UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO:
LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADAS

# REPORTE DE SEMINARIO

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CARLOS VLADIMIRO GONZÁLEZ ZELAYA

TUTOR

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

**Hoja de Datos del Jurado**

1. Datos del alumno
González
Zelaya
Carlos Vladimiro
55 43 18 95
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
400044466

2. Datos del tutor
M en C
Alejandro
Bravo
Mojica

3. Datos del sinodal 1
M en C
Agustín
Ontiveros
Pineda

4. Datos del sinodal 2
M en C
José Antonio
Gómez
Ortega

5. Datos del sinodal 3
M en C
Emma
Lam
Osnaya

6. Datos del sinodal 4
M en C
Elena
de Oteyza
de Oteyza

7. Datos del trabajo escrito
Introducción al Cálculo
Límites, continuidad y derivadas
68 p
2007

AGRADECIMIENTOS

A los maestros Alejandro Bravo y Agustín Ontiveros, por su ayuda y consejos para realizar este trabajo.

A la maestra Paloma Zapata y al doctor Carlos Torres, que me ayudaron muchísimo en etapas anteriores de mi carrera, y con quienes compartí diversos intereses.

A mis profesores de la carrera: Lucero Oteyza, Luis Montejano, Javier Bracho, Óscar Falcón, Rafael Rojas, Julieta Verdugo y Francisco Struck, quienes me ayudaron a percibir la belleza de las matemáticas.

A Francisco Rivera Viesca, por invitarme a su revolucionario proyecto educativo, y permitirme poner en práctica las lecciones de este trabajo.

A Martín Manrique, colega y amigo, de quien he aprendido mucho de cómo dar clases.

A José Chacón, mi sensei de Go y muchas otras cosas.

A Ricardo Quintero, quien me ha enseñado otras facetas del Go, todas ellas muy valiosas.

A todos mis amigos y compañeros en la Facultad de Ciencias, que hicieron aún mas agradable mi estancia en la Universidad.

A la banda del pulpo.

A Henrik, Julián, Emiliano *mema*, Luis Pedro, Emilio *chupis*, Rodrigo, Emil y Amador, queridísimos amigos y compañeros.

A los jugadores de Go en México, todos excelentes personas y buenos amigos.

A Violeta, por su cariño.

A mi tía Elena, quien ha estado siempre presente, y compartió el esfuerzo por titularme.

A mi papá, gracias por su ejemplo y por estar presente de diversas maneras.

Y sobre todo, mil gracias a mi mamá, por su amor y enseñanzas a lo largo de mi vida, y por darme tan a menudo ese empujoncito para poder hacer las cosas que debía.

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

El objetivo de este trabajo fue el de elaborar un curso introductorio al Cálculo diferencial. Se abordaron tres grandes temas: los límites, la continuidad y las derivadas para funciones de una variable.

Al estar enfocado a un público amplio, se puso énfasis en la comprensión de los conceptos, aunque sin dejar de lado la formalidad de las demostraciones, hechas en algunos casos.

La idea fue que, a modo de guión, el curso se dividiera primeramente en los tres temas arriba mencionados, y posteriormente partir esos temas en *clases*. Así pues, el curso quedó conformado de la siguiente manera:

- 4 clases para el tema de los límites
- 2 clases para el tema de continuidad
- 1 juego de problemas resueltos acerca de éstos dos temas
- 5 clases para el tema de derivadas
- 2 juegos de problemas resueltos acerca de las derivadas

Así, con 14 clases, se puede dar al alumno una introducción al Cálculo diferencial, y proveerlo de herramientas para solucionar problemas tanto de la materia como de otras disciplinas.

Al tener como principal interés la resolución de problemas tanto teóricos como aplicados, decidí dar el siguiente formato a la clase:

- El primer tercio de la clase dedicarlo a la teoría. De ese modo, el alumno se encuentra con un marco teórico en el cuál trabajar.
- El segundo tercio, dedicarlo a la resolución de ejemplos, tanto teóricos como prácticos que ocuparan la teoría recién aprendida. Esto permite al alumno aprender y comprender los métodos usuales para la resolución de problemas con la nueva teoría.
- Finalmente, se complementa la clase con una serie de ejercicios para el alumno. Éstos pueden ser hechos tanto en clase como ser dejados a modo de tarea.

Para los juegos de problemas resueltos, tomé problemas a mi gusto interesantes, y que no se relacionaran de un modo *demasiado* obvio con los temas vistos. De éste modo, se empuja al alumno a pensar de un modo transdisciplinario, y esto le puede servir para la resolución de problemas reales.

Éstos problemas pueden ser usados de distintas maneras, ya sea para ilustrar de un modo más profundo algunos de los temas vistos, a modo de clase adicional, o para tareas y/o examenes a los alumnos.

Para los primeros dos juegos de problemas, se tomaron algunos ejemplos del libro *Cálculo una variable*, de George B. Thomas [1], pero la mayoría de los problemas son de invención propia. Para el tercer juego de problemas, éstos se tomaron exclusivamente de los problemas avanzados del libro *Cálculo de una variable*, de James Stewart [3].

Para la parte teórica, me apoyé principalmente en los libros *Calculus*, de Michael Spivak [2], así como en el ya mencionado *Cálculo* de Thomas.

Para profundizar en el tema, se recomienda estudiar tanto [1] como [3] si se tiene interés en las aplicaciones prácticas del Cálculo, o estudiar [2] si el interés es más teórico o formal.

Para una visión más global tanto del Cálculo como de las matemáticas, así como la parte histórica del tema, se recomienda leer el libro *¿Qué son las matemáticas?* de Richard Courant y Herbert Robbins [4].

# Capítulo 2

# Límites

## 2.1. Clase 1

En esta clase veremos una aproximación intuitiva al concepto de Límite, así como su notación, además de algunos ejemplos y ejercicios, para finalizar la clase con la definición formal de Límite. Al hablar de una *función*, debemos entender que se trata de una función real de variable real.

### 2.1.1. Aproximación Intuitiva

El concepto de límite es fundamental en el estudio del Cálculo, pues es precisamente esta noción, que tiene que ver con la comprensión del comportamiento local de las funciones, la que nos permitirá en un futuro entrar con pies firmes en el terreno de las derivadas. Aún de manera intuitiva, la comprensión del límite requiere de una sencilla definición, que nos ayudará a acotar números alrededor de un numero fijo, y esta es la definición de vecindad.

**Definición 2.1.1** *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\delta$ un número positivo, distinto de cero. Llamaremos* Vecindad de $a$ con radio $\delta$ *al conjunto de puntos en $\mathbb{R}$ tales que $\mid x-a \mid < \delta$. A esta vecindad la denotaremos $V_\delta(a)$.*

Sea $f$ una función. Diremos que $f$ tiende a $l$ en $a$ si podemos hacer que $f(x)$ esté *tan cerca* de $l$ como queramos haciendo que $x$ esté suficientemente cerca de $a$, sin llegar a ser $a$. Esto es, si podemos hacer que $f(x)$ caiga dentro de una vecindad de $l$ tan pequeña como queramos, haciendo que $x$ esté en una vecindad suficientemente pequeña de $a$.

### 2.1.2. Ejemplos

**Ejemplo 2.1.2** *¿Podremos hacer que la función $f(x) = \frac{1}{2}x$ esté tan cerca de 2 como queramos haciendo que $x$ esté en una vecindad lo suficientemente pequeña de 4?. Si queremos que $f(x)$ esté a menos de $\frac{1}{4}$ de distancia de 2, ¿qué vecindad del 4 nos servirá?.*

*Si tomamos una vecindad $V$ de radio $\frac{1}{2}$ alrededor del $4$, y una $x \in V$, $f(x)$ estará a menos de $\frac{1}{4}$ de $2$.*

*Más en general, si notamos que $f$ es una función lineal, con pendiente $\frac{1}{2}$, será claro que, para cualquier$\varepsilon > 0$ que nos den, podremos encontrar una $\delta = 2\varepsilon$ que nos mande a $V_{2\varepsilon}(a)$, menos quizás a $4$, a $V_\varepsilon(2)$.*

Hay que notar que no siempre es tan sencillo encontrar a $\delta$ en función de $\varepsilon$, y que además es posible que la $\delta$ no dependa solo de $\varepsilon$, sino también de la $a$ que elijamos.

**Ejemplo 2.1.3** *Sea $f(x) = \frac{x+x^3}{x}$. Ésta función está definida para todo $x \neq 0$, pero en $x = 0$ se anula el denominador. Sin embargo, al hacer la gráfica de la función, podemos ver que para valores de $x$ muy cercanos al $0$, el valor de $f(x)$ se parece mucho a $1$. Para checar si efectivamente $f(x)$ tiende a $1$ cuando $x$ tiende a $0$, recurriremos a un par de trucos algebraicos. El primero será considerar, en lugar de $f(x)$, a la función*

$$f(x) - 1 = \frac{x+x^3}{x} - 1,$$

*y sustituir el $1$ de la derecha por $\frac{x}{x}$. Así, obtenemos*

$$f(x) - 1 = \frac{x+x^3-x}{x} = \frac{x^3}{x}.$$

*El segundo truco es que, dado que estamos tomando $x$ cerca de $0$, pero $x \neq 0$, podemos dividir tanto al numerador como al denominador entre $x$, y así obtener finalmente*

$$f(x) - 1 = x^2.$$

*De esta nueva función, se ve claramente que podemos hacer que $f(x)$ se acerque tanto a $1$ como queramos con sólo hacer que $x$ esté suficientemente cerca de $0$, o mas formalmente, podemos hacer que $f(x) \in V_\varepsilon(1)$ si $x \in V_{\sqrt{\varepsilon}}(0)$ y $x \neq 0$.*

*Por ejemplo, si queremos que $f(x) \in V_{\frac{1}{100}}(1)$, nos bastará con tomar $x \in V_{\frac{1}{10}}(0)$, con $x \neq 0$.*

### 2.1.3. Ejercicios

**Ejercicio 2.1.4** *Sea $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. ¿Podremos hacer que $f(x)$ esté tan cerca de 0 como queramos, encontrando una vecindad del 0 lo suficientemente pequeña?¿Por qué?*

Sugerencia. *Dibuja la gráfica de la función*

**Ejercicio 2.1.5** *Una pelota de goma tiene un volumen de $27cm^3$. Si su fabricante quiere que las siguientes pelotas que haga tengan entre $26cm^3$ y $28cm^3$, ¿en que rango se moverán los radios de las pelotas?¿Que relación tiene este problema con nuestra noción de límite?*

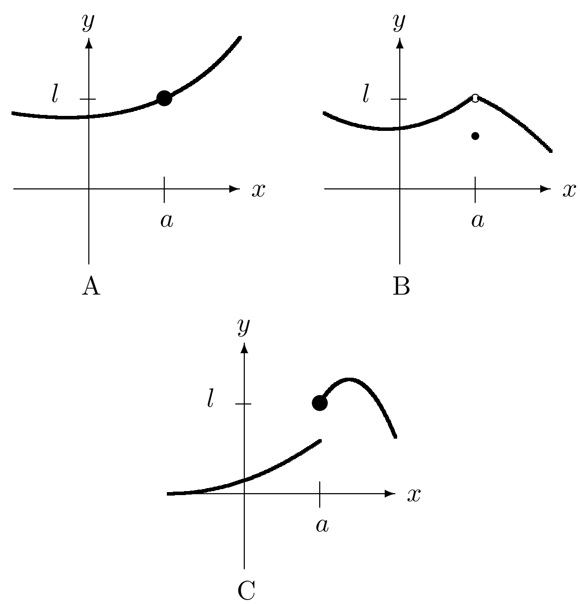


Figura 2.1: Las funciones graficadas en A y B tienden a $l$ en $a$, mientras que la mostrada en C no.

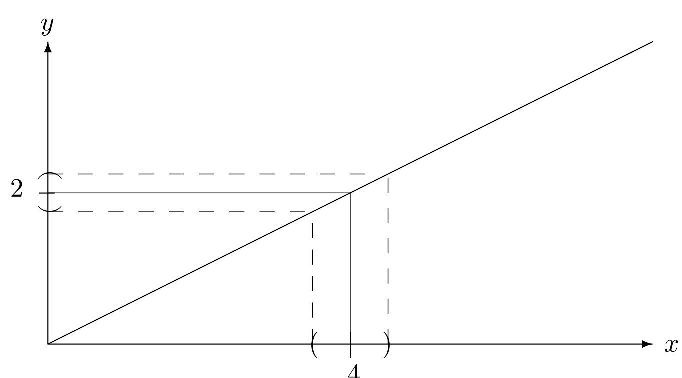


Figura 2.2: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}x$ para el ejemplo 2.1.2.

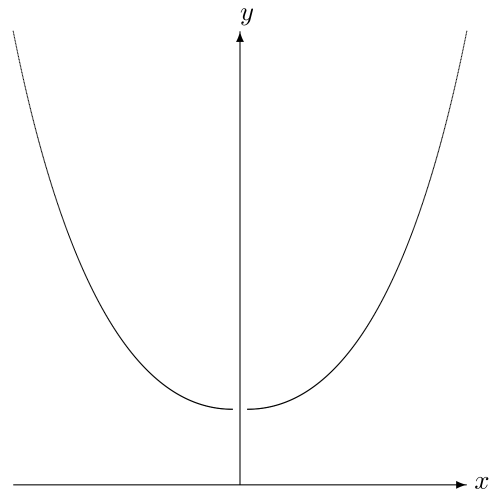


Figura 2.3: Gráfica de $f(x) = \frac{x+x^3}{x}$ para el ejemplo 2.1.3.

Una vez vistos estos ejemplos y resueltos los ejercicios, podemos pasar a la definición formal de límite, que será la que usaremos de aquí en adelante. En esta nueva definición, nos olvidaremos de las vecindades y encontraremos desigualdades, que es la forma en la que se presenta la definición de límite en la mayoría de los libros de Cálculo. Esto no afectará nuestra comprensión del concepto de límite, pues estas nuevas desigualdades corresponderán esencialmente a vecindades. Es importante, sin embargo, que además de aprenderla, recordemos lo que esta definición significa, pues esto nos ayudará a comprender mejor los problemas que se nos plantean.

### 2.1.4. Definición de Límite

**Definición 2.1.6** *Dada $f$una función, diremos que $f$ tiende al límite $l$ en $a$, si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $0 <\mid x - a \mid< \delta$, entonces $\mid f(x) - l \mid< \varepsilon$, y lo abreviaremos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Con esta definición, la siguiente clase demostraremos un par de teoremas básicos acerca de los límites, así como otros tantos que nos permitirán resolver más fácilmente algunos límites aparentemente complicados.

