UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INDUCCIÓN A LA TEORÍA DE RIESGO Y SUS APLICACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

G U S T A V O A B R A H A M M A R T Í N E Z L E Ó
N

DIRECTOR DE TESIS

ACT. JOSÉ FABIÁN GONZÁLEZ FLORES

2007

Agradecimientos

Antes que todo quiero darte las gracias **DIOS**, pues en ningún momento me dejaste solo, a pesar de haber caído muchas veces, tu me levantaste y me diste la fuerza suficiente para poder seguir hasta el día de hoy.

Gracias a **Mis Padres y Hermanas**, pues a pesar del a distancia, siempre estuvieron cerca, alentándome a seguir adelante y dándome muestras de amor…..LOS AMO!!

Abuelita, ves? Siempre si se pudo, soy el primero que sale de tu casa…..

Fabián, gracias, pues después de muchos gritos y sombrerazos lo logramos y créeme que en mucho, esto es gracias a ti….

A la **UNAM**, pues todo lo que soy se lo debo a ella, pues fue parte fundamental en mi formación académica y me dio todas las herramientas necesarias para que pueda irme abriendo campo en esta vida tan difícil de vivir….

AGAPE!!!

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la matemática actuarial es el de la elaboración de sistemas que garanticen la solvencia de las entidades aseguradoras pero que a le vez sean lo mas justos posibles, la suficiencia de las primas debidamente calculadas e invertidas es una hipótesis de la Teoría de Riesgo.

El objetivo de este estudio, es desarrollar un manual didáctico para los alumnos de la facultad de ciencias, que cursan o cursarán la materia de Teoría del Riesgo.

Actualmente la Teoría del Riesgo dado que su incursión al plan de estudios de la Licenciatura en Actuaría es nuevo, se han escrito pocos textos en español de este tema, lo que repercute en la falta de material bibliográfico de consulta, pues el poco material del que se dispone es en otros idiomas lo que hace mas difícil la comprensión y desarrollo de la materia.

En el capítulo I se da una introducción a la Teoría de Riesgo, clasificación del riesgo, problemas que estudia la Teoría del Riesgo, y un recordatorio de varios conceptos de probabilidad y estadística: Espacios de Probabilidad, Probabilidad Condicional, Clasificación de las Funciones de Distribución y sus Momentos, además de la forma general de la Función Generadora de Momentos.

En el capítulo II se introducen los conceptos básicos de los procesos estocásticos para llegar a la construcción del proceso de poisson, y finalizar con el análisis uniperiódico de la Teoría Colectiva de Riesgo.

En el capítulo III se realiza un análisis del reaseguro financiero como un método alternativo al reaseguro tradicional, sin dejar de lado el estudio del reaseguro tradicional. En la segunda parte del capítulo nos introducimos al concepto de Probabilidad de Ruina así como al modelaje que se hace del número y monto de los siniestros de una cartera

Finalmente, en el capítulo IV se realizará la explicación de los fundamentos de la teoría de la credibilidad desde los orígenes y las bases sobre las cuales descansa. Así mismo definiremos los conceptos de prima de riesgo, prima colectiva, y prima de credibilidad, además de realizar algunas aplicaciones a los seguros de daños.

Esto para la elaboración de Sistemas de Tarificación que garanticen la solvencia de la entidad aseguradora (principio de suficiencia) y que simultáneamente resulten lo más justos posibles (principio de equidad). La solución a este problema viene dada por modelos, los cuales tienen por objetivo incorporar en el cálculo de la prima el conocimiento del riesgo que se esté tarificando con la experiencia de los siniestros observables que presenta dicho riesgo.

CAPÍTULO I. LA TEORIA INDIVIDUAL DEL RIESGO

1.1 Introducción a la Teoría del Riesgo

1.1.1 Definición y Clasificación del Riesgo

El riesgo tiene un dominio muy amplio, visto desde su forma más genérica, ya que sus fronteras coinciden con las de la incertidumbre. Desde el punto de vista económico implica la contingencia de pérdida como una posibilidad de ganancia, o ambas simultáneamente. De ahí que el riesgo se clasifique en dos grandes categorías: riesgo especulativo y riesgo puro.

El riesgo especulativo implica la posibilidad de pérdida y de ganancia. Así tenemos una apuesta, en la que se compromete una suma grande o pequeña, a cambio de obtener otra igual o mayor. Un ejemplo de ello es la lotería, en que a cambio de una pequeña suma cierta, aspiramos al premio mayor, así como la especulación bursátil.

El riesgo puro se puede definir como la posibilidad de pérdida o desembolso. En algunas ocasiones se entiende como el sujeto u objeto de la protección derivada del seguro o bien como uno o varios de los azares a que ésta habitualmente se extiende.

Del concepto de riesgo, en su sentido genérico, se derivan dos conclusiones fundamentales, a saber:

- No existe riesgo, en tanto no exista la posibilidad de pérdida o desembolso.
- No existe riesgo, cuando se tiene certeza de su ocurrencia.

La imposibilidad y la certeza constituyen las fronteras del riesgo.

1.1.2 Problemas analizados por la Teoría del Riesgo

Hay varias razones por las que la solvencia es uno de los objetivos con mayor significación para la entidad aseguradora.

- La primera obedece a la naturaleza propia de las prestaciones a que se compromete quien cubre un riesgo; estas prestaciones están asociadas a situaciones de necesidad del asegurado, por lo que es natural que quiera minimizarse lo más posible el riesgo de incapacidad del asegurador para responder a su compromiso.
- La quiebra de la insolvencia puede deberse a la fluctuación aleatoria de la siniestralidad –por lo tanto es consecuencia de la de la propia actividad aseguradora- sin que necesariamente ocurran en su aparición factores ajenos al puro azar. Más aún el riesgo de insolvencia es susceptible de tratamiento estadístico-actuarial.
- Una razón no menos importante, es la confianza en la entidad aseguradora, pues un deterioro en la misma puede apartar a la gente de los mecanismos del seguro, por lo

que el empresario es el primer interesado en afrontar la cuestión de la solvencia con criterios técnicos rigurosos[1].

El concepto de solvencia presenta dos acepciones diferentes, según estemos hablando de *solvencia estática* o *dinámica*. La primera de ellas representa la capacidad del asegurador para hacer frente a las obligaciones derivadas de los compromisos ya adquiridos, es decir, de las provisiones para riesgos en curso, matemáticos y para prestaciones pendientes, estén bien calculadas e invertidas en valores realizables.

La *solvencia estática* contempla la capacidad del asegurador en un momento dado para pagar las indemnizaciones derivadas de las primas contabilizadas, si dichas primas representan el valor medio de la siniestralidad y ésta no se ha alejado de dicho valor medio, el asegurador contará con la disponibilidad necesaria para compensar la siniestralidad si se determinó correctamente el beneficio y se invirtió de forma satisfactoria.

El importe de la siniestralidad puede presentar ciertas fluctuaciones respecto de su valor medio –que debe coincidir con las primas de riesgo- de aquí surge la solvencia dinámica.

La solvencia dinámica es la capacidad del asegurador para cumplir los compromisos que puedan aparecer como consecuencia de su actividad futura. Los medios para satisfacer esta solvencia dinámica consisten en la exigencia de garantías financieras por encima de las provisiones técnicas de primas y de prestaciones, que fundamentalmente son el margen de solvencia y las provisiones para desviación de siniestralidad, es decir, elementos del patrimonio asegurador que no están afectados por los compromisos contraídos en virtud de las primas ya emitidas.

El margen de solvencia se proyecta hacia el porvenir y considera la solvencia en relación con la evolución prevista de la siniestralidad, el dinamismo de la empresa y del medio en que opera[2] este concepto se denomina -*margen mínimo de solvencia dinámica*-.

Al contar el asegurador con un patrimonio libre no comprometido, puede garantizar la solvencia, que es necesaria para el desempeño de su actividad y para la obtención de los ingresos que la justifican; la solvencia adecuada del sector asegurador proporciona beneficios para la economía en su conjunto al aumentar la capacidad de retención de riesgos del país considerado.

Que el monto total de las primas sean suficientes para cubrir la siniestralidad es una hipótesis de la **Teoría del Riesgo** que no siempre tiene la claridad que se desea. Las primas representan el valor medio de la siniestralidad, ésta es una previsión que en la práctica se debe controlar, tanto por la misma empresa así como por las autoridades de supervisión correspondientes.

Sean o no suficientes el importe de las primas, la siniestralidad anual es una variable aleatoria y como tal estará variando alrededor de su valor medio. Esta posible variación justifica que sea necesario un margen del solvencia adicional a las provisiones técnicas de primas y

[1] Latorre Llorens Luis. Teoría del Riesgo y sus Aplicaciones a la Entidad Aseguradora
[2] E. Prieto. Modelo Actuarial en que se apoya la ley de ordenación del Seguro Privado y su Reglamento

siniestros. Existen otros riesgos que comprometen la estabilidad del asegurador, uno de ellos es el de las alteraciones que pueden sufrir las probabilidades básicas del proceso de riesgo.

La probabilidad de ocurrencia de un siniestro puede variar año tras año, así como la distribución de probabilidades del tamaño o cuantía de un siniestro o una cartera de riesgos, la inflación también juega un papel importante, pues contribuye a que la probabilidad de que el valor de un siniestro supere cierta cuantía sea cada vez mayor. La posibilidad de tener pérdidas en las inversiones realizadas, incrementos en los gastos de administración, insolvencia de sus reaseguradores.

Por estas razones, el único enfoque que sería satisfactorio al plantear la solidez del asegurador es el que exija la evaluación individual de sus riesgos, a la vista de sus particulares circunstancias. Este punto requiere un estudio estadístico actuarial que, con base en el volumen de primas y calidad de riesgos cubiertos, recargo de seguridad, plenos de retención, distribución del tamaño o cuantía del siniestro y probabilidad de ruina, determinara el margen mínimo de solvencia.

La solvencia estática descansa sobre el adecuado cálculo e inversión de las provisiones de primas y siniestros. Entre las primeras deben incluirse las que complementan la simple periodificación de éstas, cuando son insuficientes para cubrir el riesgo. Dentro de las provisiones de siniestros quedan comprendidas las exigidas por aquellos que han ocurrido al cierre del ejercicio pero que a tal fecha aún no se habían comunicado al asegurador, conocidos como: *siniestros ocurridos y no reportados.*

La solvencia dinámica se fundamenta en la suficiencia de primas y en la disponibilidad de recursos no afectos a los compromisos derivados de las devengadas. Se trata del margen de solvencia o patrimonio propio no comprometido, y de las prisiones técnicas de desviación de siniestralidad, que sirven para compensar excesos anuales de siniestralidad sobre las previsiones que fundamentaron el cálculo de la prima. Un factor decisivo en la solvencia dinámica es el *reaseguro.*

En el cálculo de la solvencia dinámica se pueden adoptar 3 enfoques diferentes, puede adoptarse como -horizonte temporal- el año o ejercicio económico, el periodo de varios años o bien el periodo de duración infinita.

- El margen de solvencia o las provisiones de equilibrio se calculan de forma que garanticen, con una determinada probabilidad, la solvencia del asegurador en un año.
- Otro punto de vista trata de garantizar la solvencia durante un mínimo de *n* años, este enfoque tiene que ver más con la continuidad de la empresa que con la protección de los intereses del asegurado, propia del primer planteamiento.
- El tercer enfoque para el planteamiento de la solvencia es, no solo el más exigente sino el que mayores dificultades presenta en cuanto a su formulación rigurosa; algunas de las hipótesis sobre las que se fundamenta esta formulación están demasiado alejadas de la realidad – por ejemplo, la acumulación ilimitada de reservas-.

1.1.3 Conceptos Básicos.

Históricamente, la forma más antigua de definir probabilidades, es el concepto clásico de probabilidad, que se aplica cuando todos los resultados posibles son igualmente probables, como generalmente sucede en los juegos de azar.

Una deficiencia importante del concepto clásico de la probabilidad es su aplicación limitada, pues hay muchas situaciones en las que las posibilidades que se presentan, no pueden ser consideradas igualmente probables. Un punto de vista alternativo, que actualmente se ve favorecido, consiste en interpretar las probabilidades como evaluaciones personales. Tales probabilidades expresan la fuerza de lo que creemos respecto a las incertidumbres que están en juego, y especialmente se aplican cuando hay poca o ninguna evidencia directa.

El enfoque de probabilidad que utilizaremos, es el enfoque axiomático, en el que las probabilidades son definidas como objetos matemáticos que se comportan de acuerdo a ciertas reglas bien definidas.

1.1.3.1 Espacios Muestrales

Conocemos como experimento a cualquier proceso de observación o medición. En este sentido, un experimento puede ser el sencillo proceso de verificar si un interruptor esta encendido o apagado, o puede ser el proceso de medir la masa de un electrón. Los productos de un experimento, ya sean si o no o valores obtenidos mediante cálculos extensos se conocen como resultados del experimento.

Al conjunto de todos esos posibles resultados de un experimento se le conoce *como espacio muestral*. Cada resultado de un espacio muestral se llama elemento del espacio muestral.

Para formular los postulados de probabilidad, denotaremos los eventos mediante letras mayúsculas y escribiremos la probabilidad del evento A como $P(A)$, la probabilidad del evento B como $P(B)$, y así sucesivamente.

Las probabilidades son los valores de una función conocida como medida de probabilidad, ya que esta función asigna valores reales a los diversos subconjuntos de un espacio muestral Ω. Los postulados de probabilidad se aplican solo cuando el espacio muestral es discreto.

1. La probabilidad de un evento es un numero real no negativo; esto es, $P(A) \geq 0$,para cualquier subconjunto A de Ω

2. $P(\Omega) = 1$

3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ es una secuencia finita o infinita de eventos mutuamente excluyentes de Ω, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3, \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + (A_3) + \ldots$

Basándonos en los postulados de probabilidad, se derivan muchas otras reglas que tienen aplicaciones importantes, a continuación mencionamos algunas de ellas:

Teorema 1. Si A es un evento en un espacio muestral discreto Ω, entonces $P(A)$ es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales que abarcan A.

Teorema 2. Si un experimento puede resultar en cualquiera de N resultados diferentes igualmente probables, y si n de estos constituyen el evento A, entonces la probabilidad del evento A es $P(A) = \frac{n}{N}$.

Teorema 3. Si A y A' son eventos complementarios en un espacio muestral Ω, entonces $P(A') = 1 - P(A)$.

Teorema 4. $P(\phi) = 0$ para cualquier espacio muestral Ω.

Teorema 5. Si A y B son eventos en un espacio muestral Ω y $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Teorema 6. $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.

Teorema 7. Si A y B son dos eventos en el espacio muestral Ω, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

En la mayoría de los problemas de probabilidades nos interesan los valores asociados a los resultados de los experimentos de azar, es decir, los valores asumidos por las variables aleatorias.

Si Ω es un espacio muestral con una medida de probabilidad y X es una función de valor real definida sobre los elementos de Ω, entonces X se llama una variable aleatoria

1.1.3.2 Clasificación de las Funciones de Distribución

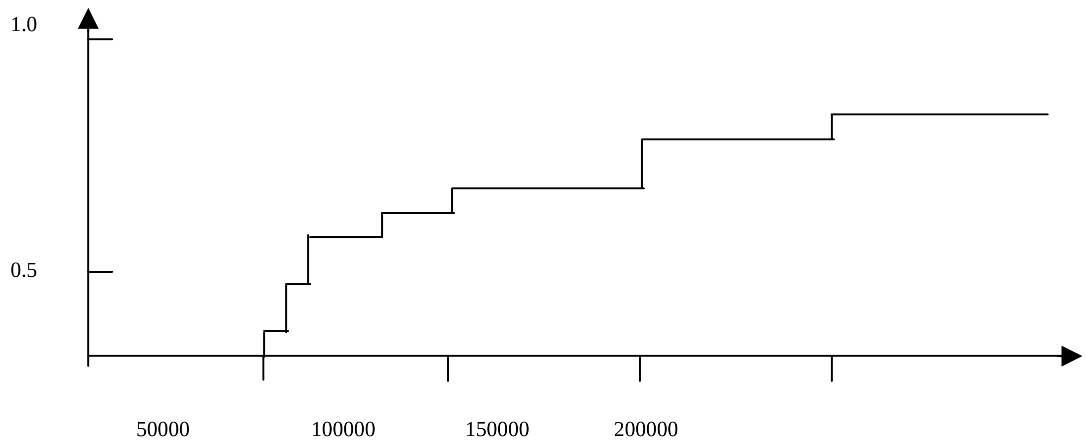
Definimos la función de distribución de la variable aleatoria X como sigue:

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

donde la parte derecha de la igualdad se lee como *"la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor numérico real menor o igual a x"*

En la siguiente ilustración consideramos la variable aleatoria **S,** donde **S** representa la suma de los daños en términos monetarios asociados a un evento reclamado o simplemente, el total reclamado. Generalmente excluimos el caso en el que S =0. Esto no es absolutamente necesario, pero en la teoría es benéfico trabajar con ésta exclusión.

Figura 1.1
Distribución empírica de la suma total de reclamaciones de un seguro de autos mayor a 50000 pesos



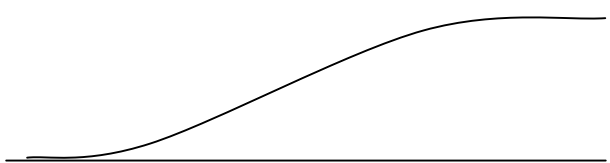
Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

En la distribución empírica del ejemplo anterior podemos ver que la $P[S > 100000\, pesos] = 1 - P[S \leq 100000\, pesos] = 1 - F_S(100000) = 0.20$ .Con la Función de Distribución Empírica desarrollaremos una Función de Distribución Teórica suavizando su forma. Le teoría derivada de las funciones de distribución implica un problema estadístico que no será estudiado en esta ocasión.[3]

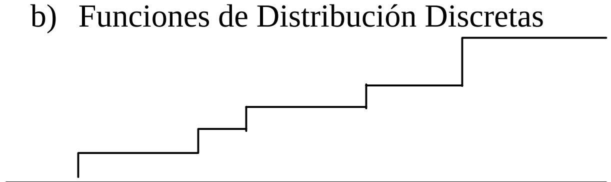
En lo sucesivo definiremos la función de distribución $F_X(x)$ de forma continua.

Las Funciones de Distribución de dividen en dos grandes grupos:

a) Funciones de Distribución Continuas



b) Funciones de Distribución Discretas



[3] Bühlmann , Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

Dentro de la clase de las Funciones de Distribución Continuas, encontramos dos subdivisiones:

- Funciones de Distribución derivables en todo punto (Si $F'(x) = f(x), f(x)$ es conocida como la función de densidad de (X)
- Funciones de Distribución que no son derivables en todo punto.

En nuestro caso, solamente trabajaremos Funciones de Distribución con función de densidad y funciones de distribución discretas.

1.1.3.2.1 Funciones de Distribución Continuas

1) Distribución Normal

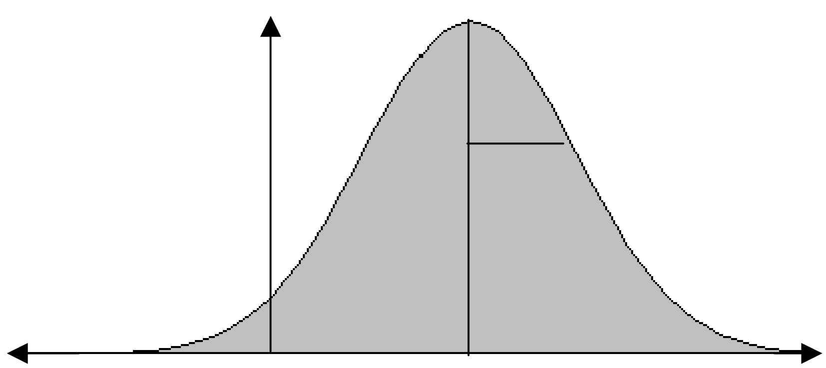
Parámetros $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$

Función de Densidad $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ con $-\infty < x < \infty$

Función de Distribución $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

En el caso en que $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, la distribución es conocida como -*Distribución Normal Estándar*-. La curva normal no es la más recomendable para el caso del monto total de las reclamaciones de un siniestro, salvo en casos especiales, pero juega un papel muy importante como una “aproximación para portafolios grandes”.

Figura 1.2
Distribución Normal



Fuente: Bühlmann, Hans “Mathematical Methods in Risk Theory

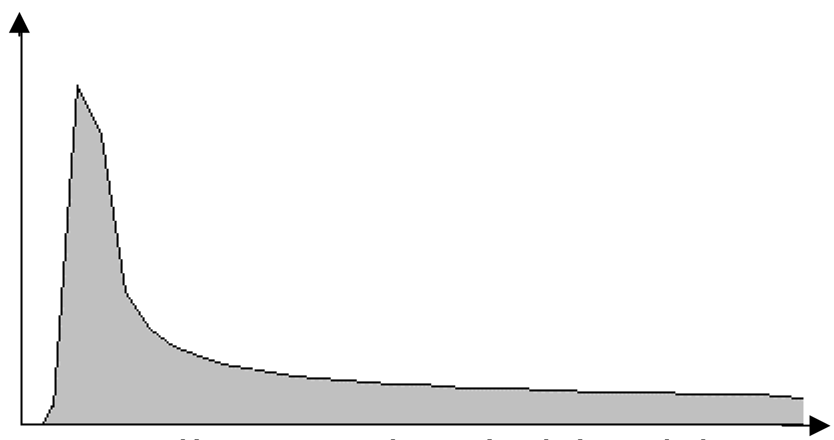
2) Distribución Logarítmico-Normal (Log-Normal)

Parámetros $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$

Función de Densidad $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$ con $0 \leq x < \infty$

La Distribución Log-Normal es muy usada para representar la distribución del monto total de las reclamaciones ("log" se entenderá como logaritmo natural).

Figura 1.3
Distribución Log-Normal



Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

3) Distribución Gamma (Γ - distribución)

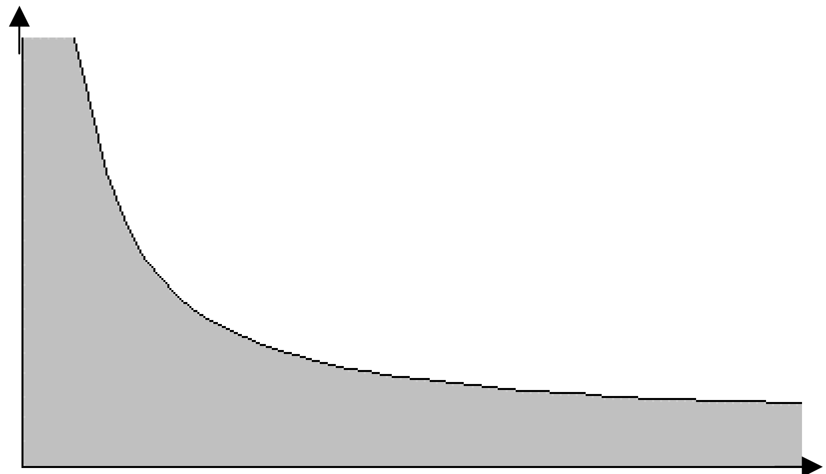
Parámetros $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$

Función de Densidad $f(x) = \dfrac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax}$ con $0 < x < \infty$

La forma de la curva depende básicamente de que tan grande, menor o igual a 1 sea el parámetro γ. Cuando $\gamma > 1$ la distribución gamma tiene una forma similar a la distribución log-normal; Cuando $\gamma = 1$ la curva se refiera a la de una distribución exponencial. Finalmente, si $\gamma < 1$ se produce una función de densidad que tiene una asíntota en el origen

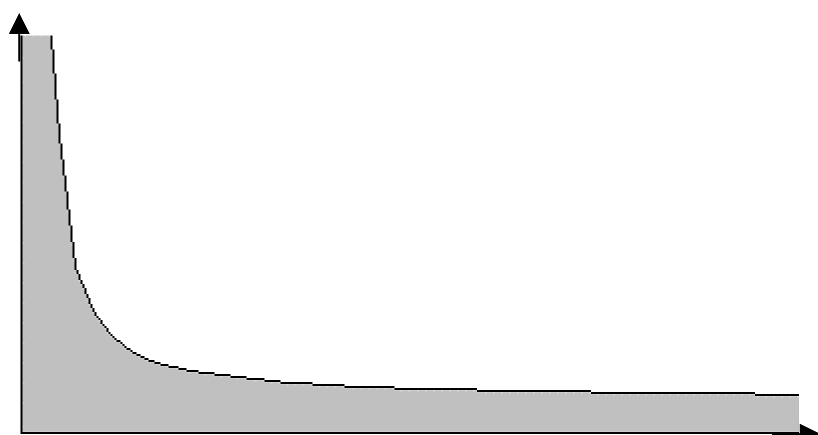
La Distribución Gamma también es usada para representar el monto total de las reclamaciones.

