



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**IGUALACIÓN DE UN CANAL TELEFÓNICO
UTILIZANDO FILTRADO ADAPTABLE**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO

P R E S E N T A:

JONATHAN DE SANTILLANA RODRÍGUEZ

DIRIGIDA POR: M. I. LARRY H. ESCOBAR SALGUERO

CIUDAD UNIVERSITARIA AGOSTO 2007





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A ANGÉLICA DE SANTILLANA...
...A SU GENEROSIDAD.**

***“Si existe magia en pelear batallas
más allá de lo que uno resiste, es la
magia de arriesgar todo por un sueño,
que nadie más que tú puede ver”***

John Anderson.

A G R A D E C I M I E N T O S

El llegar a puntos como este en la vida no es fácil para nadie... Sin embargo, me gustaría puntualizar que hay personas que alcanzan un mayor merito por obtener logros como éste. Ese merito del que hablo, se justifica por las pruebas que esas personas superan durante su vida. Sin falta de modestia o humildad, me propongo como una de esas personas que encuentran en la perseverancia, la dedicación y el coraje el camino para alcanzar sus sueños. Sueños que nacen de una forma de interpretar el mundo y de la convivencia con personas que directa o indirectamente las influyen de tal forma, que las hacen ser lo que son, aquellas que las hacen anhelar ser mejores.

A las personas que influyeron en mi ánimo, son a las que en realidad debo esto, a ellas agradezco su ayuda, su apoyo y las palabras de aliento en las que encontré el motivo para seguir adelante cuando todo parecía estar tan mal o cuando todo parecía ser miel sobre hojuelas.

Lo siguiente es un especial reconocimiento a aquellas personas que marcaron su nombre en mi corazón.

Guillermo De Santillana García

Padre, el destino echó las cartas sobre la mesa y al día de hoy aunque no estamos juntos me gustaría decirte, **Gracias**, gracias por haberme dado la vida, por haberme dado una educación y por todas esas platicas interminables que créeme, nunca olvidaré y que hoy en día me permiten sobrevivir ante la realidad del mundo que me toco vivir, y además, un muy especial gracias por haber sembrado en mi corazón la semilla que día a día me dice que un mundo mejor existe.

Gabriela Rodríguez Delgado

Madre, han pasado cosas que me son difíciles de entender pero te doy las gracias por haber representado la figura materna durante tanto tiempo, en la cual, encontré el apoyo moral y un motivo de vida, gracias por haber contagiado a mi ser con tu incomparable espíritu trabajador que hoy en día me impulsa a hacer tantas cosas a la vez y por compartirme tu increíble fortaleza interna, por ello muchas gracias.

Angélica De Santillana García

Tía Angélica, a **ti** dedico todo este trabajo, porque sin tu invaluable ayuda esto jamás hubiera sido posible, aunque de un tiempo para acá no hemos tenido el contacto que me gustaría, te doy las **Gracias** por haber materializado todos los recursos que necesité, e incluso por haber cumplido caprichos innecesarios que me ayudaron a sobrellevar mi vida a lo largo de mi formación universitaria y no

solo eso, déjame decirte que tengo recuerdos que se extienden hasta mi infancia y todos ellos tienen algo en común, *tu ayuda incondicional*. De verdad gracias, porque tú me permitiste lograr algo muy importante, *obtener un título universitario*, espero en verdad no defraudar todo el apoyo que me has brindado, ten por seguro que día con día te llevo en mi corazón y me esfuerzo por alcanzar un nuevo mundo donde el sol brille más y en el que el decir mi nombre te llene de orgullo... de verdad **GRACIAS**.

Néstor López Muños y Jorge Hicks Rangel

A ustedes queridos entrenadores les agradezco haberme mostrado el deporte como una representación de la vida, donde solo el esfuerzo y la dedicación permiten alcanzar las metas anheladas, gracias por su tiempo en aquellos largos entrenamientos donde el deporte se convirtió en parte integral de mi desarrollo y que tiempo después me permitió extrapolar ese empeño a la vida real y que me hace de alguna manera estar acostumbrado a las grandes cargas de trabajo. Gracias por haberme escuchado y haberme dado su consejo en esos momentos en los que necesite orientación. Me gustaría decirles que espero poder practicar el deporte a niveles competitivos a lo largo de toda mi vida.

Rosalinda Rodea García

Aunque eres autora de uno de los pasajes más oscuros de mi vida, debo decirte Gracias porque el haber estado contigo me impulso a esforzarme mas allá de mis límites en la búsqueda del éxito, para poder brindártelo como sustituto de las cosas que no te podía dar, lástima que lo mal interpretaste y lástima que no lo supe explicar pero a pesar de todo eso te digo gracias, porque lo vivido contigo me ha hecho más fuerte y eso sin duda te lo debo a ti.

Lorena Núñez Jiménez

Querida amiga... ¡estas a un océano de distancia y a la vez estas aquí! Porque déjame decirte que no hay café en el que no salgas al tema. A ti, te agradezco esas pláticas que me mostraron otro punto de vista, otra forma de interpretar la vida, comentarios que me dieron ejemplos de que una mejor forma de vivir realmente existe, gracias por el apoyo que me brindaste cuando lo necesite y gracias a Dios y a ti por haberme permitido ser tu amigo.

Omar Alejandro Llanes Briseño

Querido amigo, eterno confidente, compañero y testigo incansable de mí andar en éste camino que al parecer compartimos. A ti, te agradezco todas esas pláticas hasta altas horas de la noche en las que intentamos entender y desmenuzar los misterios a los que la vida nos somete y en los que encuentro un incentivo para seguir adelante. Sé que puedo contar contigo de manera incondicional y quiero que sepas que tu también cuentas conmigo de igual manera, aunque sé que no

crees en esto agradezco a Dios y ti por haberme permitido ser tu amigo y de verdad me gustaría mucho llegar contigo a la vejes.

Ivonne Vásquez Guijarro

Querida amiga, a ti te agradezco el haberme abierto las puertas de tu familia y que me permitieras sentirme como si fuera uno de ustedes, de verdad gracias por haberme mostrado tu mundo y por compartir todas esas largas noches de fiestas...y las que faltan! Hemos estado juntos en buenos y malos momentos y déjame decirte que cuentas conmigo de manera incondicional, gracias a Dios, a ti y tu familia porque me permitieron ser su amigo.

A las siguientes personas también les agradezco su compañía y las enlisto de esta manera no por falta de importancia si no porque de verdad creo que saldría otra tesis de puros agradecimientos: Norma Martínez Peralta, Arely Ramírez Toledo, Miguel Mondragón, Salomón, Oscar Tapia, Fernando Argueta, Constantino Paniagua, Mario Victoria y los de reciente aparición en mi vida y que me han ayudado a ver algunas cosas que no podía ver: Berenice Alcaraz, Lizet Montoya, Edna Ramírez, Elena Valdez y a tantas y tantas personas que se escapan de mi memoria pero de las que sin duda quedaré eternamente agradecido.

Por último **Gracias a mi País, a la Universidad Nacional Autónoma de México** y a profesores como **Félix Núñez Orosco, Bernardo Frontana de la Cruz, Larry H. Escobar Salguero** que mas allá de impartir una metería en las aulas dan interesantes consejos de vida.

**...México, Pumas, Universidad
Goya!
Goya!
cachun, cachun ra, ra,
cachun, cachun ra, ra,
Goya!
Universidad!...**

ÍNDICE GENERAL

Índice general	I
Resumen de la tesis	V
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes históricos.....	1
1.2 Organización de la tesis.....	3
2 SEÑALES, SISTEMAS Y TELECOMUNICACIONES	4
2.1 Señales.....	4
2.1.2 Clasificación de las señales.....	6
2.2 Sistemas.....	9
2.2.2 Propiedades de los sistemas.....	10
2.2.3 Representaciones en el tiempo para sistemas LTI.....	12
2.2.4 Función impulso unitario.....	13
2.2.5 Descomposición de una señal discreta en impulsos.....	14
2.2.6 Convolución:	15
2.2.7 Respuesta en estado estable senoidal.....	16
2.3 Telecomunicaciones.....	17
2.3.2 Elementos de un sistema de comunicación digital.....	17
2.4 Resumen.....	20
3 LA PROBLEMÁTICA DE LA TRANSMISIÓN DIGITAL	21
3.1 Teoría de Fourier.....	21
3.1.2 Espectros.....	22
3.1.3 Ancho de banda de señales.....	23
3.2 Conversión analógico-digital.....	24
3.2.2 Muestreo de señales analógicas.....	24
3.2.3 Muestreo y Mantenimiento.....	26
3.2.3 Proceso de cuantización.....	27
3.3 Modulación por Codificación de Pulsos.....	29
3.3.2 Códigos de línea.....	30
3.3.3 Ancho de banda PCM.....	32
3.4 Canales de Comunicación.....	36

3.4.2	Condiciones para la transmisión sin distorsión.....	36
3.4.3	Distorsión lineal.....	38
3.4.4	Teorema de la capacidad de información de Shannon.....	38
3.4.5	Características del Canal Telefónico.....	39
3.5	Filtros.....	41
3.5.2	Características de un Filtro Pasobajas Ideal.....	43
3.5.3	Transmisión de un Pulso Rectangular a través de un Filtro Pasobajas Ideal.....	45
3.6	Interferencia Intersímbolos.....	48
3.7	Resumen.....	49
4	LA IGUALACIÓN DE CANAL	50
4.1	Función de transferencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.....	50
4.1.2	Deconvolución y sistemas inversos.....	51
4.1.3	Invertibilidad de sistemas LTI.....	52
4.2	Sistema de transmisión de pulsos en banda base.....	53
4.3	Igualación de canal.....	55
4.3.2	Estructura para un filtro de igualación.....	56
4.4	Adaptabilidad.....	59
4.4.2	Sistemas Adaptables.....	60
4.4.3	Propiedades generales de los sistemas adaptables.....	60
4.4.4	Procesos adaptables de lazo abierto y lazo cerrado.....	62
4.4.5	Aplicaciones de procesos adaptables de lazo cerrado.....	65
4.5	Idea general del filtro de igualación adaptable.....	68
4.5.2	El filtro óptimo.....	69
4.6	Función de error.....	70
4.6.2	El criterio del error cuadrático medio (MSE).....	71
4.6.3	Recursividad en algoritmos adaptables.....	73
4.6.4	Cálculo del filtro óptimo G.....	75
4.6.4	El gradiente determinístico.....	76
4.6.6	El gradiente estocástico.....	78
4.7	El algoritmo LMS.....	81
4.7.2	Implementación del filtro a partir del algoritmo LMS.....	82
4.7.3	Ventajas del algoritmo LMS.....	83

4.8 Resumen.....	84
5 IMPLEMENTACIÓN DEL IGUALADOR ADAPTABLE	85
5.1 Transmisor.....	85
5.1.2 Codificación a formato binario.....	87
5.1.3 Modulador para la transmisión de la señal en PCM.....	89
5.2 Canal Dispersivo.....	91
5.3 Receptor.....	95
5.3.2 Filtro de Igualación Fijo.....	95
5.3.3 Filtro de Igualación Adaptable.....	101
5.3.4 Implementación del algoritmo LMS.....	102
5.3.5 Selección de la longitud N del Filtro de Igualación.....	104
5.3.6 Selección del tamaño del paso μ	104
5.3.7 Reconstrucción del mensaje transmitido.....	109
5.3.8 Circuito de decisión.....	110
5.3.9 Ajuste del retardo en la transmisión de la señal.....	110
5.3.10 Decodificación y reproducción del mensaje.....	111
5.4 Resumen.....	112
6 RESULTADOS	113
6.1 Curvas de Convergencia.....	113
6.1.2 Curvas de Convergencia para el Algoritmo LMS.....	113
6.1.3 Curvas de Convergencia para el Algoritmo NLMS.....	114
6.1.4 Curvas de Convergencia para el Algoritmo LLMS.....	115
6.2 Respuesta en Magnitud y en el Tiempo de los Sistemas G.....	117
6.2.2 Respuesta en Magnitud de Sistemas G (LMS).....	118
6.2.3 Respuesta en Magnitud de Sistemas G (NLMS).....	119
6.2.4 Respuesta en Magnitud de Sistemas G (LLMS).....	120
6.3 Respuesta en Magnitud de Sistemas Canal-Igualador.....	120
6.3.2 Sistemas Canal-Igualador (LMS).....	121
6.3.3 Sistemas Canal-Igualador (NLMS).....	121
6.3.4 Sistemas Canal-Igualador (LLMS).....	122
6.4 Respuesta al Impulso de Sistemas Canal-Igualador.....	123

6.4.2 Sistemas Canal-Igualador LMS.....	123
6.4.3 Sistemas Canal-Igualador NLMS.....	127
6.4.4 Sistemas Canal-Igualador LLMS.....	129
6.5 Correlación de la Señal Recuperada.....	131
6.6 Desempeño Frente al Ruido.....	133
6.7 Resumen.....	138
7 CONCLUSIONES	139
APENDICE A	141
APENDICE B	143
APENDICE C	145
GLOSARIO	149
BIBLIOGRAFIA	150

RESUMEN

La exigencia del mundo actual en el ámbito de las **Comunicaciones Digitales** es la *Transferencia de Información a Velocidades cada vez Mayores*, las empresas que proveen este tipo de servicios compiten por ofrecer a sus clientes las mayores tasas de descarga de bits con sus bandas anchas. Esta exigencia, tiene implicaciones que son el motivo de este estudio, donde se analiza el *Canal Telefónico*, medio comúnmente utilizado para la transmisión de voz y datos, como parte de un sistema de comunicación digital.

En este trabajo, se simula un sistema de comunicación digital desde la adquisición del mensaje en el transmisor, hasta la entrega del mensaje al usuario en el receptor haciendo énfasis en la solución de un problema crucial en este campo, denominado **Interferencia Intersímbolo (ISI)**, este problema, se soluciona por medio de la **Igualación de Canal** aplicando la técnica de **Filtrado Adaptable**.

Esta técnica brinda mejores resultados en comparación con otras con la misma finalidad, como por ejemplo el diseño de filtros fijos inversos, porque además de igualar al canal, se adapta a los cambios aleatorios que la respuesta en frecuencia de un canal presenta en un ambiente de telecomunicaciones real.

Con el uso de esta técnica, se logra optimizar el ancho de banda disponible de un canal y se reducen los efectos que degradan a la señal en su viaje del transmisor al receptor, dichos efectos se presentan debido a que la respuesta en frecuencia del canal introduce distorsión en la forma de onda de la señal e introduce diferentes retardos en sus componentes frecuenciales. A los canales que introducen este tipo de efectos se les denomina **Canales Dispersivos**.

Los *Canales Dispersivos* dañan a la señal que se transmite por ellos, y cuando se transmite una **Señal Digital**, los símbolos digitales se *dispersan temporalmente*, encimándose con símbolos adyacentes, provocando lo que se conoce como *Errores de Bit* en la señal recibida, lo cual, no permite reconstruir el mensaje original.

En este trabajo, para igualar el canal telefónico empleado se utiliza un filtro adaptable, que se caracteriza por una respuesta en frecuencia que presenta el mínimo **Error Cuadrático Medio (MSE)** con respecto a la respuesta en frecuencia ideal inversa del canal telefónico y por coeficientes que se auto ajustan por medio de un algoritmo denominado **Least Mean Square (LMS)**, lo que le permite seguir las variaciones que la respuesta en frecuencia del canal telefónico pueda presentar.

El criterio del error cuadrático medio (MSE) presenta un buen desempeño ofreciendo una solución equilibrada al problema de reducir los efectos tanto del

ruido del canal como los de la Interferencia Intersímbolo, además de un tratamiento matemático no tan complicado, motivo por el cual es el criterio empleado en la presente tesis.

El sistema de comunicación digital empleado en este trabajo, adquiere de una señal real de voz, la convierte a un formato digital y la codifica en un formato **PCM**. Posterior a esto se simula el efecto que el canal telefónico (dispersivo) impone sobre la transmisión de la señal digital la cual es transmitida en **banda base**.

La señal distorsionada es procesada posteriormente por el Igualador de Canal que invierte los efectos que dicho canal impone, para la decodificación y reconstrucción de la señal de voz en el receptor.

Se evalúan tres variaciones del algoritmo LMS mostrando velocidades de convergencia, porcentajes de error y el desempeño del sistema frente al ruido. Por último se concluye sobre el funcionamiento de dichos algoritmos tomando en cuenta el compromiso entre la velocidad de convergencia y la estabilidad numérica del algoritmo empleado.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

En las sociedades actuales los sistemas de telecomunicaciones se han convertido en piezas fundamentales e imprescindibles para la vida moderna. La finalidad de estos sistemas, es hacer que “*n*” número de personas físicamente distantes puedan comunicarse tal y como lo harían si no existiera la distancia que los separa. Para hacer esto posible, el ser humano ha desarrollado diversas técnicas que han mejorado con el paso del tiempo, se puede hacer un recuento desde las señales de humo o el servicio postal hasta la manipulación del fenómeno electromagnético en la actualidad.

El estudio que aquí se presenta estaría incompleto sin una recopilación de notas históricas que nos permitieran entender la situación actual en dicho campo, por esta razón se presenta una breve descripción de hechos que impulsaron el desarrollo de las telecomunicaciones y de las técnicas que se aplican en este trabajo:

En 1837 **Samuel Morse**, un pintor, perfeccionó el telégrafo. Las palabras “*Que Ha Forjado Dios*” fueron las primeras palabras transmitidas y se transmitieron entre Washington DC y Baltimore Maryland.

En 1864 **James Clerk Maxwell** formuló la teoría electromagnética y predijo la existencia de ondas de radio, las cuales fueron establecidas experimentalmente por **Heinrich Hertz** en 1887 [1].

En 1875 **Alejandro Graham Bell**, un maestro de sordos, invento el teléfono. Este aparato convirtió en una realidad práctica la transmisión en tiempo real del habla mediante la codificación eléctrica y la replicación del sonido. La primera versión del teléfono fue burda, limitada y únicamente posibilitaba que la gente hablara a cortas distancias. Cuando el servicio telefónico contaba a penas con unos cuantos años se generó el interés por automatizarlo.

En 1894 **Oliver Lodge** realizó una demostración de comunicación inalámbrica a lo largo de una distancia relativamente corta (150 yardas).

En 1897 **A.B. Strowger**, contratista de Kansas City Missouri ideó el conmutador por grados automático que lleva su nombre [1].

Posteriormente el 12 de diciembre de 1901 **Guglielmo Marconi** recibió una señal de radio en Signal Hill en Terranova, la señal de radio se había originado en Cornwall Inglaterra a 1700 millas de distancia a través del Atlántico. Se había abierto de ese modo el camino hacia una tremenda ampliación del alcance de las comunicaciones.

En 1918 **Edwin H. Armstrong** inventó el receptor de radio superheterodino.

En 1928 **Philo T. Faros Worth** probó el primer sistema de televisión totalmente electrónico.

En 1937 **Alec Reeves** inventó la modulación por codificación de pulsos (PCM) para la codificación digital de señales de voz. La técnica se creó durante la segunda guerra mundial para permitir el encriptado de señales habladas, sin embargo esta técnica tuvo que aguardar el descubrimiento del transistor y el desarrollo de la integración a gran escala de circuitos para su explotación comercial.

En 1939 **La British Broadcasting Corporation** (BBC) transmitió por primera vez televisión comercial [1].

En 1948 **Claude Shannon** estableció los fundamentos teóricos de las comunicaciones digitales en un artículo titulado “La Teoría Matemática de la Comunicación” donde demostró que la velocidad de transmisión sobre un canal se podía aumentar sin incrementar la probabilidad de error siempre y cuando la velocidad de transmisión estuviera por debajo de la capacidad del canal. Diversos factores han contribuido a un aumento en las velocidades de transmisión de datos entre ellos destaca la ecualización adaptable que introdujo **Robert Lucky** en 1965 [1], cuya idea es el fundamento de la presente tesis.

La historia muestra que el objetivo en las comunicaciones es mejorar la calidad de la señal recibida en el receptor para una reconstrucción óptima del mensaje original y una mayor velocidad de transmisión de información. Para este fin, el campo de las telecomunicaciones se puede dividir en dos partes, las comunicaciones analógicas y las comunicaciones digitales. Las comunicaciones analógicas tienen que ver con el tratamiento de la señal con una base de tiempo y valores de señal continuos, mientras que las comunicaciones digitales tienen que ver con el tratamiento de la señal con una base de tiempo y valores de señal discretos.

En la actualidad buscando una menor distorsión en la señal recibida para una reconstrucción óptima del mensaje original se prefiere utilizar el esquema digital; porque es menos sensible a los efectos del ruido aunque requiere de un mayor ancho de banda en comparación con su contraparte analógico para transmitir un mismo mensaje. En este trabajo se trata el esquema digital y se da solución a un problema característico de este campo, **La Interferencia Intersímbolo (ISI)**.

