UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VARIACIONES ADMISIBLES EN CONTROL ÓPTIMO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A

ELIZABETH GARCILAZO BOTELLO

Tutor:

Dr. Javier Fernando Rosenblueth Laguette

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
   Garcilazo
   Botello
   Elizabeth
   56 18 78 95
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   096027659

2. Datos del tutor
   Dr.
   Javier Fernando
   Rosenblueth
   Laguette

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Ricardo
   Berlanga
   Zubiaga

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Luis Bernardo
   Morales
   Mendoza

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Rafael Rene
   Del Río
   Castillo

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Antonio
   Hernández
   Garduño

7. Datos del trabajo escrito
   Variaciones admisibles en control óptimo
   83 p
   2007

A ti Doctor

Siempre necesario, siempre querido

AGRADECIMIENTOS

A cada una de las personas que colaboraron conmigo de diversas formas.

Especialmente a mis amigas de la Universidad por su incondicional apoyo y presencia.

Muy especialmente al Doctor Javier Rosenblueth por su tiempo y dedicación.

Indice

Introducción

La teoría de condiciones necesarias de segundo orden en control óptimo ha recibido una atención considerable desde el trabajo inicial de Hestenes [5] y Warga [22]. Una gran cantidad de problemas, bajo diferentes hipótesis, se ha estudiado con éxito (ver, en particular, [1, 2, 4, 7, 10, 12, 13, 20, 23-25] y sus referencias). Sin embargo, problemas que involucran igualdades y desigualdades en las funciones de control presentan serias dificultades que impiden utilizar ciertas técnicas clásicas.

Con la idea de entender claramente los objetivos de este trabajo, veamos brevemente el problema que nos interesa, el cual consiste en minimizar

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t))dt$$

sobre todas las trayectorias suaves por fragmentos $x: T \to \mathbf{R}^n$ y controles continuos por fragmentos $u: T \to \mathbf{R}^m$ que satisfacen

a. $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ $(t \in T)$;

b. $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$;

c. $\varphi_\alpha(u(t)) \leq 0,\ \varphi_\beta(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ \beta \in Q,\ t \in T)$,

donde $T = [t_0, t_1]$, y R y Q son dos conjuntos disjuntos finitos de índices.

Condiciones de segundo orden para este problema se encuentran, por ejemplo, en [3, 7, 10, 12, 18, 19], pero las condiciones obtenidas son expresadas en términos de un conjunto de "variaciones admisibles" que puede proporcionar poca o ninguna información adicional a las condiciones de primer orden incluso bajo hipótesis de normalidad.

Para entender el tipo de condiciones necesarias dadas en esas referencias, recordemos brevemente una situación semejante que ocurre en el caso de dimensión finita (ver [6]). Supongamos que estamos interesados en minimizar una función $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en el conjunto

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) \leq 0\ (\alpha \in A),\ g_\beta(x) = 0\ (\beta \in B)\}$$

donde $A = \{1, \ldots, p\}$, $B = \{p+1, \ldots, m\}$. Sea

$$F(x, \lambda) := f(x) + \sum_{1}^{m} \lambda_\alpha g_\alpha(x) \quad ((x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$$

y denotemos por $I(x) := \{\alpha \in A \mid g_\alpha(x) = 0\}$ al conjunto de índices activos en x. Un resultado conocido en la literatura es que, bajo ciertas hipótesis de normalidad y suavidad, si x_0 minimiza localmente a f en S entonces existe una única $\lambda \in \mathbf{R}^m$ con

$$\lambda_\alpha \geq 0 \ (\alpha \in I(x_0)), \ \ \lambda_\alpha = 0 \ (\alpha \in A \setminus I(x_0)),$$

tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$. Más aún, $\langle h, F_{xx}(x_0, \lambda)h \rangle \geq 0$ para toda h en el conjunto de *restricciones tangenciales* de S en x_0 dado por

$$R_S(x_0) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g_i'(x_0; h) = 0 \ (i \in I(x_0) \cup B)\}.$$

Otro resultado que puede proporcionar más información afirma que, bajo ciertas hipótesis de regularidad, $\langle h, F_{xx}(x_0, \lambda)h \rangle \geq 0$ para toda h en el conjunto de *restricciones tangenciales modificadas* de S en x_0 dado por

$$\tilde{R}_S(x_0; \lambda) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha'(x_0; h) \leq 0 \ (\alpha \in I(x_0), \ \lambda_\alpha = 0), \ g_\beta'(x_0; h) = 0 \ (\beta \in \Gamma \cup B)\}$$

donde $\Gamma = \{\alpha \in A \mid \lambda_\alpha > 0\}$

Es fácil encontrar ejemplos para los cuales un punto x_0 satisface la condición de primer orden para alguna $\lambda \in \mathbf{R}^m$ y $\langle h, F_{xx}(x_0, \lambda)h \rangle \geq 0$ para toda $h \in R_S(x_0)$, pero $\langle h, F_{xx}(x_0, \lambda)h \rangle < 0$ para alguna $h \in \tilde{R}_S(x_0; \lambda)$. En este caso, el primer resultado no da ninguna información con respecto a la optimalidad del extremo en consideración, pero uno concluye del segundo resultado que el punto x_0 no minimiza localmente a f en S.

Para el problema de control óptimo enunciado arriba, condiciones "débiles" del primer tipo se pueden encontrar en las referencias mencionadas y están expresadas en términos de un conjunto de "variaciones admisibles" (y, v) que satisfacen $y(t_0) = y(t_1) = 0$,

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t) \quad (t \in T)$$

y las relaciones

$$\varphi_i'(u_0(t))v(t) = 0 \quad (i \in I_\alpha(t) \cup Q)$$

donde $I_\alpha(t)$ denota el conjunto de índices activos en $u_0(t)$. Un conjunto de "variaciones admisibles modificadas", en el que uno esperaría tener condiciones "fuertes" del segundo tipo, corresponde a parejas (y, v) que satisfacen no las últimas relaciones, sino

$$\varphi_i'(u_0(t))v(t) \leq 0 \quad (i \in I_\alpha(t) \text{ con } \mu_i(t) = 0),$$

$$\varphi_j'(u_0(t))v(t) = 0 \quad (j \in R \text{ con } \mu_j(t) > 0, \text{ o } j \in Q)$$

donde el multiplicador μ, como en el caso de dimensión finita, aparece en las condiciones de primer orden y es tal que $\mu_\alpha(t) \geq 0$ con $\mu_\alpha(t) = 0$ si $\varphi_\alpha(u_0(t)) < 0 \ \ (\alpha \in R,\ t \in T)$.

Recientemente, condiciones fuertes de este tipo para el problema de control óptimo en consideración fueron obtenidas en [16]. El objetivo principal de este trabajo consiste en explicar claramente la derivación de dichas condiciones y compararlas, a través de varios ejemplos, con las condiciones conocidas en la literatura.

Por otro lado, entender cómo se pueden obtener esas condiciones se facilita enormemente al considerar casos más simples en los que las técnicas utilizadas se generalizan para el problema que analizamos. Por esa razón decidimos presentar una derivación detallada de condiciones de optimalidad (tanto necesarias como suficientes) para el caso de dimensión finita, así como un estudio de problemas de control óptimo sin restricciones o con solo igualdades en las funciones de control.

Capítulo 1

Resultados y conceptos básicos

En este capítulo presentaremos algunos resultados y conceptos básicos que se utilizarán a lo largo del trabajo.

Dado que estudiaremos problemas de optimización, resulta conveniente analizar primero los conceptos de mínimos y máximos de una función con valores reales definida en un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, así como los resultados clásicos de condiciones necesarias y suficientes para extremos de funciones diferenciables en un intervalo compacto de $\mathbf{R}$. Repasaremos posteriormente algunos resultados básicos relacionados con diferenciales de funciones de valor real definidas en un subconjunto de $\mathbf{R}^n$ así como una versión del teorema de la función implícita.

En la siguiente sección derivaremos de manera sencilla un resultado crucial (Teorema 1.27) en la determinación de multiplicadores de Lagrange que se utilizará en el siguiente capítulo para derivar condiciones de optimalidad para problemas con igualdades. Para obtener un resultado equivalente aplicable a problemas que involucran desigualdades (Teorema 1.33) introduciremos una breve teoría sobre conos convexos. Por último, para la derivación de condiciones de optimalidad para problemas en espacios arbitrarios o con desigualdades presentaremos los conceptos de conos tangentes y funciones soporte.

1.1. Mínimos y máximos

Supongamos dados un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ y una función f que mapea S en $\mathbf{R}$. Comenzaremos con los conceptos de ínfimo y supremo de f en S.

Definiciones 1.1. El mayor número m (con $m = -\infty$ admitido) tal que $f(x) \geq m$ para toda $x \in S$ se llama la *máxima cota inferior de f en S* o el *ínfimo de f en S* y se denota por "$\text{ínf}\, f(x)$ en S". Si existe un punto x_0 en S tal que $f(x_0) = \text{ínf}\, f(x)$ en S, escribimos $f(x_0) = \text{mín}\, f(x)$ en S y se dice que dicho punto *minimiza a f en S* y $f(x_0)$ es el *mínimo de f en S*.

Análogamente, la *mínima cota superior* o el *supremo de f en S* es el mínimo valor M (con $M = +\infty$ admitido) tal que $f(x) \leq M$ para toda $x \in S$ y se denota por "$\sup f(x)$ en S". Si existe un punto x_1 en S tal que $f(x_1) = \sup f(x)$ en S, escribimos $f(x_1) = \text{máx}\, f(x)$ en S y se dice que dicho punto *maximiza a f en S* y $f(x_1)$ es el *máximo de f en S*.

Claramente se tiene en S que

$$\sup[-f(x)] = -\,\text{ínf}\, f(x), \quad \text{ínf}[-f(x)] = -\sup f(x)$$

y, por lo tanto, un punto $x_1 \in S$ maximiza a f en S si y solo si x_1 minimiza a $-f$ en S, y un punto $x_0 \in S$ minimiza a f en S si y solo si x_0 maximiza a $-f$ en S. Un punto que maximiza o minimiza a f se llama un *punto extremo* de f.

Una condición que asegura la existencia de un punto extremo de una función está dada por el siguiente teorema. El resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de Bolzano-Weierstrass el cual afirma que toda sucesión acotada de puntos en $\mathbf{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.2. *Si S es un compacto no vacío de $\mathbf{R}^n$ y $f\colon S \to \mathbf{R}$ es continua entonces f alcanza su máximo y mínimo en S.*

Demostración: Sea $m := \text{ínf}\, f(x)$ en S y sea $\{x_q\}$ una sucesión de puntos en S tales que $m = \text{lím}_{q\to\infty} f(x_q)$. Como S está acotado, por el teorema de Bolzano-Weierstrass $\{x_q\}$ tiene una subsucesión $\{y_q\}$ convergente y, por ser S cerrado, el límite $x_0 := \text{lím}_{q\to\infty} y_q$ está en S. Por continuidad,

$$f(x_0) = \lim_{q\to\infty} f(y_q) = m = \text{ínf}\, f(x) \text{ en } S.$$

Por lo tanto x_0 minimiza a f en S. Aplicando este resultado a $-f$, se prueba que existe un punto x_1 en S que minimiza a $-f$ en S y, por lo tanto, x_1 maximiza a f en S. ▮

El concepto de extremo es de naturaleza global dado que se toman en cuenta todos los puntos de S. De acuerdo con la definición, x_0 minimiza a f en S si $x_0 \in S$ y $f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in S$. En contraste, extremos locales toman en cuenta el comportamiento de la función en vecindades alrededor de x_0.

Definiciones 1.3. Diremos que $x_0 \in S$ *minimiza localmente a f en S* si existe una vecindad N de x_0 tal que x_0 minimiza a f en $S \cap N$, es decir, $f(x_0) \leq f(x)$ para toda $x \in S \cap N$. Si la desigualdad es estricta para toda $x \neq x_0$ en $S \cap N$, diremos que $f(x_0)$ es un *mínimo local estricto de f en S*.

1.2. Extremos en un intervalo compacto

En esta sección repasaremos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el caso en que la función f está definida en un intervalo compacto $S = [a, b]$ en $\mathbf{R}$. En la teoría que sigue nos concentraremos en encontrar mínimos globales o locales ya que máximos globales o locales para f se pueden encontrar obteniendo los mínimos respectivos para $-f$.

Recordemos que la derivada $f'(x_0)$ de f en x_0, cuando existe, está dada por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Si $x_0 = a$ o $x_0 = b$, este límite es un límite por la izquierda o derecha respectivamente. Suponiendo la existencia de derivadas, tenemos las siguientes condiciones suficientes para un mínimo local estricto en los puntos inicial y final de $[a, b]$.

Teorema 1.4. *Si $f'(x_0) > 0$ y $x_0 = a$, o $f'(x_0) < 0$ y $x_0 = b$, entonces $f(x_0)$ es un mínimo local estricto de f en $[a, b]$. Análogamente, si $f'(x_0) < 0$ y $x_0 = a$, o $f'(x_0) > 0$ y $x_0 = b$, entonces $f(x_0)$ es un máximo local estricto de f en $[a, b]$.*

Demostración: Supongamos que $f'(a) > 0$. Sea $\epsilon := f'(a)/2$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \epsilon.$$

Entonces

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > f'(a) - \epsilon = \frac{f'(a)}{2} > 0 \quad (a < x < a + \delta).$$

Por lo tanto $f(x) > f(a)$ para toda $x \in (a, a + \delta)$, o sea, $f(a)$ es un mínimo local estricto de f en $[a, b]$. Las afirmaciones restantes se prueban de manera semejante. ▮

Este resultado implica de manera inmediata las siguientes condiciones necesarias para mínimos locales en los puntos inicial y final de $[a, b]$.

Teorema 1.5. *Si $f'(a)$ existe y $f(a)$ es un mínimo local de f en $[a, b]$ entonces $f'(a) \geq 0$. Si $f'(b)$ existe y $f(b)$ es un mínimo local de f en $[a, b]$ entonces $f'(b) \leq 0$.*

Demostración: Por el Teorema 1.4, $f(a)$ es un máximo local estricto de f en $[a, b]$ si $f'(a) < 0$. Por lo tanto, si $f(a)$ es un mínimo local de f en $[a, b]$, se tiene que $f'(a) \geq 0$. Análogamente, $f'(b) \leq 0$ si $f(b)$ es un mínimo local de f en $[a, b]$. ∎

Para puntos interiores del intervalo $[a, b]$, el teorema anterior implica el siguiente resultado.

Teorema 1.6. *Si f tiene un extremo local en $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0)$ existe entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración: Supongamos que f tiene un mínimo local en x_0. Por el Teorema 1.5 aplicado en el intervalo $[x_0, b]$ se tiene que $f'(x_0) \geq 0$. Aplicando el mismo teorema en el intervalo $[a, x_0]$ vemos que $f'(x_0) \leq 0$. Por lo tanto $f'(x_0) = 0$. Análogamente $f'(x_0) = 0$ si f tiene un máximo local en $x = x_0$. ∎

El siguiente teorema del valor medio es básico.

Teorema 1.7. *Si f es continua en $[a, b]$ y tiene derivada en todo punto de (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.*

Demostración: Sea

$$h(x) := f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) \quad (x \in [a, b]).$$

Claramente h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $h(a) = f(a)$ y

$$h(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) = f(a).$$

Por el Teorema 1.2 existe c en (a, b) punto extremo de h. Por el Teorema 1.6,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y, por lo tanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Recordemos que, si f es diferenciable en $[a, b]$ y $f''(x_0)$ existe entonces

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + r(x - x_0)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes para un extremo local.

Teorema 1.8. *Supongamos que f es diferenciable en una vecindad de x_0, $f''(x_0)$ existe y $f'(x_0) = 0$. Entonces*
a. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0)$ *es un mínimo local estricto de* f.
b. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x_0)$ *es un máximo local estricto de* f.
Demostración:
(a): Sea m tal que $0 < 2m < f''(x_0)$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{r(h)}{h^2} \right| \leq \frac{f''(x_0)}{2} - m \quad (|h| < \delta).$$

Por lo tanto, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + r(x - x_0) \geq m(x - x_0)^2.$$

(b): De manera análoga obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$f(x) \leq f(x_0) - m(x - x_0)^2. \blacksquare$$

Una consecuencia inmediata de los Teoremas 1.4 y 1.8 son las siguientes condiciones necesarias para un extremo local.

Teorema 1.9. *Supongamos que f es diferenciable en una vecindad de x_0, $f''(x_0)$ existe y f tiene un mínimo local en x_0. Entonces*
a. $x_0 \in (a, b) \Rightarrow f'(x_0) = 0$ *y* $f''(x_0) \geq 0$.
b. $x_0 = a \Rightarrow f'(x_0) > 0$ *o bien* $f'(x_0) = 0$ *y* $f''(x_0) \geq 0$.
c. $x_0 = b \Rightarrow f'(x_0) < 0$ *o bien* $f'(x_0) = 0$ *y* $f''(x_0) \geq 0$.

1.3. Funciones de varias variables

En esta sección repasaremos algunos conceptos y resultados básicos relacionados con diferenciales de funciones de valor real definidas en un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Para mayor detalle, véase [17].

Definiciones 1.10. Sean X y Y espacios vectoriales. Una función A que mapea X en Y se dice que es una *transformación lineal* si

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \qquad A(cx) = cAx$$

para toda x, x_1, $x_2 \in X$ y c escalar. Es frecuente utilizar la notación Ax en vez de $A(x)$ si A es lineal. Una transformación lineal de X en X se llama un *operador lineal* en X. Denotamos por $L(X, Y)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de X en Y y, en lugar de $L(X, \mathbf{R})$, escribiremos simplemente $L(X)$.

Si $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ y c_1, c_2 son escalares, definimos $c_1A_1 + c_2A_2$ como

$$(c_1A_1 + c_2A_2)x = c_1A_1x + c_2A_2x \qquad (x \in X).$$

Es claro que $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(X, Y)$. Si $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ son espacios lineales normados, decimos que $A \in L(X, Y)$ está *acotada* si existe una constante M tal que para toda $x \in X$ se tiene $\|Ax\|_2 \leq M\|x\|_1$. La mínima M con esta propiedad se llama la *norma* de A y la denotamos por $\|A\|$.

Es fácil ver que, si $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ son espacios lineales normados y $A \in L(X, Y)$, entonces

$$\|A\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2.$$

Dos resultados básicos de transformaciones lineales son los siguientes.

Teorema 1.11. *Sea A una transformación lineal entre dos espacios lineales normados. Entonces son equivalentes:*

a. *A es continua en un punto.*
b. *A es continua en todos los puntos.*
c. *A está acotada.*

Teorema 1.12. *Sean $A, B \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ y definamos la distancia entre A y B como $\rho(A, B) := \|A - B\|$. Entonces $(L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m), \rho)$ es un espacio métrico.*

Definición 1.13. Sean $E \subset \mathbf{R}^n$ abierto, f una función que mapea E en $\mathbf{R}$ y $x_0 \in E$. Decimos que f es *diferenciable en x_0* si existe $A \in L(\mathbf{R}^n)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

En este caso escribimos $f'(x_0) = A$ y llamamos a $f'(x_0)$ la *diferencial de f en x_0*. Si f es diferenciable en x para toda $x \in E$ decimos que f es diferenciable en E. Nótese que, si f es diferenciable en x_0, entonces

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0) \qquad \text{donde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Definición 1.14. Sean $f\colon E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ con E abierto y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^n$. Para $x \in E$, $1 \leq i \leq n$, definimos

$$(D_i f)(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

siempre que el límite exista, y llamamos a $D_i f$ una *derivada parcial.*

Teorema 1.15. *Supongamos que f mapea $E \subset \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$ y f es diferenciable en $x \in E$. Entonces las derivadas parciales $(D_i f)(x)$ existen y $f'(x)e_i = (D_i f)(x)$.*

Demostración: Sea $1 \leq i \leq n$. Como f es diferenciable en x,

$$f(x + te_i) - f(x) = f'(x)(te_i) + r(te_i) \qquad \text{donde} \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(te_i)}{t} = 0.$$

Como $f'(x)$ es lineal,

$$f'(x)e_i = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} = (D_i f)(x). \blacksquare$$

Definición 1.16. Sean $E \subset \mathbf{R}^n$ abierto y $f\colon E \to \mathbf{R}$ diferenciable. Decimos que f es *continuamente diferenciable en E* si f' es una función continua de E en $L(\mathbf{R}^n)$. Explícitamente requerimos que, para cada $x \in E$ y $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$y \in E \text{ y } |x - y| < \delta \Rightarrow \|f'(y) - f'(x)\| < \epsilon.$$

En este caso escribimos $f \in C^1(E)$.

Teorema 1.17. *Supongamos que f mapea un abierto $E \subset \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$. Entonces son equivalentes:*

a. $f \in C^1(E)$.

b. *Las derivadas parciales $D_i f$ existen y son continuas en E para toda $1 \leq i \leq n$.*

Observación 1.18. Si las derivadas parciales $D_i f$ existen para toda $1 \leq i \leq n$, denotamos por $(\nabla f)(x)$ al vector $((D_1 f)(x), \ldots, (D_n f)(x))$ y lo llamamos el *gradiente* de f en x, i.e.,

$$(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x) e_i.$$

Ahora, dada $A \in L(\mathbf{R}^n)$, el vector $a = (Ae_1, \ldots, Ae_n)$ satisface $Ah = \langle a, h\rangle$ para toda $h \in \mathbf{R}^n$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en $\mathbf{R}^n$. Por otro lado, si $a \in \mathbf{R}^n$, definimos $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ como $Ah := \langle a, h\rangle$ y, claramente, $A \in L(\mathbf{R}^n)$. Por lo tanto existe una correspondencia uno-a-uno entre $\mathbf{R}^n$ y $L(\mathbf{R}^n)$. Por el Teorema 1.15, si f es diferenciable en x, entonces

$$f'(x)h = \langle (\nabla f)(x), h\rangle \quad \text{para toda } h \in \mathbf{R}^n.$$

Debido a esta igualdad, es usual utilizar la notación $f'(x)$ para el gradiente de f en x.

Visto de otra manera, si en la Definición 1.13 escribimos $f'(x_0; \cdot) := A(\cdot)$ y llamamos a $f'(x_0; \cdot)$ la diferencial de f en x_0 entonces, con la correspondencia uno-a-uno entre $\mathbf{R}^n$ y $L(\mathbf{R}^n)$ de arriba, le asociamos a A el vector $f'(x_0)$ tal que $\langle f'(x_0), h\rangle = f'(x_0; h)$ para toda $h \in \mathbf{R}^n$ y lo llamamos el gradiente de f en x_0.

Definición 1.19. Una *forma cuadrática* Q en $\mathbf{R}^n$ es una función $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que, para toda $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

donde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ y $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica. Nótese que

$$Q(x) = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = x^* A x$$

donde x es un vector columna y x^* su transpuesta. Decimos que Q es *positiva*, *negativa*, etc., si lo es $Q(x)$ para toda $x \neq 0$. Análogamente, a toda matriz simétrica $A = (a_{ij})$ le asociamos la forma cuadrática $Q(x) := \langle Ax, x\rangle$ para toda $x \in \mathbf{R}^n$. La matriz A es *positiva*, *negativa*, etc., si lo es su forma cuadrática asociada.

