UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SUMA DE POTENCIAS DE RAÍCES Y SUMA DE DIVISORES EN LOS TRABAJOS DE EDWARD WARING, INSPIRADOS EN LEONHARD EULER

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

JOSÉ LENIN VILLAGRA BARBOSA

T U T O R:
MAT. JULIO CÉSAR GUEVARA BRAVO

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del alumno Villagra Barbosa José Lenin 21633601 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 087058400
2. Datos del tutor Mat Julio César Guevara Bravo
3. Datos del sinodal 1 M en C José Rafael Martínez Enríquez
4. Datos del sinodal 2 Dr Octavio Páez Osuna
5. Datos del sinodal 3 Mat Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda
6. Datos del sinodal 4 Dr Alvarado García Alejandro
7. Datos del trabajo escrito Suma de potencias de raíces y suma de divisores en los trabajos de Edward Waring, inspirados en Leonhard Euler 86 p 2007

Para mi sobrino José Rodrigo

AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a mi Mamá por su apoyo, paciencia, y por el ejemplo de moral y honestidad que me heredó, ambas virtudes inestimables en esta época.

Agradezco a mi Papá por la educación, la libertad, y el amor por el conocimiento y la justicia que me legó, gracias a todo lo cual soy lo que soy, para bien o para mal.

Agradezco a Lulú, quien se ha portado a lo largo, muy largo de este tiempo como una compañera inigualable, en las buenas y en las malas y esperando pacientemente la conclusión de esta etapa de mi vida.

Gracias al profesor César Guevara, mentor y amigo, que me ayudó no sólo en lo académico sino también a recuperar una autoestima algo debilitada. Me ayudó en esta y en muchas otras formas, gracias por cada una de ellas.

Imposible agradecer suficientemente y a todas y cada una de las personas que de forma indirecta fueron parte de esta travesía. A mis hermanos y a mi cuñado, a mis tíos, a mi *amá*, a todos los que me apoyaron y estuvieron pendientes de mi carrera. Un hombre no es una isla solitaria, y nuestra vida se va definiendo gracias a la influencia de la gente que nos rodea. En este sentido, es mucha la gente a la que hay que algo que agradecerle. Este logro es de todos ellos.

Gracias especiales al profesor Rafael Martínez, quien me dio la oportunidad de impartir clases por primera vez en esta facultad.

Gracias con toda el alma a la UNAM, mi segunda madre.

Gracias a Dios, terminé.

INDICE

INTRODUCCION

LOS TRABAJOS OLVIDADOS

La historia de la humanidad se ha podido reconstruir parcialmente a partir de los testimonios escritos que han sobrevivido a través de los años. Los tenemos recogidos en distintos materiales, tablillas, papiros, pergaminos, y bajo diferentes formas de codificación, glifos, manuscritos, códices y, a partir del siglo XV, se suman los impresos.

La historia es testigo de la existencia, durante siglos, de quienes quieren destruir estos materiales de manera directa e indirecta, y también agradece a los que los conservan. Dicha información ha tenido que resistir a los enemigos naturales, a los saqueadores y a los conquistadores, quienes en el curso de sus expansiones, han destruido incluso bibliotecas completas.

Actualmente toda la documentación histórica se encuentra —en la mayoría de los países occidentales— a buen resguardo.

Una gran parte de los países que acogen en sus bibliotecas fondos históricos no los tienen totalmente disponibles, y esto es porque dichos fondos se encuentran en periodos de clasificación, esto es, ya tienen inventario de cantidad y título, pero no así de la temática. Incluso, muchas bibliotecas no cuentan con servicio al público para esta clase de fondos.

Gran parte de los fondos reservados en el mundo se encuentran en calidad de objetos inventariados pero muy bien resguardados, esto es, en el aspecto de conservación no hay problema con la humedad, iluminación o climatización, pero, en un alto porcentaje los documentos no son consultados por ningún lector interesado en reconstruir los conocimientos contenidos en ellos.

Es sorprendente ver la enorme cantidad de temas que han sido poco explorados, a pesar de que la documentación existe en los fondos históricos. Un ejemplo de lo anterior es el primer libro de matemáticas escrito en América, y nos referimos al *Sumario Compendioso* de Juan Diez Freyle. Este libro fue publicado en 1556, y a 450 años de su publicación aún no existe un estudio completo sobre su contenido matemático.[1] Ni siquiera la importancia histórica de ser el primer libro de matemáticas en América fue suficiente para que la comunidad histórico-científica se interesara en él.

Como segundo ejemplo podemos mencionar el caso de la primera cátedra de matemáticas en la Nueva España. En 1630 se creó la cátedra de matemáticas y astronomía, y a cargo de ella se designó al mercedario Fray Diego Rodríguez. Actualmente se conocen la mayoría de los manuscritos que contienen los elementos matemáticos usados en los cursos. El archivo general de la nación conserva en su acervo la documentación de la creación de la cátedra. Lo sorprendente del caso es

[1] Próximamente esta obra será publicada en una edición facsimilar.

que en la actualidad no existe un solo trabajo en que se analice el contenido matemático de los cursos, y esto a pesar de que se hallan los documentos necesarios para realizar la investigación.

Los anteriores son dos casos de libros y documentos que son de gran importancia para la historia de las matemáticas en México, y que desafortunadamente han permanecido en las sombras.

Así como aquí se presentan dos casos que atañen a la ciencia en México, también se podría presentar un sinnúmero de casos en todo el mundo y en todos los ámbitos de la ciencia, que dejarían ver que existen trabajos en espera de ser analizados, y en muchos casos descubiertos —al estar reposando en algún fondo reservado.

El presente trabajo de tesis escudriñará en este rubro, es decir, dentro del tema de los trabajos olvidados en el ámbito de las matemáticas y, en particular, de la teoría de los números, donde existen personajes y temas explorados sólo parcialmente. Para ello se decidió —por motivos de interés académico— estudiar algunos artículos publicados por la *Royal Society* de Londres, en el siglo XVIII.

LA *ROYAL SOCIETY*

La *Royal Society* es una de las agrupaciones científicas de más prestigio en el mundo. Es promotora y divulgadora de la ciencia. Publica trabajos, otorga becas, premios y medallas a científicos de todo el mundo, con base en sus logros y aportaciones a la ciencia. Desde el edificio de Carlton House, en Londres, donde tiene su sede, la *Royal Society* es foco de irradiación de la ciencia británica al mundo, y punto de convergencia de los intereses científicos mundiales.

Su origen hay que remontarlo a 1640, cuando un grupo de *filósofos naturales* decidieron reunirse con el objeto de discutir las ideas de Francis Bacon. En principio, una idea simple se tornó más compleja y adquirió un carácter más formal el 28 de noviembre de 1660 cuando se procedió a su fundación oficial como “un colegio para la promoción del aprendizaje físico-matemático experimental". El nombre de *Royal Society* lo adopta al año siguiente, ya bajo el auspicio del rey Carlos II, y para 1663 la Sociedad es conocida como *The Royal Society of London for Improving Natural Knowledge* (la Real Sociedad de Londres para el mejoramiento del conocimiento natural).

No siempre la *Royal Society* estuvo en su establecimiento actual. La suya es una historia itinerante que tuvo como sedes el Gresham College, la casa Arundel (hogar en Londres de los duques de Norfolk), Crane Court en 1710, Somerset House en 1780 , Burlington House en Picadilly en 1857 y, a partir de 1967, en la Carlton House Terrace (su sitio actual)

Tampoco ha sido fija la forma de selección de sus miembros. En un principio, se integraban a ella tanto científicos profesionales tales como Robert Boyle, como científicos amateurs. Entre los siglos XVII y principios del XVIII, estando la *Sociedad* bajo la presidencia de Joseph Banks, el criterio para elegir a los no profesionales consideraba, incluso, el caudal económico de que dispusieran, esto con la intención de volverlos patrocinadores. La idea fue perdiendo popularidad, y en 1847 la *Sociedad* decidió que en el futuro los miembros serían elegidos fundamentalmente por el mérito de su trabajo científico.

Entre los nombres vinculados a la historia de la Royal Society están el de Robert Boyle (quien formó parte del grupo fundador), Robert Hooke (primer curador de experimentos), Sir Issac Newton (quien fue presidente de la *Sociedad*) y Edward Waring —uno de los miembros más jóvenes y de quien hablaremos más adelante —entre otros.

Una de las formas de difundir el quehacer científico de los británicos fueron las comunicaciones escritas. Ello se manifestó a través de la publicación de los *Philosophical Transactions*, cuya primera edición data del año 1665. El primer número fue editado por el secretario de la *Sociedad* Henry Oldenburg y actualmente es la revista científica más antigua que se sigue publicando.

Los *Philosophical Transactions* tratan todas las áreas de la ciencia. A lo largo de su historia los artículos han tratado cuestiones de química, biología, física, mecánica, etc. y, por supuesto, de matemáticas. La cantidad de artículos inexplorados —a lo largo de los siglos— que están contenidos en esta publicación es amplia, y en este sentido hemos centrado nuestro interés en los artículos de Edward Waring que la revista publicó entre 1764 y 1791. Por los estudios previos que hemos realizado hemos detectado que los artículos de Waring se encuentran prácticamente inexplorados, esto es, son mínimas las menciones que se hacen de ellos. Incluso, en los trabajos biográficos, la referencia de los trece artículos se encuentra incompleta. Es importante mencionar que hemos tenido acceso a la colección completa de los trece artículos en su edición original del siglo XVIII[2] (afortunadamente se encuentran en México en una colección privada). Después de analizar los temas de los artículos consideramos que estos son de interés matemático e histórico. Encontramos que reflejan un cúmulo importante de las teorías de sus contemporáneos[3], y por esta razón estamos convencidos de que es relevante que se haga un análisis de estos trabajos para comprender más el quehacer matemático del siglo XVIII.

Los trece artículos son los siguientes:

1. *Problems. 1764.*
2. *Some new properties in Conic Sections. 1765.*
3. *A letter to Charles Morton concerning Two Theorems. 1766*
4. *.On the General Resolution of Algebraical Equations. 1779.*
5. *Problems concerning Interpolations. 1779.*
6. *On the Summation of series, whose general term is a determinate Function of z the Distance from the first Term of the Series. 1784.*

[2] Cabe señalar que cuando se inició el trabajo de tesis la única biblioteca (electrónica) que los tenía parcialmente disponibles era la Nacional de Francia, en los últimos meses los trece artículos han sido integrados al acervo electrónico de JSTOR.
[3] Por ejemplo, ideas de Euler, de Lagrange, y de Bezout, entre otros.

7. On finding the values of Algebraical Quantities. 1787

8. *On Infinite Series. 1786.*

9. Some properties of the Sum of the Divisors of Numbers. 1788..

10. On the Method of correspondent Values. 1789.

11. On the Resolution of attractive Powers.1789

12. On Centripetal Forces. 1788.

13. On Infinite Series. 1791.

Esta tesis es parte de un ambicioso proyecto que pretende traducir, analizar y dar a conocer los trabajos anteriores. Dada la magnitud y complejidad de la obra de Waring se decidió —para propósitos de la tesis—, abordar solamente uno de ellos:[4]

Some properties of the sum of divisors of numbers. 1788

Edward Waring

El nombre de Edward Waring quedó enlazado al de la *Sociedad* como el de un miembro importante por el puesto que ocupó en ella y también por sus artículos en los *Philosophical Transactions*. Antes de adentrarnos en su trabajo matemático daremos algunos perfiles de su vida para entender mejor el contexto de su obra.

Nació en Shrewsbury, Inglaterra, en 1736. Se sabe poco de los primeros años de su vida, pero en 1753 fue admitido en el Colegio de la Magdalena, en Cambridge. No sólo fue matemático sino también Doctor en medicina, pero no parece haber ejercido

---

[4] Hablando en primera persona —la única vez que lo haré en este trabajo— debo mencionar que el interés por analizar este artículo se originó en un curso —al que asistí como alumno— sobre teoría aditiva de los números, impartido por el director de esta tesis, el profesor Guevara. El curso fue especialmente útil no sólo. Para estar en condiciones de comprender el artículo era necesario ser capaz de identificar este tipo de números, debido a que Waring es considerablemente escueto en su exposición.

Para hacer una breve historia de los comienzos de este análisis, hay que decir que este inició con el reconocimiento —en el artículo— de los números pentagonales y su relación con las particiones, representada por funciones generadoras. Prosiguió con un trabajo de consulta gracias al que se descubrieron en algunos porque fue donde descubrí parte del trabajo de Edward Waring, sino porque los asistentes entramos en contacto con los números pentagonales y la representación de enteros como suma de potencias textos (mencionados en la bibliografía) resultados esenciales tales como el teorema de los números pentagonales de Euler, algunos pertenecientes a la teoría de particiones, las identidades de Newton, etc, los cuales fueron de importancia fundamental.

Posteriormente el auxilio del profesor Guevara, quien se dio a la tarea de consultar algunos artículos de la época —escritos algunos por Euler y otros por Newton— contribuyó decisivamente a armar el complejo rompecabezas del artículo. Hay que mencionar sin embargo que, por desgracia, un texto que fue sostén de este trabajo no está al alcance del lector común, se trata del *Meditationes Algebraicae* de Edward Waring. Todo el material restante usado y mencionado en la bibliografía está disponible.

Lo anterior puede darle al lector una idea del trabajo de investigación implícito en la presente tesis, trabajo que pertenece en parte a la historia de las matemáticas y en parte a la teoría de los números, cuyos nexos van haciéndose evidentes conforme se avanza en la lectura.

esta segunda profesión. Su obra más importante es el libro "*Meditationes Algebraicae*" — Meditaciones de Álgebra. Fue el sexto profesor en ocupar la cátedra Lucasiana.[5] Como miembro de la Royal Society recibió la medalla Copley de esta sociedad en 1784. También fue elegido miembro de sociedades científicas europeas, principalmente de Gotinga y Bolonia. Murió en Plealey, cerca de su natal Shrewsbury, el 15 de Agosto de 1798.

A los 24 años ocupó la cátedra Lucasiana —misma que ya había ocupado Newton a los 27— lo cual de alguna manera nos habla de un hombre especialmente dotado para las matemáticas. Él era de esos genios para quienes algunas cosas sumamente complicadas son fáciles y evidentes (como se puede apreciar en algunos de sus artículos)

Al respecto, J.F.Scott menciona que [Dictionary of Scientific Biography]:

> Aunque sus colegas Lucasianos se oponían por causa de su edad —tenía veinte años— Waring pronto calló a sus críticos, publicando en 1762 [a los 26 años] su *Miscelanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, la cual dio prueba irrefutable de su habilidad y lo estableció de una vez por todas como un matemático de primer rango. Fue elegido miembro de la Royal Society al año siguiente.

Una de sus aportaciones más citadas es el llamado “problema de Waring”, a partir del cual se desarrolla toda la moderna teoría aditiva de los números, la cual ha constituido el campo de acción para matemáticos como Melvyn Nathanson [1996]. El problema, hay que decirlo, sigue abierto, pero no pertenece a este trabajo extenderse sobre él.

El trabajo de Waring no ha tenido el reconocimiento que debería tener, las razones son varias, pero antes de mencionarlas, veamos una cita de Thomson [1812]:

> Waring fue uno de los matemáticos más profundos del siglo XVIII; pero la inelegancia y oscuridad de sus escritos le impidieron obtener la reputación que debiera atribuírsele. Salvo por Emerson, difícilmente encontramos un autor cuyos trabajos sean tan intrincados como los de Waring. La gran elegancia y admirable simplicidad y orden de todos los trabajos de Euler, contribuyeron tanto como su genio inventivo a darle la gran celebridad que hoy goza. [6]

Hay algunos aspectos en la forma de presentar sus investigaciones y que definitivamente tienen incidencia en los trabajos que aquí se exponen. Aunque el retrato que incluimos no lo deja entrever, Waring padecía de miopía, lo cual sería más bien un dato curioso y que quedaría en lo anecdótico si no fuera porque algunos biógrafos atribuyen a este defecto una buena cantidad de errores que, si se restringieran solamente a la ortografía —por ejemplo— no causarían tanto problema como lo causan los errores en la escritura matemática. Además, su exposición es

[5] La cátedra Lucasiana era el legado de Henry Lucas, y fue la primera fundada en Cambridge desde que Enrique VIII crease las cinco cátedras regias en 1540. Era la única cátedra que se ocupaba de las matemáticas y la filosofía natural. Previo a Waring, la cátedra la ocuparon Barrow y Newton, entre otros.

[6] Es significativo que en el comentario anterior salga a relucir el nombre de Euler. Como veremos a lo largo del análisis, Euler es el abrevadero del que Waring se nutre para una buena parte de sus resultados, al menos en lo que se refiere al artículo analizado. De aquí que el título de esta tesis cumpla con el deber moral de incluir el nombre del genio suizo.

increíblemente concisa, aunque no fluida en cuanto a contenido, pues pasa de un párrafo a otro dejando lagunas enormes que hay que llenar a veces con teoría matemática más avanzada.

Aunado a lo anterior, la notación usada por Waring en sus artículos también aporta complicaciones. Scott menciona que Waring fue uno de los matemáticos que se rehusaron a abandonar la notación con la que Newton expuso su Cálculo. Al respecto, menciona lo siguiente:

> A pesar de las mejoras espectaculares en la notación por la cual las operaciones matemáticas fundamentales eran expresadas en el continente, Waring, en sus propios trabajos, usaba tanto el *deísmo* de Leibniz como también el *puntaje* de Newton –los dos grandes sistemas rivales– indistintamente, y no hizo aportación notable al establecimiento de una notación permanente en ninguna rama de las matemáticas. Su método de escribir exponentes —como, por ejemplo, en la página 8 de la edición de sus *Meditationes analyticae*— fue torpe en extremo, y en general su presentación no es atractiva y sus libros son difíciles de seguir.

Además, añade que:

> Sufría [Waring] de una aparente falta de orden intelectual que volvió sus trabajos matemáticos tan confusos que son casi imposibles de seguir en manuscritos, mientras que sus trabajos publicados, quizás por causa de su extrema miopía, están saturados de errores tipográficos. Su lenguaje, en el mejor de los casos, es oscuro.

Más aún, él era un Doctor escribiendo para Doctores, es decir, Waring no ahonda más en el detalle porque no lo considera necesario. Supone que el lector debe conocer el asunto que se está tratando. Sin embargo, para el común de los lectores (incluidos los especializados en las matemáticas) el asunto no es ni de lejos tan inmediato.

Como se ve, abordar el trabajo de Edward Waring no es fácil, así que el presente trabajo de tesis pretende elucidar exhaustivamente sólo lo presentado en el artículo mencionado. El estudio incluye ejemplos concretos acerca de lo que se está leyendo para así facilitar la lectura, lo cual ha sido una de las preocupaciones principales del presente trabajo.

Como ya se dijo, la obra de Waring ha sido poco explorada y, en particular, el artículo que en esta tesis se estudiará está prácticamente intacto al análisis. La mayor parte de las referencias al artículo son de carácter bibliográfico. El único matemático —que encontramos— que se interesó por el artículo fue Leonard Dickson (2005). El trato que le da es puramente descriptivo, es decir, sólo se limita a reproducirlo en sus rasgos más generales, actualizando algo de la notación, señalando y haciendo algunos apuntes de tipo bibliográfico a pie de página. Pero no va más allá. No hay un análisis que nos explique de dónde surgen los resultados. Esto es una muestra de la carencia de análisis que existe con respecto a la obra de Waring.

Por lo tanto, amén del afán de recuperación histórica que se mencionó al principio, el objetivo de esta tesis es poner a consideración de ustedes el esfuerzo que implica asumir una tarea que claramente está por iniciarse.[7]

[7] En México, un primer acercamiento a la obra de Waring es la tesis de Yuval Matarasso con el título: "Los problemas de Waring en la teoría aditiva de los números" (Fac.de Ciencias UNAM).

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN DEL ARTÍCULO

El artículo *Some properties of the sum of divisors of numbers*, publicado en 1788, recoge parte de lo que publicó Waring en el *Meditationes Algebraicae* en 1782. En el teorema 46 de este libro, el autor expone algunas de las propiedades de los enteros, en algunos casos construye y demuestra resultados dirigidos principalmente a la suma de divisores de un número. Asimismo, Waring menciona algunas propiedades de lo que ahora conocemos como función σ (sigma), que calcula la suma de divisores de un número natural. Aunque la notación no es la que usamos en la actualidad, se puede ver que se hace uso de las propiedades que σ posee como función multiplicativa.

La teoría subyacente al artículo incluye teoría de particiones y de números pentagonales, entre otras. Pero antes de abordar dicho artículo conviene situarlo en el contexto en el que fue escrito. Sus primeras cuatro partes están contenidas en el *Meditationes*. Uno de los subcapítulos de esta obra lleva por título *On the properties of integers —Sobre las propiedades de los enteros*. Consta de cuatro teoremas, varios corolarios y notas. El primero de estos teoremas (el mencionado teorema 46) es el que dará pie, junto con los corolarios que se derivan de él, a los resultados que conforman las primeras cuatro partes del artículo en cuestión.

La parte sobresaliente del artículo corresponde a su presentación de la suma de los divisores asociada con la suma de las potencias de las raíces de una función generadora —esta última parte trabajada años antes por Girard y Newton.

El polinomio con el que abre el artículo nos hará abordar el teorema de los números pentagonales de Euler —mismos que causaban fascinación y sorpresa a este matemático— ya que es precisamente este teorema el que justifica la forma del

.polinomio. De igual manera, la fórmula de suma de divisores de Euler constituirá un resultado esencial en el artículo.

Waring se extendió en sus resultados para calcular la suma de los divisores de un número, pero con la característica de que ahora podría elegir qué tipo de divisores quería que fueran sumados para un entero, y de igual manera relacionó la suma de potencias de raíces de funciones generadoras con la suma de estos divisores previamente seleccionados.

Lo dicho hasta aquí se refiere a las primeras cuatro partes del artículo. La parte quinta y última es de alguna manera independiente de las demás, relacionada con ellas por la función suma de divisores. En esta última parte se estudiarán las propiedades de la función suma de divisores como función multiplicativa, más en el contexto de los primeros resultados del teorema 46 del *Meditationes*.

Enseguida presentamos el artículo original junto con su traducción. Consideramos que sería un complemento adecuado para el análisis del trabajo, ya que con ello el lector estaría en la posibilidad de verificar lo que aquí se expone o de aportar opiniones a lo aquí mencionado. Así mismo, se pueden encontrar en el apéndice 0 la fórmula de la función $\sigma(n)$ y la de la propiedad de suma de divisores de Euler.

XXIV. *Algunas propiedades de la suma de los divisores de números.*
por Edward Waring*, M. D. F. R. S*.

Mayo 29. 1788.

1. Sea la ecuación:

$$\left(x-1\right)\left(x^{2}-1\right)\left(x^{3}-1\right)\left(x^{4}-1\right)\left(x^{5}-1\right)\ \ldots\ \left(x^{n}-1\right)$$
$$=x^{b}-px^{b-1}+qx^{b-2}-rx^{b-3}+sx^{b-4}-\&C.$$
$$=x^{b}-x^{b-1}-x^{b-2}+x^{b-5}+x^{b-7}-x^{b-12}-x^{b-15}+x^{b-22}+x^{b-26}-x^{b-35}-x^{b-40}+x^{b-51}$$
$$+x^{b-57}-\&C\ \ldots\ x^{b-n}\pm\&C=A=\ 0\,.$$

Los signos + y – aparecen alternadamente por pares en el término x^{b-n}. Los coeficientes de todos los términos [del polinomio] arriba mencionado (x^{b-n}) serán $+1,\ \ -1,$ ó 0; los términos x^{b-v} serán multiplicados por +1 cuando $v=\dfrac{3z^{2}+z}{2}$ ó $v=\dfrac{3z^{2}-z}{2}$, y *z* sea un número par, pero lo serán por –1 si *z* es un número no par; en todos los casos restantes el coeficiente será = 0.

Los números 1, 2, 5, 7, 12,15, 22, 26, 35, 40, &c, que son restados de *b*, pueden ser obtenidos de la suma de los números 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, &c., los cuales se constituyen al intercalar las dos series aritméticas 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

2. La suma de las potencias (*m*) de cada una de las raíces de la ecuación A = 0, será S(*m*), donde S(*m*) es [a la vez] la suma de todos los divisores del número *m*, siempre que *m* no sea mayor que *n*.

