UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS

ESTUDIO DEL PLANIMETRO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO TOPÓGRAFO E HIDRÓGRAFO

PRESENTA:

VERAZA, EDUARDO

MÉXICO, D. F. 1985

GRAN PAPELERIA Y FABRICA DE LIBROS EN BLANCO

H. LIONS. (PADRE)

GRAN FABRICA DE LIBROS EN BLANCO.

AL LIBRO GRANDE

EFECTOS DE ESCRITORIO Y PARA ESCUELAS.

CALLE DE TACUBA Nº. 6.

MEXICO.

CALLE DE TACUBA Nº. 6.

Nº 427 Manos Precio

Para tener un libro igual indicar el número de orden.

Ag. 97 Nº. 103.

Estudio del Planímetro.

Tesis presentada al Jurado calificador, en el examen de Ingeniero Topógrafo é Hidrógrafo por el alumno

Edud. Veraza

Sres Sinodales:

El aparato de que me voy á ocupar de preferencia en el siguiente estudio, lo podremos agrupar entre aquellos que tienen por objeto el suprimir la ejecucion de ciertos cálculos, ó bien facilitarlos. Se puede decir, desde luego, que todos ellos no pueden llenar el objeto como sería de desearse; pues basta fijarse en que llevan impreso el caracter peculiar de los métodos gráficos para inferir, que por mas exactas que fueran sus teorias y en el supuesto que se construyeran libres de errores, no son sus resultados comparables á los suministrados por el cálculo; pero no obstante veamos hasta que grado realizan su objeto.

La escala ó regla logarítmica, así como el círculo logarítmico, que no es sino la misma escala aunque circular, tienen la teoria exacta; pero se comprende que no es suficiente para admitirlos, hasta ver que grado de exactitud proporcionan en los resultados que con ellos obtengamos.

La escala, segun nos informa el Sr. Salmoiraghi hecha con una unidad de $125^{m.m}$ que es con la que se construye mas comunmente, da resultados con errores de $\frac{1}{300}$ despues de bastante práctica; el círculo que por tener mayor unidad forzosamente da mas aproximacion no llega á $\frac{1}{1000}$. De modo que me parece mucho mejor no hacer uso de esos instrumentos, aun suponiendo que sea mas facil calcular con su ayuda. Se puede decir que son unas malas tablas de logaritmos con lo que basta para desecharlos.

Sin embargo existe en el mismo grupo de aparatos uno que por la aplicacion que se hace de él, así como en realidad por ser el que presenta bastante interés su estudio, voy á procurar en cuanto me sea posible dar una idea clara de él.

Los planímetros, como lo indica su nombre, son instrumentos que tienen por objeto dar la superficie de las figuras planas. Se pueden referir las diversas clases de ellos á dos tipos: al ortogonal debido al Profesor Gonella, y al polar inventado por Amsler. El primero de estos instrumentos se compone: De una base B, fig (1) en la cual descansa un carrito C, por medio de las tres ruedas r, r', r'' que pueden rodar en las guias y, y', y'' que son paralelas; sobre el carrito se apoya, por medio de un eje perpendicular al