Observación 1.20. Dada una forma cuadrática Q en $\mathbf{R}^n$, existen vectores unitarios $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ tales que, para toda $x \in \mathbf{R}^n$,

$$Q(x_0)|x|^2 \leq Q(x) \leq Q(x_1)|x|^2.$$

Demostración: Sea $E := \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$ la $(n-1)$-esfera. Como E es compacto, existen puntos $x_0, x_1 \in E$ tales que, para toda $x \in E$,

$$Q(x_0) \leq Q(x) \leq Q(x_1).$$

Por lo tanto, para toda $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$,

$$Q(x_0) \leq Q\left(\frac{x}{|x|}\right) = \frac{Q(x)}{|x|^2} \leq Q(x_1)$$

y el resultado se sigue. ∎

Definición 1.21. Sean $E \subset \mathbf{R}^n$ abierto, f una función que mapea E en $\mathbf{R}$ y $x_0 \in E$. Decimos f tiene una *segunda diferencial en* x_0 si f tiene una diferencial $f'(x_0; \cdot)$ en x_0 y existe una forma cuadrática Q en $\mathbf{R}^n$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0; x - x_0) - \frac{1}{2}Q(x - x_0)}{|x - x_0|^2} = 0.$$

En este caso escribimos $f''(x_0; \cdot) := Q(\cdot)$ y llamamos a $f''(x_0; \cdot)$ la *segunda diferencial de* f *en* x_0. La matriz simétrica $f''(x_0)$ tal que $\langle f''(x_0)h, h\rangle = f''(x_0; h)$ para toda $h \in \mathbf{R}^n$ se llama el *Hessiano de* f *en* x_0. Nótese que, si f tiene una segunda diferencial en x_0, entonces

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0; x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0; x - x_0) + r(x - x_0)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|^2} = 0.$$

Definición 1.22. Supongamos que f es una función real definida en un abierto $E \subset \mathbf{R}^n$, con derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$. Si las funciones $D_i f$ son a su vez diferenciables, las *derivadas parciales de segundo orden* de f están definidas como

$$D_{ij} f := D_i D_j f \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Si estas funciones $D_{ij}f$ son continuas en E, decimos que f es de clase C^2 en E y escribimos $f \in C^2(E)$. Análogamente, $f \in C^m(E)$ si f es continua y posee derivadas parciales continuas de grado menor o igual que m en E. Diremos que f es de clase C^m en un conjunto $E \subset \mathbf{R}^n$ arbitrario si f es de clase C^m en una vecindad de E.

Teorema 1.23. (Taylor) *Dados $S \subset \mathbf{R}^n$ y $f: S \to \mathbf{R}$ supongamos que $x + th \in S$ para toda $t \in [0, 1]$. Entonces:*

a. $f \in C^1(S) \Rightarrow$ *existe* $t_1 \in (0, 1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x + t_1 h; h) \\ &= f(x) + \int_0^1 f'(x + th; h)dt. \end{aligned}$$

b. $f \in C^2(S) \Rightarrow$ *existe* $t_2 \in (0, 1)$ *tal que*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x; h) + \tfrac{1}{2} f''(x + t_2 h; h) \\ &= f(x) + f'(x; h) + \int_0^1 (1-t) f''(x + th; h)dt. \end{aligned}$$

El teorema de la función implícita juega un papel fundamental en la teoría que presentaremos en este trabajo. La siguiente versión de dicho teorema está tomada de [6].

Teorema 1.24. (Función implícita) *Sea S un abierto de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ y f una función que mapea S en $\mathbf{R}^n$ con $f(t, x)$ y $f_x(t, x)$ continuas en S. Supongamos que existen un compacto $T_0 \subset \mathbf{R}^m$ y una función continua $x_0: T_0 \to \mathbf{R}^n$ tales que, para toda $t \in T_0$,*

i. $(t, x_0(t)) \in S$.

ii. $f(t, x_0(t)) = 0$ *y* $|f_x(t, x_0(t))| \neq 0$.

Entonces existen una vecindad T de T_0, una función continua $x: T \to \mathbf{R}^n$ y una constante $\epsilon > 0$ tales que

a. $x = x_0$ *en* T_0.

b. $f(t, x(t)) = 0$ *para toda* t *en* T.

c. $(t \in T,\ f(t, x) = 0$ *y* $|x - x(t)| < \epsilon) \Rightarrow x = x(t)$.

d. $f \in C^m(S) \Rightarrow x \in C^m(T)$.

1.4. Funcionales lineales

Definición 1.25. Sean X un espacio vectorial y $L_i: X \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ funcionales lineales. Decimos que el conjunto $\{L_i\}_1^m$ es *linealmente independiente* si una relación de la forma

$$\sum_1^m a_i L_i(x) = 0 \text{ para toda } x \in X$$

implica que $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Teorema 1.26. *Sean X un espacio vectorial y $\{L_i\}_1^m$ funcionales lineales en X. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*
a. *$\{L_i\}$ es linealmente independiente.*
b. *Existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $|L_i(x_j)| \neq 0$ $(i, j = 1, \ldots, m)$.*

Demostración: Sean $F(x) := (L_1(x), \ldots, L_m(x))$ $(x \in X)$ y $Y := F(X)$. Entonces (a) $\Leftrightarrow$ no existe ningún vector en $\mathbf{R}^m$ ortogonal a $Y \Leftrightarrow Y = \mathbf{R}^m$ (ya que Y es un subespacio de $\mathbf{R}^m$) $\Leftrightarrow$ existen m vectores linealmente independientes $y_1, \ldots, y_m \in Y \Leftrightarrow$ existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $y_i = (L_1(x_i), \ldots, L_m(x_i))$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ (b). ∎

En particular nótese que, si $X = \mathbf{R}^n$, las funcionales lineales $L_i(x) = \langle a_i, x\rangle$ $(i = 1, \ldots, m)$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow A = (a_{ij})$ es de rango m.

Teorema 1.27. *Sean X un espacio vectorial, L, L_i $(i \in A := \{1, \ldots, m\})$ funcionales lineales en X,*

$$R = \{x \in X \mid L_i(x) = 0 \ (i \in A)\},$$

y supongamos que $L(x) = 0$ para toda $x \in R$. Entonces existen multiplicadores $\{\lambda_i\}_1^m$ tales que $L(x) = \sum_1^m \lambda_i L_i(x)$ $(x \in X)$. Si $\{L_i\}_1^m$ es linealmente independiente entonces los multiplicadores son únicos.

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $\{L_i\}_1^m$ es linealmente independiente. Por el teorema 1.26, existen $x_1, \ldots, x_m \in X$ tales que $|L_i(x_j)| \neq 0$ $(i, j \in A)$. Sean

$$y_i := \begin{pmatrix} L_i(x_1) \\ \vdots \\ L_i(x_m) \end{pmatrix} \quad (i \in A),$$

$$C := (y_1, \ldots, y_m) = \begin{pmatrix} L_1(x_1) & \cdots & L_m(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ L_1(x_m) & \cdots & L_m(x_m) \end{pmatrix}$$

Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^*$ tal que $C\lambda = (L(x_1), \ldots, L(x_m))^*$, por lo que $L(x_j) = \sum_1^m \lambda_i L_i(x_j)$ $(j \in A)$. Sea $x \in X$, definamos $u := (L_1(x), \ldots, L_m(x))^*$ y sea $b = (b_1, \ldots, b_m)^*$ tal que $C^*b = u$, de manera que

$$0 = L_i(x) - \sum_{j=1}^{m} L_i(x_j)b_j = L_i\Big(x - \sum_1^m x_j b_j\Big) \qquad (i \in A).$$

Como $x - \sum_1^m x_j b_j \in R$, se tiene $L(x - \sum_1^m x_j b_j) = 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= L(x) - \sum_1^m L(x_j)b_j = L(x) - \sum_{i,j=1}^m \lambda_i L_i(x_j) b_j \\ &= L(x) - \sum_1^m \lambda_i L_i(x). \blacksquare \end{aligned}$$

1.5. Conos convexos

Definiciones 1.28. Sea C un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Decimos que
i. C es *convexo* si para toda $x, y \in C$ y $\lambda \in [0,1]$, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$.
ii. C es un *cono* si $x \in C \Rightarrow \alpha x \in C$ para toda $\alpha \geq 0$.

Observación 1.29. Sea C un cono en $\mathbf{R}^n$. Entonces son equivalentes:
a. C es convexo.
b. $x, y \in C \Rightarrow x + y \in C$.
Demostración:
(a) $\Rightarrow$ (b): Sean $x, y \in C$. Por (a), $z := \frac{1}{2}(x+y) \in C$. Como C es un cono, $2z = x + y \in C$.
(b) $\Rightarrow$ (a): Sean $x, y \in C$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Como C es un cono, $(1-\lambda)x$ y λy están en C y, por (b), $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$. $\blacksquare$

Definición 1.30. Dado $B \subset \mathbf{R}^n$ definimos a $C(B)$ como el conjunto de todas las combinaciones lineales no negativas finitas de elementos de B, es decir,

$$C(B) := \Big\{\sum_J a_i x_i \mid a_i \geq 0, x_i \in B, J \text{ finito}\Big\}.$$

Claramente $C(B)$ es un cono convexo y, de hecho, es el mínimo cono convexo que contiene a B. Llamamos a $C(B)$ el *cono convexo generado por* B.

Definición 1.31. Dado $B \subset \mathbf{R}^n$ definimos

$$B^* := \{z \in \mathbf{R}^n \mid \langle y, z\rangle \leq 0 \text{ para toda } y \in B\}$$

y lo llamamos el *cono dual de* B.

Mencionaremos ahora algunas propiedades básicas de conos convexos.

Proposición 1.32. *Las siguientes propiedades se cumplen:*
a. *Si* $B \subset \mathbf{R}^n$ *entonces* B^* *es un cono convexo cerrado y*

$$B^* = (C(B))^* = (\overline{C(B)})^*.$$

b. *Si* C *es un cono convexo entonces* $C^{**} = \overline{C}$.
c. *Un cono convexo con un número finito de generadores es cerrado.*

Como se verá en el Capítulo 2, el siguiente resultado es crucial en la obtención de condiciones necesarias de optimalidad para problemas con igualdades y desigualdades.

Teorema 1.33. *Sean* $A = \{1, \dots, p\}$, $B = \{p+1, \dots, m\}$ *y* $b_\alpha \in \mathbf{R}^n$ $(\alpha \in A \cup B)$. *Entonces*

$$R := \{h \in \mathbf{R}^n \mid \langle b_\alpha, h\rangle \leq 0 \ (\alpha \in A),\ \langle b_\beta, h\rangle = 0 \ (\beta \in B)\}$$

es un cono convexo cerrado. Su dual R^* *está generado por los vectores*

$$b_1, \dots, b_m, -b_{p+1}, \dots, -b_m.$$

Más aún, para toda $b \in \mathbf{R}^n$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a. $\langle b, h\rangle \leq 0$ *para toda* $h \in R$.
b. *Existen* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *en* $\mathbf{R}$ *con* $\lambda_\alpha \geq 0$ $(\alpha \in A)$ *tales que* $b = \sum_1^m \lambda_i b_i$.
Demostración: Nótese primero que

$$R = \{h \in \mathbf{R}^n \mid \langle b_\alpha, h\rangle \leq 0 \ (\alpha \in A \cup B),\ \langle -b_\beta, h\rangle \leq 0 \ (\beta \in B)\}.$$

Por lo tanto $R = C(B)^*$ donde

$$B = \{b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_m, -b_{p+1}, \dots, -b_m\}.$$

Por la Proposición 1.32 (a), R es un cono convexo cerrado. Ahora, $C(B)$ es cerrado por 1.32 (c) y por lo tanto, por 1.32 (b), $R^* = C(B)^{**} = C(B)$. ∎

1.6. Conos tangentes

Definición 1.34. Una sucesión $\{x_m\} \subset \mathbf{R}^n$ *converge a* x_0 *en la dirección* h si h es un vector unitario, $x_m \neq x_0$, y

$$\lim_{m\to\infty} |x_m - x_0| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{x_m - x_0}{|x_m - x_0|} = h.$$

Claramente, si una sucesión $\{x_m\}$ converge a x_0 y $x_m \neq x_0$ para un número infinito de m's, entonces $\{x_m\}$ tiene una subsucesión que converge direccionalmente.

Definición 1.35. Dada $x_0 \in S \subset \mathbf{R}^n$, el *cono tangente de* S *en* x_0, denotado por $T_S(x_0)$, es el cono (cerrado) determinado por los vectores unitarios h para los cuales existe una sucesión $\{x_m\}$ en S convergente a x_0 en la dirección h.

Nótese que, si $\{x_m\}$ converge a x_0 en la dirección h y f es diferenciable en x_0 entonces

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|} = f'(x_0; h).$$

Si f tiene segunda diferencial en x_0 entonces

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m) - f(x_0) - f'(x_0; x_m - x_0)}{|x_m - x_0|^2} = \frac{1}{2} f''(x_0; h).$$

Proposición 1.36. *Dada* $x_0 \in S \subset \mathbf{R}^n$ *sea* $C_S^+(x_0)$ *el conjunto de todas las* $h \in \mathbf{R}^n$ *para las cuales existen* $\epsilon > 0$ *y* $x\colon [0, \epsilon) \to S$ *tales que* $x(0) = x_0$ *y* $\dot{x}(0) = h$*. Entonces* $C_S^+(x_0) \subset T_S(x_0)$*.*

Demostración: Sea $h \in C_S^+(x_0)$ y sean $\epsilon > 0$ y $x : [0, \epsilon) \to S$ tales que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = h$. Definimos para toda $m \in \mathbf{N}$, $t_m := \epsilon/m$ y $x_m := x(t_m)$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_m - x_0}{t_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{x(t_m) - x(0)}{t_m} = \dot{x}(0) = h.$$

Así $x_m \to x_0$, $m \to \infty$ y, si $h \neq 0$, entonces $x_m \neq x_0$ para m suficientemente grande y

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x_m - x_0}{|x_m - x_0|} = \lim_{m\to\infty} \frac{x_m - x_0}{t_m} \lim_{m\to\infty} \frac{t_m}{|x_m - x_0|} = \frac{h}{|h|}$$

lo cual implica que $\{x_m\}$ converge a x_0 en la dirección $h/|h|$. ∎

Definición 1.37. Sean $x_0 \in S \subset \mathbf{R}^n$ y $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Decimos que $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ es una *función de soporte inferior para f en* (S, x_0) si F tiene las mismas propiedades de diferenciabilidad que f en x_0, $F(x) \le f(x)$ $(x \in S)$, $F(x_0) = f(x_0)$, y $F'(x_0) = 0$.

Observación 1.38. Sean $x_0 \in S \subset \mathbf{R}^n$ y $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Si f tiene una función de soporte inferior F en (S, x_0) entonces $f'(x_0; h) \ge 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$.

Demostración: Sea $h \in T_S(x_0)$ unitario y sea $\{x_m\} \subset S$ convergente a x_0 en la dirección h. Si $g := f - F$ entonces $g(x) \ge 0 = g(x_0)$ para toda $x \in S$, lo cual implica que

$$0 \le \lim_{m\to\infty} \frac{g(x_m)}{|x_m - x_0|} = g'(x_0; h) = f'(x_0; h). \blacksquare$$

Capítulo 2

Optimización en espacios de dimensión finita

A lo largo de este capítulo supondremos dados un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$ y una función f que mapea S en $\mathbf{R}$. El problema que nos concierne, que denotaremos por $\mathrm{P}(S)$, es el de minimizar f en S.

Para condiciones de primer orden supondremos que las funciones involucradas son de clase C^1 en una vecindad del punto en consideración y, para condiciones de segundo orden, de clase C^2.

2.1. Problemas sin restricciones

Comenzaremos con el caso en que S es abierto. Los siguientes dos resultados dan condiciones necesarias (para un mínimo global) y suficientes (para un mínimo local estricto) respectivamente.

Teorema 2.1. *Si x_0 es solución de* $\mathrm{P}(S)$ *entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \geq 0$.*

Demostración: Sea $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para toda x con $|x - x_0| < \delta$. Sea $h \neq 0$ y definamos $\epsilon := \delta/|h|$. Para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sean $x(t) := x_0 + th$ y $g(t) := f(x(t))$. Como

$$|x(t) - x_0| = |t||h| < \epsilon|h| = \delta \quad \text{para toda } t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

se tiene que

$$g(t) = f(x(t)) = f(x_0 + th) \geq f(x_0) = g(0) \quad \text{para toda } t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

por lo que la función g tiene un mínimo en $t = 0$. Por el Teorema 1.9(a), $0 = g'(0) = f'(x_0; h)$ y $0 \leq g''(0) = f''(x_0; h)$. ∎

Teorema 2.2. *Si* $x_0 \in S$, $f'(x_0) = 0$ *y* $f''(x_0, h) > 0$, *entonces existen* $\delta, m > 0$ *tales que*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2.$$

Demostración: Por la Definición 1.21 sabemos que existe $r(x_0; \cdot)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0; x - x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0; x - x_0) + r(x_0; x - x_0)$$

donde $r(x_0; h)/|h|^2 \to 0$, $h \to 0$. Como $f''(x_0, h)$ es positiva, por la Observación 1.20 existe $m > 0$ tal que, para toda $h \in \mathbf{R}^n$, $f''(x_0; h) \geq 4m|h|^2$. Sea $\delta > 0$ tal que, si $|h| < \delta$, entonces $|r(x_0; h)| \leq m|h|^2$. Por lo tanto, si $|x - x_0| < \delta$ entonces $f(x) - f(x_0) \geq m|x - x_0|^2$. ∎

Definición 2.3. Un punto $x = c$ es un *punto crítico de* f si $f'(c) = 0$. Un punto crítico c es *no degenerado* si $f''(c)$ es no singular, esto es, $|f''(c)| \neq 0$.

Observación 2.4. Si c es un punto crítico no degenerado de f entonces $f(c)$ es un mínimo local estricto de f en $S \Leftrightarrow f''(c) \geq 0$.

2.2. Restricciones lineales

Sea $A = \{1, \ldots, m\}$ con $m < n$ y supongamos que

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle b_\alpha, x \rangle + c_\alpha = 0 \ (\alpha \in A)\}$$

donde $b_\alpha \in \mathbf{R}^n$, $c_\alpha \in \mathbf{R}$ $(\alpha \in A)$.

Para toda $x_0 \in S$ definamos los siguientes dos conjuntos:

$$\begin{aligned} L_S(x_0) &:= \{h \in \mathbf{R}^n \mid x_0 + th \in S \ (t \in \mathbf{R})\} \\ R_S &:= \{h \in \mathbf{R}^n \mid \langle b_\alpha, h \rangle = 0 \ (\alpha \in A)\}. \end{aligned}$$

Nótese que, para toda $x_0 \in S$, $L_S(x_0) = R_S$.

Teorema 2.5. *Si* x_0 *es solución local de* $\mathrm{P}(S)$ *entonces* $f'(x_0; h) = 0$ *y* $f''(x_0; h) \geq 0$ *para toda* $h \in L_S(x_0)$.

Demostración: Sea $h \in L_S(x_0)$ y definamos $x(t) := x_0 + th$, $\varphi := f \circ x$. Como φ tiene un mínimo local en $t = 0$, se sigue que $0 = \varphi'(0) = f'(x_0; h)$ y $0 \leq \varphi''(0) = f''(x_0; h)$. ∎

Teorema 2.6. *Si* $x_0 \in S$, $f'(x_0;h) = 0$ *y* $f''(x_0;h) > 0$ *para toda* $h \in L_S(x_0)$, $h \neq 0$, *entonces* x_0 *es una solución local estricta de* $\mathrm{P}(S)$.

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$ existe $x_q \in S$ tal que

$$0 < |x_q - x_0| < \frac{1}{q}, \qquad f(x_q) \leq f(x_0).$$

Como los vectores $h_q := (x_q - x_0)/|x_q - x_0|$ son unitarios, existen una subsucesión (sin cambio de notación) de $\{h_q\}$ y un vector unitario h tales que h_q converge a h. Claramente $h_q, h \in L_S(x_0)$. Por lo tanto

$$\lim_{q\to 0} \frac{f(x_q) - f(x_0)}{|x_q - x_0|^2} = \tfrac{1}{2} f''(x_0;h) \leq 0. \blacksquare$$

Las condiciones necesarias de primer orden que aparecen en el Teorema 2.5 se pueden, utilizando el Teorema 1.27, expresar en términos de multiplicadores (de Lagrange). El siguiente resultado es una simple consecuencia de dichos teoremas, tomando en cuenta que $L_S(x_0) = R_S$.

Teorema 2.7. *Si* x_0 *es solución local de* $\mathrm{P}(S)$ *entonces existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *en* $\mathbf{R}$ *tales que*

$$f'(x_0) + \sum_1^m \lambda_\alpha b_\alpha = 0, \quad f''(x_0;h) \geq 0 \quad \textit{para toda } h \in R_S.$$

Para suficiencia, de manera inmediata el Teorema 2.6 implica el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Si* $x_0 \in S$ *y existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ *tales que*

$$f'(x_0) + \sum_1^m \lambda_\alpha b_\alpha = 0, \quad f''(x_0;h) > 0 \quad \textit{para toda } h \in R_S,\ h \neq 0$$

entonces x_0 *es una solución local estricta de* $\mathrm{P}(S)$.

Por razones de comparación con problemas no lineales que veremos en las siguientes secciones, nótese que las condiciones anteriores se pueden expresar en términos de una función auxiliar que depende de $x \in \mathbf{R}^n$ y $\lambda \in \mathbf{R}^m$.

Observación 2.9. Para toda $(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sean $g_\alpha(x) := \langle b_\alpha, x \rangle + c_\alpha$ $(\alpha \in A)$ y

$$F(x, \lambda) := f(x) + \sum_1^m \lambda_\alpha g_\alpha(x).$$

Entonces la condición de primer orden en los Teoremas 2.7 y 2.8 es equivalente a la existencia de $\lambda \in \mathbf{R}^m$ tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$. Por otro lado, las condiciones de segundo orden de dichos teoremas corresponden a las relaciones $F_{xx}(x_0, \lambda; h) \geq 0$ y $F_{xx}(x_0, \lambda; h) > 0$ para toda $h \in R_S$, $h \neq 0$.

2.3. Restricciones con igualdades

En esta sección generalizaremos las condiciones obtenidas en la sección anterior para el caso que involucra igualdades no lineales. Como veremos, las condiciones necesarias que obtenemos son una simple consecuencia del Teorema 1.27.

Sea $A = \{1, \ldots, m\}$ con $m < n$ y supongamos que tenemos dadas funciones $g_\alpha \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(\alpha \in A)$ y

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) = 0 \ (\alpha \in A)\}.$$

Para toda $x_0 \in S$ definamos los conjuntos

$$\begin{aligned} C_S(x_0) \ &:= \ \{h \in \mathbf{R}^n \mid \text{existen } \epsilon > 0 \text{ y } x \colon (-\epsilon, \epsilon) \to S \text{ tales que} \\ &\qquad x(0) = x_0 \text{ y } \dot{x}(0) = h\} \end{aligned}$$

llamado el conjunto de *vectores tangentes curvilíneos de* S *en* x_0, y

$$R_S(x_0) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g'_\alpha(x_0; h) = 0 \ (\alpha \in A)\}$$

que corresponde al conjunto de vectores que satisfacen las *restricciones tangenciales de* S *en* x_0. Claramente $C_S(x_0) \subset R_S(x_0)$ para toda $x_0 \in S$ pero, como se ilustra en los siguientes dos ejemplos, el converso no necesariamente es cierto.

Ejemplo 2.10. Sea $g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ $(x, y \in \mathbf{R})$ y $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. En este caso

$$g'(x, y; h, k) = 2(x^2 + y^2 - 1)(2xh + 2yk)$$

por lo que $R_S(0, 1) = \mathbf{R}^2$, pero $C_S(0, 1) = \{(h, k) \in \mathbf{R}^2 \mid k = 0\}$.

