



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRÁFICAS DE MOORE Y JAULAS:
CONSTRUCCIONES Y COLORACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A

GLORIA LÓPEZ CHÁVEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TUTORA:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Para hacer posible la culminación de este trabajo, muchas personas contribuyeron de diferentes formas a las cuales agradezco infinitamente su apoyo incondicional

Agradezco a mi tía Ofelia por todo lo que me brindo durante mi estancia con ella, y la cual fue para mí como mi segunda madre durante toda la etapa de la carrera.

A mi tío Marcos por sus consejos, tiempo (mucho tiempo) cuando mas lo necesitaba y momentos de felicidad que me dió cuando me sentía sola.

A mis padres por el gran esfuerzo que hicieron al permitirme alejarme de ellos para culminar mis estudios satisfactoriamente, por sus mil consejos para llegar a ser una persona de provecho y por muchas otras cosas que solo

los padres pueden brindarle a un hijo cuando este se encuentra lejos de casa.

A mi tutora Gaby Araujo por recibirme con los brazos abiertos para la realización de esta tesis, por su amistad y confianza que surgieron de estos dos años de trabajo juntas, por todo el apoyo que me dió una y otra vez en la realización de mi servicio social, en los trámites tan tediosos del servicio social, tesis y proyectos en los que me incluyo, y por supuesto por todo el tiempo que me dedico en fines de semana en su casa para el termino de está tesis.

A mis sinodales: Hortensia, Eugenia y Rafael por el tiempo dedicado a la lectura y correcciones de este trabajo, y en especial a Juancho por su infinita paciencia por escucharme incansablemente en la mini exposición que le dí de mi tesis.

A mi novio Jacob por hacerme ver que no todo en la vida son matemáticas, por mostrarme a base de vagancia los lugares más extraños y reconditos del Distriton Federal y por supuesto por hacerme sentir querida en verdad. A Marcovich por su tan valiosa amistad y compañía que me brindó en situaciones de mucho dolor.

Finalmente quiero dar las gracias al Instituto de Matemáticas de la UN-

AM por otorgarme una beca de lugar para la elaboración de esta tesis como al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) dentro del proyecto IN106305-3 por el apoyo económico que me brindó como estudiante para la elaboración de esta tesis.

Índice general

Introducción	vii
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones Básicas	1
2. Gráficas de Moore	7
2.1. Preliminares	7
2.1.1. Un poco sobre grupos	7
2.1.2. Gráficas transitivas	9
2.1.3. Arreglos de intersección	12

2.2. Gráficas de Moore	16
2.3. Definiciones equivalentes	25
2.4. Existencia de las gráficas de Moore	30
3. Geometrias finitas y sus gráficas de incidencia	39
3.1. Planos Proyectivos y Afines	42
3.1.1. Definición combinatoria	42
3.1.2. Definición algebraica	49
3.2. Polígonos Generalizados	54
3.3. $[k;g]$ -jaulas de cuello par	61
4. Construcción y coloración de la $[7, 5]$-jaula minimal	73
4.1. Construcción de la $[7, 5]$ -jaula minimal	74
4.2. Coloración de la $[7; 5]$ -jaula minimal	84

Introducción

Esta tesis está realizada dentro del área de Combinatoria y Matemáticas Discretas, más precisamente aborda dos temas que han sido estudiados en estas áreas en los últimos tiempos. El primero es la Teoría de Gráficas, la cual ha sido muy importante dentro de las matemáticas en el mundo y muy especialmente dentro de las matemáticas en México. Uno de los pioneros dedicados a esta área fue el querido matemático mexicano Victor Neumann Lara al que agradecemos su interés por las gráficas y por la difusión que hizo de ellas entre los estudiantes e investigadores mexicanos. El segundo tema en el que trabajamos son las geometrías finitas, tema que actualmente tiene gran aceptación entre la comunidad internacional.

A continuación desglosaré brevemente los temas abordados en cada uno de los capítulos y definiré de manera general algunos conceptos básicos de

este trabajo.

Una gráfica G es k -regular si el grado de todos sus vértices es k . El cuello de una gráfica es el mínimo de las longitudes de sus ciclos. Una $[k; g]$ -jaula es una gráfica k -regular con cuello g de orden mínimo. La definición formal de $[k; g]$ -jaula fue introducida por Tutte en el artículo ".^A Family of Cubical Graphs"[15].

Las configuraciones finitas de puntos y líneas despertaron el interés de muchos matemáticos dando origen a una nueva rama de las matemáticas conocida como "Geometrías Finitas". Existen muchas estructuras que relacionan a los puntos con las líneas mediante una relación de incidencia, a estas se les conoce como ".^eestructuras de incidencia". En este trabajo se relacionarán a las $[k, g]$ -jaulas con ciertas estructuras de incidencia, llamadas Polígonos Generalizados. Los primeros polígonos generalizados que se conocen son los planos proyectivos finitos que surgen dentro de un área llamada "geometría proyectiva finita"la cual fue iniciada por Von Staudt (1798-1867). Cabe mencionar que el plano proyectivo finito más pequeño fue construido por Gino Fano (1871-1952).

En el primer capítulo se dan conceptos preliminares para los capítulos

siguientes. En el segundo capítulo de esta tesis se relaciona a las $[k, g]$ -jaulas de orden mínimo con gráficas k -regulares de diámetro d y orden máximo llamadas gráficas de Moore, más aún se prueba que ambas definiciones son equivalentes, es decir que las gráficas de Moore de diámetro d son a su vez $[k; g]$ -jaulas y en este caso el cuello es igual a dos veces el diámetro d mas uno. También se abordan algunas propiedades de estas últimas, como son: el tamaño del cuello y la propiedad de ser gráficas distancia-transitivas.

En el tercer capítulo se aborda el tema de las geometrías finitas de manera muy amplia para despues relacionarlas con las $[k; g]$ -jaulas como gráficas de incidencia de los polígonos generalizados los cuales son a su vez estructuras de incidencia.

Por último en el cuarto capítulo se construye la $[7, 5]$ -jaula haciendo uso del plano proyectivo de orden 5, para después colorearla por bloques de manera que se encuentre el número cromático de ciertas subgráficas de ella, que resultan ser $[k; 5]$ -jaulas en su mayoría.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones Básicas

Una gráfica G es un par ordenado $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío de elementos llamados vértices y $E(G)$ es un conjunto finito de pares no ordenados de elementos de $V(G)$ llamados aristas. Denotaremos a la arista entre v y w como (v, w) , y si la arista existe diremos que el vértice v es adyacente al vértice w . Nótese que bajo esta definición puede existir la arista (v, v) para algun $v \in V(G)$, y a estas aristas se les conoce

como lazos. De la misma manera es posible que exista más de una arista (x, y) entre dos vértices, a estas aristas se les conoce como aristas múltiples. Sin embargo, a lo largo de esta tesis trabajaremos con gráficas sin lazos ni aristas múltiples a las que algunos autores llaman gráficas simples.

El complemento G^c de una gráfica G es aquella gráfica cuyo conjunto de vértices coincide con $V(G)$ tal que dos vértices son adyacentes en G^c si y solo si estos vértices no son adyacentes en G . Una gráfica G se dice que es auto-complementaria si G es isomorfa a G^c .

Los cardinales $|V(G)|$ y $|E(G)|$ son denominados el orden y el tamaño de G respectivamente. La vecindad de un vértice v de G se define como el conjunto de vértices que son adyacentes a él y es denotada por $N_G(v)$. Al cardinal $|N_G(v)|$ se le denomina valencia o grado de v y es denotado por $\text{grad}(v)$. El grado mínimo de G , denotado por $\delta(G)$, se define como:

$$\delta(G) = \min \{ \text{grad}(v) | v \in V(G) \}.$$

De manera análoga, el grado máximo de G , denotado por $\Delta(G)$, se define como:

$$\Delta(G) = \max \{ \text{grad}(v) | v \in V(G) \}.$$

Diremos que dos gráficas G y H son isomorfas, lo cual denotaremos como $G \simeq H$, si existe una biyección φ de $V(G)$ a $V(H)$ tal que $(u, v) \in E(G)$ si y solo si $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$; en este caso diremos que φ es un isomorfismo de G a H . Una subgráfica H de G es una gráfica $(V(H), E(H))$ que cumple con que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Para todo subconjunto propio S de $V(G)$ se define la subgráfica inducida por S , denotada por $\langle S \rangle$, como la máxima subgráfica de G con conjunto de vértices S . Así, si $x, y \in S$ entonces $(x, y) \in E(G)$ si y solo si $(x, y) \in E(\langle S \rangle)$.

Un subconjunto de vértices X de $V(G)$ es independiente si cualesquiera dos vértices de X no son adyacentes en G .

La gráfica completa de orden n satisface que entre cualesquiera dos vértices existe una arista y es denotada por K_n . Diremos que G es k -regular si $\text{grad}(v) = k$ para todo $v \in V(G)$; así, K_n es una gráfica $(n - 1)$ -regular.

Una gráfica G es bipartita si el conjunto de vértices $V(G)$ admite una partición en dos conjuntos de vértices independientes V_1 y V_2 , tales que cualquier arista de G tiene un extremo en V_1 y otro extremo en V_2 .

Un camino en G es una sucesión alternante $(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ de vértices v_i y aristas a_i de G cuyos extremos son v_{i-1} y v_i para toda $1 \leq i \leq n$

respectivamente. Si $C = (u = v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n = v)$ es un camino diremos que C es un uv -camino. Si $u = v$, es decir si el vértice inicial coincide con el vértice final diremos que C es un camino cerrado y abierto en otro caso. Los uv -caminos que no repitan vértices se denominan uv -trayectorias. Un ciclo es una trayectoria cerrada, cuya longitud es el número de aristas que lo forman. A los ciclos de longitud n los denotaremos por C_n . El cuello de una gráfica G es la longitud del mínimo ciclo de G .

Una gráfica G es conexa si para todo par de vértices x, y de G existe una xy -trayectoria. Diremos que G es un árbol si G es conexa y acíclica. Una componente conexa de G es una subgráfica conexa maximal de G . Diremos que una gráfica G es un árbol si es conexa y acíclica. Si dos vértices u y v están en una misma componente conexa, se define la distancia de u a v en G , denotada por $d_G(u, v)$, como la mínima de las longitudes de las uv -trayectorias. Una uv -geodésica es una uv -trayectoria de longitud $d_G(u, v)$. El diámetro de un gráfica G denotado por $Diam(G)$ se define como:

$$Diam(G) = \max \{ d_G(u, v) \mid u, v \in V(G) \}.$$

Una coloración de los vértices de G es una asignación de colores (elementos de un conjunto finito) a los vértices de G , donde cada vértice tiene

exactamente un color y dos vértices adyacentes tienen colores distintos.

Diremos que f es una coloración con k colores o una k -coloración de G si

$f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que f sea sobreyectiva, y $f(v) \neq f(u)$ si y solo si $(u, v) \in E(G)$.

Decimos que G es k -coloreable si existe una s -coloración de G para $s \leq k$. El número cromático de G es el mínimo entero k para el cual G es k -coloreable, y se denota por $\chi(G)$. Cualquier s -coloración de G induce una partición en los vértices de G , en clases cromáticas, las clases cromáticas son conjuntos independientes de vértices. Así, $\chi(G)$ es el mínimo número de conjuntos independientes en los cuales $V(G)$ puede ser particionado.

La matriz de adyacencia A de una gráfica G se define de la siguiente manera:

$$A = (a_{ij}) \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{si } (i, j) \notin E(G) \end{cases} \text{ con } 1 \leq \{i, j\} \leq |V(G)|.$$

Capítulo 2

Gráficas de Moore

2.1. Preliminares

2.1.1. Un poco sobre grupos

Un grupo $\langle G, * \rangle$ es un conjunto no vacío G junto con una operación binaria $*$ sobre G que satisface las siguientes propiedades:

- (i) Para cualesquiera $a, b \in G$ implica que $a * b \in G$ (cerradura).
- (ii) Para cualesquiera $x, y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$ (ley asociativa).

(iii) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e * x = x = x * e$ para todo $x \in G$ (existencia de un elemento identidad en G).

(iv) Para todo $x \in G$ existe un $y \in G$ tal que $x * y = e = y * x$ (Existencia de inversos en G).

Dado un conjunto X no vacío, definimos una permutación de X como una biyección $\alpha : X \rightarrow X$. Si X es finito de orden n entonces el grupo simétrico, denotado por S_n , es el conjunto de todas las permutaciones de X bajo la composición de funciones. Si $\alpha \in S_n$ y $r \in X$ definimos a la órbita de r bajo α como el conjunto que consta de los elementos $r, \alpha(r), \alpha^2(r), \dots, \alpha^{l-1}(r)$, donde l es el mínimo entero tal que $\alpha^l(r) = r$.

Existen clases especiales de permutaciones que actúan sobre los vértices de una gráfica G con los que se deducen características importantes de ella. Un automorfismo de una gráfica simple G es un isomorfismo de la gráfica en ella misma, este automorfismo es una función $\alpha : V(G) \rightarrow V(G)$ que cumple que $(u, v) \in E(G)$ si y solo si $(\alpha(u), \alpha(v)) \in E(G)$.

El conjunto de todos los automorfismos de G , con la operación composición, forman el **grupo de automorfismos de G** , denotado por $Aut(G)$. Una consecuencia inmediata de la definición de automorfismo es que

si $\alpha \in \text{Aut}(G)$ y $d_G(u, v) = d$ entonces $d_G(\alpha(u), \alpha(v)) = d$.

2.1.2. Gráficas transitivas

Dada una gráfica conexa G diremos que G es vértice-transitiva si $\text{Aut}(G)$ actúa de manera transitiva sobre $V(G)$, esto es, existe una única órbita en α , para todo $\alpha \in \text{Aut}(G)$. Esto nos dice que dados cualesquiera dos vértices u y v en G siempre existe un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G)$ tal que $\alpha(u) = v$. Como consecuencia inmediata de la definición las gráficas vértice-transitivas son regulares.

Diremos que G es simétrica si, para cualesquiera u, v, x, y vértices de G tales que (u, v) y (x, y) pertenecen a $E(G)$ existe un automorfismo α en $\text{Aut}(G)$ tal que $\alpha(u) = x$ y $\alpha(v) = y$. Diremos que G es distancia-transitiva si, para cualesquiera u, v, x, y vértices de G tales que $d_G(u, v) = d_G(x, y)$, existe un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G)$ que satisface $\alpha(u) = x$ y $\alpha(v) = y$.

Es claro que toda gráfica distancia-transitiva es simétrica ya que si se aplica la definición de vértice-transitiva en los vértices que satisfacen que $d_G(u, v) = 1$ se obtiene la simetría. Veamos ahora que, toda gráfica simétrica es vértice-transitiva, para ello tomemos dos vértices u, v en G , y probemos

que existe un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G)$ tal que $\alpha(u) = v$. Como G es conexa entonces existen vértices x, y en G tales que las aristas (u, x) y (v, y) existen en G . Entonces existe un automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(G)$ tal que $\alpha(u) = v$ y $\alpha(x) = y$, que es lo que se quería probar. En resumen, tenemos que,

distancia-transitiva \Rightarrow simétrica \Rightarrow vértice-transitiva.

Gráficas de Cayley

Dentro de la clase de las gráficas vértices-transitivas, como veremos mas adelante, existe un subconjunto de ellas que se obtiene a partir de una construcción estandar debida a Cayley. Sea G un grupo finito con elemento identidad 1, y supongamos que existe Ω un subconjunto de G con las siguientes propiedades:

$$i) x \in \Omega \Leftrightarrow x^{-1} \in \Omega$$

$$ii) 1 \notin \Omega$$

Entonces, la gráfica de Cayley $H = (G, \Omega)$ es la gráfica con conjunto de vértices G y conjunto de aristas

$$E(H) = \{(u, v) \mid u^{-1}v \in \Omega\}.$$

Observemos que la definición de Ω nos dice que $(u, v) \in E(H)$ si y solo si $(v, u) \in E(H)$, es decir la gráfica de Cayley esta bien definida.

Probaremos que estas gráficas son vértice-transitivas.

Sean $g, x \in G$ y sea ρ_g una permutación asociada a g definida como:

$$\rho_g : x \rightarrow gx$$

Para ver que ρ_g es un automorfismo de H , tenemos que verificar que mande aristas en aristas. Sea $(x, y) \in H$, entonces $x^{-1}y \in \Omega$. Además

$$\rho_g(x) = gx$$

$$\rho_g(y) = gy$$

y $(gx, gy) \in H$ ya que $(gx)^{-1}gy = x^{-1}g^{-1}gy = x^{-1}y \in \Omega$.

No es difícil ver que las permutaciones ρ_g forman un subgrupo del grupo de automorfismos de H isomorfo a G . Este subgrupo actúa transitivamente sobre los vértices de H , ya que para cualesquiera dos vértices g y h , el automorfismo $\rho_{hg^{-1}}$ manda g a h .

2.1.3. Arreglos de intersección

Para cualquier vértice v de una gráfica conexa G se define la celda

$$G_i(v) = \{u \in V(G) \mid d_G(u, v) = i\}$$

donde i es un entero no negativo que no excede al diámetro de G . Nótese que las celdas $G_i(v)$ inducen una partición en los vértices de G ; además si $i = 0$ entonces $G_0(v) = \{v\}$. Diremos que $G_0(v), G_1(v), \dots, G_d(v)$ son las celdas de la partición distancia de G .

Para cualquier gráfica conexa G , cualesquiera vértices u, v de G , y cualquier par de enteros no negativos h e i , se define $s_{hi}(u, v)$ como el número de vértices de G cuya distancia desde u es h y cuya distancia desde v es i ; esto es,

$$s_{hi}(u, v) = |\{w \in V(G) \text{ tal que } d_G(u, w) = h \text{ y } d_G(v, w) = i\}|$$

En una gráfica distancia-transitiva el número $s_{hi}(u, v)$ depende únicamente de la distancia entre u y v , es decir, el número $s_{hi}(x, y)$ es igual al número $s_{hi}(u, v)$ para cualesquiera dos vértices x y y con $d_G(x, y) = d_G(u, v)$; denotaremos al número $s_{hi}(u, v)$ como s_{hij} si $d_G(u, v) = j$.

Los **números de intersección** de una gráfica distancia-transitiva con diámetro d son los números s_{hij} , donde h, i y j pertenecen al conjunto $\{0, 1, \dots, d\}$.

Intuitivamente podemos pensar que existen $(d + 1)^3$ números de intersección distintos, sin embargo veremos que este número es muy grande y que solo se requieren $2d$ de ellos para determinar al resto. Consideremos a los números de intersección s_{hij} con $h = 1$ y j fijo. Entonces s_{1ij} es el número de vértices w que son adyacentes al vértice u y $d_G(v, w) = i$ siempre que $d_G(u, v) = j$. Veamos a que distancia se tiene que encontrar el vértice v de w si suponemos que w es adyacente a u y $d_G(u, v) = j$. Como la distancia es una métrica, entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v) = 1 + d_G(w, v).$$

Así $j - 1 \leq d_G(w, v)$; por otro lado también sabemos que:

$$d_G(w, v) \leq d_G(u, w) + d_G(u, v) = 1 + d_G(u, v)$$

de lo cual se desprende $d_G(w, v) \leq 1 + j$. Por lo tanto i tiene que pertenecer al conjunto $\{j - 1, j, j + 1\}^{[*]}$, o dicho de otra forma, el número $s_{1ij} = 0$ si $i \notin \{j - 1, j, j + 1\}$.

Para los números de intersección que no son cero, usemos la siguiente notación:

$$c_j = s_{1,j-1,j}, \quad a_j = s_{1,j,j}, \quad b_j = s_{1,j+1,j}$$

$0 \leq j \leq d$, y supongamos indefinidos a c_0 y b_d . Si v es un vértice de G , entonces los números c_j , a_j y b_j proporcionan información respecto a las celdas $G_j(v)$ de la partición distancia de G . Si $u \in G_j(v)$ entonces u es adyacente a x para algún $x \in G_{j-1}(v)$. Si consideramos a todos los vértices que son adyacentes a u y que están a distancia $j - 1$ de v entonces podemos concluir que u es adyacente a c_j vértices de $G_{j-1}(v)$. De manera análoga podemos ver que u es adyacente a a_j vértices de $G_j(v)$ y a b_j vértices de $G_{j+1}(v)$. Además, claramente los números c_j , a_j y b_j no dependen de la elección de u y v , es decir son los mismos para cualesquiera dos vértices a distancia j .

Definición 2.1.1 *El arreglo de intersección de una gráfica distancia-transitiva denotada por $i(G)$ se define como:*

$$i(G) = \begin{pmatrix} * & c_1 \dots c_j \dots c_d \\ a_0 & a_1 \dots a_j \dots a_d \\ b_0 & b_1 \dots b_j \dots * \end{pmatrix}$$

Como ya habíamos observado anteriormente, toda gráfica distancia-transitiva

es vértice-transitiva, y como consecuencia es regular de grado k para algún entero k . Una de las propiedades de los números de intersección es que si la gráfica es k -regular entonces cada columna del arreglo de intersección suma k . Para esto observemos que los números de intersección definen una partición en los vecinos de un vértice v dado, pues si w es un vértice a distancia j de v entonces los números s_{1ji} cuentan a los vecinos de v a distancias $j - 1$, j y $j + 1$ de w , y gracias a [*] sabemos que estos son todos los vecinos de v .