Figura 1.4
Distribución Gamma con γ=1



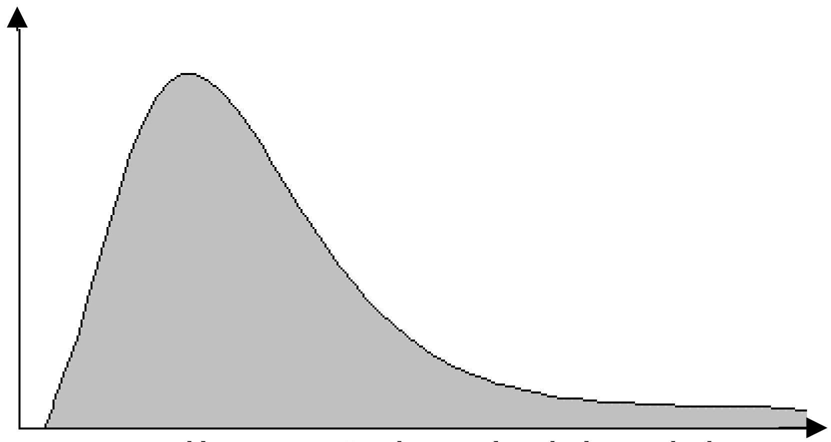
Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

Figura 1.5
Distribución Gamma con γ<1



Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

Figura 1.6
Distribución Gamma con γ=1

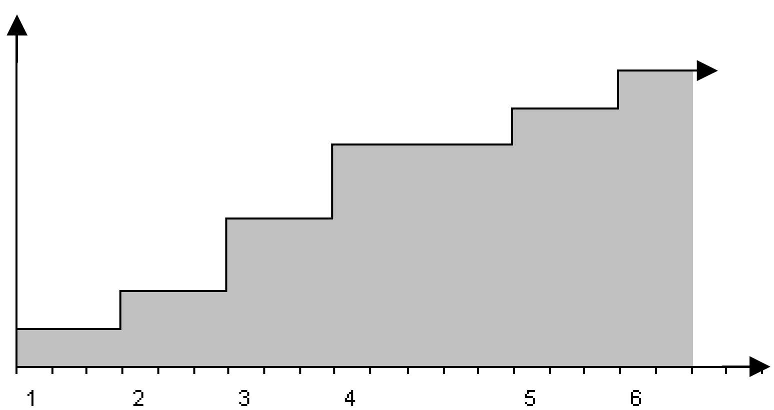


Fuente: Bühlmann, Hans “Mathematical Methods in Risk Theor

1.1.3.2.2 Funciones de Distribución Discretas

Generalmente, todas las distribuciones del monto total reclamado son funciones discretas, dichos montos siempre han sido representados como múltiplos de unidades monetarias; donde –generalmente es el caso- las funciones de distribución continuas son usadas para describir el comportamiento del monto total reclamado. Para nuestros propósitos asumimos que las funciones discretas solo tienen saltos positivos y sus valores enteros están en el eje de las abscisas.

Figura 1.7
Distribución Discreta



Fuente: Bühlmann, Hans “Mathematical Methods in Risk Theory

La terminología usada en las funciones de distribución discreta es la siguiente: El conjunto de todos los puntos es el rango de la variable aleatoria; Un salto positivo de la función sobre el eje de las abscisas **k** representa la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor k, simbólicamente se escribe p_k, y su función de distribución es como sigue:

$F(x) = \sum_{k \le x} p_k = P(X \le x)$ donde k es un entero.

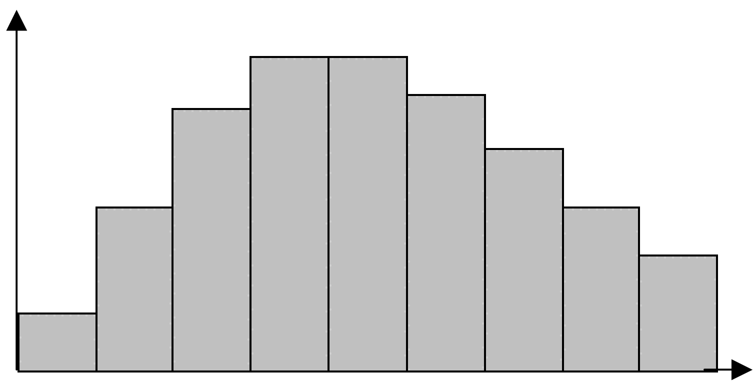
4) Distribución Binomial

Esta distribución nos da la probabilidad de k éxitos en n ensayos independientes e idénticamente distribuidos. En el caso en que n =1 tenemos la distribución Bernoulli

Parámetros $n \in Z^+ \quad 0 < p < 1$

Probabilidad $p_k = c(n, p)p^k(1-p)^{n-k}$ para $k = 0,1,2,\ldots,n$

Figura 1.8
Distribución Binomial



Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

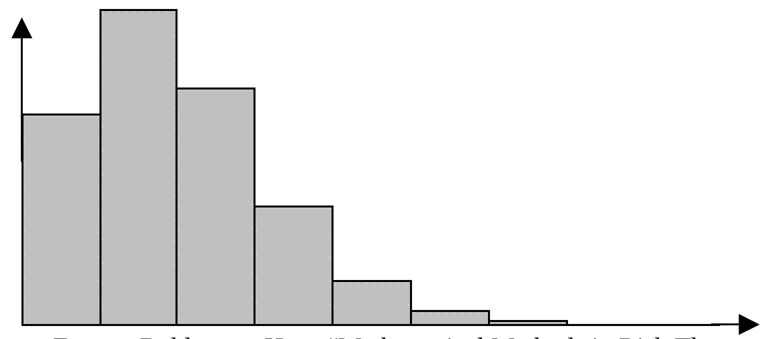
5) Distribución Poisson

La distribución poisson cuando $n \to \infty$ tiende a una distribución binomial donde $np = \lambda$;

Parámetro $0 < \lambda < \infty$

Probabilidad $p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ donde $k = 0,1,2,3,\ldots$

Figura 1.9
Distribución Poisson



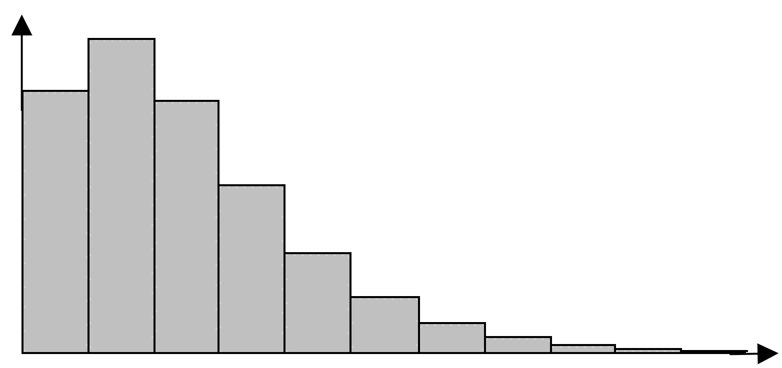
Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

6) Distribución Binomial Negativa

Parámetros $0 < \alpha < \infty$ y $0 \leq p \leq 1$

Probabilidad $p_k = C(\alpha + k - 1, k)\, p^{\alpha} (1-p)^k$ donde $k = 0,1,2,\ldots$

Figura 1.10
Distribución Binomial Negativa



Fuente: Bühlmann, Hans "Mathematical Methods in Risk Theory

Si tenemos que $\alpha = 1$ y reemplazamos k por k-1 obtenemos la distribución geométrica.

Los ejemplos de funciones de distribución que hemos presentado son los que se encuentran con mayor frecuencia en la literatura actuarial.

En este apartado hablaremos de los valores esperados, momentos y funciones auxiliares de la función de distribución $F_X(x)$ o la variable aleatoria X. Esencialmente estaremos usando los conceptos de Esperanza y Valor Esperado.

1.1.3.3 Esperanza, Varianza Propiedades

Sean X, Y variables aleatorias. Se define la esperanza de X y la esperanza condicional de Y / X como:

$$E[X] = \int x dF_X(x) = \int x f_X(x) \text{................Caso Continuo}$$

$$E[X] = \sum_x x dF_X(x) = \sum_x x p_X \text{ ....Caso Discreto}$$

$$E[Y/X] = \int y f_{y/x}(y/x) dy \text{.................. Caso Continuo}$$

$$E[Y/X] = \sum_y y f_{y/x}(y/x) \text{..................... Caso Discreto}$$

Generalización: Sean X, Y variables aleatorias, g(x) y g(y) son funciones de x e y respectivamente

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \text{..........Caso Continuo}$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) dF_X(x) = \sum_x g(x) p_X \text{ ....Caso Discreto}$$

$$E[g(Y)/X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_{y/x}(y/x) dy \text{ ....Caso Continuo}$$

$$E[g(Y)/X = x] = \sum_y g(y) f_{y/x}(y/x) \text{..............Caso Discreto}$$

Consideremos la variable aleatoria S = monto total de los eventos reclamados. Sea g(S) la suma asegurada que se cubre para los eventos S, supongamos que $F_S(x)$ es una función discreta que solamente toma valores positivos. Entonces tenemos lo que sigue:

$$E[g(S)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} g(k) \Pr ob(S = k)$$

La probabilidad puede ser interpretada mediante las frecuencias relativas, es decir,

$$prob[S = k] \approx n_k / n$$

Donde n_k es el número de reclamaciones de los sucesos similares para los cuales el monto total perdido S = k. De esta manera:

$$E\left[g(S)\right] \approx \{\sum_{k=1}^{\infty} g(k)n_k\}/n =$$

$$\frac{\text{Re}\,clamacionesPagadas}{No.totalde\,\text{Re}\,clamaciones} = \text{Pr}\,omedioPagadopor\,\text{Re}\,clamación^4$$

- *Propiedades de la Esperanza y Varianza*

1. $E(aX) = aE(X)$
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3. Si $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$
4. $E(Y) = E\left[E(Y/X)\right]$
5. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
6. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ Si X e Y son v.a.i.
7. $Var(Y) = Var\left[E(Y/X)\right] + E\left[Var(Y/X)\right]$

Demostración de 4.

$$E\left[E(Y/X)\right] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} f_X(x)dydx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{+\infty} y\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx\right]dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = E(Y) \qquad \therefore E(Y) = E\left[E(Y/X)\right]$$

Definimos la $Var(X/Y) = E(X^2/Y) - (E(X/Y))^2$

Demostración de 7

$$Var\left[E(Y/X)\right] + E\left[Var(Y/X)\right] = E\left[E^2(Y/X)\right] - E^2\left[E(Y/X)\right] + E\left[E(Y^2/X) - E^2(Y/X)\right] =$$

$$= E\left[E^2(Y/X)\right] - E^2\left[E(Y/X)\right] + E\left[E(Y^2/X)\right] - E\left[E^2(Y/X)\right] = -E^2\left[E(Y/X)\right] + E\left[E(Y^2/X)\right] =$$

$$= -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y/X}(y/x)dy\right] = -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y/X}(y/x) f_X\, dydx =$$

$$= -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} f_X\, dydx = -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{XY}(x,y)dydx =$$

$$= -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = -E^2\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x)dy\right] + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 dy =$$

$$= -\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y/X}(y/x) f_X(x)dydx\right]^2 + E(Y^2) = -\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} f_X(x)dydx\right]^2 + E(Y^2) =$$

$$= -\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dydx\right]^2 + E(Y^2) = -\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy\right]^2 + E(Y^2) = -\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy\right]^2 + E(Y^2)$$

$$= E(Y^2) - E^2(Y) = Var(Y)$$

$$\therefore Var(Y) = Var\left[E(Y/X)\right] + E\left[Var(Y/X)\right]$$

Utilizando $E\left[g(X)\right] = \int g(x)dF_X(x) = \int g(x) f_X(x)$, definimos las siguientes características de una función de distribución:

- Si $g(X) = x^k : E(X^k) = \mu_k$ que es el k-ésimo momento alrededor del origen de $F_X(x)$, o más simplemente, el k-ésimo momento ordinario.
- Si $g(X) = (x-\mu)^k : E(X-\mu)^k = \alpha_k$ se conoce como el k-ésimo momento central de $F_X(x)$

Notas

- El valor esperado de $F_X(x)$ $\mu = \mu_1$
- La varianza de $F_X(x)$ $\sigma^2 = \alpha_2 = Var(X)$

Algunas funciones de distribución tienen asociadas funciones auxiliares que únicamente la caracterizan.

1.1.3.4 Funciones Auxiliares
1.1.3.4.1 Función Generadora de Momentos

$$M(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx \quad t \in R$$

Decimos que la función generadora de momentos existe si la integral esta definida para valores estrictamente positivos $t_0 > 0$.Si también $M(t_1) < \infty$ para un valor negativo $t_1 < 0$, entonces todos los momentos de $F_X(x)$ existen, y presentan la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
&M'(0) = E(X) \\
&M''(0) = E(X^2) \\
&\vdots \\
&M^{(k)}(0) = E(X^k)
\end{aligned}$$

1.1.3.4.2 Función Característica

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \int e^{iux} dF_X(x) = \int e^{iux} f_X(x)dx \quad u \in R, i = \sqrt{-1}$$

La función característica siempre existe. Los momentos de $F_X(x)$ tienen una relación similar con la función generadora de momentos

$$\varphi^{(k)}(0) = (i)^k E(X^k)$$

Es importante notar la relación que existe entre la función característica y la función de distribución, pues podemos describir una distribución de probabilidad usando solamente una de las funciones auxiliares.
Sea $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ una serie de variables aleatorias independientes, las siguientes condiciones son equivalentes:

- $G_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$
- $\varphi_{X_1 \ldots X_n}(u_1 \ldots u_n) = \varphi_{X_1}(u_1)\varphi_{X_2}(u_2)\cdots\varphi_{X_n}(u_n)$
- $M_{X_1 \ldots X_n}(t_1 \ldots t_n) = M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)\cdots M_{X_n}(t_n)$

Algunas relaciones importantes de la suma de variables aleatorias independientes:

- $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$
- $\varphi_{X+Y}(u) = \varphi_X(u)\varphi_Y(u)$
- $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$
- $F_{X+Y}(x) = \int F_X(x-t)dF_Y(t) = \int F_Y(y-t)dF_X(t)$

La operación definida en el lado derecho del renglón anterior es conocida como convolución, representada por el símbolo *****,si tenemos que X e Y son independientes $F_{X+Y}(x) = F_X(x) * F_Y(y)$.

1.2 Distribución del Número y Monto de los Siniestros

1.2.1 Modelo Individual

La Teoría Individual del Riesgo considera el riesgo total de la compañía como el resultado de lo que acontece a todas las pólizas individuales que componen una cartera. Es decir, la siniestralidad total en un periodo de tiempo determinado (un mes, un año, etc) será la suma de las variables aleatorias correspondientes a la siniestralidad de cada una de las pólizas de la cartera.

En el modelo individual, la variable aleatoria ***S*** representa el costo total de la cartera, para ello consideramos la suma de variables aleatorias (convolución) costo, para cada uno de los individuos que forman la cartera, o riesgos individuales, todo ello para un periodo determinado.

$X_i \rightarrow$ Es la Variable Aleatoria Cuantía de la i-ésima póliza o riesgo
$n \rightarrow$ Es el Número de Riesgos Individuales en la Cartera.

Por lo tanto la variable aleatoria costo total (**S**) quede definida como sigue:

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots + X_n \qquad\qquad n \rightarrow Conocido$$

Para aplicar el modelo individual, debemos considerar algunas hipótesis

- El Modelo se aplica a una cartera cerrada, es decir, n es conocido y fijado al principio del periodo, aunque podrían considerarse carteras abiertas.
- Corto Plazo.- No se tiene en cuenta el instante de ocurrencia del siniestro.
- Las X_i son variables aleatorias independientes entre si.

- Cada riesgo de la cartera tiene a lo máximo un siniestro. En caso contrario, el importe de todos los siniestros que tenga una misma póliza se acumula y se representa por la variable aleatoria X_i. Esta situación puede presentarse en los seguros de enfermedad u otros seguros.

Al ser independientes las variables aleatorias X_i, se cumple que:

$$E[S]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i],\ V[S]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]$$

Dado que los sumandos de la variable aleatoria S son independientes y siguen una función de distribución $F(X_i)$, la variable aleatoria suma S tendrá por función de distribución

$$F(S)=F(X_1)*F(X_2)*F(X_3)*F(X_4)*\cdots\cdots*F(X_n)=F^{n(*)}(X_i)$$

es decir, la n-ésima convolución de $F(X_i)$

1.2.2 Métodos de Aproximación

El aplicar el proceso de Convolución definido anteriormente se vuelve muy complicado y largo si el tamaño de la cartera crece. Sin embargo podemos hacer algunas aproximaciones, en nuestro caso aplicaremos la aproximación más utilizada que es la basada en el Teorema Central del Límite

La suma de una seria de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (de media μ y varianza σ^2 cada una de ellas) tiende a seguir una distribución Normal $N\sim\left(n\mu,\sqrt{n}\sigma\right)$, la convergencia se da cuando n > 30.

El teorema se extiende también a sumas de variables aleatorias independientes pero no equidistribuidas.

Consideremos una cartera C formada por n pólizas distribuidas en k categorías homogéneas $n=n_1+n_2+n_3+\cdots\cdots+n_k$, a su vez cada una de estas categorías $j=1,2,3,\ldots\ldots,k$ está formada por pólizas cuyos factores de riesgo tienen el mismo nivel, en el caso del seguro de autos, algunas de estas pueden ser: similar potencia, marca, modelo, zona de circulación.

Dadas estas condiciones definimos a X_{ij} como la variable aleatoria asociada a la siniestralidad de la póliza i que pertenece a la categoría j. En otras palabras

$$X_1=X_{11}+X_{21}+X_{31}+\cdots\cdots+X_{n_1 1}=\sum_{i=1}^{n_1}X_{i1}$$

donde X_1 es la siniestralidad total de la primera categoría. Los parámetros de X_{i1} son:

$$E(X_{i1}) = P_1 \qquad \sigma^2(X_{i1}) = \sigma_1^2 \qquad\qquad \forall i = 1,2,3,\ldots\ldots n_1 .$$

Análogamente para las categorías restantes resulta lo siguiente:

$$X_2 = X_{12} + X_{22} + X_{32} + \cdots\cdots + X_{n_2 2} = \sum_{i=1}^{n_2} X_{i2}$$

$$E(X_{i2}) = P_2 \qquad \sigma^2(X_{i2}) = \sigma_2^2 \qquad\qquad \forall i = 1,2,3,\ldots\ldots n_2$$

....

$$X_k = X_{1k} + X_{2k} + X_{3k} + \cdots\cdots + X_{n_k k} = \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik}$$

$$E(X_{ik}) = P_k \qquad \sigma^2(X_{ik}) = \sigma_k^2 \qquad\qquad \forall i = 1,2,3,\ldots\ldots n_{2k}$$

La variable aleatoria siniestralidad total de la cartera S tiene los siguientes parámetros:

$$E[S] = \mu = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + \cdots\cdots + E[X_k] = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j$$

$$Var(S) = \sigma^2[S] = \sigma^2 = \sigma^2[X_1] + \sigma^2[X_2] + \sigma^2[X_3] + \cdots\cdots + \sigma^2[X_k] = \sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j^2$$

Si el tamaño de la cartera es lo suficientemente grande, nos aproximamos aplicando el teorema central del límite, obteniendo lo siguiente:

$$P[S \le s] = P\left[\frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{s - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right]$$

Que es una distribución Normal (0,1), esta es la mas usada en la teoría individual del riesgo, aunque también se ha propuesto la distribución Normal Power.

1.2.3 La Distribución del Monto de los de Siniestros

Para la determinación de la probabilidad de ruina en un periodo para el caso de los seguros, partimos de la siguiente relación:

$U_0 =$ Nivel Inicial de Reservas (Primas- Siniestros del periodo anterior)

$P = E[S] =$ Ingresos (Primas)
$(1+\lambda)E[S] =$ Recargo de Seguridad

La probabilidad de Ruina queda definida como la probabilidad de que los ingresos de la aseguradora sean menores a cero, es decir,:

$$P\left[U_0 + (1+\lambda)E[S] - S < 0\right] = P\left[S > U_0 + (1+\lambda)E[S]\right] =$$

$$P\left[\frac{S - E[S]}{\sigma[S]} > \frac{U_0 + (1+\lambda)E[S] - E[S]}{\sigma[S]}\right] = 1 - P\left[\frac{S - E[S]}{\sigma[S]} < \frac{U_0 + \lambda E[S]}{\sigma[S]}\right] =$$

$$= 1 - \Phi\left[\frac{U_0 + \lambda E[S]}{\sigma[S]}\right]$$

Si λ es grande y U_0 es grande, entonces la probabilidad de ruina tiende a cero.

En una cartera en la que todos los riesgos son equidistribuidos, la probabilidad de ruina es:

$$\Psi = 1 - \Phi\underbrace{\left[\frac{U_0 + \lambda n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right]}_{\beta}$$

$\beta =$ Coeficiente de Seguridad
En este caso, si:

- $n \to \infty$ y $\lambda > 0 \Rightarrow \Psi \to 0$
- $\lambda = 0$ y $n \to \infty \Rightarrow \Psi \to \frac{1}{2}$

Asumiendo que los riesgos pueden clasificarse en clases, los riesgos con la misma varianza y media, teniendo a n_i como el número de riesgos en cada grupo, el coeficiente de seguridad es:

$$\beta = \frac{U_0 + \lambda \sum_{\forall i} n_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{\forall i} n_i \sigma_i^2}} \qquad \text{Recargo Constante}$$

$$\beta = \frac{U_0 + \sum_{\forall i} \lambda_i n_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{\forall i} n_i \sigma_i^2}} \qquad \text{Recargo Distinto para cada Clase}$$

1.2.4 Convoluciones

Una convolución puede ser vista como la función resultante de la suma de dos o mas variables aleatorias, y se define como:

- $F_{X+Y}(x) = \int F_X(x-t)dF_Y(t) = \int F_Y(y-t)dF_X(t)$ Caso Continuo
- $F_{X+Y}(x) = \sum F_X(x-t)dF_Y(t) = \sum F_Y(y-t)dF_X(t)$ Caso Discreto

Dada la función de distribución $F(s)$ de una variable aleatoria S se denomina convolución k-ésima de la misma función $F^{k*}(s)$, que nos proporciona la probabilidad de que la suma $S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots + X_k$ no sea superior a **s,** donde además se cumple que las X_i son independientes y equidistribuidas.

Por ejemplo, si la variable aleatoria S representa el costo total del siniestro y éste sólo puede asumir los valores 5 y 10 millones de pesos, con probabilidades

$$f(5) = 0.7$$
$$f(10) = 0.3$$

para la convolución segunda de $F(S) = P[S < s]$, que designamos por $F^{2*}(S)$ con las siguientes

$$F^{2*}(10) = P[X_1 + X_2 \leq 10] = 0.7^2 = 0.49$$

$$F^{2*}(15) = P[X_1 + X_2 \leq 15] = 0.49 + 2*0.7*0.3 = 0.91$$

$$F^{2*}(20) = P[X_1 + X_2 \leq 20] = 0.91 + 0.3^2 = 1$$

Las probabilidades en cada punto 10, 15 y 20 son, por lo tanto:

$$F^{2*}(10) = 0.49$$
$$F^{2*}(15) = 0.42$$
$$F^{2*}(20) = 0.09$$

1.3 Aplicaciones

1. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas exponencialmente con esperanza $1/\lambda$ Demuestra por inducción matemática que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se distribuye Gamma(n,λ)

2. Demuestra que si X sigue una distribución Poisson (λ), entonces su función generadora de momentos esta dada por $e^{\lambda(e^t - 1)}$ y que es cerrada bajo la convolución.

3. Determinar el tamaño de la cartera para que la probabilidad de Ruina sea solo del 5%

4. Un asegurador cuyas reservas ascienden a 1000 um, suscribe 1000 pólizas, cada una de ellas tiene una suma asegurada de 100 um y la probabilidad de que se siniestre una póliza es de .1, además establece para cada póliza una prima recargada de 10.50 um. Calcular la probabilidad de que el asegurador resulte insolvente.

5. Cual es el principal objeto de estudio de la Teoría del Riesgo, como se clasifica y da la definición de cada una de las clasificaciones.

6. Demuestra que si X sigue una distribución Normal(μ, σ^2), entonces su función generadora de momentos esta dada por $e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$ y que es cerrada bajo la convolución.

7. Explica que es un proceso de convolución de variables aleatorias y demuestra que la poisson en cerrada bajo la convolución

8. Sea la Variable aleatoria discreta X con función de distribución F dada por:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x < 20 \\ (x+20)/80 & 20 \leq x < 40 \\ 1 & x \geq 40 \end{cases}$$

Calcular
a) P(x=<30)
b) P(x=40)
c) E (X)
d) Var (X)

9. La siguiente tabla muestra los datos de un portafolio de seguros de vida son independientes con respecto a su mortalidad

Prob. de Muerte	Suma asegurada	No. De pólizas
0.001	1	100
0.002	1	300
0.002	2	200

a) Calcula la Esperanza y Varianza de la variable aleatoria monto reclamado del portafolio.
b) Calcula la probabilidad de que el monto reclamado sea superior a 2.

10. Si el capital inicial es 0 en una cartera homogénea con n riesgos idénticos, un coeficiente de variación de 0.20, un recargo del 4% y la probabilidad de ruina deseada es del 1%. ¿Cuál debe ser el tamaño de la cartera?.