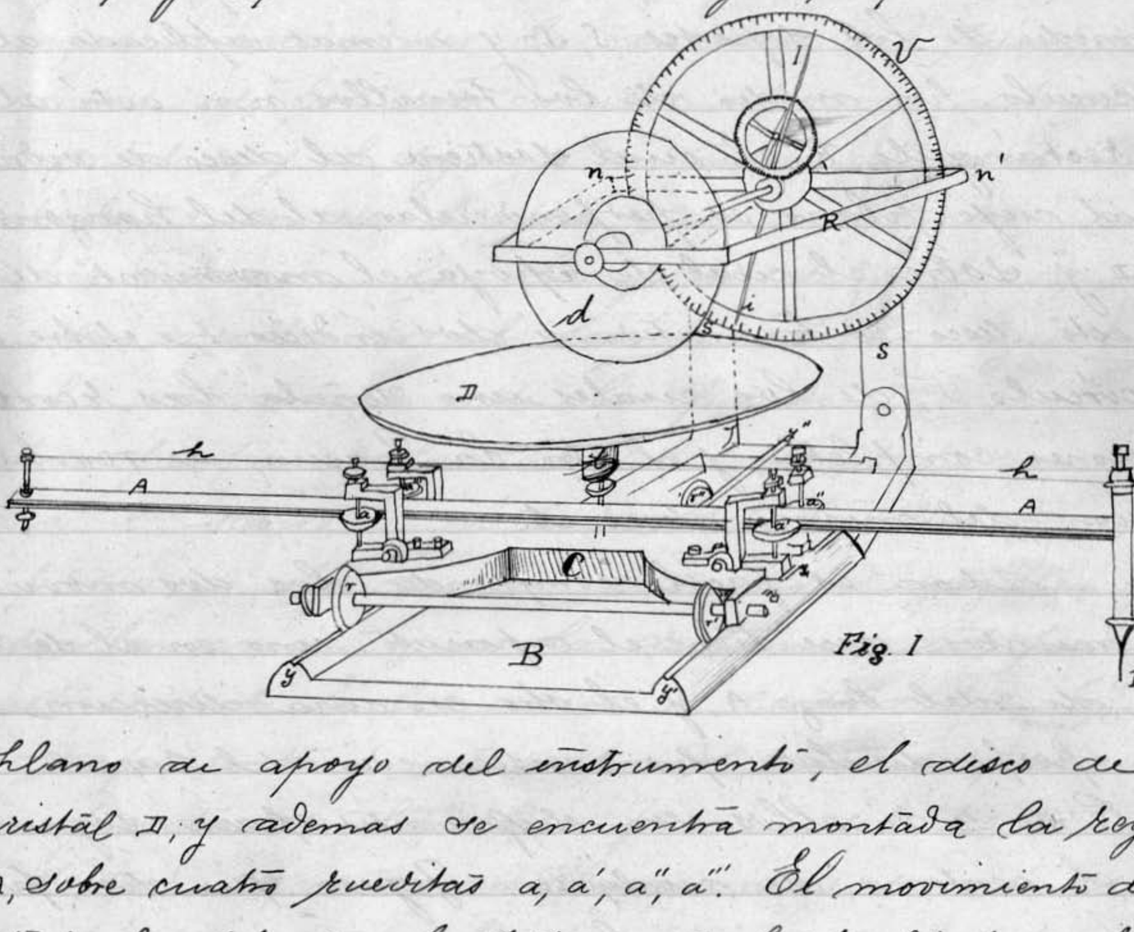


Fig. 1

plano de apoyo del instrumento, el disco de cristal D, y ademas se encuentra montada la regla A, sobre cuatro rueditas a, a', a'', a'''. El movimiento de esta regla debe ser perfectamente perpendicular al del carro C. Asegurada al brazo A va la punta P. Un hilo delgado de plata ó cobre h, está tendido entre las extremidades de dicha regla, y se enrrolla en el tambor t, colocado en el perno del disco D. Con lo que se logra que el movimiento de la regla haga tambien girar al disco D. Fijado á la base B está el circulo V, sostenido por intermedio de los soportes S, S, y ademas aplicado al círculo por medio de los tornillos n, n' está el restángulo R, el cual sostiene al disco de vidrio d, cuyo plano es perpendicular al del horizontal D, y sobre el cual se apoya; el movimiento de esté disco es trasmitido á dos índices I, i, sobre el círculo V; de los cuales uno señala las revoluciones completas, y el otro la fraccion de revolucion del mismo disco d.

Ahora es facil comprender los dos movimientos que tiene el aparato: uno en el sentido del brazo A, y el otro en una direccion perpendicular por intermedio del carrito. Como se vé ellos son suficientes para seguir el contorno de cualquiera figura que sea, por irregular que se la suponga.