Es fácil ver por simple inspección que $b_0 = k$, $a_0 = 0$ y $c_1 = 1$. De esta forma, basta con dar los $2d$ números conformados por el primer y tercer renglón del arreglo de intersección para determinar al renglón de enmedio. Esto sugiere una nueva notación para el arreglo de intersección:

$$i(G) = \{k, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d\}$$

Definición 2.1.2 *Una gráfica distancia-regular es una gráfica conexa k -regular con diámetro d , para la cual se cumple lo siguiente: Existen números naturales*

$b_0 = k, b_1, \dots, b_{d-1}, c_1 = 1, c_2, \dots, c_d$, tales que para cada par (u, v) de vértices a distancia j se tiene:

- (1) el número de vértices en $G_{j-1}(v)$ adyacentes a u es c_j ($1 \leq j \leq d$);
- (2) el número de vértices en $G_{j+1}(v)$ adyacentes a u es b_j ($0 \leq j \leq d-1$).

El arreglo $\{k, b_1, \dots, b_{d-1}; 1, c_2, \dots, c_d\}$ es el arreglo de intersección de G .

Una observación inmediata de la definición anterior es que toda gráfica distancia-transitiva es distancia-regular, sin embargo la inversa no es necesariamente cierta.

2.2. Gráficas de Moore

El contenido de este capítulo está dedicado al estudio de ciertas gráficas conexas, regulares y cuyo grado ($k \geq 3$) y cuello ($g \geq 3$) están dados. Una gráfica k -regular con cuello g es llamada una $[k; g]$ -gráfica. En 1963 Sachs probó en [1] que para cualesquiera enteros k y g siempre existe al menos una $[k; g]$ -gráfica con tales parámetros, esto llevó a algunos matemáticos a buscar gráficas con el menor número posible de vértices con tales parámetros.

Definición 2.2.1 Una $[k; g]$ -gráfica con el mínimo número de vértices es

llamada una $[k; g]$ -jaula.

El orden de una $[k; g]$ -jaula está acotado inferiormente, es decir el mínimo número de vértices que debe tener una $[k; g]$ -jaula es:

$$f_0(k; g) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + k + k(k-1) + \dots + k(k-1)^{\frac{(g-1)}{2}-1} \text{ si } g \text{ es impar.} \\ 2(1 + (k-1) + (k-1)^2 + \dots + (k-1)^{\frac{g}{2}-1}) \text{ si } g \text{ es par.} \end{array} \right\}$$

Estas cotas serán probadas más adelante en este capítulo.

En general las $[k; g]$ -jaulas rebasan la cota anterior, sin embargo hay un subconjunto de ellas que si la alcanza, por esto definimos una jaula minimal como una $[k; g]$ -jaula que alcanza la cota inferior. Las jaulas minimales a su vez se clasifican en Gráficas de Moore y Polígonos Generalizados dependiendo de la paridad del cuello de la jaula.

Definición 2.2.2 **a)** A las $[k; g]$ -jaulas minimales de cuello impar se les denomina como $(k, \frac{g-1}{2})$ -Gráficas de Moore, y **b)** a las $[k; g]$ -jaulas minimales de cuello par como Polígonos Generalizados.

Es importante aclarar que las $[k; g]$ -jaulas minimales de cuello par no son en sí polígonos generalizados, sin embargo en la literatura es común referirse

a ellas de esta forma lo cual quedará totalmente justificado en el siguiente capítulo.

En lo que resta de la tesis haremos referencia a las $[k; g]$ -jaulas minimales de cuello par como Polígonos Generalizados. En este capítulo nos dedicaremos a estudiar a las gráficas de Moore y en el siguiente definiremos algunas geometrías finitas para que ahí mismo relacionemos a las jaulas minimales de cuello par con los polígonos generalizados.

Existe otra definición de Gráfica de Moore que aparece con mas frecuencia en la literatura, la cual hace referencia al diámetro. En seguida introduciremos esta definición, y más adelante veremos que las dos definiciones de gráfica de Moore son equivalentes.

Existe una cota superior $n(\Delta, D)$ respecto al orden de una gráfica G de grado máximo Δ y diámetro D . Utilizaremos lo definido en la sección de preliminares de este capítulo para encontrar el valor de $n(\Delta, D)$.

Sea $v \in V(G)$ y sea n_i el cardinal de la celda $G_i(v)$, para $0 \leq i \leq D$. Así, $n_1 \leq \Delta$, $n_2 \leq \Delta(\Delta - 1)$, $n_3 \leq \Delta(\Delta - 1)^2$ y en general $n_i \leq \Delta(\Delta - 1)^{i-1}$ para $1 \leq i \leq D$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n(\Delta, D) &= \sum_{i=0}^D n_i \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1} \\ &= 1 + \Delta (1 + (\Delta - 1) + \dots + (\Delta - 1)^{D-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } n(\Delta, D) \leq \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \Delta \frac{(\Delta-1)^D - 1}{\Delta-2} & \text{si } \Delta > 2 \\ 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

A (1) se le conoce como la **cota de Moore**, y este nombre se debe a E. F. Moore quien propuso por primera vez el problema sobre la existencia de gráficas de diámetro 2 y 3 que alcanzan dicha cota; así es como surge la segunda definición de Gráfica de Moore.

Definición 2.2.3 *Dados dos enteros k y d , con $k \geq 3$ y $d \geq 2$ una $(k; d)$ -gráfica es una gráfica k -regular de diámetro d . A las $(k; d)$ -gráficas que alcanzan la **cota de Moore** se les denomina $(k; d)$ -gráficas de Moore.*

Notemos que la cota solo puede ser alcanzada si $n_i = k(k - 1)^{i-1}$ para cada $1 \leq i \leq d$ ^[**] como se muestra en la Figura 2.1.

Cuando $k = 2$ y d es cualquier entero positivo la cota de Moore es $2d + 1$ y entonces C_{2d+1} , el ciclo impar de orden $2d + 1$ es una $(2; d)$ -gráfica de Moore.

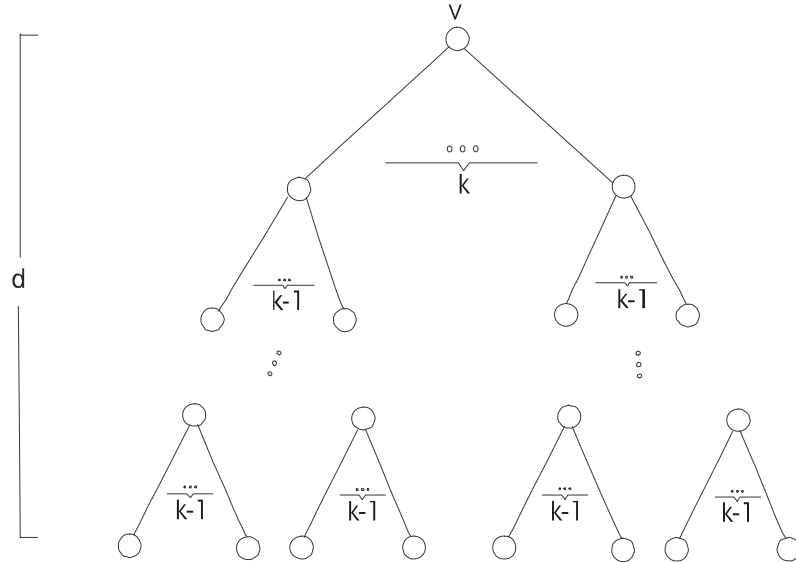


Figura 2.1: Árbol

Por otro lado para todo entero $k \geq 2$ y $d = 1$ la cota de Moore es $k + 1$, y por lo tanto cada gráfica completa K_{k+1} es una $(k; 1)$ -gráfica de Moore. El problema de encontrar gráficas de Moore empieza a complicarse para $d = 2$ debido a que se sabe que solo existen tres $(k; 2)$ -gráficas de Moore [2], como se probará mas adelante, y quizá exista una cuarta pero no se conoce hasta el momento.

Existen condiciones necesarias para decidir cuando una $(k; d)$ -gráfica G es o no de Moore, una de ellas y que es muy fácil ver, es que si $d > 1$ y G tiene triángulos o cuadrados entonces G no alcanza la **cota de Moore** y

por lo tanto no puede existir la gráfica de Moore asociada a esos parámetros; esto nos dice que el tamaño del cuello de una gráfica de Moore con $d > 1$ es al menos 5. El siguiente resultado justifica lo anterior para toda d :

Proposición 2.2.4 *Si G es una $(k; d)$ -gráfica de Moore entonces el cuello de G es igual a $2d + 1$.*

Demostración. *Consideremos primero el caso de las $(k; 1)$ -gráficas de Moore que como ya habíamos notado anteriormente son las gráficas completas K_{k+1} cuyo cuello es 3. Pero $3 = 2(1) + 1 = 2d + 1$. Así el resultado es válido para $d = 1$.*

Sea G una $(k; d)$ -gráfica de Moore con $d > 1$. Como G alcanza la cota de Moore, entonces la subgráfica de G que se obtiene de quitar a las aristas (x, y) en las que x e y están a distancia d de v es un árbol, como se ilustró en la Figura 2.1.

Sean $v \in V(G)$ y w un vértice a distancia d de v . Debido a que en un árbol solo existe una única trayectoria entre cualesquiera dos vértices entonces podemos concluir que w tiene únicamente un vecino w^ a distancia $d - 1$ de v .⁽¹⁾ Solo resta ver que los otros $k - 1$ vecinos de w también están a distancia*

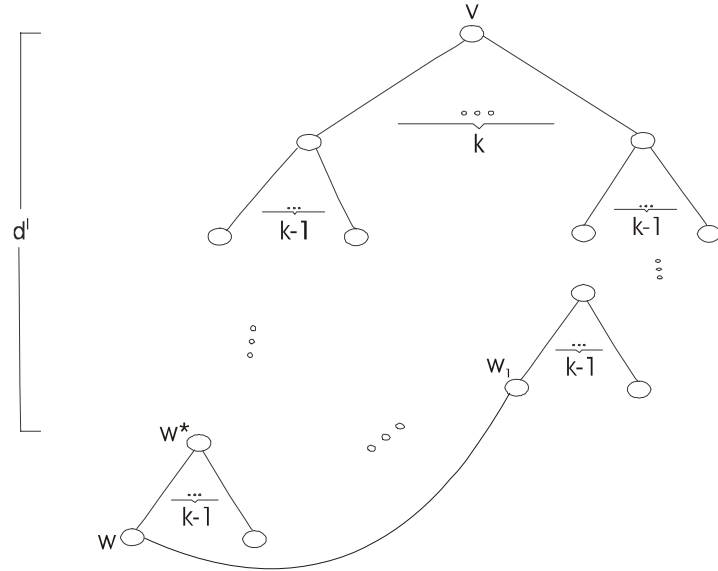


Figura 2.2:

d de v para garantizar que no se forman ciclos de longitud menor a $2d + 1$.

Supongamos por el contrario que existe un vértice $w_1 \neq w^*$ adyacente a w y tal que la distancia de w_1 a v es d' , con $d' < d$ (Ver Figura 2.2).

Consideremos los números de intersección asociados a la pareja de vértices w y v . Por [*] sabemos que $d' \in \{d-1, d, d+1\}$. Como estamos suponiendo que $d' < d$ y que el diámetro de G es d entonces $d' = d - 1$, esto implica que los vértices w^* y w_1 son iguales (por (1)) contradiciendo que eran distintos.

Por lo tanto todos los vecinos del vértice w , menos uno, se encuentran a distancia d de v . Como la elección del vértice w fue arbitraria entonces podemos afirmar que el cuello de G es de tamaño $2d + 1$. ■

Las gráficas de Moore son gráficas que guardan cierta regularidad en relación con las distancias entre sus vértices; se sabe por ejemplo que son gráficas vértice-transitivas [3]. Pero aún mas, si consideramos la partición distancia de cualquier vértice $u \in V(G)$, entonces cualquier vértice en la celda $G_i(u)$ es adyacente a un número constante de vértices en $G_{i-1}(u)$, $G_i(u)$ y $G_{i+1}(u)$, y esto es lo que habíamos definido como gráfica distancia-regular.

Proposición 2.2.5 *Toda gráfica de Moore es distancia-regular.*

Demostración. *Sea G una $(k; d)$ -gráfica de Moore. Para mostrar que G es distancia-regular es suficiente mostrar que los números de intersección a_i, b_i y c_i están bien definidos. Sea $v \in V(G)$ y sean $G_1(v), \dots, G_d(v)$ las celdas de la partición distancia. Como G alcanza la cota de Moore y como se mostró en la Figura 2.1 la subgráfica que resulta de quitar a G las aristas que tienen como extremos a vértices a distancia d de v es un árbol, entonces para cada vértice $w \in G_i(v)$ hay un único vw -camino de longitud i .*

Entonces si $w \in G_i(v)$, el número de vértices adyacentes a w a distancia $i-1$ de v es 1, es decir, el número de intersección $c_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq d$.

Para cualquier $1 \leq i \leq d-1$ un vértice w en $G_i(v)$ no puede tener un vecino w' en la misma celda, ya que de estarlo habría un ciclo de longitud a lo mas $2i+1$, lo cual contradice que el cuello es de tamaño $2d+1$. Por lo tanto, $a_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq d-1$ (Ver Figura 2.3).

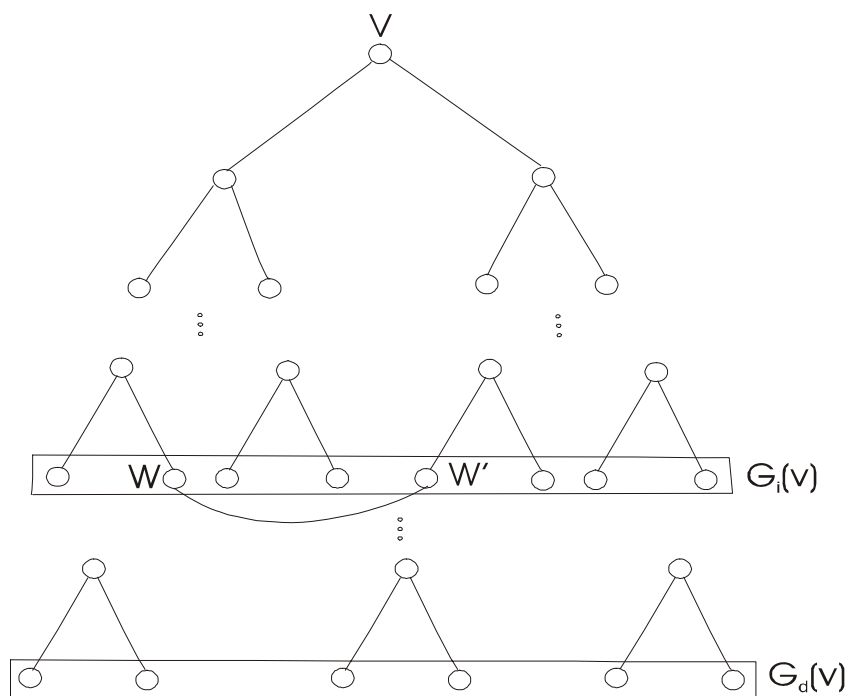


Figura 2.3:

Por último dado que los números de intersección inducen una partición

en los vecinos de w , para $w \in G_i(v)$, y sabemos que $c_j + b_j + a_j = k$ por ser G k -regular entonces $b_0 = k$, $b_i = (k - 1)$ para $1 \leq i \leq d - 1$ y $a_d = (k - 1)$. Por lo tanto, los números de intersección están bien definidos y de aquí que G es distancia-regular. ■

Entonces el arreglo de intersección de una $(k; d)$ -gráfica de Moore esta dado por

$$\{k, k - 1, k - 1, \dots, k - 1; 1, 1, 1, \dots, 1\}$$

2.3. Definiciones equivalentes

En esta sección se probará que las definiciones 2,2,2 a) y 2,2,3 son equivalentes. Veamos primero que la definición 2,2,2 a) implica la definición 2,2,3. Para esto hay que probar que toda $[k; g]$ -jaula minimal con cuello $g = 2d + 1$ alcanza la cota de Moore. Denotemos con G a la $[k; g]$ -jaula minimal y supongamos que G tiene orden n .

Si tomamos la partición distancia para algún vértice v de G , entonces no puede haber dos vértices a distancia menor a d de v que pertenezcan a diferentes celdas que sean adyacentes, ya que de lo contrario formaríamos

ciclos de longitud mas chica que el cuello. Por la misma razón, tampoco puede haber dos vértices que sean adyacentes en la misma celda $G_i(v)$ para $i < d$. Como G es una $[k; g]$ -jaula minimal el orden de G es:

$$1 + k + k(k - 1) + \dots + k(k - 1)^{\frac{(g-1)}{2}-1}$$

es decir el orden de G es

$$1 + k + k(k - 1) + \dots + k(k - 1)^{d-1}$$

Entonces G es una $(k; d)$ -gráfica de Moore que es lo que se quería probar.

Para probar que 2,2,3 implica 2,2,2 a) tenemos que ver que una $(k; d)$ -gráfica de Moore es una $[k; 2d + 1]$ -jaula minimal. La primera parte se tiene recordando que toda $(k; d)$ -gráfica de Moore tiene cuello $g = 2d + 1$. Por otro lado, como G alcanza la cota de Moore y $d = \frac{(g-1)}{2}$, entonces:

$$n = 1 + k + k(k - 1) + \dots + k(k - 1)^{\frac{(g-1)}{2}-1} \text{ que es lo que se quería probar.}$$

Acabamos de ver que las $(k; d)$ -gráficas de Moore son jaulas minimales. De manera inversa, una $[k; g]$ -jaula minimal de cuello g impar es una $(k; \frac{g-1}{2})$ -gráfica de Moore. Así, las jaulas minimales de cuello impar son las gráficas de Moore como ya habíamos notado antes.

También podemos definir a las gráficas de Moore como las gráficas de diámetro d y cuello $g = 2d + 1$ ya que:

Proposición 2.3.1 *Si G es una gráfica con diámetro d y cuello $g = 2d + 1$, entonces G es regular.*

Demostración. *Primero veamos que cualesquiera dos vértices que están a distancia d tienen la misma valencia.*

Sean $v, w \in V(G)$ tal que $d_G(v, w) = d$. Sea P el camino de longitud d que va de v a w . Consideremos a cualquier vecino v' de v que no pertenezca a P y veamos que $d_G(v', w) = d$. Supongamos que $d_G(v', w) = d'$, con $d' < d$, y consideremos a P' el camino de longitud d' que va de w a v' . Sea C el ciclo formado por P , P' y la arista (v', v) (Ver Figura 2.4); observemos que su tamaño es $d + d' + 1$, contradiciendo que el cuello de G es de tamaño $2d + 1$. Por lo tanto $d_G(v', w) = d$.

Notemos que P' es un camino de v' a w que contiene a uno y solo uno de los vecinos de w . Como la elección de v' fue arbitraria, entonces cada $x_i w$ -camino, donde $x_i \in N_G(v)$ y $x_i \notin V(P)$, usa un vecino diferente de w , ya que si dos de estos caminos usaran un vecino común de v entonces el cuello

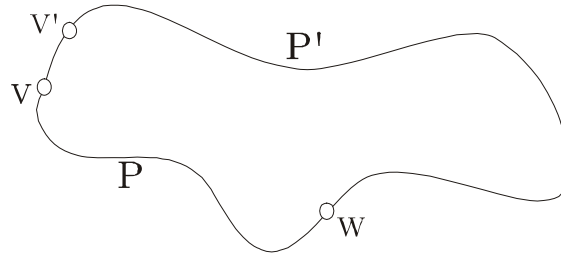


Figura 2.4:

sería menor o igual que $2d - 1$ lo cual es falso, entonces w tiene al menos tantos vecinos como v . Con un argumento análogo para w , llegamos a que v tiene al menos tantos vecinos como w ; de aquí que v y w tienen la misma valencia (Ver Figura 2.5).

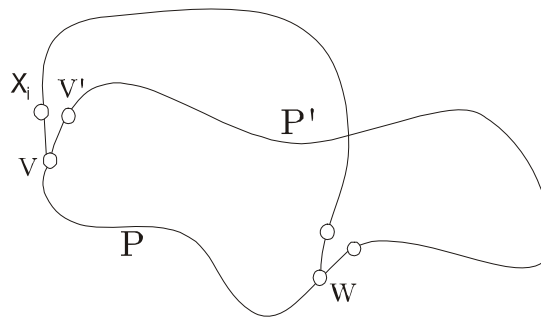


Figura 2.5:

Observemos que v y w viven en al menos un ciclo de longitud $2d + 1$. De nuevo, como la elección de v y w fue arbitraria, entonces cualesquiera dos vértices que están a distancia d viven en un ciclo C de longitud $2d + 1$. Veamos

ahora que cualesquiera dos vértices de C tienen la misma valencia. Sean $\{r, s\} \in V(C)$ tales que $d_C(r, s) = d$, (dichos vértices existen, pues la longitud de C es $2d + 1$). Entonces por lo anterior r y s tienen la misma valencia. Como la elección de r y s es arbitraria, entonces todos los vértices de C tienen la misma valencia.

