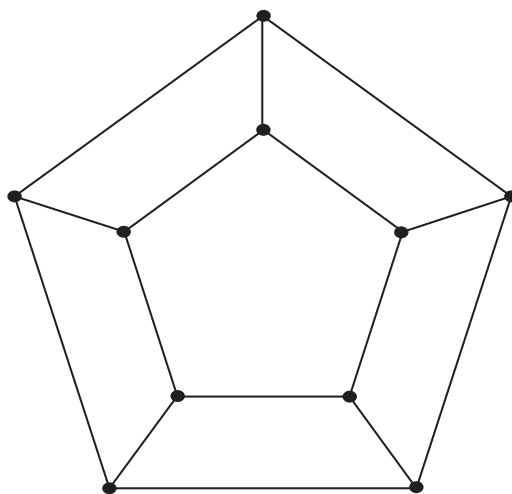


Figura 1.5. Gráfica 3-regular pues todos sus vértices tienen grado 3

Definición 1.1.17 Sea H una subgráfica de G . H es una componente conexa de G si H es conexa y no está contenida en alguna subgráfica conexa de G que tenga más aristas o vértices que H .

Sea G la gráfica que se muestra en la Figura 1.4. La subgráfica H formada por los vértices u_5, u_6 y u_7 y las aristas (u_5, u_6) , (u_6, u_7) y (u_7, u_5) es una componente conexa de G .

1.1.2. Tipos de gráficas

Ahora vamos a describir algunos de los tipos de gráficas más comunes y más utilizados tanto en aplicaciones como en la Teoría de las gráficas. Entender la construcción y algunas de las propiedades de estas gráficas es de gran importancia para una comprensión más profunda de esta teoría.

Definición 1.1.18 Si todos los vértices de una gráfica G tienen el mismo grado r , decimos que G es regular de grado r o simplemente que G es r -regular (ver Figura 1.5).

Definición 1.1.19 Una gráfica G es completa, si cualesquiera dos vértices son adyacentes. Una gráfica completa de orden p , es $(p - 1)$ -regular y se denota por K_p (ver figura 1.6).

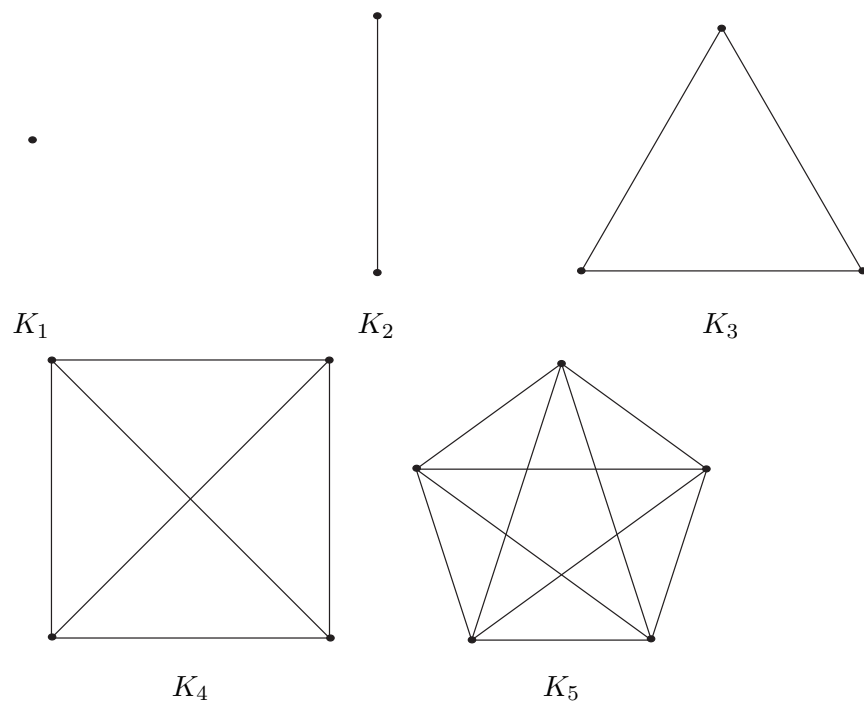


Figura 1.6. Gráficas completas de orden uno, dos, tres cuatro y cinco.

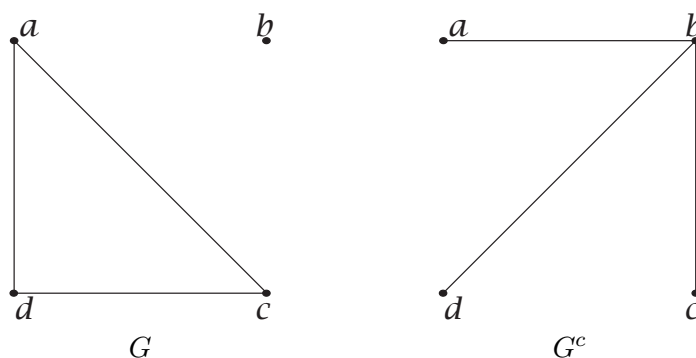


Figura 1.7.

Definición 1.1.20 *El complemento de una gráfica G , es una gráfica con el mismo número de vértices que G , con la propiedad de que u y v son vértices adyacentes en G si y sólo si u y v no son adyacentes en el complemento de G . A esta gráfica se le denota por G^c . (Ver Figura 1.7).*

Definición 1.1.21 *Sea G una gráfica. Un subconjunto de los vértices de G es independiente si ningún par de vértices del subconjunto es adyacente entre si.*

Definición 1.1.22 *Una gráfica G es r -partita, si en G es posible separar a $V(G)$ en r conjuntos X_1, X_2, \dots, X_r que cumplen las siguientes condiciones:*

- $X_i \neq \emptyset$ para toda $1 \leq i \leq r$.
- X_i es independiente para toda i , con $1 \leq i \leq r$.
- $\cup_{i=1}^r X_i = V(G)$.
- $\cap_{i=1}^r X_i = \emptyset$.

Si $r = 2$, decimos que G es bipartita.

La Figura 1.8 muestra cómo se puede redibujar la gráfica de la izquierda de manera que la bipartición sea más clara. Esta gráfica la partimos en dos conjuntos independientes $X_1 = \{x_1, x_3, x_7, x_5\}$ y $X_2 = \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, pues todos los vértices de X_1 no son adyacentes entre ellos y lo mismo pasa para los vértices de X_2 , además X_1 y X_2 son subconjuntos no vacíos, la unión de estos dos subconjuntos son todos los vértices de G y la intersección de ellos es vacía. Entonces la gráfica es bipartita.

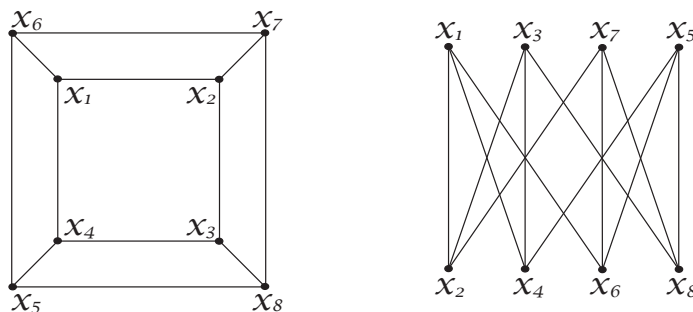


Figura 1.8. Gráficas bipartitas

Definición 1.1.23 Definimos a la gráfica completa bipartita, como aquella gráfica con bipartición X y Y tal que para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, x es adyacente a y . Si $|X| = m$ y $|Y| = n$, denotamos a la gráfica completa bipartita por $K_{m,n}$.

Por ejemplo la bipartita completa $K_{7,5}$ se muestra en la Figura 1.9.

Definición 1.1.24 Una gráfica G es un árbol si G es conexa y sin ciclos. Comúnmente a los árboles se les denota con la letra T .

Definición 1.1.25 Sea G una gráfica conexa. Un árbol generador de G , es una subgráfica de G que incluye a todos los vértices de G y es un árbol.

La Figura 1.10 muestra uno de los árboles generadores de la gráfica K_5 .

Usaremos la siguiente proposición para demostrar cuantas aristas tiene un árbol.

Propiedad 1.1.1 Todo árbol tiene al menos dos vértices con grado 1.

Demostración. Vamos a demostrar la afirmación por contradicción. Sea T un árbol. Sea $P = (v_1, v_2, v_3 \dots v_n)$ un camino de longitud máxima contenido en T tal que $v_i \in V(T)$ para toda i , en $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $\delta(v_1) > 1$. Pueden ocurrir dos casos:

Caso i v_1 es adyacente a un vértice u de T que no pertenece al camino P . Entonces podemos formar el camino $P_1 = (u, v_1, v_2, v_3 \dots v_n)$. Entonces $\mathcal{L}(P_1) > \mathcal{L}(P)$. Lo que contradice que P es de longitud máxima. Por lo tanto este caso no es posible.

Caso ii v_1 es adyacente a un vértice $v \neq v_2$ de T que pertenece al camino P . Entonces podemos formar el ciclo $C = (v_1, v_2, v_3 \dots v_i = v, v_1)$. Lo que contradice

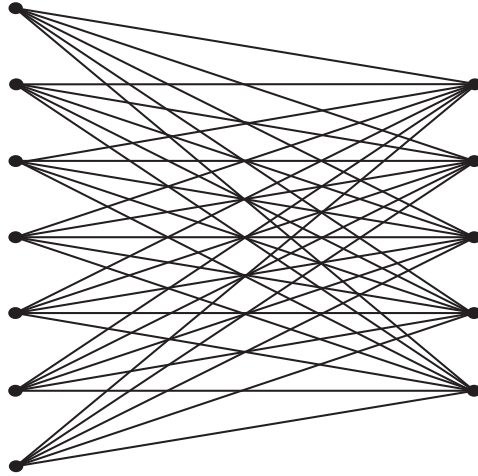
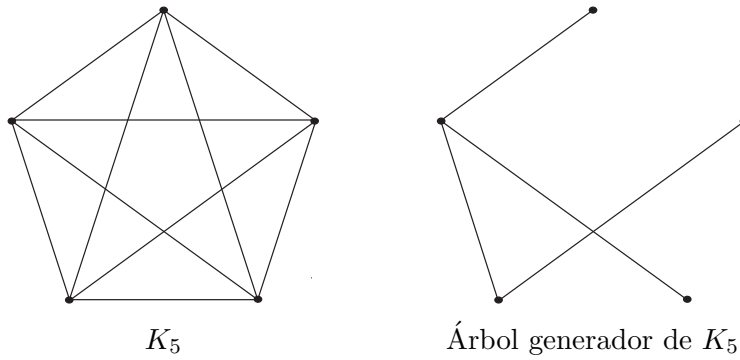
Figura 1.9. Bipartita completa $K_{7,5}$ 

Figura 1.10.

el hecho de que los árboles no tienen ciclos. Por lo tanto este caso no es posible.

Como los *casos i* y *ii* no llevan a contradicciones, entonces la suposición de que $\delta(v_1) > 1$, es falsa. Por lo tanto $\delta(v_1) = 1$. De manera muy similar se puede probar que $\delta(v_n) = 1$, pero este caso se deja como ejercicio para el lector. Una vez demostrado este caso podemos concluir que todo árbol tiene al menos dos vértices con grado 1. ■

Teorema 1.1.3 *Sea T un árbol con p vértices. El número de aristas de T es $p - 1$.*

Demostración. Vamos a demostrar el teorema por inducción sobre el número de vértices de T . Supongamos que $p = 1$. Entonces T no tiene aristas, por lo tanto el teorema se cumple.

Hipótesis de inducción. Supongamos que el teorema se cumple para árboles con al menos $p - 1$ -vértices.

Sea T un árbol con p -vértices. Por la propiedad anterior sabemos que T tiene al menos dos vértices de grado 1. Sean $\{u, v\} \in V(T)$ tal que $\delta(u) = \delta(v) = 1$. Si consideramos la gráfica $T' = T \setminus \{u, v\}$, tenemos que T' es árbol, pues es conexa y sin ciclos (demostrar este hecho se deja como ejercicio para el lector). Además T' tiene $p' = p - 2$ -vértices, por hipótesis de inducción podemos afirmar que el número de aristas de T' es $p' - 1 = (p - 2) - 1 = p - 3$.

T' se obtiene de quitar dos vértices de grado uno a T , es decir, a T le quitamos dos aristas. Entonces si el número de aristas de T' es $p - 3$, el número de aristas de T es $p - 1$. ■

Al principio del capítulo vimos que las aristas de una gráfica definen una relación única entre los vértices, en otras palabras, cada par de vértices está unido sólo por una arista, sin embargo, en varios problemas de la vida real que intentemos modelar con gráficas no siempre la relación entre dos eventos va a ser única. Por ejemplo, tomemos a los alumnos de una escuela y las materias que se imparten, modelemos los alumnos que toman clases juntos en cada materia. Entonces la relación de nuestra gráfica va a ser tomar clases juntos, sin embargo una sola arista no nos permite modelar bien el problema, pues puede pasar que un par de alumnos tomen juntos química y matemáticas, por lo que necesitaremos una arista que nos diga que toman química juntos y otra que nos diga que toman matemáticas juntos. Entonces los vértices de la gráfica pueden estar relacionados de dos o más formas diferentes (dependiendo del número de materias que se impartan). Para resolver

este problema es necesario pedirle a nuestra gráfica que cada par de vértices admita una o más aristas entre ellos, en donde cada una de las aristas va a definir cómo se relacionan los vértices. En nuestro ejemplo, el número de relaciones va a ser igual al número de materias que se impartan en dicha escuela. A manera de ejercicio, escoge a cinco compañeros de tu escuela y las materias que se imparten en tu escuela, modela con una gráfica qué clases toman juntos entre ustedes.

A este tipo de gráficas que admiten dos o más aristas entre cada par de vértices las llamamos multigráficas o gráficas con aristas múltiples. A continuación definiremos este tipo de gráficas y conoceremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.26 *Un lazo es una arista que va de un vértice a él mismo.*

Definición 1.1.27 *Sean u y v vértices de una multigráfica. Si entre u y v hay más de una arista decimos que G tiene una arista múltiple.*

Definición 1.1.28 *Una multigráfica* G , es una gráfica que admite aristas múltiples y lazos (ver Figura 1.11).*

Las definiciones anteriores, así como el Teorema 1.1.1, 1.1.2 y el corolario 1.1.1, son iguales para multigráficas y para gráficas, lo único que no está definido en multigráficas es la noción de complemento.

1.2. Gráficas dirigidas

Las gráficas dirigidas o digráficas son la última clase de gráficas que veremos en este capítulo. Como su nombre lo indica, esta clase de gráficas tiene una dirección, un sentido, es decir, en las digráficas usaremos flechas en vez de aristas entre cada par de vértices. Este tipo de gráficas resulta bastante útil para modelar situaciones donde la dirección juegue un papel importante, por ejemplo, el mapa de calles de una ciudad. Una forma de modelar estos mapas es relacionando las intersecciones entre calles con los vértices de la digráfica y utilizamos una flecha para representar la calle y el sentido de ésta. Un ejemplo se muestra en la Figura 1.12.

Veamos ahora la definición formal de digráfica y algunas de sus propiedades.

*En la mayoría de los libros a las gráficas que no admiten aristas múltiples pero sí lazos se les conoce con el nombre de pseudográficas, mientras que las multigráficas son las que sólo admiten aristas múltiples mas no lazos, sin embargo en este texto consideraremos dentro de una misma clase a las gráficas que admiten aristas múltiples y lazos.

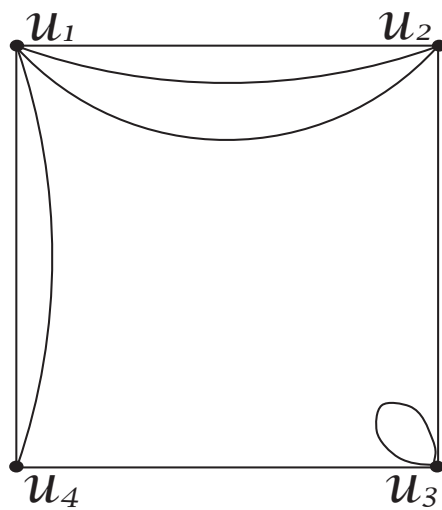
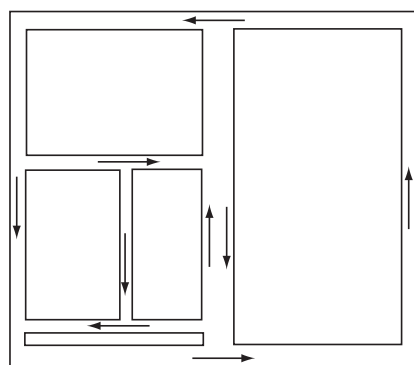
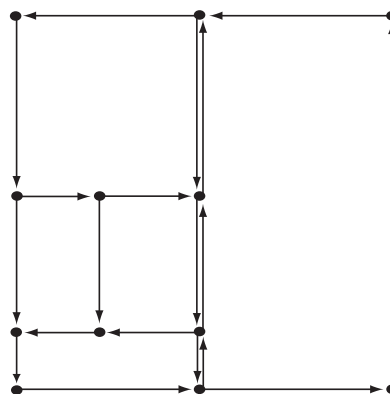


Figura 1.11. La multigráfica admite lazos y aristas múltiples

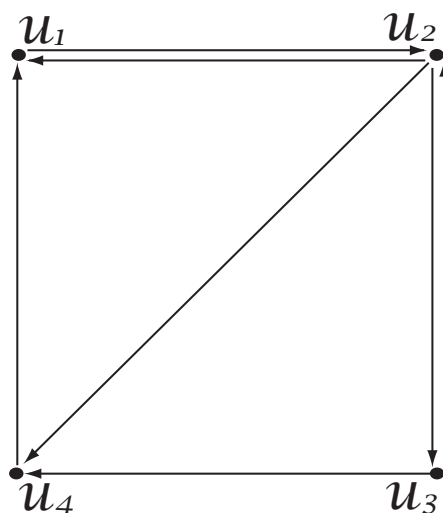


Plano de calles



Digráfica que modela el plano

Figura 1.12.

Figura 1.13. Diagrama de D

Definición 1.2.1 Una digráfica o gráfica dirigida es una pareja $D = (V, F)$, donde V es un conjunto finito y no vacío de objetos llamados vértices y F es un conjunto de parejas ordenadas de elementos distintos de V , llamados flechas. A los conjuntos de vértices y flechas de D los denotamos por $V(D)$ y $F(D)$ respectivamente.

Al ser F un conjunto de parejas ordenadas de elementos distintos de V , entonces F es una relación de la digráfica D . Esta relación no necesariamente es simétrica, entonces si (u, v) es una flecha de D no siempre (v, u) es una flecha de D . El diagrama que se muestra en la Figura 1.13 es el generado por el conjunto de vértices $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y el conjunto de flechas $F = \{(u_1, u_2), (u_2, u_1), (u_3, u_4), (u_2, u_3), (u_3, u_2), (u_2, u_4), (u_4, u_1)\}$. A excepción de la digráfica de la Figura 1.13, las demás digráficas que aparezcan en el texto que tengan flechas dobles, es decir, flechas que vayan de un vértice a otro y de regreso, estarán representadas en el diagrama como una arista que une a dos vértices con una punta de flecha en cada extremo.

Definición 1.2.2 Al número de vértices de una digráfica D lo denotamos por $|V(D)| = p$ y al número de flechas de D lo denotamos por $|F(D)| = q$.

Definición 1.2.3 Sea v un vértice de una digráfica D . El ingrado de v es el número de flechas de D que entran en v y lo denotamos por $\delta_D^-(v)$.

Definición 1.2.4 Sea v un vértice de una digráfica D . El exgrado es el número de flechas que salen de v y lo denotamos por $\delta_D^+(v)$.

Definición 1.2.5 Sea v un vértice de una digráfica D . El grado de v es la suma del ingrado más el exgrado y se denota por $\delta_D(v)$.

Nota: El subíndice tanto en el ingrado y el exgrado como en el grado indica que $v \in V(D)$, si es claro que v es un vértice de D podemos denotar el ingrado, el exgrado o el grado de v por $\delta^-(v)$, $\delta^+(v)$ o $\delta(v)$ respectivamente.

En la Figura 1.13 $\delta^-(u_3) = 1$, $\delta^+(u_3) = 2$ y $\delta(u_3) = 3$

Definición 1.2.6 Sean u y v dos vértices de una digráfica D . Decimos que entre u y v hay una flecha simétrica si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ y $(v, u) \in F(D)$. Decimos que entre u y v hay una flecha asimétrica si y sólo si $(u, v) \in F(D)$ implica que $(v, u) \notin F(D)$

También existen isomorfismos entre digráficas, en este caso la definición es muy parecida a la de gráficas y la manera de ver cuando dos digráficas son isomorfas es la misma que la que usamos para las gráficas.

Definición 1.2.7 Sean D_1 y D_2 dos digráficas. Un isomorfismo de D_1 en D_2 es un mapeo uno-a-uno $\phi : V(D_1) \rightarrow V(D_2)$, de $V(D_1)$ en $V(D_2)$, tal que existe una flecha del vértice u al vértice v en D_1 si y sólo si existe una flecha del vértice $\phi(u)$ al vértice $\phi(v)$ en D_2 . Decimos que D_1 y D_2 son isomorfas si existe un isomorfismo de D_1 en D_2 .

Definición 1.2.8 Sea v un vértice de una digráfica D . El conjunto de los vecinos exteriores de v , se denota y se define por:

$$\Gamma^+(v) = \{u \in V(D) \text{ tal que } (v, u) \in F(D)\}.$$

Y al conjunto de los vecinos interiores de v , se le denota y define por:

$$\Gamma^-(v) = \{u \in V(D) \text{ tal que } (u, v) \in F(D)\}.$$

Así como en las gráficas existe la noción de conexidad, en las digráficas también es importante saber cuándo una digráfica es conexa. Las digráficas utilizan flechas para relacionar vértices, entonces es posible ir de un vértice a otro; siguiendo la dirección de las flechas o sin importar la dirección de la flechas, es por esto que en las digráficas se define más de un tipo de conexidad. Las siguientes definiciones ayudarán a entender este concepto.

Definición 1.2.9 Sean u y v vértices de una digráfica D . Un uv -camino es una sucesión de vértices $C = (u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ donde $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ ó $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Por ejemplo en la Figura 1.13 tenemos el camino $C = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Definición 1.2.10 Sean u y v vértices de una digráfica D . Un uv -camino dirigido, es una sucesión de vértices $\vec{C} = (u = u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = v)$ tal que $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Por ejemplo en la Figura 1.13 tenemos el camino dirigido $\vec{C} = (u_2, u_1, u_2, u_3, u_2, u_1)$

Definición 1.2.11 La longitud de un camino es igual al número de flechas que recorre el camino. Se denota con la letra \mathcal{L}

Definición 1.2.12 Sean u y v vértices de una digráfica D . Un uv -paseo dirigido \vec{P} es un uv -camino dirigido que no repite flechas.

Por ejemplo en la Figura 1.13 tenemos el paseo dirigido $\vec{P} = (u_1, u_2, u_3, u_2, u_1)$

Definición 1.2.13 Sean u y v vértices de una digráfica D . Una uv -trayectoria dirigida \vec{T} , es un uv -camino dirigido que no repite vértices.

Por ejemplo en la Figura 1.13 tenemos la trayectoria dirigida $\vec{T} = (u_1, u_2, u_4)$

Definición 1.2.14 Un ciclo dirigido \vec{C} , es uv -camino cerrado dirigido de longitud mayor o igual a dos que no repite vértices excepto el primero y el último. Por ejemplo en la Figura 1.13 tenemos el ciclo dirigido $\vec{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_1)$

Definición 1.2.15 Sea D una digráfica:

- D es conexa si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino contenido en D
- D es unilateralmente conexa si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido o un vu -camino dirigido contenido en D .
- D es fuertemente conexa si para todo $u, v \in V(D)$ existe un uv -camino dirigido y también un vu -camino dirigido contenidos en D .

Un ejemplo de cada una de estas conexidades se muestra en la Figura 1.14. Un tipo de digráfica muy utilizada es la que recibe el nombre de *torneo*. Estas digráficas fueron descubiertas por el interés de modelar torneos deportivos de competencia.

Definición 1.2.16 Un torneo T es una digráfica, con la propiedad de que para todo par de vértices distintos u y v , existe una y solo una flecha entre ellos. En otras palabras T es un torneo si todos los vértices de T son adyacentes entre sí y T no tiene flechas simétricas.

La Figura 1.15 muestra un ejemplo de torneo.

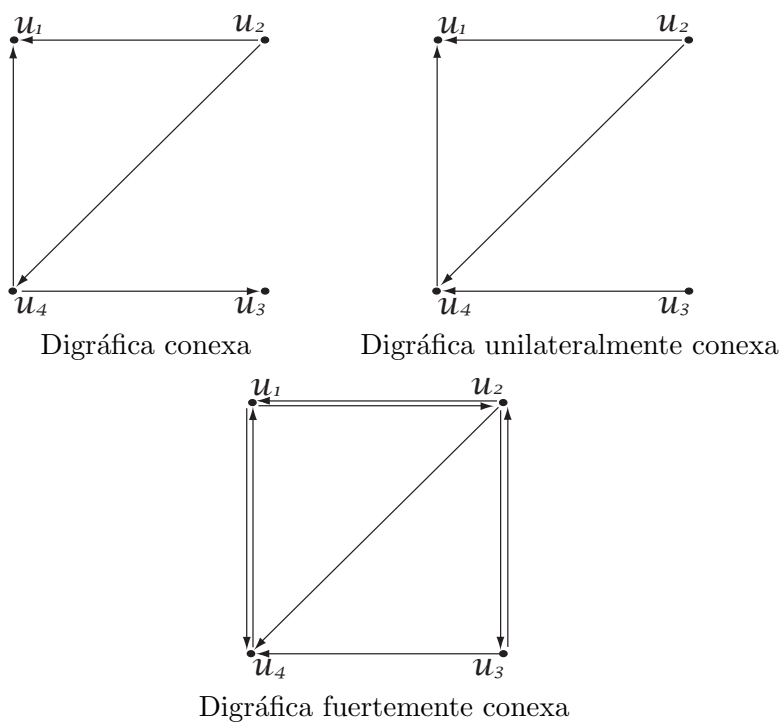


Figura 1.14. Diferentes tipos de conexidad en digráficas.

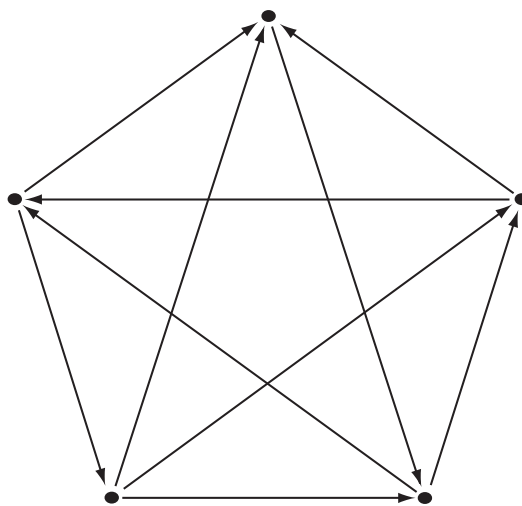


Figura 1.15. Torneo de orden 5

CAPÍTULO 2

Apareamientos

En este capítulo trataremos las gráficas bipartitas y su relación con los apareamientos.

2.1. El problema del baile

Se organiza una fiesta en la cual todas las mujeres desean bailar la misma canción con al menos un hombre que sea de su agrado. Supongamos que tenemos menor o igual número de mujeres que de hombres y deseamos cumplirle su deseo a todas ellas. ¿Qué condiciones se necesitan para que el mayor número de mujeres baile con alguien de su agrado?.

Historia

El problema de esta sección está relacionado con el *Algoritmo Húngaro*, es más, este algoritmo nos ayudará a resolver el problema. En sus inicios el algoritmo era conocido como el *Método Húngaro* inventado y publicado por Harold Kuhn en 1955 en la revista *Naval Research Logistic Quarterly* [14].

Aunque el algoritmo fue desarrollado por Kuhn, éste se basó en los primeros trabajos de dos matemáticos húngaros: Dénes König y Jenő Egerváry, es por esta razón que Kuhn decidió llamarlo *Método Hungaro*.

La gran ventaja del método de Kuhn, a quien le debemos su forma actual, es

que su método es *fuertemente polinomial**. Este algoritmo se utiliza para encontrar apareamientos máximos en una gráfica bipartita y, debido a que es polinomial, el número de pasos que se necesitan para encontrar el apareamiento es relativamente pequeño .

2.1.1. Definiciones

Definición 2.1.1 Sea G una gráfica. Un apareamiento M es un subconjunto de las aristas de G tal que para toda $\{a, b\} \subseteq M$, a y b no inciden en un mismo vértice.

Definición 2.1.2 Sean u y v vértices de una gráfica G . Decimos que u y v están M -apareados si $(u, v) \in M$.

Definición 2.1.3 Sea v un vértice de G . Decimos que v está M -saturado si existe una arista de M que incide en v .

Definición 2.1.4 Un apareamiento M es máximo si no existe otro apareamiento M' tal que $|M| < |M'|$.

Definición 2.1.5 Sea G una gráfica y M un apareamiento. Una trayectoria es M -alternante si sus aristas están alternadamente en M y M^c .

Definición 2.1.6 Sea G una gráfica y M un apareamiento. Una trayectoria es M -augmentante, si es M -alternante y empieza y termina en vértices no M -saturados.

Definición 2.1.7 Sea G una gráfica y M un apareamiento. M es perfecto si todos los vértices de G están M -saturados.

Definición 2.1.8 Sea G una gráfica y $S \subseteq V$. Definimos y denotamos al conjunto de los vecinos de S como

$$N(S) = \{u \in V(G) \text{ tal que existe } v \in S \text{ tal que } v \text{ es adyacente a } u\}.$$

Observemos la gráfica que se muestra en la Figura 2.1. Las aristas punteadas forman un apareamiento M , pues éstas no inciden en un mismo vértice. Los vértices x_1 y x_2 junto con x_5 y x_4 están M -apareados pues las aristas $\{(x_1, x_2), (x_5, x_4)\} \subseteq M$. Los vértices x_1, x_2, x_3 y x_4 están M -saturados. El apareamiento M no es

*Un algoritmo es *fuertemente polinomial* o *pseudo-polinomial* si el tiempo en que el problema puede ser resuelto con el algoritmo depende únicamente de las dimensiones del problema, por ejemplo en una gráfica con valores asociados a los vértices y aristas, el número de pasos que requiere al algoritmo para resolver algún problema que modele la gráfica sólo depende del número de vértices y aristas, mas no de sus valores asociados.

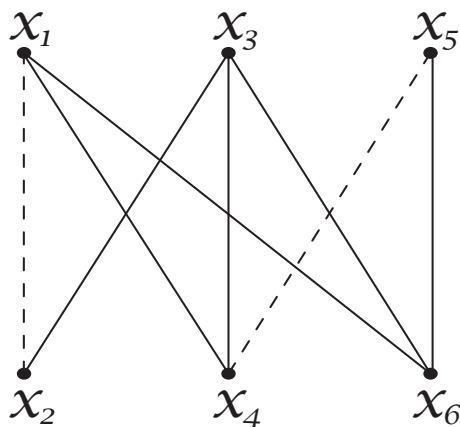


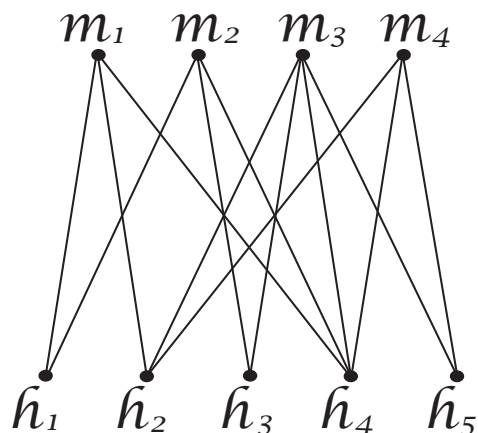
Figura 2.1. Las aristas punteadas forman un apareamiento M

máximo pues existe otro apareamiento $M' = \{(x_6, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_5)\}$ tal que $|M| < |M'|$. La trayectoria $T = (x_6, x_1, x_2, x_3)$ es una trayectoria M -alternante pues sus aristas están alternadamente en M y M^c , también la trayectoria es M -aumentante pues empieza y termina en vértices que no son M -saturados. Si S es un subconjunto de vértices tal que $S = \{x_1, x_5\}$, entonces $N(S) = \{x_2, x_4, x_6\}$.

2.1.2. Modelo

Primero hay que modelar el problema con una gráfica. Supongamos que en la fiesta hay m mujeres y n hombres, si asociamos a cada invitado de la fiesta con un vértice, entonces nuestra gráfica G tiene $(m + n)$ -vértices. Sean $M = \{m_1, m_2, \dots, m_m\}$ y $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ subconjuntos de los vértices de G tales que $M \cup H = V(G)$. Los vértices m_i representan a las mujeres y los vértices h_j representan a los hombres. Sólo las mujeres pueden elegir pareja de baile, entonces un vértice m_i es adyacente a un vértice h_j si y sólo si la mujer m_i desea bailar con el hombre h_j , además las parejas que bailan deben de ser de sexos opuestos, entonces los vértices que representen a personas del mismo sexo no son adyacentes entre sí. La gráfica resultante es una gráfica con dos conjuntos independientes por vértices*, por lo tanto G es bipartita.

*Recordemos que un conjunto independiente por vértices es aquél que para todo par de vértices u y v del mismo conjunto, u no es adyacente a v , ver Definición 1.1.21.

Figura 2.2. G

2.1.3. Solución

Imaginemos que en nuestra fiesta hay cuatro mujeres y cinco hombres. Para mantener el anonimato de los invitados, llamemos a las mujeres m_1, m_2, m_3 y m_4 , y a los hombres h_1, h_2, h_3, h_4 y h_5 . Las preferencias de pareja de baile de las mujeres están representadas en la gráfica que se muestra en la Figura 2.2. Por ejemplo, la mujer m_1 desea bailar con al menos uno de los hombres h_1, h_2 o h_4 en algún momento de la fiesta. Tú cómo buen anfitrión deseas asignarle a las mujeres una pareja que sea de su agrado; además, para que sea una buena fiesta te gustaría que el mayor número de mujeres estén bailando al mismo tiempo, pues cómo conoces los gustos de tus invitados sabes que a las invitadas les encanta bailar. Para lograr esto lo que haces es asignarle una mujer a un solo hombre siempre y cuando la mujer haya decidido previamente bailar con ese hombre. Evidentemente no puedes asignarle una mujer a dos hombres, ni dos mujeres a un hombre pues posiblemente el baile terminaría en una gran pelea.

Las parejas que decidiste son los pares de vértices unidos por una arista punteada en la gráfica que se muestra en la Figura 2.3. Observemos que cómo una mujer no puede bailar con dos hombres al mismo tiempo ni viceversa, entonces si m_i está bailando con h_j , es decir la arista (m_i, h_j) es una línea punteada, ninguna otra arista incidente en m_i o h_j puede estar punteada. Entonces el conjunto de aristas

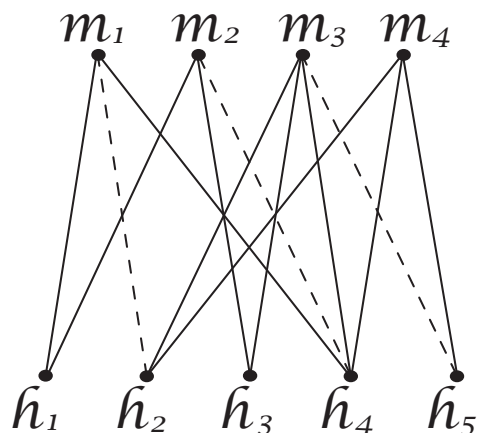


Figura 2.3. Los vértices de las aristas punteadas son las parejas de baile

punteadas es un conjunto independiente, es decir, dos aristas del mismo conjunto no inciden en un mismo vértice. Por lo tanto, por la definición 2.1.1, este conjunto es un apareamiento. Sea $M = \{(m_1, h_2), (m_2, h_4), (m_3, h_5)\}$ el apareamiento de la gráfica G que se muestra en la Figura 2.3.

En el apareamiento M hay tres mujeres que están bailando, sin embargo la mujer m_4 no tiene pareja de baile pues los hombres con los que ella desea bailar ya tienen pareja asignada. Entonces necesitamos encontrar una organización distinta de las parejas tal que esta organización tenga un mayor número de mujeres bailando, es decir, necesitamos saber si podemos encontrar un apareamiento más grande al que ya dimos. Los siguientes teoremas nos dirán si es posible agrandar el apareamiento M para conseguirle pareja de baile a m_4 , aún cuando las parejas de m_1 , m_2 y m_4 no sean las que ya asignaste.

Teorema 2.1.1 (Berge) *Sea G una gráfica y M un apareamiento. M es máximo si y sólo si G no tiene trayectorias M -aumentantes.*

Demostración. \Rightarrow] Demostraremos por contradicción. Sea M un apareamiento máximo de G tal que G contiene una trayectoria M -aumentante. Sea $T = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n})$ la trayectoria aumentante tal que $(v_i, v_{i+1}) \in M$ si i es par, cómo se muestra en la Figura 2.4.

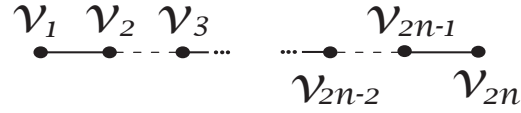


Figura 2.4. Las aristas punteadas están en el apareamiento M

Sea M' el conjunto de aristas tal que

$$M' = (M \setminus A(T)) \cup (A(T) \setminus M),$$

es decir, el conjunto M' son todas las aristas que están en la trayectoria T menos las aristas que están en M , junto con las aristas que están en M y que no están en la trayectoria T , por lo tanto las aristas $(u_i, u_{i+1}) \in M'$ si i es impar. Observemos que el conjunto M' es independiente por aristas, por lo tanto M' es un apareamiento tal que $|M'| = |M| + 1$ (por ejemplo si consideras una trayectoria con cuatro vértices la única arista que está en M , es la que va del segundo al tercer vértice, mientras que las aristas de M' son dos, la que va del primero al segundo vértice y la que va del tercero al cuarto vértice). Entonces $|M| < |M'|$, lo que contradice que M sea un apareamiento máximo. Por lo tanto, G no tiene trayectorias M -*augmentantes*.

⇐] Una vez más demostraremos por contradicción. Sea G una gráfica y sea M un apareamiento de G que no es máximo. Supongamos que G no tiene trayectorias M -*augmentes*. Entonces existe un apareamiento M' tal que $|M'| > |M|$.

Consideremos H una subgráfica de G tal que

$$H = G [(M \setminus M') \cup (M' \setminus M)],$$

es decir, H es la subgráfica de G generada por las aristas de M menos las aristas de M' junto con las aristas de M' menos las de M . Entonces a cada vértice de H le incide a lo más una arista de M y/o una arista de M' , ya que cómo M y M' son apareamientos, a un vértice de H no le pueden incidir dos aristas del mismo apareamiento. Por lo tanto el grado de cada vértice de H es uno en el caso en que a un vértice de H le incida la arista de un solo apareamiento o dos en el caso en que al vértice le incida una arista que esté en M y una arista que esté en M' , entonces las componentes conexas de H son ciclos o trayectorias que alternan aristas de M y M' .

Sabemos que el apareamiento M' tiene más aristas que el apareamiento M , es decir $|M| < |M'|$. Observemos primero que las aristas de los ciclos de H están alternadamente en M y M' , por lo tanto los ciclos son pares, entonces en los ciclos el número de aristas que pertenece a M es igual al número de aristas que pertenece a M' . Por lo tanto necesariamente en alguna de las trayectorias debe de haber más aristas de M' que de M . Entonces existe una componente conexa T en H tal que T es una trayectoria que empieza y termina en una arista de M' (con esto aseguramos que en esta trayectoria hay más aristas de M' que de M), entonces el primer y el último vértice de T no están M -saturados, es decir, T es una trayectoria M -aumentante, lo que contradice que G no tiene trayectorias aumentantes. Por lo tanto, M es un apareamiento máximo. ■

Vemos que en la gráfica G de la Figura 2.3, la trayectoria $T = (h_1, m_1, h_2, m_3, h_5, m_4)$ es una trayectoria M -aumentante, ya que es M -alternante y comienza y termina en vértices que no están M -saturados, es decir, en vértices que no tienen pareja para bailar. Por el teorema anterior, el apareamiento M no es máximo, por lo tanto existe un apareamiento M' que satura a más vértices que M . Antes de ver cuál es el apareamiento M' , vamos a ver uno de los teoremas más importantes en la Teoría de las gráficas, que está relacionado con este problema.

El siguiente teorema, descubierto por el matemático inglés Philip Hall en 1935 [19], nos dirá si es posible encontrarle pareja a todas las mujeres de la fiesta.

Teorema 2.1.2 (Hall) *Sea G una gráfica bipartita con bipartición X y Y tal que $|X| \leq |Y|$. Existe un apareamiento M que satura a cada vértice de X si y sólo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$.*

Demostración. Sea G una gráfica bipartita con bipartición $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

\Rightarrow] Sea $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$ un apareamiento que satura a cada vértice de X . Por ser M un apareamiento, $y_i \neq y_j$ para toda $i \neq j$. Sea $S \subseteq X$ tal $S = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1s}\}$, entonces existe $\{y_{11}, y_{12}, y_{13}, \dots, y_{1s}\} \subset Y$ tal que $(x_{1i}, y_{1i}) \in M$ para toda $1 \leq i \leq s < m$. Por lo tanto, cómo los vértices de S y $N(S)$ están M -saturados, a cada vértice de S le corresponde al menos un vértice en $N(S)$, entonces $|N(S)| \geq |S|$.

\Leftarrow] El regreso lo vamos a demostrar por contradicción. Supongamos que no existe un apareamiento que satura a cada vértice de X . Sea M un apareamiento máximo y sea $u \in X$ tal que u no está M -saturado. Consideremos los siguientes

conjuntos de vértices.

$$\begin{aligned} Z &= \{z \in V(G) \text{ tal que existe una } uz\text{-trayectoria } M\text{-alternante}\} \\ Q &= Z \cap Y \\ S &= Z \cap X \end{aligned}$$

Primero demostraremos que $|S \setminus \{u\}| = |Q|$. Por demostrar que $|S \setminus \{u\}| \leq |Q|$: para hacer esto demostraremos que a cada elemento de $S \setminus \{u\}$ le corresponde uno de Q bajo el apareamiento M . Sea $s \in S$, entonces $s \in Z$; por lo tanto existe una us -trayectoria M -alternante. Sea $T = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n} = s)$ dicha trayectoria. Como $u \notin M$, entonces $(x_i, x_{i+1}) \in M$ si i es un número impar. Consideremos una trayectoria $T' = T \setminus \{s\}$, T' es una trayectoria M -alternante, pues como sólo le quitamos un vértice a T , la alternancia no se afecta en T' . Además, el último vértice de T está en S y por definición ese vértice está también en X , entonces el último vértice de T' está en Y , es decir, $x_{2n-1} \in Y$, y además T' es una ux_{2n-1} -trayectoria M -alternante; por lo tanto $x_{2n-1} \in Q$. Este procedimiento se puede repetir para todo $s \in S \setminus \{u\}$. Entonces todos los vértices de $S \setminus \{u\}$ están M -apareados con un vértice de Q . Entonces a cada vértice de $S \setminus \{u\}$ le corresponde un vértice Q de bajo M ; por lo tanto, $|S \setminus \{u\}| \leq |Q|$.

Por demostrar que $|S \setminus \{u\}| \geq |Q|$. Sea $t \in Q$, entonces existe una ut -trayectoria M -alternante. Sea $T = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} = t)$ dicha trayectoria, cómo $u \notin M$, entonces $(x_i, x_{i+1}) \in M$ si i es impar. Además, M es un apareamiento máximo, entonces por el Teorema 2.1.1 G no tiene trayectorias M -aumentantes, por lo tanto T no es una trayectoria M -aumentante, por lo que T no puede empezar ni terminar en vértices no M -saturados y sabemos por hipótesis que $u \notin M$, entonces t está M -saturado. Cómo $(x_{2n-2}, t) \notin M$, ya que $2n-2$ es un número par, entonces existe $x \in X$ tal que $(t, x) \in M$. Sea $T' = T \cup \{(t, x)\}$, T' es una ux -trayectoria M -alternante, por lo tanto $x \in S$. Este procedimiento se puede repetir para toda $t \in Q$, entonces todos los vértices de Q están M -apareados con algún vértice de $S \setminus \{u\}$. Entonces a cada vértice de Q le corresponde un vértice de $S \setminus \{u\}$ bajo M ; por lo tanto, $|S \setminus \{u\}| \geq |Q|$.

cómo $|S \setminus \{u\}| \leq |Q|$ y $|S \setminus \{u\}| \geq |Q|$, entonces $|S \setminus \{u\}| = |S| - 1 = |Q|$. Ahora vamos a demostrar que $Q = N(S)$. Sabemos que $Q \subseteq N(S)$, ya que a cada elemento de Q le corresponde uno de $S \setminus \{u\}$.

Por demostrar que $N(S) \subseteq Q$, para hacerlo vamos a tomar un elemento en $N(S)$ y demostrar que ese elemento también está en Q . Sea $t \in N(S)$, por lo tanto existe $s \in S$ tal que $(t, s) \in A(G)$. Además, cómo $s \in S$, por la definición de S se sigue que $s \in Z$, entonces existe una us -trayectoria M -alternante. Sea

$T = (u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n} = s)$ dicha trayectoria tal que $(x_i, x_{i+1}) \in M$ si i es un número impar. Aquí vamos a considerar dos casos, cuando $t \in V(T)$ y cuando $t \notin V(T)$.

Supongamos primero que $t \notin V(T)$. cómo s está M -saturado en T , entonces la trayectoria $T' = T \cup \{t\}$ es una ut -trayectoria M -alternante pues la arista (s, t) no puede estar en el apareamiento ya que s está M -saturado. Por lo tanto $t \in Q$.

Ahora supongamos que $t \in V(T)$. Entonces $t = x_i$ tal $x_i \in V(T)$ para alguna $1 \leq i \leq 2n$. Consideremos la trayectoria $T_1 \subset T$ tal que $T_1 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i = t, s)$, análogamente al caso anterior, T_1 es una trayectoria M -alternante, pues la arista (s, t) no puede estar en el apareamiento, ya que s está M -saturado. Por lo tanto $t \in Q$. De los casos anteriores deducimos que $N(S) \subseteq Q$.

Entonces, ya que $|N(S)| = |Q|$ y $|Q| = |S| - 1$ se sigue que $|N(S)| = |S| - 1$, lo que contradice que $|N(S)| \geq |S|$. Por lo tanto, existe un apareamiento M tal que M satura a cada vértice de X . ■

Regresando a nuestro ejemplo de la Figura 2.2, según la contradicción del Teorema de Hall bastaría encontrar un conjunto $S \subseteq M$ tal que $|S| > |N(S)|$ para que no todas las mujeres tuviesen pareja de baile, sin embargo tal conjunto no existe en nuestra gráfica, por lo que todas las mujeres podrán bailar la misma pieza con alguien de su agrado. El apareamiento propuesto en la Figura 2.2. Está cerca de ser la solución de nuestro problema, lo único que necesitamos hacer es intercambiar algunas de las parejas, una solución donde todas las mujeres tienen una pareja de baile se muestra en la Figura 2.5.

En gráficas bipartitas con relativamente pocos vértices es fácil encontrar apareamientos que saturen al mayor número de vértices probando distintas combinaciones, sin embargo si la gráfica tiene por ejemplo cincuenta vértices y doscientas aristas la tarea se puede complicar bastante si intentamos encontrar el apareamiento a “ojo”. Para encontrar apareamientos máximos vamos a aprender a utilizar el *algoritmo Húngaro*, esta versión del algoritmo es para gráficas bipartitas sin valores asignados a vértices o aristas.

Algoritmo 2.1.1 (Algoritmo Húngaro) *Sea G una gráfica con p -vértices y q -aristas. G es bipartita con bipartición X y Y*

1. *Primero comencemos con un apareamiento M arbitrario.*
2. *a. Si M satura a cada vértice de X , ¡terminamos!.*

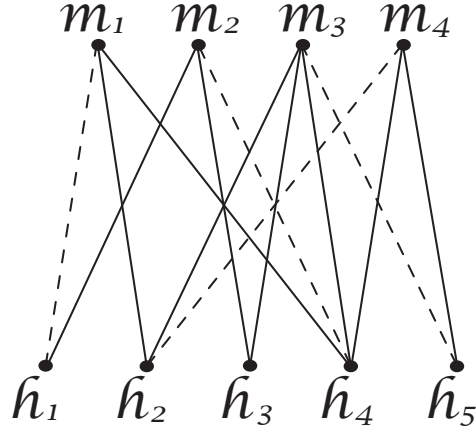


Figura 2.5. Los pares de vértices con aristas punteadas son la parejas que necesitamos

- b. Si M no satura a cada vértice de X , sea u un vértice de G no M -saturado, construyamos los conjuntos $S = \{u\}$ y $Q = \emptyset$ y continuemos con el paso 3.
3.
 - a. Si $N(S) = Q$, entonces $|N(S)| < |S|$, puesto que $|Q| = |S| - 1$, no continuamos con el algoritmo pues por la negación del Teorema de Hall no existe un apareamiento que sature a cada vértice de X .
 - b. Si $N(S) \neq Q$, sea $y \in N(S) \setminus Q$ y continuemos con el paso 4.
4.
 - a. Si y está M -saturado consideremos la arista $(y, z) \in M$, reemplazemos al conjunto S por $S \cup \{z\}$, al conjunto Q por $Q \cup \{y\}$ y nos regresamos al paso 3.
 - b. Si y no está M -saturado, entonces tenemos una trayectoria T M -aumentante, reemplazamos al apareamiento M por el apareamiento $M' = (M \setminus A(T)) \cup (A(T) \setminus M)$ y nos regresamos al paso 2.

