



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA**

**“APUNTES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA
DE YACIMIENTOS**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO PETROLERO
P R E S E N T A N:
**DAVID EDUARDO TRUJILLO ESCALONA
JOSÉ JUVENTINO SÁNCHEZ VELA**

DIRECTOR DE TESIS:
ING. MARTÍN CARLOS VELÁZQUEZ FRANCO



CD. UNIVERSITARIA, MEXICO, D.F.

MAYO, 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



SR. DAVID EDUARDO TRUJILLO ESCALONA
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Ing. Martín Carlos Velázquez Franco y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

APUNTES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS

- I INTRODUCCIÓN**
 - II FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA DE YACIMIENTOS**
 - III FUNDAMENTOS DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS**
 - IV TÓPICOS ESPECIALES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA**
 - V ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS**
 - VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**
- APÉNDICES**
REFERENCIAS
LISTA DE FIGURAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D. F., a 27 de febrero de 2007
EL DIRECTOR

MTRO. JOSÉ GONZALO GUERRERO ZEPEDA

JGGZ*JAGC*gtg



SR. JOSÉ JUVENTINO SÁNCHEZ VELA
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Ing. Martín Carlos Velázquez Franco y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

APUNTES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS

- I INTRODUCCIÓN**
 - II FUNDAMENTOS DE INGENIERÍA DE YACIMIENTOS**
 - III FUNDAMENTOS DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS**
 - IV TÓPICOS ESPECIALES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA**
 - V ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS**
 - VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**
- APÉNDICES**
REFERENCIAS
LISTA DE FIGURAS

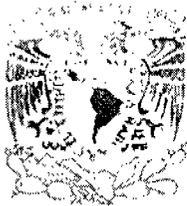
Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
C'd. Universitaria, D. F., a 27 de febrero de 2007
EL DIRECTOR

MTRO. JOSÉ GONZALO GUERRERO ZEPEDA

JGGZ/JAGC*gtg



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS DE LA TIERRA

"APUNTES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS"

TESIS PRESENTADA POR:

DAVID EDUARDO TRUJILLO ESCALONA

DIRIGIDA POR:

ING. MARTÍN CARLOS VELÁZQUEZ FRANCO

JURADO DEL EXÁMEN PROFESIONAL

PRESIDENTE:

ING. MANUEL JUAN VILLAMAR VIGUERAS

VOCAL

ING. MARTÍN CARLOS VELÁZQUEZ FRANCO

SECRETARIO

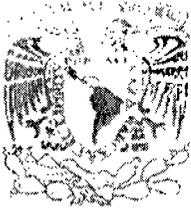
DR. VÍCTOR HUGO ARANA ORTIZ

1ER SUPLENTE:

DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

2DO SUPLENTE:

M. I. MARIO BECERRA ZEPEDA



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS DE LA TIERRA

"APUNTES DE SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS"

TESIS PRESENTADA POR:

JOSÉ JUVENTINO SÁNCHEZ VELA

DIRIGIDA POR:

ING. MARTÍN CARLOS VELÁZQUEZ FRANCO

JURADO DEL EXÁMEN PROFESIONAL:

PRESIDENTE: ING. MANUEL JUAN VILLAMAR VIGUERAS

VOCAL: ING. MARTÍN CARLOS VELÁZQUEZ FRANCO

SECRETARIO: DR. VICTOR HUGO ARANA ORTIZ

1ER SUPLENTE: DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

2DO SUPLENTE: M. I. MARIO BECERRA ZEPEDA

ÍNDICE

RESUMEN	1
FIGURAS	3
I. INTRODUCCIÓN	7
I.1 Definición y Objetivo de la Simulación Numérica de Yacimientos	7
I.2 Introducción al Modelado y Simulación	10
I.3 Breve Historia de la Simulación Numérica de Yacimientos	14
I.4 Filosofía y Metodología del Simulador Numérico	17
I.5 Balance de Materia vs. Simulación Numérica de yacimientos	18
I.6 Utilidad de la Simulación	20
I.7 Beneficios de la Simulación Numérica de Yacimientos	21
I.8 Clasificación de los Simuladores Numéricos	23
I.8.1 Tipo de Yacimiento	24
I.8.2 Nivel de Simulación	24
I.8.3 Tipo de Simulación	24
I.8.3.1 Simulador de gas	25
I.8.3.2 Simulador de aceite negro	26
I.8.3.3 Simulador geotérmico	27
I.8.3.4 Simulador de recuperación química	27
I.8.3.5 Simulador de recuperación con fluidos miscibles	28
I.8.3.6 Simulador de recuperación térmica	28
I.8.4 Tipo de Flujo	29
I.8.4.1 Simulador monofásico	29
I.8.4.2 Simulador bifásico	30
I.8.4.3 Simulador trifásico	30
I.8.4.4 Simulador composicional	30
I.8.5 Número de Dimensiones	31
I.8.5.1. Simulador de cero dimensiones	32
I.8.5.2. Simulador de una dimensión	33

I.8.5.3. Simulador de dos dimensiones	36
I.8.5.3.1. <i>Simulador areal</i>	36
I.8.5.3.2. <i>Simulador de sección transversal</i>	37
I.8.5.3.3. <i>Simulador de dos dimensiones en forma radial</i>	38
I.8.5.4. Simulador de tres dimensiones	38
I.8.6 Geometría	40
I.8.7 Uso de la Clasificación	40
I.8.8 Clasificación Basada en la Manera en la que las Ecuaciones de Flujo son Discretizadas	42
I.8.9 Mallas no Convencionales	43
1.9 Escalamiento	47
II FUNDAMENTOS DE INGENIERIA DE YACIMIENTOS	49
II.1 Potencial del Fluido	49
II.2 Ecuación de Continuidad en Varias Geometrías de Flujo	53
II.3 Ley de Darcy	57
II.4 Ecuación de Momento: Ley de Darcy	59
II.5 Ecuaciones de Estado	60
II.6 Ecuaciones que Describen el Medio Poroso	63
II.7 Daño y Almacenamiento	64
II.8 Regímenes de Flujo en Medios Porosos	69
II.8.1 Flujo Transitorio	69
II.8.2 Flujo Pseudoestacionario	73
II.8.3 Flujo Estacionario	76

III	FUNDAMENTOS DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS	77
III.1	Introducción a las Ecuaciones de Flujo de Fluidos en Medios Porosos	77
III.2	Ecuación General de Flujo de Fluidos a Través de Medios Porosos	78
III.3	Ecuación General de Flujo Monofásico a Través de Medios Porosos	81
III.4	Condiciones Iniciales y de Frontera	82
	III.4.1 Condiciones Dirichlet	82
	III.4.2 Condiciones Neumann	83
	III.4.3 Condiciones Iniciales	83
III.5	Solución Analítica de las Ecuaciones de Flujo Monofásico	84
III.6	Características de Mallas Numéricas en Diferentes Geometrías	86
	III.6.1 Malla Cartesiana	86
	III.6.2 Malla Radial	89
III.7	Solución Numérica de las Ecuaciones de Flujo Monofásico	93
	III.7.1 Formulación Explícita	95
	III.7.2 Formulación Implícita	96
	III.7.3 Formulación Crank-Nicholson	97
	III.7.4 Representación General de las Formulaciones Implícito-Explícitas	98
III.8	Concepto de Consistencia, Convergencia y Estabilidad de una Aproximación Numérica	100
III.9	Solución de la Formulación General Explícita-Implícita	102
III.10	Solución Analítica de la Ecuación Diferencial Parcial	107
	III.10.1 Solución para Yacimiento Infinito	108
III.11	Solución Numérica de la Ecuación Diferencial Parcial	112
	III.11.1 Discretización de una Ecuación Diferencial Parcial	113
	III.11.2 Discretización del Término de Acumulación	114

IV TOPICOS ESPECIALES DE SIMULACION NUMERICA	123
IV.1 Modelado de Pozos	123
IV.1.1 Modelo de van Poolen	124
IV.1.2 Modelo de Peaceman	125
IV.2 Daño y Almacenamiento	126
IV.3 Yacimientos Fracturados	131
IV.3.1 Modelo de Doble Porosidad	132
IV.3.2 Flujo de Fluidos en Medios Porosos Fracturados	134
IV.3.3 Solución Analítica – Solución de Warren & Root	139
IV.4 Solución Numérica de las Ecuaciones para Flujo Multifásico	140
IV.4.1 Ecuaciones para Flujo Multifásico	140
IV.4.2 Aproximación Mediante Diferencias Finitas	142
IV.4.3 Planteamiento de la Solución	143
IV.4.4 Método Totalmente Implícito: Método General	145
V ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA SIMULACIÓN	149
V.1 Planeación de un Estudio de Simulación	149
V.1.1 Definición del Problema	152
V.1.2 Revisión de la Información	153
V.1.3 Selección de la Mejor Forma de Abordar el Estudio	153
V.1.4 Diseño del Modelo	154
V.1.5 Ajuste de la Historia de Producción	154
V.1.6 Análisis de Resultados y Predicción del Comportamiento	155
V.1.7 Reportes	156
V.2 Diseño del Modelo	156
V.2.1 Pasos para el Diseño del Modelo	157
V.2.2 Selección del Número de Dimensiones	158
V.2.3 Simplificación de Problemas Complejos	158
V.2.3.1 Pseudofunciones de permeabilidad relativa y presión capilar	159
V.2.3.2 Modelos con ventanas	160

V.2.3.3	Yacimientos naturalmente fracturados	161
V.2.4	Propiedades de los Fluidos del Yacimiento	162
V.2.4.1	Compresibilidad	162
V.2.4.2	Simulación monofásica vs. simulación multifásica	162
V.2.4.3	Propiedades variables	163
V.2.5	Propiedades de la Roca	164
V.2.5.1	Distribución de la permeabilidad absoluta y de la porosidad	164
V.2.5.2	Permeabilidad relativa	165
V.2.5.3	Presión Capilar	165
V.3	Selección de las Propiedades de la Roca y de los Fluidos	166
V.3.1	Información Requerida para la Construcción de un Modelo	167
V.3.1.1	Descripción geológica del yacimiento	168
V.3.1.2	Mecanismos de desplazamiento	168
V.3.1.3	Propiedades petrofísicas	169
V.3.1.4	Propiedades pVT de los fluidos	170
V.3.1.5	Otros datos	170
V.4	Selección del Tamaño de las Celdas y los Incrementos de Tiempo de Simulación	174
V.4.1	Criterio para Seleccionar el Tamaño de las Celdas	174
V.4.1.1	Lugares donde la presión y la saturación deben ser conocidas	175
V.4.1.2	Representación de la geometría, geología y las propiedades físicas	176
V.4.1.3	Representación de la saturación dinámica y del comportamiento de presiones	178
V.4.1.4	Tamaño de las celdas en geometría radial	178
V.4.1.5	Mallas con celdas de tamaño variable	179
V.4.2	Selección de los Incrementos de Tiempo	180
V.4.2.1	Consecuencias de utilizar incrementos sin restricciones	180

V.4.2.2	Verificando la confiabilidad de los intervalos	180
V.4.2.3	Consideraciones de los costos	181
V.5	Ajuste de Historia	182
V.5.1	Información que se Debe Relacionar	182
V.5.2	Pasos a Seguir en un Ajuste con la Historia de Producción	183
V.6	Pronósticos de Producción	184
V.7	Reporte de Resultados	185
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		187
NOMENCLATURA		189
BIBLIOGRAFÍA		195
APÉNDICE A PROPIEDADES DE LA ROCA Y DE LOS FLUIDOS		199
A.1	Propiedades Petrofísicas	199
A.1.1	Porosidad (ϕ)	199
A.1.2	Compresibilidad de la Roca (c_r)	205
A.1.3	Saturación (S)	206
A.1.4	Permeabilidad (k)	209
A.1.5	Tensión Interfacial (σ)	213
A.1.6	Mojabilidad (W)	215
A.1.7	Fuerzas Capilares	219
A.1.8	Presión Capilar (p_c)	219
A.2	Propiedades de los fluidos	222
A.2.1	Tipos de Fluido	222
A.2.2	Viscosidad (μ)	223
A.2.3	Factor de Volumen (B)	225
A.2.3.1	Factor de volumen del gas, B_g	225
A.2.3.2	Factor de volumen del aceite B_o	225
A.2.3.3	Factor de volumen del agua, B_w	226
A.2.4	Movilidad (λ)	227

APÉNDICE B	FUNDAMENTOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS	229
B.1	Matrices	229
B.1.1	Concepto de Matriz	229
B.1.2	Matrices Iguales	230
B.1.3	Algunos Tipos de Matrices	230
B.1.4	Operaciones con Matrices	235
B.1.4.1	Suma de matrices	235
B.1.4.2	Producto de un número real por una matriz	236
B.1.4.3	Producto de matrices	236
B.1.4.4	Matriz inversa	237
B.1.5	Norma de una Matriz	238
B.1.6	Número de Condición y Error en la Solución	240
B.2	Sistemas de Ecuaciones Lineales	243
B.2.1	Algoritmo de Thomas	257
B.3	Solución de Ecuaciones no Lineales	259
B.3.1	Método de Newton-Raphson	259
B.3.2	Sistemas de Ecuaciones no Lineales	261
B.4	Método de Aproximación Mediante Diferencias Finitas	263
B.4.1	Serie de Taylor	263
B.4.2	Aproximaciones en Espacio	265
B.4.3	Aproximación de la Segunda Derivada	268
B.4.4	Errores	269
B.4.5	Aproximaciones en Tiempo	270
APÉNDICE C	EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS	275
C.1	Ejercicios Resueltos	275
C.2	Ejercicios Propuestos	297



RESUMEN

La Simulación Numérica de Yacimientos es una disciplina de suma importancia en la Ingeniería de Yacimientos petroleros. Su potencial como herramienta de trabajo es enorme, puesto que con ella es posible predecir el comportamiento de yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación y por lo tanto incrementar la recuperación de hidrocarburos.

Este trabajo tiene como objetivo presentar los fundamentos de la Simulación Numérica de Yacimientos petroleros, como un primer curso sobre el tema. No se pretende abarcar todo lo que se conoce sobre simulación, sino dar los conceptos básicos para que se puedan entender cursos más avanzados, así como iniciar a las personas interesadas en esta área de estudio de la ingeniería petrolera.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: el Capítulo I es una introducción a la Simulación Numérica de Yacimientos. En el Capítulo II se introduce al lector en temas como la ecuación de continuidad, la Ley de Darcy y las ecuaciones de estado, las cuales forman la base en la que se sustentarán los modelos matemáticos. En el Capítulo III se desarrolla la ecuación de difusión para varias geometrías y se obtienen a detalle las soluciones analíticas y numéricas para flujo monofásico en una sola dirección, tanto en mallas cartesianas como radiales. En el Capítulo IV se incorpora el modelado de pozos, el daño y almacenamiento. Se presenta el modelo de doble porosidad para yacimientos fracturados y se dan las bases para estudiar el caso de flujo multifásico para dos y tres fases. En el Capítulo V se presentan los aspectos prácticos de la Simulación Numérica de Yacimientos.

Es importante señalar que este trabajo pretende sustituir a los apuntes de "Simulación Numérica de Yacimientos", escritos en 1984 por el Ing. Miguel Hernández. y el Dr. Guillermo Domínguez. Sin embargo, se les da el crédito que les corresponde, por las partes de su trabajo que fueron retomadas para realizar estos apuntes. La mayor parte del material presentado se imparte en la materia de "Simulación Matemática de Yacimientos", la cual ha sido impartida por el Dr. Víctor H. Arana Ortiz, a lo largo de los últimos tres años.

FIGURAS

Fig. 1.1	Diagrama de flujo de un estudio de Simulación	12
Fig. 1.2	Clasificación General de los Simuladores de Yacimientos	22
Fig. 1.3	Modelo de cero dimensiones	32
Fig. 1.4	Balance de materia	32
Fig. 1.5	Balance de materia para dos bloques	33
Fig. 1.6	Modelos de una dimensión	35
Fig. 1.7a	Simulador areal	37
Fig. 1.7b	Simulador de sección transversal	37
Fig. 1.7c	Simulador de dos dimensiones en forma radial	38
Fig. 1.8a	Simulador de tres dimensiones en forma cartesiana	39
Fig. 1.8b	Simulador de tres dimensiones en forma radial	39
Fig. 1.9a	Modelo de Diferencias Finitas	42
Fig. 1.9b	Modelo de Volumen Finito	42
Fig. 1.10a	Malla Cartesiana localmente refinada	44
Fig. 1.10b	Malla Hexagonal	44
Fig. 1.10c	Malla Cartesiana Híbrida	45
Fig. 1.10d	Malla Hexagonal Híbrida	45
Fig. 1.10e	Malla Curvilínea	45
Fig. 1.10f	Malla Triangular	45
Fig. 1.10g	Malla de Puntos de Esquina	45
Fig. 1.10h	Mallas Voronoi	46
Fig. 1.10i	Malla Irregular	46
Fig. 1.10j	Malla Generada Automáticamente	46
Fig. 1.12	Escalamiento	47

Fig. 2.1	Potencial del fluido	50
Fig. 2.2	Volumen de control elemental	53
Fig. 2.3	Daño de una formación	65
Fig. 2.4	Mejoramiento de la permeabilidad de una formación	66
Fig. 2.5	Gasto total considerando almacenamiento	67
Fig. 2.6a	Almacenamiento por expansión del fluido	68
Fig. 2.6b	Almacenamiento por cambio de nivel de líquido	67
Fig. 2.7	Flujo transitorio	70
Fig. 2.8	Producción a presión constante	70
Fig. 2.9	Solución con la Integral Exponencial	72
Fig. 2.10	Flujo Pseudoestacionario	73
Fig. 3.1	Malla cartesiana uniforme de nodos distribuidos	86
Fig. 3.2	Malla cartesiana uniforme de nodos centrados	87
Fig. 3.3	Malla cilíndrica	89
Fig. 3.4	Malla radial	90
Fig. 3.5	Esquema Explícito	95
Fig. 3.6	Esquema Implícito	96
Fig. 3.7	Esquema Crank-Nicholson	98
Fig. 3.8	Discretización del dominio en tiempo (Métodos explícito, implícito y Crank-Nicholson)	99
Fig. 3.9	Estabilidad de una aproximación numérica	101
Fig. 3.10	Malla cartesiana en dos dimensiones	105
Fig. 3.11	Integral exponencial y su aproximación logarítmica	111
Fig. 3.12	Área entre radios	115
Fig. 3.13	Área de la celda	117
Fig. 3.14	Transmisibilidades	118
Fig. 3.14a	Transmisibilidad	119
Fig. 3.15	Enumeración de nodos y fronteras	121

Fig. 4.1	Roca fracturada	131
Fig. 4.2	Modelo de doble porosidad	132
Fig. 4.3a	Sistema Matriz-Fractura	133
Fig. 4.3b	Sistema Matriz-Fractura	133
Fig. 5.1	Etapas para desarrollar un modelo	151
Fig. 5.2	Actividades de un estudio típico de simulación	152
Fig. 5.3	Comparación de perfiles de S_g predichos con modelos 1D y 2D	159
Fig. 5.4	Modelo con ventana	161
Fig. 5.5	Ejemplo de mallas	175
Fig. 5.6	Ejemplo del uso de permeabilidad cero para modelar barreras al flujo	176
Fig. 5.7	Influencia de la geometría externa e interna en el diseño del modelo	177
Fig. 5.8	Malla típica para modelado de pozos	179

Fig. A.1	Porosidad	199
Fig. A.2	Tipos de arreglos	200
Fig. A.3a	Arena bien clasificada	201
Fig. A.3b	Arena escasamente clasificada	201
Fig. A.4a	Cavernas en Calcita	203
Fig. A.4b	Granito fracturado	203
Fig. A.5	Grafica Porosidad vs Presión de sobrecarga en lutitas y areniscas	205
Fig. A.6	Roca saturada de aceite y agua	206
Fig. A.7	Grafica de permeabilidad relativa al aceite y al agua	212
Fig. A.8	Tensión superficial	213
Fig. A.9a	Roca mojada por agua	218
Fig. A.9b	Roca mojada por aceite	218
Fig. A.9c	Roca sin preferencia a ser mojada por agua o aceite	218
Fig. A.10	Presión capilar	220
Fig. A.11	Tipos de Fluido	222
Fig. A.12a	Representación de la viscosidad de un fluido entre dos capas	223
Fig. A.12b	Grafica Viscosidad del Aceite vs Presión del yacimiento	224
Fig. A.12c	Grafica Viscosidad del Gas vs Presión del yacimiento	224
Fig. A.13	Factor de volumen del aceite vs Presión del yacimiento	226
Fig. B.1	Número de condición	241
Fig. B.2	Principales métodos para solucionar SEL	247
Fig. B.3	Newton-Raphson	249
Fig. B.4	Gráfica función $p(x)$	264
Fig. B.5	Malla cartesiana uniforme de nodos centrados	265
Fig. B.6	Aproximación en el tiempo	270
Fig. B.7	Aproximación mediante diferencias centrales	272

I INTRODUCCIÓN

Este capítulo contiene algunos puntos importantes para entender en forma general los conceptos de simulación y modelado, y su papel dentro de la ingeniería petrolera, específicamente en la administración de un activo petrolero.

I.1 Definición y Objetivo de la Simulación Numérica de Yacimientos

Los modelos son usados para describir procesos que tienen lugar en todas las ramas de la ciencia y la tecnología. Diferentes tipos de modelos son usados en todas las áreas de la Industria Petrolera, incluyendo la Ingeniería de Yacimientos.

Los modelos pueden ser físicos o matemáticos. Los primeros son aquéllos que a una escala apropiada se construyen para analizar algún fenómeno, por ejemplo, un tubo de acrílico para modelar el flujo de fluidos a través de tuberías o una celda pVT para modelar el comportamiento de un fluido en el yacimiento. En los modelos matemáticos, el sistema o fenómeno a ser modelado es expresado en términos de ecuaciones, que deberán reproducir el comportamiento del sistema a diferentes condiciones.

Algunos sistemas o fenómenos no es posible reproducirlos mediante modelos físicos, ya sea porque son muy costosos o simplemente es imposible. En estos casos se debe recurrir a modelos matemáticos; un ejemplo es el caso del flujo de fluidos en los yacimientos petroleros, cuando se desea analizarlos a gran escala.

En general, si se desea modelar matemáticamente (numéricamente) el flujo de fluidos en medios porosos a escala de yacimiento, se debe recurrir a un simulador numérico; de esta manera, se puede definir a la Simulación Numérica de Yacimientos (SNY) como el estudio del flujo multifásico de fluidos y sus cambios de fase a través de un yacimiento.

En estos apuntes se considera que un yacimiento es un cuerpo de roca porosa y permeable saturada de aceite, gas y/o agua. En general, las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos en medios poroso son ecuaciones diferenciales parciales no lineales y requieren para su solución el uso de métodos numéricos. Un programa de cómputo, que resuelva iterativamente las ecuaciones para el flujo de fluidos es llamado Modelo Numérico o Simulador Numérico de Yacimientos.

De esta manera, la Simulación Numérica de Yacimientos (SNY) combina física, matemáticas e ingeniería de yacimientos, para obtener algoritmos que deben ser programados, para desarrollar una herramienta que sea capaz de predecir el comportamiento de un yacimiento de hidrocarburos bajo diferentes condiciones de explotación. **Coats (1969)** define a un simulador numérico como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales, que expresan la conservación de masa y/o energía, ecuaciones de estado y una ecuación de momento.

Un estudio de Simulación integra lo siguiente: geología, geofísica, petrofísica, perforación, producción, ingeniería de yacimientos, instalaciones superficiales, y restricciones legales y comerciales; por lo tanto, este estudio necesita una considerable cantidad de información y tiempo para predecir el comportamiento del yacimiento.

La importancia de la Simulación de Yacimientos, y por lo tanto de un simulador numérico de yacimientos, radica en su papel dentro de la administración de un yacimiento.

El proceso de la administración de un yacimiento o un activo petrolero, integra los siguientes puntos (**Gringarten, A.C., 1998**): (1) Adquisición de información, (2) validación de información, (3) integración de la información en un modelo de yacimiento, (4) comportamiento del modelo de yacimiento con un *simulador numérico de yacimientos*, (5) calibración del modelo del yacimiento (ajuste de historia), (6) acoplamiento del modelo del yacimiento con el de las instalaciones superficiales, y (7) realización de pronósticos de producción.

De los anteriores siete puntos, la Simulación Numérica de Yacimientos es la herramienta fundamental para la realización de los cinco últimos. De aquí la importancia de contar con un simulador numérico de yacimientos propio para la administración efectiva de yacimientos.

El *objetivo* de la SNY es proporcionar al ingeniero de diseño de explotación una herramienta confiable para predecir el comportamiento de los yacimientos de hidrocarburos, bajo *diferentes* condiciones de operación. Modelar el comportamiento de un yacimiento de hidrocarburos, bajo diferentes esquemas de producción, reduce el riesgo asociado a la elección del plan de explotación y por lo tanto minimiza los flujos de efectivo negativos.

Matax y Dalton (1990) mencionan que la simulación es la única forma de describir cuantitativamente el flujo de fluidos en un yacimiento heterogéneo, cuya producción se determina no sólo por las propiedades del mismo, sino también por la demanda del mercado, las estrategias de inversión y las políticas gubernamentales.

Los Simuladores Numéricos de Yacimientos son usados principalmente porque son capaces de resolver problemas que no pueden ser resueltos analíticamente o de alguna otra manera.

1.2 Introducción al Modelado y Simulación

Con el propósito de diferenciar entre modelado y simulación, en un ámbito general aplicable a la Simulación Numérica de Yacimientos, es importante establecer algunas definiciones.

Un sistema es un objeto definido por sus fronteras, comportamiento y características las cuales interactúan en tiempo y espacio en respuesta a un estímulo externo.

Un modelo es la representación de un *sistema* (real) en forma simplificada. La representación puede ser matemática, lógica, física o alguna otra representación estructurada de un sistema (real) en algún punto en espacio y/o tiempo.

Un ingeniero interactúa con sistemas muy complejos, que rebasan su capacidad de comprensión; ésta es la razón por la cual se crean modelos o representaciones más simples de un sistema. El principal objetivo de crear un modelo es para analizar lo que se busca estudiar de un sistema real.

Antes de continuar, es importante establecer algunos conceptos utilizados en la literatura del modelado. Un modelo conceptual es una aproximación cualitativa de un sistema usado para entenderlo en forma superficial; esto es, como se concibe el sistema en palabras o ideas. Un modelo matemático es la construcción matemática basado en leyes físicas, ecuaciones, y condiciones iniciales y de frontera. Un modelo numérico es la aproximación numérica del modelo matemático, generalmente con un programa de cómputo.

Los modelos se usan para *predecir* las respuestas de un sistema debido a un estímulo específico, para estudiar efectos de varias variables en el sistema, para predecir el comportamiento del sistema, etc.

En la elaboración de un modelo lo importante es la manera en la que ayuda a entender el sistema. Si el modelo es correcto o no, es una cuestión relativa de juicio. El grado en el cual un modelo ayuda a entender el sistema es la base para decidir que tan bueno es el modelo, **Sterman (1991)**. En la creación de un modelo existen ventajas y desventajas.

Un modelo es una simplificación de la realidad y por lo tanto algunas características no se consideran. Al no considerar puntos importantes del sistema, se corre el riesgo de desarrollar un modelo muy simple para poder aprender de él. Caso contrario, al considerar demasiado detalle, el modelo es muy complicado para entender lo que se busca.

El modelamiento o modelado es el proceso de hacer un modelo. El proceso de hacer un mapa es un modelado cartográfico; cuando los resultados de cálculos matemáticos tienen un significado, se está haciendo un modelo matemático de algún sistema.

El modelado es más que un proceso de construir un modelo. De hecho el modelado es un proceso *iterativo*; se comienza por la formulación del modelo, esto es, examinar el sistema y se decide que variables son importantes y su relación entre ellas.

Un modelo de simulación de un sistema, resultante de un modelado de simulación, toma en cuenta la manera de cómo interactúan la información y las restricciones, a medida que el tiempo transcurre. Un modelo de simulación proporciona un ambiente virtual donde las ideas pueden ser ensayadas y entendidas, antes de su implementación, **Maria (1997)**.

Un estudio de simulación es el proceso de la elaboración de un modelo de simulación (Simulation Modelling), diseño, ejecución y análisis de resultados. Un estudio de simulación comprende los siguientes pasos, **Maria (1997)**:

1. Identificación del problema
2. Formulación del problema
3. Recopilación de información
4. Formulación y desarrollo del modelo
5. Validación del modelo
6. Documentación del modelo para uso futuro
7. Diseño de experimentos
8. Ejecutar experimentos (corridas)
9. Interpretar resultados
10. Recomendaciones.

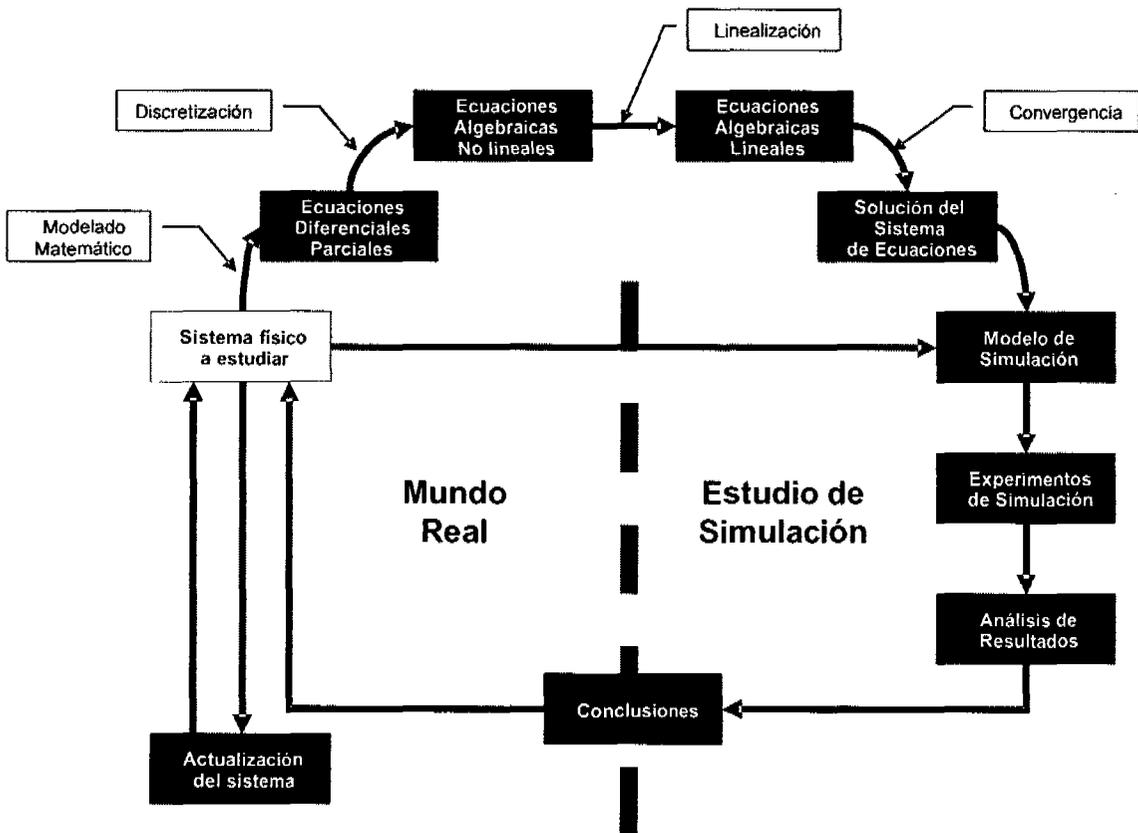


Fig. 1.1 Diagrama de flujo de un estudio de Simulación

Como se ha establecido, una simulación de un sistema es la operación de un modelo del sistema. La operación del modelo puede ser estudiada y algunas características del comportamiento del sistema pueden ser inferidas. En un sentido amplio, la simulación es una herramienta para evaluar el comportamiento de un sistema, existiendo o propuesto, bajo diferentes condiciones de interés y largos periodos de tiempo real.

La simulación es usada antes de que el sistema sea alterado, reducir riesgos y optimizar el funcionamiento de un sistema, **Shanon (1975)**. La simulación es una disciplina para desarrollar un nivel de entendimiento de las interacciones de los componentes de un sistema como un todo. El nivel de entendimiento que se puede desarrollar mediante la simulación es difícilmente igualado usando otra disciplina. La simulación debe ser aplicada en donde existe la necesidad de modelar y analizar un sistema, sin embargo, la simulación puede consumir mucho tiempo que puede llegar a ser impráctica para la toma de decisiones oportuna.

I.3 Breve Historia de la Simulación Numérica de Yacimientos

La historia de la Simulación Numérica de Yacimientos es casi tan antigua como la historia de las computadoras. Por los años 40's se reconoció el potencial de la simulación de yacimientos y muchas compañías se involucraron en el desarrollo de modelos numéricos que mejoraran a las soluciones ya existentes, que consistían en gran parte, de soluciones analíticas, como eran el método de balance de materia o simulador de cero dimensiones y el método de Buckley-Leverett o modelo de una dimensión.

Por los años 50's, los esfuerzos encaminados al desarrollo de soluciones numéricas de las ecuaciones de flujo comenzaron a dar frutos. El término "Simulación" se volvió común, refiriéndose con él a métodos de predicción desarrollados en programas de cómputo relativamente sofisticados. Dichos programas representaban un mayor adelanto debido a que daban solución a un conjunto de ecuaciones expresadas en diferencias finitas, que describían el flujo multifásico a través de un medio poroso heterogéneo, en dos o tres dimensiones. Este adelanto fue posible gracias a la evolución tan rápida que tuvieron las computadoras y el desarrollo de métodos numéricos capaces de resolver grandes sistemas de ecuaciones.

Durante los años 60's, los esfuerzos de la simulación fueron encaminados en gran medida a problemas en dos fases (gas y agua) y, en tres fases, así como modelos de aceite negro. La simulación de métodos de recuperación se limitaba esencialmente a problemas de producción primaria y de recuperación secundaria. Con esto fue posible el desarrollo de un modelo de simulación único, capaz de aplicarse a la mayoría de los problemas que se tenían de yacimientos.

Este concepto de un modelo general siempre ha sido atractivo, debido a que significa una reducción en el costo de su preparación, de uso, y potencialmente, en el costo del desarrollo del modelo y de su mantenimiento. En los 60's el tamaño máximo de la malla que se podía simular no rebasaba las 200 celdas

Sin embargo, durante los años 70's el panorama cambió de forma radical. El aspecto económico motivó a que se buscara la manera de obtener la mayor recuperación, llevándose a cabo proyectos de pruebas de campo encaminadas al estudio de procesos de recuperación mejorada. Esto condujo a la simulación de nuevos procesos que iban más allá de la producción primaria y de la recuperación secundaria, tales como la inyección de fluidos miscibles, la inyección de productos químicos, la inyección de vapor y la combustión in-situ.

Con esto, al relativamente cómodo manejo de dos componentes de hidrocarburos (gas y aceite) en flujo no miscible, había que agregarle entonces la influencia de la temperatura, la absorción y degradación química, la cinemática de las reacciones, los efectos de la reducción de la tensión interfacial y los efectos del complejo comportamiento del equilibrio entre fases.

La proliferación que tuvieron estos métodos de recuperación en los años 70's motivó la orientación del concepto de modelo único o general hacia modelos particulares desarrollados exclusivamente para representar cada uno de estos procesos de recuperación. Las investigaciones realizadas dieron como resultado un avance significativo en la formulación de modelos de simulación y de métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones.

Estos avances permitieron simular procesos de recuperación mucho más complejos y/o reducir el costo de tiempo de cómputo gracias al incremento en la estabilidad de las formulaciones y la eficiencia de los métodos numéricos. En los 70's se alcanzaron las 2000 celdas en una malla de simulación.

Durante los años 80's, los desarrollos permitieron modelar yacimientos naturalmente fracturados y pozos horizontales. Se comenzó a hacer uso de geoestadística para describir las heterogeneidades en el yacimiento logrando con esto una descripción mucho más real. También se comenzó a hacer uso de interfaces gráficas y la integración de los simuladores con otros programas. Para 1983, el número de celdas que se podían utilizar en una malla llegó a 33,000.

Durante los años 90's los esfuerzos fueron encaminados a facilitar el uso de los simuladores, en mejorar las interfaces gráficas y desarrollar paquetes que generaran la malla automáticamente. Se hizo común el uso de modelos geológicos generados por medio de geoestadística, el uso extendido del escalamiento y la integración de los simuladores con otros programas, tales como programas de diseño de instalaciones y programas de administración y evaluación de proyectos. La flexibilidad de las mallas se incrementó gracias al refinamiento local y el uso de mallas de geometrías más complejas. Para 1997, el número de celdas que se podían utilizar en una malla de simulación había crecido a 500,000.

En la actualidad, las computadoras se han vuelto más rápidas, más baratas y cada vez con más memoria, debido a esto, ahora es posible hacer simulaciones con mallas de millones de celdas, donde se emplean técnicas de descomposición de dominio para resolver grandes sistemas de ecuaciones y se utilizan mallas no convencionales. Además es posible modelar complejos procesos de recuperación en los que se involucran numerosos tipos de líquidos y gases, mediante modelos composicionales.

Importantes avances en la descripción termodinámica de los fluidos, en el flujo en medios porosos y en métodos de resolución de ecuaciones lineales cada vez más eficientes, dan la posibilidad de resolver problemas muy complejos. Por si fuera poco, los modelos geológicos son cada vez más reales y los nuevos simuladores de yacimientos pueden interactuar con simuladores de flujo en el pozo y en las instalaciones superficiales, haciendo posible con esto optimizar el sistema entero.

I.4 Filosofía y Metodología del Simulador Numérico

En la SNY, el flujo de fluidos es representado por la Ley de Darcy, mientras que la ecuación de continuidad se encarga de la conservación de masa. Las propiedades volumétricas y termodinámicas son modeladas a través de un análisis pVT y/o ecuaciones de estado. Las condiciones iniciales deberán ser definidas, ej. presión inicial, saturaciones y en su caso las composiciones. Asimismo, las condiciones de frontera deberán ser acopladas al dominio del yacimiento, para ser consideradas y así ser simuladas lo más cercanamente posible.

De esta manera, la incorporación de la ecuación de Darcy en la ecuación de continuidad y tomando en cuenta la ecuación de estado de los fluidos, da lugar a una ecuación que describe completamente el comportamiento del yacimiento. Esta ecuación es conocida como la *ecuación de Difusividad*.

Como se discutirá posteriormente, la ecuación de Difusividad es una ecuación en derivadas parciales, de segundo orden. En su forma más general, es altamente *no-lineal* y por lo tanto para su solución se debe recurrir a métodos numéricos. Lo anterior es la razón del nombre Modelo o Simulador *Numérico*. La solución numérica de la ecuación de Difusividad comprende la *discretización* en espacio del dominio (ej. dividir el volumen del yacimiento en celdas contiguas en las cuales se realizará un balance de materia implícitamente). El tiempo es también discretizado en una serie de pasos de tiempo (el proceso es iterativo), en donde se determinará la solución.

1.5 Balance de Materia vs. Simulación Numérica de Yacimientos

Básicamente, el Balance de Materia y la Simulación Numérica de Yacimientos son parte de un mismo concepto; la diferencia principal es el considerar al yacimiento como un solo bloque o como un sistema de bloques interconectados, respectivamente. Sin embargo, los principios usados en el balance de materia son igualmente aplicables a la Simulación Numérica de Yacimientos.

El método de Balance de Materia es relativamente simple y fácil de usar, además de que requiere de poca información para realizar los cálculos. En el método de balance de materia es claramente evidente cómo es que los mecanismos de empuje, como son la expansión de la roca y líquidos, el empuje por gas liberado, por el gas del casquete, por agua y por la segregación gravitacional, etc. están actuando.

El papel que desempeñan cada uno de estos mecanismos puede distinguirse con mucha facilidad, además de las interacciones que se dan entre estos. Este método tiene el inconveniente de no poder incorporar ciertas condiciones como son: el número de pozos, el arreglo de estos, su espaciamiento, geología del yacimiento, etc.

La Simulación Numérica de Yacimientos al aplicarse a los mismos problemas, nos proporciona resultados más aproximados, si se dispone de por ejemplo, las presiones y saturaciones en función del espacio y del tiempo. Sin embargo es más difícil reconocer la influencia que tiene cada mecanismo de empuje, a menos que se hagan varias simulaciones de las diferentes situaciones.

Por ejemplo, si se simula un yacimiento que produce por una combinación de empuje de agua y gas liberado se puede emplear una malla no uniforme para representar adecuadamente al acuífero por medio de bloques grandes, mientras que se usan bloques más pequeños para representar el yacimiento. De esta manera se puede incorporar el acuífero en nuestro simulador. Sin embargo, los resultados de este modelo más aproximado están más limitados en el sentido de poder apreciar la influencia que tiene cada mecanismo, a menos que se hagan muchas simulaciones variando estos dos parámetros.

Es evidente que sólo la Simulación Numérica de Yacimientos puede proporcionar información detallada del efecto de esas condiciones y debido a esto, aparentemente es una herramienta de mucha más utilidad que el balance de materia, pero esta aproximación es a menudo cara, difícil de resolver, consume mucho tiempo, requiere de un conocimiento detallado del yacimiento y además las respuestas que se obtengan a partir de él serán más difíciles de validar.

Como conclusión puede decirse que la Simulación Numérica de Yacimientos es una herramienta de mucha utilidad en el análisis y las posibles predicciones que proporciona. Esto no significa que el método de balance de materia sea obsoleto. Los resultados de un balance de materia pueden ser integrados en un estudio de simulación ayudando a hacer una mejor inicialización de las variables, un mejor y más rápido ajuste de historia y, consecuentemente un mucho más confiable pronóstico de producción. Por todo esto, ambos métodos continuarán siendo parte vital de la ingeniería de yacimientos.

1.6 Utilidad de la Simulación Numérica de Yacimientos

Cuando un modelo matemático de simulación ha sido probado y ajustado adecuadamente, representa una herramienta de mucha utilidad con la que cuenta el ingeniero. Mientras que físicamente el yacimiento puede producirse una sola vez, lo más probable es que no sea en la forma más adecuada, dado que un error cometido en el proceso afectará cualquier cambio subsecuente, por el contrario, un modelo de simulación, permite "producir" un yacimiento varias veces y en muy diferentes maneras, con lo cual se pueden analizar varias alternativas y seleccionar alguna de ellas. Observar el comportamiento del modelo bajo diferentes condiciones de operación, ayuda a seleccionar un conjunto de condiciones de producción óptimas para el yacimiento. Siendo más específicos, con la ayuda de la simulación, se puede hacer lo siguiente:

- Conocer el volumen original de aceite.
- Tener una clara idea del movimiento de los fluidos dentro del yacimiento.
- Determinar el comportamiento de un campo de aceite bajo diversos mecanismos de desplazamiento, como puede ser: la inyección de agua, la inyección de gas o el uso de algún método de recuperación mejorada.
- Determinar la conveniencia de inyectar agua en un yacimiento de aceite por los flancos en lugar de utilizar un patrón determinado de pozos inyectores o viceversa.
- Optimizar los sistemas de recolección.
- Determinar los efectos de la localización de los pozos y su espaciamento. De esta manera desarrollar un campo con base en una información limitada, pudiéndose determinar donde perforar nuevos pozos.
- Estimar los efectos que tiene el gasto de producción sobre la recuperación.
- Calcular la cantidad de gas que se obtiene de un número determinado de pozos localizados en puntos específicos.
- Definir valores de parámetros en el yacimiento, para llevar a cabo estudios económicos.
- Obtener la sensibilidad de los resultados o variaciones en las propiedades petrofísicas del yacimiento o las propiedades pVT de sus fluidos cuando no son bien conocidas.
- Realizar estudios individuales de pozos.
- Conocer la cantidad de gas almacenado.
- Hacer un programa de producción.

I.7 Beneficios de la Simulación Numérica de Yacimientos

Los beneficios que se obtienen al usar la Simulación Numérica de Yacimientos, para planear la explotación de un yacimiento de hidrocarburos son básicamente dos: económicos y técnicos (**Chrichlow, H.B., 1977**).

Beneficio Económicos.

El principal beneficio del uso de la Simulación Numérica de Yacimientos es el económico, que se obtiene con el uso de la administración de yacimientos disminuyendo, el flujo negativo de efectivo y por supuesto incrementando la recuperación final de hidrocarburos. La administración de yacimientos es el método que busca maximizar el valor de un activo petrolero.

La Simulación Numérica de Yacimientos es una herramienta importante para alcanzar este objetivo. Con la Simulación Numérica de yacimientos es posible obtener pronósticos; es decir, es posible simular el comportamiento del yacimiento bajo un gran número de esquemas de producción. Al hacer esto, es posible seleccionar la mejor alternativa de producción, considerando la mayor ganancia para el activo.

Beneficios Técnicos.

Aunque cualquier beneficio es traducido automáticamente a beneficios económicos, es importante mencionar las ventajas técnicas que se obtienen al usar la Simulación Numérica de Yacimientos. La labor del Ingeniero de diseño se aligera y se sustenta considerablemente. El monitoreo se facilita porque se anticipa el comportamiento del yacimiento. A medida que se obtiene información nueva, se puede actualizar el modelo de simulación para modelar el yacimiento lo más realmente posible. La comunicación entre el personal que conforma el equipo de trabajo se mejora notablemente.

1.8 Clasificación de los Simuladores Numéricos.

La siguiente es una clasificación general de los simuladores, incluyendo el número de fases móviles en el yacimiento (Chilingarian, 1992):

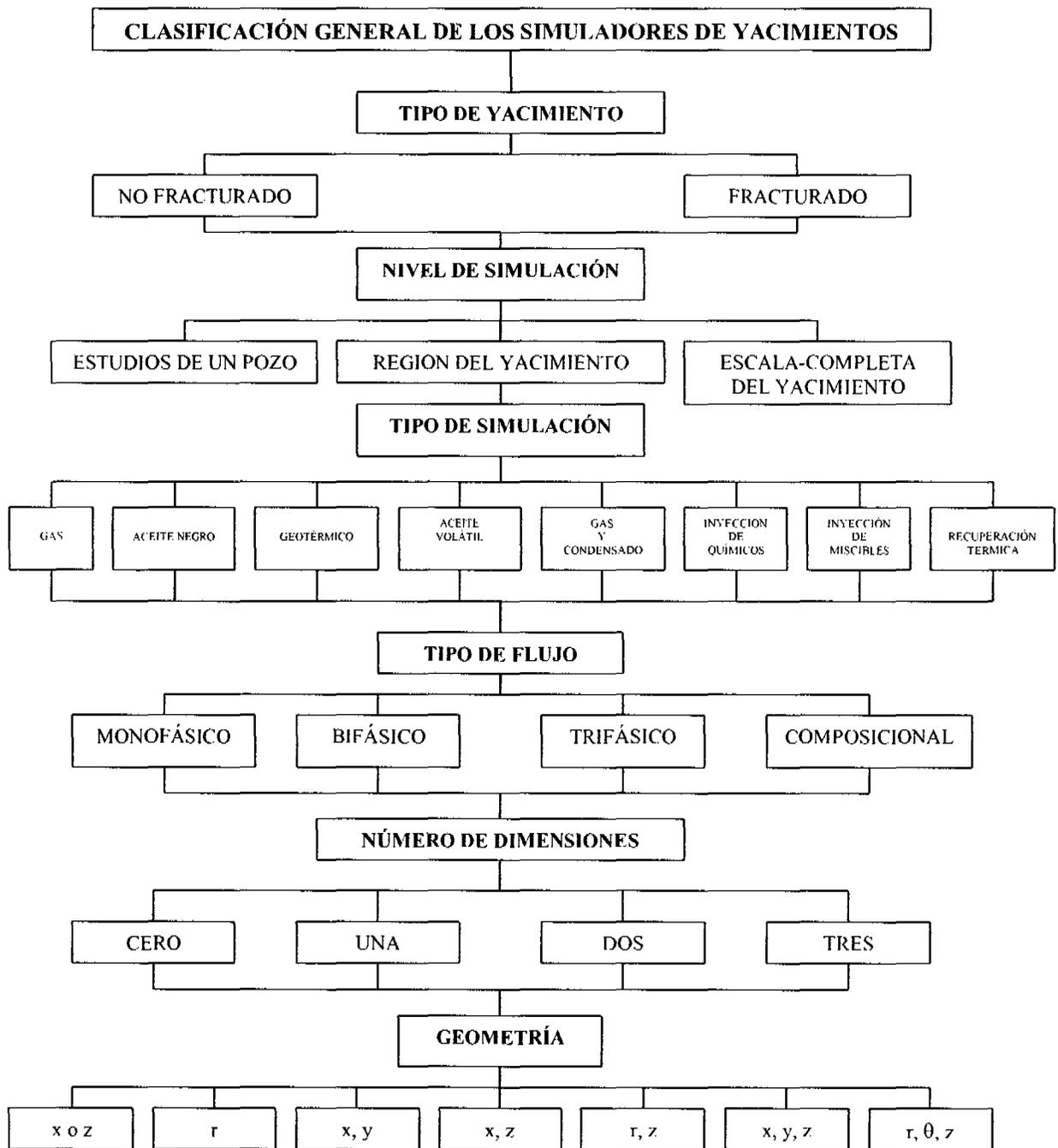


Fig. 1.2 Clasificación General de los Simuladores de Yacimientos

En la Fig. 1.2 se presenta una clasificación general de simuladores y fue construida de manera que en ella aparezcan todos los posibles trabajos de simulación que se puedan efectuar.

Con el objeto de explicar las características de los diferentes tipos de modelos que existen y los trabajos de simulación que pueden realizarse con ellos, se definen en la Fig. 1.2 los siguientes seis "parámetros de selección":

- Tipo de yacimiento.
- Nivel de simulación.
- Tipo de simulación.
- Tipo de flujo en el yacimiento.
- Número de dimensiones.
- Geometría.

Como podrá observarse, cada uno de estos parámetros tienen diferentes alternativas a utilizar; así por ejemplo, las opciones a emplear para un número de dimensiones son: cero, una, dos o tres dimensiones; en el tipo de yacimiento se tienen dos opciones para seleccionar: no fracturado y fracturados; etc.

Hay que resaltar que el grado de complejidad de las alternativas que aparecen en la Fig. 1.2 para cada parámetro de selección va de izquierda a derecha. Así por ejemplo, para tipo de yacimiento es más difícil realizar un estudio de simulación para uno fracturado que para uno no fracturado, para tipo de flujo en el yacimiento lo más complejo es un modelo composicional etc.

A continuación se explican de manera más detallada los tipos de simuladores que existen y en qué caso se utilizan, al mismo tiempo que se va haciendo referencia a los parámetros de selección de la Fig. 1.2.

I.8.1 Tipo de Yacimiento

En forma general, dependiendo de características físicas producto de la mecánica de las rocas de los yacimientos, estos pueden dividirse en dos grandes grupos: yacimientos no fracturados y yacimientos fracturados, siendo los estudios de simulación en estos últimos, los que presentan mayor grado de dificultad, debido a que las fracturas representan verdaderos canales de flujo que modifican el comportamiento de los fluidos a través del medio poroso.

I.8.2 Nivel de Simulación

Los estudios de simulación pueden realizarse a los siguientes niveles:

- Estudios de un pozo.
- Región del yacimiento.
- Escala completa del yacimiento

Según se comentó antes con relación a la Fig. 1.2, los estudios de simulación en pozos individuales serían más sencillos que los estudios de simulación en un determinado sector del yacimiento y más aun que los realizados a lo largo de todo el yacimiento; sin embargo, se debe comentar que existen estudios de simulación para un solo pozo con un grado de dificultad muy elevado. Más adelante se verá la finalidad que se persigue al utilizar cada uno de estos niveles de simulación.

I.8.3 Tipo de Simulación

A partir de aquí se entra a lo que es propiamente dicho, la selección del modelo. Antes se ha determinado ya el nivel de simulación y el tipo de yacimiento en el cual se efectuará ésta. Ahora la pregunta es: ¿qué es lo que se desea simular?

Si se analiza la Fig. 1.2, se observará que los diferentes tipos de simuladores pueden dividirse en dos grupos:

1. Los que se definen según el tipo de hidrocarburos que contiene el yacimiento.

- Simuladores de gas.
- Simuladores de aceite negro.
- Simuladores geotérmicos.
- Simuladores de aceite volátil.
- Simuladores de gas y condensado.

2. Los que se utilizan en procesos de recuperación mejorada.

- Simuladores de inyección de químicos.
- Simuladores de inyección de miscibles.
- Simuladores de recuperación térmica.

Una vez que se ha determinado qué es lo que se desea simular, es posible hacer la selección del modelo que sea capaz de realizar el estudio.

I.8.3.1 Simulador de gas

Como su nombre lo indica, este tipo de simuladores se utiliza para llevar a cabo las predicciones del comportamiento de un yacimiento de gas. Sin lugar a duda, los estudios para este tipo de yacimientos son los más sencillos, si se considera la presencia de una sola fase (gas). Los parámetros que pueden definirse con este tipo de simulador son entre otros:

- Volumen de gas inicial.
- Gasto de producción.
- Distribución de presiones.

I.8.3.2 Simulador de aceite negro

Este modelo es el más simple que puede utilizarse para estudios de producción primaria o recuperación secundaria por medio de inyección de agua o gas. Los modelos de este tipo se basan en la suposición de que los fluidos del yacimiento pueden representarse de sólo tres pseudocomponentes (aceite, gas y agua). Esta suposición funciona bien, siempre y cuando el sistema durante el proceso de recuperación, quede lejos del punto crítico y de la región de condensación retrograda y además, si los fluidos que se inyectan (si es el caso), consisten de los mismos componentes que los fluidos que se encuentren en el yacimiento.

En este modelo se considera la transferencia de masa entre la fase de gas y la de aceite. Los simuladores de aceite negro pueden ser usados para modelar flujo inmiscible, bajo condiciones tales que las propiedades del fluido puedan ser expresadas en función sólo de la presión o la presión y la RGA

Los modelos de aceite negro frecuentemente se utilizan para estimar los siguientes efectos durante la recuperación de aceite:

- Espaciamiento y arreglo de pozos.
- Intervalos disparados.
- Conificación del gas y/o el agua como función del gasto de producción
- Gasto de producción.
- Mecanismo de entrada de agua mediante inyección de la misma y estimar la conveniencia de inyectar por los flancos del yacimiento o inyectar con un arreglo de pozos determinado.

I.8.3.3 Simulador geotérmico

Existen yacimientos cuya energía calorífica se emplea para la generación de energía eléctrica. Aunque esto no tiene al parecer ninguna conexión con la industria petrolera, un modelo que se utilice en este tipo de estudios no puede quedar al margen de una clasificación general de simuladores, de ahí la razón por lo que se mencionan.

I.8.3.4 Simulador de recuperación química

En los años 70's se desarrollaron procesos para recuperar una mayor cantidad de aceite de los yacimientos, lo cual originó la necesidad de contar con simuladores capaces de reproducir el comportamiento de los yacimientos, cuando se someten a este tipo de procesos; tal es el caso de los simuladores de recuperación química.

Dentro de este tipo de métodos de recuperación mejorada, se pueden citar como los más importantes los siguientes:

- Desplazamiento de aceite con soluciones miscelares y microemulsiones.
- Desplazamiento de aceite con polímeros.
- Desplazamiento de aceite con surfactantes.
- Desplazamiento de aceite por combinación de los tres anteriores.

Como es de suponerse, los modelos que se utilizan en este tipo de estudios, presentan un mayor grado de complejidad, pues deben de considerar tanto la interacción que existe entre los fluidos que se inyectan, como la que hay entre dichos fluidos y el medio poroso. Deben incluir una representación de la absorción y los efectos de reducción de la permeabilidad en el contacto entre las fases, tomar en cuenta que la permeabilidad relativa ya no es función sólo de las saturaciones, etc.

I.8.3.5 Simulador de recuperación con fluidos miscibles

Miscibilidad es el fenómeno físico que consiste en la mezcla de dos fluidos en todas proporciones, sin que se forme entre ellos una interfase. Existen diferentes fluidos que se inyectan al yacimiento bajo esta condición; y el estudio del efecto que produce cada uno de ellos en la recuperación del aceite se hace con la ayuda de un simulador. Entre los fluidos que se utilizan en este tipo de procesos se pueden citar:

- El gas natural húmedo.
- El bióxido de carbono (CO_2).
- El nitrógeno (N_2).

I.8.3.6 Simulador de recuperación térmica

Este tipo de modelos se utilizan para simular el comportamiento de los yacimientos sujetos a algún proceso de recuperación mejorada, por medio de métodos térmicos, cuyo objetivo principal es el de proporcionar energía calorífica al aceite con el fin de disminuir su viscosidad y de esta forma, facilitar su flujo hacia los pozos productores. Este tipo de métodos puede clasificarse en:

- Inyección de fluidos a alta temperatura, que pueden ser agua caliente o vapor.
- Combustión in-situ.
- Calentamiento electromagnético.

Los simuladores que se emplean para este tipo de procesos (y para todos los procesos de recuperación mejorada), son como ya se comentó, muy complejos, pues requieren el uso correlaciones que describan las propiedades pVT de los fluidos para n-componentes como función de la presión, de la temperatura y de la composición (se trata de modelos composicionales cuya explicación se da más adelante).

Los problemas de procesos térmicos a los cuales se dirige este tipo de simuladores, son entre otros:

- Recuperación esperada de aceite.
- Volumen de vapor necesario.
- Evaluar la posibilidad de incluir otros fluidos en la inyección de vapor.
- Determinar los efectos gravitacionales en el proceso de recuperación de aceite.
- Determinar parámetros críticos.

I.8.4 Tipo de Flujo

En el yacimiento pueden presentarse varios tipos de flujo, como función del número de fluidos en movimiento y éstos son:

- Flujo monofásico (un fluido).
- Flujo bifásico (dos fluidos).
- Flujo trifásico. (tres fluidos).

Si se observa la Fig. 1.2 en este punto existe otra posible alternativa a la que se le ha llamado "flujo composicional". De esta manera, según el tipo de flujo que se presenta en el yacimiento, puede existir una determinada clasificación de simuladores.

I.8.4.1 Simulador monofásico

El flujo monofásico está dado por el flujo de un solo fluido en particular, por ejemplo: en los acuíferos, el agua, en los yacimientos bajosaturados, aceite y en un yacimiento de gas volumétrico, el gas. Cualquier modelo que tome en cuenta esta consideración, será un simulador monofásico.

1.8.4.2 Simulador bifásico

Un simulador de este tipo es aquél que considera la existencia de flujo bifásico en el yacimiento. Este tipo de flujo se presenta cuando dos fluidos diferentes fluyen al mismo tiempo. Las combinaciones que se pueden tener son:

- Gas y aceite: En un yacimiento que produce por empuje de gas disuelto liberado o en un yacimiento de aceite con casquete de gas.
- Agua y aceite: En un yacimiento bajosaturado con entrada de agua, cuya presión se mantiene arriba de la presión de burbujeo.
- Agua y gas: En un yacimiento de gas con entrada de agua o cuya saturación de agua congénita es mayor que la saturación de agua crítica.

1.8.4.3 Simulador trifásico

El flujo trifásico se presenta cuando los tres fluidos que contiene un yacimiento (agua, aceite y gas) fluyen a la vez, por lo que todo aquel modelo que haga esta consideración de flujo es un simulador trifásico. Este caso se contempla en yacimientos que producen por empuje combinado, en los que la entrada de agua, el empuje de gas disuelto y/o el empuje de casquete original o secundario, tienen influencia en la producción.

1.8.4.4 Simulador composicional

Los modelos composicionales se utilizan para simular los procesos de recuperación para los cuales no sean válidas las suposiciones hechas en modelo de aceite negro. En esta categoría se incluyen los yacimientos de gas y condensado con condensación retrógrada y los yacimientos de aceite volátil, cuya composición varía continuamente al existir pequeños cambios de presión y/o temperatura. Este tipo de simuladores supone en cambio, que los fluidos contenidos en el yacimiento son una mezcla formada por n-componentes.

Las propiedades de las fases gas-aceite y su equilibrio, se calculan por medio de correlaciones que están en función de la presión y de la composición y más recientemente, por medio de ecuaciones de estado.

Algunos ejemplos de procesos en los cuales son utilizados estos modelos son los siguientes:

- Explotación de un yacimiento de aceite volátil o de gas y condensado donde la composición de la fase y sus propiedades varían en una manera significativa, con presiones por debajo de la presión de saturación.
- Inyección de gas (seco o enriquecido) a un yacimiento de aceite negro para lograr su miscibilidad, ya sea total o parcial.
- Inyección de CO₂ en un yacimiento de aceite

I.8.5 Número de Dimensiones

Al llegar a este punto de la Fig. 1.2, seguramente ya se ha determinado el nivel de simulación que se va a emplear, así como el proceso de recuperación que se piensa simular y como consecuencia, el tipo de flujo que se tendrá en el yacimiento. Esta información junto con las características físicas del yacimiento, permitirá hacer la selección del modelo a utilizar en cuanto al número de dimensiones.

A continuación se da la clasificación de los simuladores en función del número de dimensiones y una explicación de las características que presentan cada uno de ellos.

I.8.5.1 Simulador de cero dimensiones

A este modelo se le conoce también como modelo tanque o de balance de materia. Se dice que es un modelo de cero dimensiones debido a que las propiedades petrofísicas, las propiedades de los fluidos y los valores de presión no varían de un punto a otro, a lo largo de todo el yacimiento, Fig. 1.3

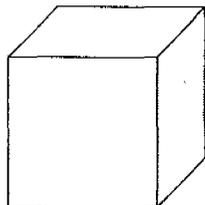


Fig. 1.3 Modelo de cero dimensiones

Se le llama también balance de materia debido a que al realizar los cálculos lo que se hace es precisamente esto, un balance entre los fluidos que entran y los fluidos que salen del yacimiento.

Supóngase un yacimiento al que se le inyecta por un extremo una determinada cantidad de agua y se obtiene una cantidad también de agua, gas o aceite (o una combinación de los tres) por el otro extremo, como se muestra en la Fig. 1.4

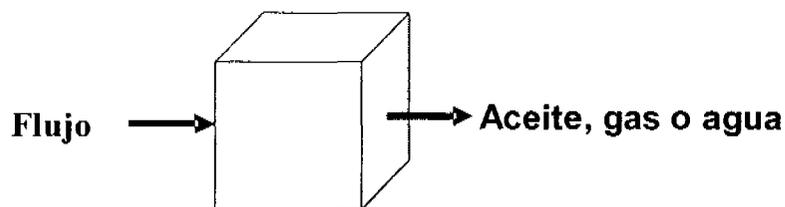


Fig. 1.4 Balance de materia

Al hacer el balance se tendrá la siguiente expresión:

$$\begin{array}{r} \text{Volumen de} \\ \text{fluidos en el} \\ \text{yacimiento antes} \\ \text{de la inyección} \end{array} + \begin{array}{r} \text{Volumen de fluido} \\ \text{inyectado} \end{array} - \begin{array}{r} \text{Volumen de} \\ \text{fluidos extraídos} \end{array} = \begin{array}{r} \text{Volumen de} \\ \text{fluidos que} \\ \text{permanecen en el} \\ \text{yacimiento} \end{array}$$

Este modelo de cero dimensiones es la base de todos los modelos existentes y tiene la particularidad de que en él no pueden colocarse pozos, como se verá más adelante; esto si es posible hacerse en los simuladores de más dimensiones.