Falta demostrar que todo vértice en G que no pertenece a C tiene la misma valencia que un vértice de C . Sea $x \in V(G)$ tal que $x \notin V(C)$; sea Q un camino de longitud i , con $1 \leq i \leq d$, de x a C . Si $i = d$, entonces se tiene lo que se quería. Sea $i < d$ y sea $f \in V(Q) \cap V(C)$; consideremos a un vértice $x_i \in V(C)$ tal que existe una $f x_i$ -trayectoria sobre C de longitud $d - i$; x_i está a distancia d de x , de aquí que x tiene la misma valencia que x_i . Por lo tanto todos los vértices de G tienen la misma valencia. Entonces G es regular (Ver Figura 2.6). ■

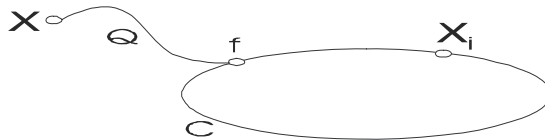


Figura 2.6:

2.4. Existencia de las gráficas de Moore

El estudio de las gráficas de Moore fue iniciado por Hoffman y Singleton en 1960 [2]. Ellos probaron la existencia de $(k; d)$ -gráficas de Moore para $d = 2$ y $d = 3$. En el caso $d = 2$, y que probaremos mas adelante, vieron que las gráficas de Moore existen y son únicas cuando $k = 2, 3, 7$. También probaron que no hay otras $(k; 2)$ -gráficas de Moore excepto posiblemente para $k = 57$, para la cual su existencia no está comprobada ya que la gráfica no se ha construido. Para $d = 3$ probaron que la única $(k; 3)$ -gráfica de Moore se da solamente para $k = 2$, y la $(2; 3)$ -gráfica de Moore es C_7 .

El siguiente Lema nos servirá para probar que las $(k; 2)$ -gráficas de Moore existen solo para $k \in \{2, 3, 7\}$ y posiblemente $k = 57$.

Lema 2.4.1 *Si G es una $(k; d)$ -gráfica y $A = (a_{ij})$ es la matriz de adyacencia de G , I la matriz identidad y J es la matriz unidad entonces A satisface la siguiente ecuación: $A^2 + A = (k - 1)I + J$.*

Demostración. *Sea A la matriz de adyacencia de G . Para probar la igualdad requerida, primero veamos cuales son las condiciones que deben de satisfacer las entradas c_{ij} de A^2 :*

Caso 1 $c_{ij} \neq 0$ e $i \neq j$.

Si $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \neq 0$ significa que existe al menos un $r \in V(G)$ tal que $a_{ir}a_{rj} \neq 0$, como las entradas de A son 1 ó 0 entonces $a_{ir}a_{rj} \neq 0$ implica que $a_{ir} = a_{rj} = 1$, es decir (i, r) y $(r, j) \in A(G)$.

Ademas como G no tiene triángulos entonces $(i, j) \notin A(G)$. Por otro lado como G no tiene cuadrados entonces no puede existir $m \in V(G)$ con $m \neq r$ tal que $a_{im}a_{mj} \neq 0$. Por lo tanto en este caso $c_{ij} = a_{ir}a_{rj} = 1$

Caso 2 $c_{ij} \neq 0$ e $i = j$.

Como G es k regular entonces $\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} = k$ lo cual implica que $c_{ij} = k$ en este caso.

Caso 3 $c_{ij} = 0$ e $i \neq j$.

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = 0$ significa que no existe $k \in V(G)$ tal que (i, k) y $(k, j) \in A(G)$ y como el diámetro es 2 entonces $(i, j) \in A(G)$ y $a_{ij} = 1$ con $i \neq j$.

Del caso1), caso2) y caso3) se tiene que A^2 debe estar definida como sigue:

$$c_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si } i \neq j & \text{y } a_{ij} = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq j & \text{y } a_{ij} = 1 \\ k & \text{si } i = j & \end{array} \right\}$$

Entonces $A^2 + A$ debe estar definida como sigue:

$$b_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si } i \neq j \\ k & \text{si } i = j \end{array} \right\}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$A^2 + A = \begin{pmatrix} k & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} =$$

$(k-1)I + J$ ■

Proposición 2.4.2 *La existencia de las $(k; 2)$ -gráficas de Moore se dará si $k \in \{2, 3, 7\}$ y posiblemente si $k = 57$.*

Demostración. *Sea A la matriz de adyacencia de una $(k; 2)$ -gráfica de Moore de orden $n = k^2 + 1$ (cota de Moore). Del lema anterior sabemos*

que A satisface la ecuación:

$$A^2 + A - (k - 1)I = J \quad (1).$$

Como J es un polinomio en A entonces A y J tienen un conjunto común de vectores propios. Uno de ellos es el vector unidad como veremos a continuación.

Se puede probar que el polinomio característico de J es $\lambda^n - n\lambda^{n-1}$, del cual se obtienen sus valores característicos que son $\lambda = 0$ y $\lambda = n$. El vector característico asociado a $\lambda = n$ es el vector unidad $u = (1, \dots, 1)$, así $Ju = nu$. Por otro lado sabemos que A tiene k unos por renglón, pues la gráfica es k -regular. Entonces $Au = (k, \dots, k) = ku$, lo cual nos dice que k es un valor propio de A cuyo vector característico asociado es u .

Multiplicando por u de ambos lados de la ecuación (1) obtenemos que $(k^2 + 1)u = nu$. Es decir $n = k^2 + 1$ y $k^2 = n - 1$. Sea v otro vector propio de A correspondiente digamos al valor propio r . Entonces $Av = rv$ y $Jv = 0$. Así, al aplicar a ambos lados de la ecuación (1) a v obtenemos que:

$$r^2 + r - (k - 1) = 0 \quad (2).$$

De esta manera obtenemos otros dos valores propios de A :

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{4k-3}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{-1-\sqrt{4k-3}}{2}$$

Sabemos que A por ser una matriz simétrica es diagonalizable y tiene n valores propios reales, así:

Caso 1) Si k es tal que r_1 y r_2 no son racionales entonces cada uno deberá tener multiplicidad $\frac{n-1}{2}$ para que las partes irracionales involucradas se cancelen. Sabemos también que la traza de A es cero, y como A es diagonalizable entonces la suma de los valores propios de A es también cero y usando además que $k^2 = n - 1$ tenemos que:

$$k + \frac{n-1}{2}(r_1 + r_2) = k + \frac{n-1}{2} = k + \frac{k^2}{2} = 0$$

Los valores de k para los cuales se satisface esta ecuación son:

$k = 0$ para el cual $n = 1$. No hay gráfica con un vértice y diámetro 2. Y

$k = 2$ para el cual $n = 1 + 2^2 = 5$. Esta gráfica es el 5-ciclo, la única $(2, 2)$ -gráfica de Moore que existe.

Caso 2) Los valores de k para los cuales r_1 y r_2 son racionales son aquellos en los que $4k - 3 = s^2$ con s entero. Sea m la multiplicidad de r_1 , entonces la suma de los valores propios de A está dada por $k + m(\frac{s-1}{2}) + (n - 1 - m)(\frac{-s-1}{2}) = 0$. Despejando k de $4k - 3 = s^2$ se tiene $k = \frac{s^2+3}{4}$.

Sustituyendo $n - 1 = k^2$ y $k = \frac{s^2+3}{4}$ en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{s^2+3}{4} + m\left(\frac{s-1}{2}\right) + (k^2 - m)\left(\frac{-s-1}{2}\right) &= \\ \frac{s^2+3}{4} + m\left(\frac{s-1}{2}\right) + \left(\frac{s^4+6s^2+9}{16} - m\right)\left(\frac{-s-1}{2}\right) &= \\ \frac{s^2+3}{4} + \frac{ms-m}{2} + \frac{-s^5-6s^3-9s-s^4-6s^2-9}{32} + \frac{ms+m}{2} &= \\ \frac{-s^2-3}{4} + \frac{s^5+s^4+6s^3+6s^2+9s+9}{32} + -ms &= \\ \frac{s^5+s^4+6s^3+6s^2+9s+9-32ms-8s^2-24}{32} &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$s^5 + s^4 + 6s^3 - 2s^2 + (9 - 32m)s - 15 = 0 \quad (3).$$

Ya que (3) requiere soluciones enteras los únicos candidatos para s son los factores de 15. De esta forma las soluciones para s son:

$$s = 1 \quad \text{para el cual} \quad m = 0, \quad k = 1 \quad \text{y} \quad n = 2$$

$$s = 3 \quad \text{para el cual} \quad m = 5, \quad k = 3 \quad \text{y} \quad n = 10$$

$$s = 5 \quad \text{para el cual} \quad m = 28, \quad k = 7 \quad \text{y} \quad n = 50$$

$$s = 15 \quad \text{para el cual} \quad m = 1729, \quad k = 57 \quad \text{y} \quad n = 3250$$

No hay gráfica 1 regular con diámetro 2. El caso $k = 3$ nos da la única

$(3; 2)$ -gráfica de Moore, a saber, la gráfica de Petersen. El caso $k = 7$ nos da la gráfica de Hoffman-Singleton, la única $(7; 2)$ -gráfica de Moore. Y por último para el caso $k = 57$ no sabemos si la gráfica existe o no porque la gráfica no se ha construido. ■

En 1973 Damerell probó, en su artículo "Sobre gráficas de Moore" [3], la no existencia de las $(k; d)$ -gráficas de Moore para $k \geq 3$ y $d \geq 3$. Otra prueba de ello fue dada también en 1973 por Ito y Bannai, en su artículo "Sobre gráficas de Moore finitas" [4]. Además, como se vió anteriormente, no existen Gráficas de Moore con diámetro uno, y las de diámetro dos se dan si $k \in \{2, 3, 7\}$ y posiblemente si $k = 57$; con esto el estudio sobre la existencia de las Gráficas de Moore quedó concluido. Es por esta razón que actualmente el estudio de las Gráficas de Moore consiste de manera natural en encontrar $(k; d)$ -gráficas que si bien no alcanzan la cota de Moore tienen muchos vértices, es decir de orden cercano a la cota de Moore. Este tipo de trabajos resulta, además de interesante teóricamente, altamente aplicable por que sirve para construir redes con muchos vértices a distancias fijas (de preferencia cortas entre ellos).

En el siguiente capítulo se va a introducir el concepto de geometría finita

y de polígono generalizado para explicar más adelante porque a las jaulas de cuello par se les conoce como polígonos generalizados. También usaremos estas estructuras para en el último capítulo construir la $(7; 2)$ -gráfica de Moore a partir de los planos proyectivos y finalmente colorearla.

Capítulo 3

Geometrias finitas y sus gráficas de incidencia

El estudio de las geometrías finitas ha sido abordado por gran parte de los matemáticos, primero de manera informal y después mas sistemáticamente desde el origen de la geometría. Las configuraciones finitas de puntos y líneas en el plano despertaron el interés de importantes matemáticos como lo fueron Descartes y Pappus por citar algunos. Posteriormente Pascal en 1640 estudia las configuraciones de estos autores en el plano proyectivo real.

Dar una definición concreta de geometría finita resulta difícil ya que existen distintas definiciones de este concepto, es por esta razón que a lo largo de esta tesis cuando hablemos de geometría finita estaremos pensando simplemente en un conjunto finito de objetos (puntos, líneas, curvas, etc.) dentro de un espacio geométrico. Para fines de esta tesis trabajaremos en concreto sobre el plano y nuestros objetos serán puntos y líneas.

Una **estructura de incidencia** es una terna $\mathbf{I} = (P, L, I)$ que consta de un conjunto finito P de puntos, un conjunto L de subconjuntos de P cuyos elementos son llamados líneas y una relación $I \subseteq P \times L$ llamada incidencia. Si $(p, l) \in I$ diremos que el punto p y la línea l son incidentes, o que el punto p vive en la línea l , o bien, que la línea l pasa por el punto p .

La gráfica de Incidencia $\Omega(\mathbf{I})$ de una estructura de incidencia \mathbf{I} es una gráfica bipartita que tiene como conjunto de vértices a $P \cup L$, y donde dos vértices son adyacentes si son incidentes en I .

Un **espacio parcialmente lineal** es una estructura de incidencia $\mathbf{S} = (P, L, I)$ que cumple:

PL1) Toda línea tiene al menos dos puntos.

PL2) Entre cualesquiera dos puntos pasa a lo mas una línea.

Como consecuencia de la propiedad PL2 se tiene que si xy denota a la línea que pasa por los puntos $\{x, y\}$, y $\{p, q\} \in xy$ para $p, q \in P$ entonces $pq = xy$.

Proposición 3.0.3 Sea $\mathbf{S} = (P, L, I)$ un espacio parcialmente lineal y sea $\Omega(\mathbf{S})$ su gráfica de incidencia. Entonces el cuello $g(\Omega(\mathbf{S})) \geq 6$.

Demostración. Como la gráfica de incidencia es una gráfica bipartita entonces su cuello es par. Supongamos que $g(\Omega(\mathbf{S})) = 4$, entonces existen $i, j \in P$, y $l_r, l_s \in L$ tales que $i, j \in l_r$ y $i, j \in l_s$ con $r \neq s$ (Ver Figura 3.1), lo cual es una contradicción pues por dos puntos pasa a lo más una única línea. Por tanto, $g(\Omega(I)) \geq 6$. ■

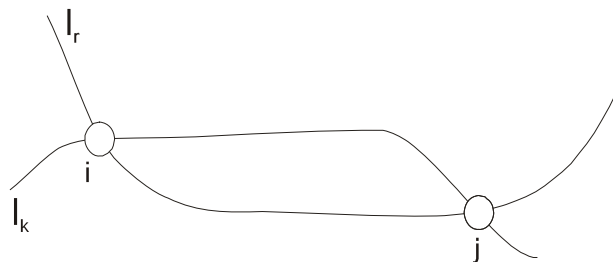


Figura 3.1:

Un **espacio lineal** S es un espacio parcialmente lineal que cumple que por cualesquiera dos puntos pasa exactamente una línea. Observemos que el cuello de su gráfica de incidencia también es mayor o igual que 6.

A lo largo de esta tesis estudiaremos gráficas de incidencia de ciertas estructuras de incidencia. A continuación definiremos de manera detallada a estas estructuras, algunas de ellas de dos maneras distintas: combinatoria y algebraicamente.

3.1. Planos Projectivos y Afines

3.1.1. Definición combinatoria

Un **plano proyectivo** finito es un espacio lineal $\Pi = (X, L, I)$ que cumple los siguientes axiomas:

P0) Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ existe una única $l \in L$ tal que $\{x_1, x_2\} \in l$ (axioma de espacio lineal).

P1) Para cualesquiera $l_1, l_2 \in L$ tenemos que $|l_1 \cap l_2| = 1$.

P2) Existe un subconjunto $F \subseteq X$ de 4 elementos tal que $|l \cap F| \leq 2$ para

toda $l \in L$.

Una de las propiedades del plano proyectivo que puede probarse de manera directa a partir de los tres axiomas anteriores es que cualesquiera dos líneas tienen el mismo número de puntos [6]. Entonces si $|l| = n + 1$ con $l \in L$, el orden del plano proyectivo se define como $|l| - 1 = n$. Denotamos desde ahora a los planos proyectivos de orden n con Π_n . A continuación se enuncian otras dos propiedades básicas de Π_n que también se obtienen a partir de los axiomas, pero que al igual que la anterior consideramos que no es necesario probarlas con rigor dada la temática de este trabajo [6].

1) Por cada punto pasan exactamente $n + 1$ líneas, el cual coincide con el número de puntos que contiene cada línea.

2) El número total de puntos y de líneas de Π_n es respectivamente $n^2 + n + 1$.

Un ejemplo de plano proyectivo finito es el plano de Fano, el cual es el plano proyectivo más pequeño que se puede construir y el único plano proyectivo de orden 2 salvo isomorfismo. El plano de Fano tiene 7 puntos, 7 líneas, por cada punto pasan 3 líneas y cada línea contiene 3 puntos (Figura 3.2).

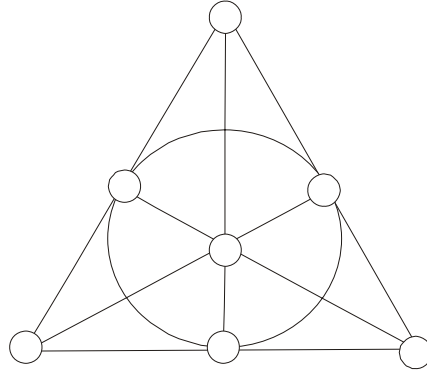


Figura 3.2:

La definición anterior de plano proyectivo no garantiza ni su existencia ni su unicidad. Resulta entonces natural preguntarse para que valores de n existen planos proyectivos de orden n , así como preguntarse también si cuando existe este es único, por ejemplo se sabe que Π_2 , Π_3 , Π_4 , Π_5 , Π_7 y Π_8 existen y son únicos salvo isomorfismo, mientras que Π_6 no existe y que para $n = 9$ se conocen cuatro planos proyectivos no isomorfos. Mas adelante enunciaremos mas propiedades de los planos proyectivos, mientras daremos una prueba sobre el cuello de la gráfica de incidencia de los planos proyectivos de orden n .

Proposición 3.1.1 *Sea Π_n un plano proyectivo finito de orden n y sea $\Omega(\Pi_n)$ su gráfica de incidencia. Entonces:*

1.- El diámetro de $\Omega(\Pi_n)$ es tres.

2.- El cuello $g(\Omega(\Pi_n))$ es igual a 6.

Demostración. Primero veamos que el diámetro de $\Omega(\Pi_n)$ es 3 y sean $p, q, l, l' \in V(\Omega(\Pi_n))$. Para ello notémos que existen tres casos:

1.- Considerar la distancia de un punto p a una línea l .

2.- Considerar la distancia de un punto p a otro punto q .

3.- Considerar la distancia de una línea l a otra línea l' .

Del caso 1 se desprenden dos subcasos:

i) El punto p vive en la línea l en cuyo caso la distancia de p a l es 1.

ii) El punto p no vive en la línea l : si l_1 es una línea que pasa por p entonces por el axioma (P1) sabemos que existe un punto q que vive tanto en l como en l_1 . Entonces la trayectoria (p, l_1, q, l) es la pl -geodésica en $\Omega(\Pi_n)$, lo cual prueba que la distancia de p a l en este caso es tres (Ver Figura 3.3).

Por otro lado por el axioma (P0) existe una línea l que pasa por p y q , lo que para el caso 2 implica que la distancia de p a q es 2 en $\Omega(\Pi_n)$, y por último para el tercer caso por el axioma (P1) la distancia de l a l' es dos. Por

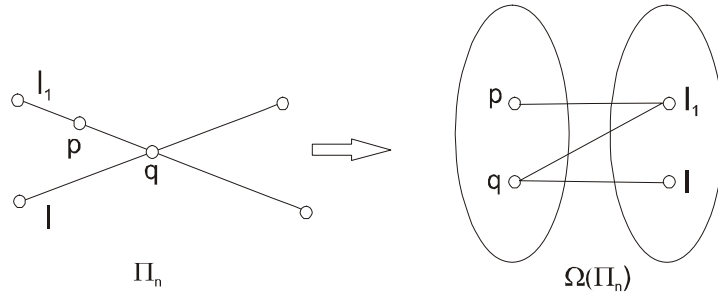


Figura 3.3:

lo tanto el diámetro de $\Omega(\Pi_n)$ es tres.

Probemos ahora que el cuello $g(\Omega(\Pi_n))$ es igual a seis. Por el axioma (P2) sabemos que existen 4 puntos en posición general. Ahora por el axioma (P0) sabemos que entre cualesquiera dos puntos existe una única línea. Entonces si consideramos las líneas entre tres de los puntos en posición general, lo que obtenemos es un triángulo (Ver Figura 3.4), que en la gráfica de incidencia se traduce en un ciclo de tamaño 6. Por lo tanto, el cuello $g(\Omega(\Pi_n))$ es igual a 6.

■

Si observamos las características y los parámetros de los planos proyectivos junto con la proposición anterior podemos concluir que:

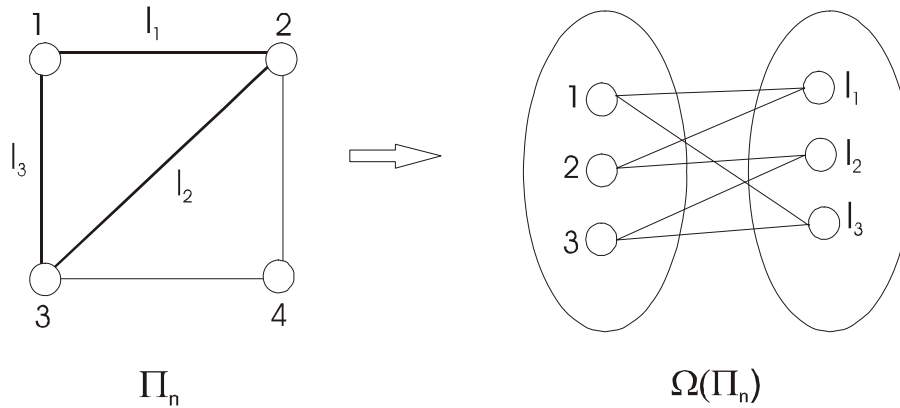


Figura 3.4:

Corolario 3.1.2 : La gráfica de incidencia de un plano proyectivo de orden n satisface las siguientes propiedades:

- 1) Es bipartita.
- 2) Es $(n + 1)$ -regular.
- 3) Tiene orden $2(n^2 + n + 1)$.
- 4) Tiene diámetro 3.
- 5) Tiene cuello 6.

Hay estructuras de incidencia que se obtienen a partir de otras, un ejemplo de ello son los planos afines finitos que a continuación definiremos.

El **plano afin** de orden n , denotado por A_n , es un espacio lineal que puede definirse axiomáticamente, sin embargo también puede describirse como lo haremos en este trabajo, a partir de un plano proyectivo de orden n quitando a este cualquiera de sus líneas (con todos sus puntos incluidos). Por lo tanto el plano afin de orden n depende fuertemente de que plano proyectivo finito Π_n hayamos escogido. Por otro lado, la definición de plano afin no depende de la línea que hayamos escogido en Π_n ya que, combinatoriamente el plano proyectivo es simétrico con respecto a sus líneas. Así pues, el plano afin esta bien definido.