Vamos a utilizar el *algoritmo Húngaro* para encontrar un apareamiento máximo a la gráfica que se muestra en la Figura 2.2. Sea $X = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ y $Y = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$. Aplicando el paso 1, comencemos con el apareamiento $M = \{(m_1, h_2), (m_2, h_4), (m_3, h_4)\}$ como se muestra en la Figura 2.6.

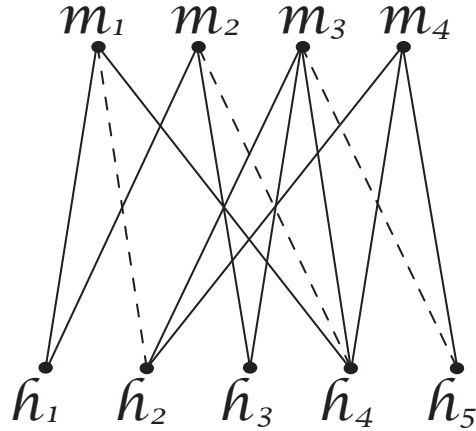


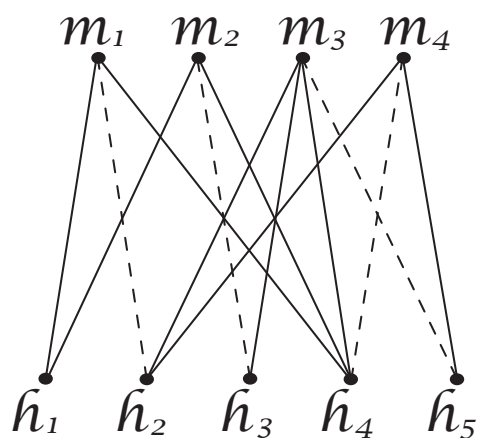
Figura 2.6. Comenzar con un apareamiento cualquiera

Como M no satura a todos los vértices de X continuamos con el paso 2b. Sea m_4 un vértice de la gráfica no M -saturado, construyamos los conjuntos $S = \{m_4\}$ y $Q = \emptyset$. como $N(S) = \{h_2, h_4, h_5\}$, entonces $N(S) \neq Q$, continuamos con el paso 3b. Escogemos al vértice $h_4 \in N(S) \setminus Q$.

Como h_4 está M -apareado con m_2 , es decir, h_4 está M -saturado, entonces por el paso 4a construimos los conjuntos $S_1 = S \cup \{m_2\} = \{m_2, m_4\}$ y $Q_1 = \{h_4\}$ y nos vamos al paso 3. Tenemos que $N(S_1) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} \neq Q_1 = \{h_4\}$, entonces por el paso 3b escogemos al vértice $h_3 \in N(S_1) \setminus Q_1$.

El vértice h_3 no está M -saturado, entonces por el paso 4b tenemos una trayectoria $T = (m_4, h_4, m_2, h_3)$ M -aumentante. Reemplazamos el apareamiento M por $M_1 = (M \setminus A(T)) \cup (A(T) \setminus M) = \{(m_1, h_2), (m_2, h_3), (m_3, h_5)\}$ y obtenemos el apareamiento que se muestra en la Figura 2.7. Nos regresamos al paso 2.

El apareamiento M_1 satura a todos los vértices de X , entonces por el paso 2a, terminamos. Pues bien, nuestra fiesta será un éxito por lo menos en lo que respecta al baile, gracias al Teorema de Hall sabemos que todas las mujeres podrán bailar la misma pieza con alguien de su agrado, evitándote la pena de explicarles a las invitadas por qué no iba a ser posible lograr su requerimiento, y con la ayuda del *algoritmo Húngaro* les puedes decir a las damas quién es su pareja de baile esta noche.

Figura 2.7. Reemplazamos M por M_1

Otro tipo de aplicaciones en las que se ocupan apareamientos, son: si tienes cierto número de empleados y trabajos que les gustaría realizar, mediante un apareamiento puede ser que encuentres la manera de asignarle a cada empleado el trabajo que le gusta. O si haces una fiesta y sólo tienes un determinado número de bebidas, si conoces los gustos de tus amigos, puedes encontrar la forma de asignarle cada bebida a un amigo de tal forma que durante la fiesta todos beban lo que les gusta. En fin, hay una infinidad de cosas que ocupan apareamientos. Está en ti saber en qué momento aplicarlo.

CAPÍTULO 3

Gráficas eulerianas

Las gráficas eulerianas son uno de los temas más bonitos de la Teoría de las gráficas, además de tener el honor de ser el primer tema que estudió esta teoría.

3.1. Fichas de dominó

En una noche de ocio nos surge el extraño interés de saber si con un dominó es posible encontrar una sucesión de fichas que comience y termine en la misma ficha, utilizando las veintiocho fichas del dominó. Obviamente una ficha está seguida de otra si y sólo si los números de ambas fichas que quedan cara a cara coinciden.

Historia

Las gráficas eulerianas es quizá el primer tema que se trató en la Teoría de las gráficas, aunque en su tiempo esta teoría ni siquiera existía. Leonhard Euler fue el primer matemático, de quien se tiene registro, que modeló un problema de la vida cotidiana utilizando gráficas. A este problema se le conoce hoy en día con el nombre de: *Los siete puentes de Königsberg*. Vamos a ver cómo este sencillo pero importante problema dio origen a la Teoría de Gráficas.

En el siglo XVIII, en el poblado de Königsberg^{*}, ubicado en la Prusia oriental, había siete puentes que conectaban la ciudad y dos islas, divididas por el río Pregel (ver Figura 3.1). Los “königsberianos” se preguntaban si era posible encontrar una ruta que recorriera los siete puentes exactamente una vez, y que empezara

^{*}Hoy en día a esta región se le conoce con el nombre de Kaliningrado, en Rusia.

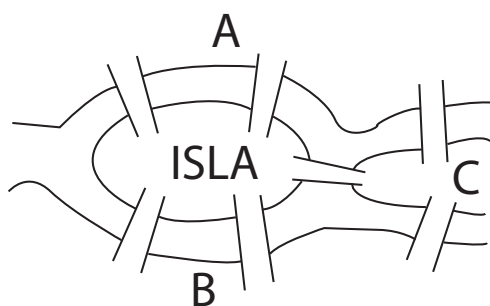


Figura 3.1. *Los siete puentes de Königsberg*

y terminara en el mismo lugar. Cuenta la leyenda que en las tardes de domingo los lugareños caminaban los siete puentes intentado encontrar dicho recorrido. Por alguna razón este problema llegó a los oídos de Euler, y en Agosto 26 de 1735, demostró ante los miembros de la *Petersburg Academy* que era imposible encontrar dicho camino. Un año después su demostración fue publicada en el artículo *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* (La solución a un problema relacionado con la geometría de posición) [1].

Lo que hizo Euler fue modelar el problema con una gráfica*. A cada pedazo de tierra le asignó un vértice y unió las parejas de vértices con una arista siempre y cuando hubiese un puente que conectara los pedazos de tierra (ver Figura 3.2). Este modelo fue de gran ayuda para Euler, pues eliminaba todos los elementos que no tenían nada que ver con el problema, como casas, calles, etcétera, y le proporcionaba una vista general del mismo. Euler notó que en su modelo todos los vértices estaban unidos por un número impar de aristas, es decir, en cada pedazo de tierra había un número impar de puentes. Después demostró que para recorrer los siete puentes exactamente una vez empezando y terminando en el mismo lugar era necesario entrar y salir siempre de cada pedazo de tierra, lo cual era imposible, ya que había un número impar de puentes.

Euler también demostró que si el número de aristas que incidían en cada vértice era par, entonces siempre era posible encontrar un camino que recorriera todas las aristas una vez, empezando y terminando en el mismo vértice, más adelante nosotros también demostraremos este hecho. Tal fue su descubrimiento, que ahora a este tipo de caminos se le conoce con el nombre de caminos eulerianos. Si te interesa conocer el artículo original de los puentes de Königsberg, puedes

*En realidad es una multigráfica

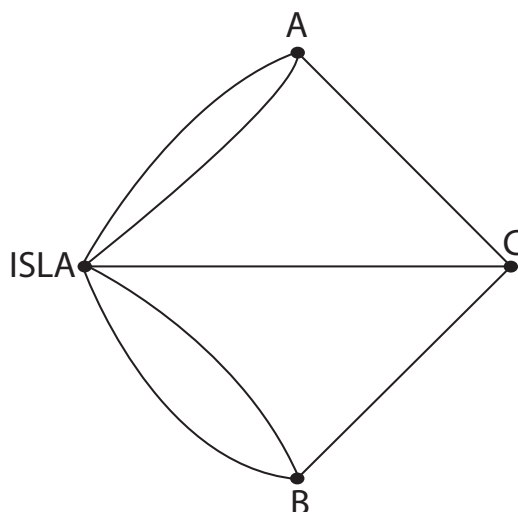


Figura 3.2. La gráfica que modela los puentes de Königsberg

encontrar una traducción al inglés en el libro de Biggs, Lloyd and Wilson, *Graph Theory/1736-1936*

Si alguna vez tienes la oportunidad de ir a Kaliningrado (lo que antiguamente se llamaba Königsberg) en Rusia, encontrarás que ya sólo existen tres de los siete puentes originales, aunque sólo dos son de la época de Euler, el otro fue reconstruido por los alemanes en 1935. Dos de los puentes fueron destruidos por un bombardeo británico durante la segunda guerra mundial. Y los otros dos fueron demolidos para construir una autopista. [38]

3.1.1. Teoremas y definiciones

Definición 3.1.1 Sea G una gráfica. Un paseo cerrado euleriano P es aquél que recorre todas las aristas de una gráfica, $A(P) = A(G)$.

Definición 3.1.2 Una gráfica G es euleriana si y sólo si contiene un paseo cerrado Euleriano.

Definición 3.1.3 Sea G una gráfica. Un ciclo hamiltoniano C es aquél que recorre todos los vértices de una gráfica, $V(C) = V(G)$.

Definición 3.1.4 Una gráfica G es hamiltoniana si y sólo si contiene un ciclo hamiltoniano.

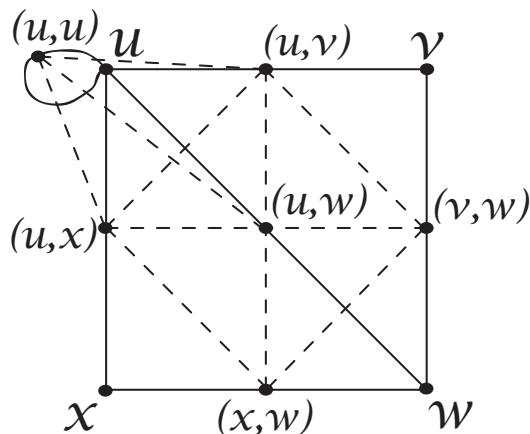


Figura 3.3. Una forma fácil de construir a $L(G)$. En donde G está en negro y $L(G)$ en punteadas

Definición 3.1.5 Sea G una multigráfica. Obtenemos la multigráfica de líneas $L(G)$ de la siguiente manera:

- Para todo $(u, v) \in A(G)$, $(u, v) \in V(L(G))$, es decir, las aristas de G son los vértices de $L(G)$.
- Para todo $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq A(G) = V(L(G))$, (u, v) es adyacente a (v, w) en $L(G)$, es decir, si dos aristas en G inciden en un mismo vértice, los vértices correspondientes a esas aristas en $L(G)$ son adyacentes.

Una forma fácil de construir la multigráfica de líneas de una gráfica G es: poner sobre las aristas de G los vértices de $L(G)$ y después hacer las adyacencias necesarias en $L(G)$, como se muestra en la Figura 3.3. Sin embargo, es importante recalcar que este par de multigráficas se representan en dibujos independientes, como en la Figura 3.4.

Teorema 3.1.1 Sea G una multigráfica conexa. G es euleriana si y sólo si para todo $u \in V(G)$ $\delta(u) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea G con p -vértices y q -aristas.

\Rightarrow] Como G es euleriana, existe un paseo cerrado P que empieza y termina en un vértice v , tal que $A(P) = A(G)$. Sea $u \in V(G)$ tal que u no es ni el primero ni el último vértice del paseo. Cada vez que el paseo P entra por alguna arista al vértice

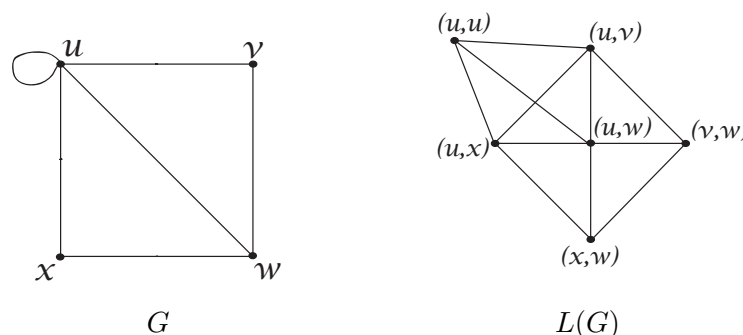


Figura 3.4.

u , sale por alguna otra, ya que $A(P) = A(G)$, el número de entradas y salidas en P a través de alguna arista al vértice u , es igual al grado de u , además el número de entradas es igual al número de salidas, por lo tanto el grado de u es par. Lo mismo ocurre con el vértice v , sólo que al inicio del paseo sale por primera vez por alguna arista y el final del paseo regresa por última vez por alguna otra arista, por lo tanto el grado de v es par, entonces para todo $v \in V(G)$, $\delta(u) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

\Leftarrow] Demostraremos la afirmación por inducción sobre q .

Si q es 1 no puede pasar que todos los vértices de mi multigráfica tengan grado par. El teorema se cumple si q es 2 (se deja al lector demostrar este hecho).

Si $q = 3$, como cada vértice de G tiene grado par, entonces la única multigráfica que cumple estas condiciones es K_3 . Sean $u, v, w \in V(K_3)$; el paseo $P = ((u, v), (v, w), (w, u))$ es un paseo euleriano, entonces K_3 es euleriana.

Hipótesis de inducción. Sea $G' \subset G$ con p -vértices y q' -aristas, tal que $q' < q$. Si para todo $u \in V(G')$, $\delta(u)$ es par, entonces G' es euleriana.

Para demostrar que G es euleriana si $q > 2$, vamos a construir a partir de G una multigráfica G' con menos aristas que G , tal que cumpla la hipótesis de inducción, y vamos a concluir que como $G' \subseteq G$ contiene un paseo euleriano, entonces G también posee el paseo euleriano.

Como G es conexa y $q > 2$, entonces existen $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$ tales que $\{(v, w), (v, u)\} \subset A(G)$. Sea G' con $V(G) = V(G')$ y $A(G') = \{(u, w)\} \cup \{A(G) \setminus \{(v, w), (v, u)\}\}$. G' puede o no puede ser conexa.

Si G' es conexa. Entonces $\delta_{G'}(v) = \delta_G(v) - 2$, $\delta_{G'}(u) = \delta_G(u) - 1 + 1$ y $\delta_{G'}(w) = \delta_G(w) - 1 + 1$, y los vértices restantes de G' tienen el mismo grado que en G , por lo tanto para todo $x \in V(G')$ $\delta_{G'}(x)$ es par. Entonces, por hipótesis de inducción, G' es euleriana con paseo cerrado P' tal que $(w, u) \in A(P')$. Sea $P' = (w, u, u_1, u_2, \dots, u_n = w)$.

Sea P un nuevo paseo tal que $V(P) = V(P')$, $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup \{A(P') \setminus (w, u)\}$ y $P = (w, v, u, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n = w)$. Como G' es euleriana $A(G') = A(P')$, entonces $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup \{A(G') \setminus (w, u)\} = A(G)$. Por lo tanto G es euleriana.

Si G' no es conexa. Sean G_1 y G_2 componentes conexas de G' tal que $v \in G_1$ y $u, w \in G_2$. Observemos que G_1 y G_2 son las únicas componentes conexas de G' , ver que esto se cumple no es tan difícil, por lo que se deja al lector.

Supongamos que $|V(G_1)| = 1$ como $G_2 \subset G'$ y $\delta_{G_2}(u) = \delta_G(u) - 1 + 1$ y $\delta_{G_2}(w) = \delta_G(w) - 1 + 1$, y los vértices restantes de G_2 tienen el mismo grado que en G , se sigue que para todo $x \in V(G_2)$, $\delta_{G_2}(x)$ es par. Por hipótesis de inducción G_2 es euleriana con paseo cerrado $P_2 = (w, u, u_1, u_2, \dots, u_n = w)$.

Sea P un paseo tal que $V(P) = V(P_2) \cup \{v\}$, $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup \{A(P_2) \setminus (w, u)\}$ y $P = (w, v, u, u_1, u_2, \dots, u_n = w)$. Como G_2 es euleriana $A(G_2) = A(P_2)$, entonces $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup \{A(G_2) \setminus (w, u)\} = A(G)$. Por lo tanto G es euleriana.

Supongamos que $|V(G_1)| \neq 1$. Como $G_1 \subset G'$, $G_2 \subset G'$ y $\delta_{G_1}(v) = \delta_G(v) - 2$, $\delta_{G_2}(u) = \delta_G(u) - 1 + 1$ y $\delta_{G_2}(w) = \delta_G(w) - 1 + 1$, y los vértices restantes de G_1 y G_2 tienen el mismo grado que en G , tenemos que para todo $x \in V(G_i)$, $\delta_{G_i}(x)$ es par $i = \{1, 2\}$. Por hipótesis de inducción, G_1 y G_2 son eulerianas con paseos cerrados $P_1 = (v, v_1, v_2, \dots, v_n = v)$ y $P_2 = (w, u, u_1, u_2, \dots, u_m = w)$ respectivamente.

Sea P un paseo tal que $V(P) = V(P_1) \cup V(P_2)$, $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup A(P_1) \cup \{A(P_2) \setminus (w, u)\}$ y $P = (v, v_1, v_2, \dots, v_n = v, u, u_1, u_2, \dots, u_m = w, v)$. Como G_1 y G_2 son eulerianas $A(G_1) = A(P_1)$ y $A(G_2) = A(P_2)$ respectivamente, entonces $A(P) = \{(v, w), (v, u)\} \cup A(G_1) \cup \{A(G_2) \setminus (w, u)\} = A(G)$. Por lo tanto G es euleriana. ■

Teorema 3.1.2 *Sea G una multigráfica conexa. G es euleriana si y sólo si $L(G)$ es hamiltoniana*

Demostración. Antes de continuar vamos a hacer una aclaración. Por razones prácticas en esta prueba vamos a describir a los paseos de la gráfica con sus aristas, en vez de sus vértices, que era como estábamos acostumbrados a hacerlo.

\Rightarrow] Como G es euleriana, existe un paseo cerrado $P = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = a)$ tal que $A(P) = A(G)$ y $a_i \in A(G)$ para toda $i = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Por definición sabemos que las aristas de G corresponden a los vértices de $L(G)$. Entonces $a_i \in V(L(G))$. Si consideramos a las aristas a_i y a_{i+1} de G , éstas concurren en un vértice en G , pues son aristas consecutivas en el paseo P . Entonces los vértices de $L(G)$ a_i y a_{i+1} son adyacentes en $L(G)$. Por lo tanto $C = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = a)$ es un ciclo en $L(G)$. Además, como P contiene cada arista de G exactamente una vez, entonces C contiene a cada vértice de $L(G)$ exactamente una vez. Por lo tanto, por las definiciones 3.1.3 y 3.1.4, $L(G)$ es hamiltoniana.

\Leftarrow] De manera análoga, como $L(G)$ es hamiltoniana, contiene un ciclo $C = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = a)$ tal que $V(C) = V(L(G))$ y $a_i \in V(L(G))$ para toda $0 \leq i \leq n$. La adyacencia entre vértices consecutivos en C implica que son aristas consecutivas en la secuencia $P = (a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = a)$, es decir, las aristas a_i y a_{i+1} de G concurren en un mismo vértice en G ; entonces P es un camino. Como C contiene todos los vértices de $L(G)$ exactamente una vez, entonces P contiene a todas las aristas de G exactamente una vez. Por las definiciones 3.1.1 y 3.1.2 G es euleriana. ■

3.1.2. Modelo

Existen al menos dos formas de modelar un dominó utilizando gráficas, una forma es asociarle a cada ficha un vértice, por ejemplo la ficha (6,6) sería el vértice $v = (6, 6)^*$, y dos vértices de la gráfica son adyacentes si las fichas de dominó asociadas con estos vértices se pueden acomodar de acuerdo a las reglas del juego. Por ejemplo, como puedes acomodar la ficha (6,0) junto con la (0,2), entonces el vértice $u = (6, 0)$ es adyacente al vértice $v = (0, 2)$.

Así la gráfica resultante tiene 28 vértices, uno por cada ficha, y 147 aristas. Antes de continuar, vamos a demostrar que la gráfica tiene 147 aristas, para esto utilizaremos el Teorema 1.1.1, de la página 4.

Veamos que a cada “mula” le podemos colocar seis fichas distintas, todas las

*Nota que la ficha (a, b) es la misma que la ficha (b, a) y por lo tanto tienen asociado el mismo vértice

que tengan el mismo número que la “mula”, entonces cada vértice que esté asociado con una “mula” es adyacente a seis vértices distintos. A las fichas que no son “mulas” les podemos colocar doce fichas distintas, seis de un número y seis del otro, entonces los vértices asociados a esta fichas son adyacentes a doce vértices distintos. Como hay siete “mulas” en el dominó, entonces hay siete vértices de grado seis y como hay veintiún fichas que no son “mulas”, entonces hay veintiún fichas de grado doce. Por el Teorema 1.1.1 de la pagina 4 sabemos que el número de aristas de la gráfica es

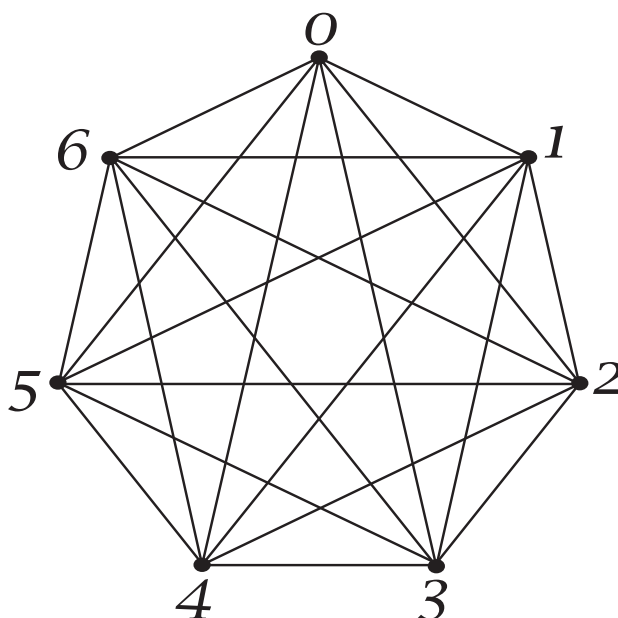
$$\frac{(7 \times 6) + (21 \times 12)}{2} = \frac{294}{2} = 147.$$

Llamemos G a la gráfica que representa al dominó. Si queremos encontrar una sucesión de fichas que comience y termine en la misma ficha utilizando las veintiocho fichas del dominó, entonces necesitamos encontrar en G un ciclo que pase por todos los vértices, es decir necesitamos encontrar un ciclo Hamiltoniano, pero encontrar dicho camino en una gráfica tan grande no parece una tarea fácil, puede que hasta sea más fácil intentarlo con la fichas, mejor ataquemos el problema desde un enfoque un poco diferente.

En vez de asociarles los vértices a las fichas mejor vamos a asociarles las aristas de la gráfica a las fichas. Esta manera de hacer las cosas es un poco más natural, pues las aristas tienen dos extremos distintos, como las fichas de dominó. Ahora veamos qué gráfica es la que mejor se ajusta a un dominó. Sea $G = K_7$ una gráfica completa como se muestre en la Figura 3.5, con sus vértices numerados del 0 al 6. Esta gráfica es un modelo fiel del dominó, pues están representadas todas las fichas y las reglas del juego se mantienen. Fíjate que si tenemos las fichas (a, b) y (b, c) , estas fichas están representadas en la gráfica por la pareja de aristas $\{(a, b), (b, c)\} \in A(K_7)$, como puedes colocar una ficha seguida de la otra, las aristas correspondientes a estas fichas inciden en el vértice b . Por ejemplo, la porción de juego con las fichas $(3,2)$ y $(4,3)$ se representa gráficamente en las aristas punteadas de la Figura 3.6. Las únicas fichas que no están representadas en K_7 son las “mulas”, pero esto no es ningún problema, pues son lazos en todos los vértices de la gráfica, y como veremos a continuación no interfieren en la solución del problema.

3.1.3. Solución

Si queremos resolver el problema es suficiente con encontrar un paseo cerrado en K_7 que pase por todas las aristas, ya que como cada arista representa una ficha,

Figura 3.5. K_7

entonces el orden en que aparezcan aristas en el paseo es el orden en el que debemos de colocar las fichas.

Necesitamos saber si K_7 contiene un paseo euleriano, observemos primero que para toda $v \in V(K_7)$, $\delta(v) = 6$, por el Teorema 3.1.1 K_7 es euleriana, entonces tiene un paseo cerrado euleriano, por lo tanto el problema tiene solución. La solución que se muestra en la Figura 3.7 corresponde al paseo:

$$P : (0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 0, 0, 2, 4, 6, 1, 1, 3, 5, 5, 0, 3, 6, 6, 2, 5, 1, 4, 0) \quad (3.1)$$

Las parejas de números repetidos consecutivos en P , el segundo de éstos indica que en ese lugar va una “mula”, por ejemplo, la porción del paseo $P' : (4, 6, 1, 1, 3, 5, 5, 0, 3)$ corresponde a las fichas de color blanco en la Figura 3.7.

Regresemos al modelo del dominó donde cada vértice de la gráfica es un ficha y veamos cómo éste se relaciona con el que dimos en párrafos anteriores. Es de esperarse que como ambos modelos representan la misma cosa, entonces si podemos encontrar la solución en un modelo, ésta nos dirá cómo encontrar la solución en el otro modelo. Vimos que para resolver el problema con el primer modelo necesitábamos encontrar en su gráfica un ciclo hamiltoniano, sin embargo esto parecía

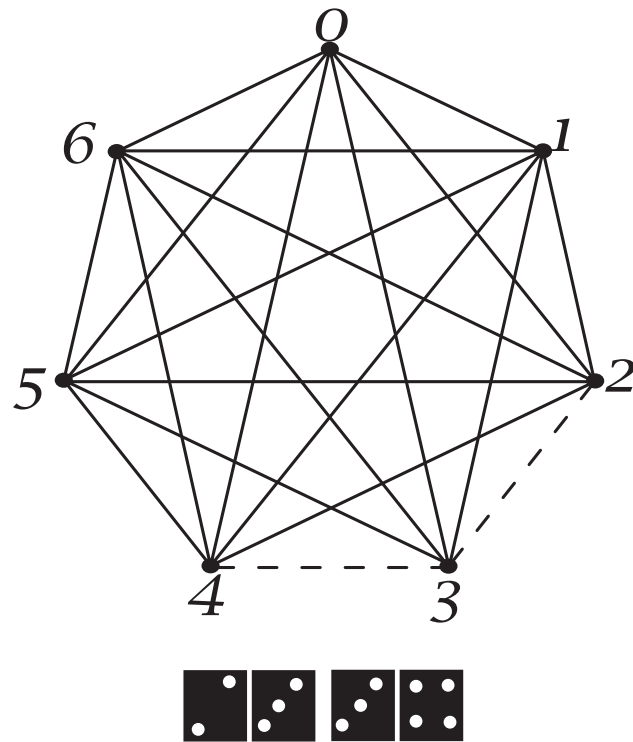


Figura 3.6. Representación gráfica de las fichas

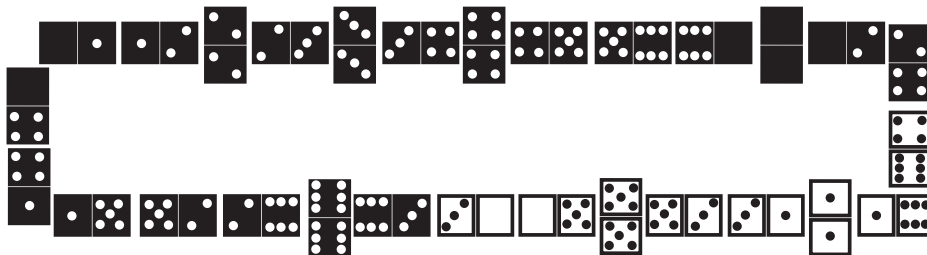


Figura 3.7. Solución

ser una tarea no muy fácil. A continuación veremos cómo resolver este problema.

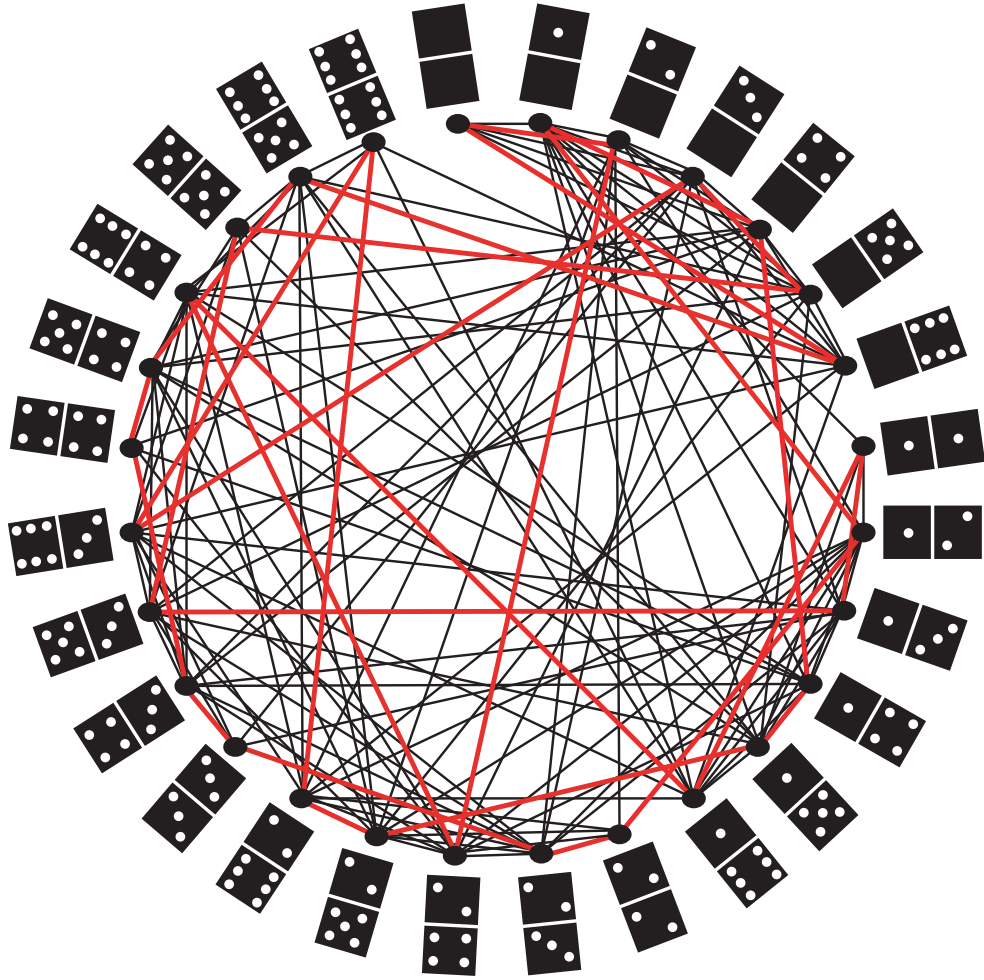
Primero definamos la gráfica K'_7 , que es la completa con siete vértices y lazos en todos sus vértices. En el primer modelo (en el que cada ficha es un vértice) es interesante ver que la gráfica generada a partir de este modelo es la gráfica de líneas del segundo modelo, es decir, si G es la gráfica del primer modelo y K'_7 la del segundo, entonces $G = L(K'_7)$. Esta afirmación es bastante sencilla de demostrar, por lo que se deja al lector (Hint: Fíjate que los vértices del primer modelo son las aristas del segundo). Entonces por el Teorema 3.1.2, G es hamiltoniana. Ya que G es hamiltoniana, entonces es posible encontrar en G un ciclo hamiltoniano. La gráfica que se obtiene de modelar el problema asociando los vértices de una gráfica a las fichas de dominó se muestra en la Figura 3.8, donde las aristas en rojo muestran el ciclo hamiltoniano que está asociado a la solución que se muestra en la Figura 3.7.

Por último, veamos si con cualquier dominó es posible hacer dicho camino de fichas, por ejemplo con un dominó cubano. El dominó cubano consta de cuarenta y cinco fichas, que van de la “mula” de ceros a la de nueves. Entonces la gráfica que mejor modela el problema es K_{10} , sin embargo esta gráfica no es euleriana (¿por qué?, Hint: revisa los teoremas del capítulo) por lo tanto no contiene un paseo euleriano, entonces no es posible hacer una sucesión de fichas que empiece y termine en la misma ficha utilizando todas las fichas del dominó.

La siguiente propiedad nos dirá para qué dominós es posible encontrar la sucesión de fichas.

Propiedad 3.1.1 *Si tenemos un dominó cuya mula más alta es un número par, entonces es posible encontrar una sucesión de fichas que empiece y termine en la misma ficha utilizando todas las fichas del dominó.*

Demostración. La demostración sale casi como consecuencia directa de uno de los teoremas de la sección, por lo que es un buen ejercicio para que lo demuestres.

Figura 3.8. $G = L(K_7)$

CAPÍTULO 4

Coloración e independencia

En este capítulo resolveremos el problema de las ocho reinas, *cuadrados latinos* y por último el juego del *sudoku*. En los tres casos veremos cómo la coloración de una gráfica ayudará a resolver los problemas. Aunque en el primero utilizaremos la coloración por vértices y en los siguientes dos utilizaremos la coloración por aristas.

4.1. Independencia y coloración por vértices

4.1.1. El problema de las ocho reinas

En un tablero de ajedrez, ¿cuál es el máximo número de reinas que se pueden colocar tal que ninguna reina ataque a otra?

Historia

Este problema fue originalmente planteado por el ajedrecista alemán Max Bezzel en 1848 [27]. En 1850 Franz Nauck generalizó el problema para n reinas en tableros de $n \times n$ y fue el primero en dar una solución al problema planteado por Bezzel. Durante los siguientes años, muchos matemáticos lo intentaron resolver, incluido Carl F. Gauss. En 1874, S. Gunther propuso un método para encontrar soluciones al problema mediante determinantes, que años después fue refinado por el matemático inglés J. W. L. Glaisher. En años posteriores se probó que el problema tiene noventa y dos soluciones diferentes, de las cuales únicamente doce son únicas, las demás son rotaciones en el tablero de alguna de éstas. [12]

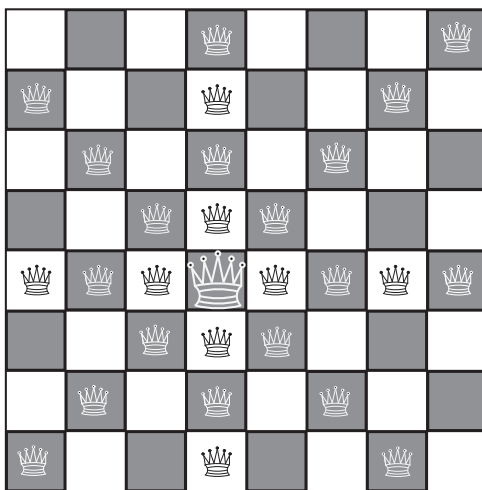


Figura 4.1. Movimientos de la reina

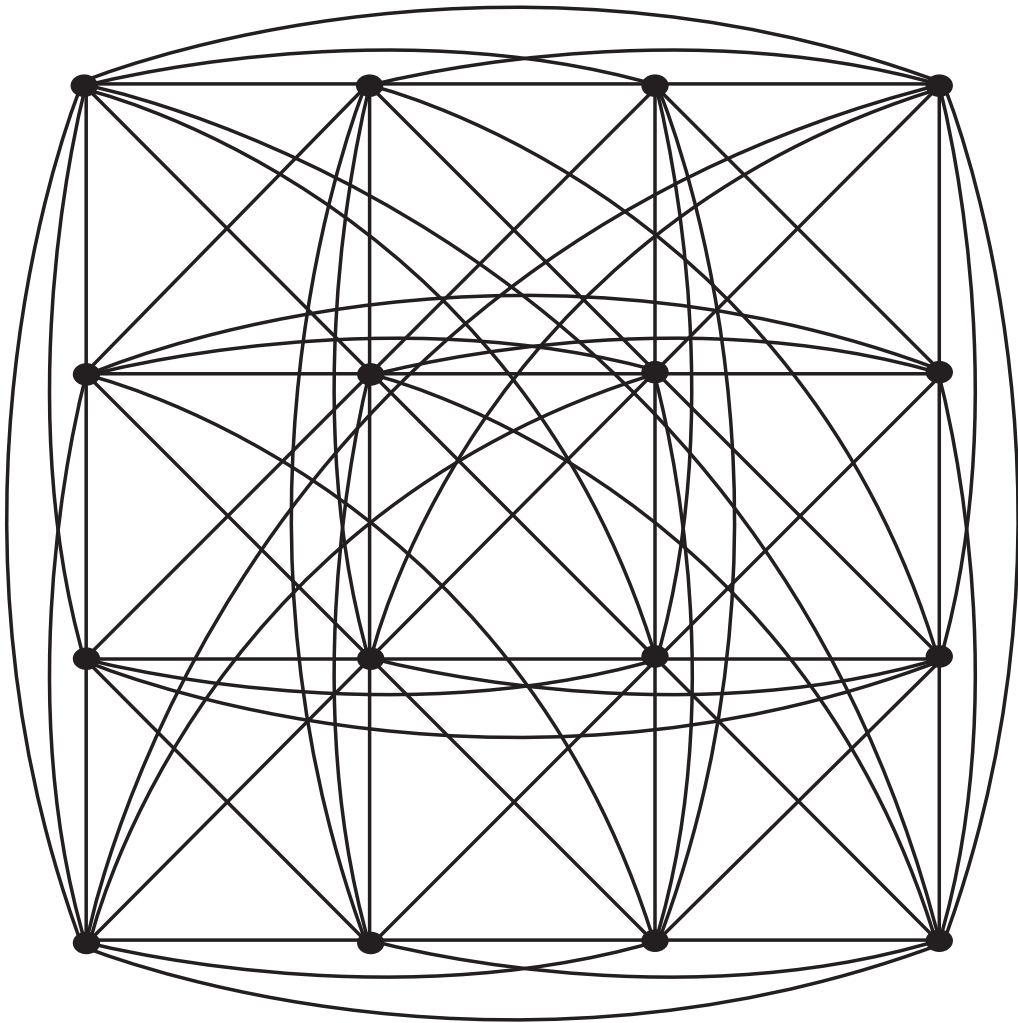
4.1.2. Definiciones

Definición 4.1.1 Sea A un subconjunto independiente de G . A es de cardinalidad máxima si $|A| > |A'|$ para todo $A' \subseteq V(G)$ tal que A' es independiente. Definimos y denotamos al número de independencia de G por $\beta(G) = |A|$.

4.1.3. Modelo

Representemos el problema con una gráfica. Asociamos cada casilla del tablero a un vértice de una gráfica G . Un vértice u es adyacente a un vértice v si y sólo si las casillas u y v se encuentran en las misma fila, columna o diagonal del tablero. Observemos que las adyacencias corresponden a todos los movimientos posibles de la reina. En caso de que nunca hayan jugado ajedrez, una reina se puede mover en un turno las casillas que desee hacia la izquierda, derecha, arriba, abajo o en diagonal como se muestra en la Figura 4.1.

Si modelamos un tablero normal de ajedrez de 8×8 , la gráfica resultante tendría sesenta y cuatro vértices y seiscientos setenta y dos aristas. El dibujo de esta gráfica es demasiado confuso, por lo que modelaremos el problema para un tablero de 4×4 . Evidentemente el resultado del problema será afectado, sin embargo el método para encontrar la solución es el mismo, no importando el tamaño del tablero en el que te encuentres. Aclarado el punto, la gráfica G que modela los movimientos de una reina en un tablero de 4×4 se muestra en la Figura 4.2.

Figura 4.2. G

4.1.4. Solución

La generalización del problema es: “en un tablero de ajedrez de $n \times n$ es posible acomodar n reinas de manera tal que ninguna reina ataque a otra”. En el caso que vamos a tratar, necesitamos acomodar cuatro reinas en un tablero de 4×4 . Observemos que si acomodamos una reina en el cuadro correspondiente al vértice (i, j) , como ese vértice es adyacente a los vértices que están en la columna i , en la fila j y en las diagonales que pasen por ese vértice, significa que la reina ataca a todos los cuadros correspondientes a los vértices mencionados. Entonces no nos es permitido acomodar ninguna reina en alguna de estas casillas. Si queremos que dos o más reinas no se ataquen entre sí, necesitamos encontrar en la gráfica G , de la Figura 4.2, un conjunto de vértices independiente (vértices no adyacentes entre sí), pues esto nos asegura que si colocamos las reinas en alguno de estos vértices, como no son adyacentes entre sí, las reinas no se atacarán. Por ejemplo, los vértices $(4, 1)$ y $(3, 4)$ no son adyacentes entre sí, entonces si colocamos una reina en cada una de estas casillas podemos estar seguros de que las reinas no se atacarán.

Queremos encontrar en G un conjunto independiente de vértices de cardinalidad máxima. Encontrar dichos conjuntos en general no es una tarea sencilla. En 1983 Garey y Johnson demostraron que el problema de encontrar conjuntos independientes de cardinalidad máxima pertenece a la clase de complejidad *NP-completo* [35], es decir que los algoritmos conocidos hasta el momento necesitan un número de pasos inmensamente grande, para resolver el problema y que en general los algoritmos no lo resuelven de una manera muy eficaz. Los problemas *NP-completos* son de los más complejos dentro de la teoría de la computación conocidos hasta el momento.

Vamos a resolver el problema en dos partes, aunque ninguna de éstas es la más efectiva si consideramos tableros suficientemente grandes. Sin embargo ambas nos ayudarán a esclarecer los mecanismos que se utilizan para resolver el problema. En la primera parte intentaremos acotar el número de reinas que se pueden acomodar en el tablero (sabemos que necesitamos cuatro reinas, pero imaginemos que no conocemos la respuesta) y en la segunda parte elaboraremos un algoritmo que nos ayude a colocar las reinas en el tablero.

4.1.5. Coloración y complementos

Primero vamos a meternos un poco con la teoría de los colores en gráficas, de lo que se trata básicamente es de asignarle colores a los vértices de una gráfica cualquiera. En los párrafos siguientes vamos a ver cómo se relaciona la coloración

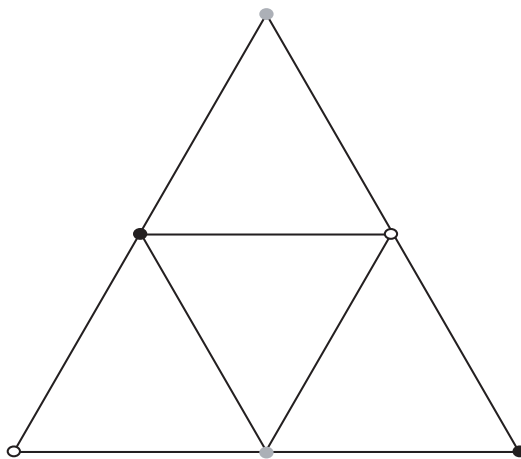


Figura 4.3. Buena coloración

de una gráfica con el conjunto independiente de cardinalidad máxima, pero antes necesitamos introducir unas cuantas definiciones.

Definición 4.1.2 Sea G una gráfica. Una coloración por vértices en G es asignarle a cada vértice de G un color.

Definición 4.1.3 Sea G una gráfica. Una buena coloración por vértices en G es asignarle a cada vértice de G un color, de manera tal que vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Definición 4.1.4 Sea G una gráfica. El número cromático de G es el mínimo número de colores necesarios para obtener una buena coloración por vértices en G . Se denota por $\chi(G)$.

En la gráfica G que se muestra en la figura 4.3 se necesitan al menos tres colores distintos para dar una buena coloración por vértices, pues con dos colores habría dos vértices adyacentes con el mismo color.

El siguiente teorema nos va a ayudar a acotar $\beta(G)$ con $\chi(G)$, y después encontraremos una cota para $\chi(G)$.

Teorema 4.1.1 Para toda gráfica G con p -vértices se cumple que,

$$\beta(G) \leq p - \chi(G) + 1.$$

Demostración. Sea S un conjunto independiente de cardinalidad máxima de orden $\beta(G)$ y coloreemos a los vértices de S con el color a . Consideremos la gráfica $G - S$, coloreemos esta gráfica con $p - \beta(G)$ colores. Esta coloración de $G - S$ es una *buena coloración*, ya que estamos usando un color por cada vértice de $G - S$ (por lo que vértices adyacentes no tienen el mismo color). Por lo tanto, $\chi(G - S) \leq p - \beta(G)$. Entonces si coloreemos G con $p - \beta(G) + 1$ colores, obtenemos una *buena coloración* de G (el por qué de esta afirmación se deja como ejercicio para el lector), por lo tanto,

$$\chi(G) \leq p - \beta(G) + 1.$$

Despejando $\beta(G)$ obtenemos el resultado deseado.

$$\beta(G) \leq p - \chi(G) + 1. \quad \blacksquare$$

A continuación daremos una cota superior para $\chi(G)$.

Teorema 4.1.2 *Para toda gráfica G se cumple que,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Demostración. Sea G una gráfica tal que $\chi(G) = n$. Quitemos vértices a G hasta obtener una subgráfica H tal que $\chi(H) = n$ pero $\chi(H - v) = n - 1$ para toda $v \in V(H)$. Siempre es posible encontrar una subgráfica H que cumpla estas condiciones, ya que G es finita y por lo menos llegaríamos al caso en que H es isomorfa a K_2 , en este caso $\chi(H) = 2$ y $\chi(H - v) = 1$ para algún $v \in V(H)$

Consideremos $z \in V(H)$ y la gráfica $H - z$ sabemos que $\chi(H - z) = n - 1$. Sean V_1, V_2, \dots, V_{n-1} subconjuntos independientes de vértices de $H - z$ tales que cada V_i tiene asignado el color i para toda $1 \leq i \leq n - 1$. Tenemos que z es adyacente en H a al menos un vértice de cada V_i , pues en caso contrario, si z no fuera adyacente a ningún vértice de algún conjunto V_i , entonces podríamos asignarle a z el color i y obtenemos una *buena coloración por vértices* de H con $(n - 1)$ -colores, lo que contradice que $\chi(H) = n$. Por lo tanto, z es adyacente en H a al menos un vértice de cada V_i . Entonces $\delta_H(z) \geq n - 1$ y las siguientes desigualdades se cumplen

$$\Delta(G) \geq \delta_G(z) \geq \delta_H(z) \geq n - 1,$$

es claro que $\delta_G(z) \geq \delta_H(z)$, pues como $H \subset G$, puede pasar que a z le incidan más aristas en G que en H . Para finalizar, como $\chi(G) = n$, si despejamos de la desigualdad anterior obtenemos

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$



Con este par de problemas vamos a acotar $\beta(G)$. Si sustituimos la desigualdad del Teorema 4.1.1 en la desigualdad del Teorema 4.1.2 obtenemos

$$\beta(G) \leq p - (\Delta(G) + 1) + 1 = p - \Delta(G). \quad (4.1)$$

Ahora vamos a dar una cota inferior para $\beta(G)$ utilizando el complemento de una gráfica.

Recordemos qué es el complemento de una gráfica. Sea G una gráfica cualquiera, si u y v no son adyacentes en G , entonces u y v son adyacentes en G^c . Entonces si tenemos un conjunto independiente de n vértices en G , ese mismo conjunto en G^c va a generar una subgráfica completa con n vértices, pues si n vértices no son adyacentes en G , entonces esos vértices en G^c son adyacentes entre sí. Por lo tanto los vértices que forman el conjunto independiente de cardinalidad máxima en G son los mismos vértices que forman la gráfica completa más grande que se puede encontrar en G^c .