El uso que generalmente se le da a este modelo es:

- Estimar el volumen original de aceite en el yacimiento.
- Calcular la entrada de agua.
- Calcular la presión del yacimiento.

Para el cálculo de cualquiera de los tres parámetros anteriores se requiere conocer los otros dos.

1.8.5.2 Simulador de una dimensión

Considérese ahora un yacimiento que varíe en litología y que de acuerdo a esta variación pueda dividirse en dos partes. En este caso el yacimiento como un todo no puede representarse mediante propiedades promedio; sin embargo, cada parte si es posible representarla. De esta manera el yacimiento consiste de celdas, Fig. 1.5.

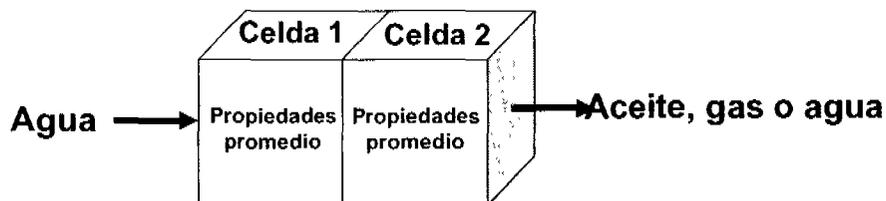


Fig. 1.5 Balance de materia para dos bloques

En este caso, la ecuación de balance de materia describe al comportamiento del fluido en cada celda como en el modelo de cero dimensiones; sin embargo, esto se complica debido a que al existir flujo de una celda a otra, no se sabe exactamente qué cantidad de fluido del volumen total que permanece en el yacimiento, corresponde a cada celda. Esta transferencia de fluido entre ambas celdas (transmisibilidad), se evalúa con la ecuación de Darcy. De esta manera, la ecuación de balance de materia junto con la ecuación de Darcy, describen el comportamiento de cada celda.

Este modelo ya no es de cero dimensiones como el anterior, debido a que las propiedades aunque son promedio para cada bloque, varían de una celda a otra, en cambio es un modelo de una dimensión, debido a que consiste de más de una celda en una dirección y de sólo una celda en las otras dos direcciones. El modelo en una dimensión puede ser horizontal, vertical, inclinado o radial, como se muestra en la Fig. 1.6. Este tipo de modelo fue desarrollado por **Buckley & Leverett (1942)** para dar una solución analítica al comportamiento de los yacimientos sujetos a recuperación secundaria.

En una simulación de yacimientos, dicho modelo se puede aplicar si se tiene un yacimiento en el que el flujo en una dirección es predominante; por ejemplo, en los casos de inyección de gas en la cima de un yacimiento, en la inyección o entrada natural de agua por el flanco de otro yacimiento.

El modelo de una dimensión en forma radial es útil para pruebas de formación y pruebas de incremento y decremento de presión, ya que los efectos que provoca en el flujo de fluidos la caída de presión en el pozo a lo largo de todo el yacimiento, no pueden simularse directamente con los otros modelos de una dimensión, debido a que la unidad más pequeña del yacimiento, una celda, es generalmente muy grande comparada con el volumen del yacimiento que es realmente afectado por las presiones en el pozo.

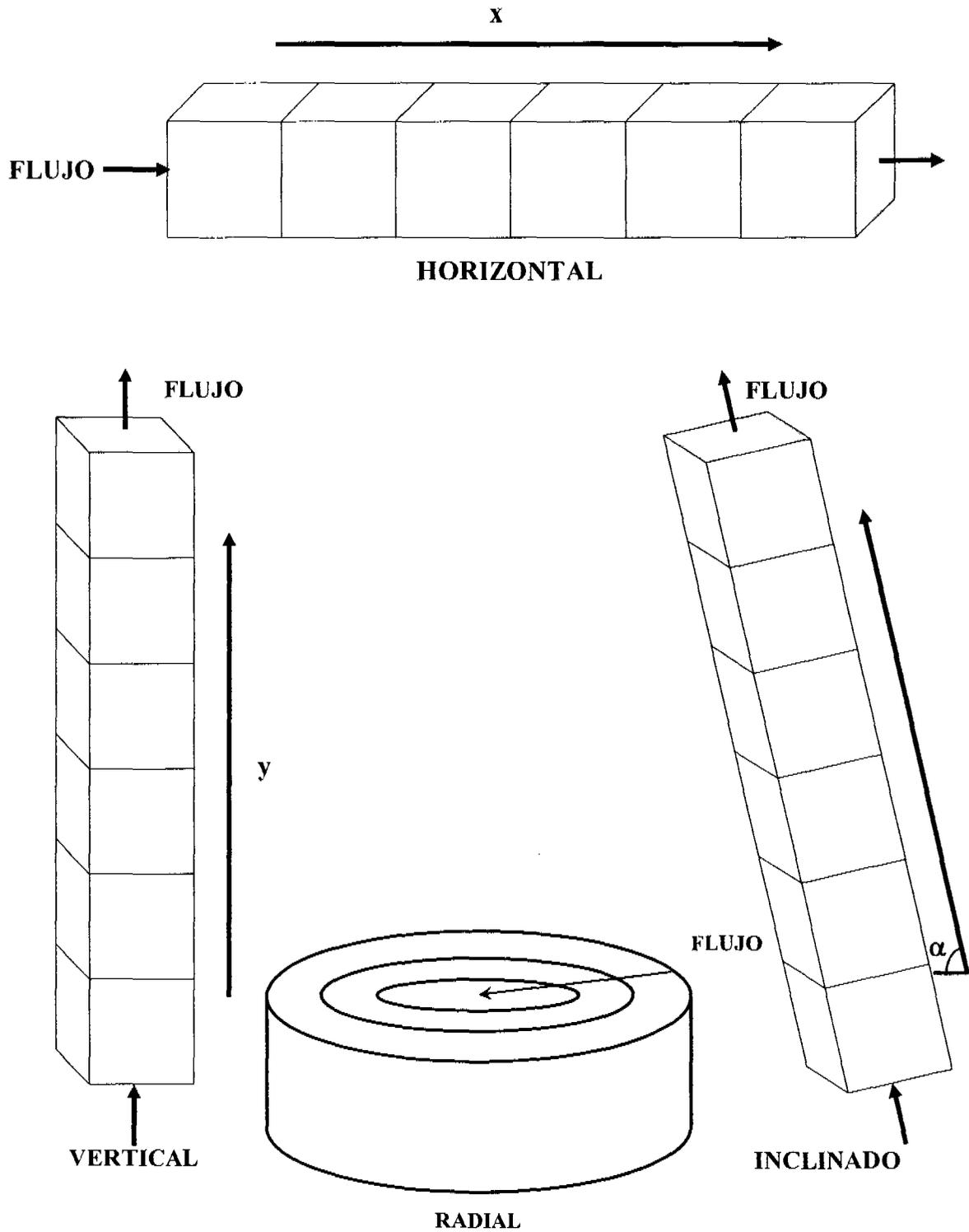


Fig. 1.6 Modelos de una dimensión

1.8.5.3 Simulador de dos dimensiones

El mismo análisis que se utilizó para explicar el modelo en una dimensión, puede extenderse para modelos en dos y tres dimensiones; esto es, la ecuación de balance de materia describe el comportamiento en cada celda y la ecuación de Darcy el flujo entre estas, con la única diferencia de que la interacción de flujo en las celdas será en dos o tres dimensiones. Así, el modelo de dos dimensiones consiste en una celda en dos dimensiones y de sólo una celda en la tercera dimensión. Como se verá, un simulador en dos dimensiones puede ser areal, de sección transversal o de forma radial.

1.8.5.3.1 Simulador areal

Sin lugar a dudas, dentro de la clasificación de simuladores en función del número de dimensiones, el modelo areal es el que se utiliza con mayor frecuencia. En él se tienen variaciones de las propiedades en dos direcciones (x,y), pudiéndose considerar además los efectos gravitacionales al asignar diferentes profundidades a las celdas del modelo, el cual puede ser representado por una malla como se puede observar en la Fig. 1.7a. Este tipo de simulador se aplica en yacimientos donde generalmente los espesores son pequeños con respecto a su área y no existe efecto muy marcado de estratificación. Algunas de las aplicaciones que se le dan son las siguientes:

- Simular los efectos de barrido al inyectar gas o agua.
- Determinar la localización de pozos en yacimientos donde se tengan variaciones de las propiedades de la roca y de esta manera, lograr la máxima recuperación.
- Determinar la entrada de agua

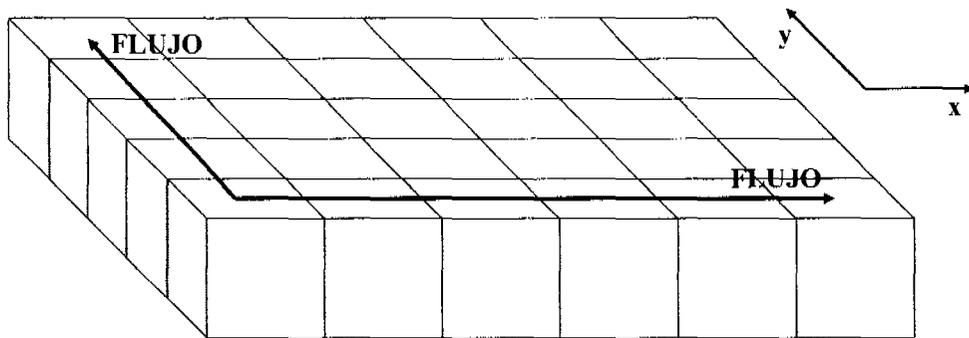


Fig. 1.7a Simulador areal

1.8.5.3.2 Simulador de sección transversal

Otro tipo de modelo de dos dimensiones se tiene en la representación de secciones transversales, en donde las propiedades de las capas varían, Fig. 1.7b. La utilidad de este simulador radica en la versatilidad que tiene para describir la distribución vertical de saturaciones en el frente (gas y/o agua), además de ser el instrumento para la obtención de las curvas de permeabilidad relativa. Con este tipo de modelo se puede simular la conificación de agua o de gas y los efectos gravitacionales.

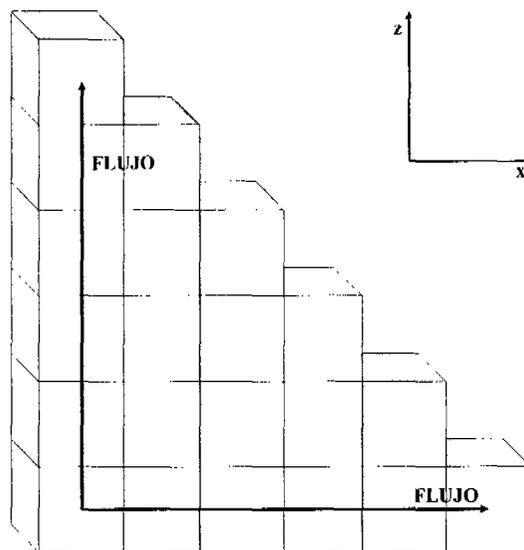


Fig. 1.7b Simulador de sección transversal

1.8.5.3 Simulador de dos dimensiones en forma radial

Al igual que el simulador de sección transversal, este modelo es útil para simular la conificación de agua o de gas. Además tiene la ventaja de poder analizar con mayor detalle los cambios bruscos de presión y saturación que ocurren en la cercanía del pozo. En la Fig. 1.7c se representa esquemáticamente este tipo de modelo.

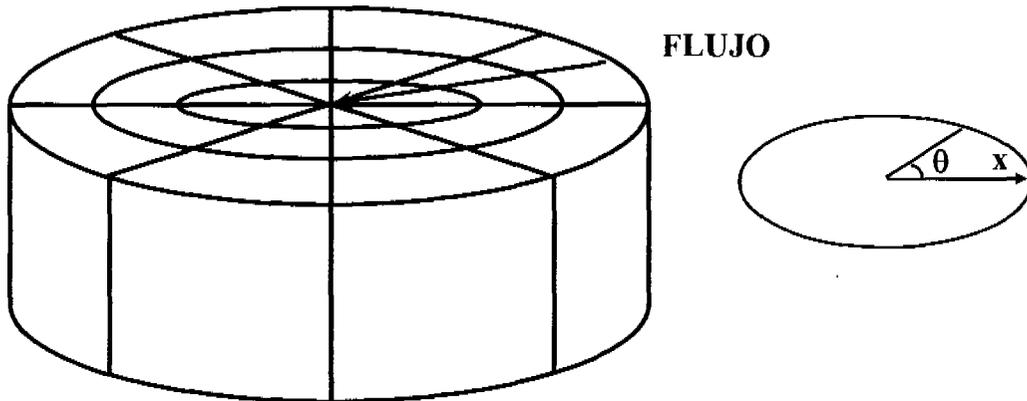


Fig. 1.7c Simulador de dos dimensiones en forma radial

1.8.5.4 Modelo de tres dimensiones

Este tipo de simulador, dentro de la clasificación de modelos por el número de dimensiones, es el más complejo ya que cuenta con la mayoría de las fuerzas que se presentan en el yacimiento; esto es, considera además de los efectos de barrido areal los efectos de barrido vertical. Su uso va para todos aquellos yacimientos que presentan una geología muy compleja, que puede dar como resultado el movimiento de fluidos a través del medio poroso en varias direcciones. En la Fig. 1.8a, se muestra al modelo de tres dimensiones en coordenadas cartesianas (x,y,z) y en la Fig. 1.8b al modelo de tres dimensiones en coordenadas cilíndricas (r,θ,z) o modelo radial de tres dimensiones.

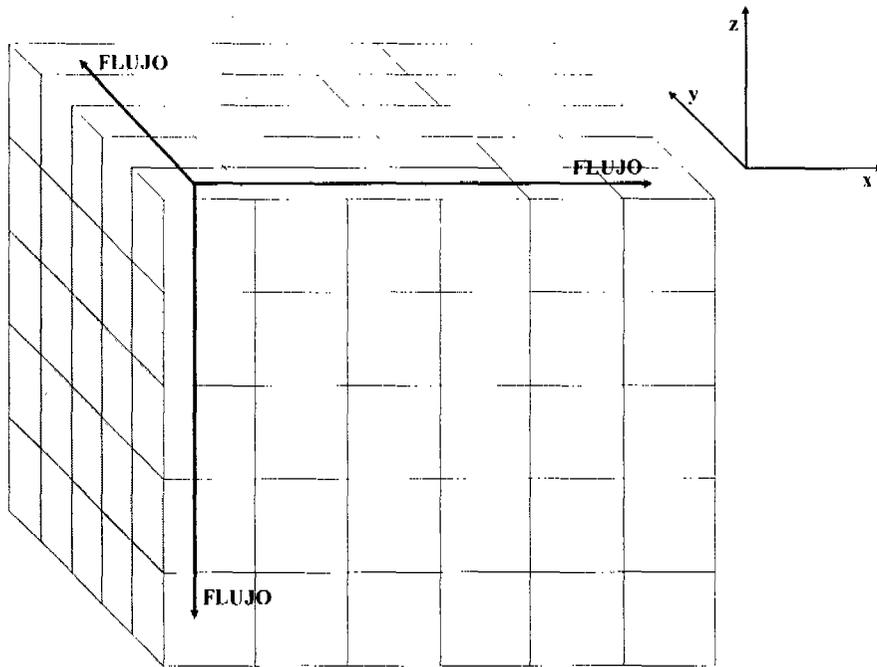


Fig. 1.8a Simulador de tres dimensiones en forma cartesiana

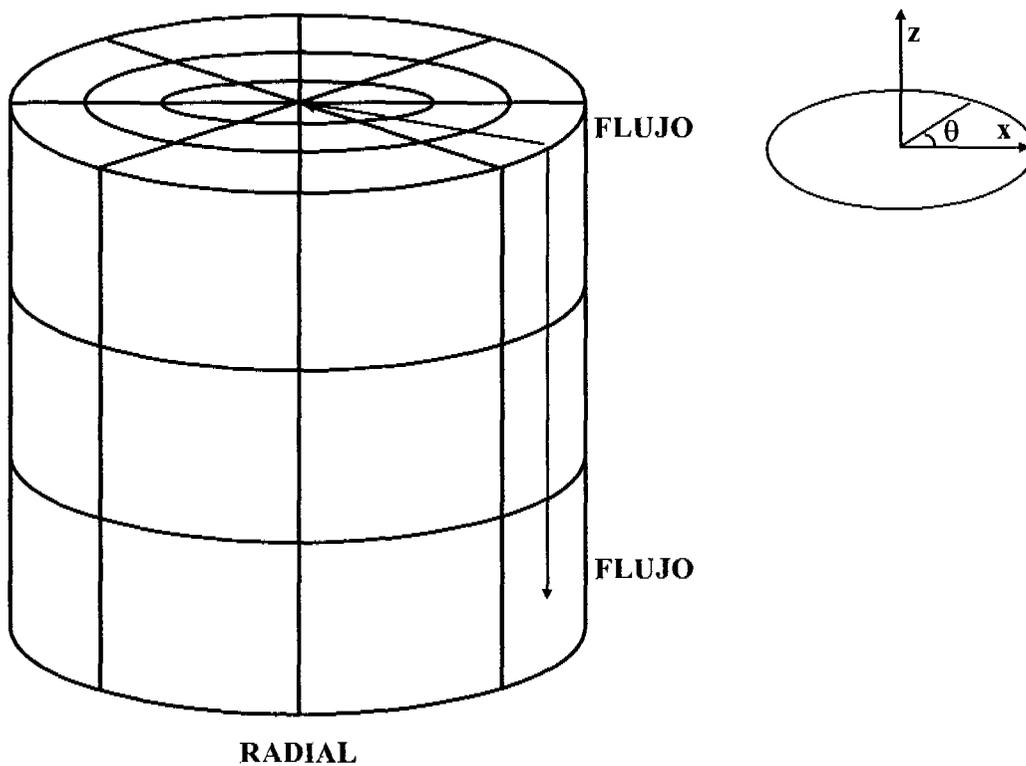


Fig. 1.8b Simulador de tres dimensiones en forma radial

I.8.6 Geometría

Con esto se llega al último "parámetro de clasificación" de la Fig. 1.2; a decir verdad, no existe una clasificación de los simuladores en función de la geometría que presentan, como parece indicarse en la Fig. 1.2, esto es, no puede decirse que haya un modelo (x) o un modelo (r,θ,z) , sino más bien la geometría es una consecuencia del número de dimensiones que tenga el simulador. De esta manera, es claro que un modelo que tenga dos dimensiones, sólo podrá tener las siguientes geometrías:

- (x,y) si es areal.
- (x,z) si es de sección transversal.
- (r,z) si se trata de un simulador radial.

De la misma manera, si al hablar de nivel de simulación se hacen referencia al estudio de pozos individuales, es lógico pensar que las únicas geometrías de las que se ven en la Fig. 1.2 que puede utilizar el modelo son:

- (r) si es un simulador de una dimensión.
- (r,z) si es un modelo de dos dimensiones.
- (r,θ,z) si se trata de un simulador de tres dimensiones.

I.8.7 Uso de la Clasificación

Como se comentó al inicio, la Fig. 1.2 tiene el fin de presentar en ella todos los posibles trabajos de simulación que pueden existir.

Como ejemplo, supóngase que requiere simular un proceso de recuperación por inyección de polímeros en dos dimensiones (x,y) , en determinado sector de un yacimiento no fracturado.

Así pues, el problema anterior queda perfectamente definido en la Fig. 1.2; para ello, las alternativas a escoger en cada "parámetro de selección" son las siguientes:

- Tipo de yacimiento: no fracturado.
- Nivel de simulación: Sector del yacimiento.
- Simulador: De recuperación química (polímeros).
- Tipo de flujo en el yacimiento: Composicional.
- Número de dimensiones: dos dimensiones (x,y).
- Geometría: (x,y).

Cabe señalar que se puede dar el caso en el que una combinación determinada de "parámetros de selección" dé como resultado un problema para el cual no exista un simulador en el mercado, e incluso que no se haya reportado nada sobre él en la literatura; un ejemplo podría ser un modelo composicional para simular la inyección de vapor (recuperación térmica) en tres dimensiones (r,θ,z) en un solo pozo de un yacimiento fracturado. En el caso de plantearse un problema con tales características, habría la necesidad de desarrollar un modelo que sea capaz de proporcionar la solución requerida.

1.8.8 Clasificación Basada en la Manera en la que las Ecuaciones de Flujo son Discretizadas

Existen dos métodos principales de discretización de la EDP que gobierna el flujo de fluidos a través de un medio poroso: el método de diferencias finitas (MDF) y el método de elemento finito (MEF).

Debido a que la discretización es muy importante en la simulación numérica de yacimientos, se presenta una breve explicación.

El MDF está limitado en la geometría a un bloque en forma de paralelepípedo (Ortogonal o no-Ortogonal). El MEF permite gran flexibilidad, incluyendo formas de polígonos y prismas.

En el flujo en dos dimensiones (2D), es muy fácil diseñar mallas numéricas en zonas del yacimiento donde se requiere un conocimiento más detallado con MDF (Fig. 1.9a). Por otro lado, con el MEF, la *refinación* puede llegar a ser complicada y costosa (Fig. 1.9b).

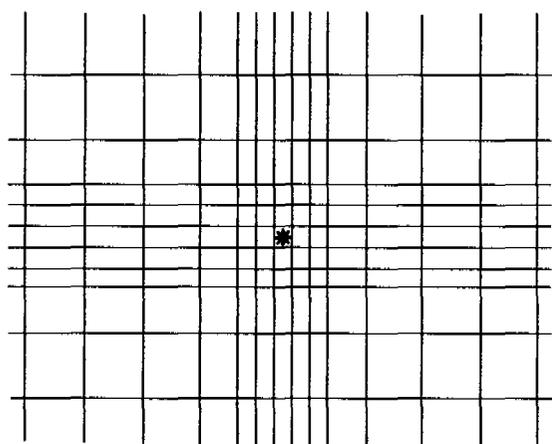


Fig. 1.9a Modelo de Diferencias Finitas

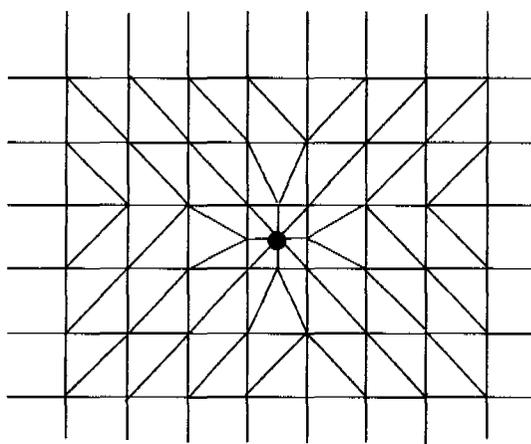


Fig. 1.9b Modelo de Volumen Finito

A pesar de las mayores ventajas que ofrece el MEF, éste tiene dificultades para manejar cambios bruscos en las incógnitas. Por esta razón, este método no ha sido de gran utilidad en la simulación numérica de yacimientos.

Se han desarrollado técnicas más especializadas para la refinación de la malla cerca de los pozos (asumiendo régimen permanente dentro de los bloques), haciendo posible el uso de MDF en una forma más efectiva.

1.8.9 Mallas no Convencionales

La malla de simulación es seleccionada por una o más de las siguientes razones:

- Geometría y tamaño del yacimiento, así como la información disponible para su descripción
- Tipo de proceso de recuperación a ser modelado
- Localización y tipo de pozos
- Aproximación numérica deseada
- Opciones de software disponibles
- Objetivos del estudio de simulación
- Capacidad del ingeniero o equipo de simulación
- Recursos computacionales disponibles, restricciones de tiempo o presupuesto del proyecto

En años anteriores el software disponible limitaba la elección del tipo malla usualmente a mallas cartesianas de nodos centrados o mallas cilíndricas. Los desarrollos de los últimos 15 años aumentaron las opciones disponibles en el uso de mallas.

Hoy en día los simuladores comerciales ofrecen una o más de las siguientes técnicas de mallado:

- Refinamiento local
- Mallas híbridas
- Mallas curvilíneas
- Mallas tipo Voronoi o PEBI
- Mallas de puntos de esquina
- Mallas Irregulares
- Mallas dinámicas
- Generación automática de la malla

Mientras que esta proliferación de opciones provee flexibilidad, hace al mismo tiempo más difícil la elección del tipo de malla para la persona que usa el simulador.

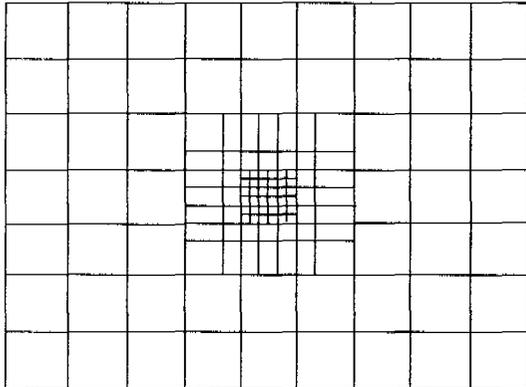


Fig. 1.10a Malla Cartesiana localmente refinada

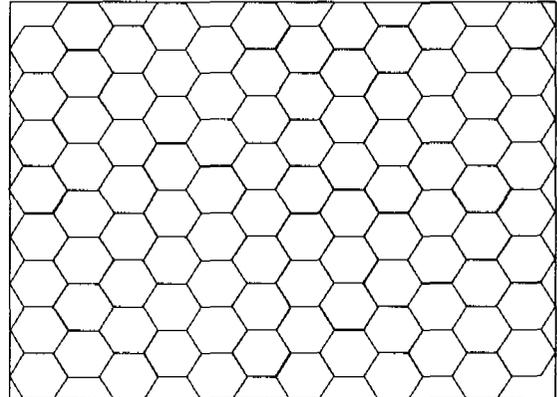


Fig. 1.10b Malla Hexagonal

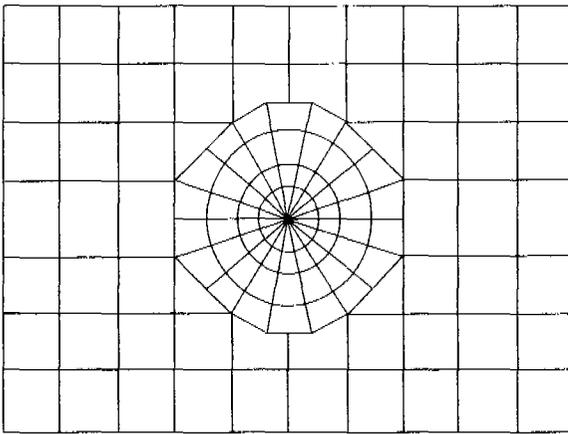


Fig. 1.10c Malla Cartesiana Híbrida

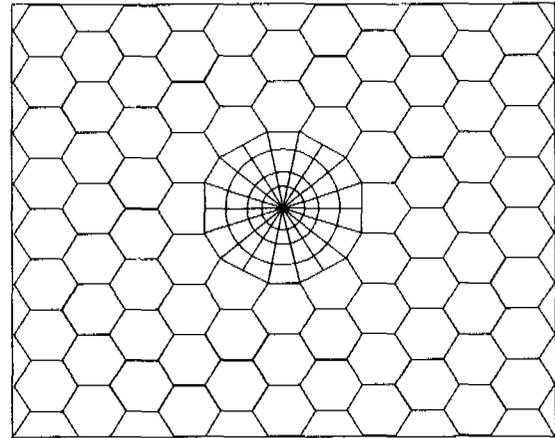


Fig. 1.10d Malla Hexagonal Híbrida

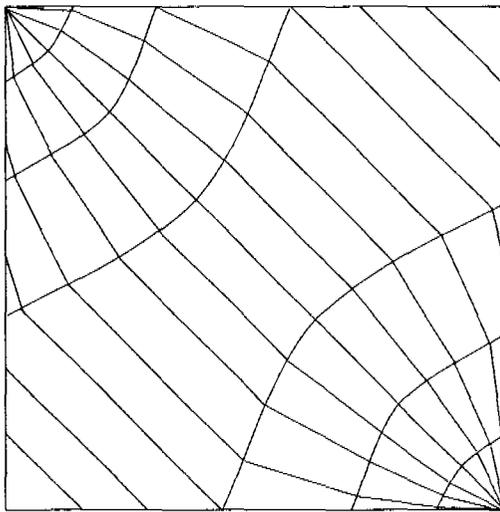


Fig. 1.10e Malla Curvilínea

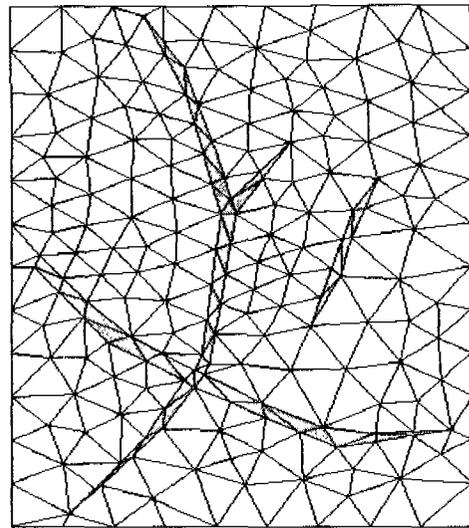


Fig. 1.10f Malla Triangular

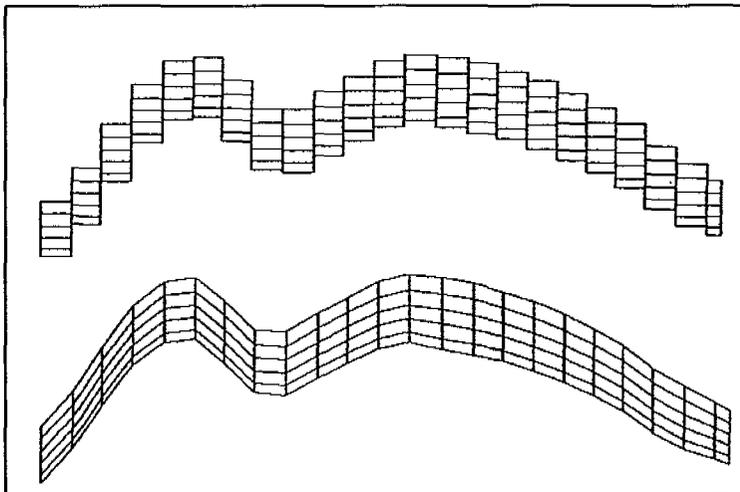


Fig. 1.10g Malla de Puntos de Esquina

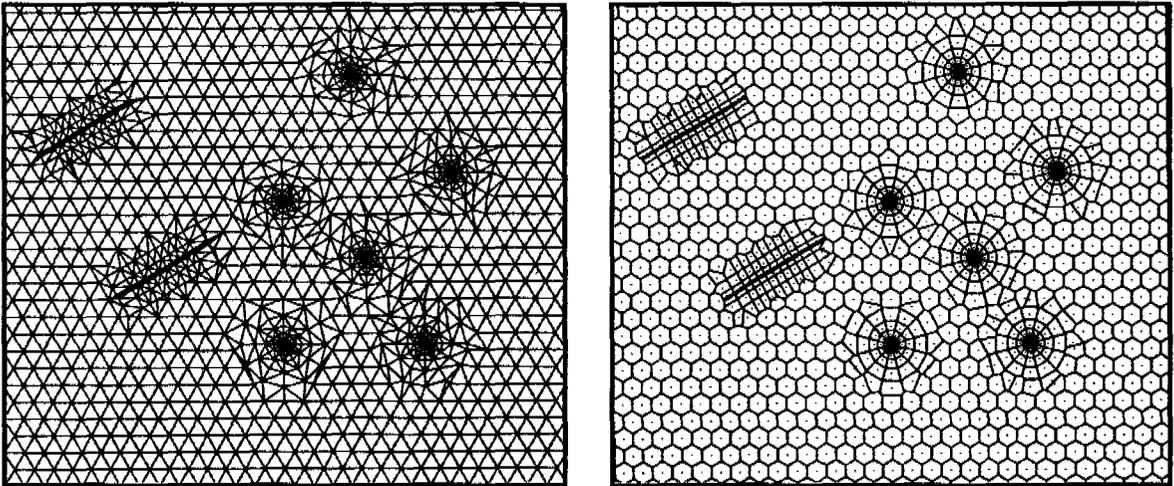


Fig. 1.10h Mallas Voronoi

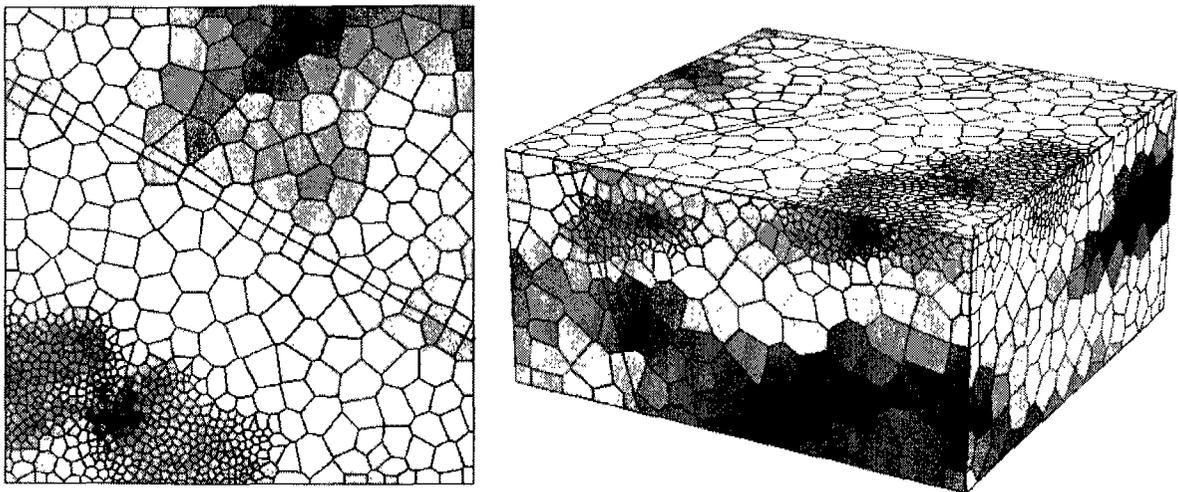


Fig. 1.10i Malla Irregular

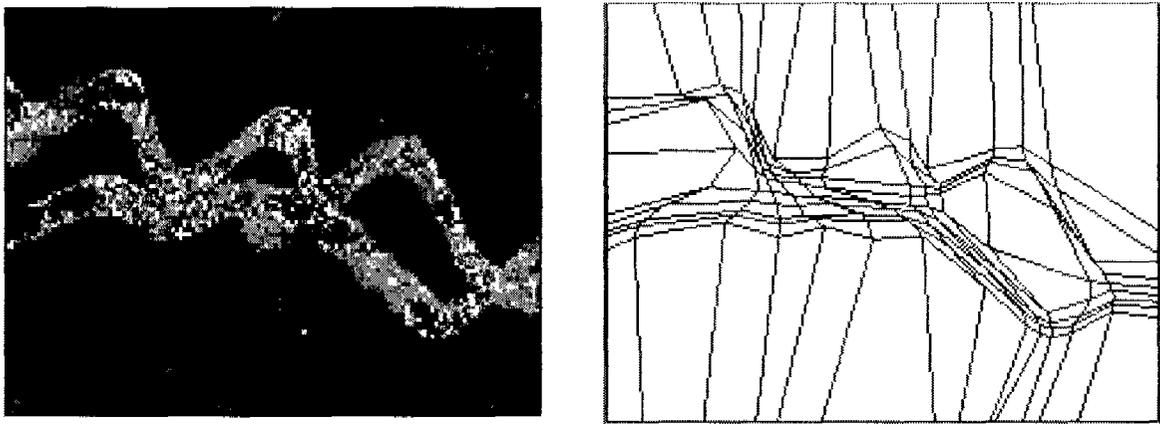


Fig. 1.10j Malla Generada Automáticamente

1.9 Escalamiento

Hoy en día, los modelos geológicos generados por geoestadística son muy grandes; estos llegan a ser de cientos de miles de celdas, inclusive hay casos en los que pueden llegar a tener millones de celdas. Estos modelos contienen los rasgos característicos del yacimiento, pero generalmente no pueden ser usados en su totalidad debido a los altos requerimientos computacionales que implica su gran tamaño.

El número de celdas es un parámetro importante en donde el nivel de detalle usualmente excede el nivel de detalles justificados. Como resultado de esto, el escalamiento de las propiedades de la roca, principalmente la permeabilidad, porosidad y permeabilidad relativa, para reducir el número de bloques de las mallas, es un paso clave en el estudio de la Simulación Numérica de Yacimientos.

El número de celdas en un modelo de simulación es generalmente mucho más pequeño que el número de celdas en la malla del modelo geológico. Con regularidad, el modelo geológico es escalado para obtener así un modelo de simulación de tamaño razonable. Cualquier escalamiento causa una pérdida de detalles e introduce errores.

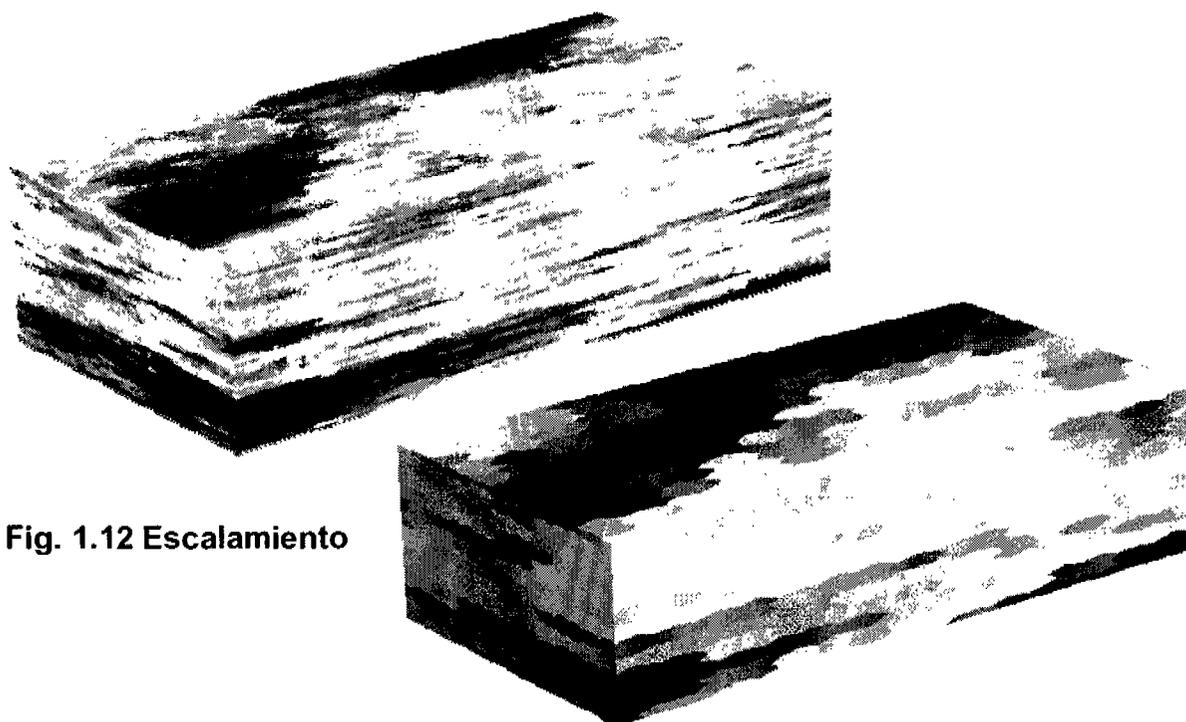


Fig. 1.12 Escalamiento

II FUNDAMENTOS DE INGENIERIA DE YACIMIENTOS

II.1 Potencial del Fluido.

En geociencias, el potencial de un fluido es definido como el trabajo requerido para transportar una unidad de masa de fluido de un estado a presión atmosférica y cero elevación (nivel de referencia absoluto) a un punto cualquiera. De esta manera el potencial de un fluido incompresible es el siguiente:

$$h_f = \frac{P}{\gamma} + D \quad (2.1)$$

donde D es positivo hacia arriba (ver Fig. 2.1) y γ es el peso específico del fluido o en términos de presión por distancia. Multiplicando la Ec. 2.1 por γ , se tiene lo siguiente:

$$\gamma h_f = p + \gamma D \quad (2.2)$$

El término (γh_f) tiene dimensiones de presión y es frecuentemente referido como potencial del fluido, Φ , es decir:

$$\Phi = p + \gamma D \quad (2.3)$$

En geociencias, generalmente se usa otro nivel de referencia, además del *nivel de referencia absoluto*. Este nuevo nivel *arbitrario* puede ser el nivel del mar, la cima del yacimiento, el nivel de la mesa rotatoria, etc.

En el flujo de fluidos en medios porosos los gastos dependen de gradientes de potencial en lugar de gradientes absolutos; por lo tanto el nivel de referencia seleccionado puede ser arbitrario. Para demostrar lo anterior veamos la siguiente Fig. 2.1:

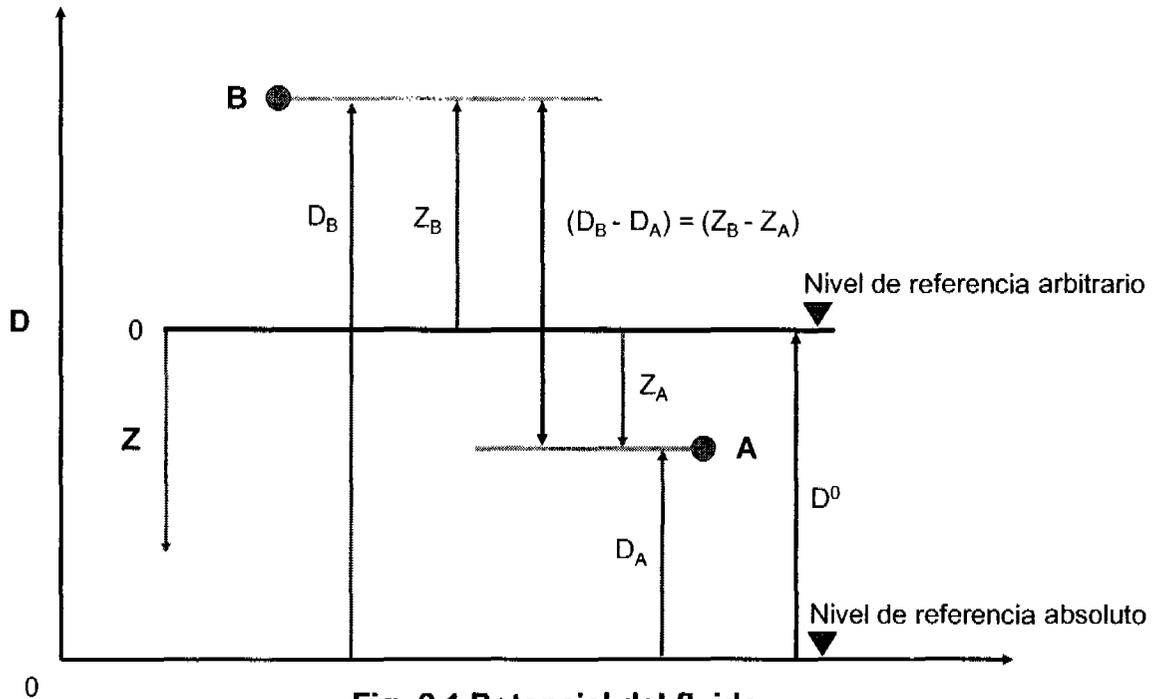


Fig. 2.1 Potencial del fluido

El cálculo del potencial entre el punto A y el punto B es el siguiente:

Caso 1. Nivel de referencia absoluto.

El potencial para el punto A es:

$$\Phi_A = p_A + \gamma D_A \tag{2.4}$$

El potencial para el punto B es:

$$\Phi_B = p_B + \gamma D_B \tag{2.5}$$

Entonces:

$$\Phi_A - \Phi_B = (p_A - p_B) + \gamma(D_A - D_B) \tag{2.6}$$

A partir de la Fig. 2.1 se tiene que:

$$(D_A - D_B) = (Z_A - Z_B) \quad (2.7)$$

Substituyendo la Ec. 2.7 en la Ec. 2.6, se tiene:

$$\Phi_A - \Phi_B = (p_A - p_B) + \gamma(Z_A - Z_B) \quad (2.8)$$

Caso 2 Nivel arbitrario

El potencial para el punto A es:

$$\Phi_A = p_A + \gamma Z_A \quad (2.9)$$

El potencial en el nivel arbitrario Φ^0 , es:

$$\Phi^0 = p^0 + \gamma(0) \quad (2.10)$$

Entonces:

$$\Phi_A - \Phi^0 = (p_A - p^0) + \gamma(Z_A - 0) \quad (2.11)$$

Para el punto B, se tiene que:

$$\Phi_B - \Phi^0 = (p_B - p^0) + \gamma(Z_B - 0) \quad (2.12)$$

Entonces substrayendo se tiene,

$$\Phi_A - \Phi_B = (p_A - p_B) + \gamma(Z_A - Z_B) \quad (2.13)$$

Las Ecs. 2.13 y 2.8 son idénticas. Por lo tanto el potencial de cualquier punto arbitrario considerando el nivel arbitrario es:

$$\Phi - \Phi^0 = (p - p^0) + \gamma Z_B \quad (2.14)$$

El gradiente del potencial se obtiene diferenciando la Ec. 2.14, y expresándolo en forma general,

$$\vec{\nabla} \Phi = \vec{\nabla} p - \lambda \vec{\nabla} Z \quad (2.15)$$

donde Z es positiva hacia abajo verticalmente.

Debido a que el peso específico del fluido γ , depende de la presión, ésta se debe actualizar a medida que nuevas presiones son calculadas.

Para flujo multifásico, el gradiente de potencial es

$$\vec{\nabla} \Phi_l = \vec{\nabla} p_l - \lambda_l \vec{\nabla} Z \quad (2.16)$$

donde $l = o, g, w$.

II.2 Ecuación de Continuidad en varias Geometrías de Flujo

La ecuación de continuidad es una expresión matemática del principio de conservación de masa. Esta ecuación será derivada para el caso general: flujo en tres fases, en tres dimensiones.

Se usarán coordenadas cartesianas (x,y,z) y se considerará flujo laminar. La velocidad en el medio poroso es representada por la ecuación de Darcy.

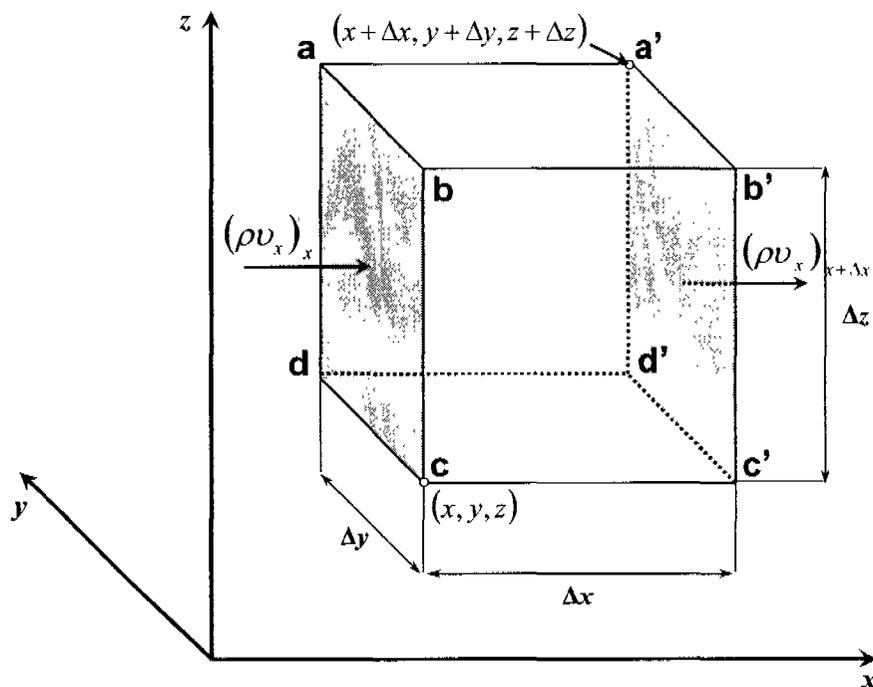


Fig. 2.2 Volumen de control elemental

La Fig. 2.2 representa el volumen de control, el cual se usará para la derivación de la ecuación de continuidad.

Si v_x , v_y , y v_z representan las componentes de la velocidad en x , y , y z respectivamente, y ρ_p es la densidad del fluido ρ (a p y T) *entrando* a través de la cara $abcd$ del paralelepípedo. Entonces el gasto másico por unidad de área, \tilde{m} está dado por:

$$\tilde{m}_x = (\rho v)_x \quad \tilde{m}_x \left[\frac{M}{tL^2} \right] = \rho_x \left[\frac{M}{L^3} \right] \cdot v_x \left[\frac{L}{t} \right], \quad (2.17)$$

El correspondiente gasto másico *saliendo* por la cara (área) $(abcd)'$ es:

$$\tilde{m}_{x+\Delta x} = (\rho v)_{x+\Delta x}. \quad (2.18)$$

Si S es la saturación del fluido en el medio poroso, y ϕV_b el volumen poroso en el volumen de control, entonces la masa en el volumen de control es:

$$m = S\rho\phi V_b.$$

Por lo tanto, el cambio de masa con respecto al tiempo será:

$$\frac{[(S\rho\phi)_{t+\Delta t} - (S\rho\phi)_t] \cdot V_b}{\Delta t}. \quad (2.19)$$

La conservación de masa es:

$$\{\text{masa entrando}\} - \{\text{masa saliendo}\} = \{\text{acumulación de masa}\}. \quad (2.20)$$

Substituyendo las Ecs. 2.17, 2.18, y 2.19 en la Ec. 2.20, se tiene:

$$(\tilde{m}A)_x - (\tilde{m}A)_{x+\Delta x} = \frac{[(S\rho\phi)_{t+\Delta t} - (S\rho\phi)_t] \cdot V_b}{\Delta t}.$$

Considerando que la masa que se puede inyectar o producir del volumen de control por unidad de tiempo, q_m y reordenando, ej. dividiendo y multiplicando el primer término por Δx , se tiene lo siguiente:

$$\left[\frac{(\bar{m}A)_x - (\bar{m}A)_{x+\Delta x}}{\Delta x} \right] \cdot \Delta x \pm q_m = \left[\frac{(S\rho\phi)_{t+\Delta t} - (S\rho\phi)_t}{\Delta t} \right] \cdot V_b$$

Substituyendo la Ec. 2.17 y tomando límites cuando Δx y Δt tienden a cero, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial(\rho v A)_x}{\partial x} \Delta x \pm q_m = -V_b \frac{\partial(S\rho\phi)}{\partial t} \quad (2.21)$$

Si A_x es independiente de x , entonces $V_b = A_x \Delta x$. Por lo tanto, la Ec. 2.22 es

$$\frac{\partial(\rho v)_x}{\partial x} \pm \frac{q_m}{V_b} = - \frac{\partial(\phi S \rho)}{\partial t}, \quad (2.22)$$

que es la ecuación de continuidad. Análogamente para las direcciones y y z se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial(\rho v)_x}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)_y}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)_z}{\partial z} \pm \frac{q_m}{V_b} = - \frac{\partial(\phi S \rho)}{\partial t}$$

Utilizando la notación del operador nabla:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\rho v} \right) \pm \tilde{q}_m = - \frac{\partial(\phi S \rho)}{\partial t}, \quad (2.23)$$

donde $\tilde{q}_m = \frac{q_m}{V_b}$ representa el gasto másico de fluido extraído por unidad de volumen de roca.

La Ec. 2.23 se lee "la divergencia de ρv (flujo másico)".

La definición del operador Nabla (Divergencia) para diferentes geometrías es:

Coordenadas cartesianas:

$$\nabla \mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} \right) .$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \mathbf{F}_r) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_\theta}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} \right) \quad y$$

Coordenadas Esféricas:

$$\nabla \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot \mathbf{F}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \mathbf{F}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_\phi}{\partial \phi} \right) .$$

II.3 Ley de Darcy

La ley de Darcy es una relación empírica del gasto de un fluido que pasa por un medio poroso, debido a una diferencia de presiones. Para flujo monofásico horizontal, una dimensión, x por ejemplo, esta ley puede ser expresada como:

$$q = -\beta_c \frac{kA}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \text{o} \quad v_x = -\beta_c \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad , \quad (2.24)$$

donde:

β_c es un factor de conversión de unidades

k es la permeabilidad absoluta de la roca en la dirección del flujo,

A es el área transversal de flujo

μ es la viscosidad del fluido

p es la presión

q es el gasto

v es el flujo de fluido por unidad de área perpendicular a la dirección del flujo (velocidad superficial del fluido).

Nótese que la velocidad a la que se refiere la ecuación de Darcy es la velocidad superficial del fluido, por lo que si se desea evaluar la velocidad real habrá que dividir la velocidad superficial entre la porosidad efectiva, esto es:

$$v_{media} = \frac{v}{\phi_e} \quad .$$

Para flujo en tres dimensiones, la forma diferencial de la ley de Darcy es:

$$\vec{v} = -\beta_c \frac{k}{\mu} \nabla p \quad , \quad (2.25)$$

donde ∇ es el operador Nabla.

Cuando se use la ley de Darcy, se deben de considerar algunas suposiciones que están implícitas en su obtención:

1. Flujo laminar
2. Fluido homogéneo (una sola fase)
3. Porosidad y permeabilidad constantes
4. Espesor uniforme
5. La permeabilidad es independiente de la presión, la temperatura y localización
6. Se desprecia el fenómeno de resbalamiento (efecto de Klinkenberg)
7. No existen reacciones químicas entre el fluido y el medio poroso
8. Flujo permanente de un fluido incompresible
9. El fluido satura al 100% el medio poroso.

Para flujo multifásico, la extensión de la ley de Darcy para cada fase puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\vec{v}_f = -\beta_c \frac{k k_{rf}}{\mu_f} \nabla p_f \quad , \quad (2.26)$$

Donde:

$f = o, g, w$ (aceite, gas o agua)

k_{rf} es la permeabilidad relativa al fluido f .

La ley de Darcy puede ser considerada como una ley empírica o una expresión analítica derivada a partir de la ecuación de Navier-Stoke.

II.4 Ecuación de Momento: Ley de Darcy

La ley de Darcy para flujo *multifásico* relaciona la velocidad y el potencial:

$$\vec{v}_p = -\frac{kk_{rf}}{\mu_f} \left(\vec{\nabla} p_f - \gamma_f \vec{\nabla} D \right), \quad (2.27)$$

donde f significa la fase, $f = o, g, w$.

Entonces, substituyendo la Ec. 2.27 en la Ec. 2.23, se llega a lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{kk_{rf}\rho_f}{\mu_f} \left(\vec{\nabla} p_f - \gamma_f \vec{\nabla} D \right) \right) \pm \tilde{q}_{mf} = -\frac{\partial(\phi S_f \rho_f)}{\partial t}, \quad (2.28)$$

donde

$$\tilde{q}_{mf} \left[\frac{m}{tL^3} \right] = \frac{q_{mf} \left[\frac{m}{t} \right]}{V_b \left[L^3 \right]}$$

y

$$q_{mf} \left[\frac{m}{t} \right] = q_{f,sc} \left[\frac{L^3}{t} \right] \rho_{f,sc} \left[\frac{m}{L^3} \right] \quad (2.28a)$$

La Ec. 2.28 es la ecuación generalizada de flujo de un fluido a través de un medio poroso.

Para flujo monofásico de cualquier fase f , $S_f = 1$ y $k_{rf} = 1.0$, entonces la Ec. 2.28 es:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k\rho}{\mu} \left(\vec{\nabla} p - \gamma \vec{\nabla} D \right) \right) \pm \tilde{q}_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.29)$$

II.5 Ecuaciones de estado

Estas ecuaciones reflejan la relación de la densidad del fluido con respecto a la presión y temperatura del sistema. Por lo tanto, la ecuación de estado variará dependiendo del fluido o fluidos presentes en el sistema. El yacimiento es considerado como un medio isotérmico, por tal motivo las ecuaciones de estado están expresadas sólo en función de la presión. Primero se considerará el caso donde el fluido es líquido. Recordando que la ecuación general de la compresibilidad está dada por:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \quad (2.30a)$$

a partir de ella se podrá obtener una ecuación que relacione la densidad del fluido con su compresibilidad, con la ayuda de la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}, \quad (2.30b)$$

donde:

ρ = Densidad

m = Masa

V = Volumen.

Derivando la Ec. 2.30b con respecto a la presión se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\rho \frac{\partial m}{\partial p} - m \frac{\partial \rho}{\partial p}}{\rho^2}. \quad (2.30c)$$

Sustituyendo las Ecs. 2.30b y 2.30c en la Ec. 2.30a:

$$C = -\frac{1}{m} \left(\begin{array}{c} \rho \frac{\partial m}{\partial p} - m \frac{\partial \rho}{\partial p} \\ \rho^2 \end{array} \right) = -\frac{\rho}{m} \left(\begin{array}{c} \rho \frac{\partial m}{\partial p} - m \frac{\partial \rho}{\partial p} \\ \rho^2 \end{array} \right). \quad (2.30d)$$

Tomando en cuenta que $\frac{\partial m}{\partial p} = 0$ entonces:

$$c = -\frac{\rho}{m} \left(\begin{array}{c} -m \frac{\partial \rho}{\partial p} \\ \rho^2 \end{array} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (2.30e)$$

Integrando:

$$\int_{p_o}^p c \delta p = \int_{\rho_o}^p \frac{\delta \rho}{\rho}$$

$$c[p - p_o] = \ln[\rho - \rho_o] = \frac{\ln \rho}{\ln \rho_o}$$

$$\rho = \rho_o e^{c[p - p_o]}.$$

La expresión de e^x en serie de Taylor es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Entonces tenemos que:

$$\rho = \rho_o \left(1 + c[p - p_o] + \frac{(c[p - p_o])^2}{2!} + \frac{(c[p - p_o])^3}{3!} + \dots + \frac{(c[p - p_o])^n}{n!} \right),$$

donde el subíndice o se refiere al nivel de referencia.

Si el líquido es ligeramente compresible, entonces:

$$\rho = \rho_o [1 + c(p - p_o)] \quad (2.31)$$

Si el fluido es compresible, ej. gas, la ecuación de estado que se emplea es la ley de los gases reales:

$$pV = ZnRT \Rightarrow pV = Z \frac{m}{M} RT \Rightarrow pM = Z\rho RT \Rightarrow \rho = \frac{Mp}{ZRT} \quad (2.31a)$$

sustituyendo $\frac{M}{RT} = \frac{\rho_s Z_s}{p_s}$, la densidad del gas está dada por:

$$\rho = \frac{\rho_s Z_s p}{p_s Z} \quad (2.32)$$

Si la compresibilidad está dada por:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (2.33)$$

entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{M}{RT} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{Z} \right) \quad (2.34)$$

Substituyendo la Ecs. 2.31a y 2.34 en la Ec. 2.33;

$$c = \frac{Z}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p}{Z} \right),$$

y desarrollándola, se tiene lo siguiente:

$$c = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \quad (2.35)$$

La Ec. 2.35 es usada para un gas real (no ideal). Para un gas que se comporta idealmente, $Z=1$, entonces:

$$c = \frac{1}{p} \quad (2.36)$$

II.6 Ecuaciones que Describen el Medio Poroso

La variación de la porosidad con la presión se muestra con la definición de la compresibilidad de la roca:

$$c_r = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_T \quad (2.37)$$

Por lo tanto:

$$c_r \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)_T \quad (2.38)$$

La Ec. 2.37 asume que el volumen de la roca es constante.

II.7 Daño y Almacenamiento

El viaje de la onda de presión (variación de presión) no toma lugar uniformemente a través de todo el yacimiento, debido a que es afectado por heterogeneidades locales. La mayoría de las heterogeneidades no afecta los cambios de presión dentro del pozo, excepto las que se encuentran en la vecindad del pozo. En particular, existe una zona alrededor del pozo la cual es invadida por filtrado del lodo de perforación o el cemento usado durante la perforación y la terminación, respectivamente. Esta zona con permeabilidad alterada es llamada "zona dañada" y su efecto sobre la presión o comportamiento de flujo del pozo es denominado como efecto de daño. El efecto de daño da lugar a una caída de presión adicional, la cual ocurre en las cercanías del pozo. La principal característica de esta zona es su baja permeabilidad. Fig. 2.3.

La caída de presión Δp_s es la diferencia entre la presión real que se tiene y la presión que se podría obtener si la formación *no* estuviera dañada. El *factor de daño* s , es una variable usada para cuantificar la magnitud del efecto del daño y es definido de la siguiente manera (SI):

$$s = \frac{2\pi kh}{qB\mu} \Delta p_s \quad (2.39)$$

En unidades de campo, la Ec. 2.39 es la siguiente:

$$s = \frac{kh}{141.2qB\mu} \Delta p_s \quad (2.40)$$

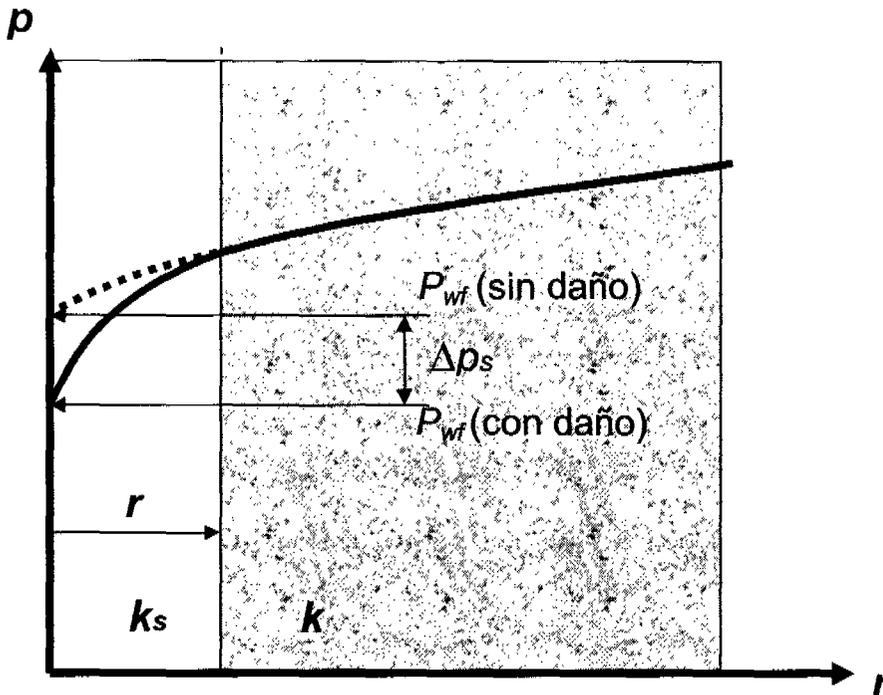


Fig. 2.3 Daño de una formación

Si se supone que el efecto del daño se debe a una zona dañada con radio r_s , y permeabilidad k_s , Fig. 2.3, entonces el factor de daño puede ser determinado como (van Everdingen, 1953):

$$s = \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \frac{r_s}{r_w} \quad (2.41)$$

Si la formación *no* presenta daño, se dice que el factor de daño $s = 0$. Cuando se realiza una operación de estimulación a una formación existe la posibilidad de “mejorar” la permeabilidad de la roca en las vecindades del pozo. Por lo tanto, la caída de presión en la zona “mejorada” podría ser como se muestra en la Fig. 2.4 y se dice que el factor de daño es negativo.