<u>*Cor.*</u> Así, (por la regla para encontrar la suma de las potencias m de cada una de las raíces [en términos] de la suma de las potencias inferiores [de las raíces de A] y [de los] coeficientes de la ecuación dada) se puede deducir que:

XXIV. *Some Properties of the Sum of the Divifors of Numbers.*

By Edward Waring, *M. D. F. R. S.*

Read May 29, 1788.

1. LET the equation $\overline{x-1} \,.\, \overline{x^2-1} \,.\, \overline{x^3-1} \,.\, \overline{x^4-1} \,.\, \overline{x^5-1} \,. \ldots \overline{x^n-1} = x^b - px^{b-1} + qx^{b-2} - rx^{b-3} + sx^{b-4} - \&c. = x^b - x^{b-1} - x^{b-2} + x^{b-5} + x^{b-7} - x^{b-12} - x^{b-15} + x^{b-22} + x^{b-26} - x^{b-35} - x^{b-40} + x^{b-51} + x^{b-57} - \&c. \ldots x^{b-n} \pm \&c. = A = 0$. The figns + and − proceed alternately by pairs unto the term x^{b-n}. The co-efficients of all the terms to the above-mentioned (x^{b-n}) will be $+1$, -1 or 0; they will be $+1$, when multiplied into x^{b-v}, where $v = \frac{3z^2+z}{2}$ or $= \frac{3z^2-z}{2}$, and z an even number; but -1, if z be an uneven number; in all other cafes they will be $= 0$.

The numbers 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, &c. fubtracted from b may be collected from the addition of the numbers 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, &c. which confift of two arithmetical feriefes 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. intermixed.

2. The fum of any power (m) of each of the roots in the equation $A = 0$ will be $S(m)$, where $S(m)$ denotes the fum of all the divifors of the number m, if m be not greater than n.

Cor. Hence (by the rule for finding the fum of (m) powers of each of the roots from the fum of the inferior powers and co-efficients of the given equation) may be deduced $S(m) =$

S(*m*) = p S(*m*-1) – q S(*m*-2) + r S(*m*-3) –s S(*m*-4) + t S(*m*-5) – &c.
=S(*m*-1) + S(*m*-2) – S(*m*-5) – S(*m*-7) + S(*m*-12) + S(*m*-15) –S(*m*-22)
-S(*m*-26) + &c.

que es la propiedad de la suma de divisores inventada por el finado M. Euler.

Cor. Al sustituir a S(*m* -1), [y] S(*m* -2), &c. por sus valores S(*m* - 2) + S(*m* - 3)– S(*m* - 6) - S(*m* - 8) + &c. [y] S(*m* - 3) + S(*m* -4) – S(*m* - 7) – S(*m* -9) + &c. &C, [respectivamente] en la ecuación dada S(*m*)= S(*m* -1) + S(*m* -2) – S(*m* -5) – S(*m* -7) + &c. se puede obtener una expresión para la suma S(*m*) en términos de las sumas de los divisores de números menores a (*m* -1), (*m* -2), &c., el mismo método puede ser usado para un propósito similar en algunas de las siguientes proposiciones.

Cor. Por la regla para encontrar la suma de los productos de las potencias de cualesquiera (*m*) raíces, puede ser deducida la ecuación:

$$\pm 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...m \quad ó \quad 0 = 1 - m(\frac{m-1}{2})S(2) + m(m-1)(\frac{m-2}{3})S(3)$$
$$- m(m-1)(m-2)(\frac{m-3}{4})S(4) + \&c.$$
$$+ m(m-1)(\frac{m-2}{2})(\frac{m-3}{2^2})(S(2))^2 - \&c.$$

en la cual la suma de los divisores de cualquier número *m* es expresada mediante las sumas de los divisores de los números inferiores *m* -1, *m* -2, &c. y sus potencias.
Si *v* es un número par, entonces $\pm$ 1·2·3...*m* tendrá el mismo signo que el coeficiente; si no es par, el contrario; pero si el coeficiente es = 0, entonces el producto 1·2·3....*m* desaparecerá. La ley que obedece esta serie aparece en el *Meditationes Algebraicae.*

3. Sea H el número de maneras diferentes por las cuales la suma de cualesquiera dos números 1, 2, 3, 4,....*m-2*, *m-1,* pueda ser = *m*; H´ el número de maneras por las cuales la suma de cualesquiera tres de los números arriba mencionados pueda ser *m*; H´´, H´´´, H´´´´, &c. el número de maneras por las cuales la suma de cualesquiera cuatro, cinco, seis,

$pS(m-1) - qS(m-2) + rS(m-3) - sS(m-4) + tS(m-5) -$ &c. $= S(m-1) + S(m-2) - S(m-5) - S(m-7) + S(m-12)$ $+ S(m-15) - S(m-22) - S(m-26) +$ &c. which is the property of the ſum of diviſors invented by the late M. EULER.

Cor. By ſubſtituting for $S(m-1)$, $S(m-2)$, &c. their values $S(m-2) + S(m-3) - S(m-6) - S(m-8) +$ &c., $S(m-3) + S(m-4) - S(m-7) - S(m-9) +$ &c. &c. in the given equation $S(m) = S(m-1) + S(m-2) - S(m-5)$ $- S(m-7) +$ &c. may be acquired an expreſſion for the ſum $S(m)$ in terms of the ſums of the diviſors of numbers leſs than $m-1$, $m-2$, &c. – the ſame method may be uſed for a ſimilar purpoſe in ſome of the following propoſitions.

Cor. By the rule for finding the ſum of the contents of every (m) roots from the ſums of the powers of each of the roots may be deduced the equation $\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m$,

$$\text{or } o = 1 - m \cdot \frac{m-1}{2} S(2) + m \cdot \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{3} S(3)$$
$$- m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \frac{m-3}{4} S(4) + \&c.$$
$$+ m \cdot \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{2^2} S((2))^2 - \&c.$$

in which the ſum of the diviſors of any number m is expreſſed by the ſums of the diviſors of the inferior numbers $m-1$, $m-2$, &c. and their powers. If v be an even number, then $\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ will have the ſame ſign as the co-efficient; if uneven, the contrary; but if the co-efficient $= o$, then will the content $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ vaniſh. The law of this ſeries is given in the Meditationes Algebraicæ.

3. Let H be the number of different ways by which the ſum of any two numbers $1, 2, 3, 4, \ldots m-2, m-1$, can become $= m$; H′ the number of ways by which the ſum of any three of the above-mentioned numbers can make m; H″, H‴, H⁗, &c. the number of ways by which the ſum of any four, five, ſix,

&c. de los números arriba mencionados es = *m,* respectivamente. Entonces se tendrá:

$$1 - H + H' - H'' + H''' - \&c. = \underline{+}\, 1 \text{ ó } 0.$$

Si $m = \frac{3z^2 \pm z}{2}$, entonces será +1 ó –1, según si *z* es número impar o par, en todos los otros casos será = 0.

PARTE II

1. Sea la ecuación:

$$\left(x-1\right)\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\left(x^5-1\right)\left(x^7-1\right)\left(x^{11}-1\right)\left(x^{13}-1\right)\left(x^{17}-1\right) \ \dots \ \left(x^n-1\right)\& c.$$
$$= x^{b'} - px^{b'-1} + qx^{b'-2} - rx^{b'-3} + sx^{b'-4} - \& c.$$
$$= x^{b'} - x^{b'-1} - x^{b'-2} + x^{b'-4} + x^{b'-8} - x^{b'-10} - x^{b'-11} + x^{b'-12} + x^{b'-16} - x^{b'-17} - x^{b'-19} + x^{b'-20} - x^{b'-23}$$
$$+2x^{b'-24} - x^{b'-26} - x^{b'-27} + x^{b'-28}, \& c = A' = 0\,;$$

la suma de las potencias (*m*) de cada una de las raíces de la ecuación A´= 0 será S´(*m*), donde S´(*m*) denota la suma de todos los divisores primos del número *m*, y además, *m* no es más grande que *n*.

Cor. De aquí, por la regla antes mencionada S´(*m*) = S´(*m* –1) + S´(*m* – 2) – S´(*m* – 4) – S´(*m* – 8) + S´(*m* –10) + S´(*m* –11) – S´(*m* –12) – S´(*m* –16) + S´(*m* -17) + S´(*m* –19) – S´(*m* –20) + S´(*m* –23) –2S´(*m* –24) + S´(*m* –26) + S´(*m* –27) - S´(*m* –28) + S´(*m* –29), &c.

Si en éste, o en el anterior, o en casos análogos subsecuentes S(*m* – *r*), o S´(*m* –*r*), o $S^l(m-r)$, se vuelven S(0), ó S´(0), ó $S^l(0)$; para S(0), ó S´(0), ó $S^l(0)$, siempre sustitúyase *r*.

Cor. Sea L el coeficiente del término $x^{b'-m}$; entonces, tomando en cuenta la serie arriba mencionada, contenida en el *Meditationes Algebraicae*, se tendrá que:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 ... m \times L = 1 - m(\frac{m-1}{2})S'(2) + m(m-1)(\frac{m-2}{3})S'(3) - m(m-1)(m-2)(\frac{m-3}{4})S'(4)$$
$$+\& c ... + m(m-1)(m-2)(\frac{m-3}{8})S'((2))^2 - \&c.$$

&c. of the above-mentioned numbers is $= m$ respectively; then will $1 - H + H' - H'' + H''' - \&c. = \pm 1$ or 0. Let $m = \frac{3z^2 \pm z}{2}$, and it will be $+1$ or -1, according as z is an odd or even number, in all other cases it will be $= 0$.

PART II.

1. Let the equation be $\overline{x-1} \cdot \overline{x^2-1} \cdot \overline{x^3-1} \cdot \overline{x^5-1} \cdot \overline{x^7-1} \cdot \overline{x^{11}-1} \cdot \overline{x^{13}-1} \cdot \overline{x^{17}-1} \ldots \overline{x^n-1}$. &c. $= x^{b'} - px^{b'-1} + qx^{b'-2} - rx^{b'-3} + sx^{b'-4} -$ &c. $= x^{b'} - x^{b'-1} - x^{b'-2} + x^{b'-4} + x^{b'-8} - x^{b'-10} - x^{b'-11} + x^{b'-12} + x^{b'-16} - x^{b'-17} - x^{b'-19} + x^{b'-20} - x^{b'-23} + 2x^{b'-24} - x^{b'-26} - x^{b'-27} + x^{b'-28}$, &c. $= A' = 0$; the sum of any power (m) of each of the roots in the equation $A' = 0$ will be $S'(m)$, where $S'(m)$ denotes the sum of all the prime divisors of the number m, and m is not greater than n.

Cor. Hence, by the rule before-mentioned $S'(m) = S'(m-1) + S'(m-2) - S'(m-4) - S'(m-8) + S'(m-10) + S'(m-11) - S'(m-12) - S'(m-16) + S'(m-17) + S'(m-19) - S'(m-20) + S'(m-23) - 2S'(m-24) + S'(m-26) + S'(m-27) - S'(m-28) + S'(m-29)$, &c.

If in this, or the preceding, or subsequent analogous cases $S(m-r)$, or $S'(m-r)$, or $S^{l}(m-r)$, becomes $S(o)$, or $S'(o)$, or $S'(o)$; for $S(o)$, or $S'(o)$, or $S^{l}(o)$, always substitute r.

Cor. Let L be the co-efficient of the term $x^{b'-m}$; then, by the above-mentioned series contained in the Meditationes Algebraicæ, will $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m \times L = 1 - m \cdot \frac{m-1}{2} S'(2) + m \cdot \overline{m-1} \cdot \frac{m-2}{3} \times S'(3) - m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \frac{m-3}{4} \times S'(4) + \&c.$
$+ m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \frac{m-3}{8} \times S'((2))^2$

$- \&c.$

una ecuación, la cual expresa una relación entre los divisores primos de los números 1, 2, 3, 4,...*m* –1, *m*, y sus potencias.

Cor. El coeficiente L es igual a la diferencia entre los dos respectivos números de las diferentes maneras en que *m* puede ser expresado como la suma de los números primos 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, &c. en la que una de ellas contiene al número 2 [entre sus sumandos] y la otra no lo contiene.

PARTE III.

1. Sea una ecuación:

$$\left(x^{\alpha}-1\right)\left(x^{\beta}-1\right)\left(x^{\gamma}-1\right)\left(x^{\delta}-1\right) \ \ldots\ \& c = x^{b} - px^{b-1} + qx^{b-2} - rx^{b-3} + \& c = 0$$

entonces la suma de las potencias (*m*) de cada una de las raíces, será la suma de todos los divisores de *m*, que pueden ser encontrados entre los números α, β, γ, δ, &c.

2. El coeficiente del término x^{b-m} será la diferencia entre las dos cantidades respectivas de las diferentes maneras, [en] que el número (*m*) puede ser formado por la suma de los números α, β, γ, δ, &c.; una [suma] conteniendo un número impar de los números pares contenidos en α, β, γ, δ ...; en el caso de la otra suma no sucede así.

PARTE IV.

1. Sea:

$$\left(x^{l}-1\right)\left(x^{2l}-1\right)\left(x^{3l}-1\right)\left(x^{4l}-1\right) \ \ldots\ \left(x^{nl}-1\right) \& c = x^{b} - px^{b-l} + qx^{b-2l} - rx^{b-3l} + \& c.$$
$$= x^{b} - x^{b-l} - x^{b-2l} + x^{b-5l} + x^{b-7l} - x^{b-12l} - x^{b-15l} + \& c. = B = 0\,,$$

una ecuación en la cual todos sus coeficientes son los mismos que en el primer caso y, en consecuencia, son $\pm$ 1 ó 0 para el término (x^{b-nl}).

2. La suma de cada una de las raíces [elevada] a cualquier potencia $l \times m$ de la ecuación B = 0, será $S^{l}(m)$, donde $S^{l}(m)$ denota la suma de los divisores de *m*, [divisores] los cuales son divisibles por *l*.

$-$ &c. be an equation, which expresses a relation between the prime divisors of the numbers 1, 2, 3, 4 . . . $m-1$, m, and their powers.

Cor. The co-efficient L = the difference between the two respective numbers of different ways that m can be formed adding the prime numbers 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, &c. the one with, and the other without, 2.

PART III.

1. Let an equation $\overline{x^{\alpha}-1} \,.\, \overline{x^{\beta}-1} \,.\, \overline{x^{\gamma}-1} \,.\, \overline{x^{\delta}-1} \times \&c. = x^{b}-px^{b-1}+qx^{b-2}-rx^{b-3}+\&c. = 0$; then will the sum of the (m) powers of each of its roots be the sum of all the divisors of m, that can be found amongst the numbers α, β, γ, δ, &c.

2. The co-efficient of the term x^{b-m} will be the difference between the two respective numbers of different ways, that the number (m) can be formed from the addition of the numbers α, β, γ, δ, &c.; the one containing in it an odd number of the even numbers contained in α, β, γ, δ, &c.; the other not.

PART IV.

1. Let $\overline{x^{l}-1} \,.\, \overline{x^{2l}-1} \,.\, \overline{x^{3l}-1} \,.\, \overline{x^{4l}-1} \,.\,.\,.\,.\,.\, \overline{x^{nl}-1} \,.\, \&c. = x^{b}-px^{b-l}+qx^{b-2l}-rx^{b-3l}+\&c. = x^{b}-x^{b-l}-x^{b-2l}+x^{b-5l}+x^{b-7l}-x^{b-12l}-x^{b-15l}+\&c. = B = 0$, of which equation all the co-efficients are the same as in case the first, and consequently ± 1 or 0 to the term (x^{b-nl}).

2. The sum of any power $l \times m$ of each of the roots of the equation $B = 0$ will be $S^{l}(m)$, where $S^{l}(m)$ denotes the sum of the divisors of m, which are divisible by l.

Cor.

Cor. De aquí que:

$$S^l(m) = S^l(m-l) + S^l(m-2l) - S^l(m-5l) - S^l(m-7l) + S^l(m-12l) + S^l(m-15l)$$
$$-S^l(m-22l) - S^l(m-26l) + \&c.$$

la ley de la serie ha sido dada en el caso 1.

Cor. La suma de todos los divisores de *m* no divisibles por l = $S(m) - S^l(m)$
$= S(m-1) - S^l(m-l) + (S(m-2) - S^l(m-2l)) - (S(m-5) - S^l(m-5l)) - (S(m-7)$
$-S^l(m-7l)) + \&c.$

Puede ser enunciada una regla similar para la suma de los divisores no divisibles por los números $a, b, c, d, \&C.$: la suma de los divisores del número (*m*) divisibles por $a, b, c, d, e, \&C.$ donde estos son primos entre sí, [es igual a] =

$$(S^a(m) + S^b(m) + S^c(m) + S^d(m) + S^e(m) + \&c.) - ((S^{a\times b}(m) + S^{a\times c}(m) + S^{b\times c}(m)$$
$$+S^{c\times d}(m) + S^{b\times d}(m) + S^{c\times d}(m) + S^{a\times e}(m) + \&c.))$$
$$+(S^{a\times c\times d}(m) - S^{a\times b\times d}(m) + S^{a\times b\times d}(m) + S^{b\times c\times d}(m) + S^{a+b+c}(m) + \&c.)$$
$$-((S^{a+b+c+d}(m) + S^{a+b+c+e}(m) + \&c.)$$

$+(S^{a+b+c+d+e}(m) + \&c.)) - \&c. \;\; = l$, [y esto es igual a:]

la suma de todos los divisores de *m* .... divisibles por $a, b, c, d, e, \&C.$ respectivamente sumados juntos, - [menos] la suma de todos los divisores de *m* divisible por los productos $(ab, ac, bc, \&C)$ de cualesquiera dos de las cantidades $a, b, c, d, \&C.$ + la suma de todos los divisores de *m* divisibles por los productos $(abc, abd, acd, bcd, \&C)$ de cada tres de las cantidades $a, b, c, d, \&C.$ - [menos] la suma de todos los divisores de *m* divisibles por los productos de cada cuatro de las cantidades arriba mencionadas +, y así, consecuentemente S(m) – C es la suma requerida.

Los principios dados en las partes anteriores pueden ser aplicados a esto, y extendidos a ecuaciones de las cuales los factores tienen la fórmula $x^n \pm k$; y de la suma de las potencias inferiores de cada una de las raíces, y los coeficientes puede ser conseguida la suma de las superiores; lo mismo puede ser llevado a cabo por los coeficientes solamente, &C.

Cor. Hence $S^l(m) = S^l(m-l) + S^l(m-2l) - S^l(m-5l) - S^l(m-7l) + S^l(m-12l) + S^l(m-15l) - S^l(m-22l) - S^l(m-26l) + \&c.$; the law of the series has been given in Case 1.

Cor. The sum of all the divisors of m not divisible by $l = S(m) - S^l(m) = S(m-1) - S^l(m-l) + (S(m-2) - S^l(m-2l)) - (S(m-5) - S^l(m-5l)) - (S(m-7) - S^l(m-7l)) + \&c.$

A similar rule may be predicated of the sum of the divisors not divisible by the numbers a, b, c, d, &c: for the sum of the divisors of the number (m) divisible by a, b, c, d, e, &c., where a, b, c, d, e, &c. are prime to each other $= (S^a(m) + S^b(m) + S^c(m) + S^d(m) + S^e(m) + \&c.)) - ((S^{a\times b}(m) + S^{a\times c}(m) + S^{b\times c}(m) + S^{a\times d}(m) + S^{b\times d}(m) + S^{c\times d}(m) + S^{a\times e}(m) + \&c.)) + (S^{a\times b\times c}(m) + S^{a\times b\times d}(m) + S^{a\times b\times d}(m) + S^{b\times c\times d}(m) + S^{a+b+c}(m) + \&c.)) - ((S^{a+b+c+d}(m) + S^{a+b+c+e}(m) + \&c.)) + ((S^{a+b+c+d+e}(m) + \&c.)) - \&c. = l =$ the sum of all the divisors of m .... divisible by a, b, c, d, e, &c. respectively added together, − the sum of all the divisors of m divisible by the products (ab, ac, bc, &c.) of any two of the quantities a, b, c, d, &c. + the sum of all the divisors of m divisible by the contents (abc, abd, acd, bcd, &c.) of every three of the quantities a, b, c, d, &c. − the sum of all the divisors of m divisible by the contents of every four of the abovementioned quantities a, b, c, d, &c. + and so on, and consequently $S(m) - C$ is the sum required.

The principles given in the former parts may be applied to this, and extended to equations of which the factors have the formula $x^n \pm k$; and from the sum of the inferior powers of each of the roots, and the co-efficients may be collected the sum of the superior; the same may be performed by the co-efficients only, &c.

PART

PARTE V

1. S(α x β) = α x S(β) + la suma de todos los divisores de β no divisibles por α = β x S(α) + la suma de todos los divisores de α no divisibles por β.

2. $S^l(\alpha\times\beta)=\alpha\times S^l(\beta)$ + la suma de todos los divisores de β divisibles por l pero no por α = &c.

3. S(α x β x γ x δ x &c.) = α x S(β x γ x δ x ε x &c.) + la suma de todos los divisores de β x γ x δ x ε, &c. no divisibles por α = α x β x S(γ x δ x ε &c) + la suma de todos los divisores de β x γ x δ x ε, &c, no divisibles por α + α x la suma de todos los divisores de γ x δ x ε, &c, no divisibles por β = α x β x γ x S(δ x ε, &c.) + la suma de todos los divisores de β x γ x δ x ε, &c, no divisibles por α + α x la suma de todos los divisores de γ x δ x ε, &c. no divisibles por β + α x β x la suma de todos los divisores de δ x ε, &c. no divisibles por γ = α x β x γ x δ x S(ε, &c.) + la suma de todos los divisores de β x γ x δ x ε, &c, no divisibles por α + α x la suma de todos los divisores de γ x δ x ε, &c. no divisibles por β + α x β x la suma de todos los divisores de δ x ε, &c. no divisibles por γ + α x β x γ x la suma de todos los divisores de ε, &c. no divisibles por δ = &c. La ley de la serie es manifiesta. Las letras $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, &c. que no están contenidas entre los paréntesis, denotan números primos.

Cor. Si alguna de las letras $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, &c. son sustituidas por otras, y otras por ellas, las ecuaciones resultantes serán justas, y consecuentemente muchas nuevas ecuaciones pueden ser deducidas.

Si en las ecuaciones precedentes por S se escribe S^l, y para la suma de todos los divisores de una cierta cantidad no divisible por un número primo (α, ó β, ó γ, &c.) se escribe la suma de todos los

PART V.

1. $S(\alpha \times \beta) = \alpha \times S(\beta)$ + fum of all the divifors of β not divifible by $\alpha = \beta \times S(\alpha)$ + fum of all the divifors of α not divifible by β.

2. $S'(\alpha \times \beta) = \alpha \times S'(\beta)$ + fum of all the divifors of β divifible by l but not by $\alpha =$ &c.

3. $S(\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \&c.) = \alpha \times S(\beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon, \&c.)$ + fum of all the divifors of $\beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\alpha = \alpha \times \beta \times S(\gamma \times \delta \times \epsilon, \&c.)$ + fum of all the divifors of $\beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\alpha + \alpha \times$ fum of all the divifors of $\gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\beta = \alpha \times \beta \times \gamma \times S(\delta \times \epsilon, \&c.)$ + fum of all the divifors of $\beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\alpha + \alpha \times$ fum of all the divifors of $\gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\beta + \alpha \times \beta \times$ fum of all the divifors of $\delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\gamma = \alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times S(\epsilon, \&c.)$ + fum of all the divifors of $\beta \times \gamma \times \delta \times \epsilon$, &c. not divifible by $\alpha + \alpha \times$ fum of all the divifors of $\gamma\delta\epsilon$, &c. not divifible by $\beta + \alpha \times \beta \times$ fum of all the divifors of $\delta\epsilon$, &c not divifible by $\gamma + \alpha \times \beta \times \gamma \times$ fum of all the divifors of ϵ, &c. not divifible by $\delta =$ &c. The law of the feries is manifeft. The letters α, β, γ, δ, &c. which are not contained between the parenthefes, denote prime numbers.

Cor. If fome of the letters α, β, γ, δ, &c. be fubftituted for others, and others for them, the equations refulting will be juft, and confequently many new equations may be deduced.

If in the preceding equations for S be wrote S′, and for the fum of all the divifors of a certain quantity not divifible by a prime number (α, or β, or γ, &c.) be wrote the fum of all the divisores de esa cantidad no divisibles por el mismo número primo, pero divisibles por l ; las proposiciones resultantes serán válidas.