Encontrar la gráfica completa más grande contenida en G o un conjunto independiente de cardinalidad máxima son problemas igual de complejos, pues en el fondo son lo mismo y en ambos casos la teoría que se conoce hasta el momento es poca. El teorema que se presenta a continuación relaciona ambos temas, pero antes (como es costumbre) un par de definiciones.

Definición 4.1.5 *Sea G un gráfica. Un clan de G es una subgráfica completa de cardinalidad máxima contenida en G .*

Definición 4.1.6 *Al orden de un clan se le denota por $\omega(G)$.*

En la gráfica G que se muestra en la figura 4.4, las aristas pteadas forma un *clan* en G , pues G no contiene gráficas completas con más de tres vértices.

Teorema 4.1.3 *Sea G una gráfica. Los vértices que forman el conjunto independiente de cardinalidad máxima de G son los mismos vértices que forman un clan en G^c . En términos matemáticos*

$$\beta(G) = \omega(G^c)$$

El esbozo de la demostración se menciona en los párrafos anteriores, la prueba formal se deja al lector.

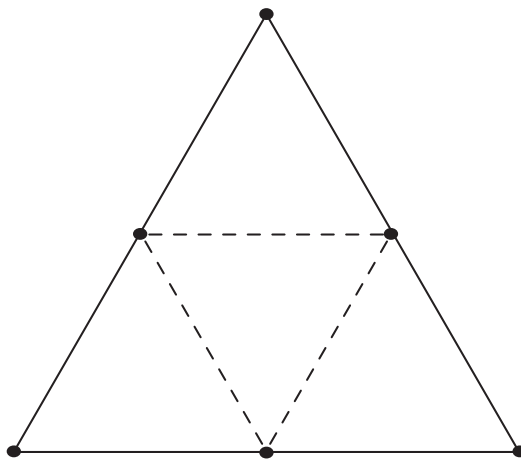


Figura 4.4. Las aristas punteadas son un *clan* de G .

El siguiente teorema [36](que por su dificultad no va a ser demostrado) va a acotar por abajo a $\omega(G)$, y como $\omega(G^c) = \beta(G)$ y éste último está acotado superiormente, finalmente tendremos acotado superior e inferiormente al orden de un conjunto independiente de cardinalidad máxima. Recordemos que estas cotas no son muy buenas si consideramos una gráfica de orden suficientemente grande, pero para el propósito que las necesitamos son bastante precisas.

Teorema 4.1.4 *Para toda gráfica G con p -vértices tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ se cumple que*

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^p \frac{1}{p - \delta(v_i)}$$

Ya tenemos las armas suficientes para acotar $\beta(G)$. Por el Teorema 4.1.3 sabemos que $\omega(G^c) = \beta(G)$, si sustituimos en la desigualdad del Teorema 4.1.4 obtenemos

$$\beta(G) = \omega(G^c) \geq \sum_{i=1}^p \frac{1}{p - \delta_{G^c}(v_i)}$$

y combinando la desigualdad anterior con la desigualdad (4.1) finalmente podemos acotar el orden del conjunto independiente de cardinalidad máxima, cuyas cotas son

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{p - \delta_{G^c}(v_i)} \leq \beta(G) \leq p - \Delta(G) \quad (4.2)$$

Retomemos la gráfica G de la Figura 4.2. Esta gráfica tiene dieciséis vértices, su grado máximo es once y tiene doce vértices de grado siete y cuatro vértices de grado cinco en G^c , por lo tanto

$$p - \Delta(G) = 16 - 11 = 5 \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^p \frac{1}{p - \delta_{G^c}(v_i)} = 12 \left(\frac{1}{16 - 7} \right) + 4 \left(\frac{1}{16 - 5} \right) = \frac{56}{33} \approx 2 \quad (4.4)$$

sustituyendo los valores de las ecuaciones (4.3) y (4.4) en la desigualdad (4.2) obtenemos que

$$2 \leq \beta(G) \leq 5$$

Teniendo estas cotas para $\beta(G)$, el rango de búsqueda se vuelve más pequeño. Sin embargo, como hemos estado diciendo a lo largo de esta sección, las cotas no son muy buenas. Es más, se sigue investigando en como reducirlas y en la mayoría de los casos es necesario pedirle condiciones extra a la gráfica para que las cotas sean más precisas.

4.1.6. La posición de las reinas

Para colocar las reinas en el tablero vamos a dejar un poco de lado a las gráficas y vamos a meternos un poco en combinatoria*. Es claro que no podemos acomodar dos reinas en la misma fila ni en la misma columna; por lo tanto, si queremos que las reinas no se ataquen entre sí, es necesario poner las cuatro reinas en filas y columnas diferentes, entonces vamos a construir un método que nos ayude a colocar las reinas en filas y columnas diferentes.

Tomemos el tablero de ajedrez que se muestra en la Figura 4.5. A cada columna c_i le asignamos un valor único en la fila j tal que $1 \leq j \leq 4$, es decir, si $c_i = j$ y $c_k = l$, entonces $j \neq l$ si y sólo si $i \neq k$. Estas igualdades nos van a indicar la posición de la reina en el tablero y además van a evitar que coloquemos dos reinas en la misma fila o columna; por ejemplo, si $c_4 = 2$, significa que en la intersección entre la columna cuatro y la fila dos debemos colocar una reina y además podemos colocar una reina en la posición $c_i = j$ si y sólo si $i \neq 4$ y $j \neq 2$.

Como a cada c_i le corresponde una y sólo una j , existen $4! = 24$ maneras diferentes de colocar las reinas en el tablero de manera tal que ningún par de reinas esté en la misma fila ni en la misma columna. Pues observemos que en la primera columna podemos colocar una reina en cuatro filas diferentes, en la segunda

* A grandes rasgos la combinatoria nos dice de cuántas maneras diferentes es posible acomodar ciertos elementos.

	c_1	c_2	c_3	c_4
1				
2				
3				
4				

Figura 4.5.

columna podemos colocar otra reina en tres filas diferentes pues ya tenemos una reina colocada, en la tercera columna solo nos quedan dos filas libres, pues ya tenemos dos reinas acomodadas y por último en la cuarta columna sólo podemos acomodar la reina en una fila diferente a las anteriores.

No todas las veinticuatro formas son soluciones del problema pues la construcción no nos asegura que una pareja de reinas no se encuentre en la misma diagonal. Por ejemplo, si ponemos las reinas en las casillas $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$ y $c_4 = 4$, todas las reinas van a estar en la misma diagonal, por lo tanto existen dos que se van a atacar, entonces este acomodo no es solución del problema. Necesitamos construir un método que nos asegure que todo par de reinas no esté en la misma diagonal.

Dos reinas están en la misma diagonal si el número de filas y el número de columnas que hay entre las reinas es el mismo. Por ejemplo, si colocamos reinas en las casillas $c_3 = 2$ y $c_1 = 4$, hay una columna y una fila entre éstas, por lo tanto las reinas están en la misma diagonal, como se muestra en la Figura 4.6. Entonces si acomodamos reinas en las casillas $c_i = j$ y $c_k = l$, éstas estarán en la misma diagonal si se cumple que

$$i - k = j - l \quad \text{ó} \quad k - i = j - l.$$

Estas ecuaciones nos aseguran que el número de filas que hay entre las reinas es

	C_1	C_2	C_3	C_4
1				
2			♔	
3				
4	♔			

Figura 4.6. Las reinas están en la misma diagonal

igual al número de columnas que hay entre éstas. Para que dos reinas no estén en la misma diagonal, simplemente negamos las ecuaciones anteriores, es decir,

$$i - k \neq j - l \quad \text{y} \quad k - i \neq j - l.$$

Vamos a utilizar este par de ecuaciones para construir el algoritmo que nos ayudará a encontrar la posición de las reinas.

Algoritmo 4.1.1 Sean $1 \leq i, j, k, l \leq 4$ tales que a cada número le corresponde una y sólo una letra.

1. Acomoda una reina en la casilla $c_1 = i$
2. Podemos acomodar una reina en la casilla $c_2 = j$ y pasar al siguiente paso si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones

$$1 - 2 \neq i - j \quad \text{y} \quad 2 - 1 \neq i - j.$$

Si no es posible satisfacer las ecuaciones, vuelve al paso 1.

3. Podemos acomodar una reina en la casilla $c_3 = k$ y pasar al siguiente paso si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - 3 \neq i - k \quad , \quad 3 - 1 \neq i - k, \\ 2 - 3 \neq j - k \quad \text{y} \quad 3 - 2 \neq j - k. \end{aligned}$$

Si no es posible satisfacer las ecuaciones vuelve al paso 1.

4. Podemos acomodar una reina en la casilla $c_4 = l$ si y sólo si se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - 4 \neq i - l & \quad , \quad 4 - 1 \neq i - l, \\ 2 - 4 \neq j - l & \quad , \quad 4 - 2 \neq j - l, \\ 3 - 4 \neq k - l & \quad y \quad 4 - 3 \neq k - l. \end{aligned}$$

Si es posible resolver las ecuaciones anteriores, terminamos. Si no, vuelve al paso 1.

Cada paso del algoritmo nos asegura que la reina que estamos colocando en el momento no va a atacar a ninguna que hayamos acomodado anteriormente, pues como a cada columna le corresponde una única fila, con eso aseguramos que las reinas van a estar en filas y columnas diferentes, y además si la reina que estamos acomodando en el momento cumple con la ecuaciones (que dependen de las reinas ya acomodadas), ésta no va a estar en la misma diagonal que las ya colocadas. Vamos a utilizar el algoritmo para encontrar una solución a nuestro problema.

Acomodamos la primera reina en la casilla $c_1 = 1$, podemos poner una segunda reina en la casilla $c_2 = 3$ ya que

$$1 - 2 \neq 1 - 3 \quad y \quad 2 - 1 \neq 1 - 3$$

en el siguiente paso las dos posibilidades que nos sobran son las de acomodar la tercera reina en las casillas $c_3 = 2$ o $c_3 = 4$. Si escogemos ponerla en la casilla $c_3 = 2$, las ecuaciones arrojan el siguiente resultado

$$\begin{aligned} 1 - 3 \neq 1 - 2 & \quad , \quad 3 - 1 \neq 1 - 2, \\ 2 - 3 \neq 3 - 2 & \quad y \quad 3 - 2 = 3 - 2, \end{aligned}$$

entonces, como la última ecuación no se cumple, quiere decir que las reinas $c_2 = 3$ y $c_3 = 2$ se están atacando en diagonal. Por otra parte, si colocamos la reina en la casilla $c_3 = 4$ el resultado de las ecuaciones es

$$\begin{aligned} 1 - 3 \neq 1 - 4 & \quad , \quad 3 - 1 \neq 1 - 4, \\ 2 - 3 = 3 - 4 & \quad y \quad 3 - 2 \neq 3 - 4, \end{aligned}$$

entonces la penúltima ecuación no se cumple, por lo tanto las reina $c_2 = 3$ y $c_3 = 4$ se están atacando en diagonal, por lo tanto nos tenemos que regresar al paso 1 e intentar con una combinación diferente.

Acomodemos la primera reina en la casilla $c_1 = 3$, en la casilla $c_2 = 1$ nos está permitido acomodar la segunda reina, pues

$$1 - 2 \neq 3 - 1 \quad y \quad 2 - 1 \neq 3 - 1.$$

	C_1	C_2	C_3	C_4
1		♔		
2				♔
3	♔			
4			♔	

Figura 4.7. Solución

Si la tercera reina va en la casilla $c_3 = 4$, el resultado de las ecuaciones es

$$\begin{aligned} 1 - 3 \neq 3 - 4 \quad , \quad 3 - 1 \neq 3 - 4, \\ 2 - 3 \neq 1 - 4 \quad y \quad 3 - 2 \neq 1 - 4, \end{aligned}$$

por lo tanto nos es permitido acomodar ahí la reina. Por último, podemos colocar la reina en la casilla $c_4 = 2$ ya que

$$\begin{aligned} 1 - 4 \neq 3 - 2 \quad , \quad 4 - 1 \neq 3 - 2, \\ 2 - 4 \neq 1 - 2 \quad , \quad 4 - 2 \neq 1 - 2, \\ 3 - 4 \neq 4 - 2 \quad y \quad 4 - 3 \neq 4 - 2. \end{aligned}$$

Entonces, si acomodamos las reinas en las casillas mencionadas obtenemos una solución del problema, como se muestra en la Figura 4.7. La razón por la cual el algoritmo no es nada eficiente es que el número de pasos que se necesitan para resolver el problema está directamente relacionado con el tamaño del tablero. Es decir para tableros de $n \times n$ necesitamos al menos n pasos para resolver el problema. Además, recordemos que existen $4! = 24$ formas diferentes de poner las reinas de manera tal que dos de éstas no estén en la misma fila ni columna, por lo que podemos poner de 24 formas diferentes los números en las ecuaciones del algoritmo (evidentemente no todas las formas son solución del problema), en un tablero normal de ajedrez existen $8! = 40320$ formas diferentes de acomodar los números en las ecuaciones, eso es mucho si lo intentamos hacer sin una computadora. Mas aún si tuviésemos una computadora y el tablero fuera de 50×50 , existirían $50! \approx 3 \times 10^{64}$ formas

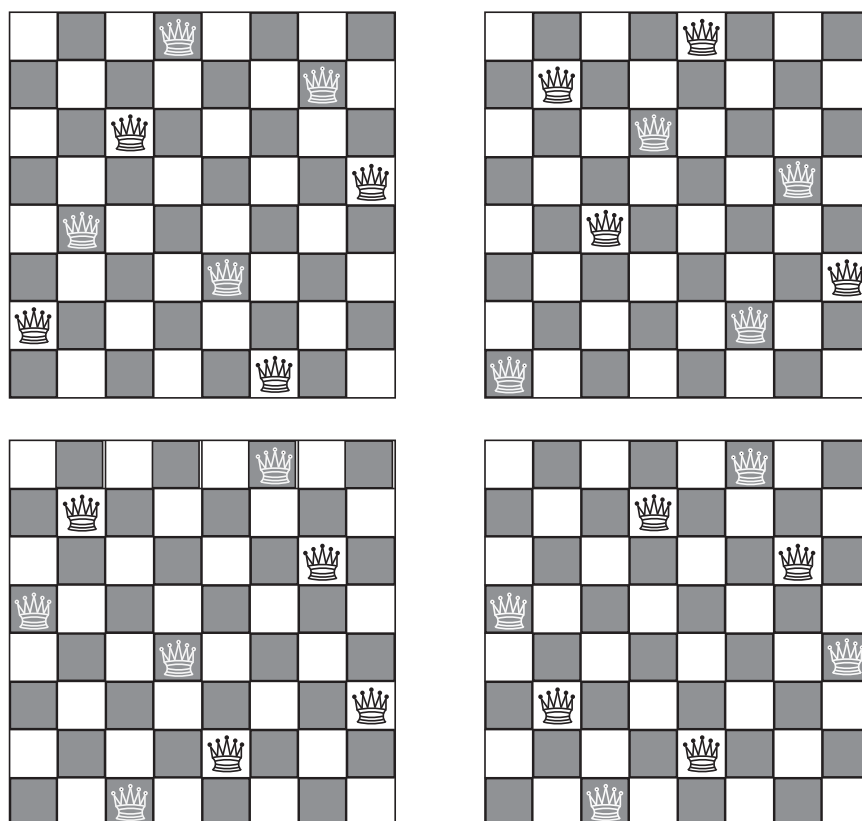


Figura 4.8. Soluciones de las *ocho Reinas*

diferentes de acomodar los números en las ecuaciones. Para darnos una idea de lo inmenso de este número, imaginema que si nuestra computadora prueba un millón de estas formas por segundo. La computadora se tardaría alrededor de $1,6 \times 10^{49}$ años en probar todas estas formas (los años que lleva existiendo la tierra no es ni la millonésima parte de ese número), aunque tal vez encontráramos todas las soluciones unos cientos de millones de años antes.

Aunque el método que propusimos es bastante tedioso aún para tableros pequeños es uno de los más fáciles y efectivos. Claro que es recomendable tener una computadora a la mano si es que deseamos resolver el problema para un tablero de ajedrez normal. Si es que deseas saber las soluciones para un tablero normal de ajedrez, la Figura 4.8 muestra cuatro de las doce soluciones únicas al problema.

Ya para finalizar, el cuadro 4.1 [6] muestra el número de soluciones conocidas hasta el momento para tableros de diferentes tamaños.

Tamaño del tablero	Número de soluciones	Número de soluciones únicas
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	2	1
5	10	2
6	4	1
7	40	6
8	92	12
9	352	46
10	724	92
11	2,680	341
12	14,200	1,787
13	73,712	9,233
14	365,596	45,752
15	2,279,184	285,053
16	14,772,512	1,846,955
17	95,815,104	11,977,939
18	666,090,624	83,263,591
19	4,968,057,848	621,012,754
20	39,029,188,884	4,878,666,808
21	314,666,222,712	39,333,324,973
22	2,691,008,701,644	336,376,244,042
23	24,233,937,684,440	3,029,242,658,210
24	227,514,171,973,736	???
25	2,207,893,435,808,352	???

Cuadro 4.1.

4.2. Coloración por aristas

Vamos a resolver dos problemas que, por su parecido, se van a tratar de manera casi paralela. Los problemas que vamos a ver llevan los nombres de *Cuadrados Latinos* y el popular juego de *Sudoku*, de éste último hablaremos más adelante, pues como veremos en las siguientes páginas, el método para resolver los *Cuadrados Latinos* nos dará la pauta para resolver los *Sudokus*.

4.2.1. Cuadrados latinos

¿Es posible acomodar n letras diferentes en una cuadrícula de $n \times n$, de manera que las n letras no se repitan ni en filas ni en columnas?

Historia

En el Islam medieval, alrededor del 1200 A.C., los *Cuadrados Latinos* se utilizaban como amuletos. Abu l'Abbas al Buni escribió acerca de éstos y construyó, entre otros, cuadrados de 4×4 con las letras del nombre de Dios. En 1779, el matemático suizo Leonhard Euler estudió a fondo estos cuadrados y propuso un problema relacionado con éstos, conocido como *el problema de los treinta y seis oficiales*^{*}, que permaneció sin resolver hasta principios del siglo XX. El matemático inglés Arthur Cayley también trabajó con estos cuadrados, los cuales le ayudaron a desarrollar en 1930 la teoría de grupos^{**}. Ese mismo año, el estadista británico Ronald Fisher utilizó los *Cuadrados Latinos*, junto con el estudio de la combinatoria, para diseñar la estadística experimental. [10]

Los *cuadrados latinos* han probado ser bastante útiles en “el mundo real” (sin considerar aplicaciones matemáticas). Por ejemplo, en la agricultura distintos tipos de fertilizante se prueban en diferentes tipos de suelo, éstos se acomodan en forma de cuadrado latino para determinar que tipo de combinación es la que mejora el crecimiento de alguna variedad, por decir, de papas. Si deseáramos probar diferentes especies de papas con diferentes fertilizantes, el diseño del cuadrado latino nos serviría para acomodar las pruebas. De manera similar el diseño del cuadrado latino se utiliza para probar diferentes tipos de medicinas. [30]

^{*}De lo que se trata el problema es de acomodar a 6 pelotones, cada uno con 6 oficiales de diferente rango, en un cuadrado de 6×6 , de manera tal que no puede haber dos oficiales del mismo pelotón en la misma columna y no puede haber dos oficiales del mismo rango en la misma fila. [11]

^{**}En álgebra, un grupo es un conjunto de elementos que, junto con una operación binaria satisfacen ciertos axiomas. Por ejemplo los números enteros $(\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$ junto con la suma forman un grupo.

4.2.2. Teoremas y definiciones

Teorema 4.2.1 *Sea G una gráfica conexa con $p \geq 2$. G es bipartita si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.*

Demostración. \Rightarrow] Demostraremos por contradicción. Sea G bipartita con bipartición X y Y . Supongamos que G tiene un ciclo de longitud impar. Sea $C = (v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}, v_1)$ dicho ciclo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $v_1 \in X$, entonces $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, $v_4 \in Y$, $v_5 \in X, \dots, v_{2n} \in Y$ y $v_{2n+1} \in X$. Por ser C un ciclo, la arista $(v_1, v_{2n+1}) \in A(C) \subset A(G)$, entonces hay dos vértices en X que son adyacentes, lo que contradice que X sea un conjunto de vértices independiente. Por lo tanto G no tiene ciclos de longitud impar.

\Leftarrow] Sea G una gráfica conexa con $p \geq 2$ y sin ciclos de longitud impar. Tomemos $u \in V(G)$ y definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{v \in V(G) \text{ tal que existe un } uv\text{-trayectoria de longitud impar}\} \\ B &= \{w \in V(G) \text{ tal que existe un } uw\text{-trayectoria de longitud par}\}. \end{aligned}$$

Para demostrar que G es bipartita necesitamos encontrar dos conjuntos en G que definan una partición y que además sean independientes.

Primero hay que demostrar que A y B definen una partición en los vértices de G . Para esto necesitamos demostrar que $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $A \cup B = V(G)$. Primero demostraremos que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que existe $x \in V(G)$ tal que $A \cap B = \{x\}$, entonces por la definición de A y B , existe una ux -trayectoria T de longitud impar y una ux -trayectoria T' de longitud par. Consideremos el camino $C = T \cup T'$. Este camino cerrado es de longitud impar, ya que resulta de la unión de un camino par más uno impar, entonces por el Teorema 1.1.2 de la sección 1.1, C contiene un ciclo de longitud impar, lo que contradice que G no tiene ciclos de longitud impar, por lo tanto $A \cap B = \emptyset$.

La demostración de que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ es muy sencilla, pues G es conexa y al menos tiene dos vértices, u y v . Por lo menos u está en B , ya que la trayectoria (u, u) es de longitud par. Por otra parte, en G , existe la trayectoria (u, v) , ya que G , por hipótesis, es conexa. Por lo tanto v está en A , pues la uv -trayectoria es de longitud impar. De las afirmaciones anteriores obtenemos que A y B no son conjuntos vacíos.

Ahora vamos a demostrar que $A \cup B = V(G)$. Como G es conexa, entre todo par de vértices existe una trayectoria. Sea $x \in V(G)$, entonces existe una ux -trayectoria, esta trayectoria puede ser de longitud par o de longitud impar, por lo tanto $x \in A$ o bien $x \in B$. Además, $u \in B$, pues la trayectoria (u, u) es de longitud

par. Por lo tanto cualquier vértice de G está en A o en B , por lo que $A \cup B = V(G)$.

Como $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $A \cup B = V(G)$, entonces A y B definen una partición de los vértices de G .

Demostraremos que estos conjuntos son independientes. Primero probaremos que para todo $\{v, v'\} \subset A$, v no es adyacente a v' . Si v es adyacente a v' , como $v \in A$, existe una uv -trayectoria de longitud impar, si a esta trayectoria le añadimos la arista (v, v') obtenemos una uv' -trayectoria de longitud par, por lo tanto $v' \in B$ y por hipótesis $v' \in A$, lo que contradice que $A \cap B = \emptyset$, entonces A es independiente. De manera análoga demostraremos que B es independiente, sean $\{w, w'\} \subset B$ y supongamos que w es adyacente a w' . Como existe una uw -trayectoria de longitud par, si a esta trayectoria le añadimos la arista (w, w') obtenemos una uw' -trayectoria de longitud impar, por lo tanto $w' \in A$ y por hipótesis $w' \in B$, lo que contradice que $A \cap B = \emptyset$, entonces B es independiente.

Ya que A y B son independientes, no vacíos, y estos conjuntos definen una partición en G , se tiene que G es bipartita. ■

Vamos a dar una breve introducción en la Teoría de Coloración por aristas de una gráfica y finalizaremos con uno de los resultados más importantes en esta área.

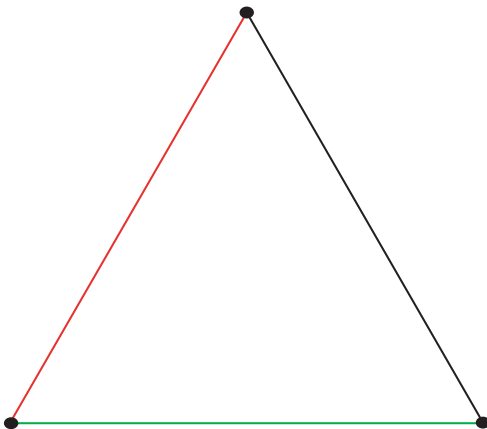
Definición 4.2.1 *Sea G una gráfica. Una coloración por aristas de G es colorear las aristas de G con los colores que desees. A la coloración por aristas se le denota con la letra \mathcal{C} .*

Definición 4.2.2 *Sea G una gráfica y sea \mathcal{C} una coloración de G . Si la coloración \mathcal{C} utiliza k colores, decimos que G tiene una k -coloración.*

Definición 4.2.3 *Sea G una gráfica y sea \mathcal{C} una coloración por aristas de G . Decimos que \mathcal{C} es buena coloración por aristas si para todo vértice v de G , a v no le inciden dos aristas del mismo color.*

Definición 4.2.4 *Sea G una gráfica. El índice cromático de G es el mínimo número de colores necesarios para colorear las aristas de una gráfica, de manera tal que ésta sea una buena coloración por aristas en G . Al índice cromático se le denota por $\chi'(G)$.*

En la Figura 4.9, vemos que G tiene una buena coloración por aristas tal que $\chi'(G) = 3$, pues con menos colores no es posible dar una buena coloración.

Figura 4.9. G

Lema 4.2.1 *Sea G una gráfica conexa tal que G no es un ciclo de longitud impar y $p \geq 2$. Podemos colorear las aristas de G con dos colores diferentes de manera tal que aristas de ambos colores incidan en cada vértice de grado al menos dos.*

Demostración. Para probar el lema tenemos que demostrar que al menos una de las aristas incidentes en cada vértice tenga el color rojo y al menos otra tenga el color azul (los colores no son importantes, el chiste es que sean diferentes), observa que no se pide una *buena coloración*, pues puede pasar que a un mismo vértice le incidan dos aristas del mismo color.

Vamos a demostrar el teorema por casos. Primero supongamos que G es conexa y euleriana. Como G es euleriana, por el Teorema 3.1.1 de la sección 3.1.1 sabemos que todos sus vértices tienen grado par. Si G es un ciclo de longitud par, podemos dar a G una buena coloración con dos colores diferentes (se deja al lector describir la coloración) y esta coloración cumple las condiciones del lema. Si G no es un ciclo de longitud par, ya que G es euleriana tiene al menos un vértice de grado mayor o igual a cuatro. Sea $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ el paseo euleriano de G y consideremos los siguientes conjuntos de aristas,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(v_i, v_{i+1}) \in A(G) \text{ tal que } i \text{ es impar}\} \\ A_2 &= \{(v_i, v_{i+1}) \in A(G) \text{ tal que } i \text{ es par}\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Entonces si coloreamos las aristas del conjunto A_1 con color rojo y las aristas del conjunto A_2 con color azul, obtenemos una coloración de G tal que a cada vértice

le incide al menos una arista con color rojo y una arista con color azul, pues si la arista (v_i, v_{i+1}) es roja, entonces i es impar, por lo tanto $i + 1$ es par, entonces la arista (v_{i+1}, v_{i+2}) es de color azul, por lo tanto al vértice v_{i+1} le inciden una arista roja y una azul para todo $1 \leq i \leq n$, en otras palabras, las aristas del paseo C tienen los colores rojo y azul alternadamente. El caso en que la arista (v_i, v_{i+1}) es azul es análogo al anterior. Por lo tanto, si G es euleriana, las condiciones del lema se cumplen.

El otro caso es cuando G es conexa y no es euleriana, para demostrar este caso vamos a construir una gráfica euleriana G^* a partir de G , agregando un vértice y algunas aristas a G . Entonces como G^* es euleriana podemos construir una coloración que cumpla las propiedades del lema y para finalizar a partir de esta coloración vamos a construirle a G la coloración que necesitamos.

Sea G una gráfica conexa tal que G no es euleriana, entonces G tiene al menos un vértice de grado impar (ver Teorema 3.1.1). Construimos una nueva gráfica G^* añadiendo un nuevo vértice v a G y uniendo este vértice con todos los vértices de grado impar de G , en símbolos matemáticos se expresaría como,

$$\begin{aligned} V(G^*) &= V(G) \cup \{v\} \\ A(G^*) &= A(G) \cup \{(v, u) \text{ tal que } \delta_G(u) \text{ es impar.}\} \end{aligned}$$

Entonces los vértices de G^* tiene grado par, ya que $\delta_{G^*}(u) = \delta_G(u)$ si $\delta_G(u)$ es par y $\delta_{G^*}(u) = \delta_G(u) + 1$ si $\delta_G(u)$ es impar (recordemos que le añadimos una arista a todos los vértices de G de grado impar, entonces esos vértices en G^* se vuelven de grado par). Además, por el Corolario 1.1.1 de la sección 1.1 sabemos que en una gráfica cualquiera hay un número par de vértices de grado impar, por lo tanto el vértice que le añadimos a G , es decir v , es adyacente a un número par de vértices, entonces el grado de v en G^* es par. Entonces todos los vértices de G^* tiene grado par, por lo tanto G^* es euleriana.

Sea $C = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ el paseo euleriano de G^* y definamos los conjuntos de aristas A_1 y A_2 como en (4.5). Asignemos a las aristas del conjunto A_1 el color rojo y a las de A_2 el color azul, y consideremos los conjuntos de aristas A'_1 y A'_2 , tales que $A'_1 = A_1 \cap A(G)$ y $A'_2 = A_2 \cap A(G)$.

Observemos que A'_1 y A'_2 tienen la coloración deseada, pues los vértices de grado par de G , por construcción van a tener una arista incidente roja y una azul (como en el caso anterior). Para los vértices de grado impar, observemos primero que si existe un vértice en G de grado uno, no es importante considerarlo, pues el lema pide que la coloración se cumpla para vértices de grado al menos dos. Entonces, si

u es un vértice de G tal que el grado de u es impar y el grado de u es el menos tres, no puede pasar que todas las aristas incidentes en u sean del mismo color, pues como u pertenecía al paseo euleriano C de G^* necesariamente el número de aristas que inciden en u de color rojo es igual al número de aristas que inciden en u de color azul (pues si el paseo C entra por una arista de color rojo a u , sale por una azul y, viceversa), entonces si a u le inciden al menos tres aristas en G , al menos una de ellas debe de ser de color diferente a las otras dos. Por lo tanto si G no es euleriana las condiciones del lema también se cumplen. ■

Definición 4.2.5 Sea G una gráfica tal que $v \in V(G)$ y sea \mathcal{C} una coloración por aristas de G . Denotamos por $c(v)$ al número de colores diferentes que tienen las aristas incidentes en v .

Definición 4.2.6 Sea G un gráfica y sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos coloraciones por aristas de G con k -colores distintos. Decimos que \mathcal{C}' es una mejora de \mathcal{C} si

$$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v)$$

Nota que las coloraciones \mathcal{C} y \mathcal{C}' utilizan el mismo número de colores, lo que hace que una coloración sea una *mejora* de la otra coloración es cómo están coloreadas las aristas incidentes en los vértices. Por ejemplo, consideremos las gráficas G y G' con las 2-coloraciones \mathcal{C} y \mathcal{C}' respectivamente, como se muestra en la Figura 4.10, observemos que todas las aristas incidentes en el vértice a de G tienen el color negro mientras que las aristas incidentes en el vértice a de G' tienen los colores negro y negro punteado, y las aristas incidentes en el resto de los vértices de ambas gráficas tienen los dos colores, por lo tanto

$$\sum_{v \in V(G')} c'(v) = c'(a) + c'(b) + c'(c) + c'(d) = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

$$\sum_{v \in V(G)} c(v) = c(a) + c(b) + c(c) + c(d) = 1 + 2 + 2 + 2 = 7$$

como $8 > 7$, \mathcal{C}' es una *mejora* de \mathcal{C} .

Definición 4.2.7 Sea G una gráfica. Una coloración por aristas de G es *óptima* si no puede ser mejorada.

Veamos que la coloración \mathcal{C}' de la gráfica G' que se muestra en la Figura 4.10 es *óptima* ya que \mathcal{C}' utiliza sólo dos colores y a cada vértice de G' le inciden aristas con esos dos colores, por lo tanto \mathcal{C}' no puede ser *mejorada*.

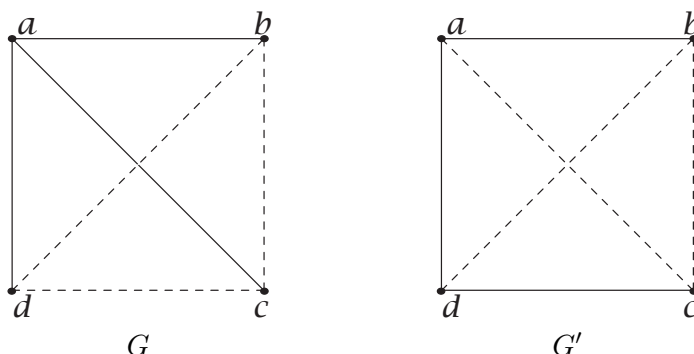


Figura 4.10.

Lema 4.2.2 Sea \mathcal{C} una coloración por aristas de G tal que \mathcal{C} es óptima y sean $1, 2, \dots, n$ los colores de las aristas de G . Sean A_1, A_2, \dots, A_n subconjuntos de las aristas de G tales que las aristas del subconjunto A_i tienen el color i para toda $1 \leq i \leq n$. Si existe $u \in V(G)$ tal que a u no le inciden aristas con color i y al menos le inciden dos aristas con color j , entonces la componente de $G[A_i \cup A_j]$ que contiene a u es un ciclo de longitud impar.

Demostración. Sea G una gráfica con coloración óptima \mathcal{C} y sea $u \in V(G)$ tal que u satisface las hipótesis del lema. Sea H la componente de $G[A_i \cup A_j]$ que contiene a u . Demostraremos este Lema por contradicción, vamos a suponer que H no es un ciclo impar y utilizando los lemas anteriores probaremos que la coloración \mathcal{C} puede ser mejorada, es decir, que la coloración \mathcal{C} no es óptima.

Supongamos que H no es un ciclo impar y sea $u \in V(H)$ tal que a u no le inciden aristas con color i y al menos le inciden dos aristas con color j . Entonces, como H no es un ciclo impar, por el Lema 4.2.1 podemos colorear las aristas de H con dos colores diferentes de manera tal que ambos colores estén representados en cada vértice de grado al menos dos de H . Si coloreamos las aristas de H con la coloración descrita en el enunciado anterior y a las aristas que no estén en H les dejamos su coloración original obtenemos una nueva coloración \mathcal{C}' de las aristas de G . Sea $c'(u)$ al número de colores diferentes que tienen las aristas incidentes en u en la coloración \mathcal{C}' y sea $c(u)$ el número de colores diferentes que tienen las aristas incidentes en u en la coloración \mathcal{C} , tenemos que

$$c'(u) = c(u) + 1$$

pues en la coloración \mathcal{C}' a u le inciden aristas con los colores i y j mientras que en \mathcal{C} a u no le inciden aristas con color i (puede que a u le incidan aristas con otros

colores que no sean ni i ni j , sin embargo estos colores son los mismos en \mathcal{C}' y \mathcal{C} . Observemos que si v está en H y $v \neq u$, en la coloración \mathcal{C}' a v le van a incidir aristas con los colores i y j , mientras que en la coloración \mathcal{C} puede pasar que a v sólo le incidan aristas con color i o con color j . Si v no está en H , las aristas incidentes en v tienen los mismos colores en \mathcal{C}' y en \mathcal{C} (recuerda que para estos vértices no alteramos la coloración). Por lo tanto

$$c'(v) \geq c(v) \text{ para todo } v \neq u,$$

Entonces

$$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v),$$

por lo tanto \mathcal{C}' es una mejora en \mathcal{C} , lo que contradice que \mathcal{C} es una coloración óptima, es decir, que \mathcal{C} no puede ser mejorada. Por lo tanto H es un ciclo impar. ■

Teorema 4.2.2 *Sea G una gráfica bipartita con bipartición X y Y . El índice cromático de G es igual al grado máximo de G , que en símbolos se expresa como*

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Demostración Vamos a demostrar el teorema por casos, primero probaremos que no puede pasar que $\chi'(G) < \Delta(G)$ después probaremos que tampoco puede pasar que $\chi'(G) > \Delta(G)$, entonces necesariamente $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Sea G una gráfica bipartita y sea \mathcal{C} una buena coloración por aristas de G con $\chi'(G)$ -colores diferentes. Supongamos que $\chi'(G) < \Delta(G)$, entonces estamos dando una buena coloración a las aristas de G con menos de $\Delta(G)$ -colores. Sea $v \in V(G)$ un vértice de grado máximo, es decir $\Delta(G) = \delta(v)$, como $\chi'(G) < \Delta(G)$, entonces a v le inciden más aristas que los colores disponibles para colorear esas aristas, por lo tanto existen al menos dos aristas incidentes en v con el mismo color (imagina que quieres colorear cuatro cosas con tres colores distintos, vas a tener que repetir al menos un color) lo que contradice que \mathcal{C} es una buena coloración por aristas de G , por lo tanto no puede pasar que $\chi'(G) < \Delta(G)$.

Sea G una gráfica bipartita tal que $\chi'(G) > \Delta(G)$. Como $\chi'(G)$ es el mínimo número de colores necesarios para que G tenga una buena coloración y $\chi'(G) > \Delta(G)$, si coloreamos a G con $\Delta(G)$ colores distintos, G no va a tener una buena coloración, es decir, va a existir un vértice en G cuyas aristas incidentes tengan el mismo color.

Tomemos una *mejor* coloración por aristas de G con $\Delta(G)$ colores, en otras palabras, sea \mathcal{C} una coloración *óptima* por aristas de G con los colores $1, 2, 3, \dots, \Delta(G)$. Como \mathcal{C} no es una *buena coloración*, existe un vértice $u \in V(G)$ tal que a u le inciden dos aristas con el mismo color, entonces $c(u) < \delta(u)$ (se deja al lector decir por qué la desigualdad es válida). Como $c(u) < \delta(u) \leq \Delta(G)$ (es decir, el número de colores que inciden en u son menos que las aristas incidentes en u y menos que el número de colores disponibles para colorear G) y estamos coloreando a la gráfica con $\Delta(G)$ colores, entonces existe un color i tal que ninguna arista incidente en u tiene el color i , $1 \leq i \leq \Delta(G)$.

Hasta el momento sabemos que \mathcal{C} es una coloración *óptima* por aristas de G con los colores $1, 2, \dots, \Delta(G)$ y que existe $u \in V(G)$ tal que a u le inciden al menos dos aristas con color j y no le inciden aristas con color i , $1 \leq i, j \leq \Delta(G)$, entonces por el Lema 4.2.2 existe una componente H de $G[A_i \cup A_j]$, donde A_i y A_j son los subconjuntos de las aristas de G con los colores i y j respectivamente, tal que H es un ciclo de longitud impar. Finalmente hemos llegado a la contradicción, pues por el Teorema 4.2.1 G es bipartita si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar. Por lo tanto no puede pasar que $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Como no puede pasar que $\chi'(G) < \Delta(G)$ y tampoco puede pasar que $\chi'(G) > \Delta(G)$, entonces necesariamente $\chi'(G) = \Delta(G)$. ■

4.2.3. Solución

Además de que el siguiente teorema prueba que el problema tiene solución, su demostración nos dará un algoritmo para resolverlo. Primero empecemos con una cuadrícula rectangular T con p -filas y q -columnas tal que $n \leq pq$. Sean $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ letras diferentes y acomodemos estas letras en T de manera tal que no se repitan en filas ni en columnas. Sea $m(y)$ el número de veces que se repite la letra y en T .

Teorema 4.2.3 *Podemos acomodar n letras diferentes en una cuadrícula de $n \times n$, de manera que las n letras no se repitan ni en filas ni en columnas si y sólo si a T le agregamos $(n - p)$ -filas, $(n - q)$ -columnas y se cumple que*

$$m(y_k) \geq p + q - n, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Demostración \Rightarrow] Sea Γ_i el conjunto de $n - q$ letras que no aparecen en la fila i de T , con $1 \leq i \leq p$, y sea $m'(y)$ el número de veces que y aparece en los conjuntos

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$. Como el problema tiene solución, tenemos que

$$m'(y) \leq n - q, \quad (4.6)$$

pues la letra y a lo más puede estar en una columna y una fila a la vez. El número de veces que aparece la letra y en T , es lo mismo que el número de filas de T menos la veces que aparece la letra y en el conjunto $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p\}$. Por lo tanto

$$m(y) = p - m'(y). \quad (4.7)$$

De las ecuaciones 4.6 y 4.7 obtenemos

$$m(y) = p - m'(y) \geq p + q - n,$$

que era lo que queríamos demostrar.

⇐] Sea $P = \{1, 2, \dots, p\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ y definamos Γ_i como el conjunto de $n - q$ letras que no aparecen en la fila i de T para todo $1 \leq i \leq p$. Sea G una gráfica bipartita con bipartición P y Y . Si $i \in P$ y $y_j \in Y$, i es adyacente a y_j si en la fila i no está la letra y_j .

Recordemos que $m'(y)$ es el número de veces que aparece la letra y en los conjuntos de $n - q$ letras que no aparecen en las filas $1, 2, \dots, p$, y y es adyacente a un vértice i si y no aparece en la fila i por lo tanto el número de aristas que inciden en y es igual a $m'(y)$. Obtenemos la siguientes igualdades

$$\begin{aligned} |\Gamma_i| &= \delta(i) = n - q & i \in P \\ \delta(y) &= m'(y) \leq n - q & y \in Y \end{aligned}$$

Como G es bipartita y $\Delta(G) = n - q$, por el Teorema 4.2.2 podemos dar una *buen coloración* a G con los colores $1, 2, 3, \dots, n - q$. Vamos a completar a T añadiendo $n - q$ columnas, la columna i tiene las letras asociadas a los vértices de Y cuyas aristas incidentes tengan color i para toda $1 \leq i \leq n - q$. El resultado final es un rectángulo \bar{T} de $p \times n$ que satisface que $\bar{m}(y) = m(y) + (n - q) \geq p + q - n + (n - q) = p$. Vamos a utilizar una argumento muy similar al anterior, pero con una nueva gráfica bipartita \bar{G} , y esta vez nos fijaremos en las columnas.

Sea $Q = \{1, 2, 3, \dots, q\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ y definamos $\bar{\Gamma}_i$ como el conjunto de $n - p$ letras que no aparecen en la columna i de \bar{T} para todo $1 \leq i \leq q$. Sea G una gráfica bipartita con bipartición Q y Y . Si $i \in Q$ y $y_j \in Y$, i es adyacente a y_j si en la columna i no está la letra y_j .

a	d		
b	a		
c	b		

Cuadro 4.2. T

Sea $\bar{m}'(y)$ el número de veces que y aparece en los conjuntos $\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_2, \dots, \bar{\Gamma}_n$. Entonces el número de aristas que inciden en y es igual a $\bar{m}'(y)$. Obtenemos las siguiente igualdades

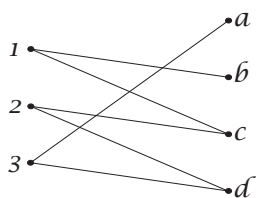
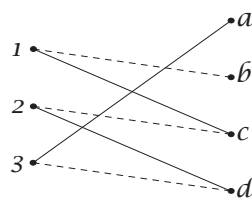
$$\begin{aligned} |\bar{\Gamma}_i| &= \delta(i) = n - p & i \in Q \\ \delta(y) = \bar{m}'(y) &\leq n - p & y \in Y \end{aligned}$$

Como G es bipartita y $\Delta(G) = n - p$, por el Teorema 4.2.2 podemos dar una *buena coloración* a G con los colores $1, 2, 3, \dots, n - p$. Completamos a \bar{T} añadiendo $n - p$ columnas, la columna i tiene las letras asociadas a los vértices de Y cuyas aristas incidentes tengan color i para toda $1 \leq i \leq n - p$. El resultado final es un cuadrado C de $n \times n$ que satisface que $\bar{m}(y) + (n - p) \geq p + (n - p) = n$, es decir, el número de veces que aparece la letra y en C es al menos n . Como no tenemos más de n letras, entonces el número de veces que aparece la letra y en C es n , y por construcción la letra y no se repite ni en filas ni en columnas. ■

Para aclarar el procedimiento que se utilizó en la demostración, consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que queremos acomodar cuatro letras a, b, c y d en un cuadrado de 4×4 . Comencemos con la cuadrícula rectangular T con tres filas y dos columnas y pongamos las cuatro letras de manera que una letra no se repita ni en filas ni en columnas, como se muestra en el Cuadro 4.2. Sea Γ_i el conjunto de las dos letras que no aparecen en la fila i de T , $1 \leq i \leq 3$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{b, c\} \\ \Gamma_2 &= \{c, d\} \\ \Gamma_3 &= \{a, d\}. \end{aligned}$$

Sea G_1 una gráfica bipartita con bipartición $P = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$. Si $i \in P$ y $y \in Y$, i es adyacente a y si en la fila i no aparece la letra y , en otras palabras, i es adyacente a y si $y \in \Gamma_i$, por ejemplo el vértice 1 es adyacente al vértice b pues $b \in \Gamma_1$. Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.11; por el Teorema 4.2.2 podemos dar una *buena coloración* a esta gráfica con los colores negro punteado y negro como se muestra en la Figura 4.12.

Figura 4.11. G_1 Figura 4.12. Una buena coloración de G_1

a	d	b	c
b	a	c	d
c	b	d	a

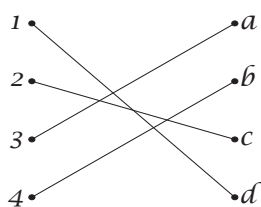
Cuadro 4.3. \bar{T}

Si i es adyacente a y en G_1 y la arista (i, y) tiene color negro punteado, colocamos la letra y en la columna 3 y la fila i , de manera similar, si j es adyacente a y y la arista (j, y) tiene color negro colocamos la letra y en la columna 4 y la fila j , para toda $i, j \in P$ y $y \in Y$. Por ejemplo, la arista $(2, c)$ tiene color negro punteado, entonces colocamos la letra c en la columna 3 y la fila 2; análogamente, la arista $(1, c)$ es de color negro, entonces colocamos la letra c en la columna 4 y la fila 1. Con este procedimiento llenamos las filas 1, 2 y 3 de el Cuadro 4.2. El resultado se muestra en el Cuadro 4.3.

Repetimos el procedimiento para las columnas de \bar{T} . Sea $\bar{\Gamma}_i$ el conjunto de la letras que no aparecen en la columna i de \bar{T} , $1 \leq i \leq 4$.

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_1 &= \{d\} \\ \bar{\Gamma}_2 &= \{c\} \\ \bar{\Gamma}_3 &= \{a\} \\ \bar{\Gamma}_4 &= \{b\}\end{aligned}$$

Sea G_2 una gráfica con bipartición $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ y $Y = \{a, b, c, d\}$. Si $i \in Q$ y $y \in Y$, i es adyacente a y si en la columna i no aparece la letra y , en otras palabras, i es adyacente a y si $y \in \bar{\Gamma}_i$. Por ejemplo, el vértice 4 es adyacente el vértice b , ya que $b \in \bar{\Gamma}_4$. Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.13. Si coloreamos las aristas con negro obtenemos una buena coloración.

Figura 4.13. G_2

a	d	b	c
b	a	c	d
c	b	d	a
d	c	a	b

Cuadro 4.4. Solución

Si i es adyacente a y en G_2 y la arista (i, y) tiene color negro, colocamos la letra y en la fila i y la columna y . Por ejemplo, la arista $(2, c)$ tiene color negro, entonces colocamos la letra c en la fila 2 y la columna c . El resultado que se muestra en la Tabla 4.4 es la solución del problema.

Cambiando un poco el tema vamos a ver qué es un *Sudoku* y cómo lo aquí propuesto nos va a ayudar a resolver este rompecabezas.

4.2.4. Sudoku

El *Sudoku* es un rompecabezas de colocación que se popularizó en Japón en 1986. El objetivo es rellenar una cuadrícula de 9×9 celdas (81 casillas) dividida en subcuadrículas de 3×3 (también llamadas *cajas* o *regiones*) con las cifras del 1 al 9, partiendo de algunos números ya dispuestos en algunas de las celdas. No se debe repetir ninguna cifra en una misma fila, columna o *región*.

Historia

Este rompecabezas numérico puede haberse originado en Nueva York en 1979. En ese entonces, la empresa *Dell Magazines* publicó este juego, ideado por Howard Garns un constructor independiente de rompecabezas, bajo el nombre de *Number Place* (el lugar de los números).

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
								1
4			8	2	1			
						2	8	
				8				
	8							4

Cuadro 4.5. *Sudoku*

Posteriormente la editorial *Nikoli* lo exportó a Japón y lo publicó en el periódico *Monthly Nikolist* en abril de 1984, bajo el título *Su-ji wa dokushin ni kagiru*, que se puede traducir como *el número se limita a él soltero*. Fue Kaji Maki, presidente de *Nikoli*, quien le puso este nombre. Posteriormente, el nombre se abrevió a *Su-doku* (su = número, doku = soltero) [20].