La idea que se ha tratado realice el aparato de que me ocupo es: que toda superficie se puede siempre expresar por el producto de dos factores, y queda por ver de que manera se ha llevado acabo.

Al efecto al mover el carrito sobre las guias y, se tiene uno de esos factores, que aqui viene á ser la distancia del punto de contacto de los dos círculos al centro del horizontal D, y el segundo se tendrá al correr la regla A en su propria guia; ó expresado de otra manera: la longitud del hilo que se enrolla en el tambor t, es igual al movimiento de la punta P, en el sentido perpendicular al del carro; supongamos sea x, siendo r el radio del tambor, $\frac{x}{r}$ expresará el camino, en unidad angular; y si llamamos y, á la distancia del punto de contacto de los discos al centro del D, $\frac{xy}{r}$, representará el espacio recorrido por un punto de la circunferencia del d; cantidad que, como claramente se vé, es directamente proporcional al producto xy, que es lo que marca el índice en el círculo V.

En la fig.(2) OX; OY, representan los dos ejes instrumentales del planímetro, M es el punto en que se supone la punta P. Por lo dicho anteriormente, el índice señalará en el círculo V, cierto arco de magnitud proporcional al producto de las coordenadas rectangulares del punto M; ON=x, NM=y

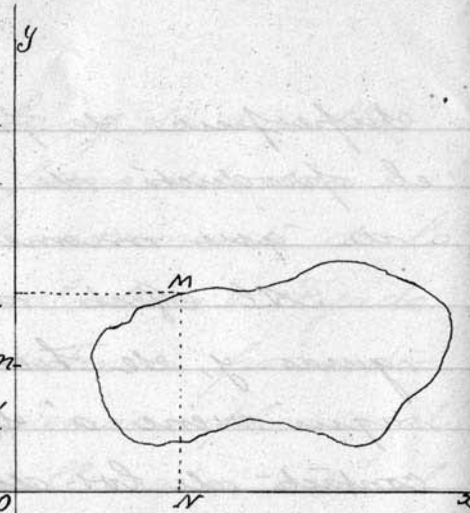


Fig. II.

Se observará que al recorrer con dicha punta P, el contorno de una figura plana cualquiera y llegar al punto de partida, en el círculo V quedará indicado un arco, precisamente de valor proporcional á la suma algebraica de una serie de productos análogos, que no viene á ser, en último análisis, sino la suma de pequeños rectángulos en que se puede suponer descompuesta toda superficie plana.

Las condiciones á que tiene que satisfacer son: perpendicularidad de los movimientos que tiene el aparato; ser plano el disco horizontal D; que gire perfectamente el disco d, Las que no es facil que rectifique el ingeniero; sino que es obra del constructor; pero siendo el principal objeto saber que grado de aproximacion se alcanzaría al ejecutar una medida; es á lo que debe tender de preferencia la prueba que de él se haga. Esta se aconseja hacerla trazando un rectangulo con mucho cuidado, y comparando el resultado que se encuentre con el del cálculo directo, y que aun es mejor usar una placa rectangular de metal cuyo contorno sea facil de seguir con la punta del planimetro, y si la diferencia hallada está con la obtenida en el cálculo en la relación de $\frac{1}{100}$, se considere como bueno. Me parece que la prueba hecha de esa manera no puede ser buena, en atención á que en el supuesto de que se obtuviera un resultado satisfactorio, no querría decir sino que estaba bien construido; pero no indicaría el error que obtendriamos al medir una superficie con dicho aparato, por no ser idénticas las condiciones en que se usa en la practica; precisamente al hacerla de ese modo, se elimina la principal causa de error del instrumento, cual es la de seguir una línea que presente inclinación respecto á los sentidos en que tiene movimiento el aparato.