## 2.2. Clase 2

En esta clase haremos uso de la definición 2.1.6 de Límite para probar algunos teoremas importantes, que nos ayudarán en el futuro a resolver límites en apariencia complicados. En consecuencia, en esta clase también resolveremos ejercicios con límites.

### 2.2.1. Unicidad de los límites

A continuación enunciaremos nuestro primer Teorema, que nos garantiza que, en caso de existir el límite de una función en un punto dado, este será único. Intuitivamente esto es totalmente razonable, pero la prueba es necesaria para garantizar futuros resultados que dependen de este hecho.

**Teorema 2.2.1** *Una función no puede tender hacia dos límites diferentes en $a$. Esto es, si $f$ tiende hacia $l$ en $a$, y $f$ tiende hacia $m$ en $a$, entonces $l = m$.*

*Prueba.* Para demostrar nuestro teorema, conviene reinterpretarlo de acuerdo a nuestra definición de límite. Decir que $f$ tiende hacia $l$ en $a$ significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 <| x - a |< \delta_1$, entonces $| f(x) - l |< \varepsilon$. De manera análoga, que $f$ tienda a $m$ en $a$ significa que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 <| x - a |< \delta_2$, entonces $| f(x) - m |< \varepsilon$. Para simplificar nuestro razonamiento, tomemos $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Esta nueva $\delta$ cumple con lo necesario para que $f$ tienda tanto a $l$ como a $m$

Ahora supongamos que $l \neq m$. Vamos a encontrar una $\varepsilon > 0$ para la que no exista una $\delta > 0$ tal que $0 <| x - a |< \delta \Rightarrow| f(x) - l |< \varepsilon$ y $0 <| x - a |< \delta \Rightarrow| f(x) - m |< \varepsilon$ al mismo tiempo. Esta $\varepsilon$ la encontraremos simplemente haciendo que las vecindades $V_\varepsilon(l)$ y $V_\varepsilon(m)$ no se puedan intersectar. Para ello, tomaremos a $\varepsilon$ como la mitad de la distancia entre $l$ y $m$, es decir, $\varepsilon = \frac{|l-m|}{2}$. Si hubiera una $\delta$ que cumpliera con nuestra definición para esta $\varepsilon$, entonces tendríamos que $| f(x) - l |< \frac{|l-m|}{2}$ y $| f(x) - m |< \frac{|l-m|}{2}$.

Entonces, para $0 <| x - a |< \delta$ tendríamos que

$$| l-m |=| l-f(x)+f(x)-m |\leq| l-f(x) | + | f(x)-m |< \frac{|l-m|}{2}+\frac{|l-m|}{2} =| l-m |$$

o más brevemente: $| l - m |<| l - m |$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, el límite al que tiende una función en un punto, si existe, es único. ■

### 2.2.2. Operaciones con límites

Para nuestra fortuna, es posible aplicar las operaciones aritméticas elementales de suma (y resta), multiplicación y división a los límites con gran facilidad. El cómo se hace esto queda enunciado en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.2** *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = m$*, entonces:*

1. $\lim_{x \to a}(f+g)(x) = l+m$
2. $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = l \cdot m$
3. *Si* $m \neq 0$, $\lim_{x \to a}(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{m}$.

Haremos aquí la prueba de la igualdad de la suma, dejando como ejercicio opcional hacer las correspondientes pruebas para el producto y la división.

*Prueba.* Notemos que, para cualesquiera $a$, $b$, $c$ y $d$, si $\mid a-b \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mid c-d \mid < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$\mid (a+c)-(b+d) \mid < \varepsilon.$$

Esto es por la desigualdad del triángulo.

Ahora, por nuestras hipótesis de que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = m$, podemos tomar $\delta_1$ tal que $\mid f(x)-l \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\delta_2$ tal que $\mid g(x)-m \mid < \frac{\varepsilon}{2}$. De nuevo, si tomamos $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, podemos hacer que ambas desigualdades se cumplan a la vez.

Por la primera observación, tenemos entonces que $\mid (f+g)(x)-(l+m) \mid < \varepsilon$, que es lo que queríamos. ■

De éste teorema se desprenden tres consecuencias directas, pero que son dignas de notarse por su utilidad práctica:

**Corolario 2.2.3** *Si* $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\lim_{x \to a} g(x) = m$ *y* $k$ *es una constante, entonces:*

1. $\lim_{x \to a}(k \cdot f)(x) = k \cdot l$
2. *Si* $m \neq 0$, $\lim_{x \to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{l}{m}$
3. *Si* $r$ *y* $s$ *son enteros sin factores comunes,* $\lim_{x \to a} f(x)^{\frac{r}{s}} = l^{\frac{r}{s}}$*, siempre y cuando* $l^{\frac{r}{s}}$ *sea un número real.*

También es importante señalar que, aunque aún no lo hemos visto, los límites de las funciones polinomiales se pueden calcular sustituyendo directamente a $a$ en la función. Esto se debe a la *continuidad* de dichas funciones, noción que abordaremos en el siguiente capítulo. Por ahora, queda como teorema sin demostración.

### 2.2.3. Ejemplos de operaciones con límites

Veamos ahora algunos ejemplos en los que podemos aplicar las recién aprendidas reglas para calcular límites.

**Ejemplo 2.2.4** *Calcular* $\lim_{x\to a} x^5 + 2x^2 - 6$.

$$\lim_{x\to a} x^5 + 2x^2 - 6 = \lim_{x\to a} x^5 + \lim_{x\to a} 2x^2 - \lim_{x\to a} 6 = a^5 + 2a^2 - 6$$

**Ejemplo 2.2.5** *Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 5$. *Calcular:*

$$\lim_{x\to a} \frac{4g(x) + 7}{f(x)^{\frac{2}{3}}}$$

*Para resolver este limite, basta con hacer uso del Teorema 2.2.2 y el Corolario 2.2.3 directamente. Así,*

$$\lim_{x\to a} \frac{4g(x) + 7}{f(x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\lim_{x\to a} 4g(x) + 7}{\lim_{x\to a} f(x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4 \cdot 5 + 7}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{27}{3^{\frac{2}{3}}}$$

### 2.2.4. Teorema de Compresión

El siguiente teorema, también llamado *Teorema del sandwich* debido a que trata de una función que queda *atrapada* entre otras dos, nos permite calcular nuevos límites a partir de otros que conozcamos previamente.

**Teorema 2.2.6** *[Teorema de Compresión] Supongamos que* $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *para toda* $x$ *en un intervalo abierto que contenga a* $a$, *excepto quizás en el mismo* $x = a$. *Supongamos también que*

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$$

*Entonces,* $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Veamos ahora como podemos utilizar esta nueva herramienta para encontrar límites.

**Ejemplo 2.2.7** *Para calcular* $\lim_{x\to 0} \sin(x)$, *lo podemos hacer mediante la observación de que* $- \mid x \mid < \sin(x) < \mid x \mid$ *para toda* $x$.

*Además, como* $\lim_{x\to 0} - \mid x \mid = \lim_{x\to a} \mid x \mid = 0$, *obtenemos entonces, por el teorema de compresión, que*

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

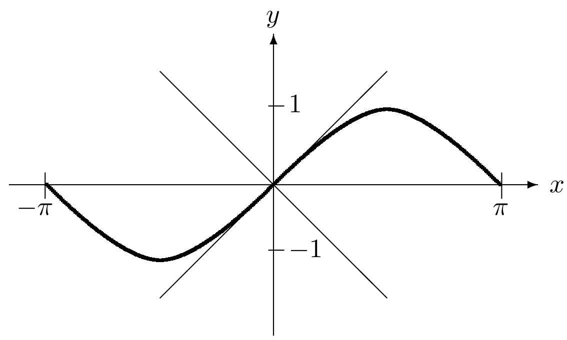


Figura 2.4: Obtención de $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$ mediante el teorema de compresión.

### 2.2.5. Ejercicios

**Ejercicio 2.2.8** *Suponiendo que* $\lim_{x\to a} f(x) = 4$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = -5$*, encontrar:*

1. $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x)$
2. $\lim_{x\to a} f(x) + 4g(x)$
3. $\lim_{x\to a} \frac{5f(x)+6}{g(x)^2}$

**Ejercicio 2.2.9** *Si* $2-x^2 \leq g(x) \leq 2\cos(x)$ *para toda* $x$*, encontrar* $\lim_{x\to 0} g(x)$.

**Ejercicio 2.2.10** *Si* $x^4 \leq f(x) \leq x^2$ *para* $x$ *en* $[-1,1]$ *y* $x^2 \leq f(x) \leq x^4$ *para* $x < -1$ *y* $x > 1$*, ¿Para que puntos* $a$ *podemos encontrar* $\lim_{x\to a} f(x)$*?¿Cuál será el valor del límite en esos puntos?*

## 2.3. Clase 3

En esta clase veremos dos tipos nuevos de límite: los *límites laterales*, y los *límites al infinito*. De nueva cuenta, en un principio daremos una descripción informal de ellos, para posteriormente formalizar su definición.

### 2.3.1. Límites laterales

Cuando definimos los límites inicialmente, pusimos como condición para que el límite de una función en un punto $a$ existiera que la función estuviera definida en un intervalo *alrededor* de $a$, excepto quizás en $a$ mismo. Esto es, que si nos aproximamos a $a$ por *ambos lados*, la función se aproximara al límite. Vimos también que algunas funciones pueden aproximarse en un punto a cierto valor por un lado, y a otro valor distinto por el otro. En ese caso, dijimos que el límite de la función no existe en dicho punto.

Sin embargo, podemos suavizar esta condición para definir un nuevo tipo de límites, que son los *límites laterales* y que intuitivamente son los valores a los que puede tender una función en un punto aproximandonos por *un sólo lado*.

**Definición 2.3.1** *Diremos que $f(x)$ tiene* límite lateral derecho l *en $a$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x$,*

$$a < x < a + \delta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$$

*y lo abreviaremos:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

*Análogamente, diremos que $f(x)$ tiene* límite lateral izquierdo l *en $a$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda $x$,*

$$a - \delta < x < a \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon$$

*y lo abreviaremos:*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$

**Ejemplo 2.3.2** *Sea $f(x) = \frac{x}{|x|}$.*

*Entonces $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.*

Es fácil probar que los límites laterales tienen las mismas propiedades probadas en la clase 2 que los límites. Además, los límites laterales están relacionados con los límites, como se ve en el siguiente:

**Teorema 2.3.3** *Una función $f$ tiene límite $l$ cuando $x \to a$ si y sólo si existen los límites laterales izquierdo y derecho, y estos valen $l$. Esto es,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

Los límites laterales nos sirven para conocer el comportamiento de las funciones en los extremos de donde están definidas, así como en puntos en los que la función tiene alguna singularidad.

### 2.3.2. Límites al infinito

Así como los límites nos permiten conocer el comportamiento de una función *cerca* de algún punto, podemos comprender su comportamiento en los *extremos* de la recta real, esto es, cuando evaluamos la función en números muy grandes, ya sean positivos o negativos. Para esto vamos a recurrir al concepto de *límite al infinito.*

**Definición 2.3.4** *Diremos que $f(x)$ tiende al límite $l$ cuando $x$ tiende a infinito, si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N$ tal que para toda $x$,*

$$x > N \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon,$$

*y lo abreviaremos:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l.$$

*Análogamente, diremos que $f(x)$ tiende al límite $l$ cuando $x$ tiende a menos infinito, si para toda $\varepsilon > 0$ existe $N$ tal que para toda $x$,*

$$x < N \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon,$$

*y lo abreviaremos:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l.$$

Intuitivamente, lo que estas definiciones nos quieren decir es que nos podemos acercar a $l$ tanto como queramos simplemente recorriendonos lo suficiente a la derecha o a la izquierda, según sea el caso.

Hay otros tres casos posibles para límites al infinito:

1. Que la función oscile entre 2 o más valores, en cuyo caso diremos que la función *no converge* cuando $x$ tiende a infinito.

2. Que la función crezca (o decrezca) indefinidamente, a medida que $x$ crece, en cuyos casos diremos que $f$ *tiende a infinito (a menos infinito)* cuando $x$ tiende a infinito.

3. Que se dé una combinación de los dos casos anteriores, es decir, que se de una conducta tanto creciente como oscilante, por ejemplo la función $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

**Ejemplo 2.3.5** *Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Vamos a encontrar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \infty$. Si revisamos la gráfica de $f$ (ver Figura 2.6), podemos ver que a medida que $x$ crece, el valor de $f(x)$ es cada vez mas cercano a 0, por lo que éste será nuestro candidato natural para ser el limite al infinito de $f$.*

*Sea $\varepsilon > 0$. Para probar que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, debemos encontrar un número $N$ tal que para toda $x$,*

$$x > N \Rightarrow \mid \tfrac{1}{x} - 0 \mid = \mid \tfrac{1}{x} \mid < \varepsilon.$$

*Si tomamos $N = \frac{1}{\varepsilon}$, tendremos que $f(N) = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, por lo que cualquier numero mayor a $N$ satisfacerá nuestra condición. Esto prueba entonces que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.*

La prueba para el límite en $-\infty$ es análoga, y puede ser hecha como ejercicio. En general, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ para toda $n > 1$.

Otra observación importante es que el límite de una constante $k$ cuando $x \to \infty$ es la misma $k$. La razón se deduce directamente de la definición de límite al infinito.

Con los límites al infinito valen también los teoremas de límites para operar con ellos. La demostración de estas propiedades es similar a la de los límites.

En el siguiente ejemplo aprenderemos una técnica útil para calcular límites al infinito.

**Ejemplo 2.3.6** *Para encontrar $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+6}{4x^2-2}$, utilizaremos un truco que consiste en dividir tanto el numerador como el denominador entre la mayor potencia de $x$ en el denominador. En este caso, se trata de $x^2$. Así, tenemos que:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2x + 6}{4x^2 - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

De este modo, es fácil encontrar los límites al infinito de funciones racionales en las que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador.

Un caso interesante se da cuando estamos operando con dos o mas funciones que tiendan a infinito (o a menos infinito) cuando $x$ tiende a infinito. Aunque a veces es fácil ver que le pasa a la operación de funciones, no siempre es el caso. Un método útil que podemos utilizar para entender que está pasando, es tratar de hacer factorizaciones.