Ejemplo 2.11. Sea $g(x, y) = x^2 - y^3$ $(x, y \in \mathbf{R})$ y $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. En este caso

$$g'(x, y; h, k) = 2xh - 3y^2 k$$

por lo que $R_S(0, 0) = \mathbf{R}^2$, pero $C_S(0, 0) = \{(h, k) \in \mathbf{R}^2 \mid h = 0, \ k \geq 0\}$.

En general resulta difícil determinar cuándo ambos conjuntos coinciden. Un criterio ampliamente utilizado en la literatura es el de normalidad.

Definición 2.12. Sea $x_0 \in S$. Decimos que x_0 es un

a. *punto regular de* S si $C_S(x_0) = R_S(x_0)$.

b. *punto normal de* S si las ecuaciones lineales $g'_\alpha(x_0; h) = 0$ $(\alpha \in A)$ en h son linealmente independientes, esto es, si los gradientes $g'_1(x_0), \ldots, g'_m(x_0)$ son linealmente independientes, lo cual es equivalente a requerir que la matriz

$$\left(\frac{\partial g_\alpha(x_0)}{\partial x^i}\right) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$$

sea de rango m.

Como veremos en la Sección 2.6, si x_0 es un punto normal de S entonces x_0 es un punto regular de S. Consideremos ahora la función auxiliar definida en la sección anterior. Para toda $(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ sea

$$F(x, \lambda) := f(x) + \sum_1^m \lambda_\alpha g_\alpha(x).$$

Teorema 2.13. *Supongamos que x_0 es un punto normal de S y una solución local de* $\mathrm{P}(S)$. *Entonces existe un único $\lambda \in \mathbf{R}^m$ tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$ y $F_{xx}(x_0, \lambda; h) \geq 0$ para toda $h \in R_S(x_0)$.*

Demostración: Sea $h \in R_S(x_0) = C_S(x_0)$ y sean $\epsilon > 0$ y $x\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tales que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = h$. Entonces $\varphi := f \circ x$ tiene un mínimo local en $t = 0$ y por lo tanto

$$0 = \varphi'(0) = f'(x_0; h) \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi''(0) = f''(x_0; h).$$

La primera conclusión se sigue del Teorema 1.27. Como $\varphi(t) = F(x(t), \lambda)$, por Taylor tenemos

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} = \frac{F(x(t), \lambda) - F(x_0, \lambda)}{t^2} = \frac{1}{2} F_{xx}\Big((\bar{x}(t), \lambda); \frac{x(t) - x_0}{t}\Big)$$

donde $\bar{x}(t) = x_0 + \theta(t)[x(t) - x_0]$ con $0 < \theta(t) < 1$. Por lo tanto

$$0 \leq \frac{1}{2}\varphi''(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t^2} = \frac{1}{2} F_{xx}((x_0, \lambda); h). \blacksquare$$

Teorema 2.14. *Supongamos que* $x_0 \in S$ *y que existe* $\lambda \in \mathbf{R}^m$ *tal que* $F_x(x_0,\lambda) = 0$ *y* $F_{xx}(x_0,\lambda;h) > 0$ *para toda* $h \in R_S(x_0)$, $h \neq 0$. *Entonces existen una vecindad* N *de* x_0 *y* $m > 0$ *tales que*

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2 \quad \textit{para toda } x \in S \cap N.$$

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces, para toda $q \in \mathbf{N}$ existe $x_q \in S$ tal que

$$t_q := |x_q - x_0| < \frac{1}{q}, \qquad f(x_q) < f(x_0) + \frac{t_q^2}{q}.$$

Claramente $t_q > 0$. Si es necesario, reemplacemos $\{x_q\}$ por una subsucesión (denotada otra vez por $\{x_q\}$) tal que la sucesión de vectores unitarios

$$h_q := \frac{x_q - x_0}{t_q} = \frac{x_q - x_0}{|x_q - x_0|}$$

converge al vector unitario h. Entonces

$$0 = \lim_{q\to\infty} \frac{g_\alpha(x_q) - g_\alpha(x_0)}{t_q} = g'_\alpha(x_0;h)$$

y por lo tanto $h \in R_S(x_0)$, $h \neq 0$. Ahora, por Taylor,

$$\frac{1}{q} > \frac{F(x_q,\lambda) - F(x_0,\lambda)}{t_q^2} = \frac{1}{2}F_{xx}\Big((\bar{x}_q,\lambda); \frac{x_q - x_0}{t_q}\Big) = \frac{1}{2}F_{xx}((\bar{x}_q,\lambda);h_q)$$

donde $\bar{x}_q = x_0 + \theta_q[x_q - x_0]$ con $0 < \theta_q < 1$. Por lo tanto

$$0 \geq \lim_{q\to\infty} \frac{F(x_q,\lambda) - F(x_0,\lambda)}{t_q^2} = \frac{1}{2}F_{xx}((x_0,\lambda);h). \ \blacksquare$$

Análogamente a la condición necesaria y suficiente que se obtiene en la última parte del caso sin restricciones, definamos puntos críticos no degenerados para el caso con igualdades no lineales.

Definición 2.15. Un punto x_0 se llama *punto crítico de* f *relativo a* S si $x_0 \in S$ y existe $\lambda \in \mathbf{R}^m$ tal que $F_x(x_0,\lambda) = 0$. Si además el determinante de la matriz $(n+m)$-dimensional (i y α son índices renglón, j y β son índices columna)

$$\begin{pmatrix} F_{x^i x^j}(x_0,\lambda) & g_{\beta x^i}(x_0) \\ g_{\alpha x^j}(x_0) & 0 \end{pmatrix} \qquad (i,j = 1,\ldots,n;\ \alpha,\beta = 1,\ldots,m)$$

es distinto de cero, x_0 se dice que es *no degenerado*.

Teorema 2.16. *Sea x_0 un punto crítico no degenerado de f relativo a S. Sea $\lambda \in \mathbf{R}^m$ como en la Definición 2.15. Entonces x_0 es una solución local estricta de* $\mathrm{P}(S) \Leftrightarrow F_{xx}(x_0, \lambda; h) \geq 0$ *para toda* $h \in R_S(x_0)$.

2.4. Conjuntos arbitrarios

En las tres secciones anteriores obtuvimos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para el problema $\mathrm{P}(S)$ suponiendo que S es abierto, o que está definido por igualdades lineales o no lineales. Como veremos en esta sección, el concepto de cono tangente $T_S(x_0)$ definido en la Sección 1.6 permite obtener condiciones de optimalidad para el problema $\mathrm{P}(S)$ donde S es un subconjunto arbitrario de $\mathbf{R}^n$.

Supongamos en esta sección que tenemos dados $S \subset \mathbf{R}^n$, un punto $x_0 \in S$, y una función $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. El primer resultado nos da condiciones necesarias de optimalidad.

Teorema 2.17. *Supongamos que x_0 es una solución local de* $\mathrm{P}(S)$. *Entonces $f'(x_0; h) \geq 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$ y, si $f'(x_0) = 0$, entonces $f''(x_0; h) \geq 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$.*

Demostración: Sea $h \in T_S(x_0)$ un vector unitario y $\{x_m\} \subset S$ una sucesión convergente a x_0 en la dirección h. Para valores grandes de m tenemos $f(x_m) \geq f(x_0)$ y, por lo tanto,

$$0 \leq \lim \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|} = f'(x_0; h).$$

Si además $f'(x_0) = 0$, entonces

$$0 \leq \lim \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|^2} = \frac{1}{2} f''(x_0; h). \blacksquare$$

Los siguientes tres resultados corresponden a suficiencia para mínimos locales estrictos.

Teorema 2.18. *Si $f'(x_0; h) > 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$, $h \neq 0$, entonces existen una vecindad N de x_0 y $m > 0$ tales que*

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0| \quad (x \in S \cap N).$$

Demostración: Supongamos lo contrario. Por lo tanto existe una sucesión $\{x_m\}$ de puntos de S tal que

$$|x_m - x_0| < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad f(x_m) - f(x_0) < \frac{1}{m}|x_m - x_0|.$$

Claramente $x_m \neq x_0$. Por lo tanto $\{x_m\}$ tiene una subsucesión (denotada otra vez por $\{x_m\}$) que converge a x_0 en la dirección h. Esto es una contradicción ya que

$$f'(x_0; h) = \lim \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|} \leq 0. \blacksquare$$

Teorema 2.19. *Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0; h) > 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$, $h \neq 0$, entonces existen una vecindad N de x_0 y $m > 0$ tales que*

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2 \quad (x \in S \cap N).$$

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces, para toda $m \in \mathbf{N}$ existe $x_m \in S$ tal que

$$|x_m - x_0| < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad f(x_m) - f(x_0) < \frac{1}{m}|x_m - x_0|^2.$$

Reemplacemos $\{x_m\}$ por una subsucesión convergente a x_0 en una dirección h. Como $f'(x_0) = 0$, tenemos

$$\frac{1}{2}f''(x_0; h) = \lim \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|^2} \leq 0$$

lo cual contradice la relación $f''(x_0; h) > 0$. $\blacksquare$

Teorema 2.20. *Sea $R \subset \mathbf{R}^n$ tal que $T_S(x_0) \subset R$ y sea*

$$\mathcal{A} := \{h \in R \setminus \{0\} \mid f'(x_0; h) = 0\}.$$

Supongamos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y, para toda $h \in \mathcal{A}$, existe una función de soporte inferior F para f en (S, x_0) tal que $F''(x_0; h) > 0$. Entonces existen una vecindad N de x_0 y $m > 0$ tales que

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2 \quad (x \in S \cap N).$$

Demostración: Supongamos lo contrario. Entonces, para toda $m \in \mathbf{N}$ existe $x_m \in S$ tal que

$$|x_m - x_0| < \frac{1}{m} \quad \text{y} \quad f(x_m) - f(x_0) < \frac{1}{m}|x_m - x_0|^2.$$

Reemplacemos $\{x_m\}$ por una subsucesión convergente a x_0 en una dirección h_0. Entonces

$$f'(x_0; h_0) = \lim \frac{f(x_m) - f(x_0)}{|x_m - x_0|} \leq \lim \frac{1}{m}|x_m - x_0| \leq \lim \frac{1}{m^2} = 0.$$

Por otra parte, $f'(x_0; h_0) \geq 0$ ya que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y, por hipóptesis, existe una función de soporte inferior para f en (S, x_0). Por lo tanto, $f'(x_0; h_0) = 0$ y, como $h_0 \in T_S(x_0) \subset R$ es un vector unitario, $h_0 \in \mathcal{A}$. Sea F una función de soporte inferior para f en (S, x_0) que satisface $F''(x_0; h_0) > 0$ y definamos $G := f - F$. Tenemos

$$\frac{F(x_m) - F(x_0)}{|x_m - x_0|^2} + \frac{G(x_m)}{|x_m - x_0|^2} < \frac{1}{m}.$$

Sin embargo, $G(x_m) \geq 0$ para toda $m \in \mathbf{N}$ y $F'(x_0) = 0$. Esto implica que

$$\frac{1}{2}F''(x_0; h_0) = \lim \frac{F(x_m) - F(x_0)}{|x_m - x_0|^2} \leq 0$$

y llegamos a una contradicción. ∎

2.5. Restricciones con desigualdades

Analizaremos en esta sección el problema de minimizar f en el conjunto de restricciones S dado por

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) \leq 0 \ (\alpha \in A), \ g_\beta(x) = 0 \ (\beta \in B)\}$$

donde $A = \{1, \ldots, p\}$, $B = \{p+1, \ldots, m\}$, y se tiene dada una función $g = (g_1, \ldots, g_m)$ que mapea $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$.

Resulta ilustrativo ver primero cómo la teoría del caso con igualdades no lineales se puede aplicar a este problema. Para toda $x_0 \in S$ definamos el conjunto de *índices activos* en x_0 por

$$I(x_0) := \{\alpha \in A \mid g_\alpha(x_0) = 0\}$$

y consideremos el conjunto

$$S(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) = 0 \ (\alpha \in I(x_0)), \ g_\beta(x) = 0 \ (\beta \in B)\}$$

junto con su correspondiente conjunto de restricciones tangenciales en x_0 (como se definió en la Sección 2.3), o sea,

$$R_{S(x_0)}(x_0) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g_i'(x_0; h) = 0 \ (i \in I(x_0) \cup B)\}.$$

Supongamos que x_0 es una solución local de P(S). Si $g_\alpha(x_0) < 0$, sea $\epsilon_\alpha > 0$ tal que $|x - x_0| < \epsilon_\alpha \Rightarrow g_\alpha(x) < 0$ y sea $N(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0| < \epsilon\}$ donde $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_\alpha \mid g_\alpha(x_0) < 0\}$. Si $A = I(x_0)$, definimos $N(x_0) := \mathbf{R}^n$. Como $S(x_0) \cap N(x_0) \subset S$, x_0 también es una solución local de P$(S(x_0))$. Por el Teorema 2.13, si x_0 es un punto normal de $S(x_0)$ (o sea, las ecuaciones lineales $g_i'(x_0; h) = 0$ $(i \in I(x_0) \cup B)$ en h son linealmente independientes), entonces existe un único $\lambda \in \mathbf{R}^q$ (q denota la cardinalidad de $I(x_0) \cup B$) tal que $G_x(x_0, \lambda) = 0$, donde

$$G(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i \in I(x_0) \cup B} \lambda_i g_i(x) \quad ((x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q).$$

Además, $\langle h, G_{xx}(x_0, \lambda)h\rangle \geq 0$ para toda $h \in R_{S(x_0)}(x_0)$. Se puede probar que, en este caso, $\lambda_\alpha \geq 0$ para toda $\alpha \in I(x_0)$ y por lo tanto, si

$$P(x_0) := \{\lambda \in \mathbf{R}^m \mid \lambda_\alpha \geq 0 \ (\alpha \in I(x_0)), \ \lambda_\alpha = 0 \ (\alpha \in A \setminus I(x_0))\}$$

y definimos F como anteriormente, o sea,

$$F(x, \lambda) := f(x) + \sum_1^m \lambda_\alpha g_\alpha(x),$$

entonces obtenemos el siguiente conjunto de condiciones necesarias de primer y segundo orden.

Teorema 2.21. *Supongamos que x_0 es una solución local de* P(S). *Si x_0 es un punto normal de $S(x_0)$ entonces existe un único $\lambda \in P(x_0)$ tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$. Más aún, $\langle h, F_{xx}(x_0, \lambda)h\rangle \geq 0$ para toda $h \in R_{S(x_0)}(x_0)$.*

Este resultado nos proporciona condiciones necesarias de segundo orden pero, como veremos en esta sección, dichas condiciones se pueden mejorar considerablemente. Para hacerlo consideraremos no los vectores tangentes curvilíneos $C_S(x_0)$ sino el cono tangente $T_S(x_0)$ de S en x_0.

Definamos el conjunto de vectores que satisfacen las *restricciones tangenciales de S en x_0* por

$$R_S(x_0) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g'_\alpha(x_0; h) \leq 0 \ (\alpha \in I(x_0)),\ g'_\beta(x_0; h) = 0 \ (\beta \in B)\}.$$

Como en el caso de igualdades, tenemos que $T_S(x_0) \subset R_S(x_0)$ para toda $x_0 \in S$, pero el converso no necesariamente es cierto.

Ejemplo 2.22. Sean $g_1(x, y) = -x^3$, $g_2(x, y) = -y^3$ $(x, y \in \mathbf{R})$ y

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g_\alpha(x, y) \leq 0 \ (\alpha = 1, 2)\}.$$

En este caso, $T_S(0, 0) = \{(h, k) \in \mathbf{R}^2 \mid h \geq 0,\ k \geq 0\}$, pero $R_S(0, 0) = \mathbf{R}^2$.

Definición 2.23. Decimos que $x_0 \in S$ es un
a. *punto regular de S* si $T_S(x_0) = R_S(x_0)$.
b. *punto cuasi-regular de S* si para cualquier $z \in T_S(x_0)^*$ existe $\lambda \in P(x_0)$ tal que $z = \sum_1^m \lambda_i g'_i(x_0)$.

Nótese que, por el Teorema 1.33, si x_0 es un punto regular de S entonces es un punto cuasi-regular de S. El converso no necesariamente es cierto.

Ejemplo 2.24. Sea

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0,\ x + y \leq 0,\ x^2 - y^2 = 0\}$$

que consiste en los dos rayos definidos por las relaciones $x \leq 0$, $y = \pm x$. Entonces el origen es un punto cuasi-regular de S, pero no es un punto regular de S.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{E} := \{x_0 \in S \mid \text{existe } \lambda \in P(x_0) \text{ tal que } F_x(x_0, \lambda) = 0\}$$

cuyos elementos se dice que satisfacen la *regla de multiplicadores de Lagrange* de primer orden. La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que un punto satisfaga dichas condiciones.

Proposición 2.25. *Sea $x_0 \in S$. Entonces se satisfacen:*
a. *Si x_0 es un punto mínimo cuasi-regular de f en S entonces $x_0 \in \mathcal{E}$.*
b. *Si $x_0 \in \mathcal{E}$ entonces $F(\cdot, \lambda)$ es una función de soporte inferior para f en (S, x_0) y, por lo tanto, $f'(x_0; h) \geq 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$.*

c. *$x_0 \in \mathcal{E}$ si y solo si $f'(x_0; h) \geq 0$ para toda $h \in R_S(x_0)$.*

Demostración:

(a): Por ser x_0 un punto mínimo de f en S, por el Teorema 2.17 sabemos que $f'(x_0; h) \geq 0$ para toda $h \in T_S(x_0)$, o sea, $-f'(x_0) \in T_S(x_0)^*$. Por ser x_0 cuasi-regular, existe $\lambda \in P(x_0)$ tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$.

(b): La primera afirmación es clara y la segunda se sigue de la Observación 1.38 o directamente de (c) ya que $T_S(x_0) \subset R_S(x_0)$.

(c): Sea $x_0 \in \mathcal{E}$ y sea $\lambda \in P(x_0)$ tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$. Por lo tanto, para toda $h \in R_S(x_0)$,

$$0 = \langle F_x(x_0, \lambda), h \rangle = f'(x_0; h) + \sum_1^m \lambda_\alpha g'_\alpha(x_0; h) \leq f'(x_0; h).$$

Para el converso, si $\langle -f'(x_0); h \rangle \leq 0$ para toda $h \in R_S(x_0)$ entonces, por el Teorema 1.33, existe $\{\lambda_i\}_{i \in J} \subset \mathbf{R}$ donde $J = I(x_0) \cup B$ tal que $\lambda_\alpha \geq 0$ para toda $\alpha \in I(x_0)$ y $f'(x_0) + \sum_J \lambda_i g'_i(x_0) = 0$. El resultado se sigue definiendo $\lambda_\alpha = 0$ para toda $\alpha \in A \setminus I(x_0)$. ∎

Los siguientes tres resultados corresponden a condiciones suficientes para un mínimo local estricto de f en S. Como se verá, las condiciones obtenidas son una consecuencia inmediata de las condiciones suficientes derivadas en la Sección 4. Comenzaremos con un lema que caracteriza los elementos h de $R_S(x_0)$ para los cuales $f'(x_0; h) = 0$.

Lema 2.26. *Supongamos que $x_0 \in \mathcal{E}$ y $\lambda \in P(x_0)$ es tal que $F_x(x_0, \lambda) = 0$. Sea $\Gamma := \{\alpha \in A \mid \lambda_\alpha > 0\}$. Entonces, para toda $h \in R_S(x_0)$, $h \neq 0$,*

$$f'(x_0; h) = 0 \Leftrightarrow g'_\alpha(x_0; h) = 0 \quad (\alpha \in \Gamma).$$

Demostración: Sea $h \in R_S(x_0)$, $h \neq 0$. Entonces

$$0 = F_x(x_0, \lambda; h) = f'(x_0; h) + \sum_{\alpha \in \Gamma} \lambda_\alpha g'_\alpha(x_0; h).$$

Por lo tanto, si $g'_\alpha(x_0; h) = 0$ $(\alpha \in \Gamma)$, tenemos $f'(x_0; h) = 0$. Para el converso, si $f'(x_0; h) = 0$, se sigue de las relaciones $\lambda_\alpha > 0$ y $g'_\alpha(x_0; h) \leq 0$ que $g'_\alpha(x_0; h) = 0$ $(\alpha \in \Gamma)$. ∎

Teorema 2.27. *Si $x_0 \in \mathcal{E}$ y $\{h \in R_S(x_0) \mid f'(x_0; h) = 0\} = \{0\}$ entonces x_0 da un mínimo local estricto de f en S.*

Demostración: Como $f'(x_0; h) > 0$ para toda $h \in T_S(x_0) \subset R_S(x_0)$, $h \neq 0$, el resultado se sigue del Teorema 2.18. ∎

Teorema 2.28. *Sea* $x_0 \in S$ *y supongamos que existe* $h \in R_S(x_0)$, $h \neq 0$ *tal que* $f'(x_0; h) = 0$. *Si, para cada* $h \neq 0$ *de este tipo, existe* $\lambda \in P(x_0)$ *tal que* $F_x(x_0, \lambda) = 0$ *y* $F_{xx}(x_0, \lambda; h) > 0$, *entonces existen una vecindad* N *de* x_0 *y* $m > 0$ *tales que*

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2 \quad (x \in S \cap N).$$

Demostración: Como $F(\cdot, \lambda)$ es una función de soporte inferior para f en (S, x_0), el resultado se sigue del Teorema 2.20. ▮

Teorema 2.29. *Supongamos que* $x_0 \in \mathcal{E}$, $\lambda \in P(x_0)$ *y* $F_x(x_0, \lambda) = 0$. *Sea* $\Gamma := \{\alpha \in A \mid \lambda_\alpha > 0\}$ *y consideremos el conjunto de restricciones tangenciales modificadas* $\tilde{R}_S(x_0; \lambda)$ *definido como*

$$\{h \in \mathbf{R}^n \mid g'_\alpha(x_0; h) \leq 0 \ (\alpha \in I(x_0),\ \lambda_\alpha = 0),\ g'_\beta(x_0; h) = 0 \ (\beta \in \Gamma \cup B)\}$$

el cual satisface

$$\begin{aligned} \tilde{R}_S(x_0; \lambda) &= \{h \in R_S(x_0) \mid g'_\alpha(x_0; h) = 0 \ (\alpha \in \Gamma)\} \\ &= \{h \in R_S(x_0) \mid f'(x_0; h) = 0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $F_{xx}(x, \lambda; h) > 0$ *para toda* $h \in \tilde{R}_S(x_0; \lambda)$, $h \neq 0$. *Entonces existen una vecindad* N *de* x_0 *y* $m > 0$ *tales que*

$$f(x) \geq f(x_0) + m|x - x_0|^2 \quad (x \in S \cap N).$$

Demostración: Claramente las igualdades se satisfacen por definición de $R_S(x_0)$ y por el Lema 2.26. Ahora, si existe $h \in \tilde{R}_S(x_0; \lambda) \subset R_S(x_0)$, $h \neq 0$, tal que $f'(x_0; h) = 0$, la conclusión se sigue del teorema anterior. De otro modo, se tiene que $f'(x_0; h) > 0$ para toda $h \in \tilde{R}_S(x_0; \lambda)$, $h \neq 0$. En este caso existen, por el Teorema 2.18, una vecindad N de x_0 y $\tilde{m} > 0$ tales que $f(x) - f(x_0) \geq \tilde{m}|x - x_0|$ en $S \cap N$. Seleccionando $m > 0$ tal que $\tilde{m}|x - x_0| \geq m|x - x_0|^2$ en N, se obtiene el resultado. ▮

El siguiente resultado nos proporciona condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden en términos del conjunto de restricciones tangenciales modificadas.