Para dar solución a este problema que introducen los canales dispersivos sobre señales digitales que se transmiten a través de ellos, la idea fundamental es corregir los efectos que provoca el canal sobre la señal, a esta idea se le da el nombre de **Igualación de Canal**, ésta consiste en conectar en cascada un filtro que tenga una respuesta en frecuencia inversa a la del canal empleado, con la restricción de que la respuesta en frecuencia del canal debe ser invariante con el tiempo y que su función de transferencia debe ser de fase mínima, condiciones que en un ambiente de telecomunicaciones real **no se cumplen**.

Para dar solución a este punto surgió la **Igualación Adaptable** que se basa en la misma idea pero con la ventaja de que un algoritmo integrado actualiza los coeficientes del igualador de canal permitiéndole seguir los cambios que la respuesta en frecuencia del canal presenta.

El algoritmo que actualiza los coeficientes del filtro lo hace siguiendo un criterio, minimizar el resultado de la ecuación $e(n)=d(n)-y(n)$, donde $d(n)$ es la señal deseada, $y(n)$ es la señal estimada y $e(n)$ es el error de estimación [1]. Para minimizar esta ecuación se utiliza el criterio del **Error Cuadrático Promedio (MSE)** por su simplicidad y fácil tratamiento matemático, y el algoritmo empleado es el **Least Mean Square (LMS)** que ha ganado gran aceptación en la práctica, este método resuelve de forma aproximada la ecuación de filtrado de **Winer-Hopf** [2] en una manera recursiva ahorrando la inversión de la matriz de covarianza requerida en dicha ecuación; lo que reduce los costos computacionales para su implementación, razones por las cuales es el algoritmo que se aplica en el presente trabajo.

Esta tesis tiene el **objetivo** de solucionar el problema de la *Interferencia Intersimbólica* presente en la transmisión digital de voz por un canal telefónico mediante la aplicación de un filtro adaptable bajo el criterio MSE y el algoritmo LMS.

1.2 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

Este trabajo se divide en las siguientes partes:

En el *capítulo dos* se da una explicación de la interacción de señales y sistemas y como en su conjunto son utilizados para crear sistemas de telecomunicaciones.

En el *capítulo tres* se aborda el esquema de comunicación digital y los problemas presentes al utilizar canales dispersivos para transmisión de señales.

En el *capítulo cuatro* se presenta la idea general de la igualación de canal así como la teoría empleada para llevar a cabo dicha igualación.

En el *capítulo cinco* se lleva a cabo la implementación del igualador adaptable propuesto para solucionar el problema de la ISI.

Finalmente en el *capítulo seis y siete* se muestran los resultados obtenidos, la evaluación de la solución propuesta y las conclusiones derivadas de estos resultados.

2 SEÑALES, SISTEMAS Y TELECOMUNICACIONES

En este capítulo se explican de manera breve los conceptos básicos que se emplean a lo largo de este trabajo, estos son: las señales, los sistemas y las telecomunicaciones. El estudio de estos puntos tiene la finalidad de proporcionar las bases teóricas y el esquema en el que se trabaja a lo largo de la presente tesis.

2.1 SEÑALES

De una forma u otra, las señales constituyen un elemento básico de la vida diaria, gracias a ellas nos comunicamos e interpretamos información que nos es de utilidad, por ejemplo, nos comunicamos con otros seres humanos por medio de señales de voz o interactuamos con el exterior por medio de las imágenes que reciben nuestros ojos las cuales, interpretamos como información para nuestro propio posicionamiento en el lugar en el que estamos, de hecho la lista de posibles ejemplos es interminable, por lo cual damos la siguiente definición de señal:

Una señal puede ser descrita como una función de una o más variables que transportan información acerca de la naturaleza de un fenómeno físico [3].

Cuando la función depende de una sola variable se dice que la señal es unidimensional. Una señal de voz es unidimensional porque su amplitud varía con el tiempo, por ejemplo en la Figura 2.1 se muestra la representación eléctrica de una señal de voz masculina que dice “**Hola Buenas Tardes**”.

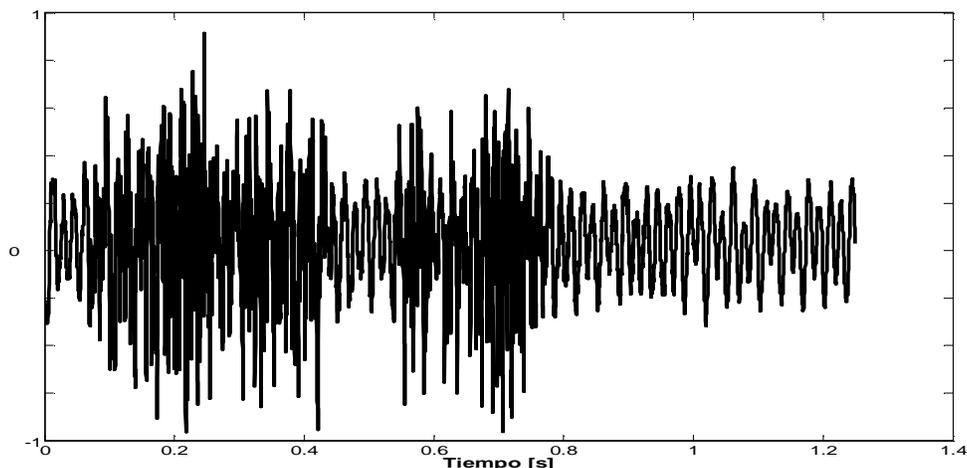


Figura 2.1. Representación eléctrica de una señal de voz masculina que dice “**Hola Buenas Tardes**”

Cuando la señal depende de dos variables, se dice que es bidimensional. Una imagen constituye un ejemplo de señal bidimensional porque cualquier punto de la imagen se representa por dos variables, sus coordenadas vertical y horizontal.

Matemáticamente describimos una señal como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, las funciones

$$S1(t) = 4t \quad (2.1.1)$$

$$S2(t) = 16t^2 \quad (2.1.2)$$

describen dos señales unidimensionales. La primera varía linealmente con la variable independiente (t) “*el Tiempo*” y la segunda varia cuadráticamente con t . Como otro ejemplo consideremos la siguiente función:

$$s(x, y) = 16x + 6xy + 81y^2 \quad (2.1.3)$$

Esta función describe una señal con dos variables independientes x e y que pueden representar las coordenadas espaciales de un plano.

Las señales descritas anteriormente, pertenecen a las clases de señales que quedan perfectamente definidas especificando la dependencia funcional con las variables independientes. Sin embargo, existen casos en los que dicha relación funcional es desconocida o demasiado complicada como para tener utilidad práctica. Por ejemplo una señal de voz, (ver Figura 2.1) no se puede describir funcionalmente; En general, un segmento de voz puede representarse con un alto grado de aproximación como la suma de varias sinusoides de diferentes amplitudes y frecuencias, esto es [3]:

$$\sum_{i=1}^N Ai(t) \text{sen}[2\pi Fi(t)t + \theta i(t)] \quad (2.1.4)$$

donde **$Ai(t)$** , **$Fi(t)$** y **$\theta i(t)$** son los conjuntos variables con el tiempo de amplitudes, frecuencias y fases de las sinusoides respectivamente hablando. De hecho, una manera de interpretar la información o el mensaje contenido en un segmento de una señal de voz es medir las amplitudes, frecuencias y fases contenidas en el segmento de la señal.

Los métodos usados en el procesado de señales o en el análisis de la respuesta de un sistema a una señal de entrada, dependen fuertemente de las características particulares de la señal a tratar. Para poder identificar dichas características a continuación se presenta una breve clasificación de las señales.

2.1.2 Clasificación de las Señales

Las señales se pueden clasificar en cuatro categorías dependiendo de las características de la variable independiente (tiempo) y los valores que esta puede tomar [3]:

Señales en Tiempo Continuo o Señales Analógicas.

Se definen para todos los instantes de tiempo y pueden tomar cualquier valor en el intervalo continuo (a,b) donde a puede ser $-\infty$ y b puede ser ∞ . Matemáticamente, estas señales se describen como funciones continuas de variable continua [3]. La onda de voz de la Figura 2.1 es ejemplo de señal analógica.

Señales en Tiempo Discreto.

Se definen solo para ciertos valores de tiempo. Estos instantes de tiempo no necesitan estar equidistantes, aunque en la práctica se toman normalmente instantes equiespaciados conforme a intereses computacionales y matemáticos [3]. Como ejemplo $x[n]=e^{-0.5n}$, $n=0, 1, 2, 3\dots$ constituye una señal discreta la cual se muestra en la Figura 2.2.

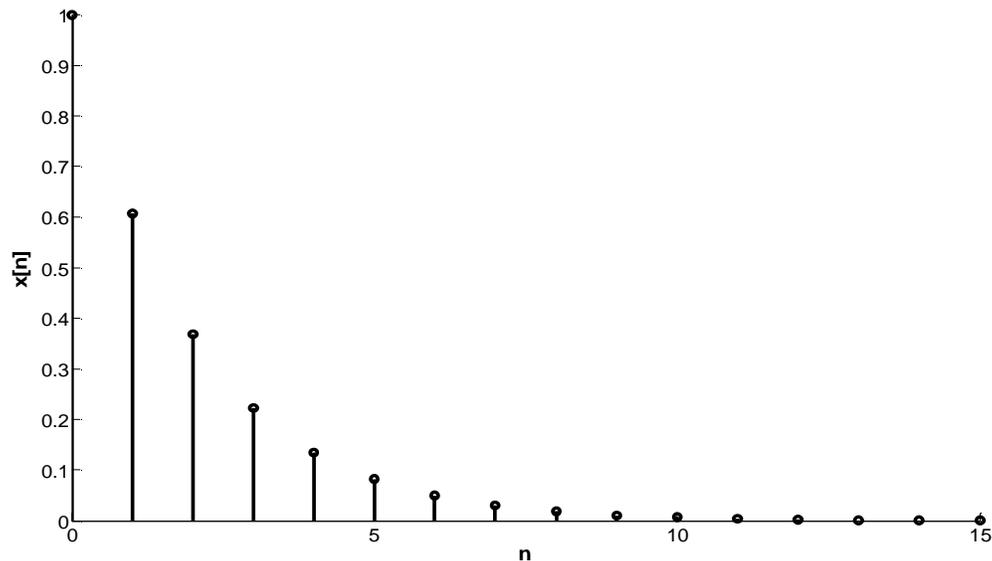


Figura 2.2. Representación gráfica de una señal en tiempo discreto $x[n]$.

Si usamos el índice n como la variable independiente que representa los instantes de tiempo, la señal pasa a ser una función de una variable entera, es decir, de una secuencia de números, por lo tanto podemos representar una señal en tiempo discreto como una secuencia de números reales o complejos (cabe destacar que los valores que puede tomar una señal pueden ser de naturaleza compleja esto es $\mathbf{z=a+ib}$). Para destacar la naturaleza discreta de una señal se denota dicha señal como $\mathbf{x[n]}$ en vez de $\mathbf{x(t)}$.

El valor de una señal, en tiempo continuo o discreto, puede ser continuo o discreto. Si una señal toma todos los valores posibles en un intervalo tanto finito como infinito, se dice que es continua. Por el contrario, si toma valores de un conjunto finito se dice que es discreta. Normalmente estos valores son equidistantes y por tanto pueden expresarse como un múltiplo de la distancia entre dos valores sucesivos. **Una señal en tiempo discreto, que toma valores en un conjunto discreto se denomina señal digital [3].**

Señales Deterministas o Señales Aleatorias.

Una señal *determinista* es aquella en torno a la cual no hay incertidumbre con respecto a su valor en cualquier instante. En consecuencia cualquier señal que pueda ser definida por una forma matemática explícita, un conjunto de datos o una regla bien definida se denomina determinista [3].

En muchas situaciones prácticas existen señales que no se pueden describir con un grado de precisión razonable mediante fórmulas matemáticas explícitas, o cuya descripción es demasiado complicada para ser de utilidad práctica. La falta de tal relación supone que dichas señales evolucionan con el tiempo de una forma impredecible. La base matemática para el análisis de señales *aleatorias* lo constituye la teoría de probabilidad y los procesos estocásticos.

Señales Periódicas y Señales no Periódicas.

Una señal $x(t)$ es periódica si satisface la condición

$$x(t)=x(t + T) \text{ para todo } t \quad (2.1.5)$$

donde T es una constante positiva. Si esta condición se satisface para $T=T_0$, por ejemplo, entonces también se satisface para $T=2T_0, 3T_0, 4T_0\dots$. El valor mas pequeño de T que cumple la condición (2.1.5) se llama *Periodo Fundamental* de $x(t)$. Por consiguiente el periodo fundamental T_0 define la duración de un ciclo completo de $x(t)$. El recíproco del periodo fundamental T_0 se denomina *Frecuencia Fundamental* de la señal periódica $x(t)$; ésta describe con que frecuencia la misma señal periódica $x(t)$ se repite. De este modo se tiene:

$$f = \frac{1}{T_0} \quad (2.1.6)$$

La frecuencia f se mide en Hertz (Hz) o ciclos por segundo. La *Frecuencia Angular*, medida en radianes por segundo, esta definida por

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (2.1.7)$$

puesto que hay 2π radianes en un ciclo completo. Para simplificar la terminología, Ω se denomina a menudo simplemente como frecuencia.

Cualquier señal $x(t)$ para la cual no existe un valor de T que cumpla la condición (2.1.5) recibe el nombre de señal aperiódica o no periódica.

En la Figura 2.3 se muestran ejemplos de una señal periódica senoidal (a) y una señal no periódica (b).

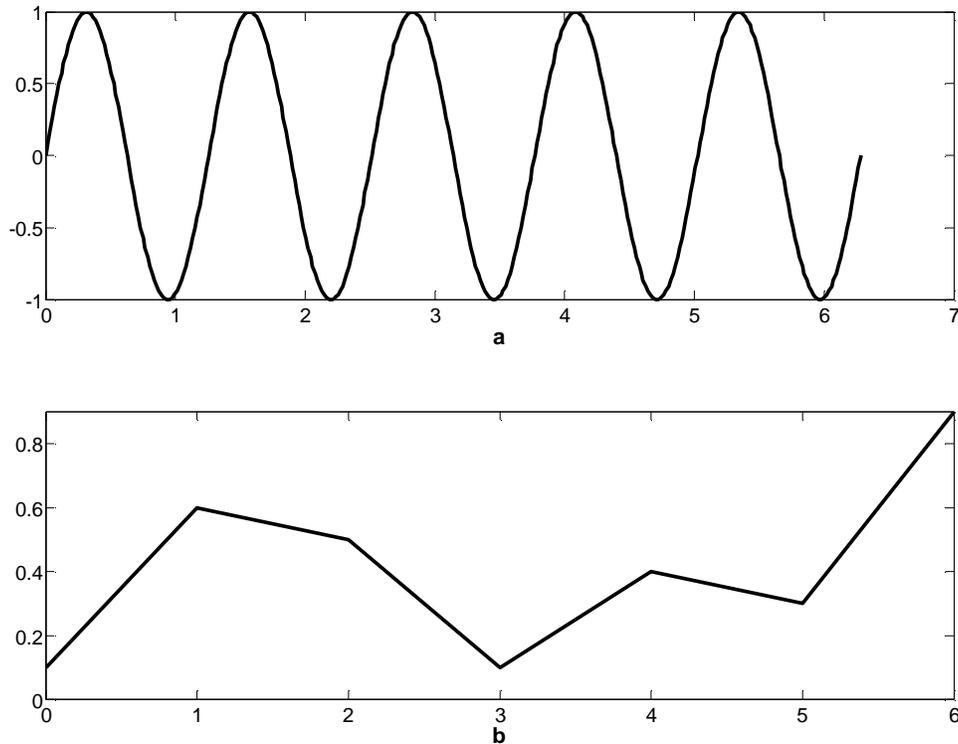


Figura 2.3. Ejemplos de señales (a) señal senoidal periódica (b) señal no periódica.

La clasificación de señales en periódicas y no periódicas presentada hasta ahora se aplica a señales en tiempo continuo. A continuación consideraremos el caso de señales en tiempo discreto. Una señal en tiempo discreto $x[n]$ se dice que es periódica si satisface la condición

$$x[n]=x[n+N] \text{ para todos los enteros } n \quad (2.1.8)$$

donde N es un entero positivo. El valor mas pequeño del entero N para el cual se satisface la condición (2.2.4) recibe el nombre de período fundamental de la señal en tiempo discreto $x[n]$. La frecuencia angular fundamental o, simplemente la frecuencia fundamental de $x[n]$ está definida por:

$$\omega = \frac{2\pi}{N} \quad (2.1.9)$$

la cual se mide en radianes. La diferencia fundamental entre (2.1.5) y (2.1.9) es que la primera se aplica a señales en tiempo continuo cuyo período fundamental T tiene un valor positivo, por otra parte la segunda se aplica a una señal en tiempo discreto cuyo período fundamental N sólo puede suponerse como un valor entero positivo.

2.2 SISTEMAS

Las señales están estrechamente vinculadas con los sistemas. Por ejemplo, las señales de voz de naturaleza biológica se generan al forzar el paso del aire a través de las cuerdas vocales que pueden considerarse como un sistema, el procesamiento de estas señales de voz se basa en el uso de oídos y vías auditivas en el cerebro. Estos sistemas biológicos pueden ser imitados utilizando sistemas electrónicos [3].

Un sistema se define formalmente como una entidad que manipula una o mas señales, para llevar a cabo una función, produciendo de ese modo nuevas señales [3].

En términos matemáticos, un sistema discreto puede describirse como una interconexión de operaciones que transforma una señal de entrada en una señal de salida. Considere que el operador H denota la acción de un sistema. Entonces la aplicación de una señal $x[n]$ a la entrada del sistema produce la señal de salida dada por:

$$y[n] = H\{x[n]\} \quad (2.2.1)$$

donde las señales en tiempo discreto $x[n]$ y $y[n]$ denotan la señales de entrada y salida respectivamente descritas en la Figura 2.4.

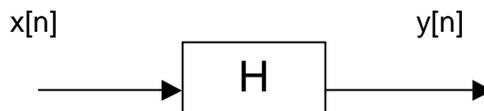


Figura 2.4. Representación en diagrama de bloques del operador H para tiempo discreto.

2.2.2 Propiedades de los Sistemas

Estabilidad

Se dice que un sistema es estable (BIBO por sus siglas en Inglés bounded input bounded output), si para toda entrada acotada origina una salida acotada [3]. Desde la perspectiva de la ingeniería, es importante que un sistema permanezca estable bajo todas las posibles condiciones de operación, sólo en ese caso el sistema garantiza una salida acotada para una entrada acotada. Los sistemas inestables suelen evitarse, a menos que pueda encontrarse algún mecanismo para estabilizarlos.

Memoria

Se dice que un sistema posee memoria (o que es dinámico) si la señal de salida depende de los valores pasados de la señal de entrada [3]. En contraste, se dice que un sistema no tiene memoria (o que es estático) si la señal de salida depende solo del valor presente de su señal de entrada.

Causalidad

Se dice que un sistema es causal si y sólo si el valor de su respuesta al impulso es cero para valores de tiempo negativos [4].

Invertibilidad

Se dice que un sistema es invertible si la entrada del sistema puede recuperarse de la salida del sistema. Es posible diseñar el conjunto de operaciones necesario para recuperar la entrada como un segundo sistema conectado en cascada con el sistema dado, tal que la señal de salida del segundo sistema es igual a la señal de entrada aplicada al primer sistema. Para describir la noción de invertibilidad en una base formal, sea el operador H un sistema en tiempo discreto, con la señal de entrada $x[n]$ produciendo la señal de salida $y[n]$. Considere que la señal de salida $y[n]$ se aplica a un segundo sistema representado por el operador G^{-1} como se ilustra en la Figura 2.5 La señal de salida del segundo sistema está definida por

$$G^{-1}\{y[n]\}=G^{-1}\{H\{x[n]\}\}=G^{-1}H\{x[n]\}=x[n] \quad (2.2.2)$$

donde se ha utilizado el hecho de que dos operadores H y G^{-1} conectados en cascada son equivalentes a un solo operador $H G^{-1}$. Para que la señal de salida sea igual a la entrada original $x[n]$, se requiere que:

$$G^{-1}H=1 \quad (2.2.3)$$

La salida de un sistema descrito por la ecuación (2.2.3) es exactamente igual a la entrada. La ecuación (2.2.3) es la condición que el nuevo operador G^{-1} debe satisfacer en relación con el operador H para que la señal de entrada original $x[n]$ se recupere a partir de $y[n]$. El operador G^{-1} se denomina *Operador Inverso*, y el sistema asociado recibe el nombre de *Sistema Inverso*. Obsérvese, que G^{-1} no es el recíproco de algún operador G ; más bien, el uso del superíndice -1 tiene la intención de señalar “*Inverso*”, en general, el problema de encontrar el inverso de un sistema dado es difícil.