**Ejemplo 2.3.7** *Sea $f(x) = x - \sqrt{x}$. Encontrar $\lim_{x\to\infty} f(x)$.*

*En este caso, tanto $x$ como $\sqrt{x}$ tienden a infinito cuando $x \to \infty$, por lo que nuestro límite sería de la forma $\infty - \infty$, lo que no podemos analizar. Sin embargo, podemos factorizar $\sqrt{x}$ de ambos terminos de la resta, y obtener así que $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$, que es la multiplicación de dos funciones que tienden a infinito, por lo que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

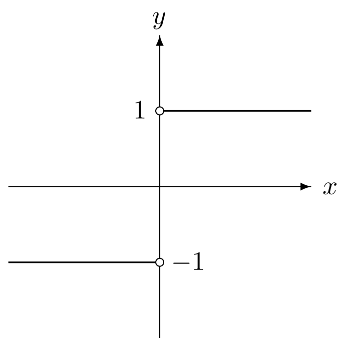


Figura 2.5: Límites laterales en 0 de $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

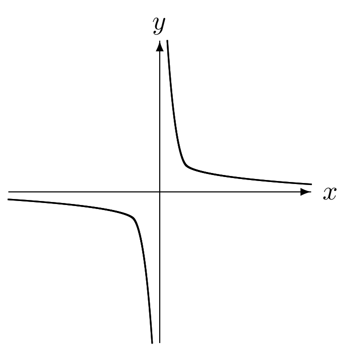


Figura 2.6: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

### 2.3.3. Ejercicios

**Ejercicio 2.3.8** *Encontrar los límites laterales (izquierdo y derecho, cuando los haya) cuando $x \to a$ de las siguientes funciones. Si no lo hay, da una razón de por qué esto sucede.*

1. $f(x) = (\frac{x}{x+1})(\frac{2x+5}{x^2+x})$, $a = -2$.
2. $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $a = 0$
3. $h(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, $a = 0$

**Ejercicio 2.3.9** *Encontrar los límites cuando $x \to \infty$ de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \frac{2-x}{3x-4}$
2. $g(x) = \frac{3+x-\sin x}{x+\cos x}$
3. $h(x) = \frac{9x^4-3x^3+2x-2}{-4x^4-6x}$

## 2.4. Clase 4

En esta clase veremos un límite notable, el de la función $f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ cuando $\theta \to 0$. Además de ser muy útil para resolver algunos límites mas complicados, la obtención de este límite involucra argumentos tanto de Geometría como de Cálculo, y es un bonito razonamiento.

### 2.4.1. El límite de $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

El siguiente teorema nos dice que, si medimos $\theta$ en radianes, $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ se parece mucho a 1 cerca del cero, o lo que es lo mismo, que $\operatorname{sen}\theta$ se parece mucho a $\theta$ cerca del cero. Este hecho nos permitirá en un futuro simplificar algunos límites en los que aparezcan funciones trigonométricas.

**Teorema 2.4.1** *Si $\theta$ se mide en radianes,*

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

*Prueba.* Haremos primero una observación geométrica, que nos servirá para comprender el problema y posteriormente atacarlo con las herramientas que tenemos. Esta observación es que, en el círculo unitario (de radio 1 y centro en el origen), si tomamos un ángulo positivo menor que $\frac{\pi}{2}$, tendremos que:

$$\text{Área } \triangle OAP < \text{Área del sector circular } OAP < \text{Área } \triangle OAT$$

como se puede ver en la Figura 2.7.

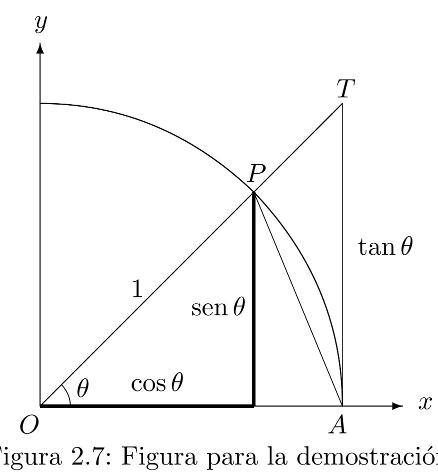

Figura 2.7: Figura para la demostración.

El área de un sector circular se calcula multiplicando el cuadrado del radio por la mitad del ángulo. Este resultado es válido únicamente si medimos el ángulo en radianes, de ahí la restricción. En nuestro caso, tenemos que:

$$\text{Área sector } OAP = \tfrac{1}{2}1^2\theta.$$

Esta desigualdad, si sustituimos los valores de las áreas mencionadas, se convierte en:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

Si dividimos esta desigualdad entre $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$, esta no se altera, pues $\operatorname{sen}\theta$ es positivo entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Entonces, nos queda:

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

. Si ahora tomamos el recíproco de cada término, la desigualdad se invierte, para obtener:

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta$$

Como $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$, por el teorema de compresión tenemos que:

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Finalmente tenemos que $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ es una función *par*, pues tanto $\operatorname{sen}\theta$ como $\theta$ son *impares*, lo que implica:

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

y por el Teorema 2.3.3, dado que los límites laterales coinciden, tenemos que:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

que es lo que queríamos. ■

### 2.4.2. Ejemplos

A continuación veremos algunos ejemplos de límites que se vuelven muy fáciles de calcular conociendo $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

**Ejemplo 2.4.2** *Vamos a calcular* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{9x}$.

*Este límite no está exactamente en la forma que quisieramos para aplicar el teorema 2.4.1, pues necesitamos que en el denominador haya un* $4x$*, y tenemos* $9x$*. Sin embargo, ajustar esto no es problema, pues podemos simplemente multiplicar nuestra fracción por* $\frac{4}{9}$ *sin alterar el límite. Así, obtenemos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{9x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{9}\operatorname{sen} 4x}{\frac{4}{9}9x} = \frac{4}{9}\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x}$$

*Finalmente, a este último límite le podemos aplicar el teorema 2.4.1, y obtener así que:*

$$\frac{4}{9}\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{4x} = \frac{4}{9}(1) = \frac{4}{9}.$$

**Ejemplo 2.4.3** *Probar que* $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$.

*Mediante la sustitución trigonométrica* $\cos h = 1 - 2\sin^2(\frac{h}{2})$*, tenemos que:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}$$

*y haciendo* $\theta = \frac{h}{2}$*, obtenemos que este limite es igual a:*

$$-\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}\theta = -(1)(0) = 0.$$

### 2.4.3. Ejercicios

**Ejercicio 2.4.4** *Encontrar los siguientes limites teniendo en cuenta el resultado probado en esta clase.*

1. $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4h}{4h}$
2. $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} 6h}{5h}$
3. $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} kh}{h}$, *k constante*
4. $\lim_{h\to 0}\frac{\tan 2h}{h}$

# Capítulo 3

# Continuidad

## 3.1. Clase 5

Entramos ahora a conocer las funciones continuas, que serán con las que tratemos en su mayoría a partir de ahora. El concepto intuitivo de continuidad es fácil de entender, aunque también será necesaria una formalización de este concepto.

### 3.1.1. Noción intuitiva

Una primera idea que nos podemos hacer de lo que significa que una función sea *continua* viene del hecho de poder dibujarla de un solo trazo, es decir, sin despegar el lápiz del papel. También podemos pensar en el significado común de la palabra *continuo*, que se refiere a un objeto sin rupturas, o que no tiene interrupciones. En general estas funciones sin saltos serán fáciles de analizar y se les podrá operar para obtener funciones que también sean continuas de multiples maneras.

### 3.1.2. Continuidad Puntual

Para formalizar la idea, lo primero será definir la continuidad de una función en un solo punto, y lo haremos de la siguiente manera:

**Definición 3.1.1** *Sea $f$ una función y $a$ un punto interior de su dominio. Diremos que $f$ es* continua *en $a$ sí y solo sí* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Un modo de entender esta definición es que, además de estar $f$ definida en $a$, queremos que $f(x)$ se parezca a $f(a)$ si $x$ está cerca de $a$, o lo que es lo mismo, no hay saltos o rupturas en la función alrededor de $a$.

Ya con esta definición, podemos pasar a la definición mas amplia de continuidad en un intervalo.

**Definición 3.1.2** *Diremos que una función $f$ es continua en un intervalo $(a, b)$ sí y solo sí es continua en $x$ para todo $x \in (a, b)$.*

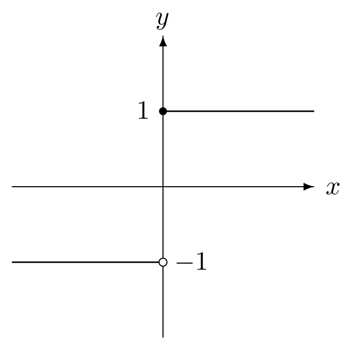


Figura 3.1: Gráfica de $f(x)$ para el ejemplo 3.1.4.

Al igual que con los límites, es posible definir la *continuidad por la izquierda* y la *continuidad por la derecha*, que nos servirá para decidir si una función es continua en los extremos de su dominio.

**Definición 3.1.3** *Sea $f$ una función y $a$ un punto extremo de un intervalo cerrado. Diremos que $f$ es* continua en un punto izquierdo extremo izquierdo *$a$ o* continua en un punto derecho *$a$ sí y solo sí* $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ *ó* $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ *respectivamente.*

### 3.1.3. Ejemplos

Ahora veremos algunos ejemplos de funciones continuas y funciones que no lo son, dando en cada caso razones de por que lo son o no y en que puntos.

**Ejemplo 3.1.4** *Sea $f$ la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} \textit{1} & \textit{si } x \geq 0 \\ \textit{-1} & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

*Si tomamos el intervalo (-1,1), es fácil ver que fuera de* $0$*, $f$ es continua, pues la función es constante localmente. Sin embargo, al analizar su posible continuidad en el* $0$*, vemos que* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *no existe, pues sus límites laterales difieren. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en* $(1, -1)$ *menos en* $0$*.*

**Ejemplo 3.1.5** *Sea $f(x) = 2x^2$. Ésta función es continua en cualquier intervalo que le demos. Esto se debe a que* $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ *para cualquier $a$, y lo podemos ver facilmente al graficar la función, pues nunca habrá saltos.*

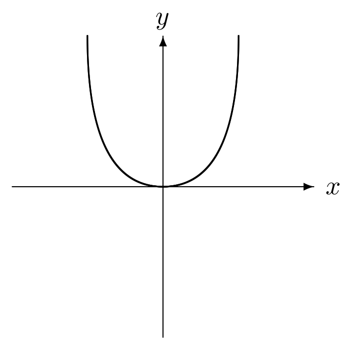


Figura 3.2: Gráfica de $f(x) = 2x^2$ para el ejemplo 3.1.5.

Un hecho importante de las funciones continuas es que al operarlas algebraicamente nos siguen produciendo funciones continuas, siempre y cuando ambas funciones estén definidas en el dominio. Esto lo abreviamos en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.6** *Sean $f$, $g$ funciones continuas en $a$. Entonces, también serán continuas:*

1. $-f$
2. $f + g$
3. $f \cdot g$
4. $\frac{f}{g}$

La prueba de estas propiedades es fácil, y la podemos hacer como ejercicio. A partir de este teorema surge el caso particular de los polinomios, que resultan ser continuos, pues cada una de sus componentes es continua.

**Teorema 3.1.7** *Sean $f$ y $g$ funciones tales que $f$ es continua en $a$ y $g$ es continua en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es continua en $a$.*

Este teorema nos permite componer funciones continuas, y tener la certeza de que la composición también lo sea. Intuitivamente, la prueba sería que si $f(x)$ está cerca de $f(a)$ cuando $x$ está cerca de $a$, y si $g(f(x))$ está cerca de $g(f(a))$ cuando $f(x)$ está cerca de $f(a)$, entonces $g(f(x))$ estará cerca de $g(f(a))$ cuando $x$ esté cerca de $a$.

Dada una función $f$, pueden existir puntos en los cuales la función no esté definida, pero el límite exista (esto es, en los que $\lim_{h\to 0^+} f(x) = \lim_{h\to 0^-} f(x) = a$. Estas funciones son *casi* continuas, y es posible obtener una función continua a partir de ellas, a la que llamaremos la *extensión continua* de $f$. En caso de que $f(a)$ exista, pero $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$, diremos que $f$ tiene una *discontinuidad removible* en $a$.

**Ejemplo 3.1.8** *Sea* $f(x) = \frac{x+x^3}{x}$. *Esta función la vimos en la Clase 1, y es continua en todo* $\mathbb{R}$ *menos en* $0$, *donde no está definida. A partir de esta* $f$, *podemos definir la función* $F$ *como sigue:*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

$F$ *será continua, y la llamaremos la extensión continua de* $f$.

### 3.1.4. Ejercicios

**Ejercicio 3.1.9** *¿En que puntos son continuas las siguientes funciones?*

1. $f(x)=\frac{3x+2}{4-x}$
2. $g(x) = \frac{\cos x}{x}$
3. $h(x) = \frac{x^2}{\cos x}$

**Ejercicio 3.1.10** *Para las siguientes funciones, encontrar los puntos de discontinuidad, y dar una extensión continua apropiada.*

1. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$
2. $g(x) = \frac{x^2-2x+3}{4x-2}$
3. $h(x) = \frac{2x+2}{3 \operatorname{sen} x}$

## 3.2. Clase 6

En esta clase trataremos con una propiedad de las funciones continuas, la del *valor intermedio*, que nos asegurará la existencia de ciertos valores que puede tomar una función, y que además acarreará un par de consecuencias interesantes acerca de las mismas.

### 3.2.1. El teorema del valor intermedio

**Teorema 3.2.1** *[Teorema del valor intermedio]Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$. Para toda $y_0$, si $f(a) < y_0 < f(b)$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y_0$.*

Esto quiere decir que si $f$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, entonces $f$ toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

En el caso particular de que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, tendremos que $f(c) = 0$ para algún $c \in [a,b]$. Geométricamente esto es muy fácil de ver, pues dada la continuidad de $f$, es imposible pasar de un lado al otro del eje $x$ sin tocarlo.

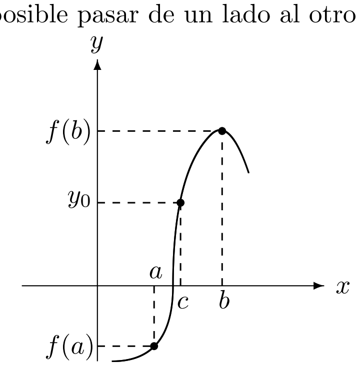


Figura 3.3: Interpretación geométrica del Teorema 3.2.1.