Teorema 2.30. *Supongamos que* x_0 *es una solución de* $\mathrm{P}(S)$ *y* $x_0 \in \mathcal{E}$. *Sea* $\lambda \in P(x_0)$ *tal que* $F_x(x_0, \lambda) = 0$ *y sea* $\Gamma := \{\alpha \in A \mid \lambda_\alpha > 0\}$. *Consideremos el conjunto de restricciones modificadas*

$$\tilde{S}_\lambda := \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) \leq 0 \ (\alpha \in A,\ \lambda_\alpha = 0),\ g_\beta(x) = 0 \ (\beta \in \Gamma \cup B)\}$$

el cual satiface

$$\tilde{S}_\lambda = \{x \in S \mid g_\alpha(x) = 0 \ (\alpha \in \Gamma)\} = \{x \in S \mid F(x,\lambda) = f(x)\}.$$

Si x_0 es un punto regular de $\tilde{S}_\lambda$ entonces $F_{xx}(x_0,\lambda;h) \geq 0$ para toda $h \in \tilde{R}_S(x_0;\lambda)$.

Demostración: Claramente $\Gamma \subset I(x_0)$ y, para toda $x \in S$,

$$F(x,\lambda) - f(x) = \sum_{\alpha \in \Gamma} \lambda_\alpha g_\alpha(x).$$

Como $g_\alpha(x) \leq 0$ para toda $x \in S$ y $\alpha \in \Gamma$, se cumple la primera afirmación. Por lo tanto $\tilde{R}_S(x_0;\lambda)$ corresponde al conjunto de restricciones tangenciales de $\tilde{S}_\lambda$ en x_0. Si x_0 es un punto regular de $\tilde{S}_\lambda$, entonces $T_{\tilde{S}_\lambda}(x_0) = \tilde{R}_S(x_0;\lambda)$. Como $f(x) = F(x,\lambda)$ en $\tilde{S}_\lambda$, el punto x_0 minimiza $F(\cdot,\lambda)$ en $\tilde{S}_\lambda$. Como $F_x(x_0,\lambda) = 0$ tenemos, por el Teorema 2.17, $F_{xx}(x_0,\lambda;h) \geq 0$ para toda $h \in T_{\tilde{S}_\lambda}(x_0)$. ▮

Es importante resaltar el hecho de que el conjunto

$$R_{S(x_0)}(x_0) := \{h \in \mathbf{R}^n \mid g_i'(x_0;h) = 0 \ (i \in I(x_0) \cup B)\}$$

en el cual se basan las condiciones necesarias de segundo orden obtenidas en el Teorema 2.21, está contenido en el conjunto $\tilde{R}_S(x_0;\lambda)$ para toda $\lambda \in P(x_0)$ y la contención es generalmente propia. De hecho es fácil encontrar ejemplos para los cuales un punto x_0 pertenece a $\mathcal{E}$ de manera que, para alguna $\lambda \in P(x_0)$, $F_x(x_0,\lambda) = 0$ y, más aún, $\langle h, F_{xx}(x_0,\lambda)h\rangle \geq 0$ para toda $h \in R_{S(x_0)}(x_0)$, pero x_0 es un punto regular de $\tilde{S}_\lambda$ y $\langle h, F_{xx}(x_0,\lambda)h\rangle < 0$ para alguna $h \in \tilde{R}_S(x_0;\lambda)$. En este caso, el Teorema 2.21 no proporciona ninguna información, pero uno concluye del Teorema 2.30 que el punto x_0 no minimiza localmente a f en S. Por esta razón, llamaremos a las condiciones dadas en los Teoremas 2.21 y 2.30 condiciones de optimalidad de segundo orden *débiles* y *fuertes* respectivamente.

2.6. Normalidad

En esta sección daremos un criterio que implica regularidad tanto en el caso de restricciones con igualdades como con desigualdades. El criterio obtenido se basa en el siguiente resultado, el cual es una consecuencia inmediata del teorema de la función implícita.

Lema 2.31. *Supongamos que tenemos funciones* $g_1, \dots, g_m$ *que mapean* $\mathbf{R}^n$ *en* $\mathbf{R}$*, de clase* C^2 *en una vecindad de un punto* x_0 *en* $\mathbf{R}^n$*, y tal que el conjunto* $\{g'_\alpha(x_0) \mid \alpha = 1, \dots, m\}$ *es linealmente independiente. Entonces, para cada* $h \in \mathbf{R}^n$*, existen* $\epsilon > 0$ *y una función* $x\colon [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^n$ *de clase* C^2 *tal que* $x(0) = x_0$*,* $\dot{x}(0) = h$ *y, para toda* $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ *y* $\alpha \in \{1, \dots, m\}$*,*

$$g_\alpha(x(t)) = g_\alpha(x_0) + t g'_\alpha(x_0; h).$$

Demostración: Sea h_0 un vector arbitrario en $\mathbf{R}^n$ y, para toda $\alpha = 1, \dots, m$, denotemos por h_α el gradiente $g'_\alpha(x_0)$. Como los vectores $h_1, \dots, h_m$ son linealmente independientes,

$$|g'_\alpha(x_0; h_\beta)| = |\langle h_\alpha, h_\beta \rangle| \neq 0.$$

Sea H la matriz $n \times m$-dimensional dada por $(h_1, \dots, h_m)$ y definamos, para toda $(t, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ y $\alpha \in \{1, \dots, m\}$,

$$G_\alpha(t, b) = g_\alpha(x_0 + Hb + th_0) - g_\alpha(x_0) - t g'_\alpha(x_0; h_0),$$

$$G(t, b) = (G_1(t, b), \dots, G_m(t, b)).$$

Como $G(0, 0) = 0$ y $|G_b(0, 0)| = |g'_\alpha(x_0; h_\beta)| \neq 0$, se sigue del teorema de la función implícita que existen $\epsilon > 0$ y $b\colon [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^m$ de clase C^2 tales que, para toda $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, $b(0) = 0$ y $G(t, b(t)) = 0$. Diferenciando la identidad anterior en $t = 0$ encontramos que $b'(0) = 0$. Por lo tanto, la función $x\colon [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^n$ definida por $x(t) = x_0 + Hb(t) + th_0$ satisface las condiciones requeridas. ∎

Aplicaremos ahora el resultado anterior al conjunto

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_\alpha(x) \leq 0 \ (\alpha \in A),\ g_\beta(x) = 0 \ (\beta \in B)\}$$

de la sección anterior. En la demostración supondremos que g es de clase C^2.

Teorema 2.32. *Sea* $x_0 \in S$*. Si el conjunto* $\{g'_\alpha(x_0) \mid \alpha \in I(x_0) \cup B\}$ *es linealmente independiente, entonces* x_0 *es un punto regular de* S *y* $R_S(x_0) = C_S^+(x_0) = T_S(x_0)$*.*

Demostración: Por la Proposición 1.36 y el hecho de que $T_S(x_0) \subset R_S(x_0)$, basta probar que $R_S(x_0) \subset C_S^+(x_0)$. Sea $h \in R_S(x_0)$. Por el Lema 2.31, existen $\epsilon > 0$ y una función $x\colon [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^n$ de clase C^2 tal que $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = h$ y, para toda $t \in [-\epsilon, \epsilon]$ y $\alpha \in I(x_0) \cup B$, $g_\alpha(x(t)) = t g'_\alpha(x_0; h)$. Por lo tanto $x(t) \in S$ para toda $t \geq 0$. Esto prueba que $h \in C_S^+(x_0)$. ∎

Es frecuente encontrar la definición de normalidad en términos de el conjunto $\{g'_\alpha(x_0) \mid \alpha \in I(x_0) \cup B\}$. Un punto x_0 es normal si ese conjunto es linealmente independiente y, por el teorema anterior, normalidad implica regularidad. Sin embargo, terminaremos este capítulo enunciando otro criterio que implica regularidad en el cual, para problemas con restricciones con igualdades y desigualdades, se puede basar el concepto de normalidad. La demostración y algunas consecuencias de este resultado se pueden encontrar en [6].

Proposición 2.33. *Sea x_0 en S. Entonces son equivalentes:*
a. $\{g'_\beta(x_0) \mid \beta \in B\}$ *es linealmente independiente y existe $h \in \mathbf{R}^n$ tal que*

$$g'_\alpha(x_0; h) < 0 \ (\alpha \in I(x_0)), \quad g'_\beta(x_0; h) = 0 \ (\beta \in B).$$

b. *Las relaciones $\sum_1^m \lambda_i g'_i(x_0) = 0$, $\lambda \in P(x_0)$ implican que $\lambda = 0$.*
Más aún, estas condiciones implican que x_0 es un punto regular de S.

Capítulo 3

El problema de Lagrange con puntos fijos

3.1. Introducción

De acuerdo con un artículo ampliamente citado de Gilbert y Bernstein [4] escrito en 1983, "tratados matemáticos rigurosos de condiciones necesarias de segundo orden para problemas de control óptimo se encuentran limitados". En ese artículo, las condiciones necesarias que se obtienen se comparan con (y se prueba que son una generalización de) las condiciones derivadas en [5] y [22].

De acuerdo con Gilbert y Bernstein, "Hestenes considera un problema bastante general de control óptimo pero impone la hipótesis frecuente de que el conjunto de control es abierto. Su resultado principal afirma que la segunda variación de una función apropiada es no negativa en un conjunto de variaciones admisibles relacionadas con condiciones de primer orden. Posteriormente, Warga obtuvo un resultado semejante para problemas en los que los controles están restringidos a un conjunto convexo, no necesariamente abierto".

Desde entonces, la teoría de condiciones de segundo orden se ha estudiado por una gran cantidad de autores. En la literatura puede uno encontrar condiciones de este tipo para una gran variedad de problemas específicos de control óptimo de acuerdo con las restricciones, los espacios de procesos admisibles, las hipótesis sobre las funciones que delimitan el problema, etc (ver, por ejemplo, [2, 7-10, 12, 20, 23-25] y las referencias en ellos). No todos coinciden y puede resultar extremadamente complicado comparar entre distintos problemas y las condiciones obtenidas, pero ese no es el objetivo de este trabajo.

La idea principal de este este trabajo es explicar de manera clara cómo una técnica usada por Hestenes [5] para obtener condiciones necesarias de segundo orden para problemas sin restricciones se puede generalizar a problemas que involucran igualdades y desigualdades en las funciones de control. Como se verá posteriormente y explicaremos con detalle, las condiciones que obtendremos para problemas con desigualdades pueden resultar más útiles que las condiciones clásicas conocidas en la literatura.

El problema que analizaremos, conocido como el problema de control de puntos fijos de Lagrange (sin restricciones isoperimétricas), como está presentado en [5, p 251], es el siguiente.

Minimizar $I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$ sujeto a

$x\colon T \to \mathbf{R}^n$ es C^1 por fragmentos; $u\colon T \to \mathbf{R}^m$ es continua por fragmentos;

$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ $(t \in T)$;

$x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$;

$(t,x(t),u(t)) \in \mathcal{A}$ $(t \in T)$,

donde $T = [t_0,t_1]$ es un intervalo compacto fijo en $\mathbf{R}$.

Consideraremos tres casos: cuando $\mathcal{A}$ es un subconjunto abierto (relativo) de $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, cuando $\mathcal{A}$ está definido por igualdades en el control, y cuando $\mathcal{A}$ está definido por igualdades y desigualdades en el control. El primer caso, que veremos con detalle en este capítulo, está tomado de [5] donde condiciones de segundo orden se obtienen suponiendo normalidad del proceso en consideración. Esta noción es introducida para asegurar unicidad de los multiplicadores de Lagrange (en analogía con el caso de dimensión finita visto en el capítulo anterior) que aparecen en las condiciones necesarias de primer orden, cuando el multiplicador del costo es igual a 1.

3.2. Planteamiento del problema

Comencemos definiendo el espacio de funciones en donde la funcional que se desea minimizar está definida. Posteriormente plantearemos el problema que nos concierne junto con condiciones de primer orden bien conocidas y establecidas, en particular, en [5].

Definición 3.1. Una función con valores reales se dice que es *continua por fragmentos* en un intervalo $[a,b]$ si el intervalo se puede subdividir en un número finito de intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 1, \ldots, k)$ con $t_1 = a$ y $t_{k+1} = b$, en cada uno de los cuales u es continua y tiene límites por la izquierda $u(t_i - 0)$ y derecha $u(t_i + 0)$. El símbolo $u(t_i)$ se usa para denotar $u(t_i - 0)$ si se está considerando el intervalo $[a, t_i]$, y para denotar $u(t_i + 0)$ si se está considerando el intervalo $[t_i, b]$. En cualquier otro caso $u(t_i)$ denota cualquiera de los dos valores $u(t_i - 0)$, $u(t_i + 0)$.

Una función con valores reales se dice que es *de clase C^1 por fragmentos* en $[a, b]$ si es continua en $[a, b]$ y su derivada es continua por fragmentos en $[a, b]$. Para funciones con valores en $\mathbf{R}^n$, estas definiciones se aplican si cada componente satisface las condiciones requeridas.

Supongamos que tenemos dados un intervalo $T := [t_0, t_1]$ en $\mathbf{R}$, dos puntos ξ_0, ξ_1 en $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{A}$ un subconjunto de $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, y funciones L y f que mapean $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^n$ respectivamente.

Denotemos por X el espacio de funciones de clase C^1 por fragmentos que mapean T en $\mathbf{R}^n$, por $\mathcal{U}$ el espacio de funciones continuas por fragmentos que mapean T en $\mathbf{R}^m$, sea $Z := X \times \mathcal{U}$, y consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} D &:= \{(x, u) \in Z \mid \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ (t \in T)\}, \\ Z_e(\mathcal{A}) &:= \{(x, u) \in D \mid (t, x(t), u(t)) \in \mathcal{A} \ (t \in T),\ x(t_0) = \xi_0,\ x(t_1) = \xi_1\}, \end{aligned}$$

Sea $I \colon Z \to \mathbf{R}$ la funcional dada por

$$I(x, u) := \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \quad ((x, u) \in Z).$$

El problema que nos concierne y denotaremos por (P) es el de minimizar I sobre $Z_e(\mathcal{A})$.

Los elementos de Z se llamarán *procesos* y un proceso (x, u) es *admisible* si pertenece a $Z_e(\mathcal{A})$. Un proceso (x, u) es solución de (P) si es admisible y $I(x, u) \leq I(y, v)$ para todo proceso admisible (y, v). Supondremos que L y f son de clase C^2 y, a lo largo de este capítulo, que $\mathcal{A}$ es (relativamente) abierto, o sea, abierto en la topología relativa de $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$. Recordemos que la notación '*' denota transpuesta.

3.3. Condiciones de primer orden

Las siguientes condiciones de primer orden son conocidas en la literatura como (una versión del) Principio Máximo de Pontryagin. Para la demostración véase por ejemplo [5, p 254].

Para toda (t,x,u,p,λ) en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ sea

$$H(t,x,u,p,\lambda) := \langle p, f(t,x,u)\rangle - \lambda L(t,x,u).$$

Teorema 3.2. *Supongamos que* (x_0,u_0) *es solución de* (P). *Entonces existen* $\lambda_0 \geq 0$ *y* $p \in X$*, no ambos cero, tales que*

a. $\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0)$ *en cada intervalo de continuidad de* u_0.

b. $H(t,x_0(t),u,p(t),\lambda_0) \leq H(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0)$ *para toda* $(t,u) \in T \times \mathbf{R}^m$ *con* $(t,x_0(t),u) \in \mathcal{A}$.

Observación 3.3. En el teorema anterior, la función

$$t \mapsto H(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0)$$

es continua en T y, como suponemos que $\mathcal{A}$ es abierto,

$$H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0) = 0 \text{ y } H_{uu}(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0) \leq 0 \quad (t \in T).$$

Basados en este resultado, definamos $\mathcal{E}$ como el conjunto de $(x,u,p) \in Z \times X$ que satisfacen

a. $\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x(t),u(t),p(t),1)$ $(t \in T)$;

b. $H_u(t,x(t),u(t),p(t),1) = 0$ $(t \in T)$,

cuyos elementos llamaremos *extremos.*

Definición 3.4. Decimos que $(x,u) \in Z_e(\mathcal{A})$ es *normal* si, en T, $p \equiv 0$ es la única solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -A^*(t)p(t) \quad [= -H_x^*(t,x(t),u(t),p(t),0)] \\ 0 &= B^*(t)p(t) \quad [= H_u^*(t,x(t),u(t),p(t),0)] \end{aligned}$$

donde $A(t) = f_x(t,x(t),u(t))$ y $B(t) = f_u(t,x(t),u(t))$.

Teorema 3.5. *Supongamos que* (x_0,u_0) *es una solución normal de* (P). *Entonces existe un único* $p \in X$ *tal que* (x_0,u_0,p) *es un extremo.*

Demostración: Por el Teorema 3.2 y la Observación 3.3, existen $\lambda_0 \geq 0$ y $p \in X$, no ambos cero, tales que

$$\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0), \quad H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\lambda_0) = 0.$$

Como (x_0,u_0) es normal, claramente $\lambda_0 > 0$. Si $q \in X$ también satisface

$$\dot{q}(t) = -H_x^*(t,x_0(t),u_0(t),q(t),\lambda_0) \quad H_u(t,x_0(t),u_0(t),q(t),\lambda_0) = 0$$

entonces

i. $[\dot{p}(t) - \dot{q}(t)] = -f_x^*(t, x_0(t), u_0(t))[p(t) - q(t)]$ $(t \in T)$;
iii. $0 = f_u^*(t, x_0(t), u_0(t))[p(t) - q(t)]$ $(t \in T)$,

lo cual implica que $p \equiv q$. El resultado se sigue escogiendo los multiplicadores p/λ_0 y $\lambda_0 = 1$. ∎

3.4. Condiciones de segundo orden

Para cualquier $(x, u, p) \in Z \times X$ sea

$$J((x, u, p); (y, v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), v(t))dt \quad ((y, v) \in Z)$$

donde, para todo $(t, y, v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$2\Omega(t, y, v) := -[\langle y, H_{xx}(t)y\rangle + 2\langle y, H_{xu}(t)v\rangle + \langle v, H_{uu}(t)v\rangle]$$

y $H(t)$ denota $H(t, x(t), u(t), p(t), 1)$.

Para derivar condiciones necesarias de segundo orden, introduzcamos primero un conjunto cuyos elementos están sumergidos en una familia uno-paramétrica de procesos admisibles y para el cual la derivación de condiciones de segundo orden es inmediata.

Definición 3.6. Para $(x_0, u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$ denotemos por $\mathcal{W}(x_0, u_0)$ el conjunto de todas las $(y, v) \in Z$ para las cuales existen $\delta > 0$ y una familia uno-paramétrica $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ $(|\epsilon| < \delta)$ tales que

i. $x(t, 0) = x_0(t)$, $u(t, 0) = u_0(t)$ $(t \in T)$.
ii. $x_\epsilon(t, 0) = y(t)$, $u_\epsilon(t, 0) = v(t)$ $(t \in T)$.

Lema 3.7. *Supongamos que (x_0, u_0) es solución de* (P) *y existe $p \in X$ tal que $(x_0, u_0, p) \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$J((x_0, u_0, p); (y, v)) \geq 0 \quad \textit{para toda } (y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0).$$

Demostración: Definamos

$$K(x, u) := \langle p(t_1), \xi_1\rangle - \langle p(t_0), \xi_0\rangle + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt \qquad ((x, u) \in Z)$$

donde, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t, x, u) := L(t, x, u) - \langle p(t), f(t, x, u)\rangle - \langle \dot{p}(t), x\rangle.$$

Observemos que

$$F(t,x,u) = -H(t,x,u,p(t),1) - \langle \dot{p}(t), x\rangle$$

y, si $(x,u) \in Z_e(\mathcal{A})$, entonces $K(x,u) = I(x,u)$. Sea $(y,v) \in \mathcal{W}(x_0,u_0)$ y sean $\delta > 0$ y $(x(\cdot,\epsilon), u(\cdot,\epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ $(|\epsilon| < \delta)$ como en la Definición 3.6. Entonces

$$g(\epsilon) := K(x(\cdot,\epsilon), u(\cdot,\epsilon)) = I(x(\cdot,\epsilon), u(\cdot,\epsilon)) \qquad (|\epsilon| < \delta)$$

satisface $g(\epsilon) \geq g(0) = K(x_0,u_0) = I(x_0,u_0)$ $(|\epsilon| < \delta)$. Nótese que

$$F_x(t,x_0(t),u_0(t)) = -H_x(t,x_0(t),u_0(t),p(t),1) - \dot{p}^*(t) = 0,$$

$$F_u(t,x_0(t),u_0(t)) = -H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),1) = 0$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad g''(0) = \int_{t_0}^{t_1} \{\langle F_x(t,x_0(t),u_0(t)), x_{\epsilon\epsilon}(t,0)\rangle + \\ &\qquad\qquad \langle F_u(t,x_0(t),u_0(t)), u_{\epsilon\epsilon}(t,0)\rangle\}dt + K''(y,v) \\ &= \quad K''(y,v) = J((x_0,u_0,p);(y,v)). \blacksquare \end{aligned}$$

Definamos ahora un conjunto de "variaciones admisibles" el cual, bajo ciertas hipótesis, se probará que está contenido en $\mathcal{W}(x_0,u_0)$. Enunciemos primero el siguiente resultado de la teoría de ecuaciones diferenciales (ver [5]).

Teorema 3.8. *Sea $\mathcal{F}$ una región en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ y supongamos que $f\colon \mathcal{F} \to \mathbf{R}^n$ y $f_x(t,x)$ son continuas en $\mathcal{F}$. Sea $x_0\colon [a,b] \to \mathbf{R}^n$ una solución de la ecuación diferencial*

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t)).$$

Entonces existen $\rho > 0$ y $\mathcal{F}_0$ vecindad de $\{(t,x_0(t)) \mid t \in [a,b]\}$ tales que, a través de cada punto $(\alpha,\beta) \in \mathcal{F}_0$, pasa una única $x(\cdot;\alpha,\beta)\colon [a-\rho, b+\rho] \to \mathbf{R}^n$ solución de la ecuación diferencial con

$$x(t;\alpha,x_0(\alpha)) = x_0(t) \quad (t \in [a,b]).$$

Las funciones $x(t;\alpha,\beta)$, $\dot{x}(t;\alpha,\beta)$ son continuas y poseen derivadas continuas con respecto a β para toda $(t,\alpha,\beta) \in [a-\rho, b+\rho] \times \mathcal{F}_0$. Además, el determinante $|x_\beta(\cdot;\alpha,\beta)| \neq 0$ en este conjunto. Si $f \in C^m(\mathcal{F})$ entonces $x, \dot{x} \in C^m$.

Dado un proceso (x,u) sean

$$A(t) := f_x(t,x(t),u(t)), \quad B(t) := f_u(t,x(t),u(t)) \quad (t \in T),$$

y consideremos para $(y,v) \in Z$ el sistema

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \quad (t \in T)$$

al que nos referiremos por $L(x,u)$.