11. Supongamos 3 riesgos individuales independientes, cuyas distribuciones de los importes o cuantías de los siniestros son:

X	$P(x_1 = x)$	$P(x_2 = x)$	$P(x_3 = x)$
0	0.3	0.4	0.6
1	0.6	0.4	0.2
2	0.1	0.2	0.2

a. Calcular la Esperanza y la Varianza de S.
b. Calcular f(S), F(S)
c. P(s=8)
d. P(s<4)
e . P(s>6)

12. Demuestra que Si A y B son dos eventos en el espacio muestral Ω, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

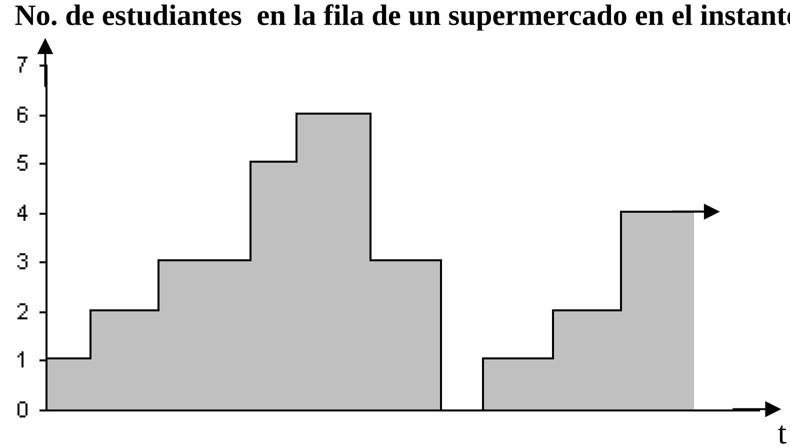
CAPÍTULO II. LA TEORÍA COLECTIVA DEL RIESGO

2.1 Introducción a los Procesos Estocásticos.

2.1.1 Definición de Proceso Estocástico

La palabra estocástico es sinónimo de aleatorio. Un *proceso estocástico* es un sistema que se desarrolla a través del tiempo y durante el paso del mismo se presentan variaciones debidas al azar. Este sistema puede ser definido por una familia de variables aleatorias, $\{X_t\}$, donde X_t mide, en el instante t, el aspecto del sistema que estemos estudiando[5]. Por ejemplo: Sea X_t el número de estudiantes de Actuaría de la Facultad de Ciencias que hay en una fila de un supermercado al instante t. Conforme pasa el tiempo, llegarán y saldrán estudiantes, y por lo tanto, el valor de x cambiara. En cualquier momento t, X_t toma uno de los valores $0,1,2,3,\ldots$;y t es cualquier valor en un subconjunto de $(-\infty,\infty)$. Al observar continuamente la fila llegan estudiantes de uno en uno para ser atendidos por un solo dependiente, entonces, cuando llega un estudiante, el valor de X_t, que es el tamaño de la fila, se incrementa en uno y cuando se marcha un estudiante, después de haber sido atendido, X_t disminuye en uno.

Figura 2.1
No. de estudiantes en la fila de un supermercado en el instante t



Fuente: Elaboración Propia

Los valores que puede tomar X_t, son llamados sus estados y los cambios en el valor de X_t, reciben el nombre de transiciones entre sus estados. Si observamos el tamaño de la fila no continuamente sino a intervalos unitarios, por ejemplo: una vez cada 15 min., entonces observaremos que pueden llegar o salir mas de un estudiante en cada intervalo de tiempo. Esto conduce a mayores fluctuaciones en el valor de X_t. Lo que se estudia son las consecuencias que a menudo son más complejas de estos modelos. A pesar de lo sencillo de estos modelos, al incluir la aleatoriedad que hay en el mundo real, se obtiene una imagen mucho mejor que la que posiblemente se lograría con modelos en los que se desperdiciara ese comportamiento

[5] Coleman, Radney "Procesos Estocásticos"

aleatorio. Los modelos estocásticos son aplicables a casi todos los sistemas que impliquen variabilidad al azar con el paso del tiempo.

Def. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias { X_t }, donde t es un punto en un espacio T, llamado espacio parametral, y donde para cada $t \in T, X_t$ es un punto en un espacio S, llamado espacio de estados

Ejemplos de Procesos Estocásticos:

1.-¿Cuáles son el espacio de estados y el espacio parametral para un proceso estocástico que es el marcador durante un juego de béisbol?

El espacio de estados S es el conjunto de valores posibles que puede tomar el marcador, donde $S = \{(x, y) : x, y = 1,2,3,\ldots\}$. Si el tiempo es medido en minutos, entonces el espacio parametral T es $(0,210)$. El proceso empieza en el estado $(0,0)$ y las transiciones se llevan a cabo entre los estados de S, siempre que entre una carrera.
Con cada carrera x ó y se incrementan en uno, de donde el marcador (x, y) pasara a $(x+1, y)$ ó $(x, y+1)$.

2.-Describa como se podría usar un proceso estocástico para estudiar los recursos de una compañía de seguros.

Definimos los recursos en el tiempo t, como la variable aleatoria X_t. Entonces X_t se incrementará con una rapidez aleatoria fluctuante pero bastante estable a medida que entran las primas, pero esta sujeta a caídas súbitas cuando se presentan las reclamaciones.

3.-¿Cuáles son los espacios de estados y parametral para un proceso estocástico que es la profundidad del mar en la posición x, en el instante t?

La profundidad del mar se mide desde la cresta de una ola hacia abajo hasta el lecho del océano. Como las olas se propagan en todas direcciones, la profundidad en cualquier punto fijo x variará con el tiempo, haciendo caso omiso de toda influencia a gran escala como las mareas. Podemos medir la profundidad en cualquier instante π, y en cualquier posición x, de modo que el espacio parametral T es el conjunto de todas las $t = (\pi, x)$ para las cuales $-\infty < \pi < \infty$ y $x \in \lambda$, donde λ es el conjunto de las referencias geográficas para todo el mar. En este caso t no es solamente el tiempo, sino una combinación de las coordenadas de tiempo y espacio.

El espacio de estados de S es el conjunto de todos los valores que puede tomar la profundidad, de modo que $S = [0, \infty)$, donde la profundidad es cero cuando queda expuesto el lecho del océano y no existe limite para la altura que pueden alcanzar las olas, aunque no se formara una ola de altura infinita, salvo que se trate de un milagro.

Una fabrica tiene dos maquinas, pero en cualquier día dado que no se usa mas que una. Esta maquina tiene una probabilidad constante **p** de sufrir una avería, y si así sucede, la avería ocurre al final del trabajo del día. Se emplea un solo hombre para repararla. A este hombre le toma dos días reparar una maquina y solo trabaja en una maquina a la vez. Constrúyase un proceso estocástico que describa el funcionamiento de esta fábrica.

Debemos seleccionar una variable aleatoria adecuada. Evidentemente es necesario registrar su valor solo al final del día, ya que todas las transiciones ocurren precisamente antes. Por lo tanto el espacio parametral T será el conjunto de los días de trabajo durante
los cuales este sistema esta en usa. Nombraremos como 1 al primer día, 2 al segundo y así sucesivamente; entonces $T = \{1,2,3,\ldots\}$.

Un proceso estocástico apropiado es $\{X_n : n \in T\}$, donde el valor de X_n se registrara al final del día n, esto es, el numero de días que serian necesarios para que ambas maquinas estén nuevamente en condiciones de trabajar. Si ambas maquinas están en condiciones de trabajar, entonces $X_n = 0$. Si una de las maquinas esta en condiciones de trabajar y la otra ya ha estado en reparación durante el día, entonces $X_n = 1$. Si una de las maquinas esta en condiciones de trabajar y la otra acaba de sufrir una avería, entonces $X_n = 2$. Si una de las maquinas se acaba de averiar y la otra ya ha estado en reparación durante el día, entonces $X_n = 3$. Estos son los únicos casos posibles, de donde tenemos que el espacio de estados es $S = \{0,1,2,3\}$

El Actuario acostumbrado a los métodos axiomáticos tiene cierta ventaja en este tipo de temas, para caracterizar el riesgo no se preguntan "¿que es eso?" sino que lo caracterizan por las propiedades que tiene. Las características básicas del riesgo residen en las siguientes propiedades:

- Primas Pagadas
- Reclamaciones Hechas

De esta manera el riesgo es descrito por un par (P_t, S_t), donde

- $P_t =$ Primas Pagadas en el intervalo $(0,t]$
- $S_t =$ Cuantía total reclamada en el intervalo $(0,t]$

Ambas pueden ser funciones aleatorias (procesos estocásticos) o funciones independientes del azar. Generalmente suponemos que P_t esta independiente del azar, pero S_t es estocástica. En el caso de las primas, que dependen de las reclamaciones en tiempos anteriores, no obstante, P_t también puede ser un proceso estocástico.

En la práctica tomamos una definición de riesgo que esta siendo aceptada y expresa P_t y S_t con gran exactitud y simplicidad para emplearlas y usarlas como base para predecir la experiencia.

2.1.2 Proceso Estocástico en Tiempo Continuo

Un proceso estocástico cuyo conjunto T de índices es un intervalo, se dice que es un proceso estocástico en tiempo continuo.

Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico en el que $N(t)$ representa el numero de veces que ocurre un cierto evento, en el intervalo $[0, t]$ para $t > 0$, con $N(0) = 0$, en este caso se dice que el proceso es un proceso de contaje y es evidente que su espacio de estados es el conjunto $S = \{0,1,2,\ldots\}$ y que tiene trayectorias no decrecientes, es decir, $N(s) \leq N(t)$ si $0 \leq s < t$

Un proceso de contaje tal que la intensidad de siniestralidad $\lambda(t, H_t)$ es independiente del tiempo t, aunque pueda depender de la historia del proceso, es un proceso homogéneo En el proceso de contaje que se ha definido, se define la intensidad de frecuencia de siniestralidad en t dada la historia del proceso como:

$$\lambda(t, H_t) = \lim_{h \to 0} \frac{P\left[W_{N(t)+1} \leq h / H_t\right]}{h} = \lim_{h \to o} \frac{P\left[N(t+h) = N(t) + 1 / H_t\right]}{h}$$

Sea $\tau_0 = 0$, y para $n \geq 1$sea $\tau_n$el tiempo en el que nuestro evento ocurre por n-ésima, i.e. $\tau_n = \inf\{t \geq 0 | N(t) = n\}$. A τ_n se le llama el *tiempo del n-ésimo salto* y las variables aleatorias $\Delta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, para $n = 1,2,3,\ldots$, son los tiempos entre saltos o tiempos de interocurrencia. Nótese que $\tau_n = \tau_{n-1} + \Delta_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$.

Si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{3,} \ldots$ son i.i.d., de dice que el proceso estocástico es un *proceso de renovación.*

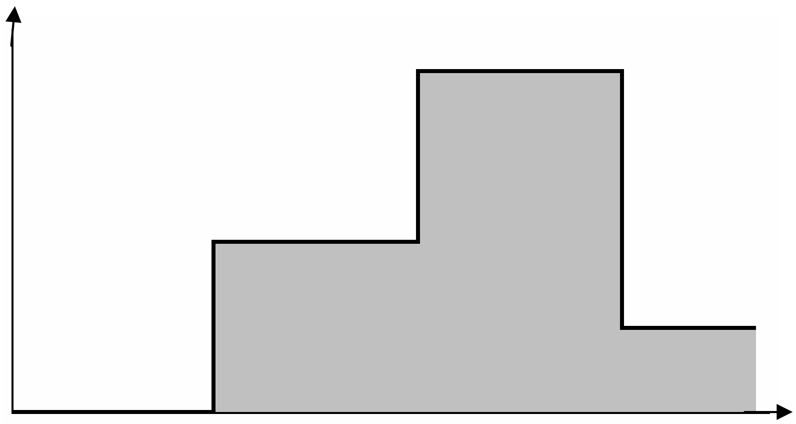
Simbolizamos por H_t a la historia del proceso hasta el tiempo t, es decir,

$$H_t = \{N(s) : 0 \leq s \leq t\} = \{N(t), \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_{N(t)}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_{N(t)}\}$$

Debemos considerar las hipótesis (necesarias) de que para cualquier t y H_t la distribución condicionada de $\Delta_{N(t)+1}$ es absolutamente continua.

Sea el proceso estocástico $\{X_t ; t \geq 0\}$, donde X_n es una función real discreta. La cuantía total puede dar brincos positivos o negativos

Figura 2.2
Proceso Estocástico de la cuantía total de un siniestro



Fuente: Elaboración Propia

Decimos que un proceso estocástico tiene *incrementos independientes* si para cualquier entero $n \geq 1$ y cualquier colección de índices $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ se cumple que las variables aleatorias (incrementos) $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes.

Si para cualquier $t \geq 0$ y $h > 0$ la distribución del incremento $X(t+h) - X(t)$ depende solamente de h, es decir, $X(t+h) - X(t) \approx X(s+h) - X(s) \quad \forall s, t > 0$, decimos que el proceso es de *incrementos estacionarios.*

2.1.3 El Proceso de Poisson

Con el proceso de poisson buscamos desarrollar un modelo con el cual podamos determinar $N(t)$, que es la probabilidad de que en un periodo de tiempo de longitud t ocurran precisamente n sucesos.

Para la construcción de dicho modelo, debemos hacer varios supuestos acerca de la naturaleza del proceso. Supondremos que la naturaleza del proceso estocástico que genera los sucesos no cambia con el tiempo. Este supuesto implica que la tasa media de estudiantes de Actuaría de la Facultad de Ciencias no cambia según la hora del día, cosa que en realidad no sucede. En la práctica ningún proceso estocástico es constante en el tiempo, por lo tanto el modelo representara solo en forma aproximada la naturaleza del mundo real, no obstante, dicho modelo constituye una aproximación muy buena en intervalos de tiempo no muy largos. Supondremos también que la probabilidad de que ocurran n sucesos en un periodo de longitud t depende solamente de la amplitud del intervalo independientemente de donde comience el intervalo de tiempo.

Haremos el supuesto adicional de que no es posible que dos o mas sucesos ocurran simultáneamente. El intervalo de tiempo entre la ocurrencia de dos sucesos sucesivos puede ser arbitrariamente pequeña, pero los sucesos no pueden ocurrir simultáneamente. Esto significa que dos estudiantes no pueden llegara la fila exactamente al mismo tiempo.

Utilizaremos el símbolo $o(h)$ para señalar cualquier función con la característica de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \qquad (1)$$

Las funciones $o(h)$ típicas son $h^2, 3h^3 - 2h^2, 16h^4$, etc. Supondremos que los procesos estocásticos bajo consideración están caracterizados por los dos axiomas siguientes:

1. La probabilidad de que ocurra un suceso entre el tiempo t y un tiempo posterior $t+h$, es $\lambda h + o_1(h)$, i.e. $P[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o_1(h)$, donde $\lambda > 0$ es una constante, independientemente de lo que ha sucedido en el proceso antes del momento t. En esencia este axioma implica que la probabilidad de que ocurra precisamente un suceso en un periodo de longitud h es proporcional a h cuando h es muy pequeña. Además, la constante de proporcionalidad λ no depende de t o h.

2. La probabilidad de que ocurra más de un suceso entre el tiempo t y un tiempo posterior $t+h$ es $o_2(h)$. Este axioma garantiza que no puedan ocurrir dos o mas sucesos en forma simultánea, puesto que la probabilidad de que ocurran dos o más sucesos en un intervalo de longitud h, dividida por la probabilidad de que ocurra uno, es $o_2(h) / (\lambda h + o_1(h))$, que se aproxima a cero a medida que $h \to 0$.Sin embargo, este cociente es el cociente a largo plazo de intervalos muy cortos que tienen dos o más sucesos con respecto a aquellos que tienen un suceso. Dicho cociente es 0, y de este modo la frecuencia correspondiente a largo plazo es 0.

En los axiomas 1 y 2 no es necesario especificar $o_1(h)$ y $o_2(h)$. En realidad, estas funciones no pueden ser especificadas en forma arbitraria, sino que estarán determinadas por la solución del problema.

Los dos axiomas anteriores caracterizan por completo al proceso estocástico llamado *proceso de poisson.* Ahora veremos como determinar la función $P_n(t) = P[N(t) = n]$ que es la probabilidad de que ocurran n sucesos en un periodo de longitud t. Consideremos el intervalo T_1 de longitud $t+h$ que comienza en t_1 y termina en $t_1 + t + h$, y el intervalo de tiempo T_2 de longitud t que comienza en el momento t_1 y termina en el momento $t_1 + t$. Consideremos también el intervalo de tiempo T_3 de longitud h, que comienza en el tiempo $t_1 + t$ y termina en el tiempo $t_1 + t + h$.Entonces $T_1 = T_2 \cup T_3$, la probabilidad de que ocurran n sucesos en T_1 es $P_n(t+h) = P[N(t+h) = n]$. Ahora relacionaremos esto con lo que sucede en T_2 y T_3, supondremos que cada uno de los intervalos anteriores incluye el punto extremo derecho del intervalo, pero no el izquierdo, entonces $T_2 \cap T_3 = \phi$, esto lo hacemos para no preocuparnos por la posibilidad de que un suceso ocurra en el momento $t_1 + t$ que este tanto en T_2 como en T_3.

Cuando $n \geq 1$, hay3 maneras mutuamente excluyentes y exhaustivas por las cuales pueden ocurrir n sucesos en el intervalo T_1. Esto puede suceder si en T_2 ocurren n y ninguno en T_3. La probabilidad de este suceso que denotaremos como A, es:

$P[N(t) = n][1 - \lambda h - o_1(h) - o_2(h)] = P_n(t)[1 - \lambda h - o_1(h) - o_2(h)]$...........................(2)

También puede suceder lo anterior si $n-1$ sucesos ocurren en T_2, y uno ocurre en T_3. La probabilidad de este suceso que llamaremos B, es:

$P[N(t) = n-1][\lambda h + o_1(h)] = P_{n-1}(t)[\lambda h + o_1(h)]$..(3)

Finalmente, si $n > 1$, en el intervalo T_1 pueden ocurrir n sucesos si $r < n-1$ sucesos ocurren en T_2 y $n - r$ en T_3, la probabilidad de este suceso que llamaremos C, es función de $o_3(h)$, puesto que involucra la ocurrencia de dos o mas sucesos en T_3. Al obtener 1 y 2, hemos acudido al hecho de que lo que suceda en T_3 es totalmente independiente de lo que ha sucedido en T_2. Por lo que concluimos que estamos tratando con sucesos independientes, por lo que las probabilidades se multiplican.

Ahora bien, los sucesos A y B son excluyentes, de modo que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Pero C y $A \cup B$ son excluyentes, de modo que $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) =$
$= P(A) + P(B) + P(C)$ sin embargo $P(A \cup B \cup C)$ es $P[N(t+h) = n]$, así utilizando 1 y 2

$$P_n(t+h) = P_n(t)[1 - \lambda h - o_1(h) - o_2(h)] + P_{n-1}(t)[\lambda h + o_1(h)] + o_3(h)$$
$$= P_n(t) - \lambda h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o_4(h) \text{,...(4)}$$

donde $o_4(h) = o_3(h) - o_1(h)[P_n(t) - P_{n-1}(t)] - o_2(h)P_n(t)$ y $o_4(t)$ cumple con (1)

Al dividir (4) por $h > 0$ tenemos lo siguiente:

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) + \frac{o_4(t)}{h} \text{ ....(5)}$$

De acuerdo con (1) $\lim_{h \to 0^+} \frac{o_4(h)}{h} = 0$. Y como el límite de una constante es la misma constante, tenemos que: $\lim_{h \to 0^+} [\lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)] = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t)$ .... (6)

Por lo tanto, el límite del miembro derecho de (5) existe cuando $h \to 0$ en todo valor positivo, y por lo tanto, el limite del miembro izquierdo de (5) también existe, y es:

$\lim_{h \to 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = \frac{d}{dt} P_n(t) = P'(t)$ cuando el límite existe, de acuerdo con la definición de derivada de una función. Para poder concluir que $P_n(t)$ existe, no solamente basta con haber demostrado que el límite existe cuando $h \to 0^+$, es necesario demostrar que existe el límite cuando $h \to 0^-$ que es igual que en (6). Esto podemos demostrarlo siguiendo el desarrollo anterior, tomando T_1 como el intervalo que se extiende de t_1 a $t_1 + t$, T_2 es el intervalo que va desde t_1 a $t_1 + t - h$ y como el intervalo que va $t_1 + t - h$ a $t_1 + t$. De este modo se demuestra que $P_n'(t)$ existe para toda $t > 0$, y además

$P_n'(t) + \lambda P_n(t) = \lambda P_{n-1}(t), n \geq 1$ .... (7)

El resultado anterior es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes que relacionan $P_n(t)$ con $P_{n-1}(t)$, de modo que si $P_{n-1}(t)$ se conoce, $P_n(t)$ puede encontrarse resolviendo la ecuación diferencial.

Hasta este momento, nuestro análisis no incluye el caso en el que $n = 0$. Existe solamente una manera en la que no hayan sucesos durante el intervalo T_1, y esto se da solamente que no ocurran sucesos en T_2 ni en T_3. La probabilidad de que esto no suceda es:

$P_0(t)[1 - \pi h - o_1(h) - o_2(h)] = P_0(t)[1 - \lambda h] + o_6(h)$ ....(8)

Así $P_0(t+h) = P_0(t) - \lambda h P_0(t) + o_6(h)$ .... (9)

O bien $\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o_6(h)}{h}$ .... (10)

Y, si tomamos el límite cuando $h \to 0$, concluimos que $P_0'(t)$ existe y

$P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0$ ....(11)

Tenemos una ecuación diferencial que contiene solamente $P_0(t)$, y es una ecuación homogénea con coeficientes constantes, y el conjunto de soluciones es de la forma:
$P_0(t) = ce^{-\lambda t}$ ....(12)

Donde c es un número real. Sin embargo, no es cierto que todas estas soluciones cumplirán con los axiomas. Notemos que $c = P_0(0)$, donde $P_0(0)$ significa $\lim_{h \to 0} P_0(h)$. De acuerdo con los axiomas 1 y 2, la probabilidad de que no ocurran sucesos entre 0 y h es $1 - \lambda h - o_1(h) - o_2(h)$, y a medida que $h \to 0^+$, esto se aproxima a 1. De esta manera debe suceder que $c = P_0(0) = 1$, y
$P_0(t) = e^{-\lambda t}$ ....(13)

Este último resultado es muy interesante, pues nos dice que la probabilidad de que no ocurran sucesos en un periodo de tiempo de longitud t es $e^{-\lambda t}$.

Una vez determinada $P_0(t)$, podemos determinar las otras $P_n(t)$ en forma recursiva utilizando (7). Para esto debemos primero resolver (7), las forma mas simple para hacerlo es multiplicando por $e^{-\lambda t}$, obteniendo

$$e^{-\lambda t}P_n'(t)+\lambda e^{-\lambda t}P_n(t)=\lambda e^{-\lambda t}P_{n-1}(t)\text{..}(14)$$

Si observamos el lado derecho de (14), podemos ver que este no es mas que la derivada de $e^{\lambda t}P_n(t)$. De este modo,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\text{..}(15)$$

Si integramos de ambos lados desde 0 hasta t, se tiene que

$$e^{\lambda t}P_n(t)-P_n(0)=\lambda\int_0^t e^{\lambda\tau}P_{n-1}(\tau)d\tau\text{..}(16)$$

Para $n\geq 1$, $P_n(0)=0$, como podemos ver de acuerdo a los axiomas. Cuando $n=1$, la probabilidad de que ocurra un suceso en el intervalo 0 a h es $\lambda h+o_1(h)$ que se aproxima a 0 conforme $h\to 0^+$, en el caso que $n>1$ llegamos al a misma conclusión. Por lo tanto,

$$P_n(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_{n-1}(\tau)d\tau, n\geq 1\text{...}(17)$$

La ecuación (17) podemos usarla para calcular $P_1(t)$ a partir de $P_0(t)$, luego $P_2(t)$ a partir de $P_1(t)$,etc. Para proceder de esta manera notemos lo siguiente:

$$P_1(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_{1-1}(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_0(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}e^{-\lambda\tau}d\tau=\lambda te^{-\lambda t}$$

Asimismo tenemos que:

$$P_2(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_{2-1}(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_1(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}\lambda\tau e^{-\lambda\tau}d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\tau d\tau=\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}$$

$$P_3(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_{3-1}(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}P_2(\tau)d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda\tau}\frac{(\lambda t)^2}{2}e^{-\lambda t}d\tau=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t\frac{(\lambda t)^2}{2}d\tau=\frac{(\lambda t)^3}{2*3}e^{-\lambda t}=$$
$$=\frac{(\lambda t)^3}{3!}e^{-\lambda t}$$

De lo anterior podemos concluir que para todos los enteros $n \geq 0$,

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad \text{...(18)}$$

Lo anterior es verdadero, y la prueba rigurosa puede hacerse por inducción matemática. Ya hemos visto que (18) es verdadera para $n=0$ y $n=1$. Supongamos que es válida para $n=k$ entonces $P_{k+1}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\int_0^t\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}d\tau=\frac{(\lambda\tau)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda t}$, Por lo tanto si (18) es válida para $n=k$, también debe serlo para $n=k+1$, y como es válida para $n=0$ y $n=1$, por el principio de inducción, concluimos que es válida para todos los enteros $n>0$.

La ecuación (18) es un resultado muy interesante porque nos dice que la probabilidad de que ocurran precisamente n sucesos en cualquier período de tiempo de longitud t, es la probabilidad de *POISSON***.** En el marco de nuestro estudio aparece la distribución poisson completamente diferente, caracterizando un tipo particular de proceso estocástico. Debido a que $P_n(t) \approx Poisson(\lambda h)$, el proceso estocástico caracterizado por los axiomas 1 y 2 recibe el nombre de *PROCESO DE POISSON*. Este proceso es muy útil e importante porque generalmente representa con exactitud aceptable la naturaleza del mundo real. La razón es que en ciertas ocasiones es apegado a la realidad el suponer que el número de sucesos que ocurren en un intervalo de longitud t no depende de lo que sucedió antes del principio del intervalo, y que, para intervalos cortos, la probabilidad de que ocurra un suceso es proporcional a la longitud del intervalo y asimismo que no ocurran dos o mas sucesos simultáneamente[6].

Resumiremos a continuación las características principales de un proceso de poisson

INCREMENTOS INDEPENDIENTES: Las variables aleatorias número de siniestros que ocurren en cualesquiera dos intervalos disjuntos son independientes.

INCREMENTOS ESTACIONARIOS: El número de siniestros que ocurren en un intervalo de extensión h e inicio t_1 se distribuye idénticamente que el de otro período de la misma extensión pero distinto inicio. Esta característica es debida a que la intensidad de siniestralidad no depende del tiempo natural.