La demostración del teorema del valor intermedio (TVI) depende del *Axioma del supremo* para los números reales, que nos dice que todo conjunto de números reales acotado superiormente tendrá un *supremo*, es decir, una mínima cota superior. Como su nombre lo indica, ésta propiedad de los números reales no puede ser demostrada, sino que debe ser añadida a sus propiedades fundamentales a partir de las cuales se demuestra todo lo demás.

Una vez comprendido este axioma, la demostración del TVI es casi inmediata, tomando el conjunto de $x \in [a,b]$ tales que $f(x) < y_0$ siguiendose que $c$ será su supremo.

### 3.2.2. Ejemplos

Veremos ahora un par de ejemplos, los cuales nos ayudarán a aclarar la necesidad de que una función sea continua para que el TVI valga.

**Ejemplo 3.2.2** *Sea $f$ la función tal que $f(x) = x - 1$ si $x \in [1, 2]$ y $f(x) = x$ si $x \in (2, 3]$. Si se cumpliera el TVI, debería existir una $c \in [1, 3]$ tal que $f(c) = 1{,}5$, pero el brinco que da $f$ en el 2 impide que esto suceda. Aquí se ve el porqué de la necesidad de que $f$ sea continua.*

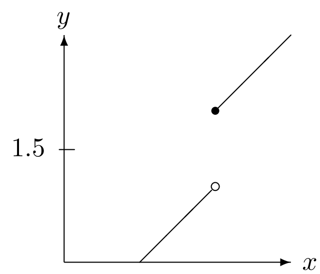


Figura 3.4: Gráfica de $f(x)$ para el ejemplo 3.2.2.

**Ejemplo 3.2.3** *Sea $f(x) = x^2 - 1$. Notemos que $f$ es continua, y por lo tanto aplica el TVI. Como $f(0) = -1 < 0$, y $f(2) = 3 > 0$, debe existir forzosamente un $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$. Efectivamente, si tomamos $c = 1$, veremos que $f(1) = 0$.*

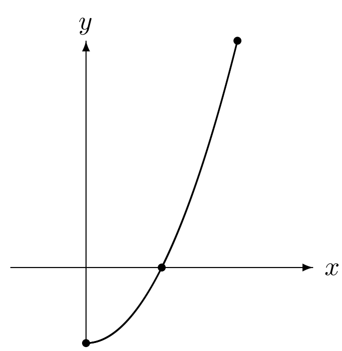


Figura 3.5: Gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ para el ejemplo 3.2.3.

Un uso práctico que tiene el TVI es la determinación de *ceros* o *raíces* de una función continua conociendo los intervalos en los que ésta cambia de signo.

### 3.2.3. Ejercicios

**Ejercicio 3.2.4** *Probar que la función* $f(x) = (x-a)(x-b)^2 + x$ *toma el valor* $\frac{a+b}{2}$ *en algún punto.*

**Ejercicio 3.2.5** *Un monje que subió la montaña saliendo a las 7 a.m., pasó la noche en la cima, y regresó al monasterio al día siguiente a las 7 a.m. también, siguiendo la misma ruta, pero en sentido contrario. En éste caso, lo que queremos probar es que existe un momento en el que, ambos días, el monje se encontraba en la misma posición. El planteamiento matemático del problema sería el siguiente: suponiendo que* $f$ *y* $g$ *son continuas en* $[a, b]$*, y que* $f(a) < g(a)$*, pero* $f(b) > g(b)$*, demostrar que* $f(x) = g(x)$ *para algún* $x \in [a, b]$*.*

**Ejercicio 3.2.6** *Demostrar que la ecuación* $\cos x = x$ *tiene al menos una solución.*

## 3.3. Problemas de límites y continuidad

El siguiente problema me pareció importante incluirlo, pues además de que asocia conceptos de Calculo con el mundo real, ayudará al estudiante a comprender la importancia del teorema del valor intermedio, y lo provee de una consecuencia no trivial de éste.

**Ejercicio 3.3.1** *Demostrar que, sobre el ecuador de la tierra, existe al menos un par de puntos antípodas (diametralmente opuestos) que tienen exactamente la misma temperatura.*

*Solución.* Veamos primero a la temperatura como una función $t(x)$ de la posición $x$ sobre el ecuador. Evidentemente, esta función será continua, puesto que si nos movemos mínimamente, la temperatura también variará mínimamente.

Llamemos $x_0$ al punto en el que estamos parados inicialmente, y $a(x_0)$ a su antípoda. En general llamaremos $a(x)$ a la antípoda del punto $x$. Como una pequeña observación, $x$ será a su vez antípoda de $a(x)$, esto es, $a(a(x)) = x$.

Ahora definamos una nueva función $T(x) = t(x) - t(a(x))$, la diferencia de temperaturas entre un punto y su antípoda. Esta función, al ser una resta de funciones continuas, es también continua.

Al evaluar $T$ en $x_0$, tenemos 3 posibilidades:

1. $T(x_0) = 0$. En este caso, habremos hallado ya nuestros puntos antípodas con la misma temperatura.

2. $T(x_0) > 0$. En este caso, $T(a(x_0)) < 0$, pues $T(a(x_0)) = -T(x_0)$. Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio, debe existir un punto $c \in (x_0, a(x_0))$ tal que $T(c) = 0$, esto es, que tenga una antípoda con la misma temperatura.

3. $T(x_0) < 0$. Este caso es análogo al anterior, pues ahora $T(a(x_0)) > 0$.

Por lo tanto, deben de existir siempre dos puntos antípodas sobre el ecuador tales que tengan la misma temperatura.

Este problema busca refrescar la definición formal de límite, al pedir encontrar una $\delta$ que funcione para una $\varepsilon$ dada.

**Ejercicio 3.3.2** *Se desea verter en un recipiente cilíndrico, de radio 5 cm, un litro de agua. Si la fórmula para obtener el volumen $V$ de un cilindro en función de su altura $h$ es:*

$$V = \pi r^2 h$$

*¿Con que precisión debemos medir $h$ para estar seguros de que la precisión es de 1 %?*

*Solución.* Lo primero que debemos hacer es comprender que quiere decir que midamos $1L$ con una precisión del 1 %. El 1 % de $1L$ es $0{,}01L$, y como $1L = 1000cm^3$, lo que queremos es que el error sea de mas / menos $10cm^3$.

Ahora, el volumen $V$ está dado por la fórmula $V = \pi 5^2 h = \pi 25h$. Necesitamos encontrar para que valor de $h$, $V = 1000$. Sustituyendo 1000 en la ecuación, obtenemos:

$$1000 = 25\pi h$$

de donde, al despejar $h$, obtenemos:

$$h = \frac{1000}{25\pi} = \frac{40}{\pi}$$

Si queremos que $V$ no pase de $1010cm^3$ y no sea menor a $990cm^3$, debemos del mismo modo igualar nuestra formula a estos valores y despejar $h$. Así, obtenemos:

$$1010 = 25\pi h_1, 990 = 25\pi h_2$$

De nuevo, despejando para encontrar los valores de $h_1$ y $h_2$, tenemos que:

$$h_1 = \frac{1010}{25\pi} = \frac{40{,}4}{\pi}, h_2 = \frac{990}{25\pi} = \frac{39{,}6}{\pi}$$

Por lo tanto, $h$ se debe medir con una precisión de mas / menos $\frac{4}{10\pi}$ para que $V$ se parezca a $1L$ con una precisión del 1 %.

Ahora veremos un problema que es interesante pues además de que hace uso de los límites al infinito, tiene el reto de convertir en ecuación un enunciado y lleva a un resultado inesperado.

**Ejercicio 3.3.3** *Se tiene una población de $n$ insectos de cierta especie. Si cada semana nacen 100 insectos (digamos que la reina pone 100 huevecillos), pero muere aproximadamente la mitad de los que había (por ejemplo los machos). ¿En que numero de insectos se estabilizará la población? ¿Dependerá de $n$ el número en el que se estabilice ésta?*

*Solución.* Vamos a tratar de poner el problema en forma de ecuación. Para empezar, tenemos $n$ insectos. Así, $P(0) = n$. En la semana 1 tendremos

$$P(1) = n + 100 - \frac{n}{2} = 100 + \frac{n}{2}$$

La segunda semana de nuevo nacerán 100 insectos, pero morirán la mitad de los preexistentes. Entonces:

$$P(2) = (100 + \frac{n}{2}) + 100 - \frac{(100 + \frac{n}{2})}{2} = 100 + \frac{(100 + \frac{n}{2})}{2}$$

que simplificando, nos da:

$$P(2) = 100 + \frac{100}{2} + \frac{n}{4}$$

si seguimos calculando, obtenemos los siguientes valores para $t = 3$, $t = 4$, etc.

- $P(3) = 100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{n}{8}$
- $P(4) = 100 + \frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \frac{100}{8} + \frac{n}{16}$

Ya con estos casos, es fácil generalizar una regla para cualquier $t$ entero, que es:

$$P(t) = 100 + \frac{100}{2} + \cdots + \frac{100}{2^t} + \frac{n}{2^{t+1}}.$$

Si ahora sacamos el límite al infinito para $P(t)$, obtendremos:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} \frac{100}{2^k} + \lim_{t\to\infty} \frac{n}{2^{t+1}}.$$

El primer limite se trata de la serie geométrica $\sum \frac{1}{2^n}$ multiplicada por 100, lo que nos da $2(100) = 200$. El segundo límite tiende a 0, pues $n$ es un número fijo y el denominador tiende a infinito.

Así, la población de insectos se estabilizará en 200, y no dependerá de su población inicial.

Otro modo de resolver el problema, sin utilizar el Cálculo y mediante el sólo razonamiento, es el siguiente:

Si en algún momento se estabiliza la población de insectos, esto querrá decir que están naciendo exactamente los mismo individuos que están muriendo. Por lo tanto, como muere la mitad de la población de la semana previa, $\frac{n}{2} = 100$, y despejando $n$, obtenemos que $n = 2(100) = 200$.

# Capítulo 4

# Derivadas

## 4.1. Clase 7

En esta clase se introduce el concepto de derivada, objetivo principal de este curso, y tema central en la rama del Cálculo. De nueva cuenta, se dará primero un acercamiento más intuitivo, para posteriormente formalizar la idea ya formada.

### 4.1.1. Preliminares

Para comprender la derivada, necesitaremos primero recordar un concepto de la Geometría Analítica, que es el de pendiente.

Dada la ecuación de una recta de la forma $y = mx + b$, decimos que la constante $m$ es la *pendiente* de la recta, y se refiere a la razón de cambio que hay entre $x$ y $y$. Esto es, si variamos el valor de $x$ en $\triangle\, x$, y variará $m \triangle x$. Dada la ecuación de una recta, es inmediato obtener el valor de su pendiente.

Si no conociéramos la ecuación de una recta, pero sí supiéramos dos puntos por los que ésta pasa, digamos $a = (x_1, y_1)$ y $b = (x_2, y_2)$, también es posible calcular la pendiente de la recta, y esto lo hacemos calculando el cociente: $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Éste modo de calcular las pendientes será el que nos convenga para introducir las derivadas.

### 4.1.2. La derivada

El objetivo a partir del cuál se desarrolló el Cálculo en sus principios, fue el de generalizar la obtención de una razón de cambio, tan fácil de obtener con las rectas, a funciones en general. Es posible aproximar la razón de cambio de una función $f$ en un punto $u = (x, f(x)$ mediante el cálculo de la pendiente de una *secante* a la función que pase por $u$ y por $v = (x+h, f(x+h)$. Dicha pendiente será:

$$\frac{\triangle\ y}{\triangle\ x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Evidentemente, entre más pequeño sea $h$, más precisa será nuestra aproximación a la razón de cambio puntual en $u$. Para obtener dicha razón puntual, afortunadamente contamos ya con la herramienta de los límites. Entonces, la razón de cambio puntual de una función en un punto $x_0$ será:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diremos que éste límite será la pendiente de la recta *tangente* a $f$ en $x_0$, o de modo abreviado, diremos que es la *derivada* de $f$ en $x_0$ con respecto a $x$.

Como notación, abreviaremos a la derivada de una función $f$ con respecto a $x$ como:

$$\tfrac{df}{dx}(x) \text{ o simplemente como } f'(x).$$

Es importante notar que no en todas las funciones, ni en todos los puntos de una función será posible calcular este límite. En los casos en los que exista dicho límite para una función $f$ en un punto $a$, diremos que $f$ es *derivable* en $a$.

### 4.1.3. Derivadas laterales

Una función $f$ es derivable en un intervalo abierto $(a, b)$, si es derivable en todo punto $x \in (a, b)$.

Diremos que $f$ es derivable en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es derivable en $(a, b)$ y además existen:

1. $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, al que llamaremos *derivada en $a$ por la derecha.*
2. $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$, al que llamaremos *derivada en $b$ por la izquierda.*

También notemos que cuando $f$ sea derivable en todo un intervalo $[a, b]$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nos define a una función en $[a, b]$. Diremos que $f'(x)$ es la *derivada* de $x$ en el intervalo $[a, b]$.

### 4.1.4. Ejemplos

**Ejemplo 4.1.1** *Sea $f(x) = x^2$. Calcular la derivada en $x = 1$.*

*Para calcular la derivada, necesitamos calcular el* $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h}$. *Tenemos entonces que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

*Por lo tanto, la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 1$ es 2.*

*En general, si tomamos cualquier $x$, obtendremos que* $\frac{dx^2}{dx} = 2x$.

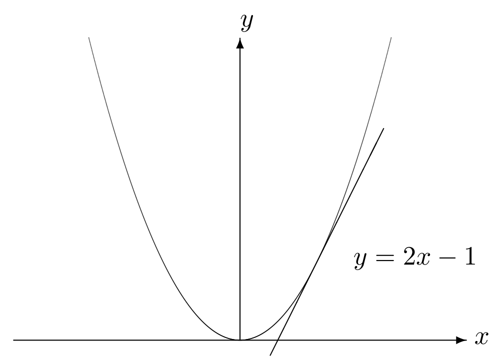


Figura 4.1: Gráfica de $f(x) = x^2$ y la derivada de $f$ en $x = 1$.