Algunas de las propiedades del plano afin A_n son las siguientes:

- 1) Todas las líneas tienen cardinalidad n .
- 2) Por cada punto pasan $n+1$ líneas.
- 3) El número total de líneas es n^2+n y
- 4) El número total de puntos es n^2 .

En la Figura 3.5 se muestra al plano afin A_2 asociado a Π_2 el plano proyectivo de Fano.

Con esto terminamos la descripción combinatoria de los planos proyec-

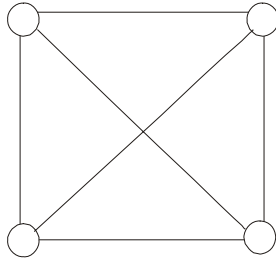
 A_2

Figura 3.5:

tivos y los planos afines, ambos finitos. En la siguiente sección trataremos a estos mismos pero de manera algebraica.

3.1.2. Definición algebraica

Como planteamos en la sección anterior una pregunta natural que surge acerca de la existencia de planos proyectivos es la siguiente: ¿para que valores de n existe un plano proyectivo de orden n y cuándo este es único?. Existe una familia de planos proyectivos que se construye a partir de los campos de Galois de orden n y la existencia de estos planos proyectivos depende de la existencia de los campos de Galois, los cuales como se sabe existen cuando n es potencia de primo. Por lo tanto, cuando n es potencia de primo existe al menos el plano proyectivo de orden n asociado al campo de Galois, el

cual se conoce como el plano proyectivo algebraico de orden n denotado por $PG(2, n)$ (projective geometry $(2, n)$).

Obviamente $PG(2, n)$ es combinatorio (es decir, satisface los axiomas (PO), (P1) y (P2)), más aun, cuando Π_n es único salvo isomorfismo (al menos para $n \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ como se dijo en la sección anterior) Π_n coincide con $PG(2, n)$. Sin embargo existen potencias de primos para los cuales además del algebraico existen otros planos proyectivos combinatorios del mismo orden y no isomorfos, por ejemplo cuando n es igual a 9 existen 3 planos proyectivos combinatorios no isomorfos además de $PG(2, 3)$ [7].

Por otro lado acerca de la no existencia de Planos Proyectivos se tienen teoremas como el siguiente que elimina algunos casos, es decir determinan algunos valores de n para los cuales los planos proyectivos no existen [6]:

Teorema de Bruck-Ryser (1949): Sea n un entero que no es potencia de un primo, si $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ y n no es la suma del cuadrado de dos enteros entonces no hay planos proyectivos de orden n .

Este teorema nos sirve para descartar algunos valores, por ejemplo 14, 21 y 22, sin embargo él mismo no cubre otros valores como 6 y 10. La conjetura de la no existencia del plano proyectivo de orden 6 fue dada por Euler,

pero solamente Tarry dió un argumento convincente alrededor de 1900. Para el plano proyectivo de orden 10 se probó por medio de numerosos calculos computacionales la no existencia de este plano.

Así como este hay otros teoremas de no existencia de planos proyectivos, pero ninguno de estos descarta todos los valores de n , por ejemplo el problema de determinar la existencia de Π_{12} sigue abierto, así como la de otros valores de n que no son potencia de primo y no satisfacen las hipótesis de los ya conocidos teoremas de no existencia.

A continuación daremos una de las descripciones que existen de los planos proyectivos algebraicos; escogimos esta por que es la que relaciona al plano proyectivo con la gráfica de incidencia de la manera mas conveniente para el desarrollo de este trabajo.

Definición algebraica del plano proyectivo.

Sean P y L los conjuntos de puntos y rectas de $PG(2, n)$ definidas como sigue:

Sea $GF(n)$ el campo de Galois de orden n y sean $\{0, 1, \alpha, \dots, \alpha^{n-2}\}$ sus n elementos, esto se puede hacer debido a que $GF^*(n)$ es un grupo cíclico y α

52CAPÍTULO 3. GEOMETRIAS FINITAS Y SUS GRÁFICAS DE INCIDENCIA

es un elemento generador. Definimos un subconjunto de P con n^2 elementos, denotado por P_A como sigue:

$$P_A = \{(x, y) \mid x, y \in GF(n)\}.$$

Para definir los $n + 1$ puntos restantes de P necesitamos definir primero el conjunto L de líneas. Denotamos por $[m, b]$ a la recta formada por los puntos $(x, y) \in P_A$ que satisfacen la ecuación $y = mx + b$ y sea $L_i = \{[i, b] \mid b \in GF(n)\}$ para $i \in GF(n)$ el conjunto de líneas de L de pendiente i . Abusando de la notación generalizamos lo anterior denotando por $[*, b]$ a la recta $x = b$ para $b \in GF(n)$ y sea $L_* = \{[* , b] \mid b \in GF(n)\}$. Definiremos los $n + 1$ puntos restantes de la siguiente manera:

$$p_i = \bigcap_{l \in L_i} l \text{ para } i \in GF(n)$$

$$p_\infty = \bigcap_{l \in L_*} l$$

A todos los puntos anteriores los llamaremos los puntos al infinito por ser cada uno de ellos la intersección de todas las líneas de una misma pendiente.

Sea l_∞ la línea que contiene a los puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_{\alpha^n-2}, p_\infty\}$ (línea al infinito). Entonces,

$$P = P_A \cup \{p_0, p_1, \dots, p_{\alpha^n-2}, p_\infty\} \text{ y}$$

$$L = \left(\bigcup_{i \in GF(n)} \{L_i\} \right) \cup \{L_*\} \cup l_\infty.$$

Por definición todos los puntos de P y las líneas de L son distintos y cumplen que:

$$1) |P| = n^2 + n + 1$$

$$2) |L| = n^2 + n + 1.$$

Además por definición de P y L es claro que por cada punto pasan $n + 1$ líneas y cada línea tiene $n + 1$ puntos. Además la relación de incidencia está dada por la pertenencia de un punto a una línea definida también por las condiciones anteriores. Así pues P y L son los puntos y las líneas de $PG(2, n)$.

De la misma manera existe una definición algebraica para los planos afines la cual mostraremos a continuación. En esta definición haremos uso de lo antes definido para planos proyectivos algebraicos.

Definición algebraica del plano afín.

El plano afín algebraico denotado por $A(2, n)$ es una estructura de incidencia cuyo conjunto de puntos P es igual a $\{(x, y) \mid x, y \in GF(n)\}$ (observemos que este conjunto coincide con el subconjunto de puntos de $PG(2, n)$ definido como P_A) y cuyo conjunto de líneas L es igual a:

$$L = \left(\bigcup_{i \in GF(n)} \{L_i\} \right) \cup \{L_*\}.$$

El conjunto de puntos y de líneas serán incidentes si, al igual que el plano proyectivo algebraico satisfacen la ecuación $y = mx + b$. Notemos que $|P| = n^2$, $|L| = n^2 + n$, que por cada punto pasan $n + 1$ líneas y que cada línea tiene n puntos, es decir se cumplen las propiedades combinatorias del plano afín. Además recordemos que combinatoriamente el plano afín puede construirse quitando cualquier línea del plano proyectivo. Así pues hacemos lo mismo algebraicamente solo que por conveniencia para construir el plano afín algebraico quitamos la línea l_∞ de $PG(2, n)$, obviamente junto con todos sus puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_{n^2-2}, p_\infty\}$.

3.2. Polígonos Generalizados

Un cuadrángulo generalizado **CG** es un espacio parcialmente lineal (P, L, I) que satisface los siguientes axiomas:

CG1) Dada cualquier línea $l \in L$ y cualquier punto $p \in P$ que no este en l existe un único punto $p' \in P$ perteneciente a l tal que p y p' son colineales.

CG2) Existen puntos no colineales y líneas no concurrentes.

Nótese que estas dos condiciones son autoduales, así el dual de un cuadrángulo generalizado es de nuevo un cuadrángulo generalizado.

Ejemplos de cuadrángulos generalizados son las mallas (y sus duales), como se muestra en la siguiente figura.

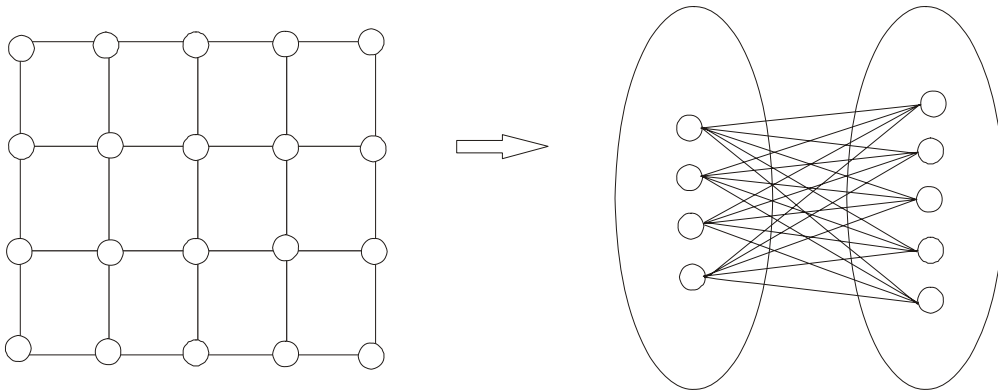


Figura 3.6:

Proposición 3.2.1 *El cuello de la gráfica de incidencia de un cuadrángulo generalizado es 8.*

Demostración. Sea $\Omega(CG)$ la gráfica de incidencia del cuadrángulo generalizado CG . Entonces por la proposición 2.0.1 el cuello de $\Omega(CG)$ es al menos 6. Supongamos que $g(\Omega(CG))$ es 6. Entonces existen $p, q \in P$ tales que $pq \in L$ y $r \in P$ tal que $r \notin pq$ que cumplen que rp y rq en L , lo cual

contradice el axioma CG1 (Ver Figura 3.7). Por lo tanto $g(\Omega(CG))$ es mayor o igual a 8. Mostraremos que existe un 8-ciclo en $\Omega(CG)$.

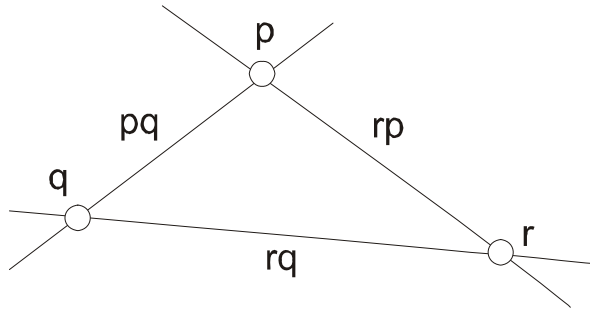


Figura 3.7:

Sean $p, q \in P$ puntos no colineales. Entonces existen l_p y l_q en L tales que l_p pasa por p y no contiene a q , y l_q pasa por q y no contiene a p . Así por el axioma 1 de cuadrángulos generalizados existe un único punto p' , $p' \neq p$ sobre l_p tal que $p'q \in L$ y un único punto $q' \in P$, $q' \neq q$ sobre l_q tal que $pq' \in L$ (Ver Figura 3.8).

El conjunto $\{p, q, l_p, l_q, p', q', p'q, pq'\}$ de vértices en $V(\Omega(CG))$ forma un ciclo inducido de longitud 8 en $\Omega(CG)$. Por lo tanto $g(\Omega(CG))$ es igual a 8.

■

Con la idea de generalizar el concepto de plano proyectivo (también llamado triángulo generalizado) y cuadrángulo generalizado introduciremos a

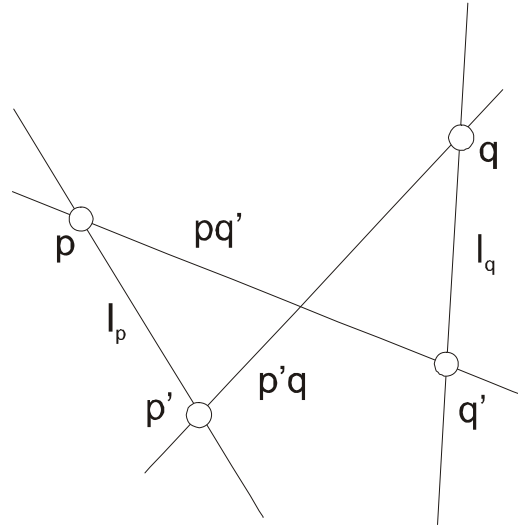


Figura 3.8:

continuación la definición de polígono generalizado [8].

Sea $n \geq 1$ un número natural. Un l -gono generalizado es una estructura de incidencia $\mathbf{GP}_l = (P, L, I)$ con $P \neq \emptyset$ y $L \neq \emptyset$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

GP_1) GP no contiene s -gonos para $2 \leq s < l$.

GP_2) Cualesquiera dos elementos $x, y \in (P \cup L)$ están contenidos en algún l -gono en GP_l .

GP_3) Existe un $(l + 1)$ -gono en GP_l .

Hay polígonos generalizados que no satisfacen la condición (GP_l3) , un ejemplo de ello son las mallas y su dual. A estos se les suele llamar en general polígonos generalizados débiles. En este trabajo nos enfocaremos a los polígonos generalizados no débiles, refiriendonos a ellos simplemente como polígonos generalizados.

En lugar de l -gonos generalizados hablaremos de polígonos generalizados, así los 3-gonos serán los triángulos generalizados, que como se había mencionado anteriormente son los planos proyectivos, como también los 4-gonos y los 6-gonos serán los cuadrángulos generalizados y hexágonos generalizados respectivamente.

A continuación enunciamos un resultado que no probaremos en este trabajo debido a que la temática principal es otra, pero que sin embargo usaremos fuertemente a lo largo de este capítulo [9]:

Resultado: Todo l -gono generalizado cumple que por cada punto pasan $n + 1$ líneas y cada línea tiene $m + 1$ puntos.

Diremos que un polígono generalizado con estos parámetros es un polígono generalizado de orden (n, m) .

Aunque existen criterios de existencia de polígonos generalizados de orden (n, m) nosotros estamos interesados en polígonos generalizados simétricos, aquellos en los que por cada punto pasan tantas líneas como puntos hay en cada línea, es decir el caso de los polígonos generalizados con $n = m$, y un ejemplo de esto son los triángulos generalizados (planos proyectivos).

Es bien sabido para los matemáticos que se dedican al estudio de las geometrías finitas que estos polígonos generalizados existen solo para ciertos valores de l y n como son los siguientes [8]:

i) Cuando $n = 1$ y l es cualquier entero positivo mayor o igual que 3 los polígonos con l vértices son ejemplos de l -gonos de orden 1.

ii) Cuando n es potencia de primo no es trivial demostrar que los l -gonos generalizados de orden n existen solo si $l = \{3, 4, 6\}$.

Por propiedades fundamentales de los polígonos generalizados se tiene que el número de puntos y de líneas de los polígonos simétricos coinciden y es exactamente:

$$\sum_{i=0}^{l-1} n^i.$$

Teorema 3.2.2 *La gráfica de incidencia $\Omega(GP_l(n))$ de un l -gono gener-*

alizado de orden n tiene las siguientes propiedades:

- 1) Es bipartita.
- 2) Es $(n + 1)$ -regular.
- 3) Tiene orden $2\left(\sum_{i=0}^{l-1} n^i\right)$
- 4) Tiene cuello $2l$.
- 5) Tiene diámetro l .

Demostración. Las propiedades 1 y 2 se tienen directamente de la definición de gráfica de incidencia y del resultado antes mencionado respectivamente. Sea n es orden de $\Omega(GP_l(n))$, por la observación inmediata anterior al teorema y del hecho de que:

$|V(\Omega(GP_l(n)))| = |P| + |L|$ se tiene que:

$$|P| + |L| = \sum_{i=0}^{l-1} n^i + \sum_{i=0}^{l-1} n^i = 2\left(\sum_{i=0}^{l-1} n^i\right).$$

Para probar 4) solo basta observar dos cosas, una es que por (GP_l1) el cuello de $\Omega(GP_l(n))$ es al menos $2l$, y la otra es que como cualesquiera dos elementos $x, y \in (P \cup L)$ de GP_l están contenidos en algún l -gono (esto por (GP_l2)) entonces el cuello de $\Omega(GP_l(n))$ es exactamente $2l$. Por último, por

el inciso anterior y por la condición (GP_12) sabemos que cualesquiera dos elementos de la gráfica $\Omega(GP_l(n))$ están contenidos en un cuello de tamaño $2l$, lo cual implica que estos estarán a distancia a lo mas l . Por lo tanto, el diámetro de $\Omega(GP_l(n))$ es l . ■

3.3. $[k;g]$ -jaulas de cuello par

El objetivo de esta sección será ahondar en el tema de las $[k;g]$ -jaulas minimales de cuello par, para después relacionarlas con las gráficas de incidencia de ciertas geometrías finitas.

Denotemos por $f(k;g)$ al orden de la $[k;g]$ -jaula y por $f_0(k;g)$ a la cota inferior de $f(k;g)$, es decir las jaulas minimales (las que alcanzan la cota mínima sobre el orden) tienen orden $f_0(k;g)$.

Algunas jaulas minimales que ya conocemos son [10]:

1.- Las gráficas bipartitas completas $K_{k,k}$ las cuales son $[k;4]$ -jaulas minimales con $f_0(k;4) = 2k$.

2.- La gráfica de incidencia del plano de Fano es la $[3;6]$ -jaula minimal

y $f_0(3; 6) = 14$; también se conoce como la gráfica de Heawood (Ver Figura 3.9).

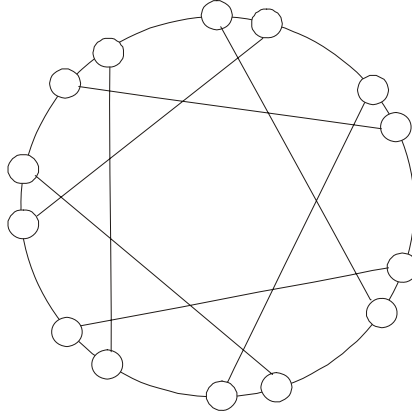


Figura 3.9: Gráfica de Heawood

3.- En general las gráficas de incidencia de los planos proyectivos Π_n son $[n + 1, 6]$ -jaulas minimales. En particular sabemos que existen cuando n es potencia de primo usando la gráfica de incidencia de $PG(2, n)$, sin embargo para valores de n en donde existe mas de un plano proyectivo (además del algebraico) como para $n = 9$, la gráfica de incidencia de estos planos proyectivos son jaulas no isomorfas (Capítulo 6 [11]), y en general para los valores de n en los que se desconoce la existencia del plano proyectivo claramente se desconoce la existencia de alguna $[n + 1; 6]$ -jaula, de hecho son problemas equivalentes ya que la existencia de uno implica la existencia del otro. En-

tonces por ejemplo para $n = 6$ sabemos que el plano proyectivo $PG(2, 6)$ no existe y por lo tanto no existe la jaula minimal asociada, es decir una $(7; 6)$ -gráfica de orden 86, sin embargo la $[7; 6]$ -jaula fue encontrada por O'Keefe y Wong [13] con orden $f(7; 6) = 90$ probando al mismo tiempo su unicidad.

4.- La $[3; 8]$ -jaula minimal fue encontrada por Tutte y $f_0(3; 8) = 30$.

5.- O'Keefe y Wong mostraron que $f(3, 10) = 70$. Al mismo tiempo, tres $[3; 10]$ -jaulas fueron encontradas de manera independiente por Balaban, Harries y Wong. Además Wong probó que solo existen estas tres $[3; 10]$ -jaulas y no se conocen otras $[k; 10]$ -jaulas.

6.- Benson encontró una $[k; 12]$ -jaula minimal para cada $k - 1$ potencia de primo, sin embargo las $[k; g]$ -jaulas minimales para $k - 1$ potencia de primo y $g \in \{6, 8, 12\}$ son los Polígonos Generalizados como veremos mas adelante en este capítulo, y estas son justamente las que encontró Benson para $g = 12$.

Proposición 3.3.1 *El mínimo número de vértices de una $[k; g]$ - jaula de cuello $g = 2d$, con $d \geq 2$, es $f_0(k; g) = 2(1 + (k-1) + (k-1)^2 + \dots + (k-1)^{\frac{g-2}{2}})$.*

Demostración. Sea G una $[k; g]$ -jaula con cuello $g = 2d$ y sea (p, q) una arista cualquiera de G . Consideremos la partición distancia de p y q respec-

tivamente; como G es k -regular entonces p y q tienen cada uno otros $k - 1$ vecinos, y nuevamente cada uno de estos vecinos tiene otros $k - 1$ vecinos además de p y q . Siguiendo con este proceso podemos definir los conjuntos $G_i[p]$ y $G_i[q]$ como sigue (Ver Figura 3.10):

$$G_i[p] = \{x \in G \mid d_G(x, p) = i \text{ y } d_G(x, q) = i + 1\} \text{ y}$$

$$G_i[q] = \{x \in G \mid d_G(x, q) = i \text{ y } d_G(x, p) = i + 1\} \text{ para } 1 \leq i \leq d - 2.$$

Veamos que el cardinal de los conjuntos $G_i[p]$ y $G_i[q]$ es $(k - 1)^i$, para $1 \leq i \leq d - 1$; para ello notémos primero que el cardinal de dichos conjuntos no puede exceder a $(k - 1)^i$ debido a que la gráfica es k -regular. Supongamos entonces y sin pérdida de generalidad que el conjunto $G_i[p]$ tiene menos vértices (Ver Figura 3.11), esto quiere decir que existen al menos dos vértices en el conjunto $G_{i-1}[p]$ que tienen vecinos comunes a distancia i de p . Entonces en G se forma un ciclo de longitud $2i$, lo cual contradice que el cuello de G es $2d$.