Estas ecuaciones pueden ser aplicadas a las ecuaciones dadas en las partes precedentes, y de ahí muchas otras deducidas.

the divifors of that quantity not divifible by the fame prime number, but divifible by l; the propofitions refulting will be true.

Thefe equations may be applied to the equations given in the preceding parts, and from thence many others deduced.

CAPÍTULO 2

EL POLINOMIO DE EULER

El análisis de este artículo no se puede restringir únicamente a su propio contenido, y la razón principal radica en que Waríng no está presentando por primera vez todo el material que aquí encontramos. Para un primer análisis —ya que éste no pretende ser considerado como una versión definitiva— se tuvieron que revisar en primer lugar su obra *Meditationes Algebraicae* y, en segundo lugar, diversos trabajos de Euler y Newton, ya que en ellos se encuentran partes importantes de las fuentes que usó Waring y que él mismo está mencionando.
El artículo inicia proponiendo la expresión:

$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)\ldots(x^n-1)=0$ -------------------(1)

y sus desarrollos: $x^b - px^{b-1} + qx^{b-2} - rx^{b-3} + sx^{b-4} - \&C = 0$ [8]

y $x^b - x^{b-1} - x^{b-2} + x^{b-5} + x^{b-7} - x^{b-12} - x^{b-15} + x^{b-22} + x^{b-26} - x^{b-35} - x^{b-40} + x^{b-51}$

$+x^{b-57} - \&C \ldots x^{b-n} \pm \&C. = A = 0.$ -------------------- (2)

La forma en que Waring da entrada a estas funciones es totalmente descontextualizada, de manera semejante a como lo hizo años antes en el *Meditationes*. La forma en que se inicia el artículo no permite ver al lector la importancia de la función (1), ni que su uso ya se remontaba a los trabajos de Euler. El interés por la fórmula (1) trascendió a su época, podemos encontrar lo que escribieron de ella Legendre, Sylvester y Franklin, entre otros. Para darnos una idea de lo sorprendentes que son las propiedades de esta función, véase lo que escribió al respecto André Weil [1974]:

> “Trabajando con series y productos, [Euler] descubrió un número de hechos que le parecieron bastante inusitados y sorprendentes. Se fijó en el siguiente producto infinito:
> $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ \ldots$ [9]
> y formalmente comenzó a expandirlo. Ya había obtenido antes muchos productos y series de ese tipo; en algunos casos obtuvo algo que dio lugar a una ley definida, y en otros casos las cosas parecieron ser más bien aleatorias. Pero con ésta tuvo bastante éxito. Calculó por lo menos quince o veinte términos; la fórmula comienza así:
> $$\prod(1-x^n) = 1 - x + x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15}\ldots$$

---

[8] Esta expresión es lo que se genera del producto de los binomios en (1), y en ella los coeficientes tienen una relación bien determinada con las raíces del polinomio resultante. Tal relación se da por tratarse de un polinomio mónico (una revisión más completa de lo anterior puede hallarse en el apéndice 1-a de esta tesis)

[9] Aunque aparentemente la expresión $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)\ldots(x^n-1)$ y la expresión $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots(1-x^n)$ son diferentes, en realidad son equivalentes, por lo que no se pierde generalidad, al contrario, el análisis de una conlleva necesariamente el de la otra, como se verá más adelante.

donde esta ley, ante los ojos inexpertos, puede que no se muestre a primera vista. En notación moderna, es como sigue:

$$\prod_{1}^{\infty}(1-q^{n})=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{n}q^{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

Donde hemos cambiado x por *q* ya que *q* se ha vuelto la notación estándar en la teoría de funciones elípticas desde Jacobi. Los exponentes forman una progresión de naturaleza simple. Esta relación fue inmediata para Euler después de escribir unos 20 términos; es muy probable que haya calculado unos 100. Muy razonablemente dice, "esto es bastante cierto, aunque no puedo probarlo"; diez años más tarde lo probó. Él no podría haber adivinado que probablemente ambos, serie y producto, serían parte de la teoría de funciones modulares elípticas. Éste es otro vínculo entre la teoría de números y la de funciones elípticas".

A pesar de los elogios a esta función, cuando Waring la presenta en el artículo su apariencia es poco agraciada. La forma en que explica la distribución de los signos y exponentes del polinomio es poco explícita y se reduce a decir que están vinculados los signos ± de los coeficientes con los números $\frac{3z^2 \pm z}{2}$ respectivamente y, que además, los exponentes 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35,... se pueden obtener de sumar e intercalar otras series que aparecen en el artículo original.
Como se puede apreciar no hay una explicación de porqué los exponentes del polinomio están relacionados con los números pentagonales.

Análisis del contenido

Los sustraendos (1,2,5,7, etc) en los exponentes de (2) son números pentagonales,[10] es decir, números de la forma:[11]

$$v=\frac{3z^2 \pm z}{2}\ .$$

Hay que resaltar que en su artículo Waring no se refiere a estos números como números pentagonales. Y esto a pesar de que en 1788, cuando escribe su artículo, los números pentagonales —y en general los poligonales— ya eran del interés de muchos matemáticos, en particular de Euler.
Se sabe del gran interés de Euler por las propiedades de los números poligonales y, por otro lado, se tiene información de que Waring conocía el trabajo de Euler, por las mismas referencias en el presente artículo que analizamos. No es entonces difícil creer que Waring conocía lo expuesto en el *De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium*. En este trabajo Euler desarrolla un producto binomial semejante a (1), él hace

[10] Para la definición de números poligonales y en particular números pentagonales, véase apéndice 2.
[11] Es importante señalar que los números propiamente pentagonales son los que incluyen sólo el signo menos. Esta forma de usar el ± en la expresión de arriba la podemos encontrar en Euler en su artículo publicado en 1783 que lleva por título "*De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium*".

notar que los exponentes son números pentagonales y pretende establecer y demostrar la razón de tal comportamiento. Véase la siguiente cita del artículo de Euler:

> “El principio de todas estas notables propiedades [de los números pentagonales] es encontrado en la expansión del siguiente producto:
>
> $S = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$ etc.
>
> pues ya he demostrado que si cada uno de los factores es multiplicado por los otros en orden, entonces al final esta serie resulta:
>
> $S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} -$ etc.
>
> en donde los exponentes para cada x forman nuestra secuencia de números pentagonales, con la regla para los signos + y – que son alternados en pares de dos, así que los exponentes que provienen de tomar n [z en la definición del principio] par tienen el signo +, y de hecho los otros que provienen de tomarla impar tienen el signo -. Esto merece nuestra admiración no menos que las propiedades mencionadas anteriormente, sin regla aparente fija de la cual alguna conexión pueda ser comprendida entre la expansión de este producto y nuestros números pentagonales”.

El artículo del que está extraída la cita anterior es uno de los cinco que Euler dedicó al tema y cabe mencionar que en ninguno de ellos dio una demostración concluyente de la relación entre exponentes del polinomio y los números pentagonales. No obstante, aún con la falta de formalización del resultado anterior, a éste se le conoce como el “Teorema de los números pentagonales de Euler”. Actualmente a este resultado se le asocia principalmente con las formas en que un entero *n* puede ser expresado como suma de enteros diferentes, es decir, estamos pensando en lo que hoy se conoce como teoría de particiones. Así, la demostración de este resultado propuesto originalmente por Euler y usado posteriormente por Waring tuvo que esperar unos años para alcanzar los estándares matemáticos de la época.[12]

Teorema de los números pentagonales de Euler [13]

Para todo entero positivo n:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

[12] Una demostración por inducción se puede ver en el trabajo de Jordan Bell, el matemático que tradujo el artículo de Euler que citamos aquí. La demostración aparece en su artículo "Euler and the penthagonal number theorem".

[13] Su autor haría uso posteriormente de este teorema para demostrar su propiedad de suma de divisores de un número la cual también involucra números pentagonales. En este análisis no abordaremos dicha demostración.

Ahora, regresando al artículo de Waring, y retomando lo que menciona sobre los exponentes del polinomio y los números pentagonales, vemos que sólo enuncia la relación entre ellos. Lo escrito por él se limita a lo siguiente:

"[Los coeficientes] serán +1, -1, ó 0; serán +1, cuando estén multiplicados por x^{b-v}, donde $v=\frac{3z^2+z}{2}$ *ó* $v=\frac{3z^2-z}{2}$, y z sea un número par; pero será -1 si z es un número impar..."

Como puede verse en el artículo, no hay ninguna mención a los números pentagonales y menos algún indicio de cómo surgen como exponentes. Para ello es conveniente regresar a Euler quien, en otro de sus artículos: *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)$ $(1-x^3)$... *in series simplicen,* trabajó estos números y su surgimiento en el polinomio. En las siguientes páginas se presentará de forma resumida el proceso que siguió Euler para obtener estos números.

Retomemos su polinomio:

$$S=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

Ahora, sigamos cuidadosamente su desarrollo desde el primer producto formado por los dos primeros binomios de izquierda a derecha, multiplicando el primero de estos binomios por los dos términos que forman el segundo:

$$S=((1-x)-x^2(1-x))(1-x^3)(1-x^4) \ \ldots$$

A continuación tomaremos el tercer binomio y efectuaremos el producto con los dos primeros binomios; el producto con el 1 del tercer binomio nos dará el desarrollo anterior, pero para el producto con el término cúbico consideraremos el producto de los binomios respetándolos como tales, y quedará:

$$S=(1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2))(1-x^4)(1-x^5) \ \ldots$$

Repitiendo exactamente el mismo procedimiento para el binomio que sigue, el polinomio quedará:

$$S=(1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3))(1-x^5) \ \ldots$$

y con el mismo procedimiento se seguirá para el quinto binomio, etc

Ahora, si extraemos x^2 como factor común, tendremos:

$$S=(1-x-x^2\left[1-x+x(1-x)(1-x^2)+x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3)+\ldots\right])$$

Si a lo encerrado en los corchetes le llamamos A, entonces tenemos que:

$$S=1-x-Ax^2$$

Eliminamos los paréntesis que encierran al polinomio completo por cuestión de comodidad, y aquí pondremos nuestra atención en A.

Tenemos pues que A = $1-x+x(1-x)(1-x^2)+x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3)+...$

En vista del procedimiento seguido, el factor 1 – x aparecerá en todos los términos de A, así que si cada producto en A lo desarrollamos a partir de este factor, tendremos:

$$A=1-x+x(1-x^2)-x^2(1-x^2)+x^2(1-x^2)(1-x^3)-x^3(1-x^2)(1-x^3)$$
$$+x^3(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)+...$$
$$=1-x+x-x^3-x^2+x^4+x^2(1-x^2)-x^5(1-x^2)-x^3(1-x^2)+x^6(1-x^2)$$
$$+x^3(1-x^2)(1-x^3)-x^7(1-x^2)(1-x^3)+...$$
$$=1-x^3-x^2+x^4+x^2-x^4-x^5(1-x^2)-x^3+x^5+x^6-x^8+x^3-x^6-x^5+x^8$$
$$-x^7(1-x^2)(1-x^3)-...$$

Por lo tanto, eliminando términos, nos queda que:

A = $1-x^3-x^5(1-x^2)-x^7(1-x^2)(1-x^3)-x^9(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)-$ etc.

Factoricemos ahora el término quíntico, de la misma forma que en el paso anterior, y tendremos:

A = $1-x^3-Bx^5$

en donde B = $1-x^2+x^2(1-x^2)(1-x^3)+x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)+$ etc.

Ahora podemos desarrollar lo anterior pero a partir del término 1 – x^2 de la misma manera en que antes lo hicimos con 1 – x. La expansión y el reordenamiento de términos nos dará que:

B = $1-x^5-x^8(1-x^3)-x^{11}(1-x^3)(1-x^4)-x^{14}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)-$ etc.

Y sí, como es de esperarse, factorizaremos el término de grado 8, y resultará que:

B = $1-x^5-Cx^8$

en donde C = $1-x^3+x^3(1-x^3)(1-x^4)+x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)+$ etc.

No es difícil adivinar a partir de qué término se expandirá el polinomio anterior, pues ya lo hicimos con 1 – x, luego con 1 – x^2, y ahora lo haremos a partir de 1 – x^3. Después de hechas las operaciones y los acomodos tendremos:

C = $1-x^7-x^{11}(1-x^4)-x^{15}(1-x^4)(1-x^5)-x^{19}(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)-$ etc

Y claro, la mecánica mostrada hasta ahora nos hace suponer que el siguiente término a factorizar será el de grado 11.

En efecto:

C = $1-x^7-Dx^{11}$

en donde D = $1-x^4+x^4(1-x^4)(1-x^5)+x^8(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)+$ etc.

A estas alturas el proceso ya no es tan extraño ni complicado; daremos un último ejemplo de la expansión y veremos el porqué de ella.
Naturalmente, el siguiente término que usaremos para expandir será el 1 – x^4, por lo tanto:
D = $1-x^9-x^{14}(1-x^5)-x^{19}(1-x^5)(1-x^6)-x^{24}(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)-$ etc.

Factorizamos por supuesto x^{14} y tenemos:

D = $1-x^9-Ex^{14}$, y siguiendo de la misma forma tendremos:
E = $1-x^{11}-Fx^{17}$
F = $1-x^{17}-Gx^{20}$ etc.

Ahora, notemos que:

$$S=1-x-Ax^2$$
$$Ax^2=x^2(1-x^3)-Bx^7$$
$$Bx^7=x^7(1-x^5)-Cx^{15}$$
$$Cx^{15}=x^{15}(1-x^7)-Dx^{26}$$
$$Dx^{26}=x^{26}(1-x^9)-Ex^{40}$$

etc.

Juntándolos, tendremos:

$$S=1-x-x^2(1-x^3)+x^7(1-x^5)-x^{15}(1-x^7)+x^{26}(1-x^9)-x^{40}(1-x^{11})+\text{ etc}$$

y desarrollándolo, quedará que:

$$S=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\text{ etc.}$$

Hasta aquí Euler obtiene un desarrollo en el que aparecen exponentes pentagonales. Sin embargo, no es de manera alguna una demostración y esto es lo que causa la insatisfacción de Euler.[14] ¿Cómo saber si siempre serán números pentagonales los que aparezcan?. ¿Por qué precisamente esos?.

---

[14] En una carta a Christian Goldbach [véase: Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965] de Octubre 15, 1743, Euler escribe que:

> " Si estos factores $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ etc. son multiplicados hasta el infinito, entonces se va generando la siguiente serie: $1-n^1-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+n^{57}-etc.$ (Euler usa *n* en lugar de *x*) de la cual es fácil mostrar por inducción que todos los términos son

La construcción anterior tambièn fue expuesta por Euler en su artículo *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* de 1760. Nótese que lo publicó mucho antes que el *De mirabilis...* y que el "*Evolutio producti infiniti...*", de hecho, es a ésta construcción a la que se refiere cuando dice que “ya había demostrado” la identidad polinomial. En efecto, pero no así para la regla para los pentagonales. De aquí que en ese mismo artículo mencione, como ya vimos, que no encuentra “regla aparente fija” entre “la expansión de este producto y nuestros números pentagonales”.

Siendo fiel a su forma de trabajar la investigación matemática, Euler no concretó una demostración dentro de lo que actualmente concebimos como demostración matemática. Es más bien una construcción, algo confusa en su parte final, pero que dio lugar a que posteriormente otros la retomaran para formalizar una demostración. En el presente trabajo seguiremos esta construcción y seremos más precisos en la parte final, a fin de que quede claro todo el procedimiento.

Retomemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} s &= 1 - x - Ax^2 \\ A &= 1 - x^3 - Bx^5 \\ B &= 1 - x^5 - Cx^8 \\ C &= 1 - x^7 - Dx^{11} \\ D &= 1 - x^9 - Ex^{14} \end{aligned}$$

etc.

que son equivalentes a:

$$\begin{aligned} s &= 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 &= x^2(1 - x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 &= x^7(1 - x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} &= x^{15}(1 - x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} &= x^{26}(1 - x^9) - Ex^{40} \end{aligned}$$

etc.

Lo primero que haremos es un arreglo tabular para identificar patrones de aparición de los exponentes en el primer conjunto de identidades.

S	1 - x	Ax^2
A	1 - x^3	Bx^5
B	1 - x^5	Cx^8
C	1 - x^7	Dx^{11}
D	1 - x^9	Ex^{14}
etc..		

Nótese que los exponentes en la segunda columna son los impares positivos, y los exponentes en la tercera columna son el resultado de sumar el exponente impar de la segunda columna más el orden del renglón (es decir, el número de posición del renglón en la tabla, yendo de arriba hacia abajo) respectivamente, por ejemplo, en el renglón 5 la igualdad es:

$$D = 1 - x^9 - Ex^{14},$$

de la forma $n^{\frac{3xx+x}{2}}$, y que llevan el signo + cuando x es un número par, y el signo - cuando x es impar. De cualquier manera no he encontrado un método por el cual probar la identidad de estas dos expresiones. El honorable Prof. Niklaus Bernoulli tampoco ha sido capaz de probar nada de esto que no sea por inducción"

Aquí, 9 es el impar correspondiente al orden quinto (quinto renglón) de donde 9 + 5 = 14, que es la suma del impar correspondiente más 5 que es su orden. Así, de manera general tenemos que el λ-ésimo renglón de la tabla es:

$$\Delta = 1 - x^{2\lambda-1} - \Pi x^{(2\lambda-1)+\lambda}$$

$$\Delta = 1 - x^{2\lambda-1} - \Pi x^{3\lambda-1},$$

(usamos el símbolo $\prod$ para representar a A, B, etc.)

y el que le sigue es:

$$\Delta' = 1 - x^{2(\lambda+1)-1} - \Pi x^{2(\lambda+1)-1+(\lambda+1)}$$

$$\Delta' = 1 - x^{2(\lambda+1)-1} - \Pi x^{3(\lambda+1)-1}$$

Entonces, de manera general tenemos que, si en lugar de λ tomamos n = 1, los renglones del primer bloque de igualdades quedarían descritos de la siguiente forma:

$$s = 1 - x^{2n-1} - Ax^{3n-1}$$

$$A = 1 - x^{2(n+1)-1} - Bx^{3(n+1)-1}$$

$$B = 1 - x^{2(n+2)-1} - Cx^{3(n+2)-1}$$

etc.

Este es el momento de retomar el segundo conjunto de igualdades. Recordémoslo:

$$\begin{aligned} s &= 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 &= x^2(1-x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 &= x^7(1-x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} &= x^{15}(1-x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} &= x^{26}(1-x^9) - Ex^{40} \end{aligned}$$

etc.

Lo más importante es que de estas igualdades se genera el polinomio

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots$$

mismo que es el personaje central del trabajo.

Al igual que en el primer conjunto de igualdades, ahora expresaremos de manera tabular las igualdades de este segundo conjunto:

S	(1 - x)	Ax^2
Ax^2	X^2 (1 - x^3)	Bx^7
B x^7	X^7 (1 - x^5)	Cx^{15}
C x^{15}	X^{15} (1 - x^7)	Dx^{26}
D x^{26}	X^{26} (1 - x^9)	Ex^{40}
Etc...		

De este arreglo se tiene que de manera general

$$S = 1 - x^{2n-1} - Ax^{2n-1+n}$$
$$S = 1 - x^{2n-1} - Ax^{3n-1}$$

por lo tanto,

$$Ax^{3n-1} = (1 - x^{2(n+1)-1})x^{3n-1} - Bx^{3n-1+(3(n+1)-1)}$$

$$Bx^{(3n-1)+(3(n+1)-1)} = (1 - x^{2(n+2)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)} - Cx^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)}$$

$$Cx^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)} = (1 - x^{2(n+3)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)} - Dx^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)+(3(n+3)-1)}$$

De estas identidades tomemos sólo los siguientes términos (que serían los correspondientes a la segunda columna en la forma tabular):

$$(1 - x^{2n-1})$$
$$(1 - x^{2(n+1)-1})x^{3n-1}$$
$$(1 - x^{2(n+2)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)}$$
$$(1 - x^{2(n+3)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)}$$

es importante notar que de estos productos es de donde se extraen los términos irreducibles del polinomio

$$S = 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots$$

Del desarrollo de los productos en S se puede ver que los exponentes con coeficiente negativo atienden a una suma con términos de la forma 3n – 1, 3(n + 1) -1, 3(n + 2)-1, etc. Como puede apreciarse en el desarrollo anterior a esas observaciones, el exponente del término x que acompaña a C es:

(3n – 1) + (3(n + 1) – 1) + (3(n + 2) – 1) + ...

Entonces, la regla que surge aquí es clara. Se trata de una suma de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$$

Y que podemos desarrollar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}3i - n = 3\sum_{i=1}^{n}i - n = 3(\frac{n(n+1)}{2}) - n = \frac{3n^2+3n-2n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

llegando nada menos que a una forma aproximada de los números pentagonales.

Sólo falta llegar a los términos con coeficientes positivos. Para ello analizamos nuevamente la última tabla y las respectivas igualdades en términos generales.
Por la estructura de las igualdades se puede extraer que los términos positivos tienen un exponente formado por la suma de:

$\sum_{i=1}^{n-1}(3i-1)$ más el número impar correspondiente al renglón de la tabla, es decir, 2n-1.

Entonces, el exponente es:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1}(3i-1)\right) + (2n-1) = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}+2n-1=\frac{3n^2-2n-3n+2+4n-2}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$$

Es decir, precisamente el pentagonal n-ésimo con signo menos. Como este número está entre los otros dos, esto explica la alternancia entre los dos tipos de pentagonales y la forma en que se van generando.

Hasta este momento el análisis se ha hecho principalmente con base en la expresión $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^n)=0$ (que es la usada por Euler), pero ahora regresaremos a la ecuación (2) [página 24], que es la que dio pie a este estudio, y podremos ver que el desarrollo de ambas es equivalente. [15]

---

[15] Apliquemos a esta igualdad el método usado para ver más claramente como se desarrolla el polinomio:

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)\dots\dots(x^n-1)$$

Por supuesto que multiplicando todos los términos x tenemos x^b donde $b=\frac{n(n+1)}{2}$ (la suma de los primeros *n* números naturales), y éste es el primer término que tomaremos. El segundo vendrá dado por el producto del –1 del primer binomio por el producto de los términos x de x^2 en adelante. Entonces tendremos como segundo término $-x^{b-1}$.
El tercer término será el producto del –1 del segundo binomio por el producto de los términos x excluyendo x^2, por lo tanto será $-x^{b-2}$. Téngase en cuenta que esto no es más que desarrollar el polinomio de la misma manera en que lo hicimos anteriormente.
El cuarto término vendrá dado por el producto del –1 del tercer binomio por el del segundo por el producto de las x excluyendo x^2 y x^3. Esto es:

$$(-1)(-1)(x)(x^4)(x^5)\dots(x^n)=+x^{b-(2+3)}=x^{b-5}$$

El quinto término surgiría al tomar el producto de los –1 de tres binomios por el producto de las x, excepto x^2, x^3, x^4. Por lo tanto el término sería:

$$-x^{b-(2+3+4)}=-x^{b-9}$$

Aunque 9 no es un número pentagonal, éste término desaparecerá eventualmente con la expansión del producto. Por lo pronto lo que nos interesa es dejar establecido el procedimiento.
Después de esta breve descripción de un proceso que ya conocemos, es claro cómo Waring va desarrollando su polinomio, lo que nos da su identidad:

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)\dots(x^n-1)=x^b-x^{b-1}-x^{b-2}+x^{b-5}+\dots x^{b-n}\pm\&c.=0.$$

La equivalencia se puede notar en los respectivos binomios de cada una de las ecuaciones. Por ejemplo, si se toma $\left(x^j - 1\right)$ y $\left(1 - x^j\right)$ resulta que en ambos casos las raíces son las soluciones de $x^j = 1$. Además, se puede ver que al factorizar (-1) en cada binomio se llega directamente de una ecuación a la otra si el número de binomios es par; pero si el número de binomios es impar, entonces se multiplica por (-1), y nuevamente se llega de una ecuación a la otra.