**Ejemplo 4.1.2** *La función $f(x) = |x|$ no es derivable en 0.*

*Para ver esto, tenemos que verificar que* $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ *no existe. Esto lo podemos hacer tratando de calcular el limite por la derecha y el limite por la izquierda y comparándolos. Veamos que:*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

*Por el otro lado,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1.$$

*Por lo tanto,* $\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$ *no existe.*

*Sin embargo, $|x|$ es derivable en cualquier otro punto $x$, siendo $|x|' = 1$ si $x$ es positivo, o $|x|' = -1$ si $x$ es negativo.*

En general, podemos decir que una función no será derivable en los puntos en los que se formen *picos* en su gráfica, pues en esos puntos será posible encontrar una infinidad de tangentes a la gráfica. Es decir, el que una función sea derivable en un punto implicará que la función sea *suave* en ese punto.

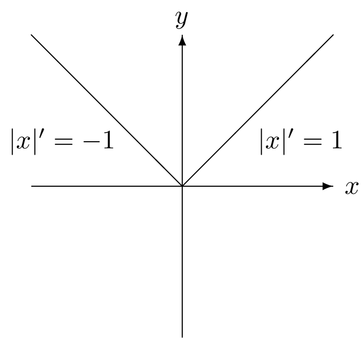


Figura 4.2: La función $|x|$ no es derivable en 0.

### 4.1.5. Ejercicios

**Ejercicio 4.1.3** *Encontrar la derivada de las siguientes funciones en un punto $a$ usando la definición.*

1. $f(x) = x^3$
2. $g(x) = 2x^2 + 2$
3. $h(x) = |x + 2|$. *¿En qué puntos no es derivable $h$?*

## 4.2. Clase 8

En esta clase aprenderemos algunas reglas para derivar funciones, particularmente el modo de derivar operaciones elementales entre funciones.

### 4.2.1. Reglas básicas para derivar.

**Teorema 4.2.1** *Sea $f(x) = k$ una función constante. Entonces $f'(x) = 0$ para todo $x$.*

*Prueba.* Supongamos que $f(x)$ es la función constante $k$. Esto es, en cada punto $x_0$ de su dominio, $f(x_0) = k$. De igual manera, $f(x_0 + h) = k$. Entonces,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

**Teorema 4.2.2** *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces dada $f(x) = x^n$ tendremos que*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

*Prueba.*
Sea $f(x) = x^n$. Entonces $f(x+h) = (x+h)^n$. De ahí:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}.$$

Este teorema también será válido para $n \in \mathbb{Z}^-$.

**Teorema 4.2.3** *Si $g$ es una función derivable de $x$, $k$ es una constante, y $f(x) = kg(x)$, entonces:*

$$f'(x) = kg'(x).$$

**Teorema 4.2.4** *[Derivada de una suma] Si $u$ y $v$ son funciones derivable de $x$, entonces $u + v$ será también derivable en todo punto donde tanto $u$ como $v$ sean derivables. En esos puntos:*

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Como observación, se puede extender este teorema a $n$ sumandos mediante inducción.

A partir del hecho de que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, se podría pensar que la derivada del producto será también el producto de las derivadas. Desafortunadamente no es el caso, ya que, por ejemplo, $x^2 = x \cdot x$, pero $(x^2)' = 2x \neq 1 = 1 \cdot 1 = x' \cdot x'$. A pesar de todo, la regla del producto no es tan difícil, como se verá a continuación.

**Teorema 4.2.5** *[Derivada de un producto] Si $u$ y $v$ son derivables en $x$, también lo será el producto $uv$, donde:*

$$(uv)'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

**Teorema 4.2.6** *[Derivada de un cociente] Si $u$ y $v$ son derivables en $x$, y si $v(x) \neq 0$, entonces $\frac{u}{v}$ es derivable, y:*

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Las pruebas de los últimos 4 teoremas son similares a las anteriores, y se recomiendan como ejercicio.

### 4.2.2. Ejemplos

**Ejemplo 4.2.7** *Sea $f(x) = 4x^2 + 2x - 3$. Encontrar $f'(x)$.*

*De acuerdo al teorema 4.2.4, la derivada de la suma es la suma de las derivadas. Entonces, $f'(x) = (4x^2)' + (2x)' - 3'$. Por los teoremas 4.2.2 y 4.2.3, $(4x^2)' = 8x$ y $(2x)' = 2$. Además, por el teorema 4.2.1, $-3' = 0$. Por lo tanto, $f'(x) = 8x + 2$.*

Como se puede ver, el uso de estas reglas de derivación nos facilita muchísimo el trabajo de derivar, comparandolo con la derivación por definición.

**Ejemplo 4.2.8** *Sea $g(x) = 9x^4(\frac{1}{x} + 2)$. Encontrar su derivada.*

*A partir del teorema 4.2.5, $g'(x) = 9x^4(frac1x + 2)' + (9x^4)'(frac1x + 2)$. Como $\frac{1}{x} = x^-1$, $(\frac{1}{x} + 2)' = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$. Además, $(9x^4)' = 36x^3$, por lo tanto,*

$$g'(x) = 9x^4(\frac{-1}{x^2} + 36x^3(\frac{1}{x} + 2) = -9x^2 + 36x^2 + 72x^3 = 72x^3 + 27x^2.$$

Queda de ejercicio demostrar que se obtiene el mismo resultado si primero desarrollamos el producto y luego lo derivamos.

**Ejemplo 4.2.9** *Encontrar la derivada de $h(x) = \frac{x+1}{1-x}$.*

*Por el teorema 4.2.6, sabemos que $h'(x) = \frac{(1-x)(x+1)' - (x+1)(1-x)'}{(1-x)^2}$. Además, podemos calcular $(x+1)' = 1$ y $(1-x)' = -1$. Entonces, $h'(x) = \frac{(1-x)-(-x-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$.*

### 4.2.3. Ejercicios

**Ejercicio 4.2.10** *Encontrar la derivada de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = 2x^7 - 4x^4 + 6$
2. $g(x) = \frac{4x+2}{x^3-1}$
3. $h(x) = \frac{3x^2-4}{2x^6} + \frac{1}{x} + 5x$

**Ejercicio 4.2.11** *Dada una función polinomial de grado $n$:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

*encontrar $P'(x)$.*

**Ejercicio 4.2.12** *Dada la fórmula para derivar el producto de dos funciones derivables $uv$:*

$$(uv)'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x).$$

*Encontrar una fórmula para derivar el producto de* tres *funciones derivables: $u$, $v$, $w$.*

## 4.3. Clase 9

En esta clase veremos las derivadas de algunas funciones trigonométricas, así como la *regla de la cadena*, herramienta muy poderosa para derivar funciones resultantes de una o varias composiciones de funciones.

### 4.3.1. Derivadas de funciones trigonométricas.

Empezaremos esta sección encontrando las derivadas de las funciones *seno* y *coseno*, a partir de las cuales podremos llegar a algunas de las otras funciones trigonométricas.

**Teorema 4.3.1** *La derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es $f'(x) = \cos(x)$.*

*Prueba.* Para esta prueba utilizaremos la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)$. Por la definición de derivada,

$$\operatorname{sen}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h},$$

y por la identidad mencionada, esto es igual a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h) - \operatorname{sen}(x)}{h}.$$

Factorizando y acomodando adecuadamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&= \operatorname{sen}(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.
\end{aligned}$$

Calculando ahora los limites mencionados, vemos que esto es igual a:

$$\operatorname{sen}'(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

que es lo que queríamos.

**Teorema 4.3.2** *La derivada de $f(x) = \cos(x)$ es $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.*

La prueba es similar a la de la derivada de $\operatorname{sen} x$, y se puede hacer como ejercicio. Como sugerencia, se puede usar la identidad: $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$.

Dadas estas dos derivadas, es posible calcular las derivadas de las demás funciones trigonométricas básicas: $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ y $\csc(x)$, pues estas se obtienen a partir del seno y el coseno.

**Teorema 4.3.3** *Las derivadas de las siguientes funciones son:*

- $\tan'(x) = \sec^2(x)$
- $\cot'(x) = -\csc^2(x)$
- $\sec'(x) = \sec(x)tan(x)$
- $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$.

### 4.3.2. Ejemplos

**Ejemplo 4.3.4** *Sea $f(x) = 3\,\text{sen}(x)\cos(x)$. Encontrar su derivada.*
*Por las reglas vistas en la clase anterior, sabemos que:*

$$f'(x) = 3\big(\,\text{sen}(x)\cos'(x) + \text{sen}'(x)\cos(x)\big).$$

*Ahora,* $\cos'(x) = -\,\text{sen}(x)$ *y* $\text{sen}'(x) = \cos(x)$. *Por lo tanto:*

$$f'(x) = 3\big(-\,\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)\big),$$

*resultado que por la identidad* $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, *podemos simplificar a:*

$$3\big(2\cos^2(x) - 1\big) = 6\cos^2(x) - 3.$$

El conocimiento de algunas identidades trigonométricas, así como el hacerse de una tabla más completa con estas identidades nos puede facilitar enormemente a resolver y / o simplificar algunas derivadas.

**Ejemplo 4.3.5** *Sea $g(x) = \frac{\cos(x)}{2x}$. Para calcular $g'(x)$, de nuevo usaremos las reglas de derivación vistas la clase pasada. Tenemos entonces que:*

$$g'(x) = \frac{2x(\cos'(x)) - \cos(x)(2x)'}{4x^2} = \frac{-2x\,\text{sen}(x) - 2\cos(x)}{4x^2}.$$

### 4.3.3. Ejercicios

**Ejercicio 4.3.6** *Demostrar que* $\cos'(x) = -\,\text{sen}(x)$.

**Ejercicio 4.3.7** *Encontrar las siguientes derivadas:*

1. $f(x) = \frac{3\,\text{sen}(x)}{\cos(x)}$
2. $g(x) = \cos^2(x)$
3. $h(x) = \tan(x) \cdot \text{sen}\, x$.

### 4.3.4. La regla de la cadena

Veremos ahora la que es quizás la regla mas importante para derivar: la *regla de la cadena*. Esta regla nos permite calcular la derivada de una composición de funciones. Así, funciones relativamente complejas como $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2 - 2)$ pueden ser descompuestas en funciones más sencillas, en este caso $g(u) = \operatorname{sen}(u)$ y $h(v) = 3v^2 - 2$ y utilizando la regla de la cadena encontrar $f'$ en función de $g'$ y $h'$.

**Teorema 4.3.8 (Regla de la cadena)** *Si $f(u)$ es derivable en el punto $u = g(x)$, y $g(x)$ es derivable en $x$, entonces la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es derivable en $x$, y*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Así,por la regla de la cadena,

$$(\operatorname{sen}(3x^2 - 2))' = \cos(3x^2 - 2) \cdot 6x.$$

Este ejemplo muestra el poder de esta herramienta, que nos ahorrará calcular límites complicados.

Además, evidentemente la utilidad de la regla de la cadena no se limita a la composición de *dos* funciones, pues podemos aplicar la regla repetidamente descomponiendo la función que queramos paso por paso.

### 4.3.5. Ejemplos

Algunas veces puede ser complicado aplicar la regla de la cadena, por lo que un buen modo de recordarla y aplicarla correctamente es la resolución de muchos ejercicios. Empezaremos mostrando ejemplos sencillos de la regla de la cadena, así como mostrando que, en ocasiones, la derivada se puede obtener de mas de un modo, ya sea mediante la regla de la cadena, o mediante las reglas de derivación que vimos previamente..

**Ejemplo 4.3.9** *Sea $f(x) = \cos^2(x)$. Encontrar su derivada.*

*Notemos que $f(x)$ es la composición de las funciones $g(u) = u^2$ y $h(x) = \cos(x)$. Entonces, por la regla de la cadena,*

$$f'(x) = g'(h(x) \cdot h'(x).$$

*Si derivamos $g(u)$, obtenemos que $g'(u) = 2u$, y análogamente podemos obtener que $h'(x) = -\operatorname{sen}(x)$. Sustituyendo, obtenemos:*

$$f'(x) = 2(h(x)) \cdot h'(x) = 2(\cos(x)) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) = -2\cos(x)\operatorname{sen}(x).$$

*Por lo tanto, $f'(x) = -2\cos(x)\operatorname{sen}(x)$.*

**Ejemplo 4.3.10** *Sea* $g(x) = (2x+1)^2$. *Encontrar* $g'(x)$.

*Para encontrar* $g'(x)$, *podemos hacerlo de dos maneras:*

1. *Elevar* $2x+1$ *al cuadrado y derivar el polinomio obtenido.*
2. *Aplicar la regla de la cadena, viendo a* $g(x)$ *como la composición de* $g_1(u) = u^2$ *y* $g_2(x) = 2x+1$. *Así,* $g(x) = g_1(g_2(x))$.

*Si lo hacemos de la primera manera, veremos que* $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$, *y derivando obtenemos* $g'(x) = 8x + 4$.

*Derivando del segundo modo, tenemos que* $g'(x) = g_1'(g_2(x)) \cdot g_2'(x)$. *Como* $g_1'(u) = 2u$ *y* $g_2'(x) = 2$, *tenemos que:*

$$g'(x) = 2(g_2(x)) \cdot g_2'(x) = 2(2x+1) \cdot 2 = 4(2x+1) = 8x+4.$$

*Notemos que ambos métodos nos llevaron al mismo resultado, lo que era de esperarse.*

**Ejemplo 4.3.11** *Sea* $F(x) = 4\,\mathrm{sen}^3(x^4+3)$. *Encontrar* $F'(x)$.

*Para empezar, notemos que* $F(x)$ *la podemos descomponer en 2 funciones:* $f(u) = 4u^3$ *y* $g(x) = \mathrm{sen}(x^4+3)$. *Por la regla de la cadena:*

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 12\,\mathrm{sen}^2(x^4+3) \cdot (\mathrm{sen}(x^4+3))'.$$

*Pero a su vez,* $g(x)$ *es la composición de* $s(v) = \mathrm{sen}(v)$ *y* $t(x) = x^4+3$, *así que para hallar* $(\mathrm{sen}(x^4+3))'$ *de nuevo podemos recurrir a la regla de la cadena:*

$$g'(x) = s'(t(x) \cdot t'(x) = \cos(x^4+3) \cdot (4x^3).$$

*Calculada* $g'(x)$, *tenemos ya nuestro resultado:*

$$F'(x) = 12\,\mathrm{sen}^2(x^4+3) \cdot \cos(x^4+3) \cdot (4x^3).$$

Así, podemos ver que no importa el número de funciones compuestas, con tal de que cada una sea derivable en el punto o intervalo adecuado, su composición será derivable y fácil de obtener.