En 1986, *Nikoli* introdujo dos innovaciones que garantizarían la popularidad del rompecabezas: el número de cifras que venían dadas estaría restringida a un máximo de 30 y sería “simétrico” (es decir, las celdas con cifras dadas estarían dispuestas de forma rotacionalmente simétrica). Esto no siempre se cumple en los *sudokus* actuales. En 1997 Wayne Gould desarrolló un programa de computación que generaba automáticamente *sudokus*, le tomo seis años desarrollar el programa y ahora es una marca registrada por *Pappocom* (la empresa de desarrollo de software de Gould).

4.2.5. Solución

Vamos a resolver el *Sudoku* que se muestra en el Cuadro 4.5. Sea S nuestro *Sudoku* una cuadrícula de 9×9 . Dividamos a S en tres secciones. T es una cuadrícula de 3×3 que va de la fila 1 a la 3 y de la columna 1 a la 3 de S , \bar{T} es una cuadrícula de 3×6 que va de la fila 1 a la 3 y de la columna 4 a la 9 de S y T' es una cuadrícula de 6×9 que va de la fila 4 a la 9 y de la columna 1 a la 9 de S . Empezamos por tomar la cuadrícula T y la llenamos con los números faltantes, de manera que en T aparezcan los números del 1 al 9, cuidando que los números agregados no se repitan ni en filas ni en columnas en S . El resultado se muestra en la Tabla 4.6.

Consideremos Γ_i , el conjunto de números que no aparecen en la fila i de S ,

5	3	4		7				
6	2	7	1	9	5			
1	9	8					6	
8				6				3
								1
4			8	2	1			
						2	8	
				8				
	8							4

Cuadro 4.6. *Sudoku*

(algunos números ya están dados y también hay que considerarlos), para toda $1' \leq i \leq 3'$.

$$\Gamma_{1'} = \{1, 2, 6, 8, 9\}$$

$$\Gamma_{2'} = \{3, 4, 8\}$$

$$\Gamma_{3'} = \{2, 3, 4, 5, 7\}.$$

Sea G_1 una gráfica bipartita con bipartición $P = \{1', 2', 3'\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Si $i \in P$ y $y \in Y$, i es adyacente a y si en la fila i no aparece el número y , la construcción de esta gráfica es la misma que en el problema de los *Cuadrados Latinos*. Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.14. La forma de colorear la gráfica que se muestra en la Figura 4.14 es bastante diferente a la forma de colorear la gráfica del problema anterior, pues en vez de utilizar $\Delta(G_1)$ colores, utilizamos $n - q$ colores, que en este caso son seis, pues necesitamos asignarle un color a cada columna de S ; en el caso anterior $\Delta(G_1)$ coincidía con $n - q$, pues no teníamos números dados, sin embargo en los *sudokus* hay varios números que ya están dados, lo que puede afectar directamente en el grado de cada vértice (el por qué de esto se deja al lector) y como por construcción $\Delta(G_1) \leq n - q$ para toda G_1 , la demostración del Teorema 4.2.3 no se altera. Podemos dar una *buena coloración* a G_1 con los colores rojo, azul, negro, verde, amarillo y gris. Asignemos estos colores a las columnas 4, 5, 6, 7, 8 y 9 respectivamente. La arista (i, y) tiene color correspondiente a la columna j si la celda (i, j) está vacía, si en la columna j de S no aparece la letra y y en cada “caja” debe de estar los tres números del 1 al 9, es decir, para toda (i, y) con color rojo azul o negro en y no puede incidir dos aristas con algunos de estos colores, del mismo modo, para toda (i, y) con color verde, amarillo o gris en y no pueden incidir dos aristas con algunos de estos colores. Esta coloración siempre es posible, pues en principio estamos resolviendo un *Sudoku* que tiene solución (si no es posible, intenta probando con otra combinación para T ,

u otra coloración en G_1). Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.15.

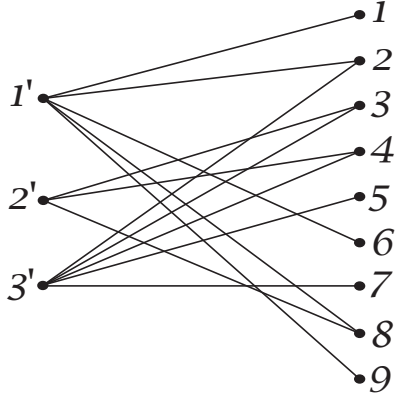


Figura 4.14. G_1

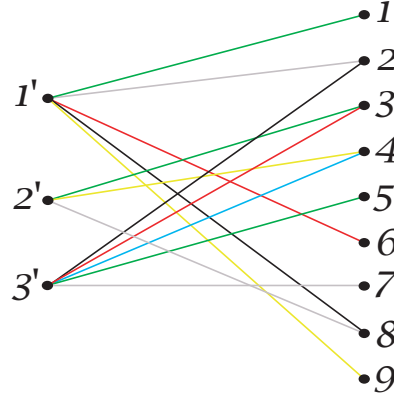


Figura 4.15. Una buena coloración en G_1

Si i es adyacente a y en G_1 y la arista (i, y) tiene color rojo, colocamos en número y en la fila i y la columna 4, si la arista (i, y) tiene color azul, colocamos en número y en la fila i y la columna 5, si la arista (i, y) tiene color negro, colocamos en número y en la fila i y la columna 6, si la arista (i, y) tiene color verde, colocamos en número y en la fila i y la columna 7, si la arista (i, y) tiene color amarillo, colocamos en número y en la fila i y la columna 8 y por último si la arista (i, y) tiene color gris, colocamos en número y en la fila i y la columna 9, para toda $i \in P$ $y \in Y$. Observa que la forma de colocar los número en las celdas es igual a la de los *Cuadros Latinos*. Obtenemos el cuadro que se muestra en la Tabla 4.7.

Repetimos el procedimiento para las columnas de \bar{T} . Sea $\bar{\Gamma}_j$ el conjunto de letras que no aparecen en la columna j de \bar{T} , $1' \leq j \leq 9'$.

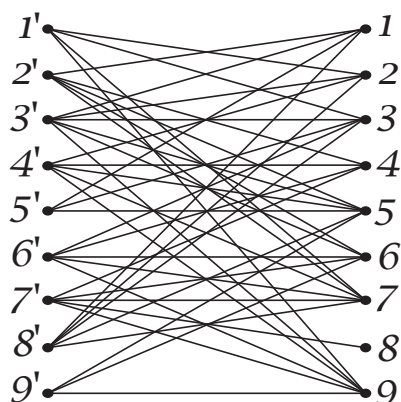
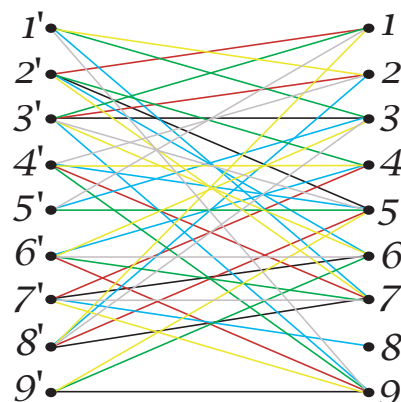
$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{1'} &= \{2, 3, 7, 9\} & \bar{\Gamma}_{4'} &= \{2, 4, 5, 7, 9\} & \bar{\Gamma}_{7'} &= \{4, 6, 7, 8, 9\} \\ \bar{\Gamma}_{2'} &= \{1, 4, 5, 6, 7\} & \bar{\Gamma}_{5'} &= \{1, 3, 5\} & \bar{\Gamma}_{8'} &= \{1, 2, 3, 5, 7\} \\ \bar{\Gamma}_{3'} &= \{1, 2, 3, 5, 6, 9\} & \bar{\Gamma}_{6'} &= \{3, 4, 6, 7, 9\} & \bar{\Gamma}_{9'} &= \{5, 6, 9\}. \end{aligned}$$

Sea G_2 una gráfica bipartita con bipartición $Q = \{1', 2', 3', \dots, 9'\}$ y $Y = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Si $j \in Q$ y $y \in Y$, j es adyacente a y si en la columna j no aparece la letra y . Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.16. Damos una *buena coloración* a G_2 con los colores rojo, azul, negro, verde, amarillo y gris. Asignemos estos colores a las filas 4, 5, 6, 7, 8 y 9 respectivamente. La arista (j, y) tiene color correspondiente a la fila i , si la celda (i, j) está vacía, si en la fila i de S no aparece la letra y y en cada “caja” deben de estar los número del 1 al 9, es decir, para toda (j, y) , con

5	3	4	6	7	8	1	9	2
6	2	7	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8				6				3
								1
4			8	2	1			
						2	8	
				8				
	8							4

Cuadro 4.7. *Sudoku*

$n \leq j \leq n+2$ tal que $n = \{1, 4, 7\}$, color rojo azul o negro en y no deben de incidir dos aristas con algunos de estos tres colores y para toda (j, y) , con $n \leq j \leq n+2$ tal que $n = \{1, 4, 7\}$, con color verde, amarillo o gris, en y no deben de incidir dos aristas con alguno de estos tres colores. Una vez más siempre se puede encontrar dicha coloración, pues en principio el *Sudoku* tiene solución. Obtenemos la gráfica que se muestra en la Figura 4.17.

Figura 4.16. G_2 Figura 4.17. Una buena coloración en G_2

Si j es adyacente a y en G_2 y la arista (j, y) tiene color rojo, colocamos el número y en la columna j y la fila 4, si la arista (j, y) tiene color azul, colocamos el número y en la columna j y la fila 5, si la arista (j, y) tiene color negro, colocamos el número y en la columna j y la fila 6, si la arista (j, y) tiene color verde, colocamos el número y en la columna j y la fila 7, si la arista (j, y) tiene color amarillo,

5	3	4	6	7	8	1	9	2
6	2	7	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	1	2	7	6	9	4	5	3
7	6	9	5	3	4	8	2	1
4	5	3	8	2	1	6	7	9
3	4	1	9	5	7	2	8	6
2	7	6	4	8	3	9	1	5
9	8	5	2	1	6	7	3	4

Cuadro 4.8. *Sudoku*

colocamos el número y en la columna j y la fila 8, si la arista (j, y) tiene color gris, colocamos el número y en la columna j y la fila 9. El resultado se muestra en la Tabla 4.8, que es una solución del *Sudoku*.

Encontrar las coloraciones para G_1 y G_2 puede no resultar tan fácil, sobre todo si el número de soluciones que tiene el problema es muy bajo. El método puede ser bastante útil para problemas con muchas soluciones, es decir, *Sudokus* con pocos números ya dados pero también para los problemas difíciles el método nos puede dar una buena orientación de por dónde va la solución.

Planaridad

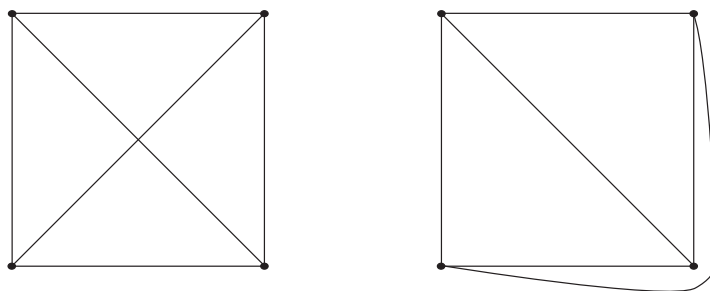
En este capítulo vamos a tratar dos problemas que tiene que ver con gráficas planas. En el primer problema veremos qué tan “plana” es una gráfica y cómo podemos aplanarla. En la segunda parte veremos un poco del famoso *teorema de los cuatro colores*; aunque no lo demostraremos debido a su gran dificultad, veremos resultados importantes de coloración y planaridad.

5.1. El problema de los circuitos impresos

Para construir un circuito eléctrico sobre una tarjeta de un material aislante es necesario imprimir en la tarjeta cintas conductoras que conecten a las componentes del circuito. Dichas cintas no se pueden cruzar entre sí, pues causarían un corto circuito, como los circuitos están hechos en un espacio de dos dimensiones, no es posible aislar los cruces y pasar una cinta sobre otra, lo que se hace es construir una tarjeta paralela a la anterior con un circuito impreso donde sea posible hacer la conexión deseada sin que se crucen las cintas conductoras. Los circuitos donde una gran cantidad de cintas conductoras se cruzan y no es posible evitar estos cruces, deben ser impresos en muchas tarjetas, que se acomodan una sobre otra, lo que nos lleva al problema de este capítulo, ¿Cuál es el mínimo número de tarjetas necesarias para construir un circuito dado?

5.1.1. Teoremas y definiciones

Definición 5.1.1 *Sea G una gráfica. G es plana si puede ser dibujada en el plano de manera tal que para cualesquiera dos aristas de G , éstas no se intersecten en*

Figura 5.1. K_4

ningún punto, excepto en los vértices de G .

K_4 es una gráfica plana. Como se muestra en la Figura 5.1, puede pasar que dos aristas se crucen; sin embargo es posible dibujar a K_4 de manera que esto no suceda.

Definición 5.1.2 Sea G una gráfica plana. Los ciclos de G dividen al plano en regiones, llamadas caras. Llamamos cara exterior a la cara que no está delimitada por aristas ni vértices. El número de caras de una gráfica G se denota por la letra f .

La gráfica de la Figura 5.2 tiene seis caras, en donde f_6 es la cara exterior. Es importante aclarar que el término *cara* sólo tiene sentido si estamos hablando de gráficas planas.

El siguiente teorema, aunque en apariencia no tiene nada que ver con gráficas planas, va a ser de gran ayuda para demostrar la Fórmula de Euler, que es uno de los resultados más importantes en la teoría de las gráficas planas.

Teorema 5.1.1 Sea G una gráfica conexa, entonces G contiene un árbol generador.

Demostración. Sea G una gráfica conexa y sea T el árbol de orden máximo tal que $T \subset G$. Queremos demostrar que $|V(T)| = |V(G)|$, pues como vimos en los preliminares, T es un árbol generador de G si todos los vértices de T están en G .

En general, para demostrar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos lo que se hace es probar que no puede pasar que uno de los conjuntos tenga menos elementos que el otro y tampoco puede pasar que tenga más elementos. Entonces para ver $|V(T)| = |V(G)|$ vamos a demostrar que las desigualdades

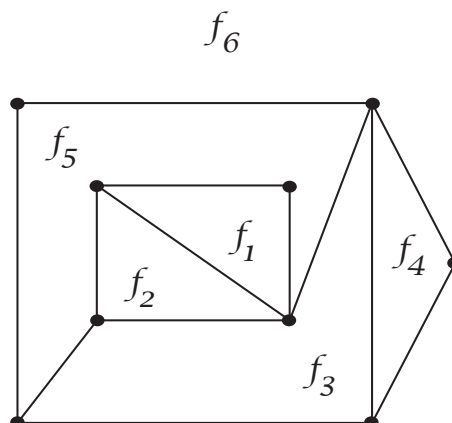


Figura 5.2.

$|V(T)| < |V(G)|$ y $|V(T)| > |V(G)|$ no se cumplen.

Supongamos que $|V(T)| < |V(G)|$. Consideremos la gráfica $H = G - T$, observemos que $H \neq \emptyset$, ya que G tiene más vértices que T . Vamos a escoger un vértice de T y un vértice de H , y a partir de estos dos vértices construiremos un árbol T' de orden mayor que T . Sea $u \in V(T)$ y sea $v \in V(H)$ tal que $v \notin V(T)$. Como G es conexa existe una *uv-trayectoria* en G , sea $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n = v)$ dicha trayectoria, escogamos el último vértice en C tal que ese vértice está en el árbol, pero el siguiente está en H , es decir, sea i el natural más grande tal que $u_i \in V(T)$ pero $u_{i+1} \in V(H)$. Siempre es posible encontrar tal vértice, pues sabemos que al menos $v \in V(H)$. Podemos formar el árbol $T' = T \cup \{(u_i, u_{i+1})\}$, el orden de T' es mayor que el orden de T , pues por construcción T' tiene un vértice más que T (el vértice de más es el vértice u_{i+1}), lo que contradice que T es de orden máximo, entonces no puede pasar que $|V(T)| < |V(G)|$.

Ahora supongamos que $|V(T)| > |V(G)|$, claramente este caso es imposible ya que por definición los árboles generadores son subgráficas de G .

Entonces, ya que las desigualdades $|V(T)| < |V(G)|$ y $|V(T)| > |V(G)|$ no se cumplen, tenemos que $|V(T)| = |V(G)|$ ■

Teorema 5.1.2 (Fórmula de Euler) *Sea G una gráfica conexa y plana. Sean p ,*

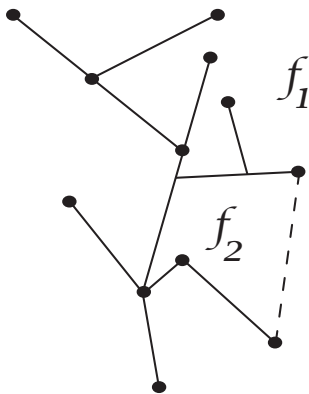


Figura 5.3. La arista punteada es la que añadimos

q y f el número de vértices, aristas y caras respectivamente de G . Entonces

$$p - q + f = 2$$

Demostración. Sea G conexa y plana. Observemos que podemos construir a G tomando su árbol generador y después añadiendo las aristas que no están en el árbol una a la vez, hasta obtener G .

Sea T el árbol generador de G . Sabemos que por el Teorema 1.1.3, de la página 14, que T tiene p -vértices y $(p-1)$ -aristas. Además, T tiene sólo una cara, pues T no tiene ciclos. Aplicando estos números a la fórmula obtenemos

$$p - q + f = p - (p - 1) + 1 = 2.$$

Sea T^* la gráfica que resulta de ir añadiendo aristas a T . Cada vez que añadimos una arista de G a T , la arista corta una cara de T^* en dos, es decir, formamos una nueva cara. Como se muestra en la Figura 5.3. En el caso de la primera arista que agregamos a T^* , obtenemos la cara exterior y la cara delimitada por el ciclo. Entonces, en este caso la fórmula de Euler para T^* es:

$$p - q_1 + f_1 = p - (q + 1) + (f + 1) = p - (p - 1 + 1) + 1 + 1 = 2.$$

Análogamente, con la segunda arista que agregamos a T^* vamos a obtener otra nueva cara. Entonces, en este caso la fórmula de Euler para T^* es:

$$p - q_2 + f_2 = p - (q + 1 + 1) + (f + 1 + 1) = p - (p - 1 + 1 + 1) + 1 + 1 + 1 = 2.$$

Continuamos con este procedimiento hasta obtener G . Observemos que por cada arista que agreguemos a T^* vamos a obtener una nueva cara. Sin embargo la fórmula de Euler va a valer lo mismo para T^* y T . Entonces, la fórmula de Euler para G también vale 2. Por lo tanto para toda gráfica G plana y conexa con p -vértices, q' -aristas y f' -caras, se cumple que $p - q' + f' = 2$. ■

Corolario 5.1.1 *Sea G una gráfica plana con p -vértices y q -aristas, $p \geq 3$. Entonces $q \leq 3p - 6$*

Demostación Sea G plana con f caras. Si $p = 3$, entonces $q \leq 3$, así que $q \leq 3 = 3(3) - 6$; por lo tanto el corolario se cumple. Supongamos que $p > 3$. Sean f_1, f_2, \dots, f_n las caras de G . Como cada cara tiene al menos tres aristas, pues el ciclo más pequeño que se puede formar es el de longitud tres, entonces

$$\sum_{i=1}^n |A(f_i)| \geq 3f. \quad (5.1)$$

Por otro lado, cada arista está en a lo más dos caras, entonces

$$\sum_{i=1}^n |A(f_i)| \leq 2q. \quad (5.2)$$

Pegando las desigualdades (5.1) y (5.2), obtenemos que $3f \leq 2q$, si despejamos f el resultado nos da, $f \leq \frac{2}{3}q$. Despejando f de la formula de Euler obtenemos

$$2 - p + q = f \leq \frac{2}{3}q.$$

Finalmente despejamos q para llegar al resultado deseado

$$q \leq 3p - 6. \quad (5.3)$$

■

Corolario 5.1.2 *Sea G una gráfica plana con p -vértices y q -aristas tal que G no contiene a K_3 como subgráfica. Entonces $q \leq 2p - 4$.*

Demostración Por su parecido con la demostración del corolario anterior se deja como ejercicio al lector. Pista: en la demostración del corolario anterior decíamos que cada cara de G tiene al menos tres aristas; sin embargo, las hipótesis de este teorema nos dicen que G no contiene a K_3 como subgráfica, entonces las caras de G deben de tener al menos cuatro aristas.

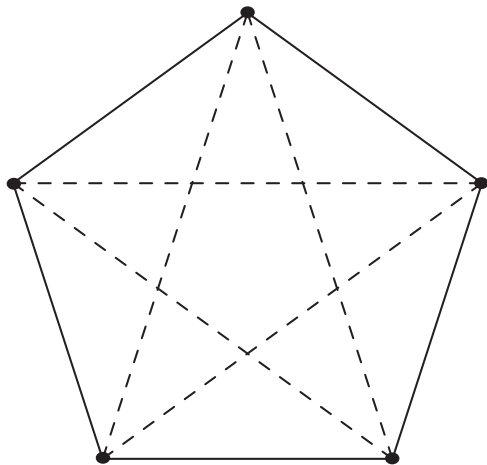


Figura 5.4. La línea continua y punteada son los dos ciclos que se necesitan para formar a K_5

5.1.2. Modelo y solución

Primero modelemos el circuito con una gráfica. Los vértices de la gráfica corresponden a las componentes que deseamos conectar y las adyacencias entre vértices están dadas por las cintas conductoras que conectan a las componentes eléctricas. Lo que necesitamos es encontrar la mínima partición de las aristas de G tal que cada partición induzca una gráfica plana. En otras palabras, necesitamos encontrar el *espesor* de G .

Definición 5.1.3 *El espesor de una gráfica G está definido por el mínimo número de gráficas planas que superpuestas forman a G . Se denota por $\theta(G)$ o $t(G)$*

Por ejemplo, el *espesor* de una gráfica plana cualquiera es uno, mientras que el *espesor* de K_5 es dos (pues como veremos mas adelante K_5 no es plana), ya que si superponemos dos ciclos de longitud cinco obtenemos la gráfica K_5 , como se muestra en la Figura 5.4.

Hasta el momento sólo se conoce una cota inferior para el *espesor* de una gráfica cualquiera. A continuación daremos esta cota que sin embargo en algunos casos no es una buena aproximación al valor real.

Teorema 5.1.3 *Sea G una gráfica con p -vértices y q -aristas, si $p \geq 3$, entonces*

$$\theta(G) \geq \left\lceil \frac{q}{3p - 6} \right\rceil.$$

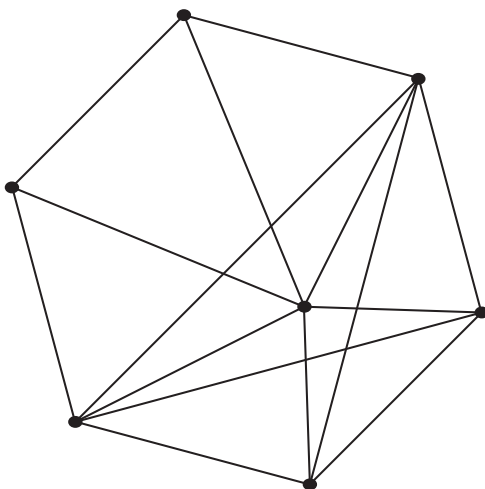


Figura 5.5. La gráfica que modela un circuito

Demostración. Por el Corolario 5.1.1, el máximo número de aristas que una gráfica plana de orden p tiene es $3p - 6$. Sabemos que $\theta(G) = 1$ si G es plana, entonces si dividimos entre $3p - 6$ (5.3) del Corolario 5.1.1, obtenemos

$$1 \geq \frac{q}{3p - 6}.$$

si G no es plana $\theta(G) \geq 1$, por lo tanto

$$\theta(G) \geq \left\lceil \frac{q}{3p - 6} \right\rceil. \quad \blacksquare$$

Por el teorema anterior sabemos que con menos de $\frac{q}{3p-6}$ tarjetas no es posible hacer que cada tarjeta del circuito eléctrico se pueda representar con una gráfica plana, sin embargo no necesariamente con $\frac{q}{3p-6}$ tarjetas es posible hacerlo. Por ejemplo, supongamos que la gráfica que modela nuestro circuito es la que se muestra en la Figura 5.5, esta gráfica tiene siete vértices y quince aristas, entonces por el teorema anterior tenemos que

$$\theta(G) \geq \left\lceil \frac{q}{3p - 6} \right\rceil = \left\lceil \frac{15}{3(7) - 6} \right\rceil = 1,$$

por lo tanto el *espesor* de esta gráfica es mayor o igual a 1. Podríamos pensar que tal vez es suficiente con una tarjeta para que el circuito funcione correctamente,

pero también cabe la posibilidad de que una tarjeta no sea suficiente. Hay una gran cantidad de gráficas tal que si les aplicamos el teorema anterior, el *espesor* nos resulta mayor o igual a uno y sin embargo no necesariamente son gráficas planas. Es por esto que para resolver bien el problema es necesario saber cuándo una gráfica es plana o no.

El matemático polaco Kazimierz Kuratowski descubrió y demostró en 1930 las condiciones necesarias para que una gráfica **no** sea plana [28]. Vamos a analizar cuáles son estas condiciones y después enunciaremos sin demostrar el Teorema de Kuratowski, que nos dice cuándo una gráfica no es plana.

Primero veamos que si una gráfica es plana, entonces todas sus subgráficas también lo son (se deja como ejercicio para el lector probar este hecho), por lo tanto si una gráfica G no es plana, entonces G contiene al menos una subgráfica que tampoco es plana. Una de las condiciones del Teorema de Kuratowski para que una gráfica no sea plana es que contenga como subgráficas a las gráficas K_5 o $K_{3,3}$. Entonces vamos a demostrar que K_5 y $K_{3,3}$ no son planas.

Corolario 5.1.3 K_5 y $K_{3,3}$ no son planas.

Demostración. Para demostrar que estas gráficas no son planas vamos a utilizar los corolarios 5.1.1 y 5.1.2. Primero demostraremos por contradicción que K_5 no es plana.

Supongamos que K_5 es plana, entonces por el corolario 5.1.2 esta gráfica cumple que

$$q \leq 3p - 6.$$

Como K_5 tiene cinco vértices y diez aristas, entonces $10 \leq 3(5) - 6 = 9$ lo cual es imposible. Por lo tanto K_5 no es plana.

Se deja como ejercicio al lector demostrar que $K_{3,3}$ no es plana. Pista: Supón que $K_{3,3}$ es plana y utiliza el corolario 5.1.2. ■

La siguiente condición del Teorema de Kuratowski involucra una nueva definición, que es la *subdivisión* de G . La subdivisión de G es simplemente insertarle un nuevo vértice a G en alguna arista. Definamos formalmente la *subdivisión* de G .

Definición 5.1.4 Una subdivisión de G resulta de dividir con uno o mas vértices algunas de las aristas de G (ver Figura 5.6).

Cualquier gráfica plana que *subdividamos* va a seguir siendo plana, pues lo único que hacemos es ponerle vértices a las aristas, mas no estamos agregando aristas

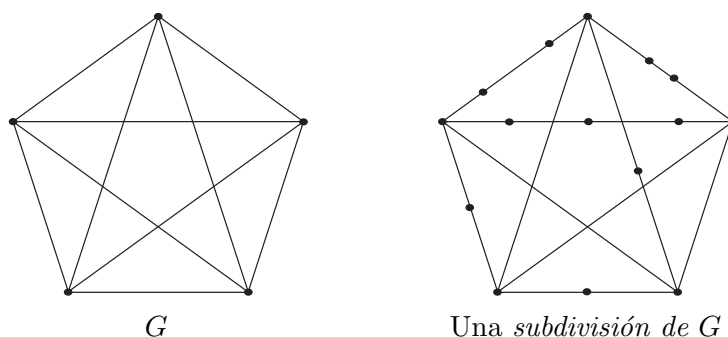


Figura 5.6.

que puedan alterar la planaridad de G . Por lo tanto si G resulta de la *subdivisión* de una gráfica cualquiera no plana, entonces G no es plana. Por ejemplo, la gráfica que se encuentra a la izquierda en la Figura 5.6 es K_5 y, como vimos, no es plana; entonces su *subdivisión* tampoco es plana.

Hasta el momento sabemos que una gráfica G no es plana si:

- G contiene a K_5 o $K_{3,3}$ como subgráficas.
- G resulta de la *subdivisión* de una gráfica cualquiera no plana.

Combinando estos dos puntos obtenemos el Teorema de Kuratowski. A este teorema también se le conoce con el nombre de Teorema de Pontryagin-Kuratowski, sobre todo en la antigua Unión Soviética, debido a que el matemático ruso Lev Semenovich Pontryagin fue el primero en probarlo.

Teorema 5.1.4 (Teorema de Kuratowski) *Sea G una gráfica. G no es plana si y sólo si G contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$ como subgráfica. [28]*

La demostración del Teorema de Kuratowski es en realidad bastante compleja, por lo que no la incluiremos en este texto. Volvamos a la gráfica que se muestra en la Figura 5.5. Vimos que el *espesor* de esta gráfica era mayor o igual a 1 y nosotros queríamos saber si esta gráfica era plana. Pues bien, esta gráfica contiene a K_5 como subgráfica (demostrar este hecho se deja como ejercicio para el lector), entonces por el Teorema de Kuratowski esta gráfica no es plana.

Ya sabemos, por lo menos, que el espesor de nuestra gráfica es al menos dos. Desafortunadamente no hay una forma fácil de saber cuál es el espesor de una gráfica cualquiera, por lo que a partir de este punto no nos queda más que el “ensayo

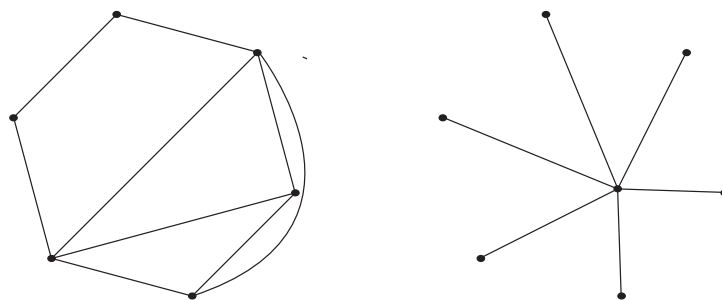


Figura 5.7.

y error” para saber exactamente cuál es el *espesor* de esta gráfica.

No está del todo perdido este problema, ya que el *espesor* de esta gráfica es efectivamente dos, es decir, necesitamos dos tarjetas para que las cintas conductoras que conectan a los circuitos no se crucen entre sí. La Figura 5.7 muestra las dos tarjetas.

Por otro parte, si G es una gráfica completa, la cota inferior para el *espesor* de este tipo de gráficas resulta increíblemente precisa en la mayoría de los casos. A continuación probaremos esta cota y finalizaremos con la fórmula para el *espesor* de una gráfica completa.

Corolario 5.1.4 *Sea K_p una gráfica cualquiera, entonces*

$$\theta(K_p) \geq \left\lfloor \frac{p+7}{6} \right\rfloor.$$

Demostración. Es fácilmente verificable que $\theta(K_p) = 1$ para $1 \leq p \leq 4$, entonces

$$1 \geq \left\lfloor \frac{11}{6} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{10}{6} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{9}{6} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{8}{6} \right\rfloor$$

por lo tanto el Corolario se cumple para $1 \leq p \leq 4$. Supongamos que $p \geq 5$. Sabemos que el tamaño de K_p es $p(p-1)/2$, entonces por el Teorema 5.1.3

$$\theta(K_p) \geq \left\lceil \frac{\frac{p(p-1)}{2}}{3p-6} \right\rceil = \left\lceil \frac{p(p-1)}{6(p-2)} \right\rceil.$$

Necesitamos demostrar que

$$\left\lceil \frac{p(p-1)}{6(p-2)} \right\rceil = \left\lfloor \frac{p+7}{6} \right\rfloor.$$

Como $p \geq 5$, por el algoritmo de la división obtenemos que $p + 7 = 6n + r$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq r \leq 5$. Si dividimos entre seis la igualdad anterior, entonces

$$\left\lceil \frac{p+7}{6} \right\rceil = \left\lfloor n + \frac{r}{6} \right\rfloor = n. \quad (5.4)$$

Por otro lado

$$\left\lceil \frac{p(p-1)}{6(p-2)} \right\rceil = \left\lceil \frac{(p+7)(p-2) - 6(p-2) + 2}{6(p-2)} \right\rceil$$

simplificando la ecuación de arriba y sustituyendo por la ecuación 5.4,

$$\left\lceil \frac{p+7}{6} - 1 + \frac{2}{6(p-2)} \right\rceil = \left\lfloor n + \frac{r}{6} - 1 + \frac{2}{6(p-2)} \right\rfloor.$$

Como $p \geq 5$, entonces

$$\frac{2}{6(p-2)} < \frac{1}{6}$$

sumamos $r/6$ a ambos lados de la desigualdad

$$0 < \frac{r}{6} + \frac{2}{6(p-2)} < \frac{1}{6} + \frac{r}{6} \leq 1,$$

entonces para toda $0 \leq r \leq 5$ se cumple que

$$0 < \frac{r}{6} + \frac{2}{6(p-2)} < 1.$$

Por lo tanto

$$\left\lfloor n + \frac{r}{6} - 1 + \frac{2}{6(p-2)} \right\rfloor = n \quad (5.5)$$

Igualando (5.4) y (5.5)

$$\left\lceil \frac{p(p-1)}{6(p-2)} \right\rceil = \left\lfloor \frac{p+7}{6} \right\rfloor.$$

■

Como mencionamos anteriormente, la cota del corolario anterior en la mayoría de los casos se aproxima mucho al *espesor* de una gráfica completa. Gracias a los trabajos de Beinke, Harary, Vasak, Alekseev y Gonchakov [9], se a logrado establecer una fórmula para el *espesor* de una gráfica completa. A continuación enunciaremos la fórmula sin demostración.

Teorema 5.1.5 *El espesor de K_p es*

$$\theta(K_p) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{p+7}{6} \right\rfloor & \text{si } p \neq 9, 10 \\ 3 & \text{si } p = 9, 10. \end{cases}$$

5.2. El teorema de los cuatro colores

¿Es posible dibujar un mapa con cuatro colores de manera tal que regiones fronterizas no tengan el mismo color?

Historia

Como mencionamos al principio de la tesis, éste fue uno de los problemas que más intrigó a la comunidad matemática por más de un siglo. Veamos cómo fue el desarrollo histórico del problema y qué métodos se utilizaron para encontrar la solución.

La primera referencia escrita que se tiene del problema es en una carta con fecha del 23 de octubre de 1852, que le envió Augustus de Morgan a Sir William Rowan Hamilton. En la carta, de Morgan escribió que el problema se lo había planteado Frederick Guthrie, uno de sus estudiantes. Tres días después Hamilton le envió una carta a de Morgan, diciéndole que por el momento no estaba interesado en responder a su pregunta. Tiempo después en 1880, Guthrie reveló que el problema se lo había planteado su hermano Francis Guthrie.

En 1879 Alfred Kempe anunció que había encontrado la prueba del teorema, sin embargo en 1880 el matemático británico Percy Heawood demostró que la prueba de Kempe era incorrecta, pero gracias a herramientas usadas en la prueba de Kempe, Heawood logró demostrar que todos los mapas se pueden dibujar con a lo más cinco colores. Otra prueba fue publicada por Tait en 1880, aunque en 1981 Petersen encontró un fallo en los argumentos de Tait.

Pasaron los años y nadie daba una solución correcta al problema. Ya en la década de los 60's, el matemático alemán Heinrich Heesch desarrolló métodos computacionales en busca de una prueba. Finalmente, en 1976 el teorema fue probado por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois. Para completar su prueba se necesitó que varias computadoras trabajaran durante más de 1000 horas. Debido a la "fuerza bruta" que se utilizó para demostrar el teorema, la prueba no fue bien acogida dentro de la comunidad matemática.

En un artículo escrito en 1998 Robin Thomas comentó acerca de la prueba de Appel y Haken:

“Voy a resumir las dificultades de la prueba de Appel y Haken en dos puntos: Parte de la prueba utiliza la computadora y no puede ser verificada a mano. Aunque existe una parte que es verificable a mano, no ha

sido, hasta donde yo sé, demostrada en su totalidad... Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y yo, hemos intentado verificar la prueba de Appel-Haken, pero prontamente nos rendimos y decidimos que era más provechoso trabajar en nuestra propia prueba [17].”

Dos años antes, en 1996, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas encontraron una prueba mas corta, pero ellos tampoco pudieron demostrarlo sin utilizar computadoras.

En el 2004, Benjamin Werner y Georges Gonthier formalizaron la prueba de Appel y Hakken utilizando un programa de computación llamado *Cog** que significa gallo en francés.

Como la demostración del teorema de los cuatro colores requiere, además de una computadora, conocimientos bastante avanzados, nosotros en realidad vamos a demostrar el teorema de los cinco colores. En vez de dibujar el mapa con cuatro colores, utilizaremos a lo más cinco.

5.2.1. Teoremas y definiciones

Definición 5.2.1 *Sea G una gráfica tal que G tiene una coloración por vértices con al menos dos colores. Sean a y b dos colores cualesquiera. La subgráfica inducida por los vértices con los colores a y b de G se le denota por $G_{a,b}$.*

Corolario 5.2.1 *Sea G una gráfica conexa con p -vértices y q -aristas, $p \geq 3$. Si G es plana, entonces $\delta(G) \leq 5$.*

Demostración. Por el Teorema 1.1.1 de la sección 1.1 sabemos que

$$\sum_{i=1}^p \delta(v_i) = 2q \quad v_i \in V(G).$$

Directamente de la definición de grado mínimo sabemos que (la demostración de la desigualdad se deja como ejercicio para el lector)

$$p \cdot \delta(G) \leq \sum_{i=1}^p \delta(v_i) \quad v_i \in V(G)$$

*El programa *cog* es un asistente de pruebas matemáticas, que permite verificar si la prueba es correcta o no.

por lo tanto

$$p \cdot \delta(G) \leq 2q. \quad (5.6)$$

Por otra parte, como G es plana y $p \geq 3$, entonces por el Corolario 5.1.1, $q \leq 3p - 6$. Entonces si sustituimos q en la ecuación (5.6)

$$p \cdot \delta(G) \leq 2(3p - 6) = 6p - 12$$

La desigualdad anterior solo se cumple si $\delta(G) \leq 5$. Vamos a demostrar este hecho por contradicción. Supongamos que $\delta(G) \geq 6$, entonces

$$6 \cdot p \leq p \cdot \delta(G) \leq 6p - 12,$$

por lo tanto $6 \cdot p \leq 6p - 12$, despejando p y resolviendo la ecuación obtenemos que $0 \leq -12$, lo cual es imposible, por lo tanto $\delta(G) \leq 5$. ■

5.2.2. Modelo y solución

Como siempre, modelemos el mapa con una gráfica. A cada territorio de nuestro mapa le asignamos un vértice, y dos vértices son adyacentes si y sólo si los territorios correspondientes a esos vértices son fronterizos. Por ejemplo, tomemos la porción del mapa de México donde están el Distrito Federal y los estados de Morelos, Tlaxcala, Puebla, Hidalgo y el Estado de México. Si asignamos los vértices DF, M, T, P , y EM a cada estado respectivamente, la gráfica queda como se muestra en la Figura 5.8.

Antes de asignarle colores a los estados, veamos que todos los mapas de pueblos, ciudades o países se modelan con gráficas planas. Para demostrar esta afirmación vamos a suponer lo contrario. Imagina que existe un mapa que no se pueda modelar con una gráfica plana. Entonces, como la gráfica no es plana, existen al menos un par de vértices tales que la arista que los une forzosamente cruza al menos otra arista. Esto se traduciría en el mapa como que existen un par de estados que son fronterizos y sin embargo hay una frontera de otros dos estados entre estos dos, lo cual resulta imposible, pues si dos estados son fronterizos no existe nada entre ellos. Es por esta razón que los mapas se modelan con gráficas planas.

Ya sabemos que los mapas son gráficas planas. Entonces para resolver el problema necesitamos saber si siempre es posible colorear los vértices de una gráfica plana con a lo más cinco colores. En la coloración del mapa es necesario que países fronterizos no tengan el mismo color, por lo que necesitamos encontrar en la gráfica una coloración en donde los vértices adyacentes no tengan el mismo color, es decir,

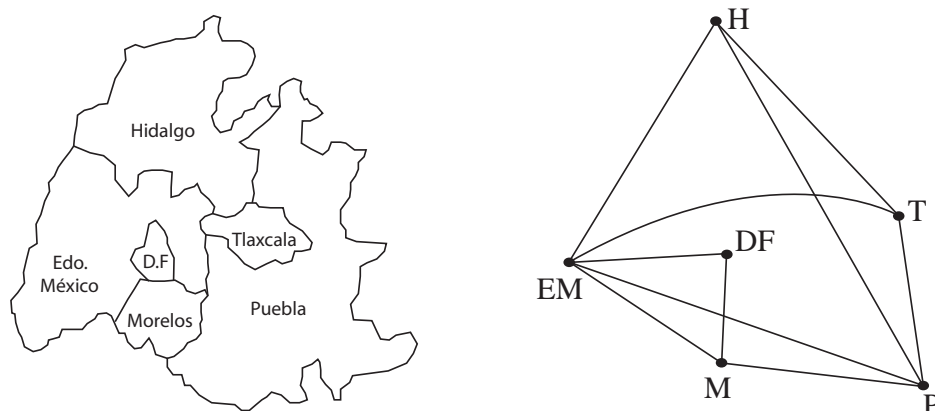


Figura 5.8. El mapa y su gráfica

necesitamos encontrar en la gráfica una *buena coloración* por vértices con a lo más cinco colores.

El siguiente teorema, descubierto y probado por Heawood, nos dice que siempre es posible dar una *buena coloración* por vértices a una gráfica plana con a lo más cinco colores, y como sabemos que los mapas pueden ser modelados con gráficas planas, nuestro problema quedará resuelto.

Teorema 5.2.1 *Sea G una gráfica conexa con p -vértices, $p \geq 3$. Si G es plana, entonces $\chi(G) \leq 5$.*

Demostración. Vamos a demostrar este teorema por inducción sobre p . El caso en que p es igual a uno, dos, tres, cuatro o cinco, es bastante claro, ya que podemos asignar un color a cada vértice y el teorema se cumple.

Hipotesis de Inducción. Supongamos que el teorema se cumple para gráficas G' conexas y planas con p' -vértices y tales que $p' < p$.

Para demostrar el teorema vamos a considerar el vértice de grado mínimo de G y vamos a ver cómo debemos colorear sus vértices adyacentes y a él para obtener una *buena coloración* de G con a lo más cinco colores.

Sea G conexa y plana con p -vértices. Sea $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) = \delta(G)$, es decir, tomamos un vértice de grado mínimo. Como G es plana y conexa y $p > 5 > 3$, entonces por el Corolario 5.2.1, $\delta(G) \leq 5$. Consideremos la gráfica $G' = G - v$ con $(p' = p - 1)$ -vértices. Resulta inmediato que G' es plana, ya que no agregamos aristas que alteraran la planaridad, por lo tanto, cada componente conexa de G' es

plana. Por otro lado, por como construimos G' , tenemos que $p' < p$, entonces por hipótesis de inducción cada componente conexa de G' tiene una *buena coloración* por vértices con a lo más cinco colores, por lo tanto $\chi(G') \leq 5$.

Como $G' = G \setminus \{u\}$, podemos colorear a $G \setminus \{v\}$ con a lo más cinco colores, de manera que vértices adyacentes en $G \setminus \{v\}$ no tengan el mismo color. Vamos a ver cuál puede ser el grado de v en G y cómo debemos colorear v para que $\chi(G) \leq 5$. El grado del vértice v puede ser de tres formas diferentes.

Caso i) Supongamos que $\delta_G(v) < 5$. Como v es adyacente a menos de cinco vértices y tenemos cinco colores, podemos colorear el vértice v con uno de los colores no usados en los vértices que son adyacentes a él. Entonces, como la única diferencia entre las gráficas G y G' es el vértice v y a este vértice lo pudimos colorear de manera tal que sus vértices adyacentes no tuvieran el mismo color, entonces $\chi(G) \leq 5$.

Caso ii) Supongamos que $\delta(v) = 5$ y alguno de los cinco colores no es usado en los vértices adyacentes a v . Entonces le podemos asignar a v el color que no es usado en los vértices adyacentes. Por lo tanto, como en el caso anterior, obtenemos una *buena coloración* de G tal que $\chi(G) \leq 5$.

Caso iii) Supongamos que $\delta(v) = 5$ y que los cinco colores están siendo usados por los vértices adyacentes a v . Sean v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 los vértices adyacentes a v en G tal que v_i tiene asignado el color i tales que para toda $1 \leq i \leq 5$. Arreglamos estos vértices como se muestra en la Figura 5.9.

Sea $G_{1,3}$ la subgráfica inducida por los vértices con los colores 1 y 3 de G' . Entonces los vértices $\{v_1, v_3\} \subseteq G_{1,3}$. Además por construcción $G_{1,3}$ tiene una *buena coloración* por vértices con los colores 1 y 3, ya que los vértices de $G_{1,3}$ también están en G' y G' tiene una *buena coloración*. Ahora vamos a analizar, una vez más, por casos cómo deben de estar acomodados este par de vértices para ver qué modificaciones le podemos hacer a la coloración de G' de manera tal que se cumpla el teorema.

Caso iii.i) Supongamos que los vértices v_1 y v_3 están en distintas componentes conexas de $G_{1,3}$. Sea $G'_{1,3}$ la componente conexa de $G_{1,3}$ que contiene a v_1 . Un ejemplo de $G'_{1,3}$ se muestra en la Figura 5.10, en donde los números al lado de los vértices en esta figura nos dicen cuál es el color del vértice. Ahora intercambiemos los colores de $G'_{1,3}$, es decir, los vértices con color 1 los coloreamos con el color 3 y viceversa. Esta nueva coloración de $G'_{1,3}$ sigue siendo una *buena coloración* por

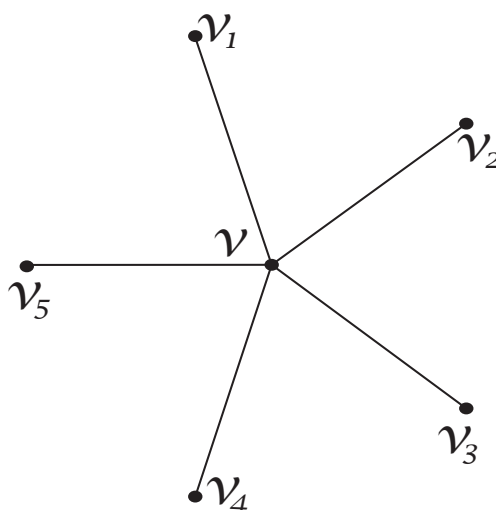


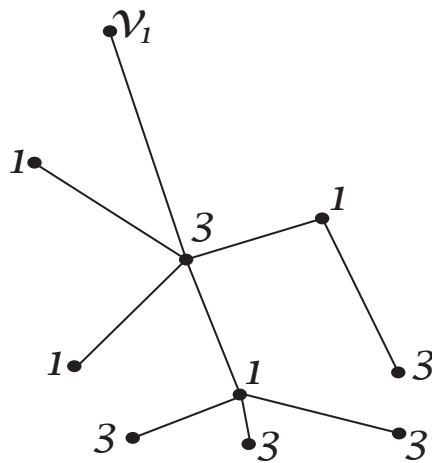
Figura 5.9.

vértices.

Observa que si coloreamos a los vértices de G' con la nueva coloración de $G'_{1,3}$ y al resto de los vértices les dejamos su misma coloración, G' sigue teniendo una *buena coloración* por vértices, ya que por construcción todos los vértices de G' son adyacentes a los vértices de $G'_{1,3}$ no tienen el color 1 ni el color 3 (el por qué de este hecho se deja como ejercicio al lector, Hint: fíjate en la construcción de $G'_{1,3}$)

Coloreemos los vértices de G con la nueva coloración de G' . En esta nueva coloración de G , el vértice v_1 tiene ahora el color 3 (recuerda que $v_1 \in G'_{1,3}$ y a esta gráfica le intercambiamos colores). Entonces, v es adyacente a vértices con los colores 2, 3, 4 y 5 (en particular tiene dos vértices adyacentes con color 3, v_1 y v_3 , sin embargo este par de vértices no son adyacentes entre sí, recuerda que por hipótesis estaban en diferentes componentes conexas), por lo que si le asignamos a v el color 1 obtenemos una *buena coloración* por vértices de G tal que $\chi(G) \leq 5$.

Caso iii.ii) Supongamos que los vértices v_1 y v_3 están en la misma componente conexa de $G_{1,3}$. Sea $G''_{1,3}$ la componente conexa donde están v_1 y v_3 . Como $G''_{1,3}$ es conexa, por definición de conexidad, existe una trayectoria T que va del vértice v_1 al v_3 , además por la construcción de $G_{1,3}$ los colores de los vértices de T están alternados, como se muestra en la Figura 5.11.