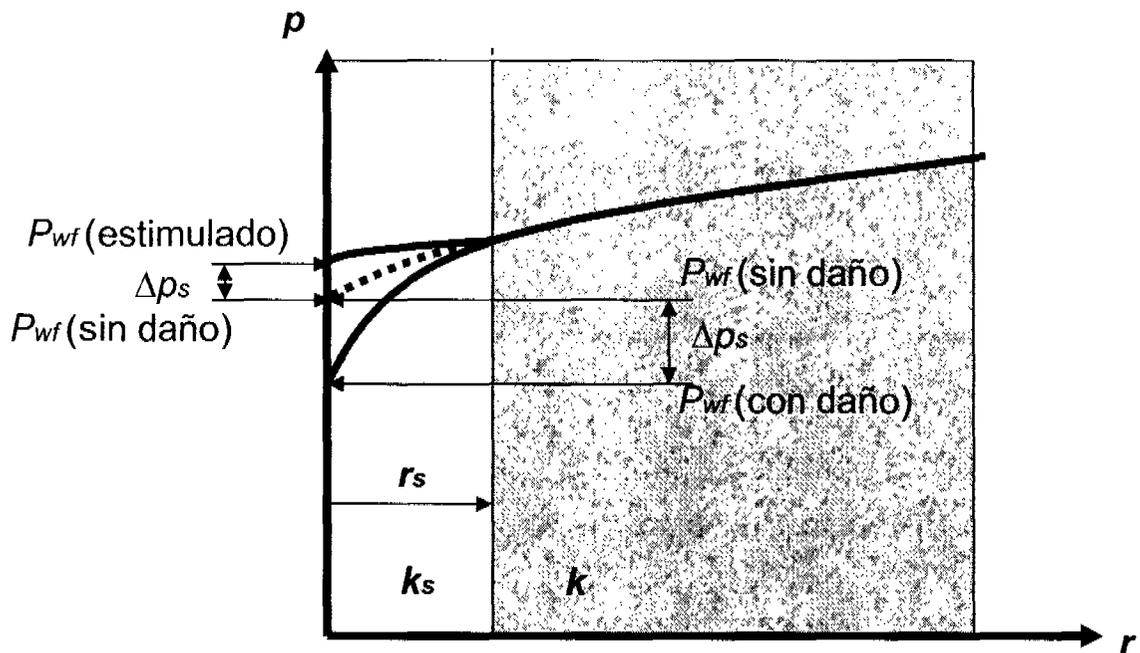


Fig. 2.4 Mejoramamiento de la permeabilidad de una formación

El análisis de pruebas de presión es la interpretación de una respuesta de presión debida a un cambio en el gasto de aceite. Una práctica común es controlar el gasto en la superficie. Aunque los pozos pueden producir a gasto constante en la boca del pozo, el gasto en el fondo del pozo (formación productora) puede *no* ser constante. Este efecto es debido al almacenamiento del pozo.

El almacenamiento del pozo puede ser causado de varias maneras, pero existen dos principales. Una es almacenamiento por expansión del fluido, y la otra por cambio en el nivel del fluido.

Considerando el caso de una prueba de decremento, cuando el pozo es abierto al flujo, el pozo sufre una caída de presión. La caída de presión causa una expansión en los fluidos del pozo y por lo tanto, la producción *no* es fluido del yacimiento sino fluido que ha sido almacenado en el pozo. A medida que el fluido se expande, el volumen del pozo es drenado y la formación empieza a aportar progresivamente. Éste es el almacenamiento por expansión del fluido, Fig. 2.6a. Puesto en otras palabras, el gasto total que se mide en la superficie, q_t es la suma del gasto proveniente del pozo (volumen almacenado) q_{wb} y el gasto de la formación q_{sf} (wb significa wellbore y sf , sandface), Fig. 2.5.

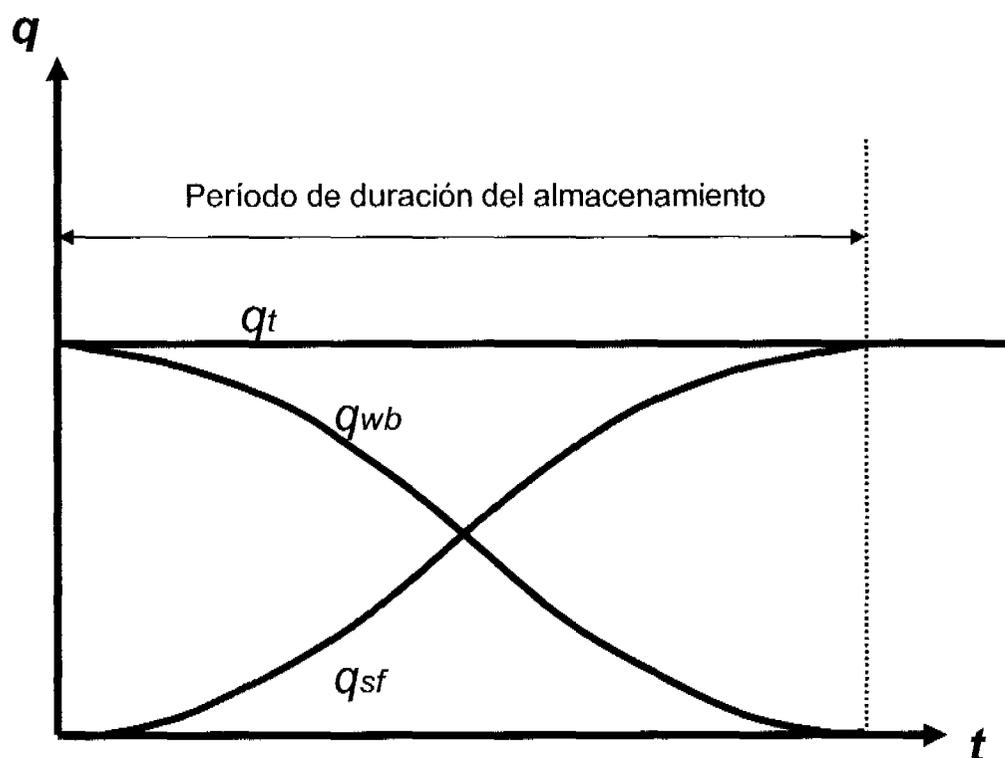


Fig. 2.5 Gasto total considerando almacenamiento

La capacidad del pozo para almacenar o descargar fluidos es conocido como almacenamiento del pozo.

El segundo tipo de almacenamiento más común es debido al cambio de nivel en la columna de líquido. Esto ocurre en pozos donde no se ha colocado un empacador, como lo muestra la Fig. 2.6b.

Cuando el pozo es abierto durante una prueba de decremento, la reducción de la presión causa una caída del nivel de líquido en el espacio anular. El líquido del espacio anular se une con el gasto proveniente de la formación. La suma representa el gasto total que se mide en la superficie. La caída del nivel del fluido generalmente abastece mucho más fluido que la formación, creando un efecto de almacenamiento mucho mayor que el almacenamiento por compresibilidad del fluido.

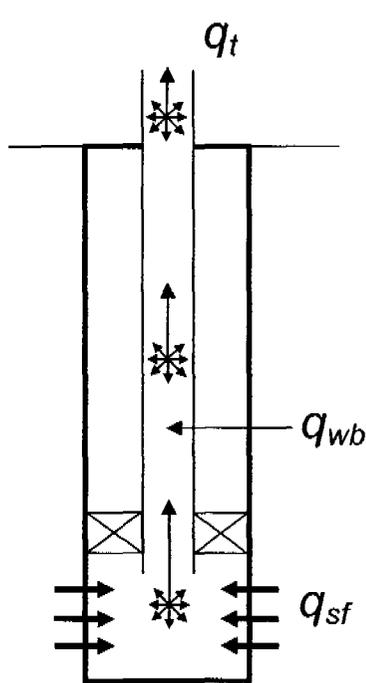


Fig. 2.6a Almacenamiento por expansión del fluido

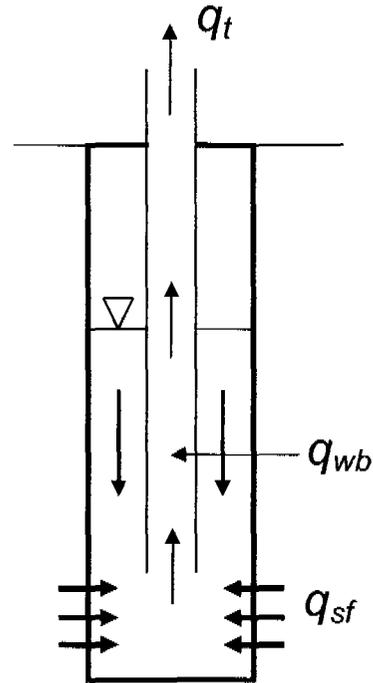


Fig. 2.6b Almacenamiento por cambio de nivel de líquido

El coeficiente de almacenamiento C , es un parámetro usado para cuantificar el efecto de almacenamiento. C es el volumen del fluido que el pozo por sí mismo aportará debido a una caída de presión:

$$C = \frac{V}{\Delta p} \Rightarrow \frac{V}{dt} = C \frac{dp}{dt} \Rightarrow q_{wb} = C \frac{dp}{dt} \quad (2.42)$$

donde V es el volumen producido y Δp es la caída de presión. C tiene unidades de $[m^3 / Pa]$ en el SI o $[bl / lb / pg^2]$ en unidades de campo.

II.8 Regímenes de Flujo en Medios Porosos.

Existen básicamente tres regímenes de flujo, que se deben de identificar para poder describir el comportamiento del flujo de fluidos y la distribución de presión como una función del tiempo. Estos son:

1. Flujo Transitorio (unsteady state flow)
2. Flujo Pseudoestacionario (Pseudosteady state flow, semisteady state flow, quasisteady state flow).
3. Flujo Estacionario (steady state flow).

II.8.1 Flujo Transitorio

En el flujo transitorio se considera una declinación natural causada por la expansión del aceite, gas y agua, en una región de drene con un incremento continuo del radio de drene. Esto es, al abrir un pozo a producción se altera el estado de equilibrio del yacimiento y crea una respuesta en la presión del pozo. La variación de presión se propaga gradualmente alejándose del pozo, incrementando el área drenada por éste. Conforme la variación de presión se propaga hacia las fronteras externas del yacimiento, las condiciones de producción en el pozo cambian rápidamente (en función del tiempo). El flujo transitorio puede definirse como las condiciones de flujo en las cuales el cambio de presión con respecto al tiempo en cualquier posición en el yacimiento es diferente a cero y no es constante. Esta definición sugiere que la derivada de la presión con respecto al tiempo es una función de la posición y del tiempo, esto es:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] = f(x,t) \neq 0$$

En un yacimiento circular con un pozo en el centro, la onda de presión generada cuando el pozo es puesto en producción a un gasto q constante, generará un perfil de presiones como el que se muestra en la Fig. 2.7,

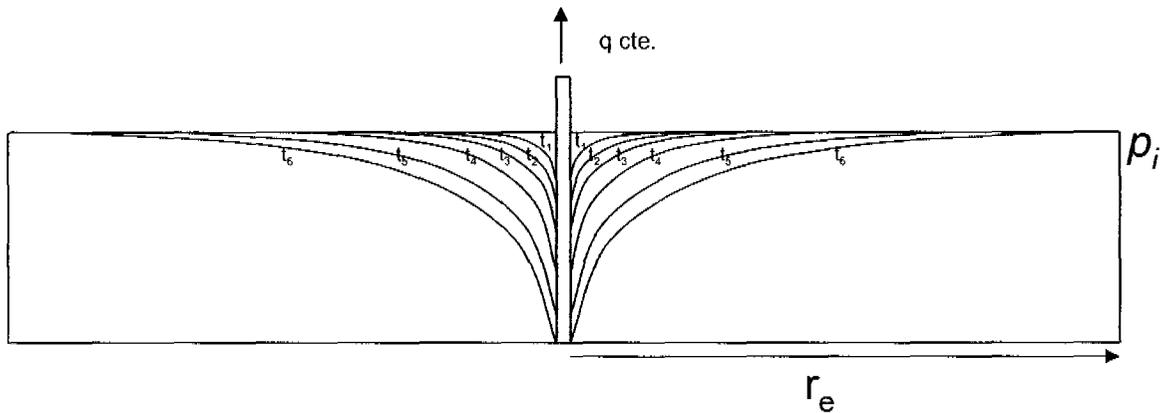


Fig. 2.7 Flujo transitorio

Note que el radio de drenaje se está continuamente incrementado con el tiempo. Este radio es conocido como *radio de investigación*, r_{inv} . Es importante mencionar que al tiempo t_{inf} en el que la onda de presión ha alcanzado las fronteras del yacimiento, el comportamiento infinito (en tamaño) ha finalizado también. Antes de este tiempo t_{inf} el yacimiento se comporta como infinito matemáticamente. El mismo comportamiento se espera cuando el pozo produce a presión de fondo constante, p_{wf} , como se muestra en la Fig. 2.8,

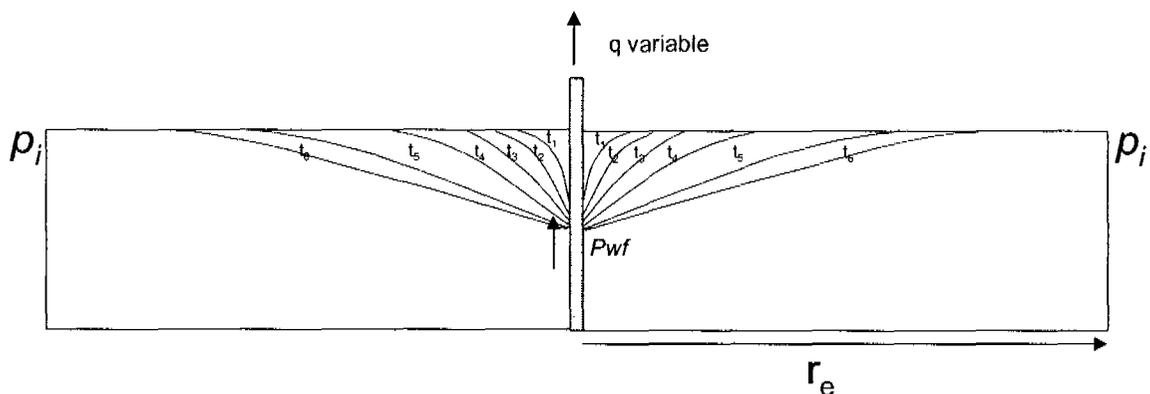


Fig. 2.8 Producción a presión constante

Considerando la frontera del yacimiento, el periodo de flujo transitorio también puede ser definido como el tiempo en el que la frontera no ha afectado el comportamiento de presión y el yacimiento se comporta como infinito (matemáticamente). Durante este periodo, la gráfica de presión vs logaritmo de tiempo es una línea recta. En coordenadas cartesianas la presión declina rápidamente al principio y esta declinación va disminuyendo conforme transcurre el tiempo.

En ausencia del efecto de almacenamiento y de los efectos de daño, la variación de presión debido al flujo radial en yacimiento infinito a gasto constante está dada por:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left(-\frac{r_D^2}{4t_D} \right)$$

Esta solución es válida a lo largo del yacimiento ($r_D > 1$), incluyendo al pozo ($r_D = 1$). Así que puede usarse para pruebas de incremento, decremento e interferencia. La Fig. 2.9 muestra la solución con la integral exponencial representada en una grafica semilogaritmica. De esta representación gráfica, puede verse que el comportamiento infinito de la respuesta de flujo radial es directamente proporcional al logaritmo del tiempo. Un examen de la solución numérica confirma esto. Para $t_D/r_D > 10$, la solución integral exponencial a $r_D = 1$ puede aproximarse por:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907) + s \quad \text{o bien;}$$

$$p_{wf} = p_i - 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \left(\log t + \log \frac{k}{\phi\mu c_r^2} + 0.8686s - 3.2274 \right),$$

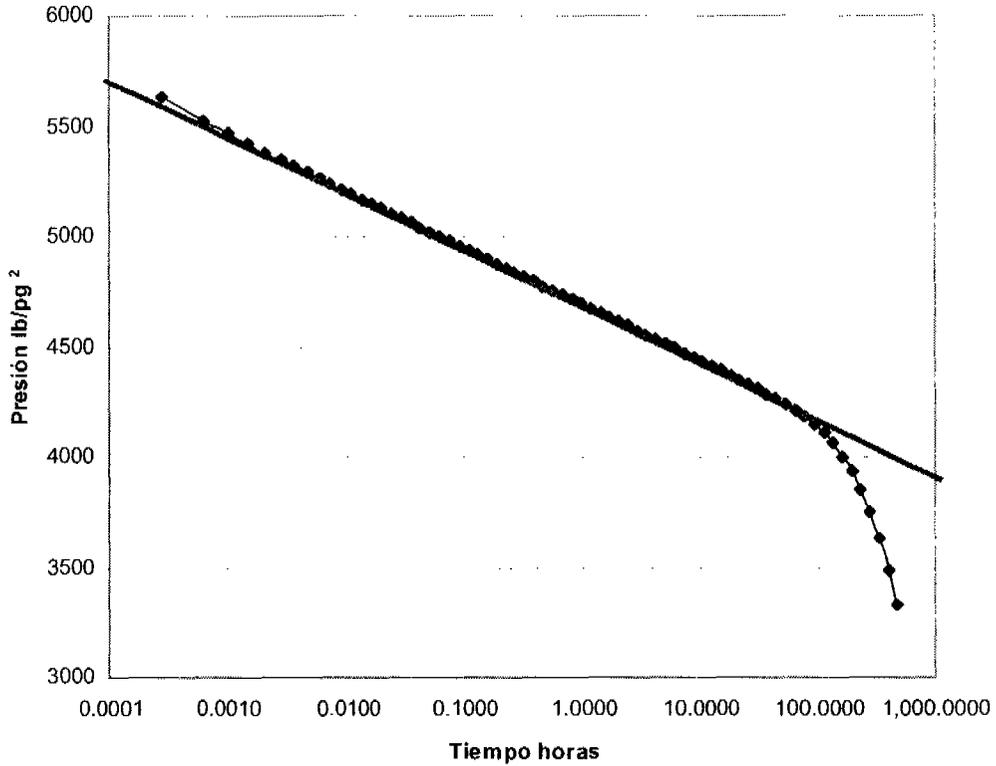


Fig. 2.9 Solución con la Integral Exponencial

donde el logaritmo natural (ln) ha sido remplazado por el logaritmo en base 10 (\log_{10}). De esta ecuación se puede observar en una grafica de presión contra el logaritmo del tiempo se tiene una línea recta con pendiente:

$$m = 162.6 \frac{qB\mu}{kh}$$

Si se obtiene esta pendiente es posible estimar la permeabilidad (k).

El factor de daño puede ser estimado a partir de la diferencia entre la p_i y la presión a una hora p_{1hr} , esto es:

$$s = 1.151 \left(\frac{p_i - p_{1hr}}{m} - \log \frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2} + 3.2274 \right)$$

Es importante hacer notar que el valor de p_{1hr} se obtiene a partir de la línea recta o la extrapolación de ésta.

II.8.2 Flujo Pseudoestacionario

En este periodo el inicio del abatimiento de presión está determinado por el tiempo, en el cual, el radio de drene ha alcanzado las fronteras externas donde no hay flujo. De ahí en adelante, como resultado de la producción, la región total drenada por el pozo comienza a ser depresionada y de este modo, el cambio de presión con respecto al tiempo a lo largo del área total de drene es constante. El flujo pseudoestacionario puede definirse como el periodo de flujo donde la presión en diferentes posiciones en el yacimiento declina linealmente como una función del tiempo, esto es:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] = \text{constante.}$$

En un yacimiento circular con un pozo en el centro, cuando la onda de presión alcance las fronteras, se tendrá un perfil de presiones como el que se muestra en la Fig. 2.10,

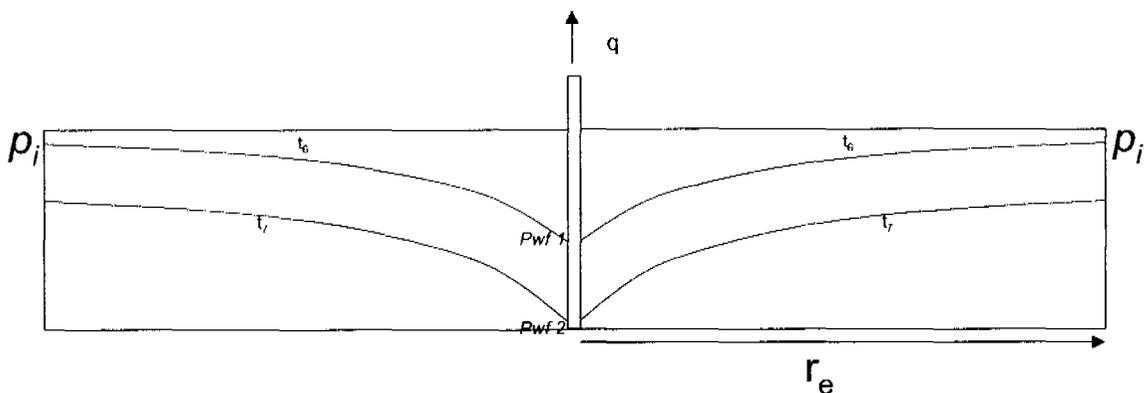


Fig. 2.10 Flujo Pseudoestacionario

Durante el periodo pseudoestacionario la caída de presión es debida a la expansión de los fluidos del yacimiento, a medida que el fluido se produce. Esta caída de presión es debida al volumen “perdido” del yacimiento que es reemplazado simplemente por la compresibilidad del fluido, ej.

$$c_i = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad \text{o} \quad \Delta p = \frac{1}{V} \frac{q \Delta t}{c_i}$$

donde V es el volumen de fluidos en el yacimiento y la producción acumulada ΔV es $q \Delta t$

De la ecuación anterior se puede concluir que:

1. La caída de presión es directamente proporcional al tiempo. (Existencia de una línea recta en una grafica Δp vs t)
2. La caída de presión depende del volumen de fluidos en el yacimiento.

Durante el periodo pseudoestacionario la caída de presión está dada por (en variables adimensionales):

$$p_D = 2\pi_{DA} + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{2.2458A}{C_A r_w^2} \right] + s,$$

donde A es el área del yacimiento. C_A es el factor de forma dependiendo de la forma del yacimiento (para yacimientos circulares $C_A = 31.62$ y $A = \pi r_e^2$), entonces la ecuación anterior se puede escribir como:

$$p_D = 2\pi_{DA} + \frac{1}{2} \ln \left[0.472 \frac{r_e}{r_w} \right] + s$$

Sustituyendo la definición de las variables adimensionales, la ecuación anterior es:

$$\Delta p = \frac{0.2342qB}{(\phi c_i h)A} t + 70.65 \frac{qB\mu}{kh} \left[\ln \left(0.472 \frac{r_e}{r_w} \right) + 2s \right].$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación de una línea recta, se tiene lo siguiente:

$$\underbrace{\Delta p}_y = \underbrace{\frac{0.2342qB}{(\phi c_i h)A}}_m t + \underbrace{70.65 \frac{qB\mu}{kh} \left[\ln \left(0.472 \frac{r_e}{r_w} \right) + 2s \right]}_b$$

$$y = mt + b.$$

Por lo tanto, graficando Δp (lb/pg²) contra t (hr) se tendrá una línea recta con pendiente:

$$m_{\text{cartesiana}} = \frac{0.2342qB}{(\phi c_i h)A}.$$

Con el valor de la pendiente es posible determinar el volumen de fluidos de la región drenada.

Para un yacimiento circular, el final del periodo transitorio y el comienzo del periodo pseudoestacionario está definido cuando $t_{DA} = 0.1$, donde:

$$t_{DA} = \frac{0.000264kt}{\phi\mu c_i A} \text{ en unidades de campo.}$$

II.8.3 Flujo Estacionario

El régimen de flujo estacionario es aquél donde la presión en cualquier punto del yacimiento y para cualquier tiempo permanece constante, es decir no cambia con el tiempo. Matemáticamente esto se expresa como:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} \right] = 0 .$$

Estas condiciones pueden ocurrir cuando el fluido producido es completamente sustituido por otro, ej. un acuífero muy activo o un proceso de mantenimiento de presión. El flujo estacionario es más aplicable a experimentos de desplazamiento en laboratorio que a condiciones de yacimiento.

III FUNDAMENTOS DE FLUJO DE FLUIDOS EN MEDIOS POROSOS

III.1 Introducción a las Ecuaciones de Flujo de Fluidos en Medios Porosos

Para obtener la ecuación general que describe el comportamiento del flujo de fluidos a través de medios porosos, se hace uso de los siguientes principios físicos:

- Conservación de masa (Ecuación de continuidad)
- Conservación de momento (Ley de Darcy)
- Una ecuación de estado
- Conservación de energía

Debido a que el flujo de fluidos a través de medios porosos es considerado a temperatura constante, la ecuación de conservación de energía no es considerada en el análisis.

El proceso para la derivación de las ecuaciones es básicamente el siguiente:

1. Elegir el volumen de control representativo del sistema, VC.
2. Identificar los flujos másicos que entran y salen del VC, en un intervalo de tiempo.
3. Realizar un balance de masa, ej. verificar la conservación de masa.
4. Tomar el límite cuando el VC y el intervalo de tiempo tienden a cero.

La ecuación que describe el flujo de fluidos a través de medios porosos, junto con las condiciones iniciales y de frontera, conforman el modelo matemático de nuestro sistema a analizar. Para resolver este modelo matemático, es necesario determinar los valores de las variables independientes, los cuales satisfacen todas las ecuaciones y las condiciones iniciales y de frontera simultáneamente.

III.2 Ecuación General de Flujo de Fluidos a Través de Medios Porosos.

Expandiendo la Ec. 2.29 en una dimensión, una sola fase fluyendo horizontalmente:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k\rho}{\mu} \left(\vec{\nabla} p - \gamma \vec{\nabla} D \right) \right) \pm \tilde{q}_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.29)$$

Con las consideraciones anteriores la Ec. 2.29 es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \pm \tilde{q}_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (3.1)$$

La Ec. 3.1 gobierna el flujo de una sola fase en una dimensión en forma horizontal, asumiendo que se aplica la ecuación de Darcy.

Desarrollando la Ec. 3.1 (iniciando con la aplicación de la derivación de un producto de funciones u, v),

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} = u \frac{\partial(v)}{\partial x} + v \frac{\partial(u)}{\partial x}.$$

Entonces:

$$\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right].$$

Agrupando y aplicando la regla de la cadena:

$$k\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right]$$

$$k\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \right].$$

El gradiente de presión al cuadrado generalmente es muy pequeño y por lo tanto puede ser despreciado. También, las compresibilidades del fluido y de la formación pueden ser substituidos, entonces la ecuación final es:

$$k\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \rho c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right], \quad (3.2)$$

donde $c_t = c_r + c_f$.

Dividiendo la Ec. 3.2 por la densidad a condiciones estándar, se tiene lo siguiente:

$$\frac{k\rho}{\mu\rho_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \pm \frac{\tilde{q}_m}{\rho_s} = \left[\phi \frac{\rho}{\rho_s} c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (3.3)$$

Si el factor de volumen del fluido está dado por:

$$B = \frac{\rho_s}{\rho}. \quad (3.4)$$

Substituyendo la Ec. 3.4 en la Ec. 3.3:

$$\frac{k}{\mu B} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \pm \tilde{q}_s = \left[\phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (3.5)$$

Nótese que el término \tilde{q}_s es el gasto volumétrico a condiciones estándar por unidad de volumen de roca:

$$\tilde{q}_s \left[\frac{L^3}{tL^3} \right] = \frac{\tilde{q}_m \left[\frac{m}{tL^3} \right]}{\rho_s \left[\frac{m}{L^3} \right]}.$$

Sin considerar fuentes ni sumideros y considerando k , μ constantes, la Ec. 3.5 pasa a ser la siguiente:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi\mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad 3.5a$$

La Ec. 3.5 puede ser extendida a tres dimensiones de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi\mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad 3.6$$

III.3 Ecuación General de Flujo Monofásico a Través de Medios Porosos

Para la fase aceite se tiene que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left[\begin{array}{c} \phi \mu_o c_i \\ k \end{array} \frac{\partial p}{\partial t} \right],$$

donde

$$c_i = c_r + c_o.$$

Para la fase gas se tiene que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left[\begin{array}{c} \phi \mu_g c_i \\ k \end{array} \frac{\partial p}{\partial t} \right],$$

donde

$$c_i = c_r + c_g$$

$$c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p}.$$

III.4 Condiciones Iniciales y de Frontera

Para que un problema esté planteado completamente, además de la ecuación en derivadas parciales (EDP) es necesario establecer condiciones iniciales (C.I.) y de frontera (C.F.). Estas condiciones reciben este nombre porque pueden ser conocidas ya sea inicialmente o en las fronteras del dominio del yacimiento. Por ejemplo, para la Ec. 3.5a una C.I. es necesaria (debido a la primer derivada con respecto al tiempo) y dos C.F. (debido a la segunda derivada con respecto a la variable x). Las condiciones de frontera pueden ser internas o externas, entre ellas existen por ejemplo:

- C.F. Interna: presión o gasto constantes
- C.F. Externa: yacimiento infinito, no-flujo o frontera a presión constante, etc.

Las condiciones iniciales pueden ser:

- C.I. : presión inicial conocida

Básicamente existen dos tipos de C.F.:

1. Condiciones Dirichlet (condiciones de presión)
2. Condiciones Neumann (condiciones de gasto)

III.4.1 Condiciones Dirichlet

Cuando las condiciones de presión son especificadas, normalmente se hace en las fronteras del dominio del problema. Por ejemplo, las condiciones Dirichlet para el problema de la Ec. 3.5a podrían ser:

$$\begin{aligned} p(x=0, t > 0) &= p_L \\ p(x=L, t > 0) &= p_R \end{aligned}$$

III.4.2 Condiciones Neumann

Alternativamente, se podría especificar el gasto de producción en los extremos del dominio del problema. Usando la ecuación de Darcy, las condiciones Neumann son:

$$q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} \quad \text{y} \quad q_R = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=L} .$$

Para el flujo en un yacimiento, la condición de gasto puede ser especificada como un gasto de producción o inyección en un pozo, en alguna posición en el yacimiento, o puede ser especificada como una frontera impermeable (no hay flujo).

III.4.3 Condiciones Iniciales

Cuando una de las variables independientes en una ecuación diferencial parcial es el tiempo, se necesita conocer entre otras cosas, la variable dependiente a un tiempo t_0 para obtener la solución a otros tiempos. A esta condición se le llama condición inicial. Las condiciones iniciales especifican el estado inicial de las variables primarias (incógnitas) del sistema.

Para el mismo problema de la Ec. 3.5a la C.I. podría ser:

$$p(x, t = 0) = p_o .$$

Si el dominio del problema fuera una sección transversal (no horizontal), donde la presión inicial en cada profundidad debiera ser especificada, la C.I. sería:

$$p(z, t = 0) = p_{ref} + (z - z_{ref})\gamma .$$

III.5 Solución Analítica de las Ecuaciones de Flujo Monofásico

Aunque los detalles de la obtención de las soluciones analíticas para las EDP no son el objetivo de este trabajo, se mostrarán con el propósito de compararlas con la solución numérica que se obtendrá posteriormente.

La solución analítica, Ec. 3.5a para la ecuación de flujo de fluidos en medios porosos, en una sola fase y en una sola dimensión en coordenadas cartesianas, y sin considerar pozos (fuentes o sumideros) es la siguiente (**Crank, J., 1975**):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left[\begin{array}{c} \phi\mu c_v \frac{\partial p}{\partial t} \\ k \end{array} \right], \quad (3.5a)$$

bajo las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} p(x, t = 0) &= p_{ini} & 0 \leq x \leq L \\ p(x = 0, t > 0) &= 0 \\ p(x = L, t > 0) &= 0. \end{aligned}$$

La solución analítica es la siguiente:

$$p(x, t) = \frac{4p_{ini}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 k}{L^2 \phi\mu c_v} t\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right)$$

Por otra parte si se consideran las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} p(x, t = 0) &= p_{ini} & 0 \leq x \leq L \\ p(x = 0, t > 0) &= 0 \\ p(x = L, t > 0) &= p_{ini} \end{aligned}$$

La solución analítica para la ecuación de flujo de fluidos en medios porosos sin considerar pozos (fuentes o sumideros) es la siguiente:

$$p(x,t) = p_L + (p_R - p_L) \left[\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 k}{L^2 \phi \mu c} t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right].$$

Por ultimo si se consideran las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$p\left(0 < x < \frac{L}{2}, t = 0\right) = 2p_{imv} \times \left(\frac{x}{L}\right) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$p\left(\frac{L}{2} < x < L, t = 0\right) = 2p_{imv} \times \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$p(x = 0, t > 0) = 0$$

$$p(x = L, t > 0) = 0,$$

la solución analítica es la siguiente:

$$p(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\eta \left(\frac{(2m-1)\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{x(2m-1)\pi}{L}\right)$$

$$C_m = \frac{8P_i}{(2m-1)^2 \pi^2} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)$$

III.6 Características de Mallas Numéricas en Diferentes Geometrías

III.6.1 Malla Cartesiana

Este tipo de malla es el más comúnmente usado en simulación de yacimientos. Los puntos de la malla son las intersecciones de los planos coordenados. En una dimensión un punto de malla tiene dos puntos vecinos; en dos dimensiones tendrá cuatro puntos vecinos y en tres dimensiones tendrá seis puntos vecinos. La malla cartesiana puede ser uniforme, de nodos distribuidos o centrados. Para una dimensión, por ejemplo en x , la malla uniforme con nodos distribuidos será como se muestra a continuación.

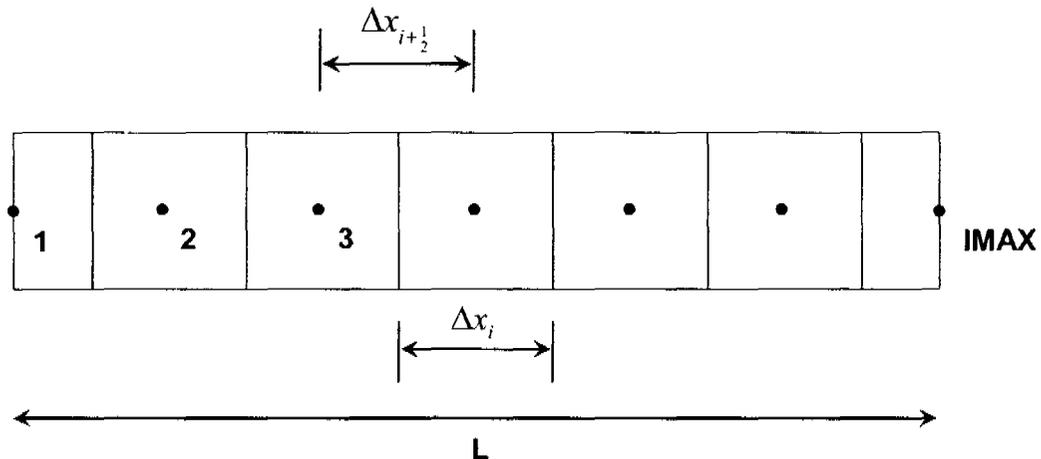


Fig. 3.1 Malla Cartesiana uniforme de nodos distribuidos

Si el total de nodos es $IMAX$ y su espaciamiento es Δx , éste último es definido como,

$$\Delta x_i = \frac{L}{IMAX - 1}$$

En las fronteras, el volumen de las celdas es la mitad del volumen de las celdas internas, esto es:

$$Vr_i = \begin{cases} A\Delta x_i & i = 1, IMAX \\ 2 & i = 2, 3, \dots, IMAX - 1. \end{cases}$$

Considerando lo anterior la posición de los nodos es,

$$x_i = (i - 1)\Delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, IMAX .$$

La posición de la frontera de las celdas es:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2})\Delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, IMAX .$$

Una malla uniforme con nodos centrados será como se muestra en la Fig. 3.2:

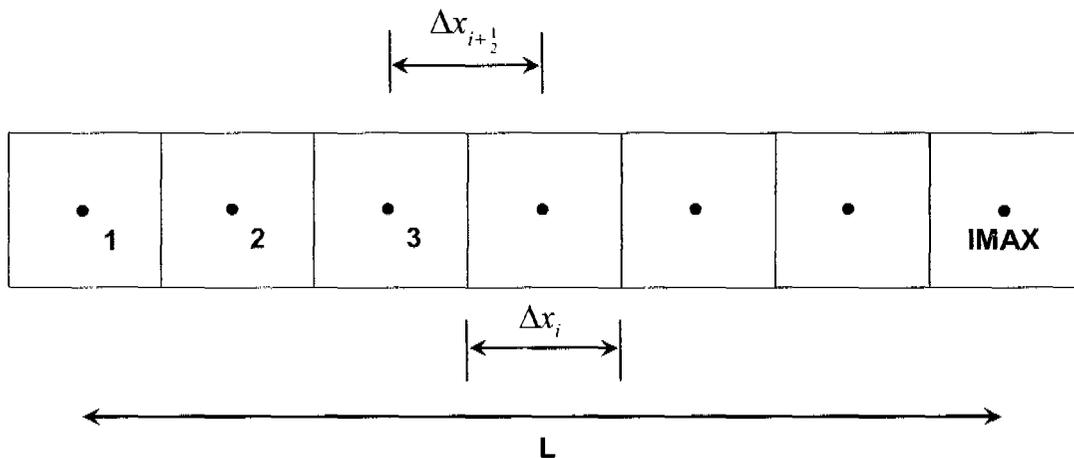


Fig. 3.2 Malla cartesiana uniforme de nodos centrados

Si el total de nodos es $IMAX$ y su espaciamiento es Δx , este último es definido como,

$$\Delta x_i = \frac{L}{IMAX} .$$

El volumen de cada celda es idéntico para todos los bloques,

$$V_i = A\Delta x_i \quad i=1,2,3,\dots, I MAX .$$

La posición de los nodos (centro de cada celda) es:

$$x_i = (i - \frac{1}{2})\Delta x_i \quad i = 1,2,\dots, I MAX .$$

y las posiciones de las fronteras de cada celda serán:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x_i \quad i = 1,2,\dots, I MAX .$$

III.6.2 Malla Radial

Esta malla es confiable para modelar el flujo de fluidos a un solo pozo. Para el caso isótropo, la malla corresponde a un sistema en coordenadas cilíndricas.

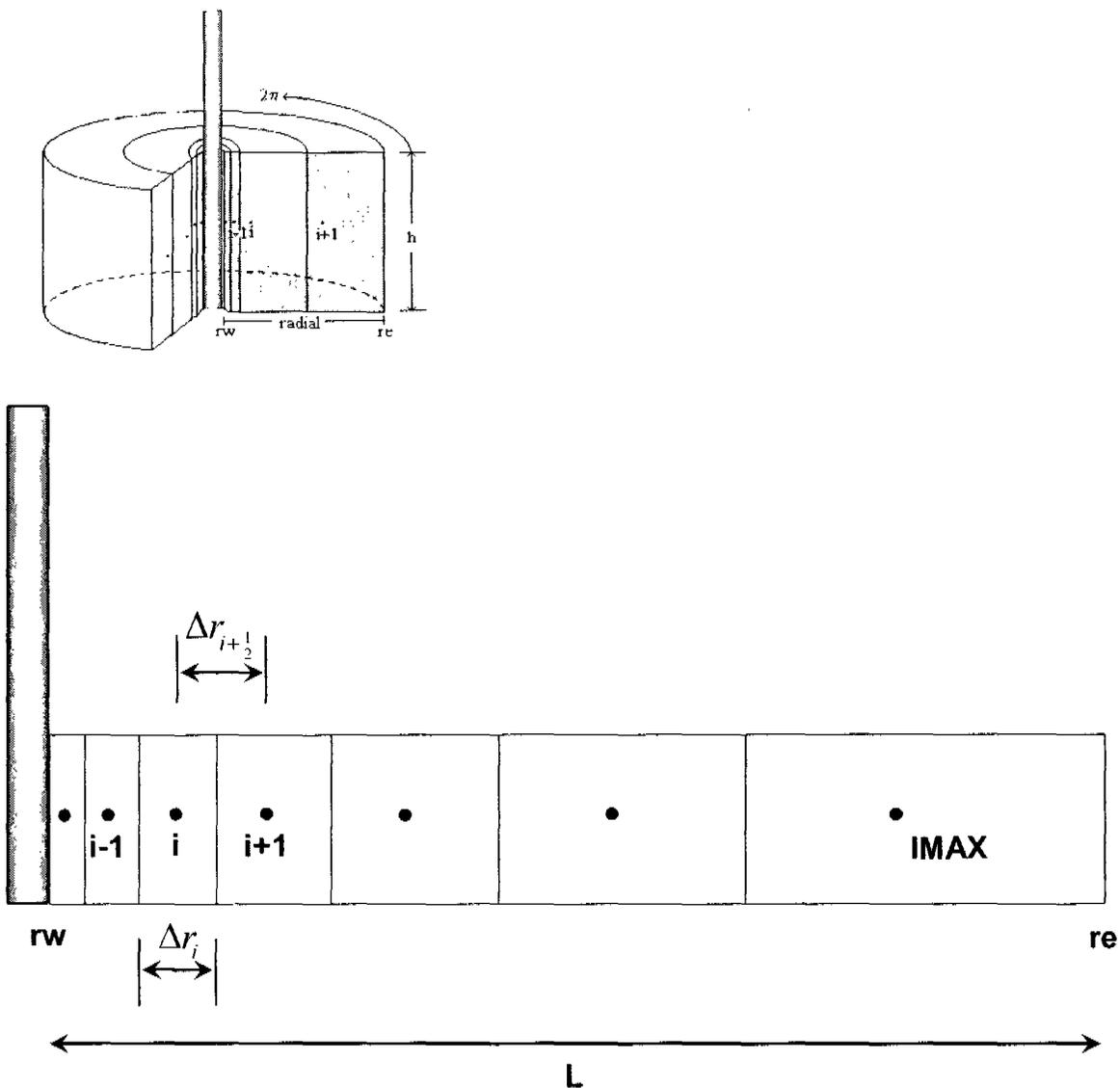


Fig. 3.3 Malla cilíndrica

Las coordenadas cilíndricas son usadas cuando se realizan estudios a un solo pozo. El objetivo del estudio a un solo pozo incluye comportamiento individual del pozo, estrategias de terminación, conificación de agua y/o gas. La Fig. 3.3 muestra una malla cilíndrica en presencia de un solo pozo.

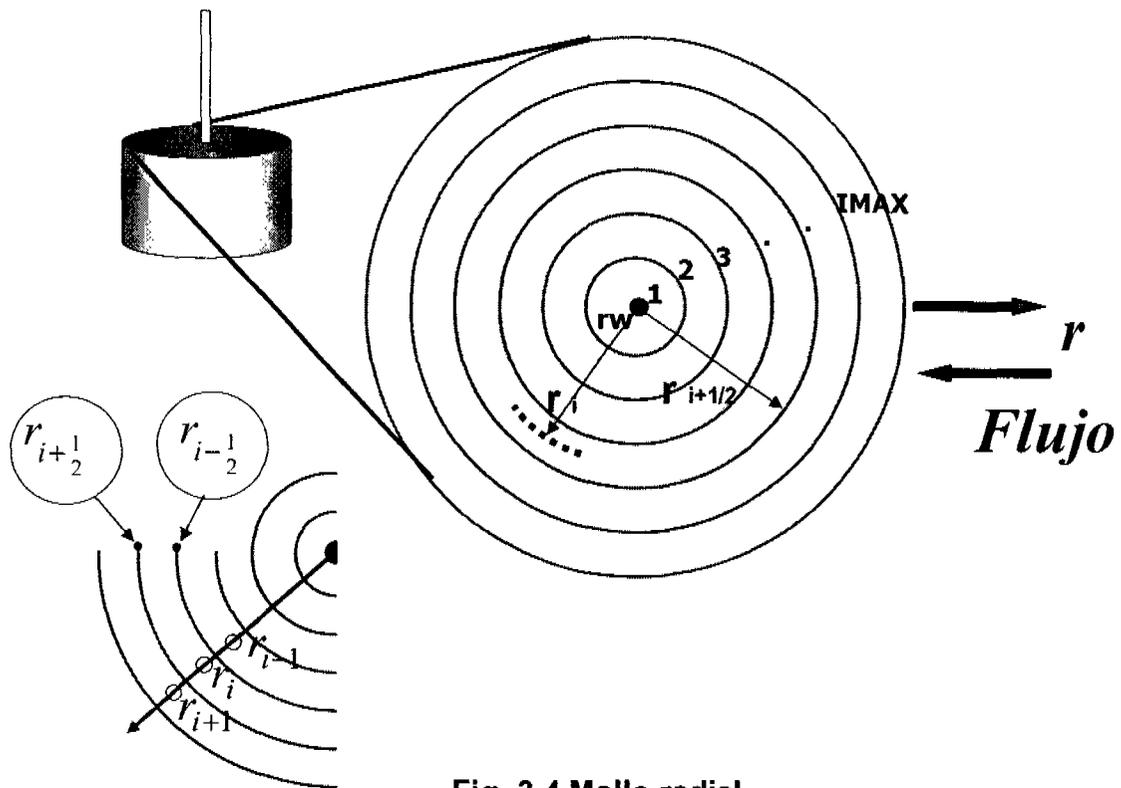


Fig. 3.4 Malla radial

Mientras el tamaño de las celdas para una malla cartesiana es relativamente arbitrario, para mallas en coordenadas cilíndricas debe de seguir ciertas reglas.

Método 1

1. Los nodos son espaciados *logarítmicamente*, a partir del pozo y hacia la frontera externa.

$$r_{i+1} = \psi r_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, (\text{IMAX}-1)$$

donde

$$\psi = \left(\frac{r_e}{r_w} \right)^{\frac{1}{\text{IMAX}}}$$

y

$$r_i = \frac{\psi \ln \psi}{(\psi - 1)} r_w.$$

2. Las fronteras de las celdas son definidas mediante una media logarítmica de la siguiente manera:

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln \psi} \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, (\text{IMAX}-1).$$

3. El volumen de cada celda i es:

$$V_i = \pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \Delta z \quad .$$

Método 2

$$r_1 = r_w e^{\left[\frac{\psi}{2} \right]}$$

$$r_i = r_1 e^{(i-1)\psi} \quad ,$$

donde

$$\psi = \frac{1}{IMAX} \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) \quad .$$

4. Las fronteras de las celdas son definidas mediante una media logarítmica de la siguiente manera:

$$r_{\frac{i+1}{2}} = r_w e^{i\psi} \quad .$$

5. El volumen de cada celda i es:

$$V_i = \pi \left(r_{\frac{i+1}{2}}^2 - r_{\frac{i-1}{2}}^2 \right) \Delta z \quad .$$

III.7 Solución Numérica de las Ecuaciones de Flujo Monofásico

Las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluidos a través de un medio poroso son muy complejas para ser resueltas analíticamente, ej. son altamente *no-lineales*. Sólo en casos ideales, el flujo en una sola fase puede ser solucionado analíticamente. En consecuencia, se deben usar algoritmos numéricos para su solución, éstos funcionan en un *dominio discreto* en lugar de un *dominio continuo* como lo hacen las soluciones analíticas.

La discretización de una ecuación diferencial puede ser realizada por diferentes métodos, siendo los más comunes: Método de Diferencias Finitas (MDF), Método de Elemento Finito (MEF), y el Método de Volumen de Control (MVC). En este caso se utilizará el MDF.

El principal objetivo del MDF es generar valores de la función $p(x,t)$ en los nodos de una malla que cubre el dominio de solución, en una secuencia de niveles de tiempo que son separados un Δt .

La malla numérica para el MDF puede ser definida en las diferentes geometrías vistas en el Capítulo I. La elección de coordenadas está guiada por la geometría del dominio del problema y es hecha con el propósito de facilitar la implantación de las condiciones de frontera.

El procedimiento para derivar ecuaciones en diferencias finitas (EDF) consiste en aproximar las derivadas en la ecuación diferencial mediante una serie de Taylor truncada; a este proceso se le denomina discretización.

Usando el caso más simple de la ecuación de flujo, ej. Flujo lineal horizontal de una sola fase, con propiedades de la roca y fluidos constantes, se procederá a escribir en diferencias finitas para la aproximación en diferencias progresivas, en tiempo.

La Ec. 3.5a es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_v}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.5a)$$

El valor de p^n es conocido al tiempo t^n en cada celda; se requiere conocer p^{n+1} al tiempo t^{n+1} . Existen varios métodos para resolver numéricamente la Ec. 3.5a por diferencias finitas. En esta parte se examinarán tres métodos: el método explícito, implícito y Crank-Nicholson.

III.7.1 Formulación Explícita

En el esquema explícito se resuelve una incógnita para el tiempo $n+1$ como se indica en la Fig. 3.5. Para calcular $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ usando la Ec. A.21, se evalúa p al tiempo t^n :

$$p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n = \left(\frac{\phi\mu c}{k} \right) p_i^{n+1} - p_i^n \quad (3.7)$$

Con esta formulación se resuelve únicamente para p^{n+1} . El resto de las presiones al tiempo n son conocidas. Debido a que esta formulación tiene estabilidad limitada, raramente es utilizada. El método es estable cuando $\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$, donde

$$\alpha = \frac{k}{\phi\mu c}$$

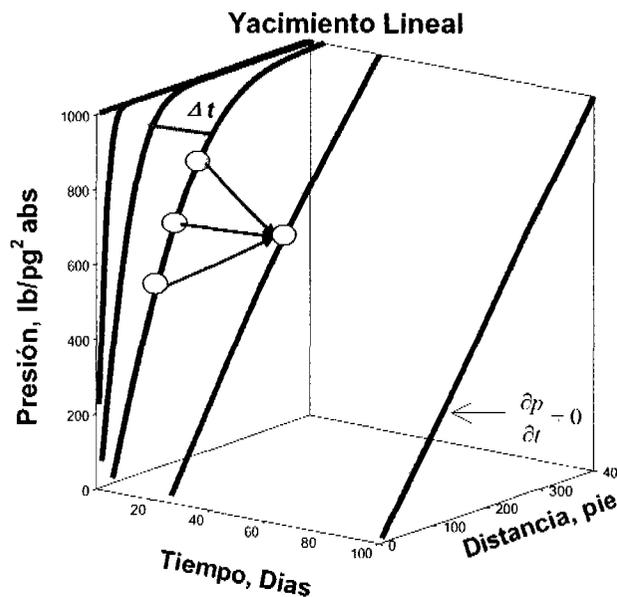


Fig. 3.5 Esquema Explícito

III.7.2 Formulación Implícita

Todos los valores de p en la derivada en espacio son evaluados al tiempo t^{n+1} como lo muestra la Fig. 3.6

$$p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1} = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) p_i^{n+1} - p_i^n \cdot \Delta t \quad (3.8)$$

Por lo tanto, se tienen tres incógnitas $(p_{i-1}^{n+1}, p_i^{n+1}, p_{i+1}^{n+1})$ en cada paso de tiempo donde la Ec. 3.8 es utilizada, la cual representa un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, las cuales deben ser resueltas simultáneamente. El número de ecuaciones e incógnitas N está dado por el número de celdas en las que se divide el dominio y es el mismo número de incógnitas $(p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, \dots, p_N^{n+1})$. Esta formulación es condicionalmente estable.

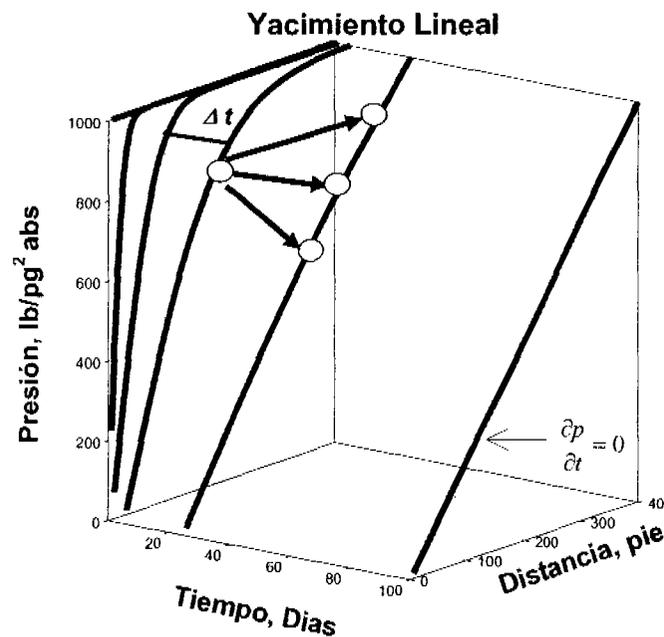


Fig. 3.6 Esquema Implícito

III.7.3 Formulación Crank-Nicholson

Esta formulación involucra una combinación de los valores de la variable independiente, es este caso p , a los tiempos n y $n+1$. Esto es, la derivada espacial (con respecto a distancia) es promediada para los tiempos n y $n+1$, ej. al tiempo $n + \frac{1}{2}$ Fig. 3.7.

Para la segunda derivada de p con respecto a x , se tiene que,

$$\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right]_i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right]_i^{n+1} + \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right]_i^n \right\}. \quad (3.8)$$

Para la derivada de p con respecto a t , se tiene lo siguiente:

Considerando la Ec. A.24a,

$$\frac{\partial p}{\partial t}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}. \quad (B.24a)$$

Entonces la ecuación final es:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}. \quad (3.9)$$

El sistema resultante puede ser resuelto de la misma manera que el método implícito. La formulación es incondicionalmente estable, pero raramente es usada debido a que requiere un trabajo adicional comparado con la formulación implícita.

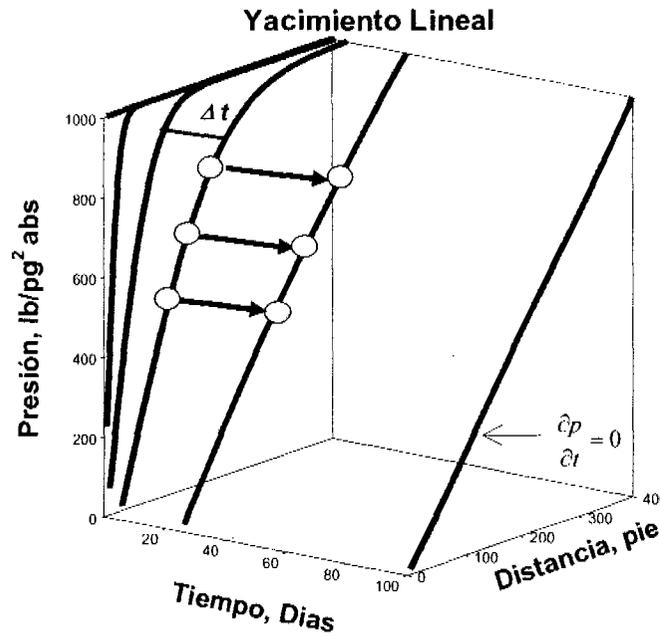


Fig. 3.7 Esquema Crank-Nicholson

III.7.4 Representación General de las Formulaciones Implícito-Explicitas

La formulación explícita, Ec. 3.7, implícita, Ec. 3.8 y la formulación Crank-Nicholson, Ec. 3.9 son casos especiales de un algoritmo general dado por:

$$\omega \left[\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + (1 - \omega) \left[\frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}, \quad (3.10)$$

donde ω es un factor de ponderación ($0 \leq \omega \leq 1$). Si $\omega = 0$, entonces se tiene el método explícito. Si $\omega = 1/2$, entonces se tiene el método Crank-Nicholson. Si $\omega = 1$, entonces se tiene el método implícito.

Considerando la solución analítica de la Ec. 3.5a, las anteriores formulaciones podrían ser vistas de otra manera en la Fig. 3.8.

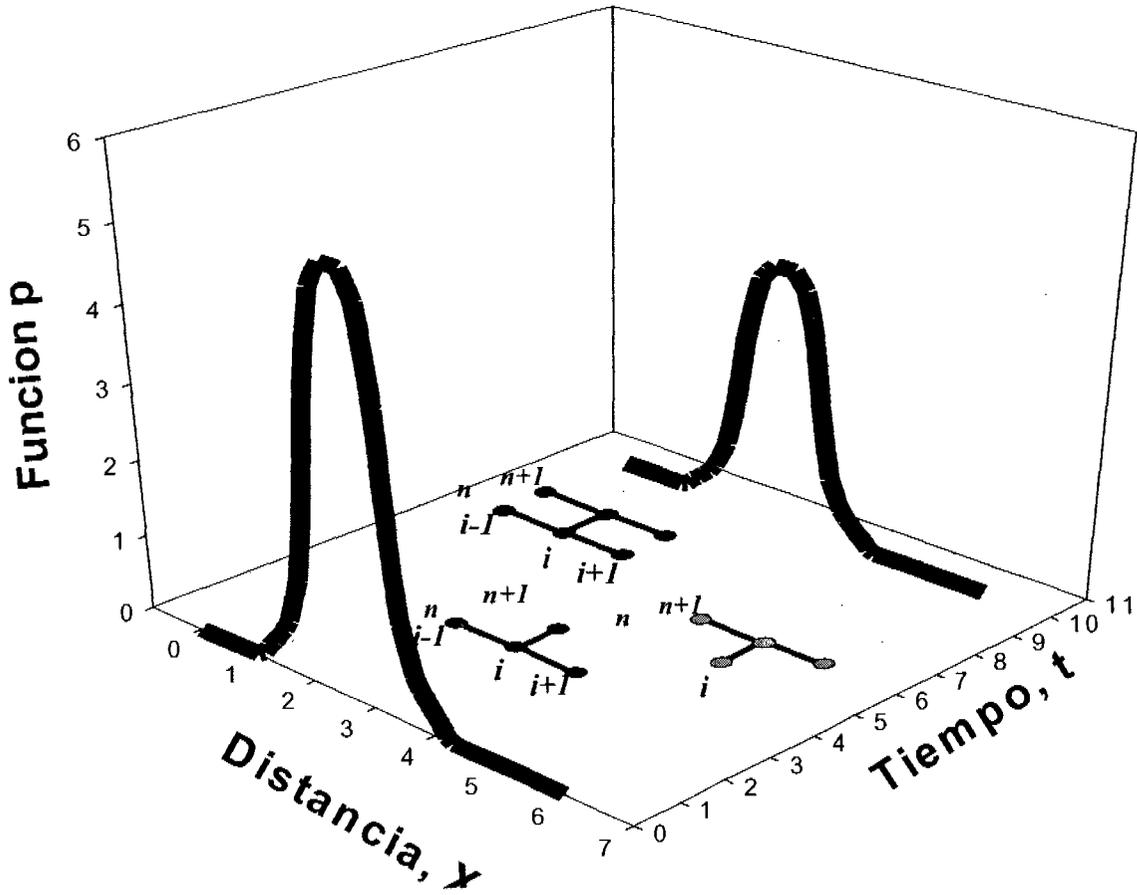


Fig. 3.8 Discretización del dominio en tiempo.
Métodos explícito (rojo), implícito (verde) y C-N (violeta)

III.8 Conceptos de Consistencia, Convergencia y Estabilidad de una Aproximación Numérica

La aproximación de un algoritmo numérico basado en el método de diferencias finitas depende del tamaño del espaciamiento de la malla y del incremento de tiempo al cual se quiere calcular el nuevo valor de la incógnita. Si ambos parámetros son reducidos simultáneamente pero en una manera arbitraria en diferentes ordenes de magnitud y si la ecuación en diferencias finitas se aproxima con incremento en la aproximación a la ecuación en derivadas parciales, entonces el método en diferencias finitas es *consistente*.

Para que una formulación o esquema sea *convergente*, la aproximación en diferencias finitas debe ser idéntica a la solución que proporciona la ecuación en derivadas parciales original a medida que los bloques de la malla numérica tiendan a cero y los incrementos de tiempo tiendan a cero. Esto es,

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} (EDP - EDF) = 0 .$$

La *estabilidad* es un concepto que aplica a problemas dependientes del tiempo. Un algoritmo o esquema numérico es *estable*, si cualquier error introducido en alguna etapa de los cálculos, no se amplifica en cálculos subsecuentes.

Supóngase que la solución de alguna ecuación en derivadas parciales, como las que surgen del flujo de fluidos en medios porosos, sujeta a condiciones iniciales y de frontera, no crece sino que permanece constante o decrece en cada punto. Es razonable esperar que la solución con diferencias finitas reproduzca este comportamiento, ej. que se produzca un comportamiento libre de oscilaciones, Fig. 3.9. Si lo hace se dice que el método es *estable*; en caso contrario el algoritmo es *inestable*. Una formulación o esquema es *inestable* cuando la combinación del error de redondeo y truncamiento domina la solución y causa resultados incorrectos.

El error de redondeo es el proveniente del número de dígitos y precisión que maneje cada computadora. El error de truncamiento proviene de la aproximación que se hace de la EDP con la serie de Taylor truncada (ej., es la parte que no se considera en la aproximación).

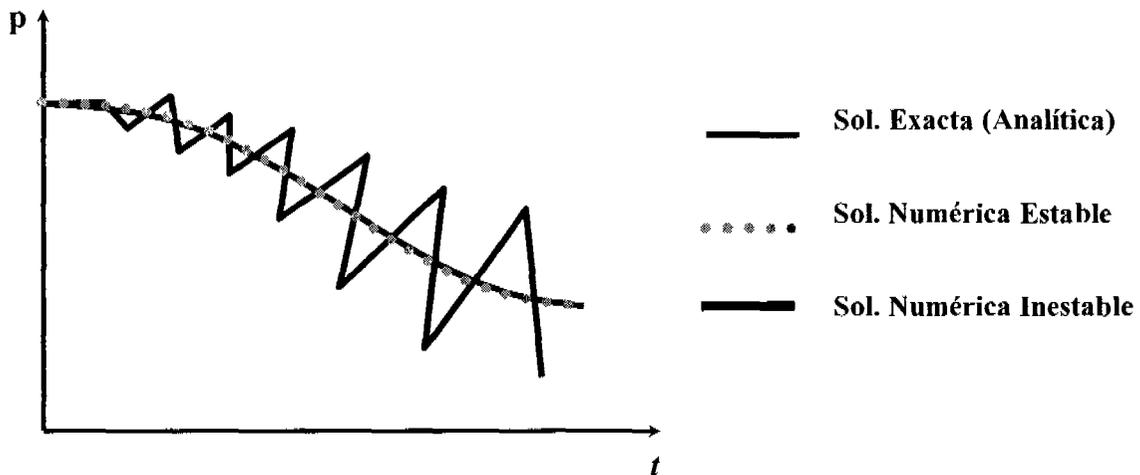


Fig. 3.9 Estabilidad de una aproximación numérica

Se debe asegurar que a medida que el tamaño de los bloques de la malla y el incremento de tiempo (Δt) son reducidos, la solución numérica *converja* a la solución exacta. El teorema de equivalencia de Lax garantiza que si una solución numérica de una ecuación en derivadas parciales obtenida, usando una aproximación consistente de diferencias finitas es estable, entonces si el espaciamiento de la malla y el incremento de tiempo tienden a cero, la solución numérica *convergerá* a la solución exacta (analítica). Por lo tanto, consistencia y estabilidad aseguran la *convergencia* y viceversa. La estabilidad es una condición necesaria y suficiente para que exista la convergencia, cuando la aproximación es consistente.