Definición 3.9. Dada $(x,u) \in Z_e(\mathcal{A})$, una solución (y,v) de $L(x,u)$ se llama una *variación admisible a lo largo de* (x,u). Sea

$$Y(x,u) := \{(y,v) \in Z \mid (y,v) \text{ es solución de } L(x,u) \text{ y } y(t_0) = y(t_1) = 0\}.$$

Lema 3.10. *Supongamos que* $(x_0,u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$ *y existen variaciones admisibles* $(y_1,v_1),\ldots,(y_n,v_n)$ *a lo largo de* (x_0,u_0) *tales que* $y_i(t_0) = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ *y* $|M| \neq 0$ *donde* $M = (y_1(t_1)\cdots y_n(t_1))$. *Entonces* $Y(x_0,u_0) \subset \mathcal{W}(x_0,u_0)$.

Demostración: Sea $(y,v) \in Y(x_0,u_0)$ y definamos

$$\bar{u}(t,\epsilon,\alpha) := u_0(t) + \epsilon v(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(t) \quad (t \in T,\ \epsilon, \alpha_i \in \mathbf{R})$$

donde $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Por el Teorema 3.8, las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),\bar{u}(t,\epsilon,\alpha)) \quad (t \in T), \quad x(t_0) = \xi_0$$

tiene soluciones únicas $\bar{x}(t,\epsilon,\alpha)$ $(t \in T,\ |\epsilon| < \eta,\ |\alpha_i| < \eta)$ tales que $\bar{x}(t,0,0) = x_0(t)$. La función $\bar{x}(t,\epsilon,\alpha)$ es continua y tiene primera y segunda derivadas continuas con respecto a las variables $\epsilon,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Las funciones $\dot{\bar{x}}(t,\epsilon,\alpha)$ y sus primeras y segundas derivadas con respecto a $\epsilon,\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son continuas por fragmentos con respecto a t. Diferenciando con respecto a ϵ y α_i en $(\epsilon,\alpha) = (0,0)$ encontramos que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_\epsilon(t,0,0) &= A(t)\bar{x}_\epsilon(t,0,0) + B(t)v(t), \quad \bar{x}_\epsilon(t_0,0,0) = 0 \\ \dot{\bar{x}}_{\alpha_i}(t,0,0) &= A(t)\bar{x}_{\alpha_i}(t,0,0) + B(t)v_i(t), \quad \bar{x}_{\alpha_i}(t_0,0,0) = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\bar{x}_\epsilon(t,0,0) = y(t), \quad \bar{x}_{\alpha_i}(t,0,0) = y_i(t) \quad (t \in T).$$

Sea $S := (-\eta, \eta)$ y definamos $g: S \times S^n \to \mathbf{R}^n$ por $g(\epsilon, \alpha) := \bar{x}(t_1, \epsilon, \alpha) - \xi_1$. Notemos que $g(0, 0) = 0$ y $|g_\alpha(0, 0)| = |M| \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe $0 < \delta < \eta$ y $\beta: (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^n$ de clase C^2 tal que $\beta(0) = 0$ y $g(\epsilon, \beta(\epsilon)) = 0$ $(|\epsilon| < \delta)$. Tenemos, tomando la derivada con respecto a ϵ en $\epsilon = 0$, que

$$0 = g_\epsilon(0, 0) + g_\alpha(0, 0)\beta'(0) = y(t_1) + M\beta'(0) = M\beta'(0)$$

lo cual implica que $\beta'(0) = 0$. La familia uno-paramétrica

$$x(t, \epsilon) := \bar{x}(t, \epsilon, \beta(\epsilon)), \quad u(t, \epsilon) := \bar{u}(t, \epsilon, \beta(\epsilon)) \quad (t \in T)$$

tiene las propiedades del lema ya que

$$x_\epsilon(t, 0) = \bar{x}_\alpha(t, 0, 0)\beta'(0) + y(t) = y(t),$$

$$u_\epsilon(t, 0) = \bar{u}_\alpha(t, 0, 0)\beta'(0) + v(t) = v(t).$$

Más aún,

$$x(t_1, \epsilon) - \xi_1 = \bar{x}(t_1, \epsilon, \beta(\epsilon)) - \xi_1 = g(\epsilon, \beta(\epsilon)) = 0$$

por lo que $x(\cdot, \epsilon)$ $(|\epsilon| < \delta)$ une los puntos frontera de x_0. Concluimos entonces que $(y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0)$. ▮

Por último, probaremos que la existencia de n variaciones admisibles que satisfacen las hipótesis del Lema 3.10 se puede asegurar si el proceso en consideración es normal.

Lema 3.11. *Si (x_0, u_0) es normal, entonces existen variaciones admisibles $(y_1, v_1), \ldots, (y_n, v_n)$ a lo largo de (x_0, u_0) tales que $y_i(t_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ y $|y_1(t_1) \cdots y_n(t_1)| \neq 0$.*

Demostración: Sea $Z(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tal que

$$\dot{Z}(t) = -Z(t)A(t) \ (t \in T), \quad Z(t_1) = I$$

y denotemos por $z_1, \ldots, z_n$ los vectores renglón de Z, de manera que $\dot{z}_i(t) = -A^*(t)z_i(t)$ $(t \in T, \ i = 1, \ldots, n)$. Sean $v_i(t) := B^*(t)z_i(t)$ $(t \in T, \ i = 1, \ldots, n)$ y

$$c_{ij} := \int_{t_0}^{t_1} \langle v_i(t), v_j(t) \rangle dt.$$

Las funciones $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en T ya que, de otro modo, existirían constantes $a_1, \ldots, a_n$ no todas cero tales que

$$0 = \sum_1^n a_i v_i(t) = \sum_1^n a_i B^*(t) z_i(t) \quad (t \in T)$$

y la función $z(t) := \sum_1^n a_i z_i(t)$ sería una solución no nula del sistema en la Definición 3.4. Por lo tanto el rango de $C = (c_{ij})$ es n. Ahora, sea y_i la solución de

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v_i(t) \ (t \in T), \quad y(t_0) = 0$$

y observemos que

$$\frac{d}{dt}\langle z_i(t), y_j(t)\rangle = z_i^*(t)[A(t)y_j(t) + B(t)v_j(t)] - z_i^*(t)A(t)y_j(t) = \langle v_i(t), v_j(t)\rangle$$

por lo que $\langle z_i(t_1), y_j(t_1)\rangle = c_{ij}$. Como el miembro derecho tiene rango n y $Z(t_1)$ es no singular, la matriz $(y_j^i(t_1))$ tiene rango n. ∎

Por el Teorema 3.5 y los Lemas 3.7, 3.10 y 3.11, obtenemos las siguientes condiciones necesarias de primer y segundo orden para soluciones normales del problema en consideración.

Teorema 3.12. *Supongamos que* (x_0, u_0) *es una solución normal de* (P). *Entonces existe un único* $p \in X$ *tal que* $(x_0, u_0, p) \in \mathcal{E}$. *Además,*

$$J((x_0, u_0, p); (y, v)) \geq 0$$

para toda $(y, v) \in Z$ *que satisface* $y(t_0) = y(t_1) = 0$ *y*

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t) \quad (t \in T).$$

Capítulo 4

Restricciones con igualdades en el control

4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo la técnica utilizada en el problema de Lagrange con puntos fijos sin restricciones se puede generalizar a problemas que involucran igualdades en las funciones de control.

Las ideas principales de esta generalización se pueden ver con más detalle en [15]. El enfoque utilizado contrasta con el propuesto en [3, 18, 19] donde el problema es reducido, a través de un teorema de la función implícita uniforme, a un problema sin restricciones como el estudiado en el capítulo anterior, aplicando las condiciones conocidas de segundo orden de este último. Esta técnica es implícita y proporciona poca información acerca de las dificultades que aparecen debido a la presencia de las restricciones con igualdades. Por otro lado, en [8, 9, 25], uno encuentra una derivación directa de las condiciones de segundo orden pero las demostraciones requieren de ciertos elementos que hemos simplificado u omitido completamente, como el uso del teorema de la función inversa o la convexidad del conjunto de control.

4.2. Planteamiento del problema

Supongamos que los datos del problema son como los del Capítulo 3 excepto por el conjunto de restricciones $\mathcal{A}$ dado en este caso por $\mathcal{A} = T \times \mathbf{R}^n \times U$

donde

$$U = \{u \in \mathbf{R}^m \mid \varphi(u) = 0\}$$

y φ es una función que mapea $\mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^q$ $(q \leq m)$.

Continuaremos con la misma notación del capítulo anterior y nuestro objetivo es minimizar I sobre $Z_e(\mathcal{A})$. En otras palabras, el problema que nos concierte es el de minimizar $I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$ sujeto a

a. $(x,u) \in Z$;
b. $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ $(t \in T)$;
c. $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$;
d. $\varphi(u(t)) = 0$ $(t \in T)$.

Las hipótesis sobre las funciones que delimitan el problema son como en el caso anterior, y supondremos que φ' es de rango q en U. Denotaremos por $\mathcal{U}_q$ al espacio de funciones continuas por fragmentos que mapean T en $\mathbf{R}^q$.

4.3. Condiciones de primer orden

Comencemos, como en el capítulo anterior, enunciando condiciones de primer orden (ver [5]) así como el concepto de normalidad para el problema (P).

Para toda (t,x,u,p,μ,λ) en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$ sea

$$H(t,x,u,p,\mu,\lambda) := \langle p, f(t,x,u)\rangle - \lambda L(t,x,u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle.$$

Teorema 4.1. *Supongamos que* (x_0,u_0) *es solución de* (P)*. Entonces existen* $\lambda_0 \geq 0$*,* $p \in X$ *y* $\mu \in \mathcal{U}_q$ *continuas en cada intervalo de continuidad de* u_0*, no simultáneamente iguales a cero en* T*, tales que*

a. $\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),\lambda_0)$ $(t \in T)$.
b. $H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),\lambda_0) = 0$ $(t \in T)$.
c. $H(t,x_0(t),u,p(t),\mu(t),\lambda_0) \leq H(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),\lambda_0)$ *para toda* (t,u) *en* $T \times U$*.*

Basados en estas condiciones, definamos el conjunto $\mathcal{E}$ de *extremos* como el conjunto de todas las funciones $(x,u,p,\mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_q$ que satisfacen

a. $\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x(t),u(t),p(t),\mu(t),1)$ $(t \in T)$,
b. $H_u(t,x(t),u(t),p(t),\mu(t),1) = 0$ $(t \in T)$.

Definición 4.2. Dado un proceso (x,u) sean

$$A(t) := f_x(t,x(t),u(t)), \quad B(t) := f_u(t,x(t),u(t)) \quad (t \in T).$$

Diremos que (x, u) es *normal* si, dados $p \in X$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ que satisfacen

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -A^*(t)p(t) \quad [= -H_x^*(t, x(t), u(t), p(t), 0)] \\ 0 &= B^*(t)p(t) - \varphi'^*(u(t))\mu(t) \quad [= H_u^*(t, x(t), u(t), p(t), 0)] \end{aligned}$$

se tiene que $p \equiv 0$. En este caso, claramente, también $\mu \equiv 0$.

Nótese que, si (λ_0, p, μ) es una terna de multiplicadores correspondiente a una solución normal de (P), entonces $\lambda_0 > 0$. Además, si $\lambda_0 = 1$, (p, μ) es único. Probemos esta última afirmación.

Teorema 4.3. *Si* (x, u) *es una solución normal de* (P) *entonces existe un único* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x, u, p, \mu) \in \mathcal{E}$.

Demostración: Sea (p, μ, λ_0) como en el Teorema 4.1. Como (x, u) es normal, $\lambda_0 > 0$. Por otro lado, si (q, ν, λ_0) satisface

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= -H_x^*(t, x(t), u(t), q(t), \nu(t), \lambda_0) \quad (t \in T), \\ 0 &= H_u(t, x(t), u(t), q(t), \nu(t), \lambda_0) \quad (t \in T) \end{aligned}$$

entonces

i. $[\dot{p}(t) - \dot{q}(t)] = -f_x^*(t, x(t), u(t))[p(t) - q(t)] \quad (t \in T)$;

ii. $0 = f_u^*(t, x(t), u(t))[p(t) - q(t)] - \varphi'^*(u(t))[\mu(t) - \nu(t)] \quad (t \in T)$

lo cual, por normalidad, implica que $p \equiv q$ y $\mu \equiv \nu$. El resultado se sigue eligiendo $\lambda_0 = 1$ ya que $(x, u, p/\lambda_0, \mu/\lambda_0) \in \mathcal{E}$. ∎

Terminemos esta sección probando que la noción de normalidad se puede caracterizar en términos del cono tangente a U en u, es decir,

$$\tau(u) := \{h \in \mathbf{R}^m \mid \varphi'(u)h = 0\}.$$

Proposición 4.4. *Supongamos que* $(x, u) \in Z$. *Entonces son equivalentes:*

a. (x, u) *es normal.*

b. *No existe una solución no nula* $z \in X$ *del sistema*

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h = 0 \text{ para toda } h \in \tau(u(t)) \quad (t \in T). \qquad (1)$$

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $z \in X$ satisface (1). Sea

$$\Lambda(t) := \varphi'(u(t))\varphi'^*(u(t))$$

y definamos
$$\mu(t) := \Lambda^{-1}(t)\varphi'(u(t))B^*(t)z(t) \quad (t \in T).$$
Sea $G(t) := I_{m\times m} - \varphi'^*(u(t))\Lambda^{-1}(t)\varphi'(u(t))$ y notemos que
$$\varphi'(u(t))G(t) = 0 \quad (t \in T).$$
Si $h_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ denota la k-ésima columna de $G(t)$, tenemos que
$$\varphi_i'(u(t))h_k(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, q,\ k = 1, \ldots, m)$$
es decir, $h_k(t) \in \tau(u(t))$ y, por lo tanto, $z^*(t)B(t)h_k(t) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. Esto implica que
$$0 = z^*(t)B(t)G(t) = z^*(t)B(t) - \mu^*(t)\varphi'(u(t))$$
y, por (a), $z \equiv 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Supongamos que $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ es tal que
$$\dot p(t) = -A^*(t)p(t), \quad B^*(t)p(t) = \varphi'^*(u(t))\mu(t) \quad (t \in T).$$
Sea $h \in \tau(u(t))$. Entonces
$$p^*(t)B(t)h = \mu^*(t)\varphi'(u(t))h = 0$$
y, por (b), $p \equiv 0$. ▮

4.4. Condiciones de segundo orden

En esta sección derivaremos condiciones de segundo orden para una solución normal del problema. Como se verá, las condiciones difieren de las obtenidas en el capítulo anterior ya que, en el caso que analizamos, se deben tomar en cuenta elementos del cono tangente a U. La generalización de los lemas derivados para el problema sin restricciones no son de ninguna manera inmediatos y, de hecho, la hipótesis de rango completo de la matriz φ' en el conjunto de control resulta crucial en los resultados que siguen.

Procederemos de manera análoga al caso sin restricciones. Introduciremos primero un conjunto $\mathcal{W}(x_0, u_0)$ tal que, si (x_0, u_0, p, μ) es un extremo y (x_0, u_0) es solución de (P), entonces la segunda variación de I con respecto al extremo es no negativa en ese conjunto. La noción de "variaciones admisibles" que, para este caso incluye elementos del cono tangente a U en u_0, nos proporciona un conjunto que, en el caso normal, está contenido en $\mathcal{W}(x_0, u_0)$. Estos resultados implican condiciones de segundo orden en términos de variaciones admisibles que se anulan en los puntos inicial y final del intervalo de tiempo.

Para toda $(x, u, p, \mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_q$ sea

$$J((x, u, p, \mu); (y, v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), v(t))dt \quad ((y, v) \in Z)$$

donde, para toda $(t, y, v) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$2\Omega(t, y, v) := -[\langle y, H_{xx}(t)y\rangle + 2\langle y, H_{xu}(t)v\rangle + \langle v, H_{uu}(t)v\rangle]$$

y $H(t)$ denota $H(t, x(t), u(t), p(t), \mu(t), 1)$.

Definición 4.5. Para toda $(x_0, u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$ denotemos por $\mathcal{W}(x_0, u_0)$ al conjunto de todas las $(y, v) \in Z$ para las cuales existen $\delta > 0$ y una familia uno-paramérica $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ $(|\epsilon| < \delta)$ tales que

i. $x(t, 0) = x_0(t)$, $u(t, 0) = u_0(t)$ $(t \in T)$.

ii. $x_\epsilon(t, 0) = y(t)$, $u_\epsilon(t, 0) = v(t)$ $(t \in T)$.

Lema 4.6. *Supongamos que* (x_0, u_0) *es solución de* (P) *y existe* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$. *Entonces*

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0 \quad \textit{para toda } (y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0).$$

Demostración: Definamos

$$K(x, u) := \langle p(t_1), \xi_1\rangle - \langle p(t_0), \xi_0\rangle + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt \qquad ((x, u) \in Z)$$

donde, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t, x, u) := L(t, x, u) - \langle p(t), f(t, x, u)\rangle + \langle \mu(t), \varphi(u)\rangle - \langle \dot{p}(t), x\rangle.$$

Observemos que

$$F(t, x, u) = -H(t, x, u, p(t), \mu(t), 1) - \langle \dot{p}(t), x\rangle$$

y, si $(x,u) \in Z_e(\mathcal{A})$, entonces $K(x,u) = I(x,u)$. Sea $(y,v) \in \mathcal{W}(x_0,u_0)$ y sean $\delta > 0$ y $(x(\cdot,\epsilon),u(\cdot,\epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ $(|\epsilon| < \delta)$ como en la Definición 4.5. Entonces $g(\epsilon) := K(x(\cdot,\epsilon),u(\cdot,\epsilon))$ $(|\epsilon| < \delta)$ satisface

$$g(\epsilon) = I(x(\cdot,\epsilon),u(\cdot,\epsilon)) \geq I(x_0,u_0) = K(x_0,u_0) = g(0) \qquad (|\epsilon| < \delta).$$

Nótese que, como (x_0,u_0,p,μ) es un extremo,

$$F_x(t,x_0(t),u_0(t)) = 0 \quad \text{y} \quad F_u(t,x_0(t),u_0(t)) = 0$$

y, por lo tanto,

$$0 \leq g''(0) = K''((x_0,u_0);(y,v)) = J((x_0,u_0,p,\mu);(y,v)). \blacksquare$$

Definición 4.7. Dado $(x,u) \in Z$, diremos que un proceso (y,v) es una *variación admisible a lo largo de* (x,u) si satisface
i. $\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t)$ $(t \in T)$;
ii. $\varphi'(u(t))v(t) = 0$ $(t \in T)$.
Denotemos por $Y(x,u)$ al conjunto de todas las variaciones admisibles (y,v) a lo largo de (x,u) que satisfacen $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

Lema 4.8. *Supongamos que* $(x_0,u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$ *y existen variaciones admisibles* (y_i,v_i) $(i = 1,\ldots,n)$ *a lo largo de* (x_0,u_0) *con*

$$y_i(t_0) = 0 \quad y \quad |y_1(t_1) \cdots y_n(t_1)| \neq 0.$$

Entonces $Y(x_0,u_0) \subset \mathcal{W}(x_0,u_0)$.
Demostración: Sea $(y,v) \in Y(x_0,u_0)$ y definamos

$$\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\lambda) := u_0(t) + \epsilon v(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(t) + \varphi'^*(u_0(t))\lambda$$

para toda $(t,\epsilon,\alpha,\lambda) \in T \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$. Sean $T_1,\ldots,T_s$ los subintervalos de T donde las funciones $u_0, v, v_1, \ldots, v_n$ son continuas, y definamos

$$h^j(t,\epsilon,\alpha,\lambda) := \varphi(\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\lambda))$$

para toda $(t,\epsilon,\alpha,\lambda) \in T_j \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$, $j = 1,\ldots,s$. Nótese que

$$h^j(t,0,0,0) = 0 \quad \text{y} \quad |h^j_\lambda(t,0,0,0)| = |\Lambda(t)| \neq 0 \quad (t \in T_j)$$

donde
$$\Lambda(t) = \varphi'(u_0(t))\varphi'^*(u_0(t)).$$

Por el teorema de la función implícita, existen $\nu_j > 0$ y funciones $\sigma^j\colon T_j \times (-\nu_j, \nu_j) \times (-\nu_j, \nu_j)^n \to \mathbf{R}^q$ tales que, para toda $t \in T_j$, $\sigma^j(t, 0, 0) = 0$, $\sigma^j(t, \cdot, \cdot)$ es de clase C^2 y

$$h^j(t, \epsilon, \alpha, \sigma^j(t, \epsilon, \alpha)) = \varphi(\bar{u}(t, \epsilon, \alpha, \sigma^j(t, \epsilon, \alpha)) = 0.$$

Sea $\nu := \min\{\nu_j\}$ y sea $\sigma(t, \epsilon, \alpha) := \sigma^j(t, \epsilon, \alpha)$ ($t \in T_j$, $j = 1, \ldots, s$, $|\epsilon| < \nu$, $|\alpha_i| < \nu$). Entonces

$$\varphi(\bar{u}(t, \epsilon, \alpha, \sigma(t, \epsilon, \alpha))) = 0 \quad (t \in T,\ |\epsilon| < \nu,\ |\alpha_i| < \nu).$$

Tenemos, tomando la derivada con respecto a ϵ y α_i en $(\epsilon, \alpha) = (0, 0)$, que

$$0 = \varphi'(u_0(t))[v(t) + \varphi'^*(u_0(t))\sigma_\epsilon(t, 0, 0)] = \Lambda(t)\sigma_\epsilon(t, 0, 0)$$

$$0 = \varphi'(u_0(t))[v_i(t) + \varphi'^*(u_0(t))\sigma_{\alpha_i}(t, 0, 0)] = \Lambda(t)\sigma_{\alpha_i}(t, 0, 0)$$

lo cual implica que $\sigma_\epsilon(t, 0, 0) = \sigma_{\alpha_i}(t, 0, 0) = 0$ ($t \in T$).