Figura 5.10. $G'_{1,3}$ Figura 5.11. T

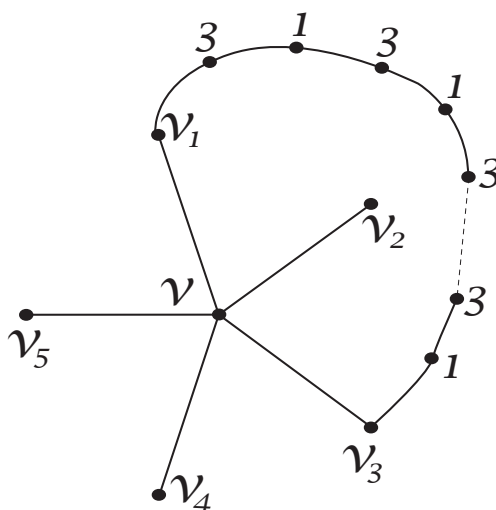


Figura 5.12. El ciclo C encierra al vértice v_2

Por otro lado, sabemos que v es adyacente a v_1 y v_3 , entonces podemos formar el ciclo $C = ((v, v_1) \cup T \cup (v_3, v))$. Observa que podemos encerrar al vértice v_2 dentro del ciclo C o al vértice v_4 . Supongamos que encerramos al vértice v_2 , como se muestra en la Figura 5.12. Entonces como G es plana **no** existe una trayectoria del vértice v_2 al vértice v_4 que alterne únicamente con los colores 2 y 4; necesariamente esta trayectoria debe de contener un vértice de color 1 o 3 (recuerda este hecho).

Ahora tomemos a $G_{2,4}$ la subgráfica inducida por los vértices con colores 2 y 4 de G . Por lo anterior, como v_2 está dentro del ciclo C , entonces v_2 y v_4 están en diferentes componentes conexas de $G_{2,4}$, recuerda que **no** existe una trayectoria de v_2 a v_4 que alterne únicamente con los colores 2 y 4, por lo que estos vértices no pueden estar en la misma componente conexa. A partir de este punto la demostración se sigue casi igual que la del *Caso iii.i*, por lo que se deja como ejercicio al lector (Hint: Recuerda que los vértices v_2 y v_4 están en diferentes componentes conexas de $G_{2,4}$). Si todo te salió bien concluíste que $\chi(G) \leq 5$.

Por lo tanto, si $\delta(v) = 5$ y los cinco colores están siendo usados por los vértices adyacentes a v , siempre es posible dar una *buena coloración* a G tal que $\chi(G) \leq 5$. Tenemos que por los *Casos i, ii* y *iii*, para toda gráfica plana y conexa se cumple que $\chi(G) \leq 5$. ■

Por el teorema anterior sabemos que cualquier mapa lo podemos dibujar con



Figura 5.13. Coloración del mapa

a lo más cinco colores, en particular el mapa que se muestra en la Figura 5.8 se puede dibujar con cuatro colores, como se muestra en la Figura 5.13. Una cosa que es importante recalcar es lo difícil que puede resultar bajarle aunque sea en uno a alguna cota. Desde que Heawood demostró que un mapa se podía dibujar con al menos cinco colores diferentes pasaron más de cien años hasta que, con la ayuda de unas computadoras, lograron bajarle a cuatro el número de colores. Del mismo modo pasa, como vimos en capítulos anteriores, con los *números de Ramsey* y una infinidad de temas que todavía falta por descubrir.

CAPÍTULO 6

Números de Ramsey

Hay pocos temas en las matemáticas tan explorados y con tan pocas cosas descubiertas, como los números de Ramsey.

6.1. Los excéntricos de Polanco

Una pareja de excéntricos de Polanco organiza una cena para todos sus amigos. El hombre desea acomodar a sus invitados de manera tal que en la mesa donde se sienten nadie se conozca entre sí, pues así conoces nuevos amigos; por otro lado, la mujer desea que en una misma mesa se sienten puros conocidos, para evitar esos silencios que son tan incómodos. Como están muy felizmente casados y no quieren pelear por este desacuerdo, organizan una mesa que complazca al hombre y otra mesa que complazca a la mujer. ¿Cuál es el mínimo número de personas que deben asistir para que al menos una de las dos mesas cumpla los deseos del hombre o de la mujer? Como veremos a lo largo del capítulo, éste es un problema que se resuelve usando *números de Ramsey*.

Historia

Los *números de Ramsey* deben su nombre al matemático, economista y filósofo Frank Plumpton Ramsey. Ramsey nació en Cambridge en 1903. A los doce años entró en el *Winchester College*, cinco años después, ganó una beca para estudiar matemáticas en el *Trinity College*, en Cambridge, donde se graduó en 1923.

Después de graduarse Ramsey viajó a Viena, a su regresó, en 1924, fue electo

como *fellow** del *King's College* de Cambridge, siendo la segunda persona en la historia de la universidad en ganar este reconocimiento sin antes haber estudiado en esta.

En 1930 se publicó *En un problema de la lógica formal* uno de sus artículos sobre matemáticas. En este artículo, Ramsey, examina los métodos para determinar la consistencia de una fórmula lógica, e incluye algunos teoremas de combinatoria que dieron origen a una nueva área de las matemáticas llamada la Teoría de Ramsey. Harary comentó al respecto de esta teoría.

“La teoría de Ramsey, es ahora, una rama de las matemáticas establecida y en crecimiento. Sus resultados son por lo general fáciles de enunciar y difíciles de probar... Los problemas sin resolver abundan, y las preguntas abiertas crecen mas rápido que las soluciones a los problemas existentes.”

En economía Ramsey escribió un par de artículos, *Una contribución a la teoría de los impuestos* y *Una teoría matemática del ahorro*. Sin embargo, era la filosofía el verdadero amor de Ramsey. Escribió una gran cantidad de artículos como *Universals*, *Hechos y proposiciones*, *Conocimiento*, *Teorías*, entre otros.

El filosofo británico R. B. Braithwaite escribe al respecto de Ramsey:

“Su enorme tamaño (1.90 metros) equiparaba el tamaño de su intelecto... [22]”

Cuándo tenía 27 años Ramsey sufrió un ataque de ictericia (una enfermedad del hígado) y murió después de la operación.

6.1.1. Modelo y solución

Primero describamos el problema en términos matemáticos. Supongamos que en la mesa A se sientan m personas y en la mesa B se sientan n personas. Todos los invitados de la mesa A se conocen entre ellos, mientras que los invitados de la mesa B no se conocen entre sí. ¿Cuál es el mínimo número de invitados que deben asistir a la fiesta de manera que al menos una de las dos mesas cumpla con la condiciones de A o de B ?

Vamos a representar a los invitados de la fiesta con una gráfica que nos diga cuándo dos personas se conocen y cuándo dos personas no se conocen. Imagina que tenemos p invitados a la fiesta, podemos representar su situación con una gráfica

*Este premio es el mas grande reconocimiento que otorga el *King's College*

G , donde los vértices corresponden a los invitados y dos vértices son adyacentes si y sólo si los invitados correspondientes se conocen entre ellos.

El problema consiste en encontrar la gráfica G con orden mínimo, tal que G contenga una gráfica completa K_m o G^c contenga una gráfica completa K_n . Si podemos encontrar a K_m o a K_n como subgráficas de G o G^c , respectivamente el problema queda resuelto, pues observa que si K_m es subgráfica de G , quiere decir que en la fiesta hay m invitados que se conocen entre sí, entonces podemos sentar a esos invitados en la mesa A , ya que al ser K_m una gráfica completa todos sus vértices son adyacentes en G . Por otro lado, si K_n es una subgráfica de G^c , quiere decir que en G hay n invitados que no se conocen entre sí, entonces los podemos sentar en la mesa B , ya que al ser K_n una gráfica completa todos sus vértices son adyacentes en G^c , entonces en G ninguno de esos vértices es adyacente a ningún otro. En otras palabras, necesitamos encontrar el número de Ramsey $r(K_m, K_n)$, pero antes de emprender esta difícil tarea vamos a dar la definición formal de estos números.

Definición 6.1.1 Sean G_1 y G_2 dos gráficas. Definimos el número de Ramsey $r(G_1, G_2)$ como el natural p más pequeño, tal que para toda gráfica G de orden p cualquiera de las siguientes condiciones se cumple: G_1 es una subgráfica de G o G_2 es una subgráfica de G^c .

Estudiemos estos números desde un nuevo enfoque, que tal vez nos ayuden a comprenderlos más. Consideremos una gráfica G de orden p y su complemento. Tomemos la gráfica completa con p vértices K_p , es claro que todos los vértices de G y G^c están contenidos en K_p ; más aún, $G \subseteq K_p$ y $G^c \subseteq K_p$ (el por qué de esta aserción se deja al lector). Los conjuntos de aristas $A(G)$ y $A(G^c)$ generan una partición del conjunto de aristas de K_p , pues por la definición del complemento de una gráfica, si una arista está en G , esa misma arista no está en G^c , es decir, $A(G) \cap A(G^c) = \emptyset$, y además $A(G) \cup A(G^c) = A(K_p)$ (el por qué de la igualdad anterior se deja al lector). Si las aristas que están en K_p y en G las coloreamos con rojo y las aristas que están en K_p y en G^c las coloreamos con azul, podemos dar una definición equivalente a la definición 6.1.1.

Definición 6.1.2 Sean G_1 y G_2 dos gráficas. El número de Ramsey $r(G_1, G_2)$ está definido por el natural p más pequeño tal que si todas las aristas de K_p están coloreadas en rojo y azul (cualesquiera dos colores también funcionan), entonces las aristas de K_p coloreadas en rojo generan una gráfica isomorfa a G_1 o las aristas coloreadas en azul de K_p generan una gráfica isomorfa a G_2 .

Ramsey descubrió estos números después de probar que para todo par de gráficas completas K_m y K_n el número $r(K_m, K_n)$ existe, lo que implica que $r(G_1, G_2)$

existe para toda G_1 y G_2 . Uno de los resultados importantes con respecto a los números de Ramsey es el siguiente.

Teorema 6.1.1 *Si G_1 y G_2 son dos gráficas cualesquiera se cumple que*

$$r(G_1, G_2) = r(G_2, G_1)$$

Demostración. Sea $r(G_1, G_2) = p$ y $r(G_2, G_1) = p'$, necesitamos demostrar que $p = p'$. Primero demostraremos que $p' \leq p$ y después que $p' \geq p$, para poder concluir que $p' = p$.

Sean H y H^c dos gráficas cualesquiera de orden p . Por hipótesis sabemos que $r(G_1, G_2) = p$, entonces se cumple que G_1 es una subgráfica de H^c o que G_2 es una subgráfica de $H^c = H$. Entonces para toda gráfica H de orden p , G_2 es subgráfica de H o G_1 es subgráfica de H^c .

También por hipótesis sabemos que $r(G_2, G_1) = p'$, es decir, G_2 es subgráfica de una gráfica G de orden p' o G_1 es subgráfica de G^c , además p' es la mínima posible con esta propiedad, entonces p no puede ser más pequeño que p' por lo que $p' \leq p$.

Análogamente, la gráfica G^c de orden p' contiene a la gráfica G_2 o bien la gráfica $G^{c^c} = G$ contiene a la gráfica G_1 . Como $r(G_1, G_2) = p$, entonces p' no puede ser menor que p , por lo que $p \leq p'$. Por lo tanto $p = p'$. ■

El teorema anterior nos dice que no es importante si K_m es la mesa de los invitados que se conocen o K_n es la mesa de los invitados que no se conocen, bien podrían estar invertidos y no afectar el resultado.

En general, encontrar números de Ramsey es una tarea muy difícil. En muchos casos solo se conocen cotas para estos números y en la mayoría de los casos no se sabe nada de ellos. A continuación mostraremos algunos de los más conocidos y su relación con nuestro problema.

Teorema 6.1.2

$$r(K_1, K_n) = 1 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Para demostrar la igualdad del teorema, vamos a dar una gráfica G con al menos una arista, y consecuentemente con al menos dos vértices tal que en G no esté contenido K_1 y en G^c no esté contenido K_n , si logramos demostrar ésto necesariamente el orden mínimo de G debe de ser uno, pues con mas vértices

demostramos que la igualdad no se sigue.

Sea $n > 1$. Para que K_n sea subgráfica de G^c , el orden de G debe de ser al menos n , sin embargo si G tiene una arista, entonces K_n ya no es subgráfica de G^c . Por otro lado, K_1 es subgráfica de G , pero G no es la gráfica de orden mínimo que contiene a K_1 . Por lo tanto, el orden mínimo de G tal que K_1 o K_n son subgráficas de G o G^c es 1. ■

Teorema 6.1.3

$$r(K_2, K_n) = n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Para demostrar la igualdad del teorema vamos a ver que para cualquier gráfica G con n vértices siempre pasa que K_2 es subgráfica de G o K_n es subgráfica de G^c y además demostraremos que el orden de G es el mínimo con esta propiedad.

Sea G una gráfica con n vértices. Si G no tiene aristas, entonces en G^c está contenida K_n ; más aún, $K_n = G$. Por lo tanto, si G no tiene aristas, $r(K_2, K_n) = n$. Supongamos que G tiene al menos una arista, entonces en G está contenida K_2 , observa que si G tiene más de una arista, también K_2 está contenida en G (el por qué es verdad la aserción anterior se deja al lector). Por lo tanto, para toda G con al menos una arista, K_2 está contenida en G , entonces $r(K_2, K_n) = n$.

Además n es el orden mínimo de G tal que $r(K_2, K_n) = n$. Supongamos que existe una $n' < n$ tal que $r(K_2, K_n) = n'$. Sea G' de orden n' tal que G' no tiene aristas, tenemos que K_2 no esta contenida en G' , ya que K_2 tiene al menos una arista. Por otro lado, K_n no está contenida en G^c , ya que K_n tiene más vértices que G^c ; entonces existe G tal que $K_2 \not\subseteq G$ y $K_n \not\subseteq G$, por lo tanto $r(K_2, K_n) \neq n'$. Enotces $r(K_2, K_n) = n$ ■

Otro de los *números de Ramsey* más clásicos es el que se presenta a continuación, que además puede ser la solución del problema.

Teorema 6.1.4

$$r(K_3, K_3) = 6$$

Demostración. Primero observemos que $r(K_3, K_3) > 5$, pues ni la gráfica G que se muestra en la Figura 6.1, ni su complemento contienen a K_3 como subgráfica.

Probaremos que si las aristas de K_6 tienen los colores rojo o azul, entonces K_6 contiene una gráfica K_3 de color rojo o una gráfica K_3 de color azul. Sea $v_1 \in V(K_6)$,

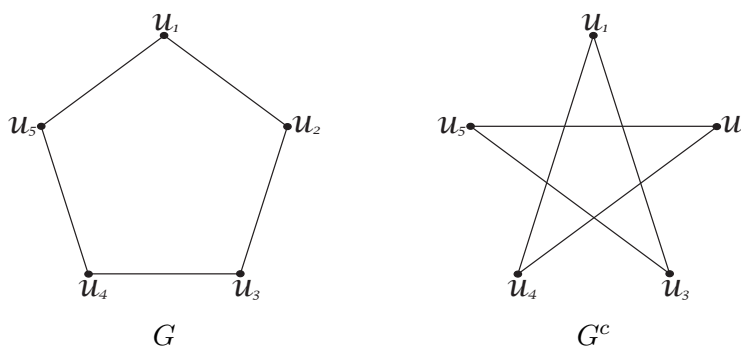


Figura 6.1.

como $\delta(v_1) = 5$, al menos tres de las cinco aristas tienen el mismo color, sea rojo dicho color. Supongamos que las aristas (v_1, v_2) , (v_1, v_3) y (v_1, v_4) tienen color rojo. Si alguna de las aristas (v_2, v_3) , (v_3, v_4) o (v_4, v_2) , tiene color rojo, podemos formar una K_3 de color rojo. Sin pérdida de generalidad supongamos que (v_2, v_3) es de color rojo, entonces el ciclo (v_1, v_2, v_3, v_1) es una K_3 roja. En caso contrario, si las aristas (v_2, v_3) , (v_3, v_4) y (v_4, v_2) son de color azul, ellas mismas forman un K_3 de color azul. Por lo tanto $r(K_3, K_3) = 6$. ■

Por el teorema 6.1.2, el mínimo número de invitados para que se cumplan las condiciones del problema es uno, es decir $r(K_1, K_n) = 1$. Eso quiere decir que si en la mesa A sólo hay un lugar y en la mesa B hay n lugares, además de que la mesa A no va a ser la mesa más divertida de la fiesta, el mínimo número de invitados para que la fiesta sea del agrado de los anfitriones es uno, lo que tampoco suena muy divertido. Por otro lado, por el Teorema 6.1.3, el mínimo número de invitados para que se cumplan las condiciones del problema es n , es decir $r(K_2, K_n) = n$. En este caso, en la mesa A hay dos lugares y en la mesa B hay n lugares; entonces necesitamos al menos n invitados para que se cumplan las condiciones del problema, sin embargo es posible que los n invitados se sienten en la mesa B , lo que dejaría a la mesa A sola. En fin, ninguna de estas dos opciones es del agrado de la pareja.

Por el Teorema 6.1.4 vemos que necesitamos al menos seis personas en la cena para estar absolutamente seguros de que los invitados de la mesa A se conocen entre sí o que los invitados de la mesa B no se conocen. Además aseguramos que ninguna mesa quedará vacía, pues a nuestros seis invitados los podemos dividir en dos mesas de tres personas.

Hasta el momento siguen sin conocerse los valores exactos de la mayoría de los

$r(K_n, K_m)$	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
K_1	1	1	1	1	1
K_2	1	2	3	4	5
K_3	1	3	6	9	14
K_4	1	4	9	18	25
K_5	1	5	14	25	43-49
K_6	1	6	18	35-41	58-87
K_7	1	7	23	49-61	80-143
K_8	1	8	28	56-84	101-216
K_9	1	9	36	73-115	125-316
K_{10}	1	10	40-43	92-149	143-442

$r(K_n, K_m)$	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	1	1	1	1	1
K_2	6	7	8	9	10
K_3	18	23	28	36	40-43
K_4	35-41	49-61	56-84	73-115	92-149
K_5	58-87	80-143	101-216	125-316	143-442
K_6	102-165	113-298	127-495	169-780	179-1171
K_7	113-298	205-540	216-1031	232-1713	289-2826
K_8	127-495	216-1031	282-1870	317-3583	≤ 6090
K_9	169-780	232-1713	317-3583	565-6588	580-12677
K_{10}	179-1171	289-2826	≤ 6090	580-12677	798-23556

Cuadro 6.1. *Números de Ramsey*

números de Ramsey. En el cuadro 6.1[29] se muestran algunos de los *números de Ramsey* más conocidos hasta la fecha, aunque en la mayoría de los casos sólo se conozcan algunas cotas.

Como comentario final voy a citar lo que alguna vez dijo el matemático húngaro Paul Erdős:

Supón que unos malévolos alienígenas le dijeran a la humanidad: “O ustedes me dicen el valor exacto de $R(K_5, K_5)$ o nosotros exterminaremos a los de su especie.” En ese momento, pondríamos a trabajar a todos nuestros matemáticos y computadoras hasta encontrar el valor que nos exigen.

En cambio, si nos preguntaran el valor de $R(K_6, K_6)$, nuestra mejor opción sería intentar destruirlos antes de que ellos nos destruyan, ya que nos sería imposible encontrar dicho valor.” [17]

CAPÍTULO 7

Torneos

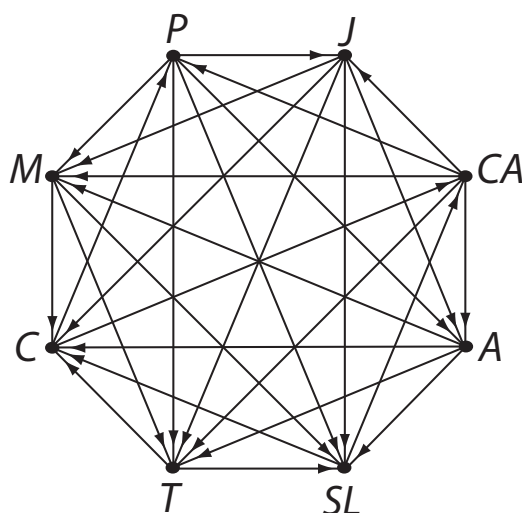
En este capítulo no se resolverá ningún problema, analizaremos una suerte de enunciados que en un principio pueden tener cierta lógica, sin embargo gracias a las gráficas llamadas *torneos* demostraremos que esta “lógica” es bastante débil.

7.1. La paradoja del deportista

Después que el Torneo de Clausura 2006 del futbol Mexicano terminó, David Moshe Faitelson llegó a la conclusión de que el líder Pachuca no era el favorito para ser campeón, él estaba convencido de que el sub-líder Jaguares iba a ganar el torneo. Estas fueron sus razones.

Del primer lugar al octavo, los ocho equipos que entraron a la liguilla fueron: Pachuca, Jaguares, Cruz Azul, Atlante, San Luis, Toluca, Chivas y Morelia. Tomó los resultados que obtuvieron estos equipos al enfrentarse entre ellos durante el Torneo de Clausura 2006 y los modeló con un *torneo*. Primero asignó un vértice a cada uno de los ocho equipos. Sean P, J, CA, A, M, SL, T y C los vértices correspondientes a los equipos Pachuca, Jaguares, Cruz Azul, Atlante, Morelia, San Luis, Toluca y Chivas respectivamente. Del equipo vencedor sale una flecha hacia el equipo perdedor. En el caso en que dos equipos hayan empatado, la flecha sale del equipo que haya quedado en mejor posición al final del torneo. La digráfica T que obtuvo Faitelson se muestra en la Figura 7.1.

Faitelson dijo: “A partir de la digráfica T se demuestra que: Jaguares le ganó a Morelia, Morelia le ganó a San Luis, San Luis le ganó a Cruz Azul, Cruz Azul le ganó a Atlante, Atlante le ganó a Toluca, Toluca le ganó a Chivas y por último,

Figura 7.1. T

Pachuca perdió ante Chivas, de donde obtenemos una trayectoria dirigida de J a P que pasa por todos los vértices en T (T contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana). Entonces, ya que esta trayectoria existe y es muy raro encontrarla (según Faitelson), Jaguares es mejor equipo que Pachuca y por tanto Jaguares es favorito a ser campeón del Torneo de Clausura 2006". Pasada la liguilla Faitelson tuvo que retractarse de lo que había dicho pues resultó que Pachuca, que fue el mejor equipo del torneo, resultó campeón, mientras que Jaguares fue eliminado en los cuartos de final ante Chivas.

Historia

Vimos en el capítulo 3 un poco acerca de las gráficas hamiltonianas, en este capítulo profundizaremos un poco más sobre este tema y su relación con los torneos. Las gráficas hamiltonianas deben su nombre al matemático, físico y astrónomo irlandés Sir William Rowan Hamilton, que nació el 4 de agosto de 1805.

Desde muy pequeño Hamilton, se destacó por su inteligencia, a la edad de cinco años había aprendido latín, griego y hebreo. Hamilton se introdujo a las matemáticas a los trece años cuando estudio el *Algebra* del matemático francés Clairaut. Pocos años después, en sus quince, empezó a estudiar los trabajos de Newton y Laplace. En 1822, cuando tenía 17 años, encontró un error en la *Mécanique céleste* de Laplace, esto llamó la atención del astrónomo irlandés John Brinkley

que dijo:

Este joven, no voy a decir que será, pero es, el primer matemático de su edad... [24]

Uno de sus más grandes descubrimientos fue la álgebra no conmutativa*, que la llamó “Cálculo Icosiano” y que puede ser interpretada en términos de los caminos de la gráfica de un dodecaedro regular.

Hamilton uso esta interpretación gráfica e inventó un rompecabezas que llamó el “*The Icosian Game*”(el juego del icosiano). Mostró su rompecabezas, del cual estaba muy orgulloso, en la reunión de la *British Association* en Dublín, en el año de 1857, y lo vendió a *J. Jacques and Sons*, una distribuidora de ajedreces, por 25 libras [23]. Una mala oferta para el comprador ya que las ventas del rompecabezas fueron pobres.

De lo que se trata este rompecabezas es de encontrar un camino que pase por todos los vértices de un dodecaedro (poliedro con doce caras) sólo una vez, empezando y terminando en el mismo lugar.

Es fácilmente verificable, que su rompecabezas tiene solución. Para ésto, como es nuestra costumbre, vamos a modelar el dodecaedro con una gráfica. Asignemos a cada *vértice* del dodecaedro (en este caso los *vértices* son el lugar donde concurren tres o más caras) un vértice de la gráfica, y dos vértices de la gráfica son adyacentes si y sólo si es posible llegar de un *vértice* a otro a través de una *arista* del dodecaedro (en este caso las *aristas* del dodecaedro son el lugar donde concurren exactamente dos caras). Por si no te queda muy clara la construcción de la gráfica del dodecaedro, imagina que tienes un dodecaedro transparente con todos sus bordes pintados de negro, si tu pones un foco sobre el dodecaedro, este va a proyectar una imagen sobre el suelo, pues esa proyección es la gráfica del dodecaedro (ver figura 7.2).

El dodecaedro y su gráfica se muestran en la Figura 7.3. Encontrar el camino hamiltoniano de la gráfica del dodecaedro se deja como ejercicio para el lector.

Hamilton murió en 1865 poco después de recibir la noticia de que había sido electo como el primer extranjero en ingresar a la *National Academy of Sciences* de los Estados Unidos. .

*Las álgebras no conmutativas son aquellas en donde la multiplicación no necesariamente satisface que $xy = yx$

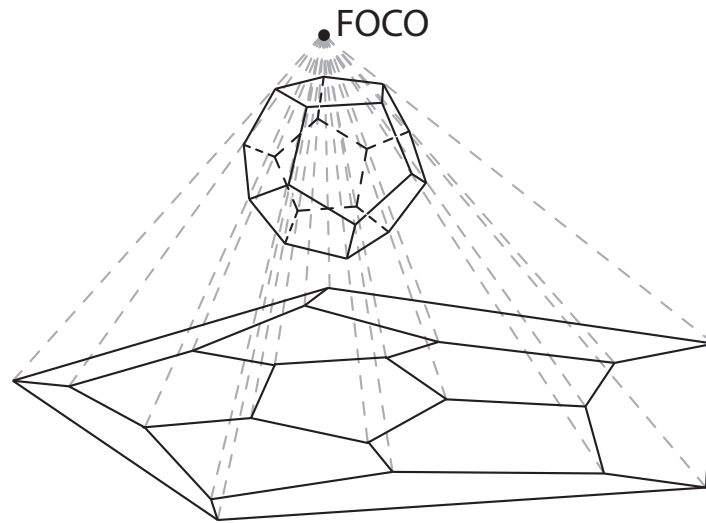


Figura 7.2. Proyección del dodecaedro

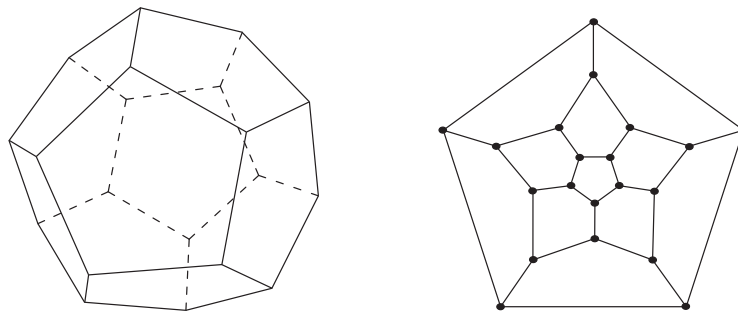


Figura 7.3. Dodecaedro y su gráfica

7.1.1. Análisis

La digráfica con la que Faitelson modeló el torneo de fútbol se le conoce con el nombre de *torneo* (valga la redundancia). Dejando atrás el modelo Faitelson, analicemos las propiedades de los *torneos*. Primero supongamos que hay n equipos en un torneo donde todos se enfrentan contra todos y los empates no están permitidos, para Faitelson el criterio de desempate fue la posición en la tabla general.

Teorema 7.1.1 *Todo torneo T contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana.*

Demostración. Probaremos por inducción sobre el número de vértices en T . Si T tiene sólo un vértice u , la trayectoria uu es hamiltoniana. Si $p = 2$, El único torneo posible es $T \cong K_2$, con un flecha del vértice v al vértice u . T mismo es una trayectoria dirigida hamiltoniana.

Hipótesis de inducción. Sea T' un torneo con $p' < p$ vértices. Entonces, T' contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana.

Sea T un torneo con p -vértices. Sea v un vértice de T y consideremos la gráfica $T' = T \setminus \{v\}$, T' es un *torneo*, ya que no tiene flechas simétricas, pues por construcción $T' \subset T$, y existe una flecha entre todo par de vértices de T' , pues la únicas flechas que quitamos son las que salen y entran a v . Por hipótesis de inducción T' contiene una trayectoria hamiltoniana $P = (v_1, v_2, \dots, v_{p'})$.

Vamos a analizar por casos cómo son la flechas que hay entre la trayectoria P y el vértice v .

Caso i Si $(v, v_1) \in F(T)$, entonces T contiene una trayectoria hamiltoniana $(v, v_1, v_2, \dots, v_{p'})$. Análogamente, si $(v_{p'}, v) \in F(T)$, entonces T contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana $(v_1, v_2, \dots, v_{p'}, v)$.

Caso ii Si $(v, v_1) \notin F(T)$ y $(v_{p'}, v) \notin F(T)$ entonces, por ser T un *torneo*, tenemos que $(v_1, v) \in F(T)$ y $(v, v_{p'}) \in F(T)$. Ahora vamos a ver cómo son las flechas que hay entre los vértices v_i 's y el vértice v tales $2 \leq i \leq p' - 1$.

Caso ii.i Supongamos que no existen flechas (v, v_i) en T con $2 \leq i \leq p' - 1$, entonces las únicas flechas posibles son (v_i, v) para todo $2 \leq i \leq p' - 1$. Entonces T contiene una trayectoria hamiltoniana $(v_1, v_2, v_3 \dots v_{p'-1}, v, v_{p'})$.

Caso ii.ii En caso contrario, supongamos que existe al menos un vértice $v_i \in V(T)$ tal que (v, v_i) está en la flechas de T . Sea v_i el primer vértice de T tal que $(v, v_i) \in F(T)$. Entonces, como v_i es el primer vértice que cumple

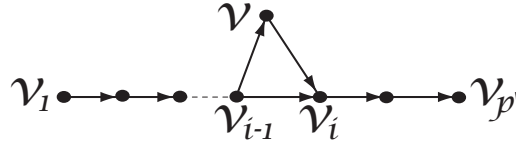


Figura 7.4.

las condiciones, necesariamente $(v_{i-1}, v) \in F(T)$ con $2 \leq i \leq p' - 1$, como se muestra en la Figura 7.4. Entonces podemos formar la trayectoria hamiltoniana $(v_1, v_2 \dots, v_{i-1}, v, v_i, \dots, v_{p'})$. Por lo tanto T tiene una trayectoria dirigida hamiltoniana. Por lo casos i y ii , todo *torneo* T contiene una trayectoria dirigida hamiltoniana. ■

Con el teorema anterior demostramos que en un torneo siempre podemos encontrar una sucesión de victorias de un equipo sobre otro tal que en esta sucesión estén todos los equipos, sin embargo esto no es suficiente para echar abajo el modelo Faitelson, pues hay una condición que no se toma en cuenta en el Teorema 7.1.1. La condición es que al final de la trayectoria siempre esté el equipo que quedó en mejor posición en la tabla, es decir, el final de la trayectoria no puede ser cualquier vértice. Observemos que en la demostración del Teorema 7.1.1 el final de la trayectoria puede ser un vértice cualquiera. A continuación veremos que existen *torneos* T que modelan una liguilla donde no será posible encontrar una trayectoria dirigida donde el vértice final sea el mejor equipo de la liga. Antes de demostrar esto necesitamos un par de definiciones.

Definición 7.1.1 Sea T un torneo. Un vértice v de T es *pozo* si cumple que $\delta^+(v) = 0$.

Un vértice *pozo* es un equipo que perdió ante todos los demás.

Definición 7.1.2 Sea T un torneo y sea A un subconjunto de los vértices de T . A es *semi-pozo* si no existen flechas de A a A^c .

Un subconjunto *semi-pozo* son los equipos que no pudieron conseguir victorias ante los demás equipos.

Teorema 7.1.2 Sea T un torneo. Si $v \in V(T)$ no pertenece a un subconjunto *semi-pozo*, entonces siempre existe una trayectoria dirigida hamiltoniana que empieza en v .

Demostración. Vamos a demostrar el teorema por contradicción. Supongamos que el vértice v no pertenece a un subconjunto *semi-pozo* y que todas las trayectorias

dirigidas que empiezan en v **no** son Hamiltonianas, es decir, que no contienen a todos los vértices del *torneo* T .

Sea T un torneo y sea $v \in V(T)$ tal que v no pertenece a un subconjunto *semi-pozo*. Consideremos a $P = (v = v_1, v_2 \dots, v_n)$ la trayectoria de longitud máxima que empieza en v . Sea U el subconjunto de vértices de T que cumplen que; $u \in U$ si y sólo si $u \notin V(P)$, es decir, U es el subconjunto de los vértices de T que **no** están en P . Vamos a analizar como deben de ser los vértices de U .

Observación 1: Para todo $u \in V(U)$, la flecha $(v_n, u) \notin F(T)$. En caso contrario, si $(v_n, u) \in F(T)$ podemos formar la trayectoria $P' = (v = v_1, v_2 \dots, v_n, u)$. Entonces la longitud de la trayectoria P' sería más grande que la longitud de P , lo que contradice que P es de longitud máxima. Por lo tanto, para todo $u \in V(U)$, la flecha $(v_n, u) \notin F(T)$. Entonces, por ser T un *torneo*, $(u, v_n) \in F(T)$.

Observación 2: Por otro lado, para todo $u \in V(U)$, las flechas $(v_i, u) \notin F(T)$ y $(u, v_{i+1}) \notin F(T)$, pues si ambas flechas estuvieran podríamos formar la trayectoria $P' = (v_1, v_2, \dots, v_i, u, v_{i+1}, \dots, v_n)$, tal que la longitud de la trayectoria P' sería más grande que la longitud de P , lo que contradice que P es de longitud máxima. Entonces para todo $u \in V(U)$, la flechas $(v_j, u) \notin F(T)$ y $(u, v_{j+1}) \notin F(T)$ para toda $1 + 1 \leq j \leq n$.

Sea $u \in V(U)$. Supongamos que la flecha $(v = v_1, u) \in F(T)$. Por el *caso ii*, tenemos que la flecha $(u, v_2) \notin F(T)$. Entonces, por ser T un *torneo*, la flecha $(v_2, u) \in F(T)$. Como $(v_2, u) \in F(T)$, entonces por la *observación 2* la flecha $(u, v_3) \notin F(T)$. Entonces, por ser T un *torneo* la flecha $(v_3, u) \in F(T)$. Análogamente, como $(v_3, u) \in F(T)$, entonces por la *observación 2* la flecha $(u, v_4) \notin F(T)$. Entonces, por ser T un *torneo*, la flecha $(v_4, u) \in F(T)$. Si continuamos este procedimiento hasta el vértice v_{n-1} tenemos que la flecha $(v_{n-1}, u) \in F(T)$.

Sabemos que $(v_{n-1}, u) \in F(T)$ y por la *observación 1* sabemos que $(u, v_n) \in F(T)$, entonces podemos formar la trayectoria $P' = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, u, v_n)$ tal que la longitud de la trayectoria P' es mayor que la longitud de la trayectoria P , lo que contradice que P es de longitud máxima. Como la contradicción resultó de suponer que $(v = v_1, u) \in F(T)$, se sigue que $(v = v_1, u) \notin F(T)$. Entonces, por ser T un *torneo*, tenemos que $(u, v_1 = v) \in F(T)$.

De forma muy similar a los párrafos anteriores podemos demostrar que la flecha $(v_2, u) \notin F(T)$, por lo que se deja como ejercicio para el lector. Hint: Supón que $(v_2, u) \in F(T)$ y ve cómo deberían de ser la flechas de los vértices consecutivos

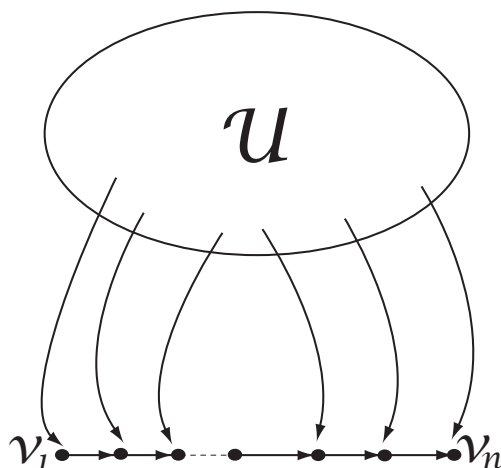


Figura 7.5. Todas la flechas van de $V(P)$ a U .

según el *caso ii*. Si todo te salió bien concluíste que $(u, v_2) \in F(T)$. Análogamente, es posible demostrar que $(u, v_i) \in F(T)$ para toda $1 \leq i \leq n$. Se deja al lector demostrar este hecho.

Sabemos que para todo $u \in U$, la flecha $(v_i, u) \in F(T)$. Por lo tanto, como T es un *torneo*, si consideramos al conjunto de los vértices de P , tenemos que todas las flechas van de $V(P)$ a U , entonces no existe una flecha que vaya de U a $V(P)$, como se muestra en la Figura 7.5. Por la definición 7.1.2 tenemos que $V(P)$ es un *semi-pozo* tal que $v \in V(P)$. Por lo tanto v pertenece a un subconjunto *semi-pozo*.

Finalmente llegamos a la contradicción, ya que por hipótesis sabemos que v no pertenece a un subconjunto *semi-pozo*. Esta contradicción resultó del hecho de suponer que la trayectoria P no contenía a todos los vértices de T . Por lo tanto P contiene a todos los vértices de T , entonces P es una trayectoria hamiltoniana que empieza en v . ■

Teorema 7.1.3 *Sea T un torneo. T no tiene subconjuntos semi-pozo si y sólo si T es hamiltoniana.*

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que T no tiene subconjuntos *semi-pozo*. Como T es un *torneo*, por el Teorema 7.1.1 existe una trayectoria dirigida $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que $V(T) = V(P)$, es decir, P es una trayectoria dirigida hamiltoniana. Ya que T no tiene subconjuntos *semi-pozos*, entonces en particular

el vértice v_n no es un vértice *pozo*; por lo tanto existe alguna flecha que sale de v_n , es decir, la flecha $(v_n, v_i) \in F(T)$, para alguna $0 \leq i \leq n-2$. Entonces T tiene un ciclo dirigido $C = (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n, v_i)$.

Ahora, vamos a renombrar los vértices de C para facilitar un poco la notación, y vamos a intentar agrandar el ciclo dirigido C de manera que todos los vértices del torneo T estén contenidos en C , para con esto poder concluir que T es hamiltoniana.

Sea $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k, u_0)$ el ciclo dirigido en T . Si existe $v \in V(T)$ tal que $v \notin V(C)$ y $(u_i, v), (v, u_{i+1}) \in F(T)$, es posible agrandar el ciclo C reemplazando la flecha (u_i, u_{i+1}) por la flechas $(u_i, v), (v, u_{i+1})$. Repetimos el procedimiento hasta que no sea posible encontrar dicho vértice que nos permita agrandar el ciclo.

Si $V(C) = V(T)$, terminamos. Si no, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} M &= \{v \in V(T) \text{ tal que } v \notin V(C) \text{ y } (v, u_i) \in F(T) \text{ para toda } i\} \\ N &= \{v \in V(T) \text{ tal que } v \notin V(C) \text{ y } (u_i, v) \in F(T) \text{ para toda } i.\} \end{aligned}$$

Vamos a analizar a estos dos conjuntos. Observemos primero que $M \cap N = \emptyset$ pues T es *torneo*. Por otro lado, $M \cup N = V(T) - V(C)$, siguiendo un procedimiento similar al de la demostración anterior, M y N son todos los vértices de T que no están en C tal que que existe una flecha entre M y N con C , y como T es *torneo* no existen vértices que no estén en M , N y C .

Si $M = \emptyset$ y $N = \emptyset$, quiere decir que no existen vértices en T que no estén en C , entonces todos los vértices de C están en T , por tanto T es hamiltoniana.

Si $M = \emptyset$ y $N \neq \emptyset$, entonces $V(C)$ es un conjunto *semi-pozo* pues sólo existen flechas de $V(C)$ a $V(C)^c = V(T) - V(C)$, lo que contradice que T no tiene conjuntos *semi-pozo*, por lo tanto este caso no es posible. Análogamente, si $N = \emptyset$ y $M \neq \emptyset$, entonces $V(C)^c$ es un conjunto *semi-pozo*, pues sólo existen flechas de $V(C)^c$ a $V(C)$, lo que contradice que T no tiene conjuntos *semi-pozo*, por lo tanto este caso tampoco es posible. Sólo nos falta ver cuando $M \neq \emptyset$ y $N \neq \emptyset$.

Supongamos que $M \neq \emptyset$ y $N \neq \emptyset$. Como T es *torneo*, existen flechas entre los vértices de M y los de N . Si $m \in M$ y $n \in N$, entonces existe al menos una flecha $(n, m) \in F(T)$. En caso contrario si para todo $m \in M$ y $n \in N$, $(n, m) \notin F(T)$, entonces N sería un conjunto *semi-pozo*, pues solo habría flechas de $N^c = M \cup V(C)$ a N .

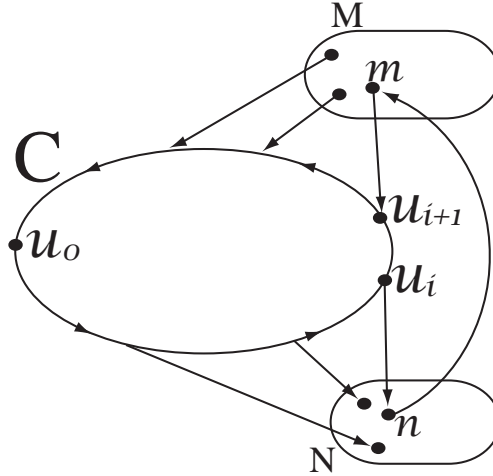


Figura 7.6.

Además por construcción existen al menos dos vértices $\{u_i, u_{i+1}\} \subset V(C)$ tales que $(u_i, n), (m, u_{i+1}) \in F(D)$, para toda $m \in M$ y $n \in N$ (Ver Figura 7.6). Sabemos que existe la flecha $(n, m) \in F(D)$ y además sabemos por el enunciado anterior que existen también las flechas $(u_i, n), (m, u_{i+1}) \in F(D)$. Entonces podemos agrandar al ciclo C y formar el ciclo $C' = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_i, n, m, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n, u_0)$.

Repetimos el procedimiento para el ciclo C' , es decir, construimos a los conjuntos

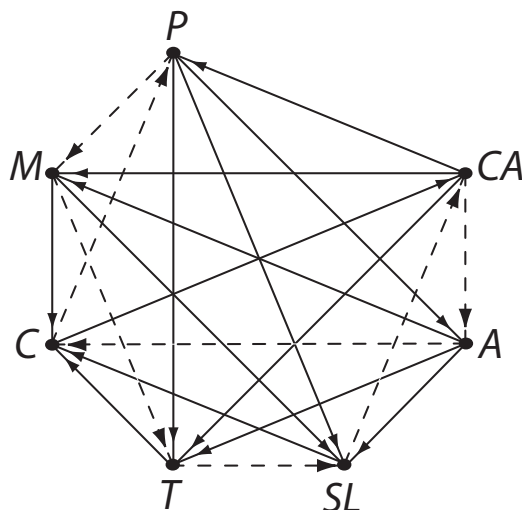
$$M' = \{v \in V(T) \text{ tal que } v \notin V(C') \text{ y } (v, u_i) \in F(T) \text{ para toda } i\}$$

$$N' = \{v \in V(T) \text{ tal que } v \notin V(C') \text{ y } (u_i, v) \in F(T) \text{ para toda } i.\}$$

y analizamos cómo deben de ser estos conjuntos, para ver cómo podemos agrandar el ciclo C' . Hacer esto se deja como ejercicio para el lector. Si continuamos este procedimiento de agrandar el ciclo, como T es finita va a llegar un punto donde todos los vértices de T estén en C . Por lo tanto T es hamiltoniana.

\Leftarrow] Para demostrar que T no tiene subconjuntos *semi-pozo* si T es hamiltoniana, vamos a considerar un subconjunto cualquiera de vértices de T y vamos a demostrar que ese subconjunto no es *semi-pozo*.

Sea T es hamiltoniana con ciclo hamiltoniano $C = (u = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$ y sea $A \neq \emptyset$ un subconjunto de vértices de T .

Figura 7.7. T'

Si empezamos a recorrer el ciclo C en el vértice u y continuamos en el ciclo hasta llegar al primer vértice u_i tal $u_i \in A$, pero $u_{i+1} \notin A$, como la flecha $(u_i, u_{i+1}) \in F(T)$, entonces A no es un subconjunto *semi-pozo* de V , ya que existe al menos una flecha que sale de A . Por lo tanto T no contiene subconjuntos *semi-pozo*. ■

Tomando en cuenta los teoremas anteriores, analicemos a fondo el *torneo* que se muestra en la Figura 7.1. Observemos que el *torneo* no tiene subconjuntos *semi-pozo*, por lo que ningún vértice del *torneo* pertenece a un subconjunto *semi-pozo*. Entonces, por el Teorema 7.1.2, para todo vértice del *torneo* existe una trayectoria dirigida hamiltoniana que empieza en él. Entonces cualquier equipo puede ser el favorito a ganar el campeonato según el análisis de Fajtelson.

Más aún, casi cualquier equipo de la liga puede ser el último en la sucesión de victorias. Consideremos $T' = T \setminus \{J\}$ como se muestra en la Figura 7.7. Como T' no tiene subconjuntos *semi-pozo*, por el Teorema 7.1.3 podemos encontrar un ciclo hamiltoniano $C = (P, M, T, SL, CA, A, C, P)$ en T' , entonces en T casi cualquier equipo puede ser el último en la sucesión de victorias, siempre que esta sucesión empiece por Jaguares. Por ejemplo, podemos formar la sucesión de victorias,

$$(J, A, C, P, M, T, SL, CA),$$

o la sucesión

$$(J, SL, CA, A, C, P, M, T).$$

En la paradoja del deportista se pide que se trace una sucesión de victorias que empiece en cualquier equipo y termine en el mejor equipo del torneo. Esta sucesión no siempre es posible encontrarla, pues si el mejor equipo del torneo no pertenece a un subconjunto *semi-pozo*, siempre es posible encontrar una sucesión de victorias que comience en el mejor equipo. Y si nadie derrotó al mejor equipo de la liga durante el torneo, la sucesión de victorias forzosamente empieza en él.

CAPÍTULO 8

Gráficas de estados

En este capítulo presentamos tres juegos que se resuelven utilizando gráficas de estados. Por el momento no presentaremos ningún teorema, nos enfocaremos en cómo modelar diferentes problemas con gráficas.

8.1. Demencia instantánea

Supón que tienes cuatro cubos y los colores; azul, rojo, verde y naranja. Cada cara, de cada cubo, la pintas con alguno de los cuatro colores, de manera que en cada cubo siempre estén los cuatro colores (los cubos van a tener caras pintadas con colores repetidos). ¿Es posible acomodar cuatro cubos uno sobre otro de manera tal que los cuatro colores aparezcan en cada una de las caras de la torre formada?

Historia

El origen de este rompecabezas es hasta la fecha desconocido. El más viejo que se conoce de esta familia de rompecabezas fue diseñado y patentado por Frederick A. Schossow de Detroit en 1900 y salió a la venta con el nombre de *El rompecabezas de Katzenjammer*, el juego contenía cuatro dados de madera y en cada cara estaba dibujado uno de los cuatro palos de la baraja inglesa (corazones, espadas, diamantes y tréboles). Casi en la misma época en Alemania circulaba en las calles el mismo juego pero con el nombre de *Tantalizer*, el diseño era muy similar al de su pariente estadounidense sólo que en vez de palos de la baraja, los dados tenían en cada una de sus caras uno de cuatro colores diferentes. Ya en la década de los sesentas un programador californiano llamado Franz O. Armbruster “rediseñó” y volvió a patentar el juego con el nombre de *Instant Insanity*, que es extremadamente pareci-

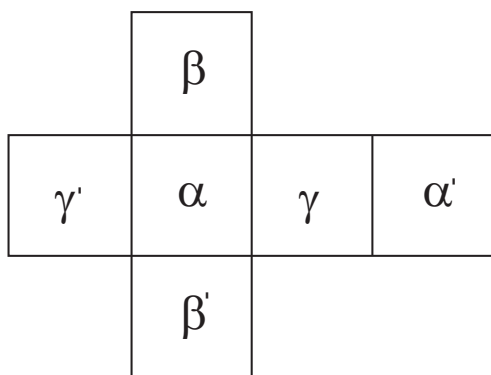


Figura 8.1. Cubo desdoblado

do al *Tantalizer* sólo que el rompecabezas de Armbruster estaba hecho de plástico. Gracias a la empresa de juguetes *Parker Brothers*, Armbruster logró vender más de doce millones de copias del *Instant Insanity* entre 1966 y 1967. [31]

8.1.1. Modelo

Primero imaginemos que tenemos un cubo desdoblado como se muestra en la Figura 8.1. Si α es la cara frontal de mi cubo, α' correspondería a la cara opuesta; del mismo modo, si β es la cara superior del cubo, β' es la cara inferior y si γ es la cara lateral derecha, γ' es la cara lateral izquierda.