La propiedad de invertibilidad es de particular importancia en el diseño de sistemas de comunicación como se verá más adelante, por ahora baste decir que cuando una señal transmitida se propaga por un canal de comunicación, se distorsiona debido a las características físicas del canal. Un método muy utilizado para compensar esa distorsión es incluir en el receptor un sistema denominado *Igualador* (o *Ecuador* de su traducción del idioma Inglés Equalizer) el cual se conecta en cascada con el canal de manera similar a la descrita en la Figura 2.5. Al diseñar el *Igualador* para que sea el inverso del canal, la señal transmitida se regresa a su forma original, suponiendo condiciones ideales.

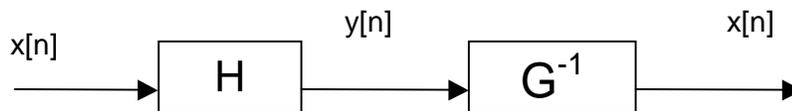


Figura 2.5. Noción de invertibilidad de un sistema. El segundo operador G^{-1} es el inverso del primer operador H . Por tanto la entrada $x[n]$ pasa por el sistema en cascada H y G^{-1} completamente sin cambio.

Invariancia en el Tiempo

Se dice que un sistema es invariante en el tiempo, si un retraso o un adelanto de tiempo de la señal de entrada ocasiona un corrimiento en el tiempo idéntico en la señal de salida. Esto implica que un sistema invariante en el tiempo responde en forma idéntica sin importar cuando se aplica la señal de entrada. Establecido de otro modo, las características de un sistema invariante con el tiempo *no cambian conforme pasa el tiempo*. Si esto no se cumple, se dice que el sistema es variante con el tiempo [3].

Linealidad

Se afirma que un sistema es *Lineal* si satisface el *Principio de Superposición*. Es decir, la respuesta de un sistema lineal a una suma de señales ponderadas a la entrada es igual a la suma de las señales a la salida con la misma ponderación, como si cada una de las señales a la entrada actuase de manera independiente, un sistema que viola el principio de superposición se dice que es no lineal [3], este principio se ilustra en la Figura 2.6.

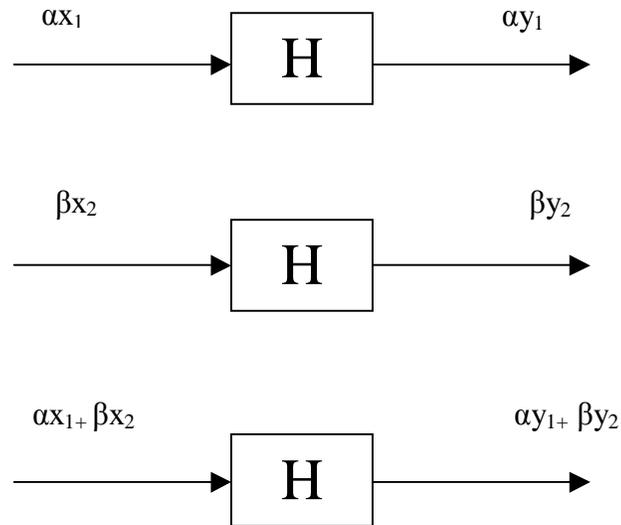


Figura 2.6 Ilustración de un sistema H que cumple el principio de superposición.

2.2.3 Representaciones en el Tiempo para Sistemas LTI

De las cualidades de los sistemas que se mencionaron con anterioridad centraremos nuestra atención en aquellos que se caractericen por la linealidad y la invariancia en el tiempo (LTI por sus siglas en Inglés), esto para establecer los medios que nos permitan obtener la respuesta de un sistema ante cualquier señal a su entrada, esta descripción entrada-salida consiste en una operación o regla matemática que define la relación entre las señales de entrada y de salida del sistema.

Los sistemas LTI quedan caracterizados en el dominio del tiempo por la relación denominada *Respuesta al Impulso Unitario* [3].

Este método para el análisis del comportamiento de un sistema LTI ante una determinada entrada se basa en descomponer dicha señal de entrada en señales elementales. Las señales elementales (funciones impulso unitario) se escogen de

manera que sea fácil determinar la salida del sistema a cada una de ellas, entonces usando la propiedad de linealidad del sistema, se suman las respuestas del sistema a cada una de las señales elementales para obtener la respuesta del sistema a la señal de entrada global.

La operación “*Convolución*” se usa para describir el procedimiento que determina la salida de un sistema a partir de la señal a su entrada y de su respuesta al impulso.

2.2.4 Función Impulso Unitario

La versión en tiempo discreto del impulso unitario, denotada comúnmente por $\delta[n]$ se define como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

en otras palabras, la función impulso unitario es una señal que vale cero, excepto para $n=0$ donde vale uno, como se muestra en la Figura 2.7.

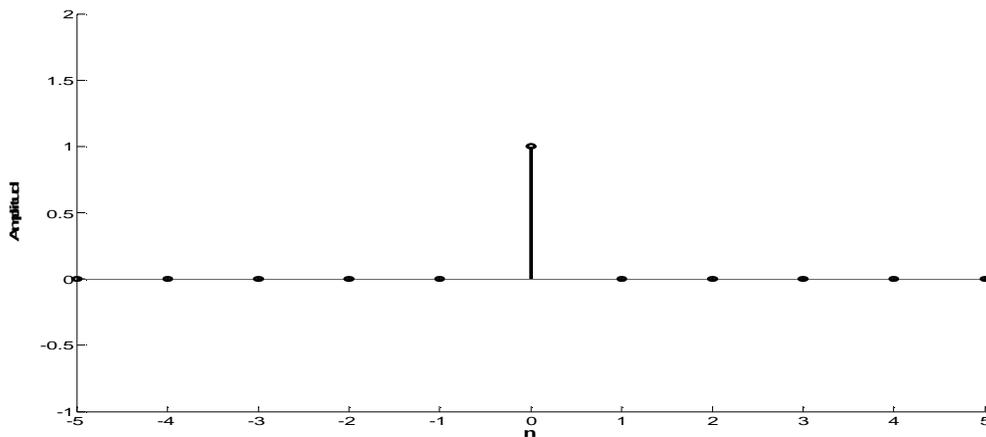


Figura 2.7. Función impulso unitario en tiempo discreto.

La Respuesta al Impulso, es la salida de un sistema LTI debido a la entrada de un impulso aplicado en el tiempo $n=0$. *La Respuesta al Impulso* caracteriza por completo el comportamiento de cualquier sistema LTI. *La Respuesta al Impulso* se determina a menudo a partir del conocimiento de la configuración y dinámica del sistema, o en el caso de un sistema desconocido, puede medirse aplicando un impulso aproximado en la entrada del sistema.

Si la entrada para un sistema lineal se expresa como una superposición ponderada de impulsos recorridos en el tiempo, entonces la salida es una superposición ponderada de la respuesta del sistema a cada impulso recorrido en el tiempo [3]. Si el sistema es invariante en el tiempo, entonces la respuesta al

impulso recorrido en el tiempo es una versión recorrida en el tiempo de la respuesta del sistema a un impulso. Consecuentemente la salida de un sistema LTI está dada por una superposición ponderada de respuestas al impulso recorridas en el tiempo, esta superposición ponderada recibe el nombre de sumatoria de **Convolución**.

2.2.5 Descomposición de una Señal Discreta en Impulsos

Supongamos que tenemos una señal arbitraria $x[n]$ que queremos expresar como una suma de impulsos unitarios, por lo cual nuestras señales elementales serán

$$x_k[n] = \delta[n-k] \quad (2.2.5)$$

donde k representa el retraso del impulso unitario. Para poder manejar una señal arbitraria $x[n]$ que puede tener valores infinitos, el conjunto de impulsos unitarios debe ser también infinito, para contener el número infinito de desplazamientos requeridos [3].

Supongamos ahora que multiplicamos las dos secuencias $x[n]$ y $\delta[n-k]$. Dado que $\delta[n-k]$ es cero excepto en $n=k$, donde vale uno, el resultado de esta multiplicación es otra secuencia que vale cero en todos los puntos excepto en $n=k$ donde vale $x[k]$ por tanto

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k] \quad (2.2.6)$$

en otras palabras, cada multiplicación de la señal $x[n]$ por un impulso unitario desplazado un cierto valor k , extrae el valor $x[k]$ de dicha secuencia en el punto $n=k$ en el que el impulso unitario vale uno.

En consecuencia si repetimos esta multiplicación para todos los desplazamientos posibles, $-\infty < k < \infty$ y sumamos el resultado de todas estas multiplicaciones, obtendremos una señal igual a la secuencia original $x[n]$, es decir

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (2.2.7)$$

donde la parte derecha de la ecuación (2.2.7) es la sumatoria de un número infinito de impulsos unitarios $\delta[n-k]$ que tienen una amplitud $x[k]$. Así la parte derecha de la ecuación (2.2.7) nos proporciona la descomposición de una señal arbitraria $x[n]$ en una suma ponderada de impulsos unitarios desplazados.

2.2.6 Convolución

Sea el operador H el que denota el sistema al cual se aplica la entrada $x[n]$, al usar la ecuación (2.2.7) para representar la entrada $x[n]$ al sistema, se obtiene la salida

$$y[n] = H \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\} \quad (2.2.8)$$

por la propiedad de linealidad se pueden intercambiar el operador del sistema H con la sumatoria y los valores de la señal $x[k]$ para obtener [3]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] H \{ \delta[n-k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n] \quad (2.2.9)$$

definiendo $h_k[n] = H \{ \delta[n-k] \}$ como la respuesta del sistema debida a un impulso recorrido en el tiempo y si el sistema es invariante en el tiempo, entonces un corrimiento en el tiempo en la entrada producirá un corrimiento en el tiempo en la salida. Esto implica que la salida debida a un impulso recorrido en el tiempo es una versión corrida en el tiempo de la salida debida a un impulso; es decir, $h_k[n] = h_0[n-k]$. Sea $h[n] = h_0[n]$ la respuesta al impulso de la H del sistema LTI, la ecuación (2.2.9) se reescribe como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.2.10)$$

Así la salida de un sistema LTI está dada por una suma ponderada de respuestas al impulso recorridas en el tiempo. Esto es una consecuencia directa de expresar la entrada como una suma ponderada de los impulsos recorridos en el tiempo. La suma en la ecuación (2.2.10) se denomina *Sumatoria de Convolución* y se denota por el símbolo (*), es decir:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \quad (2.2.11)$$

Por propiedad de conmutatividad también se puede escribir

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \quad (2.2.11a)$$

2.2.7 Respuesta de un Sistema LTI en Estado Estable a una Señal Senoidal

Las señales de entrada senoidales se emplean muchas veces para caracterizar la respuesta de un sistema. Aquí se examina la relación entre la respuesta al impulso y la respuesta en estado estable de un sistema LTI ante una entrada senoidal compleja. Esta relación se obtiene al utilizar la convolución y una señal de entrada senoidal compleja. Considerando la salida de un sistema en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada senoidal compleja de amplitud unitaria $x[n]=e^{j\omega n}$, dada por

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \end{aligned}$$

se factoriza $e^{j\omega n}$ de la suma para obtener

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \\ &= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \quad (2.2.12)$$

De modo que la salida del sistema es una senoide compleja de la misma frecuencia que la entrada multiplicada por el número complejo $H(e^{j\omega})$. Véase la Figura 2.8. La cantidad $H(e^{j\omega})$ no es una función del tiempo n , sino una función de la frecuencia ω , y se denomina *La Respuesta en Frecuencia* del sistema en tiempo discreto.

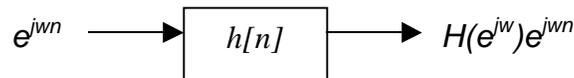


Figura 2.8 Entrada senoidal compleja para un sistema LTI.

De aquí se deduce que el sistema cambia la amplitud de la entrada senoidal en un factor $|H(e^{j\omega})|$ y su fase en un factor $\arg\{H(e^{j\omega})\}$. La respuesta en frecuencia caracteriza la respuesta en estado estable del sistema para entradas senoidales como una función de la frecuencia de la senoide.

2.3 TELECOMUNICACIONES

Existen tres elementos básicos en todo sistema de comunicación específicamente, *El Transmisor*, *El Canal* y *el Receptor* como se muestra en la Figura 2.9

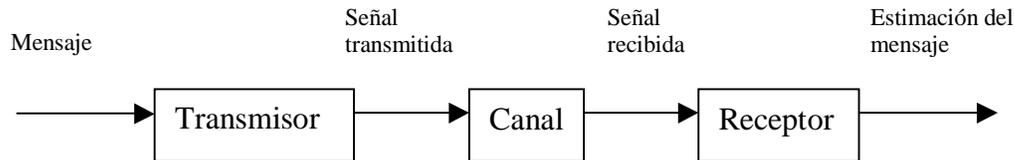


Figura 2.9. Sistema general de un sistema de telecomunicaciones

La finalidad del *Transmisor* es convertir la señal de mensaje producido por una fuente de información en una forma adecuada para la transmisión a través del canal. *El Mensaje* podría ser una señal de voz, una señal de televisión (video) o datos de computadora. *El Canal* es el medio físico que conecta al transmisor y al receptor. Es posible que el canal sea una fibra óptica, un cable coaxial, o un canal de satélite; cada uno de estos tiene su área de aplicación específica.

A medida que la señal transmitida se propaga por el canal, se distorsiona debido a las características físicas del mismo, las señales de ruido e interferencias originadas en otras fuentes externas al sistema, como resultado la señal recibida es una versión alterada de la señal que se transmite. La función de *El Receptor* es operar sobre la señal recibida para reconstruir una forma reconocible de la señal de mensaje original y entregarla al usuario.

Los detalles de las operaciones efectuadas en el transmisor y el receptor dependen del tipo de sistema de comunicación que se está considerando. Este puede ser de tipo analógico o digital.

En este trabajo, se emplea un *Sistema de Comunicación Digital* que se describe a continuación.

2.3.2 Elementos de un sistema de comunicación digital

La Figura 2.10 ilustra el diagrama de bloques de los elementos básicos en un sistema de comunicación digital.

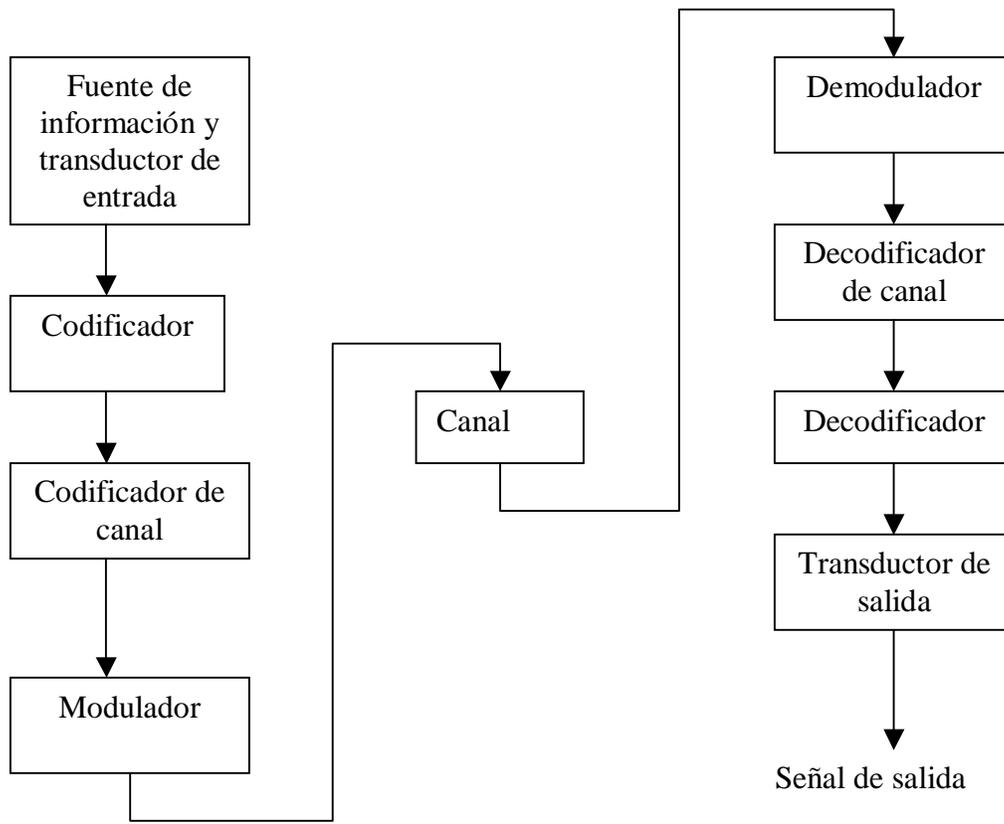


Figura 2.10 Elementos básicos de un sistema de comunicación digital

La información proveniente de *La fuente* puede ser una señal de tipo analógica, como señales de audio o señales de video, o una señal digital, como la salida de una máquina de teletipografía, que es discreta en tiempo y que tiene un número finito de caracteres de salida. En un sistema de comunicación digital, los mensajes producidos por la fuente son convertidos en una secuencia de dígitos binarios. El proceso de convertir eficientemente la salida de una fuente digital o analógica en una secuencia de dígitos binarios se llama *Codificación de Fuente* o *Compresión de Datos*.

La secuencia de dígitos binarios del codificador de fuente, a la cual llamaremos *secuencia de información*, pasa por *El Codificador de Canal*. El propósito del codificador de canal es introducir de manera controlada algo de redundancia en la secuencia de información binaria que puede ser usada en el receptor para superar los efectos del ruido e interferencia inherente en la transmisión de la señal a través del canal. De esta manera, la redundancia agregada sirve para incrementar la fiabilidad de los datos recibidos y mejora la fidelidad de la señal recibida, en efecto, la redundancia en la secuencia de información ayuda al receptor a decodificar la secuencia de información deseada.

Por ejemplo una forma trivial de codificación de la secuencia binaria de información es simplemente repetir cada dígito binario “ m ” veces donde m es algún entero positivo. Una codificación más sofisticada y no tan trivial comprendería tomar k bits de información y mapear cada secuencia de k -bits en una secuencia única de n -bits, llamada *Palabra de Código*. La cantidad de redundancia introducida por la codificación de datos de esta manera es medida por la relación n/k . El recíproco de esta relación k/n , es llamada *La Taza de Código*

La secuencia binaria de la salida del codificador del canal pasa por *El Modulador Digital*, que sirve como interface al canal de comunicación. Debido a que casi todos los canales de comunicación encontrados en la práctica son capaces de transmitir señales eléctricas (formas de onda), el propósito primario del modulador es mapear la secuencia de información binaria en señales o formas de onda. Para trabajar en este punto, supongamos que la secuencia de información codificada es transmitida bit por bit a una tasa uniforme de R bits por segundo (bits/s). El modulador digital simplemente puede mapear el dígito binario 0 en una forma de onda $S_0(t)$ y el dígito binario 1 en una forma de onda $S_1(t)$. De esta manera cada bit proveniente del codificador del canal se transmite separadamente. Esto se llama modulación binaria.

Alternativamente, el modulador puede transmitir “ b ” bits de información codificada a la vez por medio de usar $M=2^b$ distintas formas de onda $S_i(t)$, $i=0,1\dots M-1$, cada forma de onda corresponde a cada una de las 2^b posibles secuencias de b -bits. Esto se llama modulación *M-aria* ($M>2$). Note que cada nueva secuencia de b -bit entra al modulador cada b/R segundos. De aquí que cuando la tasa de bits del canal es fija, la cantidad de tiempo disponible para transmitir una de las M formas de onda correspondiente a una secuencia de b -bits es “ b ” veces el tiempo del periodo en un sistema que usa modulación binaria.

El Canal de comunicación es el medio físico que es usado para enviar la señal del transmisor al receptor. En *Transmisión Inalámbrica*, el canal es el espacio libre. Por otra parte, en la *Transmisión Guiada* como por ejemplo, canales telefónicos, usualmente se emplea una variedad de medios físicos incluyendo alambres de cobre, cables de fibra óptica, cables coaxiales etc. Pero sea cual sea el medio físico que se use para la transmisión de la información, el rasgo característico es que la señal transmitida es corrompida de manera aleatoria por gran variedad de causas: como *Ruido Térmico Aditivo* generado por dispositivos electrónicos, *Ruido* debido a la ignición de automóviles, *Ruido Atmosférico* como el generado por rayos en tormentas eléctricas etc.