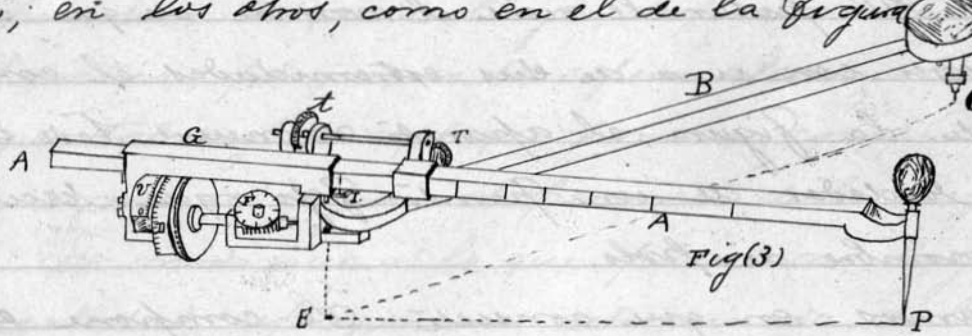
Me parece que la manera mas conveniente es hacerla con figuras regulares que sea facil calcular su superficie, procurando ponerse en condiciones semejantes á aquellas en que se deba emplear, y de esa manera saber que se puede esperar de él, despues de un escrupuloso examen, pues el mismo Sr. Salmoiraghi dice: es sorprendente la precision á que se llega, despues de alguna práctica, porque no se espera alcanzarla, lo que tal vez se explique por una compensacion de errores al seguir el perímetro de la figura.

De modo que á lo que parece no hay en realidad aproximacion determinada, de lo que se deduce que no debe usarse un instrumento en el que no se puede tener confianza en los resultados que se obtengan. Por otra parte en el caso en que sería de positiva utilidad su empleo, como cuando el lindero es una línea curva, es precisamente el caso de mayor dificultad al usarlo.

Hay otro modelo de planímetro ortogonal inventado por Oppikofer en 1827 y reformado por el constructor Ernst, del que podríamos decir que es una modificación del anterior por no distinguirse, sino en que en vez de círculo horizontal está un cono de eje inclinado de tal manera que la generatriz superior sea horizontal, y además en que la parte superior del aparato descanza sobre la regla. Como se comprende es un inconveniente. Pasemos al segundo tipo.

Al polar le viene el nombre de que al recorrer con una de sus extremidades el contorno de la figura, el aparato se mueve todo él, al rededor de un punto fijo que recibe el nombre de polo.

Veamos en que consiste: Se compone esencialmente de dos brazos A y B unidos por un eje de rotación, indicado en la figura con la letra E, por medio del cual se puede hacer la rotación de uno de ellos sobre el otro. El brazo A lleva la punta ó índice P, que es con la que se debe recorrer el perímetro de la figura; el otro brazo B, lleva la punta C, que es la que hace de polo. El índice que indica el area es la linea cero del vernier V, el cual señala arcos de revolución del tambor ó rueda D, que va fijado al brazo A. Las vueltas completas del tambor se indican en el contador F, al cual se trasmiten por intermedio de un tornillo sin fin. En realidad el aparato contador, así como el tambor, no están fijos á la regla sino en el modelo mas sencillo de planímetro; en los otros, como en el de la figura



Fig(3)

van fijados á una corredera G, en la que se desliza el brazo A, sirviendo este movimiento para cambiar á voluntad la distancia entre la punta P, y el perno E. Es una modificación accesoria que se emplea para variar cierta constante del instrumento y de consiguiente el valor de la unidad superficial correspondiente á las partes del tambor. Un indice I sirve para marcar en el brazo A, graduado en milímetros la distancia antes dicha.

El instrumento tiene que tocar al plano en tres puntos: en el polo C; extremidad de la punta P, y un punto cualquiera de la circunferencia del disco D.

Al mover la extremidad P, el tambor gira sobre si mismo por la adherencia que presenta con el plano del dibujo, y en su circunferencia se desarrollan arcos que son funcion del movimiento de P. Como se nota hay duplicidad de movimientos; uno al rededor del polo C, y otro al del eje E; si nada mas fuera el primero la rueda D, simplemente se deslizaría sobre el dibujo sin girar, y con el segundo describiría arcos de círculo de amplitud angular igual á la descrita por P, y de longitud proporcional á la longitud de la misma.