III.9 Solución de la Formulación General Explícita-Implicíta

La Ec. 3.10 representa la formulación para los tres esquemas analizados: explícito, implícito y Crank-Nicholson. La formulación general es la siguiente,

$$\omega \left[\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + (1-\omega) \left[\frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c_i}{k} \right) \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} \quad (3.10)$$

Para $\omega = 0$, se tiene el método explícito. Si $\omega = 1/2$, entonces se tiene el método Crank-Nicholson. Si $\omega = 1$, entonces se tiene el método implícito.

La Ec. 3.10 es la aproximación discretizada de la Ec. 3.5a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.5a)$$

La Ec. 3.10 puede describirse de la siguiente manera:

$$\left[\frac{\omega \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i+1}^{n+1} - \left[\frac{2\omega \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi \mu c_i}{k} \right] p_i^{n+1} + \left[\frac{\omega \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i-1}^{n+1} = - \left[\frac{(1-\omega) \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i+1}^n + \left[\frac{2(1-\omega) \Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\phi \mu c_i}{k} \right] p_i^n - \left[\frac{(1-\omega) \Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i-1}^n \quad (3.11)$$

Simplificando en una segunda etapa la Ec. 3.11 se tiene lo siguiente:

$$\left[\omega \gamma \right] p_{i+1}^{n+1} - \left[2\omega + \alpha \right] p_i^{n+1} + \left[\omega \gamma \right] p_{i+1}^{n+1} = - \left[(1-\omega) \gamma \right] p_{i+1}^n + \left[2(1-\omega) \gamma - \alpha \right] p_i^n - \left[(1-\omega) \gamma \right] p_{i-1}^n \quad (3.12)$$

donde:

$$\gamma = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$\alpha = \frac{\phi \mu c_i}{k}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } a_i &= \omega\gamma \\
 b_i &= -(2\omega\gamma + \alpha) \\
 c_i &= \omega\gamma \\
 d_i &= -[(1-\omega)\gamma]p_{i+1}^n + [2(1-\omega)\gamma - \alpha]p_i^n - [(1-\omega)\gamma]p_{i-1}^n,
 \end{aligned}$$

entonces la Ec. 3.12 se simplifica como:

$$a_i p_{i-1}^{n+1} + b_i p_i^{n+1} + c_i p_{i+1}^{n+1} = d_i. \quad (3.13)$$

La Ec. 3.13 es escrita para cada bloque o celda i en la que es discretizado el dominio, Fig. 3.2. Esto produce un conjunto de ecuaciones que deben resolverse simultáneamente. Esta solución simultánea es únicamente para los métodos Implícito y Crank-Nicholson, cuando $\omega = 1/2$, y $\omega = 1$. Para el esquema explícito se debe resolver únicamente para p_i^{n+1} en cada celda o nodo.

En forma general el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned}
 \boxed{a_0 p_0} + b_1 p_1 + c_1 p_2 &= d_1 \\
 a_2 p_1 + b_2 p_2 + c_2 p_3 &= d_2 \\
 a_3 p_2 + b_3 p_3 + c_3 p_4 &= d_3 \\
 a_4 p_3 + b_4 p_4 + c_4 p_5 &= d_4 \\
 \dots &\dots \\
 \dots &\dots \\
 a_n p_{n-1} + b_n p_n + \boxed{c_n p_{n+1}} &= d_n
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

y en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & & & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & & \\ & & & & & & & a_n & b_n & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} d_1 - a_0 p_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{n-1} \\ d_n - c_n p_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

El sistema Ecs. 3.15, conocido como sistema tridiagonal; está completamente definido y puede ser resuelto para todos los valores de p_i^{n+1} para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Para un sistema en dos dimensiones el desarrollo es idéntico al utilizado con anterioridad para el de una sola dimensión, sólo que los resultados son un poco diferentes. Considérese la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\phi \mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Discretizando y utilizando el esquema implícito se tiene:

$$\left[\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + \left[\frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] = \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3.16)$$

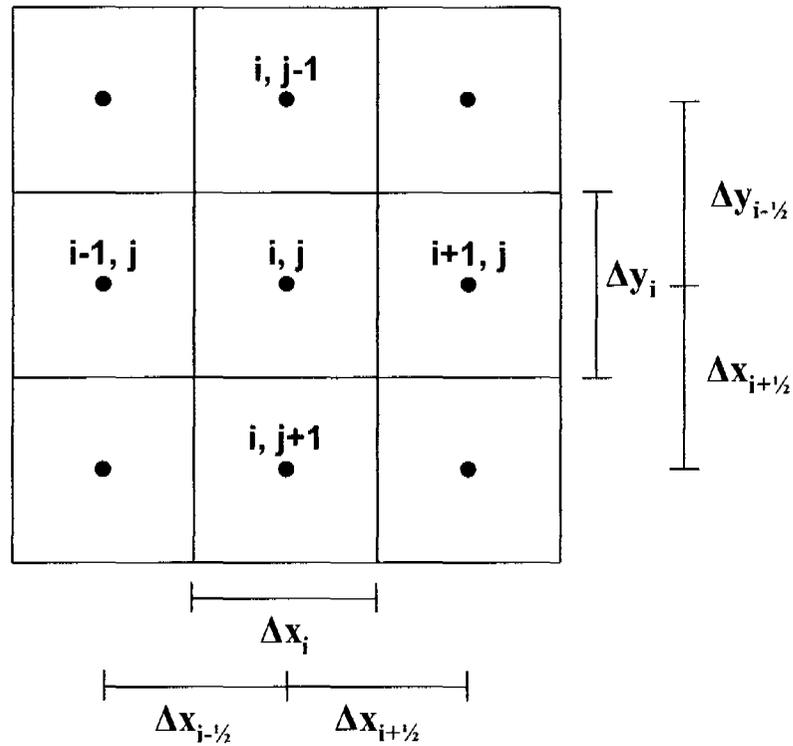


Fig. 3.10 Malla cartesiana en dos dimensiones

Nótese que todas las presiones están en el nuevo nivel de tiempo y en consecuencia son incógnitas. Así pues, existen 5 incógnitas en la Ec. 3.16. Para simplificar el problema se supone que $\Delta X = \Delta Y$. Desarrollando y factorizando, se tiene:

$$p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} - 4p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n). \quad (3.17)$$

Ordenando:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} p_{i-1,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} p_{i+1,j}^{n+1} - \left(4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) \right) p_{i,j}^{n+1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} p_{i,j-1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} p_{i,j+1}^{n+1} = \\ - \left(\frac{\phi \mu c}{k} \right) p_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3.18)$$

Simplificando en una segunda etapa la Ec. 3.18 se tiene lo siguiente:

$$\mathcal{W}_{i-1,j}^{n+1} + \mathcal{W}_{i+1,j}^{n+1} - (4\gamma + \alpha) p_{i,j}^{n+1} + \mathcal{W}_{i,j-1}^{n+1} + \mathcal{W}_{i,j+1}^{n+1} = -\alpha p_{i,j}^n, \quad (3.19)$$

III.10 Solución Analítica de la Ecuación Diferencial Parcial

La ecuación que gobierna la propagación de presión en un medio poroso homogéneo, conteniendo un fluido ligeramente compresible, está dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.22)$$

La Ec. 3.22 se obtiene bajo las siguientes *suposiciones*:

- La ecuación de Darcy es válida
- Difusividad hidráulica constante
- Compresibilidad del fluido pequeña
- Gradientes en el yacimiento pequeños
- Flujo monofásico
- Efectos de gravedad y térmicos no considerados.
- Permeabilidad es isótropa

Si se considera únicamente flujo *radial*, la Ec. 3.22 se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.22a)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Difusividad, la cual aparece en varios campos de ingeniería y ciencias. Esta ecuación es de gran importancia en la teoría de pruebas de presión.

III.10.1 Solución para Yacimiento Infinito

Después del periodo de almacenamiento, la variación de presión que se podría medir en la cara del pozo refleja la difusión de la presión a través del yacimiento. A tiempos grandes, la respuesta está influenciada por las fronteras del yacimiento, pero antes de estos efectos, la respuesta de presión *no* se entera de la existencia de fronteras y el yacimiento actúa como infinito en extensión. Este tiempo intermedio, entre tiempos cortos donde la respuesta está influenciada por el almacenamiento y tiempos grandes donde dominan los efectos de frontera, es conocido como *periodo de yacimiento infinito*.

Aunque existen varios tipos de flujos identificados durante este periodo de yacimiento infinito, uno de los más fácilmente identificados es el flujo radial, que es la base de la base de la interpretación de las técnicas de pruebas de presión para yacimientos comportándose infinitamente.

En ausencia de almacenamiento y daño, la variación de presión (respuesta de presión que se podría medir en la cara del pozo) bajo un comportamiento infinito en flujo radial, considerando al pozo como una fuente lineal (*source line*) bajo la condición de gasto constante y en forma adimensional, está dada por (Da Prat, G., 1990):

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left[-\frac{r_D^2}{4t_D} \right], \quad (3.23)$$

donde:

$$p_D = \frac{2\pi kh}{qB\mu} (p_i - p_{(r,t)}) \quad (3.24)$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu cr_w^2} \quad (3.25)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3.26)$$

Sustituyendo las Ecs. 3.24 a 3.26 en la Ec. 3.23, se tiene lo siguiente:

$$p_{(r,t)} = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} E_i \left[-\frac{r^2}{4\eta t} \right] \quad (3.27)$$

donde

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu c} \text{ es la difusividad hidráulica} \quad (3.28)$$

$p_{(r,t)}$ es la presión en un punto r al tiempo t . Ésta es la solución analítica para un yacimiento infinito (**Matthews and Russell, 1967**).

La integral exponencial, E_i , en la Ec. 3.27 puede ser aproximada como, Fig. 3.11:

$$E_i(-x) = \ln x + 0.5772 \text{ cuando } x < 0.01 \quad (3.29)$$

$$\text{donde } x = \frac{r_D^2}{4t_D} = \frac{r^2}{4\eta t} = \frac{r^2}{4kt} = \frac{r^2\phi\mu c}{4kt}$$

Cuando la Ec. 3.23 es evaluada en la cara del pozo (disparos) $r = r_w$, puede ser usada la misma aproximación logarítmica:

$$\text{En la cara del pozo se tiene que: } r_D = \frac{r_w}{r_w} = 1 \text{ y } x = \frac{1}{4t_D}$$

$$\text{Haciendo } \ln x = \ln \frac{1}{4t_D} = \ln(1) - \ln(4t_D) = 0 - [\ln(4) + \ln(t_D)]$$

Entonces la Ec. 3.23 se reduce a (note el cambio de signos):

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \left[\ln t_D + \frac{0.80907}{-\ln(4) + 0.5572} \right] + s, \quad (3.30)$$

donde s es el daño de la formación. El factor s en la Ec. 3.30 es representado como una caída de presión adimensional extra.

En unidades consistentes la Ec. 3.30 es, (nótese la incorporación de factor de daño s dentro del paréntesis)

$$p_{wf} = p_i - \frac{\ln(10)qB\mu}{4\pi kh} \left[\log \frac{kt}{\phi\mu cr_w^2} + \frac{0.35137}{\ln(10)} + \frac{0.8686s}{\ln(10)} \right]. \quad (3.31)$$

Para cambiar de \ln a \log se usó: $\ln x = \ln(10)\log x = 2.3025\log x$.

La Ec. 3.31 en sistema de unidades de campo es:

$$p_{wf} = p_i - 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \left[\log t + \log \frac{k}{\phi\mu cr_w^2} - 3.2274 + 0.8686s \right],$$

donde:

ρ : lb/pg² abs

q : BPD

k : mD

h : pie

μ : cp

t : horas

c : (lb/pg²)⁻¹

r_w : pie

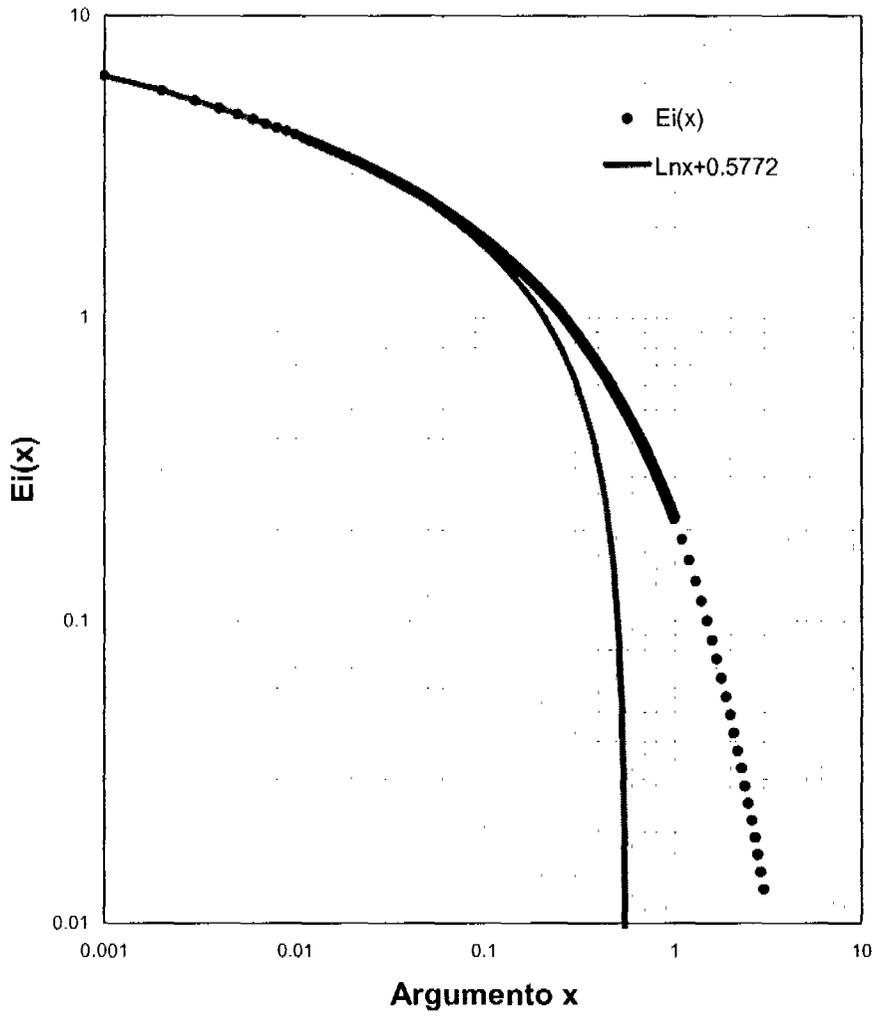


Fig. 3.11 Integral exponencial y su aproximación logarítmica

III.11 Solución Numérica de la Ecuación Diferencial Parcial

Si se considera únicamente flujo *radial*, la Ec. 3.22 se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{o} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.22a)$$

La Ec. 3.22a considera el flujo de una sola fase y en una dirección (r) en coordenadas cilíndricas, así como también $\frac{\phi \mu c}{k}$ son constantes.

Para resolver el problema *no lineal*, ej, cuando las propiedades ϕ , μ , c , y k dependen de la posición o presión, se tiene que partir de la Ec. 3.1 y considerando el término fuente, \tilde{q}_s :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \tilde{q}_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right). \quad (3.1)$$

La Ec. 3.1 fue la base para obtener la Ec. 3.5 (Considerando el término fuente, \tilde{q}_s , esto es.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \tilde{q}_s = \frac{\phi c_i}{B} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.5)$$

La Ec. 3.1 escrita en coordenadas cilíndricas es la siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \tilde{q}_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right). \quad (3.32)$$

El término \tilde{q}_s es el gasto volumétrico a condiciones estándar por unidad de volumen de roca.

III.11.1 Discretización de una Ecuación Diferencial Parcial

La Ec. 3.32 puede ser discretizada de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \tilde{q}_s = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right), \quad (3.32)$$

haciendo

$$u = \frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (3.33)$$

Entonces discretizando el lado derecho de la Ec. 3.32, usando *diferencias centrales*, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \approx \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i}. \quad (3.34)$$

Sustituyendo u por su definición, ej. Ec. 3.33, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r_i} \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta r_i} \approx \frac{1}{r_i \Delta r_i} \left[\left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \approx \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Ahora:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \quad (3.36)$$

Sustituyendo la Ec. 3.36 en la Ec. 3.35, el lado derecho de la Ec. 3.5 se convierte en:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu B} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \right) - \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \right). \quad 3.37$$

III.11.2 Discretización del Término de Acumulación

El término de acumulación, ej., el término del lado derecho de la Ec. 3.32, debe de ser expandido para expresarlo en términos de presión.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b) = \phi \frac{\partial b}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + b \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \phi b \left[\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = \phi b (c_f + c_r) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) = \phi b c_t \frac{\partial p}{\partial t},$$

donde

$$c_f = \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial p}, \quad c_r = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad \text{y} \quad c_t = c_f + c_r.$$

La discretización del término de acumulación mediante diferencias regresivas en tiempo es:

$$\phi b c_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(\phi b c_t)^n}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n), \quad (3.38)$$

donde $b = \frac{1}{B}$, el inverso del factor de volumen.

Sustituyendo las Ec. 3.37, 3.38 en la Ec. 3.32, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} & r_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \right) - r_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \right) + \tilde{q}_i^{n+1} = \\ & (\phi b c_i)^n (p_i^{n+1} - p_i^n) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Multiplicando la Ec. 3.39 por el volumen de roca de la celda i $Vr_i = (A\Delta z)_i$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & r_{i+\frac{1}{2}} (A\Delta z)_i \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \right) - r_{i-\frac{1}{2}} (A\Delta z)_i \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \right) + q_i^{n+1} = \\ & Vr_i (\phi b c_i)^n (p_i^{n+1} - p_i^n) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Nótese que $q_i = \tilde{q}_i * Vr_i$ y A_v es el área sombreada de la siguiente Fig. 3.12:

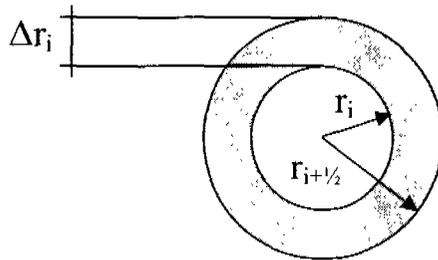


Fig. 3.12 Área entre radios

Si se aproxima el área A_v del lado derecho de la Ec. 3.40

$$A_v = 2\pi r_i \Delta r_i$$

y el volumen de roca en el lado izquierdo de la siguiente manera:

$$A = 2\pi r_i \Delta r_i \quad (3.41a)$$

$$Vr_i = \pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \Delta z_i, \quad (3.41b)$$

la Ec. 3.40 se convierte en:

$$\begin{aligned} & \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} 2\pi r_i \Delta r_i \Delta z_i \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r_{i+\frac{1}{2}}} \right) - \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i \Delta r_i} 2\pi r_i \Delta r_i \Delta z_i \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r_{i-\frac{1}{2}}} \right) + q_i^{n+1} = \\ & \frac{Vr_i (\phi b c_i)^n}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Simplificando se tiene lo siguiente:

$$T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (p_{i+1} - p_i)^{n+1} - T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (p_i - p_{i-1})^{n+1} + q_i^{n+1} = \frac{Vr_i (\phi b c_i)^n}{\Delta t} (p_i^{n+1} - p_i^n), \quad (3.43)$$

donde

$$T_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{A}{\Delta r} \right)_{i+\frac{1}{2}} (\lambda)_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.44a)$$

$$T_{i-\frac{1}{2}} = \left(\frac{A}{\Delta r} \right)_{i-\frac{1}{2}} (\lambda)_{i-\frac{1}{2}}, \quad (3.44b)$$

y

$$A_{i+\frac{1}{2}} = 2\pi r_{i+\frac{1}{2}} \Delta z. \quad (3.45)$$

El área A es el área de la celda en forma de cilindro, expuesta al flujo, Fig. 3.13; esto es:

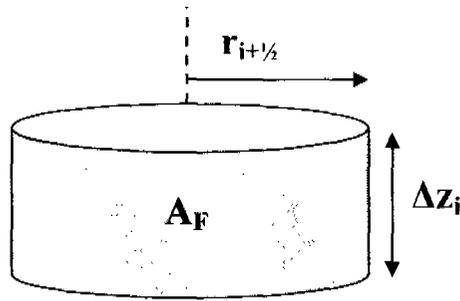


Fig. 3.13 Área de la celda

La movilidad está definida como:

$$\lambda_{i\pm 1/2}^{n+1} = \left(\frac{k}{\mu B} \right)_{i\pm 1/2}^{n+1}. \quad (3.46)$$

Desarrollando la Ec. 3.43 para las incógnitas p_{i-1}^{n+1} , p_i^{n+1} , p_{i+1}^{n+1} se tiene lo siguiente:

$$T_{i-1/2}^{n+1} p_{i-1}^{n+1} - \left(T_{i+1/2}^{n+1} + T_{i-1/2}^{n+1} + \frac{Vr_i (\phi bc_i)^n}{\Delta t} \right) p_i^{n+1} + T_{i+1/2}^{n+1} p_{i+1}^{n+1} = - \frac{Vr_i (\phi bc_i)^n}{\Delta t} p_i^n - q_i^{n+1}. \quad (3.47)$$

Evaluando todos los términos, excepto las presiones al tiempo n , ej., transmisibilidades y término fuente, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{a_i p_{i-1}^{n+1} + b_i p_i^{n+1} + c_i p_{i+1}^{n+1} = d_i}, \quad (3.48)$$

donde:

$$a_i = T_{i-1/2}^n \quad (3.49a)$$

$$b_i = - \left(T_{i+1/2}^n + T_{i-1/2}^n + \frac{Vr_i (\phi bc_i)^n}{\Delta t} \right) \quad (3.49b)$$

$$c_i = T_{i+1/2}^n \quad (3.49c)$$

$$d_i = - \left[\frac{Vr_i (\phi bc_i)^n}{\Delta t} p_i^n + q_i^n \right]. \quad (3.49d)$$

La Ec. 3.48 es similar en estructura a la que se obtuvo en el caso de yacimiento lineal en coordenadas cartesianas, ej Ec. 3.13 y por lo tanto para solucionar el sistema 3.48 se puede utilizar el método de Thomas, de la misma manera que se hizo para el caso lineal.

Algoritmo propuesto para la solución del sistema:

1. Lectura de información
2. Definición de Condiciones Iniciales
3. Definición de Condiciones de Frontera
4. Definir un $\Delta t=1$ seg.
5. Obtención de los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i .
6. Resolver con la subrutina de Thomas
7. Reasignar las nuevas presiones $(n+1)$ a (n)

$$p_i^n \Leftarrow p_i^{n+1}$$

8. Elegir otro Δt , por ejemplo, se puede incrementar el anterior, $\Delta t=1.2*\Delta t$
9. Regresar al paso 5.

El paso 5 se puede realizar de la siguiente manera,

Si se realiza la siguiente convención:

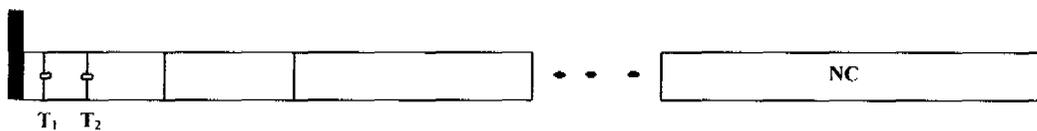


Fig. 3.14 Transmisibilidades

Para todos los nodos se calculan las transmisibilidades como se muestra en la Fig. 3.14 y se nombran como, T_1 y T_2 , entonces se tiene lo siguiente, Fig 3.14a:

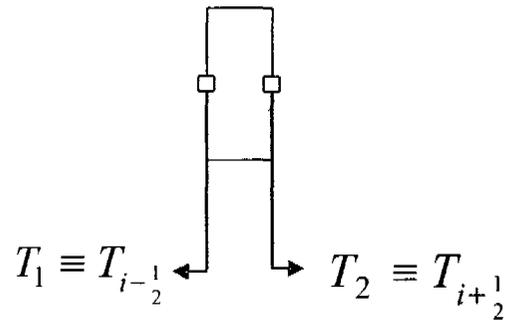


Fig. 3.14a Transmisibilidad

Por lo tanto, en el nodo 1 se determinará únicamente la transmisibilidad en 2, ya que la transmisibilidad en 1 es cero. En esta formulación el gasto se extrae de alguna manera de la celda 1. En el ultimo nodo, NC, la transmisibilidad a calcular será la 1, la transmisibilidad en 2 será igual a 0 (no flujo en la frontera externa). El resto de los nodos tendrán las dos transmisibilidades diferentes de cero.

De esta manera no hay necesidad de crear vectores para almacenar variables. Se analiza nodo por nodo y se obtienen los coeficientes. Ver el algoritmo escrito en F90, Ecs. 3.47 y 3.48.

DO i=1,NC

NX=NC

IF(i /= 1) THEN

Area=2.0*pi*rb(i-1)*Dz

Dr=r(i)-r(i-1)

TOX1=(Area/Dr)*(Perm(i)*bo(l)/Vo(l))

ELSE

TOX1=0.0D0

ENDIF

IF(i /= NX) THEN

Area=2.0*pi*rb(i)*Dz

Dr=r(i+1)-r(i)

TOX2=(Area/Dr)*(Perm(i+1)*bo(l+1)/Vo(l+1))

ELSE

TOX2=0.0D0

ENDIF

Aux01= (Vr(i)/Dt)*(fi(i)*bo(i)*c_total)

Coef_a(i)= tox1

Coef_b(i)=-(tox1+tox2+Aux01)

Coef_c(i)= tox2

Coef_d(i)=-aux01*prs_old(i)

!Gasto en el nodo 1

if (i==1)Coef_d(i)=Coef_d(i)-Qo(i)

END DO

La convención usada para enumerar los nodos y fronteras es la siguiente: la frontera de los nodos (rb) está referida al nodo inmediato a su izquierda. Aquí el nodo 0 es imaginario, hasta ahora no se ha considerado. Esto se hará posteriormente.

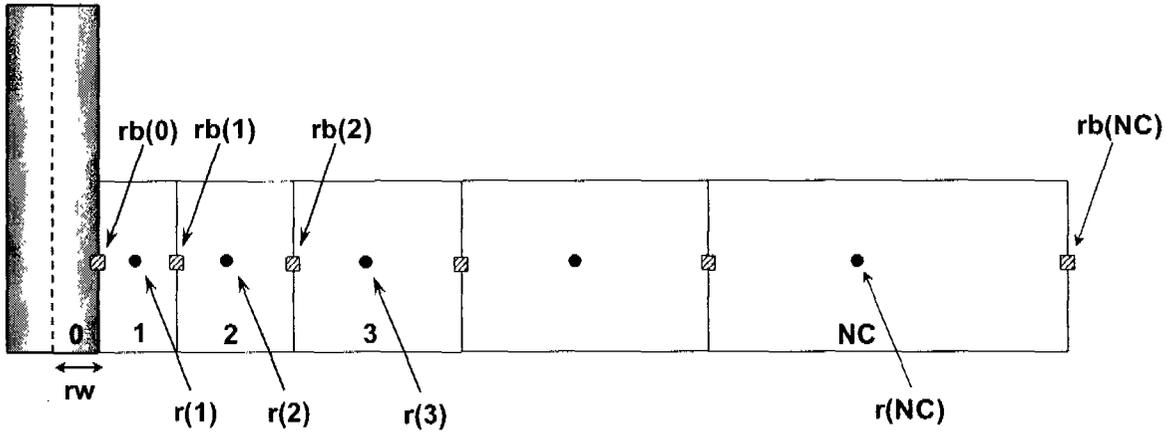


Fig. 3.15 Enumeración de nodos y fronteras



IV TOPICOS ESPECIALES DE SIMULACION NUMERICA

IV.1 Modelado de Pozos

El problema de representar pozos en simulación numérica es fundamentalmente cuestión de resolución y escala, (**Peaceman, D. W., 1977**). Debido a que los bloques son de dos o tres órdenes de magnitud más grandes que el diámetro del pozo, éste es raramente modelado en forma explícita. Por lo tanto, la presión del bloque es diferente a la presión del pozo.

Una relación entre la presión del bloque y la presión del pozo puede ser introducida al simulador mediante el uso del Índice de Productividad, J_w . Este índice captura la relación entre la presión en el pozo y la del yacimiento. Específicamente, para cada bloque (i,j,k) interceptado por un pozo, la magnitud de J_w es requerida para relacionar el gasto del pozo ya sea de inyección o producción, con la presión del bloque, $p_{b,ijk}$ y la presión del pozo, $p_{wf,ijk}$:

$$q_{w,ijk} = \frac{J_w}{\mu} (p_{b,ijk} - p_{wf,ijk}), \quad (4.1)$$

donde μ es la viscosidad del fluido. Esta definición es válida para una sola fase. Para flujo multifásico, la Ec. 4.1 se generaliza a:

$$q_{f,ijk} = J_w \frac{k_{r,f}}{\mu_p} (p_{b,f,ijk} - p_{wf,ijk}), \quad (4.2)$$

donde $f = o, g, w$ y $k_{r,f}$ es la permeabilidad relativa a la fase f .

IV.1.1 Modelo de van Poolen

van Poolen fue uno de los primeros en desarrollar un modelo de pozo en un simulador de yacimientos. Este modelo generalmente no se usa hoy en día, aunque históricamente es notable. van Poolen utilizó la ecuación de flujo pseudoestacionario, Ec. 4.3

$$P_{wf} = P_b - \frac{q\mu B \left[\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) + s - \frac{1}{2} \right]}{2\pi k \Delta z} \quad (4.3)$$

En este modelo, el factor r_e en la Ec. 4.3 representa el radio de la frontera externa, en este caso sería el radio del bloque que aloja al pozo. En otras palabras, el radio equivalente del bloque del pozo r_{eq} se calcula a partir de:

$$\pi r_{eq}^2 = \Delta x \Delta y \Rightarrow r_{eq} = \frac{\Delta x \Delta y}{\pi} \quad (4.4)$$

La Ec. 4.4, para un bloque cuadrado ($\Delta x = \Delta y$), se reduce a:

$$r_{eq} = 0.5642 \Delta x \quad (4.4a)$$

Para un yacimiento isótropo

$$P_{wf} = P_b - \frac{q\mu B \left[\ln\left(\frac{r_{eq}}{r_w}\right) + s - \frac{1}{2} \right]}{2\pi k \Delta z} \quad (4.5)$$

Para un yacimiento anisótropo:

$$P_{wf} = P_b - \frac{q\mu B \left[\ln\left(\frac{r_{eq}}{r_w}\right) + s - \frac{1}{2} \right]}{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z} \quad (4.5a)$$

IV.1.2 Modelo de Peaceman

En este modelo se realizaron soluciones para presión considerando varios tamaños de celdas, (**Peaceman, D. W., 1977**). Los resultados muestran que un radio efectivo del bloque, donde la presión calculada numéricamente es igual a la presión del pozo fluyendo:

Para un yacimiento isótropo:

$$r_o = 0.14(\Delta x^2 + \Delta y^2). \quad (4.6)$$

Para un yacimiento anisótropo:

$$r_o = 0.28 \left[\frac{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta x^2 + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta y^2}{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{\frac{1}{4}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } 0.5 \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq 2 \quad (4.7)$$

Para un pozo drenando verticalmente el Índice de Productividad es:

$$J_w = \left[\frac{2\pi \cdot k_x k_y \Delta z}{\ln \left(\frac{r_o}{r_w} \right) + s - \frac{1}{2}} \right]. \quad (4.8)$$

Por lo tanto, considerando las Ecs. 4.6, 4.7, y 4.8 la presión de fondo fluyendo es:

$$p_{wf} = p_b - \frac{q\mu B}{J_w}. \quad (4.9)$$

Expresándolo para el bloque ijk :

$$p_{wf,ijk} = p_{b,ijk} - \frac{q_{ijk} \mu_{ijk} B_{ijk}}{J_{w,ijk}}. \quad (4.9a)$$

IV.2 Daño y Almacenamiento

A continuación se presentará el análisis para incluir el factor de daño y almacenamiento en la ecuación discretizada, Ec. 3.47.

Analizando el nodo 1 y el pozo, obtendremos la expresión que proporcionará el gasto que se incluyó *arbitrariamente* y se muestra en la ecuación final, Ec. 3.47.

Partiendo de la ecuación de Darcy para flujo radial se tiene lo siguiente:

$$v = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.14)$$

La velocidad se puede expresar en términos del gasto y el área:

$$q = A(v) = 2\pi rh(v). \quad (4.15)$$

Sustituyendo la Ec. 4.15 en la Ec. 4.14 se tiene lo siguiente.

$$q = - \frac{2\pi kh}{B\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.16)$$

La Ec. 4.16 es la condición de frontera entre el nodo 1 y el exterior (pozo). Nótese que el gasto está a condiciones de yacimiento. Discretizando la Ec. 4.16 se tiene lo siguiente:

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w}^{n+1} = r_w \frac{p_1^{n+1} - p_0^{n+1}}{r_1 - r_o} = \left(\frac{r}{\Delta r} \right)_{r_o} (p_1 - p_0)^{n+1} = \left(\frac{qB\mu}{2\pi kh} \right)_{r_o}^{n+1} \quad (4.17)$$

La Ec. 4.17 también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$q = - \left(\frac{2\pi r h k}{\Delta r \mu B} \right)_{r_w}^{n+1} (p_1 - p_0)^{n+1} = - \left(\frac{A}{\Delta r} \right)_{r_w} (\lambda)_{r_w} (p_1 - p_0)^{n+1} = - T_2^{n+1} (p_1 - p_0)^{n+1} \quad (4.18)$$

La Ec. 4.18 puede ser considerada en lugar del término explícito q_i^{n+1} en la Ec. 3.47 y contabilizar el coeficiente $a(1)$, es decir $a(1) \neq 0$. Lo anterior será útil cuando se introduzca el factor de daño y el factor de almacenamiento en la ecuación general, Ec. 3.47.

Considerando flujo pseudoestacionario, ej. $\frac{\partial p}{\partial t} = cte$, la ecuación de afluencia es,

$$p_e - p_{wf} = - \frac{q\mu}{2\pi kh} \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right) \Rightarrow q_{sf} = - \frac{2\pi kh (p_e - p_{wf})}{\mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} \quad (4.19)$$

Considerando almacenamiento en el pozo, Ec. 4.13, el gasto que aporta la formación es:

$$q_{sup} B = q_{wb} + q_{sf} \Rightarrow q_{sup} = \frac{q_{wb}}{B} + \frac{q_{sf}}{B} \Rightarrow q_{sup} = \frac{C}{B} \frac{\partial p_{wf}}{\partial t} - \frac{2\pi kh}{\mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} (p_e - p_{wf}) \quad (4.20)$$

donde:

$$q_{sf} = - \frac{2\pi kh (p_e - p_{wf})}{\mu \left(\ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} \quad r_e = r_{1+1/2} \quad p_e = p_1$$

Haciendo

$$r_e = r_{1+1/2} \quad p_e = p_1 \quad \frac{\partial p_{wf}}{\partial t} = \frac{p_{wf}^{n+1} - p_{wf}^n}{\Delta t}$$

La Ec. 4.20 se convierte en:

$$q_{sup} = \frac{C}{B} \frac{p_{wf}^{n+1} - p_{wf}^n}{\Delta t} - \frac{2\pi kh}{B\mu \left(\ln \frac{r_{1+1/2}}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} (p_1 - p_{wf})^{n+1} \quad (4.21)$$

La Ec. 4.21 puede ser introducida al sistema tridiagonal y resolver para p_{wf} de la siguiente manera:

La Ec. 4.21 se puede reescribir como:

$$\frac{C}{B\Delta t} p_{wf}^{n+1} - \frac{C}{B\Delta t} p_{wf}^n - \frac{2\pi kh}{B\mu \left(\ln \frac{r_{1+1/2}}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} p_1^{n+1} + \frac{2\pi kh}{B\mu \left(\ln \frac{r_{1+1/2}}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} p_{wf}^{n+1} = q_{sup}$$

Las incógnitas son p_{wf}^{n+1}, p_1^{n+1} , los términos restantes son conocidos. Agrupando los términos y cambiando el subíndice de p_{wf}^{n+1} por p_0^{n+1} se tiene lo siguiente:

$$-\left[\frac{C}{B\Delta t} + \frac{2\pi kh}{B\mu \left(\ln \frac{r_{1+1/2}}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} \right] p_0^{n+1} + \frac{2\pi kh}{B\mu \left(\ln \frac{r_{1+1/2}}{r_w} - \frac{1}{2} + s \right)} p_1^{n+1} = -\left[q_{sup} + \frac{C}{B\Delta t} p_{wf}^n \right] \quad (4.22)$$

Nótese el cambio de signo en todos los términos de la Ec. 4.22

Haciendo

$$\ln\left(\frac{r_{1+1/2}}{r_w}\right) - \frac{1}{2} \cong \frac{\Delta r_1}{r_w} \quad ; \quad \Delta r_1 = r_1 - r_w. \quad (4.22a)$$

$$b_0 = - \left[\frac{C}{B\Delta t} + \frac{2\pi(kh)_1}{(B\mu)_1 \left(\frac{\Delta r_1}{r_w} + s \right)} \right]. \quad (4.22b)$$

$$c_0 = \frac{2\pi(kh)_1}{(B\mu)_1 \left(\frac{\Delta r_1}{r_w} + s \right)}. \quad (4.22c)$$

$$d_0 = - \left[q_{\text{sup}} + \frac{C}{B\Delta t} p_{wf}^n \right]. \quad (4.22d)$$

Nótese que el coeficiente $a_0 = 0$, es similar a los casos anteriores. La Ec. 4.22 se convierte en:

$$b_0 p_0^{n+1} + c_0 p_1^{n+1} = d_0. \quad (4.23)$$

La Ec. 4.23 puede incorporarse fácilmente al sistema Ec. 3.48 y resolver simultáneamente para todas las presiones incluidas p_{wf} la cual es p_0 . Entonces el sistema a resolver es el siguiente:

IV.3 Yacimientos fracturados

En el mundo se estima que el 20 por ciento de los recursos petroleros se encuentran en yacimientos naturalmente fracturados (YNF), que son aquellos que están formados por rocas discontinuas, donde los bloques han perdido cohesión por procesos de deformación y alteración, Fig. 4.1. Este aspecto repercute en cómo fluyen los hidrocarburos y en la manera particular en la que deben explotarse estos yacimientos. Estos yacimientos pueden ser colosales, aunque sus poros pueden ser microscópicos. La permeabilidad de la matriz puede ser inconmensurablemente baja, mientras que los fluidos fluyen como ríos a través de las fracturas.

Actualmente, existe un interés creciente en la explotación adecuada de los YNF, debido a que sus pozos son de alta productividad, con recuperaciones importantes de hidrocarburos, por lo que resultan muy atractivos desde el punto de vista económico. En México, el 94.5 por ciento de la producción y el 67 por ciento de las reservas probadas de hidrocarburos están en YNF. Además de que más del 90 por ciento de los yacimientos de hidrocarburos nacionales se ubican en la clasificación de naturalmente fracturados. (IMP. 2000).



Fig. 4.1 Roca fracturada

IV.3.1 Modelo de Doble Porosidad

Basándose en la teoría de flujo de fluidos en medios porosos fracturados desarrollada en 1960 por Barenblantt y Zheltov, Warren y Root introdujeron el concepto de modelos de doble porosidad en la ingeniería de yacimientos. El modelo idealizado de una red de fracturas, altamente interconectadas, la cual se abastece de fluido de numerosos bloques de matriz, se muestra a continuación Fig 4.2:

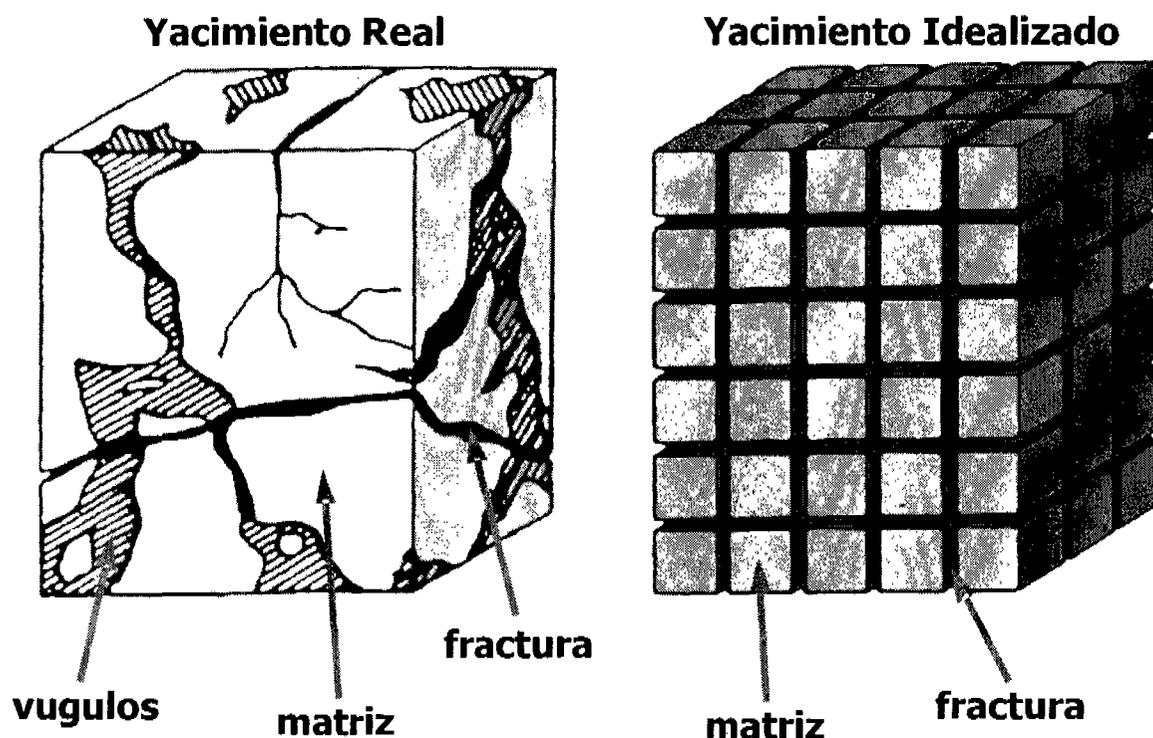


Fig. 4.2 Modelo de doble porosidad

En un modelo de doble porosidad, los bloques de matriz almacenan el fluido y las fracturas lo *conducen* hacia los pozos, como se muestra a continuación Figs. 4.3a y 4.3b:

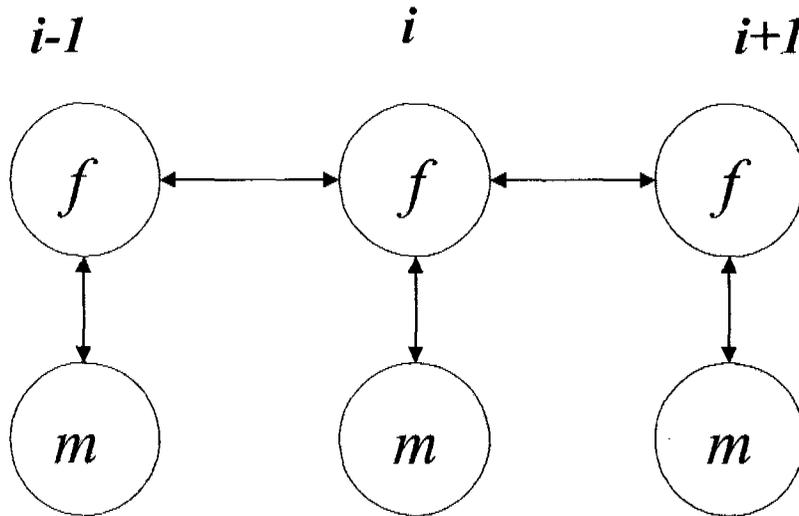


Fig. 4.3a Sistema Matriz-Fractura

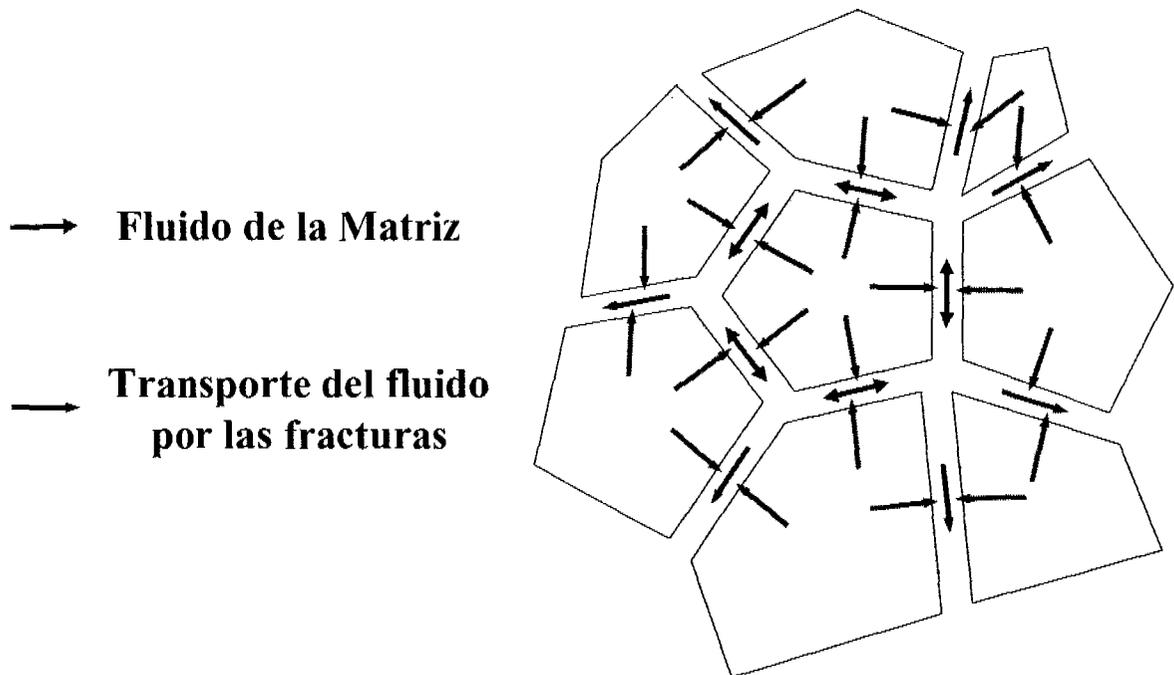


Fig. 4.3b Sistema Matriz-Fractura

IV.3.2 Flujo de Fluidos en medios Porosos Fracturados

La ecuación de difusividad, Ec. 3.22a, que gobierna el flujo de un fluido monofásico en coordenadas radiales, es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k_f} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.22a)$$

Considerando el modelo de doble porosidad, la Ec. 3.22a se convierte en:

Para el sistema de fracturas:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} - q'_{mf} = \frac{(\phi \mu c)_f}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (4.28a)$$

Para el sistema de los bloques de matriz es:

$$\frac{\partial^2 p_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_m}{\partial r} + q'_{mf} = \frac{(\phi \mu c)_m}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (4.28b)$$

Anulando los términos de flujo, la Ec. 4.28b se reduce al modelo de doble porosidad, generalmente conocido como modelo de Warren & Root:

$$+ q'_{mf} = \frac{(\phi \mu c)_m}{k_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (4.29)$$

Nótese que para el sistema de fracturas, Ec. 4.28a, el signo de q'_{mf} es negativo, y por balance de masa el signo para el sistema de bloques de matriz, Ec. 4.29, debe ser (+). Además, nótese que el término de flujo NO existe para el sistema de los bloques de matriz (Modelo de doble porosidad). El sistema de fracturas es continuo y el sistema de bloques de matriz es discontinuo entre celdas numéricas.

El término q'_{mf} está dado por:

$$q'_{mf} = \frac{\sigma k_m}{\mu_m B_m} (p_f - p_m) \Rightarrow q_{mf} = q'_{mf} V_r \Rightarrow q_{mf} = \frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} (p_f - p_m). \quad (4.30)$$

La discretización de la Ec. 4.28a es la siguiente:

$$T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_i (\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} - q_{mf,i} =$$

$$- \frac{Vr_i (\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1} \quad (4.31)$$

La Ec. 4.29 discretizada es:

$$+ q_{mf,i} = \frac{(Vr_i \phi bc_i)_{i,m}^n}{\Delta t} (p_{m,i}^{n+1} - p_{m,i}^n). \quad (4.32)$$

Sustituyendo la Ec. 4.30 en las Ecs. 4.31 y 4.32, se tiene lo siguiente

$$T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + T_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + \frac{Vr_i (\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} - \left(\frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \right)_i (p_{f,i}^{n+1} - p_{m,i}^{n+1}) =$$

$$- \frac{Vr_i (\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1} \quad (4.33)$$

y

$$+ \left(\frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \right)_i (p_{f,i}^{n+1} - p_{m,i}^{n+1}) = \frac{(\phi bc_i)_m^n}{\Delta t} (p_{m,i}^{n+1} - p_{m,i}^n). \quad (4.34)$$

El símbolo σ es conocido como el factor de forma; establece la relación entre el área expuesta al flujo entre los bloques de matriz y las fracturas que los rodean. La forma más *simple* para definir el factor de forma es la siguiente:

$\sigma = \frac{12}{L^2}$, donde L es una longitud característica del bloque de matriz. En este caso

$$L = L_x = L_y = L_z.$$

Si las longitudes son diferentes entonces:

$$\sigma = 4 \left[\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right].$$

Es muy importante mantener en mente que los bloques *NO* son paralelepípedos como los mostrados en el modelo de cubos de azúcar Fig.4.6; se idealizan de esa manera. Esto se puede visualizar mejor suponiendo varios valores de L_x , L_y y L_z , para obtener un mismo factor de forma.

Por ejemplo;

Si $L_x = 3, L_y = 3, L_z = 3, \quad \sigma = 1.33$

Si $L_x = 10, L_y = 2.48, L_z = 2.5, \quad \sigma = 1.33$

De esta manera cualquier forma proporcionaría el mismo σ .

Podemos resolver para la incógnita $p_{m,i}^{n+1}$ de la Ec. 4.34 y sustituirla en la Ec. 4.33:

Haciendo

$$W_i = \left[\begin{array}{c} \sigma V_r k_m \\ \mu_m B_m \end{array} \right]_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \text{IMax}$$

$$Y_i = \frac{(V_r \phi b c_i)_{m,i}}{\Delta t},$$

la Ec. 4.34 es:

$$W_i(p_{f,i}^{n+1} - p_{m,i}^{n+1}) = Y_i(p_{m,i}^{n+1} - p_{m,i}^n).$$

Resolviendo para $p_{m,i}^{n+1}$:

$$p_{m,i}^{n+1} = \frac{W_i p_{f,i}^{n+1} + Y_i p_{m,i}^n}{W_i + Y_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.35)$$

Sustituyendo la Ec. 4.35 en la Ec. 4.33 y considerando $T_i^{n+1} \cong T_i^n$:

$$T_{i-\frac{1}{2}} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+\frac{1}{2}} + T_{i-\frac{1}{2}} + \frac{Vr_i (\phi b c_i)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2}} p_{f,i+1}^{n+1} - \underbrace{\left(\frac{\sigma V_r k_m}{\mu_m B_m} \right)}_i \left(p_{f,i}^{n+1} - \left[\frac{W_i p_{f,i}^{n+1} + Y_i p_{m,i}^n}{W_i + Y_i} \right] \right) = - \frac{Vr_i (\phi b c_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1} \quad (4.36)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots, n$

La Ec. 4.36 ahora tiene únicamente como incógnitas a $p_{f,i}^{n+1}$. Agrupando los términos semejantes se tiene lo siguiente:

$$T_{i-2}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+2}^{n+1} + T_{i-2}^{n+1} + \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+2}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} - W_i p_{f,i}^{n+1} + W_i \begin{bmatrix} W_i p_{f,i}^{n+1} + Y_i p_{m,i}^n \\ W_i + Y_i \end{bmatrix} =$$

$$- \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1}.$$

$$T_{i-2}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+2}^{n+1} + T_{i-2}^{n+1} + \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+2}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} - W_i p_{f,i}^{n+1} + \frac{W_i^2}{W_i + Y_i} p_{f,i}^{n+1} + \frac{W_i Y_i}{W_i + Y_i} p_{m,i}^n =$$

$$- \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1}.$$

$$T_{i-2}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+2}^{n+1} + T_{i-2}^{n+1} + \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} + W_i - \frac{W_i^2}{W_i + Y_i} \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+2}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} + \frac{W_i Y_i}{W_i + Y_i} p_{m,i}^n =$$

$$- \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^{n+1}.$$

Evaluando el gasto al tiempo n :

$$T_{i-2}^{n+1} p_{f,i-1}^{n+1} - \left(T_{i+2}^{n+1} + T_{i-2}^{n+1} + \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} - \left[\frac{W_i^2}{W_i + Y_i} - W_i \right] \right) p_{f,i}^{n+1} + T_{i+2}^{n+1} p_{f,i+1}^{n+1} =$$

$$- \frac{Vr_i(\phi bc_i)_f^n}{\Delta t} p_{f,i}^n - q_i^n - \frac{W_i Y_i}{W_i + Y_i} p_{m,i}^n$$

(4.37)

para $i = 0, 2, \dots, n$

La Ec. 4.37 se resuelve de la misma forma como se ha hecho anteriormente.

Primero se soluciona para $p_{f,i}^{n+1}$. Después, para conocer la $p_{m,i}^{n+1}$ se utiliza la Ec.

4.35.

IV.3.3 Solución Analítica – Solución de Warren & Root

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[\text{Ln } t_D + 0.80908 + E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) - E_i \left(\frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right) \right] + S, \quad (4.38)$$

para un yacimiento finito, y:

$$P_{wD} = \left(\frac{2}{r_D^2 - 1} \right) \left[\frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left(1 - e^{\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}} \right) \right] - \frac{3r_D^4 - 4r_D^4 \text{Ln } r_D - 2r_D^2 - 1}{4(r_D^2 - 1)^2}, \quad (4.39)$$

para un yacimiento finito, donde:

$$\omega = \frac{(\phi c)_f}{(\phi c)_f + (\phi c)_m}$$

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2 \quad (4.40)$$

$$P_D = \frac{k_f h [P_i - P(r, t)]}{141.2 q B \mu} \quad (4.41)$$

$$t_D = \frac{0.0002637 k_f t}{[(\phi c)_f + (\phi c)_m] \mu r_w^2} \quad (4.42)$$

IV.4 Solución Numérica de las Ecuaciones para Flujo Multifásico

IV.4.1 Ecuaciones para Flujo Multifásico

Las ecuaciones que gobiernan el flujo multifásico en medios porosos se muestra a continuación. Su obtención es similar al procedimiento utilizado para una sola fase, capítulo III.

Fase Aceite:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right). \quad (4.43)$$

Fase Gas:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} R_s \left(\frac{\partial p_o}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_g}{B_g} + R_s \frac{\phi S_o}{B_o} \right). \quad (4.44)$$

Fase Agua:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right), \quad (4.45)$$

con las siguientes restricciones:

$$S_o + S_g + S_w = 1 \quad (4.46)$$

$$P_{C_{go}} = p_g - p_o \quad (4.47)$$

y

$$P_{C_{wo}} = p_o - p_w. \quad (4.48)$$

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$p_p(x, 0) = p_{o,i} \quad (4.49)$$

$$S_p(x, 0) = S_{p,o,i} \quad (4.50)$$

donde $p = o, g, w$.

Las condiciones de frontera se expresan, en $x=0$, y $x=L$, sin haber flujo para todos los fluidos, $p = o, g, w$:

$$\left(\frac{\partial p_p}{\partial x} \right)_{x=0, x=L} = 0; \quad t > 0 \quad (4.51)$$

Expresiones idénticas son expresadas para las direcciones y y z .

IV.4.2 Aproximación Mediante Diferencias Finitas

La aproximación, en diferencias finitas de las Ecs. 4.43 a 4.45 en el nodo i , mediante un esquema implícito se expresa, a través de operadores en diferencias, como:

Fase Aceite:

$$\Delta[T_o(\Delta p_o)]_i^{n+1} + q_{o,i} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_i \left(\begin{array}{c} \phi(1 - S_g - S_w) \\ B_o \end{array} \right)_i. \quad (4.52)$$

Fase Gas:

$$\Delta[T_g(\Delta p_o + \Delta P_{c_{go}})]_i^{n+1} + \Delta[T_o R_s(\Delta p_o)]_i^{n+1} + q_{g,i}^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_i \left(\begin{array}{c} \phi S_g + \phi R_s(1 - S_g - S_w) \\ B_g \quad B_o \end{array} \right)_i. \quad (4.53)$$

Fase Agua:

$$\Delta[T_w(\Delta p_o - \Delta P_{c_{wo}})]_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_i \left(\begin{array}{c} \phi S_w \\ B_w \end{array} \right)_i, \quad (4.54)$$

donde

$$i = 1, 2, \dots, l. \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Las relaciones adicionales, Ecs. 4.52 a 4.54, fueron acopladas en las ecuaciones de flujo en diferencias. Con la substitución anterior se han eliminado 3 incógnitas, ej. (p_g, p_w, S_o) . El sistema a resolver será de tres ecuaciones con tres incógnitas, ej. $(p_o, S_g, S_w)_i, i=1, 2, \dots, l$.

IV.4.3 Planteamiento de la Solución

Debido a que el sistema de ecuaciones, Ecs. 4.52 a 4.54 es altamente no lineal, se tiene que recurrir a un método iterativo para linealizarlo; por ejemplo, el método de Newton-Raphson. Posteriormente el sistema resultante se puede resolver con cualquier algoritmo que resuelva un sistema de ecuaciones lineales dispersas. **(Sherman, A. H., 1978).**

El sistema a resolver tendrá la siguiente estructura:

$$a_i x_{i-1}^{n+1} + b_i x_i^{n+1} + c_i x_{i+1}^{n+1} = d_i, \tag{4.55}$$

donde a, b, c son matrices de 3×3 y contienen las derivadas de las ecuaciones, Ecs. 4.52 a 4.54 con respecto a todas las incógnitas $x^T = (p_o, S_g, S_w)_i$. Por ejemplo, considerando una sola dirección, x , el sistema es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{oo} & a_{og} & a_{ow} \\ a_{go} & a_{gg} & a_{gw} \\ a_{wo} & a_{wg} & a_{ww} \end{bmatrix}_i^{(v)} \begin{bmatrix} b_{oo} & b_{og} & b_{ow} \\ b_{go} & b_{gg} & b_{gw} \\ b_{wo} & b_{wg} & b_{ww} \end{bmatrix}_i^{(v)} \begin{bmatrix} c_{oo} & c_{og} & c_{ow} \\ c_{go} & c_{gg} & c_{gw} \\ c_{wo} & c_{wg} & c_{ww} \end{bmatrix}_i^{(v)} \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_{i-1}^{(v+1)} \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_i^{(v+1)} \begin{bmatrix} \delta p_o \\ \delta S_g \\ \delta S_w \end{bmatrix}_{i+1}^{(v+1)} = - \begin{bmatrix} F_o \\ F_g \\ F_w \end{bmatrix}_i^{(v)} \tag{4.56}$$

Los elementos se definen de la siguiente manera:

$$b_{po,i} = \frac{\partial F_{p,i}}{\partial p_{o,i}}$$

$$b_{pg,i} = \frac{\partial F_{p,i}}{\partial S_{g,i}}$$

y,

$$b_{pw,i} = \frac{\partial F_{p,i}}{\partial S_{w,i}},$$

donde, $p=o,g,w$.

$a_{pp,i}$ y $c_{pp,i}$ se definen similarmente. Fácilmente, el sistema, Ecs. 4.56 es extendido a tres dimensiones para su solución.

IV.4.4 Método Totalmente Implícito: Método General

Se comienza definiendo la siguiente función de residuos:

$$F_i(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})^{n+1} = T_{i+2}^{n+1} [p_{i+1} - p_i]^{n+1} - T_{i-2}^{n+1} [p_i - p_{i-1}]^{n+1} + q_i^{n+1} - \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_i \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} = 0 \quad (4.57)$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Note que la función de residuos del nodo i depende de las incógnitas p_{i-1} , p_i , p_{i+1}

El proceso iterativo para resolver , p_i^{n+1} $i=1,2,\dots,l$, se establece expandiendo la Ec. 4.57 mediante una serie de Taylor truncada, alrededor del nivel de iteración (v) , de la que sólo se conservan los términos de menor orden:

$$F_i^{(v+1)}(p_{i-1}, p_i, p_{i+1}) \approx F_i^{(v)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i-1}} \right)^{(v)} \delta p_{i-1}^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_i} \right)^{(v)} \delta p_i^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i+1}} \right)^{(v)} \delta p_{i+1}^{(v+1)} = 0 \quad (4.58)$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

De ahí que:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i-1}} \right)^{(v)} \delta p_{i-1}^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_i} \right)^{(v)} \delta p_i^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i+1}} \right)^{(v)} \delta p_{i+1}^{(v+1)} = -F_i^{(v)} \quad (4.59)$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

donde,

$$\delta p_i^{(v+1)} = p_i^{(v+1)} - p_i^{(v)} \quad (4.60)$$

son los cambios iterativos de las incógnitas

La forma que adopta la Ec. 4.57 en los nodos $i=1$ e $i=l$, debido al acoplamiento de las condiciones de frontera, es:

$$F_1^{(v+1)}(p_1, p_2) \approx F_1^{(v)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_1} \right)^{(v)} \delta p_1^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right)^{(v)} \delta p_2^{(v+1)} = 0 \quad (4.61)$$

y

$$F_l^{(v+1)}(p_{l-1}, p_l) \approx F_l^{(v)} + \left(\frac{\partial F_l}{\partial p_{l-1}} \right)^{(v)} \delta p_{l-1}^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_l}{\partial p_l} \right)^{(v)} \delta p_l^{(v+1)} = 0 \quad (4.62)$$

Se tiene así, el siguiente sistema algebraico de ecuaciones lineales:

Para $i=1$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_1} \right)^{(v)} \delta p_1^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right)^{(v)} \delta p_2^{(v+1)} = -F_1^{(v)} \quad (4.63)$$

Para $i=2, 3, \dots, l-1$,

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i-1}} \right)^{(v)} \delta p_{i-1}^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_i} \right)^{(v)} \delta p_i^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_{i+1}} \right)^{(v)} \delta p_{i+1}^{(v+1)} = -F_i^{(v)} \quad (4.64)$$

y para $i=l$

$$\left(\frac{\partial F_l}{\partial p_{l-1}} \right)^{(v)} \delta p_{l-1}^{(v+1)} + \left(\frac{\partial F_l}{\partial p_l} \right)^{(v)} \delta p_l^{(v+1)} = -F_l^{(v)} \quad (4.65)$$

El proceso iterativo de solución inicia con el siguiente estimado:

Para $i=1, 2, 3, \dots, l$

$$p_i^{(0)} = p_i''; \quad (4.66)$$

donde J es la matriz de derivadas parciales o matriz Jacobiana, cuyos elementos son:

$$a_i = \begin{pmatrix} \delta F_i \\ \delta p_{i-1} \end{pmatrix} = T_{i-1} - \Delta_x p_{i-2} \begin{pmatrix} \partial T_{i-1} \\ \partial p_{i-1} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$b_i = \begin{pmatrix} \delta F_i \\ \delta p_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} T_{i+1} + T_{i-1} \end{pmatrix} + \Delta_x \left(p_{i+1} \begin{pmatrix} \partial T_{i+1} \\ \partial p_i \end{pmatrix} - p_{i-1} \begin{pmatrix} \partial T_{i-1} \\ \partial p_i \end{pmatrix} \right) - \frac{Vr_i}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{pmatrix} \phi \\ B \end{pmatrix}_i \quad (4.72)$$

$$c_i = \begin{pmatrix} \delta F_i \\ \delta p_{i+1} \end{pmatrix} = T_{i+1} + \Delta_x p_{i+2} \begin{pmatrix} \partial T_{i+1} \\ \partial p_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

V ASPECTOS PRÁCTICOS DE LA SIMULACIÓN

A lo largo de los capítulos anteriores se han presentado conceptos que ayudan a conocer los fundamentos básicos de la Simulación Numérica de Yacimientos. Además, se han trabajado, desarrollado, discretizado y resuelto ecuaciones que definen algunos casos de flujo de fluidos en medios porosos y sirven también para poder realizar nuestros propios simuladores.