**Ejemplo 4.3.12** *Sea* $f(x) = (x^3+4x-2)^5$. *Encontrar* $f'(x)$.

*Un modo de obtener* $f'(x)$ *sería elevar el polinomio* $h(x) = x^3+4x-2$ *a la quinta potencia y calcular la derivada de la suma resultante. Sin embargo, la labor se facilita enormemente con la regla de la cadena. Si vemos a* $f$ *como la composición de* $g(u) = u^5$ *y* $h(x) = x^3+4x-2$, *tenemos que:*

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 5(x^3+4x-2)^4 \cdot (3x^2+4).$$

### 4.3.6. Ejercicios

**Ejercicio 4.3.13** *Comprobar la regla de la cadena derivando* $f(x) = (x^3 - 2x + 2)^2$ *directamente, y comparándolo con la derivada resultante de elevar el polinomio al cuadrado primero y luego derivar con la regla de la suma.*

**Ejercicio 4.3.14** *Calcular, usando la regla de la cadena, la derivada de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos(2x))$
2. $g(x) = (\operatorname{sen}(x+2) - \cos(2x))^3$
3. $h(x) = (x^3 - 4x + \frac{1}{x})^4$

## 4.4. Clase 10

En esta clase definiremos los *valores extremos* de una función y veremos cómo encontrar estos valores utilizando la derivada como herramienta. Posteriormente conoceremos el *teorema del valor medio*, que nos garantizará la existencia de pendientes de una función continua que dependan únicamente de los valores de la función en los extremos de un intervalo.

### 4.4.1. Valores extremos de una función

**Definición 4.4.1 (Máximo y mínimo)** *Sea $f(x)$ una función con dominio $D$. Diremos que $f$ tiene su* máximo *en un punto $c$ sí $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$, y lo denotaremos* $\max f = f(c)$.

*Análogamente, diremos que $f$ tiene su* mínimo *en un punto $d$ sí $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in D$, y lo denotaremos* $\min f = f(d)$.

**Teorema 4.4.2** *Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $f$ alcanza tanto su máximo como su mínimo en $[a, b]$.*

**Definición 4.4.3 (Máximo local y mínimo local)** *Sea $f(x)$ una función con dominio $D$. Diremos que $f$ tiene su* máximo local *en un punto $c$ sí $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ en un intervalo abierto $(a, b)$ que contenga a $c$.*

*Análogamente, diremos que $f$ tiene su* mínimo local *en un punto $d$ sí $f(d) \leq f(x)$ para todo $x$ en un intervalo abierto $(a, b)$ que contenga a $c$.*

**Teorema 4.4.4 (Método de la primera derivada para hallar valores extremos)** *Si $f$ tiene un máximo o mínimo local en un punto interior $c$ de su dominio, y si $f'$ está definida en $c$, entonces $f'(c) = 0$.*

En general, a los puntos en los que la derivada de una función $f$ sea $f'(x) = 0$ les llamaremos *puntos críticos* de $f$.

Aslí, para encontrar el máximo y el mínimo de una función continua $f(x)$ en un intervalo dado $[a, b]$, seguiremos el siguiente algoritmo:

1. Derivar $f$.

2. Igualar $f'$ a 0 y encontrar los valores de $x$ que satisfagan la ecuación obtenida. Estos serán los puntos críticos de $f$ en $[a, b]$.

3. Evaluar $f$ en sus puntos críticos, así como en $a$ y en $b$ (sus extremos.

4. El mayor valor obtenido será el máximo de $f$ en $[a, b]$, y el menor valor obtenido será el mínimo de $f$ en $[a, b]$, y evidentemente se alcanzarán en los puntos en los que haya sido evaluada $f$ para obtener dichos valores.

Para saber si un punto crítico $x_0$ se trata localmente de un máximo, un mínimo, o un punto de inflexión (no es máximo ni mínimo, pero $f'(x) = 0$), podemos recurrir al criterio de la segunda derivada, que nos dice que si $f''(x_0) < 0$, entonces $x_0$ es un máximo, si $f''(x_0) > 0$, entonces $x_0$ es un mínimo.

Si $f''(x_0) = 0$, entonces $x_0$ puede ser tanto máximo, como mínimo o punto de inflexión. No demostraremos aquí este criterio, pero lo utilizaremos para determinar máximo y mínimos.

La obtención de máximos y mínimos mediante este método es muy útil para problemas de optimización.

### 4.4.2. Ejemplos

**Ejemplo 4.4.5** *Sea $f(x) = 3x^2 - 2$. Encontrar sus puntos críticos y ver si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.*

*Para encontrar el mínimo, debemos utilizar el algoritmo antes descrito. Así, el primer paso será derivar $f$:*

$$f'(x) = 6x$$

*Ahora, igualaremos $f'(x)$ a $0$ y encontraremos los valores de $x$ que satisfagan la ecuación:*

$$6x = 0$$

*Por lo que de esta ecuación, $x$ debe valer $0$. Además, por el criterio de la segunda derivada, como*

$$f''(0) = 6 > 0$$

*entonces $0$ es un mínimo de $f$.*

**Ejemplo 4.4.6** *Sea $g(x) = \cos(x) - 1$. Encontrar y catalogar sus puntos críticos.*

*Por el comportamiento de ésta función, que es el mismo que el de la función $\cos x$, sabemos ya que oscila y conocemos donde tendrá sus máximos y sus mínimos. Sin embargo, será interesante comprobar estos resultados mediante el algoritmo.*

*Al igual que en el primer ejemplo, el primer paso será derivar $g$:*

$$g'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

*Si igualamos a $0$, vemos que $-\operatorname{sen}(x) = 0$ si $x = k\pi$ con $k$ entero. Estos son los puntos críticos de $g$. Para saber si son máximos o mínimos, volvemos a derivar:*

$$g''(x) = -\cos(x)$$

*que en $x = k\pi$ será $1 > 0$ si $k$ es par ($g$ tiene un mínimo) y será $-1 < 0$ si $k$ es impar ($g$ tiene un máximo. Además, los máximos valdrán siempre $0$ y los mínimos siempre $-2$.*

**Ejemplo 4.4.7** *Sea* $h(x) = x^3 + 12x^2 + 48x$. *Encontrar y catalogarlos sus puntos críticos.*

*Empezamos derivando:*

$$h'(x) = 3x^2 + 24x + 48$$

*Si sacamos el factor común 3 y factorizamos, tenemos que:*

$$h'(x) = 3(x^2 + 8x + 16) = 3(x + 4)^2$$

*Igualando a cero, encontramos cuanto debe valer* $x$*:*

$$3(x + 4)^2 = 0$$

*sólo sí* $x + 4 = 0$. *Por lo tanto* $h$ *tiene su único punto crítico en* $x = -4$. *Por la segunda derivada, como*

$$h''(x) = 3(2(x + 4)) = 6(x + 4)$$

*y* $h''(4) = 0$, *no sabemos de que clase de punto se trata, pero analizando los valores de* $h'$ *un poco a la izquierda y un poco a la derecha de* $-4$, *podemos ver que* $h$ *tiene un punto de inflexión en* $x = -4$.

### 4.4.3. Ejercicios

**Ejercicio 4.4.8** *Encontrar y catalogar los puntos críticos de las siguientes funciones, así como hallar sus valores.*

1. $f(x) = 4x^3 - 2x$
2. $g(x) = 3\cos^2(x) + 2$
3. $h(x) = (x - 5)(2\tan(x))$

**Ejercicio 4.4.9** *Encontrar una función con puntos críticos en* $x = 3$, $x = 6$ *y* $x = 7$.

**Ejercicio 4.4.10** *Dar un ejemplo de una función sin puntos críticos, y otro de una función en que todos sus puntos sean críticos.*

### 4.4.4. El teorema del valor medio

Para llegar al Teorema del Valor Medio (TVM), debemos primero conocer el *Teorema de Rolle*, del cuál es una generalización el TVM.

**Teorema 4.4.11 (Teorema de Rolle)** *Sea $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, y derivable en $(a,b)$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

*Prueba.* Como $f$ es continua, alcanza su máximo y su mínimo en $[a,b]$. Estos valores sólo los podemos encontrar en los puntos donde $f'(x) = 0$ o en los extremos, es decir en $a$ y $b$.

Si suponemos que no existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$, entonces $f$ debe alcanzar su máximo y su mínimo en los extremos, pero $f(a) = f(b)$. Por lo tanto $\max f = \min f$, y por la definición de máximo y mínimo, esto implica que $f(x) = k$ para toda $x$ en $[a,b]$.

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ para toda $x$. ■

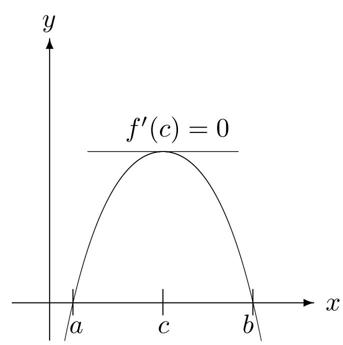


Figura 4.3: Interpretación geométrica del teorema de Rolle ($f(a) = f(b)$).

Ahora procederemos a ver el TVM, para cuya demostración requeriremos el teorema de Rolle.

**Teorema 4.4.12 (Teorema del valor medio)** *Sea $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en $(a,b)$. Entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demostrar el teorema, vale la pena comprender lo que nos está diciendo. El que exista un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ significa que la derivada en ese punto es la pendiente de la recta que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

*Prueba del TVM.* Primero encontraremos la ecuación de la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Esta es $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, pues $g(a) = f(a)$ y tiene la pendiente deseada, por lo que $g(b) = f(b)$.

Ahora, si tomamos $h(x) = f(x) - g(x)$, tenemos que esta función cumple con las hipótesis del teorema de Rolle, pues es continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$ pues tanto $f$ como $g$ lo son. Además, $h(a) = h(b) = 0$. Por lo tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$.

Si ahora derivamos $h$, tenemos que

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y si evaluamos $h'$ en $c$, obtenemos

$$h'(c) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

pero por Rolle, teníamos que $h'(c) = 0$, por lo que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y despejando $c$ obtenemos finalmente

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

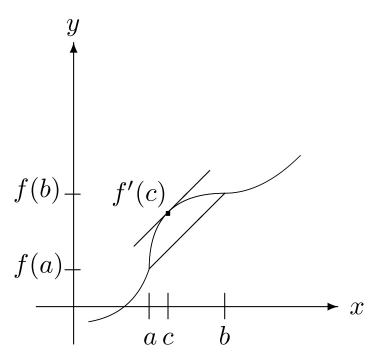


Figura 4.4: Interpretación geométrica del TVM.

**Ejercicio 4.4.13** *Mostrar, usando el TVM, que si $f'(x) = 0$ para toda $x$, entonces $f(x) = k$, con $k$ constante.*

## 4.5. Clase 11

En esta clase veremos un importante teorema acerca de la derivación de las funciones inversas. Además, aprenderemos el método de *derivación logarítmica*, que puede facilitar mucho el calculo de derivadas al hacer uso de las propiedades de los logaritmos, y finalmente aprenderemos a derivar *implícitamente*, es decir, a encontrar la derivada de curvas en las que $y$ no aparezca directamente como función de $x$ (como la ecuación de un círculo, por ejemplo).

### 4.5.1. Derivación de funciones inversas.

Para definir una función inversa, primero necesitamos definir aquellas funciones que serán invertibles, a las que llamaremos *inyectivas*.

**Definición 4.5.1** *Diremos que una función $f$ es* inyectiva *en un dominio $D$ si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in D$.*

En una función inyectiva, al provenir cada $f(x)$ de una sóla $x$, podemos pensar a una función inversa como aquella que regresa a cada $f(x)$ a su $x$ original. Esto lo formalizamos en la siguiente definición.

**Definición 4.5.2** *Sea $f$ una función inyectiva con dominio $D$ y rango $R$. Definimos la* función inversa *$f^{-1}$ como:*

$$f^{-1}(y_0) = x_0 \text{ si } f(x_0) = y_0.$$

*La función $f^{-1}$ tendrá como dominio a $R$ y como rango a $D$.*

En general, para obtener la función inversa $f^{-1}$ cuando tenemos $f(x)$, debemos igualar $f(x)$ a $y$ y despejar $x$ de la ecuación. Esto no siempre es sencillo, pero para bastantes funciones es posible. Posteriormente, cambiaremos las $y$ por $x$ y viceversa. En el fondo, al calcular funciones inversas lo que estamos haciendo es reflejar nuestra función original sobre la recta identidad, de modo tal que cuando componemos $f$ con $f^{-1}$ obtenemos:

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

**Ejemplo 4.5.3** *Sea $f(x) = 2x^3 - 4$. Encontrar $f^{-1}$.*
*Vamos a empezar igualando $f(x)$ a $y$:*

$$y = 2x^3 - 4$$

*Ahora, vamos a despejar a $x$, para que quede en función de $y$:*

$$2x^3 = y + 4 \Rightarrow x^3 = \frac{y+4}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{y+4}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

*Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \left(\frac{x+4}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.*

**Ejercicio 4.5.4** *Comprobar para la $f(x)$ del ejemplo anterior que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.*

Al ser $f^{-1}$ un reflejo sobre la identidad de $f$, no es de sorprender el siguiente resultado, que sin embargo será tremendamente útil:

**Teorema 4.5.5** *Sea $f$ con dominio $D$. Si $f'(x)$ existe y nunca es $0$ en $D$, entonces $f^{-1}$ es derivable en todo su dominio. Además, su valor en $y_0$ será el recíproco del valor de $f'$ en el punto $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Esto es:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

**Ejemplo 4.5.6** *Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Encontrar $f'(x)$.*

*Como $\sqrt{x} = (x^2)^{-1}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{(x^2)'}$. Pero debemos tener cuidado, pues para evaluar correctamente $f'$, debemos hacerlo en el punto que, bajo la función $x^2$, nos lleva a $x$, es decir, en el punto $\sqrt{x}$. Así,*

$$f'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x})}$$

Evidentemente también podríamos derivar directamente $f(x)$ tomandola como $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ y derivando con la regla de las potencias, pero este método resulta mas rápido, y generalizandolo nos permite conocer la derivada de una función si conocemos la derivada de su inversa.