En *El Receptor*, *El demodulador* procesa la forma de onda transmitida corrompida por el canal y reduce las formas de onda a secuencias de números que representan estimaciones de los símbolos transmitidos (binarios o M-arios). Esta secuencia de números pasa al *Decodificador de Canal*, el cual reconstruye la información de la secuencia original a partir del conocimiento del código usado por el codificador de canal y de la redundancia contenida en los datos recibidos.

Una medida del buen desempeño del demodulador y del decodificador es la frecuencia en la que ocurren errores en la secuencia decodificada. Más precisamente, la probabilidad promedio de error de bit a la salida del decodificador es una medida del desempeño de la combinación del demodulador y decodificador. En general la probabilidad de error es una función de las características del código, los tipos de forma de onda empleadas para transmitir la información sobre el canal de comunicación, la potencia transmitida, las características del canal (por ejemplo la cantidad de ruido, la naturaleza de la interferencia), y del método de demodulación y decodificación.

Debido a los errores del decodificador de canal y posiblemente por la distorsión introducida por el codificador de fuente y quizá por el decodificador de fuente, la señal a la salida del *Receptor* es una aproximación de la señal original. La diferencia o alguna función de la diferencia entre la señal original y la señal reconstruida es una medida de la distorsión introducida por el sistema de comunicación digital.

2.4 RESUMEN

En este capítulo presentamos lo que es una señal y las clasificaciones que se les han asignado; además, se dio la descripción de los sistemas, sus propiedades y se puso especial énfasis en la característica de invertibilidad por su importancia en las telecomunicaciones. Se mostró la operación matemática denominada “*Convolución*” que nos permite determinar como responde un sistema ante una señal aplicada en su entrada. Por último se describió cómo las señales y los sistemas se aplican en las telecomunicaciones, se describieron los diferentes pasos que intervienen en las comunicaciones digitales, todo esto con el fin de sentar las bases teóricas que sustentan el desarrollo del presente trabajo.

En el siguiente capítulo se aborda la problemática de las comunicaciones digitales que son el tema principal de este trabajo.

3 LA PROBLEMÁTICA DE LA TRANSMISIÓN DIGITAL

En éste capítulo se muestra el proceso para la conversión de una señal analógica en una señal digital y *La Modulación por Codificación de Pulso (PCM)*. Se dan ejemplos de canales de comunicación mas usados, las propiedades requeridas para la transmisión sin distorsión y se presenta un teorema que nos permite determinar la capacidad teórica de los canales para transmitir información. Nos centramos en el canal telefónico, mostramos sus características y algunos de sus usos mas frecuentes, pero antes, se describen los métodos matemáticos que nos permiten calcular el ancho de banda de las señales, esto con el fin de sentar la teoría necesaria para analizar el problema que da origen a este trabajo “**La Interferencia Intersímbolos**”, (**ISI**)

3.1 TEORÍA DE FOURIER

La teoría de *Fourier* representa cualquier señal como una superposición ponderada de senoides complejas con frecuencias relacionadas armónicamente entre si. Si una señal con este tipo de representación se aplica a un sistema lineal, entonces la salida del sistema es una superposición ponderada de la respuesta a cada una de las senoides complejas [3]. Este método describe el comportamiento de la señal y del sistema no en función del tiempo sino en función de la frecuencia de cada senoide compleja.

Dependiendo de las características de las señales a representar, se tienen dos clasificaciones derivadas del uso de la teoría de Fourier. *Las Series de Fourier* representan señales periódicas ya sea en tiempo continuo o discreto, las señales no periódicas tienen representaciones mediante *La Transformada de Fourier* ya sea en tiempo continuo o discreto [3].

En éste trabajo se utilizan señales discretas no periódicas por lo cual se trata solamente la transformada de Fourier en tiempo discreto DTFT (por sus siglas en Inglés).

La Transformada de Fourier para una señal en tiempo discreto $x[n]$ está definida por [3]

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (3.1.1)$$

Se dice que $X(e^{j\omega})$ y $x[n]$ son un par relacionado por la DTFT

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

La transformada $X(e^{j\omega})$ describe a la señal $x[n]$ como una función de la frecuencia ω y se denomina la representación en el dominio de la frecuencia de $x[n]$, véase ecuación (3.1.1). Esta ecuación también llamada “La DTFT” de $x[n]$, convierte la señal en el dominio de tiempo en su representación en el dominio de la frecuencia.

El procedimiento inverso se obtiene a partir de

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.1.2)$$

La ecuación (3.1.2) se llama “DTFT Inversa” ya que convierte la representación en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.

3.1.2 Espectros

En problemas de *Ingeniería Eléctrica*, las señales, el ruido o la combinación de la señal con ruido por lo general se representan como ondas de voltaje o de corriente en función del tiempo. Para evaluar las componentes frecuenciales presentes en dicha onda, se examina *El Espectro de Voltaje o de Corriente* que da el nivel relativo de una frecuencia comparada con otra contenida en dicha señal; este se obtiene con *La transformada de Fourier* de la forma de onda del voltaje o de corriente de la señal que se este considerando [5].

La ecuación (3.1.1) también se llama espectro de $x[n]$ bilateral, por que con esta ecuación se obtienen componentes de frecuencia tanto positivos como negativos [5]. En general como $e^{-j\omega n}$ es complejo, $X(e^{j\omega})$ es una función de frecuencia compleja, por lo cual, la ecuación (3.1.1) se puede reescribir como un número complejo en un sistema de coordenadas polares

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\omega} \quad (3.1.3)$$

Esta forma del espectro se denomina de *magnitud y fase o polar*. Para determinar si ciertas componentes de frecuencia están presentes, se examina *La Magnitud del Espectro* $|X(e^{j\omega})|$.

Por ejemplo en la Figura 3.1 se muestra una señal de voz masculina que dice “*Hola Buenas Tardes*” y la magnitud de su espectro o de su Transformada de Fourier

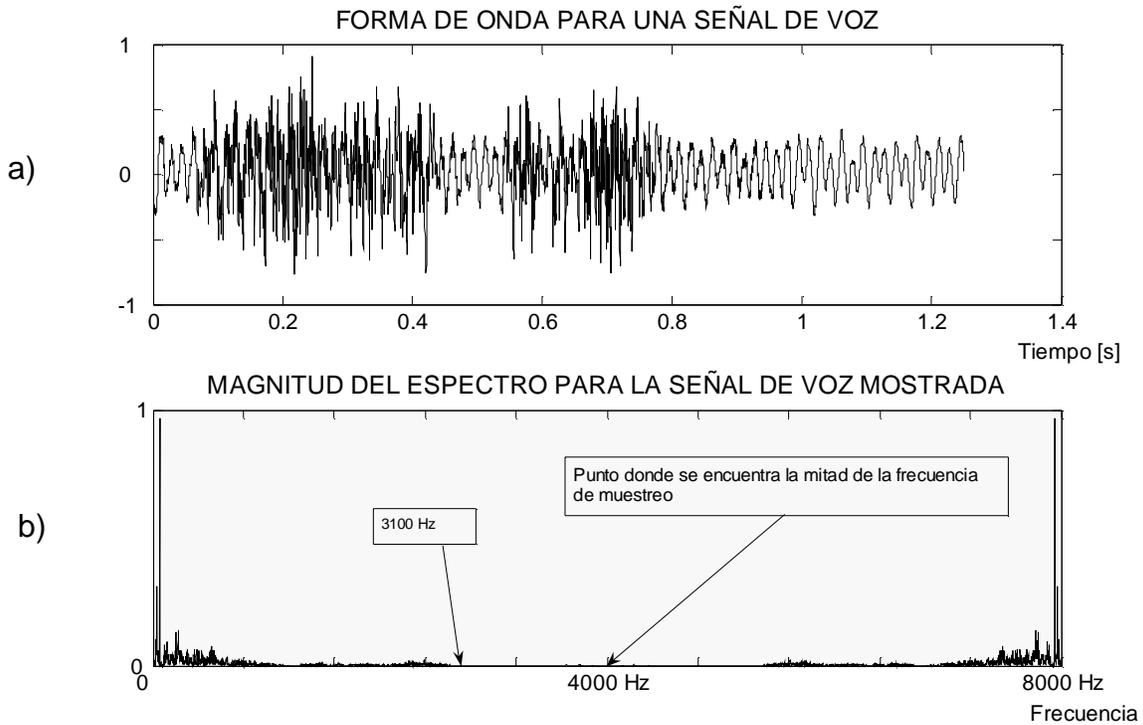


Figura 3.1 a) señal de voz masculina que dice "Hola Buenas Tardes". b) Magnitud de la Transformada de Fourier correspondiente a la señal de voz.

Estos gráficos muestran que las frecuencias contenidas en la señal de voz están limitadas a una banda por debajo de los 3 KHz, lo cual concuerda con estudios realizados donde se ha encontrado que una señal de voz masculina o femenina está limitada a una banda que va de los 300 Hz a los 3100 Hz [3]. Esta señal de voz fue muestreada a una frecuencia $f_s=8000$ Hz que es el estándar actual para el muestreo de señales de voz.

3.1.3 Ancho de Banda de Señales

El ancho de banda de las señales o del ruido es importante desde el punto de vista del diseño de sistemas, debido a que el ancho de banda de un sistema que se este considerando tiene que ser lo suficientemente amplio para alojar correctamente a una señal de interés y rechazar el ruido, ésto para el caso de las telecomunicaciones.

Algunas definiciones para el ancho de banda son [5]:

Sea f_1 y f_2 dos frecuencias que se toman como referencia donde $f_2 > f_1$ entonces

1. El ancho de banda *Absoluto* es $f_2 - f_1$, donde el espectro es cero fuera del intervalo $f_1 < f < f_2$ a lo largo del eje de frecuencia positiva.

2. El ancho de banda de 3 dB (o ancho de banda de potencia media) es $f_2 - f_1$, donde a frecuencias dentro de la banda $f_1 < f < f_2$, el espectro de magnitud, es decir $|X(w)|$, se reduce no menos de $1/\sqrt{2}$ veces el valor máximo de $|X(w)|$, y el valor máximo se encuentra en una frecuencia dentro de la banda.
3. El ancho de banda *nulo a nulo* (o el ancho de banda de cruce por cero) es $f_2 - f_1$ donde f_2 es el primer nulo en la envolvente del espectro de magnitud por encima de f_0 y, en sistemas pasabanda, f_1 es el primer nulo en la envolvente por debajo de f_0 , donde f_0 es la frecuencia en que el espectro de magnitud alcanza su valor máximo. En sistemas de banda base por lo general f_1 es cero.

3.2 CONVERSIÓN ANALÓGICO-DIGITAL

La mayoría de las señales de interés práctico como: señales de voz, señales biológicas, señales sísmicas, señales de radar y sonar, y de distintos tipos de comunicación, como las señales de audio y vídeo, son analógicas. Para procesar señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, transformarlas en una secuencia de números finita. Este procedimiento se denomina *Conversión Analógico-Digital (A/D)* y los dispositivos correspondientes *convertidores A/D (ADC's)*. Conceptualmente, podemos ver la conversión A/D como un proceso en tres pasos [4]. Este proceso se ilustra en la Figura 3.2

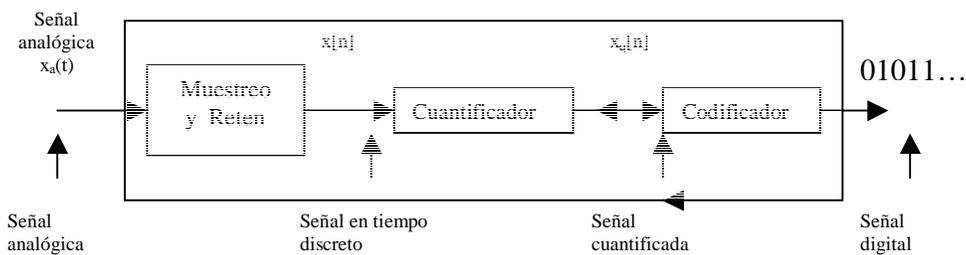


Figura 3.2 Partes de un Conversor Analógico-Digital (A/D) con codificador.

3.2.2 Muestreo de Señales Analógicas

Existen varias formas de muestrear una señal, pero el muestreo periódico o uniforme es el tipo de muestreo más usado en la práctica. Este se describe mediante la relación

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \quad (3.2.1)$$

donde $x[n]$ es la señal en tiempo discreto obtenida de tomar muestras de la señal analógica $x_a(t)$ cada T segundos. Este proceso se ilustra en la Figura 3.3

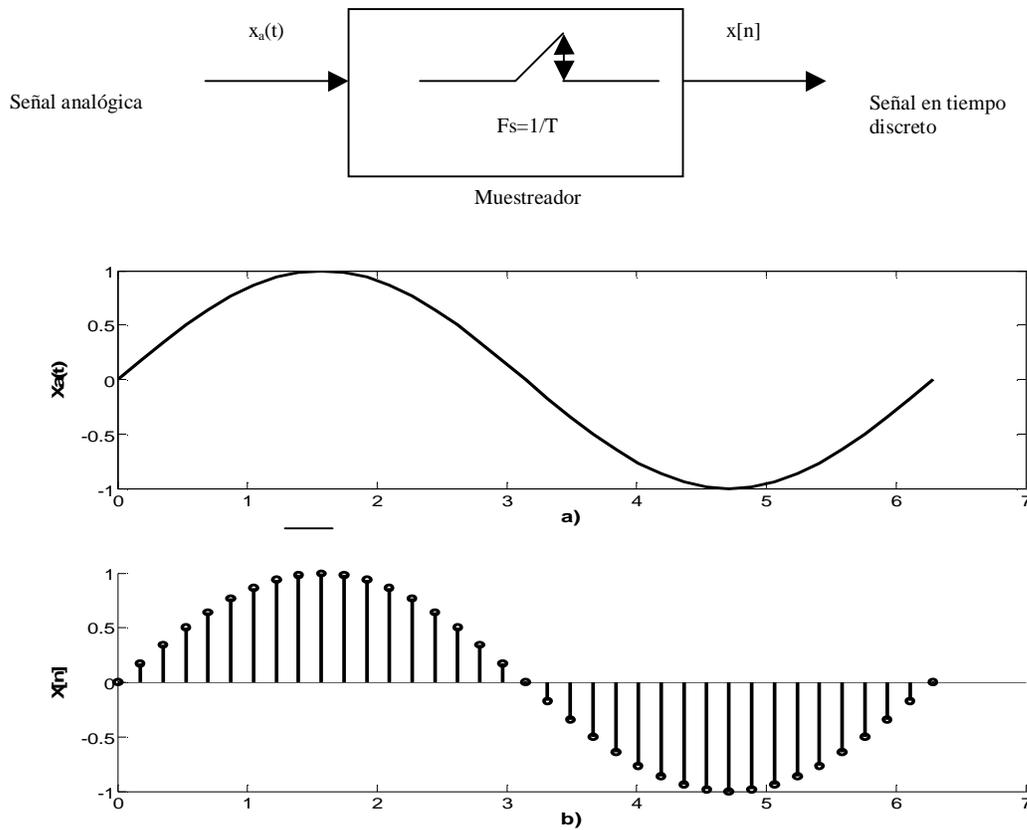


Figura 3.3. Muestreo periódico de una señal analógica, a) señal analógica, b) señal muestreada

El intervalo de tiempo T entre dos muestras sucesivas se denomina *Período de Muestreo* o *Intervalo de Muestreo*, y su recíproco $1/T = f_s$ se llama *Frecuencia de Muestreo* (Hertz) o *Velocidad de Muestreo* (muestras por segundo) [2].

Como se observa a partir de la Figura 3.3 mediante el uso del proceso de muestreo, una señal analógica se convierte en una secuencia correspondiente de muestras que suelen espaciarse uniformemente en el tiempo. Sin duda, para que un procedimiento de este tipo tenga utilidad práctica, resulta necesario queelijamos adecuadamente la frecuencia de muestreo, de manera que la secuencia de muestras defina en forma única la señal analógica original. Tomando este punto como base a continuación se define el teorema del muestreo:

Teorema de muestreo

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$ es $F_{max}=B$ y la señal se muestrea a una velocidad $f_s > 2F_{max} = 2B$, entonces $x_a(t)$ se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras [4].

La frecuencia de muestreo de $2B$ muestras por segundo, para un ancho de banda de señal de B Hertz, se denomina *Frecuencia de Nyquist*, su recíproco $1/2B$ (medido en segundos) se denomina el *Intervalo de Nyquist*.

Cuando se muestrea una señal sin aplicar una frecuencia de muestreo de al menos el doble de la máxima componente frecuencial de la señal, es decir $2B$, se dice que la señal es submuestreada. Las muestras obtenidas de dicho proceso no definen de forma única a la señal de interés si no que esas mismas muestras pueden corresponder a varias señales de diferentes frecuencias. A este efecto se le denomina "**Aliasing**" o traslape, esto es, las muestras de la señal de interés corresponden también a señales de menor frecuencia muestreadas a esa misma velocidad denominadas "*Alias*" de la señal original [4] como se muestra en la Figura 3.4

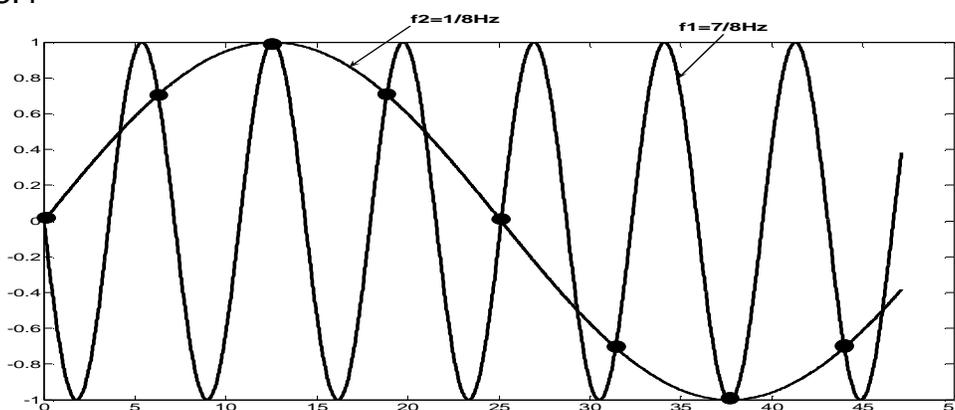


Figura 3.4. Ejemplo de traslape o Aliasing para dos señales senoidales $F_1 = 7/8 \text{ Hz}$ y $F_2 = 1/8 \text{ Hz}$ producen muestras idénticas cuando se usa una velocidad de muestreo de $f_s = 1 \text{ Hz}$, estas muestras se indican con 9 puntos de las dos senoides.

Lo anteriormente expuesto, nos indica que tenemos que seleccionar una velocidad para muestrear una señal de al menos el doble de su máxima componente frecuencial, como lo establece el teorema de muestreo.

Las señales de voz en general quedan delimitadas a una banda que no supera los 3100 Hz (véase Figura 3.1) por tanto, la velocidad de muestreo aplicando el teorema de muestreo resulta en 6200 Hz que teóricamente daría buenos resultados; actualmente el estándar de velocidad de muestreo para señales de voz es $f_s = 8000 \text{ Hz}$, el cual se aplica en este trabajo, el incremento en la velocidad de muestreo facilita la reconstrucción de la señal en el receptor y nos asegura que la distorsión por *Aliasing* sea despreciable.

3.2.3 Muestreo y Mantenimiento (o Retención)

En la práctica, el muestreo de una señal analógica se realiza por un circuito de muestreo y mantenimiento (S/H: "Sample and Hold"). Después, la señal muestreada se cuantifica y se convierte a la forma digital. Normalmente el S/H se integra en el convertidor A/D.

El S/H es un circuito analógico que sigue a la señal de entrada analógica durante el modo de muestreo y después el modo de retención mantiene fijo el valor instantáneo de la señal en el momento en el que el sistema se conmuta del modo de muestreo al modo de mantenimiento. La Figura 3.5 muestra la versión muestreada y mantenida para una señal analógica $x(t)$.