El propósito de incluir este capítulo en la tesis, es dar un panorama muy general de las actividades que están comprendidas en un proceso de Simulación Numérica de Yacimientos y, a la vez introducir un poco al lector en las actividades específicas más comunes que realizan los profesionales del área, para obtener los mejores resultados.

V.1 Planeación de un estudio de Simulación Numérica de Yacimientos.

El procedimiento que se sigue en una Simulación Numérica de Yacimientos depende de muchos factores. A continuación se muestra una serie de pasos que pueden aplicarse:

1.- Definición del Modelo Geológico. Distribución de las propiedades de la roca y la geometría de la estructura del yacimiento. En esta información entra el establecer los límites del yacimiento, características de la formación productora, fallas, discontinuidades, características del acuífero (si existe), etc.

2.- Especificación de las Propiedades Termodinámicas de los Fluidos. Distribución de las propiedades de los fluidos contenidos en el yacimiento como son: factores de volumen, relación de solubilidad, viscosidades, compresibilidades, presión de burbujeo, etc.

3.- Selección de la Malla de Simulación. Considerar la geometría del yacimiento para elegir la malla acorde a la forma del yacimiento.

4.- Inicialización. Asignar las propiedades estáticas y dinámicas necesarias a las celdas numéricas en las que se dividió el yacimiento. Así como también saturaciones y presiones iniciales.

5.- Ajuste de Historia. Reproducir la historia de presión-producción del yacimiento hasta el tiempo presente. Éste es un aspecto importante del modelo de simulación. El éxito del ajuste de la historia de producción repercutirá directamente en los escenarios de producción que se pronostiquen.

6.- Predicción del Comportamiento del Yacimiento. Partiendo del modelo "ajustado" se realizan corridas con diferentes alternativas de producción incluyendo: pozos de relleno, sistemas artificiales de producción, proyectos de recuperación secundaria, recuperación mejorada.

Otra perspectiva de la simulación de yacimientos es considerarla como un proceso iterativo, el cual comprende las siguientes etapas:

- Descripción del yacimiento.
- Determinar cuál es el mecanismo de desplazamiento que predomina.
- Establecer el modelo matemático.
- Desarrollar el modelo numérico.
- Desarrollar el programa de cómputo.
- Determinar la validez del modelo.
- Ajustar el modelo con la historia del yacimiento.
- Predecir su comportamiento.

El proceso iterativo mencionado se puede observar en la Fig. 5.1. En ella se aprecia que al avanzar, a través de las diferentes etapas, es necesario regresar a modificar algo de las anteriores, como pueden ser las suposiciones en las que se basó el modelo.

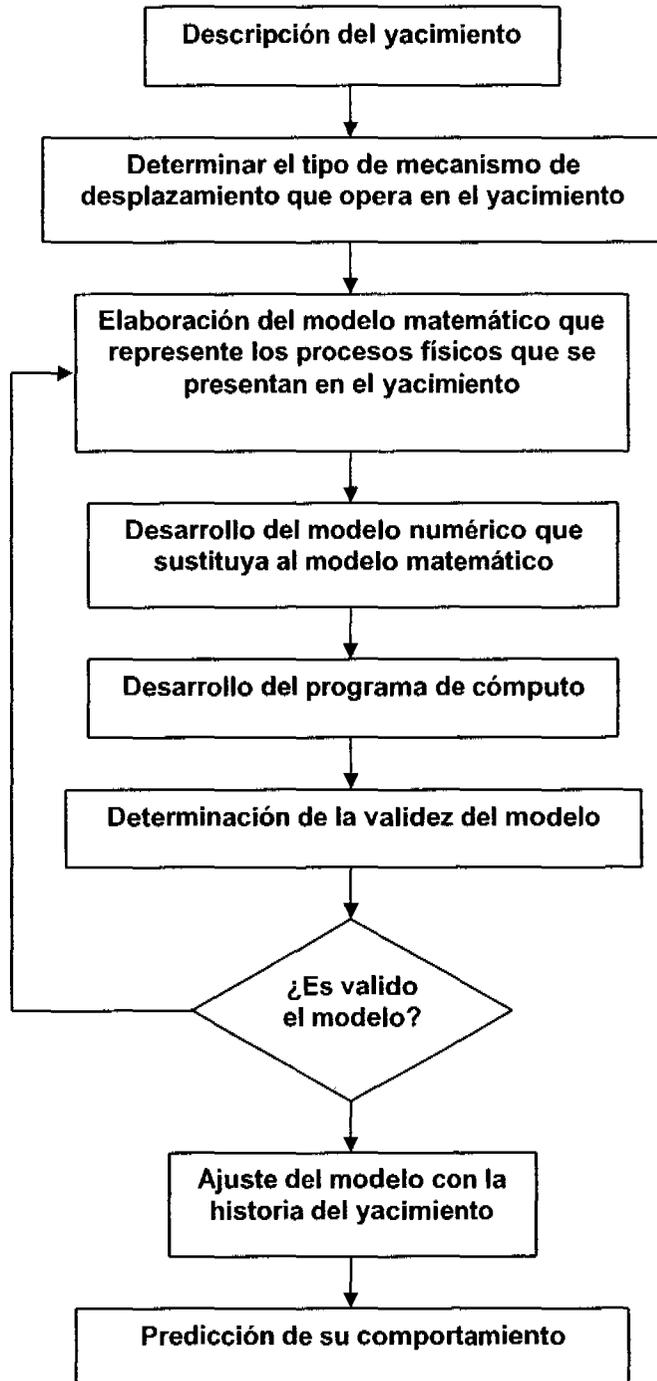


Fig. 5.1 Etapas para desarrollar un modelo

En general se debe tener presente que todo estudio de simulación de yacimientos debe seguir de manera estricta los planes elaborados, con el fin de asegurar que ellos provean información correcta y detallada al equipo de trabajo que estudia el yacimiento.

La mayoría de los estudios comprenden la misma clase de actividades, aunque la distribución de esfuerzos que se le da a cada una varía de proyecto a proyecto. La Fig. 5.2 muestra las actividades más significativas.

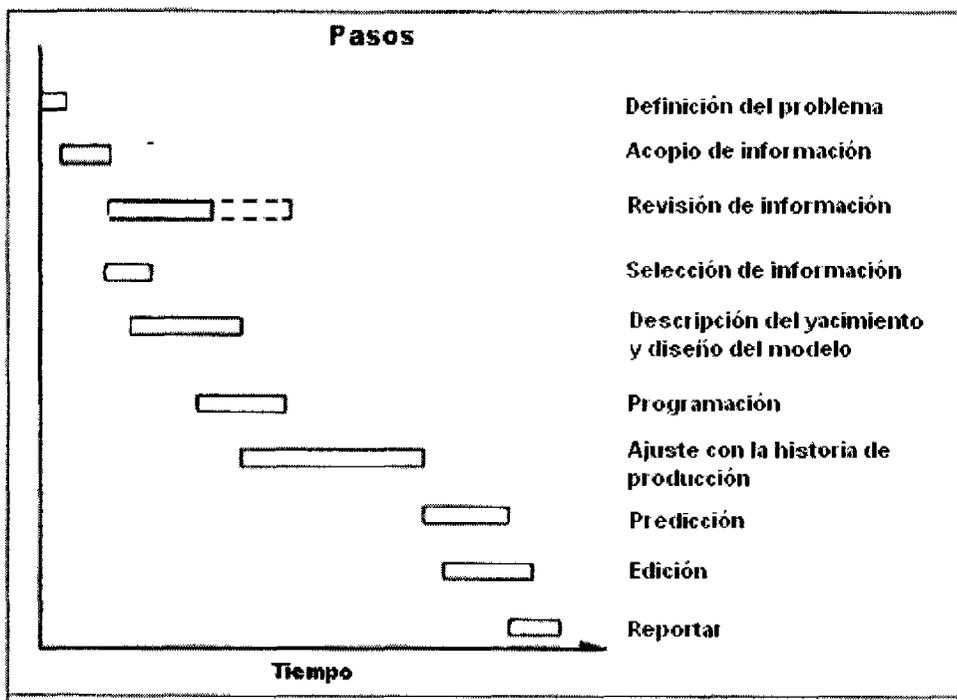


Fig. 5.2 Actividades de un estudio típico de simulación

V.1.1 Definición del Problema

El primer paso en un estudio de simulación es definir el problema del comportamiento del yacimiento y los problemas operacionales asociados. Para hacerlo, se debe recopilar información suficiente de él, y de su ambiente operativo.

Ésta se utiliza para identificar las proyecciones del comportamiento que son requeridas, cuándo serán aplicadas y como pueden contribuir a la administración del yacimiento.

V.1.2 Revisión de la Información

Una vez que la información ha sido recopilada debe ser revisada y reorganizada, ya que es demasiada y de diversos ámbitos y, por lo regular, no está lista para ser utilizada de inmediato. Esta etapa suele ser larga y tediosa, por ello es que hay que enfocarse en realizarla de manera cuidadosa. La revisión debe ser tan a fondo como sea necesaria, pero bien diseñada para evitar trabajar inútilmente.

Al revisar la información disponible casi siempre se revelan huecos e inconsistencias que necesitan ser resueltas. Esto puede ocasionar un mayor análisis y esfuerzo. En algunas ocasiones será necesario decidir si hay suficiente información y, que además posea la calidad adecuada para poder construir un modelo del yacimiento, que tenga la aproximación necesaria para alcanzar los objetivos del estudio. Si esta información es considerada inadecuada, los objetivos deben replantearse u orientarse en otra dirección; o tal vez se necesite obtener más información.

V.1.3 Selección de la Mejor Forma de Abordar el Estudio

Una vez que se tienen definidas las características del yacimiento, se debe decidir cuáles modelos de simulación son los adecuados para resolverlos. No siempre es necesario o deseable intentar modelar el yacimiento entero. En estudios de conificación o problemas de canalización (underunning), se pueden utilizar modelos de un solo pozo ó areales.

Algunos factores que influyen en la forma en la que se aborda el estudio son: disponibilidad de simuladores que puedan resolver de manera adecuada los problemas de mecanismos de producción; cambios en la programación del simulador para modelar pozos e instalaciones; el tipo y número de corridas necesarias para alcanzar los objetivos de estudio; tiempo programado, mano de obra y los recursos financieros disponibles; disponibilidad de recursos externos, necesarios para completar el estudio a tiempo.

V.1.4 Diseño del Modelo

El diseño del modelo de simulación estará influenciado por el tipo de proceso a modelar, la complejidad de los mecanismos de producción del yacimiento, los objetivos del estudio, la calidad de la información, de las restricciones de tiempo y presupuesto, y el nivel de aproximación requerido para asegurar que el estudio sea útil. Más adelante se hará una descripción más detallada de esta fase.

V.1.5 Ajuste de la Historia de Producción

Después de que un modelo ha sido construido, se debe probar si es capaz de reproducir el comportamiento del yacimiento. Generalmente, el modelo se valida corriéndolo con información de producción e inyección y comparando las presiones calculadas y el movimiento de fluidos con el comportamiento real del yacimiento. La información usada en esta fase variará dependiendo el enfoque del estudio, pero por lo regular incluye presión del yacimiento y datos de producción.

Los parámetros de entrada del modelo deben ser modificados hasta que se logre un ajuste aceptable entre el yacimiento y éste. Cuando se ajustan los parámetros se debe tener presente que esto es para lograr describir el yacimiento de la forma más aproximada posible y con la información disponible.

Regularmente, los parámetros que se ajustan son: permeabilidad del yacimiento para relacionar los gradientes de presión del campo; la permeabilidad y la extensión areal de lutitas u otras zonas de baja permeabilidad para relacionar el movimiento vertical de fluidos; las relaciones de permeabilidad relativa y saturación para ajustar las distribuciones de saturaciones dinámicas y de gradientes de presión; y tamaño del acuífero, porosidad, grosor y permeabilidad para relacionar el espacio y distribución del flujo de entrada natural de agua.

V.1.6 Análisis de Resultados y Predicción del Comportamiento

Una vez que se ha logrado un ajuste aceptable entre los resultados del simulador y la historia de producción, el modelo se utilizará para predecir el comportamiento del yacimiento. Algunas de las diferentes predicciones que pueden generarse en una corrida son: producción de aceite; comportamiento de la relación gas-aceite (RGA) y la relación agua-aceite (WOR, por sus siglas en inglés); requerimientos de pozos; comportamiento de la presión del yacimiento; posición de los frentes de los fluidos; eficiencia de la recuperación; información general relacionada a requerimiento de instalaciones; y estimar la recuperación final.

Uno de los aspectos más difíciles al realizar predicciones es la evaluación de los resultados que arrojan las corridas. Se debe tener mucho cuidado en no perder el enfoque hacia los resultados necesarios para alcanzar las metas del estudio de simulación, ya que los simuladores generan cientos de miles de líneas de información, lo cual convierte esta etapa en compleja y delicada.

La aproximación de las predicciones depende de las características del modelo y de la calidad de la información del yacimiento con la que se cuente. Es importante invertir algo de tiempo en estimar la calidad de la simulación con el fin de determinar si es adecuada para el uso que pretende dársele.

V.1.7 Reportes

El paso final de un estudio de simulación es entregar un reporte claro y conciso, en el cual se incluyan los resultados y las conclusiones obtenidas. El formato puede ser muy variado, dependiendo de cuestiones como el tamaño del estudio. Pero, la importancia del reporte radica en mencionar el estado de los objetivos del estudio, describir el modelo que fue utilizado y presentar los resultados y las conclusiones en un contexto adecuado y específico para el estudio.

V.2 Diseño del Modelo

Esta sección está enfocada a hablar más a fondo de los aspectos del diseño relacionados con la selección del número de dimensiones y de las propiedades de la roca y los fluidos.

Lo importante en esta etapa es construir el modelo más simple, que sea capaz de simular el proceso del movimiento de fluidos, con el realismo necesario para permitir tomar decisiones apropiadas, a fin de mejorar la producción.

El diseño del modelo está influenciado por factores como: tipo y complejidad del problema; la calidad que deben tener los resultados para orientar las decisiones que se harán en la administración de yacimientos; el tiempo disponible para terminar el estudio del yacimiento; factores económicos; disponibilidad y calidad de la información; y capacidades tanto del simulador del yacimiento como del equipo de cómputo con que se cuenta.

V.2.1 Pasos para el Diseño del Modelo

1. Definir los objetivos del estudio y los problemas que necesitan resolverse. Hacer informes claros de cuáles son las predicciones y los argumentos que las sustentan.
2. Familiarizarse con toda la información que se tiene.
3. Considerar toda la información con la que se cuenta para seleccionar la configuración del modelo (1D, 2D ó 3D), que represente mejor el flujo de fluidos dentro del yacimiento.
4. Simplificar la configuración del modelo lo más que se pueda. Esto requiere probar todas las suposiciones planteadas en favor de la simplificación.
5. Analizar el resultado final del modelo y evaluar si se necesita mayor complejidad para establecer una mejor credibilidad.
6. Seleccionar las dimensiones de las celdas y las mallas.
7. Seleccionar el modelo pVT del fluido.
8. Seleccionar el número de fases.
9. Definir las condiciones iniciales.
10. Ubicación de los pozos dentro de la malla.
11. Definir las capacidades necesarias del modelo de pozos.
12. Definir el tipo de simulación, de acuerdo al fluido (aceite negro, composicional, miscible o térmico).
13. Seleccionar el simulador.
14. Diseñar modelos más simples con el fin de verificar las suposiciones además de proveer datos de entrada para el modelo principal.

V.2.2 Selección del número de dimensiones

Uno de los primeros pasos en el diseño del modelo es decidir el número de dimensiones necesarias para representar la geometría del sistema físico y, al mismo tiempo, determinar cuáles simplificaciones están justificadas. Se deben considerar tanto la geometría externa como la interna. Dentro de la externa se incluyen los límites (laterales, superior e inferior) del yacimiento y del acuífero. La interna comprende la extensión areal y vertical de unidades de permeabilidad y zonas sin hidrocarburos, las cuales son importantes en la solución del problema y en la definición de la geometría del pozo (diámetro del pozo, profundidad de la terminación, etc.)

Los tipos de modelo a ser considerados se enlistan a continuación en orden de costo, dificultad y tiempo requerido en su solución.

1. Modelo de tanque (cero dimensiones)
2. Modelo 1D.
3. Modelo 2D areal [cartesiano] (x, y) , cilíndrico (r, θ) , curvilíneo).
4. Modelo 2D transversal (x, y) o radial (r, z) .
5. Modelos multiestratos (transversal o areal 2D).
6. Modelos 3D.

V.2.3 Simplificación de Problemas Complejos

Como se comentó previamente, un gran reto en la simulación de yacimientos es desarrollar el modelo más simple que permita tomar decisiones apropiadas con respecto al mejoramiento de la producción. A continuación se tratan algunas de las herramientas que permiten al ingeniero utilizar modelos relativamente simples, en procesos complejos.

V.2.3.1 Pseudofunciones de permeabilidad relativa y presión capilar

La relación entre permeabilidad relativa y la presión capilar debe definirse para representar apropiadamente el flujo multifásico de fluidos en medio porosos. Estas relaciones se obtienen con pruebas de laboratorio realizadas a las muestras de roca del yacimiento. Los modelos de yacimiento que utilizan curvas obtenidas de estas muestras pueden proveer resultados representativos, si el número de celdas (tanto en dirección vertical como areal) es suficiente. Si el mallado vertical es grueso el uso de estas curvas en la mayoría de los casos producirá resultados incorrectos.

Para ilustrar lo anterior, considere el cálculo del movimiento frontal y la distribución de saturación de gas (S_g), en una inyección de gas a un yacimiento somero. El gas se moverá más rápido a través de la parte superior del yacimiento, que en la base, dando lugar a un sobrecorrimiento y una baja eficiencia en el barrido vertical. La Fig. 5.3 muestra el perfil de S_g promedio correctamente calculado con curvas en un modelo transversal 2D de mallado fino. Utilizando un caso extremo con fines comparativos, también se calculó la distribución de S_g con un modelo 1D (sólo en dirección horizontal). Las curvas de permeabilidad relativa y presión capilar fueron usadas sin ser modificadas. Este modelo dio un perfil de S_g irrealmente optimista y predijo una irrupción mucho más tardía, debido a que no se consideró el sobrecorrimiento.

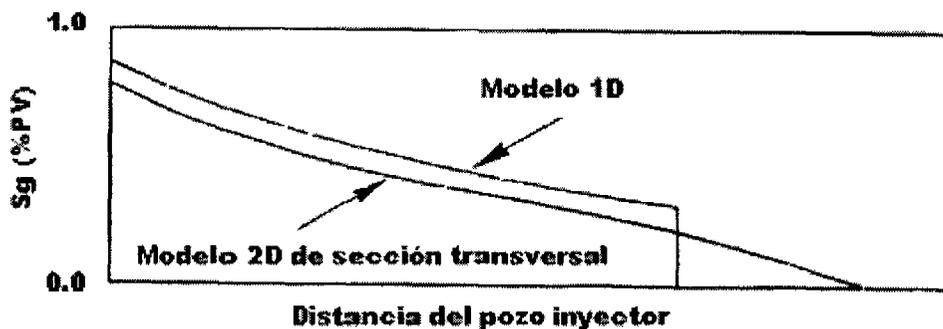


Fig. 5.3 Comparación de perfiles de S_g predichos con modelos 1D y 2D

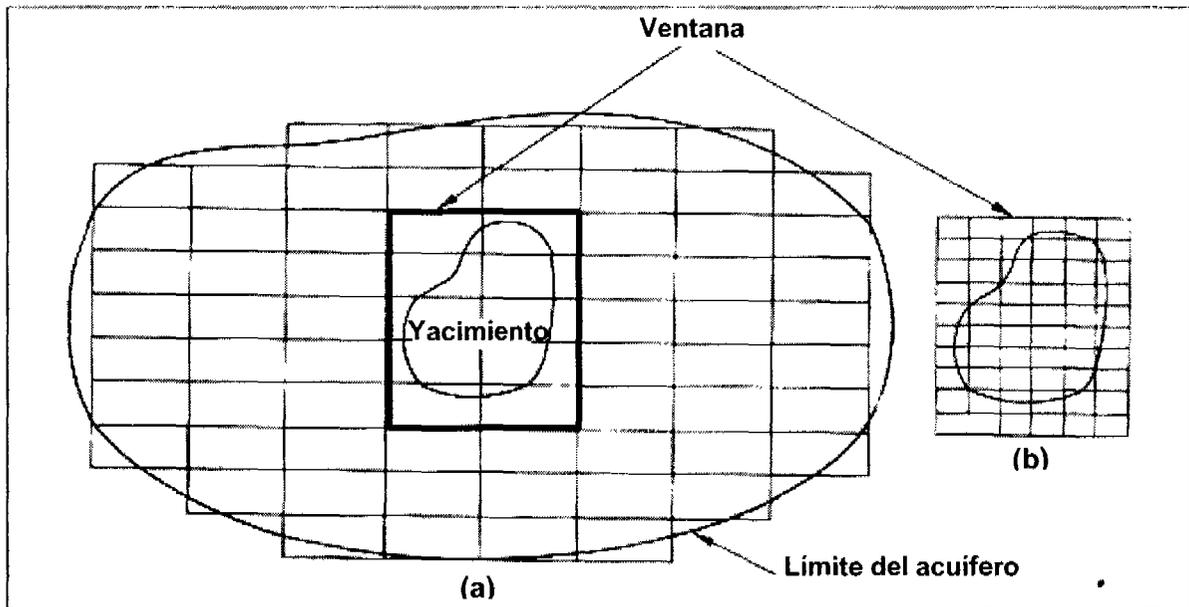
Estas curvas desafortunadamente pueden producir resultados pesimistas. En el caso anterior si el gasto de inyección de gas hubiera sido relativamente bajo, dando lugar a un largo tiempo de declinación para el campo, el aceite que queda atrapado en la zona invadida por el gas, puede drenar cuesta abajo hacia la base y crear una zona delgada que tenga una saturación de aceite (S_o) relativamente alta. Entonces, el aceite puede fluir a lo largo de la base del yacimiento hacia el contacto gas-aceite. Mientras que con el modelo de 1D de celdas grandes y curvas sin corregir, no se puede considerar con una buena aproximación de este drenado de aceite y, por tanto, se tendrán resultados pesimistas.

La necesidad del mallado vertical en el modelo se puede reducir o eliminar; se pueden definir funciones de permeabilidad relativa y presión capilar "promedio", las cuales puedan producir la misma distribución inicial y el movimiento de fluidos y la distribución de la presión como un modelo con mallado vertical. Estas pseudofunciones de pseudopermeabilidad relativa y presión capilar proveen buenos resultados en muchas situaciones. La experiencia de la industria sugiere que cientos de estudios exitosos de yacimientos han sido desarrollados utilizando pseudofunciones.

V.2.3.2 Modelos con ventanas

Estos modelos combinan una malla areal burda y una malla local fina. Primero se utiliza un modelo de malla burda que contiene al acuífero y al yacimiento de aceite, para simular el comportamiento del yacimiento completo. Después se define una ventana alrededor de la zona de aceite y en torno a ella se construye un modelo de malla fina, con el fin de obtener resultados más detallados del comportamiento de la zona de aceite.

La Fig. 5.4 ilustra lo descrito anteriormente. La distribución de flujo o de potencial en los límites de la ventana, determinada como una función del tiempo por medio del modelo de la malla burda, es utilizada como una condición de frontera para el modelo de la malla fina. Este tipo de modelo puede usarse para yacimientos tanto de gas como de aceite.



- (a) Modelo con mallado grueso para el yacimiento y el acuífero
 (b) Modelo con mallado fino en la ventana

Fig. 5.4 Modelo con ventana:

V.2.3.3 Yacimientos naturalmente fracturados

Este tipo de yacimientos probablemente genera los sistemas más complejos. Desarrollar una descripción detallada y confiable del sistema matriz-fractura, modelarlo lo más cercano posible a la realidad y evaluar la confiabilidad de los resultados de la simulación, son problemas extremadamente difíciles. La orientación, el ancho y el espaciamiento de las fracturas son necesarios para describir el sistema de fracturas y para definir la configuración geométrica de los bloques de la matriz. Además, algunas propiedades como porosidad, permeabilidad y funciones de saturación de cada bloque de matriz, deben ser definidas como si fueran para yacimientos no fracturados.

El flujo hacia los pozos se da principalmente a través del sistema de fracturas. La permeabilidad efectiva de éste, casi siempre es mucho mayor que la permeabilidad del bloque de matriz. La mayor parte de los fluidos están contenidos en los bloques de la matriz, debido a que la porosidad de las fracturas es mucho menor a la de éstos. Así, la transferencia de fluidos de la matriz hacia las fracturas es necesaria para obtener una recuperación significativa de hidrocarburos.

V.2.4 Propiedades de los Fluidos del Yacimiento

V.2.4.1 Compresibilidad

Cuando la expansión del fluido no juega un papel importante en la recuperación, se puede suponer que los fluidos son incompresibles. Por ejemplo, en un desplazamiento agua-aceite por encima de la presión de saturación donde la presión no variará con el tiempo. El fluido debe considerarse compresible en estudios de comportamiento de acuíferos en yacimientos que producen por empuje de agua, en casos de producción por gas disuelto, por expansión de casquete de gas o combinaciones de ellos. También los estudios individuales a pozos para los cuales el comportamiento de la variación de presión esté siendo modelado, deberán ser capaces de manejar fluidos compresibles.

V.2.4.2 Simulación monofásica vs. simulación multifásica

La mayoría de los yacimientos requieren simulaciones multifásicas. Algunos tipos de problemas para los que la simulación de una fase es adecuada pueden ser: expansión de agua en acuíferos; problemas de variación de presión de un solo pozo e interferencia entre pozos en un sistema de una sola fase; y declinación de yacimientos de gas cuando no hay entrada de agua.

La simulación multifásica debe ser utilizada para evaluar desplazamientos agua-aceite o gas-aceite. Para sistemas gas-aceite de dos o tres fases, muchos de los problemas pueden ser resueltos con simuladores de aceite negro, los cuales tratan a las fases de hidrocarburos como si sólo tuvieran dos componentes.

Los métodos composicionales son frecuentemente usados en estudios de yacimientos de gas, los cuales están por debajo de la curva de rocío. También se utilizan para considerar a los componentes intermedios incorporados al gas seco inyectado que desplaza al aceite, particularmente en yacimientos de aceite volátil.

V.2.4.3 Propiedades variables

Las propiedades del fluido (B_f , μ_f , R_s , etc.) varían vertical y arealmente en algunos yacimientos. Para el modelo de aceite negro es importante reconocer cómo es que el simulador considera las propiedades del fluido cuando éste se desplaza de una región a otra. A menos que se utilicen métodos especiales, el simulador cambiará propiedades como la viscosidad o el factor de volumen, cuando los fluidos crucen las fronteras entre regiones. En realidad, los fluidos mantienen sus propiedades mientras se mueven dentro del yacimiento, a menos que se presente una mezcla entre aceites diferentes o que existan cambios de presión. Existe un método para aminorar los cambios en las propiedades de los fluidos que se desplazan de una región a otra. El método supone un mezclado instantáneo del fluido que entra a la celda con el que ya se encuentra dentro de la misma. La desventaja del método es que la cantidad de mezclas dependerá del número de celdas utilizadas y puede proporcionar propiedades no representativas de la mezcla real del yacimiento.

Se pueden utilizar modelos composicionales para modelar la variación de las propiedades, pero pueden llevar a valores ilógicos de mezclado si las celdas son muy grandes.

V.2.5 Propiedades de la Roca

La complejidad del flujo de fluidos en yacimientos heterogéneos es una de las mayores razones de que los estudios de ingeniería se basen en los simuladores de yacimientos. Cuando existen variaciones menores de porosidad y permeabilidad, se pueden utilizar modelos homogéneos.

Las variaciones que generalmente justifican el uso de modelos heterogéneos son: variaciones areales de permeabilidad que pueden restringir el drenado o disminuir la eficiencia de barrido del fluido inyectado; estratificación vertical resultado de fluidos inyectados que formaron canales en zonas de alta permeabilidad; zonas discontinuas de lutitas o de otros materiales de muy baja permeabilidad que puedan influenciar la eficiencia de barrido vertical o areal; zonas permeables discontinuas que puedan afectar la eficiencia del barrido vertical; y fracturas naturales o fisuras que puedan reducir la recuperación proveniente de la matriz de la roca.

V.2.5.1 Distribución de la permeabilidad absoluta y de la porosidad

La definición del nivel y distribución de permeabilidad y porosidad es un prerequisite necesario para modelar el comportamiento del flujo, tanto en condiciones de periodo transitorio como estacionario. Es importante considerar la escala de heterogeneidad que debe ser representada para reflejar apropiadamente el comportamiento del yacimiento. Existen demasiadas heterogeneidades que siguen siendo muy pequeñas para ser representadas directamente (por ejemplo, zonas que no abarcan el tamaño de una celda) y que necesitan ser consideradas. Pero, cualquier heterogeneidad que pueda ser representada directamente debe ser modelada.

V.2.5.2 Permeabilidad relativa

Tanto los valores en los extremos, como los de las curvas de las funciones de permeabilidad relativa, tienen influencia sobre los resultados calculados. Frecuentemente se necesita más de un grupo de permeabilidades relativas, debido a que pueden existir variaciones importantes de las funciones entre los diferentes tipos de roca.

Las funciones de esta propiedad están influenciadas por la historia de saturaciones del sistema roca-fluido. A una saturación dada, las permeabilidades relativas en un desplazamiento en el cual la saturación de la fase mojante está en aumento (imbibición) pueden diferir de forma significativa de las aplicables a cuando la fase mojante está disminuyendo (drene). Si durante la declinación la dirección de la variación de la saturación se revierte, los efectos de la histéresis influirán en el comportamiento del yacimiento y deberán ser considerados dentro de la simulación. Algunos simuladores tienen la capacidad de considerar automáticamente las variaciones en las funciones de permeabilidad relativa, debidas a la histéresis. Otros requieren ser modificados manualmente.

V.2.5.3 Presión capilar

Esta propiedad juega un papel muy importante en la definición de la distribución inicial de fluidos dentro del yacimiento y, además, puede tener una influencia significativa en el movimiento de los mismos. En desplazamientos dominados por la gravedad, la presión capilar controlará la distribución vertical de saturaciones. En yacimientos altamente fracturados, el mecanismo productor que predomina puede ser la imbibición capilar de agua.

En la mayoría de los yacimientos la capilaridad es trascendente debido a que se encuentra presente en los fenómenos que afectan al flujo. Se usa para establecer saturaciones iniciales y la distribución de fluidos a nivel de poro así como, su influencia sobre la permeabilidad relativa de las diferentes fases. Como consecuencia, una definición aproximada de las funciones de presión capilar es un factor crítico en el desarrollo de modelos de permeabilidad alta y relativamente homogéneos.

La relación entre presión capilar y saturación también depende de la historia de saturaciones. Si hay una inversión en la dirección de la saturación durante la simulación, será necesario utilizar funciones de histéresis de presión capilar dentro de los cálculos.

V.3 Selección de las Propiedades de la Roca y de los Fluidos

En esta sección se mencionarán algunos procesos de selección y asignación de las propiedades del fluido y de la roca a las celdas del modelo de simulación. Se necesita el juicio de un experto para la selección de la información "representativa" del yacimiento, ya que rara vez se tiene suficiente información y existen incertidumbres dentro de la que se posee. Como una complicación extra, todavía no es posible establecer una secuencia definitiva de pasos para obtener, interpretar y asignar la información del yacimiento. El enfoque utilizado en esta sección es para mencionar algunas guías funcionales derivadas de la experiencia y, para citar y comentar información proveniente de textos pertinentes.

El tema central se enfoca en la selección y asignación para un modelo 3D trifásico. Para casos de modelos simples, las propiedades pueden seleccionarse aplicando una parte del enfoque utilizado para casos más complejos.

V.3.1 Información Requerida para la Construcción de un Modelo

Como en todo trabajo de ingeniería de yacimientos, para que tenga éxito, se debe contar con una buena información que represente las condiciones que imperan en el yacimiento. Así, la simulación sin ser la excepción, requiere de una amplia descripción física del mismo y de los tipos de mecanismos por medio de los cuales va a producir. Los resultados que se obtengan de la simulación están en función de la información que se haya empleado para realizarla y, el tiempo que se ocupe en preparar esta información es un tiempo bien empleado.

Nótese que la información que debe tratarse de obtener con mayor aproximación es aquélla que al ser variada, (al realizar diferentes corridas de simulación) provoque un cambio significativo en los resultados obtenidos. Así por ejemplo, se sabe que una propiedad determinada varía en un rango específico y al efectuar dos o tres corridas de simulación se varía dicha propiedad dentro de este rango y se obtienen resultados similares, se puede tomar como aceptable una de las predicciones, o bien, relegar a segundo término esfuerzos adicionales para medir con buena aproximación dicha propiedad. Si por el contrario, variando esa propiedad se alteran los resultados considerablemente, es necesario incrementar esfuerzos para obtener con mayor aproximación dicha propiedad. La información que se requiere para efectuar una simulación es:

- Descripción geológica del yacimiento.
- Mecanismos de desplazamiento que operan en el yacimiento.
- Propiedades petrofísicas de las capas de interés.
- Propiedades pVT de los fluidos.

V.3.1.1 Descripción geológica del yacimiento

Para obtener una descripción geológica del yacimiento es necesario llevar a cabo un estudio geológico a detalle que proporcione un conocimiento estratigráfico, estructural y petrográfico, que permita de esta manera caracterizar al yacimiento perfectamente. Dicho estudio geológico se complementa con estudios geofísicos. La información de este tipo que interesa a la simulación es:

- Límites del yacimiento.
- Características de la formación productora.
- Características del acuífero.
- Fallas.
- Discontinuidad en las capas.

V.3.1.2 Mecanismos de desplazamiento

La recuperación del aceite se obtiene mediante un proceso de desplazamiento. El gradiente de presión obliga al aceite a fluir hacia los pozos, pero este movimiento sólo se presenta si otro material llena el espacio desocupado por el aceite y mantiene, en dicho espacio, la presión requerida para continuar el movimiento de los fluidos. En cierto modo el aceite no fluye del yacimiento, sino que es expulsado mediante un proceso de desplazamiento, siendo los principales agentes el gas y el agua. Los mecanismos de desplazamiento son:

- Expansión del sistema roca-fluidos
- Desplazamiento
- Segregación gravitacional
- Imbibición

La expansión del sistema roca-fluidos se provoca al haber un abatimiento de presión, dando como resultado el movimiento de los fluidos a través del medio poroso, del punto de mayor presión al punto de menor presión.

El desplazamiento se da con gas o con agua. Con gas puede ser empuje de gas disuelto liberado o empuje de algún casquete de gas, ya sea natural o inyectado. Con agua puede ser agua de inyección o bien entrada natural por la presencia de algún acuífero considerable.

La segregación gravitacional es favorable en yacimientos de espesor considerable (o en capas de echado muy pronunciado) que tengan valores de permeabilidad altos en el sentido vertical y consiste en el acomodo que tienen los fluidos de acuerdo con sus densidades.

La imbibición capilar se da generalmente en el sentido normal (perpendicular) al flujo y puede ser muy importante al inyectar agua en forma lateral en capas heterogéneas, con variaciones considerables en las permeabilidades verticales.

V.3.1.3 Propiedades petrofísicas

Las propiedades petrofísicas se determinan en el laboratorio mediante el análisis de núcleos de pared y del fondo del pozo, muestras de canal y de afloramientos. Para asegurar una mayor aproximación en estos datos se puede obtener información complementaria de estas propiedades. Dicha información la proporcionan los registros geofísicos y los análisis de pruebas de presión. Además, existen correlaciones para la obtención de estas propiedades y pueden ser de utilidad en determinado momento.

Los datos petrofísicos que se necesitan para efectuar una simulación son:

- Porosidades (ϕ).
- Permeabilidades (k).
- Saturaciones de agua, aceite y gas. (S_w, S_o, S_g).
- Presión capilar entre diferentes interfases ($p_{Cw-o}, p_{Cg-o}, p_{Cg-w}$).
- Permeabilidades relativas al agua, aceite y al gas (kr_w, kr_o, kr_g).
- Compresibilidad de la formación (c_r).

V.3.1.4 Propiedades pVT de los fluidos

Las propiedades de los fluidos son también obtenidas en el laboratorio por medio de muestras recolectadas en los pozos. Para que los valores sean aceptables (lo mismo ocurre con las propiedades petrofísicas), se requiere que las mediciones se hagan lo más cuidadosamente posible y tratando de aproximar al máximo las condiciones del laboratorio a las condiciones existentes en el yacimiento. Las propiedades de los fluidos que se requieren en un trabajo de simulación son:

- Factores de volumen del agua, del aceite y del gas (B_w, B_o, B_g).
- Relaciones de solubilidad en el aceite y en el agua (R_s, R_{S_w})
- Viscosidades del agua, del aceite y del gas (μ_w, μ_o, μ_g)
- Compresibilidades del agua, del aceite y del gas (c_w, c_o, c_g).
- Presión de saturación.

V.3.1.5 Otros datos

Además de la información fundamental que se menciona con anterioridad, existen otros datos con los que es importante contar cuando se realiza una simulación. Dicha información corresponde casi en su totalidad, como se verá a continuación, a características de los pozos.

a) Datos de producción y de relación de flujo.

Cuando se trata de hacer un ajuste del modelo con la historia del yacimiento, se requieren conocer los ritmos de producción y la declinación de la presión. Estos datos de producción que se necesitan para cada pozo, se pueden desglosar en los siguientes puntos:

- Flujo de aceite vs. tiempo.
- Flujo de gas vs. tiempo.
- Flujo de agua vs. tiempo.
- Cualquier presión media vs. tiempo.

Además, es preciso contar con los índices de productividad y, si es el caso, con los índices de inyectividad de los pozos que se encuentran en el yacimiento.

b) Estado mecánico de los pozos

Al parecer, por lo visto hasta el momento, para llevar a cabo una simulación, cualquier información sobre el estado mecánico de los pozos que integran el yacimiento carecería de interés, pues aunque los pozos forman parte integral del sistema, la influencia que puedan tener en él parece haber sido considerada ya en los datos de producción. Además, si la simulación es un estudio a nivel del yacimiento, ¿para qué sirve entonces la información sobre el estado mecánico de los pozos?

Un avance muy significativo en simulación es acoplar el comportamiento que tienen los fluidos dentro del yacimiento al que presentan a lo largo de las tuberías de producción, en su camino hacia la superficie. Para ello se requiere contar con un método de flujo multifásico en tuberías en el simulador.

Existe una gran cantidad de correlaciones que representan el comportamiento de los fluidos en las tuberías de producción. El uso de dichas correlaciones, al igual que los estudios de simulación, está sujeto a ciertas consideraciones importantes.

El estado mecánico de los pozos lo comprende la información siguiente: profundidad máxima del pozo, indicando si es vertical, direccional o desviado; diámetro interior del pozo; características de las tuberías de revestimiento: diámetro, profundidad, peso y grado; características del aparejo de producción; tipo de terminación (diámetro, grado y peso de las tuberías de producción); y, equipo para sistemas artificiales de producción.

c) Aspecto económico

En todo trabajo de ingeniería debe ser considerado como un punto primordial el aspecto económico. En la simulación de yacimientos, la información de este tipo que se debe tomar en cuenta es la siguiente:

- Precio del barril de aceite.
- Costo del pozo.
- Límite económico.
- Máximas relaciones agua-aceite y gas-aceite con que se piensa trabajar.
- Mínima presión de fondo fluyendo.
- Precio del gas.
- Gastos de operación.

d) Mapas

Al preparar la información que se necesita para realizar una simulación, se elaboran los siguientes mapas:

- Mapa estructural.
- Mapa de isopacas.
- Mapa de isoporosidades.
- Mapa de isopermeabilidades.
- Mapa de isosaturaciones.

Los mapas estructurales sirven para determinar a través de las curvas de nivel, las profundidades de los pozos, efectos geológicos del subsuelo como fallas, así como la vista de planta del yacimiento, límites del mismo, contactos agua-aceite, gas-aceite y/o gas-agua. Al mapa de isopacas lo componen líneas que unen puntos en el yacimiento de igual espesor. Entre otras cosas sirve para cuantificar volumétricamente el volumen original de aceite y/o el volumen original de gas.

Se comentó, al tratar sobre la información petrofísica requerida, la importancia que tenía ésta y la forma de obtenerse. Así, las porosidades y las permeabilidades se conocen en localizaciones discretas del yacimiento y el simulador requiere un conocimiento de estas propiedades en todos y cada uno de los puntos del mismo. Con este fin se construye los mapas de isoporosidades e isopermeabilidades.

En ocasiones se elaboran mapas en los cuales se encuentra la distribución de combinaciones o productos de propiedades como por ejemplo:

Porosidad-espesor (ϕh)

Porosidad-saturación-espesor (ϕS_{oh})

V.4 Selección del Tamaño de las Celdas y los Incrementos de Tiempo de Simulación

En párrafos anteriores de este capítulo, se mencionaron factores que son importantes para el diseño de un modelo del yacimiento y se describieron los procesos utilizados para seleccionar y procesar la información. En esta sección y las que le siguen, se mencionarán las consideraciones y decisiones que afectan los costos, la aproximación y la confiabilidad de los resultados que puede proporcionarnos un modelo.

Más adelante se verá claramente que la selección de las dimensiones de tiempo y espacio está íntimamente relacionada al tipo de modelo y la variación de las propiedades del yacimiento.

La parte medular de un problema de simulación formulado en diferencias finitas, es la segmentación del modelo en celdas y la división del intervalo de tiempo en pequeños incrementos de tiempo.

V.4.1 Criterio para Seleccionar el Tamaño de las Celdas

Las dimensiones, tanto de tiempo como de espacio, deben ser lo suficientemente pequeñas como para satisfacer los siguientes requerimientos: identificar saturaciones y presiones en lugares específicos además de los tiempos adecuados para el estudio; describir adecuadamente la geometría, geología y las propiedades iniciales del yacimiento; describir con detalle las saturaciones dinámicas y los perfiles de presiones; modelar apropiadamente los mecanismos de producción del yacimiento; y, ser compatible con las soluciones matemáticas del simulador y así lograr que la solución de las ecuaciones de flujo de fluidos sean aproximadas y estables.

V.4.1.1 Lugares donde la presión y la saturación deben ser conocidas

El primer paso para desarrollar un diseño preliminar del modelo es identificar los lugares donde se debe conocer la presión y la saturación. La ubicación puede incluir todos los pozos existentes y los que han sido planeados ó, solamente algunos de ellos. El mallado debe ser lo suficientemente fino para poder representar el comportamiento del yacimiento, en cada lugar que se desee. Esta actividad llevará a la mínima segmentación en espacio.

A pesar de que un mallado fino indica lugares en los que se debe representar mejor el comportamiento, regularmente se requiere de un mallado más grueso. La Fig 5.5 muestra un ejemplo en el que se compara un mallado grueso que se utiliza para identificar los puntos donde la información es necesaria con el fino, que es el que provee una segmentación adecuada para la simulación.

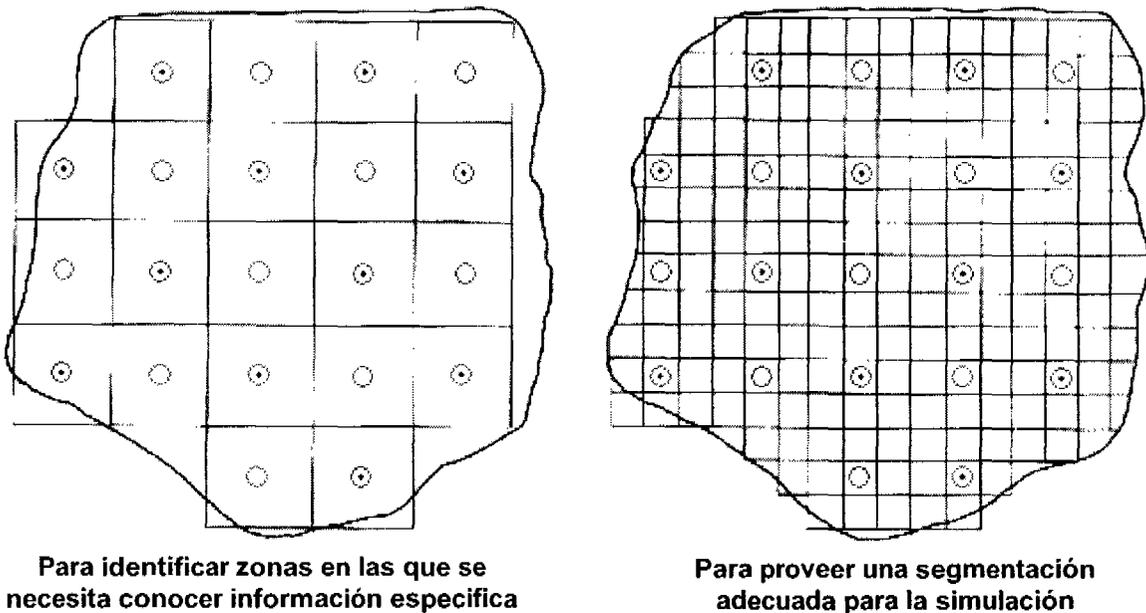


Fig. 5.5 Ejemplo de mallas

V.4.1.2 Representación de la geometría, geología y las propiedades físicas

Las fronteras externas del yacimiento son los factores geométricos más obvios para representar. En algunos casos, la malla puede ser orientada para que los límites del yacimiento coincidan con las orillas de ésta. En los casos en los que las fronteras tienen una forma más compleja, las áreas del yacimiento que salen de la malla pueden ser representadas removiendo los bloques correspondientes de los cálculos ó asignándole el valor de cero a la permeabilidad.

Otro factor que puede ejercer una influencia mayor en la selección del tamaño de las celdas, es la presencia de barreras internas que afecten al flujo de fluidos. Estas barreras se incluyen en el modelo asignando permeabilidad nula en las celdas interiores adecuadas. La Fig 5.6 representa una malla en la cual las fallas impermeables están representadas por zonas de permeabilidad cero. La Fig 5.7 muestra una malla seleccionada para representar límites del yacimiento y barreras de lutitas.

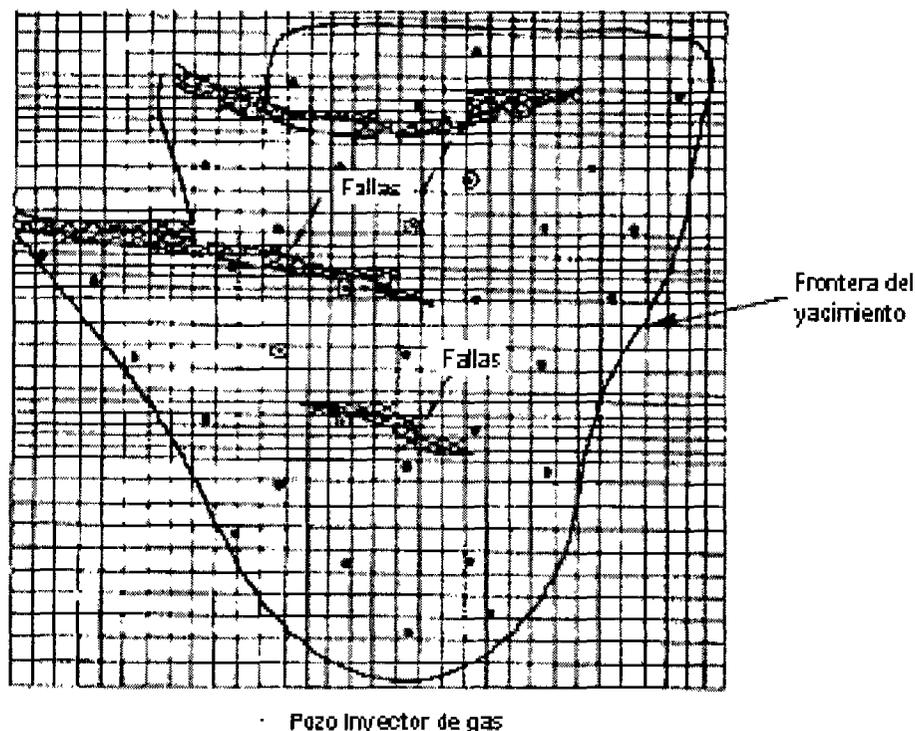


Fig. 5.6 Ejemplo del uso de permeabilidad cero para modelar barreras al flujo

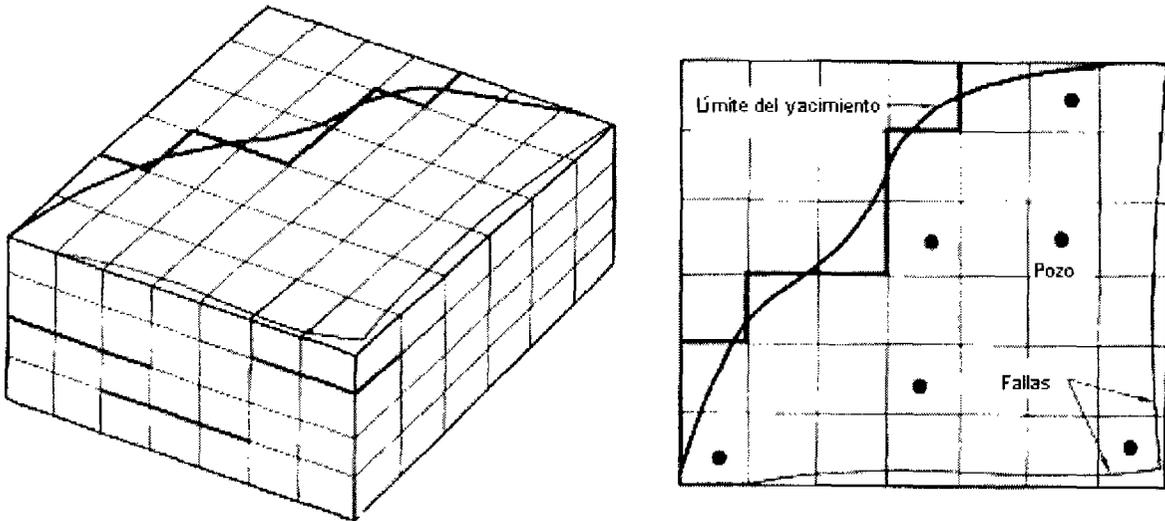


Fig. 5.7 Influencia de la geometría externa e interna en el diseño del modelo

Los cambios significativos de permeabilidad y porosidad deben ser representados como fronteras entre las diferentes capas.

La definición de la malla en una zona de transición debe ser lo suficientemente fina como para describir de manera precisa a la distribución de saturaciones, gradientes de presión y la eficiencia del desplazamiento.

Las variaciones de las propiedades iniciales de los fluidos (viscosidad, presión de saturación, RGA, etc.) algunas veces requieren un mallado fino en algunas regiones del modelo, el cual sería innecesario si se utilizaran otros factores de diseño. Una malla que no define de manera adecuada estas variaciones puede arrojar malas predicciones de presiones promedio, gradientes de presión ó de saturaciones de gas.

V.4.1.3 Representación de la saturación dinámica y del comportamiento de presiones

Además de los factores ya mencionados, hay varios factores dinámicos que necesitan ser considerados en la selección de la malla. Para representarlas adecuadamente en el comportamiento del yacimiento, un modelo debe tener tres capacidades. Primera, describir funciones del yacimiento en base al tiempo. Segunda, si hay más de una fase móvil en el yacimiento, el modelo debe ser capaz de describir las ubicaciones y el movimiento de cada uno de los fluidos. Tercero, el modelo debe ser capaz de representar de forma correcta el comportamiento de la inyección y producción de los pozos y, su dependencia de la presión y saturación existentes en sus vecindades.

V.4.1.4 Tamaño de las celdas en geometría radial

El contenido de los incisos anteriores se relaciona con la definición necesaria para representar la forma de los frentes de los fluidos entre los pozos y su efecto en la eficiencia del barrido vertical. Pero, para la región que se encuentra adyacente al pozo, es necesario proporcionarle un tratamiento especial. Aquí, las formas de los frentes pueden experimentar cambios muy rápidos. Como consecuencia, el comportamiento de la presión, la saturación y el barrido vertical en la zona cercana al pozo, no pueden ser representadas en modelos areales o 3D que manejen celdas grandes. Esta limitación puede superarse usando por separado un modelo radial para representar un solo pozo y su vecindad inmediata y, usando funciones de pozos para incorporar los resultados de este único pozo al modelo del yacimiento completo.

Los simuladores radiales son especialmente útiles para estudiar la conificación y otros efectos en la vecindad del pozo. En general, el tamaño de las celdas de este modelo sigue un patrón común como el mostrado en la Fig. 5.8.

Los bloques adyacentes al fondo del pozo son lo suficientemente pequeños para permitir que los fenómenos que ahí suceden puedan representarse con muy buena aproximación.

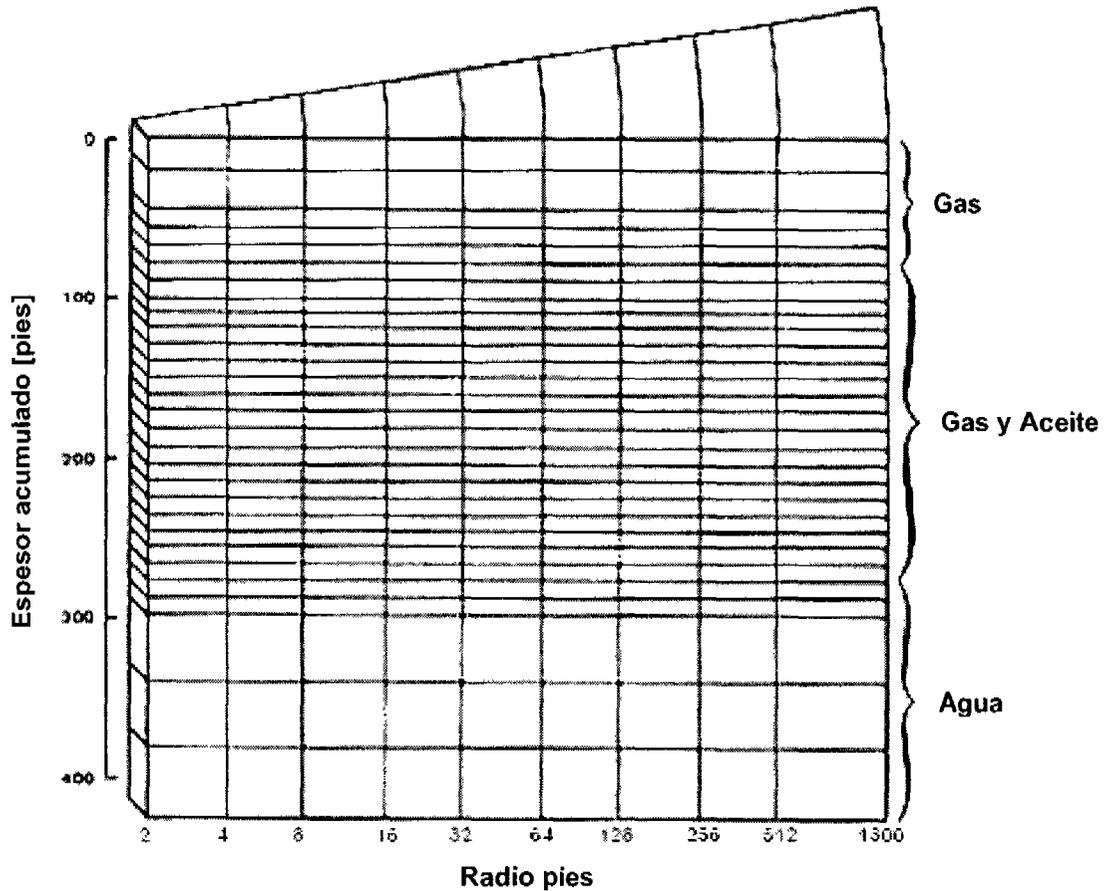


Fig. 5.8 Malla típica para modelado de pozos

V.4.1.5 Mallas con celdas de tamaño variable

Usar un modelo en el cual el tamaño de celda no es uniforme, puede ser una forma efectiva de asegurar una definición adecuada de la malla a un costo mínimo. Por ejemplo, se puede ahorrar en costos de cómputo al usar bloques muy grandes en regiones donde existe una sola fase; pero se debe tener cuidado en un par de cosas: la primera es que los bloques no deben ser tan grandes que hagan que la respuesta del flujo sea "instantánea"; debe haber el número suficiente de celdas para modelar el comportamiento de la variación de presión del sistema yacimiento-acuífero.

Como segunda, los contrastes extremos en los tamaños de las celdas pueden causar dificultades en algunos simuladores, para resolver las ecuaciones de flujo.

V.4.2 Selección de los Incrementos de Tiempo

Se ha visto el proceso que regularmente se utiliza cuando se selecciona el tamaño de las celdas. Para seleccionar los incrementos de tiempo, también es necesario un proceso. Incrementos muy grandes reducirán la calidad de los resultados, mientras que incrementos demasiado pequeños incrementarán el tiempo de cómputo, el tiempo programado y el costo.

V.4.2.1 Consecuencias de utilizar incrementos sin restricciones

Las tres consecuencias más comunes de utilizar incrementos muy grandes son: las movilidades calculadas son incorrectas debido a que éstas cambian demasiado durante un incremento de tiempo, lo cual ocasiona que el uso de un solo valor de movilidad para una fase sea inapropiado; la dispersión numérica es inaceptablemente grande y, algunas propiedades del yacimiento (generalmente la presión) cambian demasiado durante cada incremento, lo que hace que el comportamiento físico del sistema no pueda ser representado adecuadamente.

V.4.2.2 Verificando la confiabilidad de los intervalos

Sin importar la formulación utilizada como criterio para la selección de los incrementos de tiempo, es deseable probar si la secuencia resultante de intervalos producirá una simulación suficientemente acertada. Al igual que en el caso del tamaño de la celda, la mejor forma de verificar esto es realizar corridas de prueba. Una parte del yacimiento deberá ser simulada con los intervalos seleccionados y, posteriormente repetir el procedimiento, pero utilizando intervalos más pequeños. Si no se aprecian cambios significativos en el comportamiento observado, la secuencia de tiempos seleccionados puede ser utilizada de manera confiable.

V.4.2.3 Consideraciones de los costos

Uno de los objetivos de los puntos mencionados en la Parte V.4 de este trabajo es el desarrollo de un modelo que sea óptimo, tanto en tamaño como en complejidad (lo suficientemente grande y complejo para adecuarse al uso que pretende dársele), pero por otro lado, que sea lo más simple posible. Si se ha mantenido ese objetivo en mente durante la construcción del modelo, la mayoría de los factores que tienen mayor influencia en el costo tendrían que haberse considerado. A continuación se presentan algunos datos que pueden ser útiles para ayudar a optimizar el diseño y el costo de un modelo.

1. La experiencia indica que los costos de cómputo van entre el 20 y el 50% del costo total de la mayoría de los estudios de simulación de yacimientos.
2. El incrementar el número de celdas en un modelo incrementará el costo por dos razones. En primer lugar, porque los requerimientos de cómputo están en función del número de celdas, sin importar el método numérico de resolución. Además, un incremento de celdas significa una reducción en el tamaño de las mismas y los incrementos de tiempo deben reducirse a fin de obtener resultados más aproximados.
3. A la larga, los métodos de solución de sistemas de ecuaciones "más costosos" pueden ser menos caros que los métodos alternativos. Esto sucede cuando son más fáciles de usar que los alternativos.

V.5 Ajuste de Historia

El objetivo de un estudio con modelos numéricos es predecir el comportamiento del yacimiento con los mayores detalles y aproximación posibles, con técnicas simples tales como la extrapolación. Si la información con la que se cuenta para llevar a cabo una simulación es amplia y de calidad, el objetivo de la simulación tenderá a satisfacerse y la predicción del comportamiento será mejor. Si por el contrario, la información está incompleta o no es muy confiable, los simuladores sólo podrán utilizarse para comparar semicuantitativamente los resultados, al explotar el yacimiento de diferentes maneras. De cualquier forma, la aproximación que proporciona el simulador puede mejorarse mediante el ajuste de éste a medida de que se vaya teniendo mayor información del yacimiento. Esta etapa puede llevarse mucho tiempo, ser cara y frustrante, ya que el comportamiento de algunos yacimientos puede ser complejo, con numerosas interacciones que pueden ser difíciles de comprender. Para hacer el proceso manejable, es muy útil separarlo en varios pasos individuales y específicos.

V.5.1 Información que se Debe Relacionar

En general, se utiliza la presión, las relaciones agua-aceite, gas-aceite, agua-gas, tiempos de irrupción de agua y/o gas y saturaciones de fluidos en núcleos, registros geofísicos de pozos y pruebas de trazadores químicos.

El utilizar las relaciones agua-aceite, gas-aceite o agua-gas, es comúnmente la mejor forma de confirmar la validez de las estimaciones acerca de zonificación efectiva y continuidad zonal. Si el yacimiento en estudio está en una etapa temprana de declinación o, si por alguna otra razón, no se tiene información que defina el movimiento de gas o agua, el peso del ajuste de historia deberá soportarse en análisis de núcleos, registros, y conocimientos de el ambiente de sedimentación, con el fin de definir la zonificación y estimar la continuidad.