Definamos ahora $w(t, \epsilon, \alpha) := \bar{u}(t, \epsilon, \alpha, \sigma(t, \epsilon, \alpha))$ y observemos que

$$w_\epsilon(t, 0, 0) = v(t), \qquad w_{\alpha_i}(t, 0, 0) = v_i(t) \qquad (t \in T).$$

Por el Teorema 3.8, las ecuaciones

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t), w(t, \epsilon, \alpha)) \quad (t \in T), \quad z(t_0) = \xi_0$$

tienen soluciones únicas $z(t, \epsilon, \alpha)$ ($t \in T$, $|\epsilon| < \eta$, $|\alpha_i| < \eta$) con $0 < \eta < \nu$ tales que $z(t, 0, 0) = x_0(t)$. La función $z(t, \epsilon, \alpha)$ es continua y tiene primeras y segundas derivadas continuas con respecto a las variables $\epsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y las funciones $\dot{z}(t, \epsilon, \alpha)$ y sus primeras y segundas derivadas con respecto a $\epsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son continuas por fragmentos con respecto a t. Derivando con respecto a ϵ y α_i en $(\epsilon, \alpha) = (0, 0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{z}_\epsilon(t, 0, 0) &= A(t)z_\epsilon(t, 0, 0) + B(t)v(t), \quad z_\epsilon(t_0, 0, 0) = 0 \\
\dot{z}_{\alpha_i}(t, 0, 0) &= A(t)z_{\alpha_i}(t, 0, 0) + B(t)v_i(t), \quad z_{\alpha_i}(t_0, 0, 0) = 0
\end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$z_\epsilon(t, 0, 0) = y(t), \quad z_{\alpha_i}(t, 0, 0) = y_i(t) \quad (t \in T).$$

Sea $S := (-\eta, \eta)$ y definamos $g\colon S \times S^n \to \mathbf{R}^n$ tal que $g(\epsilon, \alpha) := z(t_1, \epsilon, \alpha) - \xi_1$. Nótese que

$$g(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad |g_\alpha(0,0)| = |M| \neq 0$$

donde $M = (y_1(t_1) \cdots y_n(t_1))$. Por el teorema de la función implícita, existen $0 < \delta < \eta$ y $\beta\colon (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}^n$ de clase C^2 tales que $\beta(0) = 0$ y $g(\epsilon, \beta(\epsilon)) = 0$ $(|\epsilon| < \delta)$. Tenemos, derivando con respecto a ϵ en $\epsilon = 0$, que

$$0 = g_\epsilon(0,0) + g_\alpha(0,0)\beta'(0) = y(t_1) + M\beta'(0) = M\beta'(0)$$

lo cual implica que $\beta'(0) = 0$. Por continuidad, podemos elegir $\delta > 0$ de tal manera que $|\beta_i(\epsilon)| < \eta$ para toda $|\epsilon| < \delta$, $i = 1, \ldots, n$. La familia uno-paramétrica

$$x(t, \epsilon) := z(t, \epsilon, \beta(\epsilon)), \quad u(t, \epsilon) := w(t, \epsilon, \beta(\epsilon)) \quad (t \in T,\ |\epsilon| < \delta)$$

tiene las propiedades del lema, ya que

$$x_\epsilon(t, 0) = z_\alpha(t, 0, 0)\beta'(0) + y(t) = y(t),$$

$$u_\epsilon(t, 0) = w_\alpha(t, 0, 0)\beta'(0) + v(t) = v(t).$$

Más aún,

$$x(t_1, \epsilon) - \xi_1 = z(t_1, \epsilon, \beta(\epsilon)) - \xi_1 = g(\epsilon, \beta(\epsilon)) = 0$$

por lo que $x(\cdot, \epsilon)$ $(|\epsilon| < \delta)$ une los puntos frontera de x_0. Finalmente, como

$$\varphi(u(t, \epsilon)) = \varphi(\bar{u}(t, \epsilon, \beta(\epsilon), \sigma(t, \epsilon, \beta(\epsilon))) = 0 \quad (t \in T,\ |\epsilon| < \delta)$$

tenemos que $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ $(|\epsilon| < \delta)$. Por lo anterior concluimos que $(y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0)$. ∎

Probemos ahora que, si el proceso en consideración es normal, se puede asegurar la existencia de n variaciones admisibles que satisfacen las hipótesis del Lema 4.8.

Lema 4.9. *Si (x_0, u_0) es normal, entonces existen variaciones admisibles (y_i, v_i) $(i = 1, \ldots, n)$ a lo largo de (x_0, u_0) con*

$$y_i(t_0) = 0 \quad y \quad |y_1(t_1) \cdots y_n(t_1)| \neq 0.$$

Demostración: Sea $Z(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tal que

$$\dot{Z}(t) = -Z(t)A(t)\ (t \in T), \quad Z(t_1) = I$$

y denotemos por $z_1, \ldots, z_n$ los vectores renglón de Z, de manera que

$$\dot{z}_i(t) = -A^*(t)z_i(t) \quad (t \in T,\ i = 1, \ldots, n).$$

Sea

$$\mu_i(t) := \Lambda^{-1}(t)\varphi'(u_0(t))B^*(t)z_i(t) \qquad (t \in T,\ i = 1, \ldots, n)$$

donde $\Lambda(t) = \varphi'(u_0(t))\varphi'^*(u_0(t))$ y sea

$$v_i(t) := B^*(t)z_i(t) - \varphi'^*(u_0(t))\mu_i(t) \qquad (t \in T,\ i = 1, \ldots, n).$$

Definamos ahora

$$c_{ij} := \int_{t_0}^{t_1} \langle v_i(t), v_j(t)\rangle dt \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Nótese que las funciones $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en T ya que, de otro modo, existirían constantes $a_1, \ldots, a_n$ no todas cero tales que

$$0 = \sum_1^n a_i v_i(t) = \sum_1^n a_i[B^*(t)z_i(t) - \varphi'^*(u_0(t))\mu_i(t)] \quad (t \in T)$$

y la función $z(t) := \sum_1^n a_i z_i(t)$ sería una solución no nula de (1). Esto implica que el rango de la matriz (c_{ij}) es n. Notemos también que

$$\varphi'(u_0(t))v_i(t) = \varphi'(u_0(t))B^*(t)z_i(t) - \Lambda(t)\mu_i(t) = 0.$$

Ahora, sea y_i la solución de

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v_i(t)\ (t \in T), \quad y(t_0) = 0$$

y obsérvese que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle z_i(t), y_j(t)\rangle &= z_i^*(t)[A(t)y_j(t) + B(t)v_j(t)] - z_i^*(t)A(t)y_j(t) \\
&= [v_i^*(t) + \mu_i^*(t)\varphi'(u_0(t))]v_j(t) \\
&= \langle v_i(t), v_j(t)\rangle
\end{aligned}$$

por lo que $\langle z_i(t_1), y_j(t_1)\rangle = c_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Como el miembro derecho tiene rango n y $Z(t_1)$ es no singular, la matriz $(y_j^i(t_1))$ es de rango n. ∎

Claramente, el Teorema 4.3 y los Lemas 4.6, 4.8 y 4.9 implican el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *Supongamos que* (x_0, u_0) *es una solución normal de* (P)*. Entonces existe un único* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$*. Además*

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0 \text{ para toda } (y, v) \in Z \text{ que satisface}$$

i. $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t) \ (t \in T)$*;*
ii. $y(t_0) = y(t_1) = 0$*;*
iii. $\varphi'(u_0(t))v(t) = 0 \ (t \in T)$*.*

Capítulo 5

Restricciones con desigualdades en el control

5.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo consiste en obtener condiciones necesarias de segundo orden para problemas con restricciones en términos de igualdades y desigualdades en las funciones de control a través de una generalización de las técnicas utilizadas en los dos capítulos anteriores.

Como explicaremos con más detalle en la sección 5.4, las condiciones clásicas de segundo orden que encuentra uno en la literatura, para este tipo de problemas, juegan un papel semejante a las condiciones "débiles" derivadas en el Capítulo 2 para problemas de optimización con igualdades y desigualdades en espacios de dimensión finita. Veremos en este capítulo cómo es posible, generalizando las técnicas anteriores, obtener condiciones "fuertes" para el problema de control óptimo que nos concierne.

5.2. Planteamiento del problema

Supongamos que los datos del problema son como los del Capítulo 4 excepto por el conjunto de restricciones $\mathcal{A}$ dado en este caso por $\mathcal{A} = T \times \mathbf{R}^n \times U$ donde $R = \{1, \ldots, r\}$, $Q = \{r+1, \ldots, q\}$,

$$U = \{u \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_\alpha(u) \leq 0 \ (\alpha \in R),\ \varphi_\beta(u) = 0 \ (\beta \in Q)\},$$

y $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ es una función que mapea $\mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^q$ $(q \leq m)$.

Nuestro problema en este caso consiste en minimizar I sobre $Z_e(\mathcal{A})$, o sea, minimizar $I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt$ sujeto a

a. $(x,u) \in Z$;
b. $\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t))$ $(t \in T)$;
c. $x(t_0) = \xi_0$, $x(t_1) = \xi_1$;
d. $\varphi_\alpha(u(t)) \leq 0$ y $\varphi_\beta(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ \beta \in Q,\ t \in T)$.

Las hipótesis sobre las funciones que delimitan el problema son como en el caso anterior, y supondremos que la matriz de dimensión $q \times (m+r)$ dada por

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} \quad \delta_{i\alpha}\varphi_\alpha \right) \qquad (i = 1,\ldots,q;\ \alpha = 1,\ldots,r;\ k = 1,\ldots,m)$$

es de rango q en U (aquí $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$). Esta condición es equivalente a la condición de que, en cada punto u en U, la matriz

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} \right) \qquad (i = i_1,\ldots,i_p;\ k = 1,\ldots,m)$$

tenga rango p, donde $i_1,\ldots,i_p$ son los índices $i \in R \cup Q$ tales que $\varphi_i(u) = 0$ (ver [3] para más detalles).

5.3. Condiciones de primer orden

Comencemos enunciando condiciones de primer orden conocidas en la literatura (ver [5]), expresadas como en el capítulo anterior en términos de

$$H(t,x,u,p,\mu,\lambda) := \langle p, f(t,x,u)\rangle - \lambda L(t,x,u) - \langle \mu, \varphi(u)\rangle$$

definida para toda (t,x,u,p,μ,λ) en $T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}$.

Teorema 5.1. *Supongamos que (x_0,u_0) es solución de* (P)*. Entonces existen $\lambda_0 \geq 0$, $p \in X$, y $\mu \in \mathcal{U}_q$ continuas en cada intervalo de continuidad de u_0, no simultáneamente iguales a cero en T, tales que*

a. *$\mu_\alpha(t) \geq 0$ con $\mu_\alpha(t) = 0$ siempre que $\varphi_\alpha(u_0(t)) < 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;*
b. *En cada intervalo de continuidad de u_0,*

$$\dot{p}(t) = -H_x^*(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),\lambda_0),$$

$$H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),\lambda_0) = 0;$$

c. *Para toda $(t,u) \in T \times U$,*

$$H(t,x_0(t),u,p(t),0,\lambda_0) \leq H(t,x_0(t),u_0(t),p(t),0,\lambda_0).$$

Nótese que (a) y (c) son equivalentes, respectivamente, a las siguientes condiciones:

a. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
c. Para toda $(t, u) \in T \times U$,

$$H(t, x_0(t), u, p(t), \mu(t), \lambda_0) + \langle \mu(t), \varphi(u) \rangle \leq H(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t), \lambda_0).$$

Basados en este resultado, definamos un conjunto de multiplicadores junto con un conjunto de funciones cuyos elementos, a los cuales llamaremos "extremos", tienen asociado un multiplicador del costo distinto de cero y normalizado a uno.

Definiciones 5.2. Para toda $(x, u) \in Z$ sea $M(x, u)$ el conjunto de todas las $(p, \mu, \lambda_0) \in X \times \mathcal{U}_q \times \mathbf{R}$ con $\lambda_0 + |p| \neq 0$ que satisfacen

a. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
b. $\dot{p}(t) = -H_x^*(t, x(t), u_0(t), p(t), \mu(t), \lambda_0)$ $(t \in T)$;
c. $H_u(t, x(t), u(t), p(t), \mu(t), \lambda_0) = 0$ $(t \in T)$.

Denotemos por $\mathcal{E}$ el conjunto de las funciones $(x, u, p, \mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_q$ tales que $(p, \mu, 1) \in M(x, u)$, es decir,

a. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
b. $\dot{p}(t) = -f_x^*(t, x(t), u(t))p(t) + L_x^*(t, x(t), u(t))$ $(t \in T)$;
c. $f_u^*(t, x(t), u(t))p(t) = L_u^*(t, x(t), u(t)) + \varphi'^*(u(t))\mu(t)$ $(t \in T)$.

Definición 5.3. Diremos que un proceso (x, u) es *fuertemente normal* si, dadas $p \in X$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ que satisfacen

i. $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
ii. $\dot{p}(t) = -f_x^*(t, x(t)u(t))p(t)$ $[= -H_x^*(t, x(t), u(t), p(t), \mu(t), 0)\ ]$ $(t \in T)$;
iii. $0 = f_u^*(t, x(t), u(t))p(t) - \varphi'^*(u(t))\mu(t)$ $[= H_u^*(t, x(t), u(t), p(t), \mu(t), 0)\ ]$ $(t \in T)$,

entonces $p \equiv 0$. En este caso, claramente, $\mu \equiv 0$.

La noción de "normalidad fuerte" permite asegurar que, si (p, μ, λ_0) es una terna de multiplicadores correspondiente a una solución fuertemente normal del problema, entonces $\lambda_0 > 0$ y, cuando $\lambda_0 = 1$, (p, μ) es único.

Teorema 5.4. *Si* (x, u) *es una solución de* (P) *entonces* $M(x, u) \neq \emptyset$. *Si además* (x, u) *es fuertemente normal, entonces existe un único* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x, u, p, \mu) \in \mathcal{E}$.

Demostración: Sea (x, u) solución de (P). Por el Teorema 5.1 sabemos que existe $(p, \mu, \lambda_0) \in M(x, u)$. Supongamos que (x, u) es fuertemente normal. Claramente $\lambda_0 \neq 0$ y, si $(q, \nu, \lambda_0) \in M(x, u)$, entonces

i. $[\mu_\alpha(t) - \nu_\alpha(t)]\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
ii. $[\dot{p}(t) - \dot{q}(t)] = -f_x^*(t, x(t), u(t))[p(t) - q(t)]$ $(t \in T)$;
iii. $0 = f_u^*(t, x(t), u(t))[p(t) - q(t)] - \varphi'^*(u(t))[\mu(t) - \nu(t)] = 0$ $(t \in T)$,

lo cual implica que $p \equiv q$ y $\mu \equiv \nu$. El resultado se sigue eligiendo $\lambda_0 = 1$ ya que $(p/\lambda_0, \mu/\lambda_0, 1) \in M(x, u)$. ∎

5.4. Condiciones de segundo orden

Como en el caso de restricciones con igualdades, sea

$$J((x, u, p, \mu); (y, v)) := \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, y(t), v(t))dt \quad ((y, v) \in Z)$$

donde

$$2\Omega(t, y, v) := -[\langle y, H_{xx}(t)y\rangle + 2\langle y, H_{xu}(t)v\rangle + \langle v, H_{uu}(t)v\rangle]$$

y $H(t)$ denota $H(t, x(t), u(t), p(t), \mu(t), 1)$. Para toda $u \in \mathbf{R}^m$ definimos el conjunto de *índices activos en* u como

$$I_a(u) := \{\alpha \in R \mid \varphi_\alpha(u) = 0\}.$$

Como mencionamos en la introducción, puede uno encontrar en la literatura un conjunto de condiciones "débiles" de segundo orden para el problema (P). En particular, el siguiente resultado fue derivado en [3, 18, 19] al reducir el problema original a un problema que involucra solo restricciones con igualdades en el control, considerando las funciones

$$\psi_\alpha(u, w) := \varphi_\alpha(u) + (w^\alpha)^2 \ (\alpha \in R), \quad \psi_\beta(u, w) := \varphi_\beta(u) \ (\beta \in Q)$$

y aplicando los resultados del capítulo anterior.

Teorema 5.5. *Si* (x_0, u_0) *es una solución fuertemente normal de* (P) *entonces existe un único* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$*. Además*

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0 \text{ para toda } (y, v) \in Z \text{ que satisface}$$

i. $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ $(t \in T)$*;*
ii. $y(t_0) = y(t_1) = 0$*;*
iii. $\varphi_i'(u_0(t))v(t) = 0$ *para toda* $i \in I_a(u_0(t)) \cup Q$, $(t \in T)$.

En esta sección veremos cómo, generalizando los lemas de los dos capítulos anteriores, podemos mejorar considerablemente este resultado en el sentido de que el conjunto de "variaciones admisibles" en los que la segunda variación es no negativa en el teorema anterior se puede modificar obteniendo un conjunto que, en general, contiene propiamente al anterior.

Definición 5.6. Para $(x_0, u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ denotemos por $\mathcal{W}(x_0, u_0, \mu)$ el conjunto de todas las $(y, v) \in Z$ para las cuales existen $\delta > 0$ y una familia uno-paramétrica $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon))$ $(|\epsilon| < \delta)$ de procesos tales que

i. $(x(t, 0), u(t, 0)) = (x_0(t), u_0(t))$ $(t \in T)$;
ii. $(x_\epsilon(t, 0), u_\epsilon(t, 0)) = (y(t), v(t))$ $(t \in T)$;
iii. $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A}))$ $(0 \leq \epsilon < \delta)$;
iv. $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t, \epsilon)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T,\ 0 \leq \epsilon < \delta)$.

Lema 5.7. *Supongamos que* (x_0, u_0) *es solución de* (P) *y existe* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$. *Entonces*

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0 \quad \textit{para toda } (y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0, \mu).$$

Demostración: Definamos

$$K(x, u) := \langle p(t_1), \xi_1 \rangle - \langle p(t_0), \xi_0 \rangle + \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt \quad ((x, u) \in Z)$$

donde, para toda $(t, x, u) \in T \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$,

$$F(t, x, u) := L(t, x, u) - \langle p(t), f(t, x, u) \rangle + \langle \mu(t), \varphi(u) \rangle - \langle \dot{p}(t), x \rangle.$$

Observemos que

$$F(t, x, u) = -H(t, x, u, p(t), \mu(t), 1) - \langle \dot{p}(t), x \rangle$$

y, si $(x, u) \in Z_e(\mathcal{A})$, entonces

$$K(x, u) = I(x, u) + \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), \varphi(u(t)) \rangle dt.$$

Sea $(y, v) \in \mathcal{W}(x_0, u_0, \mu)$ y sean $\delta > 0$ y $(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon))$ $(|\epsilon| < \delta)$ como en la Definición 5.6. Entonces

$$g(\epsilon) := K(x(\cdot, \epsilon), u(\cdot, \epsilon)) \quad (|\epsilon| < \delta)$$

satisface

$$g(\epsilon) = I(x(\cdot,\epsilon), u(\cdot,\epsilon)) \geq I(x_0, u_0) = K(x_0, u_0) = g(0) \quad (0 \leq \epsilon < \delta).$$

Notemos que

$$F_x(t, x_0(t), u_0(t)) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t), 1) - \dot{p}^*(t) = 0,$$

$$F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = -H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t), 1) = 0$$

y, por lo tanto, $g'(0) = 0$. En consecuencia

$$0 \leq g''(0) = K''((x_0, u_0); (y, v)) = J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)). \blacksquare$$

Consideramos conveniente utilizar la siguiente notación. Para toda $\mu \in \mathbf{R}^q$ definimos los siguientes subconjuntos de índices de R:

$$\Gamma_0(\mu) := \{\alpha \in R \mid \mu_\alpha = 0\}, \quad \Gamma_p(\mu) := \{\alpha \in R \mid \mu_\alpha > 0\}.$$

Dado un proceso (x, u) Sea $A(t) := f_x(t, x(t), u(t))$, $B(t) := f_u(t, x(t), u(t))$ $(t \in T)$, y para $(y, v) \in Z$ consideremos el sistema

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v(t) \quad (t \in T)$$

al cual etiquetamos como $L(x, u)$.

Definamos ahora un conjunto de "variaciones admisibles modificadas" el cual, bajo ciertas hipótesis, se probará que está contenido en $\mathcal{W}(x, u, \mu)$.

Definición 5.8. Dada $(x, u) \in Z$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$, una solución (y, v) de $L(x, u)$ se llama una *variación modificada admisible a lo largo de* (x, u, μ) si satisface

i. $\varphi_i'(u(t))v(t) \leq 0$ para toda $i \in I_a(u(t)) \cap \Gamma_0(\mu(t))$, $(t \in T)$;
ii. $\varphi_j'(u(t))v(t) = 0$ para toda $j \in \Gamma_p(\mu(t)) \cup Q$, $(t \in T)$.

Denotemos por $Y(x, u, \mu)$ al conjunto de todas las variaciones admisibles modificadas (y, v) a lo largo de (x, u, μ) que satisfacen $y(t_0) = y(t_1) = 0$.

Lema 5.9. *Supongamos que* $(x_0, u_0) \in Z_e(\mathcal{A})$, $I_a(u_0(\cdot))$ *es constante por fragmentos y existen soluciones* (y_i, v_i) $(i = 1, \ldots, n)$ *de* $L(x_0, u_0)$ *que satisfacen*

a. $y_i(t_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$*;*
b. $|y_1(t_1) \cdots y_n(t_1)| \neq 0$*;*
c. $\varphi_\alpha'(u_0(t))v_i(t) = 0$ *para toda* $\alpha \in I_a(u_0(t)) \cup Q$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in T$.

Entonces $Y(x_0,u_0,\mu) \subset \mathcal{W}(x_0,u_0,\mu)$ *para cualquier* $\mu \in \mathcal{U}_q$ *con* $\mu_\alpha(t) \geq 0$ *y* $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$.

Demostración: Sea $\mu \in \mathcal{U}_q$ tal que $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$, y sea $(y,v) \in Y(x_0,u_0,\mu)$. Sean $T_1,\ldots,T_s$ los subintervalos de T donde $I_a(u_0(\cdot))$ es constante y las funciones $u_0, v, v_1, \ldots, v_n$ son continuas. Para toda $j = 1,\ldots,s$ y $t \in T_j$, sea p_j la cardinalidad de $I_a(u_0(t)) \cup Q$ y denotemos por φ^j la función que mapea $\mathbf{R}^m$ en $\mathbf{R}^{p_j}$ y está dada por

$$\varphi^j(u) = (\varphi_{i_1}(u),\ldots,\varphi_{i_{p_j}}(u)) \quad \text{donde} \quad I_a(u_0(t)) \cup Q = \{i_1,\ldots,i_{p_j}\}.$$

Para toda $j = 1,\ldots,s$ definimos

$$\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\lambda) := u_0(t) + \epsilon v(t) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i(t) + \varphi^{j\prime *}(u_0(t))\lambda$$

para toda $(t,\epsilon,\alpha,\lambda) \in T_j \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{p_j}$ y sea

$$h^j(t,\epsilon,\alpha,\lambda) := \varphi^j(\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\lambda)) - \epsilon\varphi^{j\prime}(u_0(t))v(t)$$

para toda $(t,\epsilon,\alpha,\lambda) \in T_j \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{p_j}$. Notemos que

$$h^j(t,0,0,0) = 0 \quad \text{y} \quad |h^j_\lambda(t,0,0,0)| = |\Lambda_j(t)| \neq 0 \qquad (t \in T_j)$$

donde

$$\Lambda_j(t) = \varphi^{j\prime}(u_0(t))\varphi^{j\prime *}(u_0(t)).$$

Por el teorema de la función implícita, existen $\nu_j > 0$ y funciones $\sigma^j\colon T_j \times (-\nu_j,\nu_j) \times (-\nu_j,\nu_j)^n \to \mathbf{R}^{p_j}$ tales que, para toda $t \in T_j$, $\sigma^j(t,0,0) = 0$, $\sigma^j(t,\cdot,\cdot)$ es de clase C^2 y

$$h^j(t,\epsilon,\alpha,\sigma^j(t,\epsilon,\alpha)) = \varphi^j(\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\sigma^j(t,\epsilon,\alpha)) - \epsilon\varphi^{j\prime}(u_0(t))v(t) = 0.$$

Sea $\nu := \text{mín}\{\nu_j\}_j$ y $\sigma(t,\epsilon,\alpha) := \sigma^j(t,\epsilon,\alpha)$ $(t \in T_j,\ j = 1,\ldots,s,\ |\epsilon| < \nu,\ |\alpha_i| < \nu)$. Entonces

$$\varphi^j(\bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\sigma(t,\epsilon,\alpha)) = \epsilon\varphi^{j\prime}(u_0(t))v(t) \quad (t \in T_j,\ |\epsilon| < \nu,\ |\alpha_i| < \nu).$$

Tenemos, tomando la derivada con respecto a ϵ y α_i en $(\epsilon,\alpha) = (0,0)$, que

$$0 = \varphi^{j\prime}(u_0(t))[v(t) + \varphi^{j\prime *}(u_0(t))\sigma_\epsilon(t,0,0)] - \varphi^{j\prime}(u_0(t))v(t) = \Lambda_j(t)\sigma_\epsilon(t,0,0)$$

$$0 = \varphi^{j\prime}(u_0(t))[v_i(t) + \varphi^{j\prime *}(u_0(t))\sigma_{\alpha_i}(t,0,0)] = \Lambda_j(t)\sigma_{\alpha_i}(t,0,0)$$

y, por lo tanto, $\sigma_\epsilon(t,0,0) = \sigma_{\alpha_i}(t,0,0) = 0$ $(t \in T)$.