Obsérvese que Waring extiende la serie hasta el término con exponente *b* – *n*; luego sigue el $\pm$ &c. (and continues) La razón de esto es que si consideramos un caso finito los coeficientes o los exponentes pueden no cumplir la regla de que los coeficientes del polinomio sean ± 1 ó 0. Es muy importante señalar que el teorema de los números pentagonales o su equivalente se cumple si la expansión es infinita o por lo menos muy grande[16]. Si estuviéramos en el caso finito con una *n* muy pequeña, entonces la regla no se cumpliría por la presencia de números no pentagonales —como el 9— o coeficientes distintos de $\pm$ 1 ó 0. Pero si siguiéramos con la expansión éste término quedaría eliminado en algún momento. Al suponer Waring que trataremos con casos finitos, los términos no eliminados y que ya no obedecen al comportamiento dictado por el teorema, quedarían contenidos en el $\pm$ &c.

Como ejemplo, tómese n = 4, entonces:

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) = x^{10} - x^9 - x^8 + 2x^5 - x^2 - x + 1$$

En este caso, *b* = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, por lo tanto:

$$\begin{aligned} b-1 &= 10-1 = 9 \\ b-2 &= 10-2 = 8 \\ b-4 &= 10-4 = 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &x^b - x^{b-1} - x^{b-2} + x^{b-n} = x^b - x^{b-1} - x^{b-2} + x^{b-4} = x^{10} - x^{10-1} - x^{10-2} + x^{10-4} \\ &= x^{10} - x^9 - x^8 + x^6 \end{aligned}$$

Pero cuatro no es un número pentagonal, por lo tanto el término con exponente 6 desaparece. El coeficiente del término quíntico es distinto de $\pm$ 1 ó 0 a pesar de que el exponente se puede expresar como *b* - 5 = 10 - 5, ya que 5 excede a la *n* que en este caso es cuatro. Así, en este caso, el desarrollo por pentagonales abarca sólo $x^{10} - x^9 - x^8$ mientras que el resto del polinomio $2x^5 - x^2 - x + 1$ vendría siendo a lo que Waring se refiere con $\pm$ &c. (and continues)
La irreductibilidad del polinomio depende de que la *n* sea lo suficientemente grande para que permita que el desarrollo del producto sea lo suficientemente largo y que aquellos exponentes y coeficientes que no cumplan la regla sean eliminados.

[16] Euler, como ya lo mencionamos, pudo haberla expandido hasta 20 términos, e incluso hasta 100, según la nota de Weil.

Una de las formas más elegantes para justificar que los coeficientes son ± 1 ó 0, y que los exponentes son de la forma $\frac{n(3n\pm 1)}{2}$, es a través de los diagramas de Ferrers para la representación de las particiones de un número positivo, y por otro lado el trabajo de Franklin que se reflejó en el teorema que lleva su nombre, y que enuncia que:

Si *m* es un entero positivo, entonces:

$$p_{ed}(m) - p_{od}(m) = \begin{pmatrix} 0 \quad si & n \neq \frac{k(3k\pm 1)}{2} \\ (-1)^k \quad \text{si} & n = \frac{k(3k\pm 1)}{2} \end{pmatrix}$$

En donde la partición de un entero positivo *m* representa una suma de una cantidad par o impar de enteros positivos, y donde además:

$p_{ed}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo *m*, con la característica de que los sumandos de cada una son diferentes, y la cantidad de sumandos es una cantidad par.

$p_{od}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo *m* en donde los sumandos de cada una son diferentes, pero ahora la cantidad de sumandos en cada partición es una cantidad impar.

Entonces, con los resultados de Ferrers y Franklin se puede ver que los exponentes y coeficientes en $(1-x)(1-x^2)\ldots$ son de la manera señalada anteriormente.

A pesar de todos los elementos que Waring tenía a la mano para poder dar una explicación más completa de los exponentes y coeficientes del polinomio, parece ser que sólo se concreta a repetir el párrafo del *De mirabilis ...*, de Euler, pero fuera de contexto de todo lo anterior. Waring expuso entonces una justificación totalmente críptica, en la que solamente Euler y él estarían en condiciones de saber a qué se refería. Recordando esta parte del artículo leemos lo siguiente:

> Los números 1, 2, 5, 7, 12,15, 22, 26, 35, 40, &c. tomados de *b* pueden ser obtenidos de la suma de los números 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, &c., los cuales se constituyen al intercalar las dos series aritméticas 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Resulta que las sucesiones 1, 3, 5, 7, 9, 11, y 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 surgen al operar las tablas de las páginas 30 y 31 para generar los términos del polinomio. Es decir, si al hacer las operaciones para encontrar los exponentes y coeficientes aislamos las operaciones de los exponentes en ambas tablas, entonces podemos ver que la serie 1, 3, 5, 7, 9,11, ... y 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... se intercalan para que al sumarse se genere la serie 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, ...

SUMA DE POTENCIAS DE RAÍCES

Después de hacer explícitas las características de los coeficientes y exponentes del polinomio

$$A = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)(x^6-1)(x^7-1)...$$

Waring expone de manera muy somera algunas propiedades vinculadas a la suma de potencias de las raíces del polinomio generado por *A* y, por otro lado, enunciará una propiedad intrínseca que se refiere a la suma de los divisores de cualquier potencia de las raíces —antes mencionadas— menor al grado del polinomio. Así, Waring en su artículo hace la siguiente mención:

1) *La suma de las potencias m-ésimas de cada una de las raíces de la ecuación A = 0 serán S(m), donde S(m) denota la suma de todos los divisores del número m, siempre que m no sea mayor que n.* [17]

Después de este enunciado presenta el siguiente corolario:

2) *Entonces (por la regla para encontrar la suma de las m-esimas potencias de las raíces, usando la suma de potencias inferiores junto con los coeficientes de la ecuación dada) se puede deducir que:*

S(m) = pS(m-1) – qS(m-2) + rS(m-3) –sS(m-4) + tS(m-5) – &c.
=S(m-1) + S(m-2) – S(m-5) – S(m-7) + S(m-12) + S(m-15)
–S(m-22) - S(m-26) + &c.

La manera más adecuada de interpretar los enunciados anteriores es la siguiente:

1) Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ son raíces de **A**, y $m \leq n$, *entonces*:

$$\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + ... = R(m)$$

Ahora, si a la función aritmética $\sigma(m)$ (suma de divisores) la renombramos como $S(m)$, entonces la propuesta de Waring es que $R(m) = S(m)$

Es imprescindible señalar que, al parecer, esta identidad no ha sido demostrada. Y más aún, en el mes de mayo de 1932 *The American Mathemathical Monthly* publicó este mismo problema en su sección de problemas por resolver, aunque no hizo mención alguna del presente artículo ni del *Meditationes* de Waring. Para el año 1957 el *Monthly* publicó un listado de los problemas que hasta entonces seguían sin solución y entre ellos estaba este. Esto es, hasta 1957 el problema tenía 125 años sin resolverse, y por lo que sabemos, hasta la fecha se mantiene igual. Waring, por su parte, no da ningún indicio de cómo pueda procederse para su demostración.

2) Si $R(m) = S(m)$ y se cumple que

---

[17] En caso de que el enunciado resultase confuso, un ejemplo numérico ha sido incluido en el apéndice 3-a.

$$R(m) = pR(m-1) - qR(m-2) + rR(m-3) - ...$$
$$= R(m-1) + R(m-2) - R(m-5) - ...$$

entonces:

$$S(m) = pS(m-1) - qS((m-2) + rS(m-3) - ...$$
$$= S(m-1) + S(m-2) - S(m-5) - S(m-7) + S(m-12) + ..$$

En donde esta última igualdad es la propiedad de sumas de divisores de Euler.

En las páginas siguientes se abordarán los resultados de 1) y 2) por vías separadas, la de suma de potencias de raíces y la de suma de divisores, pero sin perder de vista que la relación entre ellas es algo que por el momento sólo podemos suponer como cierta.

La forma en que Waring presenta 1) y 2) es muy resumida y, como ya se dijo, expuesta de manera somera. En **1)** se menciona el resultado sobre la suma de las potencias de las raíces del polinomio; este resultado lo retoma Waring de los trabajos de Girard, Newton y Euler. Anteriormente, en el *Meditaciones,* también había dado solución a este problema —el de *R(m)*—, aunque cabe señalar que lo hace de una manera poco elegante. Es más, las críticas a la exposición de este problema no se hicieron esperar, las podemos leer en el artículo de W.S.Powell de 1760 titulado *Observations on the first chapter of a book called Miscellanea Analytica,* donde este autor critica lo complicada que es la exposición de Waring en comparación con la recursiva de Newton. Por otro lado, sabemos de las consultas al *Arithmetica Universalis* de Newton; el mismo Waring las menciona en el *Meditaciones*, en la demostración al problema I. Aquí consideramos que es importante conocer que fue lo que presentó Newton al respecto, ya que ello fue la base sobre la que Waring dio su propuesta en el *Meditaciones*.

Así, lo que hace Waring en su exposición para la construcción de la suma de las raíces es presentar el polinomio:

$$A = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)(x^6-1)(x^7-1)... = x^b - x^{b-1} - x^{b-2} + x^{b-5} + x^{b-7} - ...$$

que es un caso particular de la forma general de Newton para el polinomio:

$$f(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + ... + p_{n-1} t + p_n$$

Lo que Newton publicó al respecto en 1683 es el siguiente teorema:

Teorema.

Sea $\boldsymbol{f(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + ... + p_{n-1} t + p_n}$ ***un polinomio con raíces (contadas todas sin importar su multiplicidad)*** $\boldsymbol{x_1, x_2, ..., x_n}$***.***

Para j ***= 1,2,3,...*** ***sea*** $\boldsymbol{s_j = x_1^j + x_2^j + ... + x_n^j}$

Sea $\boldsymbol{p_k = 0}$ ***para k > n. Entonces para toda j > 0***

$$\boldsymbol{s_j + p_1 s_{j-1} + p_2 s_{j-2} + ... + p_{j-1} s_1 + j p_j = 0}.$$ [18]

[18] *Theory of Equations*. Lesson 10. Barry H. Dayton. Northeastern Illinois University.

Lo que este teorema dice es que tenemos las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&s_1 + p_1 = 0\\
&s_2 + p_1 s_1 + 2p_2 = 0\\
&s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1 + 3p_3 = 0\\
&s_4 + p_1 s_3 + p_2 s_2 + p_3 s_1 + 4p_4 = 0
\end{aligned}
$$

o, equivalentemente

$$
\begin{aligned}
&s_1 = -p_1\\
&s_2 = -p_1 s_1 - 2p_2\\
&s_3 = -p_1 s_2 - p_2 s_1 - 3p_3\\
&s_4 = -p_1 s_3 - p_2 s_2 - p_3 s_1 - 4p_4
\end{aligned}
$$

y en general:

$$0 = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_{j-1} s_1 + j p_j$$

(Nótese que cada s_j representa a $R(j)$ en la proposición de Waring, usando *j* en lugar de *m*)

Aunque Newton no proporcionó una demostración de este teorema, en el apéndice 3-b presentamos una aproximación de elementos que justifican dicho resultado[19]

Por su parte, Waring en su artículo de 1788 no justifica esta construcción de la suma de las potencias de las raíces, aunque sí lo hizo previamente en sus *Meditaciones;* es más, es el resultado con el que inicia la obra.[20]

Meditationes algebraicae - capítulo I - problema I

En este Capítulo I, el problema I enuncia lo siguiente:

Sea la ecuación dada:

$$\boldsymbol{x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - tx^{n-5} + vx^{n-6} - wx^{n-7} + zx^{n-8} - ... = 0};$$

y sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$ **sus raíces.**

Encontrar la suma: $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + ...$

---

[19] Es importante mencionar que previo a Newton el matemático Girard propuso en 1629 una expresión racional de los coeficientes. Por ejemplo, para $t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3 = 0$ donde x_1, x_2,
x_3 son las raíces del polinomio, Girard propone que:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = -p_1\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p_1^2 - 2p_2\\
&x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -p_1^3 + 3p_1 p_2 - 3p_3\\
&x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = p_1^4 - 4p_1^2 p_2 + 4p_1 p_3 + 2p_2^2
\end{aligned}
$$

[20] En este punto, no se aborda aún la relación de esta suma de potencias de raíces con la suma de divisores de la potencia.

La solución de este problema está dada por:

$$\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\delta^m+\varepsilon^m+\ldots = \boldsymbol{p^m - mqp^{m-2} + mrp^{m-3} + \left[ms + \frac{m(m-3)}{2}q^2\right]p^{m-4}}$$
$$\boldsymbol{+[mt - m(m-4)qr]p^{m-5} + \left[-mv + m(m-5)qs + \frac{m(m-5)}{2}r^2 - \frac{m(m-5)(m-4)}{2\cdot 3}q^3\right]p^{m-6}}$$
$$\boldsymbol{+\left[mw - m(m-6)qt - m(m-6)rs + \frac{m(m-6)(m-5)}{2}q^2r\right]p^{m-7} + \ldots}$$

Ahora, notemos que si *m* = 1 en la ecuación anterior, entonces:

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots = p$ que corresponde a la suma de las raíces, y hagamos $p = a$.

Si *m* = 2, entonces:

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots. = p^2-2qp^{2-2} = p^2-2q$ que corresponde a la suma de los cuadrados de las raíces, y llamémosla b.

Si *m* = 3, entonces para la suma de los cubos de las raíces tendremos:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots = p^3-3qp^{3-2}+3rp^{3-3} = p^3-3qp+3r = p^3-2qp-qp+3r$$
$$= p(p^2-2q)-qp+3r = pb-qa+3r$$

Por lo tanto, si nombramos c a la suma de los cubos de las raíces, tendremos que:

$$c = pb-qa+3r$$

Un último caso será muy útil. Tomemos la suma de las potencias cuartas de las raíces a la que llamaremos d.

Entonces, sustituyendo *m* = 4 en la fórmula de Waring:

$$d = \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\ldots = p^4-4qp^{4-2}+4rp^{4-3}+(4s+\frac{4(4-3)}{2}q^2)p^{4-4}$$
$$= p^4-4qp^2+4rp+4s+2q^2$$
$$= p^4-3qp^2-qp^2+3rp+rp+4s+2q^2$$
$$= p^4-3qp^2+3rp+(-qp^2+2q^2)+rp+4s$$

Ahora, notemos que:

$pc = p(pb-qa+3r) = p(p(p^2-2q)-qp+3r) = p(p^3-2qp-qp+3r) = p^4-3qp^2+3rp$

$-qb = -q(p^2-2q) = -qp^2+2q^2$

y que $rp = ra$

Por lo tanto:

$$d = pc - qb + ra + rs.$$

Esta última igualdad representa un equivalente al teorema de Newton que es:

$$s_4 = -p_1 s_3 - p_2 s_2 - p_3 s_1 - 4 p_4$$

Hasta aquí tenemos la equivalencia entre el resultado de Newton y el de Waring, pero de aquél que aparece en el *Meditationes*. Para el artículo que aquí se estudia sólo tenemos que señalar que a, b, c, d no son otra cosa que R(1), R(2), R(3) y R(4) respectivamente, por lo que podemos, en la penúltima igualdad, hacer la sustitución:

$$R(4) = pR(3) - qR(2) + rR(1) + 4s$$

y si tomásemos *m* = 4, entonces lo anterior se reescribiría como:

$$R(m) = pR(m-1) - qR(m-2) + rR(m-3) - \&c.$$

La anterior es la primer igualdad de nuestra interpretación de **2)**; en este caso, - 4s cae dentro de lo que Waring denomina "&c" (and continues).

En resumen, las identidades:

$$\begin{aligned}
&p = a \\
&pa + 2q = b \\
&pb + qa + 3r = c \\
&pc + qb + ra + 4s = d \\
&pd + qc + rb + sa + 5t = e \\
&pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f
\end{aligned}$$

dos más de las que acabamos de construir a partir del problema I de Waring, también pueden ser extraídas de la obra de Newton *Arithmetica Universalis*.

Pero queda una pregunta: ¿cuál es el camino de Waring para construir la ecuación que genera la suma de las potencias de las raíces de A?, es decir, ¿cómo llega a que:

$$\begin{aligned}
&\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \ldots = \boldsymbol{p^m - mqp^{m-2} + mrp^{m-3} + \left[ms + \frac{m(m-3)}{2} q^2\right] p^{m-4}} \\
&\boldsymbol{+ [mt - m(m-4)qr]p^{m-5} + \left[-mv + m(m-5)qs + \frac{m(m-5)}{2} r^2 - \frac{m(m-5)(m-4)}{2 \cdot 3} q^3\right] p^{m-6}} \\
&\boldsymbol{+ \left[mw - m(m-6)qt - m(m-6)rs + \frac{m(m-6)(m-5)}{2} q^2 r\right] p^{m-7}} + \ldots \quad ?
\end{aligned}$$

En vista de que la demostración de la fórmula (la de suma de potencias de Waring) que aparece en el *Meditaciones* es muy compleja y difícil de seguir —acorde al estilo de su autor—, tomaremos un camino alterno que nos conducirá al mismo resultado y permitirá entrever qué es lo que Waring pretendía establecer.

Tomemos el polinomio:

$$f(x) = x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - tx^{n-5} + ... = 0 \quad \text{----------(1)}$$

y sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$ sus raíces. Entonces podemos factorizar al polinomio como:

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)... = 0 \quad \text{---------(2)}$$

Ahora, si derivamos (1), obtenemos:

$$f'(x) = nx^{n-1} - p(n-1)x^{n-2} + q(n-2)x^{n-3} - r(n-3)x^{n-4} + s(n-4)x^{n-5} - ..... = 0 \quad \text{---(3)}$$

Y por otra parte, si derivamos (2), obtenemos:

$$f'(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)} + \frac{f(x)}{(x-\beta)} + \frac{f(x)}{(x-\gamma)} + ...$$

Ahora, efectuando la división de cada cociente, veremos que:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = x^{n-1} + (\alpha - p)x^{n-2} + ((\alpha - p)\alpha + q)x^{n-3} + (((\alpha - p)\alpha + q)\alpha - r)x^{n-4} + ...$$

$$\frac{f(x)}{x-\beta} = x^{n-1} + (\beta - p)x^{n-2} + ((\beta - p)\beta + q)x^{n-3} + (((\beta - p)\beta + q)\beta - r)x^{n-4} + ...$$

....

Como la suma de los cocientes es igual a $f'(x)$, entonces ésta es igual a la suma de cada polinomio resultante de la división de dichos cocientes. Haciendo la suma y agrupando, podemos ver a $f'(x)$ como:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} + ((\alpha - p) + (\beta - p) + ...)x^{n-2} + ((\alpha - p)\alpha + q + (\beta - p)\beta + q + ...)x^{n-3} \\
&\quad + [((\alpha - p)\alpha + q)\alpha - r) + ((\beta - p)\beta + q)\beta - r) + ...]x^{n-4} + ... \\
&= nx^{n-1} + (\alpha + \beta + \gamma + ... - np)x^{n-2} + ((\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 ... - (\alpha + \beta + \gamma + ...)p + nq)x^{n-3} \\
&\quad + (\alpha^3 - p\alpha^2 + q\alpha + \beta^3 - p\beta^2 + q\beta + ... - nr)x^{n-4} + ... \\
&= nx^{n-1} + (\alpha + \beta + \gamma + ... - np)x^{n-2} + ((\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 ... - (\alpha + \beta + \gamma + ...)p + nq)x^{n-3} \\
&\quad + [(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + ...) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + ...)p + (\alpha + \beta + \gamma + ...)q - nr)x^{n-4} + ...
\end{aligned}$$

Como $\alpha+\beta+\gamma+...$ es la suma de las raíces, la identificamos como R_1. Notemos que al igualar los coeficientes de la anterior expresión con los de (3), en el caso particular del término cuadrático tenemos que:

$$\alpha+\beta+\gamma+...-np=-p(n-1)$$

por lo tanto:

$$R_1-np=-np+p$$

de donde:

$$R_1=p$$

Tomando R_2, R_3, etc. para suma de los cuadrados de las raíces, de los cubos, etc. y sustituyendo junto con la identidad anterior al polinomio que estábamos trabajando, tendremos:

$$f'(x)=nx^{n-1}+(R_1-np)x^{n-2}+(R_2-pR_1+nq)x^{n-3}+(R_3-pR_2+qR_1-nr)x^{n-4}+...$$

Notemos que si igualamos los coeficientes de este polinomio y de (3), tendremos que: $R_1=p$ en el caso del término de exponente (n - 2) Además, en el del término de potencia (n - 3):

$$qn-2q=R_2-pR_1+nq$$

por lo tanto: $R_2=pR_1-2q$

Es fácil identificar aquí a las identidades de Newton, mismas que se irán generando con este procedimiento. No son las que nos interesan en este momento, pero creímos pertinente hacer la observación para verificar que el camino seguido es el correcto.

Lo que sí nos interesa es regresar a la igualación de los coeficientes. En el caso de los términos de potencia (n - 2) teníamos que $R_1=p$. En el caso de los de exponente (n - 3) tenemos que:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+...)-p(\alpha+\beta+\gamma+...)+nq=nq-2q$$

de donde:

$$R_2-p(p)=-2q$$

por lo tanto:

$$R_2=p^2-2q$$

Como se puede apreciar, el único cambio introducido fue simplemente cambiar el valor R_1 por el de p, puesto que son iguales. En adelante se tomará de esa manera.

Un caso más. Igualando los coeficientes de los términos de potencia (n - 4) tenemos que:

$$R_3 - pR_2 + qR_1 - nr = -r(n-3)$$

que implica que:

$$R_3 - p(p^2 - 2q) + q(p) - nr = -nr + 3r$$

por lo tanto:

$$R_3 - p^3 + 2qp + qp = 3r$$

de donde:

$$R_3 = p^3 - 3qp + 3r$$

Llegados a este punto podemos reconocer en las identidades anteriores a aquéllas que había propuesto Girard (salvo letras y signos con las modificaciones debidas) las cuales ya habíamos presentado previamente en una nota al pie de página.

Lo más sobresaliente de lo anterior es que si llamamos *m* a la potencia de las raíces, entonces las identidades de Girard son el resultado directo de la aplicación de la fórmula de Waring. Tómese *m* = 3, por ejemplo.
Aplicando la fórmula de Waring:

$$R_3 = p^3 - 3qp^{3-2} + 3rp^{3-3} = p^3 - 3qp + 3r$$

Un último caso. Para el término con potencia (n - 5) en el polinomio la suma de coeficientes que hemos trabajado sería:

$$\begin{aligned}
&[(((\alpha - p)\alpha + q)\alpha - r)\alpha + s + (((\beta - p)\beta + q)\beta - r)\beta + s + ...]x^{n-5} \\
&= ((\alpha^3 - p\alpha^2 + q\alpha - r)\alpha + (\beta^3 - p\beta^2 + q\beta - r)\beta + ... + ns)x^{n-5} \\
&= (\alpha^4 - \alpha^3 p + \alpha^2 q - \alpha r + \beta^4 - \beta^3 p + \beta^2 + ... + ns)x^{n-5} \\
&= [(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + ...) - (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + ...)p + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + ...)q - (\alpha + \beta + \gamma + ...)r + sn]x^{n-5} \\
&= (R_4 - pR_3 + qR_2 - rR_1 + sn)x^{n-5}
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes:

$$R_4 - pR_3 + qR_2 - rR_1 + sn = s(n-4)$$

sustituyendo:

$$R_4 - p(p^3 - 3qp + 3r) + q(p^2 - 2q) - rp + sn = sn - 4s$$

por lo tanto:

$$R_4 - p^4 + 3qp^2 - 3pr + qp^2 - 2q^2 - rp = -4s$$

de donde:

$$R_4 = p^4 - 4qp^2 + 4pr + 2q^2 - 4s$$

Tomemos entonces m = 4. Según la fórmula de Waring:

$$\begin{aligned} R_4 &= p^4 - 4qp^{4-2} + 4rp^{4-3} + [4s + \frac{4(4-3)}{2}q^2]p^{4-4} \\ &= p^4 - 4qp^2 + 4rp + [4s + 2q^2] \\ &= p^4 - 4qp^2 + 4rp + 2q^2 + 4s \end{aligned}$$

Aunque hay que tomar en cuenta que el polinomio de la nota sobre Girard era de grado tres y aquí introdujimos una potencia más (de allí la variación en la identidad) el anterior resultado nos hace suponer que la vía que Waring transitó hacia la elaboración de su fórmula tiene que haber sido similar a la que siguió Girard. La similitud de sus resultados así lo sugiere. El trabajo de Newton también debió ejercer alguna influencia como lo evidencia la presencia de sus identidades al inicio de la demostración de la fórmula. Sin embargo dicha demostración es, como ya dijimos, terriblemente complicada y difícil de entender, por lo que en este momento sólo podemos contentarnos con especulaciones respecto de la forma de interpretarla.