De manera que para cualquier movimiento de P, el del tambor resulta compuesto de los dos ya dichos, y de ellos solo el último es el que queda registrado en partes del círculo y del vernier.

Lo comun es que el tambor esté dividido en cien partes, y que el vernier aprecie decimas partes; la rueda F puede indicar hasta diez revoluciones.

Veamos ahora la manera de usarlo; pero antes hay que asegurarse del estado que guarde el instrumento. El círculo D, debe moverse facilmente sin tocar el vernier; el fierro E ha de girar con facilidad; se debe tener cuidado de que la corredera G, y el índice P, esten en su estado normal; el limbo exterior de la ruedita es muy delicado y no debe tener la menor mancha de moho, ni ha de estar lesionado.

Para encontrar la superficie de una figura; se coloca el brazo A, en la corredera G; de modo que el índice I coincida exactamente con una de las divisiones de A, segun sea la escala en que esté construido el plano. El tornillo de presion T, y el de aproximacion t, sirven para ese objeto. Se pone despues el aparato sobre el dibujo de manera que se apoyen el círculo D, el índice P, y la punta C, cuidando que la última lo perfore, debiendo permanecer fija durante la operacion; en seguida la punta P, se lleva á un punto cualquiera del contorno, y se hace la primera lectura; se señala el punto de partida y se sigue lo mas exactamente posible el perímetro de la figura, en el sentido del movimiento de las manecillas de un reloj, hasta llegar al mismo punto de que se partio; haciendo una segunda lectura. Para obtener de estas dos lecturas la medida del area, hay que distinguir dos casos.

1.º El punto C, está fuera del contorno de la figura. En este caso, se resta la primera lectura de la segunda y la diferencia se multiplica por el número indicado por I en el brazo A; y el producto representará el area buscada.

2.º Cuando el polo está en el interior de la figura por ser esta demasiado grande. Entonces, antes de hacer la sustraccion de lecturas se añade á la segunda el número que se encuentra sobre el brazo A, arriba de la division que se ha marcado.

Los planímetros de brazos fijos suministran resultados expresados en cierta especie de unidad, como milímetros cuadrados; pero fácil es trasformarla en la que sea necesaria arreglado á la escala en que se haya hecho el plano; pues sabemos que una magnitud a tomada en el plano, representa ar en el terreno, y que por consiguiente la superficie s, del plano será sr^2 en el terreno; siendo r la escala en que se ejecutó la construcción.

En el del planímetro hay, segun se ha visto, que considerar dos casos: aquel en que el polo es externo á la figura de la cual se desea conocer el área, y aquel en que es interno. La Fig. (IV) corresponde al primero, y la Fig. (V) al segundo, en las que se representa por P la punta con la cual se ha de recorrer el perímetro de la figura; E la proyeccion horizontal del eje del brazo B; D el tambor y C el polo.

En el caso del polo externo, el punto E describe un arco de circunferencia, y en el de la Fig. (V) una circunferencia completa.

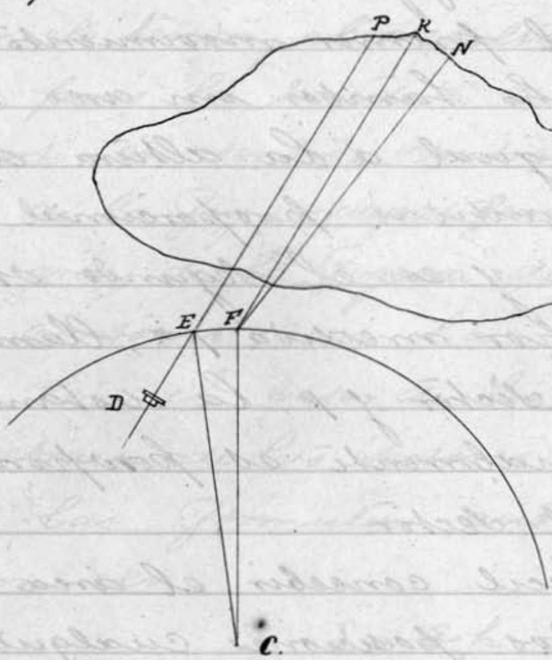


Fig. IV.