Definamos ahora $w(t,\epsilon,\alpha) := \bar{u}(t,\epsilon,\alpha,\sigma(t,\epsilon,\alpha))$ y observemos que, por las relaciones anteriores,

$$w_\epsilon(t,0,0) = v(t), \qquad w_{\alpha_i}(t,0,0) = v_i(t) \qquad (t \in T).$$

Por el Teorema 3.8, las ecuaciones

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t), w(t,\epsilon,\alpha)) \quad (t \in T), \quad z(t_0) = \xi_0$$

tienen soluciones únicas $z(t,\epsilon,\alpha)$ $(t \in T,\ |\epsilon| < \eta,\ |\alpha_i| < \eta)$ con $0 < \eta < \nu$, tales que $z(t,0,0) = x_0(t)$. La función $z(t,\epsilon,\alpha)$ es continua y tiene primeras y segundas derivadas continuas con respecto a las variables $\epsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Las funciones $\dot{z}(t,\epsilon,\alpha)$, así como sus primeras y segundas derivadas con respecto a $\epsilon, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, son continuas por fragmentos con respecto a t. Derivando con respecto a ϵ y α_i en $(\epsilon,\alpha) = (0,0)$ tenemos que

$$\dot{z}_\epsilon(t,0,0) = A(t)z_\epsilon(t,0,0) + B(t)v(t), \quad z_\epsilon(t_0,0,0) = 0,$$

$$\dot{z}_{\alpha_i}(t,0,0) = A(t)z_{\alpha_i}(t,0,0) + B(t)v_i(t), \quad z_{\alpha_i}(t_0,0,0) = 0$$

y, por lo tanto,

$$z_\epsilon(t,0,0) = y(t), \quad z_{\alpha_i}(t,0,0) = y_i(t) \quad (t \in T).$$

Sea $S := (-\eta,\eta)$ y definamos $g\colon S \times S^n \to \mathbf{R}^n$ por $g(\epsilon,\alpha) := z(t_1,\epsilon,\alpha) - \xi_1$. Notemos que

$$g(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad |g_\alpha(0,0)| = |M| \neq 0$$

donde $M = (y_1(t_1) \cdots y_n(t_1))$. Por el teorema de la función implícita, existen $0 < \delta < \eta$ y $\beta\colon(-\delta,\delta) \to \mathbf{R}^n$ de clase C^2 tales que $\beta(0) = 0$ y $g(\epsilon,\beta(\epsilon)) = 0$ $(|\epsilon| < \delta)$. Tenemos, derivando respecto a ϵ en $\epsilon = 0$, que

$$0 = g_\epsilon(0,0) + g_\alpha(0,0)\beta'(0) = y(t_1) + M\beta'(0) = M\beta'(0)$$

lo cual implica que $\beta'(0) = 0$. Por continuidad podemos elegir $\delta > 0$ tal que $|\beta_i(\epsilon)| < \eta$ para toda $|\epsilon| < \delta$, $i = 1, \ldots, n$. Probemos finalmente que la familia uno-paramétrica

$$x(t,\epsilon) := z(t,\epsilon,\beta(\epsilon)), \quad u(t,\epsilon) := w(t,\epsilon,\beta(\epsilon)) \quad (t \in T,\ |\epsilon| < \delta)$$

tiene las propiedades del lema. Observemos primero que

$$x_\epsilon(t,0) = z_\alpha(t,0,0)\beta'(0) + y(t) = y(t),$$

$$u_\epsilon(t,0) = w_\alpha(t,0,0)\beta'(0) + v(t) = v(t).$$

Más aún,

$$x(t_1,\epsilon) - \xi_1 = z(t_1,\epsilon,\beta(\epsilon)) - \xi_1 = g(\epsilon,\beta(\epsilon)) = 0$$

de manera que $x(\cdot,\epsilon)$ ($|\epsilon| < \delta$) une los puntos inicial y final de x_0. Ahora, para toda $|\epsilon| < \delta$ y $t \in T_j$, tenemos

$$\varphi^j(u(t,\epsilon)) = \varphi^j(\bar{u}(t,\epsilon,\beta(\epsilon),\sigma(t,\epsilon,\beta(\epsilon))) = \epsilon\varphi^{j\prime}(u_0(t))v(t).$$

Por lo tanto, de la Definición 5.8, se sigue que

$$\varphi_i(u(t,\epsilon)) \leq 0 \quad \text{para toda } i \in I_a(u_0(t)) \text{ con } \mu_i(t) = 0 \quad (0 \leq \epsilon < \delta)$$

$$\varphi_j(u(t,\epsilon)) = 0 \quad \text{para toda } j \in I_a(u_0(t)) \text{ con } \mu_i(t) > 0, \text{ o } j \in Q \quad (|\epsilon| < \delta).$$

Para el caso $i \notin I_a(u_0(t))$, o sea, $\varphi_i(u_0(t)) < 0$, tenemos que $\mu_i(t) = 0$ y podemos disminuir $\delta > 0$, si es necesario, de manera que $\varphi_i(u(t,\epsilon)) < 0$, ($|\epsilon| < \delta$). Por lo tanto, $(x(\cdot,\epsilon), u(\cdot,\epsilon)) \in Z_e(\mathcal{A})$ ($0 \leq \epsilon < \delta$), y

$$\mu_i(t)\varphi_i(u(t,\epsilon)) = 0 \quad (i \in R,\ t \in T,\ 0 \leq \epsilon < \delta).$$

Esto prueba que $(y,v) \in \mathcal{W}(x_0,u_0,\mu)$. ∎

Lema 5.10. *Si (x_0,u_0) es fuertemente normal, entonces existen soluciones (y_i,v_i) $(i = 1,\ldots,n)$ de $L(x_0,u_0)$ con*

a. $y_i(t_0) = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$*;*

b. $|y_1(t_1)\cdots y_n(t_1)| \neq 0$*;*

c. $\varphi'_\alpha(u_0(t))v_i(t) = 0$ *para toda* $\alpha \in I_a(u_0(t)) \cup Q$*,* $i = 1,\ldots,n$*,* $t \in T$*.*

Demostración: Sea $Z(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que

$$\dot{Z}(t) = -Z(t)A(t) \ (t \in T), \quad Z(t_1) = I$$

y denotemos por $z_1,\ldots,z_n$ a los vectores renglón de Z, de manera que

$$\dot{z}_i(t) = -A^*(t)z_i(t) \quad (t \in T,\ i = 1,\ldots,n).$$

Para cada $t \in T$ sea

$$\hat{\varphi} = (\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_p}) \quad \text{donde} \quad I_a(u_0(t)) \cup Q = \{i_1,\ldots,i_p\}$$

esto es, $i_1, \ldots, i_p$ son los índices $\alpha \in R \cup Q$ tales que $\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$, y definamos $\hat{\mu}^i(t) = (\hat{\mu}_{i_1}(t), \ldots, \hat{\mu}_{i_p}(t))$ por

$$\hat{\mu}^i(t) := \Lambda^{-1}(t)\hat{\varphi}'(u_0(t))B^*(t)z_i(t) \qquad (t \in T,\ i = 1, \ldots, n)$$

donde $\Lambda(t) = \hat{\varphi}'(u_0(t))\hat{\varphi}'^*(u_0(t))$. Extendemos la función $\hat{\mu}^i$ incluyendo todos los otros índices en R mediante $\mu^i(t) = (\mu_1^i(t), \ldots, \mu_q^i(t))$ donde

$$\mu_\alpha^i(t) := \begin{cases} \hat{\mu}_{i_r}^i(t) & \text{si } \alpha = i_r,\ r = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente tenemos $\mu_\alpha^i(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$, $\alpha \in R$, y $t \in T$. Más aún,

$$\hat{\varphi}'^*(u_0(t))\hat{\mu}^i(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_{i_j}}{\partial u_1}(u_0(t))\hat{\mu}_{i_j}^i(t) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^p \frac{\partial \varphi_{i_j}}{\partial u_m}(u_0(t))\hat{\mu}_{i_j}^i(t) \end{pmatrix} = \varphi'^*(u_0(t))\mu^i(t).$$

Ahora, definamos

$$v_i(t) := B^*(t)z_i(t) - \hat{\varphi}'^*(u_0(t))\hat{\mu}^i(t) \qquad (t \in T,\ i = 1, \ldots, n)$$

y sea

$$c_{ij} := \int_{t_0}^{t_1} \langle v_i(t), v_j(t) \rangle dt.$$

Notemos que las funciones $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes en T ya que, de otro modo, existirían constantes $a_1, \ldots, a_n$, no todas iguales a cero, tales que

$$0 = \sum_1^n a_i v_i(t) = \sum_1^n a_i [B^*(t)z_i(t) - \hat{\varphi}'^*(u_0(t))\hat{\mu}^i(t)] \quad (t \in T)$$

y por lo tanto, si

$$\mu(t) := \sum_{i=1}^n a_i \mu^i(t) \quad (t \in T),$$

la función $z(t) := \sum_1^n a_i z_i(t)$ sería una solución no nula del sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad B^*(t)z(t) - \varphi'^*(u_0(t))\mu(t) = 0 \qquad (t \in T)$$

con $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ ($\alpha \in R,\ t \in T$). Esto implica que el rango de $C = (c_{ij})$ es n. Notemos también que

$$\hat{\varphi}'(u_0(t))v_i(t) = \hat{\varphi}'(u_0(t))B^*(t)z_i(t) - \Lambda(t)\hat{\mu}^i(t) = 0$$

de manera que la condición (c) se cumple. Ahora, sea y_i la solución de

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)v_i(t)\ (t \in T), \quad y(t_0) = 0$$

y observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle z_i(t), y_j(t)\rangle &= z_i^*(t)[A(t)y_j(t) + B(t)v_j(t)] - z_i^*(t)A(t)y_j(t) \\
&= [v_i^*(t) + \hat{\mu}^{i*}(t)\hat{\varphi}'(u_0(t))]v_j(t) \\
&= \langle v_i(t), v_j(t)\rangle
\end{aligned}$$

por lo que

$$\langle z_i(t_1), y_j(t_1)\rangle = c_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Como el miembro derecho tiene rango n y $Z(t_1)$ es no singular, la matriz $(y_j^i(t_1))$ tiene rango n. ▮

Por los resultados obtenidos en el Teorema 5.4 y los Lemas 5.7, 5.9 y 5.10, obtenemos las siguientes condiciones necesarias fuertes de segundo orden.

Teorema 5.11. *Si* (x_0, u_0) *es una solución fuertemente normal de* (P) *entonces existe un único* $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ *tal que* $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$. *Si además* $I_a(u_0(\cdot))$ *es constante por fragmentos, entonces*

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0 \text{ para toda } (y, v) \in Z \text{ que satisface}$$

i. $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t),)y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ $(t \in T)$;
ii. $y(t_0) = y(t_1) = 0$;
iii. $\varphi_i'(u_0(t))v(t) \leq 0$ *para toda* $i \in R$ *con* $\varphi_i(u_0(t)) = 0$ *y* $\mu_i(t) = 0$ $(t \in T)$;
iv. $\varphi_j'(u_0(t))v(t) = 0$ *para toda* $j \in R$ *con* $\mu_j(t) > 0$, *o* $j \in Q$ $(t \in T)$.

5.5. Normalidad y regularidad

Resulta de interés ver si se puede debilitar la hipótesis de normalidad fuerte que implica unicidad del par (p, μ) tal que (x_0, u_0, p, μ) es un extremo, así como el conjunto de condiciones necesarias fuertes de segundo orden del Teorema 5.11. Con ese objetivo, primero compararemos esa noción con una distinta utilizada en la literatura (ver [8, 9, 24]) y las caracterizaremos en términos de ciertos conos convexos. En el siguiente capítulo veremos a través de ciertos ejemplos algunas consecuencias de estos resultados.

Comencemos con la noción de normalidad fuerte, la cual se puede caracterizar en términos de un subespacio de $\mathbf{R}^m$ de la siguiente forma.

Definición 5.12. Para toda $u \in \mathbf{R}^m$, sea

$$\tau_0(u) := \{h \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_i'(u)h = 0 \ (i \in I_a(u) \cup Q)\}.$$

Diremos que un proceso (x, u) es τ_0-*regular* si no existe una solución no nula $z \in X$ del sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h = 0 \text{ para toda } h \in \tau_0(u(t)) \ (t \in T).$$

Proposición 5.13. *Para cualquier* $(x, u) \in Z(\mathcal{A})$ *son equivalentes:*
a. (x, u) *es* τ_0*-regular.*
b. (x, u) *es fuertemente normal.*
Demostración:
(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ es tal que $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$ y

$$\dot{p}(t) = -A^*(t)p(t), \quad B^*(t)p(t) = \varphi'^*(u(t))\mu(t) \quad (t \in T).$$

Sea $h \in \tau_0(u(t))$. Entonces

$$p^*(t)B(t)h = \mu^*(t)\varphi'(u(t))h = \sum_{i=1}^{q} \mu_i(t)\varphi_i'(u(t))h = 0$$

y, por (a), $p \equiv 0$.
(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $z \in X$ tal que

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h = 0 \text{ para todo } h \in \tau_0(u(t)) \ (t \in T).$$

Para cada $t \in T$ sea

$$\hat{\varphi} = (\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}) \quad \text{donde} \quad I_a(u(t)) \cup Q = \{i_1, \ldots, i_p\}$$

y definamos $\hat{\mu}(t) = (\hat{\mu}_{i_1}(t), \ldots, \hat{\mu}_{i_p}(t))$ por

$$\hat{\mu}(t) := \Lambda^{-1}(t)\hat{\varphi}'(u(t))B^*(t)z(t) \qquad (t \in T)$$

donde $\Lambda(t) = \hat{\varphi}'(u(t))\hat{\varphi}'^*(u(t))$. Notemos que, como

$$\hat{\varphi}'(u(t))\hat{\varphi}'^*(u(t))\Lambda^{-1}(t) = \Lambda^{-1}(t)^*\hat{\varphi}'(u(t))\hat{\varphi}'^*(u(t)) = I_{p\times p}$$

tenemos que $\Lambda^{-1}(t) = \Lambda^{-1}(t)^*$. Sea $\mu(t) = (\mu_1(t), \ldots, \mu_q(t))$ donde

$$\mu_\alpha(t) := \begin{cases} \hat{\mu}_{i_r}(t) & \text{if } \alpha = i_r,\ r = 1, \ldots, p \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$ y

$$\hat{\mu}^*(t)\hat{\varphi}'(u(t)) = \mu^*(t)\varphi'(u(t)) \quad (t \in T).$$

Ahora, sea

$$G(t) := I_{m\times m} - \hat{\varphi}'^*(u(t))\Lambda^{-1}(t)\hat{\varphi}'(u(t))$$

y notemos que $\hat{\varphi}'(u(t))G(t) = 0$ $(t \in T)$. Si $h_k(t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ denota la k-ésima columna de $G(t)$, tenemos que

$$\varphi'_{i_j}(u(t))h_k(t) = 0 \quad (j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, m)$$

esto es, $h_k(t) \in \tau_0(u(t))$ y, por lo tanto, $z^*(t)B(t)h_k(t) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. Concluimos que

$$0 = z^*(t)B(t)G(t) = z^*(t)B(t) - \mu^*(t)\varphi'(u(t))$$

y, por (b), $z \equiv 0$. ∎

Consideremos ahora una noción diferente de normalidad. Nótese que el signo de $\mu_\alpha(t)$ no se considera en la definición de normalidad fuerte. Agregando dicha condición, obtenemos la siguiente noción más débil de normalidad.

Definición 5.14. Decimos que $(x, u) \in Z$ es *débilmente normal* si, dada $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ que satisface

i. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R,\ t \in T)$;
ii. $\dot{p}(t) = -A^*(t)p(t)$ $(t \in T)$;
iii. $B^*(t)p(t) = \varphi'^*(u(t))\mu(t)$ $(t \in T)$,

entonces $p \equiv 0$.

Observemos que en el Teorema 5.4, si cambiamos la hipótesis de normalidad fuerte por la de normalidad débil, el resultado que se obtiene es válido excepto por la unicidad de (p, μ). Consideremos ahora los siguientes conos convexos de $\mathbf{R}^m$.

Definición 5.15. Para cualquier $u \in \mathbf{R}^m$ y $\mu \in \mathbf{R}^q$ sean

$$\tau_1(u, \mu) := \{h \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_i'(u)h \leq 0 \ (i \in I_a(u) \cap \Gamma_0(\mu)),$$
$$\varphi_j'(u)h = 0 \ (j \in \Gamma_p(\mu) \cup Q)\},$$

$$\tau_2(u) := \{h \in \mathbf{R}^m \mid \varphi_i'(u)h \leq 0 \ (i \in I_a(u)), \ \varphi_j'(u)h = 0 \ (j \in Q)\}.$$

Definición 5.16. Sean $(x, u) \in Z(\mathcal{A})$ y $\mu \in \mathcal{U}_q$ con

$$\mu_\alpha(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad \mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0 \quad (\alpha \in R, \ t \in T).$$

a. Decimos que (x, u, μ) es τ_1-*regular* si no existe una solución no nula $z \in X$ del sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h \leq 0 \text{ para toda } h \in \tau_1(u(t), \mu(t)) \quad (t \in T).$$

b. Decimos que (x, u) es τ_2-*regular* si no existe una solución no nula $z \in X$ del sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h \leq 0 \text{ para toda } h \in \tau_2(u(t)) \quad (t \in T).$$

Notemos que las condiciones débiles dadas en el Teorema 5.5 están expresadas en términos de $\tau_0(u_0(t))$ mientras que las condiciones fuertes dadas en el Teorema 5.11 lo están en términos de $\tau_1(u_0(t), \mu(t))$ el cual, como se mostrará después, contiene a $\tau_0(u_0(t))$ para cualquier $\mu \in \mathcal{U}_q$ con $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0$ $(\alpha \in R, \ t \in T)$. Notemos también que las n soluciones (y_i, v_i) de $L(x_0, u_0)$ que aparecen el Lema 5.9 son tales que $v_i(t)$ pertenece a $\tau_0(u_0(t))$.

Ahora, como puede uno fácilmente verificar, τ_0-regularidad implica τ_1-regularidad, la cual a su vez implica τ_2-regularidad. Demos una demostración formal de este hecho.

Proposición 5.17. *Sean* $(x, u) \in Z(\mathcal{A})$ *y* $\mu \in \mathcal{U}_q$ *con*

$$\mu_\alpha(t) \geq 0 \quad y \quad \mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0 \quad (\alpha \in R, \ t \in T),$$

y consideremos las siguientes afirmaciones:

a. (x,u) *es* τ_0*-regular.*

b. (x,u,μ) *es* τ_1*-regular.*

c. (x,u) *es* τ_2*-regular.*

Entonces (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sea $z \in X$ tal que

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h \leq 0 \text{ para toda } h \in \tau_1(u(t),\mu(t)) \quad (t \in T).$$

Sea $h \in \tau_0(u(t))$. Si $i \in I_a(u(t)) \cap \Gamma_0(\mu(t))$ entonces $\varphi_i'(u(t))h = 0$. Si $j \in \Gamma_p(\mu(t)) \cup Q$ entonces, como $\Gamma_p(\mu(t)) \subset I_a(u(t))$, $\varphi_j'(u(t))h = 0$. Esto muestra que $h \in \tau_1(u(t),\mu(t))$ y así $\tau_0(u(t)) \subset \tau_1(u(t),\mu(t))$. Por hipótesis, $z^*(t)B(t)h \leq 0$. Sin embargo, como $\tau_0(u(t))$ es un subespacio, tenemos que $z^*(t)B(t)h = 0$. Por (a), esto implica que $z \equiv 0$ y esto prueba (b).

(b) $\Rightarrow$ (c): Sea $z \in X$ tal que

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h \leq 0 \text{ para toda } h \in \tau_2(u(t)) \quad (t \in T).$$

Sea $h \in \tau_1(u(t),\mu(t))$. Si $i \in I_a(u(t))$ entonces $\varphi_i'(u(t))h \leq 0$ si $\mu_i(t) = 0$ y $\varphi_i'(u(t))h = 0$ si $\mu_i(t) > 0$. Si además $j \in Q$, entonces $\varphi_j'(u(t))h = 0$. Esto implica que $h \in \tau_2(u(t))$ y así $\tau_1(u(t),\mu(t)) \subset \tau_2(u(t))$. Por (b), $z \equiv 0$ y se sigue (c). ∎

Ahora probemos que, tal como τ_0-regularidad es equivalente a normalidad fuerte, τ_2-regularidad es equivalente a normalidad débil.

Proposición 5.18. *Para toda* $(x,u) \in Z(\mathcal{A})$ *son equivalentes:*

a. (x,u) *es* τ_2*-regular.*

b. (x,u) *es débilmente normal.*

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $(p,\mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ es tal que

$$\mu_\alpha(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad \mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u(t)) = 0 \quad (\alpha \in R,\ t \in T),$$

$$\dot{p}(t) = -A^*(t)p(t), \quad B^*(t)p(t) = \varphi'^*(u(t))\mu(t) \quad (t \in T).$$

Sea $h \in \tau_2(u(t))$. Usando el hecho de que $\mu_\alpha(t) \geq 0$ $(\alpha \in R)$ y $\mu_\alpha(t) = 0$ siempre que $\varphi_\alpha(u(t)) < 0$, tenemos que

$$p^*(t)B(t)h = \mu^*(t)\varphi'(u(t))h = \sum_{i=1}^{q} \mu_i(t)\varphi_i'(u(t))h \leq 0$$

lo que implica, por (a), que $p \equiv 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sea $z \in X$ tal que

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \quad z^*(t)B(t)h \leq 0 \text{ para toda } h \in \tau_2(u(t)) \ (t \in T).$$

Procediendo como en la prueba de que (b) $\Rightarrow$ (a) de la proposición 5.13 mostramos que $h_k(t)$, tal como se definió en esa prueba, pertenece a $\tau_0(u(t))$. Ahora, como $\tau_0(u(t)) \subset \tau_2(u(t))$, la hipótesis sobre z implica que

$$z^*(t)B(t)h_k(t) \leq 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Sin embargo, también $-h_k(t) \in \tau_0(u(t))$ y así

$$z^*(t)B(t)h_k(t) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Por lo tanto,

$$0 = z^*(t)B(t)G(t) = z^*(t)B(t) - \mu^*(t)\varphi'(u(t)).$$

El resultado se sigue de (b) si $\mu_\alpha(t) \geq 0$ ($\alpha \in R$, $t \in T$). Para probar que esto en efecto sucede, sea $C(t)$ la matriz de dimensión $p \times m$ dada por $C(t) := \Lambda^{-1}(t)\hat{\varphi}'(u(t))$ y observemos que

$$C(t)\hat{\varphi}'^*(u(t)) = I_{p\times p} = \hat{\varphi}'(u(t))C^*(t).$$

Por lo tanto, si $c_j(t)$ denota la j-ésima columna de $C^*(t)$ y $\{e_j\}$ la base canónica en $\mathbf{R}^p$ ($j = 1, \ldots, p$), tenemos

$$(\varphi'_{i_j}(u(t))c_1(t), \ldots, \varphi'_{i_j}(u(t))c_p(t)) = e_j^* \quad (j = 1, \ldots, p).$$

Así, si $j \in \{1, \ldots, p\}$ es tal que $i_j \in I_a(u(t))$, entonces

$$\varphi'_k(u(t))(-c_j(t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } k = i_j \\ 0 & \text{si } k \neq i_j \end{cases}$$

lo cual implica que $-c_j(t) \in \tau_2(u(t))$ y, por lo tanto, $z^*(t)B(t)c_j(t) \geq 0$ ($t \in T$). Pero $\hat{\mu}^*(t) = z^*(t)B(t)C^*(t)$ y así $\hat{\mu}^*_\alpha(t) \geq 0$ para toda $\alpha \in I_a(u(t))$. Esto prueba la afirmación. ▮

Capítulo 6

Ejemplos

6.1. Ejemplo 1

Comenzaremos con un ejemplo que muestra que las condiciones modificadas (o fuertes) del Teorema 5.11 pueden darnos más información que las condiciones clásicas (o débiles) del Teorema 5.5.