EXCLUSIÓN DE SINIESTRO MÚLTIPLE: En un suceso solo puede ocurrir un siniestro. Esto hace que los saltos del proceso sean unitarios.

[6] Hadley, G “Probabilidad y Estadística, Una introducción a la Teoría de la Decisión”

Existen determinados factores que hacen que estas condiciones no se cumplan, en el caso de los incrementos independientes, pueden existir condiciones que generen una cierta correlación entre siniestros de distintos periodos, sin embargo, el modelo puede seguir utilizándose convenientemente generalizado. La influencia de este tipo de factores puede ser cuantificable introduciendo una variable auxiliar que controle los cambios en la propensión del riesgo, mediante las distribuciones mixtas de Poisson. La condición de independencia se cumple de manera condicional, es decir, con la condición de que las circunstancias sean fijas.

Si el proceso es de incrementos estacionarios, ello implica que la intensidad de siniestralidad no depende del tiempo natural. Si λ depende del tiempo, el proceso deja de ser homogéneo, sin embargo puede solucionarse el problema y continuar trabajando con Poisson cambiando las unidades temporales: trabajando con el tiempo operativo.

Finalmente, en la exclusión de siniestros múltiples, puede suceder que un evento provoque varios siniestros, una manera de solucionar el problema es considerar todos los siniestros de un mismo evento como un solo siniestro.

2.1.4 Aplicaciones

Veamos una ilustración del proceso de Poisson. La marina desea construir dos submarinos nucleares con el mismo propósito. Se desea determinar cuantas refacciones de un transformador de calor muy costoso utilizado en el reactor nuclear deberán producirse en el momento de construir los submarinos; cada transformador de calor costara \$7000 si se produce con los submarinos y \$14000 si se manufactura después. Cualquier transformador que calor que no se utilice para cuando los submarinos hayan terminado su vida útil, constituirá pérdida total. Con base en datos históricos, la marina estima que la probabilidad de que se requieran n transformadores en un periodo de t años para los dos submarinos es poisson donde λ, la tasa media de uso, es de 0.2 por año. La marina no sabe durante cuanto tiempo permanecerán los submarinos en la flota, pero se estima que la vida esperada es de 10 años y la desviación típica de 2 años. Aunque es difícil determinarlo con exactitud, se considera que la densidad de probabilidad de la vida útil de los submarinos puede suponerse de tipo gamma.

En este caso el periodo no ha sido especificado, sino que es una variable aleatoria, la probabilidad de que cualquier número de refacciones, dependerá de la duración de los submarinos en servicio. Los costos dependen únicamente del número de unidades demandadas, y de este modo los posibles estados de la naturaleza corresponden con los distintos números posibles de refacciones que se demandarán. Sea X la variable aleatoria que representa el número de partes demandadas. Ahora consideraremos la determinación de P(x), es decir, la función de probabilidad de x. El valor que observamos de x puede verse como el resultado de un experimento bietápico. En la primera etapa queda determinada la vida de servicio t, y luego, dado este valor, se determina el número de refacciones demandadas. Por lo tanto dicha probabilidad es: $p(n) = \int_0^{\infty} p(n;\theta t) g(t;\alpha,\lambda,) dt$ donde $g(t;\alpha,\lambda,)$ es la función gamma que da la densidad de la vida de servicio, el resultado de esta integral es el siguiente:

$p(n)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{\lambda}{\theta+\lambda}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta}{\theta+\lambda}\right)^{n}$. Si α es un entero k y renombrando, entonces tenemos que $p(n)=\frac{(n+k)!}{n!k!}p^{k+1}q^{n}$. En este caso p(x) es la distribución binomial negativa $b_n(x;k+1,p)$, esto quiere decir que podemos utilizar para generalizar la distribución binomial negativa al caso en el que k no sea entero. En este caso p(n) se convierte en $p(n)=\frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)p^{\alpha+1}q^{n};n\geq 1$ y $p(0)=p^{\alpha+1}$. Sabemos que, la distribución gamma tiene una media de 10 años y una varianza de 4 años, entonces $\lambda=\frac{\mu}{\sigma^2}=\frac{10}{4}=2.5;$ y $\alpha+1=\mu\lambda=25$, también sabemos que la tasa de uso medio es $\theta=0.2$ por año, de modo que $p=\frac{\lambda}{\theta+\lambda}=\frac{2.5}{.2+2.5}=\frac{2.5}{2.7}=0.9258$ y $q=\frac{\theta}{\theta+\lambda}=\frac{0.2}{.2+2.5}=\frac{.2}{2.7}0.0742$, para los costos tenemos $C=7000$ y $T=14000$. Además $S=0$ puesto que las unidades no se venden y $R=0$ que no hay valor de rescate. Por lo tanto, el número óptimo de refacciones a solicitar, es la n para la cual $P(n)\geq\frac{T-C}{T}=\frac{7000}{14000}=0.5$, donde $P(x)$ es la distribución acumulativa de x, así utilizando los datos anteriores tenemos que:

$$P(0)=p(0)=0.1455$$
$$P(1)=p(0)+p(1)=0.415$$
$$P(2)=p(0)+P(1)+p(2)=0.675$$

De esta manera $n=2$ y por lo tanto deberán producirse dos transformadores de calor adicionales durante la construcción de submarinos

2.2 Teoría Colectiva del Riesgo

En este tema analizaremos la solvencia en el caso del horizonte finito $(H=1)$ y solo al final del periodo $(h=1)$. Sin perdida de generalidad podemos considerar que el periodo es de un año.

Utilizaremos en principio el modelo básico, de forma que:
$U=U_0+(1+\lambda)P-S$

donde $P=E(S)$. El único factor aleatorio es la siniestralidad total (S), por lo que en primera instancia vamos a estudiar esta variable aleatoria a fondo.

Según la Teoría Colectiva del Riesgo, el costo total S es: $S=X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots+X_N$ donde:

$X_i\rightarrow$ Es la Variable Aleatoria Cuantía de la i-ésima póliza o riesgo

$N \rightarrow$ Es la Variable Aleatoria No. Total de Siniestros

Las hipótesis que se realizan son:

- Las variables aleatorias X_i están equidistribuidas, siendo X la cuantía de un siniestro.

- Las variables aleatorias X_i son independientes entre si.

- La cuantía de un siniestro X es independiente del número de siniestros N.

2.2.1 La Siniestralidad total de un periodo

Para el estudio de la variable aleatoria S debemos obtener primero sus momentos y la función generadora de momentos (que quedarán en función de N y X) de forma general, es decir, independientemente de las distribuciones concretas que se utilicen para modelizar N y X. En segundo lugar y previo el análisis de las distribuciones utilizadas normalmente para modelizar el número de siniestros N (POISSON – BINOMIAL NEGATIVA) indicaremos los valores de los momentos y la función generadora de momentos de S para cada distribución de N. Calculados los momentos de la cuantía total, analizamos los métodos para calcular (de forma exacta o aproximada) su función de distribución, algo imprescindible para analizar la solvencia y probabilidad de ruina; existen numerosos métodos y muchos estudios realizados en este campo, sin embargo se intentará trabajar con los principales.

2.2.1.1 Momentos Ordinarios y Centrales

Sea ξ una variable aleatoria cualquiera, tenemos:

Momentos Ordinarios:

$$\alpha_1(\xi) = E(\xi) = \mu(\xi)$$
$$\alpha_2(\xi) = E(\xi^2)$$
$$\vdots$$
$$\alpha_i(\xi) = E(\xi^i)$$

Momentos Centrales:

$$\mu_2(\xi) = E\left[(\xi - E[\xi])^2\right] = \sigma^2(\xi) = \alpha_2(\xi) - \alpha_1^2(\xi)$$

$$\mu_3(\xi) = E\left[(\xi - E[\xi])^3\right] = \alpha_3(\xi) - 3\alpha_1(\xi)\alpha_2(\xi) + 2\alpha_1^3(\xi)$$

$$\mu_4(\xi) = E\left[(\xi - E[\xi])^4\right] = \alpha_4(\xi) - 4\alpha_1(\xi)\alpha_3(\xi) + 6\alpha_1^2(\xi)\alpha_2(\xi) - 3\alpha_1^4(\xi)$$

Media $\quad \mu(\xi) = \alpha_1(\xi)$

Varianza $\quad \sigma^2(\xi)$

Asimetría $\gamma_1(\xi) = \dfrac{\mu_3(\xi)}{\sigma^3(\xi)}$

Kurtosis $\gamma_2(\xi) = \dfrac{\mu_4(\xi)}{\sigma_2^2(\xi)} - 3$

2.2.1.2 Función Generadora de Momentos

A partir de la función generadora de momentos podemos obtener fácilmente los momentos ordinarios mediante el valor de las derivadas sucesivas de esta función en el punto $\tau = 0$

$$M_\xi(\tau) = E\left[e^{\xi\tau}\right]$$

$$\alpha_i(\xi) = E\left(\xi^i\right) = \frac{d^i M_\xi(\tau)}{d\tau^i}\Big|_{\tau=0} = M_\xi^{(i)}(0)$$

La Función Generadora de Momentos tiene algunas propiedades interesantes que conviene recordar:

1. Puede expresarse mediante la expansión de momentos ordinarios: $M_\xi(\tau) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \dfrac{\tau^h}{h!}$

2. La función de Distribución esta determinada de manera única por su Función Generadora de Momentos (si existe).

3. Si $y = a\xi + b, \Rightarrow M_y(\tau) = e^{b\tau} M_\xi(a\tau)$

4. Si ξ_1 y ξ_2 son variables aleatorias independientes, la función generadora de la suma $\xi_1 + \xi_2$ se obtiene por producto, $M_{\xi_1+\xi_2}(\tau) = M_{\xi_1}(\tau) M_{\xi_2}(\tau)$. (En el caso de las funciones de distribución, estaríamos hablando de convoluciones)

2.2.2 Distribución del monto de los siniestros

Conocidas las funciones generadoras de momentos del número de siniestros y de la cuantía de un siniestro, podemos obtener las correspondientes al costo total. A partir de esta, pueden ser obtenidos los momentos de este costo total.

Para esto, determinaremos la función generadora de momentos de S

$$M_s(T) = \mathrm{E}\left[e^{\tau S}\right] = \mathrm{E}\left[E\left[e^{\tau S} / N\right]\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}^{\tau X_1 + \tau X_2 + \tau X_3 + \ldots + \tau X_N}\right]$$

$$\left\{\begin{matrix} X_i independientes \\ y \\ equidistribuibles \end{matrix}\right\}$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(E\left(e^{\tau X}\right)\right)^N\right] = \mathrm{E}\left[e^{N \ln M_x(\tau)}\right]$$

$$= M_N(\ln Mx(\tau))$$

Ahora, a partir de la función generadora de momentos obtendremos la esperanza y la varianza de S por dos métodos distintos, utilizando esperanza y varianza condicional, y la función generadora de momentos.

Esperanza

Utilizando esperanza condicional tenemos lo siguiente:

$$E[S] = E[E[S / N]]$$

$$= E[E[X_1 + X_2 + \ldots + X_N / N]]$$

$$= \{X_i equidistribuidas\}$$

$$= E[NE[X]] = E[N]E[X]$$

Ahora se obtendrá mediante el uso del a Función Generadora de momentos

$$M_S^{'}(\tau) = M_N^{'}(\ln M_X(\tau))\frac{M_X^{'}(\tau)}{M_X(\tau)}$$

$$E[S] = \left[M_s^{'}(t)\right]_{t=0} = \begin{Bmatrix} M_X(0) = 1 \\ \ln M_X(0) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= M_N^{'}(\tau) M_X^{'}(\tau) \\ &= \alpha_1(N) * \alpha_1(X) \\ &= E[NE[X]] = E[N]E[X] \end{aligned}$$

Para determinar la varianza del costo total seguiremos los mismos procedimientos que se utilizaron para determinar la esperanza

$$V[S] = V[E[S/N]] + E[V[S/N]]$$

sabemos que: $= [E[S/N] = NE[X]]$

entonces tenemos que $= V[NE[X]] + E[V[X_1 + X_2 + ... + X_N / N]]$

así mismo sabemos que las X_i son independientes y están equidistribuidas

$$\Rightarrow V[X_1 +_2 + ... + X_N / N] = NV[X]$$

$$\begin{aligned} &= V[NE[X]] + E[NV[X]] \\ &= E^2[X]V[N] + E[N]V[X] \end{aligned}$$

A partir de la Función Generadora de Momentos del costo total tenemos:

$$M_S^{''}(\tau) = \left(M_s^{'}(\tau)\right)^{'}$$

$$= M_N^{'}\left(\ln M_X(\tau) * \frac{M_X^{'}(\tau)}{M_X(\tau)}\right)^{'}$$

$$= \mathrm{M}_N^{'}(\ln M_X(\tau)) * \left(\frac{M_X^{''}(\tau)}{M_X(\tau)} - \left(\frac{M_X^{'}(\tau)}{M_X(\tau)}\right)^2\right)$$

$$+ M_N^{''}(\ln M_X(\tau)) * \left(\frac{M_X^{'}(\tau)}{M_X(\tau)}\right)^2$$

Siendo el momento ordinario:

$$\alpha_2(s) = \left[M_S^{''}(\tau)\right]_{\tau=0} = \alpha_1(N)\left(\alpha_2(X) - \alpha_1^2(X)\right) + \alpha_2(N)\alpha_1^2(X)$$

$$\alpha_1(N)\mu_2(X)+\alpha_2(N)\alpha_1^2(X)$$

a partir de este resultado claramente se ve que la varianza es la misma que con el procedimiento anterior

El cálculo de los momentos ordinarios de orden superior a dos se realiza a partir de la fgm. Los momentos centrales se calculan a partir de los ordinarios aplicando las expresiones que relacionan centrales con ordinarios obteniéndose entre otros los siguientes resultados:

Momentos Ordinarios:

$$\alpha_3(S)=\alpha_1^3(X)\alpha_3(N)+3\alpha_2(N)\alpha_1(X)\mu_2(X)+\alpha_1(N)\mu_3(X)\rightarrow \textit{Asimetría}$$

$$\begin{aligned}\alpha_4(S)=&\,6\alpha_3(N)\alpha_1^2(X)\mu_2(X)+\alpha_4(N)\alpha_1^4(N)\alpha_1^4(X)+\alpha_1(N)\left(\mu_4(X)-3\mu_2^2(X)\right)+\\&+\alpha_2(N)\left(4\alpha_1(X)\alpha_3(X)+3\alpha_2^2(X)+11\alpha_1^4(X)-18\alpha_1^2(X)\alpha_{2|}(X)\right)\end{aligned}$$

Momento Central:

$$\mu_3(S)=\alpha_1^3(X)\mu_3(N)+3*\mu_2(N)\alpha_1N\mu_2(X)+\alpha_1(N)\mu_3(X)$$

La distribución de la suma de un número aleatorio de variables aleatorias equidistribuidas se denomina distribución compuesta o generalizada, de forma que S seguirá una distribución Poisson Compuesta o Binomial-Negativa Compuesta según el número de siniestros siga una distribución de Poisson o Binomial-Negativa respectivamente. Por lo tanto debemos analizar previamente las distribuciones más usuales para la variable aleatoria número de siniestros.

2.2.2.1 La Distribución Poisson

La distribución de Poisson surge si se asume que los siniestros se producen según un proceso estocástico de Poisson ($N(t)$ es un proceso de Poisson) e indica el estado del proceso para un tiempo determinado.

Cuando analizamos más de un periodo de tiempo utilizamos el proceso estocástico de Poisson, por el momento solo nos centraremos a la distribución Poisson para un periodo determinado $t=1$.

Siendo λ el número medio de siniestros, se tiene que si el número de siniestros se distribuye como una Poisson $N\rightarrow P(\lambda)$

Propiedades

$$P_k = P[N = k] = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$M_N(\tau) = e^{\lambda\left(e^{\tau}-1\right)}$$

Momentos Ordinarios

$$\alpha_1(N) = E[N] = \lambda$$
$$\alpha_2(N) = \lambda + \lambda^2$$
$$\alpha_3(N) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$
$$\alpha_4(N) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4$$

Momentos centrales

$$\mu_2(N) = V[N] = \lambda$$
$$\mu_3(N) = \lambda$$
$$\mu_4(N) = \lambda + 3\lambda^2$$

$$\gamma_1(N) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\gamma_2(N) = \frac{1}{\lambda}$$

2.2.3 La distribución mixta o ponderada

La intensidad de siniestralidad puede no ser constante; si la variación es determinista (por ejemplo provocada por el paso día-noche) no hay problema pues las hipótesis del proceso de Poisson continúan cumpliéndose. Pero cuando la variación es aleatoria, la condición de incrementos independientes, deja de cumplirse. En estos casos la variación estocástica de la intensidad de siniestralidad puede interpretarse como cambios aleatorios de parámetro respecto de su valor esperado λ. El cambio puede describirse a través de un factor multiplicativo Q tal que la $E(Q) = 1$ con Q positiva Q>0. La variable aleatoria Q recibe el nombre de variable de ponderación o mixtura y en este caso el número de siniestros en un periodo, y en concreto el número de siniestros en un año N sigue una distribución mixta de

Poisson. Conocido un valor de Q concreto la variable aleatoria condicionada N/Q es Poisson de parámetro λQ de tal forma que queda determinada como: $P[N = K / Q = q] = \frac{e^{-\lambda q}}{k!}(\lambda Q)^k$

La distribución del número de siniestros sin condicionar se calculará entonces como:

$$P[N = K] = \int_0^{\infty} P[N = K / Q = q] * d \quad F_Q(q) \; = \begin{cases} \int_0^{\infty} P[N = k / Q = q] f_Q(q) dq \\ \sum_{\forall q} P[N = K / Q = q] P[Q = q] \end{cases}$$

siendo su esperanza $E[N] = \lambda$

Dependiendo de la naturaleza del fenómeno, la forma de las funciones de distribución y densidad de la variable de mixtura serán distintas

La obtención de la Función Generadora de Momentos de N si es Distribución Mixta de Poisson se realiza aplicando las propiedades de las variables aleatorias condicionadas

$$M_N(\tau) = E[e^{\tau N}] = E[E[e^{\tau N} / Q]]$$

$$= \left\{ \text{Para un valor de Q, el número de siniestros es Poisson con fgm } e^{\lambda Q(e^{\tau}-1)} \right.$$

$$= E\left[e^{\lambda Q(e^{\tau}-1)}\right]$$

$$= M_Q(\lambda(e^{\tau} - 1))$$

$$M_Q(\ln M_{Np}(\tau)) \longrightarrow \text{f.g.m. de la v. a. de la mixtura}$$

donde N_P representa la variable aleatoria número de siniestros si su número medio fuese constante λ, es decir, Poisson

La obtención de los momentos centrales y ordinarios de la mixta de Poisson pueden realizarse a partir de la expresión que hemos obtenido para su fgm.

Este proceso ya lo hemos realizado con anterioridad para la variable aleatoria costo total S. Observemos la similitud entre la expresión de la fgm. de N mixta de Poisson en función de la fgm. De Q y N_p, con la fgm. de S en función de la f. g. m. de N y X.

$$E[N] = \lambda$$

$$V[N] = \lambda(\lambda V[Q] + 1)$$

$$\mu_3(N) = \lambda^3 \mu_3(Q) + 3\lambda\mu_2(Q) + \lambda\alpha_1(Q)$$

La suma de variables aleatorias mixtas de Poisson independientes (aunque pueden depender a través de la variable aleatoria de mixtura, i. e. las variables aleatorias de mixtura pueden depender unas de otras). Es una mixta de Poisson de λ, la suma de las correspondientes a las variables aleatorias que se suman y con variable de mixtura resultante de la media aritmética ponderada de las v. a. de mixtura de los sumandos.

Por ejemplo: Si sumamos dos variables aleatorias mixtas de Poisson de medias λ_1 y λ_2 con variable aleatoria de mixtura Q_1 y Q_2 la suma tiene como media la suma de las dos medias,es decir, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ y como variable aleatoria de mixtura $Q = \dfrac{\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2}{\lambda}$

2.2.3.1 La distribución Binomial Negativa

La distribución Binomial Negativa para el número de siniestros es una distribución mixta de poisson cuya variable de mixtura Q se distribuye según una distribución Gamma de esperanza unitaria. Resumimos las características de la función Gamma con dos parámetros Ga (a, b).

Para poder utilizar esta función de distribución como variable de mixtura es necesario hacer que su media sea 1; Por lo tanto utilizaremos una Gamma de parámetro h $\therefore$ $Ga(h,h)$
Haciendo esto se tiene que sus respectivos momentos son los siguientes:

Esperanza $E[Q] = 1$

Varianza $V[X] = \dfrac{1}{h}$

Asimetría $\gamma_1 = \dfrac{2}{\sqrt{h}}$

Kurtosis $\gamma_2 = \dfrac{6}{h}$

En la disribución mixta de Poisson anteriormente se vio que:

$$P[N=k]=\int_0^\infty P[N=k/Q=q]f_Q(q)dq$$

Si Q es Ga (h,h), N sigue una distribución Binomial Negativa,donde:

$$P[N=K]=\binom{h+k-1}{k}\left(\frac{h}{\lambda+h}\right)^h\left(\frac{\lambda}{\lambda+h}\right)^k$$

Es decir, N se distribuye $BN(\alpha,p)$ con $\alpha=h$ y $p=\frac{h}{\lambda+h}$

A continuación resumimos las caracaterísticas principales de la distribución binomial negativa:

Función Generadora de Momentos	$M_N(\tau)=\left(\frac{h}{h-\lambda(e^\tau-1)}\right)^h$
Esperanza	$E[N]=\lambda$
Varianza	$V[N]=\lambda+\frac{\lambda^2}{h}$
Asimetría	$\gamma_1(N)=\frac{\lambda+\frac{3\lambda^2}{h}+\frac{2\lambda^3}{h^2}}{(V[N])^{3/2}}$

La distribución Binomial como distribución para modelizar el número de siniestros en un periodo surge no solamente del esquema explicado hasta ahora sino también de otros enfoques

En el proceso de obtención de la Binomial Negativa que acabamos de realizar, esta resulta como un caso particular de la mixta de Poisson, donde la mixtura intentaba modelizar la variación del parámetro λ de Poisson de un periodo temporal respecto de otro debido a factores aleatorios, por lo tanto en este caso el número de siniestros hace referencia al de todo un colectivo, cuya intensidad de siniestralidad varia de un periodo a otro.

2.2.3.2 Propiedad de Aditividad de las Distribuciones Compuestas
Generalmente, una cartera de seguros se encuentra dividida en una serie de clases diferentes, siendo posible calcular la variable aleatoria cuantía de un siniestro X en cada clase (para cada clase j, tendremos la cuantía X_j y la correspondiente cuantía total o agregada para cada

clase S_j. Nos preocupamos de determinar la variable aleatoria S, cuantía total para toda la cartera. Se pueden distinguir tres casos

- Caso General

La suma de distribuciones mixtas de Poisson compuestas independientes no es una distribución compuesta. Sin embargo, debido a la condición de independencia, los parámetros de la suma pueden expresarse a través de los correspondientes a los sumandos (mixtas de Poisson compuestas), en concreto

$$E[S] = \sum_{\forall j} E[S_j]$$

$$V[S] = \sum_{\forall j} V[S_j]$$

$$\gamma_1 = \frac{\sum_{\forall j} \sigma^3(S_j)\gamma_1(S_j)}{\sigma^3(S)}$$

- Poisson Compuesta

La suma de distribuciones Poisson compuestas independientes es una poisson compuesta. Simbolizando por λ_j al parámetro de S_j y por F_{X_j} a la función de distribución de la cuantía de un siniestro en la clase j, se tiene que los parámetros de S Poisson compuesta son:

$$\lambda = \sum_{\forall j} \lambda_j$$

$$F_X = \sum_{\forall j} \frac{\lambda_j}{\lambda} F_{X_j}$$

Es decir, la función de distribución de X (cuantía de un siniestro en la cartera) se calcula como una media aritmética ponderada de las funciones de distribución de la cuantía de un siniestro en cada una de las clases.

La demostración se realiza utilizando las propiedades de las funciones generadoras de momentos.

Si S_j es Poisson compuesta sabemos que $M_{S_j}(\tau) = e^{\lambda_j (M_{X_j}(\tau) - 1)}$ al ser las variables aleatorias S_j independientes entre si se tiene que

$$M_S(\tau) = \prod_{\forall j} M_{S_j}(\tau) = \prod_{\forall j} e^{\lambda_j (M_{X_j}(\tau) - 1)} =$$

$$= e^{\sum_{\forall j} \lambda_j \left(M_{X_j}(\tau) - 1\right)} = \left\{ \begin{array}{l} haciendo \\ \lambda = \sum_{\forall j} \lambda_j \end{array} \right\} =$$

$$= e^{\lambda \left(\sum_{\forall j} \frac{\lambda_j}{\lambda} M_{X_j}(\tau) - 1 \right)}$$

Esta propiedad de la Poisson compuesta es importante pues permite la agrupación por clases y por periodos temporales e independientes.

Mixta de Poisson compuesta con la misma variable de Mixtura

La suma de mixtas de Poisson compuestas que no son independientes, pero que dependen únicamente a través de la variable de mixtura (que es la misma en todas),es mixta de poisson compuesta. La suma tiene como parámetro $\lambda = \sum_{\forall j} \lambda_j$ y como variable aleatoria de mixtura la misma en todos los sumandos; la demostración es inmediata sabiendo que S_j / Q siguen distribuciones Poisson compuesta de parámetro λQ y que serán independientes entre si, por lo que a ella podemos aplicarle el caso anterior respecto de la suma de Poisson compuesta independientes.

2.3 Aplicaciones

1. Demuestra que si N sigue una distribución Poisson, los valores de a y b para los cuales se cumple el algoritmo de Panjer son 0 y λ respectivamente.