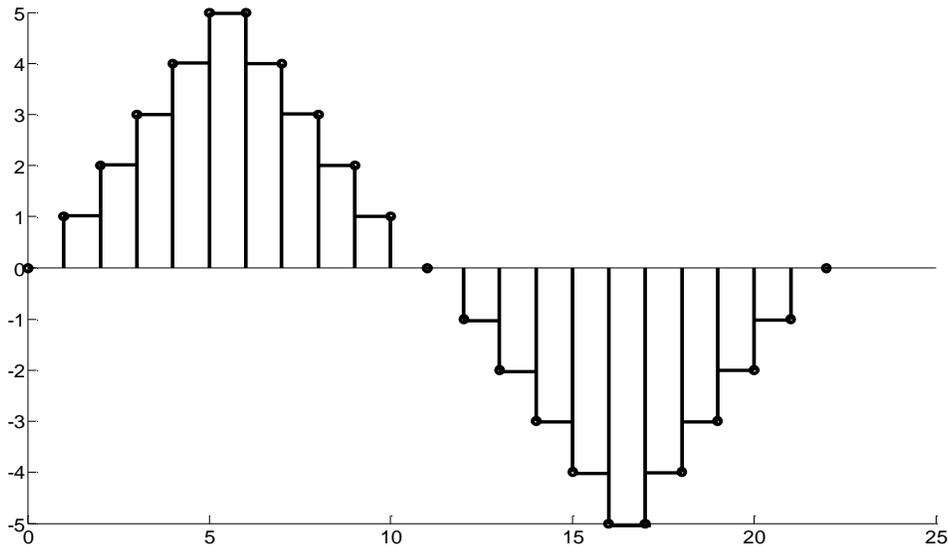


Figura 3.5 Señal resultante de efectuar el proceso de muestreo y mantenimiento a una señal $x(t)$

El objetivo del S/H es muestrear continuamente la señal de entrada y después mantener el valor constante, el tiempo que le lleva al convertidor A/D obtener su representación digital. El uso de un S/H permite al convertidor A/D operar más lentamente comparado con el tiempo real que lleva adquirir la muestra.

Consecuentemente, el S/H es crucial en la conversión digital de alta resolución (12 bits por muestra o más) de señales que tienen anchos de banda grandes (es decir, que cambian muy rápidamente).

Un S/H no introduce distorsión en el proceso de conversión y se modela con precisión mediante un muestreador ideal. Sin embargo, en equipos prácticos ocurren degradaciones relacionadas con el tiempo, tales como errores en la periodicidad del proceso de muestreo, variaciones no lineales en la duración de la apertura del muestreo y cambios en el voltaje mantenido durante la conversión.

3.2.4 Proceso de Cuantización

Una señal continua, tal como la voz, tiene un intervalo continuo de amplitudes y por tanto, sus muestras tienen un intervalo continuo de amplitud. En este intervalo,

encontramos un número infinito de niveles de amplitud. De hecho, para efectos prácticos en telecomunicaciones no es necesario transmitir las amplitudes exactas de las muestras, los sentidos humanos como el oído o el ojo, pueden detectar únicamente diferencias de intensidad finitas, lo cual quiere decir que la señal continua original puede aproximarse mediante una señal reconstruida a partir de amplitudes discretas elegidas de un conjunto disponible sobre una base de error mínimo. Si asignamos con claridad los niveles de amplitud discretos con un espaciamiento bastante próximo, es posible lograr que la señal aproximada prácticamente no se distinga de la señal continua original. Esto se logra mediante el proceso denominado cuantización.

Cuantización, es la conversión de una señal en tiempo discreto con valores continuos a una señal en tiempo discreto con valores discretos (señal digital). El valor de cada muestra de la señal se representa mediante un valor seleccionado de un conjunto finito de valores posibles. La diferencia entre la muestra sin cuantificar $x[n]$ y la salida cuantificada $x_q[n]$ se denomina error de cuantificación esto es: $e_q = x[nT] - x_q[nT]$.

Los valores permitidos en la señal digital se denominan niveles de cuantificación, mientras que la distancia Δ entre dos niveles de cuantificación sucesivos se denomina paso de cuantificación o resolución. El cuantificador asigna a cada muestra de $x[n]$ el nivel de cuantificación más cercano. Este tipo de cuantización es del tipo uniforme por que los niveles de representación están uniformemente espaciados.

El error de cuantificación puede ser por truncamiento o por redondeo [4]. El error por redondeo se encuentra en el intervalo $[-\Delta/2 \text{ a } \Delta/2]$

$$-\frac{\Delta}{2} \leq e_q[n] \leq \frac{\Delta}{2} \quad (3.2.2)$$

En otras palabras, el error de cuantificación instantáneo no puede superar la mitad del valor del paso de cuantificación [4].

Si x_{min} y x_{max} representan los valores máximo y mínimo de $x[n]$ y L es el número de niveles de cuantificación, entonces:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1} \quad (3.2.3)$$

Definimos el intervalo dinámico de la señal como $x_{max} - x_{min}$. Si el intervalo dinámico está prefijado, el aumento del número de niveles conlleva a la disminución del paso de cuantificación. Por tanto, el error de cuantificación decrece y aumenta la precisión del cuantificador.

3.3. MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE PULSOS

Para explotar las ventajas del muestreo y la cuantización con el fin de lograr que la señal transmitida sea más robusta con respecto al ruido, la interferencia y otros efectos del canal, requerimos un método de codificación que traslade el conjunto discreto de valores de muestreo a una forma más apropiada de señal. Cualquier forma que represente cada uno de los valores discretos de este conjunto como un arreglo particular de valores discretos recibe el nombre de código. Cada uno de los valores discretos en un código se denomina elemento de código o símbolo. Un arreglo particular de símbolos utilizado en un código para representar un valor único del conjunto discreto recibe el nombre de palabra de código.

La modulación por codificación de pulso (PCM, por sus siglas en Inglés pulse code modulation) es el resultado de la conversión analógica a digital de la información contenida en las muestras de una señal analógica donde dicha información se representa por medio de palabras digitales [5].

En un *código binario*, por ejemplo, cada símbolo puede tener dos valores o tipos distintos, como la presencia o ausencia de un pulso. Los símbolos en un código binario suelen denotarse como *0* y *1*. Existen otros códigos con tres o más símbolos de hecho cualquier persona puede inventar su propio código con el número de elementos que quiera, pero la ventaja sobre los efectos del ruido en un medio de transmisión se obtiene utilizando un código binario, debido a que un símbolo binario soporta un nivel relativamente alto de ruido y es fácil de regenerar [5].

Suponga que en un código binario cada palabra del código consiste en R bits tal que R denota el número de bits por muestra. Entonces, utilizando un código de este tipo, es posible representar un total de 2^R números distintos. Por ejemplo en nuestro caso se emplean 65536 niveles los cuales son representados mediante palabras de código de 16 bits. Existen varias maneras de establecer una correspondencia uno a uno entre niveles de representación y palabras de código. El método aquí empleado se denomina true-magnitude form [10], el cual consiste en expresar el número ordinal del nivel de representación como un número binario, donde el signo de dicho número se denota con un **1** para los números negativos en el bit más significativo (MSB el bit 16 de derecha a izquierda) de la palabra de código, y **0** si es positivo. En la tabla 3.1 se muestran ejemplos de algunas muestras codificadas de nuestra señal *mensaje*.

Muestra	Valor de muestra cuantificada	Palabra de código PCM (True-Magnitude Form)
61	-757	1000001011110101
62	-249	1000000011111001
63	-165	1000000010100101
64	237	0000000011101101
65	303	0000000100101111
66	430	0000000110101110

Tabla 3.1. Representación de muestras cuantificadas en palabras PCM de 16 bits para este trabajo.

La modulación PCM tiene una gran aceptación por las siguientes ventajas:

- Se puede usar circuitería digital relativamente barata para la construcción de sistemas PCM.
- Las señales PCM obtenidas de fuentes analógicas (audio, video etc.) se pueden *multiplexar* con señales de datos (por ejemplo, las señales de computadoras digitales) y transmitir a través de un sistema de comunicación digital de alta velocidad. Este *multiplexaje* se denomina *multicanalización* por división de tiempo.
- En los sistemas de telefonía digital de larga distancia que requieren repetidores, se puede generar un código PCM sin distorsión a la salida de cada repetidor, donde la entrada es un código PCM distorsionado. Aunque, el ruido a la entrada puede provocar errores de bits en la señal de salida regenerada.
- El desempeño con respecto al ruido de un sistema digital es superior al de un sistema analógico. Además, la probabilidad de error a la salida del sistema se reduce con el uso de técnicas de codificación apropiadas.

3.3.2 Códigos de línea

Teniendo la señal codificada, en palabras binarias, es necesario encontrar una representación adecuada para la transmisión de la señal a través del canal de comunicación. Esta representación, denominada *código de línea* [5], es una representación eléctrica para una secuencia de datos binarios [2]. La Figura 3.5 presenta las formas de onda de cinco importantes códigos de línea para la secuencia de datos *01101001*.

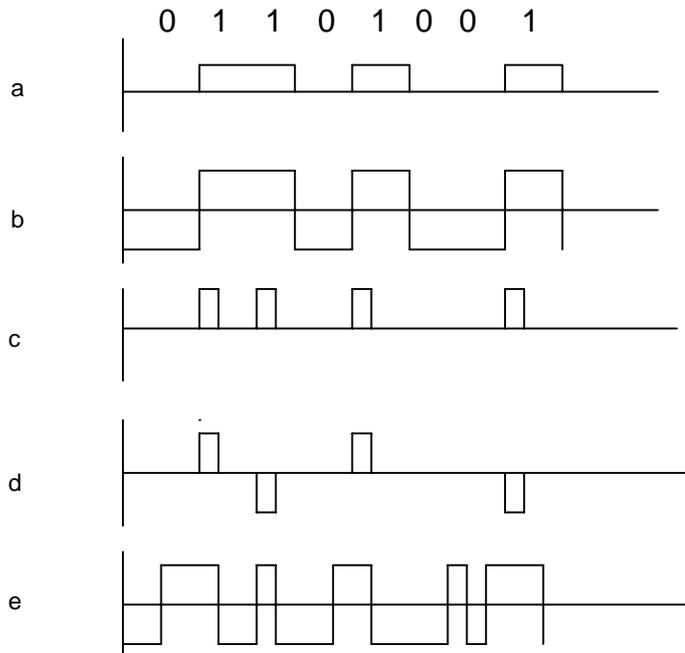


Figura 3.5. Códigos de línea para la representación eléctrica de datos binarios.

Transmisión de señales unipolares sin retorno a cero

En este código el símbolo *1* se representa transmitiendo un pulso de amplitud positiva para la duración del símbolo y el símbolo *0* se representa al desactivar el pulso como en la Figura 3.5a, (este código de línea es el usado en este trabajo).

Transmisión de señales polares sin retorno a cero

En este código los símbolos *1* y *0* se representan al transmitir pulsos con amplitud positiva y negativa respectivamente, como se indica en la Figura 3.5b

Transmisión de señales unipolares con retorno a cero

En este código el símbolo *1* se representa mediante un pulso rectangular de amplitud positiva y ancho de medio símbolo, y el símbolo *0* se representa con la ausencia de pulso, como se muestra en la Figura 3.5c

Transmisión de señales bipolares con retorno a cero

Este código de línea recurre a tres niveles de amplitud, como se indica en la Figura 3.5d, de modo específico, se utilizan pulsos positivos y negativos de igual amplitud de modo alternativo con el símbolo *1* teniendo cada pulso la mitad del ancho del símbolo; nunca se usa un pulso para el símbolo *0*.

Fase dividida (código Manchester)

En este método como se ilustra en la Figura 3.5e, el símbolo 1 se representa mediante un pulso positivo seguido por un pulso negativo de igual amplitud, con ambos pulsos con ancho de la mitad del símbolo. Para el símbolo 0 se invierten las polaridades de estos dos pulsos.

3.3.3 Ancho de banda de PCM

Un punto muy importante en las telecomunicaciones es el ancho de banda de la señal a transmitir; de ello depende si se puede o no enviar a través del canal de comunicación disponible; en este apartado se presenta de manera breve el cálculo del ancho de banda de una señal PCM.

El primer punto a considerar es que una señal PCM no es una función lineal de su señal analógica, por consiguiente, el espectro de la señal PCM no está directamente relacionado con el espectro de la señal analógica [5].

El ancho de banda de las señales PCM depende de la tasa o razón de bits, de la forma del pulso y del código de línea empleado [5].

La tasa de bits se define como

$$R = nF_s \quad (3.3.1)$$

donde n es el número de bits en la palabra PCM y F_s es la tasa de muestreo. Si no existe aliasing se requiere que $F_s \geq 2B$, donde B es el ancho de banda de la señal analógica (que se va a convertir en señal PCM).

Una forma de onda que representa una señal binaria se puede describir con una serie ortogonal de N dimensiones:

$$w(t) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(t), \dots, 0 < t < T_0 \quad (3.3.2)$$

donde w_k representa los datos digitales y $\varphi_k(t)$, $k=1,2,\dots,N$, son N funciones ortogonales que dan forma a la onda, estas funciones ortogonales pueden ser pulsos rectangulares o pulsos del tipo $\text{sen}(x)/x$. N es el número de dimensiones requerido para describir la forma de onda (número de bits en la palabra). La forma de onda $w(t)$ dada por la expresión (3.3.2) representa una palabra PCM o cualquier mensaje de la fuente digital de mensajes M , donde a cada mensaje se le asigna un conjunto único de datos digitales $\{w_k\}$, $k=1,2,\dots,N$ para representar dicho mensaje. Cada uno de los mensajes posibles se envía en un intervalo de tiempo de T_0 segundos, por lo cual el voltaje o forma de onda de corriente que representa

el mensaje descrito por la ecuación (3.3.2) tendría un intervalo de tiempo de T_0 segundos.

El ancho de banda de la señal PCM está limitado por:

$$B_{PCM} \geq (1/2)R = (1/2)nFs \quad (3.3.3)$$

donde la igualdad se obtiene cuando se utiliza un pulso del tipo $(\text{sen } x)/x$ que es el pulso con el menor ancho de banda [5] para generar la señal PCM .

Por ejemplo, en este trabajo se utiliza un pulso rectangular con codificación de línea unipolar sin retorno a cero, la densidad espectral de potencia viene dada por un método estocástico [5], debido a que nos permite calcular la densidad espectral de una secuencia de datos aleatorios y no la de una secuencia de datos particular (lo que en la práctica resulta necesario).

Conforme a lo mencionado anteriormente, una señal digital (o código de línea) puede estar representada por:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_s) \quad (3.3.4)$$

donde $f(t)$ es la forma del pulso del símbolo, y T_s es la duración de un símbolo. En el caso de señalización binaria, $T_s = T_b$ donde T_b es el tiempo requerido para enviar un bit. Para el código de línea unipolar sin retorno a cero utilizando pulsos rectangulares se tiene:

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right); \quad (3.3.5)$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= +A \quad \text{para un 1 binario} \\ a_n &= 0 \quad \text{para un 0 binario} \end{aligned}$$

si utilizamos la expresión para la densidad espectral de potencia de una señal digital [5]

$$P_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi k f T_s} \quad (3.3.6a)$$

donde $F(f)$ es la transformada de Fourier de la forma del pulso, $f(t)$ y $R(k)$ es la autocorrelación de los datos, la cual viene dada por:

$$R(k) = \sum_{i=1}^I (a_n a_{n+k})_i P_i \quad (3.3.6b)$$

donde a_n y a_{n+k} son los niveles de voltaje de los pulsos de los datos en las posiciones del símbolo n -ésimo y $n+k$ -ésimo, respectivamente, y P_i es la probabilidad de tener el producto i -ésimo $a_n a_{n+k}$. Obsérvese que las expresiones anteriores señalan que el espectro de la señal digital depende de dos cosas, el tipo del pulso y de las propiedades estadísticas de los datos.

Con las expresiones anteriores que corresponden a la técnica estocástica [5] se obtiene la densidad espectral de potencia para la señalización unipolar sin retorno a cero donde los niveles posibles para las letras a son $+A$ y 0 V.

El espectro de potencia viene dado por:

$$P_{unipolarNRZ}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left(\frac{\text{sen} \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{T_b} \delta(f) \right] \quad (3.3.7)$$

donde el primer cruce por cero (véase Figura 3.6) ocurre en:

$$B_{PCM} = R = nFs \quad (\text{primer cruce por cero}) \quad (3.3.8)$$

La tabla 3.2 presenta una tabulación de la ecuación (3.3.8) en el caso de una tasa de muestreo mínima $fs=2B$, obteniéndose un ancho de banda con un límite inferior dado por:

$$B_{PCM} \geq nB \quad (3.3.9)$$

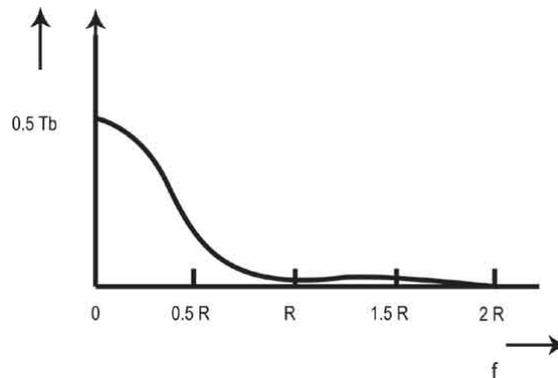


Figura 3.6. Densidad espectral de potencia de código de línea Unipolar sin retorno a cero. (T_b corresponde al periodo de un solo símbolo)

Número de niveles del cuantizador utilizados	Longitud de la palabra PCM, n bits	Ancho de banda de la señal PCM (primer cruce por cero)	S/N pico de salida dB	S/N salida dB
2	1	2B	10.8	6.0
4	2	4B	16.8	12.0
8	3	6B	22.8	18.1
16	4	8B	28.9	24.1
32	5	10B	34.9	30.1
64	6	12B	40.9	36.1
128	7	14B	46.9	42.1
256	8	16B	52.9	48.2
512	9	18B	59.0	54.2
1024	10	20B	65.0	60.2
2048	11	22B	71.0	66.2
4096	12	24B	77.0	72.2
8192	13	26B	83.0	78.3
16384	14	28B	89.1	84.3
32768	15	30B	95.1	90.3
65536	16	32B	101.1	96.3

Tabla 3.2. Rendimiento de un sistema PCM con cuantización uniforme. Las dos últimas columnas se refieren a las relaciones de ruido de cuantización a potencia de señal analógica recuperada (dB). B es el ancho de banda de la señal analógica empleada [5].

donde $F_s \geq 2B$ y B es el ancho de banda de la señal analógica correspondiente. De este modo, con valores razonables de n , el ancho de banda de la señal PCM será significativamente más grande que el ancho de banda de la señal analógica correspondiente que representa. Por ejemplo, usando una palabra con tres bits es decir $n=3$, el ancho de banda de la señal PCM será por lo menos tres veces mas ancho que el de la señal analógica correspondiente [5].

Para nuestro trabajo, la codificación de la señal de voz en formato PCM tiene los siguientes parámetros: $F_s = 8000\text{Hz}$, $n=16$, con un pulso del tipo rectangular y un código de línea unipolar sin retorno a cero; Por tanto el ancho de banda tendría un limite inferior de por lo menos $16B$ que sería igual a $16 \cdot 4000 = 64000\text{Hz}$, caso que se presenta cuando se usa un pulso del tipo $\text{sen}(x)/x$, y cuando se usa un pulso rectangular, el primer cruce por cero ocurre en $R=n \cdot F_s$ es decir $16 \cdot 8000 = 128000\text{Hz}$.

Este valor indica un punto muy importante, **necesitamos un canal de transmisión con un ancho de banda de 128000Hz** al menos, para poder transmitir sin problemas nuestra señal PCM.

Este resultado muestra que el ancho de banda de la señal PCM es mucho mayor que el ancho de banda de su contraparte analógica. Por ejemplo, la señal de voz analógica tiene un ancho de banda menor a 3100Hz y su contraparte PCM requiere de 128000Hz , es decir 32 veces el ancho de banda de la señal original.

3.4 CANALES DE COMUNICACIÓN

La transmisión de señales en un sistema de telecomunicaciones se logra por medio de un canal de comunicación véase Figura 2.10. Éste es el medio físico entre el transmisor y el receptor. Dependiendo del modo de transmisión que se utilice, se distinguen dos grupos básicos de canales de comunicación [1]: los que se basan en la “*Propagación Guiada*” y los que se fundamentan en “*Propagación Libre*”.

En el primer grupo las ondas electromagnéticas se transmiten a través de una línea o dispositivo físico como por ejemplo, canales telefónicos, cables coaxiales y fibras ópticas. El segundo grupo, la transmisión se realiza por medio del espacio libre. Las características y calidad de la transmisión están determinadas tanto por el tipo de señal como por las características del medio. En el caso de los medios guiados, el medio, en sí mismo, es lo que impone las limitaciones a la transmisión. En los medios no guiados, las características de la transmisión están determinadas por el ancho de banda de la señal emitida y por la antena más que por el propio medio.