En resumen, hemos dado los elementos necesarios para darle seguimiento a su propuesta de la suma de las potencias de las raíces de:

$$A = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)(x^6-1)(x^7-1)\,...$$

Ahora, retomemos **1)** —página 36— donde esencialmente se dice que **la suma de las potencias m-ésimas de las raíces de dicho polinomio es igual a la suma de divisores de esa potencia m**. Es muy importante señalar que esta equivalencia entre suma de potencias y suma de divisores es uno de los resultados más trascendentes del artículo de Waring.

Regresemos a **2)** y retomemos la interpretación que hicimos de él. Recordemos que es un corolario en el que Waring aporta una manera de describir **la suma de las potencias m-ésimas de las raíces de A,** a partir de la suma de las potencias —menores a m— de las raíces de A.[21] Esto es, si *R(m)=S(m)* entonces:

S(m) =S(m-1) + S(m-2) – S(m-5) – S(m-7) + S(m-12) + S(m-15) –S(m-22) - S(m-26) + &c.

Sin entrar en detalles, Waring sólo menciona que esta última forma fue planteada originalmente por Euler, aunque interpretando a *S(m)* como la suma de los divisores de *m*.

[21] La regla a la que Waring se refiere en el articulo es la que aparece en su obra *Meditationes algebraicae* como el problema 1 del capítulo 1, y que ya habíamos reproducido anteriormente. No hay que confundirla con la regla de la suma de potencias inmediatamente anterior, y que en el artículo está marcada con el número 2.

En las páginas siguientes se analizará la propiedad anterior. Para ello nos basaremos en un documento —del mismo Euler— de 1751 titulado "*Découverte d´une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs".* Habría otras en documentos posteriores, pero la que veremos a continuación fue la que apareció primero.[22]

UNA PROPIEDAD DE LA SUMA DE DIVISORES DESCUBIERTA POR M. EULER

Veamos cómo se genera la "propiedad de la suma de divisores descubierta—inventada, diría Waring— por M. Euler". Tomemos nuevamente el producto múltiple:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots$$

que como ya vimos genera un polinomio que tiene la siguiente forma:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

y llamemos s a cada una de las dos expresiones anteriores. De manera que por una parte tendremos que:

(1) - $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots$

[22] En este mismo tenor Euler escribió dos artículos en los años de 1750 y 1771. No se tiene la certeza de que Waring los conociera, a pesar de las múltiples citas que hizo de sus trabajos a lo largo de artículos y libros. Los trabajos son:

Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem
(Una demostración de dos teoremas de Newton, por los cuales está dada la relación entre los coeficientes de una ecuación algebraica cualquiera y las sumas de las potencias de sus raíces)
Publicado en:*Opuscula varii argumenti* 2, 1750, pp. 108-120
Opera Omnia: Series 1, Volumen 6, pp. 20 - 30
Según C.G.J.Jacobi, un tratado con este título fue leído a la Academia de Berlín el 12 de Enero de 1747.

Observationes circa radices aequationum (Observaciones sobre las raíces de ecuaciones)
Publicado en: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 15, 1771, pp. 51-74
Opera Omnia: Series 1, Volumen 6, pp. 263 - 286
Según Eneström, este trabajo trata de la fórmula para la suma de las *p*-ésimas potencias de las raíces de una ecuación algebraica de *n*-ésimo orden. Asimismo, Euler considera el significado de esta fórmula si la secuencia generada por ella se extiende hasta el infinito. También contempla la solución de ecuaciones trinomiales, junto con la correlación entre ecuaciones ordinarias y ecuaciones diferenciales.
De acuerdo a los registros, dicho trabajo fue presentado a la Academia de San Petersburgo el 14 de Enero de 1771.

y por otra:

(2)- $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$

Para (1) tomaremos su logaritmo natural:

$$\ln(s) = \ln\left((1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots\right)$$

$$= \ln(1-x) + \ln(1-x^2) + \ln(1-x^3) + \ln(1-x^4) + \ln(1-x^5) + \ldots$$

Ahora derivemos para eliminar los logaritmos:

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \ldots$$

multiplicando lo anterior por $-\frac{x}{dx}$:

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \ldots$$

Ahora tomemos (2) y derivémosla:

$$ds = -dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \ldots$$

a continuación multipliquemos lo anterior por $-\frac{x}{sdx}$:

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{xdx + 2x^2dx - 5x^5dx - 7x^7dx + 12x^{12}dx + 15x^{15}dx - 22x^{22}dx - \ldots}{(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots)dx}$$

$$= \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots}$$

Hagamos $-\frac{xds}{sdx} = t$, y tendremos por una parte que:

(I) $t = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \ldots$

(II) $t=\dfrac{x+2x^2-5x^5-7x^7+12x^{12}+15x^{15}-22x^{22}-26x^{26}+\dots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\dots}$

Con respecto a (I), hagamos las divisiones correspondientes, por ejemplo:

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+\dots$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2}=2x^2+2x^4+2x^6+2x^8+2x^{10}+2x^{12}+\dots$$

$$\frac{3x^3}{1-x^3}=3x^3+3x^6+3x^9+3x^{12}+\dots$$

...

Como t es la suma de todos ellos, podemos entonces hacer la suma en una forma escalonada acomodando los términos por potencias, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned}
t = {} & x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+\dots. \\
& +2x^2 \quad +2x^4 \quad +2x^6 \quad +2x^8 \quad +2x^{10} \quad +2x^{12}+\dots. \\
& +3x^3 \quad +3x^6 \quad +3x^9 \quad +3x^{12}+\dots \\
& +4x^4 \quad +4x^8 \quad +4x^{12}+\dots \\
& +5x^5 \quad +5x^{10} \quad +\dots. \\
& +6x^6 \quad +6x^{12}+\dots \\
& +7x^7 \quad +\dots \\
& +8x^8 \quad +\dots \\
& +9x^9 \quad +\dots \\
& +10x^{10} \quad +\dots \\
& +11x^{11} \quad +\dots \\
& +12x^{12}+\dots
\end{aligned}$$

Es fácil observar que —por la forma en que se desarrollaron los términos $\dfrac{i\,x^i}{1-x^i}$— el coeficiente de cada término es un divisor de la potencia respectiva. Por ejemplo, los coeficientes de los términos con potencia 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12. Es decir, los divisores de 12.

Por lo tanto, agrupando, los términos con potencia 12 quedarán como:

(1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12) $x^{12} = S(12)x^{12}$ [23]

De donde podemos formar entonces la expresión:

$$t = S(1)x + S(2)x^2 + S(3)x^3 + S(4)x^4 + S(5)x^5 + S(6)x^6 + S(7)x^7 + ...$$

Retomemos ahora (II), que nos dice que:

$$t = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + ...}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - ...}$$

y consideremos la t en ella como la expresión recién obtenida. Pasemos al denominador de la parte derecha de la igualdad a la parte izquierda, donde quedará multiplicando a t, entonces tendremos:

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - ...)t = x + 2x^2 - 5x^5 + 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - ...$$

de donde:

0 = $(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - ...)t - x - 2x^2 + 5x^5 - 7x^7 + ...$

Consideremos ahora el producto entre t y lo que está en el paréntesis:

$(S(1)x + S(2)x^2 + S(3)x^3 + S(4)x^4 + ...)$ $(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ...)$ =

$$S(1)x - S(1)x^2 - S(1)x^3 + ... + S(2)x^2 - S(2)x^4 + ...$$

Desarrollando ampliamente el producto anterior y acomodando junto con el resto de los términos sin *S* en forma triangular, tendremos la configuración siguiente:

$$\begin{aligned}
0 = S(1)x + S(2)x^2 + S(3)x^3 + S(4)x^4 + S(5)x^5 + S(6)x^6 + S(7)x^7 + S(8)x^8 + S(9)x^9 + ...\\
-x - S(1)x^2 - S(2)x^3 - S(3)x^4 - S(4)x^5 - S(5)x^6 - S(6)x^7 - S(7)x^8 - S(8)x^9 - ...\\
-2x^2 - S(1)x^3 - S(2)x^4 - S(3)x^5 - S(4)x^6 - S(5)x^7 - S(6)x^8 - S(7)x^9 - ...\\
+5x^5 + S(1)x^6 + S(2)x^7 + S(3)x^8 + S(4)x^9 + ...\\
+7x^7 + S(1)x^8 + S(2)x^9 + ...
\end{aligned}$$

Así agrupados puede notarse fácilmente que, si equiparamos los coeficientes con respecto a las potencias respectivas tendremos que:

---

[23] Euler denota la suma de divisores de un número *n* con $\int n$, que nada tiene que ver con la integral a que estamos hoy acostumbrados. Hemos continuado con la *S* para no introducir más notación que pueda en algún momento confundir al lector.

$$\begin{aligned}
&S(1)-1=0\\
&S(2)-S(1)-2=0\\
&S(3)-S(2)-S(1)=0\\
&S(4)-S(3)-S(2)=0\\
&S(5)-S(4)-S(3)+5=0\\
&...
\end{aligned}$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&S(1)=1\\
&S(2)=S(1)+2\\
&S(3)=S(2)+S(1)\\
&S(4)=S(3)+S(2)\\
&S(5)=S(4)+S(3)-5\\
&...
\end{aligned}$$

Un ejemplo más:

$$S(9)-S(8)-S(7)+S(4)+S(2)=0$$

Que equivale a:

$$S(9)=S(8)+S(7)-S(4)-S(2)$$

En todos los casos anteriores se verifica la regla:

$$S(n)=S(n-1)+S(n-2)-S(n-5)-S(n-7)+S(n-12)+S(n-15)-...$$

Por la construcción anterior se pueden deducir dos cosas: la primera es que en la expresión no tiene sentido la suma de divisores de un número negativo. Es decir, que no nos toparemos con el caso *S*(*n* - *m*) donde *n* < *m*. ¿Qué pasa en el caso en el que *n* = *m*?. Esta es la segunda cuestión y para resolverla observemos que esto sólo es posible en el caso de los números pentagonales (que son los involucrados en la serie); la construcción nos muestra que los coeficientes que no involucran a la *S* son precisamente los pentagonales. Recordemos que esta serie quedó aislada del producto desde que igualamos a cero. Se puede notar entonces que en los casos en que tenemos S(*n* - *n*) el coeficiente es n mismo, es decir:

S(*n* - *n*) = *S*(0) = *n*. Por ejemplo, en el caso de *S*(5):

$$S(5)=S(5-1)+S(5-2)-S(5-5)=S(4)+S(3)-5$$

Como en efecto lo habíamos establecido en una de las tablas previas.

Cabe mencionar que la construcción anterior fue considerada por su mismo autor como un razonamiento "muy lejano de ser una prueba perfecta", pero su propósito no era ése. Se trataba más bien de despejar las dudas sobre cómo es que la serie se expande. En este sentido, no hay duda de que Euler logra su objetivo.

Ahora veremos cómo el mismo razonamiento nos conduce a que $S(m) = pS(m-1) - qS(m-2) + rS(m-3) - sS(m-4) + ...$ que es la forma general enunciada en la página 36. Nuevamente consideraremos el polinomio:

(1) $$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)...$$

que como ya vimos es igual a:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - ...$$

el cual no obstante podemos escribir en su forma general:

(2) $$s = 1 - px + qx^2 - rx^3 + sx^4 - tx^5 + ux^6 - vx^7 + ...$$

en donde sabemos de antemano que algunos de los coeficientes serán 1, -1 ó 0. Por el momento trabajaremos con la forma general, a la cual aplicaremos prácticamente el mismo procedimiento que en el caso anterior.

En este caso derivaremos directamente:

$$s´ = -pdx + 2qxdx - 3rx^2dx + 4sx^3dx - 5tx^4dx + ...$$

Ahora, multiplicando por $-\frac{x}{dx}$ lo anterior:

$$-\frac{xds}{sdx} = \frac{-px + 2qx^2 - 3rx^3 + 4sx^4 - 5tx^5 + ...}{1 - px + qx^2 - rx^3 + sx^4 - tx^5 + 4x^6 - ...} = t$$

De (2) vemos que:

$$-ts = px - 2qx^2 + 3rx^3 - 4sx^4 + 5tx^5 - ...$$

Por lo que:

$$0 = ts - ts = t(1 - px + qx^2 - rx^3 + sx^4 - tx^5 + ux^6 - ...) + px - 2qx^2 + 3rx^3 - 4sx^4 + 5tx^5 - ...$$

Pero sabemos por la proposición anterior que:

$$t = S(1)x + S(2)x^2 + S(3)x^3 + S(4)x^4 + S(5)x^5 + S(6)x^6 + ...$$

sustituyendo en la igualdad precedente:

$$0 = (S(1)x + S(2)x^2 + ...)(1 - px + qx^2 - rx^3 + ...) + px - 2qx^2 + 3rx^3 - 4sx^4 + ...$$

Como vemos, se trata del mismo procedimiento del caso anterior, por lo que obtendremos un arreglo triangular similar al pasado:

$$
\begin{aligned}
0 = S(1)x + S(2)x^2 &+ S(3)x^3 + S(4)x^4 + S(5)x^5 + \ldots \\
- pS(1)x^2 &- pS(2)x^3 - pS(3)x^4 - pS(4)x^5 - \ldots \\
&+ qS(1)x^3 + qS(2)x^4 + qS(3)x^5 + \ldots \\
&- rS(1)x^4 - rS(2)x^5 - \ldots \\
&+ sS(1)x^5 + \ldots \\
&- px + 2qx^2 - 3rx^3 + 4sx^4 - 5tx^5 + \ldots
\end{aligned}
$$

Y nuevamente es fácil encontrar lo que se buscaba obtener: Revísese la columna correspondiente a la potencia quinta. Tendremos que:

$$0 = S(5) - pS(4) + qS(3) - rS(2) + sS(1) - 5t$$

En el polinomio original podemos ver que tanto el valor de *r* como el de *s* es cero, por lo tanto:

$$S(5) = pS(4) - qS(3) + 5t = pS(5-1) - qS(5-2) + tS(5-5)$$

que se muestra en la forma acorde con la proposición de Waring.

En el caso de *m* = 4, recordemos que al abordar el teorema de Newton llegamos a que:

$$R(4) = pR(3) - qR(2) + rR(1) + 4s$$

Que presentábamos en la forma:

$$R(m) = pR(m-1) - qR(m-2) + rR(m-3) - \&c.$$

De igual manera, si tomásemos el caso *m* = 4 en la construcción que acabamos de ver, tendremos que:

$$S(4) = pS(3) - qS(2) + rS(1) + 4s$$

y que también podemos ver de la forma:

$$R(m) = pR(m-1) - qR(m-2) + rR(m-3) - \&c.$$

Así hemos llegado a la misma conclusión por distintas vías; una es la de suma de potencias m-ésimas de las raíces de A y la otra es la de suma de divisores del número m. La propuesta de Waring no suena entonces descabellada, es decir, *R(m)=S(m)* parece tener sentido. La demostración es, sin embargo, todavía un problema abierto.

Una vez establecida la propiedad de Euler, en el segundo corolario del artículo Waring propone una sustitución directa para expresar *S(m)* en términos de sumas de divisores menores a (m-1), ó a (m-2), etc. Esto es:

$$
\begin{aligned}
S(m) &= S(m-1)+S(m-2)-S(m-5)-S(m-7)+.... \\
&= [S(m-2)+S(m-3)-S(m-6)-...]+S(m-2)-S(m-5)-S(m-7)+... \\
&= 2S(m-2)+S(m-3)-S(m-5)-S(m-6)-...
\end{aligned}
$$

con lo cual *S(m)* queda, por ejemplo, expresada mediante sumas de divisores de números menores a (m-1).[24] Y podría continuarse sustituyendo para obtener sumas de números menores a (m-2), etc.

SUMA DE PRODUCTOS DE POTENCIAS DE RAÍCES

Después de trabajar con sumas de potencias de raíces, Waring abordará un problema más amplio: la suma de los productos de las potencias. Este problema es el que motiva el tercer corolario del artículo, aunque el texto de éste es tan ambiguo que poco en claro se puede sacar de él.

El tema de la suma de los productos de las potencias ya había sido abordado por Waring en las *Meditationes*, más específicamente en el corolario I del problema III, capítulo I. Este corolario I plantea lo siguiente:

> "Sea a la suma de las raíces [de una ecuación dada: $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - tx^{n-5} + vx^{n-6} + ... = 0$], b la suma de los cuadrados de las raíces, c la suma de sus cubos, d la suma de sus bicuadrados [potencias cuartas], e la suma de sus cuadro-cubos [potencias sextas], f la suma de sus cubo-cubos [potencias novenas], etc. Entonces la suma de productos de m raíces a la vez [es decir, la suma de productos de m raíces tomadas de n] será igual a una fracción cuyo numerador es:
>
> $$a^m - \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b + \frac{m(m-1)(m-2)}{3}a^{m-3}c - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4}a^{m-4} + ...$$
> $$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 2^2}a^{m-4}b^2 - ... \qquad \text{----------(*)}$$
>
> y cuyo denominador es $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m.$"

Es decir, que si llamamos k a dicha suma, entonces $\frac{(*)}{m!} = k$.

Ahora bien, antes de pasar al origen de este corolario, debemos hacer notar su relación con el párrafo del artículo que estamos examinando.

[24] Un ejemplo numérico. Si m = 10, entonces S(10) = S(9) + S(8) - S(5) - S(3).
Por otra parte: S(9) = S(8) + S(7) - S(4) - S(2), por lo que:
S(10) = 2S(8) + S(7) - S(5) - S(4) - S(3) - S(2).

Nótese que si el polinomio en cuestión es $A = 1 + x + x^2 - x^5 - x^7 + ...$ (el polinomio de Waring) entonces, como ya hemos visto, la suma de sus raíces es igual a uno, es decir $R(1) = 1$. Renombremos a $R(m)$ como a y entonces $a = 1$, $b = R(2)$, $c = R(3)$, $d = R(4)$, etc

Si el polinomio es A, sustituimos los valores anteriores en la ecuación del corolario I, y ésta se transforma en:

$$\frac{1 - m(\frac{m-1}{2})R(2) + m(m-1)(\frac{m-2}{3})R(3) - ... + m(m-1)(\frac{m-2}{2})(\frac{m-3}{2^2})(R(2))^2 - ...}{m!} = k$$

Por lo que, despejando:

$$1 - m(\frac{m-1}{2})R(2) + m(m-1)(\frac{m-2}{3})R(3) - ... = k(m!)$$

en donde k puede tomar valores ± 1 ó cero.

Si asumimos nuevamente que $R(m) = S(m)$ —como lo hace Waring en el artículo— y ampliamos un poco más la ecuación, lo que obtenemos es precisamente la ecuación del tercer corolario del artículo, que expresada en una forma más apropiada es la siguiente:

$$\begin{aligned} &1 - m(\frac{m-1}{2})S(2) + m(m-1)(\frac{m-2}{3})S(3) - m(m-1)(m-2)(\frac{m-3}{4})S(4) + \&c. \\ &+ m(m-1)(\frac{m-2}{2})(\frac{m-3}{2^2})(S(2))^2 - \&c. = k \end{aligned}$$

donde $k = \pm m!$, ó $k = 0$, según el caso. Para los casos que analizaremos no queda más remedio que considerarlos después de que hagamos los comentarios respecto de la parte izquierda de la igualdad.

Luego entonces, la fórmula del artículo no es más que la aplicación del corolario I de las *Meditationes* a nuestro polinomio. Ahora bien, el resultado que da origen al corolario I es, como ya dijimos, el problema I del capítulo I del *Meditationes*. Veamos pues qué es lo que nos plantea dicho problema:

"Sea $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ **etc. las raíces de una ecuación dada:** $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + ... = 0,$ **y sean** $a, b, c, d, e, f,$ **etc. índices dados,** m **en número** $(m \leq n)$. **Encuéntrese la suma de todas las cantidades de la siguiente forma:**

$$\begin{aligned} &\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \varepsilon^e ... + \alpha^b \beta^a \gamma^c \delta^d \varepsilon^e ... + \alpha^c \beta^a \gamma^b \delta^d \varepsilon^e ... + \\ &\alpha^d \beta^a \gamma^b \delta^c \varepsilon^e ... + \alpha^e \beta^a \gamma^b \delta^c \varepsilon^d ... + \alpha^a \beta^c \gamma^b \delta^d \varepsilon^e ... + \end{aligned}$$ **".**

No seguiremos el desarrollo de la solución por ser demasiado largo, aunque se presta a hacer múltiples observaciones. Nos limitaremos con dar la solución a este problema en una forma conveniente por concisa. La solución provista en el mismo texto está dada por la siguiente identidad:

La suma requerida $= A-B+1\cdot 2C-1\cdot 2\cdot 3D+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4E-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5F+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5F-...$

$$+1\cdot 1BB-1\cdot 1\cdot 2BC+1\cdot 1\cdot 2\cdot 3BD-1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4BE+...$$
$$+1\cdot 2\cdot 1\cdot 2CC-1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3CD+...$$
$$-1\cdot 1\cdot 1BBB+1\cdot 1\cdot 1\cdot 2BBC-...$$

en donde $A=S_aS_bS_c\cdots$ y cada factor representa la suma de las potencias (determinadas por el subíndice) de las raíces,[25] por ejemplo:

$$S_a=\alpha^a+\beta^a+\gamma^a+\delta^a+\varepsilon^a+...$$

B queda definida como sigue:

$$B=\frac{S(a+b)A}{S_aS_b}+\frac{S(a+c)A}{S_aS_b}+\frac{S(b+c)A}{S_bS_c}+\frac{S(a+d)A}{S_aS_d}+...$$

Los índices nos indican que tendremos tantos términos como combinaciones de m índices en dos lugares.

Siguiendo con esta identidad, debemos tener en cuenta que en el caso de nuestro polinomio los índices serán iguales, es decir, $a=b=c=d=....=1$. De manera que

$A=S_1S_1...=(S_1)^m$ (pues tenemos m índices)

$=(\alpha+\beta+\gamma+...)^m=a^m$

Teniendo presente lo anterior, volvamos a *B*. Todos los índices tienen valor = 1, por lo que, haciendo las sustituciones pertinentes:

$$B=\frac{S(2)a^m}{a^2}+\frac{S(2)a^m}{a^2}+...$$

y recordemos que habría tantos términos como combinaciones de m índices en 2 lugares, es decir, habrá $(\frac{m}{2})=\frac{m!}{2!(m-2)!}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)...}{2(m-2)(m-3)...}=\frac{m(m-1)}{2}$ sumandos. De manera que:

$$B=\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}S(2)=\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b$$

[25] Aunque hemos optado por diferenciar entre sumas de potencias y sumas de divisores con las notaciones *R(m)* y *S(m)* respectivamente, en este caso respetamos la notación que Waring emplea en su libro, en donde identifica a la suma de potencias i-ésimas como S_i.

Podemos, en esta etapa, darnos cuenta que han surgido los dos primeros términos de la ecuación del corolario; vayamos ahora con el tercero:

$$C=\frac{S(a+b+c)A}{S_aS_bS_c}+\frac{S(a+b+d)A}{S_aS_bS_d}+\frac{S(a+c+d)A}{S_aS_cS_d}+...$$

Siguiendo el mismo razonamiento llegamos a que tendremos entonces tantos términos como combinaciones de m índices en 3 lugares haya, es decir:

$$(\frac{m}{3})=\frac{m!}{3!(m-3)!}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Por lo tanto:

$$C=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}S(3)=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}c$$

Ahora sustituyamos las identidades obtenidas en **la suma requerida**. Para los tres primeros términos de la suma la regla es:

$$\begin{aligned}A-B+1\cdot 2C-...&=a^m-\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b+2(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3})a^{m-3}c-...\\&=a^m-\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b+\frac{m(m-1)(m-2)}{3}a^{m-3}c-...\end{aligned}$$

los cuales son precisamente los primeros tres términos de la suma del corolario. Nos detendremos aquí porque los términos siguientes son bastante más complejos y harían interminable el análisis. Sin embargo, lo hasta aquí expuesto basta para conocer cual fue el camino seguido por Waring en la elaboración de su suma. Continuemos con el resto de la identidad.