Los gastos de producción de aceite son los datos con mejor aproximación de los que se dispone. La información de inyección tiende a ser menos confiable que la de producción; esto se debe tanto a los errores de medición como a las pérdidas de fluido en otros intervalos. En los datos de producción pueden darse errores por las mismas razones pero, son comúnmente detectados y corregidos.

V.5.2 Pasos a Seguir en un Ajuste con la Historia de Producción

A continuación se mencionan los pasos que son seguidos normalmente por el personal que se encarga de hacer los ajustes.

1. Reunir información de la historia de producción y evaluar su calidad.
2. Definir los objetivos específicos del ajuste de historia.
3. Desarrollar un modelo preliminar basado en la mejor información disponible.
4. Simular la historia con el modelo preliminar y comparar el comportamiento simulado con la historia real del yacimiento.
5. Decidir si el modelo es satisfactorio. En caso negativo (que es el más probable) analizar los resultados con modelos simplificados para identificar cambios en las propiedades del modelo que sean más adecuadas para ayudar al ajuste entre el comportamiento observado y el calculado.
6. Decidir si será utilizado un programa que haga el ajuste automáticamente.
7. Hacer ajustes al modelo. Consultar con el personal operativo de las áreas geológicas, de perforación y producción acerca el realismo de los cambios propuestos.
8. Nuevamente, simular parte o todo el comportamiento pasado, para mejorar el ajuste. Analizar los resultados como en el paso 6.
9. Repetir los pasos 6, 8 y 9 hasta que se obtenga un ajuste satisfactorio.

Lo primero que se hace para ajustar el simulador con la historia del yacimiento, es calcular el comportamiento del mismo usando la mejor información disponible. De esta manera los resultados obtenidos de la simulación se comparan con aquéllos obtenidos del campo: esto es, con los datos reales.

Si al comparar los resultados no coinciden en una manera satisfactoria, se hacen modificaciones en los datos utilizados y se efectúan otras corridas del simulador hasta que se alcanza la aproximación deseada en los resultados. Cuando esto ocurre, el modelo puede ser utilizado para predecir con cierto grado de aproximación, el comportamiento del yacimiento.

Es importante notar que dicho comportamiento está influenciado por muchos factores, como son: las permeabilidades, la distribución de saturaciones, los espesores de las capas, porosidades, las permeabilidades relativas, etc., que nunca se conocen con aproximación a lo largo de todo el yacimiento. De esta manera, a lo que en realidad llega el ingeniero es a una combinación de estas variables (que da como resultado un ajuste), la cual no es única, por lo que dicha combinación no puede representar de una manera aproximada las condiciones del yacimiento. Por esto se debe tener en cuenta que al utilizar un simulador, después de haberlo ajustado a la historia del yacimiento, no se puede asegurar que la predicción que proporcione será la mejor aproximación del comportamiento que se tenga en dicho yacimiento. Sin embargo, a medida que el periodo en que se ha ajustado sea mayor, la predicción que se haga será más confiable, lo que implica que el ingeniero deba estar continuamente comparando la predicción hecha por el simulador con el comportamiento presente y actualizar de ser necesario, las combinaciones de datos que maneja el modelo.

V.6 Pronósticos de Producción

La mayoría de los estudios de simulación requiere que las predicciones se realicen bajo diferentes condiciones de operación ó, con dos ó más descripciones igualmente probables. Las predicciones le dan al ingeniero una oportunidad para visualizar el comportamiento futuro de un pozo o del yacimiento, bajo diferentes estrategias de operación. El ingeniero puede examinar una variedad de escenarios y seleccionar una estrategia que proporcione el comportamiento más deseable.

El ingeniero también tiene la oportunidad de demostrar los beneficios potenciales de nuevas ideas y de generar resultados de gran interés para el cliente o la compañía.

El principal uso de la predicción se ha tenido en la evaluación de la declinación de los yacimientos, aunque también se puede utilizar en el estudio de la inyección de agua para controlar la surgencia.

Realizar una planeación es necesaria para asegurar que los modelos del yacimiento y de los pozos incluyan todas las características requeridas para alcanzar los objetivos del estudio. También es útil para identificar a tiempo si existe información necesaria que no esté disponible.

El número de predicciones estará restringido por el tiempo y el dinero. Regularmente, se necesita tener los resultados antes de un tiempo determinado para que sean útiles en la toma de decisiones de cuestiones operativas. En estas situaciones, los casos más importantes se realizan primero que los demás.

V.7 Reporte de Resultados

La información utilizada y generada por los modelos numéricos es tan amplia, que prácticamente es imposible de probar, comprender, analizar y discutir sin haber sido sometida a una síntesis, que sea presentada en tablas, gráficas u otras herramientas visuales. La elección del tipo de reporte es dictada tanto por la necesidad como por el tiempo. La mayoría de los reportes son herramientas de trabajo y deben estar disponibles muy pronto al terminar (y en ocasiones durante) la corrida de simulación. En estos casos son más útiles los reportes simples y fáciles de obtener que los complejos.

CONCLUSIONES

Éste trabajo representa un gran esfuerzo para mejorar y ampliar lo que se había hecho en los apuntes anteriores. El haber actualizado y mejorado la versión anterior de los apuntes es un proceso que debió haberse realizado varias veces durante los últimos 23 años, periodo en que permanecieron sin actualizarse. Han existido muchos cambios importantes durante los últimos tiempos. Uno de estos cambios (y tal vez el más importante) es la llegada de la computadora como herramienta de uso común, la cual se ha convertido en una herramienta indispensable.

Como material de apoyo se incluyeron ejercicios resueltos, ya que sirven como una guía para que los interesados tengan una idea mucho más clara de los procedimientos básicos que se utilizan para resolver los problemas que se presentan. Además, es muy útil presentar conceptos básicos que permitan al interesado a familiarizarse con ellos y/o a cubrir las deficiencias en el aprendizaje de los antecedentes que se requieren para cursar la asignatura.

La realidad es que el hecho de que haya extendido el uso de la simulación no implica que los métodos analíticos que se utilizaban deban desaparecer o pasen a ser obsoletos. Hay que recordar que dichos métodos dan mejores resultados en algunos casos donde la simulación sólo contribuye a complicar más las cosas.

Un simulador por más que tenga bases bien fundamentadas, tanto físicas como matemáticas, nunca podrá reemplazar un buen estudio geológico del yacimiento, ni podrá determinar por si solo las propiedades petrofísicas de las rocas, ni las características de los fluidos. En otras palabras, los resultados que proporcione serán tan buenos como los datos que se le suministren. Es importante destacar el papel que dentro de la Simulación Numérica de Yacimientos (SNY) debe jugar el ingeniero petrolero, ya sea a nivel de usuario o como encargado de desarrollar un modelo. Por muy bueno que sea un simulador, requiere de un ingeniero que pueda interpretar los resultados y hacer las modificaciones necesarias para hacer que el modelo se ajuste a los datos de producción.

RECOMENDACIONES

Realizar una actualización del material de apoyo (apuntes) cada 3 o 4 años como máximo.

Incluir en las clases material audiovisual que tenga la calidad para ser un buen soporte que ayude al profesor a exponer la clase de manera interesante y clara; con lo cual se logrará el objetivo de que el alumno termine el curso habiendo adquirido un sólido conocimiento básico de SNY. De hecho, esta recomendación se propone para cada una de las asignaturas del plan de estudios de la carrera. Esto surge como una necesidad ya que aunque la plantilla de profesores sea modificada frecuentemente, siempre haya material para que el profesor en turno pueda apoyarse para impartir su clase y, que no pierda tiempo en generar algo nuevo, sino que se enfoquen sólo en mejorarlo.

La capacidad de transmisión de datos nos da la posibilidad de grabar las clases, para que así, los alumnos puedan descargarlas y consultarlas en cualquier lugar. Inclusive cuando la tecnología avance lo suficiente y el acceso a ella sea más extendido las clases podrían darse en línea (on line) y con esto permitir al usuario disfrutar de los beneficios sin tener que estar físicamente en el lugar donde se imparte la clase.

NOMENCLATURA

A	área $[L^2]$
B	factor de volumen de un fluido $\begin{bmatrix} Vol @ c. y. \\ Vol @ c. s. \end{bmatrix}$
c	compresibilidad $\begin{bmatrix} L^2 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lt^2 \\ M \end{bmatrix}$
c_r	compresibilidad de la roca $\begin{bmatrix} L^2 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lt^2 \\ M \end{bmatrix}$
c_f	compresibilidad del fluido $\begin{bmatrix} L^2 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lt^2 \\ M \end{bmatrix}$
c_t	compresibilidad total $\begin{bmatrix} L^2 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lt^2 \\ M \end{bmatrix}$
C	coeficiente de almacenamiento $\begin{bmatrix} L^5 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^4 t^2 \\ M \end{bmatrix}$
C_A	factor de forma (adimensional)
E_i	función integral exponencial
g	gas
h	espesor del yacimiento $[L]$
Imax	número de nodos pertenecientes a una malla
k	permeabilidad absoluta $[L^2]$
k_{rf}	permeabilidad relativa a un fluido $\begin{bmatrix} L^2 \\ L^2 \end{bmatrix}$
k_s	permeabilidad de la zona dañada $[L^2]$
L	longitud del yacimiento $[L]$
m	masa $[M]$
o	aceite

p presión $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_{wf} presión de fondo fluyendo $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_i presión inicial $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_{1hr} presión a una hora $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_{ref} presión de referencia $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_L presión izquierda $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_R presión derecha $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_i^{n+1} presión futura en el nodo "i" $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_i^n presión actual en el nodo "i" $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

$p_{(r,t)}$ presión en función del radio y del tiempo $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

p_D, p_{wD} , presiones adimensionales auxiliares

$p_{b,ijk}$ presión de la celda "i, j, k" $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

$p_{wf,ijk}$ presión del pozo en la celda "i, j, k" $\begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ Lt^2 \end{bmatrix}$

q_m gasto másico $\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$

\bar{q}_m gasto másico por unidad de volumen de roca $\begin{bmatrix} L^3 \\ \frac{t}{L^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$

\tilde{q}_s	gasto volumétrico a condiciones estándar por unidad de volumen de roca	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \\ L^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$
q_{wb}	gasto proveniente del pozo (well bore)	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$
q_{sf}	gasto de la formación (sand face)	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$
q_L	gasto izquierdo	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$
q_R	gasto derecho	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$
$q_{w,jk}$	gasto del pozo en la celda "i, j, k"	$\begin{bmatrix} L^3 \\ t \end{bmatrix}$
r	longitud en coordenadas radiales	$[L]$
r_s	radio de la zona dañada	$[L]$
r_w	radio del pozo	$[L]$
r_e	radio de drene	$[L]$
r_D	radio adimensional auxiliar	
r_i	posición del nodo que "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cilíndricas	$[L]$
r_{i+1}	posición del nodo que se encuentra a la derecha del nodo "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cilíndricas	$[L]$
r_{i-1}	posición del nodo que se encuentra a la izquierda del nodo "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cilíndricas	$[L]$
$r_{i+\frac{1}{2}}$	posición de la frontera derecha del nodo "i", respecto al sistema cilíndrico	$[L]$

r_{i-2}	posición de la frontera izquierda del nodo "i", respecto al sistema cilíndrico [L]
R	constante universal de los gases $\left[\frac{ML^2}{mol T t^2} \right]$
s	factor de daño $\left[\frac{F}{L^2} \right] = \left[\frac{M}{Lt^2} \right]$
S	saturación de un fluido $\left[\frac{L^3}{L^3} \right]$
t	tiempo [t]
t_D	tiempo auxiliar adimensional
T	temperatura [T]
T_{i+2}^{n+1}	transmisibilidad futura en la frontera derecha del nodo "i" $\left[\frac{FL}{t} \right] = \left[\frac{ML^2}{t} \right]$
T_{i-2}^{n+1}	transmisibilidad futura en la frontera izquierda del nodo "i" $\left[\frac{FL}{t} \right] = \left[\frac{ML^2}{t} \right]$
u_x, u_y, u_z	componentes cartesianos de la velocidad del fluido $\left[\frac{L}{t} \right]$
v	velocidad del fluido $\left[\frac{L}{t} \right]$
V	volumen [L ³]
V_b	volumen de roca $\left[\frac{L^3}{L^3} \right]$
V_p	volumen de poro [L ³]
V_{ma}	volumen de matriz rocosa [L ³]
V_{R_i}	volumen de la celda "i" en sistema cartesiano [L ³]

V_i	volumen de la celda "i" en sistema cilíndrico $[L^3]$
w	agua
x	eje de las abscisas en coordenadas cartesianas $[L]$
x_i	posición del nodo que "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas $[L]$
x_{i+1}	posición del nodo que se encuentra a la derecha del nodo "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas $[L]$
x_{i-1}	posición del nodo que se encuentra a la izquierda del nodo "i", respecto al origen del sistema de coordenadas cartesianas $[L]$
x_{i+2}	posición de la frontera derecha del nodo "i", respecto al sistema cartesiano $[L]$
x_{i-2}	posición de la frontera izquierda del nodo "i", respecto al sistema cartesiano $[L]$
y	eje de las ordenadas en coordenadas cartesianas $[L]$
z	eje de las alturas, tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas $[L]$
Z	factor de compresibilidad de los gases reales
γ_p	peso específico de una fase $\left[\frac{F}{L^3} \right] = \left[\frac{M}{L^2 t^2} \right]$
Δr_i	distancia entre nodos, en coordenadas cilíndricas $[L]$
Δt	incremento de tiempo $[t]$
Δx_i	distancia entre nodos, en coordenadas cartesianas $[L]$
$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$	incrementos de longitud en coordenadas cartesianas $[L]$
θ	eje de la dirección en coordenadas cilíndricas $[grados], [radianes]$
μ	viscosidad $\left[\frac{Ft}{L^2} \right] = \left[\frac{M}{Lt} \right]$

ρ	densidad	$\begin{bmatrix} M \\ L^3 \end{bmatrix}$
ρ_s	densidad a condiciones estándar	$\begin{bmatrix} M \\ L^3 \end{bmatrix}$
σ	factor de forma (adimensional)	
ϕ	porosidad total	$\begin{bmatrix} L^3 \\ L^3 \end{bmatrix}$
ϕ_e	porosidad efectiva	$\begin{bmatrix} L^3 \\ L^3 \end{bmatrix}$
Φ	potencial de un fluido	$[L]$
∇	operador Nabla	
$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$	proceso de variación de volumen en función de la presión, a temperatura constante	$\begin{bmatrix} L^3 \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^4 T^2 \\ M \end{bmatrix}$

BIBLIOGRAFÍA

Arana O. Víctor: "Notas del Curso de Simulación Matemática de Yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM, 2007.

Arango J. Iván & Nava G. Denidey: "Análisis de Sensibilidad en la Simulación de Yacimientos Naturalmente Fracturados", Facultad de Ingeniería UNAM, 2004.

Ayala G. Luis & Serrano L. José: "Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM, 1982.

Aziz Khalid: "SPE25233 Reservoir Simulation Grids: Opportunities and Problems", Society of Petroleum Engineers, 1993.

Aziz, Khalid & Settari, Antonin: "Petroleum Reservoir Simulation", London: Elsevier Applied Science Publishers, [s.f.], 1979.

Breitenbach E. Allen: "SPE23472 Reservoir Simulation: State of Art", Society of Petroleum Engineers, 1991.

Chapman Stephen J.: "Fortran 90/95 for Scientists and Engineers", McGraw-Hill Education (ISE Editions). 1998.

Chierici, G. L.: "Principles of Petroleum Reservoir Engineering", Vol. 1 y 2, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K. 1994.

Chivers I. D., Sleightholme J.: "Introducing Fortran 90", Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K. 1995.

Chrichlow, H. B.: "Modern Reservoir Engineering. A Simulation Approach", Prentice Hall, Inc. New Jersey 1977.

Coats H. Keith: "SPE02367 Use and Misuse of Reservoir Simulation Models", Society of Petroleum Engineers, 1969.

Coats H. Keith: "SPE10020 Reservoir Simulation: State of Art", Society of Petroleum Engineers, 1982.

Craft, B. C. & Hawkins, M. F.: "Applied Petroleum Reservoir Engineering", Prentice-Hall, New Jersey. 1959.

Dake. L.: "The Practique of Reservoir Engineering", Ed Elsevier.

Durlafsky J. Louis: "Upscaling and Gridding of Geocellular Models for Reservoir Flow Simulation", Department of Petroleum Engineering, Stanford University. 2005.

- Ellis, Philips, Lahey.:** "Fortran 90 Programming", Addison-Wesley. 1994.
- Ertekin Turgay, Abou-Kassem Jamal H. y King Gregory R.:** "Basic Applied Reservoir Simulation", SPE, Textbook Series, Vol.7, Richardson, Texas 2001.
- Esor Eugene, Dresda Stefano & Monico Carlo:** "SPE90362 Use of Material Balance to Enhance 3D Reservoir Simulation: A Case Study", Society of Petroleum Engineers, 2004.
- Farias Leopoldo:** "Introducción al Desplazamiento Inmiscible", Universidad Central de Venezuela, 2005
- Faroug Ali & R. F. Nielser:** "SPE03080 The Material Balance Approach vs Reservoir Simulation as an Aid to Understanding Reservoir Mechanics", Society of Petroleum Engineers, 1970.
- Forsythe, G. E. & Wasow, W.:** "Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations", J. Wiley & Sons, New York, 1960.
- Hernández G. Miguel & Domínguez V. Guillermo:** "Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM, 1984.
- Hernández R. Orlando & del Valle M. Paul:** "Simulador de Aceite con Interfaz de Visualización Para Uso Académico", Facultad de Ingeniería UNAM, 2005.
- Jeanne Adams, Walter Brainerd, Jerry Wagener, Brian Smith:** "Fortran 90 handbook: Complete ANSI Reference", McGraw-Hill Education. 1991.
- Jeanne C. Adams, Walter S. Brainerd, Jeanne T. Martin, Brian Smith, Jerrold L. Wagener:** "Fortran 95 Handbook (Scientific & Engineering Computation S.)", The MIT Press. 1997.
- Jones W. W. & Cummer Roy P.:** "SPE02428 Reservoir Simulation Pays Big Dividend", Society of Petroleum Engineers, 1969.
- Kleppe Hans:** "Notes of Reservoir Simulation Course", Stavanger University College, 2006.
- Loren P. Meissner:** "Fortran 90", PWS. 1995.
- Maria, Anu:** "Introduction to Modeling and Simulation", *Proceeding of the 1997 Winter Simulation Conference*, ed. S. Andradottir, 1997.
- Mattax Calvin C. y Robert Dalton:** "Reservoir Simulation", SPE, Monograph, Vol. 13, Richardson, Texas 1990.
- Metcalf, Reid.:** "Fortran 90/95 explained", Oxford Univ. Press 1999.

Michael Metcalf (Foreword), William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: "Numerical Recipes in Fortran 90", Vol. 2, 1996.

Odeh A. S.: "SPE02790 Reservoir Simulation...What is it?", Society of Petroleum Engineers, 1969.

Peaceman, Donald W.: "Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation", Ámsterdam: Elsevier Science Publishing Co., 176 pp. 1977.

Portilla, S. Lizbeth.: "Métodos para Determinar la S_{wi} en Yacimientos Petroleros", Facultad de Ingeniería UNAM, 2007.

R. A. Wattenbarger: "Petroleum Engineering Numerical Methods", Texas A&M University, 2003.

Rodríguez Nieto Rafael: "Apuntes de Principios de Mecánica de Yacimientos", Facultad de Ingeniería UNAM, 2004.

Schwabe Klaus & Brand Jack: "SPE01857 Prediction of Reservoir Behavior Using Numerical Simulators", Society of Petroleum Engineers, 1967.

Shannon, R. E.: "Systems Simulation: The Art and Science", Prentice Hall, 1975.

Staggs H. M. & Herbeck E. F.: "SPE03304 Reservoir Simulation Models An Engineering Overview", Society of Petroleum Engineers, 1971.

Sterman, John D.: "A Skeptic's Guide to Computer Models", In Barney, G.O. (eds.). 1991.

W. S. Brainerd, J. C. Adams, C. H. Goldberg: "Programmer's Guide to Fortran 90", Springer-Verlag New York Inc. 1996.

Watts J. W.: "SPE38441 Reservoir Simulation: Past, Present and Future", Society of Petroleum Engineers, 1997.

APÉNDICE A PROPIEDADES DE LA ROCA Y DE LOS FLUIDOS

A.1 Propiedades petrofísicas

A.1.1 Porosidad (ϕ)

Es la fracción del volumen de la roca que es ocupada por los poros. La porosidad se expresa en fracción, pero también es común expresarla en porcentaje:

$$\text{porosidad} = \phi = \frac{V_p}{V_b} = \frac{V_b - V_{ma}}{V_b}$$

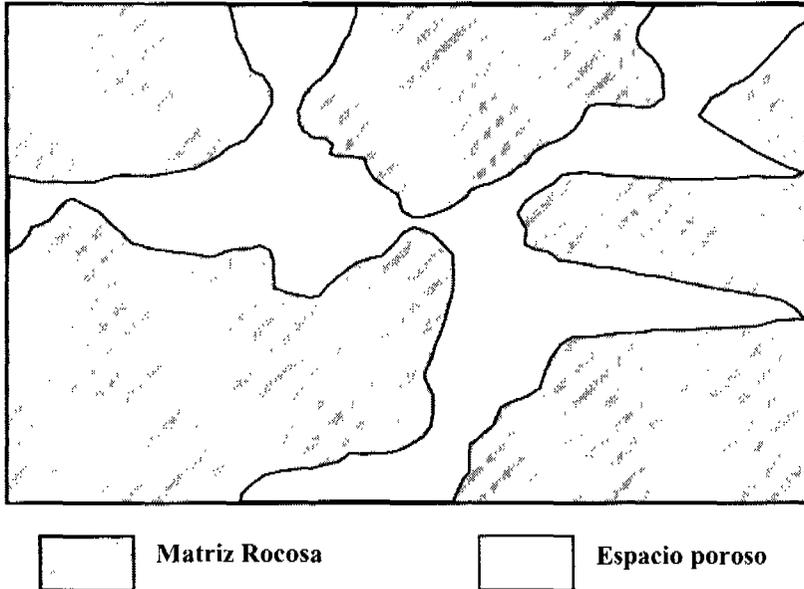


Fig. A.1 Porosidad

La porosidad puede obtenerse directamente a partir de análisis de núcleos en el laboratorio o indirectamente, a partir de registros geofísicos (sónico, densidad y neutrón), pero la porosidad que se obtiene con registros geofísicos es un aproximado de la porosidad total.

La porosidad obtenida en laboratorio no es la misma a condiciones de yacimiento, por lo que debe ser ajustada por la siguiente ecuación:

$$\phi_2 = \phi_1 e^{c(p_2 - p_1)}$$

O bien

$$\phi_2 = \phi_1 [1 + cf(p_2 - p_1)] .$$

Esta ecuación no puede usarse para formaciones suaves. Hay que hacer notar que cuando la presión disminuye, la porosidad disminuye debido al efecto de sobrecarga.

La porosidad es independiente del tamaño de grano pero depende del tipo de empaquetamiento. Un máximo de porosidad de 47.6% se obtiene con un empaquetamiento cúbico, mientras que con un empaquetamiento rómbico se obtiene un 25.96% de porosidad.

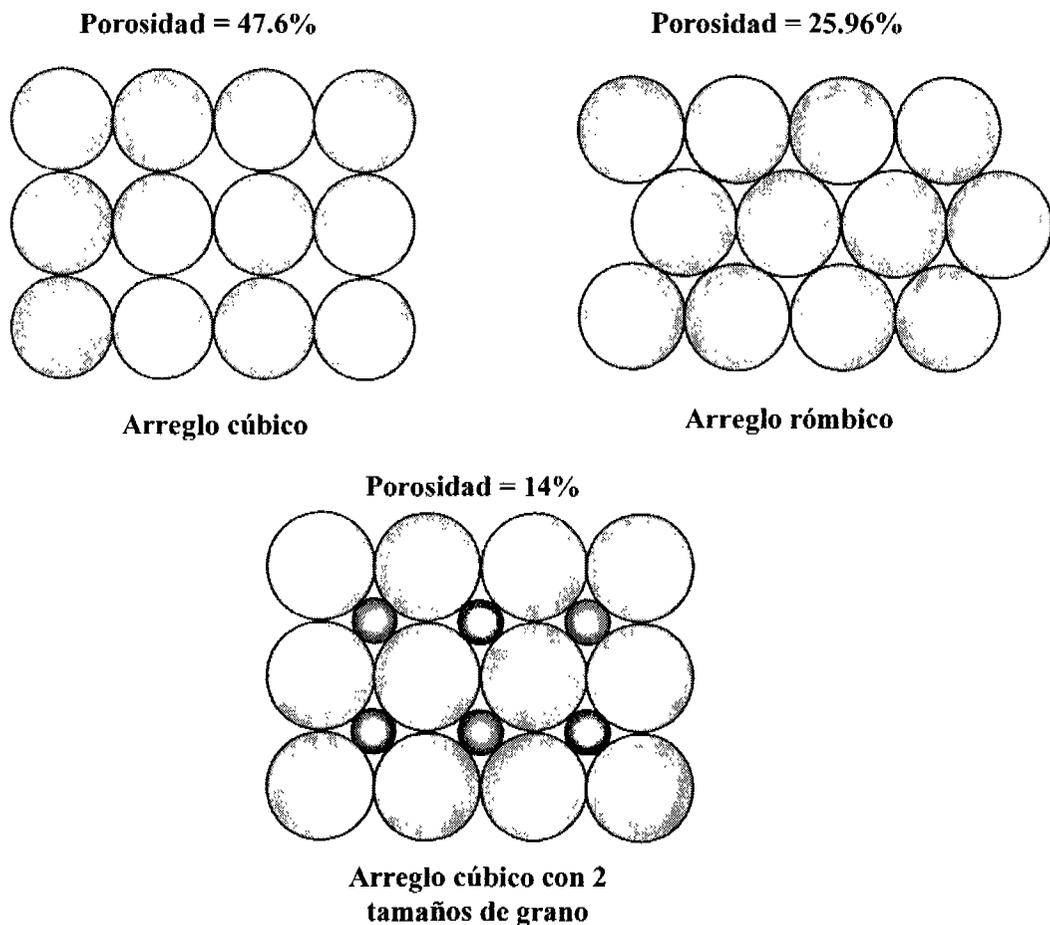


Fig. A.2 Tipos de arreglos

La porosidad puede ser primaria o secundaria, dependiendo del proceso por el cual se originó.

- **La porosidad primaria.** También es conocida como intergranular, es aquella que depende en gran parte de las características de empaquetamiento de los granos o clastos y de la variación en la forma y tamaño de los granos, inherente al origen de la roca misma. Es el resultado de los procesos originales de formación del medio poroso tales como depositación, compactación, recristalización, etc. Se tienen tres principales tipos:

1. Porosidad intergranular. Esta porosidad ocurre entre los espacios de los granos. Esta es una porosidad importante ya que existe inicialmente en todas las rocas sedimentarias. La porosidad intergranular se reduce progresivamente por la diagénesis, pero es el tipo de porosidad dominante en areniscas.

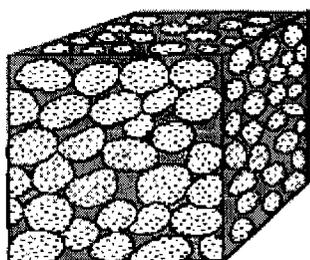


Fig. A.3a Arena bien clasificada

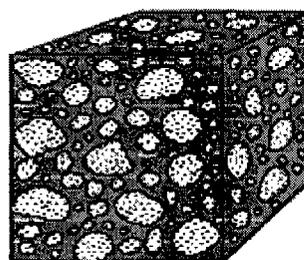


Fig. A.3b Arena escasamente clasificada

2. Porosidad intrapartícula. Particularmente en sedimentos carbonatados, con restos fósiles, encontrándose la porosidad dentro de los granos o detritos.
3. Porosidad intercristalina. Ocurre entre los cristales individuales de una roca cristalina, es del tipo de porosidad en rocas ígneas y metamórficas, pero sin embargo, ésta es una característica de los carbonatos, los cuales han sufrido la cristalización, particularmente en dolomías recristalizadas.

- **La porosidad secundaria.** Se debe a procesos posteriores que experimenta el mismo medio poroso, (disolución de material calcáreo por corrientes subterráneas, fracturamiento, dolomitización, etc) después de que los sedimentos han sido convertidos en roca. La porosidad secundaria o de post-depósito, es más diversa en morfología y su génesis es más compleja que la primaria, teniéndose los principales tipos:
 1. Porosidad fenestral. Típica de carbonatos, esto ocurre en fragmentos de arenas carbonatadas, donde se gradúa en porosidad primaria, pero es más característico en lodos con pellets, laminitas de alga y lodos homogéneos de origen intermarea y lagunar. La deshidratación contemporánea, litificación y la generación de gas biogénico, puede causar laminación y generar poros fenestrales subhorizontales, entre las láminas.
 2. Porosidad vugular. Los vugulos son de tipo secundario, formados por disolución, encontrándose entre los carbonatos. Dicha disolución se lleva a cabo por las corrientes subterráneas de agua, disolviendo la roca y originando los vugulos.
 3. Porosidad de fracturas y fisuras. Se origina en rocas duras, que son quebradizas. Las fracturas pueden permanecer abiertas después de su formación, por lo que da lugar a la porosidad de fracturas. Este tipo de porosidad caracteriza a las rocas compactas y es, por consiguiente, formada después de las otras variedades de porosidad. Su origen puede deberse principalmente a las siguientes causas: plegamientos, fallas, o tectonismo. Las fracturas son sumamente importantes, ya que no tienen gran influencia en el aumento de porosidad de la roca, aunque sí en el aumento de su permeabilidad.

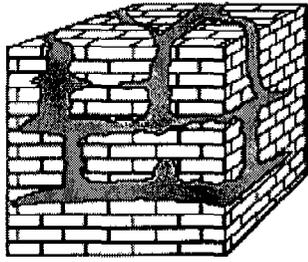


Fig. A.4a Cavernas en Calcita

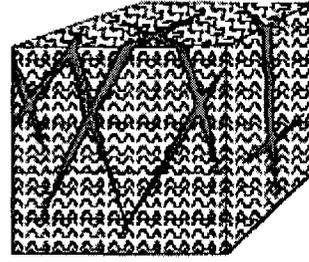


Fig. A.4b Granito fracturado

Porosidad absoluta (ϕ_a). También llamada total (ϕ_t), es el volumen total de espacios, llámese poros, canales, fisuras o cavernas, comunicadas o no, que existen entre los elementos minerales de la roca, relacionados al volumen bruto de la roca.

$$\phi_t = \frac{V_{pt}}{V_r}$$

donde:

V_{pt} es el volumen total de espacios vacíos
 V_r es el volumen total de roca,

por lo que la porosidad total o absoluta se puede expresar como:

$$\phi_t = \phi_1 + \phi_2$$

donde:

ϕ_1 es la porosidad primaria

ϕ_2 es la porosidad secundaria.

Porosidad efectiva (ϕ_e). Es el porcentaje de espacio poroso intercomunicado con respecto al volumen total de la roca. Por consiguiente, es una indicación de la conductividad de fluidos. La porosidad efectiva es una función de muchos factores litológicos. Los más importantes son: tamaño de los granos, empaque de los granos, cementación, cantidad y clases de arcilla, etc.

Para rocas con porosidad intergranular, tales como arenas, la porosidad efectiva se acerca mucho a la porosidad total, sin embargo para rocas altamente cementadas o rocas con vugulos, tales como caliza hay mucha variación entre la porosidad efectiva y la total. En lutitas, la porosidad total puede acercarse al 40% pero la porosidad efectiva es usualmente menor al 2%. En general, la porosidad en rocas no fracturadas está en el rango de 5 a 30% y en la mayoría de los casos la porosidad no es menor del 20%.

A.1.2 Compresibilidad de la Roca (c_r)

Es el cambio relativo de volumen de material por unidad de cambio de presión a condiciones de temperatura constante. Un incremento en la presión causa una compactación en el material (compresión). Un decremento en la presión causa un incremento en el volumen en el material (expansión). Las compresibilidades típicas de las rocas almacenadoras de hidrocarburos se encuentran en el rango de 3 a $30 \times 10^{-6} \text{ (lb/pg}^2\text{)}^{-1}$

$$C = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (2.1)$$

Existen tres tipos de compresibilidad en las rocas:

- **Compresibilidad de la matriz:** Es el cambio del volumen de los granos de la roca por un cambio de presión.
- **Compresibilidad de poro:** Es el cambio en el volumen poroso de la roca por cambio de presión.
- **Compresibilidad total de la roca:** Es el cambio en el volumen total de la roca por cambio de presión.

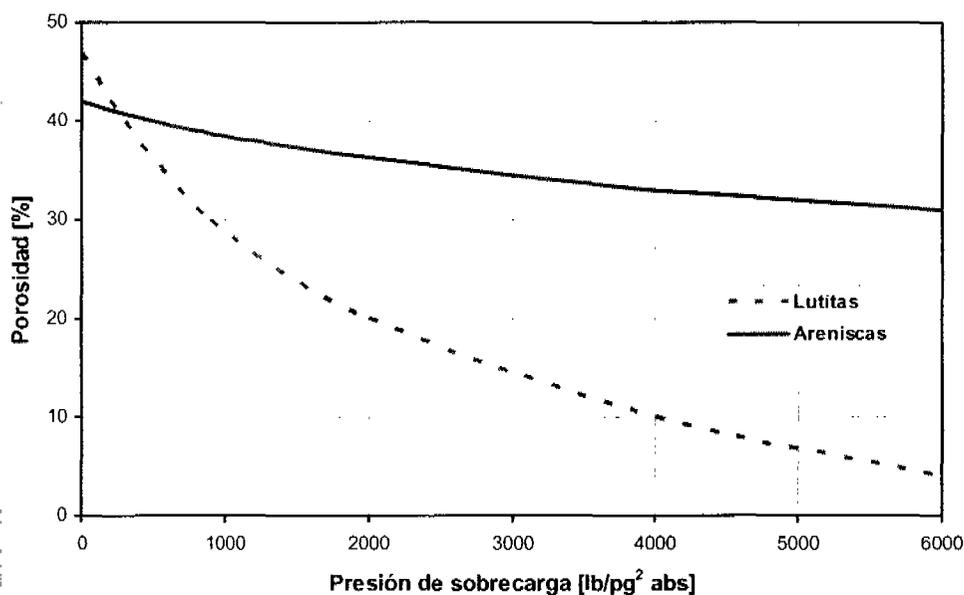


Fig. A.5 Gráfica de Porosidad vs Presión de sobrecarga, en lutitas y areniscas

A.1.3 Saturación (S)

La saturación de fluidos es la fracción del volumen de poros de una roca que se encuentra ocupada por algún fluido, ya sea aceite, agua o gas. Se obtiene al dividir el volumen del fluido (V_f) a condiciones del medio poroso, entre el volumen de huecos o espacios intercomunicados del medio poroso, es decir:

$$S_f = \frac{V_f}{V_p} = \frac{\text{Volumen del fluido (aceite, gas o agua) a condiciones del medio poroso}}{\text{Volumen de espacios comunicados del medio poroso}}$$

Los poros en un yacimiento siempre están saturados de fluidos, Fig. A.6, de este modo, la suma de todas las saturaciones de fluidos de una roca de un yacimiento debe ser igual al 100% o a 1, si se manejan fracciones.

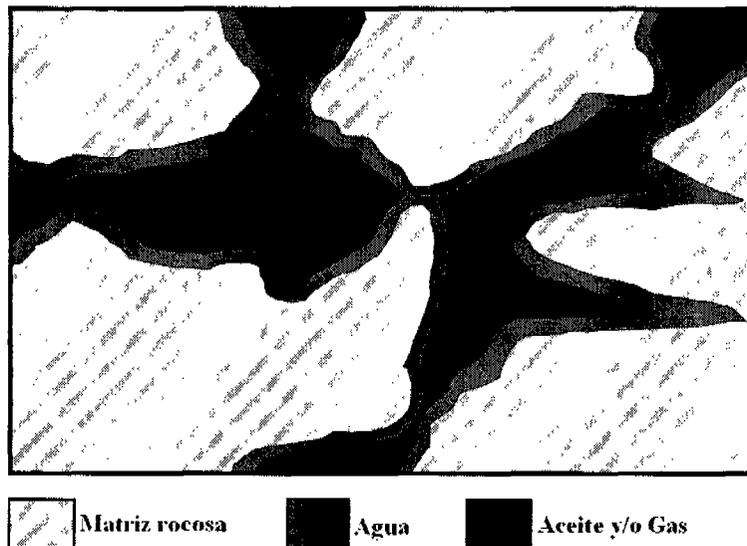
$$\sum S_f = 1$$

$$S_w = 1$$

$$S_o + S_w = 1$$

$$S_g + S_w = 1$$

$$S_o + S_g + S_w = 1$$



Matriz rocosa
 Agua
 Aceite y/o Gas

Fig. A.6 Roca saturada de aceite y agua

Dependiendo las condiciones a las que se encuentre, existen diferentes formas de clasificar las saturaciones, dentro de las más comunes tenemos:

- **Saturación de agua inicial (S_{wi}):** Es aquella a la cual es descubierto el yacimiento y se pueden distinguir dos tipos de agua:
 - **Agua libre:** Es la que está en condiciones de fluir ante una diferencia de presión.
 - **Agua intersticial o irreductible:** Es la que está ligada a los granos minerales, ya sea mediante enlaces a la estructura atómica de los minerales o bien como una fina capa adherida a la superficie de los mismos. El adjetivo irreductible se usa para establecer que no puede ser removida durante la producción.
- **Saturación de agua crítica (S_{wc}):** Es la saturación mínima a la cual el agua inicia su movimiento dentro del medio poroso bajo un gradiente de presión.
- **Saturación residual o remanente (S_{or}):** Es aquella que se tiene después de un periodo de explotación en una zona determinada del yacimiento se tendrá aceite remanente. Este valor de saturación es llamado saturación de aceite residual o remanente. El término residual es usualmente asociado con la fase no mojante.
- **Saturación de aceite crítica (S_{oc}):** Es la saturación mínima a la cual el aceite inicia su movimiento dentro del medio poroso bajo un gradiente de presión.
- **Saturación de aceite movable (S_{om}):** La saturación de aceite movable es otra saturación de interés y es definida como la fracción de volumen poroso ocupada por aceite movable, como expresa la siguiente ecuación, cuando se tiene S_{wi} .

$$S_{om} = 1 - S_{or} - S_{wi}$$

donde:

S_{om} = saturación de aceite movable

S_{or} = saturación de aceite residual

S_{wi} = saturación de agua irreductible.

Igualmente, para el gas se tendrá saturación de gas residual (S_{gr}), saturación de gas crítica (S_{gc}) y saturación de gas movable (S_{gm}). La saturación de hidrocarburos, aceite o gas, en un yacimiento puede variar desde la residual hasta la máxima, cuando en la roca se tiene la S_{wi} . A su vez, la saturación de agua puede variar, desde un valor mínimo (S_{wi}) hasta un valor máximo igual a 100%.

A.1.4 Permeabilidad (k)

Es una propiedad del medio poroso y es la medida de la capacidad de un medio para permitir el flujo de fluidos a través de él. La unidad de la permeabilidad es el Darcy. Un Darcy es la permeabilidad de un medio poroso si a través de él fluye un solo fluido de 1 cp de viscosidad, a un gasto de 1 cm³/s, a través de un área de 1 cm² y con un gradiente de presión de 1 atm/cm.

En estudios de yacimientos petroleros se consideran varios tipos de permeabilidad, siendo cinco de ellos los siguientes:

- **Permeabilidad absoluta (k_a):** Es la propiedad del medio que permite el paso de un fluido, cuando éste lo satura al 100%. Esta permeabilidad depende exclusivamente de las características físicas de la estructura porosa.
- **Permeabilidad a un fluido (k_f):** Indica la facilidad con que un fluido puede moverse a través de un medio poroso cuando está saturado 100% con tal fluido. Puede tenerse k_g, k_o y k_w en el laboratorio pero sólo k_w en un yacimiento petrolero.

$$k_g = \frac{\overline{q_g \mu_g L}}{A \Delta P}$$

$$k_o = \frac{\overline{q_o \mu_o L}}{A \Delta P}$$

$$k_w = \frac{\overline{q_w \mu_w L}}{A \Delta P},$$

donde:

k_g, k_o, k_w son las permeabilidades al gas, aceite y al agua

q_g, q_o, q_w son los gastos de gas, aceite y agua a condiciones medias de flujo

μ_g, μ_o, μ_w son las viscosidades del gas, aceite y agua

L es la longitud de la muestra

A es el área transversal de la muestra

ΔP es la caída de presión en la longitud (L)

- **Permeabilidad al líquido (k_L).** Es la permeabilidad de un medio poroso obtenida con el método de Klinkenberg y está dada por la siguiente ecuación:

$$k_L = k_g - m \frac{1}{P_m}$$

donde:

k_L es la permeabilidad al líquido

k_g es la permeabilidad al gas

m es la pendiente de la gráfica de $\frac{1}{P_m}$ vs k_g

P_m es la presión media de flujo

El valor de la k_L es prácticamente igual al de k_a .

- **Permeabilidad efectiva a un fluido (k_{ef}).** La permeabilidad efectiva a un fluido es la permeabilidad del medio a ese fluido cuando su saturación es menor del 100%.

$$k_{ef} = \frac{\bar{q}_f \mu_f L}{A \Delta P}, \text{ si } S_f < 100\%$$

Se pueden tener diversos tipos de permeabilidad efectiva: permeabilidad efectiva al gas (k_{eg}), permeabilidad efectiva al aceite (k_{eo}) y permeabilidad efectiva al agua (k_{ew}).

- **Permeabilidad relativa a un fluido (k_{rf}).** Es la relación de la permeabilidad efectiva a tal fluido entre la permeabilidad absoluta o la permeabilidad al líquido del medio poroso.

$$k_{rj} = \frac{k_{ef}}{k_a}$$

Se tiene permeabilidad relativa al gas, permeabilidad relativa al aceite y permeabilidad relativa al agua, las cuales son:

$$k_{rg} = \frac{k_{eg}}{k_a}$$

$$k_{ro} = \frac{k_{eo}}{k_a}$$

$$k_{rw} = \frac{k_{ew}}{k_a}$$

La permeabilidad relativa depende de las características tanto del medio poroso como de los fluidos que lo saturan, así como del grado de saturación de los fluidos. Este tipo de permeabilidad se expresa en por ciento o fracción de la permeabilidad absoluta y es muy común representarla en función de la saturación de algún fluido. En la Fig. A.7 se muestra una gráfica de k_{rw} y k_{ro} contra S_w .

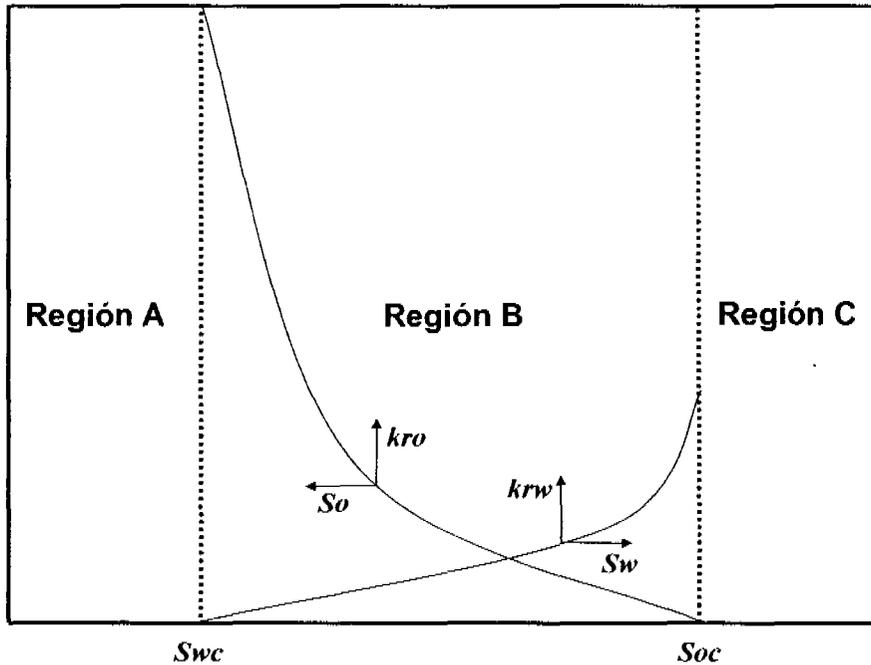


Fig. A.7 Grafica de permeabilidad relativa al aceite y al agua

Región A: Sólo el aceite puede fluir, porque se tiene $S_w \leq S_{wc}$

Región B: Puede fluir simultáneamente el aceite y el agua

Región C: Sólo fluirá el agua, porque se tiene $S_o \leq S_{oc}$

Los factores que afectan la permeabilidad relativa son:

- Saturación de fluidos
- Geometría y distribución del espacio poroso
- Mojabilidad
- Historia de saturación

A.1.5 Tensión Interfacial (σ)

Dos fluidos inmiscibles en contacto no se mezclan y los separa una interfase. Las moléculas no se mezclan por su mayor afinidad con las moléculas de su propia clase. Cerca de la superficie las moléculas se atraen con mayor intensidad produciendo una fuerza mecánica en la superficie que se conoce como *tensión interfacial*, σ . Ésta es el resultado de efectos moleculares por los cuales se forma una interfase o superficie que separa dos fluidos; en el caso de líquidos, si σ es nula, se dice que los líquidos son miscibles entre sí. Como ejemplo de líquidos inmiscibles se tienen el agua y el aceite, en tanto que el agua y el alcohol son miscibles. En el caso de que se tenga una interfase líquido-gas, al fenómeno se le llama tensión superficial., Fig. A.8

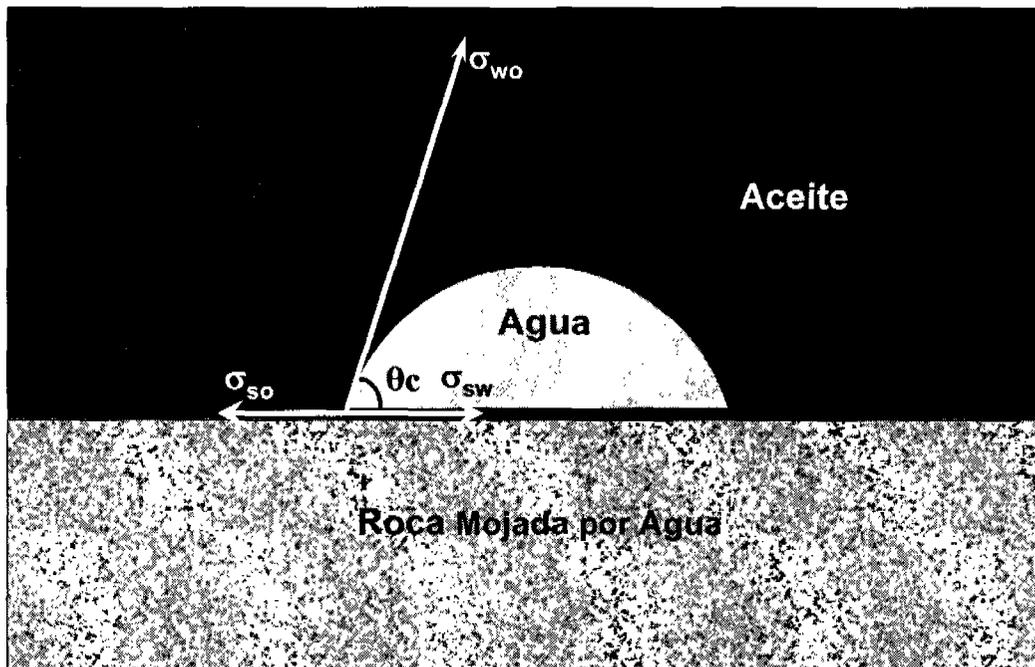


Fig. A.8 Tensión superficial

Las energías de superficie en un sistema de este tipo (Fig. A.8) se relacionan mediante la ecuación de Young-Dupre, en la forma siguiente:

$$A_i = \sigma_{so} - \sigma_{sw} = \sigma_{wo} \cos \theta_c,$$

donde:

A_t = Tensión de adhesión, *dina/cm*

σ_{SO} es la energía interfacial (tensión interfacial) entre el aceite y el sólido, *dina/cm*

σ_{SW} es la energía interfacial entre el agua y el sólido, *dina/cm*

σ_{WO} es la energía interfacial entre el aceite y el agua, *dina/cm*

θ_C es el ángulo de interfase o de contacto aceite-agua con respecto al sólido, medido a través del agua, *grados*.

Ninguna de las energías interfaciales, aceite-sólido o agua-sólido, pueden medirse directamente. Sin embargo, los términos equivalentes (la tensión superficial aceite-agua y el ángulo de contacto) pueden determinarse independientemente, en el laboratorio.

A.1.6 Mojabilidad (W)

Cuando una roca contiene más de un fluido saturando su espacio poroso, la tensión interfacial, es la que determina la preferencia de la roca a ser mojada por alguno de los fluidos. La mojabilidad es la tendencia de un fluido a extenderse o adherirse sobre una superficie sólida, en presencia de otro fluido. Un parámetro que refleja tal preferencia es el ángulo de contacto. Si la roca es mojada por aceite se dice que es oleofílica Fig. A.9b y si lo es por agua será hidrófila Fig. A.9a.

La mojabilidad es de gran importancia para el flujo de aceite en un medio poroso. Se ha demostrado que si la roca es mojada por agua, Fig A.9a, la permeabilidad relativa al aceite es muy superior al caso en el que la roca sea mojada por aceite. Esto es debido a que la fase mojantera (en este caso el agua) está adherida a la roca, disminuyendo de esta manera su movilidad.

En la aplicación de esta propiedad a la ingeniería de yacimientos, la superficie sólida es la roca del yacimiento, frecuentemente formada por un material detrítico de cuarzo, caliza o dolomía y un cementante. Los fluidos que existen en los espacios o poros de la roca son: aceite, agua y gas.

Como se ilustra en la Fig. A.8, el valor del ángulo de contacto puede variar desde 0° hasta 180° , como límites. Los ángulos de contacto de menos de 90° , medidos a través de la fase de agua, indican condiciones de mojabilidad preferentemente por agua, Fig. A.9a, mientras que los ángulos de contacto mayores de 90° , indican condiciones de mojabilidad preferentemente por aceite, Fig. A.9b. Un ángulo de contacto exactamente de 90° indicaría que la superficie de la roca tiene igual preferencia de ser mojada por el agua o por el aceite, Fig. A.9c.

También han aparecido referencias a la mojabilidad en un sentido cualitativo. En la literatura técnica, aparecen los términos “fuertemente mojados por agua”, “fuertemente mojados por aceite” o “mojabilidad intermedia”.

El gas natural es el fluido no mojante; el aceite es el fluido mojante cuando se compara con el gas y por lo regular el aceite es el fluido no mojante cuando se compara con el agua. Dependiendo del tipo de roca en el yacimiento, la capacidad de mojabilidad varía. El fluido mojante cubrirá por completo la superficie de la roca y estará ubicado en los espacios porosos más pequeños, debido a la acción de la capilaridad. La fase no mojante tenderá a congregarse en grandes espacios porosos, o en el centro de éstos.

Rara vez se indican los límites cuantitativos de estos términos cualitativos de mojabilidad. Sin embargo, a veces se usan los límites aproximados siguientes: los ángulos de contacto cercanos a 0° y a 180° se consideran respectivamente como fuertemente mojados por agua o por aceite. Los ángulos de contacto cercanos a 90° tienen una moderada preferencia de mojabilidad y cubren la gama llamada "mojabilidad intermedia".

FASE MOJANTE	FASE NO MOJANTE
<p>La fase mojante ingresa al medio poroso en forma espontánea. Y, por lo tanto, es necesario entregar energía para sacarla del medio poroso.</p>	<p>La fase no mojante es expulsada del medio poroso en forma espontánea. Y, por lo tanto, no es necesario entregar energía para extraerla de los poros.</p>
<p>Se adhiere preferentemente a la superficie de la roca</p>	<p>Sólo es necesario disponer de una fuente de fase mojante para que la reemplace en forma espontánea.</p>
<p>Debido a las fuerzas de atracción entre la roca y el fluido mojante, éste tiende a ubicarse en los poros más pequeños de la roca.</p>	<p>No tiene preferencia a adherirse a la superficie de la roca</p>
<p>La fase mojante usualmente no es móvil.</p>	<p>Debido a las fuerzas de repulsión entre la roca y el fluido no mojante, éste tiende a ubicarse en los poros más grandes de la roca.</p>
<p>Las fuerzas de atracción entre la fase mojante y la superficie de la roca impiden que la saturación de la fase mojante descienda por debajo de un valor mínimo (saturación irreductible)</p>	<p>La fase no mojante es usualmente la fase más móvil, especialmente a saturaciones altas de la fase no mojante.</p>
<p>Muchos yacimientos tienden a ser totalmente o parcialmente mojados por agua.</p>	<p>El gas natural es siempre la fase no mojante, en yacimientos de hidrocarburos.</p>

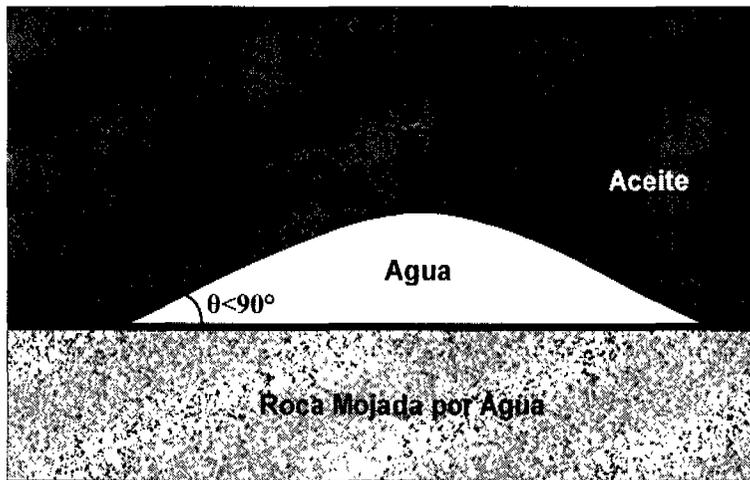


Fig. A.9a Roca mojada por agua

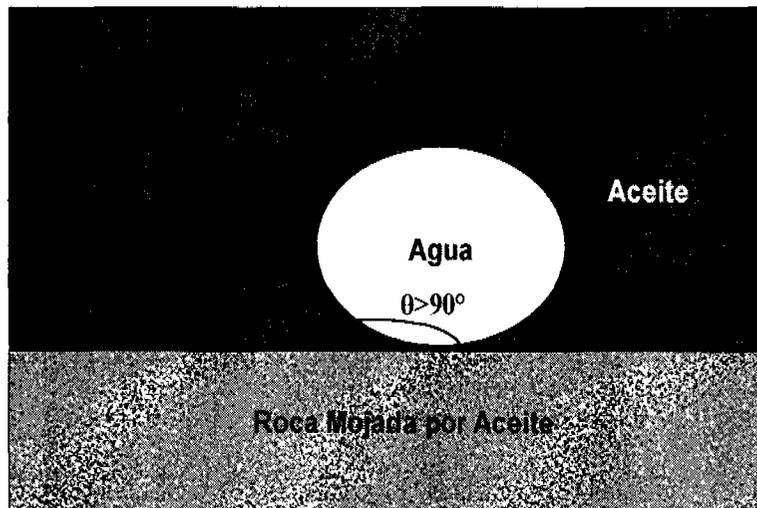


Fig. A.9b Roca mojada por aceite

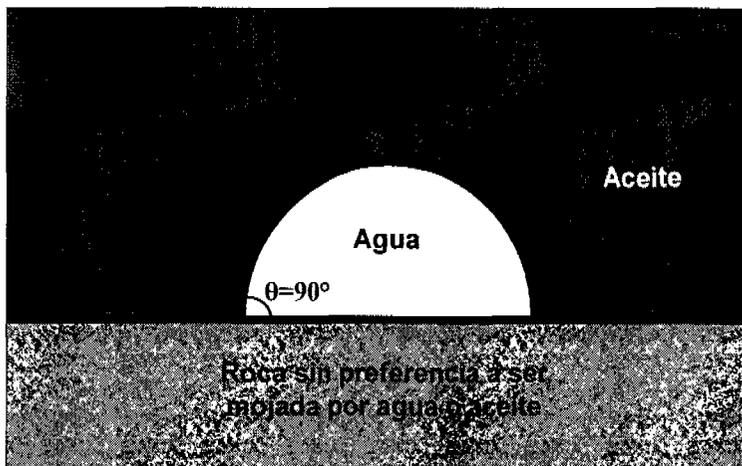


Fig. A.9c Roca sin preferencia a ser mojada por agua o aceite

A.1.7 Fuerzas Capilares

Cuando un capilar se sumerge en la interfase de dos fluidos, puede producirse un ascenso o un descenso de la interfase. En el primer caso se produce el denominado "ascenso capilar" Fig. A.10, y en el segundo caso se habla de "descenso capilar". Estos movimientos ocurren como consecuencia de los fenómenos de superficie, que dan lugar a que la fase mojante invada en forma preferencial el medio poroso. En términos generales, el ascenso o descenso capilar se detiene cuando la gravedad contrarresta (en función de la altura y de la diferencia de densidad entre los fluidos) la fuerza capilar desarrollada en el sistema. Estas fuerzas, en los yacimientos de hidrocarburos, son el resultado de los efectos combinados de las tensiones interfaciales y superficiales, de la forma y tamaño de los poros y del valor relativo de las fuerzas de adhesión entre fluidos y sólidos y las fuerzas de cohesión en los líquidos; es decir, de las propiedades de mojabilidad del sistema roca-fluidos

A.1.8 Presión Capilar (p_c)

Es la diferencia de presiones que existe en la interfase que separa dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja preferente la roca. También se define la presión capilar como la capacidad que tiene el medio poroso de absorber el fluido mojante y de repeler al no mojante.

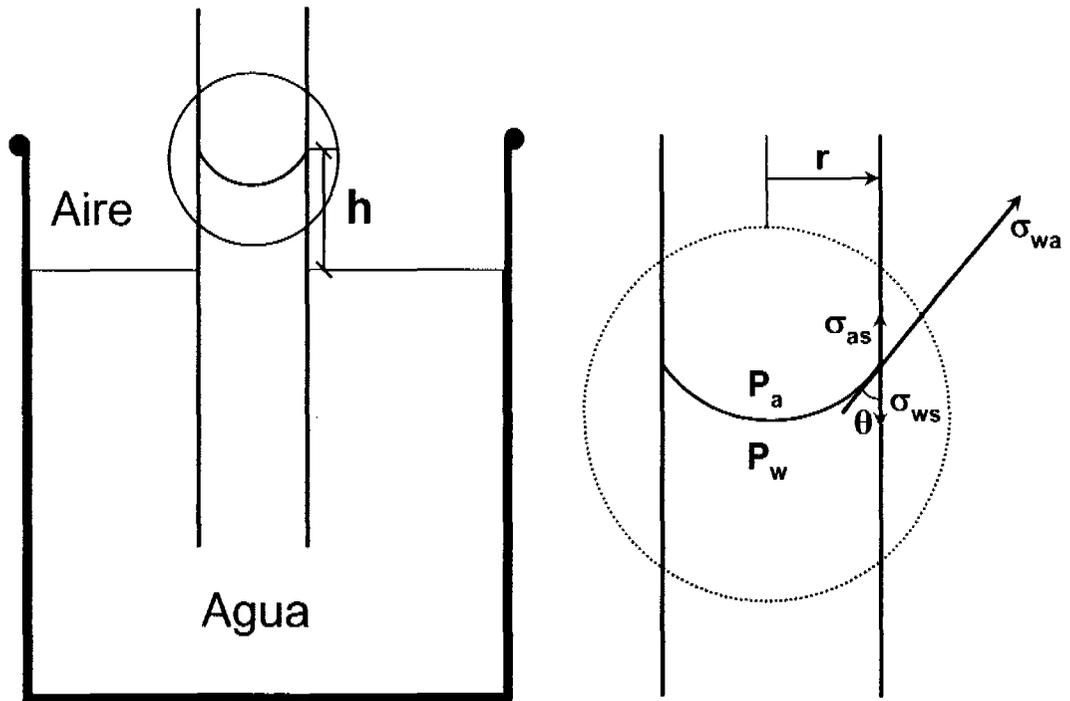


Fig. A.10 Presión capilar

Aplicando un balance de fuerzas:

$$2\pi A_r = \pi r^2 h \rho_w g$$

También se tiene que:

$$p_c = P_u - P_w = \rho_w g h$$

Nótese que:

$$\pi r^2 p_c = \pi r^2 \rho_w g h = 2\pi r A_r$$

Para un par de fluidos inmiscibles que tienen un valor de tensión interfacial σ , confinados en un poro de sección circular de radio r , la presión capilar está dada por:

$$p_c = \frac{2A_r}{r} = \frac{2\sigma \cos\theta}{r}$$

en donde θ es el ángulo de contacto que es medido a través de la fase mojante, que hace la interfase con la superficie del poro.

La presión capilar normalmente es definida como la presión en la fase no mojante, menos la presión en la fase mojante.

$$p_c = p_{nm} - p_m.$$

La presión capilar se usa para:

1. Determinar la distribución de fluidos en el yacimiento.
2. Determinar la saturación de aceite residual para efectos de desplazamiento inmiscible.
3. Determinar la distribución de poros en la roca
4. Diferenciar zonas o tipos de roca

A.2 Propiedades de los fluidos

A.2.1 Tipos de Fluido

Los fluidos contenidos en los yacimientos de hidrocarburos se clasifican en tres grupos diferentes dependiendo de su compresibilidad:

$$c = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (2.1)$$

Por lo tanto, la derivada de la densidad con respecto a la presión será de la siguiente manera, Fig. A.11:

- a) Fluido incompresible $\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$
- b) Fluido ligeramente compresible $\frac{\partial \rho}{\partial p} \neq 0$
- c) Fluido compresible $\frac{\partial \rho}{\partial p} \neq 0$

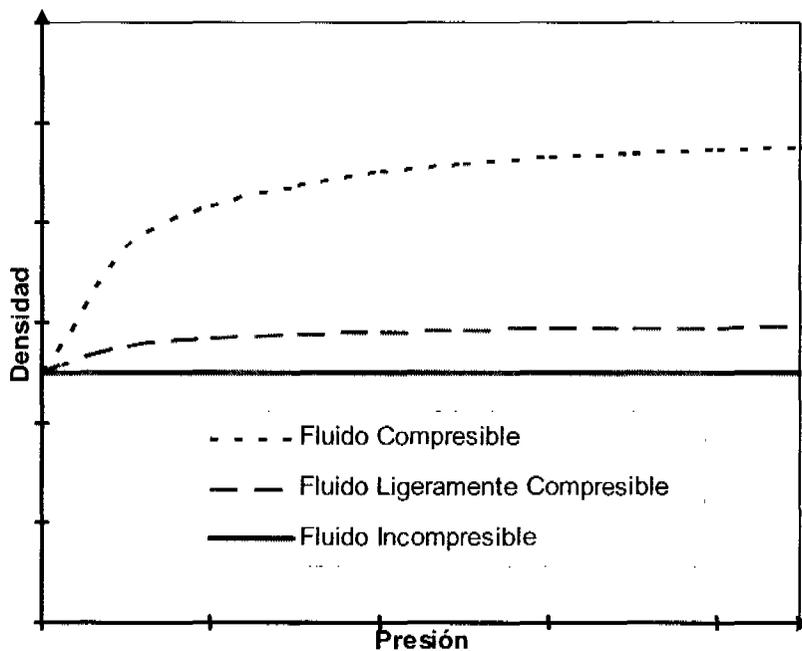


Fig. A.11 Tipos de Fluido

A.2.2 Viscosidad (μ)

Es una medida de la resistencia de un fluido a fluir debido a interacciones moleculares; ésta varía con la presión y la temperatura. También puede definirse como la relación de corte inducido por un esfuerzo en el fluido. La mayoría de las teorías microscópicas de la viscosidad son fenomenológicas, porque es muy difícil calcular, a partir de los principios fundamentales las muchas interacciones moleculares de las partículas que son responsables de la viscosidad. Puede obtenerse por análisis de laboratorio o bien mediante alguna correlación. La unidad de la viscosidad es el centipoise (cp).