Supongamos que la posicion EP, sea la inicial del brazo A, siendo FN otra sumamente próxima á la primera; es facil darse cuenta que bastan dos movimientos para llegar á ella, el primero paralelamente á si mismo para venir á colocarse en FK, y el segundo de rotacion al rededor de F, hasta llegar á FN. De esta manera queda el area del pequeño elemento EFNP, constituido por la suma algebraica del paralelógramo EK, y el sector KFN. Como al brazo A está fijo el tambor D, sucederá que en el primer movimiento se desarrolla en dicho tambor un arco de una longitud igual á la altura del paralelógramo; cantidad proporcional al area del mismo, y en el segundo otro arco que tendrá por medida $\rho\alpha$, llamando α, el ángulo del sector y ρ, la distancia ED; cantidad que igualmente es proporcional al area del sector.

Ahora es facil concebir el area comprendida entre dos posiciones cualquiera y á distancia finita del brazo A, como la suma de una serie de elementos análogos á los indicados. De manera que el area quedará expresada por:

$$S = \Sigma p + \Sigma s,$$

llamando p, uno de los paralelógramos

y por s, uno cualquiera de los sectores. Si ademas designamos por a, el arco desarrollado en el tambor, por h, la altura de uno de los paralelógramos.

$$a = \Sigma h + \Sigma p\alpha.$$

Al volver al punto de partida; en el contador se tendrá el resultado de una diferencia; pues la ruedita D, tiene que girar en parte en sentido contrario al anterior; (en el caso de la fig. IV) cuya diferencia es proporcional al area de la figura de la que se recorrio el contorno con la punta P.

En el caso de la fig(IV) la suma algebraica de los sectores se reduce a cero; y las formulas anteriores se convertirán en:

$$S = \Sigma p$$

$$a = \Sigma h$$

Multiplicando los dos miembros de la segunda por r; (longitud del brazo A) y notando que $rh = p$; la primera se convertira en:

$$S = r.a$$

Lo que quiere decir; que en el caso en que el polo es externo, el area es igual á la de un rectángulo de base fija é igual á r, y de una altura igual al arco desarrollado en la circunferencia del tambor contador D.