Así el número de vértices en $|G_i[p] \cup G_i[q]|$ es $2(k - 1)^i$ para $1 \leq i \leq d - 1$. Por otro lado, notémos que para que exista un ciclo de tamaño $2d$ debe haber adyacencias entre vértices pertenecientes a los conjuntos $G_{d-1}[p]$ y $G_{d-1}[q]$.

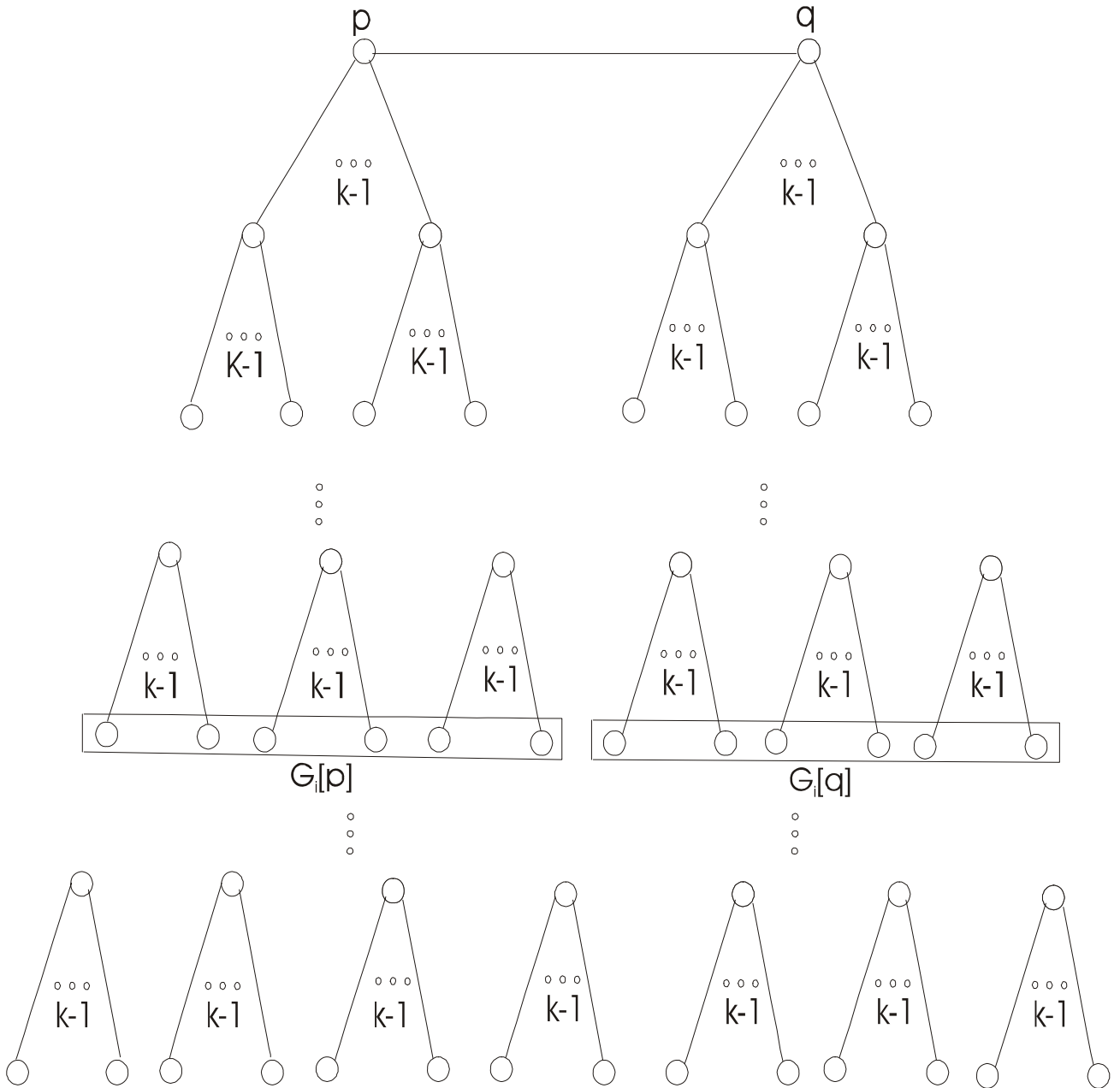


Figura 3.10:

Por lo tanto, el mínimo número de vértices para que exista una $[k; g]$ - jaula de cuello $g = 2d$, con $d \geq 2$, es $f(k; g) = 2(1+(k-1)+(k-1)^2+\dots+(k-1)^{d-1})$, que es lo que se quería probar, notando que $d - 1 = \frac{g-2}{2}$. ■

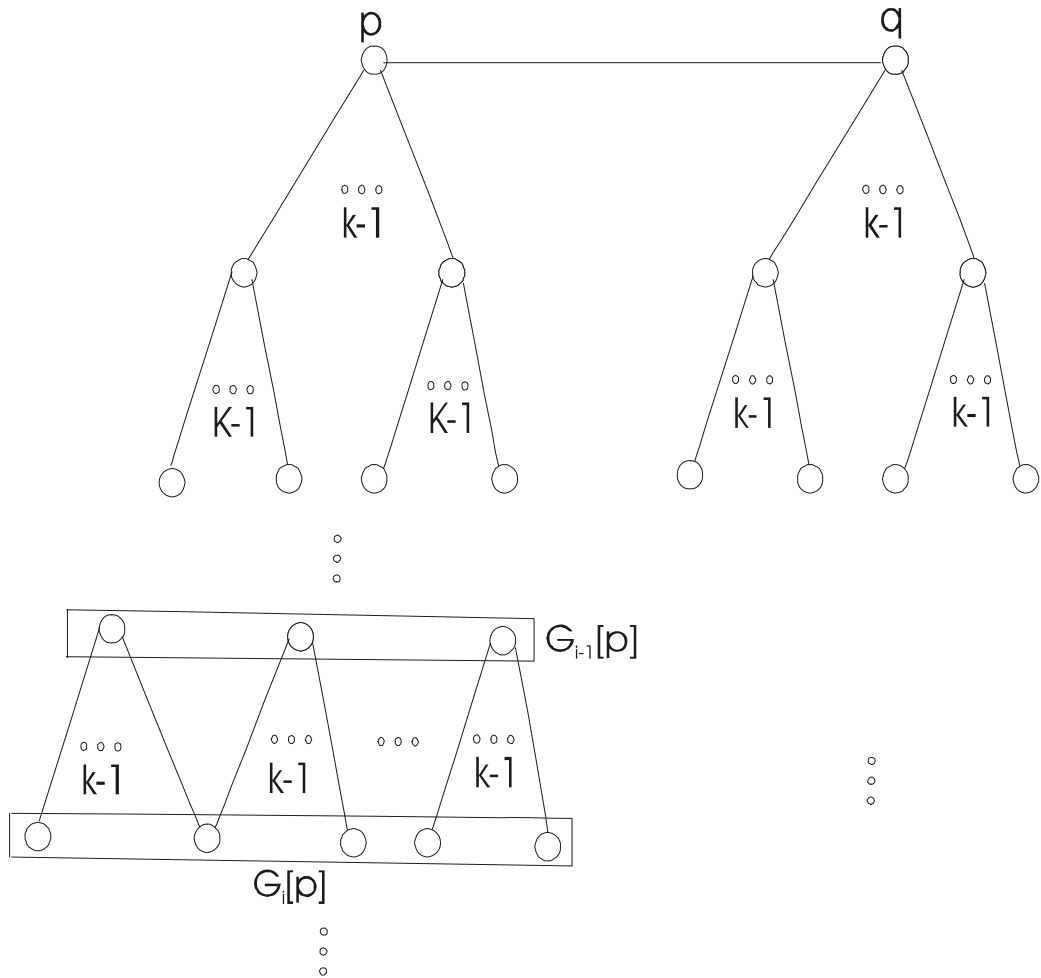


Figura 3.11:

Las jaulas minimales de cuello par satisfacen algunas propiedades simi-

lares a las jaulas minimales de cuello impar (Gráficas de Moore), ya que ambas son distancia-regulares, tienen diámetro d y tienen un arreglo de intersección fijo que en este caso es el siguiente: $\{k, k-1, k-1, \dots, k-1; 1, 1, 1, \dots, 1, k\}$ [3]. Además a diferencia de las de Moore estas jaulas son bipartitas.

Proposición 3.3.2 *La $[n+1; 6]$ -jaula minimal es la gráfica de incidencia del plano proyectivo $PG(2, n)$, para n potencia de primo.*

Demostración. Sea Ω la gráfica de incidencia de $PG(2, n)$. Por la Proposición 3.1.1 y el Corolario 3.1.2 sabemos que Ω tiene cuello 6 y que es $(n+1)$ -regular. Para ver que Ω es la $[n+1; 6]$ -jaula minimal solo resta ver que alcanza la cota inferior $f_0(n+1; 6)$. Pero de nuevo por el Corolario 3.1.2 sabemos que $|V(\Omega)| = 2(1+n+n^2)$ la cual coincide con $f_0(n+1; 6)$ y por lo tanto Ω es la $[n+1; 6]$ -jaula minimal.

A continuación describimos la $[n+1; 6]$ -jaula a partir del plano proyectivo $PG(2, n)$, para esto usaremos la notación empleada anteriormente en este capítulo.

Como estamos en un caso de cuello par iniciaremos su construcción con una arista (a, b) . Como los planos proyectivos son vértice-transitivos entonces

podemos suponer sin pérdida de generalidad que el vértice a de la arista (a, b) es el punto al infinito p_∞ y que el vértice b es la línea al infinito l_∞ . Por como se construyó el plano $PG(2, n)$ sabemos entonces que las n líneas de la forma $[*, b]$ junto con l_∞ serán los $(n + 1)$ vecinos de p_∞ en Ω , y que los puntos $\{p_0, p_1, \dots, p_{\alpha^n-2}\}$ junto con p_∞ los $(n + 1)$ vecinos de l_∞ . De igual manera, haremos adyacentes a $[*, b]$ con los puntos de la forma (b, y) con $y \in GF(n)$ y a p_i con las rectas de la forma $[i, b]$ y con esto concluimos la construcción de la $[n + 1; 6]$ -jaula. El resto de las adyacencias están determinadas por la regla de incidencia de los planos proyectivos, es decir el punto (x, y) está en la recta $[m, b]$ si $y = mx + b$. ■

En la Figura 3.12 mostramos la $[3; 6]$ -jaula como gráfica de incidencia del plano de Fano (o gráfica de Heawood).

El siguiente teorema generaliza el resultado anterior con una prueba muy sencilla.

Teorema 3.3.3 *La gráfica de incidencia $\Omega(GP_l(n))$ es una $[n + 1; 2l]$ -jaula minimal.*

Demostración. Por el teorema 3.2.2 sabemos que $\Omega(GP_l(n))$ es $(n + 1)$ -

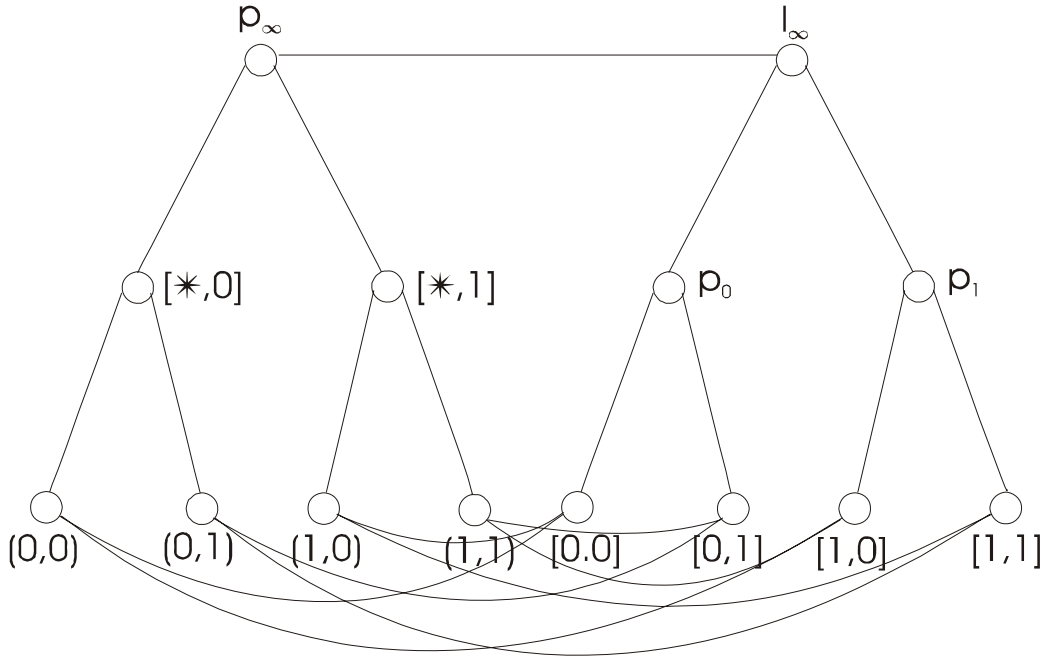


Figura 3.12:

regular y que tiene cuello $2l$. Para ver que $\Omega(GP_l(n))$ sea una $[n + 1; 2l]$ -jaula minimal solo resta ver que alcance la cota inferior $f_0(n + 1; 2l)$. Por el mismo teorema sabemos que $|V(\Omega(GP_l(n)))| = 2(\sum_{i=0}^{l-1} n^i)$, el cual coincide con $f_0(n + 1; 2l)$. Por lo tanto $\Omega(GP_l(n))$ es una $[n + 1; 2l]$ -jaula minimal. ■

Corolario 3.3.4 *Cuando n es potencia de primo y $l \in \{3, 4, 6\}$ existe una $[n + 1, 2l]$ -jaula minimal.*

Demostración. Sabemos que los l -gonos generalizados de orden n existen

solamente para los parámetros de n y l descritos en la hipótesis del corolario, y entonces por el teorema anterior su gráfica de incidencia es una $[n + 1, 2l]$ -jaula minimal. ■

En el capítulo anterior y en este probamos las cotas inferiores de las $[k; g]$ -jaulas de cuello impar y de cuello par. A continuación enunciamos de nuevo las dos juntas. Cabe mencionar que varios matemáticos han estudiado las cotas superiores de las $[k; g]$ -jaulas.

Existen varias cotas inferiores de una $[k; g]$ -jaula, una de ellas se encontró al contar los vértices que salen de un vértice o de una arista, y es la siguiente [9]:

$$f_0(k; g) = \left\{ \begin{array}{l} 2\left(\sum_{i=0}^{\frac{g-2}{2}} (k-1)^i\right) = \frac{2(k-1)^{\frac{g}{2}-2}}{k-2} \quad \text{si } g \text{ es par.} \\ \sum_{i=1}^{\frac{g-1}{2}} k(k-1)^{i-1} = \frac{k(k-1)^{\frac{g-1}{2}-2}}{k-2} \quad \text{si } g \text{ es impar.} \end{array} \right\}$$

Por otro lado en [11] Lazebnik, Ustimenko y Woldar obtuvieron recientemente la siguiente cota superior para $k \geq 2$ y $g \geq 5$:

$$f_0(k; g) \leq 2kq^{\frac{3g}{4}-a}$$

donde q es la potencia de primo impar más pequeña que satisface $k \leq q$

y $a = 4, \frac{11}{4}, \frac{7}{2}, \frac{13}{4}$ con $g \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ respectivamente.

Más recientemente en [12], Araujo, González, Montellano-Ballesteros y Serra probaron que:

$f_0(k, g) \leq 2kq^{\frac{g-4}{2}}$ donde q es la potencia de primo mas pequeña no impar que satisface $k \leq q$ y $g \in \{6, 8, 12\}$

Capítulo 4

Construcción y coloración de la [7, 5]-jaula minimal

En el trabajo previo a este capítulo se vió que las Gráficas de Moore de diámetro d coinciden con las jaulas minimales de cuello $2d + 1$. En este capítulo queremos estudiar coloraciones de gráficas en dos ejemplos particulares, la gráfica de Petersen ((3, 2)-gráfica de Moore o [3, 5]-jaula) y la gráfica de Hoffman-Singleton ((7, 2)-gráfica de Moore o [7, 5]-jaula). Además colorearemos algunas subgráficas de Hoffman-Singleton que resultan ser jaulas: la [5, 5]-jaula y la [6, 5]-jaula con 30 y 40 vértices respectivamente.

4.1. Construcción de la $[7, 5]$ -jaula minimal

Existen al menos tres construcciones diferentes de la $[7, 5]$ -jaula minimal. En esta sección daremos una basada en la descripción de los planos afines algebraicos que hicimos en el capítulo anterior, concretamente en el plano afín $A(2, 5)$ de orden 5 que se construye sobre \mathbb{Z}_5 . En este caso particular se tiene:

$$P = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}_5\} \text{ y } L = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}_5} \{L_i\} \right) \cup \{L_*\}.$$

Para construir la gráfica consideremos el conjunto P y el conjunto $L \setminus L_*$, que geoméricamente consta de todas las rectas de pendiente m con $m \in \mathbb{Z}_5$, salvo las rectas con ecuación $x = b$ y $b \in \mathbb{Z}_5$. Sea B_5 la subgráfica de la gráfica de incidencia del plano afín restringida a estos dos conjuntos. A continuación exhibiremos algunas propiedades de B_5 :

1) B_5 es 5-regular: sabemos que en $A(2, 5)$ por cada punto pasan seis líneas, pero como quitamos la clase de líneas L_* entonces a cada punto le quitamos una línea, lo cual se traduce a que cada vértice de B_5 , que sea un punto en el afín $A(2, 5)$, tiene grado 5 ya que por él pasan exactamente 5 líneas. Por otro lado también sabemos que cada línea en $A(2, 5)$ tiene cinco

puntos, es decir cada vértice de B_5 que sea una línea será adyacente a 5 puntos.

2) B_5 tiene orden 50: como $A(2, 5)$ tiene 25 puntos y 30 líneas de las cuales conservamos solamente 25, entonces claramente la gráfica bipartita B_5 tiene 50 puntos.

3) B_5 es vértice-transitiva: recordemos que esto quiere decir que dados cualesquiera dos vértices de B_5 existe un automorfismo que manda uno en el otro. Esta afirmación está basada en el hecho de que en el plano proyectivo de orden n o en cualquier subconjunto de puntos y líneas del mismo, siempre podemos mandar puntos en puntos y líneas en líneas usando traslaciones y rotaciones. Para mandar un vértice del conjunto P a un vértice del conjunto L utilizamos el automorfismo ϕ que manda el punto (a, b) a la recta $[a, -b]$ y viceversa. Claramente ϕ es un automorfismo porque es biyectivo y además si el punto (a, b) es adyacente a la línea $[m, n]$ en B_5 , probaremos a continuación que también $\phi((a, b))$ es adyacente a $\phi([m, n])$ en B_5 (es decir que la línea $\phi((a, b))$ contiene al punto $\phi([m, n])$). Como $\phi((a, b)) = [a, -b]$ y $\phi([m, n]) = (m, -n)$ entonces $(m, -n) \in [a, -b]$ si y solo si $-n = am - b$, es decir que $b = am + n$, lo cual es cierto porque $(a, b) \in [m, n]$, entonces $\phi((a, b))$ y

$\phi([m, n])$ son adyacentes en B_5 . Esto último nos dice que ϕ manda puntos en líneas y líneas en puntos, por lo tanto B_5 es vértice-transitiva mediante cualquier automorfismo que sea composición de traslaciones, rotaciones y ϕ .

En la Figura 4.1 mostramos el conjunto de vértices de la gráfica B_5 , donde el conjunto P_i corresponde al conjunto de puntos $\{(i, 0), (i, 1), (i, 2), (i, 3), (i, 4)\}$ (notemos que estos vértices pertenecen a la línea $x = i$), análogamente el conjunto E_i corresponde a las líneas del plano afín $\{[i, 0], [i, 1], [i, 2], [i, 3], [i, 4]\}$. Cabe señalar que las adyacencias entre puntos y rectas (vértices en distintas componentes de la bipartita) no están puestos en la figura, esto es porque son muchas adyacencias, sin embargo cada vértice en algún P_i , para $i \in \mathbb{Z}_5$ fijo, tiene un único vecino en cada E_j con $j \in \mathbb{Z}_5$ y análogamente para los vértices en E_i con i fijo.