El número de torres diferentes que podemos formar con los cuatro cubos es bastante grande. Antes de empezar a modelar el problema veamos el por qué de esto. El primer cubo de la fila lo podemos poner en tres posiciones diferentes, una cuando la cara α está al frente, cuando la cara β está al frente o cuando la cara γ está al frente. Nota que si la cara α' está al frente, las caras laterales del cubo siguen siendo las mismas que cuando la cara α está al frente, sólo que invertidas, y la cara superior e inferior del cubo son las mismas que cuando la cara α está al frente, entonces acomodar el cubo con la cara α' al frente es lo mismo que acomodarlo con la cara α al frente. Análogamente, acomodar al cubo con la cara β' o γ' al frente, es lo mismo que acomodarlo con la cara β o γ al frente, respectivamente. Por lo tanto al primer cubo sólo lo podemos poner en tres posiciones distintas.

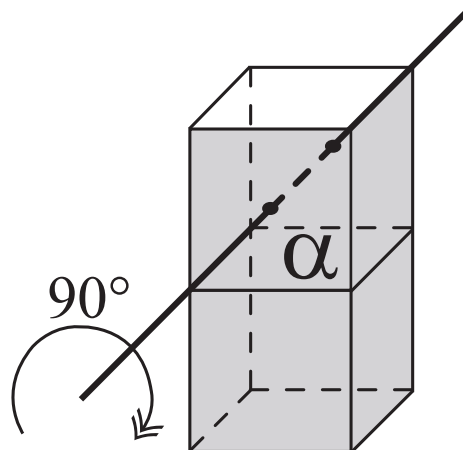


Figura 8.2. Giramos el segundo cubo 90°

Ponemos el segundo cubo sobre el primero y supongamos que lo tenemos con α en la cara frontal, si giramos al cubo 90° con eje perpendicular a la cara α (ver Figura 8.2) podemos ponerlo en cuatro diferentes posiciones: Como el cubo tiene seis caras, existen $6 \times 4 = 24$ posiciones distintas para este cubo; análogamente existen 24 posiciones distintas para el tercer cubo dados el primer y segundo cubo y 24 posiciones distintas para el cuarto cubo dados el primero, el segundo y el tercero, por lo tanto existen $3 \times 24^3 = 41,472$ arreglos distintos para la torre, aunque no todos estos arreglos sean soluciones del problema.

Si intentamos resolver el problema sin un método particular, debido al gran número de arreglos diferentes de la torre, puede que nos desesperemos antes de lograrlo. El método que aquí proponemos obviamente es utilizando gráficas, a continuación veremos cómo esto es posible.

8.1.2. Solución

Tomemos los cuatro cubos de la Figura 8.3. Representemos cada uno de los cubos con una multigráfica, donde los vértices de la gráfica son los colores del cubo (en este caso son cuatro vértices que corresponden a los colores rojo, azul, verde y naranja) y un vértice es adyacente a otro si los colores asociados a estos vértices están en caras opuestas.

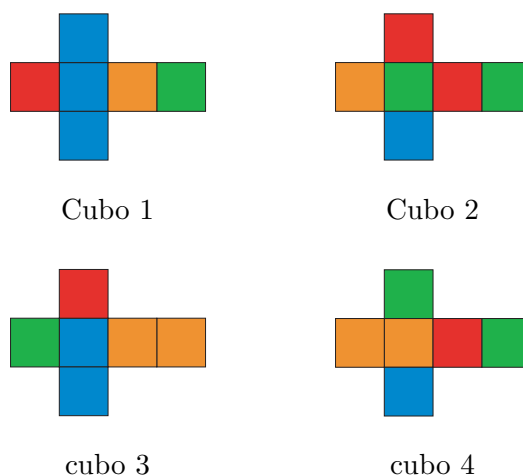


Figura 8.3. Cubos desdoblados

Las multigráficas que se muestran en la Figura 8.4, son las multigráficas asociadas a los cubos de la Figura 8.3. Éstas sólo pueden tener tres aristas, pues un cubo tiene seis caras y cada cara sólo tiene una cara opuesta. Ahora creamos una nueva multigráfica a partir de las que ya construimos. Los vértices de la nueva multigráfica corresponden a los cuatro colores que hay en las caras de los cubos y las adyacencias entre vértices son las mismas que hay en las multigráficas de la Figura 8.4 (puedes imaginar esta nueva multigráfica encimando todas las multigráficas de la Figura 8.4). Además, a cada arista de esta nueva multigráfica la etiquetamos con el número del cubo al cual pertenece, es decir, si por ejemplo la arista tiene etiqueta 1 quiere decir que esa arista pertenece al cubo uno. Llamemos H a esta nueva multigráfica, cuyo dibujo se muestra en la Figura 8.5.

Para poder formar una torre de cubos que cumpla con las condiciones del problema, necesitamos buscar en H dos submultigráficas ajenas por aristas tales que cada una de éstas tenga cuatro aristas con etiquetas 1, 2, 3 y 4 respectivamente, y además que sean *2-regulares*. Es necesario encontrar en H dos submultigráficas ajenas por aristas ya que una de estas submultigráficas va representar la cara frontal y trasera de la torre de cubos, mientras que la otra submultigráfica va a representar la cara lateral izquierda y derecha de la torre de cubos. Además las cuatro aristas de cada submultigráfica deben de tener las etiquetas 1, 2, 3 y 4 respectivamente, para con esto asegurar que estamos utilizando los cuatro cubos para formar la torre. Por último, pedimos que cada una de estas submultigráficas sea

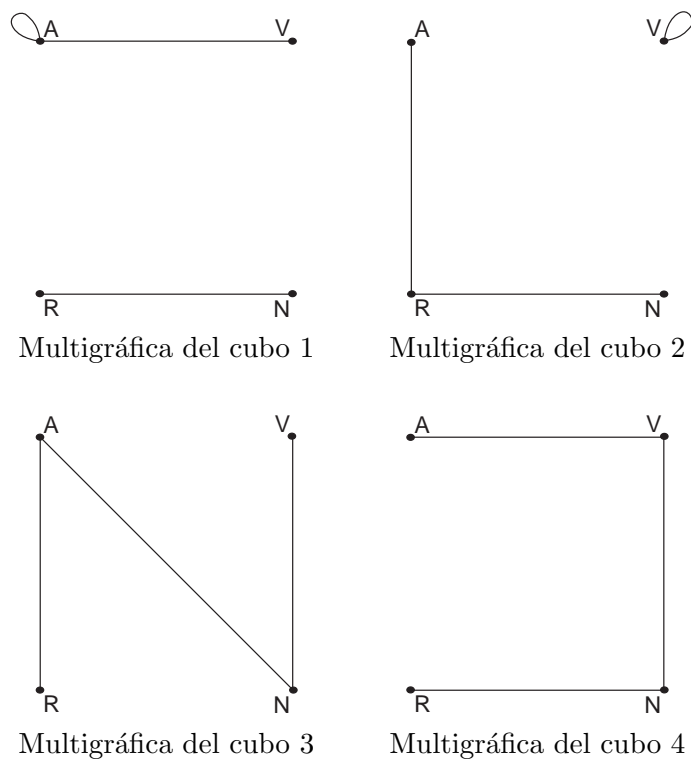
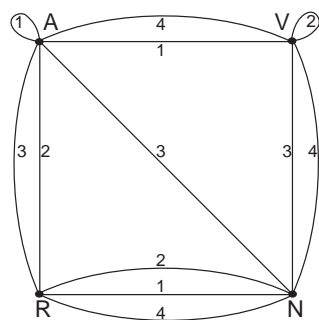


Figura 8.4. Multigráficas asociadas a los cubos

Figura 8.5. Multigráfica H

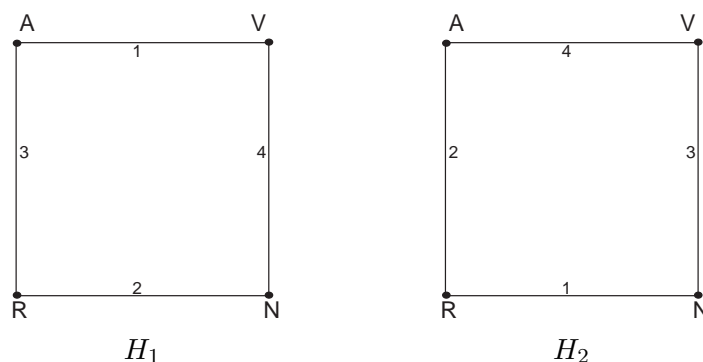


Figura 8.6. Subgráficas de H

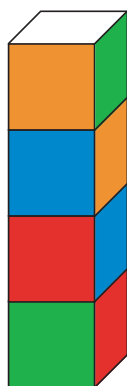
2-regular, es decir, que a cada vértice le incidan dos aristas o un lazo, pues con esto aseguramos que cada color debe de aparecer tanto en la cara frontal como en la trasera y en la lateral izquierda y derecha de la torre de cubos. Más adelante veremos por qué las afirmaciones anteriores son ciertas. Por el momento continuaremos con la construcción de la solución.

Llamemos H_1 y H_2 a estas submultigráficas tales que H_1 modela las caras frontal y trasera de la torre, mientras que H_2 modela la cara lateral izquierda y derecha de la torre. Las submultigráficas que proponemos se muestran en la Figura 8.6.

Ya teniendo H_1 y H_2 vamos a construir la torre de cubos. Consideremos la arista $(A, V) \in A(H_1)$. Como tiene etiqueta 1 significa que pertenece al cubo uno, por otro lado la arista $(R, N) \in A(H_2)$ también tiene etiqueta 1, entonces al cubo uno lo colocamos arbitrariamente con la cara frontal verde, la trasera azul, la lateral derecha roja y la lateral izquierda naranja. Tomemos la pareja de aristas del cubo dos, $(R, N) \in A(H_1)$ y $(A, R) \in A(H_2)$, el rojo* puede estar en la cara frontal y el naranja en la cara trasera, sin embargo el rojo** no puede estar en la cara lateral derecha pues el cubo uno tiene en la cara lateral derecha también el rojo, pero esto no es ningún problema, pues ponemos al rojo en la cara lateral izquierda y al azul en la derecha. Del mismo modo procedemos con el cubo tres y la aristas $(A, R) \in A(H_1)$ y $(V, N) \in A(H_2)$: la cara frontal del cubo tres es azul, la trasera es roja, la lateral derecha es naranja y la lateral izquierda es verde. Por último acomodamos el cubo cuatro y las aristas $(V, N) \in A(H_1)$ y $(A, V) \in A(H_2)$: ponemos

*Este rojo corresponde a la arista $(R, N) \in A(H_1)$

**Este rojo corresponde a la arista $(A, R) \in A(H_2)$



Cara frontal y lateral derecha



Cara trasera y lateral izquierda

Figura 8.7. Solución del problema

la cara frontal naranja, la cara trasera verde, la lateral derecha verde y la lateral izquierda azul. El resultado final se muestra en la Figura 8.7.

El siguiente teorema demostrará que es posible formar una torre de cubos que cumpla las condiciones del problema, siempre y cuando podamos encontrar las multigráficas H_1 y H_2 mencionadas anteriormente.

Teorema 8.1.1 *Sea H una multigráfica que se construye a partir de los cuatro cubos. H tiene dos submultigráficas ajenas por aristas H_1 y H_2 , tales que H_i es 2-regular para toda i , con $1 \leq i \leq 2$, si y sólo si es posible formar una torre con los cuatro cubos tal que los cuatro colores aparezcan en cada una de las caras de la torre o en ninguna cara de la torre se repita más de una vez algún color.*

Demostración. \Leftarrow]. Sabemos que, H_i es 2-regular para toda $1 \leq i \leq 2$. Entonces, el grado de cada vértice de H_i es 2, por lo que a cada vértice de H_i le puede suceder uno y sólo uno de los siguientes casos:

Caso i) Si $v \in V(H_i)$, a v le inciden dos aristas. Sean k y l las aristas que inciden en v , $1 \leq k, l \leq 4$. Entonces, el color correspondiente al vértice v aparece en el cubo k de la torre, y es posible poner en la cara opuesta de la torre, en el cubo l , el color correspondiente al vértice v . Como a v no le incide otra arista, entonces el color v no vuelve a aparecer en caras opuestas de la torre. Entonces el color correspondiente al vértice v sólo aparece una vez en cada cara de la torre.

Caso ii) Si $v \in V(H_i)$, v tiene un lazo. Sea k el lazo de v , $1 \leq k \leq 4$. Entonces,

el color correspondiente al vértice v aparece en el cubo k de la torre, en caras opuestas, es decir, el color correspondiente al vértice v aparece en el cubo k de la torre, en la cara frontal y trasera ó en la lateral izquierda y derecha. Como a v no le incide otra arista, entonces el color v no vuelve a aparecer en caras opuestas de la torre. Entonces el color correspondiente al vértice v sólo aparece una vez en cada cara de la torre.

Por el caso i y ii tenemos que cada color aparece una y solo una vez en cada cara de la torre, que era lo que queríamos demostrar.

⇒] Vamos a demostrar el regreso del teorema de dos formas diferentes. La primera forma utiliza el grado de cada vértice para probar lo que queremos, esta demostración es bastante corta y elegante, sin embargo, es un poco complicada y difícil de ver. La segunda forma es constructiva, esto es, vamos a ir construyendo las subgráficas H_1 y H_2 a partir de una torre, cualquiera, con los cuatro colores en cada una de sus caras, esta demostración es bastante larga pero muy ilustrativa, y te ayudará a entender mejor por qué las torres generan dos subgráficas *2-regulares*

Demostración 1. Demostraremos la afirmación por contradicción y procederemos por casos. Supongamos que \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 no son *2-regulares*.

i) Existe $v \in V(H_i)$ tal que $\delta_{H_i}(v) = 0$, $i \in \{1, 2\}$. Como $\delta_{H_i}(v) = 0$, entonces \mathbf{H}_i es disconexa, por lo tanto no estaríamos utilizando el color correspondiente al vértice v en ninguna cara de la torre, lo que contradice que en cada cara de la torre deben de aparecer los cuatro colores. Por lo tanto para toda $v \in V(H_i)$ $\delta_{H_i}(v) \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$.

ii) Existe $v \in V(H_i)$ tal que $\delta_{H_i}(v) = 1$, $i \in \{1, 2\}$. Como $\delta_{H_i}(v) = 1$, el color asignado al vértice v sólo se está ocupando en una cara de la torre, ya que a v sólo le incide una arista. Por lo tanto en las caras restantes de la torre se están ocupando tres colores para cuatro cubos que forman la torre, lo que contradice que en cada cara de la torre deben aparecer los cuatro colores, por lo tanto $\forall v \in V(H_i)$ $\delta_{H_i}(v) \neq 1$, $i \in \{1, 2\}$.

iii) Existe $v \in V(H_i)$ tal que $3 \geq \delta(v)$, $i \in \{1, 2\}$. Como $3 \geq \delta(v)$, el color asignado al vértice v se está ocupando en al menos tres diferentes cubos para dos caras opuestas de la torre; entonces en una cara de la torre se repite al menos una vez un color, lo que contradice que en ninguna cara de la torre se repiten los colores. ■

Demostración 2. Sin pérdida de generalidad consideremos sólo la cara frontal y trasera del cubo (el caso de la cara lateral derecha e izquierda es análogo). Para

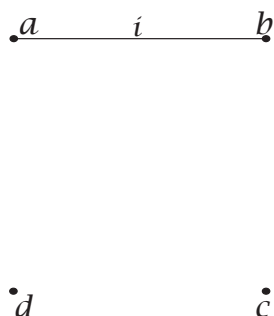


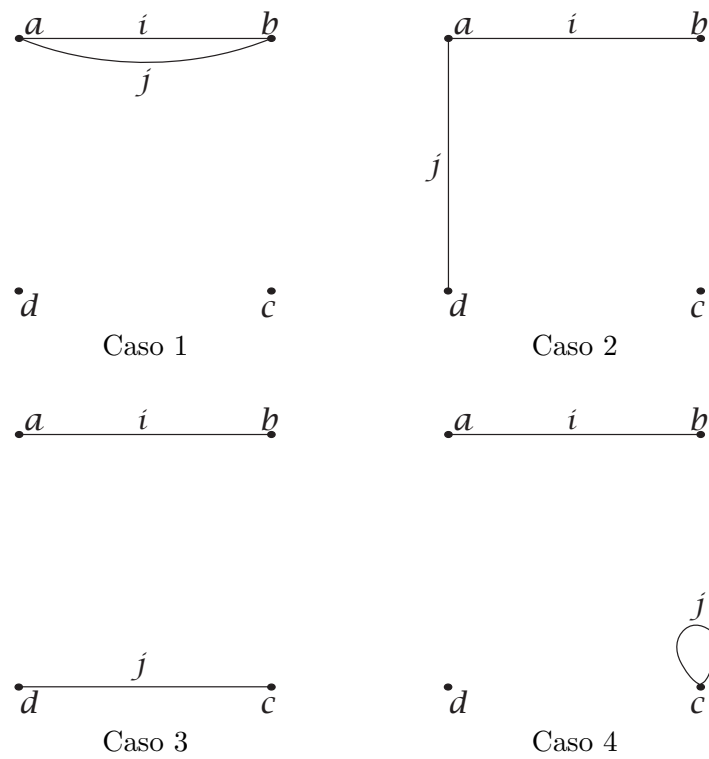
Figura 8.8. Ponemos una arista cualquiera

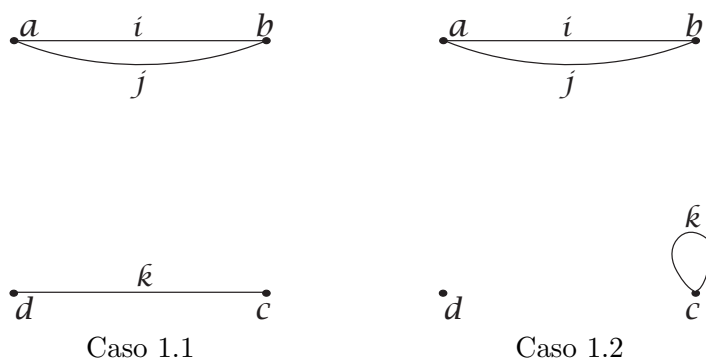
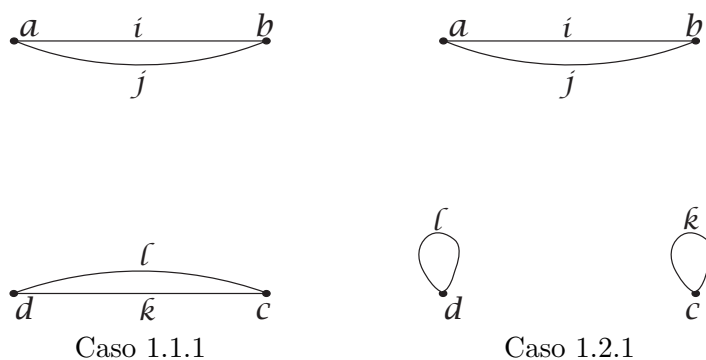
probar el regreso vamos a tomar una torre de cubos que sea solución del problema y demostraremos que a partir de esta torre podemos generar todas las multigráficas *2-regulares* con cuatro vértices.

Como la torre está formada por cuatro cubos y hay cuatro colores distintos en cada cara, esto nos genera una gráfica con cuatro vértices, uno por cada color, y cuatro aristas, una por cada cubo, numeradas del 1 al 4. Y dos vértices son adyacentes si los colores asociados a esos vértices se encuentran en caras opuestas en uno de los cubos. Sean $a, b, c, d \in V(G)$ y consideremos la arista (a, b) con etiqueta i , como en la Figura 8.8; la aristas que generan el cubo j podrán ir en cualquiera de las cuatro posiciones que se muestran en la Figura 8.9*.

Vamos a analizar los subcasos de cada uno de los cuatro casos anteriores. En el caso 1 de la Figura 8.9, consideremos el cubo k , los únicos cubos que podemos acomodar son los que generan las aristas que se muestran en la Figura 8.10, ya que si colocamos lazos en los vértices a, b o ponemos las aristas (a, d) , (b, c) , (a, c) , (b, d) o (a, b) estamos utilizando un mismo color en tres diferentes cubos para dos caras de la torre, lo cual no es posible. El caso en el que colocamos lazo en d genera una gráfica isomorfa a la de colocar lazo en c . Analicemos los casos 1.1 y 1.2 de la Figura 8.10, para el cubo l los únicos cubos que podemos acomodar son los que generan la arista (d, c) o lazo en d respectivamente, como se muestra en la Figura 8.11, las demás aristas generan cubos que no son solución del problema, entonces las gráficas generadas a partir de estas soluciones de cubos son *2-regulares* y las aristas tienen cuatro etiquetas diferentes.

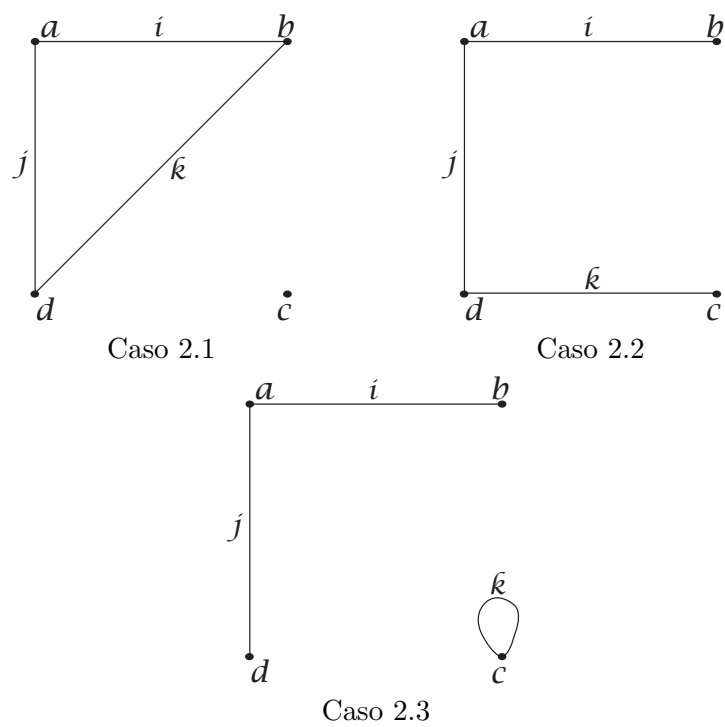
*La arista j puede ir en más posiciones de las que mencionamos en los cuatro casos de la Figura 8.9. Sin embargo, estas aristas generan multigráficas isomorfas a alguna multigráfica de los casos. Por ejemplo, si en lugar de poner la arista $j = (a, d)$ ponemos la arista (b, c) , la dos multigráficas resultantes son isomorfas.

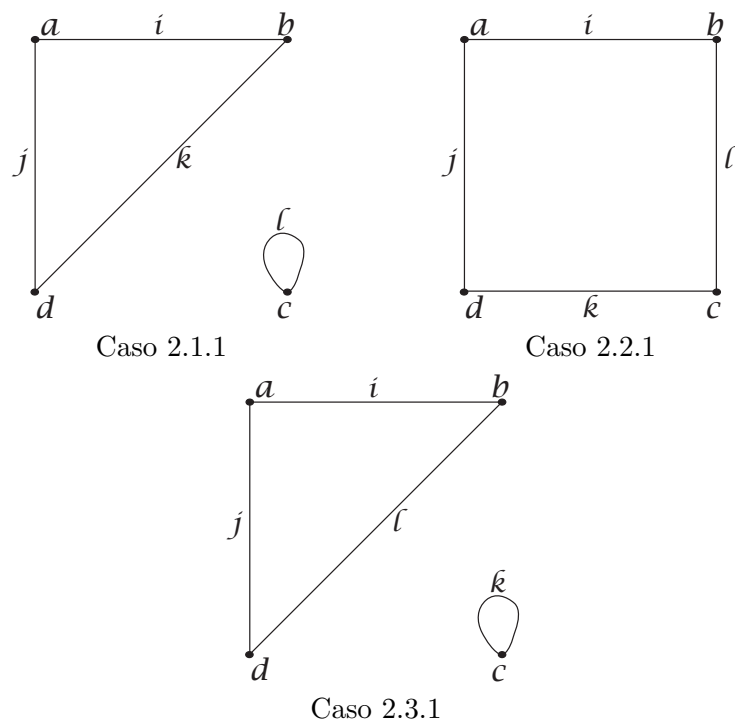
Figura 8.9. Opciones para la arista j

Figura 8.10. Opciones para la arista k del caso 1 de la Figura 8.9Figura 8.11. Opciones para la arista l del caso 1.1 y 1.2 de la Figura 8.10

Del caso 2 de la Figura 8.9, nuestras posibilidades para el cubo k generan las aristas que se muestran en la Figura 8.12. Si colocamos la arista (b, c) generamos una gráfica isomorfa al caso 2.2 de la Figura 8.12. Por otro lado, si colocamos la arista (a, c) o un lazo en a , estamos utilizando un mismo color para tres cubos en dos caras. Esto no es posible, pues esos cubos no son solución del problema. Por último, si colocamos lazos en b o d , aparecería tres veces el mismo color para dos caras de la torre, por lo tanto estaríamos repitiendo un color en alguna de las dos caras de la torre. Para los casos 2.1, 2.2 y 2.3 de la Figura 8.12, el cubo l genera las gráficas de la Figura 8.13, las demás aristas, como ya vimos, generan cubos que no son soluciones del problema. Las gráficas generadas a partir de estas soluciones de cubos son *2-regulares*.

Siguiendo un procedimiento análogo, en el caso 3 de la Figura 8.9 los cubos que

Figura 8.12. Opciones para la arista k del caso 2 de la Figura 8.9

Figura 8.13. Opciones para la arista l de los casos 2.1, 2.2 y 2.3 de la Figura 8.12

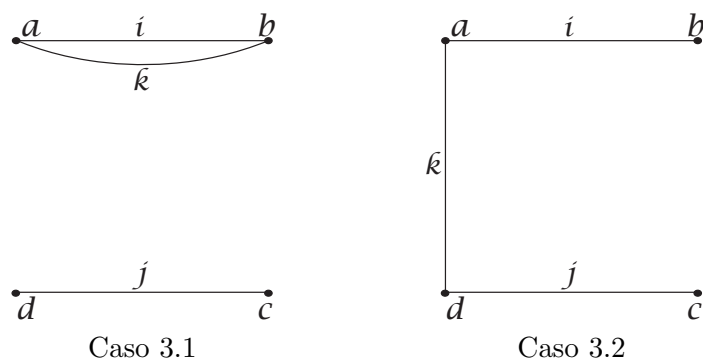


Figura 8.14. Opciones para la arista k del caso 3 de la Figura 8.9

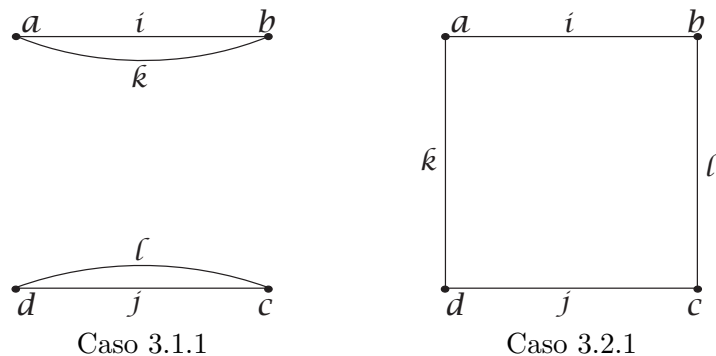


Figura 8.15. Opciones para la arista l de los casos 3.1 y 3.2 de la Figura 8.14

son solución del problema se asocian con las gráficas de la Figura 8.14, los cubos que generan lazos en los vértices a, b, c y d no son soluciones del problema, pues estamos utilizando para dos caras de la torre tres veces el mismo color. En el caso 3.1 de la Figura 8.14 las aristas (a, b) , (a, c) , (a, d) , (b, c) y (b, d) tampoco son soluciones, ya que utilizamos un mismo color para tres diferentes cubos en dos caras, mientras la arista (d, c) y las aristas (a, c) , (b, c) y (b, d) nos dan gráficas isomorfas a los casos 3.1 y 3.2 de la Figura 8.14 respectivamente. El cubo l genera las gráficas de la Figura 8.15, cualquier otra arista vendría de un cubo que no es solución del problema.

Por último analicemos el caso 4 de la Figura 8.9. Una vez más los cubos que son solución del problema generan las gráficas que se muestran en la Figura 8.16. Los cubos que generan lazos en los vértices a y b no son soluciones del problema, pues estamos usando tres veces el mismo color para dos caras del cubo, también los

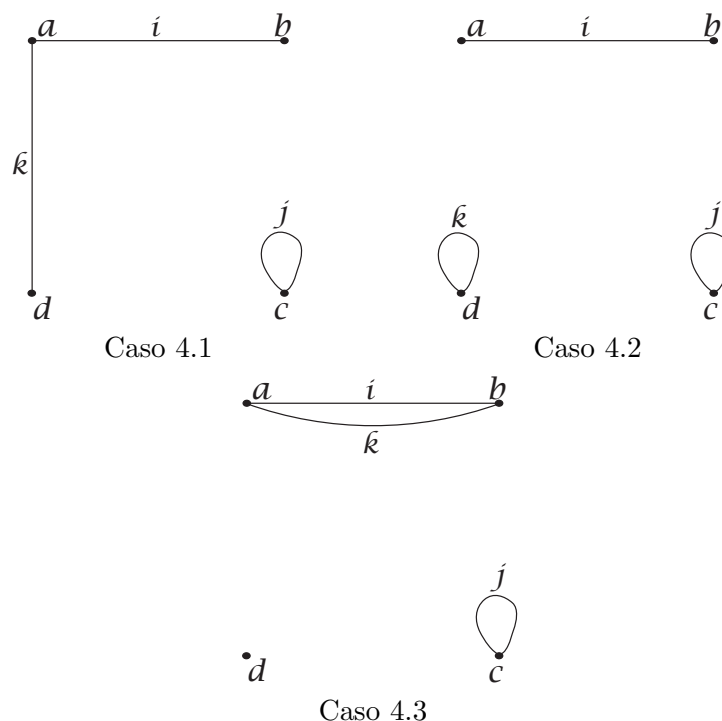


Figura 8.16. Opciones para la arista k del caso 4 de la Figura 8.9

cubos que generen las aristas (a, c) , (b, c) y (d, c) no son soluciones, pues como ya lo mencionamos, estamos utilizando tres veces el mismo color para dos caras del cubo, y por último la arista (b, d) en vez de la arista (a, d) genera una gráfica isomorfa al caso 4.1 de la Figura 8.16. Para el cubo l , los cubos que son solución del problema generan las aristas que se muestran en la Figura 8.17, los demás cubos, como ya vimos, generan aristas que no son solución del problema, por lo tanto para este caso los cubos que son solución del problema se asocian con las multigráficas *2-regulares*.

Para completar la prueba falta analizar los casos y subcasos para el cubo i , como se muestra en la Figura 8.18. Esta prueba se deja al lector, ya que su demostración es muy similar a la anterior. Como es de esperarse, las soluciones de estos casos son también multigráficas *2-regulares*. Por lo tanto, si es posible formar una torre con los cuatro cubos tal que los cuatro colores aparezcan en cada una de las caras, entonces \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 son *2-regulares*. ■

Vamos a construir cubos para los cuales el problema no tenga solución. Y por último intentaremos generalizar el problema. Primero observemos que exis-

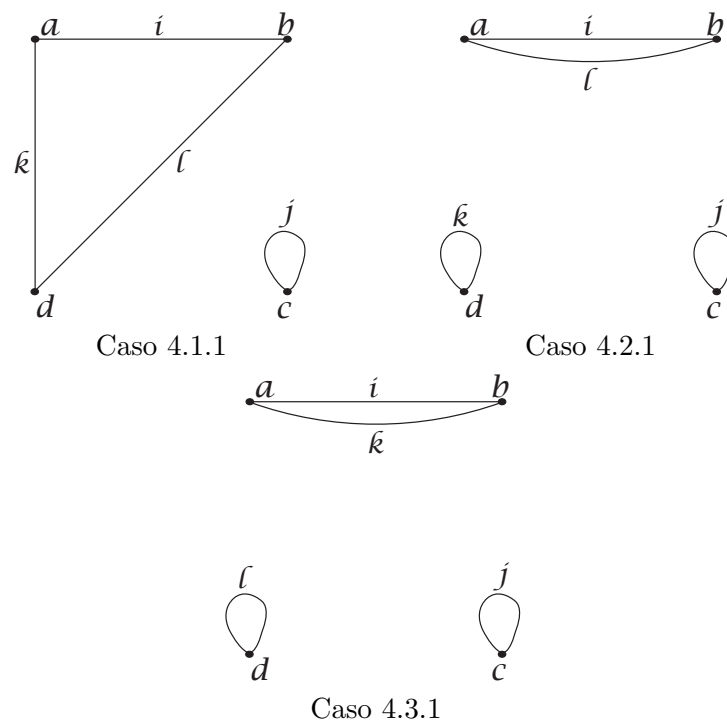


Figura 8.17. Opciones para la arista l de los casos 4.1, 4.2 y 4.3 de la Figura 8.16

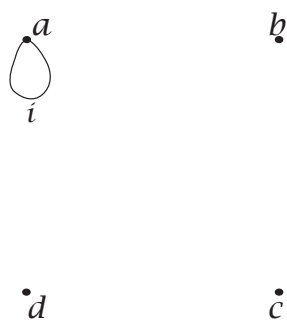


Figura 8.18. Ponemos una arista cualquiera

ten cuarenta y ocho formas diferentes de iluminar las caras de los cubos con cuatro colores distintos. Comprobar que la afirmación anterior es cierta resulta una tarea no muy difícil si estamos familiarizados con la combinatoria, sin embargo, el objetivo de este texto es tratar de introducirte en la Teoría de las gráficas, por lo que comprobaremos la afirmación utilizando multigráficas, aunque el método no es muy directo, sí es el más sencillo de visualizar.

Recordemos que en cada cara de la torre deben de estar representados los cuatro colores. Primero vamos a dividir las diferentes coloraciones que puede tener el cubo dependiendo de cuántos colores se repiten en caras opuestas. Entonces sólo tenemos dos opciones,

1. En caras opuestas se repiten colores.
2. En ninguna cara opuesta se repiten colores.

El cubo 1 y el cubo 3 que se muestran en la figura 8.3 son ejemplos de los casos 1 y 2 respectivamente.

Analicemos primero el caso 1. Como en caras opuestas se repiten colores, puede pasar que sólo un color se repita en caras opuestas o que dos colores se repitan en caras opuestas; en ambos casos la multigráfica asociada a estos cubos debe de tener uno o dos lazos, ya que por construcción de las multigráficas asociadas a los cubos, tenemos que un vértice es adyacente a otro si y sólo si los colores asociados a esos vértices se encuentran en caras opuestas del cubo, entonces si en caras opuestas hay el mismo color el vértice es adyacente a sí mismo.

Llegamos al punto donde las gráficas nos van a ayudar a contar todos los tipos de cubos con colores repetidos en caras opuestas. Simplemente necesitamos encontrar todas las multigráficas de cuatro vértices y tres aristas (recuerda que el número de aristas de la gráfica es igual al número de caras opuestas) tal que a todos los vértices de la multigráfica les incida al menos una arista (ya que en cada cubo deben de estar representados los cuatro colores) y que la multigráfica posea uno o dos lazos. En general hay tres tipos diferentes de multigráficas que cumplen las condiciones anteriores, las demás son multigráficas isomorfas a alguna de estas tres. Los tres tipos de multigráficas se muestran en la Figura 8.19. Como sabemos que cada cubo, no importando la coloración que tenga, lo podemos representar con una multigráfica, entonces todos los isomorfismos de las multigráficas de los tipos 1, 2 y 3 son representaciones de todos los posibles cubos que hay con colores repetidos en caras opuestas. Un buen ejercicio para el lector es encontrar los isomorfismos de las gráficas del tipo 1, 2 y 3. Si encuentras que las multigráficas del tipo 1 y 2 tienen doce isomorfismos respectivamente (contando las que te dimos) y que la

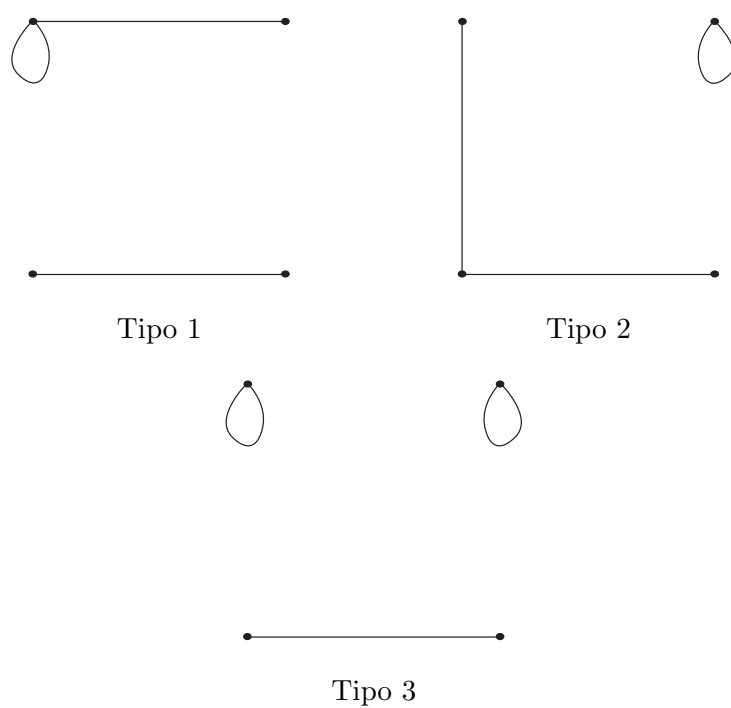


Figura 8.19. Multigráficas que representan a los cubos con colores repetidos en caras opuestas.

multigráfica del tipo 3 tiene seis (contando la que te dimos), tu solución es correcta. Entonces existen treinta coloraciones diferentes para los cubos con colores repetidos en caras opuestas.

De una manera muy similar al caso anterior, podemos encontrar el número de cubos tal que ninguna cara opuesta repita colores. Observa que las multigráficas asociadas a estos cubos no tienen lazos, pues como no hay colores repetidos en caras opuestas, no hay vértices adyacentes a ellos mismos. Entonces necesitamos encontrar todas las multigráficas con cuatro vértices, tres aristas y sin lazos, tales que a cada vértice le incida al menos una arista. Encontrar dichas gráficas se deja como ejercicio al lector (Pista: existen tres tipos distintos de gráficas que no son isomorfas entre sí, uno de estos tipos tiene seis isomorfismos, otro cuatro y el último ocho).

Ahora sí vamos a encontrar cuartetos de cubos sin solución. Para hacer esto necesitamos darle un pequeño giro al razonamiento del problema. Si para resolver el problema necesitábamos encontrar en la multigráfica H dos submultigráficas H_1 y H_2 ajenas por aristas, que fueran *2-regulares*, entonces para que el problema no tenga solución necesitamos encontrar una multigráfica H tal que H no tenga dos submultigráficas ajenas por aristas que sean *2-regulares*.

Un cuarteto de cubos que no tiene solución serían cuatro cubos iguales del tipo 2, ya que al sobreponer las cuatro multigráficas que generan estos cubos obtenemos la gráfica H que se muestra en la figura 8.20, que no tiene dos submultigráficas *2-regulares* con cuatro vértices, entonces por el Teorema 8.1.1, no es posible formar una torre con los cuatro cubos tal que en cada cara de la torre aparezcan los cuatro colores.

Para finalizar vamos a generalizar el problema, es decir, veremos si es posible formar una torre con n cubos, tal que en cada cara de los cubos aparezcan n colores diferentes. Para empezar veamos que esta generalización no es “tan general”, pues necesariamente $n \leq 6$. Imaginemos por un momento que $n = 7$, el problema quedaría planteado de la siguiente forma: Es posible formar una torre con 7 cubos, tal que en cada cara de la torre aparezcan 7 colores diferentes. De entrada el problema es absurdo pues los cubos sólo tienen seis caras, por lo que no es posible que en cada cara de la torre aparezcan 7 colores, sería como intentar ponerse tres zapatos al mismo tiempo (en los pies, claro está).

La forma de construir las gráficas que modelan los cubos es diferente para cada n , pues como vimos al principio del capítulo el número de vértices depende del

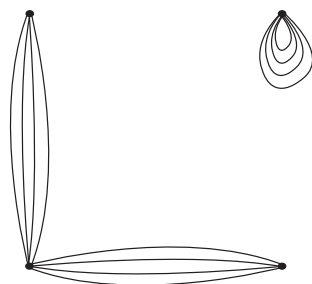


Figura 8.20. H no contiene dos subgráficas con cuatro vértices, ajenas por aristas y 2-regulares

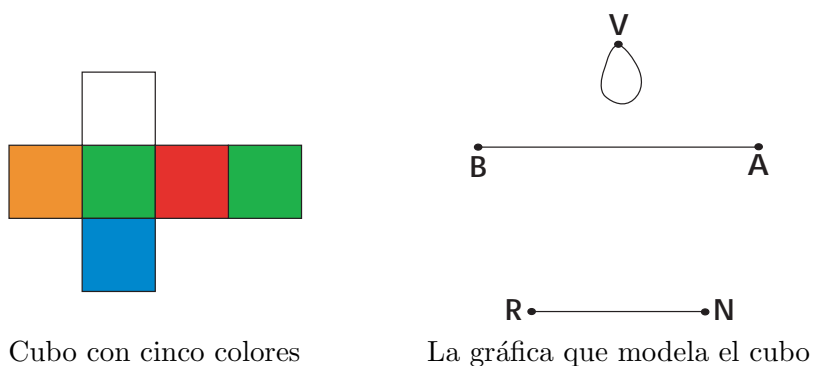


Figura 8.21.

número de colores que estén representados en el cubo. Sin embargo, el número de aristas que tienen las gráficas es el mismo para toda n , ya que éste dependen del número de caras opuestas que haya en el cubo, y además a todos los vértices de la multigráfica les debe de incidir al menos una arista, pues en cada cubo deben de estar representados los n colores. Por ejemplo, para el caso $n = 5$ tenemos que en cada cara de los cubos deben de estar representados cinco colores diferentes, entonces la gráfica que representa a un cubo cualquiera con estas cualidades debe de tener cinco vértices y tres aristas, como se muestra en la Figura 8.21.

La forma de construir la gráfica H en cualquiera de los seis casos es la misma, sólo que el número de multigráficas que sobrepongamos para obtener H depende estrictamente del número de cubos con los que queramos formar la torre. Por ejemplo, en el caso $n = 5$ H se obtiene de sobreponer las cinco gráficas que modelan los cinco cubos de nuestro problema.

Otra cosa que comparten los seis casos en común es lo que buscamos en H . Según recordarás, para que podamos formar con los cubos la torre deseada, no importando el tamaño de la torre, necesitamos buscar en H dos subgráficas H_1 y H_2 ajenas por aristas, con n vértices (un vértice por cada color que aparezca en la torre) y que sean *2-regulares*. Pero, ¿por qué es necesario que sean *2-regulares*, no importando cuántos cubos tengamos y cuántos colores estemos utilizando? La respuesta está en la demostración del Teorema 8.1.1, fíjate que para demostrar la *2-regularidad* de H_1 y H_2 nunca utilizamos el número de vértices ni de aristas que tienen H_1 y H_2 , por lo que la demostración se sigue para cualesquiera H_1 y H_2 con n vértices y ajenas por aristas.

Falta ver que el regreso de la demostración del Teorema 8.1.1 también se cumple para los casos en que $n = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Desafortunadamente, la prueba para estos casos no se sigue del caso $n = 4$. Sin embargo, estos se pueden demostrar haciendo un análisis muy similar, pero estas pruebas se dejan como ejercicio al lector.

8.2. Caníbales y misioneros

Tres caníbales y tres misioneros desean viajar al otro lado de un río, el problema es que la balsa que tienen sólo puede llevar dos personas. Por si esto fuera poco, de ningún lado del río puede haber más caníbales que misioneros, pues los caníbales, al verse en una buena ventaja, devorarían a los misioneros. Si cualquier persona (caníbal o misionero) puede manejar la balsa, ¿es posible que las seis personas crucen del otro lado?

8.2.1. Modelo

Para empezar, vamos a ver cuántos caníbales y cuántos misioneros es posible que haya en ambos lados del río sin que se dejen de cumplir las condiciones del problema. Para hacer esto vamos a representar al número de caníbales y misioneros con los pares ordenados (c, m) , donde c representa el número de caníbales y m el de misioneros. Estos pares representan la posición o estado en el que se encuentran los misioneros y caníbales en el primer lado del río, por ejemplo la pareja ordenada $(2, 2)$ significa que en el primer lado del río hay dos caníbales y dos misioneros. La razón por la cual sólo modelamos el primer lado del río es que lo que pasa en este lado del río afecta directamente a lo que pasa del otro lado, es decir, si en el primer lado tenemos dos caníbales y dos misioneros, necesariamente en el otro lado habrá un caníbal y un misionero, ¡a menos que alguno se haya ahogado en el trayecto! Entonces si lo que pasa de un lado afecta directamente a lo que pasa en el otro, sólo es necesario modelar un lado del río.

El total de pares ordenados que se pueden formar con tres caníbales y tres misioneros es 16. Pero los pares $(2, 1)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$ no son posibles ya que significa que en el primer lado del río hay más caníbales que misioneros. De manera análoga, los pares ordenados $(0, 1)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$ no están permitidos, ya que esto significa que en el otro lado del río el número de caníbales es mayor al de misioneros. Por ejemplo, si en el primer lado del río está la pareja $(0, 1)$ necesariamente en el segundo lado del río está la pareja $(3, 2)$ y esta pareja no está permitida. La únicas parejas permitidas se muestran en la Figura 8.22.

Vamos a ver cuándo es posible pasar de un estado permitido a otro cruzando sólo una vez el río. Como sabemos, en el bote pueden ir a lo más dos personas, por lo que no es posible pasar directamente, por ejemplo, del estado $(2, 2)$ al $(0, 0)$, pues esto significa que con un solo cruce pasamos de tener dos caníbales y dos misioneros en el primer lado del río a tener cero caníbales y cero misioneros en el primer lado del río y la única forma de lograr esto con un solo cruce es meter a los dos caníbales y a los dos misioneros en el bote para llevarlos al otro lado del río.

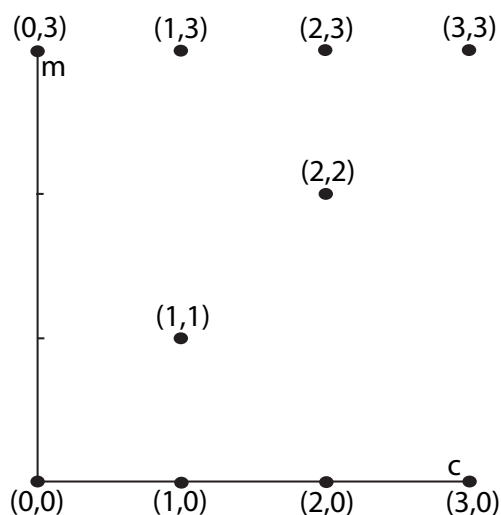


Figura 8.22. Estados de la gráfica

Entonces para que podamos pasar de un estado a otro es necesario que los estados no difieran en más de dos personas, por ejemplo es posible pasar del estado $(0, 0)$ al $(1, 1)$ o del estado $(3, 3)$ al $(2, 3)$.

Ya casi podemos modelar el problema con una gráfica, de momento asociemos los vértices de la gráfica con los estados permitidos y dos vértices son adyacentes si y sólo si los estados asociados a estos vértices no difieren en más de dos personas. Sin embargo, hay una situación que es importante saber y la gráfica que construimos no nos la proporciona y es: de qué lado del río se encuentra el bote. Este punto resulta importante ya que necesitamos saber hacia qué lado del río se dirigen los caníbales y/o misioneros que vayan en el bote, así pues, si el bote se encuentra en el lado uno del río, entonces el bote se dirige hacia el lado dos y viceversa. Entonces lo más conveniente es utilizar una gráfica dirigida, donde las flechas en este caso nos indicarán en qué dirección va el bote.

Para hacer esta distinción vamos a dividir en dos conjuntos al conjunto de flechas de la digráfica. En donde un conjunto nos dirá si el bote va del lado uno al dos y el segundo conjunto nos dirá si va en dirección contraria.

Vamos a definir al conjunto de flechas que va del lado uno al dos de la siguiente forma[8].