La viscosidad es el rozamiento interno entre las capas de fluido. A causa de la viscosidad, es necesario ejercer una fuerza para obligar a una capa de fluido a deslizarse sobre otra, como se puede observar en la Fig. A.12a, donde se representa un fluido confinado entre una capa inferior fija y una superior móvil.

La capa de fluido en contacto con la lámina móvil tiene la misma velocidad que ella, mientras que la adyacente a la pared fija está inmóvil. La velocidad de las distintas capas intermedias aumenta uniformemente entre ambas láminas, tal como sugieren las flechas. Un flujo de este tipo se denomina laminar.

Como consecuencia de este movimiento, una porción de líquido que en un determinado instante tiene la forma ABCD, al cabo de un cierto tiempo se deformará adquiriendo la forma ABC'D'.

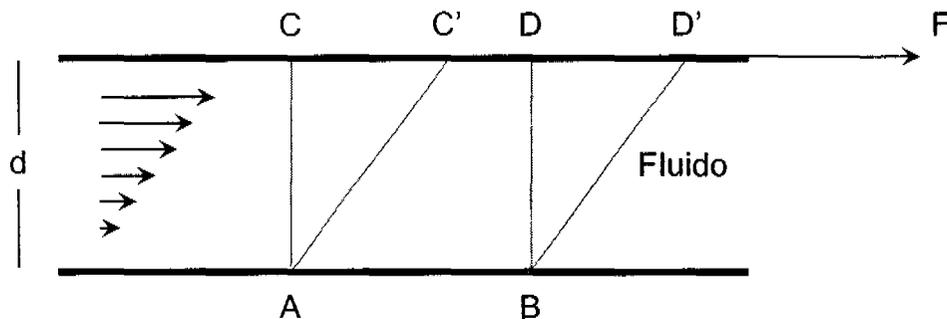


Fig. A.12a Representación de la viscosidad de un fluido entre dos capas

La viscosidad del aceite aumenta al disminuir la presión bajo condiciones por debajo de la presión de saturación, esto es debido a la liberación del gas en solución. Estando sobre la presión de saturación la viscosidad aumenta al aumentar la presión debido a que las moléculas se ven forzadas a estar más juntas debido a la alta presión.

La viscosidad del gas aumenta al aumentar la presión y disminuye conforme aumenta la temperatura.

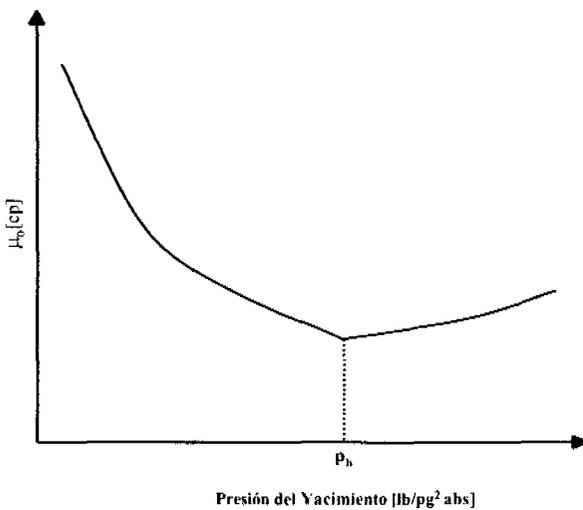


Fig. A.12b Gráfica de Viscosidad del Aceite vs Presión del yacimiento

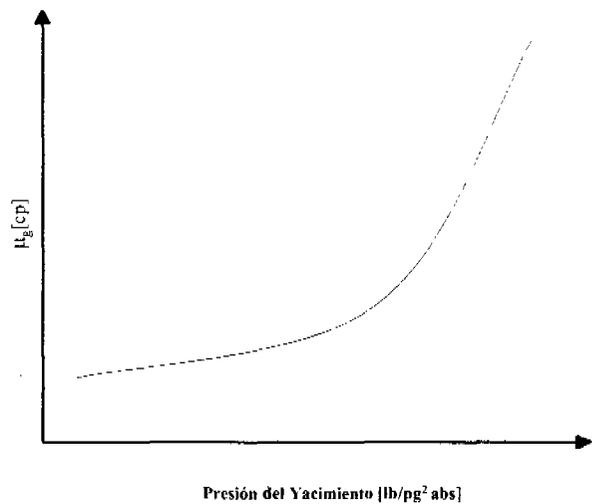


Fig. A.12c Grafica de Viscosidad del Gas vs Presión del yacimiento

A.2.3 Factor de Volumen (B)

A.2.3.1 Factor de volumen del gas, B_g

Se define como el volumen de una masa de gas medido a condiciones de presión y temperatura del yacimiento, entre el volumen de la misma masa de gas, pero medido a condiciones estándar. Así, considerando un gas real:

$$B_g = \frac{V_{\text{gas @ c.y.}}}{V_{\text{gas @ c.s.}}} = \frac{nRZ_y T_y}{nRZ_{cs} T_{cs}} = \frac{T_y P_{cs}}{T_{cs} P_y} \left(\frac{Z_y}{P_y} \right) \quad (Z_{cs} = 1, \quad P_y < P_b)$$

A.2.3.2 Factor de volumen del aceite B_o

$$B_o = \frac{V_{(\text{aceite} + \text{gas disuelto}) @ c.y.}}{V_{\text{aceite "muerto" @ cs}}}$$

donde $V_{(\text{aceite} + \text{gas disuelto}) @ c.y.}$, significa el volumen de aceite con gas disuelto a p_y y T_y , medido a condiciones de yacimiento y $V_{\text{aceite "muerto" @ c.s.}}$, quiere decir aceite sin gas disuelto, medido a condiciones estándar.

A.2.3.3 Factor de volumen del agua, B_w

La definición de B_w es similar a la de B_o . Debido a que es pequeña la solubilidad del gas en agua, en comparación con la correspondiente en aceite, en algunos problemas de yacimientos se usa $B_w = 1$, para cualquier presión, como una aproximación razonable.

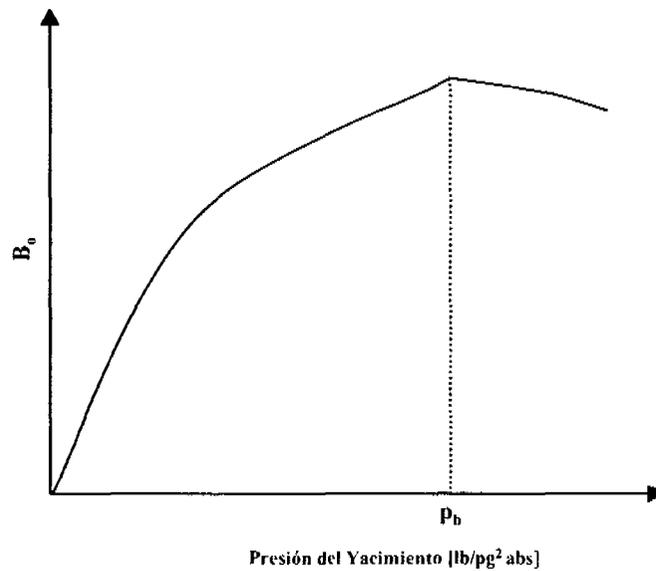


Fig. A.13 Factor de volumen del aceite vs Presión del yacimiento

A.2.4 Movilidad (λ)

La mecánica del desplazamiento de un fluido por otro está controlada por las diferencias que existen en el cociente de la permeabilidad efectiva y la viscosidad. El flujo de cada fase está controlado por la relación k/μ , la cual es llamada movilidad del fluido:

$$\lambda_f = \frac{k_f}{\mu_f}$$

La movilidad controla la facilidad relativa con la cual los fluidos pueden fluir en un medio poroso. Dado que las permeabilidades relativas al aceite y al agua son función de la saturación, las movilidades también dependen de la saturación.

La razón de movilidades es el cociente de la movilidad del fluido desplazante y la movilidad del fluido desplazado.

$$M = \frac{\lambda_w}{\lambda_o} = \frac{\left(\begin{array}{c} k_w \\ \mu_w \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} k_o \\ \mu_o \end{array} \right)} \left[\begin{array}{l} \text{Movilidad de la fase desplazante (Agua)} \\ \text{Movilidad de la fase desplazada (Aceite)} \end{array} \right]$$

Si $M < 1$: El desplazamiento es favorable

Si $M > 1$: El desplazamiento es desfavorable

APÉNDICE B FUNDAMENTOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

B.1 Matrices

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las matrices aparecen de forma natural en la física, ingeniería, estadística, economía, informática, etc...

La utilización de matrices (arreglos) constituye actualmente una parte esencial de los lenguajes de programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en las computadoras como tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, bases de datos,...

B.1.1 Concepto de matriz

Una matriz es un conjunto de elementos de cualquier naturaleza aunque, en general, suelen ser números ordenados en filas y columnas.

*Se llama **matriz** de orden " $m \times n$ " a un conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y en n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo m y n números naturales.*

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: A, B, C, ... y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado: a, b, c, ... Un elemento genérico que ocupe la fila i y la columna j se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz: $A = (a_{ij})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

El número total de elementos de una matriz A_{mn} es $m \times n$

B.1.2 Matrices Iguales

Dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ son iguales, sí y sólo si, tienen en los mismos lugares elementos iguales, es decir: $m=p$, $n=q$, $a_{ij}=b_{ij} \forall i, \forall j$.

B.1.3 Algunos Tipos de Matrices

Hay algunas matrices que aparecen frecuentemente y que según su forma y/o sus elementos, reciben nombres diferentes:

Fila: Aquella matriz que tiene una sola fila, siendo su orden $1 \times n$ $A = (1 \ 2 \ 3)$

Columna: Aquella matriz que tiene una sola columna, siendo su orden $m \times 1$ $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Rectangular: Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su orden $m \times n$, $m \neq n$

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Transpuesta: Dada una matriz A , se llama transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Opuesta: La matriz opuesta de una matriz dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de A es $-A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nula: Si todos sus elementos son cero. También se denomina matriz cero y se denota por $O_{m \times n}$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuadrada: Aquella matriz que tiene igual número de filas que de columnas, $m = n$, diciéndose que la matriz es de orden n .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Diagonal principal** : son los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ con $i=j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Diagonal secundaria : son los elementos a_{ij} con $i+j = n+1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Traza de una matriz cuadrada: es la suma de los elementos de la diagonal principal $\text{tr } A$.

Simétrica: Es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta. $A = A^T$, $a_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 5 & 6 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Antisimétrica: Es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su transpuesta. $A = -A^T$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Necesariamente $a_{ii} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & 6 \\ -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal: Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Escalar: Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Identidad: Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1. También se denomina matriz unidad.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos por encima (por debajo) de la diagonal principal nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Triangular Superior

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Triangular Inferior

Inversa: Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa, A^{-1} , si se verifica que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ortogonal: Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible: $A^{-1} = A^T$

- La inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal.
- El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal.
- El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1.

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Normal: Una matriz es normal si conmuta con su transpuesta. Las matrices simétricas, antisimétricas u ortogonales son necesariamente normales.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A$$

Para establecer las reglas que rigen el cálculo con matrices, se desarrolla un álgebra semejante al álgebra ordinaria, pero en lugar de operar con números lo hacemos con matrices.

B.1.4 Operaciones con Matrices

B.1.4.1 Suma de matrices

La suma de dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ de la misma dimensión (equidimensionales): $m = p$ y $n = q$ es otra matriz $C = A+B = (c_{ij})_{m \times n} = (a_{ij}+b_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Asociativa : $A+(B+C) = (A+B)+C$
- Conmutativa : $A+B = B+A$
- Elemento. neutro : (matriz cero $0_{m \times n}$), $0+A = A+0 = A$
- Elemento. simétrico : (matriz opuesta $-A$), $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Al conjunto de las matrices de dimensión $m \times n$ cuyos elementos son números reales lo vamos a representar por $M_{m \times n}$.

La suma y diferencia de dos matrices NO está definida si sus dimensiones son distintas.

B.1.4.2 Producto de un número real por una matriz

Para multiplicar un escalar por una matriz se multiplica el escalar por todos los elementos de la matriz, obteniéndose otra matriz del mismo orden.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Asociativa: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- Distributiva $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- Distributiva $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu B$
- Elemento neutro escalares $1 \cdot A = A$

$$\forall \lambda, \mu, 1 \in R;$$

$$\forall A, B \in M_{m \times n}$$

B.1.4.3 Producto de matrices

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ donde $n = p$, es decir, el número de columnas de la primera matriz A es igual al número de filas de la matriz B , se define el producto $A \cdot B$ de la siguiente forma :

El elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto C se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B .

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^p (a_{ik} b_{kj})$$

B.1.4.4 Matriz inversa

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A_n y la representamos por A^{-1} , a la matriz que verifica la siguiente propiedad: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

Se dice que una matriz cuadrada es "*regular*" si su determinante es distinto de cero, y es "*singular*" si su determinante es igual a cero.

Propiedades:

$$A_n^{-1} \cdot A_n = A_n \cdot A_n^{-1} = I_n$$

$$\exists A_n^{-1} \Leftrightarrow A_n \neq 0$$

$$(A_n \cdot B_n)^{-1} = B_n^{-1} \cdot A_n^{-1}$$

$$(A_n^{-1})^{-1} = A_n$$

$$(kA_n)^{-1} = \frac{1}{k} A_n^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A_n^{-1})^T$$

$$A_n^{-1} = \frac{1}{A_n} \cdot [Adj(A_n)]^T$$

- Sólo existe matriz inversa de una matriz cuadrada si ésta es *regular*.
- La matriz inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única.
- Entre matrices NO existe la operación de división, la matriz inversa realiza funciones análogas.

Métodos para obtener la matriz inversa:

- Aplicando la definición
- Por el método de Gauss
- Por determinantes

B.1.5 Norma de una Matriz

Cuando se manejan matrices o vectores, es necesario explicar de alguna manera su magnitud en términos cuantitativos, ej. si es grande o pequeña su magnitud. Una buena medida de esa magnitud es la *norma*.

Cualquier buena medida de la magnitud de una matriz (*norma*), debe tener cuatro propiedades que son intuitivamente esenciales:

1. Las normas siempre tienen un valor mayor o igual a cero, sólo es cero cuando todos los elementos de la matriz son iguales a cero.

$$A \geq 0 \text{ y } A = 0 \text{ si y sólo si } A = 0$$

2. La norma estará multiplicada por k , si la matriz está multiplicada por el escalar k .

$$kA = k A$$

3. La norma de la suma de dos matrices, no excederá a la suma de las normas. A esta relación se le llama la desigualdad del triángulo.

$$A+B \leq A + B$$

4. La norma del producto de dos matrices, no excederá al producto de las normas.

$$AB \leq A B$$

Existen varias maneras de calcular la norma de una matriz; estas pueden ser:

- Norma de Frobenius

$$A_f = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

- Norma Euclidiana

$$A_e = \left(\sum x_i^2 \right)^{1/2}$$

- Norma de magnitud máxima

$$A_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n a_{ij} = \text{Máximo de Suma de columna}$$

$$A_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ij} = \text{Máximo de Suma de renglones}$$

¿Por qué la norma es importante? Porque ella nos expresa la aproximación de la solución de un SEL en términos cuantitativos determinando la norma del vector error (la solución verdadera menos la solución aproximada). Las normas son también usadas para estudiar cuantitativamente la convergencia de un método iterativo para resolver SEL.

B.1.6 Número de Condición y Error en la Solución

El número de condición de una matriz es una medida de que tan confiable es la matriz en los cálculos. En otras palabras, el número de condición de un sistema es una medida de la sensibilidad del sistema a pequeños cambios en cualquiera de sus elementos. Para una norma dada, el número de condición está dado por

$$C(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

donde el símbolo $\| \cdot \|$ representa a la norma.

Se observa que el número de condición para la matriz identidad es:

$$C(I) = 1.0$$

así que la matriz identidad tiene el número de condición más bajo.

Un problema está bien condicionado (*well-conditioning*), si cambios pequeños en la información de entrada ocasionan cambios pequeños en la salida. De otro modo se dice que está mal condicionado (*ill-conditioning*).

Por ejemplo, el sistema

$$x + y = 1$$

$$1.1x + y = 2$$

Tiene la siguiente matriz de coeficientes e inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 11 & -10 \end{bmatrix}$$

Las normas euclidianas son:

$$A_e = \left[(1)^2 + (1)^2 + (1.1)^2 + (1)^2 \right]^{1/2} = 2.051$$

$$A_e^{-1} = \left[(-10)^2 + (10)^2 + (11)^2 + (-10)^2 \right]^{1/2} = 20.51$$

Por lo tanto, el número de condición es $C(A) = A \cdot A^{-1} = 2.051 \cdot 20.51 = 42.08$

Este número de condición es muy grande, lo que indica que la matriz está mal condicionada y es muy sensible a cambios muy pequeños en cualquiera de sus elementos, como lo muestra la Fig. B.1.

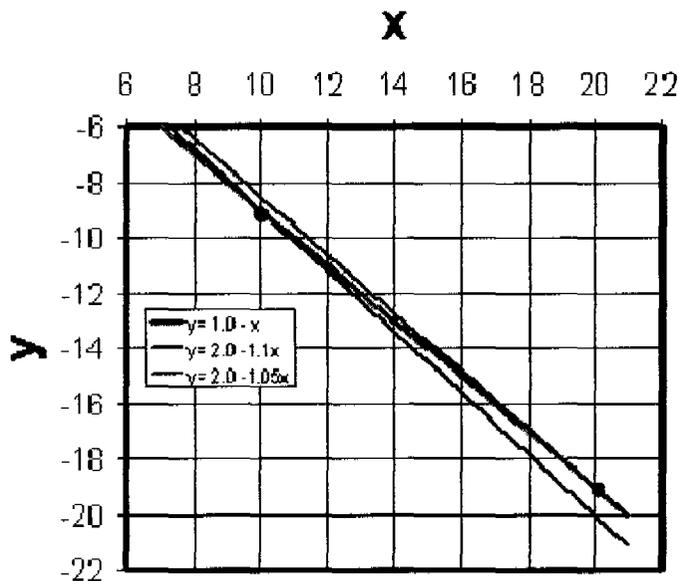


Fig. B.1 Número de condición

El anterior SEL representa la intersección de líneas casi paralelas y tiene la solución $x = 10$ y $y = -9$. Cambiando ahora el valor de 1.1 a 1.05 esta vez $x = 20$ y $y = -19$. Un cambio de 5 % en un coeficiente ha provocado un cambio de 100 % en la solución.

Un número de condición grande indica que la solución es sensible a pequeños cambios en el vector independiente, ej. b en la Ec. 3 de la gráfica.

En los cálculos prolongados, es probable que se realicen muchos redondeos. Cada uno de ellos desempeña el papel de un error de entrada para el resto del cálculo y cada uno tiene un efecto sobre la siguiente salida. Los algoritmos en los que es limitado el efecto acumulativo de tales errores, de modo que se genere un resultado útil, se llaman *algoritmos estables*. Desafortunadamente, hay ocasiones en las que la acumulación es devastadora y la solución contiene demasiado error. Cuando el error acumulativo es grande el algoritmo es *inestable*.

B.2 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Uno de los problemas más frecuentemente encontrados en la programación científica es la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas. Tales sistemas pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$Ax = b \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde A es una matriz cuadrada de orden n , b es un vector dado de orden n , y x es el vector de incógnitas.

El origen de problemas de SEL incluye la aproximación de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales por algún método de discretización, ajuste de curvas polinomiales a datos discretos, u optimización lineal.

Debido a que los SEL encontrados en problemas reales de ingeniería envuelven un gran número de ecuaciones e incógnitas, los métodos a examinar deben ser robustos y prácticos para solucionarlos.

En los cursos de álgebra lineal se mostró que un sistema de la forma $Ax = b$ puede ser solucionado con $x = A^{-1}b$ donde A^{-1} es la matriz inversa de A . Sin embargo, en la mayoría de los problemas prácticos es innecesario e inadmisibles el cálculo de A^{-1} . Obtener una matriz inversa requiere operaciones extras y es la principal razón de evitar su cálculo.

Para resolver un SEL es importante distinguir entre dos tipos de matrices:

1. Matriz no-dispersas. Matriz en la cual todos los n^2 elementos a_{ij} son almacenables en la memoria de la computadora.
2. Matriz dispersa. Matriz en la cual la mayoría de los elementos es cero y donde el resto puede ser almacenado de una manera óptima. (este tipo de matrices son las que resultan de la discretización y linealización de ecuaciones en derivadas parciales por método de diferencias finitas o elemento finito)

Un ejemplo de matriz dispersa es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & a \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La anterior matriz se dice que es bandeada (tridiagonal) debido a que todos los elementos se encuentran cerca de la diagonal principal. El almacenamiento de matrices dispersas se hará de manera de optimizar la memoria y los recursos computacionales.

Los métodos de solución de sistemas de ecuaciones pertenecen esencialmente a la clase de métodos directos o a la clase de métodos iterativos.

Los métodos directos resuelven los sistemas de ecuaciones en un número determinado de operaciones aritméticas (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones), y los errores en la solución surgen principalmente de los errores de redondeo introducidos al efectuarse los cálculos.

Básicamente, los métodos directos son los métodos de eliminación, de los cuales el más conocido es el método sistemático de eliminación gaussiana, y los métodos de descomposición triangular. Estos últimos factorizan la matriz de coeficientes A de las ecuaciones $Ax = b$ en $A = L \cdot U$, donde L y U son matrices triangulares inferiores y superiores respectivamente; una vez que la descomposición ha sido determinada la solución es calculada resolviendo el sistema equivalente $L \cdot U \cdot x = b$, haciendo $U \cdot x = y$; entonces se obtiene y resolviendo $L \cdot y = b$ por sustitución hacia adelante, y por último se obtiene x resolviendo $U \cdot x = y$ por sustitución hacia atrás. Con ambos métodos es usualmente necesario emplear pivoteo parcial para controlar el incremento de los errores de redondeo.

Es de interés notar que cuando los cálculos relacionados con estos métodos son realizados sobre grandes computadoras modernas, los errores de redondeo introducidos durante el proceso de cálculo frecuentemente tienen menos efecto sobre la solución que los errores de redondeo en los coeficientes y constantes de las ecuaciones. La solución que estos métodos nos arrojen será tan precisa como los datos lo permitan. Esto no significa que el número de cifras significativas correctas en la solución sea el mismo que en el de los datos. Aquél podría ser menor, como es en el caso en que la pérdida de precisión no ocurre por el método de solución utilizado sino debido a que las ecuaciones estén mal condicionadas en el sentido que pequeños cambios en los coeficientes producen grandes cambios en la solución.

Un método iterativo para resolver ecuaciones es aquél en el cual una primera aproximación es usada para calcular una segunda aproximación, la cual a su vez es usada para calcular una tercera aproximación, y así sucesivamente.

Se dice que el procedimiento iterativo es convergente cuando las diferencias entre la solución exacta y las sucesivas iteraciones tienden a cero al incrementarse el número de iteraciones. En general la solución exacta nunca es obtenida en un número finito de pasos, pero esto no es importante. Lo que importa es que las sucesivas iteraciones converjan rápidamente a valores que puedan considerarse correctos dentro de una precisión especificada.

Si la matriz de coeficientes puede ser ingresada totalmente en la memoria, entonces los métodos directos, en general, son más rápidos y aproximados que los métodos iterativos. Además, si la matriz de coeficientes tiene alguna propiedad o estructura en especial, en particular si son simétricas, definidas positivas o bandedas, es posible incrementar el número de ecuaciones a resolver mediante una programación más eficiente que tenga en cuenta tales particularidades.

Los métodos directos son ciertamente preferibles a los métodos iterativos cuando:

- Se deben resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes pero diferentes vectores de términos independientes.
- La matriz de coeficientes es aproximadamente singular. En este caso pequeños residuos (donde el residuo está definido por $r(1) = b - A \cdot x(1)$) no implican pequeños errores en la solución. Esto resulta evidente si consideramos que $A^{-1} \cdot r(1) = A^{-1} \cdot (b - A \cdot x(1)) = A^{-1} \cdot b - x(1) = x - x(1)$. Entonces $x - x(1)$ podría tener grandes componentes cuando las componentes del vector residual $r(1)$ son pequeñas porque algunos de los elementos de A^{-1} serán grandes si A es aproximadamente singular.

En la mayoría de los problemas asociados a la solución de ecuaciones diferenciales parciales las matrices son bandas y dispersas, esto es, la cantidad de elementos nulos es mucho mayor que la cantidad de elementos no nulos y están ordenados a lo largo de una estrecha banda que rodea a la diagonal principal.

Para este tipo de matrices los métodos de eliminación gaussiana en su versión estándar son ineficientes ya que se efectúan una gran cantidad de operaciones innecesarias. Debe puntualizarse, que es posible adaptar el método de Gauss a matrices bandeadas y dispersas.

En cambio, en los métodos iterativos, combinados con técnicas eficientes de almacenamiento de matrices dispersas, hay muy pocas operaciones aritméticas asociadas con los coeficientes iguales a cero y por lo tanto se debe almacenar en la memoria de la computadora una cantidad de números considerablemente menor. Como consecuencia de esto, los métodos iterativos pueden ser usados para resolver sistemas de ecuaciones que son demasiado grandes para el uso de métodos directos. Además, la programación y el manejo de datos al aplicar métodos iterativos es mucho más simple que cuando aplicamos métodos directos, y fundamentalmente, los métodos iterativos pueden ser aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, cosa que no puede realizarse con los métodos directos.

No obstante, el uso eficiente de los métodos iterativos es muy dependiente del cálculo directo o estimación del valor de algunos parámetros de aceleración de la convergencia (ciertos métodos los poseen y otros no) y de que la matriz de coeficientes esté bien condicionada. De no ser así la convergencia será lenta y la cantidad de operaciones aritméticas enorme. Con parámetros de aceleración óptimos la cantidad de cálculos realizados por los métodos iterativos para grandes sistemas de ecuaciones puede ser mucho menor que en los métodos directos.

Los principales métodos son mostrados en la Fig. B.2:

Directos	Iterativos
Gauss	Jacobi
LU	Gauss-Seidel
Cholesky	SOR
Thomas	Gradiente Conjugado

Fig. B.2 Principales métodos para solucionar SEL

GAUSS

```
Repetir k=1,... n-1
  Repetir i=k+1,... n
    m = Aik/Akk
    Repetir j=k+1,..., n
      Aij = Aij - m. Akj
    Fin j
    bi = bi - m.bk
  Fin i
Fin k
```

$$x_n = b_n/A_{nn}$$

```
Repetir i=n-1,... 1
  s=0
  Repetir j=i+1,... n
    s = s + Aij.xj
  Fin j
  xi = (bi-s)/Aii
Fin i
```

Gauss Matrices simétricas

```

Repetir k=1,... n-1
  Repetir i=k+1,... n
    m = Aki/Akk
    Repetir j=i,... n
      Aij = Aij - m. Akj
    Fin j
    bi = bi - m.bk
  Fin i
Fin k

```

$$x_n = b_n/A_{nn}$$

```

Repetir i=n-1,... 1
  s=0
  Repetir j=i+1,... n
    s = s + Aij.xj
  Fin j
  xi = (bi-s)/Aii
Fin i

```

Matrices simétricas y bandedas

```

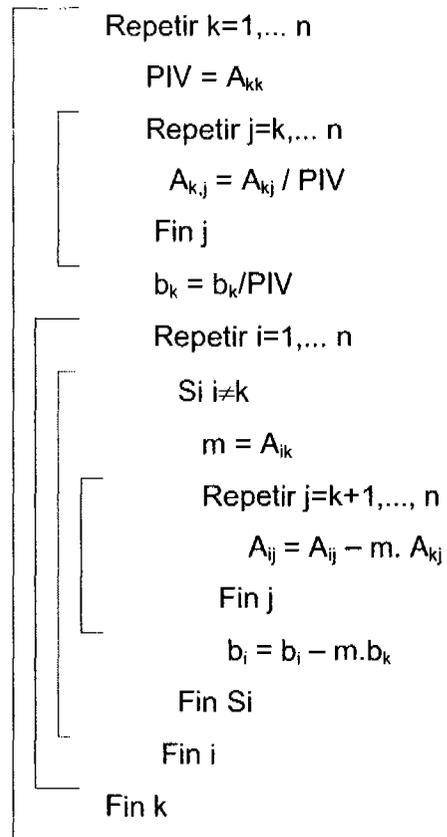
Repetir k=1,... n-1
  si k+b>n
    fin =n
  sino
    fin =k+b
  Fin_si
  Repetir i=k+1,... fin
    m = Aki/Akk
    Repetir j=i,... fin
      Aij = Aij - m. Akj
    Fin j
    bi = bi - m.bk
  Fin i
Fin k
    
```

$$x_n = b_n/A_{nn}$$

```

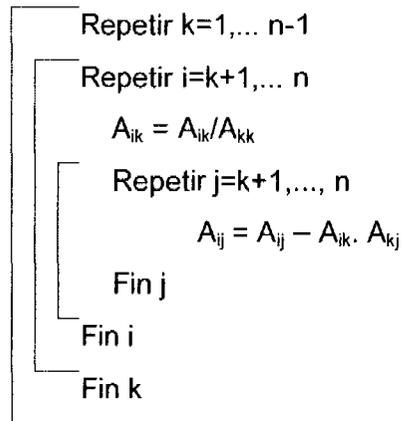
Repetir i=n-1,... 1
  si i+b>n
    fin =n
  Sino
    fin =i+b
  Fin_si
  s=0
  Repetir j=i+1,... fin
    s = s + Aij.xj
  Fin j
  xi = (bi-s)/Aii
Fin i
    
```

Gauss-Jordan

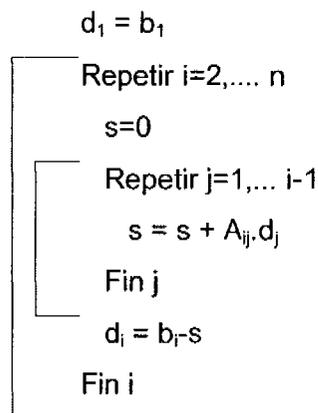


LU Doolittle

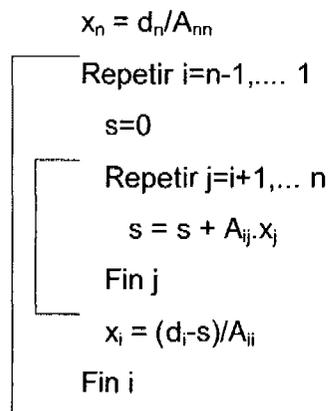
Descomposición LU



Sustitución hacia adelante



Sustitución hacia atrás



LU Crout

Descomposición LU – Crout

$$L_{11} = A_{11}, \quad U_{11} = 1$$

Repetir $k=1, \dots, n-1$

$$U_{1,k+1} = A_{1,k+1} / L_{11}$$

Repetir $i=2, \dots, k$

$$s = 0$$

Repetir $j=1, \dots, i-1$

$$s = s + L_{ij} \cdot U_{j,k+1}$$

Fin j

$$U_{i,k+1} = (A_{i,k+1} - s) / L_{ii}$$

Fin i

$$L_{k+1,1} = A_{k+1,1}$$

Repetir $i=2, \dots, k$

$$s = 0$$

Repetir $j=1, \dots, i-1$

$$s = s + U_{ji} \cdot L_{k+1,j}$$

Fin j

$$L_{k+1,i} = A_{k+1,i} - s$$

Fin i

$$U_{k+1,k+1} = 1$$

$$s = 0$$

Repetir $j=1, \dots, k$

$$s = s + L_{k+1,j} \cdot U_{j,k+1}$$

Fin j

$$L_{k+1,k+1} = A_{k+1,k+1} - s$$

Fin k

Choleshy

Descomposición LL^T – Cholesky

$$l_{11} = (a_{11})^{1/2}$$

Repetir $k=1, \dots, n-1$

$$l_{k+1,1} = a_{k+1,1} / l_{11}$$

Repetir $i=2, \dots, k$

$$s = 0$$

Repetir $j=1, \dots, i-1$

$$s = s + l_{ij} \cdot l_{k+1,j}$$

Fin j

$$l_{k+1,i} = (a_{k+1,i} - s) / l_{ii}$$

Fin i

$$s = 0$$

Repetir $i=1, \dots, k$

$$s = s + (l_{k+1,i})^2$$

Fin i

$$l_{k+1,k+1} = (a_{k+1,k+1} - s)^{1/2}$$

Fin k

Jacobi

Algoritmo del Método de Jacobi

Ingresar ε_s

```
Repetir i = 1, ..., n
    x1i = valores iniciales
Fin repetir
```

```
Repetir mientras Flag = 1
```

```
    Flag = 0
```

```
    Repetir i = 1, ..., n
```

```
        sum = 0
```

```
        Repetir j = 1, ..., n
```

```
            Si i ≠ j
```

```
                sum = sum + aij · x1j
```

```
            Fin si
```

```
        Fin repetir
```

```
        x2i = ( bi - sum ) / aii
```

```
        Si | x2i - x1i | > εs
```

```
            Flag = 1
```

```
        Fin si
```

```
    Fin repetir
```

```
    Repetir i = 1, ..., n
```

```
        x1i = x2i
```

```
    Fin repetir
```

```
Fin repetir mientras
```

Gauss-Seidel

Algoritmo del Método de Gauss – Seidel

Ingresar ϵ_s

Repetir $i = 1, \dots, n$

$x_{1i} =$ valores iniciales

Fin repetir

Repetir mientras Flag = 1

Flag = 0

Repetir $i = 1, \dots, n$

Repetir $j = 1 \dots i - 1$

$sum1 = sum1 + a_{ij} \cdot X_j$

Fin repetir

Repetir $j = i + 1 \dots n$

$sum2 = sum2 + a_{ij} \cdot X_j$

Fin repetir

$X = (b_i - sum1 - sum2) / a_{ii}$

Sum1=0

Sum2=0

Si $mod |X_i - X_{1i}| > \epsilon_s$

Flag = 1

Fin si

$x_{1i} = X_i$

Fin repetir

Fin repetir mientras

El algoritmo de Thomas es el siguiente:

Para $i = 1$

$$w_1 = \frac{c_1}{b_1} \qquad g_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

Para $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$w_i = \frac{c_i}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

y para $i = 2, 3, \dots, n$

$$g_i = \frac{d_i - a_i g_{i-1}}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

Realizando una sustitución hacia atrás:

para $i = n$

$$p_n = g_n$$

y para $i = n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1$

$$p_i = g_i - w_i p_{i+1}$$

B.3 Solución de Ecuaciones no Lineales

Suponga que f es una función continua, digamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y se desea calcular soluciones de la *ecuación escalar no lineal*

$$f(x) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Más general aún, se puede considerar el caso en el que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $n \geq 1$. Entonces la Ec. B.3 representa un *sistema de ecuaciones no lineales*. Problemas del tipo de la Ec. B.3 aparecen en la optimización de funciones y en la solución numérica de problemas de frontera no lineales.

B.3.1 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson (también conocido simplemente por el método de Newton) es uno de los algoritmos más ampliamente usados para determinar raíces. Este método encuentra una solución, siempre y cuando se conozca una estimación inicial para la solución deseada. Utiliza rectas tangentes que se evalúan analíticamente.

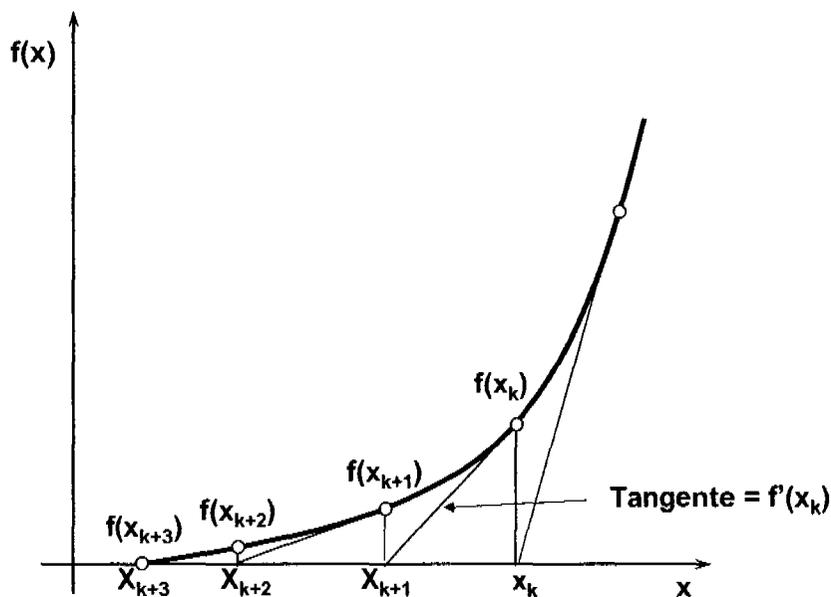


Fig. B.3 Newton-Raphson

El algoritmo se muestra de manera gráfica en la Fig. B.3. Consideremos la función en la Fig. B.3. La raíz es el valor de x al cual $f(x)$ cruza el eje x . Si el inicial valor estimado es x_k , una tangente puede ser extendida desde el punto $(x, f(x_k))$. En el punto al cual la tangente cruza el eje x es esperado que represente una mejor estimación de la raíz, x_{k+1} . Como puede ser visto en la Fig. B.3, la primer derivada (pendiente de la recta tangente) en x_k puede ser escrita como:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad (\text{B.4})$$

Pero $f(x_{k-1}) = 0$ por lo tanto, resolviendo la Ec. B.4 para x_{k+1} proporciona el método de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (\text{B.4a})$$

B.3.2 Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Considérese un sistema F_i de ecuaciones algebraicas no lineales, con n incógnitas X_1, X_2, \dots, X_n , escrito en forma residual; esto es:

$$F_i(\bar{X}) = F_i(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0,$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$.

Se desea encontrar un vector que sea solución del sistema F_i . El método de Newton-Raphson resuelve las incógnitas en forma iterativa. El proceso iterativo se fundamenta en la expansión del sistema F_i en series de Taylor, alrededor del vector X^v . De esta expansión sólo se conservan los términos de menor orden, o sea:

$$F_i(\bar{X}^{v+1}) = F_i(\bar{X}^v) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)^v \delta \bar{X}_j^{v+1} = 0. \quad (\text{B.5})$$

La Ec. B.5 se puede expresar de la siguiente manera:

$$F_i(\bar{X}^{v+1}) = F_i(\bar{X}^v) + \sum_{j=1}^n J_{ij}^v \delta \bar{X}_j^{v+1} = 0, \quad (\text{B.5a})$$

donde $i = 1, 2, \dots, n$; $v = 0, 1, 2, \dots$; (v) y ($v+1$) indican los niveles de iteración, conocido e incógnita, respectivamente. El término J_{ij}^v significa:

$$J_{ij}^v = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)^v.$$

La matriz constituida por todos los elementos J_{ij}^v , es conocida como matriz Jacobiana. Usando el lado derecho de la Ec. B.5a, se tiene:

$$\sum_{j=1}^n J_{ij}^v \delta X_j^{v+1} = -F_i(X^v) \quad (\text{B.6})$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Se tiene en la Ec. B.6 un sistema de ecuaciones, donde las incógnitas son los cambios iterativos de:

$$\delta X_j^{v+1} = \bar{X}_j^{v+1} - \bar{X}_j^v. \quad (\text{B.7})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el vector X_j^{v+1} , y a partir de éste, se determina δX_j^{v+1} esto es:

$$\bar{X}_j^{v+1} = \bar{X}_j^v + \delta \bar{X}_j^{v+1}. \quad (\text{B.7a})$$

Este proceso se repite hasta que se cumplen los siguientes criterios de convergencia:

$$F_i(X^{v+1}) < \varepsilon$$

$$|\bar{X}^{v+1} - \bar{X}^v| = |\delta \bar{X}^v| < \bar{\varepsilon},$$

donde $\bar{\varepsilon}$, es un vector de tolerancia. La convergencia del método depende de la estimación de la solución, o sea el vector $X^{(0)}$

B.4 Método de Aproximación mediante Diferencias Finitas

B.4.1 Serie de Taylor

La justificación para aproximar una ecuación en derivadas parciales, usando el MDF, está basada en el análisis de la serie de Taylor (**Chapra,S.C. y Canale,R.P., 1989**).

Considérese la función $p(x)$ en la Fig. B.4. Supóngase que el valor de $p(x)$ es conocido en el punto x . También supóngase que todas las derivadas de $p(x)$ son conocidas en el mismo punto. Por lo tanto, se puede aproximar el valor de $p(x+\Delta x)$ en el punto $x+\Delta x$ con una serie de Taylor:

$$p(x + \Delta x) = p(x) + \frac{\Delta x}{1!} p'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} p''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} p'''(x) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} p^n(x), \quad (\text{B.8})$$

donde:

p^n = enésima derivada de p .

Esta serie infinita es en teoría exacta para un número infinito de términos. Sin embargo, si se trunca la serie en el término k , un error e_t de truncamiento es introducido, ej. los términos restantes que no son incluidos. Este error de truncamiento está dado por:

$$e_t = \frac{p(x)^{k+1} \Delta x^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{p(x)^{k+2} \Delta x^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{p(x)^n \Delta x^n}{n!} \quad (\text{B.9})$$

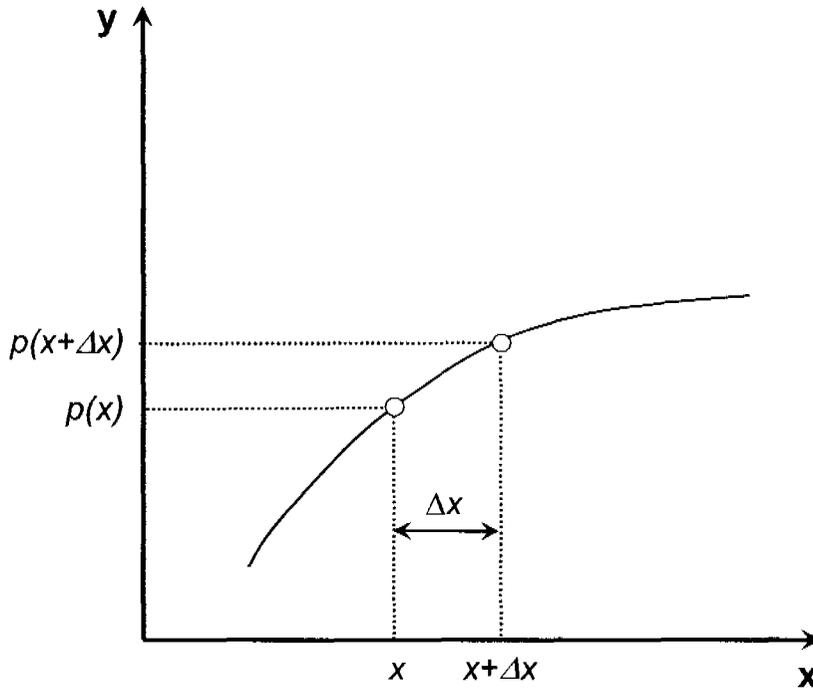


Fig. B.4 Gráfica de la función $p(x)$

Simplificando la notación, ej. haciendo

$$p_i = p(x), \quad p_{i+1} = p(x+\Delta x) \quad y \quad p_{i-1} = p(x-\Delta x), \quad (B.10)$$

considerando las Ec. B.10, la Ec. B.8 puede ser escrita como:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n p}{\partial x^n} p''(x). \quad (B.11)$$

Nótese el uso de derivadas parciales debido a que $p(x,t)$.

La Ec. B.11 sirve como base en la aproximación de las derivadas que constituyen las ecuaciones de flujo de fluidos en medios porosos que nos conciernen, como se verá a continuación.

B.4.2 Aproximaciones en Espacio

Se tienen tres maneras de aproximar la $\frac{\partial p}{\partial x}$: con diferencias hacia delante (*progresivas*), diferencias hacia atrás (*regresivas*) y diferencias centrales.

Considerando hasta el segundo término en la Ec. B.11, se tiene lo siguiente:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + O_p(\Delta x)^2. \quad (\text{B.12})$$

Entonces se tiene,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} - O_p(\Delta x), \quad (\text{B.13})$$

donde el error de aproximar (error de primer orden) la derivada con sólo los dos primeros términos de la serie de Taylor es:

$$O_p(\Delta x) = -\frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (\text{B.14})$$

La Ec. B.13 es la aproximación de la primera derivada mediante diferencias hacia delante y aplica para la siguiente malla de la Fig. B.5.

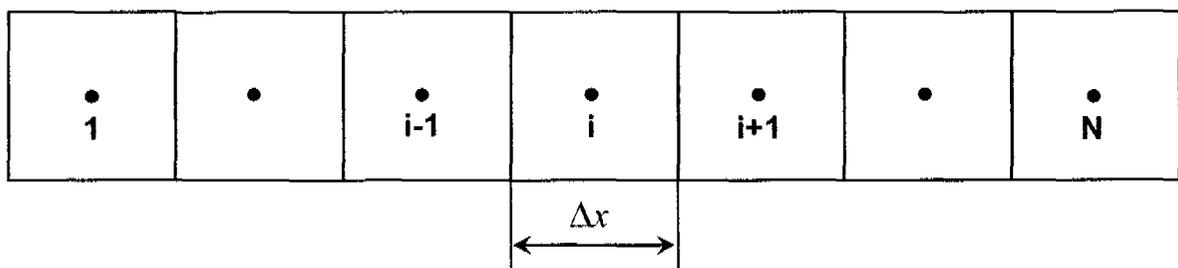


Fig. B.5 Malla cartesiana uniforme de nodos centrados

Similarmente, considerando las diferencias hacia atrás o *regresivas*, la aproximación de la primera derivada es:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x} - O_r(\Delta x),$$

donde el error es:

$$O_r(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (\text{B.15})$$

Considerando las tres primeras derivadas en la Ec. B.11 y escribiendo la función $p(x)$ en $x = x_i + \Delta x$ y $x = x_i - \Delta x$ como se muestra a continuación:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \quad (\text{B.16})$$

$$p_{i-1} = p_i - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \quad (\text{B.17})$$

Restando la Ec. B.17 de la Ec. B.16 se obtiene la aproximación en diferencias *centrales*:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta x} - O_c(\Delta x^2),$$

donde el error de segundo orden está dado por:

$$O_c(\Delta x^2) = \frac{\Delta x^2}{6} \left[\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_p + \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \Big|_r \right] \quad (\text{B.18})$$

Comparando el error de truncamiento de la aproximación en diferencias *centrales*, $O_c(\Delta x^2)$, con los obtenidos previamente para diferencias *progresivas* y *regresivas*, $O_p(\Delta x)$, y $O_r(\Delta x)$ se nota que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} O_c(\Delta x^2) < \lim_{\Delta x \rightarrow 0} O_p(\Delta x) , \quad (\text{B.19})$$

indicando que el error de truncamiento de la aproximación de diferencias *centrales*, para la primera derivada, es menor que el correspondiente a diferencias *progresivas* o *regresivas*.

Con el propósito de simplificar la discretización y los subíndices se sugiere la siguiente notación (para Δx constantes):

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta x \\ x_{i-1} &= x_i - \Delta x \\ p_i &= p(x_i) \\ p_{i+1} &= p(x_{i+1}) \\ p_{i-1} &= p(x_{i-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.4.3 Aproximación de la Segunda Derivada

Combinando las Ecs. B.16 y B.17 (sumándolas), se puede obtener la aproximación de la segunda derivada como se muestra a continuación:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$$

+

$$p_{i-1} = p_i - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$$

$$p_{i-1} + p_{i+1} = 2p_i + \frac{2(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$p_{i-1} + p_{i+1} = 2p_i + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Despejando $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ finalmente se obtiene :

$$\left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_i \approx \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \quad (\text{A.21})$$

donde el error es de segundo orden $(\Delta x)^2$.

B.4.4 Errores

Una forma de saber la aproximación de la solución obtenida mediante diferencias finitas, es comparándola con la solución analítica. Sin embargo, sólo para algunos casos existe tal solución. La exactitud de la solución está relacionada con el error de truncamiento en la serie de Taylor y el error de redondeo.

Las computadoras ejecutan cálculos numéricos utilizando notación científica ($3.56983E12 = 3.56983 \times 10^{12}$), y la mayoría con una longitud de caracteres fija: en precisión simple, el número de caracteres es de 7 a 12 y en precisión doble de 14 a 24. Si un número es más largo que la longitud establecida, los caracteres extra son redondeados, causando un error de redondeo.

El error de truncamiento proviene de la aproximación que se hace de la EDP con la serie de Taylor truncada, introduciendo en ese momento un error, por no utilizar la serie completa.

Los errores de truncamiento o redondeo no pueden ser eliminados. Estos surgen de la discrepancia entre el valor de la derivada y su aproximación con diferencias finitas. Este error tiende a cero cuando se usan mallas finas (pequeños Δx). Existe, sin embargo, un límite práctico de cuanto debe de ser el Δx , debido a que el número de bloques se incrementará en forma inversa a sus volúmenes y los requerimientos computacionales son directamente proporcionales al número de bloques. Por lo tanto, debe ser aceptado un cierto límite de error. Desafortunadamente, la magnitud de este error no puede ser evaluada correctamente.

B.4.5 Aproximaciones en Tiempo

Considerando la función $p(x,y,z,t)$ para la cual se desea obtener aproximaciones en diferencias finitas de la derivada parcial con respecto al tiempo. Se pueden aplicar las aproximaciones de diferencias progresivas, regresivas y centrales, en tiempo. Antes de mostrar la forma de las aproximaciones, es conveniente resaltar que para representar puntos en el dominio del espacio discretizado, es común el uso de los subíndices i,j,k para representar x,y,z . Por otra parte, para representar puntos en el tiempo se emplean los superíndices n y $n+1$, que indican los niveles donde se conoce y se desconoce, respectivamente, la solución del problema de interés.

La Fig. B.6 muestra la interpretación geométrica de aproximar la derivada de la función $p(x,y,z,t)$ con respecto al tiempo t .

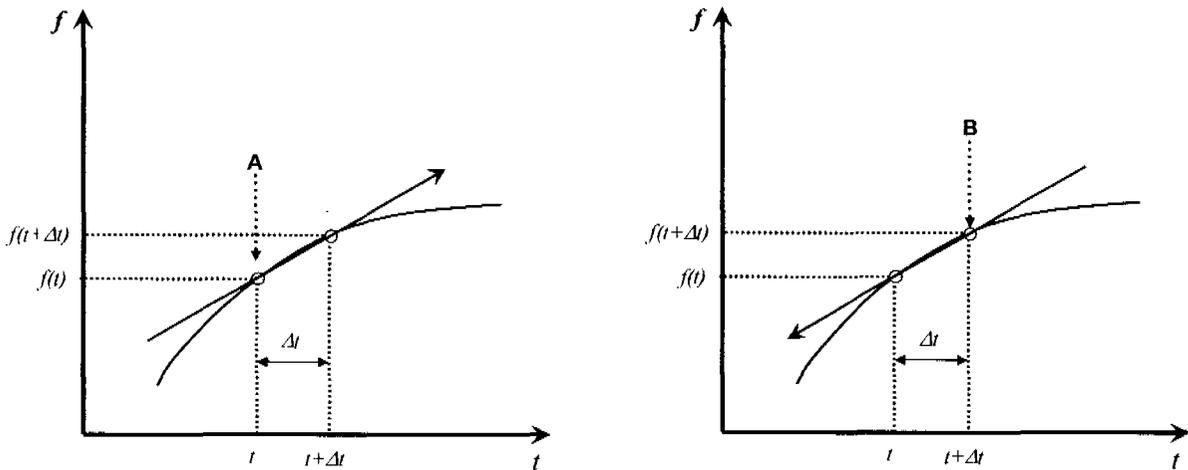


Fig. B.6 Aproximación en el tiempo

De esta manera, la discretización de $\frac{\partial p}{\partial t}$, utilizando la serie de Taylor en diferencias *progresivas* y omitiendo los subíndices y,z , es:

$$p(x, t + \Delta t) = p(x, t) + \frac{\Delta t}{1!} p'(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2!} p''(x, t) + \frac{(\Delta t)^3}{3!} p'''(x, t) + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} p^{(n)}(x, t) \tag{B.22}$$

En la Ec. B.22 el punto donde se parte es mostrado en la Fig. B.6 como punto A, ej. t y el punto donde se expande la función f es $t+\Delta t$.

Considerando hasta la primera derivada, se tiene:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_i = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (\text{B.22a})$$

En diferencias regresivas es:

$$p(x,t) = p(x,t+\Delta t) + \frac{-\Delta t}{1!} p'(x,t+\Delta t) + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} p''(x,t+\Delta t) + \dots + \frac{(-\Delta t)^n}{n!} p^n(x,t+\Delta t) \quad (\text{B.23})$$

En la Ec. B.23, el punto de donde se parte es mostrado en la Fig. B.6 como punto B, ej. $t+\Delta t$. y el punto donde se expande la función f es t , o sea un $-\Delta t$.

Considerando hasta la primer derivada en la Ec. B.23, se tiene

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_i = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{B.23a})$$

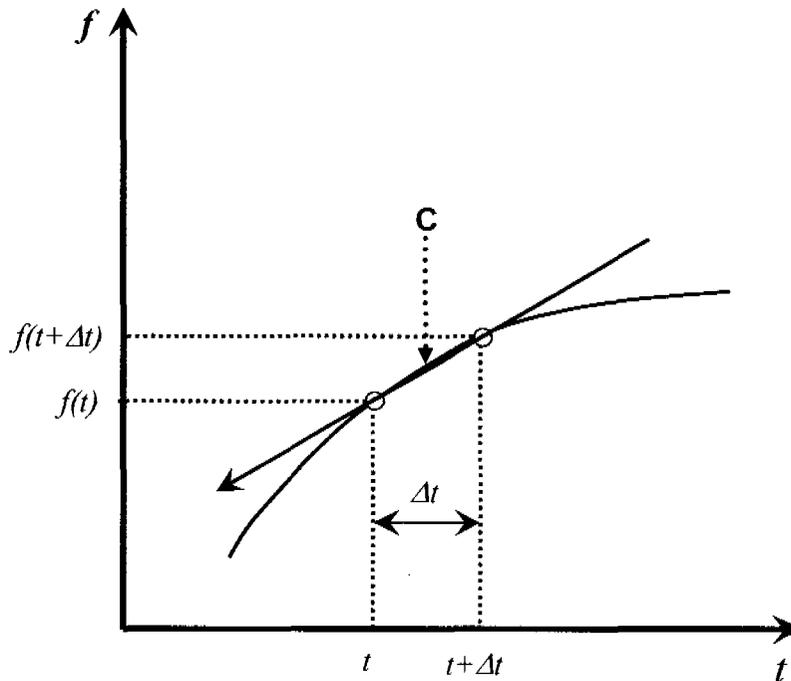


Fig. B.7 Aproximación mediante diferencias centrales

Finalmente, expandiendo en *ambas direcciones*, i.e. en el punto medio entre t y $t + \Delta t$, o sea $t + \frac{\Delta t}{2}$, se tiene la aproximación mediante diferencias centrales.

Para la aproximación en diferencias progresivas, el punto donde se obtendrá la derivada es $t + \frac{\Delta t}{2}$ y el delta donde se expandirá es $\frac{\Delta t}{2}$ o sea $t + \frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2} = t + \Delta t$,

$$\begin{aligned}
 p(x, t + \Delta t) = & p(x, t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2} p'(x, t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^2}{2!} p''(x, t + \frac{\Delta t}{2}) + \\
 & \frac{(\frac{\Delta t}{2})^3}{3!} p'''(x, t + \frac{\Delta t}{2}) + \dots + \frac{(\frac{\Delta t}{2})^n}{n!} p^{(n)}(x, t + \frac{\Delta t}{2})
 \end{aligned}
 \tag{B.24}$$

Para la aproximación en diferencias regresivas, el punto donde se obtendrá la derivada es $t + \frac{\Delta t}{2}$ y el delta donde se expandirá es $-\frac{\Delta t}{2}$ o sea $t + \frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta t}{2} = t$;

$$p(x, t) = p\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{-\frac{\Delta t}{2}}{1!} p'\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^2}{2!} p''\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^3}{3!} p'''\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \dots + \frac{\left(-\frac{\Delta t}{2}\right)^n}{n!} p^n\left(x, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (\text{B.24})$$

Restando las Ecs. B.24 y B.23, se tiene la aproximación en diferencias progresivas:

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_i^{n+1/2} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (\text{B.24a})$$

Como se vio anteriormente, la aproximación de la primera derivada mediante diferencias centrales es mejor que las aproximaciones mediante diferencias regresivas y progresivas. El empleo de diferencias centrales en tiempo no es común en la solución de problemas de flujo de fluidos en medios porosos. El empleo de diferencias regresivas se descarta por razones de estabilidad numérica.

APÉNDICE C EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS

C.1 Ejercicios Resueltos

1. Demostrar el caso del arreglo cúbico mostrado en la Fig. A.2.

Lo primero es recordar que un cubo tiene tres dimensiones iguales. Suponiendo que el diámetro de los granos es de 1 mm y que se tienen tres granos por cada dimensión se deduce que:

$$\text{arista} = 3 * D_{\text{esfera}} = 3 * (1\text{mm}) = 3\text{mm}$$

$$V_{\text{roca}} = (\text{arista})^3 = (3\text{mm})^3 = 27\text{mm}^3$$

$$V_{\text{granos}} = 27 * \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{D_{\text{esfera}}}{2} \right)^3 \right] = 27 * \left[\frac{4}{3} \pi \left(\frac{1[\text{mm}]}{2} \right)^3 \right] = 14.13\text{mm}^3$$

$$V_{\text{poro}} = V_{\text{roca}} - V_{\text{granos}} = 27 - 14.13 = 12.86\text{mm}^3$$

$$\phi = \frac{V_{\text{poros}}}{V_{\text{roca}}} = \frac{12.86\text{mm}^3}{27\text{mm}^3} = 0.476 \therefore QED$$

2. Deduzca las dimensiones de la compresibilidad.

De la ecuación que define a la compresibilidad

$$c = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

se deduce que:

$$V [L^3]$$

$$\partial V [L^3]$$

$$\partial p \begin{bmatrix} F \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M * L \\ T^2 \\ L^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M * L \\ L^2 * T^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ L * T^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$c = - \begin{bmatrix} 1 \\ L^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L^3 \\ M \\ L * T^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^4 * T^2 \\ L^3 * M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L * T^2 \\ M \end{pmatrix}$$

Y si se observan las dimensiones de ∂p , se concluye que la compresibilidad es recíproca a la presión.

3. Calcule el factor de conversión que transforma $\left[\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} \right]^{-1}$ a psi^{-1}

$$c \left[\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} \right]^{-1} = \frac{1}{\text{dinas}} = \frac{\text{cm}^2}{\text{dinas}}$$

Pero, recordando que $1 \text{ dina} = 1 \frac{\text{g} * \text{cm}}{\text{s}^2}$ se tiene que:

$$1 \left[\frac{\text{g} * \text{cm}}{\text{s}^2} \right] * \frac{1[\text{Kg}]}{1000[\text{g}]} * \frac{1[\text{m}]}{100[\text{cm}]} = 1 \times 10^{-5} \left[\frac{\text{Kg} * \text{m}}{\text{s}^2} \right] = 1 \times 10^{-5} [\text{N}]$$

Transformando:

$$1 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{dina}} \right] * \frac{1[\text{dina}]}{1 \times 10^{-5} [\text{N}]} * \frac{9.81[\text{N}]}{1[\text{Kg}]} * \frac{1[\text{Kg}]}{2.2[\text{lb}]} * \frac{1[\text{pg}^2]}{2.54^2[\text{cm}^2]} = 69116 \left[\frac{\text{pg}^2}{\text{lb}} \right]$$

lo que implica que para conocer a cuantas $(\text{lb} / \text{pg}^2)^{-1}$ equivalen $X \left[\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2} \right]^{-1}$, se debe afectar el coeficiente "X" por el factor de 69116

4. Se tiene un yacimiento con los siguientes datos:

$$V_r = 3 \times 10^8 \text{ m}^3$$

$$\Phi = 0.25$$

$$V_o = 6 \times 10^7 \text{ m}^3$$

$$V_g = 3.75 \times 10^6 \text{ m}^3$$

Calcule V_w en galones

En primer lugar se calcula el volumen de poro

$$V_p = \phi * V_r = 0.25 * 3 \times 10^8 = 7.5 \times 10^7 \text{ m}^3$$

A continuación, se obtiene la saturación de aceite:

$$S_o = \frac{V_o}{V_p} = \frac{6 \times 10^7 \text{ m}^3}{7.5 \times 10^7 \text{ m}^3} = 0.8$$

El siguiente paso es calcular S_g . Esto se hace por:

$$S_g = \frac{V_g}{V_p} = \frac{3.75 \times 10^6 \text{ m}^3}{7.5 \times 10^7 \text{ m}^3} = 0.05$$

Se sabe que:

$$S_w + S_o + S_g = 1; \text{ por lo tanto,}$$

$$S_w = 1 - S_o - S_g = 1 - 0.8 - 0.05 = 0.15$$

Calculando V_w :

$$V_w = S_w * V_p = 0.15 * 7.5 \times 10^7 = 1125 \times 10^7 \text{ m}^3 * \frac{1000 \text{ l}}{1 \text{ m}^3} * \frac{1 \text{ gal}}{(3.7854) \text{ l}} = 2.97 \times 10^9 \text{ gal}$$

5. Interprete que tan compresible es un gas cuyo factor de volumen (B_g) es de 0.00435

Se supondrá que el volumen de dicho gas es 1 pie³, cuando es medido a condiciones de yacimiento.