En el diseño de sistemas de transmisión es deseable que tanto la distancia como la velocidad de transmisión tengan los mayores valores posibles, existe una serie de factores relacionados con los medios de transmisión y con la señal que determinan estos dos factores.

3.4.2 Condiciones para la Transmisión sin Distorsión

Consideremos un sistema LTI en tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$; De manera equivalente, el sistema puede describirse en términos de su respuesta en frecuencia $H(w)$, definida como la transformada de Fourier de $h[n]$. Suponga que la señal $x[n]$ con transformada de Fourier $X(w)$ se aplica en la entrada del sistema y que la señal $y[n]$ con transformada de Fourier $Y(w)$ denota la salida del sistema. Lo que deseamos conocer, son las condiciones para la transmisión sin distorsión a través del sistema, por “*Transmisión sin Distorsión*” entendemos que la señal de salida del sistema es una réplica exacta de la señal de entrada, excepto por dos modificaciones menores [3]:

1. Un posible escalamiento de amplitud.
2. Un retardo de tiempo.

Es decir, una señal $x[n]$ se transmite a través del sistema sin distorsión, si la señal de salida $y[n]$ se define por:

$$y[n] = Kx[n-n_0] \quad (3.4.1)$$

donde la constante K toma en cuenta un cambio en la amplitud y la constante n_0 toma en cuenta el retardo de la transmisión.

Al aplicar la transformada de Fourier en la ecuación (3.4.1) y utilizar su propiedad de corrimiento en el tiempo, obtenemos

$$Y(w) = KX(w)e^{-wn_0} \quad (3.4.2)$$

La respuesta en frecuencia de un sistema sin distorsión es:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = Ke^{-wn_0} \quad (3.4.3)$$

y la respuesta al impulso del sistema está dada por

$$h(t) = K\delta[n-n_0] \quad (3.4.4)$$

Las ecuaciones (3.4.3) y (3.4.4) describen las condiciones en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia respectivamente, que tiene que satisfacer un sistema LTI para la transmisión sin distorsión. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la ecuación (3.4.3) es la más reveladora de las dos, esta ecuación indica que para lograr la transmisión sin distorsión de una señal con algún contenido finito de frecuencias a través de un sistema LTI en tiempo discreto, la respuesta en frecuencia debe cumplir dos condiciones (véase Figura 3.7)

1. La respuesta en magnitud $|H(w)|$ es constante para todas las frecuencias de interés, según indica

$$|H(w)|=K \quad (3.4.5)$$

2. Para las mismas frecuencias de interés, la respuesta en fase $\arg\{H(w)\}$ es lineal

$$\arg\{H(w)\}=-wn_0 \quad (3.4.6)$$

donde n_0 corresponde a un retraso del sistema.

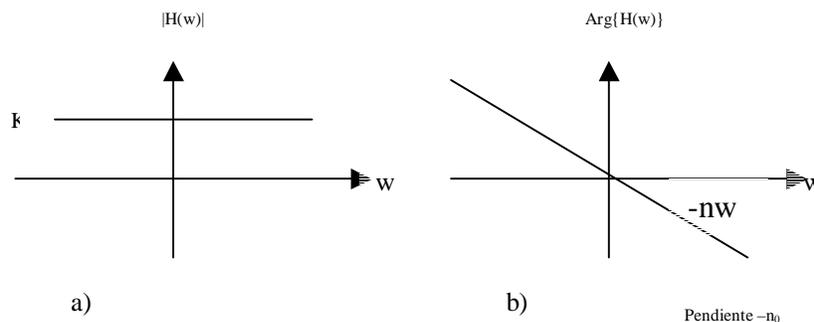


Figura 3.7 Respuesta en frecuencia para transmisión sin distorsión a través de un sistema LTI a) Respuesta en magnitud b) Respuesta en fase.

3.4.3 Distorsión Lineal

En la práctica, las condiciones para transmisión sin distorsión descritas en la sección anterior se consideran ideales. En la realidad, siempre se presenta distorsión en la señal de salida de un sistema LTI físico, debido a desviaciones en la respuesta en frecuencia del sistema con respecto a las condiciones ideales descritas en las ecuaciones (3.4.5) y (3.4.6). En particular podemos distinguir dos componentes de distorsión producida por la transmisión de una señal a través de un sistema LTI la cual se denomina “*Distorsión Lineal*” [3]:

1. *Distorsión de amplitud*. Cuando la respuesta en magnitud del sistema no es constante dentro de la banda de interés, las componentes de frecuencia de la señal de entrada se transmiten a través del sistema con diferente ganancia o atenuación. Este efecto se conoce como distorsión de amplitud. La forma más común de distorsión de amplitud es el exceso de la ganancia o de la atenuación de uno o ambos extremos de la banda de frecuencia de interés.
2. *Distorsión de fase*. La segunda forma de distorsión lineal surge cuando la respuesta en fase del sistema no es lineal con la frecuencia dentro de la banda de frecuencia de interés. Si la señal de entrada se divide en sus componentes, cada una sufrirá un retardo diferente al pasar a través del sistema, resultando en que la señal de salida es una versión distorsionada de la señal de entrada. Esta forma de distorsión lineal recibe el nombre de distorsión de retardo o de fase.

Un sistema LTI que experimenta distorsión lineal se dice que es “*Dispersivo*”, en el sentido de que las componentes de frecuencia de la señal de entrada adquieren características de fase y amplitud distintas a las de la señal de entrada original después de la transmisión a través del sistema. El canal telefónico es un ejemplo de un sistema dispersivo debido a que su respuesta en magnitud no es constante y su respuesta en fase no es lineal [2].

3.4.4 Teorema de la Capacidad de Información de Shannon

El objetivo de un diseñador de sistemas de comunicación es configurar sistemas que transporten señales de una fuente de interés a través de un canal ruidoso hasta un usuario en el otro extremo del canal de la siguiente manera [1]:

La entrega al receptor de la señal debe ser tanto eficiente como confiable, con apego a ciertas restricciones de diseño: potencia de transmisión permisible, ancho de banda del canal disponible y costo viable de construcción del sistema.

En el caso de un sistema de comunicación digital, la confiabilidad se expresa comúnmente en términos de la tasa de error de bits (BER) o probabilidad de error de bit medida en la salida del receptor. Claramente, cuanto mas pequeña es la BER, mas confiable resulta el sistema de comunicación. Una pregunta en este contexto sería: ¿es posible diseñar un sistema de comunicación que opere con BER cero incluso a través de un canal ruidoso?.

En un escenario ideal, la respuesta a esta pregunta es **Sí**. Ésta respuesta se obtiene del teorema de *La Capacidad de Información de Shannon*. El cual se describe a continuación:

Si B denota el ancho de banda del canal y SNR la relación señal a ruido recibida, el teorema de la capacidad de información establece que estos dos parámetros se relacionan idealmente como

$$C=B \log_2 (1+SNR) \text{ b/s} \quad (3.4.7)$$

donde C es la capacidad de información del canal, la cual se define como la velocidad máxima a la cual puede transmitirse sin error la información a lo largo del canal y se mide en bits por segundo (b/s). Para un canal con un ancho de banda B [Hz] y una SNR en dB recibida, el teorema de la capacidad de información nos indica que una señal de mensaje puede transmitirse a través del sistema sin error, siempre que la velocidad de señalización real R , en bits por segundo, a la cual se transmiten los datos por el canal, sea menor que la capacidad de información C [2].

Este teorema resulta valioso por las siguientes razones:

Proporciona una cota de la velocidad de transmisión de datos teórica alcanzable para valores preestablecidos del ancho de banda del canal B y de la SNR recibida por tanto, es posible utilizar la proporción

$$\eta = \frac{R}{C} \quad (3.4.8)$$

como una medida de la eficiencia del sistema de comunicación digital en estudio. Cuanto más cercana es η a la unidad, tanto mas eficiente es el sistema.

3.4.5 Características del Canal Telefónico

Un canal telefónico se construye utilizando alambres en pares trenzados para la transmisión de la señal. Un par trenzado está compuesto por dos conductores de

cobre sólido, cada uno de los cuales se introduce en una funda de cloruro de polivinilo (PVC). Por lo general, cada par tiene una tasa de 2 a 12 giros por pie, así como una impedancia característica de 90 a 110 ohms (recuerde que la impedancia característica se refiere a la impedancia que la línea de transmisión tendría en el caso hipotético de que esta tuviera una longitud infinita) [6].

Los pares trenzados suelen construirse para formar cables, con muchos pares muy próximos unos de otros. Los pares trenzados son naturalmente susceptibles a la interferencia electromagnética (*Diafonía*) cuyos efectos se reducen mediante el trenzado de los alambres. Para este fin, los pares adyacentes dentro de una misma envoltura se trenzan con pasos de torsión diferentes. En enlaces de larga distancia, la longitud del trenzado varía entre 5 cm y 15 cm. Los conductores que forman el par tienen un grosor que varía entre 0.4 mm y 0.9 mm [6]. Este medio es adecuado para la transmisión de señales de voz por que maneja un intervalo de frecuencias que va de 0 a 3.5 KHz. Este canal de comunicación, es de naturaleza dispersa véase Figura 3.8 donde se muestra su respuesta en frecuencia y su respuesta en fase.

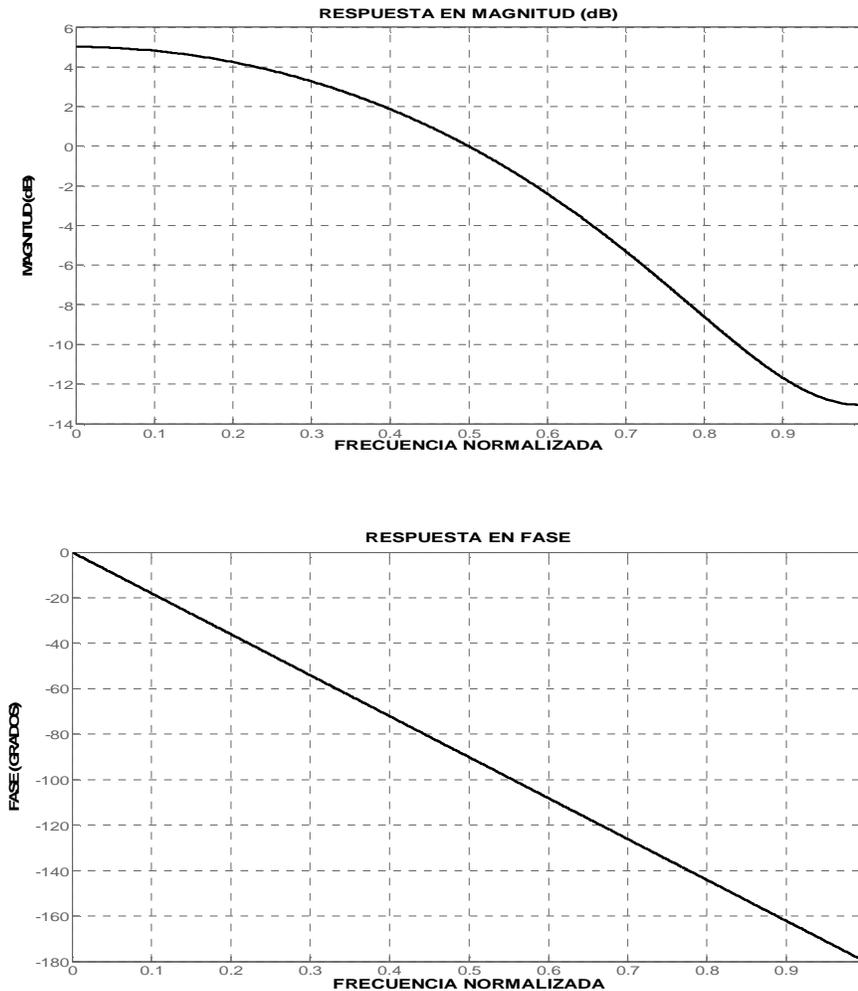


Figura 3.8 Respuesta en Magnitud y Fase de un canal telefónico.

Este canal encuentra aplicación tanto para señales analógicas como para señales digitales, en líneas telefónicas el par trenzado es el medio de transmisión mas usado y el más económico [6]. En la señalización digital, es habitual que los pares trenzados se utilicen para las conexiones a conmutadores digitales a velocidades de *64Kbps*. El par trenzado también se utiliza, dentro de edificios, como medio de transmisión para las redes de área local. La velocidad típica en este tipo de configuraciones está alrededor de los *10Mbps*. No obstante, recientemente se han desarrollado redes de pares trenzados con velocidades de hasta de *1 Gbps*. Para aplicaciones de larga distancia el par trenzado se puede utilizar a velocidades de *4 Mbps* o incluso mayores. Al transmitir señales analógicas, el par trenzado, exige amplificadores cada *5 o 6 Km*.

Para transmisión digital requiere repetidores cada *2 o 3 km*. Comparado con otros medios guiados como el cable coaxial y la fibra óptica, el par trenzado permite distancias menores, menor ancho de banda y menor velocidad de transmisión. Este medio es también muy susceptible a las interferencias y al ruido externo. Así por ejemplo, un cable conductor situado en paralelo con una línea de potencia que conduzca corriente alterna captará interferencias con una frecuencia de *60 Hz*. Para reducir estos efectos es posible tomar algunas medidas, por ejemplo el recubrimiento del cable con una malla metálica que lo proteja de las interferencias externas. El trenzado de los cables reduce las interferencias de baja frecuencia y el uso de distintos pasos de torsión entre los pares adyacentes reduce la diafonía [6].

3.5 FILTROS

El contenido espectral de una señal ocupa una banda de frecuencia de extensión finita, por ejemplo, el contenido espectral de una señal de voz para aplicaciones de comunicaciones telefónicas, se ubica en una banda de frecuencia de 300 a 3100Hz. Para extraer el contenido de información esencial de una señal de voz en tales aplicaciones, se utilizan sistemas selectivos de frecuencia, conocidos como *Filtros* que limitan el espectro de la señal a la banda de frecuencias deseada.

En general, la respuesta en frecuencia de un filtro se caracteriza por las bandas denominadas: *Banda de Paso*, *Banda de Rechazo* las cuales se encuentran separadas por una *Banda de Transición*. Las señales que pasan por estos sistemas con componentes de frecuencia dentro de la banda de paso “pasan” con poca o sin distorsión, en tanto que se “rechazan” aquellas con frecuencias dentro de la banda no deseada. De tal modo, la respuesta en frecuencia del filtro puede ser del tipo *pasobajas*, *pasoaltas*, *pasobanda* o *supresor de banda* dependiendo del tipo de frecuencias que deja pasar, ejemplos de la respuesta en frecuencia de cada uno de los filtros mencionados anteriormente se muestran en la Figura 3.9.

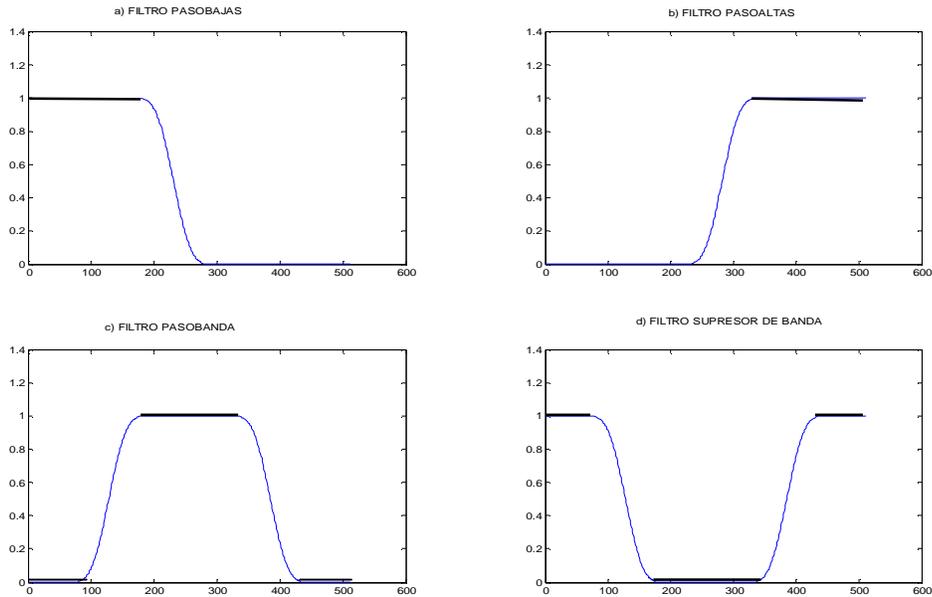


Figura 3.9 Respuesta en frecuencia para filtros a) pasobajas b) pasoaltas c) pasobanda d) supresor de banda

El canal telefónico por su respuesta en frecuencia puede considerarse como un filtro pasobajas; aunque no ideal.

Hay dos tipos de filtros, los *Analógicos* y los *Digitales*. El tipo de filtro empleado en este trabajo es digital, este tipo de filtro utiliza operaciones aritméticas como sumas, multiplicaciones y retardos para implementar la acción de filtrado que se va a realizar sobre la señal $x[n]$, procesando dicha secuencia de números $x[n]$ en un esquema muestra por muestra para producir una nueva secuencia de números $y[n]$ que representa la versión filtrada de la señal de entrada original $x[n]$.

Hay dos clases de filtros digitales, dependiendo de la duración de la respuesta al impulso.

Filtros digitales de respuesta al impulso finita FIR, cuya operación se rige por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes de una naturaleza no recursiva. La función de transferencia de un filtro digital FIR es un polinomio en z^{-1} .

En consecuencia los filtros digitales FIR presentan tres importantes propiedades [3]:

1. Tienen memoria finita (sistemas todo cero y con un polo múltiple en el origen)
2. En teoría siempre son estables
3. Pueden realizar una respuesta en magnitud deseada con fase lineal, es decir, sin distorsión de fase, por lo cual, el problema en el diseño de este tipo de filtros se reduce a aproximar una respuesta en magnitud deseada.

Filtros digitales de respuesta al impulso infinita IIR, cuyas características de entrada salida se rigen por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes de naturaleza recursiva. La función de transferencia de un filtro digital IIR es una función racional en z^{-1} . En consecuencia, para una frecuencia preestablecida el uso de un filtro digital IIR usualmente resulta en una longitud de filtro mas corta que la correspondiente al filtro digital FIR. Sin embargo, esta mejora se consigue a costa de la distorsión de fase y el riesgo de inestabilidad.

3.5.2 Características de un Filtro Pasobajas Ideal

Un filtro pasobajas ideal, deja pasar todas las frecuencias dentro de la banda de paso $[0, W_c]$ sin ninguna distorsión y rechaza todas las frecuencias mayores a W_c . Se supone que la transición de la banda de paso a la banda de rechazo ocupa una banda de ancho cero [3]. Para un filtro de este tipo, el interés radica en la obtención fiel de una señal que lleva información donde el contenido espectral se confina a cierta banda de frecuencia definida por $0 \leq \omega \leq \omega_c$. Las condiciones de transmisión sin distorsión, para fines prácticos sólo necesitan satisfacerse dentro de la banda de paso del filtro como se muestra en la Figura 3.10

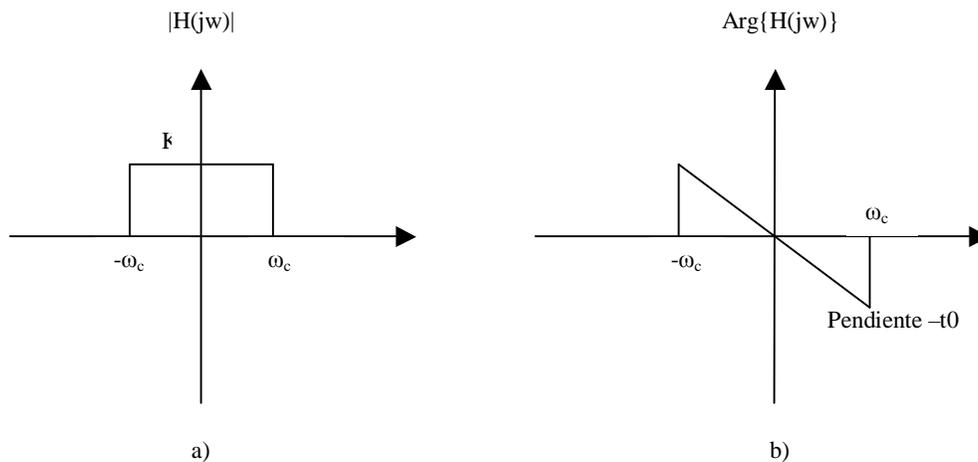


Figura 3.10 Respuesta en frecuencia de un filtro pasobajas ideal. a) Respuesta en magnitud b) Respuesta en fase.