Consideremos el problema de minimizar

$$I(x,u) = \int_0^\pi \{u_2^2(t) - x^2(t)\}dt$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad u_1(t) \geq 0 \quad (t \in [0,\pi]), \quad x(0) = x(\pi) = 0.$$

En este caso tenemos $T = [0,\pi]$, $n = r = q = 1$, $m = 2$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$ y, para toda $t \in T$, $x \in \mathbf{R}$, y $u \in \mathbf{R}^2$ con $u = (u_1, u_2)$,

$$L(t,x,u) = u_2^2 - x^2, \quad f(t,x,u) = u_1 + u_2, \quad \varphi_1(u) = -u_1.$$

Observemos primero que

$$H(t,x,u,p,\mu,1) = p(u_1 + u_2) - u_2^2 + x^2 + \mu u_1$$

de manera que

$$H_u = (p + \mu, p - 2u_2), \quad H_x = 2x,$$

$$H_{xx} = 2, \quad H_{xu} = 0, \quad H_{uu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con las derivadas parciales de H evaluadas en $(t, x, u, p, \mu, 1)$. Por lo tanto, para cualquier $(x, u, p, \mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_1$ y $(y, v) \in Z$,

$$J((x, u, p, \mu); (y, v)) = 2\int_0^\pi \{v_2^2(t) - y^2(t)\}dt.$$

Consideremos el proceso admisible $(x_0, u_0) \equiv (0, 0)$ y sea $(p, \mu) \equiv (0, 0)$. Claramente (x_0, u_0, p, μ) pertenece a $\mathcal{E}$ y tenemos que $I_a(u_0(t)) = \{1\}$. Como $\varphi_1'(u_0(t)) = (-1, 0)$, tenemos

$$\tau_0(u_0(t)) = \{(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -h_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbf{R},$$
$$\tau_1(u_0(t), \mu(t)) = \tau_2(u_0(t)) = \{(h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -h_1 \leq 0\} = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}.$$

Ahora, como $f_x(t, x_0(t), u_0(t)) = 0$ y $f_u(t, x_0(t), u_0(t)) = (1, 1)$, el sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t) = 0,$$

$$z^*(t)B(t)h = z(t)(h_1 + h_2) = 0 \text{ para toda } (h_1, h_2) \in \tau_0(u_0(t)) \ (t \in T)$$

tiene como única solución la solución nula y por lo tanto (x_0, u_0) es τ_0-regular. Por el Teorema 5.5, si $(y, v) \in Z$ es una variación admisible (en el sentido de ese teorema), o sea, $\dot{y}(t) = v_1(t) + v_2(t)$, $y(0) = y(\pi) = 0$ y $v(t) \in \tau_0(u_0(t))$, entonces $J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0$, pero las relaciones anteriores implican que $\dot{y}(t) = v_2(t)$ y así, por el Teorema 5.5,

$$\int_0^\pi \{\dot{y}^2(t) - y^2(t)\}dt \geq 0$$

para toda $y \in X$ que satisface $y(0) = y(\pi) = 0$, lo cual es un hecho bien conocido. Por lo tanto, la conclusión del teorema no nos da información con respecto al extremo (x_0, u_0).

Por otra parte, si definimos

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t)) := \begin{cases} (\cos t, 0) & \text{if } \ t \in [0, \pi/2] \\ (0, \cos t) & \text{if } \ t \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

y $y(t) := \sin t$ $(t \in [0, \pi])$, entonces (y, v) es una variación admisible modificada, o sea, $\dot{y}(t) = v_1(t) + v_2(t)$, $y(0) = y(\pi) = 0$ y $v(t) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t))$, pero

$$\begin{aligned} J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) &= -2\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt + 2\int_{\pi/2}^\pi \{\cos^2 t - \sin^2 t\}dt \\ &= -\pi/2 < 0. \end{aligned}$$

Por el Teorema 5.11 concluimos que el extremo (x_0, u_0) no es solución del problema. ∎

6.2. Ejemplo 2

Daremos ahora un ejemplo que muestra que la conclusión del Lema 5.10 puede no suceder si la hipótesis de τ_0-regularidad (normalidad fuerte) se reemplaza por la hipótesis más débil de τ_1-regularidad.

Para toda $t \in [0,1]$, $x \in \mathbf{R}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$, sean

$$f(t,x,u) = u_1 + u_2, \quad \varphi_1(u) = u_1, \quad \varphi_2(u) = -u_2.$$

y $U = \{u \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi_i(u) \leq 0,\ i = 1,2\}$. Si $x_0 \equiv 0$ y $u_0 \equiv (0,0)$ tenemos que

$$B(t) = f_u(t, x_0(t), u_0(t)) = (1,1), \quad \varphi_1'(u_0(t)) = (1,0), \quad \varphi_2'(u_0(t)) = (0,-1).$$

Por lo tanto,

$$\tau_0(u_0(t)) = \{(0,0)\}, \quad \tau_2(u_0(t)) = \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid h_1 \leq 0,\ h_2 \geq 0\}$$

y, si $\mu \in \mathcal{U}_2$ es tal que $\mu_i(t) \geq 0$ $(i = 1,2)$, entonces $\tau_1(u_0(t), \mu(t))$ está dada por

$$\begin{array}{ll} \tau_0(u_0(t)) & \text{si } \mu_1(t) > 0,\ \mu_2(t) > 0 \\ \tau_2(u_0(t)) & \text{si } \mu_1(t) = \mu_2(t) = 0 \\ \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid h_1 = 0 \text{ y } h_2 \geq 0\} & \text{si } \mu_1(t) > 0,\ \mu_2(t) = 0 \\ \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid h_1 \leq 0 \text{ y } h_2 = 0\} & \text{si } \mu_1(t) = 0,\ \mu_2(t) > 0. \end{array}$$

Notemos que, para este ejemplo, la noción de regularidad está relacionada con el sistema

$$\dot{z}(t) = 0, \quad z(t)(h_1 + h_2) \leq 0 \quad (t \in [0,1]).$$

Claramente, (x_0, u_0) es τ_2-regular, pero no τ_0-regular, es decir, es débil, pero no fuertemente normal. Además, (x_0, u_0, μ) es τ_1-regular si $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ para alguna $t \in T$.

Ahora, sea $\mu = (\mu_1, \mu_2) \equiv (0,0)$, de manera que (x_0, u_0, μ) es τ_1-regular. La conclusión del Lema 5.10 afirma que existe una solución (y, v) de $L(x_0, u_0)$, con $y(0) = 0$, $y(1) \neq 0$, y $\varphi_\alpha'(u_0(t))v(t) = 0$ $(\alpha = 1,2)$, pero para este ejemplo esto significa que

$$\dot{y}(t) = v_1(t) + v_2(t), \quad v_1(t) = 0, \quad -v_2(t) = 0$$

y así $y(0) = 0$ implica que $y \equiv 0$. ∎

6.3. Ejemplo 3

Como se mencionó en el capítulo anterior, los Teoremas 5.5 (condiciones débiles) y 5.11 (condiciones fuertes) pueden ser establecidos en términos de $\tau_0(u_0(t))$ y $\tau_1(u_0(t), \mu(t))$ respectivamente. Explícitamente, si (x_0, u_0) es una solución fuertemente normal de (P) y $(p, \mu) \in X \times \mathcal{U}_q$ es el único par tal que $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$ entonces, por el Teorema 5.5, $J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) \geq 0$ para toda $(y, v) \in Z$ que cumple

i. $\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t)$ $(t \in T)$;

ii. $y(t_0) = y(t_1) = 0$;

iii. $v(t) \in \tau_0(u_0(t))$ $(t \in T)$,

mientras que, por el Teorema 5.11, si $I_a(u_0(\cdot))$ es constante por fragmentos, las relaciones anteriores suceden reemplazando (iii) por

$$v(t) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t)) \quad (t \in T).$$

Mostraremos ahora una solución débilmente normal (x_0, u_0) con (p, μ) tal que $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$, pero $J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) < 0$ para alguna $(y, v) \in Z$ que satisface (i), (ii) y $v(t) \in \tau_2(u_0(t))$ $(t \in T)$.

Consideremos el problema de minimizar

$$I(x, u) = \int_0^1 u_1(t)dt$$

sujeto a $x(0) = x(1) = 0$,

$$\dot{x}(t) = u_1^2(t) + u_2(t), \quad u_1(t) \geq 0, \quad u_1(t) \geq u_2(t) \quad (t \in [0, 1]).$$

En este caso tenemos $T = [0, 1]$, $n = 1$, $m = r = q = 2$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$ y, para cualquier $t \in T$, $x \in \mathbf{R}$, y $u \in \mathbf{R}^2$ con $u = (u_1, u_2)$,

$$L(t, x, u) = u_1, \quad f(t, x, u) = u_1^2 + u_2, \quad \varphi_1(u) = -u_1, \quad \varphi_2(u) = u_2 - u_1.$$

Observemos primero que

$$H(t, x, u, p, \mu, 1) = p(u_1^2 + u_2) - u_1 + (\mu_1 + \mu_2)u_1 - \mu_2 u_2$$

así que

$$H_u(t, x, u, p, \mu, 1) = (2pu_1 - 1 + \mu_1 + \mu_2, p - \mu_2),$$
$$H_{uu}(t, x, u, p, \mu, 1) = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para cualquier $(x,u,p,\mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_2$ y $(y,v) \in Z$,

$$J((x,u,p,\mu);(y,v)) = -\int_0^1 2p(t)v_1^2(t)dt.$$

Claramente $(x_0,u_0) \equiv (0,0)$ es solución del problema. Como $\varphi_1'(u_0(t)) = (-1,0)$ y $\varphi_2'(u_0(t)) = (-1,1)$, tenemos

$$\tau_0(u_0(t)) = \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -h_1 = 0,\ -h_1 + h_2 = 0\} = \{(0,0)\},$$

$$\tau_2(u_0(t)) = \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -h_1 \leq 0,\ -h_1 + h_2 \leq 0\},$$

y $\tau_1(u_0(t),\mu(t))$ está dado por $(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$ tal que

$$-h_1 \leq 0 \quad \text{si } \mu_1(t) = 0, \quad -h_1 = 0 \quad \text{si } \mu_1(t) > 0,$$

$$-h_1 + h_2 \leq 0 \quad \text{si } \mu_2(t) = 0, \quad -h_1 + h_2 = 0 \quad \text{si } \mu_2(t) > 0.$$

Al considerar regularidad notemos que, como

$$f_x(t,x_0(t),u_0(t)) = 0, \quad f_u(t,x_0(t),u_0(t)) = (0,1),$$

el sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t) = 0,$$

$$z^*(t)B(t)h = z(t)h_2 = 0 \text{ para toda } (h_1,h_2) \in \tau_0(u_0(t)) \ (t \in T)$$

tiene soluciones no nulas y, por lo tanto, (x_0,u_0) no es τ_0-regular. Por otro lado, $z \equiv 0$ es la única solución del sistema

$$\dot{z}(t) = 0, \quad z(t)h_2 \leq 0 \text{ para toda } (h_1,h_2) \in \tau_2(u_0(t)) \ (t \in T)$$

ya que $(0,-1)$ y $(1,1)$ pertenecen a $\tau_2(u_0(t))$ implicando que $-z(t) \leq 0$ y $z(t) \leq 0$ $(t \in T)$, y así (x_0,u_0) es τ_2-regular. Sean $\mu = (\mu_1,\mu_2) \equiv (0,1)$ y $p \equiv 1$, de manera que

i. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha = 1,2,\ t \in T)$,

ii. $\dot{p}(t) = 0 = -H_x(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),1)$ $(t \in T)$,

iii. $H_u(t,x_0(t),u_0(t),p(t),\mu(t),1) = (\mu_1(t)+\mu_2(t)-1, p(t)-\mu_2(t)) = (0,0)$ $(t \in T)$.

Por lo tanto $(x_0,u_0,p,\mu) \in \mathcal{E}$ con (x_0,u_0) una solución débilmente normal del problema. Notemos también que

$$\tau_1(u_0(t),\mu(t)) = \{(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2 \mid -h_1 \leq 0,\ h_1 = h_2\}$$

y, por lo tanto, el sistema

$$\dot{z}(t) = 0, \quad z(t)h_2 \le 0 \text{ para toda } (h_1, h_2) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t)) \ (t \in T)$$

tiene soluciones no nulas, lo que implica que (x_0, u_0, μ) no es τ_1-regular.

Ahora, si (y, v) pertenece a $Y(x_0, u_0, \mu)$ entonces (y, v) es solución de $L(x_0, u_0)$ dada por $\dot{y}(t) = v_2(t)$ $(t \in T)$ junto con

$$y(0) = y(1) = 0 \quad \text{y} \quad v(t) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t))$$

así que $v_1(t) = v_2(t) \ge 0$. Sin embargo, esto implica que $v_2 \equiv 0$ y, por lo tanto, $Y(x_0, u_0, \mu) = \{(0, 0)\}$. Por otra parte, si $v = (v_1, v_2) \equiv (1, 0)$ y $y \equiv 0$, entonces $v(t) \in \tau_2(u_0(t))$, (y, v) es solución de $L(x_0, u_0)$ con $y(0) = y(1) = 0$, y

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) = -\int_0^1 2p(t)v_1^2(t)dt = -2 < 0. \ \blacksquare$$

6.4. Ejemplo 4

Este último ejemplo permite obtener una conclusión más fuerte que el anterior. Exhibiremos una solución débilmente normal (x_0, u_0) del problema con (p, μ) tal que $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$, pero $J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) < 0$ para alguna $(y, v) \in Z$ que satisface $y(t_0) = y(t_1) = 0$,

$$\dot{y}(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))y(t) + f_u(t, x_0(t), u_0(t))v(t) \ \ (t \in T),$$

y $v(t) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t))$ $(t \in T)$. En otras palabras, la conclusión del Teorema 5.11 puede no ocurrir si suponemos que la solución es débilmente normal.

Consideremos el problema que consiste en minimizar

$$I(x, u) = \int_0^1 \{u_2(t) + u_3(t)\}dt$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = u_1^2(t) + u_2(t) - u_3(t) \quad (t \in [0, 1]), \quad x(0) = x(1) = 0,$$

$$u_1(t) \ge 0, \quad u_2(t) \ge 0, \quad u_3(t) \ge 0 \quad (t \in [0, 1]).$$

En este caso tenemos $T = [0, 1]$, $n = 1$, $m = r = q = 3$, $\xi_0 = \xi_1 = 0$ y, para cualquier $t \in T$, $x \in \mathbf{R}$, y $u \in \mathbf{R}^3$ con $u = (u_1, u_2, u_3)$,

$$L(t, x, u) = u_2 + u_3, \quad f(t, x, u) = u_1^2 + u_2 - u_3,$$

$$\varphi_1(u) = -u_1, \quad \varphi_2(u) = -u_2, \quad \varphi_3(u) = -u_3.$$

Observemos primero que

$$H(t, x, u, p, \mu, 1) = p(u_1^2 + u_2 - u_3) - u_2 - u_3 + \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$$

así que

$$H_u(t, x, u, p, \mu, 1) = (2pu_1 + \mu_1, p - 1 + \mu_2, -p - 1 + \mu_3),$$

$$H_{uu}(t, x, u, p, \mu, 1) = \begin{pmatrix} 2p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para cualquier $(x, u, p, \mu) \in Z \times X \times \mathcal{U}_3$ y $(y, v) \in Z$,

$$J((x, u, p, \mu); (y, v)) = -\int_0^1 2p(t)v_1^2(t)dt.$$

Notemos que $f_x(t, x, u) = 0$, $f_u(t, x, u) = (2u_1, 1, -1)$, y

$$\varphi_1'(u) = (-1, 0, 0), \quad \varphi_2'(u) = (0, -1, 0), \quad \varphi_3'(u) = (0, 0, -1).$$

Claramente $(x_0, u_0) \equiv (0, 0)$ es solución del problema y tenemos $I_a(u_0(t)) = \{1, 2, 3\}$. Por lo tanto,

$$\tau_0(u_0(t)) = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbf{R}^3 \mid -h_1 = 0,\ -h_2 = 0,\ -h_3 = 0\} = \{(0, 0, 0)\},$$

$$\tau_2(u_0(t)) = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbf{R}^3 \mid -h_1 \leq 0,\ -h_2 \leq 0,\ -h_3 \leq 0\}.$$

Como $f_x(t, x_0(t), u_0(t)) = 0$ y $f_u(t, x_0(t), u_0(t)) = (0, 1, -1)$, el sistema

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t) = 0,$$

$$z^*(t)B(t)h = z(t)(h_2 - h_3) = 0 \text{ para toda } (h_1, h_2, h_3) \in \tau_0(u_0(t)) \ (t \in T)$$

tiene soluciones no nulas por lo que (x_0, u_0) no es τ_0-regular. Notemos que $z \equiv 0$ es la única solución del sistema

$$\dot{z}(t) = 0, \quad z(t)(h_2 - h_3) \leq 0 \text{ para toda } (h_1, h_2, h_3) \in \tau_2(u_0(t)) \ (t \in T)$$

ya que tanto $(0, 1, 0)$ como $(0, 0, 1)$ pertenecen a $\tau_2(u_0(t))$, lo cual implica que $z(t) \leq 0$ y $-z(t) \leq 0$ $(t \in T)$. Por lo tanto, (x_0, u_0) es τ_2-regular. Ahora, sean $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \equiv (0, 0, 2)$ y $p \equiv 1$. Entonces

$$\tau_1(u_0(t), \mu(t)) = \{(h_1, h_2, h_3) \in \mathbf{R}^3 \mid -h_1 \leq 0,\ -h_2 \leq 0,\ -h_3 = 0\}$$

y, por lo tanto, el sistema

$$\dot{z}(t) = 0, \quad z(t)(h_2 - h_3) \leq 0 \text{ para toda } (h_1, h_2, h_3) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t)) \ (t \in T)$$

tiene soluciones no nulas, lo que implica que (x_0, u_0, μ) no es τ_1-regular.

Ahora, tenemos que

i. $\mu_\alpha(t) \geq 0$ y $\mu_\alpha(t)\varphi_\alpha(u_0(t)) = 0$ $(\alpha = 1, 2,\ t \in T)$;
ii. $\dot{p}(t) = 0 = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t), 1)$ $(t \in T)$;
iii. $H_u(t, x_0(t), u_0(t), p(t), \mu(t), 1) = (0, 0, 0)$ $(t \in T)$,

así que $(x_0, u_0, p, \mu) \in \mathcal{E}$ con (x_0, u_0) una solución débilmente normal del problema.

Sea $v = (v_1, v_2, v_3) \equiv (1, 0, 0)$ y $y \equiv 0$. Entonces (y, v) es solución de $L(x_0, u_0)$ dada por $\dot{y}(t) = v_2(t) - v_3(t)$ $(t \in T)$, junto con $y(0) = y(1) = 0$, $v(t) \in \tau_1(u_0(t), \mu(t))$, y

$$J((x_0, u_0, p, \mu); (y, v)) = -\int_0^1 2p(t)v_1^2(t)dt = -2 < 0. \blacksquare$$

Bibliografía

[1] Arutyunov AV, Pereira FL (2006) *Second-order necessary optimality conditions for problems without a priori normality assumptions*, Mathematics of Operations Research **31**: 1-12

[2] Arutyunov AV, Vereshchagina YS (2002) *On necessary second-order conditions in optimal control problems* (Russian) Differentsial'nye Uravneniya **38**: 1443-1450; translation in Differential Equations **38**: 1531-1540

[3] de Pinho MR, Rosenblueth JF (2006) *Mixed constraints in optimal control: an implicit function theorem approach*, IMA Journal of Mathematical Control and Information, doi:10.1093/imamci/dnl008

[4] Gilbert EG, Bernstein DS (1983) *Second order necessary conditions in optimal control: accessory-problem results without normality conditions*, Journal of Optimization Theory & Applications **41**: 75-106

[5] Hestenes MR (1966) *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York

[6] Hestenes MR (1975) *Optimization Theory, The Finite Dimensional Case*, John Wiley & Sons, New York

[7] Levitin E, Milyutin A, Osomolovskiĭ (1978) *Conditions of high order for a local minimum for problems with constraints*, Russian Math Surveys **33**: 97-168

[8] Loewen PD, Zheng H (1994) *Generalized conjugate points for optimal control problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **22**: 771-791

[9] Loewen PD, Zheng H (1994) *Generalized conjugate points in optimal control*, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control (Lake Buena Vista, Florida) **4**: 4004-4008

[10] Milyutin AA, Osmolovskiĭ (1998) *Calculus of Variations and Optimal Control*, Translations of Mathematical Monographs **180**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island

[11] Mordukhovich BS (1993) *Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipshitzian properties of multifunctions*, Transactions of the American Mathematical Society **340**: 1-36

[12] Osmolovskiĭ (1975) *Second order conditions for a weak local minimum in an optimal control problem (necessity, sufficiency)*, Soviet Math Dokl **16**: 1480-1484

[13] Páles ZS, Zeidan V (1994) *Nonsmooth optimum problems with constraints*, SIAM Journal on Control & Optimization **32**: 1476-1502

[14] Rosenblueth JF (2007) *A direct approach to second order conditions for mixed equality constraints*, Journal of Mathematical Analysis & Applications **333**: 770-779

[15] Rosenblueth JF (sometido) *A new derivation of second order conditions for equality control constraints*, Applied Mathematics Letters

[16] Rosenblueth JF (sometido) *Modified admissible variations for inequality control constraints*, SIAM Journal on Control & Optimization

[17] Rudin W (1964) *Principles of Mathematical Analysis* 3rd edition, McGraw-Hill, New York

[18] Russak IB (1975) *Second order necessary conditions for problems with state inequality constraints*, SIAM Journal on Control **13**: 372-388

[19] Russak IB (1975) *Second order necessary conditions for general problems with state inequality constraints*, Journal of Optimization Theory and Applications, **17**: 43-92

[20] Stefani G, Zezza PL (1996) *Optimality conditions for a constrained control problem*, SIAM Journal on Control & Optimization **34**: 635-659

[21] Valentine FA (1937) *The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions*, *Contributions to the Calculus of Variations 1933-37*, Department of Mathematics, University of Chicago, University of Chicago Press, Chicago

[22] Warga J (1978) *A second-order Lagrangian condition for restricted control problems*, Journal of Optimization Theory & Applications, **24**: 475-483

[23] Zeidan V (1994) *The Riccati equation for optimal control problems with mixed state-control constraints: necessity and sufficiency*, SIAM Journal on Control & Optimization **32**: 1297-1321

[24] Zeidan V (1996) *Admissible directions and generalized coupled points for optimal control problems*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications **26**: 479-507

[25] Zeidan V, Zezza P (1988) *The conjugate point condition for smooth control sets*, Journal of Mathematical Analysis & Applications **132**: 572-589