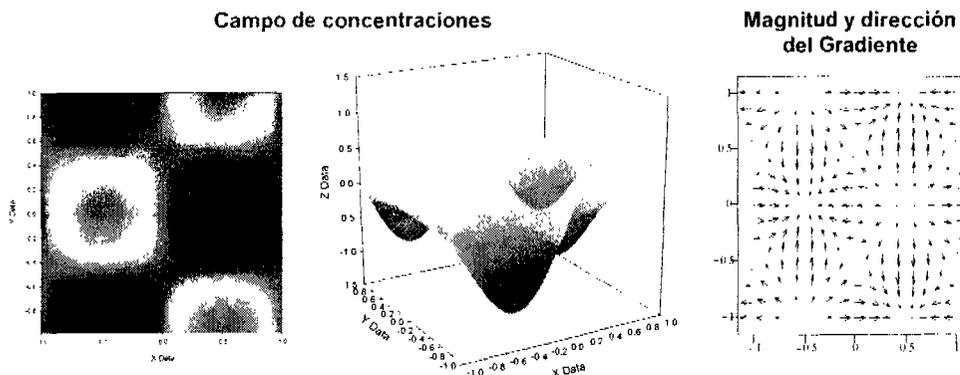
Ahora, si se analiza la ecuación $B_g = \frac{V_{\text{gas (i) c.y.}}}{V_{\text{gas (i) c.s.}}}$, se puede apreciar que si despejamos $V_{\text{gas (i) c.s.}}$ queda:

$V_{\text{gas (i) c.s.}} = \frac{V_{\text{gas (i) c.y.}}}{B_g}$ y si se introducen los datos que se tienen, se obtiene que

$$V_{\text{gas (i) c.s.}} = \frac{1 \text{ pie}^3}{0.00435} = 230 \text{ pies}^3$$

Ya con esta información se puede deducir que se trata de un gas muy compresible, ya que por cada pie cúbico que se tiene a condiciones de yacimiento, se obtienen 230 a condiciones estándar.

6. Un campo de concentraciones está dado por $C(x,y)=-\sin(\pi x)\cos(\pi y)$. Calcular el gradiente del campo (Divergencia). Hacer un mapa del campo de concentraciones C .



$$\nabla C \equiv \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) \cdot i + \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \cdot j = -\pi(\cos(\pi x)\cos(\pi y)) \cdot i - \sin(\pi x)\sin(\pi y) \cdot j$$

7. Siguiendo el procedimiento descrito en el Capítulo 3, deduzca la Ec. 3.5a para flujo en 2 dimensiones.

Considerando la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{k\rho}{\mu} \left(\vec{\nabla} p - \gamma \vec{\nabla} D \right) \right) \pm \tilde{q}_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$ en una sola fase para

un flujo que se mueve en dos direcciones pertenecientes a un plano horizontal se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \pm \tilde{q}_m = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}$$

Desarrollando la ecuación anterior

$$\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]$$

Agrupando

$$k\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + k\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y} \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right]$$

$$k\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + k\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{k}{\mu} \frac{\partial \rho}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \right]$$

Despreciando el gradiente de presión al cuadrado debido a que no es significativo.

Y substituyendo $c_i = c_r + c_f = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$, se tiene que:

$$\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \pm \tilde{q}_m = \left[\phi \rho c_i \frac{\partial p}{\partial t} \right].$$

Dividiendo ambos lados entre la densidad a condiciones estándar, sin considerar fuentes ni sumideros y simplificando:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \left[\frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \right].$$

8. Explique con sus propias palabras lo que representan las siguientes condiciones iniciales y de frontera. Diga de qué tipo son las segundas. Dibuje una gráfica donde las represente y en base a ella escriba sus conclusiones del fenómeno.

$$p(x=0, t > 0) = 3000 \frac{lb}{pg^2}$$

$$p(x=L, t > 0) = 0 \frac{lb}{pg^2}$$

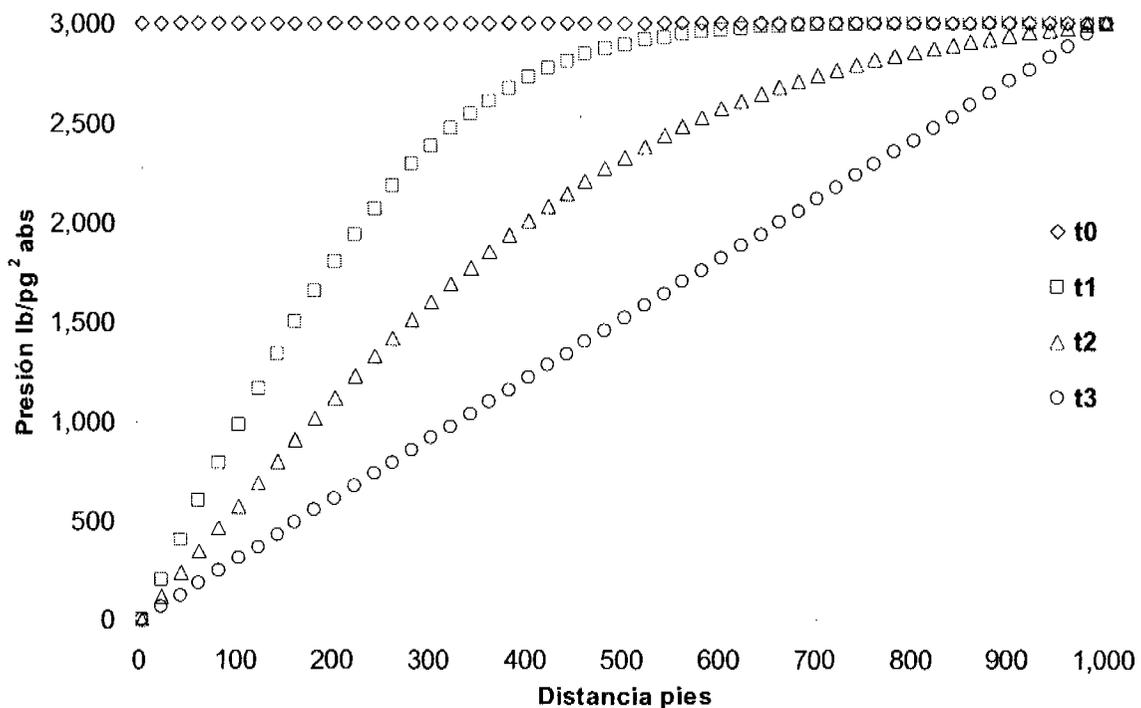
$$p(0 \leq x \leq L, t=0) = 3000 \frac{lb}{pg^2}$$

En primer lugar se concluye que las condiciones de frontera son de presión y por tanto son condiciones Dirichlet.

La primera dice que para cualquier tiempo posterior al inicial, la presión se mantendrá con un valor constante de $3000 \frac{lb}{pg^2}$ en la posición L del dominio.

La segunda expresa que la presión valdrá cero en la posición cero del dominio a cualquier tiempo posterior a cero.

La condición inicial establece que la presión inicial del yacimiento (en toda su extensión) es de $3000 \frac{lb}{pg^2}$



En base a lo observado en la gráfica se aprecia que el yacimiento se encontraba con una presión constante a lo largo de toda su extensión ($t_0 = 0$). Para el tiempo siguiente la presión en el punto $X = L$ se mantuvo en $3000 \frac{lb}{pg^2}$, por lo que se puede intuir que se cuenta con un pozo inyector en dicho punto. En cuanto al punto en el que $X = 0$, siempre va a tener una presión de cero, por lo que se puede suponer que ahí se tiene un pozo productor. La línea de color azul representa el comportamiento que el perfil de presiones tendrá a lo largo del yacimiento, cuando el tiempo de explotación sea muy grande.

9. Determine las posiciones de los nodos y de las fronteras de una malla cartesiana centrada; con esta información dibuje un esquema de dicha malla. Los datos son:

$$l_{\max} \text{ (número de nodos)} = 5$$

$$A = 2500 \text{ pies}$$

$$L = 100 \text{ pies}$$

El primer paso es determinar la longitud del intervalo Δx . Para ello se utiliza la ecuación: $\Delta x = \frac{L}{l_{\max}} = \frac{100}{5} = 20 \text{ pies}$

A continuación se calcula el volumen de las celdas. Esto es muy simple ya que todas tienen el mismo tamaño.

$$V_r = A * \Delta x = 2500 * 20 = 50000 [\text{pies}^3]$$

Ahora con ayuda de la ecuación $x_i = (i - \frac{1}{2}) \Delta x$, se encontrarán las posiciones para los nodos.

$$x_1 = (1 - \frac{1}{2}) 20 = \frac{1}{2} (20) = 10 [\text{pies}]$$

$$x_2 = (2 - \frac{1}{2}) 20 = \frac{3}{2} (20) = 30 [\text{pies}]$$

$$x_3 = (3 - \frac{1}{2}) 20 = \frac{5}{2} (20) = 50 [\text{pies}]$$

$$x_4 = (4 - \frac{1}{2}) 20 = \frac{7}{2} (20) = 70 [\text{pies}]$$

$$x_5 = (5 - \frac{1}{2}) 20 = \frac{9}{2} (20) = 90 [\text{pies}]$$

Las posiciones de las fronteras se determinan por $x_{i+\frac{1}{2}} = i \Delta x_i$.

$$x_{1+\frac{1}{2}} = 1(20) = 20 \text{ [pies]}$$

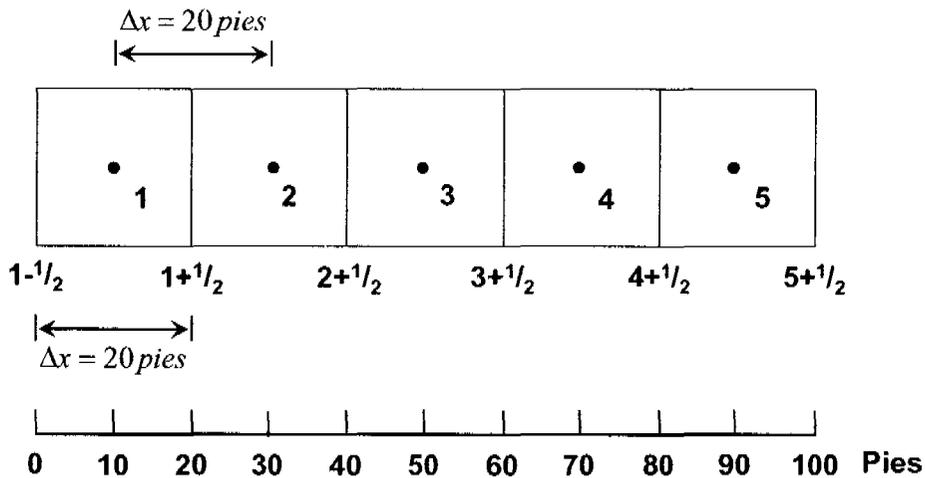
$$x_{2+\frac{1}{2}} = 2(20) = 40 \text{ [pies]}$$

$$x_{3+\frac{1}{2}} = 3(20) = 60 \text{ [pies]}$$

$$x_{4+\frac{1}{2}} = 4(20) = 80 \text{ [pies]}$$

$$x_{5+\frac{1}{2}} = 5(20) = 100 \text{ [pies]}$$

Ya sólo resta esquematizar cómo quedan ubicados los nodos y las fronteras dentro de la malla. Esto se muestra en la siguiente figura:



10. Repita el ejemplo anterior pero, ahora para mallas distribuidas.

El primer paso es determinar la longitud del intervalo Δx . Para ello se utiliza la ecuación: $\Delta x = \frac{L}{\text{Imax} - 1} = \frac{100}{4} = 25 \text{ [pies]}$

A continuación se calcula el volumen de las celdas. A diferencia de las mallas cartesianas, aquí los volúmenes de la primera y última celdas se calculan en forma diferente que las demás.

$$V_i = \frac{A * \Delta x}{2} = \frac{2500 * 25}{2} = 31250 \text{ [pies}^3 \text{]} \text{ para } i=1, \text{Imax}$$

$$V_i = A * \Delta x = 2500 * 25 = 62500[\text{pies}^3] \quad \text{para } i=2, 3, \dots, \text{Imax}-1$$

Ahora con ayuda de la ecuación $x_i = (i-1) \Delta x_i$ se encontrarán las posiciones para los nodos.

$$x_1 = (1-1)25 = 0[\text{pies}]$$

$$x_2 = (2-1)25 = 25[\text{pies}]$$

$$x_3 = (3-1)25 = 50[\text{pies}]$$

$$x_4 = (4-1)25 = 75[\text{pies}]$$

$$x_5 = (5-1)25 = 100[\text{pies}]$$

Las posiciones de las fronteras se determinan por: $x_{i+\frac{1}{2}} = (i - \frac{1}{2}) \Delta x_i$

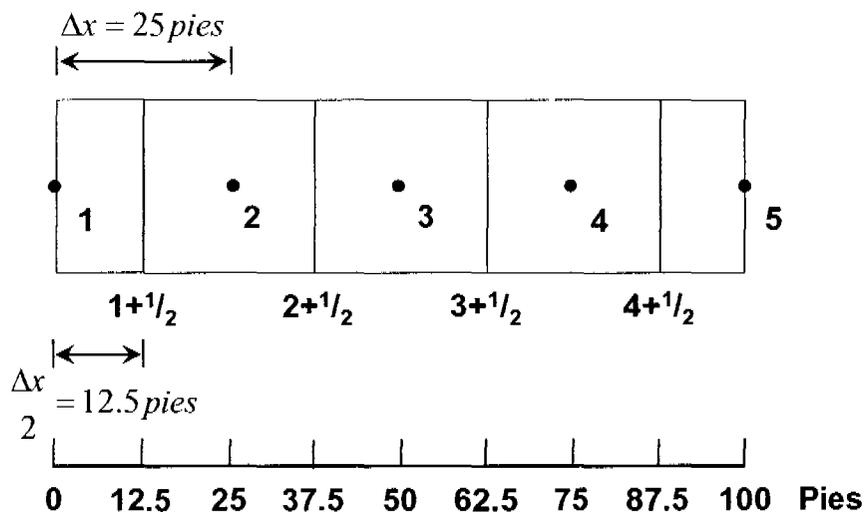
$$x_{1+\frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{2})25 = 12.5[\text{pies}]$$

$$x_{2+\frac{1}{2}} = (2 - \frac{1}{2})25 = 37.5[\text{pies}]$$

$$x_{3+\frac{1}{2}} = (3 - \frac{1}{2})25 = 62.5[\text{pies}]$$

$$x_{4+\frac{1}{2}} = (4 - \frac{1}{2})25 = 87.5[\text{pies}]$$

Ya sólo resta esquematizar cómo quedan ubicados los nodos y las fronteras dentro de la malla. Esto se muestra en la siguiente figura:



11. Construya una malla radial con los siguientes datos:

$$r_w = 0.5 \text{ pies}$$

$$r_e = 300 \text{ pies}$$

$$l_{max} = 5$$

$$\Delta z = 70 \text{ pies}$$

Para calcular el espaciamiento de los nodos se utilizan las ecuaciones:

$$r_1 = r_w e^{\left[\frac{\psi}{2}\right]}$$

$$r_i = r_1 e^{(i-1)\psi} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, l_{max}$$

De donde primero debemos calcular el valor de ψ . Esto se lleva a cabo por

$$\psi = \frac{1}{l_{max}} \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{300}{0.5}\right) = 1.279$$

Ahora calculando las posiciones de los nodos:

$$r_1 = (0.5)e^{\left[\frac{1.279}{2}\right]} = 0.948[\text{pies}]$$

$$r_2 = 0.948e^{(2-1)1.279} = 3.41[\text{pies}]$$

$$r_3 = 0.948e^{(3-1)1.279} = 12.25[\text{pies}]$$

$$r_4 = 0.948e^{(4-1)1.279} = 44.02[\text{pies}]$$

$$r_5 = 0.948e^{(5-1)1.279} = 158.2[\text{pies}]$$

Para calcular las posiciones de las fronteras, lo haremos con $r_{i+\frac{1}{2}} = r_w e^{i\psi}$ donde

$i = 1, 2, \dots, l_{max}-1$. Para l_{max} $r_{i_{max}+\frac{1}{2}} = r_e$

$$r_{1+\frac{1}{2}} = 0.5e^{1(1.279)} = 1.797[\text{pies}]$$

$$r_{2+\frac{1}{2}} = 0.5e^{2(1.279)} = 6.46[\text{pies}]$$

$$r_{3+\frac{1}{2}} = 0.5e^{3(1.279)} = 23.2[\text{pies}]$$

$$r_{4+\frac{1}{2}} = 0.5e^{4(1.279)} = 83.46[\text{pies}]$$

$$r_{5+\frac{1}{2}} = 300[\text{pies}]$$

A diferencia de los casos para mallas cartesianas, aquí los volúmenes de roca de cada celda varían de una a otra (esto es debido al espaciamiento logarítmico de los nodos y las fronteras) por lo que es necesario calcularlos. Para ello utilizamos:

$$V_i = \pi \left(r_{i+\frac{1}{2}}^2 - r_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) \Delta z . \text{ Cabe señalar que los subíndices } +\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2} \text{ hacen referencia a}$$

la frontera derecha e izquierda, respectivamente, de cualquier "i" nodo seleccionado. En otras palabras, si hablamos de $r_{i-\frac{1}{2}}$ y $r_{i+\frac{1}{2}}$ para el nodo $i = 2$,

estamos hablando de que $r_{2+\frac{1}{2}}$ es el calculado pero, $r_{2-\frac{1}{2}}$ en realidad es $r_{1+\frac{1}{2}}$. Con

esto deducimos que cuando tenemos el nodo $r_{1-\frac{1}{2}}$ en realidad estamos hablando

de r_w . Una vez aclarado esto, calcularemos los volúmenes de cada celda.

$$V_1 = \pi (1.797^2 - 0.5^2) 70 = 655 [\text{pies}^3]$$

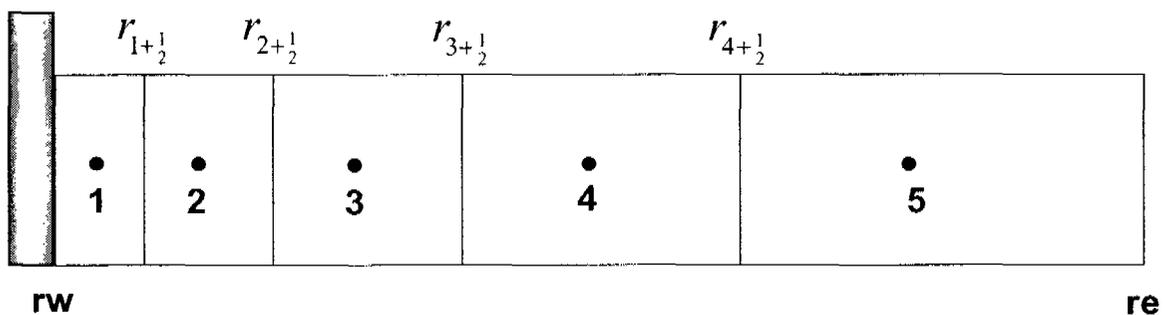
$$V_1 = \pi (6.46^2 - 1.797^2) 70 = 8467 [\text{pies}^3]$$

$$V_1 = \pi (23.2^2 - 6.46^2) 70 = 109,187 [\text{pies}^3]$$

$$V_1 = \pi (83.46^2 - 23.2^2) 70 = 1,413,444 [\text{pies}^3]$$

$$V_1 = \pi (300^2 - 83.46^2) 70 = 18,260,224 [\text{pies}^3]$$

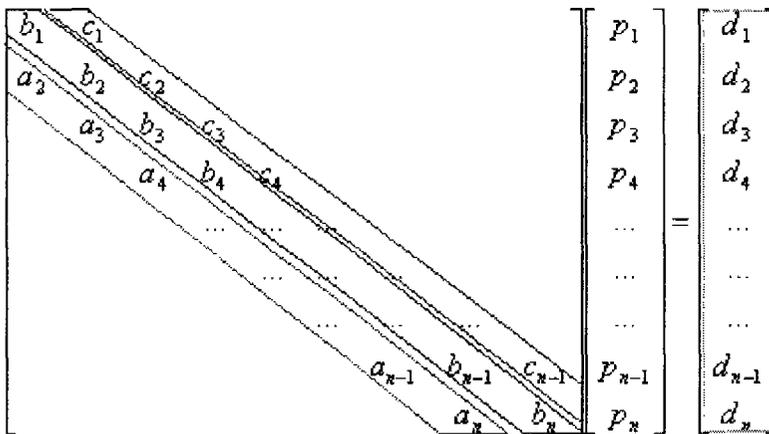
Como último paso nos resta esquematizar la distribución y el espaciamiento entre celdas. Esto se muestra en la siguiente figura:



12. Escriba el algoritmo del método de Thomas y detalle cada paso que se sigue.

El primer comentario es aclarar que este método es un caso particular de la descomposición LU y se utiliza en el caso en el que existen sistemas de ecuaciones donde la matriz de coeficientes es tridiagonal. Este tipo de matrices se generan cuando se analiza flujo monofásico a través de medios porosos en una sola dimensión.

Para comenzar, el método de Thomas requiere de almacenar cada una de las diagonales de la matriz de coeficientes, así como los resultados en vectores. En este caso los vectores se llaman A, B, C y D y su asignación se muestra en la siguiente figura:



Una vez que se tiene hecho lo anterior, se procede a calcular los elementos de los vectores auxiliares W y G. Debido a que el método es secuencial (o sea que para calcular el elemento i necesitamos conocer el $i-1$, primero obtendremos el elemento $i = 1$ de cada vector. Las ecuaciones son:

$$W(1) = \frac{C(1)}{B(1)}$$

$$G(1) = \frac{D(1)}{B(1)}$$

Ahora se calculan los demás elementos de los vectores por medio de las fórmulas:

$$W(i) = \frac{C(i)}{B(i) - A(i) * W(i-1)} \quad \text{para } i = 2, 3, 4, \dots, n-1$$

$$G(i) = \frac{D(i) - A(i) * G(i-1)}{B(i) - A(i) * W(i-1)} \quad \text{para } i = 2, 3, 4, \dots, n$$

De las ecuaciones anteriores es muy provechoso comentar que para W no se toma el valor de $i = n$ debido a que eso implicaría que se utilizara el elemento $C(n)$ pero, si revisamos la figura podremos notar que no existe.

Ya que se tienen calculados y almacenados todos los elementos de W y G se procede a obtener los elementos del vector $p(i)$, el cual es la solución del sistema de ecuaciones. Eso se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$p(n) = G(n)$$

$$p(i) = G(i) - W(i) * p(i+1) \quad \text{para } i = n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$$

Nótese que aquí se está haciendo una sustitución inversa ya que primero se calcula la presión $p(i = n)$ y en base a ella se fueron calculando las demás, hasta que por último se obtiene $p(i = 1)$

13. La función $E_i[x]$ puede ser aproximada por medio de la ecuación

$E_i(x) = \ln x + 0.5772$, siempre y cuando $\arg < 0.01$. Escriba el algoritmo para preparar un programa de cómputo que sea capaz de generar valores de x que se encuentren entre 0.001 y 0.01, espaciados de forma logarítmica. Además, que calcule $E_i[x]$ para cada uno de éstos valores. Presente sus resultados en una tabla y una gráfica.

El algoritmo para generar los valores logarítmicos y calcular los valores de la función puede ser:

$$b = 0$$

Para $j = 1, 2, 3, \dots, 7, 8, 9$

$$b = b + 1$$

$$x(b) = \frac{j}{10^3}$$

$$E_i(b) = \log[x(b)] + 0.5772$$

Aplicando el algoritmo para calcular algunos valores de $E_i(x)$:

$$b = 0$$

para $j = 1$

$$b = 0 + 1 = 1$$

$$x(b) = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$E_i(b) = \log[0.001] + 0.5772 = 6.330555284$$

para $j = 2$

$$b = 1 + 1 = 2$$

$$x(b) = \frac{2}{10^3} = \frac{2}{1000} = 0.002$$

$$E_i(b) = \log[0.002] + 0.5772 = 5.637408103$$

·
·
·

para $j = 9$

$$b = 8 + 1 = 9$$

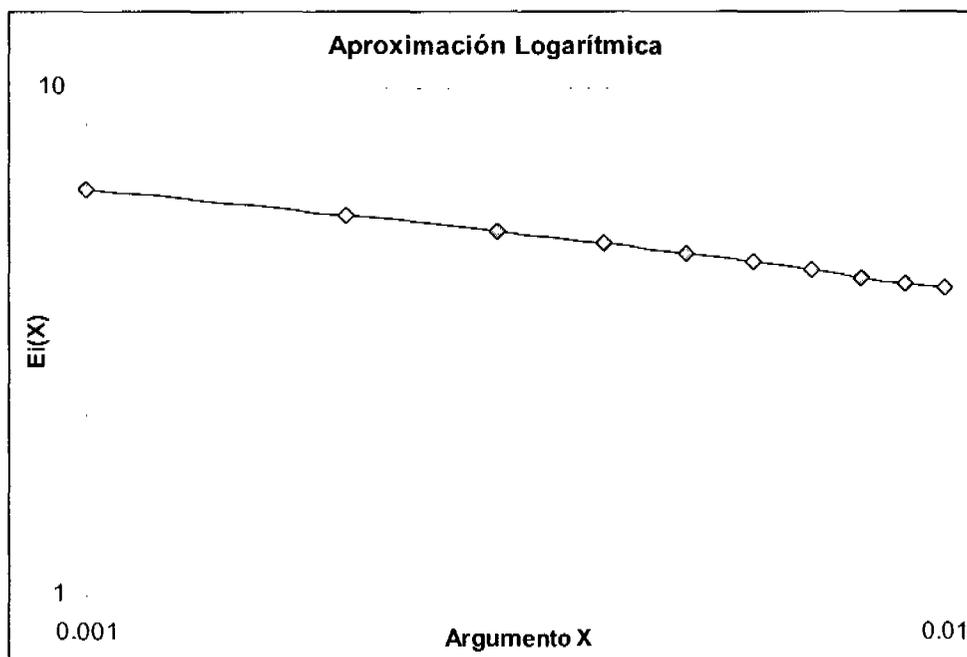
$$x(b) = \frac{9}{10^3} = \frac{9}{1000} = 0.009$$

$$E_i(b) = \log[0.009] + 0.5772 = 4.133330706$$

$$E_i(b) = \log[0.01] + 0.5772 = 4.027970191$$

La tabla completa y la gráfica son las siguientes:

Argumento X	Ei(X)
0.001	6.33155528
0.002	5.6384081
0.003	5.23294299
0.004	4.94526092
0.005	4.72211737
0.006	4.53979581
0.007	4.38564513
0.008	4.25211374
0.009	4.1343307
0.01	4.02897019



14. La ecuación $p_{(r,t)} = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} E_i \left[-\frac{r^2}{4\eta t} \right]$, donde $\eta = \frac{k}{\phi\mu c}$ (difusividad

hidráulica), es solución analítica para un simulador radial monofásico en una sola dimensión. Determine la presión para $r = 0.1, 3, 30$ y 300 metros a los tiempos: $0.01, 100$ y 1000 días. Entregue sus resultados en una tabla y haga una gráfica con ellos. Los datos son los siguientes:

$$p_i = 5000 \text{ lb/pg}^2$$

$$k = 80 \text{ mD}$$

$$h = 20 \text{ pie}$$

$$\mu = 0.85 \text{ cp}$$

$$c = 15 \times 10^{-6} \text{ (lb/pg}^2\text{)}^{-1}$$

$$Bo = 1.420$$

$$\Phi = 25.5$$

$$q_o = 100 \text{ bpd}$$

Para resolver este ejercicio basta con sustituir datos en la ecuación mencionada arriba, utilizando unidades del S.I. Las complicaciones se presentan para calcular el valor de la función exponencial pero, para ello se utilizarán los resultados arrojados por un programa de cómputo. Otra cuestión que debemos tener presente es que para cada tiempo se realiza el cálculo en los 4 diferentes valores de r . Esto se repite hasta agotar las combinaciones de tiempo y posición r . Haciendo los cálculos para dejar más claro el procedimiento.

En primer lugar se calcula la difusividad hidráulica, ya que es constante en todo el proceso:

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu c} = \frac{80 * 9.86 \times 10^{-16}}{(.255)(0.85 \times 10^{-3})(15 \times 10^{-6} * 14.5 \times 10^{-5})} = 0.16732$$

Con este valor se comienzan a calcular las presiones.

Para $t = 0.01$ días

Para $r = 0.1$ m

$$P_{(1)} = (5000 * 6911) - \frac{(100 * 1.84 * 10^{-6})(0.85 * 10^{-3})(1.42)}{4\pi(80 * 9.86 * 10^{-16}) \left(\frac{20}{3.28}\right)} E_i \left[\frac{0.1^2}{4(0.16732)(0.01 * 86400)} \right]$$

$$P_{(1)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{0.1^2}{57800(0.01)} \right] = 34,275,166 \text{ Pa}$$

Para $r = 3$ m

$$P_{(2)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{3^2}{57800(0.01)} \right] = 34,516,516 \text{ Pa}$$

Para $r = 30$ m

$$P_{(3)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{30^2}{57800(0.01)} \right] = 34,555,000 \text{ Pa}$$

Para $r = 300$ m

$$P_{(4)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{300^2}{57800(0.01)} \right] = 34,555,000 \text{ Pa}$$

Para $t = 100$ días

Para $r = 0.1$ m

$$P_{(5)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{0.1^2}{57800(100)} \right] = 33,936,746 \text{ Pa}$$

Para $r = 3$ m

$$P_{(6)} = 34,555,000 - 36700 E_i \left[\frac{3^2}{57800(100)} \right] = 34,186,696 \text{ Pa}$$

Para $r = 30$ m

$$P_{(7)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{30^2}{57800(100)} \right] = 34,355,820 \text{ Pa}$$

Para $r = 300$ m

$$P_{(8)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{300^2}{57800(100)} \right] = 34,516,516 \text{ Pa}$$

Para $t = 1000$ días

Para $r = 0.1$ m

$$P_{(9)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{0.1^2}{57800(1000)} \right] = 33,852,139 \text{ Pa}$$

Para $r = 3$ m

$$P_{(10)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{3^2}{57800(1000)} \right] = 34,186,696 \text{ Pa}$$

Para $r = 30$ m

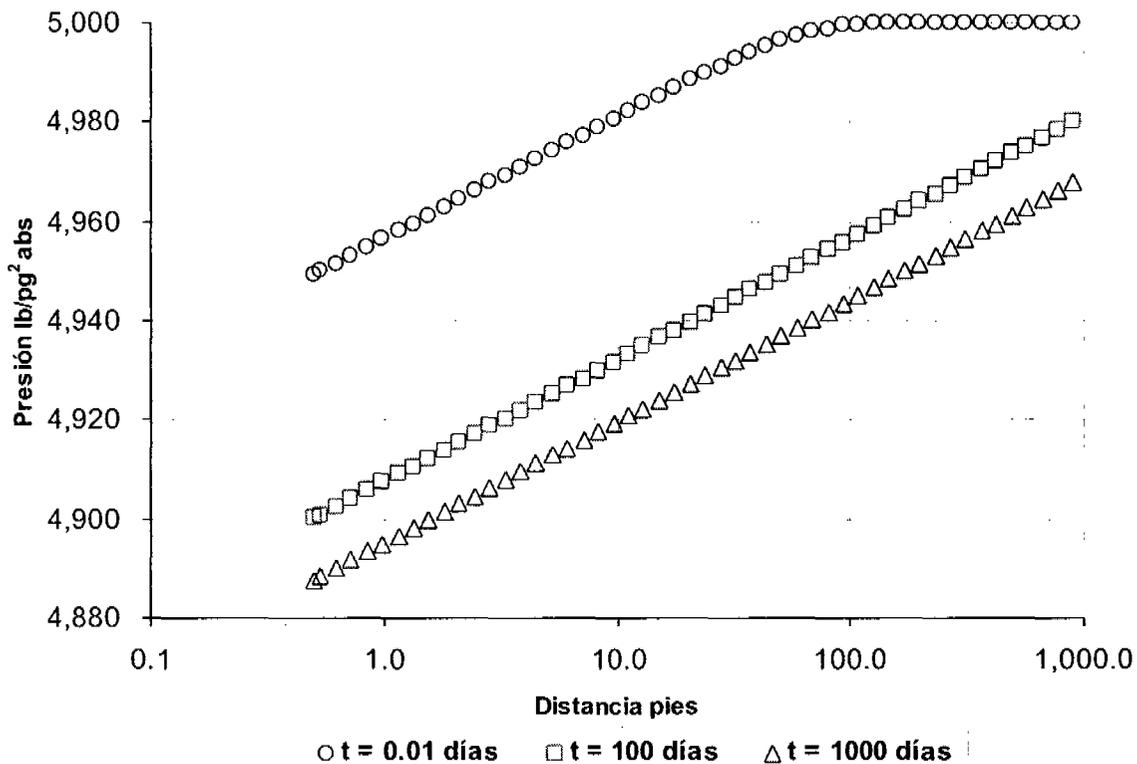
$$P_{(11)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{30^2}{57800(1000)} \right] = 34,271,295 \text{ Pa}$$

Para $r = 300$ m

$$P_{(12)} = 34,555,000 - 36700E_i \left[\frac{300^2}{57800(1000)} \right] = 34,439,610 \text{ Pa}$$

La tabla completa de resultados y las gráficas son las siguientes:

r pie	Presiones lb/pg ²		
	t = .01 días	t = 100 días	t = 1000 días
0.328	4959.508915	4910.5407	4898.298278
9.84	4994.431538	4946.707649	4934.465347
98.4	5000	4971.179393	4958.948879
984	5000	4994.431538	4983.3034606



15. En las Ecs. 4.22b, 4.22c, 4.22d, 4.25, 4.26, 4.27 se presentan las variaciones que se deben hacer para que un simulador radial sea capaz de considerar los efectos de daño y el almacenamiento. Describa los procesos físicos que suceden en el yacimiento y relaciónelos con estas ecuaciones.

Recordando que el daño es la variación (ya sea aumento o disminución) que sufre la permeabilidad de una roca. Éste es provocado por los fluidos que se utilizan durante la perforación y las estimulaciones, por tanto se presenta en la vecindad del pozo. La zona dañada es el volumen de roca en el cual se introdujeron fluidos ajenos a los que se encontraban originalmente atrapados en los poros de la formación; este volumen de roca suele tener un radio pequeño. A continuación se muestra un esquema que nos ayuda a entender mejor lo descrito.

Visto en sección:



Hablando acerca del almacenamiento, éste afecta solamente a la cara del pozo. Esto se debe a que durante un cierto intervalo de tiempo, la presión del fluido que se encuentra confinado dentro del pozo dificulta que el intervalo productor aporte fluidos hacia el agujero.

Habiendo descrito la parte física de los fenómenos, vamos a relacionarlos con las ecuaciones mencionadas. En ejercicios anteriores se generó un simulador para mallas radiales, el cual servirá como referencia para poder trabajar en éste.

De las Ecs. 4.22b a la 4.22d se tienen elementos de la matriz tridiagonal pero con subíndice "cero". Esto se hace así porque es necesario colocar un nodo en r_w para analizar el almacenamiento, ya que es ahí donde se sienten los efectos que éste provoca. El término a_0 no existe debido a que no hay transmisibilidad izquierda para el nodo cero. Los elementos b_0 y c_0 involucran tanto a la transmisibilidad derecha del mismo nodo, así como a los efectos de almacenamiento. Aquí cabe señalar que la transmisibilidad derecha si es considerada porque es donde el yacimiento aporta hacia el pozo e incluye al daño porque el fluido proviene de la zona dañada. A continuación, apreciamos que a diferencia del simulador radial, el término d_0 incluye al gasto de aceite que aporta el yacimiento al pozo.

En las Ecs. 4.25 a la 4.27 se realiza el análisis en el cual sólo se considera el efecto de daño. Esto se debe a que se plantea la suposición de que el nodo 1 está ubicado exactamente en la zona dañada y, por tanto ya no presenta el almacenamiento. Inclusive, el nodo está lo suficientemente lejos de la cara del pozo que su transmisibilidad izquierda es la única que se ve afectada por el daño de la formación; esto es porque el fluido pasa de la zona dañada hacia el pozo. Esto explica el que las Ecs. 4.25 y 4.27 sean las únicas que incluyen el factor de daño; ya que son las que están directamente relacionadas con el aporte que tiene la celda 1 hacia el pozo.

A partir de la Ec. 4.27 en adelante, el simulador será idéntico al radial que se obtuvo con anterioridad.

NOTA: Para resolver el nuevo sistema de ecuaciones que se genera de este modelo que considera daño y almacenamiento, se debe modificar el método de Thomas para que considere a los nuevos elementos de subíndice cero.

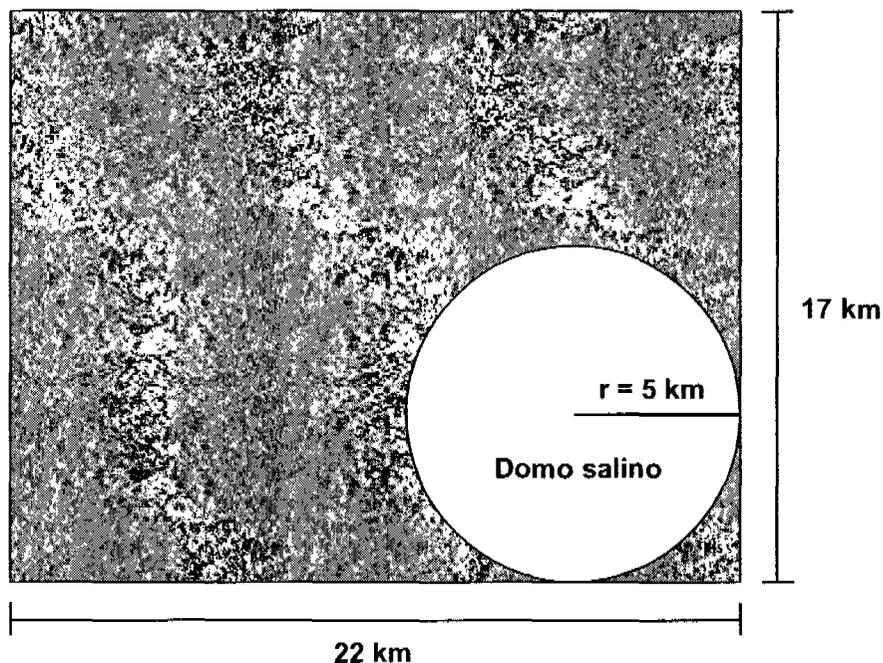
Explique detalladamente las consideraciones que se hacen, con el fin de realizar una simulación que se basa en el modelo idealizado para yacimiento fracturado (doble porosidad, una permeabilidad).

En primer lugar, el yacimiento fracturado se considera igual que la ilustración derecha de la Fig. 4.6. Esto es, se considera como un sistema de bloques de matriz, los cuales están espaciados entre sí por fracturas de dimensión constante, las cuales atraviesan de lado a lado a todo el yacimiento.

Otra consideración es la mostrada en las Figs. 4.7a y 4.7b. Ahí se aprecia que los bloques de matriz aportan fluido a las fracturas y nunca están en comunicación entre sí, por lo que no hay posibilidad de que un fluido vaya de un bloque a otro. Por lo tanto, las fracturas son las encargadas de “entregar” el fluido al pozo.

C.2 Ejercicios Propuestos

1. Demuestre los valores de porosidad del arreglo rómbico y del cúbico con 2 tamaños de grano mencionados en la Fig. A.2
2. Dibuje una gráfica de p vs V y dibuje una aproximación del comportamiento del agua y de un gas que se someten a un proceso de compresión (considere que $T = \text{cte}$).
3. Deduzca las dimensiones del gasto, viscosidad y permeabilidad. Para esta última primero explique detalladamente el experimento de Darcy y en base a la ecuación que obtuvo, deduzca las dimensiones.
4. Calcule el factor de conversión para transformar lb/pg^2 , cp , $\frac{\text{bl}}{\text{dia}}$, horas y mD y a unidades del S.I, por medio de un análisis de dimensiones.
5. En un yacimiento hipotético se tienen las dimensiones que se muestran en la siguiente figura (vista en planta):



Profundidad 1000 pies

El cuerpo salino que se muestra es de forma cilíndrica y atraviesa por completo al yacimiento. En base a esta información y a la que se proporciona a continuación, calcule V_g en bl.

$$\Phi=0.31$$

$$V_o=5.53 \times 10^{12} \text{ gal}$$

$$V_w=1.873 \times 10^{11} \text{ pies}^3$$

6. Explique ampliamente algún método por el cuál se puede determinar la distribución de poros en la roca a partir de la p_c .

7. Grafique el comportamiento de la viscosidad del gas en función de la temperatura y describa cuales fenómenos lo ocasionan.

8. ¿Bg puede ser mayor a uno? Justifique su respuesta (incluya gráficas)

9. ¿Cuál es el mínimo valor de Bo y explique ampliamente en que caso (s) se presenta (n)? Explique a qué se refiere el término “aceite de alto encogimiento” y cómo se relaciona con el factor de volumen.

10. Sea la función: $F = \frac{3r^4 + \csc^3 \theta}{z^2}$, calcule su divergencia

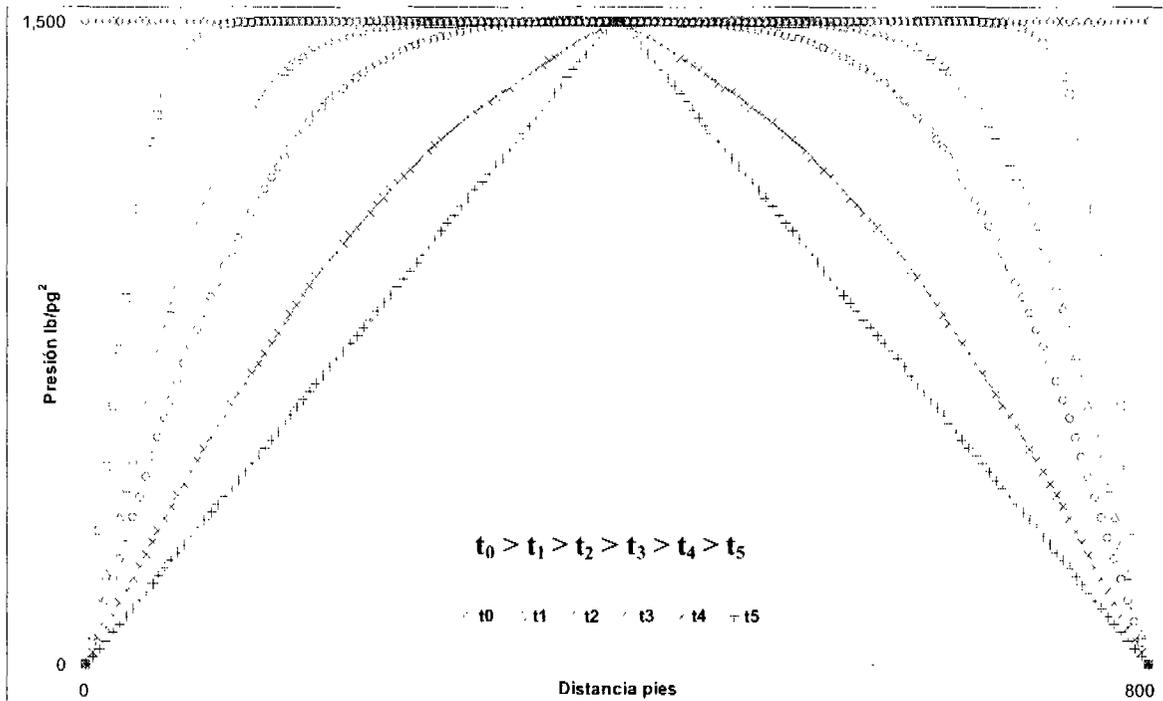
11. Resolver numéricamente las siguientes funciones por diferencias finitas progresivas, regresivas y centrales:

$$y = -\frac{1}{x} \text{ en el punto } x = 2.0$$

Considere el error total = (Sol. Analítica – Sol. Numérica) / Sol. Analítica

Realizar una gráfica del error total vs Δx para el rango de Δx [1, 1×10^{-8}], Considere las tres formas de obtener la derivada.

12. En base a la siguiente figura determine las condiciones iniciales y de frontera (diga si son de Neumann o Dirichlet). Expréselas en forma de ecuaciones y/o desigualdades. Escriba su explicación al fenómeno que está sucediendo durante la explotación.



13. Haga un programa de cómputo que sirva para construir mallas. Debe tener la posibilidad de permitir al usuario escoger entre mallas radiales o cartesianas; y en caso de ser cartesianas, debe poder seleccionarse entre nodos centrados y distribuidos.

14. Una solución analítica de la ecuación de flujo monofásico está determinada

$$\text{por: } P(x,t) = P_L * (P_R - P_L) \left[\frac{x}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{k}{\phi \mu c} t\right) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right]$$

Con base a ella y a los siguientes datos, realice un programa de cómputo que sea capaz de obtener el perfil de presiones a los tiempos

t = 0 días, t = 0.1 días, t = 1.0 días, t = 5.0 días, t = 25 días, t = 100 días.

Los datos son los siguientes:

$$k = 10 \text{ mD}$$

$$\mu = 0.5 \text{ cp}$$

$$c = 15 \times 10^{-6} \text{ (lb/pg}^2\text{)}^{-1}$$

$$\Phi = 23.4$$

$$L = 400 \text{ pies}$$

$$P(x, t = 0) = 1500 \text{ lb/pg}^2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

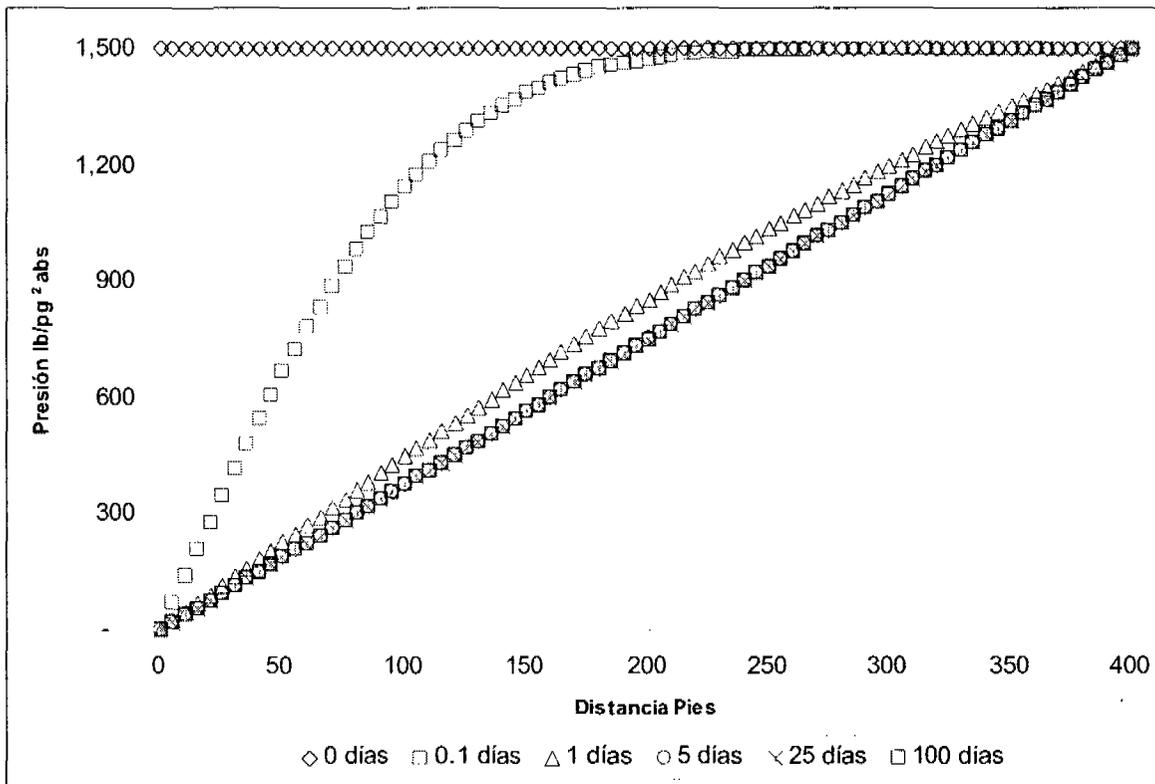
$$P(x = 0, t > 0) = 0 \text{ lb/pg}^2$$

$$P(x = L, t > 0) = 1500 \text{ lb/pg}^2$$

Los resultados deben ser computados en cada 5 pies y deben ser entregados en una tabla como la que se muestra a continuación:

X pie	t = 0 días	t = 0.1 días	t = 1 días	t = 5 días	t = 25 días	t = 100 días
0	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-
.	-	-	-	-	-	-
.	-	-	-	-	-	-
.	-	-	-	-	-	-
L = 400	-	-	-	-	-	-

Estos resultados deben ser presentados en una gráfica de p vs. X . El resultado debe ser algo parecido (no exactamente ya que los datos son diferentes) a lo siguiente:



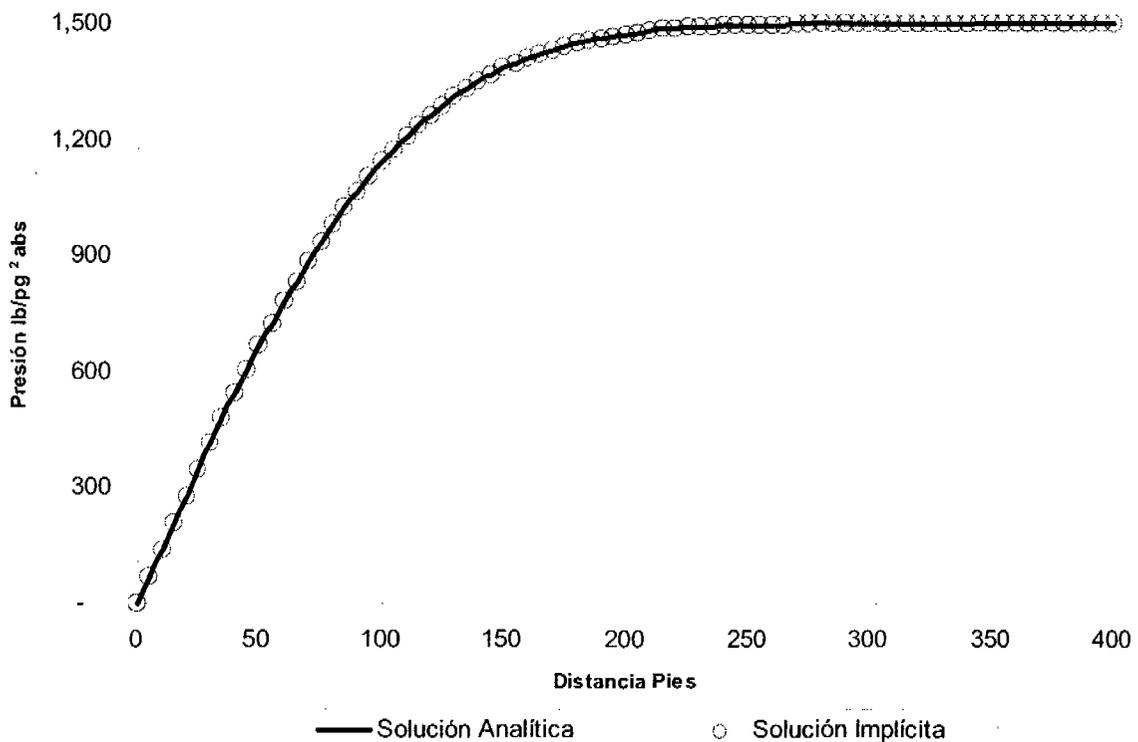
NOTA: utilice todos los datos en unidades del S.I.

15. En la siguiente tabla se muestran datos generados por un simulador los cuales representan los coeficientes de una matriz tridiagonal, además del vector de resultados.

$a(i)$	$b(i)$	$c(i)$	$d(i)$
0.000E+00	-4.299E-09	3.848E-09	-1.521E-02
3.848E-09	-9.317E-09	3.848E-09	-5.543E-02
3.848E-09	-1.352E-08	3.848E-09	-1.990E-01
3.848E-09	-2.864E-08	3.848E-09	-7.180E-01
3.848E-09	-8.299E-08	3.848E-09	-2.584E+00
3.848E-09	-2.783E-07	3.848E-09	-9.303E+00
3.848E-09	-9.805E-07	3.848E-09	-3.349E+01
3.848E-09	-3.504E-06	3.848E-09	-1.205E+02
3.848E-09	-1.257E-05	3.848E-09	-4.338E+02
3.848E-09	-4.518E-05	0.000E+00	-1.561E+03

Programe el método de Thomas y con él resuelva este sistema de ecuaciones. Entregue sus resultados en una tabla y en una gráfica de P vs x, donde $x = 1, 2, 3, \dots, 10$.

16. Realice un programa que calcule la solución de la formulación general (métodos explícito, implícito y Crank-Nicholson). Simule para un tiempo de 0.1 días y compare los casos entre sí. Verifique la validez de su programa, comparándolo con los resultados que obtuvo en el ejercicio anterior. En el caso del método implícito, la gráfica debe empalmarse con la de la solución analítica como se muestra en la siguiente gráfica. Para el esquema explícito, las curvas pueden no coincidir, debido a que el método tiene estabilidad limitada. NOTA: utilice todos los datos en unidades del S.I.



17. Un algoritmo para calcular el valor real de la función exponencial ($E_i[x]$) es el siguiente:

si ($x \leq 1.0$) entonces

$a_0 = -.57721566$
 $a_1 = .99999193$
 $a_2 = -.24991055$
 $a_3 = .05519968$
 $a_4 = -.00976004$
 $a_5 = -.00107857$

$$E_i[x] = a_0 + (a_1 * x) + (a_2 * x^2) + (a_3 * x^3) + (a_4 * x^4) + (a_5 * x^5) - \log(x)$$

si ($1.0 < x < 10.0$) entonces

$a_1 = 8.57332874$
 $a_2 = 18.05901697$
 $a_3 = 8.634760892$
 $a_4 = .2677737343$

$b_1 = 9.573322345$
 $b_2 = 25.632956148$
 $b_3 = 21.0996530827$
 $b_4 = 3.95849669228$

$$E_i[x] = \frac{x^4 + (a_1 * x^3) + (a_2 * x^2) + (a_3 * x) + a_4}{(x^4 + (b_1 * x^3) + (b_2 * x^2) + (b_3 * x) + b_4)(x * e^x)}$$

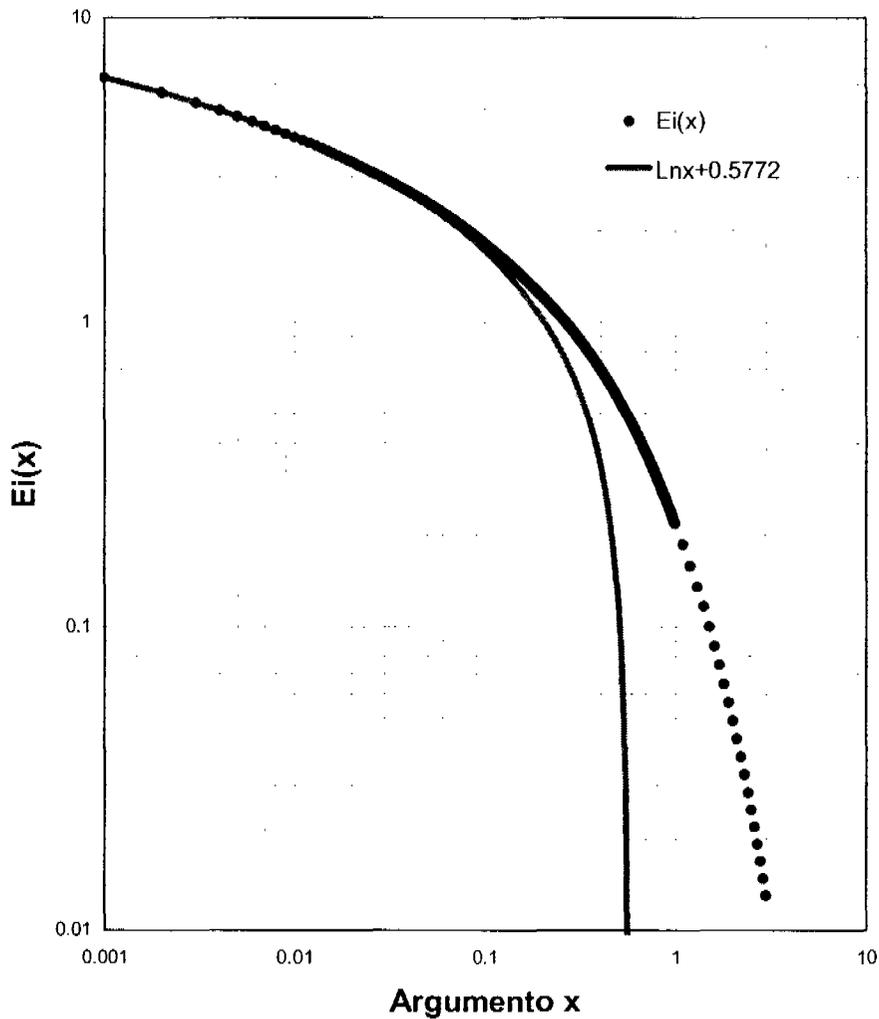
Para cualquier otro caso

$a_1 = 4.03640$
 $a_2 = 1.15198$
 $b_1 = 5.03637$
 $b_2 = 4.19160$

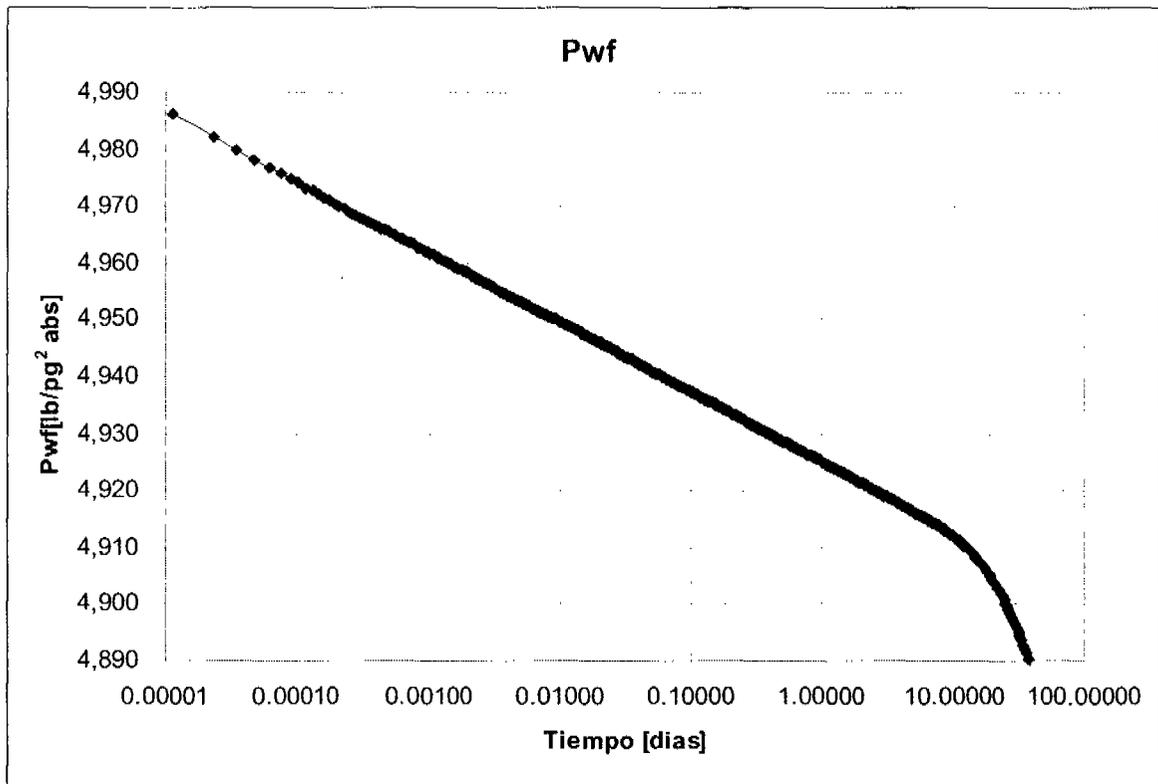
$$E_i[x] = \frac{x^2 + (a_1 * x) + a_2}{(x^2 + (b_1 * x) + b_2)(x * e^x)}$$

Realice un programa de cómputo donde utilice este algoritmo y también la aproximación logarítmica. Entregue sus resultados en una tabla y, además, compare sus resultados en la misma gráfica para que ilustre la diferencia del comportamiento.

La gráfica debe quedar de la siguiente forma:



18. Utilizando $r = r_w$ en la ecuación $p_{(r,t)} = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} E_i\left[-\frac{r^2}{4\eta t}\right]$ para cualquier tiempo, significa que se está obteniendo p_{wf} en cualquier instante. Si se realiza una gráfica de p_{wf} vs t se puede encontrar una tendencia como la mostrada en la siguiente figura



Este tipo de estudio se llama pruebas sintéticas de presión que se llevan a cabo en los pozos para poder obtener diferentes parámetros del yacimiento, con base a la información recopilada.

De la gráfica se aprecia que durante los primeros tiempos se tiene una tendencia recta, la cual tiene una pendiente que es $m = 162.6 \frac{q\mu B}{kh}$, de donde se puede despejar la permeabilidad $k = 162.6 \frac{q\mu B}{mh}$.

Realice un programa de cómputo en el cual se obtengan valores de p_{wf} generados a partir de tiempos espaciados logarítmicamente. En base a dichos valores construya una gráfica como la mostrada y obtenga manualmente la pendiente de la recta que marca la tendencia y, con ello, verifique el valor de permeabilidad.

Los datos a utilizar son:

$$p_i = 3000 \text{ lb/pg}^2$$

$$k = 100 \text{ mD}$$

$$h = 15 \text{ pies}$$

$$\mu = 0.72 \text{ cp}$$

$$c = 15 \times 10^{-6} (\text{lb/pg}^2)^{-1}$$

$$B_o = 1.475$$

$$\Phi = 23.4$$

$$q_o = 200 \text{ bpd}$$

NOTA: utilice unidades de campo

19. Explique detalladamente las consideraciones que se hacen, con el fin de realizar una simulación que se basa en el modelo de doble porosidad doble permeabilidad. Apóyese en gráficas y dibujos.

20. Una parte importante en la simulación es el modelado de pozos. Por lo tanto, escriba un resumen completo acerca de: métodos para representar pozos; las modificaciones necesarias para considerar fenómenos que alteran la producción de hidrocarburos (conificación, terminaciones parciales y estimulación de pozos); y, rutinas para el manejo de pozos.

21. Explique brevemente algunas técnicas utilizadas para determinar las informaciones que ayudan a preparar una descripción física del yacimiento (sección V.3.1.1).

22. Escriba una amplia explicación de qué son los índices de productividad e inyectividad y escriba sus dimensiones.

23. Mencione y explique algunas de las correlaciones (monofásicas, multifásicas, verticales y horizontales) más utilizadas que representan el flujo de fluidos en tuberías.

24. ¿Cuáles son los crudos que se utilizan como referencia para establecer el precio de la mezcla mexicana de exportación? Explique por qué fueron seleccionados para tal fin.

25. Realice una explicación extensa de por qué es que tanto GOR (RGA) como WOR son algunos factores que determinan cuando debe abandonarse un yacimiento. Apóyese en gráficas.