Además, el texto en la solución del problema III dice que: **" si hubieren k índices iguales a a, l índices iguales a b, ... etc, entonces la suma de arriba debe ser dividida por el producto $k!\cdot l!\cdots$".**

Dado que los índices tienen valor igual a 1 y que tenemos m índices, entonces el producto mencionado es m!. Obtenemos así el denominador de la parte izquierda de nuestra identidad. [26]

En función del propósito de este trabajo no tiene sentido ahondar más en este problema. Pretender dar la demostración de la solución del problema III está fuera del alcance de este trabajo; es más, el análisis de muchos de los resultados de Edward Waring requie-

[26] Ahora que queda claro que el corolario del artículo es un caso particular del corolario III del problema I del *Meditationes*, inferimos que la "regla para encontrar la suma de los contenidos..." mencionada en el texto del artículo se refiere a la solución del problema I, y que los contenidos no son más que los productos de las potencias de las raíces.

ren por sí solos trabajos de mayor envergadura, por lo que ya no ocuparemos más tiempo en éste en particular.

Sólo dos notas finales. La primera se refiere a la obra de Leonard Dickson titulada " History of the theory of numbers ", de la que hablamos brevemente en la introducción. En el capítulo X del volumen II de esta obra se hace una reseña de lo que es el artículo en cuestión. He aquí la traducción de lo referente a la ecuación que analizamos:

"Él [Waring] dedujo que :

$$1-\frac{m(m-1)}{2}\sigma(2)+\frac{m(m-1)(m-2)}{3}\sigma(3)-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4}\sigma(4)$$
$$+...+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 2^2}+(\sigma(2))^2-...=c\cdot m!,$$

donde $c=\pm 1$ ó 0 es el coeficiente de x^{b-m} en la serie A. "

La última línea nos aclara lo de los tres valores posibles para *c* (*k* en nuestra interpretación); son los tres valores que toman los coeficientes en el polinomio A en particular que, como ya hemos visto, dependen de la paridad de *m*. Waring mezcla letras y en su artículo menciona que depende de la paridad de v. ¿Cuál v?. Pues la mencionada en el primer párrafo de su artículo, sólo que al llegar a esta parte del mismo no homogeneiza su notación y usa *m* en la ecuación y v en la segunda parte del párrafo. Dickson resuelve esto en su nota.

Es de resaltar la notación usada por Dickson.[27] Al sustituir a *S(m)* por $\sigma(m)$ no hace más que actualizar la notación. Sin embargo, lo sobresaliente es que al tomarse la autorización de hacerlo asume que en efecto $R(m)=S(m)$ porque Waring así lo establece aunque no lo demuestra. La obra de Dickson es descriptiva, no analítica, lo cual nos lleva a reflexionar en que la obra de Waring no es desconocida pero sí poco analizada.

La segunda nota tiene que ver con lo difícil que es seguir el rastro del trabajo de Waring, cuando él mismo es el responsable (no deliberadamente) de proveernos de pistas falsas. La ecuación que nos ocupa también aparece en las *Meditationes* pero muchas páginas después del corolario I que mencionamos. De hecho, la ecuación en sí misma también es un corolario: el corolario 10.3 del Teorema 46 (capítulo 5) Reproducimos dicho corolario:

Corolario 10.3
"Aquí, por el Corolario 2 del problema 3, ya sea 0, ó $\pm 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots m,$ será el valor de

$$\frac{m-1}{2}S(2)+m(m-1)\frac{m-2}{3}-m(m-1)(m-2)\frac{m-3}{4}S(4)+...$$
$$+m(m-1)\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{2^2}(S(2))^2-...$$ "

[27] Leonard Eugene Dickson fue quien en 1919 introdujo el símbolo σ para denotar la suma de divisores.

Remitirse al corolario 2 del problema 3 no nos lleva a nada, y esto es porque como vimos, es el corolario 1 (no el 2) el que nos conduce a la ecuación en el caso particular de nuestro polinomio. También es de notar que el autor omite una S(3) en la ecuación, por lo que, a falta de notación más específica, podría uno pensar que sólo términos pares están involucrados en las sumas.

Si bien es cierto que una fe de erratas resuelve el problema, suponiendo que se detecte, aquí, no obstante, si no se cuenta con el artículo es difícil detectarlo en el mismo libro, esto en vista de que el libro es inimaginablemente complejo como para basarse en él.

UN PROBLEMA DE PARTICIONES

Regresando al artículo, su primera parte termina con el párrafo marcado con el 3, y tendrá que ver con números pentagonales, aunque tendríamos que considerar a la proposición más orientada hacia la teoría de particiones. Recordemos lo que dice:

> Sea H el número de maneras diferentes por las cuales la suma de cualesquiera dos números [tomados entre] 1, 2, 3, 4,....*m - 2*, *m - 1,* pueda ser = *m*; H´ el número de maneras por las cuales la suma de cualesquiera tres de [entre] los números arriba mencionados pueda generar a *m*; H´´, H´´´, H´´´´, &c. el número de maneras por las cuales la suma de cualesquiera cuatro, cinco, seis, &c. de los números arriba mencionados es = *m,* respectivamente, entonces se tendrá:
>
> $$1 - H + H' - H'' + H''' - \&c. = \pm 1 \text{ ó } 0.$$
>
> Si $m = \dfrac{3z^2 \pm z}{2}$, entonces será +1 ó –1, según si z es número impar o par, en todos los otros casos será = 0.

Consideremos que cada H se refiere al número de maneras en que el número *m* se puede expresar como suma de un número <u>par</u> o <u>impar</u> de sumandos <u>distintos</u> tomados de entre 1,2,3,....,(*m* -1). El 1, por ejemplo, correspondería a H^0 que contempla un sólo sumando, es decir, *m* mismo.

Recordemos que una partición de un entero positivo *m* representa una expresión de *m* como una suma de enteros positivos. Varias páginas atrás vimos también que:

$p_{ed}(m)$ = el número de particiones de un entero positivo *m* en un número par de partes distintas.

$p_{od}(m)$ = el número de particiones de un entero positivo *m* en un número impar de partes distintas.

Lo cual nos dio entrada para presentar uno de los teoremas más conocidos de la teoría de particiones: el teorema de Franklin. Retomémoslo:

<u>Teorema de Franklin</u>

Si *m* es un entero positivo, entonces:

$$p_{ed}(m) - p_{od}(m) = \begin{pmatrix} 0 \quad si & n \neq \dfrac{3k(k \pm 1)}{2} \\ (-1)^k \quad \text{si} & n = \dfrac{3k(k \pm 1)}{2} \end{pmatrix}$$

Pues bien, tomando a cada H como una partición y agrupándolas según el número par o impar de ellas, el teorema es claramente aplicable. Esto le da justificación a esta propiedad que en las *Meditationes* aparece como "nota 4" del teorema 46. Parece que en Waring todo lo señalado como nota es enunciado sin demostración o sin siquiera algún indicio de ella.

Una de las demostraciones del teorema de Franklin (que no incluimos aquí para no desviarnos en exceso) pasa por un resultado de Euler que es de hecho uno de los primeros en la teoría de particiones. En 1740, Philipp Naudé, un matemático berlinés pero originario de Metz, Francia, le propuso dos problemas a Euler, uno de los cuales era encontrar el número de formas en que un número es una suma de un número dado de partes distintas. La respuesta de Euler fue la siguiente, en la expresión:

$$(1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)...$$

el coeficiente de $x^m z^n$ representa el número de maneras en que *m* puede ser escrita como una suma de *n* enteros positivos distintos. Por ejemplo, el coeficiente de $x^9 z^3$ es 3 y resulta de cada uno de los siguientes productos $x^6 z \cdot x^2 z \cdot x^1 z$, $x^5 z \cdot x^3 z \cdot x^1 z$, y $x^4 z \cdot x^3 z \cdot x^2 z$, esto es, los términos correspondientes respectivamente a las particiones 6 + 2 + 1, 5 + 3 + 1, y 4 + 3 + 2 de 9 [28]

SUMA SELECTIVA DE DIVISORES

Suma de divisores primos [29]

En la parte II del artículo Waring propone el producto de binomios, aunque con una modificación, esta vez los exponentes de los binomios serán exclusivamente números primos. Esto nos llevará a su vez a modificar la relación existente entre la suma de potencias de las raíces del polinomio generado por el producto y la suma de divisores del número que representa la potencia. La suma de divisores se restringirá esta vez a la suma de los divisores primos.

Como en la primera parte, tenemos que asumir como verdadera esta igualdad (la de suma de divisores y suma de potencias) dado que no estamos en condiciones de dar una demostración de la misma. Sí podemos, en cambio, decir algo respecto de la

[28] James J. Tatersall "Number Theory in nine lessons"
[29] Entre los que está incluido el 1. En la época de Euler y Waring era común tomar este número como primo sin mayor dificultad.

forma en que surge la identidad de Euler de suma de divisores bajo esta variante. El procedimiento es prácticamente el mismo que en la primera parte. Tomemos el polinomio propuesto esta vez y procedamos como ya lo hicimos con el primero:

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})... \qquad \text{(I)}$$
$$s=1-x-x^2+x^4+x^8-x^{10}-x^{11}+x^{12}+x^{16}-x^{17}-... \qquad \text{(II)}$$

Para separar los factores en (I) aplicamos logaritmos:

$$\ln s=\ln(1-x)+\ln(1-x^2)+\ln(1-x^3)+\ln(1-x^5)+...$$

y derivamos:

$$\frac{ds}{s}=-\frac{dx}{1-x}-\frac{2xdx}{1-x^2}-\frac{3x^2dx}{1-x^3}-\frac{5x^4dx}{1-x^5}-\frac{7x^6dx}{1-x^7}-\frac{11x^{10}dx}{1-x^{11}}...$$

que multiplicado por $-\frac{x}{dx}$ nos da:

$$-\frac{xds}{sdx}=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\frac{7x^7}{1-x^7}+\frac{11x^{11}}{1-x^{11}}...$$

Regresemos a (II) y obtengamos su derivada:

$$ds=-dx-2xdx+4x^3dx+8x^7dx-10x^9dx-11x^{10}dx+12x^{11}dx+16x^{15}-...$$

que multiplicado por $-\frac{x}{sdx}$ nos da:

$$-\frac{xds}{sdx}=\frac{x+2x^2-4x^4-8x^8+10x^{10}+11x^{11}-...}{1-x-x^2+x^4+x^8-x^{10}-x^{11}+x^{12}+x^{16}-...}$$

Ahora tenemos dos maneras de escribir a $-\frac{xds}{sdx}$ y dado que son iguales, a ambas las llamaremos t. Por lo tanto:

$$t=\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{5x^5}{1-x^5}+\frac{7x^7}{1-x^7}+\frac{11x^{11}}{1-x^{11}}...$$

y además:

$$t=\frac{x+2x^2-4x^4-8x^8+10x^{10}+11x^{11}-...}{1-x-x^2+x^4+x^8-x^{10}-x^{11}+x^{12}+x^{16}-...} \qquad \text{-------(*)}$$

De la primera de estas igualdades desarrollamos cada cociente:

$$
\begin{aligned}
t = {} & x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + \ldots \\
& +2x^2 \quad +2x^4 \quad +2x^6 \quad +2x^8 \quad +2x^{10} \quad +2x^{12} + \ldots \\
& +3x^3 \quad +3x^6 \quad +3x^9 \quad +3x^{12} + \ldots \\
& +5x^5 \quad +5x^{10} \quad + \ldots \\
& +7x^7 \quad + \ldots \\
& +11x^{11} \quad + \ldots \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

De la misma forma en que lo hicimos en la parte I del artículo, después de observar los coeficientes de los términos y de agrupar las sumas, podemos escribir t como:

$$t = S´(1)x + S´(2)x^2 + S´(3)x^3 + S´(4)x^4 + \ldots + S´(n)x^n$$

en donde $S´(m)$ denota la suma de divisores primos de *m*.

Ahora, de (*) tendremos:

$$(S´(1)x + S´(2)x^2 + \ldots + S´(n)x^n)(1 - x - x^2 + x^4 + x^8 - x^{10} - \ldots) - x - 2x^2 + 4x^4 + 8x^8 - \ldots = 0$$

Desarrollando y acomodando en forma triangular:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & S´(1)x + S´(2)x^2 + S´(3)x^3 + S´(4)x^4 + S´(5)x^5 + S´(6)x^6 + S´(7)x^7 + S´(8)x^8 + S´(9)x^9 + \ldots \\
& -x - S´(1)x^2 - S´(2)x^3 - S´(3)x^4 - S´(4)x^5 - S´(5)x^6 - S´(6)x^7 - S´(7)x^8 - S´(8)x^9 - \ldots \\
& -2x^2 - S´(1)x^3 - S´(2)x^4 - S´(3)x^5 - S´(4)x^6 - S´(5)x^7 - S´(6)x^8 - S´(7)x^9 - \ldots \\
& +4x^4 + S´(1)x^5 + S´(2)x^6 + S´(3)x^7 + S´(4)x^8 + S´(5)x^9 + \ldots \\
& +8x^8 + S´(1)x^9 + \ldots \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Del arreglo anterior se puede deducir, como en el caso de la parte I, la regla enunciada por Waring en su artículo:

$$S´(m) = S´(m-1) + S´(m-2) - S´(m-4) - S´(m-8) + S´(m-10) + S´(m-11) - S´(m-12) - \ldots + \&c.$$

Como ejemplo numérico tomemos el de *m* = 9. Según la regla:

$$S´(8) = S´(8-1) + S´(8-2) - S´(8-4) - S´(8-8) = S´(7) + S´(6) - S´(4) - 8$$

que se puede verificar en el arreglo. Ahora, para concluir:

$$S´(7) + S´(6) - S´(4) + 8 = (7+1) + (1+2+3) - (1+2) - 8 = 8 + 6 - 3 - 8 = 3 = 1 + 2 = S´(8)$$

Si bien ya tenemos claro lo que es $S(m)$ y $S´(m)$, aún no se nos ha dicho lo que representa $S^l(m)$. El autor se adelanta a una definición y por ello habla de los "casos análogos subsecuentes".

Adelantándonos también nosotros, aclararemos que $S^l(m)$ representa la suma de los divisores de *m*, divisores los cuales son múltiplos de l. Ya en una nota previa habíamos visto que *S(0) = n*. Es precisamente lo que se nos indica en este caso; al sustituir por *r* cuando *r = n*.

Suma de divisores de un número m múltiplo de uno o más de los exponentes.

En la parte III del artículo Waring propone como exponentes de cada binomio números enteros no negativos cualesquiera. La redacción no es muy clara y faltan hipótesis, por lo que enunciaremos la proposición de la manera siguiente:

Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ...\beta_n$ enteros positivos no necesariamente distintos entre sí.
Sea $(x^{\beta_1}-1)(x^{\beta_2}-1)\,...\,(x^{\beta_n}-1)$ y las raíces del polinomio resultante: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$
Sea $m \leq n$ tal que $m = \beta_i r$ para una ó más $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y *r* es un entero positivo.
La proposición de Waring es:

$$(\alpha_1)^m + (\alpha_2)^m + (\alpha_3)^m + ... = S^d(m)$$

en donde $S^d(m)$ la usamos para denotar la suma de divisores de *m* los cuales pertenezcan al conjunto formado por las β_i con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ o dicho de otra forma, $S^d(m)$ representa la suma de las β_i que aparezcan en una factorización (no necesariamente en primos) de *m*.

Como ejemplo de lo anterior supongamos que el producto binomial es:

$$(x^{\beta_2}-1)(x^{\beta_1}-1)(x^{\beta_4}-1)(x^{\beta_3}-1)(x^{\beta_5}-1)$$

y *m* es de la forma siguiente: $m = \beta_2\beta_3\beta_5\, r$ en donde *r* no contiene ningún factor β.

Entonces $S^d(m) = \beta_2 + \beta_3 + \beta_5$, de donde:

$$(\alpha_1)^m + (\alpha_2)^m + (\alpha_3)^m + ... = \beta_2 + \beta_3 + \beta_5$$

Sabemos que puede no ser una formulación completamente satisfactoria, pero más allá de lo formal, estamos más interesados en hacer comprensibles las ideas del autor.

Consideramos que en este caso un ejemplo numérico breve es indispensable para tal propósito.

Ejemplo:
Sea $(x^2-1)(x^4-1)(x^5-1)(x^3-1)$.Sus raíces las conocemos porque ya trabajamos este producto para una nota anterior, y podemos consultarlo en el apéndice 3-a.
Sea *m* = 4 = (4)(1) = (2)(2). Entonces $S^d(4)=2+4=6$ (1 es obviamente divisor de 4 pero no está entre los exponentes del producto de binomios)

Sabemos por el ejercicio del apéndice 3-a que:

$$\alpha_1^4+\alpha_2^4+...+\alpha_{15}^4=7$$

La raíz $\alpha_1=1$ corresponde al binomio faltante en el producto de este ejemplo. Por lo tanto:

$$\alpha_2^4+...+\alpha_{15}^4=7-1=6=S^d(m)$$

que es lo que Waring propone en su enunciado.

<u>*Suma de divisores múltiplos de un número* l</u>

La parte IV del artículo es un caso particular más en el que los exponentes de los binomios son múltiplos de un número l. En el párrafo 2 de esta parte IV nos encontramos con una definición que ya habíamos presentado en la parte II. Se trata de una suma selectiva de divisores de un número *m* que son múltiplos de l, relacionada mediante una igualdad con la suma de potencias de las raíces del polinomio, esto es, si $\alpha, \beta, \gamma,...$ son las raíces del polinomio, entonces:

$$\alpha^{lm}+\beta^{lm}+\gamma^{lm}+...=S^l(m)$$

No hay tanta complicación en el corolario correspondiente salvo su redacción, que como es habitual en este autor, es algo confusa. Primero consideremos que:

$$S(m)=S^l(m)+S^{\not l}(m)$$

Es decir, la suma de todos los divisores de *m* es igual a: la suma de divisores que son también múltiplos de l, de *m*, sumada a la suma de los divisores que no son múltiplos de l, de *m*. De esta identidad tenemos que:

$$S^{\not l}(m)=S(m)-S^l(m)$$

que es exactamente lo que dice la primera igualdad del corolario. Ahora, teniendo en cuenta que:

$$S(m)=S(m-1)+S(m-2)-S(m-5)-S(m-7)+S(m-12)+S(m-15)-S(m-22)-...$$

que ya nos es suficientemente familiar, y que:

$$S^{l}(m)=S^{l}(m-l)+S^{l}(m-2l)-S^{l}(m-5l)-S^{l}(m-7l)+S^{l}(m-12l)+S^{l}(m-15l)-...$$

que es la identidad enunciada en el primer corolario de esta parte IV, entonces tenemos lo siguiente:

$$S^{\not{l}}(m)=S(m)-S^{l}(m)=S(m-1)-S^{l}(m-l)+(S(m-2)-S^{l}(m-2l))-(S(m-5)-S^{l}(m-5l))$$

$$-(S(m-7)-S^{l}(m-7l))+\&c.$$

La cual es una simple agrupación de términos de la resta y que finalmente es el enunciado del corolario en su conjunto.

Más confuso es todavía el enunciado de la propiedad que sigue. Para introducir algo de orden al aparente caos, empecemos con el hecho de que $a, b, c, d,$ etc, son primos relativos (primos entre sí) dicho lo cual planteamos el problema de obtener la suma de los divisores de *m* los cuales son múltiplos de $a, b, c, d,$ etc. En este punto la notación sigue siendo manejable (en la parte V habrá que recurrir a otras expresiones) por lo que denotaremos a la suma anterior como $S^{a,b,c,d,\dots}(m)$.
Al igual que en el corolario anterior, podemos describir $S(m)$ como:

$$S(m)=S^{a,b,c,d,\dots}(m)+S^{\not{a},\not{b},\not{c},\not{d},\dots}(m).$$

Es decir, la suma de todos los divisores de *m* es igual a: la suma de los divisores que son múltiplos de $a, b, c, d,$ etc, de *m*, sumada a la suma de los divisores que no son múltiplos de $a, b, c, d,$ etc, de *m*.

De esta igualdad tenemos que:

$$S^{\not{a},\not{b},\not{c},\not{d},\dots}(m)=S(m)-S^{a,b,c,d,\dots}(m)$$

que es a lo que se refiere la última parte del enunciado cuando dice que "$S(m)-C$ es la suma requerida". Esto es, la suma requerida es la suma de los divisores de *m*, divisores que no son múltiplos de $a, b, c, d,$ etc, representada por $S^{\not{a},\not{b},\not{c},\not{d},\dots}(m)$ y *C* es la suma de los divisores de *m* que sí son múltiplos de $a, b, c, d,$ etc, representada por $S^{a,b,c,d,\dots}(m)$.

Ahora, fijándonos cuidadosamente en el artículo, vemos que el texto posterior a "$l=$" es la descripción del proceso —descrito con simbología— anterior, y que es igual a la misma l. Por esta descripción nos damos cuenta de algunos errores en la parte de símbolos. La reproducimos nuevamente para apreciarlos mejor:

$$
\begin{aligned}
&(S^{a}(m)+S^{b}(m)+S^{c}(m)+S^{d}(m)+S^{e}(m)+\&c.)-((S^{a\times b}(m)+S^{a\times c}(m)+S^{b\times c}(m)\\
&+S^{c\times d}(m)+S^{b\times d}(m)+S^{c\times d}(m)+S^{a\times e}(m)+\&c.))\\
&+(S^{a\times c\times d}(m)-S^{a\times b\times d}(m)+S^{a\times b\times d}(m)+S^{b\times c\times d}(m)+S^{a+b+c}(m)+\&c.) \quad ---(1)\\
&-((S^{a+b+c+d}(m)+S^{a+b+c+e}(m)+\&c.) \qquad -----------------(2)\\
&+(S^{a+b+c+d+e}(m)+\&c.))-\&c.
\end{aligned}
$$

En (1) el segundo y el tercer término se anularían, puesto que son iguales. El texto nos habla de los "contenidos" de las raíces, que ahora ya sabemos que se refiere a los productos que surgen de las combinaciones de tantas raíces en tantos lugares. En este caso las raíces irán en ternas las cuales, siguiendo el orden de Waring, van así: $abc, abd, acd, bcd, \&c.$ Al compararlas con los índices superiores de las sumas en (1), vemos que el cuarto índice se repite, lo cual es incorrecto; lo correcto en este caso es bcd, como lo sugiere el orden del autor.

En (2) las raíces están sumadas. Esto no tiene sentido en el contexto en que nos situamos. Nuevamente el texto desmiente esta relación. El texto nos habla de los "contenidos" de cada cuatro de las cantidades mencionadas, lo que quiere decir que las raíces irán en grupos de cuatro que, como vimos, representan a productos. De hecho, este error comienza en (1) en donde la última suma mencionada también presenta una suma como índice en lugar de un producto.

Hasta este momento la idea fija del artículo, el factor común de lo escrito hasta aquí, es la igualdad $R(m)=S(m)$ y las propiedades que trae consigo. En lo que resta del artículo — la denominada parte V — no será ya necesario asumir esta identidad como válida. La última parte del artículo puede verse como independiente de las demás, vinculada con ellas a través de la función suma de divisores, pero tratada en otro contexto que ya nada tiene que ver con suma de potencias de raíces.

MÁS PROPIEDADES DE LA SUMA DE DIVISORES

En el párrafo 1 de esta última parte es notable la deficiencia en la redacción del artículo. Si esto es culpa de Waring o de los editores es algo que desconocemos. Una mejor formulación del enunciado sería la siguiente:

$S(\alpha\times\beta)=\alpha\times S(\beta)+$ la suma de todos los divisores de β no divisibles por α
$\quad=\beta\times S(\alpha)+$ la suma de todos los divisores de α no divisibles por β.

Nótese cómo cambia completamente el sentido del enunciado. Por una falsa asociación, en el artículo original cuyo estilo ha sido respetado en la traducción, podemos vernos impelidos a leer que, partiendo del primer renglón: " ...la suma de todos los divisores de β no divisibles por $\alpha=\beta$ x S(α) + la suma ...." . Lo anterior nos hace pensar que $\alpha=\beta$ x S(α) +... lo cual es absolutamente falso. Es necesario hacer la separación entre los símbolos para aclarar que estamos hablando de una segunda igualdad.