### 4.5.2. Ejercicios

**Ejercicio 4.5.7** *Para las siguientes funciones, encontrar $f'(x)$ utilizando el teorema 4.5.5.*

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2$
2. $g(x) = 6x - x^2$
3. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

### 4.5.3. Derivación Logarítmica

Veremos ahora algunas propiedades útiles de la función *logaritmo natural*, la cual sin embargo no definiremos, puesto que esta definición requiere del conocimiento de las integrales. Para nuestros fines, la podemos definir como la función cuya derivada es $\frac{1}{x}$, esto es: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

La función logaritmo natural tiene ademas las siguentes propiedades importantes:

1. $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$
2. $\ln(\frac{a}{x}) = \ln(a) - \ln(x)$
3. $\ln(x^r) = r\ln(x)$, $r$ racional.

De estas propiedades se puede ver que el logaritmo convierte productos en sumas, cocientes en restas, y potencias racionales en multiplicación por el mismo racional. De este modo, a la hora de derivar podemos simplificar bastante los cálculos. De hecho, ni siquiera vamos a necesitar saber cuanto vale $\ln(x)$ para una $x$ dada, pues el logaritmo desaparece a la hora de derivar. Veamos un ejemplo de como derivar usando los logaritmos:

**Ejemplo 4.5.8** *Encontrar $f'(x)$ si*

$$f(x) = \frac{(2x^3-2)(x-5)^{\frac{2}{3}}}{x+2}.$$

*Podríamos encontrar la derivada utilizando las reglas que ya conocemos, pero el uso de los logaritmos nos ahorrará muchísimos cálculos. Veamos:*

*Si aplicamos la función logaritmo a ambos lados de la igualdad obtenemos:*

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{(2x^3-2)(x-5)^{\frac{2}{3}}}{x+2}\right)$$

*Pero por las propiedades de los logaritmos, podemos descomponer la parte derecha de la ecuación en:*

$$\ln(f(x)) = \ln\left((2x^3-2)(x-5)^{\frac{2}{3}}\right) - \ln(x+2),$$

*que a su vez se puede descomponer en:*

$$\ln(f(x)) = \ln(2x^3-2) + \frac{2}{3}\ln(x-5) - \ln(x+2).$$

*Si ahora derivamos, teniendo en cuenta que* $\ln'(x) = \frac{1}{x}$*, mediante la regla de la cadena, obtenemos que:*

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{2x^3-2} \cdot 6x + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{x+2},$$

*y despejando* $f'(x)$ *queda:*

$$f'(x) = f(x) \cdot \left( \frac{1}{2x^3-2} \cdot 6x + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{x+2} \right).$$

*Finalmente, al sustituir* $f(x)$ *llegamos a:*

$$f'(x) = \left( \frac{(2x^3-2)(x-5)^{\frac{2}{3}}}{x+2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2x^3-2} \cdot 6x + \frac{1}{x-5} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{x+2} \right).$$

### 4.5.4. Ejercicios

**Ejercicio 4.5.9** *Encontrar mediante derivación logarítmica la derivada de las siguientes funciones.*

1. $f(x) = (9x^6 - 3x)^2(3-x)^4$
2. $g(x) = \frac{4x^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}^2(x)}$
3. $h(x) = \frac{x^4(3x^2+6)^3}{2x^2-3x}$

### 4.5.5. Derivación Implícita

Algunas veces tenemos la ecuación de una curva en el plano que no se puede ver directamente como una función del tipo $y = f(x)$, por ejemplo $x^2 + y^2 = 16$, ya sea porque la curva pasa mas de una vez por algún valor de $x$, o porque no podemos despejar a $y$. En estos casos, se recurre a la *derivación implícita*, que consiste en derivar ambos lados de una ecuación respecto a $x$, tratando a $y$ como una función derivable de $x$, para después despejar $y'$. El método quedará mas claro con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.5.10** *Sea el círculo $x^2 + y^2 = 16$. Encontrar la pendiente del círculo en el punto $(3, \sqrt{7})$.*

*Primero, derivaremos de ambos lados de la ecuación respecto a $x$. Así, obtenemos la ecuación:*

$$2x + 2y \cdot y' = 0.$$

*Ahora despejamos $y'$ para obtener:*

$$y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

*Por lo tanto, la pendiente del círculo en el punto $(3, \sqrt{7})$ será $-\frac{3}{\sqrt{7}}$.*

Veamos ahora un ejemplo un poco más complicado.

**Ejemplo 4.5.11** *Encontrar $y'$ si $x^2 \operatorname{sen}(y) = 24y$.*

*De nuevo, primero derivaremos de ambos lados tomando a $y$ como función de $x$:*

$$x^2 \cos(y)y' + 2x \operatorname{sen}(y) = 24y'$$

*Ahora agrupamos todos los términos de la ecuación que tengan $y'$ de un lado de la igualdad, y los que no lo tengan del otro:*

$$x^2 \cos(y)y' - 24y' = -2x \operatorname{sen}(y)$$

*Factorizamos $y'$:*

$$y'(x^2 \cos(y) - 24) = -2x \operatorname{sen}(y)$$

*y finalmente, al despejarla obtenemos:*

$$y' = \frac{-2x \operatorname{sen}(y)}{x^2 \cos(y) - 24}$$

*Observemos que $y'$ viene dada como función no sólo de $x$, sino también de $y$.*

### 4.5.6. Ejercicios

**Ejercicio 4.5.12** *Para las siguientes curvas, encontrar la derivada implícita $y'$.*

1. $2y - 4xy = 3y^4$
2. $x = \cos(y)$
3. $4\,\mathrm{sen}(xy) - 2 = y$
4. $\frac{x-y}{x+y} = 9$

## 4.6. Problemas y aplicaciones de derivadas I

En este capítulo veremos problemas de optimización, para los que usaremos fuertemente la herramienta de la derivada para hallar máximos y mínimos que nos permitan encontrar soluciones optimas.

En el siguiente problema, un ejercicio de Física, hacemos uso de que la velocidad es la derivada de la posición de un objeto respecto al tiempo, y la aceleración es la derivada de la velocidad, también respecto al tiempo.

**Ejercicio 4.6.1** *Se avienta una piedra en dirección vertical hacia arriba. Si la piedra sale con una velocidad de* $30\frac{m}{s}$*, ¿cual será la altura máxima a la que llegue la piedra?. Si se hiciera el mismo experimento en la Luna, ¿a que altura llegaría?. La constante de la gravedad en la Tierra es* $g_T = 9{,}81\frac{m}{s^2}$*, y en la Luna es de* $g_L = 1{,}62\frac{m}{s^2}$*, y la ecuación para la posición del movimiento uniformemente acelerado es:* $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

*Solución.* Tenemos un problema de movimiento con aceleración constante, misma que está dada por las constantes $g_T$ y $g_L$. Como aventamos la piedra hacia arriba y la fuerza de gravedad la jala hacia abajo, será conveniente darle a la aceleración signo negativo. Así, obtenemos la ecuación:

$$y = 30t - 9{,}81t^2.$$

Para encontrar la altura máxima a la que llegará, debemos encontrar los puntos críticos de nuestra función. Entonces, el primer paso será derivar la función e igualarla a cero:

$$0 = 30 - 19{,}62t$$

de donde vemos que $y$ tiene sólo un punto crítico cuando $t = \frac{30}{19{,}62} = 1{,}53s$. Para encontrar la altura, basta con evaluar $y$ en $t = 1{,}53s$:

$$y_{\text{máx}} = 30(1{,}53) - 9{,}81(1{,}53)^2 = 45{,}9 - 22{,}95 = 22{,}95m.$$

Para ver que altura alcanzaría en la Luna, hay que sustituir $g_T$ por $g_L$. Entonces tendremos que:

$$y = 30t - 1{,}62t^2.$$

Derivando e igualando a cero, obtenemos:

$$0 = 30 - 3{,}24t,$$

de donde $t = \frac{30}{3{,}24} = 9{,}26s$. Sustituyendo este tiempo en la primera ecuación, finalmente obtenemos que:

$$y_{\text{máx}} = 30(9{,}26) - 1{,}62(85{,}74) = 277{,}8 - 138{,}9 = 138{,}9m.$$

Por lo tanto la piedra en la Luna alcanza una altura 6 veces mayor a la alcanzada en la Tierra saliendo con la misma velocidad.

El siguiente problema, como muchos otros de optimización, requiere de dos etapas para su solución: primero plantear la ecuación del problema, así como de cierta(s) *restricción(es)*, las cuales harán posible la solución del problema; la segunda etapa consiste normalmente en usar el método de la primera y segunda derivada para encontrar puntos críticos y determinar si se trata de valores máximos o mínimos.

**Ejercicio 4.6.2** *Se tienen 100 metros lineales de reja, y se desea construir un corral rectangular así como uno circular. ¿Como se deberá distribuir la reja para lograr la máxima área posible? ¿Y para obtener la mínima área posible?*

*Solución.* Primero, veamos como se calculan las áreas de un rectángulo y de un círculo conociendo sus perímetros:

- El área de un rectángulo se multiplica la base por la altura, y como sabemos del problema anterior, el rectángulo más eficiente en términos de área resulta ser el cuadrado, por lo que el área del corral rectangular será:

  $$A(R) = (\frac{1}{4}x)^2$$

  donde $x$ es el pedazo de reja destinado al corral rectangular.

- El área de un círculo $C$es $\pi r^2$, pero esto solo nos sirve si conocemos el radio. Si se conoce el perímetro del círculo, dado que $p(C) = 2\pi r$, despejando $r$ y sustituyendo en la fórmula del área, obtenemos:

  $$A(C) = \pi(\frac{p(C)}{2\pi})^2 = \frac{p(C)^2}{4\pi}$$

Además, sabemos que $p(C) = 100 - x$, pues es el restante de la reja luego de tomar lo del corral cuadrado.

Con estos datos, podemos dar ya una fórmula que nos diga cuál será el área total de nuestros corrales:

$$A = A(R) + A(C) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(100-x)^2}{4\pi} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{100^2}{4\pi} - \frac{200x}{4\pi} + \frac{x^2}{4\pi}$$

Ahora necesitamos encontrar los puntos críticos de nuestra función, por lo que la derivamos respecto a $x$.

$$A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{50}{\pi} + \frac{x}{2\pi}$$

Igualando a cero y sacando factor común, obtenemos la ecuación:

$$0 = \frac{\pi x - 50(8) + 4x}{8\pi} = \frac{x(\pi + 4) - 400}{8\pi}.$$

Ésta ecuación solo es cierta si el numerador es cero, de donde obtenemos la ecuación:

$$0 = x(\pi + 4) - 400$$

y despejando $x$ obtenemos finalmente:

$$x = \frac{400}{\pi + 4}$$

por lo que el único punto crítico de la función se encuentra ahí. Para saber si se trata de un máximo o un mínimo, usamos el criterio de la segunda derivada, por lo que tanto:

$$A''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi} > 0$$

Entonces se trata de un mínimo, por lo que tendremos que evaluar la función en los casos extremos, es decir, sólo cuadrado y sólo círculo, para encontrar el área máxima. Evaluando tenemos que:

- Sólo cuadrado: $A(100) = \left(\frac{100}{4}\right)^2 = 625m^2$
- Sólo círculo: $A(0) = \frac{100^2}{4\pi} = 795{,}77m^2$

Entonces, el área máxima se alcanzará cuando destinemos toda la reja al corral circular. El área mínima se alcanzará cuando se destinen $x = \frac{400}{\pi+4}$ metros al corral cuadrado, y el resto al corral circular, y ésta será de $350m^2$.

Este problema sirve para mostrar una relación entre el Cálculo y los negocios, pues muestra como optimizar una variable para maximizar la ganancia.

**Ejercicio 4.6.3** *Se tiene un negocio de venta de naranjas a domicilio, donde se cobra a* $\$50$ *por un costal de naranjas. Por cada costal adicional que compre el cliente, se hace un descuento de* $\$1$ *por costal. Si el costo de transporte será de* $\$10$*, y cada costal tiene un costo de* $\$12$*, ¿qué cantidad de costales vendidos por persona maximizará la ganancia?. ¿Hasta cuantos costales será rentable (ganancia positiva) vender?.*

*Solución.* Lo primero que debemos hacer es expresar la ganancia ($G$) en términos del costo ($C$) y el precio ($P$) del producto. En general, diremos que la ganancia será el precio del producto, esto es, que $G = P - C$.

En nuestro problema, el precio se expresa con la ecuación $P(n) = n(50-n)$, y el costo se expresa como: $C(n) = 10+12n$. Entonces, la formula de la ganancia quedará como:

$$G(n) = n(50 - n) - (10 + 12n).$$

Simplificando la fórmula, nos queda:

$$G(n) = -n^2 + 38n - 10$$

Ya que tenemos la fórmula de la ganancia, procede ahora derivarla para encontrar sus puntos críticos. Entonces:

$$G'(n) = -2n + 38$$

Si ahora la igualamos a cero, veremos que:

$$-2n + 38 = 0 \Leftrightarrow -2n = -38 \Leftrightarrow n = \frac{-38}{-2} = 19.$$

Así, hay un punto crítico en $n = 19$. Como $G''(n) = -2$ es siempre negativa, en particular lo será también en $n = 19$, por lo que se trata de un máximo. En ese punto, la ganancia será de:

$$G(19) = -(19)^2 + 38(19) - 10 = -361 + 722 - 10 = 351.$$

El negocio dejará de ser rentable cuando $G(n) = 0$. Dado que después de $n = 19$, $G'(n)$ es siempre negativa, $G(n)$ será decreciente a partir de ese punto. Por lo tanto, una vez que $G(n) = 0$, en adelante $G$ podrá solamente ser negativa. Para encontrar en que punto ya no conviene el negocio, entonces, igualamos $G(n)$ a cero:

$$-n^2 + 38n - 10 = 0$$

y resolvemos con la fórmula general para las ecuaciones de segundo grado:

$$n = \frac{-38 \pm \sqrt{38^2 - 4(-1)(-10)}}{-2}$$

Entonces,

$$n = \frac{-38 \pm \sqrt{1444 - 40}}{-2} = \frac{-38 \pm 37{,}47}{-2}$$

Por lo tanto, las soluciones son $n_1 = 0{,}265$ y $n_2 = 37{,}735$. Esto es, el negocio será rentable en la venta de 1 hasta 37 costales de naranjas. Por esa razón, el empresario debería poner esa restricción (máximo 37 costales) al interesado.