2. Realizar la demostración del proceso de contaje por inducción, es decir, de muestra que $P_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda\tau} P_{n-1}(\tau) d\tau, n \geq 1$ es una poisson con parámetro λt.

3. Sean S_1 y S_2 las distribuciones de número de siniestros para dos riesgos R_1 y R_2, cada una de estos riesgos se distribuye poisson con los siguientes parámetros $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = 4$. Calcula por dos métodos la probabilidad de que $S = S_1 + S_2$, sea igual a 0,1, 2, 3.
   NOTA: Uno de los métodos debe ser el algoritmo de Panger, para esto utiliza la $P(S = 0)$ **que obtuviste en el otro método.**

4. El costo total de una cartera de riesgo, sigue una distribución Poisson Compuesta donde el número de siniestros se distribuye Poisson con $\lambda = 5$, y la distribución individual del monto reclamado es exponencial con media 50. El Asegurador, para efectos de reaseguro retiene el 80% del monto reclamado y cede el 20% del mismo. Encuentra la distribución de S_c además de su esperanza y varianza.

5. Tenemos una cartera dividida en tres grupos (A, B y C). Disponemos de información sobre el número medio de siniestros de cada grupo por meses de edad enero (1) a diciembre(12) de un año$\left(\lambda_{A,1},\ldots,\lambda_{C,12}\right)$. Suponiendo que las v.a. número de siniestros sigue una distribución de Poisson, plantear el cálculo de: (a) número medio de siniestros de la cartera total en un año, (b) número medio de siniestros de cada grupo en un año, (c) probabilidad de que la cuantía total tenga k siniestros en el mes de enero de un año y (d) probabilidad de que la cartera total tenga k siniestros en año.

6. Si N sigue una distribución Binomial Negativa. Determina de a y b para los cuales se cumple el algoritmo de Panjer son q y (k-1)q respectivamente.

7. A Partir de las propiedades de la Esperanza y Varianza Condicionales, demuestra que $Var(N) = \lambda(\lambda Var(Q) + 1)$

8. A partir de la f.g.m. de Q si es Ga (h,h) obtener las expresiones del momento central de segundo, tercer y cuarto orden.

9. En el área de Daños de Seguros del Centro, suscribieron 3,000 pólizas por cuatrimestre, en un año se presentaron 280 siniestros. Estimar la probabilidad de que un asegurado no declare siniestro alguno en 4 meses.

10. Suponga que un proceso productivo produzca X unidades por hora, con una fracción de defectuosas de p. ¿Puede considerarse el proceso que produce las unidades defectuosas como un proceso de Poisson, de manera que la probabilidad de que se produzcan n unidades defectuosas en un periodo t es $p(n, \lambda t)$? Explique con detalle.

11. Estimar la probabilidad de que durante un determinado año, dos asegurados independientes que suscribieron una póliza de accidentes en "Seguros el Potosí", declaren en conjunto un solo siniestro. Asumiendo que el número de siniestros en un año sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda = 0.14$ para ambas pólizas.

12. Considere una situación en la que dos procesos Poisson generan sucesos (los sucesos de ambos procesos se consideran iguales). Las tasas medias de ocurrencia de los sucesos de ambos procesos serán denotadas por λ_1 y λ_2. Considere ahora el problema de determinar la probabilidad $P_n(t)$ de que el numero total de sucesos generados en un tiempo de longitud t sea n. Demuestre que $P_n(t) = p[n, (\lambda_1 + \lambda_2)t]$, tal que los dos procesos Poisson sean equivalentes a uno sólo en el que la tasa media de ocurrencia de los sucesos es $\lambda_1 + \lambda_2$

CAPÍTULO III. REASEGURO Y TEORÍA DE RUINA

3.1 Reaseguro

3.1.1 Reaseguro tradicional

En el contrato de Reaseguro Tradicional, ya sea proporcional o no proporcional, el asegurador cedente transfiere al reasegurador una parte de su riesgo de suscripción (*underwriting risk*), es decir, cede una parte de la incertidumbre en cuanto a la siniestralidad total de su cartera.

A cambio de esta cesión, la cedente paga una prima al reasegurador. Con esta prima el reasegurador deberá generar unas provisiones, que le permitan afrontar sus obligaciones futuras en función de las estimaciones que haya realizado sobre lo que espera pagar por lo siniestros ocurridos o previsibles, sea cual sea la fecha de ocurrencia de los mismos. El valor de estas reservas proporciona un rendimiento financiero desde el momento en que la prima es invertida y hasta el momento del pago de los siniestros ocurridos. Este interés no se tiene en cuenta al momento de formalizar el contrato de reaseguro porque de lo contrario el reasegurador podría considerarlo de forma actualizada al momento de provisionar el siniestro, reduciendo de esta manera la inversión inicial exigida. El Reaseguro Financiero incorpora esta consideración.

El principio en el que se basa el Reaseguro Financiero es permitir un mejor reparto del riesgo en el tiempo. Implica siempre la transferencia de un riesgo, o una parte de un riesgo, de la cedente al reasegurador, riesgos normalmente para los cuales la tarificación por los métodos tradicionales no es posible.

El Reaseguro Financiero solo puede existir en el marco de una relación a largo plazo y aquí la confianza mutua entre las partes es esencial. No es un sustituto del Reaseguro Tradicional sino un complemento.

3.1.2 Reaseguro Financiero

Podemos definir el Reaseguro Financiero, como el contrato de reaseguro a través del cual la cedente transfiere dentro de unos límites establecidos, el valor actual de una deuda futura resultante de la siniestralidad de una póliza o una cartera de pólizas.

La cedente, en el contrato de Reaseguro Financiero , para determinar la prima cedida y la cobertura demandada al reasegurador, considera en la estimación de la deuda el rendimiento financiero esperado generado por dicha deuda.

El Reaseguro Financiero es, por tanto, una transacción de reaseguro en la que los intereses financieros futuros forman parte de la suscripción y en la que el compromiso de los reaseguradores es limitado. La singularidad de este tipo de reaseguro es que existe una transferencia e igualación del riesgo a lo largo del tiempo con una sola compañía cedente y no sobre un determinado periodo contable con un gran número de cedentes, en caso de que se produzcan menos siniestros de los previstos, la cedente recibirá una compensación.

El Reaseguro Financiero es un contrato de reaseguro en el que además de incluirse los riesgos propios del Reaseguro Tradicional (Riesgo de Suscripción), considera dos riesgos adicionales:

- Riesgos Clásicos ligados a las inversiones (*investment risk*), dentro de los que se incluye el riego de insolvencia.
- Incertidumbre respecto al momento en el cual deberá efectuarse el pago de las indemnizaciones y respecto al plazo durante el cual las primas podrán estar invertidas (*Timing Risk*)

3.1.2.1 Riesgos Cubiertos

En el Reaseguro Financiero se distinguen dos grandes grupos de productos:

- *Retrospective Cover*s: Productos que realizan una cobertura retrospectiva. Cubren la evolución de los siniestros que se han producido.

- Prospective Covers: Productos que realizan una cobertura prospectiva. Garantizan la cobertura de los siniestros que todavía no han ocurrido.

En los dos casos, el principio básico subyacente es el reparto del riesgo a lo largo de un determinado periodo de tiempo.

Los reaseguradores financieros ofrecen productos dentro de estos dos grandes grupos, en tres categorías, a saber:

- Plan Estructurado de Pagos (*Structured Settlements*)
  A partir de un perfil estimado de reparto de los pagos por siniestros en el tiempo, las partes establecen un plan estructurado según el cual el reasegurador pagará las cuantías determinadas en fechas fijadas.

  El Reasegurador, en el momento de suscribir el contrato, se cubre mediante inversiones proporcionales iguales al valor actual de los pagos futuros. La prima cedida es igual a la suma de estos valores actuales más un recargo para cubrir los gastos administrativos y el margen de beneficios del reasegurador.

- (*Timing Risk*)
  En este tipo de cobertura, el reasegurador financia, a lo largo de varios años, los pagos por siniestros de la cedente hasta que estos alcancen un límite global determinado.

  La prima cedida en este caso corresponde al valor actual de todos los pagos sucesivos de siniestros que sumados dan lugar al límite del tratado a lo largo del tiempo.

  En este tipo de contrato, el reasegurador se expone al riesgo de que la velocidad de los pagos se acelere y sobrepase el tiempo estimado lo que obligaría a desinvertir las primas entes de lo previsto perdiendo una parte de los rendimientos financieros esperados.

- (*Finite Risk*)
  El Reasegurador se compromete a asumir hasta un determinado tope la parte de los siniestros que excedan la siniestralidad estimada.

Participa del riesgo de suscripción como un reasegurador tradicional. La prima cedida en el contrato tiene dos componentes:

- Una prima equivalente al valor actual de todos los pagos futuros de los siniestros que constituyen el límite del contrato.

- Una prima de riesgo ligada a la cobertura excedentaria

3.1.2.2 Objetivos y Características Principales
Los objetivos del Reaseguro Financiero son los mismos que los del Reaseguro Tradicional:

- Oferta de Capacidad.

- Estabilización de Resultados

- Oferta de una fuente de Financiamiento

Las características principales, las resumimos a continuación:

- Límite global de Garantía: Los contratos se basan en un límite global de garantía que supuestamente se absorbe en el momento de su vencimiento mediante el pago de los siniestros.

- Primas suficiente Altas: La prima cedida en estos contratos es, en principio, el valor actual de todos los pagos futuros y se aproxima al límite global establecido mediante un recargo por tasas administrativas y participación en beneficios del reasegurador.
  Esta prima se transfiere al reasegurador cuando de formaliza el contrato o se fracciona en pagos regulares.

- Reparto de Beneficios: En la mayoría de estos contratos se incluye una cláusula de participación de la cedente en los beneficios del reasegurador.
  Un ejemplo de este, es la cuenta de compensación, en esta cuenta se deposita la prima, reducida en el margen de beneficios del reasegurador, y es abonada periódicamente a un tipo de interés previamente determinado y cargada, también de manera periódica, por el importe de las indemnizaciones pagadas.

- Contratos de Larga Duración: Muchos de los contratos de este tipo de reaseguro cubren un periodo de varios años, lo que posibilita la continuidad de las relaciones aveces truncadas con los reaseguradores tradicionales.

3.1.2.3 Tipos de Reaseguro Financiero

Un contrato de Reaseguro Financiero, bajo cualquiera de las modalidades o coberturas anteriormente citadas, se formaliza específicamente para la cedente que lo solicita en función de sus necesidades. Esto supone que existen tantos tipos de tratados de Reaseguro como necesidades de coberturas distintas puedan presentar las distintas compañías aseguradoras que lo contratan.

A continuación, presentaremos las principales características de algunos de los tratados más destacados que se han elaborado hasta el momento:

- Cuota-Parte Financiero (*Surplus Relief Quota-Share*)
  La forma más antigua y elemental del Reaseguro Financiero es el Cuota-Parte Financiero. A excepción de ésta, las otras formas más recientes están orientadas hacia una financiación y reparto de la siniestralidad de la cartera.
  En algunos países el asegurador está obligado por las autoridades de control a constituir reservas suplementarias o a incrementar su capital en proporción a sus primas netas de reaseguro. Este tratado permite aligerar estas obligaciones , reduciendo a través de una tasa de cesión modulada el volumen de primas no cedidas de la cartera.

- *Time and Distance Policy*
  Sobre una base retrospectiva, este tipo de tratados obligan al reasegurador a pagar unas cuantías determinadas en fechas igualmente establecidas . La prima recibida se calcula en función del valor actual de estos pagos futuros más un margen por tazas administrativas y beneficio del reasegurador. Sobre esta base, si el cashflow actualizado se deteriora por pagos de siniestros más rápidos, el reasegurador reclama una prima complementaria ya que no asume en este tipo de tratado el timing risk. En caso contrario, el reasegurador gratifica a la compañía cedente devolviéndole parte de la prima cedida.

- *Lost Portafolio Transfer*
  La cedente, con el objetivo de liberarse de una cartera de riesgos, transfiere a un reasegurador financiero el valor actual de las reservas asociadas a los siniestros ocurridos pero no pagados. La desviación entre el valor contable de las reservas y su rescate sobre el valor actual proporciona un beneficio inmediato a la cedente. Esta transferencia de obligaciones puede operarse bajo la forma de reaseguro "*Timing Risk o Finite Risk*" . En este último caso el reasegurador asume el desarrollo imprevisible de la cartera de pólizas resultado de un *run-off* de negocios suscritos en el pasado.

- *Retrospective Aggregate Cover*
  Este tipo de contrato es igual al anterior pero en este la cedente transfiere igualmente sus reservas de primas no adquiridas, es decir, sus obligaciones sobre los siniestros que pueden ocurrir después de la transferencia de la cartera de pólizas y hasta la expiración de las mismas.

- *Prospective Aggregate Cover (PAC)*

La PAC es muy similar a un contrato de reaseguro "*stop loss*" tradicional en el que la cobertura financiada por las primas cedidas y los rendimientos financieros resultantes de su inversión se extienden a lo largo de varios años (Generalmente periodos quincenales). Este tipo de contratos pueden tener la forma de "*Timing Risk* o de *Finite Risk*". Las primas, a través de un mecanismo de participación en beneficios, son devueltas, en gran parte, a la cedente al término del contrato en función de los resultados obtenidos.

3.1.3 Planteamiento del Modelo

En esta sección realizaremos el estudio de las modalidades de reaseguro cuota-parte y de reaseguro de exceso de pérdidas (*excess-loss*) considerando tanto el enfoque tradicional como el enfoque financiero en la modalidad de *finite risk*, en este caso hacemos dos supuestos:

- Ley Financiera Cierta: En el momento de cálculo de la prima suponemos conocida la ley financiera que rige la operación dentro del horizonte temporal considerado.

- Ley Financiera Aleatoria: En este caso suponemos que la ley financiera que rige la operación es perturbada por una componente aleatoria.

3.1.3.1 Modelo Tradicional

En el reaseguro tradicional, no se considera el tipo de interés en el cálculo de la prima de reaseguro ya que ésta, al referirse generalmente a periodos cortos (anuales), no tiene en cuenta el momento en el que se produce el siniestro. Como consecuencia el proceso de riesgo dado por la variable aleatoria costo total de la operación depende solamente de las variables aleatorias número de siniestros y costo de los siniestros.

Sea Z la variable aleatoria costo total, referido a un determinado horizonte temporal $[0,t]$, donde t está expresado en años. Al considerarse reducido el horizonte temporal a t, podemos obtener la variable aleatoria costo total Z , como la suma aleatoria de las variables aleatorias número de siniestros N y costo de cada siniestro X_i, es decir, $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$, donde:

N Es la variable aleatoria número de siniestros asociados al intervalo $[0,t]$
X_i, con $i = 1,2,3,\ldots,N$ la variable aleatoria costo del i-ésimo siniestro
Suponemos que estas variables son independientes entre sí y equidistribuidas.

Bajo estas hipótesis de independencia entre las variables aleatorias N y X_i, la prima pura total de la operación en términos esperados, puede calcularse como la esperanza matemática de la variable costo total, esto es resultando:

$E[Z] = E[N]E[X]$, siendo la varianza de dicha variable $V[Z] = E[N]V[X] + V[N]E[X]^2$

La consideración del reaseguro, nos permite descomponer el costo total Z en la suma de dos variables aleatorias $Z = Z_c + Z_r$, donde:

$Z_c =$ Es la variable aleatoria costo total retenido por la cedente en el intervalo $[0,t]$

$Z_r =$ Es la variable aleatoria costo total cedido al reasegurador en el intervalo $[0,t]$

Por lo tanto, en términos de esperanza tenemos que la prima retenida por la cedente y la prima que cobra el reasegurador, satisfacen la siguiente relación: $E[Z] = E[Z_c] + E[Z_r]$

Ahora procederemos a determinar la prima de la cedente y la prima de reaseguro para las modalidades cuota-parte y exceso de pérdidas.

Modalidad Cuota-Parte

Este tipo de reaseguro es una modalidad del reaseguro proporcional, en el cual la cedente transfiere un coeficiente preestablecido de toda la cartera , o bien de un determinado ramo de seguros , para un ejercicio económico dado. Este coeficiente sirve para determinar la participación del reaseguro en la prima y las indemnizaciones.

Esta modalidad solo afecta a la variable aleatoria costo total del siniestro, por tanto la variable aleatoria costo total del siniestro i-ésimo a cargo de la cedente, $X_{i,c}$, y la variable aleatoria costo total del siniestro i-ésimo a cargo del reaseguro $X_{i,r}$, estarán dadas por la siguiente transformación de la variable aleatoria X_i

$$X_{i,c} = kX_i \qquad\qquad X_{i,r} = (1-k)X_i$$

Donde k es el coeficiente de retención de la cedente expresado en tanto por uno y (1-k) el coeficiente de cesión al reaseguro expresado en tanto por uno. Como consecuencia los procesos de riesgo asociados a la cedente y al reasegurador dados por las variables aleatorias Z_r y Z_c vienen dados por:

$$Z_r = \sum_{i=1}^{N} X_{i,r} = \sum_{i=1}^{N} (1-k)X_i \qquad\qquad Z_c = \sum_{i=1}^{N} X_{i,c} = \sum_{i=1}^{N} kX_i$$

Tal que la prima de reaseguro y de la cedente en términos esperados es la siguiente:

$$E[Z_r] = (1-k)E[Z] \qquad\qquad E[Z_c] = kE[Z]$$

y sus correspondientes varianzas

$$V[Z_r] = (1-k)^2 V[Z] \qquad\qquad V[Z_c] = k^2 V[Z]$$

Modalidad Exceso de Pérdidas
Se trata de una modalidad de reaseguro no proporcional en el que el reasegurador indemnizará a la cedente individualmente por la ocurrencia de aquellos siniestros cuyo importe supere el pleno de retención (M), fijado por ella.

Al igual que en la modalidad *cuota-parte*, la variable aleatoria que se ve modificada como consecuencia de la introducción del reaseguro, es la variable aleatoria costo total del i-ésimo siniestro, X_i.

En este caso las variables aleatorias costo del i-ésimo siniestro a cargo de la cedente $X_{i,c}$ y del reasegurador $X_{i,r}$ vendrán dadas por las siguientes transformaciones de la variable aleatoria X_i:

$$X_{i,c} = \begin{cases} X_i & X_i < M \\ M & X_i \geq M \end{cases} \qquad\qquad X_{i,r} = \begin{cases} 0 & X_i < M \\ X_i - M & X_i \geq M \end{cases}$$

siendo los correspondientes procesos de riesgo:

$$Z_c = \sum_{i=1}^{N} X_{i,c} \qquad\qquad Z_r = \sum_{i=1}^{N} X_{i,r}$$

La prima de la cedente y del reasegurador en términos esperados, viene dada por las siguientes expresiones:

$$E[Z_c] = E[N]\int_0^M (1-F(x))dx \qquad\qquad E[Z_r] = E[N]\int_M^\infty (1-F(x))dx$$

donde $F(x) = P[X \leq x]$

En lo que respecta a las varianzas tenemos:

$V(X_c) = E[N]V[X_c] + V[N]E[X_c]^2 = E[N]\left(E\left(X_c^2\right) - E(X_c)^2\right) + V[N]E[X_c]^2$ donde:

$$E\left[X_c\right]=\int_0^M (1-F(x))dx \qquad\qquad E\left[X_c^2\right]=2\int_0^M (1-F(x))dx$$

$V\left(X_r\right)=E[N]V\left[X_r\right]+V[N]E\left[X_r\right]^2 = E[N]\left(E\left(X_r^2\right)-E\left(X_r\right)^2\right)+V[N]E\left[X_r\right]^2$ donde:

$$E\left[X_r\right]=\int_M^{\infty} (x-M)(1-F(x))dx \qquad\qquad E\left[X_r^2\right]=2\int_M^{\infty} (x-M)(1-F(x))dx$$

3.1.3.2 Reaseguro Financiero

En el reaseguro financiero consideramos el tipo de interés en el cálculo de la prima de la cedente y del reaseguro, por tanto, el proceso de riesgo dado por la variable aleatoria Z estará compuesto por una nueva variable aleatoria que recogerá el momento del tiempo donde se producen los siniestros dentro del intervalo considerado, en consecuencia, el proceso de riesgo viene dado por: $Z=\sum_{i=1}^{N} X_i f\left(T_i,0\right)$, siendo de T_i la variable aleatoria que indica el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del siniestro *i-ésimo*, expresado en años y $f\left(T_i,0\right)$ el factor financiero de actualización.

Los procesos de riesgo de la cedente y del reasegurador son los siguientes:

$$Z_c=\sum_{i=1}^{N} X_{i,c} f\left(T_i,0\right) \qquad\qquad Z_r=\sum_{i=1}^{N} X_{i,r} f\left(T_i,0\right)$$

de manera que, para el reaseguro cuota-parte: $X_{i,c}=kX_i$; $X_{i,r}=(1-k)X_i$

en el caso de la modalidad exceso de pérdidas tenemos lo siguiente:

$$X_{i,c}=\begin{cases} X_i & X_i<M \\ M & X_i\geq M \end{cases} \qquad\qquad X_{i,r}=\begin{cases} 0 & X_i<M \\ X_i-M & X_i\geq M \end{cases}$$

Las expresiones de la esperanza y de la varianza de los procesos de riesgo Z, Z_r y Z_c empleadas en el reaseguro tradicional no son válidas en este caso debido a la incorporación de la variable aleatoria T_i. Por lo tanto, para poder determinar $E(Z), E(Z_c), E(Z_r)\, V(Z), V(Z_c)$ y $V(Z_r)$ una vez conocidas las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias N, X_i y T_i simulamos directamente las diferentes realizaciones o trayectorias de las variables Z, Z_r y Z_c a través del método de Monte Carlo.

Las realizaciones, Z_s, Z_{cs} y Z_{rs}, de las variables aleatorias Z, Z_c, Z_r dada la simulación s-ésima, las obtenemos como indicamos a continuación.
Si NSIM es el número de simulaciones realizadas:

$$Z_s = \sum_{i=1}^{N_i} X_{i,s} f(T_{i,s},0) \qquad s = 1,2,\ldots\ldots, NSIM$$

$$Z_{r,s} = \sum_{i=1}^{N_i} X_{i,r,s} f(T_{i,s},0) \qquad s = 1,2,\ldots\ldots, NSIM$$

$$Z_{c,s} = \sum_{i=1}^{N_i} X_{i,c,s} f(T_{i,s},0) \qquad s = 1,2,\ldots\ldots, NSIM$$

donde N_s es la realización de la variable aleatoria N dada la simulación s-ésima; $T_{i,s}$ la realización de la variable aleatoria T_i dada la simulación s-ésima; $X_{i,s}$ la realización de la variable aleatoria X_i dada la simulación s-ésima; $X_{i,c,s}$ la realización de la variable aleatoria $X_{i,c}$ dada la simulación s-ésima; $X_{i,r,s}$ la realización de la variable aleatoria $X_{i,r}$ dada la simulación e-ésima.

Teniendo en cuenta que las realizaciones obtenidas por simulación son equiprobables:

$$P[Z = Z_s] = P[Z_c = Z_{c,s}] = P[Z_r = Z_{r,s}] = \frac{1}{NSIM} \qquad s = 1,2,\ldots\ldots, NSIM$$

entonces podemos caracterizar totalmente la distribución de probabilidad de Z, Z_c, Z_r, por lo que contamos con las condiciones para calcular cualquier momento de estas variables aleatorias como por ejemplo la esperanza, varianza o desviación estándar:

$$E[Z] = \sum_{s=1}^{NSIM} Z_s \frac{1}{NSIM} \qquad V[Z] = E[Z^2] - E^2[Z] \qquad D[Z] = \sqrt{V[Z]}$$

$$E[Z_c] = \sum_{s=1}^{NSIM} Z_{c,s} \frac{1}{NSIM} \qquad V[Z_c] = E[Z_c^2] - E^2[Z_c] \qquad D[Z_c] = \sqrt{V[Z_c]}$$

$$E[Z_r] = \sum_{s=1}^{NSIM} Z_{r,s} \frac{1}{NSIM} \qquad V[Z_r] = E[Z_r^2] - E^2[Z_r] \qquad D[Z_s] = \sqrt{V[Z_s]}$$

Para poder obtener por simulación las realizaciones Z_s, Z_{cs} y Z_{rs}, necesitamos determinar la naturaleza del factor financiero $f(T_{i,s},0)$

Ahora consideraremos la posibilidad de trabajar, con una ley financiera cierta y por tanto conocida en el intervalo $[0,t]$ lo que dará lugar a un factor financiero cierto o bien una ley financiera que rige la operación perturbada por una componente aleatoria, dando lugar a un factor financiero aleatorio.

Factor Financiero Cierto
En este caso suponemos que la ley financiera que rige el periodo temporal $[0,t]$ es cierta en el origen de la operación, por lo que conocemos el precio de la operación en todos los instantes que configuran el horizonte temporal, dando lugar a un factor financiero $f(T_{i,s},0)$ cierto donde: $f(T_{i,s},0)=e^{-\int_0^{T_{i,s}}\rho(\tau)d\tau}$, siendo $\rho(\tau)$ la ley financiera que rige en el instante τ y $T_{i,s}$, la realización s-ésima de la variable aleatoria T_i.
En el supuesto que la ley financiera sea constante resulta que $\rho(\tau)=\rho \ \forall\, \tau \in [0,T_{i,s}]$, entonces: $f(T_{i,s},0)=e^{-\rho T_{i,s}}$

Factor Financiero Aleatorio
En este caso suponemos desconocida la evolución futura del precio de la operación dentro del intervalo temporal $[0,t]$, por lo tanto la ley financiera evolucionara estocásticamente en el tiempo. Este planteamiento supone que, fijado un instante τ, la ley financiera asociada a ese instante $\rho(\tau)$ será una variable aleatoria.