Es también de resaltar que, en principio, en $S(\alpha\beta)$ no se les impone mayor restricción ni a α ni a β. Veamos qué sucede si tomamos α = 4 y β = 3. Como los divisores de 3 son 1 y 3, y ya que 4 no divide a ninguno de estos dos, entonces:

$$S(4\cdot 3) = 4(S(3)) + (1 + 3) = 4(4) + 4 = 16 + 4 = 20$$

Sin embargo, es fácil verificar que:

$$S(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

Que evidentemente no es igual a la suma anterior. ¿Qué sucede entonces?¿Se trata de un contraejemplo? ¿Waring está equivocado?.
Más aún:

$$S(12) = S(3\cdot 4) = 3(S(4)) + (1 + 2 + 4) = 3(7) + 7 = 21 + 7 = 28.$$

En este caso sí se cumple la proposición, ¿por qué?. Para ver lo que está pasando supongamos que tenemos dos números enteros positivos distintos p_1 y p_2 tales que p_1 y p_2 son primos relativos (es decir, que no comparten factores) y además p_1 es primo pero p_2 no necesariamente. Usemos la notación actual para suma de divisores y reemplacemos la S por la σ. Ahora:

$$\sigma(p_1p_2) = p_1\cdot\sigma(p_2) + \sigma(p_2) = (p_1 + 1)\cdot\sigma(p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2)$$

En efecto, lo anterior se cumple considerando que la suma de divisores de un número primo es igual al primo más uno (los únicos números que lo dividen). Lo anterior establece en este caso una propiedad que posee la función σ y que es la de ser una función multiplicativa, esto es, que:

$$\sigma(a\cdot b) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Donde a y b tienen que ser primos o al menos primos relativos.

Regresemos al caso que nos ocupa. Veamos qué pasa si al considerar $\sigma(p_2p_1)$:

$$\sigma(p_2p_1) = p_2\sigma(p_1) + (1 + p_1) = p_2\sigma(p_1) + \sigma(p_1) = (p_2 + 1)\sigma(p_1)$$

Esto indica que como σ es una función multiplicativa, entonces p_2 tendría que ser un número primo para que $\sigma(p_2) = p_2 + 1$, contradiciendo así nuestra suposición de que p_2 pudiera no ser primo. En efecto, si p_1 y p_2 fueran ambos primos:

$$\sigma(p_1p_2) = p_1\sigma(p_2) + (1 + p_2) = p_1\sigma(p_2) + \sigma(p_2) = (p_1 + 1)\sigma(p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2).$$
$$\sigma(p_2p_1) = p_2\sigma(p_1) + (1 + p_1) = p_2\sigma(p_1) + \sigma(p_1) = (p_2 + 1)\sigma(p_1) = \sigma(p_2)\sigma(p_1).$$

Queda claro entonces que p_1 y p_2 tienen que ser números primos para que

$\sigma(p_1p_2) = p_1\sigma(p_2) + \sigma(p_2) = p_2\sigma(p_1) + \sigma(p_1)$, y para que por otra parte

$\sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1)\sigma(p_2) = (1 + p_1)(1 + p_2) = (1 + p_2)(1 + p_1) = \sigma(p_2)\sigma(p_1) = \sigma(p_2p_1)$

Retomemos la S usada por Waring. La identidad propuesta por él queda restringida a números primos si se quiere mantener la conmutatividad que establece su resultado, y cumplir a su vez con el carácter de multiplicativa en el sentido que le conocemos a la función σ.

Este carácter multiplicativo se mantiene si se trata de primos relativos y, además, p_1 es un número primo. La igualdad en este caso es válida. Es el caso del ejemplo propuesto, donde $\alpha = 3$ y $\beta = 4$. S(12) = S(3·4) = S(3)S(4) = (4)(7) = 28. Pero S(12) $\neq$ S(4·3), por lo tanto S(3·4) $\neq$ S(4·3) La identidad propuesta por Waring no es conmutativa para primos relativos cuyo primer factor no es un primo impar.

Insistimos en que la redacción es deficiente y la información insuficiente. En efecto, α y β tienen que ser primos aunque Waring no lo precise en el primer párrafo. De hecho, lo hará pero bastante más adelante, y en la nota correspondiente lo haremos notar.

Conclusión: α y β tienen que ser primos para que la conmutatividad valga. Puede ser que β no sea primo pero si α lo es y además son primos relativos entonces la igualdad se cumple. Lo anterior restringe la posibilidad de un caso general. Aún así, podrá hacerse una generalización descomponiendo cada número en primos, pero las identidades que surgen se verán en el párrafo 3 del artículo. Usando notación actual, la proposición del párrafo 1 quedaría de la siguiente manera:

Si α y β son números primos, entonces:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha\beta) &= \alpha\cdot\sigma(\beta) + \sum_{\substack{d/\beta \\ \alpha \nmid d}} d \\ &= \beta\cdot\sigma(\alpha) + \sum_{\substack{d/\alpha \\ \beta \nmid d}} d\end{aligned}$$

que es una forma muy elaborada de decir simplemente que:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha\beta) &= \alpha(1+\beta) + 1 + \beta = 1 + \alpha\beta + \beta + \alpha \\ &= \beta(1+\alpha) + (1+\alpha) = 1 + \alpha\beta + \beta + \alpha\end{aligned}$$

Visto esto, tiene un poco más de interés el otro caso, pero como vimos no cumple con la conmutatividad.

En el párrafo 2 tampoco se aclara cómo deben ser α y β. No en este momento, pero eventualmente nos enteraremos de que han de ser primos. Bajo el supuesto de que lo son, las identidades de Waring se cumplirán tal y como él las enuncia, lo cual veremos con más detalle en notas posteriores.

¿Qué se puede decir de un caso diferente al anterior?.¿Cómo pueden ser α y β?. Afirmamos que pueden ser no primos siempre y cuando sean primos relativos. Hay sin embargo, una modificación que debe hacerse a la proposición, y es en el siguiente sentido: como puede notarse en la identidad, en la segunda suma de la parte derecha de la igualdad (en la sigma) Waring pide que *d* sea divisor de β. Esto no basta para el caso que nos ocupará a continuación. En él veremos que es necesario que *d* sea divisor del producto $\alpha\beta$, y es necesaria esta modificación para que la igualdad se mantenga.

Sean entonces α y β primos relativos. O bien, digamos que su máximo común divisor es 1, es decir, (α , β) = 1.

Supongamos que no son primos, entonces, por el teorema fundamental de la aritmética, su descomposición en potencias de primos:

$$\alpha = p_1^{\phi} p_2^{\phi_2} .....p_n^{\phi_n} .$$

$$\beta = q_1^{\varepsilon} q_2^{\varepsilon_2} ....q_m^{\varepsilon_m} l^{\delta}$$

Los divisores de cada uno serán por supuesto el 1 en ambos casos, y en el de α además $p_1, p_1^2, ...p_1^{\phi}, p_2, p_2^2, ...p_2^{\phi_2}, ..., p_n, p_n^2, ..., p_n^{\phi_n}$, y los productos entre ellos, por lo tanto, la manera de ver a la suma de divisores de α será como el producto de las sumas de cada conjunto de divisores, y lo mismo para las *q* que componen a β (sin olvidar que hay una potencia de un factor l). Por lo tanto la suma de divisores de $\alpha\beta$ tendrá que estar dada por el siguiente producto:

$$\begin{aligned} S(\alpha\beta) = {} & (1+ p_1 + p_1^2 + ...+ p_1^{\phi})(1+ p_2 + p_2^2 + ...+ p_2^{\phi_2}) ... \ (1+ p_n + p_n^2 + ...+ p_n^{\phi_n}) \\ & (1+ q_1 + q_1^2 + ...+ q_1^{\varphi_1})(1+ q_2 + q_2^2 + ...+ q_2^{\varphi_2}) \ ... \ (1+ q_m + q_m^2 + ...+ q_m^{\varphi_m}) \\ & (1+ l + l^2 + ...+ l^{\delta}). \end{aligned}$$

Tomemos primero los productos de *p*. Si expandimos el producto y abreviamos el proceso al límite de sólo expresar el resultado tenemos que:

$$(1+ p_1 p_2 \ ... \ p_n + ...+ p_1^{\phi} p_2^{\phi_2} ...p_n^{\phi_n}) = (1+ p_1 p_2 \ ... \ p_n + ...+ \alpha)$$

Ahora consideremos a la expansión del producto correspondiente a β. Resultaría algo así como:

$$\begin{aligned} & 1+ q_1 q_2 ...q_m + q_1 q_3 ...q_m + q_2 q_3 ...q_m + ...+ q_1 q_2^2 q_3^2 ...q_m^2 + ...+ q_1 q_2 q_2^3 ...q_m^4 + etc...+ q_1 l + q_1 l^2 + ... \\ & q_1 q_2 l + ...+ q_1^{\phi} q_2^{\phi_2} ....q_m^{\phi_m} l^{\delta} . \end{aligned}$$

Sin seguir ningún orden y abreviando lo más posible. La anterior es la suma de divisores de β que podemos dividir entre los que contienen un factor l y los que no lo contienen. Si quisiéramos referirnos a la suma de divisores de β los cuales fueran también divisibles por l tendríamos que suprimir todos aquellos que no contienen al factor l. Más aún, consideremos que α no contiene factores l pues α es primo relativo con β. Ahora, si quisiéramos obtener sólo la suma de divisores —que son múltiplos de l— del producto $\alpha\beta$, denotada por $S^l(\alpha\beta)$, podemos entonces deducir que:

$$
\begin{aligned}
S^l(\alpha\beta) &= (1+p_1p_2...p_n+...+\alpha)\ (q_1l+q_1l^2+...\ q_1q_2l+...+q_1^{\phi}q_2^{\phi_2}...q_m^{\phi_m}l^{\delta}) \\
&= (1+p_1p_2...p_n+...+\alpha)\ S^l(\beta) \\
&= \alpha S^l(\beta)+\ (q_1l+q_1l^2+...\ q_1q_2l+...+q_1^{\phi}q_2^{\phi_2}...q_m^{\phi_m}l^{\delta})(1+p_1p_2...p_n+...) \\
&= \alpha S^l(\beta)+\ q_1l+p_1p_2q_1l+...+p_1p_2q_1l^2+...+p_1p_2...p_n\ q_1q_2l^{\delta}+...
\end{aligned}
$$

Ahora, los productos resultantes son, como puede verse, múltiplos de l. Contienen también divisores de β puesto que incluyen miembros de la descomposición de β en potencias de primos y, además, no divisibles por α, pues contienen miembros de la descomposición en primos de α, pero sin que aparezca ya la descomposición completa (α misma), la cual quedó como factor de $S^l(\alpha\beta)$. Así, tales miembros son divisores de α sin ser divisibles por α. Con todas las características enunciadas la proposición quedaría así:

$$S^l(\alpha\beta)=\alpha S^l(\beta)+\sum_{\substack{d/\alpha\beta \\ l/d \\ \alpha\nmid d}} d$$

No es, a pesar de todo, exactamente la identidad propuesta por Waring. Waring solamente pide que *d* sea divisor de β, lo cual no basta por las razones que acabamos de ver. Gracias a la construcción que hicimos para la obtención de la suma de divisores pudimos apreciar que, en efecto, es un requisito ineludible que *d* sea divisor del producto en el caso en que α y β sean primos relativos, por lo que esta modificación es necesaria para que la igualdad se cumpla.

Si considerásemos que, en el mismo caso, fuese ahora α quien contiene los factores l, un razonamiento análogo nos llevaría a que :

$$S^l(\alpha\beta)=\beta S^l(\alpha)+\sum_{\substack{d/\alpha\beta \\ l/d \\ \beta\nmid d}} d = S^l(\beta\alpha)$$

Es decir, que la suma conmuta. A esta conmutatividad es a la que seguramente se refiere el párrafo con el "= &c" que, por otra parte, adolece de la misma ambigüedad que el párrafo primero, pues parece que se lee "α=&c", lo cual es incorrecto.

Es necesario aclarar que esta conmutatividad se cumple sólo en el caso en que los dos factores son primos relativos. Veamos el siguiente ejemplo numérico:

$$S^3(4\cdot 6) = 4(3+6)+(3+6) = 4(9)+9 = 45 = S^3(24)$$

Pero en cambio:

$S^3(6\cdot 4) = 6(0)+0$ ya que no hay divisores de 4 que sean divisibles por 3. El resultado es cero, que obviamente no es igual al anterior a pesar de que ambas expresiones representan la suma de divisores de 24 divisibles por 3.

OTRA VÍA

Otra manera de verlo es manejando los conceptos como conjuntos. Partiendo del hecho de que todas las cantidades manejadas son números naturales y usando las mismas hipótesis, tomemos entonces el conjunto:

$$A = \{d \mid d/\alpha\beta\}$$

De este conjunto A podemos tomar el conjunto de los *d* tales que estos *d* son múltiplos de l. Es decir, un subconjunto A´ de A (que incluso puede ser igual a A si todos los d en A son múltiplos de l) descrito como sigue:

$$A' \subseteq A \quad \text{donde} \quad A' = \{d \mid d/\alpha\beta \ \text{ y } \ l/d\}$$

De este conjunto A´ podemos describir otros dos conjuntos tales que la unión de estos dos conjuntos es el conjunto A´. Sean:

$$B = \{d \mid d/\alpha\beta\ ,\ l/d \ \text{ y } \ \alpha/d\} \quad \text{y}$$
$$C = \{d \mid d/\alpha\beta\ ,\ l/d \ \text{ y } \ \alpha \nmid d\}$$

Dicho de otro modo, los elementos de A´ se pueden clasificar en aquellos que cumplen cierta propiedad (dentro de A´) y los que no.

Por lo tanto A´= B **U** C.

Por lo tanto, $\sum a = (\sum b) + (\sum c)$. Es decir, la suma de todos los elementos de A´ es igual a la suma de todos los elementos de B más la suma de todos los elementos de C.

Ahora veamos cómo tendrían que ser los elementos de B. Tendrían al menos que estar compuestos por un factor α, es decir, tendrían que ser múltiplos de α. Por supuesto también tendrían que serlo de l para que se cumplieran ambas propiedades. Por lo tanto, un elemento *b* de B tendría que ser de la forma:

$$b = \alpha l r \quad \text{donde } r \text{ es también un natural.}$$

De manera que los elementos de B (que no es un conjunto vacío porque por lo menos 1, l y α deben estar), son de la forma:

$$\alpha(lr),\ \alpha(ls),\ \alpha(lt),\ \ldots,\ \alpha(l\zeta),\ \ldots$$

Ahora efectuemos la suma de todos estos elementos:

$$\alpha(lr)+\alpha(ls)+\alpha(lt)+\ldots+\alpha(l\zeta)+\ldots = \alpha(lr+ls+lt+\ldots+l\zeta+\ldots)$$

Es tiempo de recuperar una de las hipótesis del planteamiento. Recuérdese que α y β eran primos relativos (o sea sin factores comunes) y que era β quien contenía los factores l. Salta a la vista entonces que lo que está encerrado en el paréntesis es la suma de los divisores de β que a su vez son divisibles por l, de manera que

$$\alpha(lr+ls+lt+\ldots.+l\zeta+\ldots) = \alpha\ S^{l}(\beta),$$ por lo tanto

$$\alpha\sum b=\alpha S^{l}(\beta).$$

Recordemos que C se definió como:

$$C = \{\ d \mid d\ /\ \alpha\beta\ ,\ l\ /\ d\ \text{ y } \alpha \not\backslash\ d\ \}$$

Por lo que no hay gran cosa que hacer. Por la definición

$$\sum c=\sum_{\substack{d/\alpha\beta\\ l/d\\ \alpha\not\backslash d}} d$$

Después de todo, $\sum a=S^{l}(\alpha\beta)$, por lo que, finalmente

$$S^{l}(\alpha\beta)=\alpha S^{l}(\beta)+\sum_{\substack{d/\alpha\beta\\ l/d\\ \alpha\not\backslash d.}} d$$

Hay que hacer la observación de que la suma anterior fue un resultado de la división natural del conjunto A´ en otros dos conjuntos. No hubo que aclarar que α y β fueran primos relativos. La diferencia con la construcción anteriormente hecha es que en la construcción observábamos que el no poseer factores obligaba a *d* a dividir al producto porque se encontraba con factores de la descomposición en primos de ambos, y todos ellos ajenos. Se trataba de una implicación simple, en un sólo sentido. Al tratar el asunto con conjuntos, podemos obtener subconjuntos que representarían los casos particulares. Por ejemplo, supongamos que α y β no sólo no son primos relativos sino que α es estrictamente menor que β y además α divide a β. Entonces todos los divisores de α están contenidos en β, es decir, pertenecen al conjunto de divisores de β (α incluida).

Ahora, si pedimos los divisores de $\alpha\beta$ tales que α no los divida, entonces descartamos a α — pues no es posible que un número se divida y no se divida a sí mismo al mismo tiempo — y a todas sus potencias; quedan entonces los divisores menores que α, los cuales, como vimos, están contenidos en β. Son divisores de β, luego entonces dividen al producto. Esto quiere decir entonces que:

$$C = \{ d \mid d / \alpha\beta \ , \ l / d \ \text{y} \ \alpha \nmid d \} = \{ d \mid d / \beta \ , \ l / d \ \text{y} \ \alpha \nmid d \}$$

Que es la propiedad enunciada por Waring.

En el párrafo 3 lo que se establece es la generalidad de la proposición del párrafo 1. No hay que buscar en otras partes del artículo una muestra más clara de las inconveniencias de una redacción y simbología inapropiadas. Ajustándola a nuestro actual manejo de notación, pero respetando la *S* de la suma, el enunciado puede leerse de la siguiente manera:

$$S(\alpha\beta\gamma\delta...) = \alpha S(\beta\gamma\delta\varepsilon...) + \sum_{\substack{d/\beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha\nmid d}} d$$

$$= \alpha\beta S(\gamma\delta\varepsilon...) + \sum_{\substack{d/\beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha\nmid d}} d \ + \ \alpha \sum_{\substack{d/\gamma\delta\varepsilon.... \\ \beta\nmid d}} d$$

$$= \alpha\beta\gamma S(\delta\varepsilon...) + \sum_{\substack{d/\beta\gamma\delta\varepsilon.... \\ \alpha\nmid d}} d \ + \ \alpha \sum_{\substack{d/\gamma\delta\varepsilon... \\ \beta\nmid d}} d \ + \ \alpha\beta \sum_{\substack{d/\delta\varepsilon... \\ \gamma\nmid d}} d$$

$$= \alpha\beta\gamma\delta S(\varepsilon...) + \sum_{\substack{d/\beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha\nmid d}} d \ + \ \alpha \sum_{\substack{d/\gamma\delta\varepsilon... \\ \beta\nmid d}} d \ + \ \alpha\beta \sum_{\substack{d/\delta\varepsilon... \\ \gamma\nmid d}} d \ + \ \alpha\beta\gamma \sum_{\substack{d/\varepsilon... \\ \delta\nmid d}} d$$

$$= ...$$

" La ley de la serie es manifiesta". Una vez puesto de la forma anterior se ve claramente que hay un patrón al que se sujeta la suma de divisores. Menos claro es que las identidades se cumplan para cualquier caso. Esto no va a ser así. Finalmente se nos aclara cómo deben ser las "letras" (números) en los últimos dos renglones de dicho párrafo.

En ellos se lee lo siguiente:

"Las letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ las cuales no están contenidas entre los paréntesis, denotan números primos".

Pero $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ sí están contenidas en el paréntesis de la suma original, ¿a cuáles entonces se refiere Waring?. Lo que en realidad dice el párrafo es que las letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números primos así como aquéllas que no aparecen en el paréntesis porque se sustituyeron por el &c. Todas las letras — las que aparecen y las que no — son números primos.

Bien, ya se nos aclaró que todas las letras son números primos. ¿Qué caso tiene entonces formular de manera tan elaborada la suma selectiva del inciso 2? Si β es primo entonces sus únicos divisores son 1 y él mismo. Si $l=1$ entonces es claro que $S^{l}(\alpha\beta)=S(\alpha\beta)$ y estaríamos en el caso anterior, el cual se cumple porque

$$S(\alpha\beta)=\alpha S(\beta)+(1+\beta)=\alpha S^{1}(\beta)+\sum_{\substack{d/\beta\\ 1/d\\ \alpha\nmid d}} d=S^{1}(\alpha\beta).$$

Por otra parte, si $l=\beta$ entonces los divisores del producto divisibles por β son los de forma α por los divisores de β, más los divisores de β que α obviamente no va a dividir porque ambos son primos, es decir

$$S^{\beta}(\alpha\beta)=\alpha S^{\beta}(\beta)+\sum_{\substack{d/\beta\\ \beta/\beta\\ \alpha\nmid d}} d=\alpha\beta+\beta.$$

Como se ve, son dos casos triviales, por lo que no se entiende una formulación tan compleja para ellos. Una explicación es que el autor no estaba pensando solamente en primos y se olvidó de decirlo. También puede ser que haya guardado la mención para más adelante. Regresaremos a esto en la última parte de este análisis.

Por lo pronto, debemos decir que el considerar otros casos y tratar de demostrarlos con las identidades de las que se ocupa el presente párrafo, sería muy laborioso y volvería extraordinariamente extenso el trabajo, por lo que nos limitaremos a demostrar las dos primeras igualdades considerando que los factores son todos primos. De cualquier forma, la mecánica de la demostración ya ha sido mostrada.

Tomemos pues la primera suma:

$$\begin{aligned}S(\alpha\beta\gamma\delta...)&=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...\\&=\alpha[(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...]+[(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...]\\&=\alpha S(\beta\gamma\delta...)+[(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...]\end{aligned}$$

Todo lo anterior ya lo habíamos hecho antes, aquí quizá lo único novedoso es la forma de escribir el último miembro de la parte derecha. Representa, en efecto, nuevamente a $S(\beta\gamma\delta...)$, pero en lugar de escribirlo de esa manera pensemos que al desarrollar el producto múltiple tendremos

$$1+\beta+\gamma+\delta+...+\beta\gamma+\beta\delta+...+\beta\gamma\delta+...$$

Es decir, los productos de todos contra todos. Sabemos cuáles van a ser y cuántos van a ser.[30] Pero para nuestro análisis nos basta saber que entre todos esos productos, cada uno de los cuales divide al producto de todas las letras, no hay ningún factor α, pues ésta última fue extraída en el primer desarrollo. Al no haber ningún α en ellos y al ser todos números primos o productos de primos, es claro que α no dividirá a ninguno de esos divisores.

Por lo tanto, una manera de escribir su suma es precisamente:

$$\sum_{\substack{d / \beta\gamma\delta\varepsilon.... \\ \alpha \nmid d}} d$$

De donde:

$$S(\alpha\beta\gamma\delta...) = \alpha S(\beta\gamma\delta\varepsilon...) + \sum_{\substack{d / \beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha \nmid d}} d$$

Que es la primer igualdad.

Ahora vamos con la segunda

$$S(\alpha\beta\gamma\delta...) = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\,...$$

Desarrollando el primer binomio se obtiene

$$= [(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...] + \alpha(1+\beta)[(1+\gamma)(1+\delta)...]$$
$$= [(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...] + \alpha[(1+\gamma)(1+\delta)...] + \alpha\beta[(1+\gamma)(1+\delta)...]$$

Lo encerrado entre corchetes ya lo conocemos. En el primer corchete está encerrada la suma de los divisores del producto $\beta\gamma\delta\varepsilon...$, que al no tener un factor α tampoco tendrá divisores que a su vez sean divisibles por α.

En el segundo corchete tenemos a la suma de divisores del producto $\gamma\delta\varepsilon...$ que al no tener un factor β tampoco tendrá divisores que sean al mismo tiempo divisibles por β. Tampoco contiene ningún factor α, pero el que está fuera del corchete afecta de manera que sus divisores sí serán divisibles por ella.

Por último, en el tercer corchete está la suma de los divisores del producto $\gamma\delta\varepsilon...$ para la que usaremos la notación $S(\gamma\delta\varepsilon...)$.Para los otros dos casos, como en los ejemplos anteriores, será cuestión de un ajuste en las denominaciones, por lo tanto

---

[30] Supongamos que hubiera *n* letras. Entonces habrá tantos divisores como combinaciones (productos) haya de *n* objetos (letras) en *r* lugares (desde 1 hasta *n*) Esto es:

Cantidad de sumandos (divisores) = $(\frac{n}{r})$, donde $(\frac{n}{r}) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $r \le n$

$$S(\alpha\beta\gamma\delta...) = [(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)...] + \alpha[(1+\gamma)(1+\delta)...] + \alpha\beta[(1+\gamma)(1+\delta)...]$$

$$= \sum_{\substack{d\,/\,\beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha \nmid d}} d + \alpha \sum_{\substack{d\,/\,\gamma\delta\varepsilon... \\ \beta \nmid d}} d + \alpha\beta S(\gamma\delta\varepsilon...)$$

$$= \alpha\beta S(\gamma\delta\varepsilon...) + \sum_{\substack{d\,/\,\beta\gamma\delta\varepsilon... \\ \alpha \nmid d}} d + \alpha \sum_{\substack{d\,/\,\gamma\delta\varepsilon... \\ \beta \nmid d}} d$$

que es la segunda igualdad.