- Si estamos en un estado (c_1, m_1) y el bote se encuentra en el primer lado del

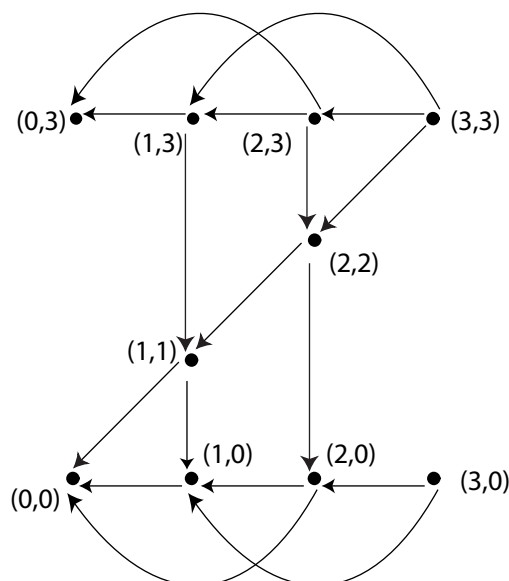


Figura 8.23. Las transiciones permitidas entre estados cuando el bote se encuentra en el primer lado del río

río, podemos pasar al estado (c_2, m_2) siempre que $c_2 \leq c_1$, $m_2 \leq m_1$ y

$$1 \leq (c_1 + m_1) - (c_2 + m_2) \leq 2 \quad (8.1)$$

En este conjunto de flechas el bote se encuentra en el primer lado del río, entonces el bote se dirige hacia el lado dos. Además, para que esta transición sea posible necesitamos pedir que el número de caníbales y misioneros del estado (c_2, m_2) sea menor o igual que el número de caníbales y misioneros del estado (c_1, m_1) si queremos pasar del estado (c_1, m_1) al estado (c_2, m_2) , pues con esto aseguramos que estamos transportando gente del primer lado del río. La razón por la cual necesitamos que se cumpla la ecuación (8.1), es que ésta es la que se encarga de condicionar el bote a un mínimo de una persona (los botes no se manejan solos) y un máximo de dos personas. Llamemos C^+ a la digráfica que modela las transiciones permitidas entre estados cuando el bote se encuentra en el primer lado del río. Esta digráfica se muestra en la Figura 8.2.1.

De manera inversa definimos al conjunto de flechas que va del lado dos al lado uno[8].

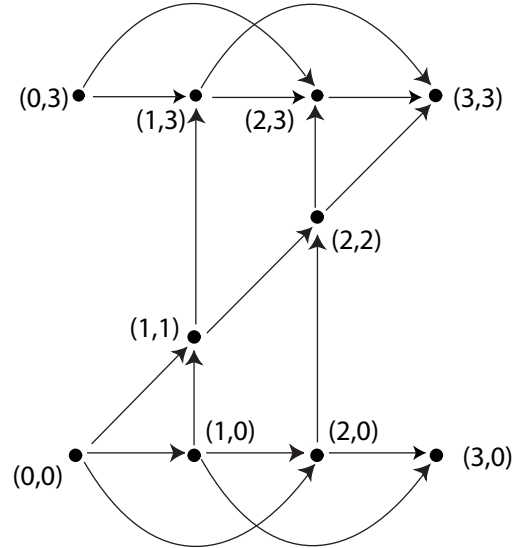


Figura 8.24. Las transiciones permitidas entre estados cuando el bote se encuentra en el segundo lado del río

- Si estamos en un estado (c_1, m_1) y el bote se encuentra en el segundo lado del río, podemos pasar al estado (c_2, m_2) siempre que $c_2 \geq c_1$, $m_2 \geq m_1$ y

$$1 \leq (c_2 + m_2) - (c_1 + m_1) \leq 2 \quad (8.2)$$

En este caso, como el bote se encuentra en el lado dos del río, es necesario llevar al menos una persona al lado uno, para que la balsa siga sacando gente de este lado. Es por eso que el número de caníbales y misioneros del estado (c_2, m_2) tiene que ser mayor o igual al número de caníbales y misioneros del estado (c_1, m_1) , si queremos pasar del estado (c_1, m_1) al estado (c_2, m_2) . En pocas palabras estamos llevando gente al lado uno del río, para después poder transportar más gente de este lado. La ecuación (8.2) tiene la misma utilidad que la ecuación (8.1). Llamemos C^- a la digráfica que modela las transiciones permitidas entre estados cuando el bote se encuentra en el segundo lado del río. Esta digráfica se muestra en la Figura 8.2.1.

Estamos a punto de modelar el problema. Sólo nos falta hacer una pequeña operación. Llamémosle C a la digráfica que resulta de sobreponer C^+ y C^- y dividamos a las flechas de C en conjuntos de flechas positivas y negativas. Las flechas positivas

son las que pertenecen a C^+ y las flechas negativas son las que pertenecen a C^- . Ahora sí pasemos a la solución del problema.

8.2.2. Solución

Iniciamos con tres caníbales y tres misioneros en el primer lado del río y el objetivo es llevarlos a todos al segundo lado del río, es decir, necesitamos terminar sin caníbales ni misioneros del primer lado del río. Ya que cada flecha representa un viaje con un determinado número de pasajeros en el bote a través del río, entonces necesitamos encontrar en C un camino dirigido del estado $(3, 3)$ al estado $(0, 0)$. Sin embargo el camino dirigido no puede ser cualquiera, por ejemplo, considera el camino dirigido T tal que

$$T = ((3, 3), (2, 3), (1, 3)).$$

Si piensas un poco es imposible que los caníbales y misioneros se puedan mover de esta forma en el bote. Observa que todas las flechas de T son positivas, es decir, el bote se dirige del lado uno al dos siempre, entonces si el primer viaje fue del lado uno al dos y el segundo también, ¿en qué momento el bote regresó al lado uno para poder realizar el segundo viaje? Es por esto que es necesario pedirle al camino dirigido que alterne flechas positivas y negativas, para asegurar que vayamos del lado uno al dos y de regreso.

En resumen, necesitamos encontrar un camino dirigido en C del vértice $(3, 3)$ al vértice $(0, 0)$, que alterne flechas positivas y flechas negativas. O sea, que empecemos en el primer lado del río en el estado $(3, 3)$ y llevamos un determinado número de pasajeros en el bote al otro lado del río (en C sería una flecha positiva). Ya en el segundo lado del río llevamos al primer lado por lo menos un pasajero en el bote (en C sería una flecha negativa) y continuamos este proceso hasta llegar al estado $(0, 0)$. Una solución al problema se muestra en la Figura 8.25. La Figura 8.26 muestra los once cruces necesarios para resolver el problema y el número de caníbales y misioneros en cada lado del río después de cada cruce.

Como nuestros misioneros y caníbales son algo flojos, les interesa saber si la ruta que aquí propusimos es la más corta.

Primero consideremos la digráfica C como se muestra en la Figura 8.27, y sea P el camino dirigido de once cruces que propusimos, tal que

$$P = ((3, 3), (1, 3), (2, 3), (0, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (2, 0), (3, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 0)).$$

Para demostrar que el camino P es la manera de llevar más rápido a los caníbales

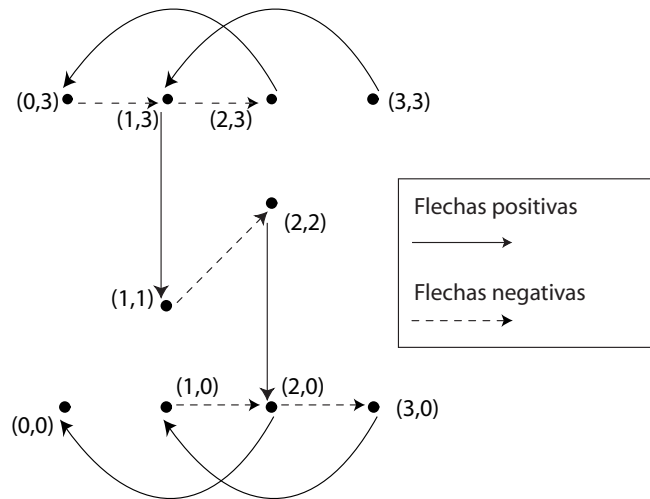


Figura 8.25. Solución al problema

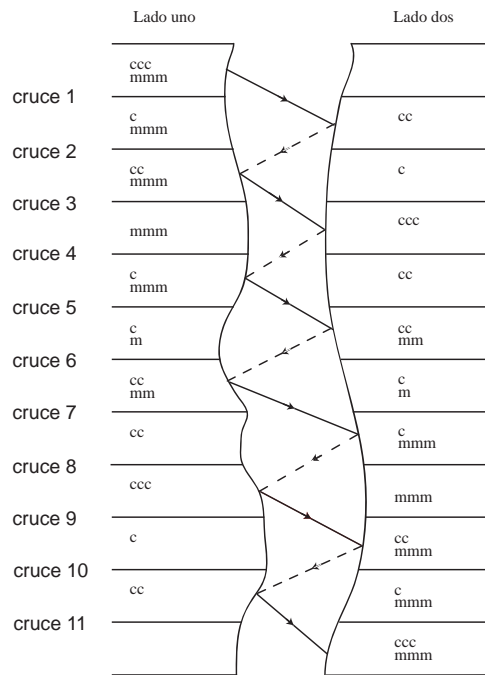
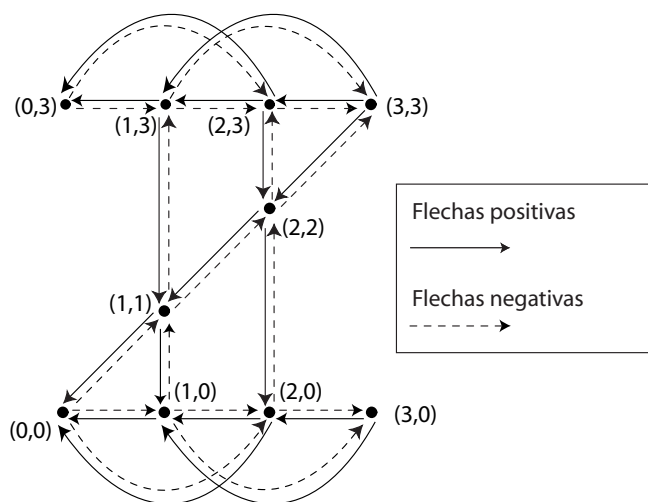


Figura 8.26. Los once cruces en el bote

Figura 8.27. Digráfica C

y misioneros al otro lado del río, vamos a pensar el problema al revés, es decir, vamos a empezar con el vértice $(0, 0)$ y a partir de aquí vamos a ver cuál es la ruta más rápida para llegar a este vértice.

Para llegar al estado $(0, 0)$ es necesario pasar primero por el estado $(2, 0)$, $(1, 0)$ o $(1, 1)$ pues el último viaje que se realiza es del lado uno al lado dos del río, es decir, a través de una flecha positiva. Supongamos que el paseo entra al vértice $(0, 0)$ a través del vértice $(1, 0)$; como la única flecha negativa que entra en el vértice $(1, 0)$ viene del vértice $(0, 0)$, entonces el penúltimo estado del paseo no puede ser el $(1, 0)$, ya que estaríamos dando vueltas en círculos.

Supongamos que el paseo entra al vértice $(0, 0)$, a través del vértice $(2, 0)$; las flechas negativas que entran a éste vértice son la $(0, 0)$ y la $(1, 0)$. Si elegimos la flecha $(0, 0)$ estaríamos dando vueltas en círculos, ésta no es una buena elección. Si elegimos la flecha $(1, 0)$; las flechas positivas que entran a este vértice son la $(1, 1)$, $(2, 0)$ y $(3, 0)$. Si tomamos la flecha positiva que entra al vértice $(2, 0)$, una vez más, estamos dando vueltas en círculo. Por último, las flechas negativas que entran en los vértices $(1, 1)$ y $(3, 0)$, nos devuelven a los vértices $(0, 0)$ y $(2, 0)$ respectivamente, entonces, este par de casos también nos hacen dar vueltas en círculos.

Ahora supongamos que el paseo entra al vértice $(0, 0)$ a través del vértice $(1, 1)$,

las flechas negativas que entran al vértice $(1, 1)$ vienen de los vértices $(1, 0)$ y $(0, 0)$, claramente la flecha $((0, 0), (1, 1))$ no puede ser parte del paseo, por lo tanto la flecha $((1, 0), (1, 1))$ es parte del paseo. Hasta el momento tenemos que la mejor manera de entrar el vértice $(0, 0)$ es a través del camino

$$((1, 0), (1, 1), (0, 0)).$$

Analícemos ahora por qué flecha es mejor entrar hacia el vértice $(1, 0)$. Las flechas positivas que entran al vértice $(1, 0)$ son $((1, 1), (1, 0))$, $((2, 0), (1, 0))$ y $((3, 0), (1, 0))$, consideremos los siguientes casos:

- i*) La flecha positiva $((1, 1), (1, 0))$ no puede ser parte del paseo pues es regresar-se un paso, en otras palabras estamos navegando en círculos con los mismos pasajeros.
- ii*) Si la flecha positiva $((3, 0), (1, 0))$ está en el paseo, las flechas negativas que entran al vértice $(3, 0)$ son $((2, 0), (3, 0))$ y $((1, 0), (3, 0))$ la última de estas flechas no es parte del paseo pues una vez más estamos viajando en círculos, por lo tanto la otra flecha es la que pertenece al paseo.
- iii*) La flecha positiva $((2, 0), (1, 0))$ puede estar en el paseo.

Por *i*, *ii* y *iii* concluimos que la mejor manera de llegar al vértice $(0, 0)$, es a través de los caminos

$$((2, 0), (3, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 0)) \text{ y}$$

$$((2, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 0)),$$

entonces sin importar qué ruta tomemos, el camino forzosamente pasa primero por el vértice $(2, 0)$. Entonces, para encontrar el camino más corto del estado $(3, 3)$ al estado $(0, 0)$ primero buscaremos el camino más corto del estado $(3, 3)$ al estado $(2, 0)$ y después encontraremos el camino más corto del estado $(2, 0)$ al estado $(0, 0)$.

Antes de encontrar el camino más corto observemos que si la flecha $((c_1, m_1), (c_2, m_2))$ está en el camino, la flecha $((c_2, m_2), (c_1, m_1))$ no está en el camino, pues esto sería como navegar en círculos con los mismos pasajeros. Ahora sí, para ir del estado $(3, 3)$ al estado $(2, 0)$ consideremos los siguientes casos:

- 1.i*) La flecha $((3, 3), (1, 3))$ es la primera del paseo. Del vértice $(1, 3)$ nos podemos ir por una flecha negativa al vértice $(2, 3)$ (es claro que la flecha $((1, 3), (3, 3))$ no está en el paseo). Del vértice $(2, 3)$ nos podemos ir por una flecha positiva a los vértices $(2, 2)$ o $(0, 3)$, supongamos que nos vamos al vértice $(2, 2)$, las dos flechas negativas que le salen a este vértice van hacia los vértices $(3, 3)$

y $(2, 3)$, y en ambos casos la única manera de seguir avanzado es repetir los viajes que hicimos previamente, entonces el paseo necesariamente debe de continuar por el vértice $(0, 3)$. Ya en el vértice $(0, 3)$ la única posibilidad es irnos por una flecha negativa hacia el vértice $(1, 3)$, después la única flecha positiva que podemos tomar es hacia el vértice $(1, 1)$, una vez más la única flecha negativa que podemos tomar es hacia el vértice $(2, 2)$ y por último la única flecha positiva que podemos tomar es hacia el vértice $(2, 0)$ por lo tanto el camino P_1 es:

$$P_1 : ((3, 3), (1, 3), (2, 3), (0, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (2, 0))$$

- 1.ii) La flecha $((3, 3), (2, 2))$ es la primera del camino. Del vértice $(2, 2)$ forzosamente tenemos que tomar la flecha negativa hacia el vértice $(2, 3)$. Ya en el vértice $(2, 3)$ podemos ir por una flecha positiva hacia los vértices $(1, 3)$ o $(0, 3)$, supongamos que nos vamos hacia el vértice $(1, 3)$, las flechas negativas que salen de este vértice van hacia los vértices $(2, 3)$ y $(3, 3)$, y como vimos en el caso anterior la única manera de seguir avanzado es repetir los viajes que hicimos previamente, por lo tanto nuestro paseo continúa por el vértice $(0, 3)$. Ya en el vértice $(0, 3)$ las únicas posibilidades de seguir avanzando son a través de los vértices $(1, 3)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(2, 0)$, por lo tanto el paseo P_2 es:

$$P_2 : ((3, 3), (2, 2), (2, 3), (0, 3), (1, 3), (1, 1), (2, 2), (2, 0))$$

- 1.iii) La flecha $((3, 3), (2, 3))$ es la primera del paseo. La única flecha negativa que sale del vértice $(2, 3)$ se regresa al vértice $(3, 3)$, por lo tanto la flecha $((3, 3), (2, 3))$ no puede ser la primera del paseo.

Por 1.i, 1.ii y 1.iii se necesitan por los menos siete cruces para ir del estado $(3, 3)$ al estado $(2, 0)$. Como P_1 y P_2 entran al vértice $(2, 0)$ por una flecha positiva, entonces el paseo más corto del estado $(2, 0)$ al estado $(0, 0)$ empieza con una flecha negativa. Del vértice $(2, 0)$ forzosamente nos tenemos que ir hacia el vértice $(3, 0)$, después la única flecha positiva que podemos tomar es hacia el vértice $(1, 0)$. A partir de este punto consideremos los siguientes casos:

- 2.i) La flecha $((1, 0), (1, 1))$ está en el paseo. Del vértice $(1, 1)$ al único vértice que nos podemos dirigir es hacia el $(0, 0)$, por lo tanto nuestro el P'_1 es

$$P'_1 : ((2, 0), (3, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 0))$$

- 2.ii) La flecha $((1, 0), (2, 0))$ está en el paseo. Del vértice $(2, 0)$ necesariamente nos tenemos que dirigir hacia el vértice $(0, 0)$, por lo tanto el paseo P'_2 es

$$P'_2 : ((2, 0), (3, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 0))$$

Por $2.i$ y $2.ii$ se necesitan al menos 4 cruces para ir del estado $(2,0)$ al estado $(0,0)$. Para finalizar por $1.i$, $1.ii$, $1.iii$, $2.i$ y $2.ii$ se necesitan al menos once cruces para ir del estado $(3,3)$ al estado $(0,0)$, por lo tanto P es una de las rutas más cortas.

8.3. Dividiendo el vino

Los últimos dos borrachos de la fiesta quieren seguir tomando y *únicamente* tienen ocho litros de vino, como andan de *buena copa* les parece justo dividir los ocho litros de vino en dos porciones de cuatro litros, el problema es que para hacer esto solo poseen dos botellas vacías de cinco y tres litros respectivamente, como ya están muy mareados despiertan a su cuate el matemático para que les resuelva el problema.

Historia

El origen de este problema es hasta la fecha desconocido. Una historia curiosa relacionada con este problema es la del matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840). Cuenta la leyenda que la familia de Poisson quería que fuera doctor, sin embargo las aptitudes médicas de Poisson eran bastante pobres, también intentó una carrera en leyes pero una vez más fracasó. En el transcurso de su juventud, en un viaje alguien le planteó *el problema de los tres vasos* (este problema es muy similar al de esta sección, la única diferencia es que en vez de dividir vino en dos porciones iguales, divides agua), Poisson lo resolvió en pocos segundos y fue ahí donde se dio cuenta de cuál era su verdadera profesión. A partir de ese día Poisson se dedicó de tiempo completo a las matemáticas, hasta llegar a ser uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX. [4]

Otro problema muy similar aparece en la película *Duro de matar III* (1995), donde los personajes John McClane y Zeus Carver (interpretados por Bruce Willis y Samuel L. Jackson) deben de dividir ocho litros de agua en dos porciones de cuatro litros utilizando sólo tres garrafones de ocho, cinco y tres litros, respectivamente, en menos de cinco minutos para evitar que una bomba explote en un parque. [37]

8.3.1. Un poco de álgebra

Vamos a hacer un pequeño paréntesis dentro de la teoría de gráficas y desviaremos nuestra atención al álgebra, principalmente al algoritmo de la división. Más adelante veremos que este tema es de gran ayuda para la generalización del problema de esta sección.

Definición 8.3.1 (Principio del buen orden) *Si A es un subconjunto no vacío de números naturales, entonces existe un elemento en A que es menor que todos los otros elementos de A .*

Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales $(1, 2, 3, \dots)$ el elemento más pequeño es el número 1.

Definición 8.3.2 Si a y b son números enteros, decimos que b divide a a si existe un entero q tal que $a = bq$. Notación: b divide a a se denota por $b \mid a$.

Teorema 8.3.1 Si a y b son enteros y $b \neq 0$, existen dos enteros q y r , únicos, tales que [7]

$$a = bq + r, \quad \text{con } 0 \leq r < |b|.$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso en que $a > 0$ y $b > 0$. Consideremos el conjunto de números enteros no negativos que sean de la forma $a - bs$ con s entero. Este conjunto es no vacío pues al menos $a = a - b \cdot 0 > 0$ esta en él. Por el principio del buen orden, dicho conjunto tiene un elemento menor que todos los demás. Sea

$$r = a - bq \geq 0 \tag{8.3}$$

dicho elemento. Despejando a obtenemos que

$$a = bq + r.$$

Falta por demostrar que $r < |b| = b$. Supongamos que $r \geq b$, sumemos $-b$ a ambos lados de la ecuación 8.3, entonces

$$r - b = a - bq - b = a - b(q + 1);$$

como $r \geq b$, si despejamos b obtenemos que $r - b \geq 0$, y como $r - b = a - b(q + 1)$, entonces

$$a - b(q + 1) \geq 0,$$

y además

$$a - b(q + 1) = r - b < r = a - bq.$$

Entonces hemos encontrado un número más pequeño que r , tal que este número es mayor o igual a cero, lo que contradice que $r = a - bq$ es menor que todas las expresiones no negativas de la forma $a - bs$. Por lo tanto $r < |b| = b$, con lo cual queda demostrado este caso. El caso en que $a > 0$ y $b < 0$, junto con el caso en que a y b son ambos negativos, por su similitud con la prueba anterior, se dejan al lector.

Demostraremos por contradicción la unicidad de q y r . Para hacer esto vamos a suponer que existe otro par de números diferentes a q y r , tal que estos números también cumplen la igualdad del teorema, y finalizaremos demostrando que estos números que nos habíamos inventado son los mismos que q y r . Con esto demostraremos que no existe otro par de números diferentes a q y r que cumplen las condiciones del teorema.

Supongamos que

$$\begin{aligned} a &= bq + r & 0 \leq r < |b| \\ a &= bq' + r' & 0 \leq r' < |b|. \end{aligned}$$

Igualando la ecuaciones anteriores y factorizando, obtenemos que

$$b(q - q') = (r' - r),$$

de donde

$$|b| |q - q'| = |r - r'|.$$

Como $r < |b|$ y $r' < |b|$, si restamos ambas desigualdades tenemos que $|r - r'| < |b|$. Por lo tanto

$$|b| |q - q'| = |r - r'| < |b|.$$

Lo que implica que

$$|b| |q - q'| < |b|,$$

eliminado b obtenemos que

$$|q - q'| < 1.$$

Como q y q' son enteros, necesariamente $|q - q'| = 0$.

Sabemos que $b \neq 0$, que $|b| |q - q'| = |r - r'|$ y que $|q - q'| = 0$, entonces $|r - r'| = 0$.

Por hipótesis $|b| \neq 0$, además $|q - q'| = 0$ y $|r - r'| = 0$, por lo tanto

$$q = q' \quad \text{y} \quad r = r' \quad \blacksquare$$

Definición 8.3.3 *Se dice que dos enteros a y b son congruentes módulo m si m divide a $a - b$, en símbolos matemáticos se expresaría como*

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{si y sólo si} \quad m \mid a - b$$

que es lo mismo que

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{si y sólo si} \quad b = a - mq \quad \text{para alguna} \quad q \in \mathbb{N}$$

8.3.2. Modelo y solución

Como en el problema de los tres caníbales y los tres misioneros, debemos empezar determinando los estados posibles, que en este caso son las tripletas (x, y, z) , donde x , y y z dicen cuántos litros de vino hay en la primera, segunda y tercera botellas respectivamente. Supongamos que la primera botella es la de ocho litros, la segunda la de cinco y la tercera la de tres. Entonces x, y y z están acotados por la cantidad de vino que le cabe a sus respectivas botellas. Además, solamente disponemos de ocho litros de vino, entonces la suma de las cantidades del líquido que haya en cada botella debe de ser igual a ocho. Por lo tanto las tripletas deben de cumplir las siguientes condiciones:

$$x + y + z = 8 \text{ tal que } 0 \leq x \leq 8 \quad 0 \leq y \leq 5 \quad 0 \leq z \leq 3 \quad x, y, z \in \mathbb{N} \quad (8.4)$$

Sin embargo estas condiciones no son suficientes para modelar el problema, ya que existen estados que cumplen con la ecuación (8.4) a los cuales es imposible llegar cumpliendo con las condiciones del problema. Por ejemplo, no podemos tener una botella con 6 litros y dos con uno, es decir el estado $(6, 1, 1)$ no está permitido, antes de decirte por qué éste no es un estado permitido, te voy a mostrar cuáles sí son los estados permitidos, y al final retomaré la pregunta.

Como la ecuación (8.4) no es suficiente para modelar el problema, es necesario agregar una condición más, que es: necesitamos tener una de las tres botellas llenas o una de las tres botellas vacías, veamos por qué es necesario pedir esta condición.

Primero comenzamos con la botella de ocho litros llena y las demás vacías, es decir el primer estado del problema es el $(8, 0, 0)$. El primer movimiento que hagamos puede ser cualquiera de estos dos:

- Llenar la botella de cinco litros y dejar vacía la de tres.
- Llenar la botella tres litros y dejar vacía la de cinco.

En otras palabras, para llegar a cualquier estado llenando botellas debemos pasar primero por los estados $(3, 5, 0)$ y $(5, 0, 3)$. Observa que si continuamos vertiendo el contenido de una botella en otra, necesariamente vamos a vaciar la botella que estamos vertiendo o vamos a llenar la botella a la cual le estamos vaciando el líquido, entonces si queremos seguir avanzando en el problema debemos de tener al menos uno de los tres botes lleno o uno de los tres vacío. Es por esto que junto con la ecuación (8.4) se debe de cumplir también **una** de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{l} x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \\ x = 8 \quad y = 5 \quad z = 3 \end{array} \quad (8.5)$$

Por ejemplo, las tripletas que cumplen las ecuaciones $x + y + z = 8$ y $y = 5$ son $(0, 5, 3)$, $(3, 5, 0)$, $(1, 5, 2)$ y $(2, 5, 1)$.

Retomando la pregunta de por qué la triplete $(6, 1, 1)$ no está permitida, la respuesta está en la explicación que dimos anteriormente, por lo que se deja al lector. (Pista: Piensa en cómo se debería de verter el líquido para llegar al estado $(6, 1, 1)$ y por qué no es posible verterlo de esta forma.)

En total hay dieciséis tripletas que cumplen la ecuación (8.4) y una de las ecuaciones de (8.5), y son:

$$(8, 0, 0) \quad (7, 1, 0) \quad (7, 0, 1) \quad (6, 2, 0) \quad (6, 0, 2) \quad (5, 3, 0) \quad (5, 0, 3) \quad (4, 4, 0)$$

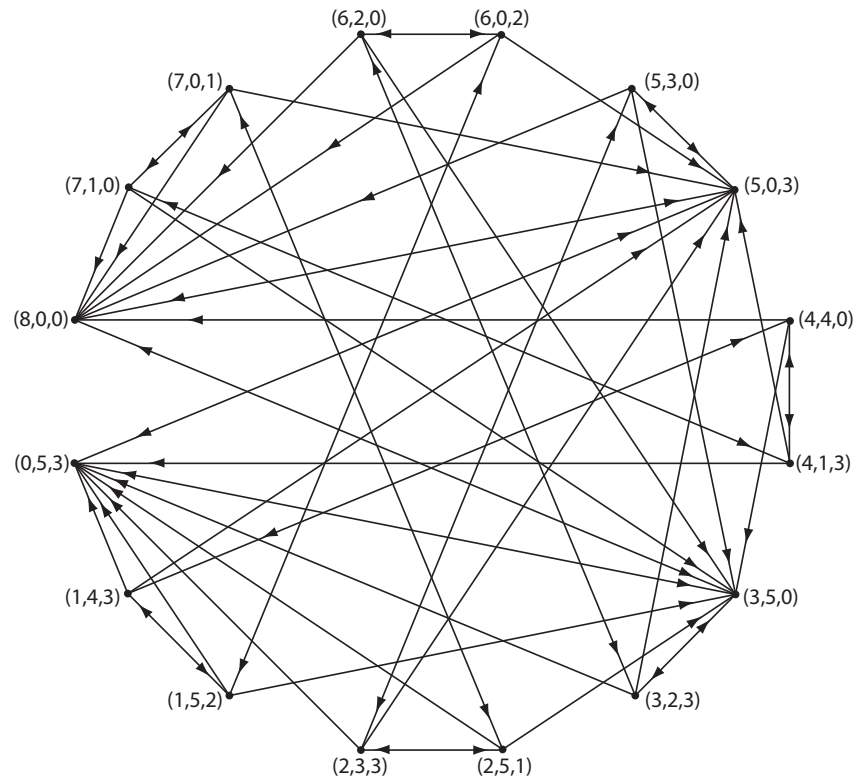
$$(4, 1, 3) \quad (3, 5, 0) \quad (3, 2, 3) \quad (2, 5, 1) \quad (2, 3, 3) \quad (1, 5, 2) \quad (1, 4, 3) \quad (0, 5, 3).$$

Ahora que tenemos los estados permitidos del problema vamos a construir la digráfica que lo modela. Sea D una digráfica, donde los vértices de D son las tripletas antes mencionadas. Existe una flecha del vértice (x, y, z) al vértice (x', y', z') si y sólo si el estado (x', y', z') se obtiene del estado (x, y, z) haciendo sólo un movimiento, por ejemplo podemos pasar del estado $(8, 0, 0)$ al estado $(3, 5, 0)$ simplemente llenado con la botella de ocho litros la de cinco litros (sólo hicimos un movimiento) por lo tanto existe una flecha que va del vértice $(8, 0, 0)$ al vértice $(3, 5, 0)$ (como el proceso inverso también es posible, entonces existe la flecha del vértice $(3, 5, 0)$ al vértice $(8, 0, 0)$). La digráfica resultante se muestra en la Figura 8.28.

Entonces si queremos resolver el problema necesitamos encontrar un camino dirigido del vértice $(8, 0, 0)$ al vértice $(4, 4, 0)$ en D . En donde las flechas del camino nos indicarán qué botella tenemos que vaciar y cuál debemos de llenar para poder dividir el vino en dos porciones iguales, es decir, para llegar al estado $(4, 4, 0)$. Una solución al problema es la siguiente trayectoria dirigida:

$$P : ((8, 0, 0), (3, 5, 0), (3, 2, 3), (6, 2, 0), (6, 0, 2), (1, 5, 2), (1, 4, 3), (4, 4, 0)).$$

Entonces el proceso que debemos de seguir para resolver el problema es: vaciar la botella de ocho en la de cinco litros (este paso es la primera flecha del camino), luego vaciar la de cinco en la de tres (la segunda flecha del camino), después vaciamos la de tres en la de ocho, inmediatamente vaciamos el contenido de la botella de cinco litros en la de tres, después llenamos la botella de cinco litros con el contenido de la botella de ocho, luego llenamos la botella de tres litros con la de cinco y finalmente vaciamos la botella de tres litros en la de ocho.

Figura 8.28. Digráfica D

Si las únicas soluciones permitidas son aquéllas en donde ningún estado se repita más de una vez, el problema tiene dieciséis soluciones. Para demostrarlo vamos a crear una subgráfica D' de D , quitándole a D las flechas que nos lleven a un estado que ya hemos utilizado. Antes de crear D' , primero vamos a crear una gráfica D_1 a partir de D , quitándole las flechas que repiten pasos, y después le quitaremos flechas a D_1 para obtener D' . Realizamos este procedimiento en dos pasos para que no resulte tan confuso.

Los siguientes puntos nos dirán cuales de las flechas en D necesariamente repiten un estado, para al final obtener la digráfica D_1 .

- i. Todas las flechas que entran al vértice $(8, 0, 0)$ no están en D_1 , es decir, $\Gamma_{D_1}^-(8, 0, 0) = \emptyset$. Pues en caso contrario este estado se repetiría más de una vez, ya que cualquiera de estas flechas nos llevaría al primer estado.
- ii. Ninguna de las flechas que salen del vértice $(4, 4, 0)$ está en D_1 , es decir, $\Gamma_{D_1}^+(4, 4, 0) = \emptyset$. Pues como es el último estado no es necesario salir de éste.
- iii. Si queremos llegar a los estados $(5, 3, 0)$, $(2, 3, 3)$, $(7, 0, 1)$, $(4, 1, 3)$, necesariamente primero tenemos que pasar por el estado $(5, 0, 3)$, entonces las flechas que van de los vértices $(5, 3, 0)$, $(2, 3, 3)$, $(7, 0, 1)$, $(4, 1, 3)$ al vértice $(5, 0, 3)$, no están en D_1 , pues en caso contrario el estado $(5, 0, 3)$ se repetiría más de una vez.
- iv. Si queremos llegar a los estados $(3, 2, 3)$, $(6, 2, 0)$, $(1, 5, 2)$, necesariamente primero tenemos que pasar por el estado $(3, 5, 0)$, entonces las flechas que van de los vértices $(3, 2, 3)$, $(6, 2, 0)$, $(1, 5, 2)$ al vértice $(3, 5, 0)$ no están en D_1 , en caso contrario el estado $(3, 5, 0)$ se repetiría más de una vez.

Por *i*, *ii*, *iii* y *iv* obtenemos la digráfica D_1 que se muestra en la Figura 8.29, sin embargo todavía a D_1 le podemos seguir quitando flechas. Los siguientes puntos nos dirán cómo obtener D' .

- v. Las flechas del camino dirigido de D_1

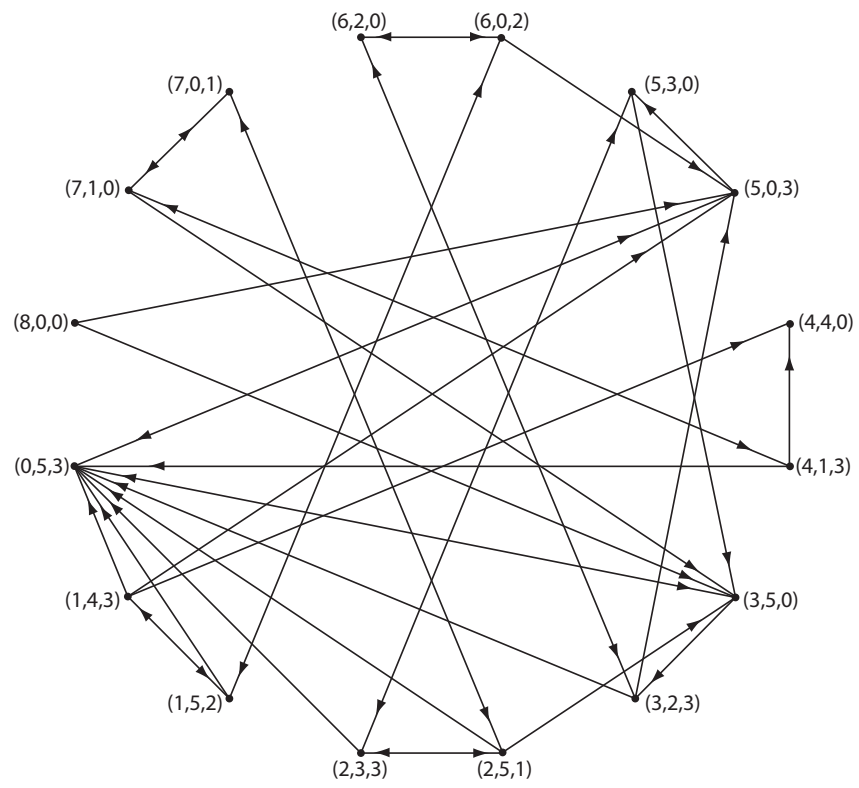
$$C = ((4, 1, 3), (7, 1, 0), (7, 0, 1), (2, 5, 1), (2, 3, 3), (5, 3, 0)),$$

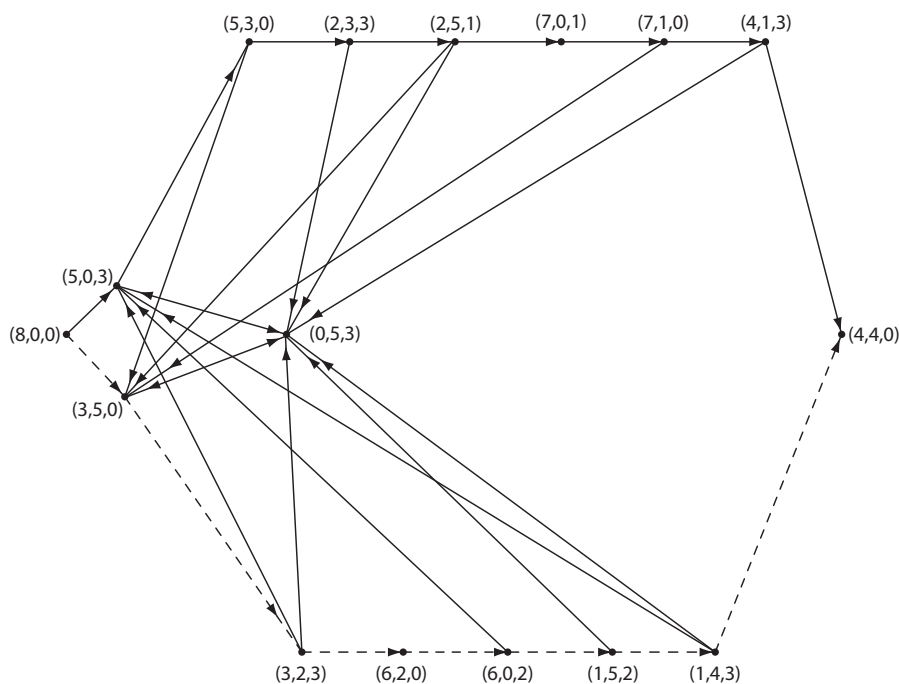
no pertenecen a las flechas de D' , ya que no hay forma de entrar a este camino sin que repitamos un vértice.

- vi. Las flechas del camino dirigido de D_1

$$C' = ((1, 4, 3), (1, 5, 2), (6, 0, 2), (6, 2, 0), (3, 2, 3)),$$

no pertenecen a las flechas de D' , ya que no hay forma de entrar a este camino sin que repitamos un vértice.

Figura 8.29. D_1

Figura 8.30. D'

Entonces por i , ii , iii , iv , v y vi , las únicas soluciones donde ningún estado se repite más de una vez son las dieciséis trayectorias dirigidas del vértice $(8, 0, 0)$ al vértice $(4, 0, 0)$, donde la solución mas corta es la trayectoria punteada en la Figura 8.30.

Para terminar vamos, a generalizar el problema; sin embargo para hacer esto dejaremos a las gráficas de lado y utilizaremos lo poco de álgebra que hemos aprendido.

Teorema 8.3.2 *Supongamos que tenemos una jarra de p -litros, una de q -litros y una de $(p+q)$ -litros. Si p y q son primos relativos y $1 < p < q$, entonces podemos tener en una de nuestras jarras cualquier cantidad de vino que esté entre los números 1 y $p+q$, con p y $q \in \mathbb{N}$ [32].*

Demostración. Observemos primero que si podemos tener entre 1 y $p - 1$ -litros en cualquier jarra, necesariamente en las otras jarras estará el resto del vino, por ejemplo si tenemos tres jarras de diecisiete, doce y cinco litros respectivamente y en una de ellas hay cuatro litros, es posible tener en la jarra de diecisiete litros los

once litros restantes. Entonces sólo necesitamos demostrar que podemos obtener en una de las jarras cualquier cantidad de litros entre 1 y $p - 1$, ya que esto directamente implica que los $(p + q) - r$ -litros restantes están en otra jarra, $1 \leq r \leq q - 1$.

Antes de continuar con la demostración formal, vamos a dar un ejemplo de cómo funciona el algoritmo que resuelve el problema. Supón que tenemos las mismas tres jarras del ejemplo anterior (cinco, doce y diecisiete litros). Vamos a ver el procedimiento que se sigue para obtener en una de las jarras uno, dos, tres o cuatro litros (recuerda que es suficiente probar que podemos tener en una de las jarras cualquier cantidad entre 1 y $p - 1$, que en este caso son cualquier cantidad entre 1 y 4). Primero veamos cómo se obtienen tres litros. Empezamos llenando la de doce litros con diez litros de vino (es posible si llenamos dos veces la de cinco litros con la de diecisiete y las vaciamos en la de doce). Una vez más llenamos la de cinco litros y la vaciamos en la de doce litros hasta el tope, entonces la de doce litros está llena y la de cinco litros tiene tres litros. Ya hemos obtenido tres litros de vino (recuerda que podemos tener en la jarra de diecisiete litros los catorce restantes).

Ahora vamos a ver cómo se obtiene un litro de vino, partiendo del estado en que nos quedamos, que es: la de cinco litros tiene tres litros de vino, la de doce litros está llena y la de diecisiete tiene dos litros. Toda el vino que está en la de doce litros la vaciamos en la de diecisiete litros y los tres litros que hay en la de cinco litros los vaciamos en la de doce litros. Luego llenamos la de cinco litros con la de diecisiete y la vaciamos en la de doce litros (hasta el momento hay ocho litros en la jarra de doce litros), repetimos este proceso, llenamos la de cinco litros con la de diecisiete y vaciamos el contenido de la de cinco en la de doce, entonces nos sobra un litro en la jarra de cinco litros. Hasta el momento hemos podido obtener uno y tres litros de vino.

Veamos cómo se obtienen los cuatro litros partiendo del estado en que nos quedamos, que es un litro en la de cinco, la de doce está llena y la de diecisiete tiene cuatro litros. Una vez más vaciamos la de doce litros en la de diecisiete litros y el litro que estaba en la de cinco litros lo ponemos en la de doce litros, después llenamos la jarra de cinco litros con la de diecisiete y vaciamos su contenido en la de doce, repetimos el procedimiento otra vez (en este momento hay once litros en la jarra de doce). Por último, llenamos la jarra de cinco litros con la de diecisiete y vertemos todo el vino que podamos de la de cinco en la de doce, entonces nos sobran cuatro litros en la de cinco litros. Hemos logrado las cantidades de uno, tres y cuatro litros.

Por último obtendremos dos litros de vino partiendo del estado en que nos

quedamos. Otra vez, vaciamos la de doce litros, que estaba llena, en la de diecisiete litros y ponemos los cuatro litros que están en la jarra de cinco litros en la jarra de doce litros. Llenamos con la de diecisiete litros la de cinco y vaciamos los cinco litros en la de doce litros. Finalmente llenamos la de cinco litros y vaciamos hasta el tope en la de doce litros, entonces tenemos dos litros en la jarra de cinco litros. Hemos obtenido uno, dos, tres y cuatro litros.

Entonces el algoritmo funciona más o menos así.

- i. Llenar la de doce litros con cuantas botellas de cinco litros sean necesarias, hasta que lo que falte en la de doce litros para ser llenada sea menos de cinco litros.
- ii. Llenar la botella de cinco litros con el contenido de la de diecisiete litros.
- iii. Vaciar lo que se pueda de vino de la botella de cinco litros hasta llenar la de doce.
- iv. Vaciar todo el contenido de la de doce litros en la de diecisiete.
- v. Vaciar todo el contenido de la de cinco litros en la de doce. Ir al paso *i*.

Ahora vamos a generalizar y demostrar este algoritmo. Para hacer esto vamos a poner en forma de ecuaciones el algoritmo. Analicemos el paso *i*. Necesitamos dos botellas de cinco litros en la de doce, para que lo que falte en la botella de doce litros para ser llenada sea menos que cinco. Nos faltan 2 litros para llenar la botella de doce litros, esto en una ecuación se expresaría cómo

$$2(5) + 2 = 12,$$

entonces en general el paso *i* es llenar con botellas de p litros la de q litros, hasta que lo que falte en la de q litros para ser llenada sea una cantidad menor a q . Supongamos que necesitamos n_1 botellas de p litros para cumplir estas condiciones y que r_1 es lo que le falta a la botella de q para ser llenada, recuerda que $r_1 < p$. Entonces la ecuación se ve así

$$n_1p + r_1 = q.$$

Aplicando el algoritmo de la división a la ecuación anterior, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones, donde $0 \leq r_i < p$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n_1p + r_1 &= q \\ n_2p + r_2 &= q - (p - r_1) \\ n_3p + r_3 &= q - (p - r_2) \\ &\vdots \\ n_p p + r_p &= q - (p - r_{p-1}) \end{aligned} \tag{8.6}$$

Comparemos estas ecuaciones con el ejemplo anterior. La primera ecuación nos dice qué pasa cuando aplicamos el paso i del algoritmo. Ésta representa los dos litros del espacio vacío en la jarra de doce litros después de llenar y vaciar dos veces la jarra de 5 litros, es decir, a la jarra de doce litros (q) le caben dos veces la de cinco litros ($n_1p = 2 \times 5$) mas un residuo r_1 , que en este caso es igual a 2.

La segunda ecuación es del paso ii al v . Donde $3 = 5 - 2 = p - r_1$ es lo que queda en la jarra de cinco litros después de haber llenado hasta el tope la de doce litros con la de cinco. El r_2 son los cuatro litros de espacio vacío en la de doce litros después de haberle vaciado los $3 = p - r_1$ litros que había en la de cinco y, llenando y vaciando $1 = n_2$ vez la de cinco litros en la de doce litros.

La tercera ecuación es repetir el algoritmo del paso i al v . Donde $1 = 5 - 4 = p - r_2$ es lo que queda en la jarra de cinco litros después de haber llenado hasta el tope la de doce con la de cinco. El r_3 es el litro de espacio vacío en la de doce, después de haberle vaciado los $1 = p - r_2$ litros que había en la de cinco y, llenando y vaciando $2 = n_2$ veces la de cinco litros en la de doce litros. Si continuamos con este procedimiento obtenemos las demás cantidades del ejemplo anterior.

Observemos que $p - r_i$ representa la cantidad de litros que se pueden tener en la jarra de p litros. Para poder demostrar el teorema debemos probar que

$$\{p - r_1, p - r_2, p - r_3, \dots, p - r_{p-1}\} = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$$

o de manera equivalente, cómo $0 \leq r_i < p$,

$$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\}.$$

Para demostrar la igualdad anterior primero resolvamos las ecuaciones de (8.6) para las r_i 's que obtenemos, es decir,

$$\begin{aligned} r_1 &= q - n_1p \\ r_2 &= q - (p - r_1) - n_2p = q + r_1 - (n_2 + 1)p \\ r_3 &= q - (p - r_2) - n_3p = q + r_2 - (n_3 + 1)p \\ &\vdots \\ r_p &= q - (p - r_{p-1}) - n_pp = q + r_{p-1} - (n_p + 1)p. \end{aligned}$$

Si convertimos estas ecuaciones en “mód p ” obtenemos,

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv q \pmod{p} \\ r_2 &\equiv q + r_1 \pmod{p} \\ r_3 &\equiv q + r_2 \pmod{p} \\ &\vdots \\ r_p &\equiv q + r_{p-1} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ahora, cuando resolvemos este sistema recursivamente obtenemos,

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv q \pmod{p} \\ r_2 &\equiv 2r_1 \pmod{p} \\ r_3 &\equiv 3r_1 \pmod{p} \\ &\vdots \\ r_p &\equiv pr_1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Supongamos que r_1 y p son primos relativos. Entonces r_1 genera el grupo \mathbb{Z}_p , por lo tanto

$$\{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\} \equiv \{r_1, 2r_1, \dots, (p-1)r_1\} \equiv \{1, 2, \dots, (p-1)\} \pmod{p}.$$

Además, cómo $r_i < p$ para toda $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$, entonces

$$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$$

que era lo que queríamos probar.

Para demostrar la igualdad pedimos que r_1 y p fueran primos relativos, entonces necesitamos demostrar este hecho. Vamos a demostrarlo por contradicción. Supongamos que r_1 y p no son primos relativos. Por hipótesis sabemos que p y q son primos relativos, entonces la ecuación $n_1p + r_1 = q$ cumple que $r_1 \neq 0$, pues p no divide a q .

Ya que r_1 y p no son primos relativos podemos decir que $mr_1 = p$ (es decir, r_1 divide a p), substituyendo esto en la primera ecuación del conjunto de ecuaciones de 8.6, llegamos a que

$$n_1p + r_1 = n_1(mr_1) + r_1 = (n_1m + 1)r_1 = q,$$

es decir, r_1 divide a q . Por lo tanto r_1 divide a p y q al mismo tiempo. Cómo p y q son primos relativos, entonces necesariamente $r_1 = 1$, cómo el 1 es primo relativo con todos los números, tenemos que r_1 y p son primos relativos. ■

CAPÍTULO 9

Sucesiones de Bruijn

Este es el último capítulo de la tesis, espero que la hayas encontrado divertida y que te haya servido para entender mejor tanto las matemáticas como la Teoría de las Gráficas. El problema de este capítulo al parecer no está nada relacionado con la Teoría de las Gráficas, pero sin embargo si lo modelamos con gráficas encontrarle solución es en efecto muy fácil, lo que demuestra el poder de esta herramienta.