Específicamente, la respuesta en frecuencia de un filtro pasobajas ideal con frecuencia de corte ω_c se define mediante [3]:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| > \omega_c \\ e^{-j\omega t_0} & -\omega_c \leq 0 \leq \omega_c \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Donde por conveniencia se establece $K=1$. Para un retardo finito t_0 , el filtro pasobajas ideal es no causal, lo cual se confirma examinando la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro.

Para evaluar $h(t)$ tomamos la transformada inversa de Fourier de la ecuación (3.5.1) obteniendo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad (3.5.2)$$

Definimos ahora, la función $senc(t)$ como

$$senc(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{sen(\pi t)}{\pi t} \quad (3.5.3)$$

Por consiguiente, podemos escribir la ecuación (3.5.2) en forma compacta

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} senc\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right) \quad (3.5.4)$$

Esta respuesta al impulso tiene una amplitud pico de ω_c/π centrada en el tiempo t_0 como se indica en la Figura 3.11

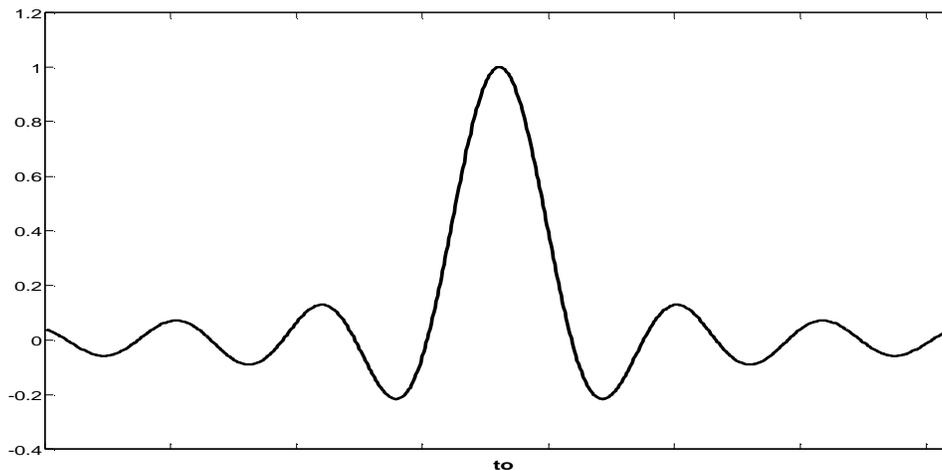


Figura 3.11 Forma recorrida en el tiempo de la función $senc$, representando la respuesta impulso de un filtro pasobajas ideal no causal

A pesar de la naturaleza no causal del filtro pasobajas ideal, es un concepto útil ya que proporciona un marco de referencia para el diseño de filtros prácticos (causales).

3.5.3 Transmisión de un Pulso Rectangular a través de un Filtro Pasobajas Ideal

Este punto es de especial importancia debido a que muchos canales de comunicación reales presentan un comportamiento similar a este tipo de filtro y este comportamiento afectará a los pulsos que viajan por él y que representan los símbolos digitales, por ejemplo, la representación eléctrica empleada en este trabajo para la señal digital es el código de línea unipolar sin retorno a cero (véase Figura 3.5 a)) el tipo de pulso empleado se ilustra nuevamente en la Figura 3.12

Los pulsos rectangulares $x(t)$ de amplitud unitaria y duración T , se describen como [3]:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (3.5.5)$$

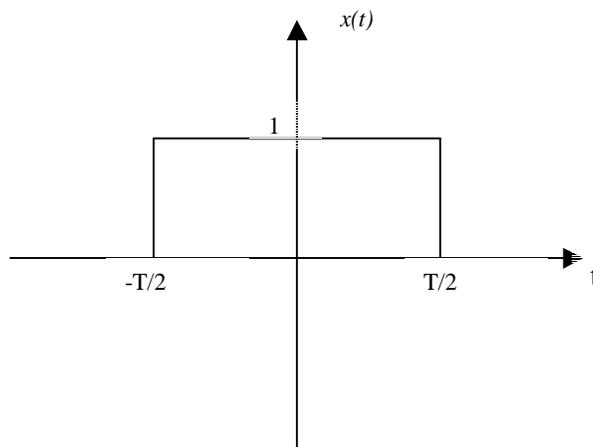


Figura 3.12 Pulso rectangular de amplitud unitaria y duración T

Al aplicar este pulso a un canal de comunicación modelado como un filtro pasobajas ideal cuya respuesta en frecuencia se define por medio de (3.5.1), lo que nos interesa es determinar la respuesta $y(t)$ del canal a la entrada de dicho pulso.

La respuesta al impulso del filtro que representa al canal está dada por la ecuación (3.5.4). Es posible expresar la respuesta del filtro $y(t)$ a un pulso utilizando convolución entre el pulso $x(t)$ y la respuesta al impulso del canal $h(t)$ como se establece en (3.5.6)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.5.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.5.5) y (3.5.4) en (3.5.6) obtenemos

$$y(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}(\omega_c(t - t_0 - \tau))}{\omega_c(t - t_0 - \tau)} d\tau \quad (3.5.7)$$

definiendo

$$\lambda = \omega_c(t - t_0 - \tau) \quad (3.5.8)$$

Entonces, cambiando la variable de integración de τ a λ podemos reescribir la salida $y(t)$ como

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\text{sen}\lambda}{\lambda} d\lambda \quad (3.5.9)$$

donde los límites de integración a y b están definidos por

$$\begin{aligned} a &= \omega_c \left(t - t_0 + \frac{T}{2} \right) \\ b &= \omega_c \left(t - t_0 - \frac{T}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

al resolver la ecuación (3.5.9) con los límites de integración dados en (3.5.10) obtenemos para diferentes valores de la frecuencia de corte los resultados mostrados en la Figura 3.13

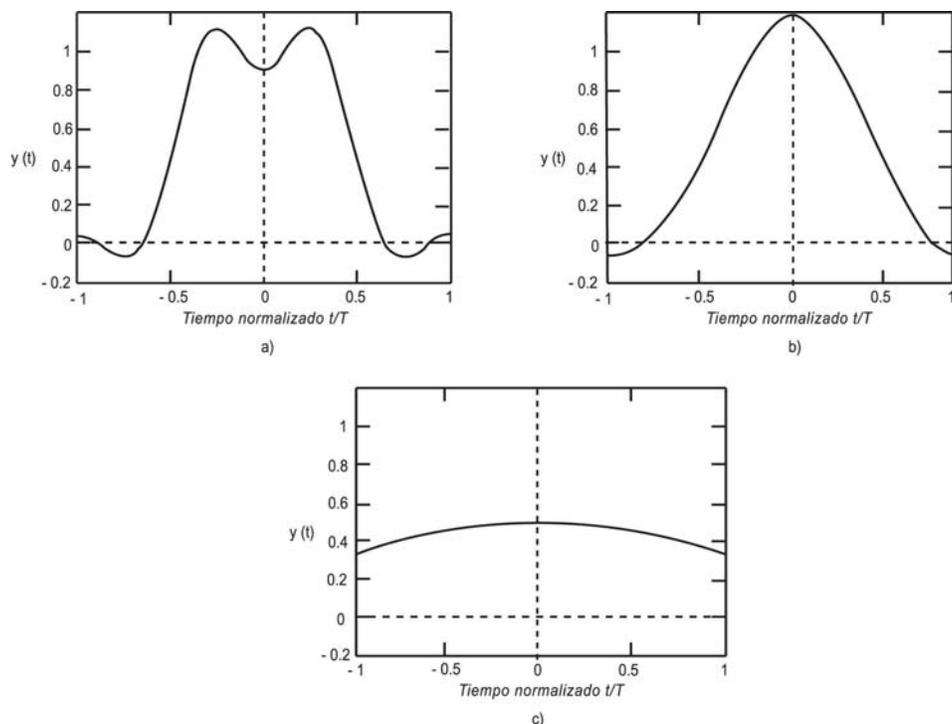


Figura 3.13 Respuesta a un pulso de un filtro pasobajas ideal analógico para una duración de pulso de $T=1$ s y frecuencia de corte de filtro variable ω_c : a) $\omega_c > 2\pi/T$ rad/s; b) $\omega_c = 2\pi/T$ rad/s; c) $\omega_c < 2\pi/T$ rad/s

La Figura 3.13 describe la respuesta $y(t)$ para tres valores diferentes de la frecuencia de corte ω_c del filtro paso baja ideal, suponiendo que el retardo de transmisión t_0 es cero.

En cada caso vemos que la respuesta $y(t)$ es simétrica alrededor de $t=0$. Observamos además que la forma de la respuesta $y(t)$ es marcadamente dependiente de la frecuencia de corte del filtro. En particular, advertimos los siguientes puntos (véase Figura 3.12 y 3.13) [5].

- ❖ Cuando ω_c es mayor que $2\pi/T$, como en la figura 3.13 a, la respuesta $y(t)$ tiene aproximadamente la misma duración que el pulso rectangular $x(t)$ aplicado a la entrada del filtro. Sin embargo difiere de $x(t)$ en dos aspectos:
 - A diferencia de la entrada $x(t)$, la respuesta $y(t)$ tiene tiempos de levantamiento y caída diferentes de cero que son inversamente proporcionales a la frecuencia de corte ω_c .
 - La respuesta $y(t)$ presenta deformaciones en los flancos de subida y de bajada.
- ❖ Cuando $\omega_c = 2\pi/T$, como en la Figura 3.13 b, la respuesta $y(t)$ se reconoce como un pulso. Sin embargo, los tiempos de levantamiento y caída de $y(t)$ son grandes comparados con la duración del pulso rectangular de entrada $x(t)$.

- ❖ Cuando la frecuencia de corte ω_c es menor que $2\pi/T$, como la Figura 3.13 c, la respuesta $y(t)$ es una versión bastante distorsionada de la entrada $x(t)$.

Estas observaciones indican que existe una relación inversa entre dos parámetros, la duración del pulso rectangular que actúa como la señal de entrada para un filtro pasobajas ideal y la frecuencia de corte del filtro.

Esta deformación de la señal digital a su paso por el canal de comunicación de banda finita es lo que denominamos distorsión lineal; este problema cuando la señal transmitida son trenes de pulsos, ocasiona la denominada **Interferencia Intersímbolo (ISI)**, es decir, los símbolos se dispersan temporalmente “se ensanchan” ocasionando que los pulsos adyacentes se encimen unos con otros provocando la consecuente distorsión de la señal.

3.6 INTERFERENCIA INTERSÍMBOLOS

Este fenómeno de las transmisiones digitales se debe a que el ancho de banda de pulsos cuadrados es infinito, si estos pulsos se filtran (se reduce su ancho de banda) a su paso por un canal con un ancho de banda finito dichos pulsos se dispersaran temporalmente y el pulso que representa a cada símbolo interferirá con pulsos adyacentes provocando (ISI) [5], este efecto se ilustra en la Figura 3.14

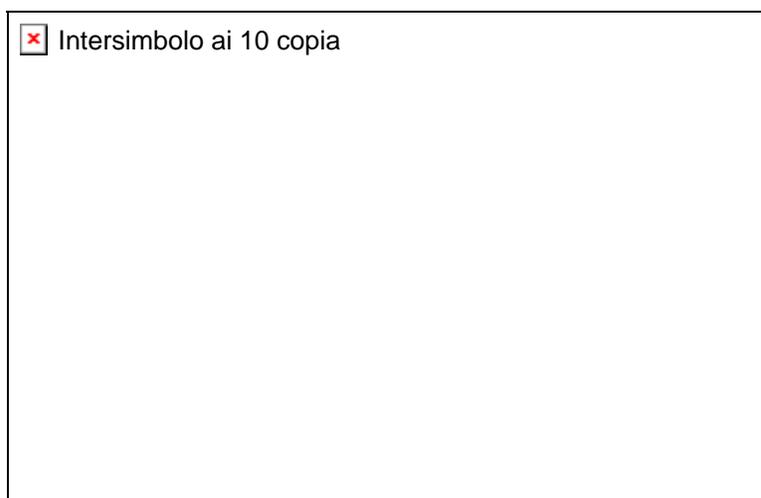


Figura 3.14 Ejemplos de ISI en pulsos recibidos en un sistema de comunicación binario.

El problema en este tipo de distorsión es que en el receptor aparecen los llamados errores de bit, y como consecuencia la imposible detección de los símbolos que representan al mensaje original (es decir no se puede distinguir un 0 de un 1), esto no permite reconstruir la señal recibida y por tanto no permite la reproducción de la señal analógica original de voz para el usuario final en el receptor.

Cabe mencionar que las exigencias en las comunicaciones actuales son mayores tasas de transmisión en canales con ancho de banda restringido; Esto hace que los efectos que ocasiona la ISI se tornen más severos, la solución a este problema es el objetivo de la presente tesis y para ello se aplica “*La Igualación de Canal*” cuya finalidad es compensar la distorsión impuesta por el canal dispersivo y eliminar la *ISI*. De este tema y sus implicaciones se habla en el siguiente capítulo.

3.7 RESUMEN

En este capítulo se abordaron los métodos que nos permiten convertir una señal analógica en una señal digital, su codificación en PCM, la estimación de su ancho de banda para determinar el ancho de banda requerido para un canal que nos permita llevar a cabo su transmisión. Se mostró la ecuación que nos permite obtener la cota superior para la capacidad de transmisión de información de los canales de comunicación, además de las características y aplicaciones del canal telefónico que es uno de los medios de comunicación con mayor aplicación en la práctica. Se mostró el problema que surge en la transmisión de señales con un ancho de banda infinito a través de un canal con un ancho de banda finito como es el caso del canal telefónico. Se presentó el problema denominado *Interferencia Intersímbolo* que es el problema a resolver en este trabajo y del cual se presenta una solución en el capítulo siguiente.

4 LA IGUALACIÓN DE CANAL

En el capítulo anterior se mostró que una señal transmitida sufre distorsión a consecuencia de su paso por el canal de comunicación. Esta distorsión denominada *Interferencia Intersímbolo* imposibilita la reconstrucción del mensaje original en el receptor debido a los errores de bit que ocasiona; dicha situación, es indeseable en un sistema de comunicaciones. Para resolver este problema, de manera intuitiva, podemos plantear la posibilidad de invertir los efectos dispersivos que el canal impone sobre nuestra señal, añadiendo algún sistema que sea inverso con respecto al sistema que causa la distorsión. Para llevar a cabo lo anterior se han desarrollado técnicas que efectúan la *Deconvolución* sobre la señal de salida del sistema dispersivo, como *Filtros Inversos* y *Filtros Adaptables*.

En este capítulo, se presentan estas ideas como solución al problema de la *Interferencia Intersímbolo (ISI)*, se presentan también las características que deben reunir los sistemas inversos que llevan a cabo este proceso y se introduce el concepto de Adaptabilidad, que brinda una solución adecuada al problema de la Interferencia Intersímbolo dentro de un ambiente de telecomunicaciones real.

4.1 FUNCION DE TRANSFERENCIA DE SISTEMAS LINEALES E INVARIANTES EN EL TIEMPO

En la sección 2.2.6 se mostró que la salida $y[n]$ de un Sistema Lineal e Invariante en el Tiempo (LTI) para una secuencia de entrada $x[n]$ se puede obtener como la convolución de la secuencia de entrada $x[n]$ y la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, esto es:

$$y[n] = h[n] * x[n] \quad (4.1.1)$$

Por propiedades de la convolución [3], si transformamos en el dominio z ambos miembros de esta ecuación, es posible expresar la salida transformada $Y[z]$ como:

$$Y[z] = H[z]X[z] \quad (4.1.2)$$

donde $H[z]$ es la transformada z (TZ) de la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema. Por el teorema de la convolución se ha convertido la convolución de secuencias en el dominio del tiempo en la multiplicación de transformadas en el dominio z . De tal modo, la ecuación (4.1.2) implica que la transformada de la respuesta al

impulso puede considerarse también como el cociente de las transformadas en el dominio \mathbf{z} de la salida y de la entrada:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} \quad (4.1.3)$$

Esta definición se aplica a todos los valores de \mathbf{z} para los cuales $X[z]$ es diferente de cero. $H[z]$ representa la caracterización del sistema en el dominio \mathbf{z} , en tanto que $h[n]$ es la caracterización correspondiente en el dominio del tiempo. La TZ de la respuesta al impulso del sistema $H[z]$ se denomina “**Función de Transferencia**” del sistema Lineal Invariante en el Tiempo.

La relación (4.1.3) es de especial utilidad para obtener $H[z]$ cuando se describe al sistema mediante ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes [4]. La forma en que más comúnmente se muestra la TZ en aplicaciones de ingeniería es el cociente de polinomios en \mathbf{z}^{-1} como se muestra en la función racional (4.1.4)

$$H[z] = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (4.1.4)$$

Las raíces del polinomio del numerador se denominan *los ceros* de $H[z]$ y las raíces del polinomio del denominador se denominan *los polos* de $H[z]$. Esto es de interés debido a que dependiendo de la posición que guardan los polos con respecto al círculo unitario en el plano \mathbf{z} podemos decir si existe o no un sistema que sea inverso para el sistema dado como se verá a continuación.

4.1.2 Deconvolución y Sistemas Inversos

Un Sistema LTI transforma una señal de entrada $x[n]$ en una señal de salida $y[n]$, como resultado de la convolución de $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema. En muchas situaciones prácticas se pide determinar la entrada de un sistema cuyas características son desconocidas dada la señal de salida, por ejemplo, en nuestro caso “*La Transmisión Digital de Datos de Alta Velocidad sobre Canales Telefónicos*” sabemos que el canal produce distorsión e Interferencia Intersímbolos. Esta Interferencia Intersímbolos causa errores en la extracción de los datos. En estos casos, interesa diseñar un sistema que al conectarlo en serie con el original, produzca una salida que sea una réplica de la señal de entrada, es decir, este sistema ha de corregir la distorsión producida por el canal.

En comunicaciones digitales, un sistema de estas características se denomina *Igualador*. En el contexto más general de los sistemas lineales, se le denomina *Sistema Inverso*, ya que su respuesta es, básicamente, la inversa de la respuesta

en frecuencia del sistema que causa la distorsión, además, dado que el sistema que origina la distorsión genera una salida $y[n]$ que es la convolución de la señal de entrada $x[n]$ con su respuesta al impulso $h[n]$, la operación del sistema inverso que toma $y[n]$ y produce $x[n]$ se denomina *Deconvolución* [4].

Si las características del sistema distorsionante son desconocidas, para tratar de averiguar las características del sistema, por ejemplo en el problema de comunicaciones digitales descrito donde se desconoce la respuesta en frecuencia del canal, se puede medir la respuesta en frecuencia transmitiendo una serie de sinusoides de igual amplitud y frecuencia diferentes dentro de la banda de frecuencias del sistema, con fases prefijadas [4], comparando la señal recibida con la transmitida, el receptor obtiene la respuesta en frecuencia del canal que puede usarse para diseñar el sistema inverso.

El proceso que determina las características de un sistema desconocido, bien $h[n]$ o $H[w]$, a partir de una serie de medidas de dicho sistema se conoce como *Identificación de Sistemas*.

4.1.3 Invertibilidad de Sistemas LTI

Un sistema se dice que es “*Invertible*” si existe una correspondencia biunívoca entre sus señales de entrada y salida [4]. Esta definición implica que si conocemos la secuencia de salida $y[n]$ de un sistema invertible $h[n]$, podemos determinar de forma unívoca su entrada $x[n]$.

El *Sistema Inverso* con entrada $y[n]$ y salida $x[n]$ se denota por **g**. La conexión en serie de un sistema y su inverso tiene por respuesta [4]:

$$h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (4.1.5)$$

La relación que existe al aplicar la convolución entre la respuesta al impulso del sistema $h[n]$, su sistema inverso $g[n]$ y una secuencia de entrada $x[n]$ está dada por:

$$x[n] * (h[n] * g[n]) = x[n] \quad (4.1.6)$$

Lo que en el dominio **z** implica:

$$G[z]H[z] = 1 \quad (4.1.7)$$

Las ecuaciones (4.1.5) y (4.1.7) son de utilidad porque permiten determinar el sistema inverso dado $H[z]$ o $h[n]$; sin embargo, la solución de la ecuación (4.1.5) en el dominio del tiempo es difícil de resolver por lo que se prefiere resolver dicha ecuación en el dominio **z** ecuación (4.1.7), dicha ecuación se convierte en:

$$G[z] = \frac{1}{H[z]} \quad (4.1.8)$$

En general un sistema inverso es difícil de encontrar o poner en práctica debido a que no todo sistema LTI tiene su inverso estable y causal, por la siguiente razón:

La función de transferencia de un sistema inverso es la inversa de la función de transferencia del sistema que deseamos invertir, por tanto los ceros de $H[z]$ constituyen los polos de $G[z]$, y los polos de $H[z]$ constituyen los ceros del sistema inverso $G[z]$.