Huelga decir que el razonamiento y el procedimiento serán los mismos para los casos restantes, por lo que es suficiente con los dos anteriores para comprender el contenido del párrafo.

En el corolario que acompaña a esta parte —y que es el último del artículo— se considera finalmente la variedad de casos con respecto a cómo deben ser los números involucrados. Hablar de la sustitución de unas letras por otras no es más que decir que en lugar de que todas sean números primos alguna de ellas puede no serlo, o no serlo ninguna pero sí ser primos relativos, etc.

Ahora tiene más sentido hablar del párrafo 2, donde como vimos tenía poca gracia considerar una suma selectiva con números primos. "Las ecuaciones resultantes serán justas" es una manera extraña de decir que son equivalentes o que se siguen cumpliendo con las respectivas adecuaciones. Ejemplo de esto es la introducida en la igualdad del ya mencionado párrafo 2, en el que consideramos a los factores primos relativos.

Considerar que "muchas nuevas ecuaciones pueden ser deducidas" es abrir la puerta a todos los resultados que pueden obtenerse tomando en cuenta todos los casos. Lo mismo en lo referente a considerar una suma selectiva en lugar de la general. Esto apunta a que queda mucho por hacer en este terreno y el trabajo de Waring es sólo el comienzo.

CONCLUSIONES

En principio, se puede afirmar que la principal aportación de Edward Waring en el caso del artículo que analizamos es la de abordar temas elusivos dentro de la teoría de números, por ejemplo, la relación entre la suma selectiva de divisores de un número natural y las potencias de las raíces del polinomio generador asociado con el conjunto de enteros seleccionados. Además, de manera intrínseca vincula los anteriores resultados con las particiones de un entero, extraídas del polinomio generador, antes mencionado.

Cabe mencionar que, por sí sola, la suma selectiva de divisores ya era un punto poco explorado, y al respecto Edward Waring pretende arrojar luz sobre este tema enunciando las propiedades que hemos estudiado. Su intento tiene mérito y originalidad, pero también tiene sus contrariedades que no son menores.

El artículo de Waring estudiado en la tesis recurre permanentemente a los trabajos de Euler en lo que corresponde al teorema de los números pentagonales, la teoría de particiones y la suma de divisores. El hecho de estudiar el artículo de Waring a través de los trabajos de Euler resultó muy enriquecedor, ya que por un lado se logró aclarar cuál era el contexto matemático del artículo dentro del siglo XVIII, y por el otro, conocer las aportaciones de Euler a estos temas.

Es importante señalar que la igualdad entre la suma selectiva de los divisores y la suma de potencias de raíces del polinomio generador asociado, aún no se ha demostrado. Como vimos en el trabajo, el problema de esta suma de potencias de raíces fue tratado por Newton y Girard —entre otros— como un problema aparte. El mismo Waring también lo estudió y llegó a resultados algo complejos en su formulación, los cuales aparecen en sus *Meditationes*. Establecer esa relación entre dos problemas tan aparentemente ajenos, es un rasgo más de su originalidad. Sin embargo, como ya se señaló, la igualdad mencionada es un problema abierto hasta la fecha.

APÉNDICES

Apéndice 0

Suma de divisores de un número *n*

a) Teorema

Sea p_i un número primo $\leq n$, con $n \in \mathrm{N}$

Si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, —descompuesto en potencias de primos— entonces la fórmula canónica para la suma de los divisores de un entero positivo está dada por:

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}\right)$$

b) Teorema (Euler)

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) - \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) + \ldots$$
$$+ (-1)^{k+1}[\sigma(n - \frac{3k^2+k}{2}) + \sigma(n - \frac{3k^2+k}{2})]$$

donde $\sigma(k) = 0$ si $k < 0$ y $\sigma(0) = k$.

Apéndice I

Coeficientes y raíces de un polinomio mónico.

(a) Dada la ecuación

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + ... + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

en donde el coeficiente de la potencia mayor es 1 y cuyas raíces son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$, dicha ecuación puede también expresarse como

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - ... + (-1)^{n-1} S_{n-1} x + (-1)^n S_n$$

donde:

$-p_1 = S_1 =$ la suma de las raíces

$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + ... + \alpha_n$

$p_2 = S_2 =$ la suma de los productos de las raíces tomadas de dos en dos;

$= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + ...$

$-p_3 = S_3 =$ la suma de los productos de las raíces tomadas de tres en tres;

$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ...$

....

$(-1)^n p_n = S_n =$ el producto de las raíces

$= \alpha_1\alpha_2 .....\alpha_n$.

Como ejemplo de lo anterior, tomemos la ecuación propuesta hasta n = 3 (en este caso a *n* del grado del polinomio la llamaremos *b*, que será igual a la suma de los primeros n números naturales, esto es, *b* = 1+2+3 =6.

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$$

las raíces de esta ecuación son:

$1, 1 - 1, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, por lo tanto

$$-p_1 = S_1 = 1 + 1 + (-1) + 1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2} i) + (-\frac{\sqrt{3}}{2} i) = 3 - 2 = 1$$

$$p_2 = S_2 = (1)(1) + (1)(-1) + (1)(1) + (1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (1)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (-1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (1)(-1)$$

$$+ (1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (1)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (-1)(1) + (-1)(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i) + (-1)(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i)$$

$$+(1)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(1)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1-1+1-1-1+1-1-1+1$$

$$-1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-1$$

$$-p_3=S_3=-1+1+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-1-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$=-1-1+1+1=0$$

$$p_4=S_4=-1-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-1+1+1=-1$$

$$-p_5=S_5=-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$p_6=S_6=-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-(\frac{1}{4}-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2i^2)=-(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})=-1$$

en conclusión:

$$\begin{array}{ll} S_1=1 & S_4=-1 \\ S_2=-1 & S_5=1 \\ S_3=0 & S_6=-1 \end{array}$$

En este caso, el contar con una raíz –1 facilita las cosas, pues muchos términos quedan eliminados.

Lo anterior nos remite al concepto de función simétrica. El símbolo $S_n(m)$ denota la función simétrica elemental de orden m. Por ejemplo, si tenemos a, b, c, d, cuatro cantidades en el papel que cumplían las raíces en el caso anterior, entonces:

$S_4(1)$ = a + b + c + d
$S_4(2)$ = ab + ac + ad + bc + bd + cd
$S_4(3)$ = abc + abd + acd + bcd
$S_4(4)$ = abcd

Ahora, como se puede deducir de lo anterior, $S_n(r)$ es la suma de todos los productos (combinaciones) de n cantidades (objetos) tomadas en r lugares. Hay tantos productos como combinaciones de n términos en r lugares haya, de aquí que, usando la notación de cálculo combinatorio:

$S_n(r)$ es la suma de $(\frac{n}{r})$ términos, donde $(\frac{n}{r})=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

En el caso del polinomio, la notación se modificó de manera que $S_n(r)$ quedó como simplemente S_r, y n el número de raíces incluyendo su multiplicidad. Ahora, si llamamos C_1, C_2, C_3,... a cada una de las combinaciones formadas (o productos de las raíces), entonces podemos formalizar un poco más diciendo que:

$$S_i = \sum_{i=1}^{\binom{n}{r}} C_i \qquad \text{donde } 1 \le r \le n$$

Regresando a nuestro ejemplo inicial, si hacemos $S_1 = p$, $S_2 = q$, $S_3 = r$, $S_4 = s$, etc. tenemos entonces en la expresión de Waring en el caso n = 3, b = 6, que

$$x^b - px^{b-1} + qx^{b-2} - rx^{b-3} - \&c. = x^6 - S_1x^5 + S_2x^4 - S_3x^3 + S_4x^2 - S_5x + S_6$$
$$= x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2-1)(x^3-1),$$

con lo cual se cumple la regla.

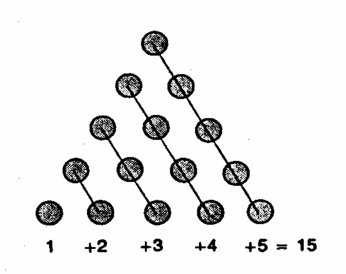
Apéndice 2

Números poligonales [1]

Los números poligonales son números enteros no negativos que podemos construir geométricamente a partir de los polígonos regulares. Los números poligonales se obtienen de progresiones aritméticas que empiezan con el 1, por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

La serie anterior nos da el quinto número triangular que es el 15. Geométricamente lo construimos así:



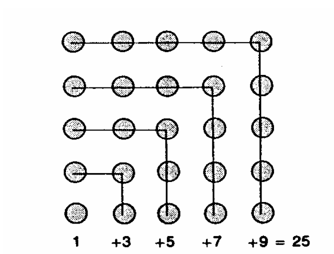
Como en el ejemplo, la suma de los primeros *n* números naturales nos da el *n*-ésimo número triangular, por lo tanto, éste tiene la forma:

$$n\text{-ésimo número triangular} = \frac{n(n+1)}{2}$$

De manera similar, cada número cuadrado está generado por la progresión:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$$

Como por ejemplo:



Esta figura es el arreglo geométrico del número 25, que es el quinto número cuadrado.

Es fácil ver que la suma de dos números triangulares consecutivos nos da un número cuadrado:

$$\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1+n-1)}{2} = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

[1] Los números poligonales (o figurados, como también se les conoce) han sido estudiados por lo menos desde la época de Pitágoras (circa 540 a.C.)

Es decir, la suma del *n*-ésimo número triangular y el anterior a él, nos da el *n*-ésimo número cuadrado.

Las siguientes progresiones también generan números poligonales:

1 + 4 + 7 + 10 + 13 +... genera números pentagonales.

1 + 5 + 9 + 13 + 17 +... genera números hexagonales.

1 + 6 + 11 + 16 + 21 +... genera números heptagonales.

Algebraicamente, para toda $m \geq 1$, el k -ésimo número poligonal de orden *m* + 2, denotado como $p_m(k)$, es la suma de los primeros *k* términos de la progresión aritmética con valor inicial 1 y diferencia *m*, esto es:

$$\begin{aligned} p_m(k) &= 1 + (m+1) + (2m+1) + ... + ((k-1)m+1) \\ &= \frac{mk(k-1)}{2} + k. \end{aligned}$$

En las series correspondientes a los triangulares, los cuadrados y los pentagonales, por ejemplo, las diferencias entre los términos son 1, 2 y 3 respectivamente. La fórmula para cada tipo de número es la siguiente:

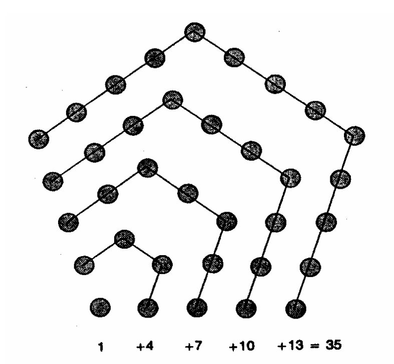
Triangulares: $p_1(k) = \frac{k(k+1)}{2}$,

Cuadrados: $p_2(k) = k^2$,

Pentagonales: $p_3(k) = \frac{k(3k-1)}{2}$,

Y así podemos ir describiendo cada uno de los números poligonales.

La secuencia de los números pentagonales es 0, 1, 5, 12, 22, 35,... Como números figurados, los pentagonales sólo pueden generarse con una diferencia en el numerador, lo cual nos da el siguiente arreglo geométrico:



Apéndice 3

Suma de potencias.

a) *La suma de las potencias m-ésimas de cada una de las raíces de la ecuación A = 0 será S(m), donde S(m) denota la suma de todos los divisores del número m, siempre que m no sea mayor que n*

Supóngase que α_1, α_2, α_3,... α_n son las n raíces de A = 0, donde n es el exponente más grande en la factorización de A, y sea un número m tal que m $\leq$ n, entonces:

$$\alpha_1^m + \alpha_2^m + \alpha_3^m + ... + \alpha_n^m = \sigma(m)$$

(Usando la notación actual para la suma de divisores)

Veamos un ejemplo numérico de la proposición anterior:

$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)=0$ cuyas raíces son:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -1,\ \alpha_4 = 1,\ \alpha_5 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \alpha_6 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \alpha_7 = 1,\ \alpha_8 = -1,$$

$$\alpha_9 = \sqrt{-1},\ \alpha_{10} = -\sqrt{-1},\ \alpha_{11} = 1,\ \alpha_{12} = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\alpha_{13} = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\alpha_{14} = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}, \alpha_{15} = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nótese que tomaremos <u>todas</u> las raíces, (quince en total) aún cuando las haya de multiplicidad mayor que uno.

Tomemos m<n. Como en este caso n = 5, tomaremos m = 4. Como los divisores de 4 son 1, 2 y el mismo cuatro, su suma es 7, por lo tanto S(m) = 7. Lo que la proposición plantea es que:

$$\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4 + ... + \alpha_{15}^4 = 7.$$

Ahora:

$$\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4+\alpha_4^4+\alpha_7^4+\alpha_8^4+\alpha_9^4+\alpha_{10}^4+\alpha_{11}^4 = 1+1+(-1)^4+1+1+(-1)^4+(\sqrt{-1})^4$$
$$+(-\sqrt{-1})^4+1 = 7+1+1 = 9$$

Por otra parte, como α_5 y α_6 son raíces cúbicas de 1, entonces:

$$\alpha_5^4+\alpha_6^4=(\alpha_5^3)\alpha_5+(\alpha_6^3)\alpha_6=(1)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(1)(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$$

Y como de igual forma, $\alpha_{12},\alpha_{13},\alpha_{14},\alpha_{15}$ son raíces quintas de 1, entonces:

$$\alpha_{12}^4+\alpha_{13}^4+\alpha_{14}^4+\alpha_{15}^4=\frac{1}{\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}}$$

Y simplificando:

$$\alpha_{12}+\alpha_{13}=(\frac{-1-\sqrt{5}}{4})+(\frac{-1-\sqrt{5}}{4})=(\frac{-2-2\sqrt{5}}{4})=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

y $\alpha_{14}+\alpha_{15}=(\frac{-1+\sqrt{5}}{4})+(\frac{-1+\sqrt{5}}{4})=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$

luego entonces $\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1$

Por lo tanto $\alpha_{12}^4+\alpha_{13}^4+\alpha_{14}^4+\alpha_{15}^4=\frac{1}{-1}=-1$

de donde, juntando todos los términos

$$\alpha_1^4+\alpha_2^4+.....+\alpha_{15}^4=9-1-1=7$$

Siguiendo con el mismo ejemplo:

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1)=x^{15}-x^{14}-x^{13}+x^{10}+x^9+x^8-x^7-x^6-x^5$$
$$+x^2+x-1$$

Tomando las cuentas que se habían hecho para este ejercicio, notamos que en efecto

$$s_1=\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_{15}=1+1-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1-1+\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$+\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$=1=-(-1)=-p_1$$

puesto que –1 es, como podemos ver, el coeficiente que acompaña al término de exponente 14.

Ahora, tomando los coeficientes del polinomio y retomando la notación usada en el apéndice 1, enlistaremos los valores de cada p:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p = -1 \\
p_2 &= q = -1 \\
p_3 &= -r = 0 \\
p_4 &= s = 0
\end{aligned}
$$

Y obtendremos los valores de cada *s* según la regla de las identidades:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -p_1 = 1 \\
s_2 &= -p_1 s_1 - 2p_2 = (1)(1) - 2(-1) = 1 + 2 = 3 \\
s_3 &= -p_1 s_2 - p_2 s_1 - 3p_3 = (1)(3) - (-1)(1) - 3(0) = 3 + 1 = 4 \\
s_4 &= -p_1 s_3 - p_2 s_2 - p_3 s_1 - 4p_4 = (1)(4) - (-1)(3) - (0)(1) - 4(0) = 4 + 3 = 7
\end{aligned}
$$

Como puede notarse, cada s_j tiene el valor que corresponde a la suma de divisores de *j*, por lo que bien podría escribirse cada una de ellas como *S(j)*, siguiendo la notación usada por Waring.

No está de más resaltar el hecho de que el polinomio de Waring es un caso particular del teorema anterior pero en el que se considera una restricción más. Supóngase que hubiéramos tomado el producto de los tres primeros binomios de la factorización del polinomio. Es decir:

$$(x-1)(x^2-1)(x^3-1) = x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$$

La condición en el teorema de Newton es que $p_k = 0$ si $k > n$. Como en este caso el grado del polinomio es seis, y 6 > 4, entonces tiene sentido hallar p_4. Consecuentemente tendrá sentido hallar s_4. Sin embargo, al hacer las cuentas nos encontraremos que si bien $s_1 = 1$, $s_2 = 3$ y $s_3 = 4$ como corresponde en cada caso, en el de s_4 el resultado es 3. ¿Por qué falla el teorema en este caso?. La razón es muy sencilla.

El teorema no falla. Hay que recordar que en el polinomio de Waring, la *n* no se refiere al grado del polinomio <u>sino al exponente más alto</u> en los binomios de la factorización. En este caso es tres. La *k* elegida (que en el artículo se denota con *m*) evidentemente lo excede. La condición de Waring es: siempre que *m* no sea más grande que *n*. He aquí la causa de la confusión.

Por último, piénsese en lo siguiente. Si tomamos una *n* no tan pequeña, digamos igual a 100, entonces el grado del polinomio será igual a (n(n+1)/2) = (100(101)/2) = 5050. Es decir, tendremos 5050 raíces. Tómense los cubos de todas ellas (si acaso fuera posible) y súmense. Posible o no, el resultado es 4.

Increíble, ¿no?. El alcance del teorema salta a la vista. Es claro que por el método recursivo de Newton el trabajo sería imposible. De aquí la importancia de poder dar una demostración del resultado de Waring y, por ende, de abordar su trabajo, como lo explicamos en la introducción de esta tesis.

Identidades de Newton.

b) Dado el polinomio $f(t) = t^n + p_1 t^{n-1} + p_2 t^{n-2} + ... + p_{n-1} t + p_n$
$= (t - x_1)(t - x_2).....(t - x_n)$

tomemos el logaritmo natural de *f(t)*

$$\ln(f(t)) = \ln((t - x_1)(t - x_2)...(t - x_n) = \ln(t - x_1) + \ln(t - x_2) + ... + \ln(t - x_n)$$

y su derivada

$$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = \frac{d(\ln f(t))}{df(t)} = \frac{1}{t - x_1} + \frac{1}{t - x_2} + ... + \frac{1}{t - x_n}$$

multiplicando por *t* nos da:

$$t\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{t}{t - x_1} + \frac{t}{t - x_2} + \ ... \ + \frac{t}{t - x_n} \qquad \text{------- (1)}$$

Ahora, expandiendo cada término de la derecha usando series geométricas se llega a que

$$\frac{t}{t - x_1} = \frac{1}{1 - \frac{x_i}{t}} = 1 + \frac{x_i}{t} + \frac{x_i^2}{t^2} + \frac{x_i^3}{t^3} + ...$$

Sumando cada serie:

$$\frac{t}{t - x_1} + \frac{t}{t - x_2} + \frac{t}{t - x_3} ... = 1 + \frac{x_1}{t} + \frac{x_1^2}{t^2} + \frac{x_1^3}{t^3} ... + 1 + \frac{x_2}{t} + \frac{x_2^2}{t^2} + \frac{x_2^3}{t^3} ...$$

y agrupando, vemos que la parte derecha de (1) es:

$$n + (x_1 + ... + x_n)\frac{1}{t} + (x_1^2 + ... + x_n^2)\frac{1}{t^2} + (x_1^3 + ... + x_n^3)\frac{1}{t^3} + ...$$

o, alternativamente (escribiendo $s_0 = n,\ s_1 = x_1 + ... + x_n,\ s_2 = x_1^2 + ... + x_n^2, etc.$)

$$t\frac{f'(t)}{f(t)} = s_0 + \frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t^2} + \frac{s_3}{t^3} + ...$$

Multiplicando (1) por *f(t)* nos da:

$$tf'(t) = (t^n + p_1 t^{n-1} + ... + p_n)(s_0 + \frac{s_1}{t} + \frac{s_2}{t^2} + ...) \qquad \text{------ (2)}$$

y multiplicando la parte derecha de (2) da lugar a la serie de potencias:

$$b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + ... + b_0 + b_{-1} t^{-1} + ...$$

donde

$$b_{n-j} = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_j s_0$$

Por otro lado, si derivamos $f(t)$ y multiplicamos por t obtenemos

$$tf'(t) = nt^n + (n-1) p_1 t^{n-1} + ... + p_{n-1} t$$

Lo anterior nos dice que el coeficiente de t^{n-j} en la derecha es $(n-j)p_j$ lo cual tiene sentido para toda $j > 0$ ya que establecimos que $p_j = 0$ para $j > n$. Finalmente, ya que estamos usando series de potencias, podemos igualar los coeficientes de t^{n-j} en ambos lados de (2) para obtener

$$(n-j)p_j = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_j s_0$$

Sustrayendo $(n-j)p_j$ de ambos lados de la ecuación queda

$$(n-j)p_j - (n-j)p_j = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_j s_0 - (n-j)p_j$$

y usando el hecho de que $s_0 = n$, lo anterior implica que

$$0 = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_j n - np_j + jp_j$$

Por lo tanto

$$0 = s_j + p_1 s_{j-1} + ... + p_{j-1} s_1 + jp_j$$

Y es así como hemos llegado a las identidades de Newton.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

Dickson, Leonard Eugene. 2005. *History of the Theory of Numbers*. Vol.II.. USA: Dover Publ.

Matarasso, Yuval. 2006. *Los problemas de Waring en la teoría aditiva de los números*. Tesis. México: Facultad de Ciencias, UNAM.

Nathanson, Melvyn. 1996. *Additive Number Theory. The Classical Bases.* Nueva York*:* Springer-Verlag.

Newton, Issac. 1728. *Arithmetica Universalis*. London.

Scott , J.F. 1976, *Dictionary of Scientific Biography*. Vol. XIV... pág. 179 -181

Tatersall, James J. 2005. *Number theory in Nine Lessons*.. Reino Unido: Cambridge University Press.

Waring, Edward. 1991. *Meditationes Algebraicae*. USA: American Mathematical Society.

Artículos

Bennett, A. A. 1932. *Problem 3553*. En: *Problems and Solutions*. The American Mathematical Monthly. Vol. 39, No. 5, pp 300-301.

Euler, Leonhard. 1750. *Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem.* (Una demostración de dos teoremas de Newton, por los cuales está dada la relación entre los coeficientes de una ecuación algebraica cualquiera y las sumas de las potencias de sus raíces). Publicado en: *Opuscula varii argumenti* 2, pp. 108-120

__________. 1751. *Découverte d´une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs.* Bibliothèque impartiale, 3, pp. 10-31.

__________. 1760. *Observatio de summis divisorum.* Publicado en: Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae. Pp. 59-74 Existe una traducción al inglés por Jordan Bell, 2004.

__________. 1760. *Demonstratio Theorematis Circa Ordinem In Summis Divisorum Observatum.* Publicado en: Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, pp. 75-83. Existe una traducción al inglés por: Jordan Bell, 2005.

__________. 1771. *Observationes circa radices aequationum* (Observaciones sobre las raíces de ecuaciones). Publicado en: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 15, pp. 51-74.

__________. 1783. *De Mirabilis Propietatibus Numerorum Pentagonalium*. Publicado en: *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae.* Pp. 56-75. Existe una traducción al inglés por: Jordan Bell, 2005.

__________. 1783, *Evolutio Producti Infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ *etc. in seriem simplicem.* Publicado en: *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*, pp. 47-55. Existe una traducción al inglés por Jordan Bell, 2004.

Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965. *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764*. Berlin: Akademie-Verlag

Powell, W. S. 1760. *Observations on the First Chapter of a book called Miscelanea Analytica.*. Londres: T. Merril.

The American Mathematical Monthly. *A Classification of Monthly Problems (1918-1950)*. Vol. 64, No. 7, p. 68.

Waring, Edward. 1788. *Some Properties of the Divisors of Numbers*. Londres: Philosophical Transaction, Royal Society. Volumen 78, pp 388-394.

Weil, André. 1974. ‘‘Two Lectures on Number Theory, Past and Present’’. *L'Enseigne-ment Mathématique*. 20: 87-110.