El factor financiero de actualización estocástico se obtiene como el recíproco del factor financiero de capitalización. El factor de capitalización estocástica lo obtiene de la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dC_s = C_s \rho ds + C_s \sigma dW(s)$$

La solución, de esta ecuación diferencial estocástica da lugar al siguiente factor de capitalización estocástico:

$$f(0,s)=e^{\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(s)\right]}$$

siendo, ahora $f(0,s)$ una variable aleatoria que sigue una distribución lognormal de media $\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)s$ y varianza $\sigma^2 s$.
Por lo tanto el factor de actualización estocástica obtenido como recíproco de $f(0,s)$ es: $f(s,0)=\frac{1}{f(0,s)}=e^{-\left[\left(\rho-\frac{\sigma^2}{2}\right)s+\sigma W(s)\right]}$

La esperanza matemática del factor de actualización depende de la volatilidad de la ley financiera σ, de tal forma que si $\sigma=0$, la esperanza del factor coincidirá con el factor financiero cierto de la ley financiera constante. Bajo este criterio, el factor financiero cierto $f\left(T_{i,s},0\right)$, tomara la siguiente forma: $f\left(T_{i,s},0\right)=e^{-\left(\rho-\sigma^2\right)T_{i,s}}$.

La esperanza del factor financiero de actualización estocástico coincide con el factor financiero cierto de la ley financiera constante y por tanto es independiente de la volatilidad σ de la ley financiera. Por tanto bajo este criterio: $f\left(T_{i,s},0\right)=e^{-\rho T_{i,s}}$

3.1.4 Aplicaciones

En esta sección vamos a desarrollar numéricamente el Reaseguro Financiero tanto en la modalidad cuota-parte como en la modalidad de exceso de pérdidas.

Sea T_j-T_{j-1} el tiempo, en años, que transcurre entre el siniestro j y el siniestro $j-1$. Si el tiempo de ocurrencia entre siniestros sigue una distribución exponencial de parámetro λ para $j=1,2,3\ldots\ldots N$ y $\lambda>0$ y que son variables independientes entre si; entonces, puede demostrarse que la variable aleatoria número de siniestros N asociados al intervalo $\left[0,t\right]$,sigue una distribución Poisson de parámetro λt, es decir: $T_j-T_{j-1}\sim Exp\left(\lambda\right)$ para $j=1,2,3\ldots\ldots N$ y $\lambda>0$, entonces, $N\sim P\left(\lambda t\right)$.

Al distribuirse la variable aleatoria número de siniestros N según una distribución Poisson, entonces $E\left[N\right]=\lambda t$, pudiéndose interpretar al λ como el número medio anual de siniestros ocurridos en el intervalo $\left[0,t\right]$. El parámetro λ también nos servirá para calcular el tiempo medio entre dos siniestros, dado por $E\left(T_j-T_{j-1}\right)=1/\lambda$.

A partir de T_j-T_{j-1}, determinamos la variable aleatoria T_i por la suma $T_i=\sum_{j=1}^{i}T_j-T_{j-1}$

Ahora desarrollaremos varios ejemplos numéricos suponiendo lo siguiente:

$X_i\sim \mathrm{Exp}\left(\mu\right)$ para $i=1,2,3\ldots\ldots N$

$T_j-T_{j-1}\sim Exp\left(\lambda\right)$ para $j=1,2,3\ldots\ldots N$ por lo tanto

$N\sim P\left(\lambda t\right)$, tal que

λ es el número medio anual de siniestros asociados al intervalo $\left[0,t\right]$

$1/\mu$ es el costo medio de los siniestros en el intervalo $\left[0,t\right]$

Los datos que a continuación se presentan han sido calculados generando por simulación 100,000 relaciones de las variables aleatorias Z_c y Z_r

Se presentan ejemplos para ambos tipos de Reaseguro y ambas Leyes Financieras

Ley Financiera Cierta
Suponemos que el tipo de interés es conocido y constante para todo el horizonte temporal de la operación.

Reaseguro Cuota-Parte:

Cuota de Retención de la cedente k = 0.6
Cuota de cesión al reasegurador 1-k = 0.4
Horizonte temporal de la operación t = 5 años
No. medio anual de siniestros $\lambda = 50$
Costo medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.

Tanto Efvo Anual	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$
0	150,000	13,387.04	100,000	8,924.69
0.02	142,822.47	12,749.32	95,214.98	8,499.55
0.04	136,215.5	12,172.87	90,810.33	8,115.24

Reaseguro Exceso de Pérdidas:

Pleno de retención: $M = 1000$
Horizonte temporal de la operación t = 5 años
No. medio anual de siniestros $\lambda = 50$
Costo medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.

Tanto Efvo Anual	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$
0	158,039	11,477.65	91,961	13,523.7
0.02	150,465.8	10,931.06	87,571.58	12,879.13
0.04	143,505.87	10,436.94	83,519.02	12,296.54

En ambas modalidades de reaseguro podemos observar que la prima de reaseguro y la prima que retiene la cedente son inversamente proporcionales al tipo de interés de valoración tanto en términos esperados como en términos de desviaciones.

Si el tanto efectivo anual tanto en el reaseguro cuota-parte como en exceso de pérdida es $i = 0$, entonces se da la siguiente relación entre esperanzas

$E(Z_c)+E(Z_r)=E(N)E(X)=(250)(1000)=250{,}000=E(Z)$, esto debido a que ahora el proceso solo depende de las variables aleatorias N y X ; sin embargo al incorporar el tipo de interés en el cálculo de la prima: $E(Z_c)+E(Z_r)<E(N)E(X)=250{,}000$

Ley Financiera Aleatoria
Al considerar un ambiente financiero aleatorio, los valores calculados anteriormente coincidirían con la valoración estocástica si consideramos la esperanza matemática del factor de actualización dado por A. Alegre y R. Mayoral; sin embargo, si consideramos el factor de actualización en términos esperados por P Devolder, deberemos tener en cuenta la valoración de la volatilidad σ de la ley financiera.

Reaseguro Cuota-Parte:
Cuota de Retención de la cedente k = 0.6
Cuota de cesión al reasegurador 1-k = 0.4
Horizonte temporal de la operación t = 5 años
No. medio anual de siniestros $\lambda = 50$
Costo medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.
Tanto efectivo anual 0.04

Volatilidad σ	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$
0	136,215.5	12,172.87	90,810.33	8,115.24
0.002	136,216.82	12,172.98	90,811.21	8,115.32
0.004	136,220.77	12,173.32	90,813.85	8,115.51

Reaseguro Exceso de Pérdidas:

Pleno de retención: $M = 1000$
Horizonte temporal de la operación t = 5 años
No. medio anual de siniestros $\lambda = 50$
Costo medio de los siniestros $1/\mu = 1000$ u.m.
Tanto efectivo anual 0.04

Volatilidad	$E(Z_c)$	$D(Z_c)$	$E(Z_r)$	$D(Z_r)$
0	143,505.87	10,436.94	83,519	12,296.54
0.002	143,507.26	10,437.03	83,520.78	12,296.66
0.004	143,511.42	10,437.33	83,523.2	12,297.01

En ambos casos observamos que la volatilidad afecta a la prima de reaseguro y a la que retiene la cedente de forma proporcional, por lo tanto, cuanto mayor sea la volatilidad de la ley financiera o mientras mas inestable sea el ambiente financiero, mayor será la prima de operación lo que repercute directamente en la prima que retiene la cedente y la que cobra el reasegurador.

3.2 Teoría de Ruina

3.2.1 Introducción

La finalidad de este tema es la de presentar un modelo matemático para las variaciones en el monto del excedente de un asegurador en un periodo amplio. Por excedente entendemos el exceso de algún fondo inicial más las primas cobradas sobre las reclamaciones pagadas.

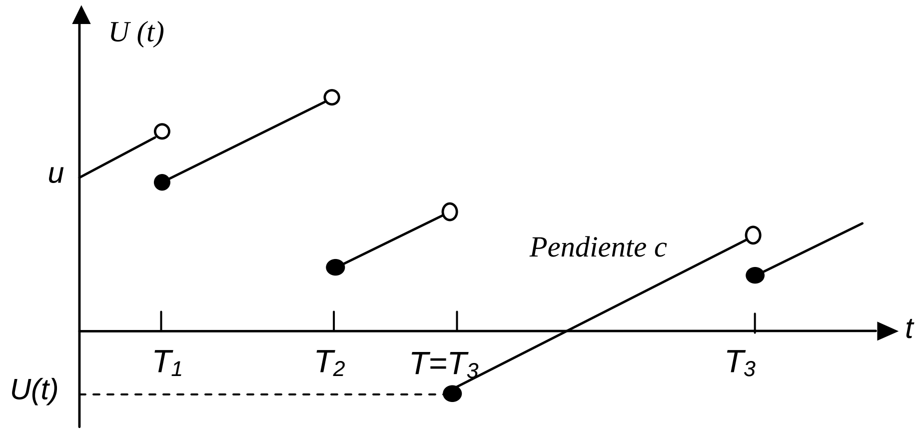
Para $t \geq 0$, sea $U(t)$ el excedente del asegurador en el tiempo t. Suponemos que las primas se reciben continuamente a una tasa constante, $c > 0$, y permitimos que $S(t)$ represente las reclamaciones agregadas hasta el tiempo t. Si $U(0) = u$ es el excedente disponible en el tiempo 0, quizás como resultado de operaciones pasadas, entonces

$$U(t) = u + ct - S(t) \qquad t \geq 0.$$

En este modelo se ignora el interés y a los factores distintos a las primas y reclamaciones que pudiesen afectar al excedente. Por ejemplo, estamos ignorando los gastos y dividendos de los tenedores de pólizas y de los accionistas. Un resultado típico de este proceso de excedente $\{U(t),\ t \geq 0\}$ se muestra en la figura 3.1. La palabra proceso indica que estamos interesados en una familia de variables aleatorias, una para cada valor de t, $t \geq 0$, y en las interconexiones entre sus distribuciones. Esto contrasta con el capítulo 2 en donde consideramos la distribución de una variable aleatoria para un sólo periodo.

Nótese que el excedente se incrementa linealmente (con pendiente c) excepto cuando ocurre una reclamación. Entonces el excedente cae por el monto de la reclamación. Si el excedente inicial aumentó o disminuyó por una cantidad h, la gráfica de $U(t)$ crecerá o disminuirá unidades de altura, pero de otra manera permanecerá sin cambio. Como se ilustra en la figura 3.1, el excedente podría llegar a ser negativo en ciertos tiempos. Cuando esto sucede, hablamos de que ha ocurrido la ruina. Este término técnico no es sinónimo de insolvencia. En una situación de la vida real, el evento de la ruina podría no ser tan irremediable como su nombre lo sugiere ya que, cuando se consideran todos los factores, los fondos del asegurador pueden ser positivos, o podría ser posible restablecer la posición positiva del excedente. Sin embargo, en una organización de seguros se puede obtener una medida útil del riesgo financiero calculando la probabilidad de la ruina como una consecuencia de la variación en la cantidad del excedente.

Figura 3.1
Un resultado típico del proceso de excedente



Fuente: Elaboración Propia

Definamos:

$$T = min\{t : t \geq 0, U(t) < 0\}$$

Como el tiempo en que ocurre la ruina (entendiendo que $T = \propto$ es simbólico para $U(t) \geq 0$ para todas las $t \geq 0$; es decir, la ruina no ocurre) Además, representamos con

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty)$$

La probabilidad de la ruina considerada como una función del excedente inicial u. También nos interesaremos en *U (T)*, el excedente negativo en el tiempo en que ocurre la ruina.

En la práctica, la mayoría de los aseguradores están interesados en la ruina sobre un periodo largo pero finito como de unos 15 años y en realidad no están preocupados acerca del horizonte infinito. Más precisamente, la consideración se limitará

$$\psi(u,t) = \Pr(T < t)$$

La probabilidad de la ruina antes del tiempo t., Sin embargo, discutiremos sólo la probabilidad de la ruina sobre un horizonte infinito, $\psi(u)$ la cual es matemáticamente más manejable. Por supuesto, $\psi(u)$ es una frontera superior de $\psi(u,t)$.

Las ideas que se exponen en este apartado pueden utilizarse para proporcionar un sistema de advertencias para la conducción de una organización de seguros. Necesariamente, para representar el proceso de riesgo de tal organización se debe seleccionar un modelo. La probabilidad de la ruina, con base en ese modelo, previene al administrador de la organización de seguros sobre algunos de los riesgos involucrados. Los modelos particulares desarrollados en este capítulo hacen supuestos simplificativos para mantener manejables las matemáticas. Se dejan a un lado los efectos de los dividendos, interés y la experiencia en su cálculo. No obstante, estos modelos proporcionan un medio inicial de analizar el proceso de riesgo de una organización de seguros. En la práctica, se complementan con análisis adicionales.

3.2.2 Procesos de reclamaciones

En esta sección formularemos el modelo de la ruina usando dos procesos aleatorios, el proceso del número de reclamaciones y el de las reclamaciones agregadas. El primero lo estableceremos con un proceso Poisson y el segundo mediante un proceso de Poisson compuesto.

Para un cierto portafolio de pólizas de seguro, sea $N(t)$ el número de reclamaciones y $S(t)$ las reclamaciones agregadas hasta el tiempo t. Empezamos la cuenta en el tiempo 0; es decir, $N(0)=0$. Además, $S(t) = 0$ siempre que $N(t) = 0$. Y al igual que en los capítulos anteriores, X_i representa el monto de la i-ésima reclamación. Entonces:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$$

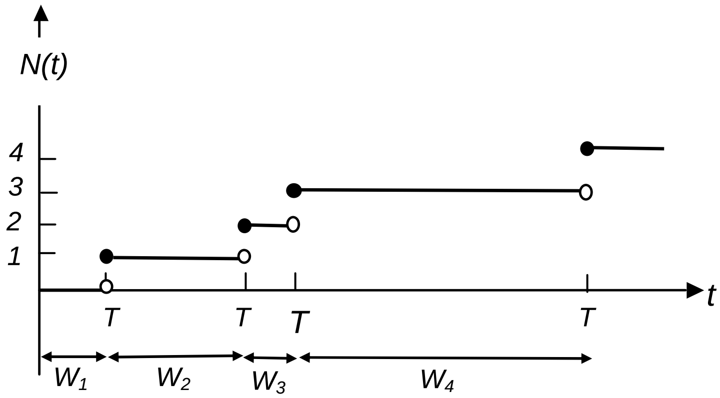
El proceso $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina el proceso del número de reclamaciones, mientras que $\{S(t) \geq 0\}$ se denomina el proceso de reclamaciones agregadas. Como se mencionó anteriormente, el conjunto de variables aleatorias se denomina proceso ya que estamos interesados en las distribuciones en todos los tiempos $t \geq 0$. Esto contrasta con el capítulo 2 en donde estábamos interesados en el número de reclamaciones y para un periodo único.

Sea $t \geq 0$ y $h > 0$. De las definiciones se sigue que $N(t+h) - N(t)$ es el número de reclamaciones y $S(t+h) - S(t)$ es el agregado de reclamaciones que ocurren en el intervalo entre t y $t+h$. Sea T el tiempo cuando ocurre la i-ésima reclamación. Por lo tanto T_1, T_2... son variables aleatorias con $T_1 < T_2 < T_3$ .... Estas desigualdades son estrictas, por lo tanto excluyen la posibilidad de que dos o más reclamaciones ocurran al mismo tiempo. Entonces el tiempo de espera (o tiempo transcurrido) entre reclamaciones sucesivas está representado mediante $W_1 = T_1$ y

$$W_i = T_1 - T_{i-1} \qquad\qquad i < 1$$

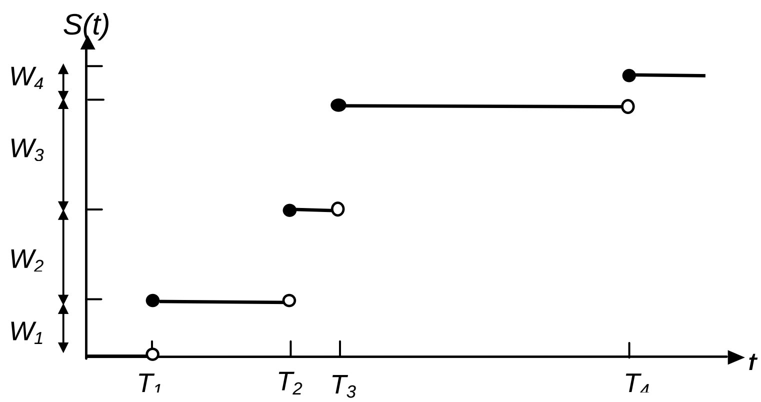
En las figuras 3.2 y 3.3 se muestran los resultados del proceso del número de reclamaciones y el del proceso agregado de reclamaciones. Nótese que $N(t)$ y $S(t)$ son funciones escalonadas. Las discontinuidades están en los tiempos T_i cuando ocurren las reclamaciones, y el tamaño de los escalones en estos tiempos es 1 Para $N(t)$ y su monto de reclamaciones correspondiente X, para $S(t)$.

Figura 3.2
Proceso del número de reclamaciones



Fuente: Elaboración Propia

Figura 3.3
Proceso del número de reclamaciones agregadas



Fuente: Elaboración Propia

El proceso del número de reclamaciones, como se vio en el capítulo 2 es un proceso de poisson: “El numero de reclamaciones que ocurren en cualquier intervalo de longitud *h* sigue una distribución Poisson con parámetro λh, independientemente de la posición del intervalo y la historia del proceso

Necesitamos obtener la distribución de los tiempos de espera entre las reclamaciones sucesivas. Tenemos lo siguiente:

$$\Pr[\, W_{i+1} > h \mid T_i , N(s) \forall s \le t \,]$$

$$\Pr[\, N(t+h) - N(t) = 0 \mid T_i = t, N(s) \forall s \le t \,] \quad = e^{-\lambda h}$$

Por la definición del proceso de Poisson. Por lo tanto W_{i+1} sigue una distribución exponencial con parámetro λ y es independiente de *N(s)* para $s \leq T_i$. En otras palabras, W_{i+1} es independiente de $W_1, W_2, ..., Wi$.

En este contexto, definiremos ahora un proceso de Poisson compuesto. Si para *S(t),* definido en, las X_1, X_2, X_3... son variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con f.d. *P(x)* común, y si también son independientes del proceso $\{N(t), t \geq 0\}$, que se supone es un proceso de Poisson, se dice que el proceso $\{S(t), t \geq 0\}$, es un proceso de Poisson compuesto. Si el proceso de reclamaciones agregadas es un proceso de Poisson compuesto determinado por λ y *P(x),* las siguientes propiedades corresponden a las del proceso del número de reclamaciones subyacente.

a) Si $t \geq 0$ y $h > 0$, la distribución de $S(t+h) - S(t)$ es una Poisson compuesta con especificaciones λh y *P(x),* es decir:

$$\Pr[S(t+h) - S(t) \leq x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} p^{*k}(x)$$

En donde $P^{*k}(x)$ es la convolución k-ésima de la *f.d. P(x).*

b) Y en un intervalo de tiempo infinitesimal de amplitud *dt,* existe ya sea la reclamación 1 con probabilidad λdt y con *P(x)* como la f.d. de su monto, o no existe reclamación.

c) En cualquier tiempo *h*, la probabilidad de que la siguiente reclamación ocurra ente $h+t$ y $h+t+dt$ y de que el monto de la reclamación sea menor que o igual a *x* es $e^{-\lambda t}(\lambda dt)P(x)$

Además, el proceso $\{S(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes. Las reclamaciones agregadas de intervalos separados son variables aleatorias independientes y su distribución depende sólo de la amplitud del intervalo correspondiente y no de su posición.

Si *S (t)* representa un proceso de Poisson compuesto y el valor de t es fijo, *S (t)* tendrá una distribución de Poisson compuesta.

$$E[S(t)] = \lambda t p_1 \qquad \qquad Var[S(t)] = \lambda t p_2$$

3.2.3 El Coeficiente de Ajuste y la Desigualdad de Lundberg

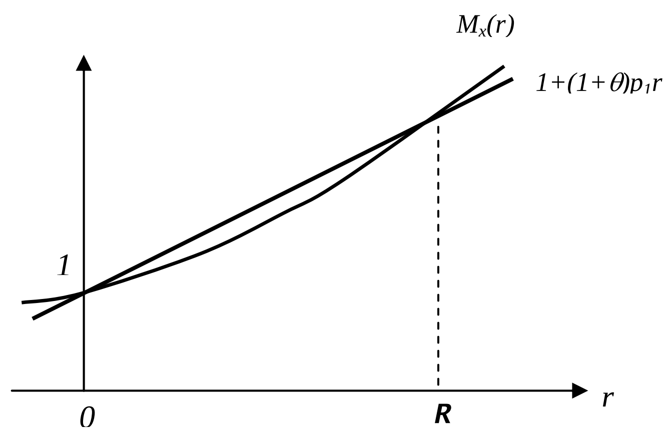
El proceso del excedente $\{U(t), t \geq 0\}$ puede ser estudiado mediante su relación, determinada en 3.2.1, con el proceso de reclamaciones $S(t)$. Dado que ahora disponemos de un modelo completo del proceso del excedente, desarrollaremos un concepto especial. Esta herramienta puede utilizarse, en general, para encontrar los límites inferiores y superiores de $\psi(u)$ y en forma explícita en el caso particular de una distribución exponencial de reclamaciones individuales.

Primero, supondremos que la tasa de cobro de las primas c excede los pagos esperados de reclamación por unidad de tiempo, que es λp_1. Además, definimos un recargo relativo de seguridad ϕ mediante la ecuación $c= (1+\theta)\lambda p_1$ en donde ϕ es positivo.

En seguida, sea $(-\infty,\gamma)$ el intervalo abierto más grande para el que la f.g.m. de $P(x)$ existe. Se supone que γ es positiva. En el caso de la distribución exponencial con parámetro β, γ es igual a β, mientras que para cualquier distribución del monto de las reclamaciones con límites γ es $+\infty$.

Además, supondremos que $M_x(r)$ tiende a ∞ a medida que $r \to \gamma$ (Este supuesto no siempre es válido para γ finita; como ejemplo, considere la distribución que está concentrada en el intervalo $x>1$ en donde su f.d.p. es proporcional a $x^{-2} e^{-x}$.)

Figura 3.4
Definición del coeficiente de ajuste



Por conveniencia de notación, supondremos también que $P(x)$ es continua y tiene un f.d.p. $p(x)$; si $P(x)$ es discreta y tiene una f.p. p(x), las integrales se reemplazarán por sumas en la siguiente expresión.

Para un proceso de Poisson compuesto, consideramos la ecuación

$$\lambda + cr = \lambda \int_0^\infty e^{rx} p(x)dx = \lambda M_x(r) \qquad r < \gamma \qquad (3.2.3.1)$$

o la expresión equivalente, usando $c=(1+\theta)\lambda p_1$,

$$1 + (1+\theta) p_1 r = M_x(r) \qquad r < \gamma \qquad (3.2.3.2)$$

Aquí, el lado izquierdo es una función lineal de r, mientras que el lado derecho es una función positiva creciente que tiende a ∞ a medida que $r \to \gamma$. Más aún, la segunda derivada del lado derecho es positiva por lo que su gráfica es cóncava desde arriba. El supuesto de que $c>\lambda p_1$

(equivalente a $\theta > 0$) significa que la pendiente, $(1+\theta)\ p1$. del lado izquierdo de (3.2.3.2) excede la pendiente, $M'_x(0)=p_1$, del lado derecho en $r=0$. En la figura 3.4, observamos que la ecuación (3.2.3.2) tiene dos soluciones. Aparte de la solución trivial $r=0$, existe una solución positiva $r=R$, que se denomina el *coeficiente de ajuste*. Los motivos para considerar aquí la expresión (3.2.3.1) y su solución R se aclaran en el teorema que más adelante se presenta.

En la mayoría de los casos, la ecuación (3.2.3.2) no puede resolverse explícitamente. En estos casos, se debe hacer mediante un método de análisis numérico apropiado. En la figura 3.4 observamos que si

$$M_x(r) - 1 - (1+\theta) p_1 r \qquad (3.2.3.3)$$

Es positiva para algún valor de $r>0$, se sigue que $R<r$. Igualmente, si (3.2.3.3) es negativa para algún valor de r, $R>r$. Podemos utilizar esta información para determinar R ya sea mediante prueba y error o bisección sucesiva del intervalo.

En general, el coeficiente de ajuste es una función creciente del recargo relativo de seguridad, θ. Esto puede observarse en la figura 3.4. A medida que θ. se incrementa, la pendiente de la línea recta a través del punto (0,1) se incrementa en tal forma que el punto de intersección de la línea y la curva se mueve a la derecha y hacia arriba.

Existe una conexión intrínseca entre el coeficiente de ajuste y la probabilidad de ruina determinada en el siguiente teorema

Para $u \geq 0$,

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}. \qquad (3.2.3.4)$$

En palabras, el denominador se calcula con respecto a la distribución condicional del excedente negativo, $U(T)$, dado que ocurra la ruina; es decir, $T > \infty$.

En la figura 3.4, observamos que si $\theta \to 0$, la secante tiende a la tangente para $M_X(R)$ en $r=0$, lo que implica $R \to 0$. Pero, entonces de (3.2.3.4), $\psi(u)=1$, o la ruina es una certeza. Adicionalmente, $U(t)$, $t > 0$, para el caso en donde $\theta < 0$, será siempre menor que la correspondiente $U(t)$ para $\theta \to 0$, y por tanto, ya que la ruina es una certeza para $\theta \to 0$, la ruina es también una certeza para $\theta < 0$. Por estas razones, mantendremos el supuesto de que $\theta > 0$.