Nótese que si $x \in P_i$ y $y \in P_j$ para $i \neq j$ entonces $d(x, y)$ en B_5 es dos porque por cualesquiera dos puntos pasa una línea, y de manera análoga se ve que dos elementos $x \in E_i$ y $y \in E_j$ están a distancia dos. Por otro lado la distancia entre dos elementos cualesquiera $x \in P_i$ y $y \in E_j$, i, j no necesariamente distintos están a distancia a lo mas 3, ya que si $x \in y$ entonces $d(x, y) = 1$, y si $x \notin y$ existe una línea l_x por x que intersecta

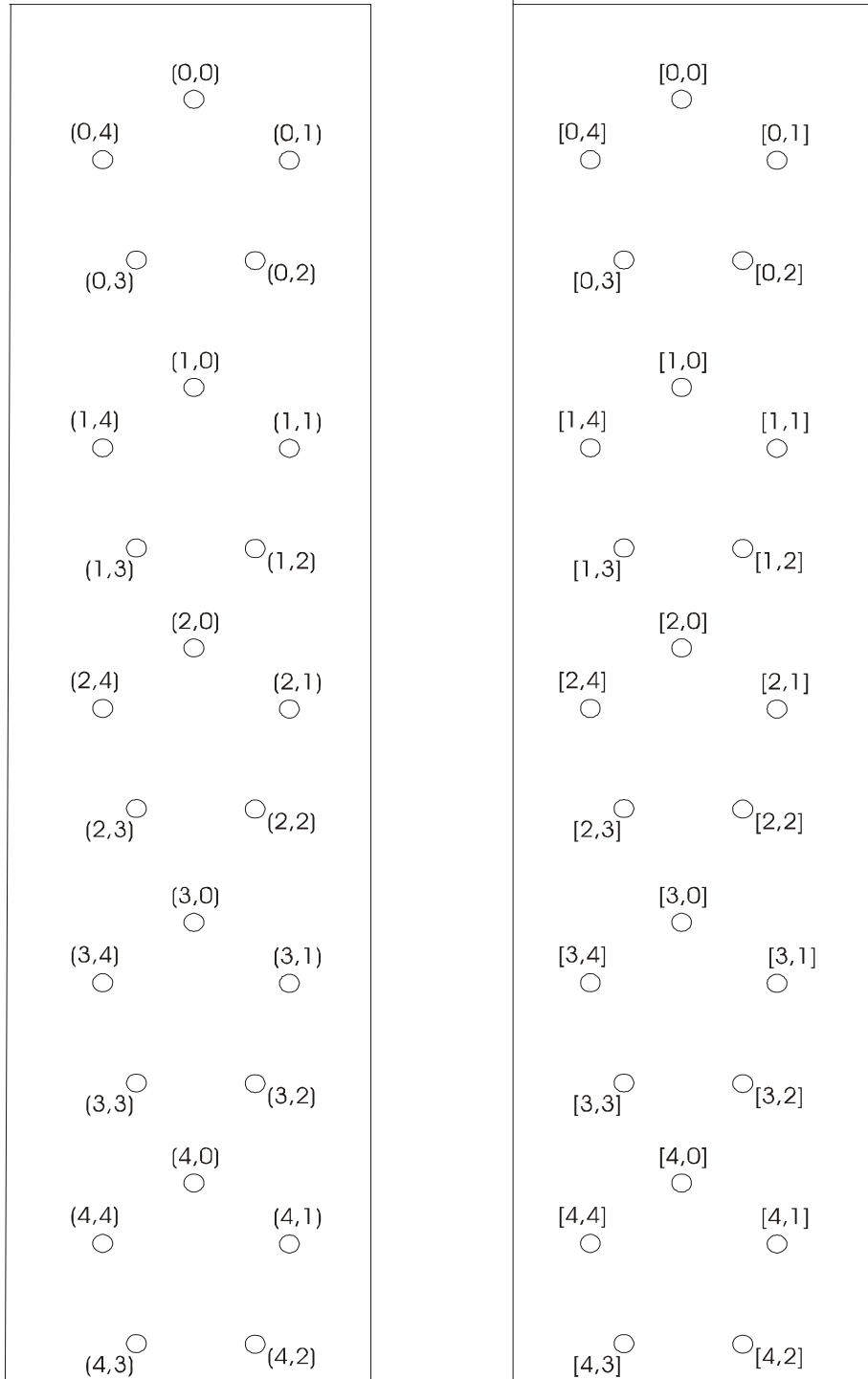


Figura 4.1: Gráfica B_5

a y y entonces en B_5 la trayectoria $x l_x y$ que une a x y y tiene longitud 3. Finalmente dos vértices en el mismo conjunto P_i (o en el mismo conjunto E_j) están a distancia larga, estrictamente se puede mostrar que esta distancia es cuatro.

Nuestro objetivo a continuación es añadir aristas que acorten la distancia entre vértices, que en B_5 están a distancia tres o cuatro. Para lograr esto construiremos ciertas gráficas de Cayley de diámetro dos de la siguiente manera:

En los preliminares del Capítulo 1 se definieron gráficas de Cayley para grupos multiplicativos, en este caso el cual puede generalizarse a cualquier potencia de primo congruente con $1 \pmod{4}$, usaremos el grupo aditivo \mathbb{Z}_5 y los subconjuntos $S_P = \{1, 4\}$ y $S_E = \{2, 3\}$ para construir dos gráficas de Cayley P y E generadas por S_P y S_E respectivamente (Ver Figura 4.2), definidas éstas como sigue:

$$V(P) = V(E) = \mathbb{Z}_5$$

$$E(P) = \{(i, j) \mid j - i \in S_P\} \text{ y}$$

$$E(E) = \{(i, j) \mid j - i \in S_E\}.$$

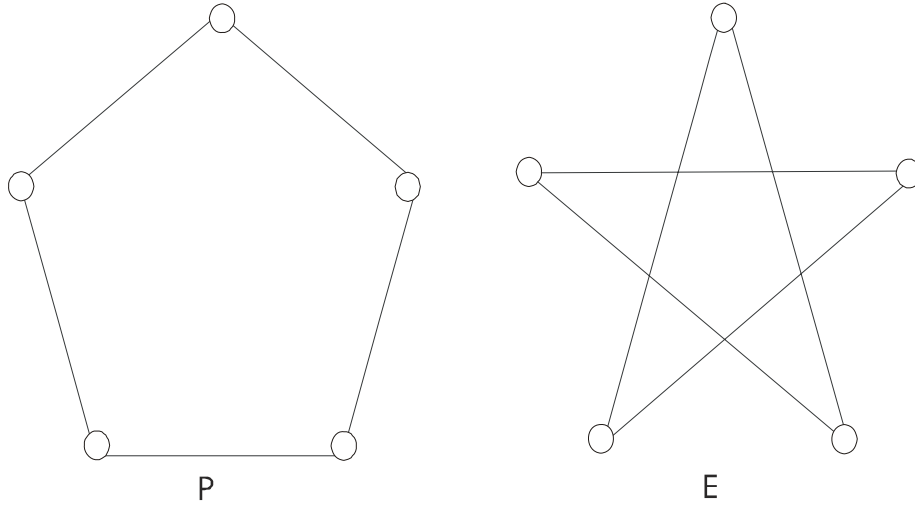


Figura 4.2:

Nótese que:

- 1) Como $S_E = -S_E$ y $S_P = -S_P$ entonces E y P están bien definidas.
- 2) $S_P = \alpha S_E$ y $S_E = \alpha S_P$ para $\alpha = 2$.
- 3) $S_P \cup S_E = \mathbb{Z}_5^*$.

Por la observación 2 las gráficas P y E son isomorfas y el isomorfismo $f : V(P) \rightarrow V(E)$ es tal que $f(x) = \alpha x$ para $\alpha = 2$, y lo anterior junto con la observación 3 muestra que P y E son gráficas autocomplementarias y por lo tanto tienen diámetro 2.

Una vez construidas estas gráficas insertaremos una copia de P en cada conjunto P_i y una copia de E en cada conjunto E_j , para $i, j \in \mathbb{Z}_5$ como se muestra en la siguiente figura. Denotaremos por $B_5(P, E)$ a esta gráfica (Ver Figura 4.3).

Proposición 4.1.1 *La gráfica $B_5(P, E)$ es vértice-transitiva y tiene diámetro dos.*

Demostración. Primero probaremos que la gráfica $B_5(P, E)$ es vértice-transitiva, es decir, que para cualesquiera dos vértices de $B_5(P, E)$ existe un automorfismo que lleva un vértice en el otro. Nótese que las traslaciones y rotaciones del plano afín $A(2, 5)$ actúan también como automorfismos de $B_5(P, E)$, y recordemos que el automorfismo ϕ que manda al punto (x, y) en la recta $[x, -y]$ definido anteriormente es un automorfismo de B_5 .

Hay cinco maneras de escoger a la pareja de vértices pertenecientes a la gráfica $B_5(P, E)$:

- 1.- Ambos pertenecen a la subgráfica P_i para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$.
- 2.- Ambos pertenecen a la subgráfica E_i para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$.

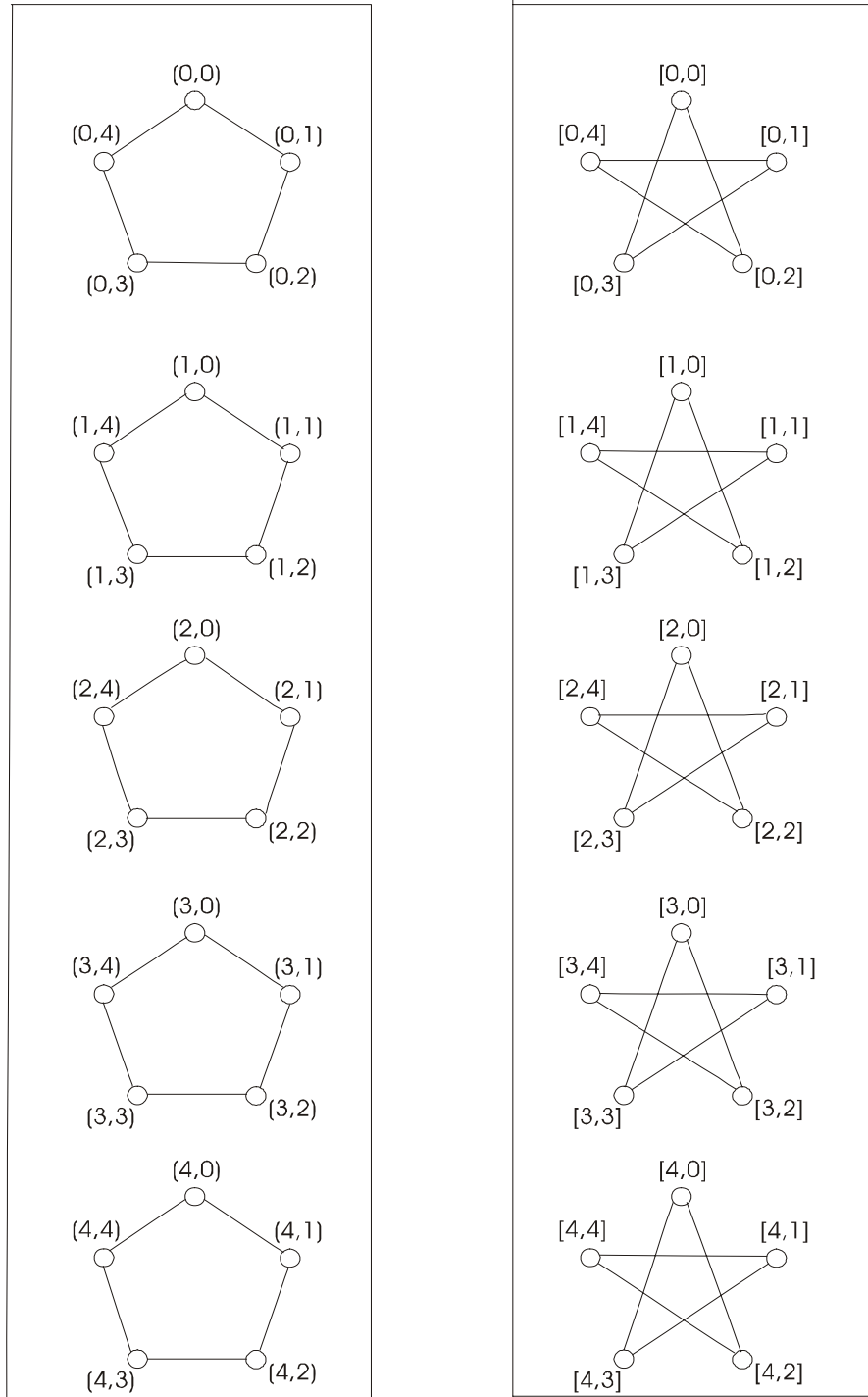


Figura 4.3: Gráfica $B_5(P, E)$

3.- Uno pertenece a la subgráfica P_i para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$ y el otro pertenece a la subgráfica P_j para alguna $j \in \mathbb{Z}_5$ e $i \neq j$.

4.- Uno pertenece a la subgráfica E_i para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$ y el otro pertenece a la subgráfica E_j para alguna $j \in \mathbb{Z}_5$ e $i \neq j$.

5.- Uno pertenece a la subgráfica P_i para alguna $i \in \mathbb{Z}_5$ y el otro pertenece a la subgráfica E_j para alguna $j \in \mathbb{Z}_5$.

Los automorfismos que funcionan para los casos 1, 2, 3 y 4 son las traslaciones y rotaciones como se había mencionado en el inciso 3) de las propiedades de la gráfica B_5 . Para el caso 5 definimos una biyección α sobre el conjunto de vértices de $B_5(P, E)$ como $\alpha((a, b)) = (a, 2b)$ en el conjunto de puntos y $\alpha([a, b]) = [2a, 2b]$ en el conjunto de líneas. No es difícil ver que α preserva la relación de incidencia del plano afín $A(2, 5)$, lo cual nos dice que α es un automorfismo de la gráfica B_5 .

Sean (a, b) y $[m, n]$ un punto y una recta respectivamente de la gráfica $B_5(P, E)$. Veamos que existe un automorfismo que manda al punto (a, b) en la recta $[m, n]$ y un automorfismo que manda a la recta $[m, n]$ en el punto (a, b) . Para ello consideremos a la traslación τ que manda al punto (x, y) en el punto $(x + 3m - a, y - 3n - b)$. Si $\gamma = \alpha \circ \phi \circ \tau$ entonces

$$\begin{aligned}\gamma((a, b)) &= \alpha \circ \phi \circ \tau((a, b)) = \alpha \circ \phi((a + 3m - a, b - 3n - b)) = \alpha \circ \\ \phi(3m, -3n) &= \alpha([3m, 3n]) = [m, n].\end{aligned}$$

Por tanto γ es el automorfismo que manda el punto (x, y) en la recta $[m, n]$. Además γ^{-1} será el automorfismo que manda la recta $[m, n]$ en el punto (a, b) . Por lo tanto las traslaciones, rotaciones y γ forman un grupo de automorfismos que permiten que $B_5(P, E)$ sea vértice-transitiva.

Una vez probada la vértice-transitividad probaremos que el diámetro de $B_5(P, E)$ es dos, para esto basta probar que la excentricidad del $(0, 0)$ es dos. Primero consideremos la distancia del $(0, 0)$ a la recta $[m, b]$. Si $b = 0$ entonces $d((0, 0), [m, 0]) = 1$ ya que $(0, 0) \in [m, 0]$ para toda m . Si $b \neq 0$ entonces $d((0, 0), [m, b]) = 2$ ya que si $b \in \{1, 4\}$ entonces $T_1 = \{(0, 0), (0, b), [m, b]\}$ es una trayectoria de longitud dos, y si $b \in \{2, 3\}$ entonces $T_2 = \{(0, 0), [m, 0], [m, b]\}$ es otra trayectoria de longitud dos.

Anteriormente en este capítulo se probó que cualesquiera dos puntos en B_5 que no pertenecen a la misma subgráfica P_i para $i \in \mathbb{Z}_5$ están a distancia dos, por lo tanto $d((0, 0), (x, y)) = 2$ si $x \neq 0$. Ahora si $x = 0$ entonces $(0, y) \in P_0$ y claramente $d((0, 0), (0, y))$ es a lo mas dos. Por lo tanto la excentricidad de $(0, 0)$ es dos y el diámetro de $B_5(P, E)$ es dos. ■

4.2. Coloración de la $[7; 5]$ -jaula minimal

El objetivo principal de esta sección es probar que la $[7; 5]$ -jaula minimal construida en la sección anterior, tiene número cromático cuatro. Para encontrar el número cromático colorearemos esta gráfica siguiendo un método, el cual nos dará automáticamente coloraciones para subgráficas específicas de esta y que resultan ser a su vez:

- 1.- El ciclo C_5 o $[2; 5]$ -jaula minimal cuando el orden es 5.
- 2.- La gráfica de Petersen o $[3; 5]$ -jaula minimal cuando el orden es 10.
- 3.- Una $[4; 5]$ -gráfica de orden 20 que no es jaula (pero casi) ya que la $[4; 5]$ -jaula conocida es de orden 19, ver [14].
- 4.- Una $[5; 5]$ -jaula cuando el orden es 30.
- 5.- La $[6; 5]$ -jaula cuando el orden es 40 y finalmente,
- 6.- La $[7; 5]$ -jaula minimal de orden 50 o gráfica de Hoffman-Singleton.

Además este método de coloración está dado de tal forma que la coloración de la $[k; 5]$ -jaula para $2 \leq k \leq 6$, nos da información sobre la coloración de la $[k + 1; 5]$ -jaula.

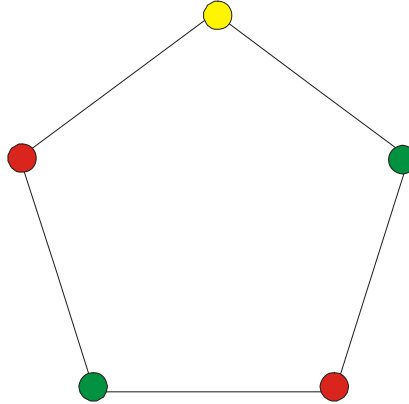
En lo que resta del capítulo nos referiremos a las [2; 5]-jaula, [3; 5]-jaula y [7; 5]-jaula como el ciclo C_5 , la gráfica de Petersen y la gráfica de Hoffman-Singleton respectivamente. Para lograr nuestro objetivo haremos algunas observaciones y probaremos varios resultados.

En adelante si G es una gráfica, f es una k -coloración de G y $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ es el conjunto de clases cromáticas inducidas por f entonces la cardinalidad de la clase cromática C_i , para $i = 1, \dots, k$, es el número de elementos de dicha clase (vértices de G de color i).

Observación 1. El número cromático del ciclo C_5 es 3, ya que claramente no es posible colorearlo con 2 colores y sin embargo, como se muestra en la Figura 4.4, es posible dar una 3-coloración de él. Además toda 3-coloración de C_5 tiene la propiedad de que dos de sus clases cromáticas tienen cardinalidad dos y por tanto una clase de cardinalidad uno.

Notemos que la gráfica de Petersen se construye a grandes rasgos, al hacer adyacentes a los vértices del ciclo C_5 con los vértices de su complemento, el cual geométricamente forma una estrella de 5 picos a la que llamaremos E (isomorfa al ciclo C_5).

Observación 2. El número cromático de la gráfica de Petersen es 3.

Figura 4.4: Ciclo C_5

Como el ciclo C_5 es una subgráfica de la gráfica de Petersen y $\chi(C_5) = 3$ entonces el número cromático de Petersen es al menos 3. Sin embargo existe una 3-coloración de la gráfica de Petersen (Ver Figura 4.5), que prueba que su número cromático es 3.

En lo que resta del capítulo supondremos sin pérdida de generalidad que las tres clases cromáticas de la gráfica de Petersen son, como en la Figura 4.5, verde, rojo y amarillo, y que las clases rojo y verde tienen cardinalidad 2 en C_5 . Veamos como tienen que estar distribuidas las tres clases cromáticas en la gráfica de Petersen para obtener una 3-coloración de ella. Para ello primero se probará que hay dos clases cromáticas de la gráfica de Petersen con la propiedad de tener cardinalidades diferentes en C_5 y en E , es decir

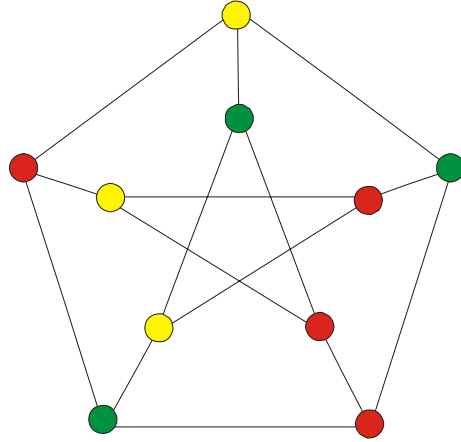


Figura 4.5: Gráfica de Petersen

una de ellas en C_5 tiene cardinalidad 1 y la otra se comporta al revés.

Proposición 4.2.1 *Existe exactamente una clase cromática de la gráfica de Petersen que tiene la misma cardinalidad tanto en C_5 como en E .*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que hay al menos dos clases cromáticas con la misma cardinalidad en C_5 y E respectivamente. Notemos que esto implica automáticamente que las 3 clases cromáticas lo cumplen. Así, sin pérdida de generalidad en cada una de las subgráficas C_5 y E las clases cromáticas verde y rojo tienen cardinalidad dos.

Etiquetemos a los vértices de C_5 con u_1, u_2, u_3, u_4 y u_5 , y a los vértices

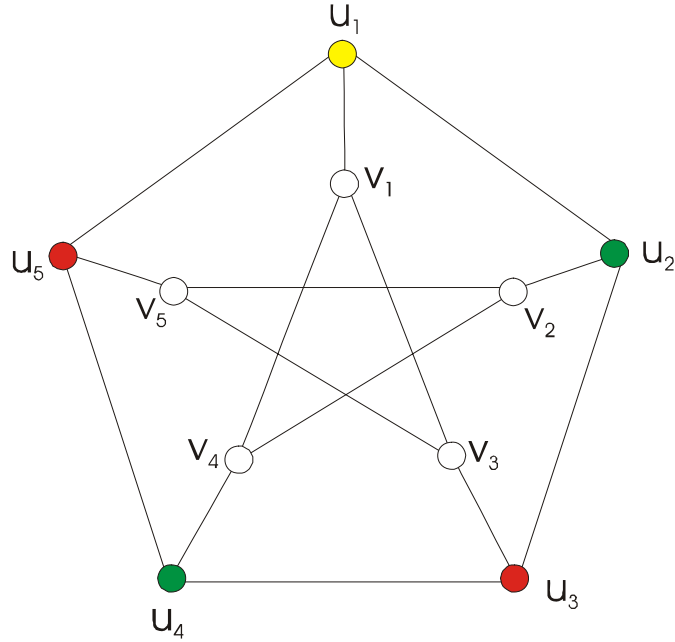


Figura 4.6:

de E con v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 , y supongamos sin pérdida de generalidad que las aristas que hacen adyacentes a los vértices de C_5 y E para construir a la gráfica de Petersen son de la forma (u_i, v_i) para $1 \leq i \leq 5$. Asignemos una 3-coloración a la subgráfica C_5 suponiendo sin pérdida de generalidad que los conjuntos $\{u_1\}$, $\{u_2, u_4\}$ y $\{u_3, u_5\}$ forman las clases cromáticas amarillo, verde y rojo respectivamente (Ver Figura 4.6).