Cuando es interno, en esté caso hay que

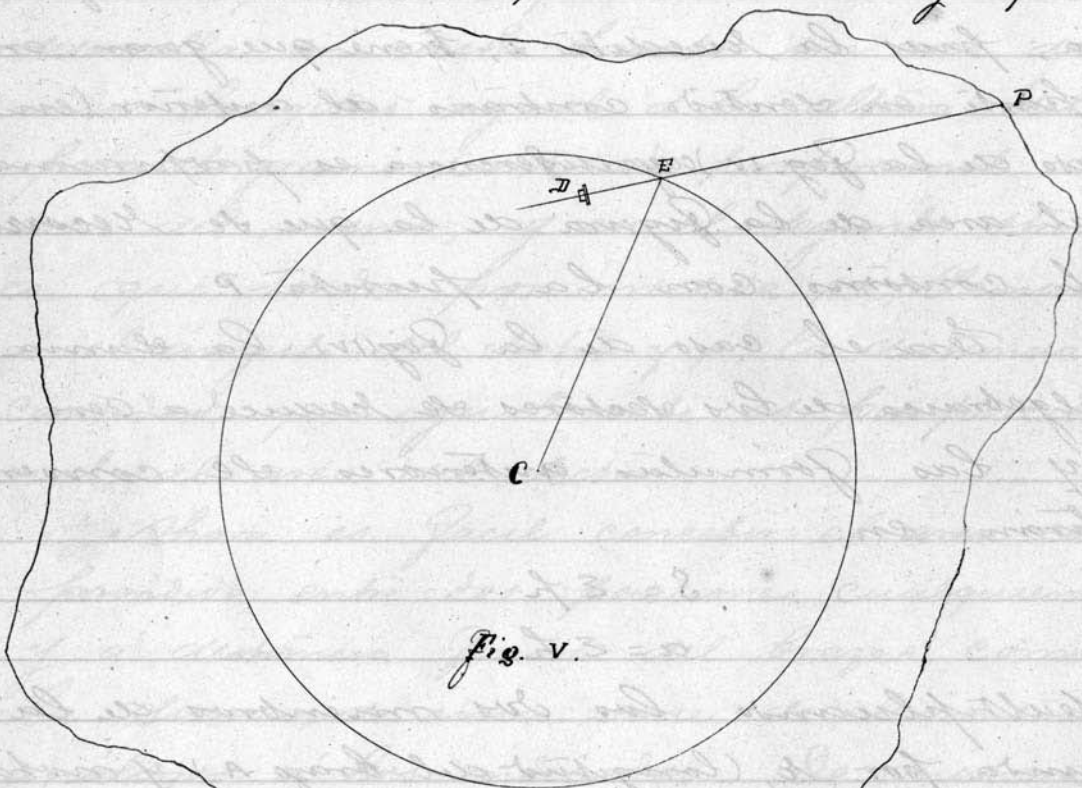


Fig. V.

sumarle á la expresion:

$$S = \Sigma p + \Sigma s$$

la superficie del círculo que E describe al rededor del polo C, con un radio R; y se tendrán las expresiones:

$$S = \pi R^2 + \Sigma p + \Sigma s$$

$$a = \Sigma h + \Sigma \rho\alpha$$

Pero observando que $\Sigma s = \pi r^2$; $\Sigma \rho\alpha = 2\pi\rho$; se tendrá que:

$$S = \pi R^2 + \Sigma p + \pi r^2$$

$$a = \Sigma h + 2\pi\rho$$

Multiplicando la segunda por r, y despejando de ella $\Sigma hr = \Sigma p$; queda

$$\Sigma p = ra - 2\pi\rho r$$

que sustituida en la primera:

$$S = \pi(R^2 + r^2 - 2\rho r) + ra$$

Haciendo el primer término igual con K; se tiene:

$$S = K + ra$$

Esto es estando el polo en el interior; la superficie se obtiene de la suma de dos términos, uno constante (K) y el otro representándonos un rectángulo. En los planímetros, como ya se dijo en que está graduado el brazo A; se puede cambiar segun convenga la constante.

Siendo util, ya que se conoce la relacion pone la extremidad P del planímetro en cualquiera de las divisiones de la regla, de la que previamente se fija el cero, y en seguida en el sentido directo se traza el círculo que tendrá por radio el número de centímetros en que se haya colocado la punta P. Un índice que está marcado en la extremidad de la regla sirve para señalar, mediante su coincidencia con una señal hecha sobre el dibujo con lápiz, el principio y fin de cada revolución.

Hay que decir de esta manera de hacer la prueba una cosa análoga á lo ya indicado para el ortogonal; aunque hay que tener presente que no es comparable la dificultad de seguir una línea con el uno que con el otro; es evidentemente muy superior este último en todos conceptos.

Para determinar ó comprobar experimentalmente el valor de las constantes, no hay sino comparar los resultados obtenidos con el aparato con los del cálculo; por ejemplo supongamos que deseamos la constante que se emplea en el caso que se use el polo en el interior, Se medirán círculos de gran diámetro poniendo el polo en el centro del mismo. Si S es la superficie de este círculo, N la lectura expresada en la misma unidad que S, la diferencia S-N será la constante.

Cuando el polo es externo, siendo la superficie proporcional á la longitud del brazo A; si se encuentra un error constante y proporcional al area, se tendrá que alargar ó acortar el brazo A, lo primero cuando resulte mayor que la verdadera, y lo segundo en el caso contrario. Tratándose de un planímetro de brazo fijo convendrá calcular un coeficiente de correccion.