En general, una evaluación explícita del denominador de (3.2.3.4) no es posible. Las excepciones son el caso $u=0$ y el caso donde la distribución del monto de las reclamaciones es exponencial. Sin embargo, el teorema puede usarse para derivar desigualdades. Ya que $U(T)$, dado $T<\infty$, necesariamente es negativo, el denominador de (3.2.3.4) excede a 1. Se sigue que

$$\psi(u) < e^{-Ru}. \qquad (3.2.3.5)$$

Si la distribución del monto de reclamaciones está limitado en tal forma que $P(m)=1$ para algunas m finitas, se sigue que, dado $T<\infty$, $U(T)>-m$ ya que el excedente justamente antes de la reclamación debería ser positivo. Por lo tanto, $e^{-Ru(T)} < e^{-Ru}$, así

$$E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] < e^{Rm}.$$

Por tanto

$$\psi(u) > e^{-Ru} e^{-Rm} = e^{-R(u+m)}. \qquad (3.2.3.6)$$

Algunos autores sugieren el uso de la aproximación

$$\psi(u) \cong e^{-Ru}, \qquad (3.2.3.7)$$

la que, en vista de (3.2.3.5), sobreestima la probabilidad de la ruina.

3.2.4 Modelo de tiempo discreto

En esta sección examinaremos un modelo que puede ser considerado como el del tiempo discreto análogo al modelo desarrollado en las secciones precedentes.

Sea U_n el excedente del asegurador en el tiempo n, $n =0,1, 2,...$. Suponemos que

$$U_n = u + nc - S_n \qquad (3.2.4.1)$$

donde $u=U_0$ es el excedente inicial, c es el monto de las primas recibidas cada periodo y S_n es la suma de todas las reclamaciones en el primero de n periodos. También suponemos que

$$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \qquad (3.2.4.2)$$

donde W_i es la suma de las reclamaciones en el periodo i y W_1 W_2.., W_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes. Además, $\mu=E[W] <c$ donde W es una variable aleatoria distribuida como las W_i. Sea

$$\bar{T} = \min\{n : U_n < 0]\qquad (3.2.4.3)$$

El tiempo de la ruina (otra vez con el entendimiento de que $\bar{T} = \infty$ si $U_n \geq 0$ para toda n), y sea

$$\bar{\psi}(u) = \Pr(\bar{T} < \infty) \qquad (3.2.4.4)$$

la probabilidad de la ruina en este contexto.

Este modelo genera un resultado similar al Teorema de la sección anterior. Para formularlo, primero debemos definir el coeficiente de ajuste para el nuevo modelo. Lo definimos como la solución positiva de la ecuación

$$e^{-cr} M_W(r) = 1 \qquad (3.2.4.5)$$

(véase la figura 3.5). La gráfica de $e^{-cr} M_W(r)$ puede trazarse al observar que

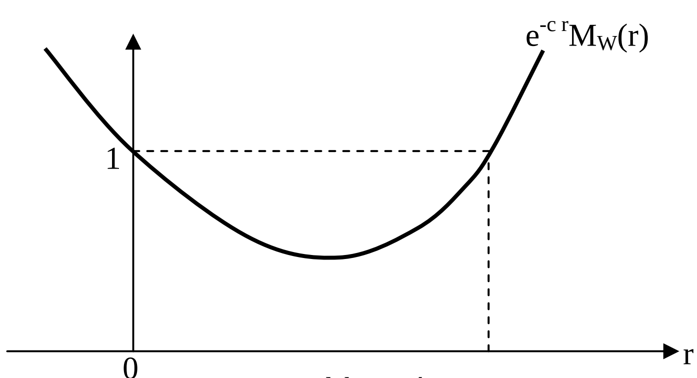
$$\frac{d}{dr}[e^{-cr} M_W(r)] = \frac{d}{dr} E[e^{(W-c)r}] = E[(W-c)e^{(W-c)r}]$$

Y

$$\frac{d^2}{dr^2}[e^{-cr} M_W(r)] = E[(W-c)^2 e^{(W-c)r}].$$

La primera de estas observaciones muestra que la pendiente en *r=0* es μ- *c*, una cantidad negativa, y la segunda muestra que la gráfica es cóncava hacia arriba. Además, dado que *W* tiene una probabilidad positiva sobre los valores en exceso de *c*, la primera derivada será, para una *r* bastante grande, positiva y así permanecerá. Por tanto, $e^{-cr} M_W(r)$ tendrá un mínimo, como lo indica la figura 3.5 y $\bar{R}$ es positiva como se muestra.

Figura 3.5
Definición del $\bar{R}$



Fuente: Elaboración Propia

Notamos que (3.2.4.5) puede reexpresarse como

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2. \qquad (3.2.4.6)$$

Si observamos el caso especial donde la $W´_S$ distribución común es de Poisson compuesta, entonces log $M_W(r)=\lambda(M_x(r)-1)$ y (3.2.4.6) es la misma que (3.2.3.1), la definición de *R* para el modelo de tiempo continuo. Por tanto, cuando el proceso de reclamaciones es de Poisson compuesta, $\bar{R}=R$ así que $\bar{R}$ puede considerarse una generalización de *R*.

Teorema :

Para u > 0

$$\bar{\psi}(u) = \frac{\exp(-\bar{R}u)}{E[\exp(-\bar{R}U_{\bar{T}}) \mid \bar{T} < \infty]}. \qquad (3.2.4.7)$$

Como por definición $U_{\bar{T}} < 0$, se sigue que

$$\bar{\psi}(u) < \exp(-\bar{R}u). \qquad (3.2.4.8)$$

Ahora derivaremos una aproximación para $\bar{R}$. Para una variable aleatoria *X*

$$\frac{d}{dt}\log M_x(t)|_{t=0} = E[X]$$

Y

$$\frac{d^2}{dt^2}\log M_x(t)|_{t=0} = Var[X]$$

Por tanto, utilizando la expansión de series de Mclaurin, tenemos

$$\log M_W(r) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + \cdots$$

donde $\sigma^2 = Var\ [W]$. Si usamos únicamente los dos primeros términos de esta expansión en (3.2.4.6), obtenemos la aproximación

$$\overline{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}. \tag{3.2.4.9}$$

Si W tiene una distribución compuesta y la seguridad relativa recargada θ está dada por $c = (1+\theta)\mu$, entonces

$$\overline{R} \cong \frac{2\theta\, p_1 E[N]}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 Var[N]} \tag{3.2.4.10}$$

en donde N es una variable aleatoria distribuida como el número de reclamaciones en un periodo.

3.3 Aplicaciones

1.- En el modelo de reaseguro tradicional y bajo la hipótesis de independencia entre las variables aleatorias N y X_i, demostrar que la prima pura total de la operación en términos esperados, puede calcularse como la esperanza matemática de la variable costo total, esto es Resultando: $E[Z] = E[N]E[X]$

2.- Demostrar que en el reaseguro modalidad cuota-parte, la prima del reaseguro y la prima de la cedente, es términos esperados es:

$$E[Z_r] = (1-k)E[Z] \qquad E[Z_c] = kE[Z]$$

y sus correspondientes varianzas son:

$$V[Z_r] = k^2 V(Z) \qquad V[Z_r] = (1-k)^2 V[Z]$$

3.- Demostrar que en el reaseguro modalidad exceso de pérdidas la prima de la cedente y del reasegurador, en términos esperados esta dada por:

$$E[Z_c] = E(N)\int_0^M (1+F(x))dx \quad E[Z_r] = E(N)\int_M^\infty (1+F(x))dx$$

$$F(x) = P[X \le x]$$

4. Demuestra que un valor exacto para la Probabilidad de Ruina en horizonte infinito y chequeo continuo es:

$$\Psi(U_0) = \frac{e^{-R\cdot U_0}}{E\left[e^{-R\cdot U_{t_1/t_1<\infty}}\right]} \qquad U_0 \ge 0$$

5. Demostrar que una cota superior para la probabilidad de ruina en horizonte infinito y chequeo continuo es:

$$\Psi(U_0) \le e^{-R\cdot U_0} \qquad U_0 \ge 0$$

6. Determina el coeficiente de ajuste si el número de siniestros de una cartera de riesgos se distribuye poisson y la cuantía de un siniestro es exponencial con parámetro λ

7. Calcular el valor exacto y la cota superior para las probabilidades de ruina y de supervivencia, ¿si el número de siniestros sigue una distribución de Poisson y la cuantía de un siniestro una exponencial dado que la probabilidad de ruina es?

CAPÍTULO IV. LA TEORIA DE LA CREDIBILIDAD

4.1 Teoría de la Credibilidad.

4.1.1 Introducción

La Credibilidad es una medida de la creencia que el Actuario atribuye a una posible experiencia con la finalidad de tarificar, es decir, determinar las primas.

A principios del siglo XX , y como consecuencia de que las técnicas estadísticas en uso no permitían resolver los problemas actuariales para la elaboración de modelos de credibilidad, los actuarios desarrollaron sus propios métodos de forma aislada a la corriente estadística de la época, caracterizada porque todo conocimiento a priori carecía de valor estadístico.

La Teoría de la Credibilidad surge para hacer frente a los problemas de heterogeneidad que existen en las carteras, y así cobrar lo justo a cada cliente de acuerdo al riesgo que esté presente. Es por ello conveniente, determinar cómo debe ser equilibrada la información que se tiene de un asegurado y de todo un grupo de asegurados, esta es la principal idea en la que se basa la Teoría de la Credibilidad. Esta teoría tuvo sus orígenes primero con Whitney (1918), Bailey (1950), Bühlmann (1967), Goovaerts y Hoogstad (1987), Klugman (1992).

Es un conjunto de ideas y técnicas destinadas al ajuste sistemático de las primas de los seguros en función de la experiencia de siniestralidad de los mismos. La necesidad de estos métodos proviene de la existencia de situaciones en las que los datos correspondientes a los grupos de pólizas a tarificar son escasos y por lo tanto resultan inadecuados para proceder a estimar la prima de riesgo.

4.1.2 Credibilidad Total

Sea N la variable aleatoria correspondiente al número de siniestros producida en una cartera de seguros durante un determinado periodo de tiempo. Representaremos a la esperanza matemática de N por n. Generalmente lo mas adecuado es suponer que N sigue una distribución Poisson por lo que $E(N) = Var(N) = n$

La cuantía del i-ésimo siniestro será la variable aleatoria X_i, supongamos que N y $X_1, X_2, X_3, \ldots X_N$ son variables aleatorias independientes y que las cuantías tienen la misma distribución con medias y varianzas dadas por $E(X_i) = m$,$Var(X_i) = \sigma^2$

Definimos el costo total de los siniestros durante el periodo considerado como $A = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, donde la $E(A) = a = \lambda m$ y $Var(A) = \lambda(\sigma^2 + m^2)$ donde $(\sigma^2 + m^2)$ es el segundo momento ordinario del costo de un siniestro.

El asegurador está interesado en estimar el ingreso total por primas de riesgo para la cartera. En un principio, solamente es posible utilizar una aproximación basada en estimaciones subjetivas del riesgo y del costo de los siniestros, o en estadísticas de carteras semejantes.

Una pregunta que surge de manera natural es ¿Cuánta debe ser la experiencia interna de siniestralidad a efectos de que el asegurador pueda, ignorar la experiencia de la cartera y basar su análisis solamente en la experiencia propia?, es decir ¿Cuándo es una estadística suficientemente grande para poder asignar credibilidad total a la estimación?. En términos generales, cuando la credibilidad total es definida en función de un rango $\pm 100k\%$ respecto al verdadero valor del parámetro y de una probabilidad $100P\%$, la fórmula expresiva del número mínimo de siniestros esperados necesario para tener total credibilidad será $\lambda_F = \lambda_0 \left[1 + \left(\sigma / m \right)^2 \right]$, donde: $\lambda_0 = y^2 / k^2$

4.1.3 Credibilidad Parcial

En muchas ocasiones, la experiencia propia de las empresas aseguradoras es demasiado pequeña para poder asignar total credibilidad a los procesos de tarificación.

En nuestra fórmula para la estimación de la credibilidad, B es un valor no aleatorio obtenido mediante información externa, y A es una variable aleatoria resultante de la experiencia interna de la empresa. Si establecemos un principio de fluctuación limitada, de tal manera que el estimador de credibilidad C, debe pertenecer a un intervalo de amplitud no superior al rango 2ka, que corresponde a un supuesto de total credibilidad con probabilidad P, entonces se debe verificar que ZA pertenezca al intervalo $Za \pm ka$ con probabilidad P. En otras palabras $P[(Za-ka)<\mathrm{ZA}<(Za-ka)] = P$, es decir, $P\left[\frac{-ka}{Z\sqrt{Var(A)}} < \frac{A-a}{\sqrt{Var(A)}} < \frac{ka}{Z\sqrt{Var(A)}} \right] = P$ bajo el supuesto de que la experiencia propia no sea demasiado pequeña, es posible utilizar la aproximación normal N (0,1) para $\left(A-a / \sqrt{Var(a)} \right)$, y así tenemos lo siguiente $\frac{ka}{Z\sqrt{Var(A)}} = y$ donde y representa el nuevo valor de la variable N (0,1) para el cual el área entre –y e y es igual a P, sustituyendo y reajustando términos, obtenemos la fórmula de credibilidad parcial $Z = \sqrt{\lambda / \lambda_F}$

4.1.4 Fundamentos Bayesianos de la Teoría del a Credibilidad

La Teoría de la Credibilidad se apoya en el teorema de Bayes, el cual fusiona la información inicial, que es expresada mediante una distribución de probabilidad conocida como distribución inicial o a priori con la información estadística de que se dispone, para así producir una distribución final o a posteriori, la cual sintetiza ambas fuentes de información, esta distribución final es la que nos permite extraer conclusiones y tomar decisiones.

La Distribución posterior es la solución Bayesiana al problema de inferencia y nos da una descripción completa en términos de probabilidad sobre lo que conocemos en relación con el verdadero valor del parámetro.

Para que el Teorema de Bayes pueda ser aplicado, es necesario especificar la distribución inicial; por lo que su uso como procedimiento inferencial implica la condición de variable aleatoria para el parámetro a estimar y una visión del concepto de probabilidad en términos de grados de creencia, personales o subjetivos, condicionados a la información de que se dispone.

Por otro lado, el uso de distribuciones iniciales, puede resultar extremadamente útil, como sucede en el caso de riesgos nuevos sobre los cuales no existen datos disponibles, o cuando no es posible asignar las características del riesgo a un colectivo ya establecido.

Es en estos casos cuando el actuario se ve obligado a hacer un establecimiento inicial del riesgo, basado en condiciones no empíricas sobre las fuentes de siniestralidad; entonces la única solución a este problema es la que nos proporciona la Estadística Bayesiana.

4.1.5 Modelo de Tarificación

A principios del siglo pasado, los actuarios desarrollaron un factor de credibilidad que establece que $C = (1-z)B + zA$, donde B representa el conocimiento a priori, A son los datos estadístico actuales y a C se le llama prima de credibilidad.

4.1.5.1 Teorema de Bayes

Sea $\{B_i\}$ una partición del espacio muestral Ω, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \qquad\qquad \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \phi$$

Podemos ahora interpretar a las B_i como las posibles causas; a E un subconjunto del espacio muestral Ω, con una probabilidad de ocurrencia mayor o igual a cero, es decir, $E \subset \Omega$, $0 < P(E) < 1$.

Ahora, dado que conocemos un efecto determinado E, deseamos conocer la probabilidad de que dicho efecto venga de la causa específica B_i entonces tenemos que:
Para cualquier partición $\{B_i\}$ y para un evento $E \neq \phi$

$$P(B_i/E) = \frac{P(B_i)P(E/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(E/B_i)} \tag{4.1.5.1}$$

4.1.5.2 Distribución a priori y posteriori

En el modelo de seguros no vida, cada uno de los miembros de un colectivo heterogéneo está caracterizado por un parámetro de riesgo θ, que es desconocido y fijo dentro de un cierto espacio paramétrico Θ, que supondremos continuo. Dado θ, la siniestralidad o riesgo del contrato en un periodo cualquiera $t = 1,2,3,\ldots\ldots$ es una variable aleatoria condicional (continua o discreta).

Sea $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ una muestra aleatoria continua independiente dado θ e idénticamente distribuidas de la función de densidad de probabilidad $f(x_i/\theta)$, con $i = 1,2,3,\ldots\ldots, n$, la función de densidad conjunta de las variables aleatorias $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ es:

$$f(\underline{x}/\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i/\theta) \qquad (4.1.5.2)$$

Dado que el parámetro θ es fijo y desconocido, además el conocimiento sobre el parámetro puede ser modelado como una variable aleatoria, por lo que se habla de una función de densidad para θ y $f(\theta)$ considerándose una función de densidad conjunta para ambas, por lo que se define:

$$f(\underline{x},\theta) = f(\underline{x}/\theta) f(\theta) \qquad (4.1.5.3)$$

la densidad marginal de las $\underline{x}$ es

$$f(\underline{x}) = \int_{\Theta} f(\underline{x},\theta) d\theta \qquad (4.1.5.4)$$

por (4.1.3.1) tenemos lo siguiente $f(\theta/\underline{x}) = \dfrac{f(\underline{x}/\theta) f(\theta)}{f(\underline{x})}$ que puede ser escrito como:

$$f(\theta/\underline{x}) = \frac{L(\theta/\underline{x}) f(\theta)}{f(\underline{x})} \qquad (4.1.5.5)$$

donde $f(\underline{x})$ no depende de θ y $L(\theta/\underline{x})$ es la función de verosimilitud , de la que se obtiene la información del parámetro que tiene la muestra; $f(\theta)$ es la distribución a priori o previa del parámetro, e indica lo que se sabe del parámetro de la distribución antes de tomar la muestra; $f(\theta/\underline{x})$ es la distribución a posteriori del parámetro θ dada la muestra $\underline{x}$, y determina lo que se sabe del parámetro de la distribución dada la muestra. Se tiene que:

$$f(\theta/\underline{x}) = k * L(\theta/\underline{x}) f(\theta) \qquad (4.1.5.6)$$

o

$$f(\theta/\underline{x}) \propto L(\theta/\underline{x}) f(\theta) \qquad (4.1.5.7)$$

Se debe suponer una distribución de probabilidad que genere la muestra aleatoria, de igual manera que en el caso de la estadística clásica, solo que ahora se incorpora la información acerca de los parámetros involucrados a través de $f(\theta)$. En Estadística Bayesiana $f(\theta)$, la distribución a priori, representa la información previa del parámetro θ en el modelo $f(x/\theta)$, esta información puede consistir en el conocimiento que algún especialista o en información pasada acerca de la característica de interés que se desea estudiar.

La selección de la distribución a priori depende del buen juicio y del análisis subjetivo de la persona encargada de realizar el estudio. En el caso de no tener ningún tipo de información previa o cuando la información que se posea sobre el parámetro de interés no sea confiable, se utiliza lo que se conoce como distribución previa no informativa, difusa o mínimo informativa , existen varios métodos para calcular este tipo de funciones. Las distribuciones iniciales en mayor o menor medida subjetivas, resultan inútiles en el campo de los seguros, como sucede en el caso de riesgos nuevos sobre los que no existen datos disponibles donde, el actuario se ve obligado a hacer un establecimiento inicial del riesgo, basado, al menos parcialmente en condiciones no empíricas sobre las posibles fuentes de siniestralidad.

4.1.5.3 Función de Densidad Predictiva

Si tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ de la función de densidad $f(x/\theta)$, y se quiere pronosticar o predecir el comportamiento de la siguiente realización de la función de densidad $f(x/\theta)$, X_{n+1}, si X_{n+1} y $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ son independientes dado θ

$$f(x_{n+1}/\underline{x}) = \int_{R_\theta} f(x_{n+1}/\theta) f(\theta/\underline{x}) d\theta \qquad (4.1.5.8)$$

es decir, se describe el comportamiento de X_{n+1} dada la información disponible $\underline{X}$, a esta función se le llama función de densidad predictiva.

4.1.5.4 Prima de credibilidad bayesiana y credibilidad completa.

Para obtener la prima de credibilidad bayesiana se calcula el valor esperado de la función (4.3.8)

$$\textit{Prima de credibilidad Bayesiana} = E(X_{n+1}/\underline{X}) \qquad (4.1.5.9)$$

Se dice que existe credibilidad completa cuando la prima de credibilidad desarrollada en la siguiente sección es igual a la prima de credibilidad bayesiana definida en (4.1.5.9)

La teoría de la utilidad proporciona una justificación formal, de carácter axiomático, del enfoque bayesiano. De estos axiomas se deriva el uso de estos métodos para la toma de decisiones, de ahí el importante papel que la teoría de la decisión juega en este enfoque estadístico

4.1.6 Teoría de la Credibilidad

La Teoría de la Credibilidad consiste en combinar la experiencia de la empresa con la de un asegurado en específico, por lo que es conveniente determinar como debe equilibrarse la información que se tiene, y la información que se posee de toda la cartera.
La Credibilidad se basa en la siguiente fórmula
$C = (1 - z)B + zA$ Donde:

$z =$ Es el factor de Credibilidad
$A =$ Prima propia que corresponde a los siniestros en los últimos t periodos
$B =$ Prima de la Cartera o Prima Teórica
$C =$ Balance entre A y B

El objetivo de esta fórmula de credibilidad fue el establecer un balance entre la prima individual y la de la cartera, por lo que el factor de credibilidad $"z"$ tiene una importancia en particular de acuerdo a la siguiente tabla

Tabla 4.1
Interpretación del factor de credibilidad "z"

Caso	**Posibles valores de "z"**	Interpretación
1	$z = 0$ Es decir $z \longrightarrow 0\%$	Si $z = 0 \Rightarrow C = (1-0)B + (0)A = B$ Esto quiere decir que cuando z=0 se tiene credibilidad total, es decir, se utiliza la prima teórica. $\therefore$ $C = B$ Se considera la experiencia de la cartera
2	$z = 1$ Es decir $z \longrightarrow 100\%$	Si $z = 1 \Rightarrow C = (1-1)B + (1)A = A$ En este caso también se tiene credibilidad total pero la prima propia es la más adecuada. Nótese que se debe tener experiencia para que dicha prima sea válida$\therefore$ $C = A$ Se considera la experiencia individual

Fuente: "Aplicación de Modelos de Credibilidad para el calculo de primas en el Seguro de Autos", CNSF 2003

Dado que $"z"$ expresa el peso asignado a la experiencia propia, esta variable juega un papel clave en la teoría de la credibilidad. Se dice que existe credibilidad parcial si $0 < z < 1$.
El factor de credibilidad $"z"$ por la siguiente expresión propuesta por Bühlmann, misma que se desarrollará en la sección.......

$$z = \frac{at}{s^2 + at} = \frac{t}{t + \frac{s^2}{a}} = \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} \qquad (4.1.6.1)$$

Donde:
t =Periodo de observación $t \in N$ (numero de años de experiencia)
a =Grado de heterogeneidad (medición de la disparidad o similaridad del riesgo)
s^2 =Variabilidad de las reclamaciones

Ahora variaremos las componentes del factor de credibilidad $"z"$ y veremos que sucede:

CASO I Variación de "t"

a) Si $t \to \infty \Rightarrow z = 1(z \to 1)$
   Calculando el límite de $"z"$ cuando $"t"$ tiende a infinito, se tiene que:

$$\lim_{t\to\infty} z = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t + \frac{s^2}{a}} = 1$$

b) Si $t \to 0 \Rightarrow z = 0(z \to 0)$

c)

Calculando el límite de "z" cuando "t" tiende a cero, se observa que:

$$\lim_{t\to 0} z = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t + \frac{s^2}{a}} = 0$$

En este caso se puede ver que mientras mayor sea la experiencia, la credibilidad es mayor a las primas de riesgos, por lo que cuando la experiencia es nula, se le da mayor credibilidad a las primas de la experiencia de la cartera

CASO II Variación de "a"

d) Si $a \to \infty \Rightarrow z = 1(z \to 1)$

Calculando el límite de "z" cuando "a" tiende a infinito, se tiene que:

$$\lim_{a\to \infty} z = \lim_{a\to \infty} \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} = 1$$

e) Si $a \to 0 \Rightarrow z = 0(z \to 0)$

Calculando el límite de "z" cuando "t" tiende a cero, se observa que:

$$\lim_{a\to 0} z = \lim_{a\to 0} \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} = 0$$

Evidentemente a mayor heterogeneidad, se da mayor credibilidad a las primas de riesgo, mientras que cuando la cartera es homogénea, se da mayor credibilidad a las primas de la experiencia de la cartera

CASO III Variación de "s^2"

f) Si $s^2 \to \infty \Rightarrow z = 0(z \to 0)$

Calculando el límite de "z" cuando "s^2" tiende a infinito, se tiene que:

$$\lim_{s^2\to \infty} z = \lim_{s^2\to \infty} \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} = 0$$

g) Si $s^2 \to 0 \Rightarrow z = 1(z \to 1)$

Calculando el límite de "z" cuando "s^2" tiende a cero, se determina que:

$$\lim_{s^2\to 0} z = \lim_{s^2\to 0} \frac{a}{a + \frac{s^2}{t}} = 1$$

Si la variabilidad es poca entre los siniestros (es decir nula), se le da credibilidad a la prima de los siniestros y si la variabilidad es mayor se toma como base la prima de la experiencia de la cartera

Después de analizar estos tres casos podemos concluir que a mayor experiencia, mayor heterogeneidad o mayor variabilidad de los siniestros, se puede tomar la prima de experiencia de años anteriores, y en caso de que no se tengan años de experiencia, la cartera sea homogéneo o exista demasiada variabilidad entre los siniestros, lo más conveniente es tomar la prima de experiencia de la cartera.