Como estamos suponiendo que también en E la clase cromática verde tiene cardinalidad dos, entonces por como se definieron las adyacencias an-

teriormente está clase está formada por v_1 y v_5 (Ver Figura 4.7).

Por otro lado, por la misma razón sabemos que la clase cromática roja de E debe de ser la formada por los vértices v_1 y v_2 , lo cual no es posible ya que v_1 ya estaba coloreado de verde. Por lo tanto hay exactamente una clase cromática de la gráfica de Petersen que tiene la misma cardinalidad en cada una de las subgráficas C_5 y E , y más aún la cardinalidad de está clase es dos. ■

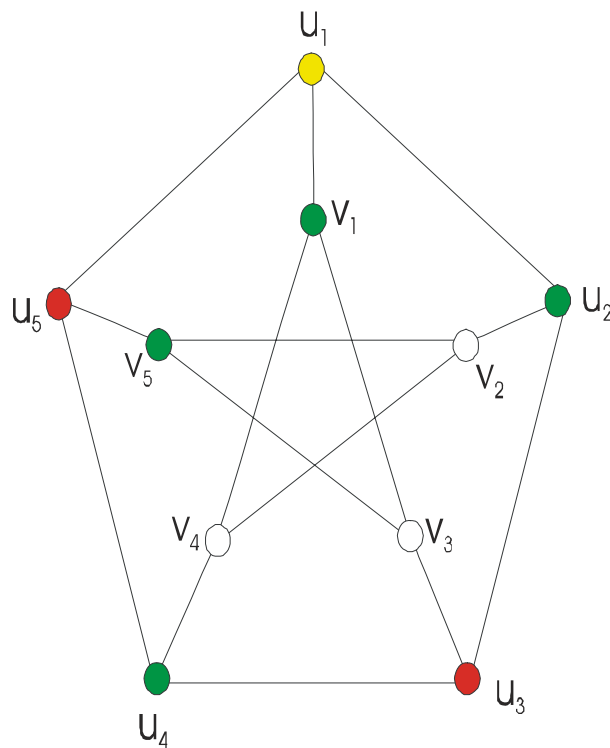


Figura 4.7:

Entonces en una 3-coloración de la Gráfica de Petersen hay un color de cardinalidad dos en C_5 y en E , y los otros dos colores tienen cardinalidades distintas en C_5 y en E .

Proposición 4.2.2 Sean $i, j \in \mathbb{Z}_5$ no necesariamente distintos. Entonces la subgráfica de $B_5(P, E)$ inducida por los vértices de P_i y E_j , denotada por $G_{\{i,j\}}$, es isomorfa a la gráfica de Petersen.

Demostración. Sea $G_{\{i,j\}}$ la subgráfica inducida por los vértices de P_i y E_j y supongamos que los vértices de la gráfica de Petersen están etiquetados como se muestra en la siguiente figura (Ver Figura 4.8).

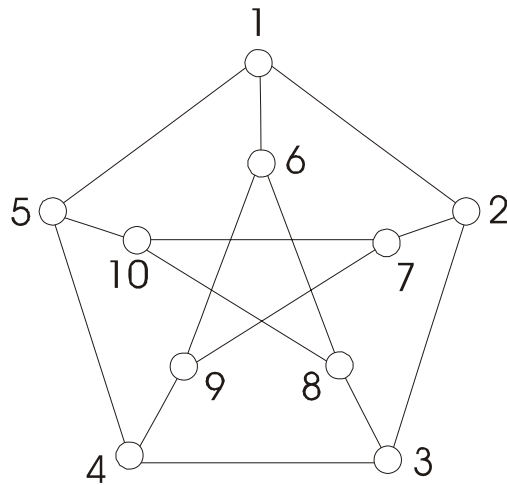


Figura 4.8:

Por la manera en la que se construyó la gráfica de Hoffman-Singleton sabemos que las adyacencias entre los vértices de P_i y E_j son las siguientes:

$(i, 0)$ es adyacente a $[j, -ji]$

$(i, 1)$ es adyacente a $[j, 1 - ji]$

$(i, 2)$ es adyacente a $[j, 2 - ji]$

$(i, 3)$ es adyacente a $[j, 3 - ji]$

$(i, 4)$ es adyacente a $[j, 4 - ji]$

Entonces $g : V(\text{Petersen}) \rightarrow V(G_{\{i,j\}})$ definida como:

$$g(1) = (i, 0) \quad g(6) = [j, -ji]$$

$$g(2) = (i, 1) \quad g(7) = [j, 1 - ji]$$

$$g(3) = (i, 2) \quad g(8) = [j, 2 - ji]$$

$$g(4) = (i, 3) \quad g(9) = [j, 3 - ji]$$

$$g(5) = (i, 4) \quad g(10) = [j, 4 - ji]$$

muestra un isomorfismo entre los vértices de la gráfica de Petersen y los vértices de la gráfica $G_{\{i,j\}}$. ■

En la prueba de la coloración de la gráfica de Hoffman- Singleton se usará fuertemente que, la subgráfica $G_{\{i,j\}}$ no podrá ser 3-coloreada de tres maneras distintas una vez determinadas las clases cromáticas de la subgráficas P_i (o E_j), y alguna de las clases cromáticas de cardinalidad dos de E_j (o P_i), y esto se refleja en el siguiente Lema.

Lema 4.2.3 *Sean $i, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Si se dá una 3-coloración de la subgráfica P_i y se fija una clase cromática de cardinalidad dos en E_m entonces es posible encontrar, bajo estas condiciones, unicamente dos 3-coloraciones distintas de la gráfica $G_{\{i,m\}}$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que P_i tiene la siguiente 3-coloración asignada:

Sea $g : V(P_i) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{amarillo}\}$ definida como sigue (Ver Figura 4.9):

$$g((i, 0)) = \text{rojo}$$

$$g((i, 1)) = \text{verde}$$

$$g((i, 2)) = \text{rojo}$$

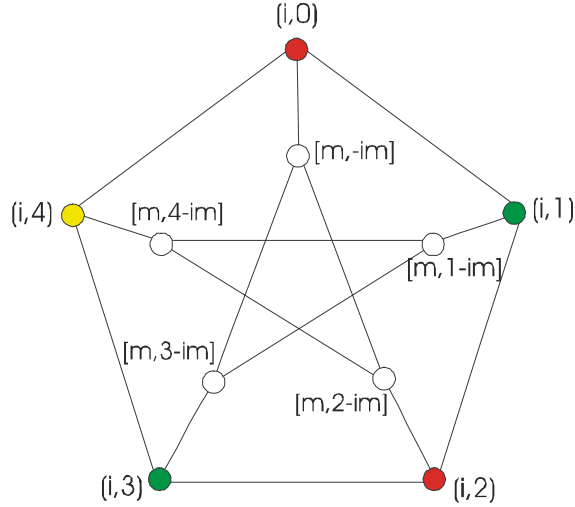


Figura 4.9:

$$g((i, 3)) = \text{verde}$$

$$g((i, 4)) = \text{amarillo}$$

De la proposición 4.2.1 se desprende que la clase cromática amarilla de la subgráfica E_m tiene cardinalidad dos y que alguna de las clases rojo o verde también. Supongamos sin pérdida de generalidad que la clase cromática roja de E_m tiene cardinalidad dos; entonces los vértices $[m, -im]$ y $[m, 2 - im]$ no pueden ser coloreados de rojo (ya que estos son adyacentes respectivamente a $(i, 0)$ e $(i, 2)$). Por lo tanto los elementos de esta clase no tienen otra opción más que ser los vértices $[m, 3 - im]$ y $[m, 4 - im]$ (ver Figura 4.10).

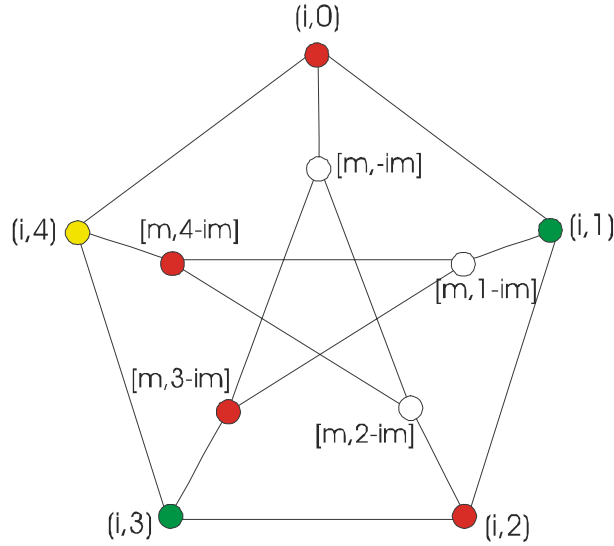


Figura 4.10:

Entonces la clase cromática amarilla de E_m solo tiene dos opciones de ser formada , una es por el conjunto $\{[m, -im], [m, 1 - im]\}$ y otra es por el conjunto $\{[m, 1 - im], [m, 2 - im]\}$ (ver Figura 4.11). ■

Observación 3. Una consecuencia inmediata del Lema 4.2.3 es que si la subgráfica inducida por los vértices de P_0, E_{m_1}, E_{m_2} y E_{m_3} (donde m_1, m_2 y m_3 son elementos distintos de \mathbb{Z}_5) es 3-coloreable entonces existen dos subgráficas E_l y E_k (para $l, k \in \{m_1, m_2, m_3\}$) con la misma coloración. (es decir que si g y g' son coloraciones de E_l y E_k respectivamente entonces $g([l, r]) = g'([k, r])$ para toda $r \in \mathbb{Z}_5$).

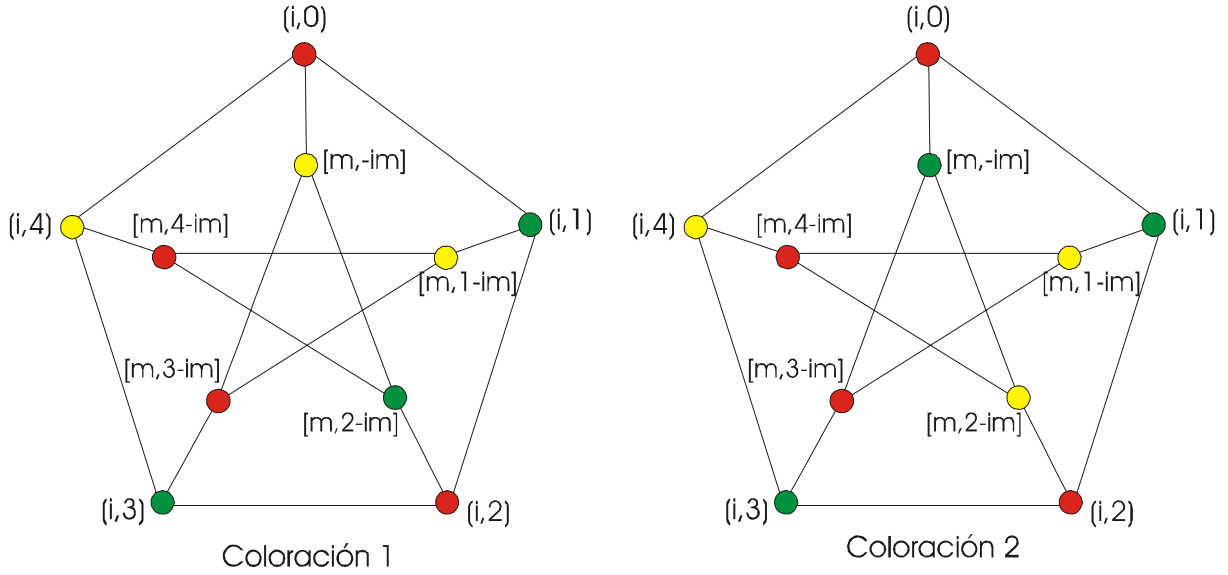


Figura 4.11:

Sean $i, j, m, n \in \mathbb{Z}_5$ con $i \neq j$ y $m \neq n$. Denotemos con $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ a la subgráfica de $B_5(P, E)$ inducida por los vértices de las subgráficas P_i, P_j, E_m y E_n .

Sean $i, j \in \mathbb{Z}_5$ con $i \neq j$. Diremos que las subgráficas P_i y P_j de $B_5(P, E)$ están coloreadas de la misma manera si $f((i, k)) = f((j, k))$ para toda $k \in \mathbb{Z}_5$.

Lema 4.2.4 *No es posible dar una 3-coloración de la gráfica $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ si sus subgráficas P_i y P_j están coloreadas de la misma manera.*

Demostración. Supongamos por lo contrario que si es posible dar una 3-

coloración de $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ y sea $f : V(P_i) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{amarillo}\}$ una 3-coloración de P_i (por tanto de P_j) definida sin pérdida de generalidad como sigue:

$$f((i, 0)) = f((j, 0)) = \text{rojo}$$

$$f((i, 1)) = f((j, 1)) = \text{verde}$$

$$f((i, 2)) = f((j, 2)) = \text{rojo}$$

$$f((i, 3)) = f((j, 3)) = \text{verde}$$

$$f((i, 4)) = f((j, 4)) = \text{amarillo}$$

Por la proposición 4.2.2 sabemos que la subgráficas inducidas por los conjuntos de vértices de cada uno de los conjuntos $\{P_i, E_m\}$, $\{P_i, E_n\}$, $\{P_j, E_m\}$ y $\{P_j, E_n\}$ son isomorfas a la gráfica de Petersen. Supongamos sin pérdida de generalidad que la clase rojo de E_m tiene cardinalidad dos. Por la forma en la que están definidas las adyacencias en la gráfica $B_5(P, E)$ (Hoffman-Singleton) sabemos que los vértices de E_m adyacentes a los vértices $(i, 0)$ e $(i, 2)$, a saber $[m, -im]$ y $[m, 2 - im]$ no pueden ser coloreados de rojo. Por lo tanto la clase cromática roja de E_m no tiene otra opción mas que ser el conjunto $\{[m, 3 - im], [m, 4 - im]\}$ (Ver Figura 4.12).

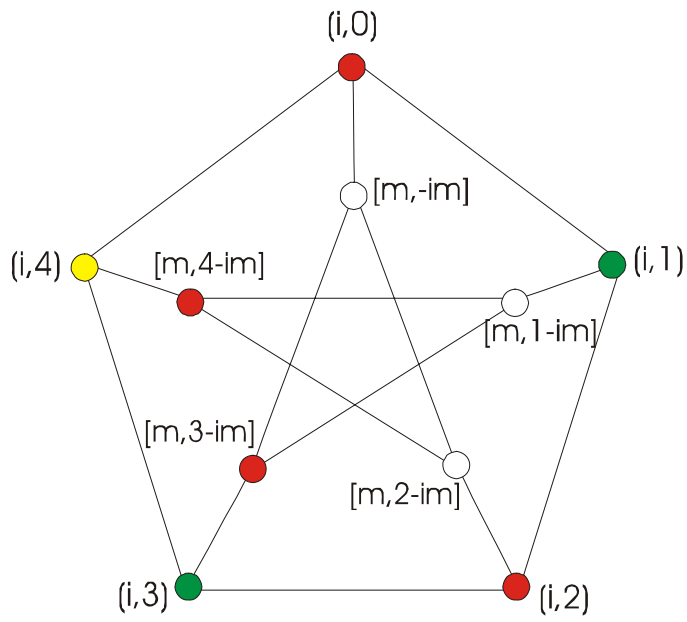


Figura 4.12:

Por otro lado también sabemos que los vértices de E_m adyacentes a los vértices $(j, 0)$ y $(j, 2)$, a saber $[m, -jm]$ y $[m, 2 - jm]$ respectivamente (nótese que estos vértices están a distancia 1 en E_m (ver segunda coordenada); está observación es muy importante y la usaremos más adelante), tampoco pueden ser coloreados de rojo (ya que estamos suponiendo que $(j, 0)$ y $(j, 2)$ están coloreados de rojo).

Como estamos suponiendo que si $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ es 3-coloreable entonces los vértices $(j, 0)$ y $(j, 2)$ no pueden ser adyacentes a los vértices $[m, 3 - im]$ y $[m, 4 - im]$ (ya que estos están coloreados de rojo). Como los únicos vértices de E_m que pueden ser adyacentes a $(j, 0)$ y $(j, 2)$ están a distancia uno (por la observación anterior) y no pueden ser ni $[m, 3 - im]$ ni $[m, 4 - im]$ entonces claramente son $[m, -im]$ y $[m, 2 - im]$.

Hay dos maneras de hacer adyacentes a los vértices del conjunto $\{(j, 0), (j, 2)\}$ con los vértices del conjunto $\{[m, -im], [m, 2 - im]\}$:

1) El vértice $(j, 0)$ es adyacente a $[m, -im]$ y el vértice $(j, 2)$ es adyacente a $[m, 2 - im]$ (Ver Figura 4.13).

2) El vértice $(j, 0)$ es adyacente a $[m, 2 - im]$ y el vértice $(j, 2)$ es adyacente a $[m, -im]$ (Ver Figura 4.14).

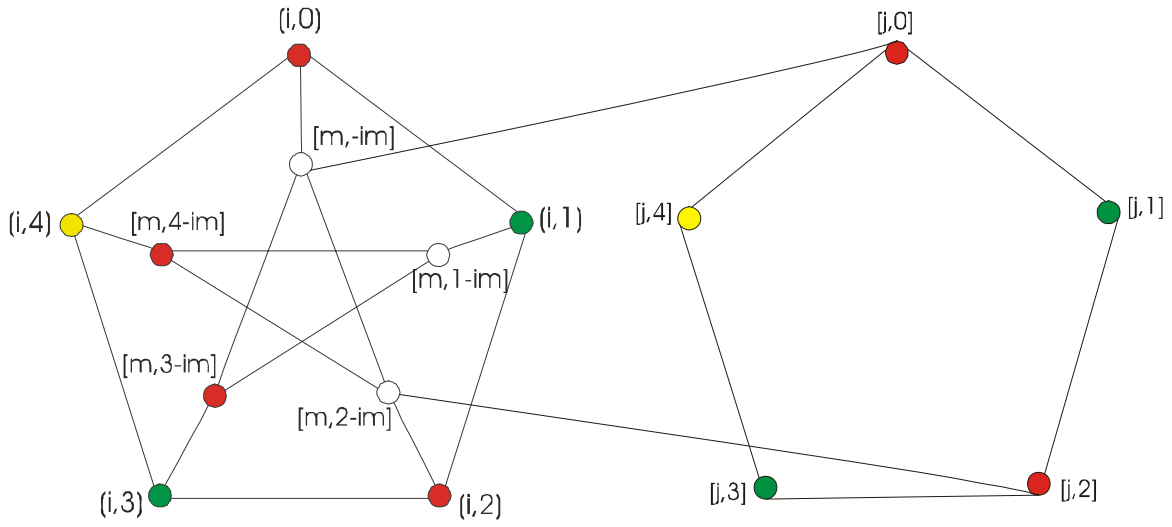


Figura 4.13:

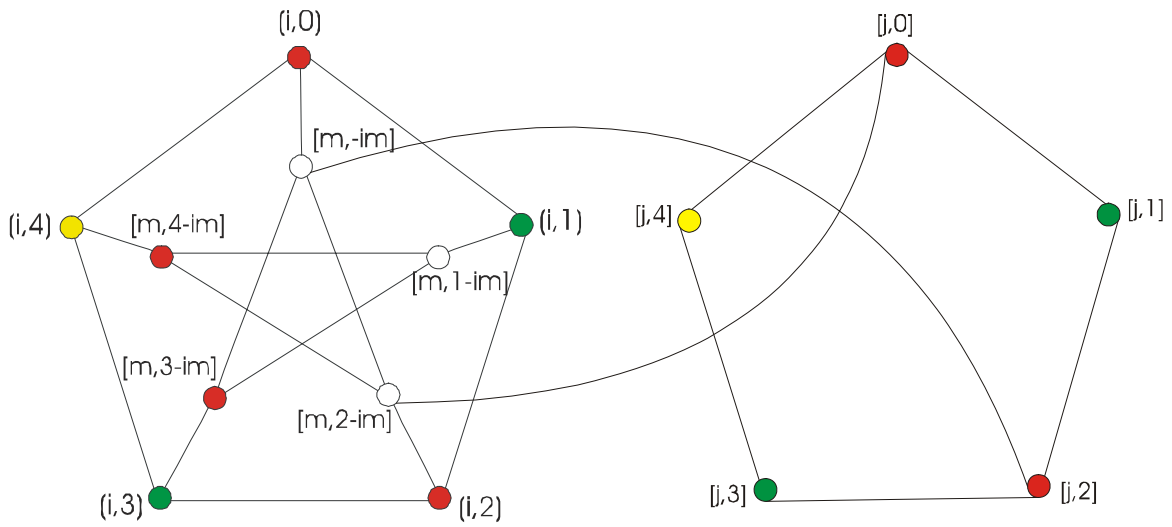


Figura 4.14:

Como $i \neq j$ entonces $[m, -im] \neq [m, -jm]$ y $[m, 2 - im] \neq [m, 2 - jm]$, y por lo tanto el caso 1 no es posible. Por otro lado, si suponemos que el caso 2 es posible entonces:

$$0 = jm + (2 - im) \text{ y } 2 = jm - im.$$

Despejando de ambas ecuaciones a jm se tiene que:

$$jm = 2 + im \text{ y } jm = im - 2.$$

Por lo tanto, $2 + im = im - 2$, de lo que se desprende que $4 = 0$, lo cual es una contradicción, y por lo tanto no es posible asignar una 3-coloración a la gráfica $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ bajo las hipótesis del Lema. ■

De manera análoga se prueba que no es posible dar una 3-coloración de la gráfica $G_{\{i,j\},\{m,n\}}$ si sus subgráficas E_i y E_j están coloreadas de la misma manera.