Con el nombre de planímetro se designa tambien un aparato del geómetra francés M. Beuviere, el cual no es en realidad otra cosa que un sumador de lineas, como se verá por la siguiente descripcion.

Está constituido por la placa de cristal P, fig. (VI) de $0^{m}.2$ de largo, por $0^{m}.1$ de ancho, dividida de centímetro en centímetro, fijada al armazon A; quien puede deslizarse de una extremidad á la otra de la placa M; tambien va fija á dicho armazón, la rueda contadora D, la que para girar tiene que

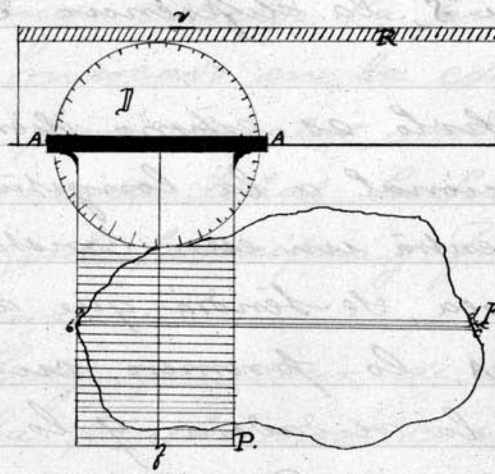


Fig. VI.

apoyarse en la regla R, que está provista de unas visagras v, v'.

Segun se vé por su construccion, da la superficie de una figura, suponiéndola formada de una serie de pequeños trapecios; la altura constante é igual á un centímetro; y la suma de las medianas que se obtiene ~~obtiene~~ por medio de la rueda D, es lo necesario.

Restá solamente decir la esactitud que se puede alcanzar, y de consiguiente en que casos es conveniente usar un planímetro, y en cuales es de todo punto forzoso desechar su empleo.

La aproximacion que da guarda cierta relacion con la superficie de la figura, y con la escala en que se haya construido. Pues muy bien puede suceder que la estension sea bastante grande, pero que la escala sea muy chica; en este caso habrá motivo para que dé un resultado inadmisible, así se comprende reflexionando que el tambor no puede acusar las pequeñas estensiones del plano, que por razon de la escala representan una considerable en el terreno. Consideremos una estension determinada de terreno, y que la unidad del planímetro sea un milímetro cuadrado, y veamos lo que nos representa en las diversas escalas, con lo que tendremos la manera de influir la aproximacion del instrumento según la escala de construccion.

En la de $\frac{1}{200}$	representa	0.04^{m^2}
" " " $\frac{1}{500}$	"	0.25
" " " $\frac{1}{1000}$	"	1.00

En la de $\frac{1}{5000}$ representa 25.00^{m^2}
" " " $\frac{1}{10000}$ " 100.00
" " " $\frac{1}{20000}$ " 400.00
" " " $\frac{1}{50000}$ " 2500.00

Con lo que se vé mas palpable la conveniencia de que sea escala grande para el uso del planímetro, sobre todo cuando sea relativamente chica la estension superficial.

Respecto al error medio que suministra, usándolo del modo comun, en la medida de una superficie, es, segun numerosas experiencias con él ejecutadas de $\frac{1}{600}$. Pero no obstante hay que tener tambien en cuenta el procedimiento que se aplique en el levantamiento, pues se notará que debe ir de acuerdo tanto lo de campo como lo de gabinete. Habiendo, por ejemplo, triangulacion es claro que no se empleará un planímetro para determinar el area; pero en detalles, en que se fuera aplicar cualquier procedimiento grafico, si considero el que se dé preferencia al planúmetro; porque su aproximación media de 600, como se notá es el doble de la que se obtendría con otro de los procedimientos gráficos bien conocidos.

Sólo me queda suplicarles á los Sres. Jurados dispensen lo mucho de malo que tiene esté trabajo; pues hay que tener en cuenta la escasa inteligencia del que lo emprendió, y además ser el primero.