A continuación se dan algunas notaciones y resultados preliminares sobre los cuales descansan los modelos de credibilidad.

Tabla 4.2 Notación

Símbolo	Nombre	Descripción
θ	Parámetro de Riesgo	Parámetro fijo y desconocido. Es la realización de una variable aleatoria Θ,la cual describe las características del riesgo
$U(\theta)$	Función Estructural	Función de distribución de un riesgo arbitrario y desconocido Θ
X_i	Monto de la reclamación en el i-ésimo año	Variable aleatoria cuyo monto depende del parámetro de riesgo al que está expuesta la cartera

Fuente: "Aplicación de Modelos de Credibilidad para el calculo de primasen el Seguro de Autos", CNSF 2003

4.1.7 Modelo Clásico de Bühlmann

Con el objetivo de obtener la prima de riesgo se determina un estimador lineal que permita ponderar la experiencia individual con la de toda la cartera. Esta es la idea del modelo original planteado por Bühlmann.

Supongamos que tenemos una flotilla expuesta a un riesgo fijo y desconocido $\Theta = \theta$, durante un periodo de t años. Sean $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_t$ los siniestros individuales en los periodos $1,2,\ldots\ldots t$ respectivamente y sea θ que se distribuye como la función estructural $U(\theta)$. Conocido el parámetro de riesgo Θ, las reclamaciones son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución $F_{x/\Theta}(x,\theta)$.

Definimos lo siguiente para la construcción del modelo:

Prima Teórica $\mu(\theta) = E[X_r/\Theta = \theta]$ (4.1.7.1)

Esperanza de la Prima Teórica $m = E[X_r] = E[\mu(\theta)]$ (4.1.7.2)

Varianza del Parámetro $a = Var[E[X_r/\Theta = \theta]] = Var[\mu(\theta)]$ (4.1.7.3)

Varianza de los Sin de la flotilla $\sigma^2(\theta) = Var[X_r/\Theta = \theta]$ (4.1.7.4)

Heterogeneidad promedio en el tiempo de los montos de siniestros . $s^2 = E[Var[X_r/\Theta]] = E[\sigma^2(\Theta)]$ (4.1.7.5)

Necesitamos determinar $\mu(\theta) = E[X_r/\Theta = \theta]$ (4.1.7.6) que es la prima de cobro que se estima según Bühlmann a través de una función $g(*)$, que depende de las reclamaciones observadas $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots\ldots, X_t)$, es decir, de la experiencia de la propia flotilla.

Si tenemos una variable aleatoria X, con función de densidad $f(x,\theta)$ y si $T = U(X_1, X_2, \ldots\ldots X_t)$ es cualquier estadística, mediante el cálculo del error cuadrático medio de T, denotado como $ECM(T)$, se encontrará una función μ que nos proporcione la mejor estimación del parámetro θ; el estimador incluye dos cantidades mayores que cero , varianza y cuadrado del sesgo.

Puede verificarse que si X y Y son dos variables aleatorias, la función $g(*)$ de X/Y que minimiza el ECM es:

$$g(X) = E[Y/X] \qquad (4.1.7.7)$$

De aquí concluimos que:

$$g(\underline{X}) = E[\mu(\Theta)/\underline{X}] \qquad (4.1.7.8)$$

En este método se estima la prima restringiendo la función $g(\underline{X})$ a un conjunto de ecuaciones lineales de tal forma que se tiene que:

$$g(\underline{X}) = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots\ldots + c_t X_t \qquad (4.1.7.9)$$

Al minimizar el ECM, se pretende encontrar una función que estime mejor la prima de riesgo que se desea, por lo tanto debemos minimizar $E\left[\{\mu(\theta) - g(X_1, X_2 \ldots\ldots X_t)\}^2\right]$ considerando el conjunto de funciones lineales.
Nuestro objetivo será entonces encontrar las c_t´s para así obtener la combinación lineal de las X_t´s

$$\underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\, E\left[\{\mu(\Theta) - g(X_1, X_2 \ldots\ldots X_t)\}^2\right] = \underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\, E\left[\{\mu(\Theta) - c_0 - c_1 X_1 - c_2 X_2 - \ldots\ldots c_t X_t\}^2\right]$$

$$= \underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\, E\left[\left\{\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=0}^{t} c_i X_i\right\}^2\right] \qquad (4.1.7.10)$$

Como podemos notar, nos enfrentamos a un problema, que será el obtener el mínimo en relación a cada uno de los coeficientes de X_i, usando herramientas de cálculo diferencial e integral y bajo condiciones de regularidad, sabemos que es posible obtener valores mínimos de las variables utilizando las derivadas de las funciones e igualándolas a cero, por lo que derivamos la expresión anterior respecto a c_0 obteniendo lo siguiente:

$$\frac{d}{dc_0}E\left[\left\{\mu(\Theta)-c_0-\sum_{i=0}^{t}c_iX_i\right\}^2\right]=2E\left[\mu(\Theta)-c_0-\sum_{i=0}^{t}c_iX_i\right] \qquad (4.1.7.11)$$

Igualando a cero tenemos que

$$2E\left[\mu(\Theta)-c_0-\sum_{i=0}^{t}c_iX_i\right]=0\Rightarrow E\left[\mu(\Theta)-c_0-\sum_{i=0}^{t}c_iX_i\right]=0 \qquad (4.1.7.12)$$

$$\Rightarrow c_0=E[\mu(\theta)]-E\left[\sum_{i=0}^{t}c_iX_i\right]=m-\sum_{i=0}^{t}c_im \qquad (4.1.7.13)$$

Sustituyendo c_0, ahora necesitamos minimizar:

$$=\underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\ E\left[\left\{\mu(\Theta)-m-\sum_{i=0}^{t}c_i(X_i-m)\right\}^2\right] \qquad (4.1.7.14)$$

En este caso generalizamos el proceso derivando respecto a c_r para alguna $r=1,2,\ldots\ldots,t$ e igualando a cero para obtener:

$$=E\left[\left\{\mu(\Theta)-m-\sum_{i=0}^{t}c_i(X_i-m)\right\}\{X_r-m\}\right]=0 \qquad (4.1.7.15)$$

$$=E\left[\left\{(\mu(\Theta)-m)(X_r-m)-\sum_{i=0}^{t}c_i(X_i-m)(X_r-m)\right\}\right]=0 \qquad (4.1.7.16)$$

De aquí tenemos que:

$$=E[(\mu(\Theta)-m)(X_r-m)]=E\left[\sum_{i=0}^{t}c_i(X_i-m)(X_r-m)\right] \qquad (4.1.7.17)$$

$$\Rightarrow Cov[\mu(\theta),X_r]=\sum_{i=0}^{t}c_iCov[X_i,X_r] \qquad (4.1.7.18)$$

Sean $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_t$ variables aleatorias condicionalmente independientes. Si el parámetro de riesgo es conocido $(\Theta = \theta)$, con esperanza $\mu(\theta)$ y varianza $\sigma^2(\theta)$ condicionales, entonces:

a) $Cov[X_r, X_{r'}] = a + \delta_{rr'} s$ (4.1.7.19)

$r, r' = 1, 2, \ldots\ldots t$ donde δ es la δ *Kronecker*

b) $Cov[\mu(\theta), X_r] = a$ (4.1.7.20)

De (4.1.7.19) se tiene: $= a = \sum_{i=1}^{t} c_i Cov[X_i, X_r] = \sum_{i=1}^{t} c_i \left(a + \delta_{irs^2}\right)$ (4.1.7.21)

Si $i = r$ se optimiza

$$a = a\sum_{i=1}^{t} c_i + c_{rs^2} = c_i ta + s^2 c_i = c_i\left(at + s^2\right) \quad (4.1.7.22)$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{a}{at + s^2} = c_0 = c_1 = \ldots\ldots = c_t \quad (4.1.7.23)$$

Podemos reexpresar la función óptima en términos del promedio ponderado de la esperanza del riesgo individual y la esperanza de los siniestros de toda la cartera de la siguiente manera:

$$g(\underline{X}) = c_0 + \sum_{i=1}^{t} c_i X_i = \left(1 - \frac{at}{at + s^2}\right)m + \left(\frac{a}{at + s^2}\right)\sum_{i=1}^{t} X_i =$$

$$= \left(1 - \frac{at}{at + s^2}\right)m + \left(\frac{at}{at + s^2}\right)\sum_{i=1}^{t} \frac{X_i}{t} = (1 - z)m + z\overline{X} \quad (4.1.7.24)$$

Con la fórmula obtenemos al factor de credibilidad propuesto por Bühlmann, establecido como:

$$z = \frac{at}{s^2 at} \quad (4.1.7.25)$$

con $\overline{X} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i$ (4.1.7.26)

4.1.7.1 Variables del Método de Bühlmann

Dadas las ecuaciones (4.1.5.24),(4.15.25)y(4.15.26) necesitamos conocer las variables m a y s^2 pues son desconocidas ,sin embargo estos términos podemos sustituirlos por estimadores.

Supongamos que nuestra cartera consta de k grupos, contamos con los montos reclamados por cada uno de ellos en los últimos "t" periodos, esto es:

Tabla 4.3
Grupos de la Cartera en el tiempo

Cartera		1	2	……	j	……	K
Variable Estructural		Θ_1	Θ_2	……	Θ_j	……	Θ_k
Periodo de observación	1 2 ⋮ ⋮ t	X_{11} X_{12} ⋮ ⋮ X_{1t}	X_{21} X_{22} ⋮ ⋮ X_{2t}	…… …… ……	X_{j1} X_{j2} ⋮ ⋮ X_{jt}	…… …… ……	X_{k1} X_{k2} ⋮ ⋮ X_{kt}

Fuente: "Aplicación de Modelos de Credibilidad para el calculo de primasen el Seguro de Autos", CNSF 2003

Al grupo "j", le corresponde un vector aleatorio $(\underline{X_j}) = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots\ldots, X_{jt})$, donde X_{jt} representa la reclamación del j-ésimo grupo en el momento "t" con parámetro de riesgo Θ.

Partiendo del supuesto de que los "k" grupos son independientes e idénticamente distribuidos, que conocido el parámetro $\Theta_j = \theta_j$ las variables $X_{j1}, X_{j2}, \ldots\ldots, X_{jt}$ son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidas. Se debe notar que la cartera no es homogénea dados los diferentes parámetros de riesgo a los que se encuentran expuestos los riesgos.

Al desconocer la distribución del parámetro de riesgo, será necesario estimar cada uno de los parámetros que definen las ecuaciones (4.1.5.24), (4.15.25) y (4.1.5.26). De acuerdo a la sección anterior los mejores estimadores son:

$$\hat{\mu}(\theta) = M_{j^a} = (1-z)m + zM_j \qquad (4.1.7.27)$$

Donde:

$$M_{j^a} = \overline{X_j} = \frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t} X_{j^r} \qquad (4.1.7.28)$$

$$z = \frac{at}{s^2 + at} \qquad (4.1.7.29)$$

El estimador de la prima involucra la prima correspondiente a toda la cartera m y al factor de credibilidad z, para el cual es necesario conocer la heterogeneidad de toda la cartera, y la variación de la siniestralidad dentro de cada grupo sujeto al mismo riesgo s^2, estas variables son desconocidas y los montos de los siniestros de cada grupo son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos. Por lo tanto los estimamos insesgadamente obteniendo los siguientes estimadores:

$$\hat{m} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \overline{X_j} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{t}\frac{X_{jr}}{t} \qquad (4.1.7.30)$$

$$s^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{t-1}\right)\sum_{r=1}^{T}\left(X_{jr} - M_j\right)^2 = \frac{1}{k(1-t)}\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{t}\left(X_{jr} - M_j\right)^2 \qquad (4.1.7.31)$$

Donde:

$$M_j = \frac{1}{t}\sum_{r=1}^{t} X_{jr} \qquad (4.1.7.32)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}\left(M_j - \hat{m}\right)^2 - \frac{1}{t}\hat{s}^2 \qquad (4.1.7.33)$$

4.2 Aplicaciones

1. El 90% de los siniestros producidos en una cartera de seguro de automóviles de asegurados que viven en núcleos urbanos, corresponde a accidentes producidos en tales núcleos y el 10 % restante a accidentes en un entorno no urbano. Los datos correspondientes a los asegurados no urbanos son: accidentes urbanos 15%, accidentes no urbanos 85%. Se sabe que el 80% de los asegurados de la compañía tiene residencia urbana. Se produce un siniestro correspondiente a un accidente no urbano. ¿Cuál es la probabilidad de que el asegurado sea urbano?

2. Durante todo el año, el total de clientes que contrataron un seguro de gastos médicos lo hicieron solamente con dos aseguradoras que denotaremos por A y B. En la aseguradora A se concentra el 60% del total de pólizas contratadas en el año, el 40% restante se concentra en la aseguradora B. Del total de sus pólizas, la aseguradora A tiene 3% de personas Solteras, la B el 5%. Ha ocurrido un siniestro a una persona soltera. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona, este asegurada en la empresa B?

3. Una Fábrica contrata una póliza de seguros de gastos médicos para un riesgo de accidente muy presente dentro de la misma. El 45% de los empleados esta expuesto a sufrir un accidente, dentro de estos, el 30% sufre un accidente en recibo; el 35% sufrirá un accidente en el área de corte y el 35% sufrirá un accidente en costura. Ocurre un accidente, a)¿Cuál es la probabilidad de que el accidente se haya originado en el área de corte?, b)¿Y en la de Recibo?.

4. Según el modelo clásico de Bülhmann; Con el objetivo de obtener la prima de riesgo se determina un estimador lineal que permita ponderar la experiencia individual con la de toda la cartera, debemos minimizar el ECM, es decir,
$$\underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\, E\left[\{\mu(\Theta) - g(X_1, X_2 \ldots\ldots X_t)\}^2\right] = \underset{c_0,\ldots,c_t}{Min}\, E\left[\left\{\mu(\Theta) - c_0 - \sum_{i=0}^{t} c_i X_i\right\}^2\right]$$ donde
$$g(\underline{X}) = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots\ldots + c_t X_t$$
Demuestra que $c_0 = E[\mu(\theta)] - E\left[\sum_{i=0}^{t} c_i X_i\right] = m - \sum_{i=0}^{t} c_i m$

Resultados de Algunos ejercicios
Capítulo 1

1.- Recuerda que $\Gamma(n) = (n-1)!$, suponga que se cumple para *n=k* y demuestra para *n=k+1*

2.- Por Definición $M_x(t) = E(e^{tx}) = e^{\lambda(e^t-1)}$, si $S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots\cdots + X_n$ y X_i sigue una distribución $P(\lambda_i)$, entonces S se distribuye $P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

3.- $n = \left(\frac{U_a y_\varepsilon}{\lambda}\right)$

4.- 5.71%

6.- Hint: $\left(x - (\mu + \sigma^2 t)\right)^2 = x^2 + 2x(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^2$

8.- a) $P[x \leq 30] = 5/8$

b) $P[x = 40] = 1/4$

c) $E[X] = 27.335$

d) $Var[X] = 227.08$

9.- a) $E[S] = 1.5 \quad Var[S] = 1.29$

b) $P[s > 2] = 0.3298$

10.- 135 Pólizas constituyen la cartera.

11.- a) $E[S] = 2.2 \quad Var[S] = 1.56$

b) $f_S(s) = \begin{cases} 0.072 & s = 0 \\ 0.240 & s = 1 \\ 0.3 & s = 2 \\ 0.236 & s = 3 \\ 0.112 & s = 4 \\ 0.036 & s = 5 \\ 0.004 & s = 6 \\ 0 & eoc \end{cases}$ $\quad F_S(s) = \begin{cases} 0.072 & 0 \leq s < 1 \\ 0.312 & 1 \leq s < 2 \\ 0.612 & 2 \leq s < 3 \\ 0.848 & 3 \leq s < 4 \\ 0.960 & 4 \leq s < 5 \\ 0.996 & 5 \leq s < 6 \\ 1 & 6 \leq s \end{cases}$

c) $P(s=8)=0$
d) $P(s<4)=0.848$
e) $P(s>6)=1$

12.- Utiliza el Diagrama de Venn para hacerlo más visible, define $A\cap B$, $A\cap B^C$

Capítulo 2

1 Recuerda que $P_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)P_{k-1}$

2.- Sabemos que $P_0(0)=1$ y $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, demuestra para *n=1,* supongamos se cumple para *n=k* y demuestra para *n=k+1*

3.- Si ambas Variables Aleatoria se distribuyen poisson y la Poisson es cerrada bajo la convolución, entonces S se distribuya Poisson

4.- $E(S_c)=50$ $Var(S_c)=7250$ revisar

5.- Recordar que la distribución Poisson es cerrada bajo la convolución

6.- a=q b= (k-1)q

7.- Al ser Q variable de Mixtura $E(Q)=1$

8.- $\mu_2(\xi)= 1/h$ $\mu_3(\xi)= 2/h^2$ $\mu_4(\xi)= 3h+6/h^3$

9.- $P(N(t)=0)=0.9897$

11.- $P(X_1+X_2=1)=0.2116$

Capítulo 4

1.- 0.32
2.- 0.52
3.- 0.35 y 0.30

CONCLUSIONES

En este trabajo introductorio se ha mostrado que la Teoría del Riesgo es la herramienta básica para el análisis de la solvencia de empresas de seguros. Como toda ciencia de reciente creación, aún faltan muchos elementos por perfeccionar, en particular, la adición de consideraciones de carácter financiero y económico que afectan a la empresa de seguros, sin los cuales esta teoría quedaría fuera de toda aplicabilidad.

A lo largo del presente trabajo, se han expuesto los modelos mas utilizados en la teoría del Riesgo de una forma que sean de fácil entendimiento para los estudiantes de la facultad de ciencias que cursan o están por cursar la materia.

De acuerdo con lo presentado en el Capítulo 1, se ha realizado un recordatorio de los elementos estadísticos necesarios para mayor comprensión de los temas que se abordaran en los capítulos siguientes, es por ello que repasa la definición de la esperanza y varianza, así como condicionales, para poder, a partir de la función de distribución de las variables aleatorias obtener las funciones generadoras de las mismas. Como vimos, uno de los procesos es el de convolución para determinar la distribución de la cartera de riesgos, sin embargo, mientras mas grande sea la cartera, la complejidad de realizar convoluciones es mayor.

Así mismo se presentó a la Teoría Individual del Riesgo como uno de los métodos para comprender la importancia de la solvencia en las entidades aseguradoras, como parte fundamental de su actividad, ya que al tener un nivel suficiente de solvencia la Probabilidad de Ruina tiende a disminuir. Sin embargo no solamente de la solvencia depende, sino también la siniestralidad que tenga nuestra cartera además de la experiencia que tengamos como empresa de la misma. Una primera aproximación a la determinación de la probabilidad de Ruina, es mediante la Teoría Individual del Riesgo utilizando el Teorema Central del Límite, que presenta una variación cuando los riesgos que constituyen nuestra cartera son independientes e idénticamente distribuidos o no lo son.

En el Capítulo 2, se tuvo un primer acercamiento de los estudiantes con los procesos estocásticos, esto les permitió entender la gran utilidad de la materia en su vida profesional y algunas de las aplicaciones de esta en la teoría del riesgo con es el caso particular del proceso de poisson, pues en el área aseguradora, la distribución poisson es una de las que tiene mayor fama por su utilidad y sencillez en su tratamiento.

A diferencia del Capítulo 1, donde la Teoría Individual del Riesgo, como su nombre lo indica analiza cada una de las pólizas que constituyen nuestra cartera de riesgos, en la Teoría Colectiva, este enfoque de estructura individual se ignora y al portafolio se le considera como un todo. Es a partir de éste, que solamente se requiere modelar como se presentó, el número y monto de las reclamaciones, y así construir los siniestros agregados. Para llegar al modelado de nuestro portafolio, partimos de los conceptos iniciales de los procesos estocásticos, incrementos estacionarios, independientes y exclusión de siniestro múltiple, para así llegar a la construcción del proceso de poisson y determinar que la probabilidad de que ocurran n siniestros en un periodo de longitud h se distribuye poisson con parámetro λh, donde λ representa la tasa media de ocurrencia de los siniestros de la cartera.

Seguida de la Teoría Colectiva del Riesgo, en el capítulo 3 nos introducimos a lo que es el Reaseguro, en particular el Reaseguro Financiero, conocimos el tipo de riesgos cubiertos por el reaseguro financiero y los grupos en los que se divide, además de que en este también entra el proceso de Poisson estudiado en el capitulo anterior contribuyendo a la determinación de los momentos de las variables aleatorias costo total cedido y retenido por el reasegurador en el intervalo de tiempo que estemos estudiando.

En la segunda parte del capítulo nos introducimos al concepto de ruina y determinación de la probabilidad de ruina, se entendió que el término Ruina no es tan preocupante y/o grave como pudiera parecer pues aunque se pudiera presentar la ruina en algún ramo del sector que contemple una aseguradora, pudiera ser que al considerar todos los recursos de la empresa, se pueda solventar la ruina de uno de los ramos de está. Siempre y cuando haya la suficiente solvencia.

La determinación de la probabilidad de ruina se realizó mediante el modelaje del costo total de los siniestros a través de un proceso de poisson compuesto, es decir, consideramos que el número de siniestros sigue una distribución discreta Poisson de parámetro λ, y la cuantía individual del siniestro una distribución continua.

En el capítulo 4 se presentó una introducción a la Teoría de la Credibilidad, y pudimos comprobar que el método de Bühlmann representa una opción viable para la tarificación u obtención de la prima de riesgo, pues forma parte de los procedimientos actuariales aplicables a obtener la prima de riesgo, basados en los principios actuariales.

Los métodos tradicionales no permiten un análisis del riesgo que incorpore la experiencia de la persona encargada de tomar las decisiones en la determinación de la prima de riesgo, al contrario, tienden a utilizar tarifas iguales para riesgos de naturaleza distinta, es decir, se cobra lo mismo por riesgos que tienen una tasa de incidencia muy alta como a riesgos que presentan una tasa baja de incidencia.

A diferencia de los anteriores, los modelos de credibilidad tienen fundamentos bayesianos y se basan en la determinación de un estimador lineal que permita ponderar la experiencia de la empresa, con la de la cartera mediante el factor “z”, en función de la experiencia propia, la heterogeneidad de la cartera y la variación de las reclamaciones que se presenten. El factor “z” se determina bajo los supuestos de los modelos de credibilidad y varía dependiendo del modelo.

Finalmente, por lo anterior se debe destacar la importancia de la materia para que los alumnos tomen el reto de desarrollar modelos más complejos y precisos para sus cálculos de primas pues llegará a ser parte de su reconocimiento y certificación.

BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

1.- BEARD, R.E. et. al.
RISK THEORY. THE STOCHASTIC BASIS OF INSURANCE
Chapman & Hall, 3rd Edition
1984.

2.- BÜHLMANN, HANS
MATHEMATICAL METHODS IN RISK THEORY
Springer-Verlog Burlin Heidelberg
1970.

3. - COLEMAN RADNEY
PROCESOS ESTOCASTICOS
Editorial Limusa
1976.

4.- DAYKIN, CD; PENTIKAINENT; PESONEXI M.
PRACTICAS RISK THEORY FOR ACTUARIES
Chapman & Hall
1994.

5. - FREUND JOHN E; MILLER IRWIN; MILLER MARYLESS
ESTADISTICA MATEMÁTICA CON APLICACIONES
Editorial Pearson Educación
2000.

6. - GOOVERTS, KASS ET. AL.
EFFECTIVE ACTUARIAL METHODS
1946.

7.- HADLEY G
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORIA DE LA DECISIÓN.
Editorial Fondo de Cultura Económica
1979.

8.- LATORRE LLORRENS LUIS
TEORIA DEL RIESGO Y SUS APLICACIONES A LA EMPRESA ASEGURADORA
Editorial Mapfre
1992.

9.- NIETO DE ALBA UBALDO, VEGAS ASENSIO JESÚS
MATEMÁTICA ACTUARIAL
Editorial Mapfre
1993.

10. - PANJER & WILLMOT
INSURANCE RISK MODELS
Schaumburg Illinois Society of Actuaries
1992.

11. – RUIZ MONCAYO ALBERTO
INTRODUCCIÓN Y METODOS DE PROBABILIDAD
Editorial Trillas
1973

ARTICULOS Y NOTAS DE CLASE

1.- CLARAMOUNT BIELSA DRA. MERCÉ
"ANALISIS UNIPERIODICO, MODELO DE LA TEORIA COLECTIVA DEL RIESGO".
NOTAS DE CLASE: TEODIA DE RIESGO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS
FACULTAD DE ESTUDIOS EMPRESARIALES, UNIVERSIDAD DE BARCELONA
BARCELONA ESPAÑA 2001

2.- IBARRA ALFARAZ JUAN ANTONIO, APARICIO ROSAS ADOLFO, MONROBEL ALCÁNTARA JOSÉ RAMÓN
"LAS BASES BAYESIANAS DE LA TEORÍA DE LA CREDIBILIDAD"
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS. CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES RAMÓN CARANDE (UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID) 2002

3.-"APLICACIÓN DE MODELOS DE CREDIBILIDAD PARA EL CÁLCULO DE PRIMAS EN EL SEGURO DE AUTOMÓVILES"
COMISIÓN NACIONAL DE SEGUROS Y FIANZAS.
LUMA, 2003

4.- SARRASI VIZCARRA F. JAVIER; PEREZ FRUCTUOSO MA. JOSE
"EL REASEGURO FINANCIERO COMO ALTERNATIVA AL REASEGURO TRADICIONAL"
PRESENTACIÓN V CONGRESO DE MATEMÁTICA DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS Y III HISPANO ITALIANO DE MATEMÁTICA FINANCIERA Y ACTUARIAL
BILBAO ESPAÑA,2000