9.1. Construyendo sucesiones de Bruijn

¿Cuál es la sucesión* circular** más larga que pueda ser formada con los dígitos 0 y 1 tal que si agrupamos los números en grupos de tres cifras consecutivas, los grupos no aparezcan más de una vez en la sucesión?. Para entender mejor el problema, consideremos la siguiente sucesión de 0's y 1's

001110

y agrupemos las cifras de tres en tres de la siguiente forma: el primer grupo son las cifras 001 (de la primera cifra a la tercera), el segundo son las cifras 011 (de la segunda cifra a la cuarta), el tercero son 111 (de la tercera cifra a la quinta), el cuarto son 110 (de la cuarta cifra a la sexta) , el quinto son 100 (la quinta, la sexta y la primera cifra) y por último vienen las cifras 000 (la sexta, la primera y

*Una sucesión a grandes rasgos es poner números o lo que sea en un orden específico, por ejemplo una sucesión son los números 1 - 2 - 34 - 5 - 5 - 6 o las frutas manzana-pera-durazno o las frutas y los números manzana-1-23-pera-fresa.

**Las sucesiones circulares son las que terminan en el elemento donde empiezan, por ejemplo 1 - 2 - 34 - 5 - 1.

la segunda cifra). Ésta es una sucesión circular, pues la penúltima cifra del primer grupo es la misma cifra que la última cifra del último grupo. Además, esta sucesión cumple que los grupos de tres cifras consecutivas no se repiten. Sin embargo, como veremos en las siguientes páginas, no es la sucesión más larga con los dígitos 0 y 1 que se puede formar.

Historia

Las sucesiones que queremos encontrar deben su nombre a Nicolaas Govert de Bruijn. Bruijn nació en Holanda el nueve de julio de 1918. Matemático holandés, que es profesor emérito de la Universidad Tecnológica de Eindhoven.

Uno de sus más grandes logros fue inventar la llamada sucesión *de Bruijn*, también participó de la constatación de *de Bruijn-Newman*^{*}, en el Teorema de *de Bruijn-Erdos* y en el Teorema BEST^{**}, que debe sus siglas a los nombres de **B**ruijn, van Aardenne-**E**hrenfest, **S**mith y **T**utte. A finales de los años sesenta desarrolló el *Autómata*, un lenguaje computacional para la verificación de pruebas matemáticas, es decir, mediante una computadora fue capaz de verificar la demostración de teoremas matemáticos. En los últimos años se ha dedicado a trabajar en modelos del cerebro humano. [39]

9.1.1. Definiciones y teoremas

Teorema 9.1.1 *Sea D una digráfica conexa. D contiene un paseo dirigido euleriano cerrado si y sólo si para toda $u \in V(D)$, $\delta^+(u) = \delta^-(u)$.*

Demostración. \Rightarrow] Sea D una digráfica conexa tal que D contiene un paseo dirigido euleriano P , que empieza y termina en un vértice v . Sea u un vértice de D tal que u no es ni el primer ni el último vértice de P . Cada vez que el paseo P entra por una flecha al vértice u sale por alguna otra flecha, entonces el número de flechas que le entran a u es igual al número de flechas que salen de u , por lo tanto para toda $u \in V(D)$, $\delta^+(u) = \delta^-(u)$ si $u \neq v$.

Podemos analizar de manera similar al vértice v . Como el paseo comienza por v , al principio éste sale por una flecha de v , cada vez que el paseo entra por alguna flecha a v sale por alguna otra flecha, excepto al final del paseo, que le llega la

^{*}La constante *de Bruijn-Newman*, es una constante matemática definida en términos de los ceros de una función $H(\lambda, z)$, donde λ es un parámetro real y z una variable compleja.

^{**}El teorema BEST cuenta el número de paseos dirigidos eulerianos cerrados en una digráfica.

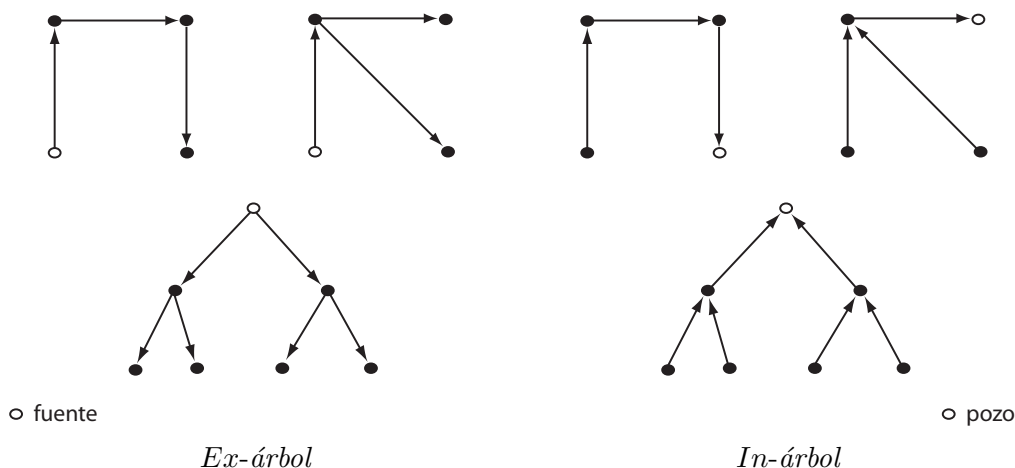


Figura 9.1.

última flecha a v . Por lo tanto, para toda $u \in V(D)$, $\delta^+(u) = \delta^-(u)$.

⇐] El regreso se sigue igual que el regreso de la demostración del Teorema 3.1.1 para gráficas conexas eulerianas que aparece la sección 3.1.1, en la página 36, y por su similitud se deja al lector.

Definición 9.1.1 Una k -tupla, es una sucesión con k símbolos.

Por ejemplo, si queremos hacer grupos de tres cifras consecutivas en una sucesión cualquiera (como la sucesión que dimos al principio del capítulo), decimos que queremos hacer “3-tuplas” en vez de “grupos de tres”.

Definición 9.1.2 Sea D una digráfica. Una fuente de D es un vértice u tal que existe un uv -camino dirigido para toda $v \in V(D)$. Un pozo de D es un vértice w tal que existe un wv -camino dirigido para toda $v \in V(D)$.

Definición 9.1.3 Un ex-árbol es un árbol con un vértice fuente. De manera dual, un in-árbol es un árbol con un vértice pozo. (Ver Figura 9.1)

9.1.2. Construcción

La sucesión que cumple las condiciones del problema es conocida como la *sucesión de Bruijn*. En este capítulo aprenderemos a construir sucesiones a partir de

digráficas eulerianas, demostraremos que hay más de una *sucesión de Bruijn* para los dígitos 0 y 1 agrupando los números en *3-tuplas* y generalizaremos el concepto de *sucesión de Bruijn*.

Comencemos con la definición de *sucesión de Bruijn*, pero antes de dar la definición formal intentaremos aclarar un poco más el concepto. Imagina que tenemos la sucesión $a_0a_1a_2 \dots a_N$ tal que $a_i \in \{0, 1\}$. Necesitamos agrupar estos números en *n-tuplas* (es decir, en grupos de n dígitos consecutivos) distintas, tal que la primera *n-tupla* sea $w_0 = a_0a_1a_2 \dots a_{n-1}$, la segunda sea $w_1 = a_1a_2a_3 \dots a_n$, la tercera sea $w_2 = a_2a_3a_4 \dots a_{n+1}$, la cuarta sea $w_3 = a_3a_4a_5 \dots a_{n+2}$ y así sucesivamente hasta las *n-tuplas* $w_{N-1} = a_{N-1}a_Na_0a_1 \dots a_{n-2}$ y $w_N = a_Na_0a_1a_2 \dots a_{n-1}$. Si la sucesión $a_0a_1a_2 \dots a_N$ fuera una *sucesión de Bruijn*, debería pasar que las *n-tuplas* w_i y w_j fueran diferentes para todo $i \neq j$, que la penúltima cifra de la primera *n-tupla*, es decir w_1 , fuera igual a la última cifra de la última *n-tupla*, es decir w_N , y además que no hubiese otra sucesión con los dígitos 0 y 1 agrupados en *n-tuplas* más grande que la que dimos.

Veamos por qué la sucesión del principio del capítulo no sirve. Tenemos la sucesión 001110 y las *3-tuplas* que formamos son: $w_1 = 001$, $w_2 = 011$, $w_3 = 111$, $w_4 = 110$, $w_5 = 100$ y $w_6 = 000$, esta sucesión es circular y además cumple que $w_i \neq w_j$ para toda $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 6$. Sin embargo, no es la sucesión más grande que podemos formar con los dígitos 0 y 1 agrupados en *3-tuplas*. Por ejemplo, la sucesión 1010001 es más grande que la anterior y además cumple que es una sucesión circular y las *3-tuplas* que podemos formar con la sucesión no se repiten (se deja al lector verificar que esta sucesión es circular y formar todas las *3-tuplas* de la sucesión). Sin embargo, aún no es la más grande.

Veamos la definición formal de *sucesión de Bruijn*.

Definición 9.1.4 *Una sucesión de Bruijn es una sucesión $a_0a_1a_2 \dots a_{N-1}$ de letras de una alfabeto A con N letras, tal que para toda palabra w con n letras de A , existe un único entero i , $0 \leq i \leq N - 1$, para el cual todas las *n-tuplas* o palabras $w_i = a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i+n-1}$ aparecen en la sucesión de Bruijn. El sub-índice de las letras de w_i está expresado módulo N .*

Cuando decimos que w_i está expresado módulo N , nos referimos a que por ejemplo la palabra w_N es la misma que la palabra w_0 , o la palabra w_{N+1} es la misma que la palabra w_1 , esta condición hace que la sucesión sea circular. Un ejemplo más concreto: tomemos la sucesión 001110 (la del principio del capítulo). La primera palabra de la sucesión es 001, es decir, $w_0 = 001$, donde el sub-índice de w nos indica qué número debemos tomar; en este caso, como el sub-índice es 0, tomamos

el primer elemento de la sucesión, que es el número 0 (si el sub-índice fuera 1, 2 o 3 tomaríamos el segundo, tercero o cuarto número de la sucesión respectivamente). Entonces el primer número de la palabra w_6 tendría que ser el séptimo número de la sucesión, pero como la sucesión sólo tiene seis números, lo que hacemos es regresarnos al primer número de la sucesión y a partir de ahí seguir contando. Por lo tanto el primer número de la sucesión es el mismo que el séptimo número de la sucesión.

La siguiente propiedad nos dirá cuántas letras debe de tener una *sucesión de Bruijn*.

Propiedad 9.1.1 *Sea $a_0a_1a_2 \dots a_{N-1}$ una sucesión de Bruijn para una alfabeto A con $b \geq 2$ letras. La longitud de la sucesión de de Bruijn es igual al número de palabras diferentes de longitud n que se pueden formar con las letras del alfabeto A , que en términos matemáticos se expresa como $N = b^n$.*

Demostración. Para resolver el teorema vamos a demostrar primero cuántas palabras diferentes con n letras se pueden formar y después demostraremos que $N \leq b^n$ y que $N \geq b^n$, para poder concluir que $N = b^n$.

Si el alfabeto A consta de b letras diferentes, es posible formar b^n palabras diferentes tales que cada palabra tenga n letras, pues la primera letra de una palabra puede ser cualquiera de las letras del alfabeto A , la segunda letra de la palabra puede ser cualquiera de las letras del alfabeto A , del mismo modo para la tercera, cuarta, quinta hasta la n -ava letra de la palabra, en términos matemáticos lo expresamos como

$$\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-veces}} = b^n.$$

Como ninguna de las b^n palabras de longitud n con letras del alfabeto A puede empezar en la misma posición de la sucesión, la sucesión de *de Bruijn* debe de contener al menos b^n letras, por lo tanto $N \geq b^n$. Por otro lado, cada natural i ($0 \leq i \leq N - 1$) corresponde por definición a una palabra única $w_i = a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i+n-1}$ de longitud n con letras del alfabeto A , por lo que el número de palabras de longitud n debe de ser al menos el número de letras de la sucesión, entonces $N \leq b^n$. Entonces, como $N \geq b^n$ y $N \leq b^n$, tenemos que $b^n = N$. ■

Por la propiedad anterior, la longitud de la *sucesión de Bruijn* con los dígitos 0 y 1 agrupados en *3-tuplas* debe de ser igual al número de palabras distintas con tres letras que se pueden formar con los dígitos 0 y 1. Antes de ver cuál es la longitud de la sucesión, vamos a ver quién es A , b , n y N . $A = \{0, 1\}$, pues la

sucesión que queremos formar sólo incluye esos dos números; $n = 3$, pues queremos formar *3-tuplas* en la sucesión, y $b = 2$, pues sólo tiene dos letras el alfabeto A .

Entonces existen $b^n = 2^3 = 8$ palabras diferentes de longitud tres con las letras del alfabeto A . Las ocho palabras son

$$000, \quad 001, \quad 010, \quad 100, \quad 011, \quad 101, \quad 110, \quad 111.$$

Por la propiedad 9.1.1, necesitamos que la sucesión de *de Bruijn* tenga ocho letras, es decir $N = 8$. Ya sabemos qué tan grande es la sucesión, todavía nos falta saber cómo acomodar los ocho dígitos en la sucesión.

Las *sucesiones de Bruijn* están estrechamente relacionadas con las digráficas eulerianas. Mas aún, éstas se utilizan para generar dichas sucesiones. Antes de ver cómo es posible esto probaremos que las *sucesiones de Bruijn* existen para cualquier alfabeto. Primero comenzaremos por probar que para todas las palabras formadas con una letra de cualquier alfabeto siempre es posible encontrar una *sucesión de Bruijn* que contenga todas las palabras que hemos formado y después, con la ayuda de digráficas, lo probaremos para todas las palabras con más de una letra y un alfabeto cualquiera.

Sea n un natural y supongamos que $A = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ es un alfabeto con al menos dos elementos. Si $n = 1$, es decir, queremos formar palabras de una letra, entonces la sucesión $a_0 a_1 a_2 \dots a_{b-1}$ tal que $a_i = i$ con $0 \leq i \leq b-1$ es una *sucesión de Bruijn*, pues todas las palabras que se pueden formar con una letra y el alfabeto A son un elemento de la sucesión (se deja al lector verificar la verdad de la aserción anterior).

Antes de demostrar el caso para $n \geq 2$, vamos a construir una digráfica $D_{b,n}$, que llamaremos *digráfica de Bruijn*, cuyos caminos dirigidos eulerianos nos ayudarán a generar *sucesiones de de Bruijn*.

Cada vértice de $D_{b,n}$ corresponde a una de las b^{n-1} palabras de longitud $n-1$ que se pueden formar con el alfabeto A . Cada flecha de $D_{b,n}$ corresponde a una de las b^n palabras de longitud n que se pueden formar con el alfabeto A y existe una flecha de un vértice u a un vértice v si y sólo si la palabra que se obtenga de quitar la primera letra al vértice u , es igual a la palabra que se obtenga de quitar la última letra de v y la sucesión de letras que forman esta flecha es igual a la sucesión de letras de u más la última letra de v . Por ejemplo, los vértices $u = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ y $v = a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n$ son adyacentes, pues si a u le quitamos la letra a_1 y a v le quitamos la letra a_n las palabras resultantes son iguales. Y la sucesión de letras

que forman la flecha (u, v) es igual a la sucesión de letras de u ($a_1 a_2 \dots a_{n-1}$) más la última letra de v (a_n), por lo tanto, la sucesión de letras de la flecha es:

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n = (u = a_1 a_2 \dots a_{n-1}, v = a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n).$$

Para aclarar un poco las cosas vamos a hacer la *digráfica de Bruijn* del problema de este capítulo. El alfabeto es $A = \{0, 1\}$ y las palabras que queremos que estén en la sucesión tienen tres letras, entonces $b = 2$ y $n = 3$; por lo tanto la *digráfica de Bruijn* que queremos construir es $D_{2,3}$. Los vértices de $D_{2,3}$ corresponden a cada una de las $b^{n-1} = 2^2 = 4$ palabras de longitud $n - 1 = 3 - 1 = 2$ que se pueden formar con un alfabeto de dos letras, y cada flecha de $D_{2,3}$ corresponde a una de las $b^n = 2^3 = 8$ palabras de longitud 3 que se pueden formar con un alfabeto de dos letras. Entonces los conjuntos de vértices y de aristas son:

$$\begin{aligned} V(D_{2,3}) &= \{v_0 = 00, v_1 = 10, v_2 = 11, v_3 = 01\} \\ A(D_{2,3}) &= \{a_0 = 000, a_1 = 001, a_2 = 011, a_3 = 111, \\ &\quad a_4 = 110, a_5 = 100, a_6 = 010, a_7 = 101\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, existe una flecha de un vértice v_i a un vértice v_j si la palabra v_i menos la primera letra es igual a la palabra v_j menos la última letra, $0 \leq i, j \leq 3$. Las parejas ordenadas que corresponden a cada flecha son:

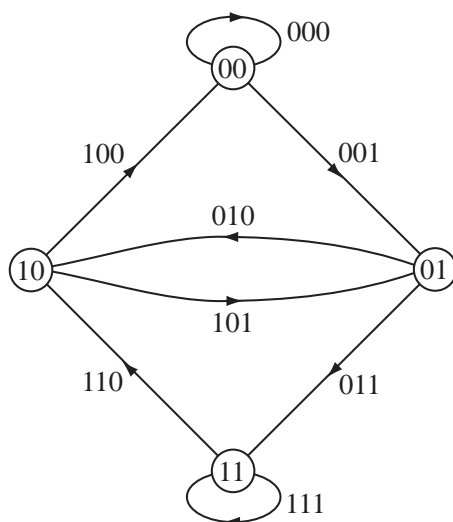
$$\begin{aligned} a_0 &= (v_0, v_0) & a_4 &= (v_2, v_1) \\ a_1 &= (v_0, v_3) & a_5 &= (v_1, v_0) \\ a_2 &= (v_3, v_2) & a_6 &= (v_3, v_1) \\ a_3 &= (v_2, v_2) & a_7 &= (v_1, v_3), \end{aligned}$$

la gráfica resultante se muestra en la Figura 9.2.

A partir de la *digráfica de Bruijn* $D_{2,3}$, podemos construir la *sucesión de Bruijn* para el alfabeto $A = \{0, 1\}$ y las palabras de longitud tres encontrando paseos eulerianos en la digráfica; mas aún, estas digráficas generan todas las sucesiones posibles para el alfabeto A y las palabras de longitud tres. Entonces necesitamos saber si las *digráficas de Bruijn* son eulerianas antes de aventurarnos a encontrar las sucesiones. Demostraremos que las *digráficas de Bruijn* son eulerianas.

Teorema 9.1.2 *Toda digráfica de de Bruijn es euleriana.*

Demostración. Sea A una alfabeto con b letras y supongamos que queremos formar palabras con n letras del alfabeto A . Primero demostraremos que $D_{b,n}$ es conexas para toda b y $n \geq 2$.

Figura 9.2. $D_{2,3}$

Sea $D_{b,n}$ una *digráfica de Bruijn*. Para probar la conexidad de la gráfica demostraremos que para todo par de vértices u y v de $D_{b,n}$ existe un uv -camino.

Sean u y v dos vértices de la gráfica. Estos vértices representan dos palabras diferentes de longitud $n - 1$, sean $u = a_1a_2 \dots a_{n-1}$ y $v = c_1c_2 \dots c_{n-1}$ dichos vértices, tales que $a_i, c_i \in A$.

Cada palabra de longitud $n - 1$ con las letras del alfabeto A por construcción está representada por un vértice, en particular las palabras $u = w_0 = a_1a_2 \dots a_{n-1}$, $w_1 = a_2a_3 \dots a_{n-1}c_1$, $w_2 = a_3a_4 \dots a_{n-1}c_1c_2$, $w_3 = a_4a_5 \dots a_{n-1}c_1c_2c_3$, \dots , $w_{m-1} = a_{n-1}c_1c_2 \dots c_{n-2}$, $v = w_m = c_1c_2c_3 \dots c_{n-1}$. Tenemos que las palabras w_i y w_{i+1} son iguales excepto en la primera letra de w_i y la última letra de w_{i+1} , por lo tanto existe una flecha del vértice w_i al vértice w_{i+1} , del mismo modo, las palabras $v = w_m$ y $u = w_0$ cumplen esta propiedad (se deja al lector verificar que las palabras v y u cumplen la propiedad), por lo tanto existe un camino dirigido del vértice u al vértice v , entonces $D_{b,n}$ es conexa.

Para finalizar la prueba demostraremos que $\delta^+(u) = \delta^-(u)$ para toda $u \in V(D_{b,n})$. Sea $u = a_1a_2 \dots a_{n-1}$. Por la construcción de la digráfica a u le inciden flechas que vienen de los vértices de la forma $v = xa_1a_2 \dots a_{n-2}$, pues u y v sólo difieren en la primera letra de v y la última letra de u . Como a la letra x la podemos elegir de b maneras diferentes, pues el alfabeto A tiene b letras, entonces a u

le inciden b vértices diferentes; por lo tanto $\delta^-(u) = b$. Análogamente, las flechas que le salen a u van hacia los vértices de la forma $w = a_2a_3a_4 \dots a_{n-1}x$ y a la letra x la podemos elegir de b maneras diferentes, entonces $\delta^+(u) = b$. Por lo tanto $\delta^+(u) = \delta^-(u)$ para toda $u \in V(D_{b,n})$.

Como $D_{b,n}$ es conexa y para toda $u \in V(D_{b,n})$, $\delta^+(u) = \delta^-(u)$, por el Teorema 9.1.1 $D_{b,n}$ es euleriana. ■

El siguiente corolario, además de demostrar la existencia de las *sucesiones de Bruijn*, para palabras de longitud n y todo alfabeto A , nos dará un método para construirlas a partir de *digráficas de Bruijn*.

Corolario 9.1.1 *Para todo $b, n \geq 2$ y un alfabeto $A = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ existe una sucesión de Bruijn.*

Demostración Para demostrar el corolario vamos a tomar la *digráfica de Bruijn* asociada a los naturales b y n . Como las flechas de $D_{b,n}$ son las palabras de longitud n que se pueden formar con b letras y esta digráfica es euleriana, entonces los paseos eulerianos que contenga la digráfica generarán las *sucesiones de de Bruijn* que necesitamos.

Sea $D_{b,n}$ la *digráfica de Bruijn* asociada a los naturales b y n . Sea $w_1 = a_1a_2 \dots a_n$ una palabra de longitud n con las letras de A , y por construcción de la *digráfica de Bruijn*, la flecha w_1 de $D_{b,n}$ va hacia un vértice $u = a_2a_3 \dots a_n$. De u salen todas la flechas del tipo $w = a_2a_3 \dots a_nc$, donde $c = 0, 1, 2, \dots, b-1$.

Podemos generar la *sucesión de Bruijn* seleccionando la primera letra de las palabras que generan la flechas de $D_{b,n}$ en el orden en que estas flechas aparezcan en el paseo dirigido euleriano, es decir, las flechas consecutivas del paseo dirigido euleriano $w_1 = a_1a_2 \dots a_n$, $w_2 = a_2a_3 \dots a_nc$ y $w_3 = a_3a_4 \dots a_ncd$, generan la parte de la *sucesión de Bruijn* $a_1a_2a_3$.

Ya que este paseo contiene todas las aristas y empieza y termina en el mismo vértice, siempre es posible encontrar una flecha $w = xa_1a_2 \dots a_{n-1}$ que incida en el vértice donde termina el paseo. Además, por construcción todas las palabras de longitud n son todas las aristas de la *digráfica de Bruijn*, y todas estas aristas están en el paseo euleriano, entonces el paseo euleriano contiene todas las palabras de longitud n con las letras de A . Por lo tanto para todo $b, n \geq 2$ y un alfabeto $A = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ existe una sucesión de Bruijn. ■

Vamos a construir la *sucesión de Bruijn* para el alfabeto $A = \{0, 1\}$ con palabras

de tres letras. Tenemos que $b = 2$ y $n = 3$. Consideremos la digráfica $D_{2,3}$ de la Figura 9.2. Tomemos el camino euleriano que producen las flechas

101, 010, 100, 000, 001, 011, 111, 110,

ahora tomemos la primera letra de las palabras que forman la sucesión de flechas y las acomodamos en el orden en el que aparecen en la sucesión, con esto generamos la *sucesión de Bruijn* 10100011.

Sin embargo, existen otros paseos eulerianos es la digráfica $D_{2,3}$, por ejemplo el paseo

000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100,

también es euleriano. Este paseo genera la sucesión 00010111 que es diferente a la sucesión 10100011 del ejemplo anterior. Intuitivamente podemos observar que el número de paseos eulerianos distintos de una digráfica $D_{b,n}$ es igual al número de *sucesiones de Bruijn* diferentes que hay para un alfabeto A con b letras distintas y palabras de longitud n . Más adelante probaremos este hecho.

Casi tenemos resuelto el problema. Falta por ver que las sucesiones mencionadas en el enunciado anterior son las más grandes. Observemos que por construcción todas las palabras de longitud tres están contenidas en la sucesión, entonces si le agregamos un número a la sucesión necesariamente vamos a repetir alguna de las palabras, por lo tanto las *sucesiones de Bruijn* resuelven el problema.

Ya para finalizar vamos a ver primero que las *sucesiones de Bruijn* no son únicas para un alfabeto A y palabras de longitud n , y después veremos cuántas *sucesiones de Bruijn* diferentes tiene el alfabeto A con palabras de longitud n .

Antes de demostrar que las *sucesiones de Bruijn* no son únicas, observemos que las sucesiones 00010111 y 10111000 son iguales, pues poseen el mismo patrón de números, sólo que en el segundo caso están recorridos hacia la derecha, esto en el paseo euleriano con el cual están generadas estas sucesiones se traduciría como empezar el paseo tres vértices hacia la derecha y seguir el mismo recorrido, es decir, en vez de comenzar por la flecha 000 comenzaríamos por la flecha 101.

Mostrar que las *sucesiones de Bruijn* no son únicas para $b \geq 2$ y n fijos no es una tarea fácil. Demostrarlo para $n = 1$ no es tan difícil. Sin embargo para el caso en que $n \geq 2$ el asunto se complica por lo que utilizaremos sin demostrar el Teorema BEST.

Empecemos por demostrar el caso en que $b \geq 2$ y $n = 1$. En un alfabeto con b letras diferentes hay b palabras distintas de longitud uno (se deja al lector decir por qué hay b palabras distintas). Entonces por la propiedad 9.1.1 sabemos que la longitud de la sucesión es igual al número de palabras diferentes de longitud uno que se pueden formar con b letras, entonces la longitud de nuestra sucesión es b .

Es claro que para que en la sucesión no se repita ninguna de las palabras de longitud uno, necesitamos que la sucesión esté compuesta por todas las b letras. Entonces en la primera casilla de la sucesión podemos poner cualquiera de las b palabras, en la segunda podemos poner cualquiera excepto la que ya hemos puesto (en caso contrario repetiríamos una palabra), es decir, podemos elegir entre $b - 1$ palabras distintas, para la tercera casilla podemos elegir cualquiera excepto las dos anteriores, es decir, podemos poner $b - 2$ palabras distintas, y así sucesivamente hasta la última palabra de la sucesión. Por lo tanto tenemos que el número de sucesiones es:

$$b \cdot (b - 1) \cdot (b - 2) \cdot (b - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = b! \quad (9.1)$$

Hasta el momento, estamos contando sucesiones que se repiten según el criterio que vimos en los párrafos anteriores, por ejemplo la sucesión $a_1 a_2 \dots a_b$ y la sucesión $a_2 a_3 \dots a_b a_1$ son iguales y están incluidas dentro de la cuenta, entonces por como contamos las sucesiones, cada sucesión tiene b repeticiones de ella misma, pues puedes empezar de b maneras distintas todas las sucesiones. Para aclarar este punto, imagina que tienes acomodada la sucesión alrededor de un círculo, como se muestra en la Figura 9.3. La sucesión que empieza en la letra a_0 y continúa en el sentido de las manecillas del reloj hasta completar el círculo, es la misma que la que comienza por la letra a_1 y continúa en el sentido de las manecillas del reloj hasta completar el círculo, que a su vez es la misma que la que comienza en la letra a_i y continúa en el sentido de las manecillas del reloj hasta completar el círculo. Es claro que hay b de estas sucesiones, una por cada una de las b letras de la sucesión. Entonces para contar el número total de sucesiones diferentes es necesario dividir la ecuación (9.1) entre b , es decir, quitarle el número de sucesiones repetidas; por lo tanto el número de sucesiones distintas para palabras de longitud uno es

$$\frac{b \cdot (b - 1) \cdot (b - 2) \cdot (b - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{b} = (b - 1)!$$

En el caso en que b y n son mayores o iguales a dos, las *sucesiones de Bruijn* tampoco son únicas, para verificar esto utilizaremos la fórmula del Teorema BEST. Esta fórmula cuenta el número de paseos eulerianos en una digráfica cualquiera, ya que a partir de estos paseos es posible generar *sucesiones de Bruijn*. Si la digráfica tiene al menos dos paseos eulerianos diferentes, entonces existen al menos dos

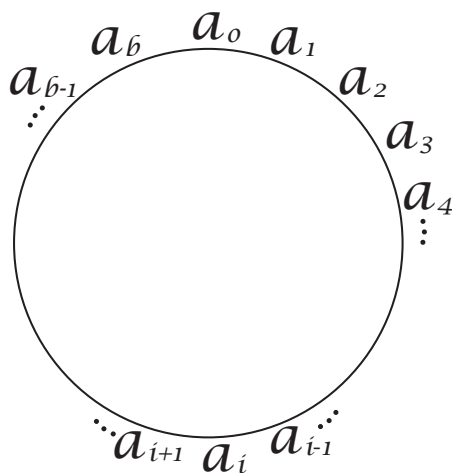


Figura 9.3.

sucesiones distintas. Antes de enunciar el teorema necesitamos un poco de teoría adicional.

Definición 9.1.5 *La matriz de incidencia de una digráfica D tal que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ es una matriz A de $p \times p$ tal que la entrada A_{ij} de la matriz es uno si existe una flecha del vértice v_i al vértice v_j y es cero en caso contrario, para todo $1 \leq i, j \leq p$.*

Obtenemos la matriz $M_{\delta^+}^*$ reemplazando la diagonal de $-A$ (menos la matriz de incidencia) por $\delta^+(v_i)$ para todo $v_i \in V(D)$. De manera dual podemos obtener la matriz $M_{\delta^-}^{**}$ reemplazando la diagonal de $-A$ por $\delta^-(v_i)$ para todo $v_i \in V(D)$. La Figura 9.4 muestra las matrices A y M_{δ^+} para la digráfica euleriana D .

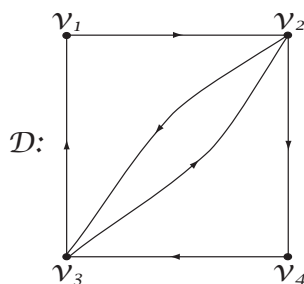
Definición 9.1.6 *El cofactor (i, j) de una matriz M es igual a*

$$c = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}.$$

Donde M_{ij} es la matriz obtenida de borrar la fila i y la columna j de una matriz M .

* A esta matriz también se le conoce con el nombre de M_{od} por su siglas en inglés: *outer degree*, que significa exgrado.

** A esta matriz también se le conoce con el nombre de M_{id} por su siglas en inglés: *inner degree*, que significa ingrado.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\delta^+} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 9.4. Digráfica euleriana, su matriz de incidencia A y su matriz M_{δ^+}

Vamos a hacer un pequeño paréntesis antes de continuar, para enunciar el Teorema de los árboles y matrices para digráficas, este teorema cuenta el número de árboles generadores en una digráfica.

El número de árboles generadores en una digráfica fue descubierto por Bott y Mayberry y tiempo después fue probado por Tutte [16]. Recordemos que un árbol generador de una digráfica D es una subdigráfica de D , conexa y sin ciclos, que contiene a todos los vértices de D . Enunciaremos sin demostrar el teorema.

Teorema 9.1.3 *Sea D una digráfica*

- i. El valor de los cofactores para cualquier entrada en la fila i de la matriz M_{δ^+} es igual al número de in-árboles generadores de D con v_i como pozo.*
- ii. El valor de los cofactores para cualquier entrada en la columna i de la matriz M_{δ^-} es igual al número de ex-árboles generadores de D con v_i como fuente.*

Como el número de *in-árboles* generadores de una digráfica es un número fijo, entonces todos los cofactores de la matriz M_{δ^+} tienen el mismo valor. Por ejemplo, el valor de los cofactores de la matriz M_{δ^+} que se muestra en la Figura 9.4 es dos. Ahora sí estamos preparados para enunciar el Teorema BEST [9]. Aunque no lo demostraremos, sí aprenderemos cómo utilizarlo.

Teorema 9.1.4 (Teorema BEST) *El número de paseos eulerianos de una digráfica D con $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es*

$$c \cdot \prod_{i=1}^p (\delta^-(v_i) - 1)!,$$

donde c es el valor común de los cofactores de la matriz M_{δ^+} .

Vamos a contar el número de paseos eulerianos en la digráfica D que se muestra en la Figura 9.4. El valor común de cada uno de los cofactores de M es $c = 2$. Además, los ingrados de los vértices de D son $\delta^-(v_1) = 1$, $\delta^-(v_2) = 2$, $\delta^-(v_3) = 2$ y $\delta^-(v_4) = 1$. Por lo tanto,

$$c \cdot \prod_{i=1}^p (\delta^-(v_i) - 1)! = 2 \cdot (1 - 1)! \cdot (2 - 1)! \cdot (2 - 1)! \cdot (1 - 1)! = 2,$$

entonces D tiene dos paseos eulerianos distintos que son

$$P_1 = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_3, v_1) \quad \text{y} \quad P_2 = (v_1, v_2, v_3, v_2, v_4, v_3, v_1).$$

El problema con el Teorema BEST es que no toma en cuenta si D es una digráfica con lazos, ya que está enunciado solo para digráficas. Entonces es necesario contar los lazos de alguna manera dentro de la fórmula del Teorema BEST si queremos contar el número de *sucesiones de Bruijn* para un alfabeto A , pues las *digráficas de Bruijn* siempre tienen al menos dos lazos (verificar esto es muy sencillo, la demostración se deja al lector) que puede que contribuyan a que se aumente el número de paseos eulerianos de nuestra digráfica. A continuación vamos a construir una fórmula que nos ayude a contar dichos lazos.

Consideremos una digráfica con lazos D' que se obtiene de insertar un lazo al vértice v de una digráfica euleriana sin lazos D . En general el vértice v aparece en el paseo euleriano de D tantas veces como $\delta_D^+(v)$, pues como el paseo es euleriano forzosamente tiene que cruzar al vértice v tantas veces como flechas le salgan a v . Entonces si colocamos un lazo en v el número de paseos eulerianos en D' es igual al número de paseos eulerianos en D por el exgrado de v .

Para aclarar este punto, supongamos que D es una digráfica sin lazos euleriana e insertemos un lazo en un vértice v tal que $\delta_D^+(v) = n = \delta_D^-(v)$. Entonces v aparece n -veces en el paseo euleriano P , sean f_i y f'_i la i -ésima flecha que entra y sale respectivamente de v por el paseo P , como se muestra en la Figura 9.5. A partir de P vamos a construir dos paseos diferentes que utilicen el lazo que insertamos.

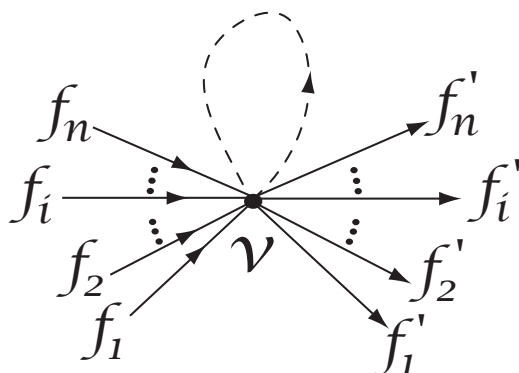


Figura 9.5.

Sea P_i un paseo euleriano en D' tal que P_i hace el mismo recorrido que P sólo que la i -ésima vez que aparece v en P_i el paseo cruza por el lazo; es decir, P_i entra a v por la flecha f_i , cruza el lazo y sale por la flecha f'_i . Sea P_j un paseo euleriano en D' tal que P_j hace el mismo recorrido que P sólo que la j -ésima vez que aparece v en P_j el paseo cruza por el lazo. Por construcción, el paseo P_i es diferente del paseo P_j para todo $i \neq j$, pues el lazo está en diferentes posiciones en ambos paseos. Como hay n flechas que entran y n flechas que salen, entonces el paseo P de D es posible hacerlo de n diferentes formas en D' .

Entonces por cada lazo que ponemos en D , el número de paseos en D' es igual al número de paseos en D multiplicado por el exgrado en D de los vértices a los cuales les agregamos el lazo. Esto en términos matemáticos se expresaría como:

Corolario 9.1.2 *Sea D una digráfica sin lazos euleriana con p -vértices y sean $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}$ vértices de D , si construimos D' añadiéndole a D lazos en v_{i_j} para toda $1 \leq j \leq k$, entonces el número de paseos eulerianos de D' es*

$$c \cdot \prod_{j=1}^k \delta_D^+(v_{i_j}) \cdot \prod_{i=1}^p (\delta_D^-(v_i) - 1)!$$

donde c es el valor de los cofactores de la matriz M descrita anteriormente.

La demostración del corolario anterior se sigue de la explicación dada en los párrafos anteriores. Para finalizar vamos a contar el número de paseos eulerianos de la digráfica de Bruijn $D_{2,3}$.

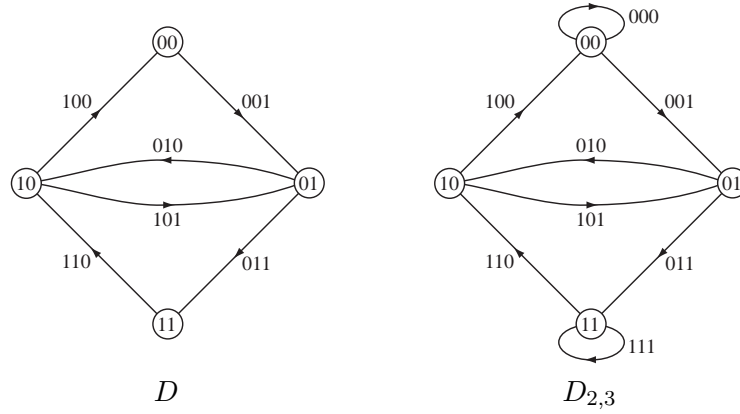


Figura 9.6.

Sea D la digráfica que se muestra en la Figura 9.6. Obtenemos $D' = D_{2,3}$ añadiéndole lazos a los vértices 00 y 11, como se muestra en la Figura 9.6. Primero comenzamos contando con el Teorema BEST el número de paseos eulerianos que tiene D , para esto necesitamos la matriz de incidencia A de D y la matriz $M_{\delta_D^+}$, que se obtiene a partir de A . Estas matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{\delta_D^+} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cada cofactor de la matriz $M_{\delta_D^+}$ vale dos, entonces por el Teorema BEST el número de paseos eulerianos de D es $2 \cdot (0!)(1!)(0!)(1!) = 2$. Por otro lado, para todo $v \in V(D)$ tal que v tiene lazo en D' , su exgrado en D es uno, es decir, $\delta_D^+(v) = 1$. Por el corolario 9.1.2, el número de paseos eulerianos de $D_{2,3} = D'$ es $2(1 \cdot 1)((0!)(1!)(0!)(1!)) = 2$. Entonces para una alfabeto A con dos letras existen 2 sucesiones de Bruijn diferentes para palabras de longitud tres.

En resumen, la sucesión circular más larga que se puede formar con los dígitos 0 y 1 tal que si agrupamos los números en grupos de tres cifras consecutivas, los grupos no aparecen más de una vez, es una *sucesión de Bruijn*. Esta sucesión la podemos generar encontrando paseos eulerianos en la digráfica $D_{2,3}$. Sabemos por el Teorema BEST que esta digráfica tiene dos paseos eulerianos, que son las sucesiones de flechas

$$P_1 = (101, 010, 100, 000, 001, 011, 111, 110)$$

y

$$P_2 = (000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100),$$

donde el paseo P_1 genera la sucesión 10100011 y el paseo P_2 genera la sucesión 00010111.

Conclusiones

Como mencionamos en la introducción de la tesis, el objetivo de ésta es brindarle un apoyo y un acercamiento a los alumnos de universidad en el área de la Teoría de las Gráficas. Conocer al menos un poco acerca de este tema es de gran importancia para la formación del alumno, pues le ayudará a entender de una manera sencilla y visual la forma de “pensar” en términos matemáticos, que las matemáticas no sólo son operaciones entre números y hay mucho más allá de los triángulos, círculos o cuadrados (a más de uno de nosotros alguna vez nos dijeron: “Eres matemático... debes de saber sumar muy bien” o “Que el matemático calcule la cuenta”).

Uno de los aspectos útiles de la Teoría de las Gráficas es que puede ser enseñada desde la primaria. Hay una gran cantidad de juegos relacionados con esta teoría que son accesibles para un niño, como la famosa *firma del diablo** [28]. Espero que éste sea el primero de una serie de libros que enseñen esta bonita teoría desde alumnos de primaria hasta los ya titulados, o a cualquier persona que se interese en el tema.

*De lo que se trata este juego es de trazar un figura cerrada con un lápiz sin pasar dos veces por la misma línea

Índice alfabético

- k -coloración, 63
- k -tupla, 165
- Árbol, 12
 - generador, 12
- Índice cromático, 63
- Apareamiento, 22
 - máximo, 22
 - perfecto, 22
- Arista, 2
 - múltiple, 15
- Camino, 7
 - dirigido, 19
 - longitud de, 7
 - no dirigido, 18
- Cara, 80
- Ciclo, 7
 - dirigido, 19
 - hamiltoniano, 35
- Clan, 51
- Cofactor, 174
- Coloración
 - óptima, 66
 - aristas, 63
 - buena, 63
 - buena por vértices, 49
 - vértices, 49
- Complemento, 11
- Componente conexa, 9
- Conjunto independiente, 11
- Digráfica, 17
 - grado, 18
- Digráficas Isomorfas, 18
- Espesor, 84
- ex-árbol, 165
- Exgrado, 17
- Fórmula de Euler, 81
- Flecha, 17
 - asimétrica, 18
 - simétrica, 18
- Fuente, 165
- Fuertemente conexa, 19
- Gráfica, 2
 - bipartita, 11
 - bipartita completa, 12
 - completa, 9
 - conexa, 8
 - disconexa, 8
 - euleriana, 35
 - hamiltoniana, 35
 - isomorfa, 5
 - plana, 79
 - r-partita, 11
 - regular, 9
 - subdivisión de, 86
- Grado, 3
 - máximo, 4
 - mínimo, 4

- in-árbol, 165
- Ingrado, 17
- Lazo, 15
- M-alternante, 22
- M-apareado, 22
- M-aumentante, 22
- M-saturado, 22
- Matriz de incidencia, 174
- Mejora, 66
- Multigráfica, 15
 - de líneas, 36
- Número cromático, 49
- Número de independencia, 46
- Número de ramsey, 101
- Números congruentes, 152
- Orden, 2
- Paseo, 7
 - dirigido, 19
 - euleriano, 35
- Pozo, 112
- Principio del buen orden, 150
- Semi-pozo, 112
- Subgráfica, 6
 - inducida, 6
- Sucesión de Bruijn, 166
- Tamaño, 2
- Torneo, 19
- Trayectoria, 7
 - dirigida, 19
- Unilateralmente Conexa, 19
- Vértice, 2
 - adyacente, 3
 - extremo, 3
- Vecinos, 22
- exteriores, 18
- interiores, 18

Bibliografía

- [1] ALEXANDERSON, G. About the cover: Euler and königsberg's bridges: A historical view. *American Mathematical society* 43, 4 (octubre del 2006). Disponible en <http://www.ams.org/bull/2006-43-04/S0273-0979-06-01130-X/S0273-0979-06-01130-X.pdf>.
- [2] BERGE, C. *The Theory of graphs*. Dover, 2001.
- [3] BIGGS, N. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon, 1976.
- [4] BOGOMOLNY, A. Water puzzle, experimental math. <http://www.cut-the-knot.org/water.shtml>, consultado el 7 de septiembre del 2006.
- [5] BONDY, J., AND MURTY, U. *Graph theory with aplicaciones*. North-Holland, 1982.
- [6] BUTLER, B. Durango bill's, the n-queens problem (originally, the eight queens problem). http://www.durangobill.com/N_Queens.html, consultado el 18 de octubre del 2006.
- [7] CARDENAS, H. *Álgebra Superior*. Trillas, 1973.
- [8] CHARTRAND, G. *Introductory Graph Theory*. Dover, 1985.
- [9] CHARTRAND, G. *Applied and algorithmic graph theory*. McGraw-Hill, 1993.
- [10] DARLING, D. Latin squares. http://www.daviddarling.info/encyclopedia/L/Latin_square.html, consultado el 30 de septiembre del 2006.
- [11] DARLING, D. Thirty-six officers problem. http://www.daviddarling.info/encyclopedia/T/thirty-six_officers_problem.html, consultado el 30 de septiembre del 2006.

- [12] DE CHILE, U. Juegos matemáticos y recreaciones. <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/juegos1.html>, consultado el 12 de octubre del 2006.
- [13] FOULDS, L. *Graph theory applications*. Springer, 1992.
- [14] FRANK, A. On kuhn's hungarian method-a tribute from hungary. Tech. rep., Egrerváry Research Group, Octubre 2004. Disponible en <http://www.cs.elte.hu/egres/tr/egres-04-14.pdf>.
- [15] GONTHIER, G. A computer-checked proof of the four colour theorem. Tech. rep., Microsoft Research Cambridge. Disponible en <http://research.microsoft.com/~gonthier/4colproof.pdf>.
- [16] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [17] HARRIS, J. *Combinatorics and Graph Theory*. Springer, 2000.
- [18] KÖING, D. *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhäuser Boston, 1990.
- [19] LOVASZ, L. *Matching theory*. North-holland, 1986.
- [20] NIKOLI. Sudoku. http://www.nikoli.co.jp/en/puzzles/sudoku/index_text.htm, consultado el 12 de septiembre del 2007.
- [21] NØRMARK, K. A solution to the eight queens problem. <http://www.cs.auc.dk/~normark/eciu-recursion/html/recit-note-8q-solution.html>, consultado el 12 de diciembre del 2006.
- [22] O'CONNOR, J., AND ROBERTSON, E. Frank plumpton ramsey. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ramsey.html>.
- [23] O'CONNOR, J., AND ROBERTSON, E. Mathematical games and recreations. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Mathematical_games.html, consultado el 3 de septiembre del 2007.
- [24] O'CONNOR, J., AND ROBERTSON, E. Sir william rowan hamilton. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html>, consultado el 3 de septiembre del 2007.
- [25] ORE, O. *Graphs and their uses*. Mathematical Association of America, 1963.
- [26] ORE, O. *The four-color problem*. Academic, 1967.
- [27] R. CHATHAM, G. FRICKEZ, R. S. The queens separation problem. Tech. rep., Department of Mathematics and Computer Science, More-head State University, 2004. Disponible en <http://people.moreheadstate.edu/fs/d.chatham/queenssep.pdf>.

- [28] R. WILSON, J. W. *Graphs an introductory approach*. John Wiley and Sons, 1990.
- [29] RADZISZOWSKI, S. Small ramsey numbers. Tech. rep., Department of Computer Science Rochester Institute of Technology, 2006. Disponible en <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf>.
- [30] SCHUMER, P. *Mathematical Journeys*. Wiley-Interscience, 2004.
- [31] STEGMANS, T. Rob's puzzle page. <http://home.comcast.net/~stegmann/rearrangement.htm#insanity>, consultado el 8 de octubre del 2006.
- [32] T. PFAFF, M. T. The generalized jug problem. Tech. rep., Math and Comp. Sci. Department, Ithaca College, Febrero 24 2005. Disponible en <http://www.ithaca.edu/tpfaff/pdf/jugnew.pdf>.
- [33] THOMAS, R. An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS* 45, 7 (Agosto 1998). Disponible en <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>.
- [34] WEISSTEIN, E. Queens problem. <http://mathworld.wolfram.com/QueensProblem.html>, consultado el 12 de octubre del 2006.
- [35] WEISSTEIN, E. Maximum independent set problem. <http://mathworld.wolfram.com/MaximumIndependentSetProblem.html>, consultado el 18 de octubre del 2006.
- [36] WEISSTEIN, E. Clique number. <http://mathworld.wolfram.com/CliqueNumber.html>, consultado el 19 de octubre del 2006.
- [37] WEISSTEIN, E. W. Three jug problem. <http://mathworld.wolfram.com/ThreeJugProblem.html>, consultado el 7 de septiembre del 2006.
- [38] WIKIPEDIA. Seven bridges of Königsberg. http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_bridges_of_K%C3%B6nigsberg, consultado el 17 de febrero del 2007.
- [39] WIKIPEDIA. Nicolaas govert de bruijn. http://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaas_Govert_de_Bruijn, consultado el 18 de octubre del 2006.