Proposición 4.2.5 *El número cromático de la gráfica de Hoffman-Singleton es cuatro.*

Demostración. Sea G la gráfica de Hoffman-Singleton y S_i los subconjuntos de vértices de G definidos recursivamente como:

$$S_0 = \{V(P_0)\} \cup \{V(E_0)\} \text{ y}$$

$$S_i = \bigcup_{j=0}^{i-1} S_j \cup \{V(P_i)\} \cup \{V(E_i)\} \text{ para } 1 \leq i \leq 4.$$

Notemos que los subconjuntos S_0, S_1, S_2, S_3 y S_4 tienen respectivamente 10, 20, 30, 40 y 50 elementos. Denotemos por G_i a la subgráfica inducida por el conjunto S_i para $i \in \mathbb{Z}_5$.

Consideremos a la subgráfica G_0 y nótemos que esta es igual a la subgráfica $G_{\{i,j\}}$ (con $i = 0$ y $j = 0$) definida para la demostración de los resultados anteriores. Por la proposición 4.2.2 sabemos que la gráfica G_0 es isomorfa a la gráfica de Petersen. Entonces por la **Observación 2** el número cromático de G_0 es 3 (Ver Figura 4.15).

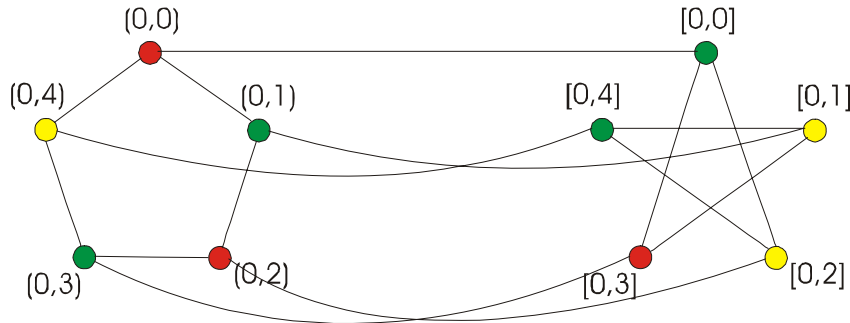


Figura 4.15:

Por otro lado el número cromático de la subgráfica G_1 es al menos 3

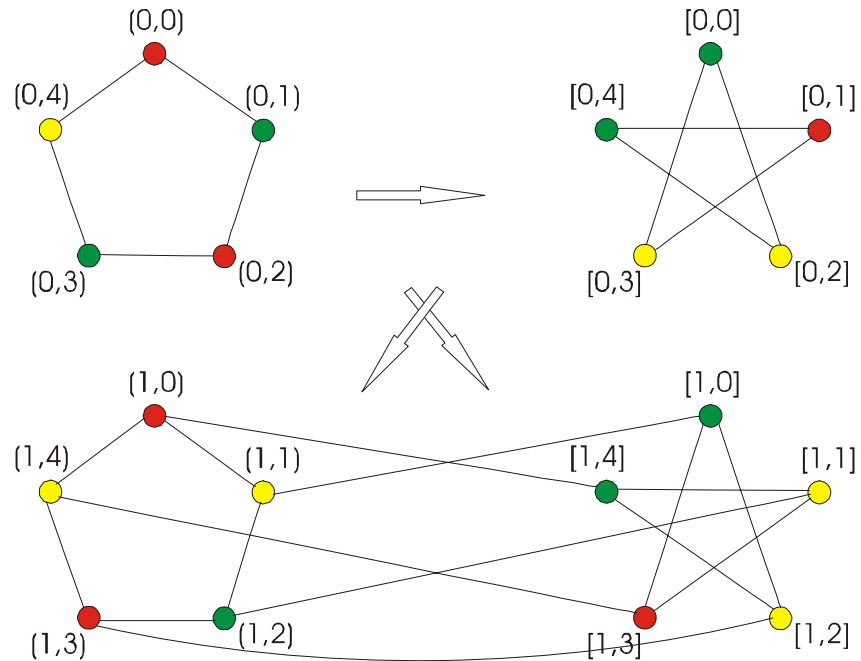


Figura 4.16:

debido a que contiene como subgráfica a la gráfica de Petersen. Sin embargo, existe una tres coloración de G_1 (Ver Figura 4.16), lo cual prueba que su número cromático es 3.

Nótemos que en esta coloración P_0 y P_1 tienen distintas coloraciones (analogamente E_0 y E_1) ya que en el Lema probamos que no es posible que dos pentágonos (o dos estrellas) tengan la misma coloración.

Consideremos ahora a la subgráfica G_2 y veamos que su número cromático

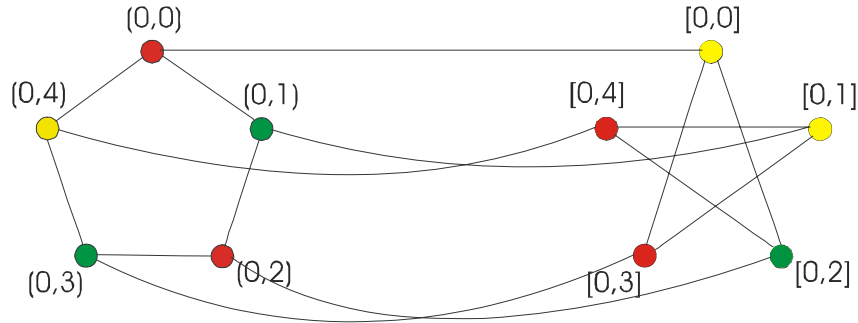


Figura 4.17:

es cuatro.

Supongamos por lo contrario que G_2 es 3-coloreable (con rojo, verde y amarillo) y supongamos sin pérdida de generalidad que la subgráfica $G_{\{0,0\}}$ está tres coloreada como se muestra en la figura 4.17.

Dado que la clase cromática amarilla de P_0 tiene cardinalidad uno entonces de la Proposición 4.2.1 se desprende que la clase cromática amarilla de cada una de las subgráficas E_1 y E_2 tiene cardinalidad dos. Notemos también que las clases cromáticas roja y amarilla tienen cardinalidad dos en E_0 ; existen tres maneras de distribuir la clase cromática roja en E_1 y E_2 :

Caso 1) Cuando la clase cromática roja tiene cardinalidad dos en cada una de las subgráficas E_1 y E_2 .

Caso 2) Cuando la clase cromática roja tiene cardinalidad dos en exactamente una de las subgráficas, ya sea E_1 o E_2 , y finalmente

Caso 3) Cuando la clase cromática roja tiene cardinalidad uno en ambas subgráficas E_1 y E_2 .

Si ocurriera el Caso 1 y tomando en cuenta que la clase cromática amarilla de cada una de las subgráficas E_1 y E_2 tiene cardinalidad dos, entonces por la Observación 3 para los valores siguientes: $m_1 = 0, m_2 = 1$ y $m_3 = 2$ existirán dos subgráficas E_i y E_j (para $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e $i \neq j$) tres coloreadas de la misma manera, con lo cual por el Lema 4.2.4 no es posible 3-colorear a la subgráfica inducida por los conjuntos P_0, P_1, E_i y E_j , lo cual es una contradicción ya que está es una subgráfica de G_2 y estamos suponiendo que G_2 es 3-coloreable.

En el Caso 2 sea E_k (para $k \in \{1, 2\}$) la subgráfica cuya clase cromática roja tiene cardinalidad uno. Por la proposición 4.2.2 las subgráficas inducidas por los vértices de cada una de las parejas $\{E_k, P_0\}, \{E_k, P_1\}$ y $\{E_k, P_2\}$ son isomorfas a la gráfica de Petersen; por lo tanto por la proposición 4.2.1 sabemos que la clase cromática roja tiene cardinalidad dos en cada una de las subgráficas P_1 y P_2 , y también P_0 por hipótesis. Por otro lado, tambien

la clase cromática verde de cada una de las subgráficas P_1 y P_2 tiene cardinalidad dos, y esto se dá porque las subgráficas inducidas por los vértices de cada una de las parejas $\{E_0, P_0\}$, $\{E_0, P_1\}$ y $\{E_0, P_2\}$ son isomorfas a la gráfica de Petersen y porque la clase cromática verde de E_0 tiene cardinalidad uno. Entonces si consideramos como en el caso anterior a la Observación 3 para los valores de $i = 0, j = 1$ y $k = 2$ entonces existirán dos subgráficas P_l y P_s (con $l, s \in \{0, 1, 2\}$ y $l \neq s$) coloreadas de la misma manera, con lo cual por el Lema 4.2.4 no es posible 3-colorear a la subgráfica inducida por los vértices de P_l, P_s, E_0 y E_1 , lo cual como en el caso 1 también es una contradicción ya que es una subgráfica de G_2 la cual estamos suponiendo es 3-coloreable.

El análisis del Caso 3 es análogo al anterior ya que en este caso también consideramos que ambas gráficas E_1 y E_2 tienen clase cromática roja con cardinalidad uno y es suficiente hacer el análisis, como antes, para una solamente.

Por lo tanto, como ninguno de los 4 casos es posible entonces la subgráfica G_2 no es 3-coloreable. En la Figura 4.18 se dá una 4-coloración de G_2 , probando que G_2 es 4-coloreable.

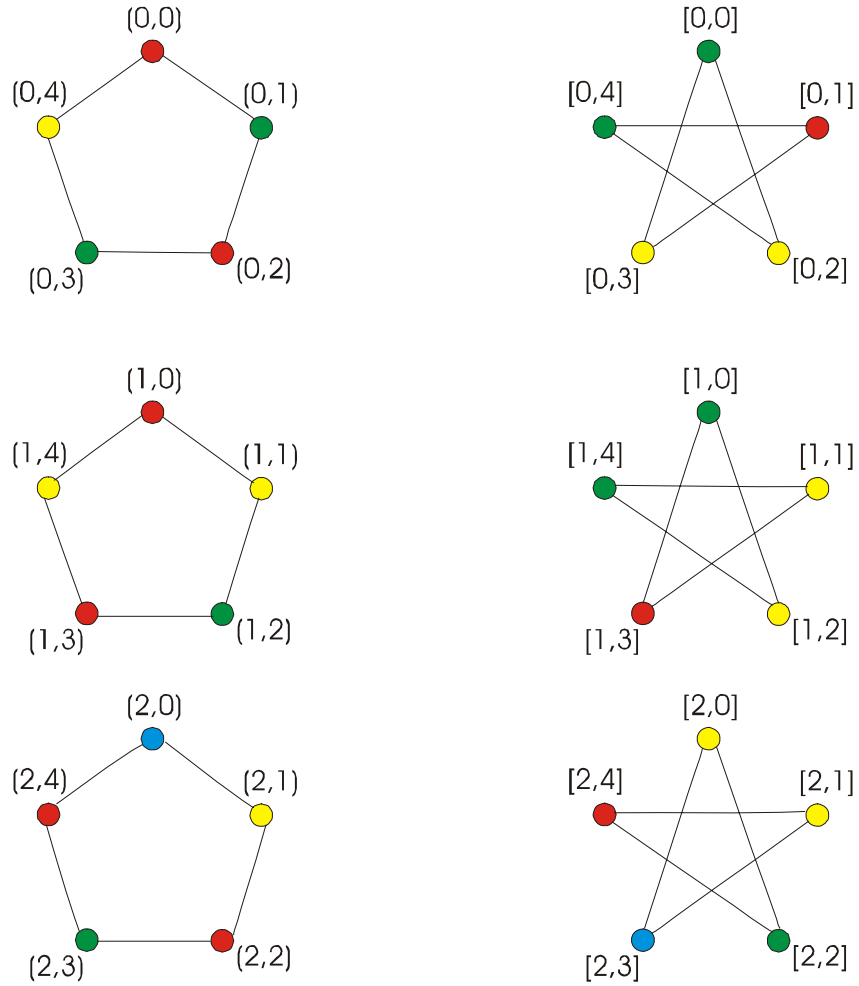


Figura 4.18:

Por último las subgráficas G_3 y G_4 son 4-coloreables como se muestra en las figuras 4.19 y 4.20 respectivamente, y por lo tanto el número cromático de la gráfica de Hoffman-Singleton es cuatro.

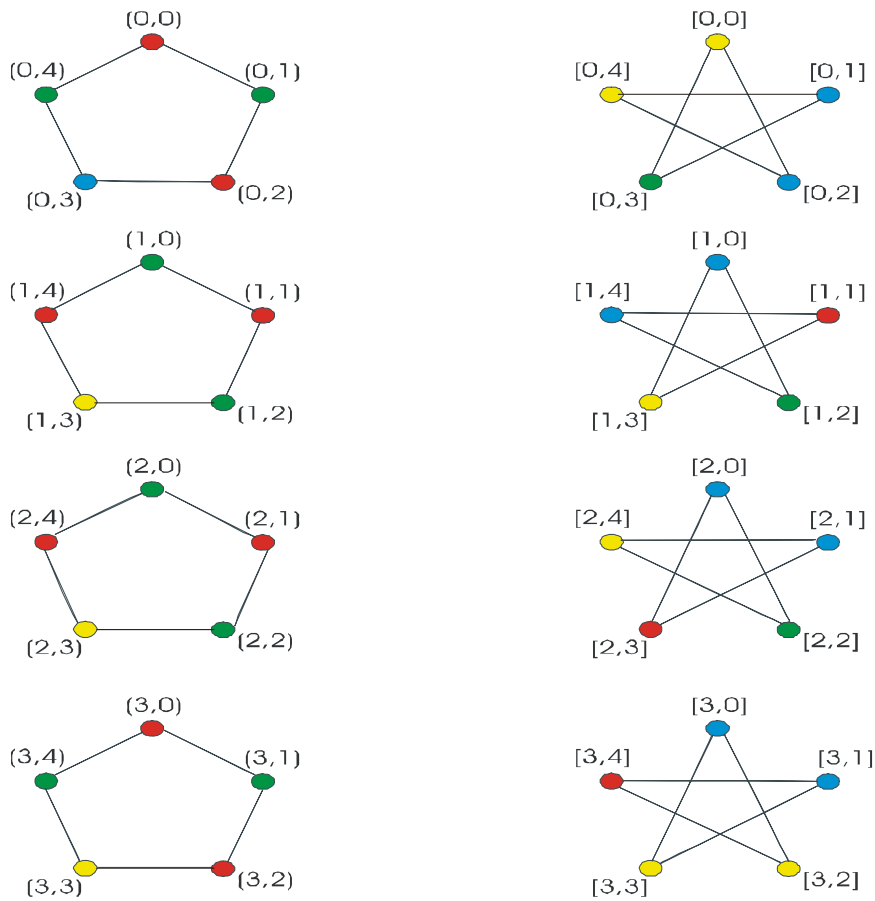


Figura 4.19:

■

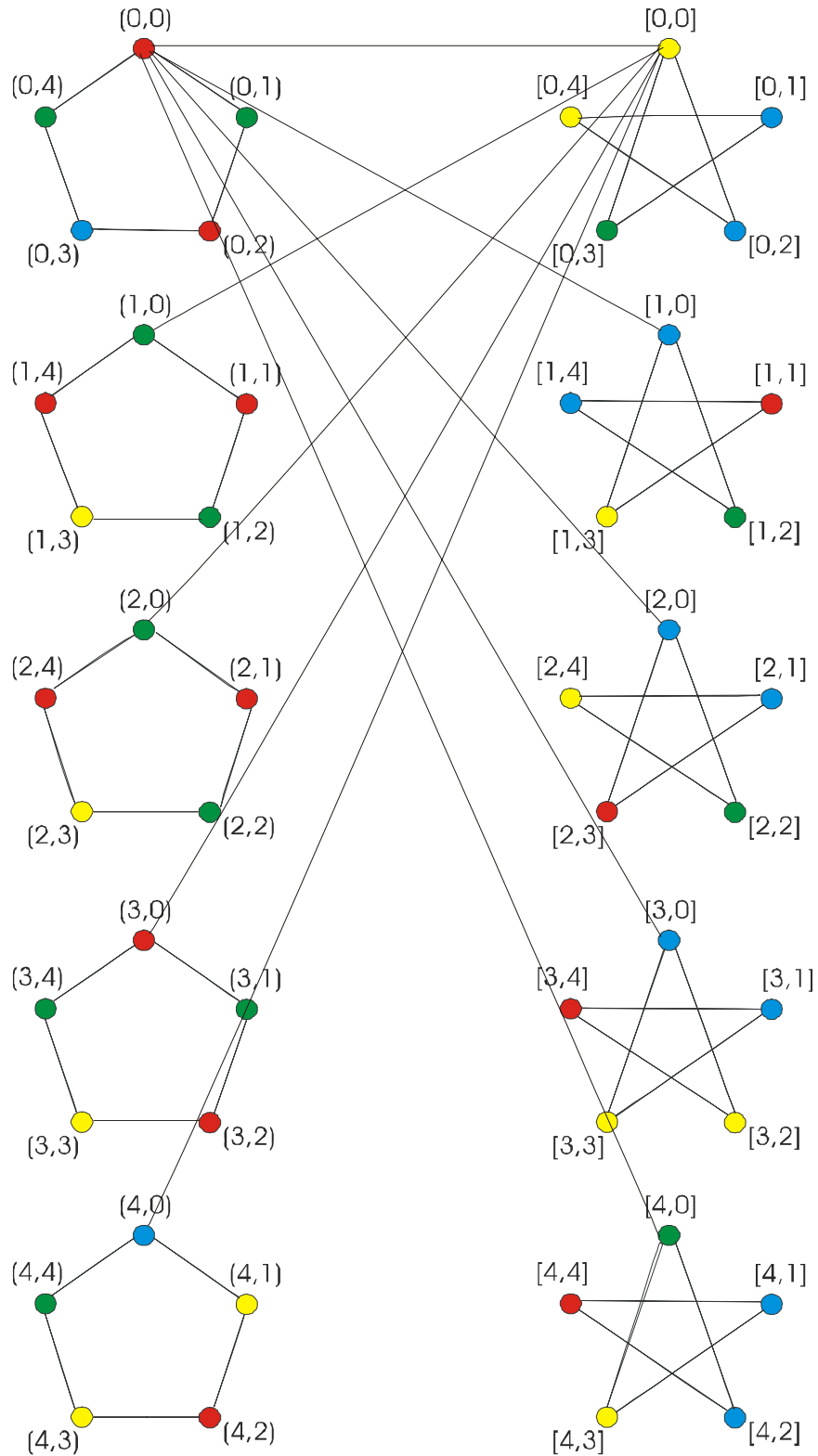


Figura 4.20: Coloración de la gráfica de Hoffman-Singleton

Bibliografía

- [1] A.J. Hoffman and R.R.Singleton, On Moore graphs with diameters 2 and 3, IBM J. Res. Dev. 4 (1960) 497-504.
- [2] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge Math. Library ISBN0-521-45897-8 pbk, (1974-1993 (2nd edition)).
- [3] R.M. Damerell, On Moore graphs, Proc. Camb. Phil. Soc. (1973), 74-227.
- [4] E. Bannai and T. Ito, On finite Moore graphs, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I.
- [5] J. Nežetřil and J. Matousek, Invitation to Discrete Mathematics, Ed. Oxford 1998.
- [6] J.H. Van Lint and R.M. Wilson, Ed. Cambridge University 1992.

- [7] Van Madeghem Hendrik, Generalized Polygons Monographs in Mathematics, Vol. 93 1998 Birkhäuser Verlag.
- [8] Godsil, Christopher David, Algebraic graph theory, Ed. Springer 2001.
- [9] Pak-Ken Wong, Cages-A survey, Journal of Graph Theory Vol. 6 (1982) 1-22.
- [10] D.A. Holton and J. Sheehan, "The Petersen Graph", Lecture series 7. Australian Mathematical Society.
- [11] F. Lazebnik; V.A. Ustimenko and A.J. Woldar, New upper bounds on the order of cages , Electronic Journal of Combinatorics 14 R13, (1997) 1-11.
- [12] Gabriela Araujo, Diego González, Juan José Montellano-Ballesteros y Oriol Serra, On upper bounds and connectivity of cages, Nov. 24, 2006.
- [13] M. O'Keefe and P.K. Wong, The smallest graph of girth 6 and valency 7, Journal of Graph Theory, Vol. 5 (1981) 79-85.
- [14] Robertson, N. The smallest graphs of girth 5 and valency 4, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 824-825.

- [15] Tutte W.T., A Family of cubical graphs, Proc. Cambridge Phil. Soc.
(1947), 459-474.