## 4.7. Problemas y aplicaciones de derivadas II

A continuación resolveremos paso a paso algunos problemas interesantes, tomados del libro *Cálculo de una variable* de James Stewart.

**Ejercicio 4.7.1** *Encontrar los puntos más alto y más bajo de la curva* $x^2 + xy + y^2 = 12$.

*Solución.* Por puntos mas alto y mas bajo, debemos entender los puntos en los que $y$ tiene su máximo y su mínimo, respectivamente. Para resolver este problema, haremos uso de la derivación implícita. Así, veremos a $y$ como una función de $x$ a tramos, aunque propiamente no lo sea. El primer paso será derivar con respecto a $x$ ambos lados de la ecuación. tenemos entonces que:

$$(2x + xy' + y + 2y \cdot y' = 0.$$

Despejando $y'$, obtenemos:

$$2x + y = y'(-x - 2y) \Rightarrow y' = \frac{2x + y}{-x - 2y}$$

Para encontrar ahora los máximos y mínimos de $y$, veremos para que valores de $x$, $y' = 0$:

$$\frac{2x + y}{-x - 2y} = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0, -x - 2y \neq 0.$$

Por la primera condición, tenemos que $y = -2x$. Además, por la segunda condición $(-x - 2y \neq 0)$, tenemos que $x, y \neq 0$.

Ahora podemos sustituir a la $y$ de esta condición en la ecuación de la curva, para encontrar los valores que deberán tener $x$ y $y$.

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4.$$

Así, los puntos máximo y mínimo se encontrarán en $x = -2$ y $x = 2$ respectivamente, y sus valores serán: $y_{max} = 4$, $y_{min} = -4$.

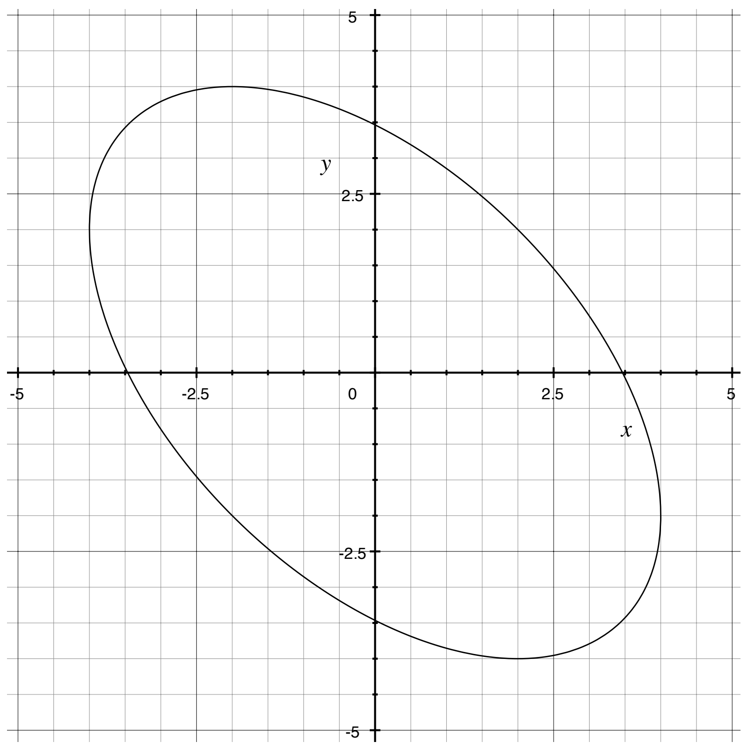


Figura 4.5: Gráfica de la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.

**Ejercicio 4.7.2** *Encontrar una función $f$ tal que $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x$, o probar que dicha función no puede existir.*

*Solución.* Suponiendo que $f$ existiera, dado que $f''$ existe para toda $x$, entonces $f'$ será derivable para toda $x$. Si aplicamos el teorema del valor medio a $f'$ en el intervalo $[-1, 0]$, deberá existir un $c$ tal que $f''(c) = \frac{f'(0)-f'(-1)}{0-(-1)}$. Pero conocemos los valores de $f'(-1)$ y $f'(0)$, por lo que de hecho sabremos que:

$$f''(c) = \frac{0 - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

Lo que resultaría en una contradicción, pues supusimos que $f''(x) > 0$ para toda $x$.

Por lo tanto, dicha función $f$ no puede existir.

**Ejercicio 4.7.3** *Encontrar el valor máximo absoluto de la función* $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$.

*Solución.* Comenzaremos con la observación de que $f$ es derivable casi en todo punto, salvo en $x = 0$ y $x = 2$, donde la derivada de $|x|$ y $|x-2|$ no existen, respectivamente. Para los demás valores de $x$, ambas funciones pueden ser tratadas como rectas con pendiente 1, si el valor de $x$ es positivo para el caso de $|x|$ o $x > 2$ para el caso de $|x-2|$, o como rectas con pendiente $-1$, si el valor de $x$ es negativo para el caso de $|x|$ o $x < 2$ para el caso de $|x-2|$.

En todos estos casos, la derivada de $f$ se podrá obtener fácilmente a través de las reglas básicas de derivación. Así, tendremos que:

$$f'(x) = \frac{\pm 1}{(1+|x|)^2} + \frac{\pm 1}{(1+|x-2|)^2}$$

Podemos observar que el numerador siempre vale 1 o -1 en ambos sumandos, en cada uno dependiendo el signo del valor de $x$, pero nunca se anula. De igual modo, los denominadores tampoco se anularan, pues son sumas de numeros positivos. Por lo tanto, al no haber puntos críticos en la función, los máximos se deben hallar en los picos, esto es, en los puntos en los que la derivada no está definida. Así, evaluando en $x = 0$ y $x = 2$, obtenemos que el máximo valdrá $y = 1\frac{1}{3}$ en ambos puntos.

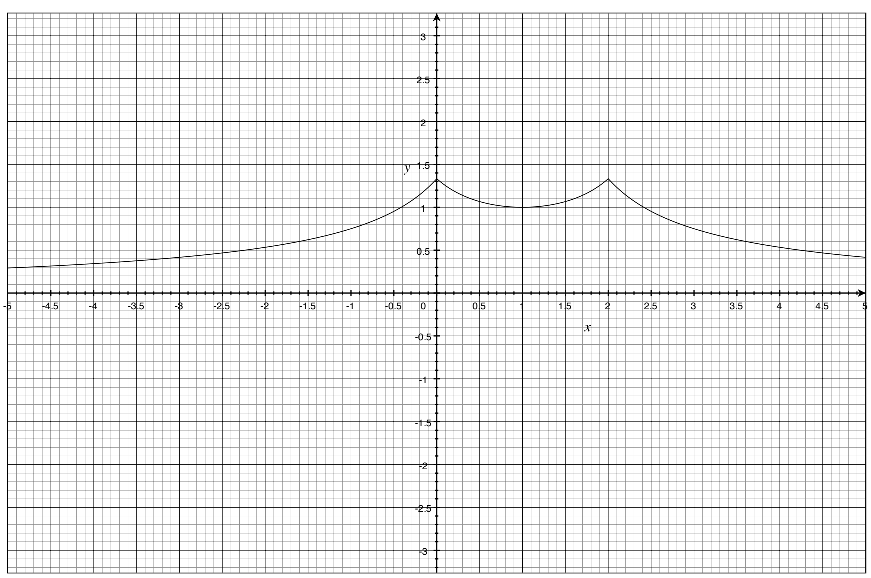


Figura 4.6: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}$.

**Ejercicio 4.7.4** *La linea $y = mx + b$ intersecta a la parábola $y = x^2$ en los puntos $A$ y $B$. Encontrar el punto $P$ en la parábola que maximice el área del triángulo $PAB$.*

*Solución.* Como la base del triángulo ($AB$) está fija, y el área de un triángulo solo depende de su base y de su altura, nos bastará con encontrar el punto $P$ que nos dé una altura del triángulo máxima.

Como la altura es perpendicular a la base del triángulo, el punto sobre la parábola más alejado de la recta estará sobre la tangente a $x^2$ que sea paralela a $y = mx + b$. Como la derivada de $x^2$ es $2x$, el punto en el cual la derivada será paralela a $y = mx + b$ será el punto $P = (\frac{m}{2}, \frac{m^2}{4})$.

En este punto, el triángulo $PAB$ tendrá área máxima.

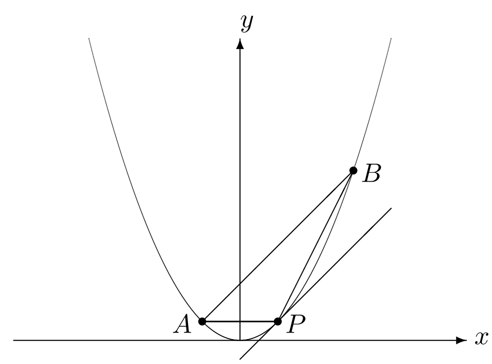


Figura 4.7: Gráfica de $f(x) = x^2$ y el triangulo a maximizar, para el ejercicio 4.7.4.

**Ejercicio 4.7.5** *Se tiene una pieza de papel cuadrada con vértices $ABCD$. Se dibuja un cuarto de círculo de $B$ a $D$, con centro en $A$. Se dobla la pieza de papel a través de $EF$, con $E$ en $AB$ y $F$ en $AD$, de manera que $A$ quede sobre el cuarto de círculo. Determinar las áreas máxima y mínima que el triángulo $AEF$ puede tener.*

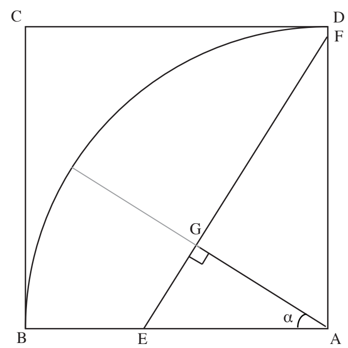


Figura 4.8: Diagrama para el ejercicio 4.7.5.

*Solución.* Se recomienda antes que nada conseguir una hoja de papel cuadrada, trazar el cuarto de círculo indicado y hacer algunos experimentos. Ellos deben bastar, con la ayuda del profesor, para llegar a las siguientes observaciones:

1. Supongamos que el papel mide 1 unidad de lado. Con un poco de geometría, es fácil ver que, al forzar a $A$ a quedar sobre el cuarto de círculo, el triángulo $AEF$, si tomamos a $EF$ como su base, tendrá altura constante $\frac{1}{2}$, independientemente de $E$ y $F$. Éste hecho será importante para algunas relaciones que haremos mas adelante.

2. El triángulo $AEF$ estará determinado por el ángulo $\alpha$ que tenga $AA'$ con respecto a $AB$, donde $A'$ es el punto donde cae $A$ después del doblez.

3. Ni $|E|$ ni $|F|$ pueden ser mayores que 1, lo que implica ciertas restricciones respecto a los valores del ángulo $\alpha$.

Para empezar a trabajar, llamemos $G$ al punto medio de $AA'$. Entonces, el triángulo $AEF$ estará compuesto por el triángulo $AEG$ y el triángulo $AGF$.

Del triángulo $AEG$ conocemos la magnitud de un lado, el $AG$, que vale $\frac{1}{2}$. Sabemos también que el ángulo $EGA$ es recto. Además, conociendo el ángulo $EAG$, al que llamamos $\alpha$, como el ángulo restante, $AEG$ valdrá $\frac{\pi}{2} - \alpha$, por la ley de los senos sabemos que:

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{|E|} = \frac{1}{|E|} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\frac{1}{2}}$$

Despejando $|E|$, tenemos que:

$$|E| = \frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$

Análogamente, podemos obtener el valor de $|F|$ en términos de $\alpha$, ahora usando el triángulo $AGF$. Así, obtenemos:

$$|F| = \frac{1}{2\operatorname{sen}(\alpha)}$$

Por la tercera observación que hicimos, los valores de $\alpha$ no pueden ser menores que $\frac{\pi}{6}$, pues entonces $|F|$ sería mayor que 1, ni mayores que $\frac{\pi}{3}$, pues en ese caso $|E|$ sería mayor que 1.

Como el área del $\triangle AEF$ es $\frac{|E||F|}{2}$, la función a optimizar será:

$$f(x) = \frac{1}{8\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen}(x)}$$

con $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$.

Para optimizarla, derivamos $f$:

$$f'(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{8\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen}^2(x)}$$

Veamos ahora que $f'(x) = 0$ si y sólo si

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen}(x) = \cos(x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$$

y que $f'(x)$ no está definida para $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$, lo que no nos molesta, pues ninguno de estos puntos está en el dominio de $f$.

Ahora,

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x)\operatorname{sen}(x) = \cos(x)\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(x)} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

Pero esto solo pasa cuando $\frac{\pi}{2} - x = x$, es decir, cuando $x = \frac{\pi}{4}$, pues $\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(x)}$ es creciente y $\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\operatorname{sen}(x)}$ es decreciente, por lo que solo se pueden cruzar una vez.

Así, $f$ tiene su único punto crítico en nuestro dominio en $x = \frac{\pi}{4}$. En dicho punto,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{4}.$$

Para ver si se trata de un máximo o un mínimo, podríamos derivar $f'$ y usar el criterio de la segunda derivada, pero evaluando en los extremos de nuestro dominio, esto nos quedará claro.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})} \approx \frac{1}{3{,}4641} \approx 0{,}2887$$

Por simetría de la función, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ valdrá lo mismo.

Como éste número es mayor que $\frac{1}{4}$, nuestro punto crítico se trata de un mínimo.

Por lo tanto, el triángulo de menor área se dará cuando tomemos $x = \frac{\pi}{4}$, es decir, cuando $|E| = |F| = \frac{1}{2}$, y ésta valdrá $\frac{1}{4}$.

El triángulo de mayor área lo encontraremos en los extremos, cuando $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{\pi}{3}$, esto es, cuando $|E| = \frac{1}{2}$ y $|F| = 1$ o viceversa, y ésta valdrá aproximadamente 0,2887.

# Bibliografía

[1] George B. Thomas, Jr. *Cálculo. Una variable.* Undécima Edición. Pearson Educación, S.A. de C.V., 2006.

[2] Michael Spivak *Calculus* Segunda edición. Editorial Reverté, S.A., 1999.

[3] James Stewart *Cálculo de una variable* Cuarta edicion. Thomson International, 2002.

[4] Richard Courant y Herbert Robbins *¿Qué son las matemáticas?* Fondo de Cultura Económica, 2002.