En general estamos interesados en sistemas que cumplen las condiciones de estabilidad y de causalidad. Se dice que $G[z]$ es tanto estable como causal si la totalidad de sus polos está dentro del círculo unitario [3].

Puesto que los polos de $G[z]$ son los ceros de $H[z]$, concluimos que la inversa estable y causal para un sistema $H[z]$ existe, si y solo si todos los ceros de $H[z]$ están dentro del círculo unitario. Si $H[z]$ tiene todos los ceros fuera del círculo unitario, entonces no existe un sistema inverso y causal [3].

Un sistema que tiene todos sus ceros dentro del círculo unitario, recibe el nombre de sistema de *Fase Mínima*, si todos los ceros están fuera del círculo unitario el sistema recibe el nombre de *Fase Máxima* [3]. Si el sistema tiene algunos ceros dentro del círculo unitario y el resto fuera, se dice que es de *Fase no Mínima* o de *Fase Mixta*.

4.2 SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE PULSOS EN BANDA BASE

Considere un sistema de señalización digital como se muestra en la Figura 4.1

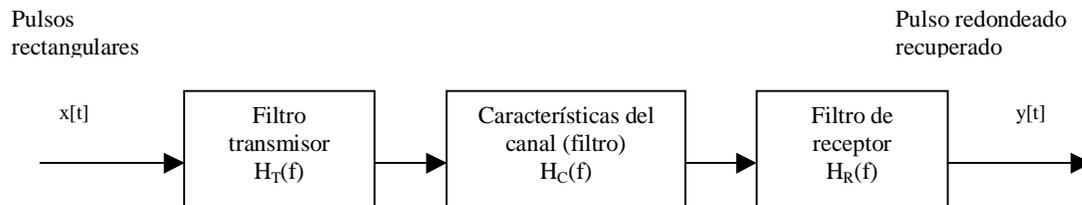


Figura 4.1 Sistema de transmisión de pulsos en banda base

A la entrada del sistema el pulso rectangular es:

$$x_{entrada}(t) = \sum_n a_n h(t - nT_s) \quad (4.2.1)$$

donde $h(t) = \Pi(t/T_s)$ es la función que representa a los pulsos y a_n son los valores para la señalización binaria. La tasa de símbolos es $D = 1/T_s$ [pulsos/s]. La ecuación (4.2.1) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x_{entrada}(t) &= \sum_n a_n h(t) * \delta(t - nT_s) \\ &= \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s) \right] * h(t) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

La salida del sistema lineal de la Figura 4.1 se obtiene de la convolución del tren de pulsos de entrada con la respuesta al impulso equivalente de todo el sistema esto es:

$$y_{salida}(t) = \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s) \right] * h_e(t) \quad (4.2.3)$$

donde la respuesta al impulso equivalente es:

$$h_e(t) = h(t) * h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) \quad (4.2.4)$$

La función de transferencia del sistema equivalente es:

$$H_e(f) = H(f)H_T(f)H_c(f)H_R(f) \quad (4.2.5)$$

donde

$$H(f) = F \left[\Pi\left(\frac{t}{T_s}\right) \right] = T_s \left(\frac{\text{sen} \pi T_s f}{\pi T_s f} \right) \quad (4.2.6)$$

La ecuación (4.2.6) se utiliza de modo que se presenten pulsos de cresta plana a la entrada del filtro transmisor [5]. El filtro receptor, $H_R(f)$, está dado por

$$H_R(f) = \frac{H_e(f)}{H(f)H_T(f)H_c(f)} \quad (4.2.7)$$

donde $H_e(f)$ es la función de transferencia del filtro total.

Cuando $H_e(f)$ se selecciona para reducir al mínimo la Interferencia Intersímbolos, entonces el $H_R(f)$ obtenido en la ecuación (4.2.7) se llama “*Filtro de Igualación*” [5]. La respuesta en frecuencia del Filtro de Igualación depende de la respuesta en frecuencia del canal $H_c(f)$, lo mismo que de la respuesta en frecuencia requerida del sistema equivalente, $H_e(f)$.

Este trabajo tiene como finalidad la reducción de la Interferencia Intersímbolo, y tiene que ver con el diseño de un filtro de Igualación que nos permita resolver el problema de la ISI. En lo que sigue, se mostrará la forma en la que un *Filtro de Igualación Fijo* resuelve el problema de la ISI para un canal de comunicación donde los parámetros no varían con el tiempo y para el cual existe un sistema inverso estable y causal. Posteriormente se mostrará el esquema de *Filtrado Adaptable* que nos permite la reducción de la ISI dentro de un esquema en el cual los parámetros del canal varían con el tiempo y que presenta buenos resultados para sistemas de fase no mínima o fase mixta, situación que se presenta con frecuencia en la práctica.

Esto tiene como finalidad la reconstrucción del mensaje originalmente transmitido dentro de un sistema de comunicación simulado. Se pondrá especial énfasis a la opción de filtrado adaptable debido a que resuelve el problema de la interferencia intersímbolo en forma adecuada razón por la cual es el método empleado en el presente trabajo.

4.3 IGUALACIÓN DE CANAL

Para corregir la distorsión lineal que introduce un canal de comunicación dispersivo (con comportamiento similar a un filtro paso bajas); podemos conectar en cascada con el canal un sistema conocido como *filtro de igualación*, como se ilustra en la Figura 4.2. El igualador está diseñado de tal modo que dentro de la banda de frecuencias de interés, las respuestas totales en magnitud y fase de esta conexión en cascada se aproximan a las condiciones de transmisión sin distorsión (véase capítulo 3).

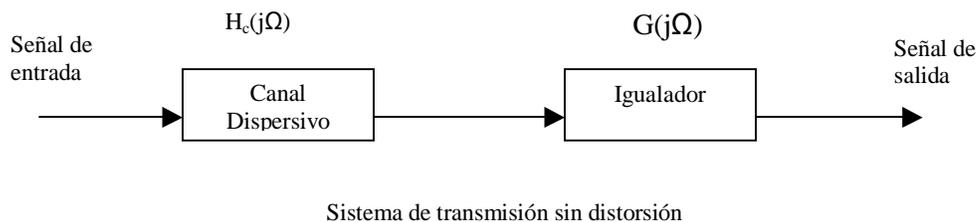


Figura 4.2 Conexión en cascada de un canal dispersivo y un filtro de igualación en conjunto logran transmisión sin distorsión.

Considere un canal de comunicación con respuesta en frecuencia $H_c(j\Omega)$; si se conecta un filtro de igualación con respuesta en frecuencia $G(j\Omega)$ en cascada con el canal como en la Figura 4.2, la respuesta en frecuencia total de esta combinación es igual a $H_c(j\Omega)G(j\Omega)$. Para que la transmisión a través de este sistema (Figura 4.2) sea sin distorsión, requerimos que [3]:

$$H_c(j\Omega)G(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0} \quad (4.3.1)$$

donde t_0 es un retardo de tiempo. Por tanto, la respuesta en frecuencia del Filtro de Igualación se relaciona inversamente con la respuesta en frecuencia del canal de la siguiente forma:

$$G(j\Omega) = \frac{e^{-j\Omega t_0}}{H_c(j\Omega)} \quad (4.3.2)$$

En la práctica, el Filtro de Igualación se diseña de tal modo que su respuesta en frecuencia se aproxima lo suficiente al valor ideal de la ecuación (4.3.2) para que la distorsión lineal se reduzca a un nivel satisfactorio.

4.3.2 Estructura para un Filtro de Igualación

Un sistema que es bastante apropiado para desarrollar un Filtro de Igualación es el filtro digital FIR, también conocido como “*Igualador de Línea de Retardo en Derivación*” [3]. La estructura de tal filtro se describe en la Figura 4.3

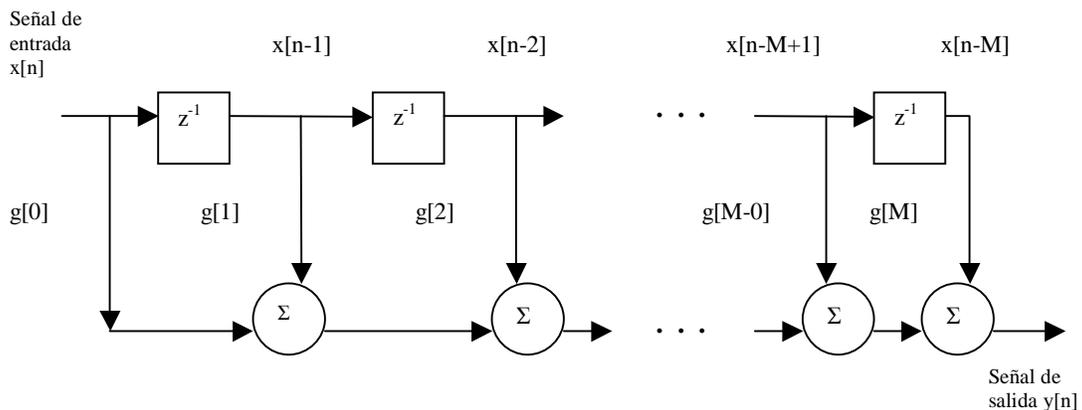


Figura 4.3 Estructura para implementar un filtro digital FIR

Puesto que la respuesta en frecuencia del canal se representa en términos de la transformada de Fourier, empleamos la misma representación de la respuesta en frecuencia para el filtro FIR. Si el intervalo de muestreo es T segundos, entonces la respuesta en frecuencia del Filtro Igualador es:

$$G_{\delta}(j\omega) = \sum_{n=0}^M g[n] \exp(-jn\omega T) \quad (4.3.3)$$

El subíndice δ en $G_{\delta}(j\omega)$ se utiliza para distinguirlo de su contraparte en tiempo continuo $G(j\Omega)$ de la ecuación (4.3.2). El objetivo del diseño del igualador es determinar los coeficientes del filtro $g[0], g[1], \dots, g[M]$, de manera que $G_{\delta}(j\omega)$ se aproxime a $G(j\Omega)$ en la ecuación (4.3.2) sobre una banda de frecuencias de interés, digamos, $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$. Como $G_{\delta}(j\omega)$ es periódica, con un periodo que ocupa el intervalo de frecuencia $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$, elegimos $T = \pi/\omega_c$, de manera que un periodo de $G_{\delta}(j\omega)$ corresponde a la banda de frecuencias de interés.

Sea:

$$G(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} / H_c(j\Omega) & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

la respuesta en frecuencia que deseamos aproximar con $G_{\delta}(j\omega)$.

La tarea se completa como se describe a continuación [3].

1. Fijando $t_0 = (M/2)T$.
2. Obteniendo la transformada inversa de Fourier de (4.3.4) para obtener una respuesta al impulso deseada $g(t)$.
3. $h[n] = w[n]g(nT)$, donde $w[n]$ es una ventana de longitud $(M+1)$ que se define como

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Note que la operación de muestreo no causa el traslape de la respuesta deseada en la banda $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$, puesto que elegimos $T = \pi/\omega_c$.

Por lo común, $H_c(j\omega)$ está dada numéricamente en términos de su magnitud y fase, en cuyo caso la integración numérica se usa para evaluar $g(nT)$. El número de términos, $M+1$ se escoge lo suficientemente grande para producir una aproximación satisfactoria para $G_{\delta}(j\omega)$. El resultado de este proceso se muestra en la Figura 4.4

Al filtro de igualación obtenido por el método anterior se le considera de diseño “fijo” debido a que es una solución planteada a partir de dos suposiciones: primero que las características del sistema a igualar no cambian en el tiempo y que el sistema inverso $G(j\Omega)$ es estable y causal es decir se supone que $H_c(j\omega)$ es un sistema de fase mínima.

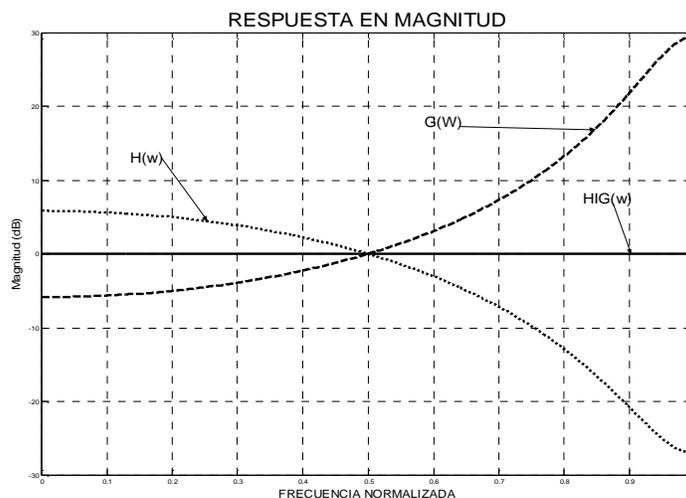


Figura 4.4 Magnitud de la respuesta en frecuencia del canal $H(w)$ y del Filtro de Igualación $G(w)$ la respuesta en magnitud del sistema Canal-Igualador $HIG(w)$ representa el sistema igualado.

Sin embargo las consideraciones prácticas que deben tomarse en cuenta en un ambiente de telecomunicaciones real son: que el canal suele variar con el tiempo. Por ejemplo, en la red telefónica conmutada el canal se compone de líneas telefónicas que se conmutan para lograr una determinada marcación, en este caso la función de transferencia del canal cambia de una llamada a otra. En estas condiciones el canal telefónico resulta aleatorio porque está constituido de diferentes ensamblajes que dependen de la marcación determinada. Dos son los factores principales que contribuyen a la distorsión del pulso transmitido sobre diferentes conexiones de enlace:

- ❖ Diferencias en las características de transmisión de los enlaces individuales que pueden conmutarse juntos.
- ❖ Diferencias en el número de enlaces de una conexión

La segunda consideración es que los canales de comunicación en la práctica son sistemas de fase no mínima y como consecuencia sus sistemas inversos serán inestables.

Como consecuencia de los puntos anteriores, el uso de un igualador fijo como el mostrado anteriormente que brinda la igualación de un canal con características específicas, no podría reducir de manera adecuada los efectos de la *Interferencia Intersimbólica* presente en cada uno de los posibles conexiones que la línea telefónica emplea para una determinada marcación.

Para conseguir la capacidad de transmisión máxima y reducir al mínimo la Interferencia intersímbolos producida por el canal telefónico, necesitamos un “*Filtro Igualador Adaptable*”, es decir, se requiere que el Filtro de Igualación ajuste sus parámetros por sí mismo adaptándose a cada posible marcación de la red telefónica conmutada, para corregir en todo momento, de forma óptima la distorsión que produce en la señal cada una de las conexiones de la línea telefónica.

En los siguientes apartados se explica el concepto de adaptabilidad y el algoritmo que se emplea en este trabajo para efectuar los ajustes de los coeficientes del filtro igualador.

4.4 ADAPTABILIDAD

El diccionario define adaptarse como el cambio o el ajuste de uno mismo con el fin de afrontar y superar determinadas limitaciones externas [7].

Esta definición del verbo adaptarse tiene una notable aplicación y es fácil encontrar ejemplos si observamos a los sistemas biológicos. Los sistemas *vivos* son adaptables, estos cambian sus estructuras, su funcionamiento o cualquiera de sus características con el fin de adecuarse a los cambios que su medio ambiente les presenta.

Nuevas ramas de la ciencia, han puesto énfasis en esta sorprendente cualidad de los sistemas vivos. Fuera del ámbito del procesamiento de señales, este concepto es conocido como “*aprendizaje*”, cientos de estudios se dedican en todo el mundo con la finalidad de obtener los lineamientos que permitan a los sistemas artificiales, imitar o reproducir esta cualidad de los sistemas vivos.

No es fácil especificar la diferencia exacta entre los conceptos de *adaptación* y *aprendizaje*; aparentemente, es solo cuestión del uso por parte de dos grupos diferentes de científicos [7]. El uso de la palabra “*aprendizaje*” aplicada a humanos y autómatas fue establecida en los años 60’s por personas que trabajaban en servomecanismos y en ciencias de la computación. Un autómata que “*aprende*” es un sistema de estados discretos que corrige su propio estado bajo la influencia de un “*maestro*” con la finalidad de producir una determinada salida en respuesta a una entrada específica.

La palabra “*adaptable*” aplicada a sistemas de ingeniería fué empleada aproximadamente por las mismas fechas por un grupo de personas que trabajaban en procesamiento de señales después de los primeros trabajos de Widrow [8].

4.4.2 Sistemas Adaptables

Un sistema adaptable es aquel cuya estructura es alterable o ajustable de tal manera que su comportamiento o desempeño (de acuerdo a un criterio deseado) mejora a través del contacto con su ambiente [8].

Los sistemas adaptables usualmente tienen las características siguientes:

1. Estos pueden adaptarse automáticamente para desempeñarse dentro de los ambientes y requerimientos de sistemas cambiantes.
2. Estos pueden ser entrenados para desempeñar tareas específicas de selección y toma de decisiones. La síntesis de sistemas con este tipo de cualidades, se logra por medio del entrenamiento. En este sentido los sistemas adaptables pueden ser “programados” por un proceso de entrenamiento.
3. Debido a las características anteriores, los sistemas adaptables no necesitan procedimientos elaborados de síntesis usualmente requeridos en sistemas no adaptables, en cambio, estos sistemas tienden a “*auto diseñarse*”.
4. Estos pueden extrapolar un modelo de comportamiento que afronte ambientes cambiantes posteriores al entrenamiento del sistema con señales o patrones de entrenamiento determinados.
5. Dentro de un límite razonable, estos sistemas pueden “*auto repararse*”, es decir, se adaptan dentro de cierto tipo de defectos internos.
6. Pueden ser descritos como sistemas no lineales con parámetros variantes en el tiempo.
7. Usualmente son más complejos y difíciles de analizar que los sistemas no adaptables, pero ofrecen la posibilidad de un incremento sustancial en su desempeño cuando las señales de entrada son desconocidas y cambiantes en el tiempo.

Debido al progreso en el diseño y la producción de microcircuitos ha habido un rápido incremento en el número de áreas en las que los sistemas adaptables han encontrado aplicación, actualmente podemos encontrar ejemplos de sistemas adaptables aplicados en áreas como: comunicaciones, radar, sonar, sismología, diseño de servomecanismos, sistemas de navegación y electrónica para biomedicina.

4.4.3 Propiedades Generales de Sistemas Adaptables

La característica general de un sistema adaptable es su desempeño basado en su capacidad para auto ajustarse. La necesidad de un funcionamiento como este, se torna evidente al analizar el caso en que un diseñador implementa un sistema de

“*diseño fijo*” el cual se considera óptimo para una determinada aplicación; En un diseño como éste, el diseñador prevé todas las posibles condiciones a la entrada del sistema antes de la implementación, o al menos lo hace estadísticamente hablando, y sabe lo que el sistema debe hacer bajo cada una de las posibles condiciones en su entrada.

Para llevar a cabo la implementación del sistema, el diseñador escoge un criterio específico por el cual, el desempeño del sistema debe ser evaluado, como por ejemplo: la cantidad de error entre la salida del sistema experimental y la salida de un sistema que es considerado “*ideal*” o que es tomado como referencia. Finalmente, el diseñador escoge el sistema que mejor se ajusta acorde al criterio de desempeño seleccionado, generalmente este sistema se selecciona entre una clase de diseños previamente delimitados (sistemas lineales) [8]. Este diseño funciona bien dentro de un contexto no variante en el tiempo, pero en muchas situaciones, el intervalo completo de señales de entrada puede no conocerse con exactitud o puede que no se cuente ni con su comportamiento estadístico, o más aún las condiciones pueden variar en el tiempo. En tales circunstancias, un sistema adaptable que **busca continuamente el desempeño óptimo** dentro de un intervalo permitido de posibilidades, usando un proceso de búsqueda sistematizado, daría un mejor desempeño comparado con el sistema de diseño fijo.

Otro rasgo intrínseco de los sistemas adaptables es su varianza en el tiempo y su no linealidad, sus características dependen, entre otras cosas, de sus señales de entrada, por esta razón el sistema adaptable es difícil de caracterizar por métodos convencionales.

Dentro de las clasificaciones de los sistemas no lineales, los sistemas adaptables no pueden ser catalogados dentro de un grupo determinado, sin embargo, estos sistemas tienen dos características que los distinguen en general de otras formas de sistemas no lineales [8]:

1. Los sistemas adaptables son ajustables, y sus ajustes generalmente dependen de promedios temporales finitos en vez de valores instantáneos de señales o en valores instantáneos de estados internos del sistema.
2. Los ajustes de los sistemas adaptables se efectúan con el **propósito de optimizar el desempeño** con respecto a mediciones que se toman como referencia.

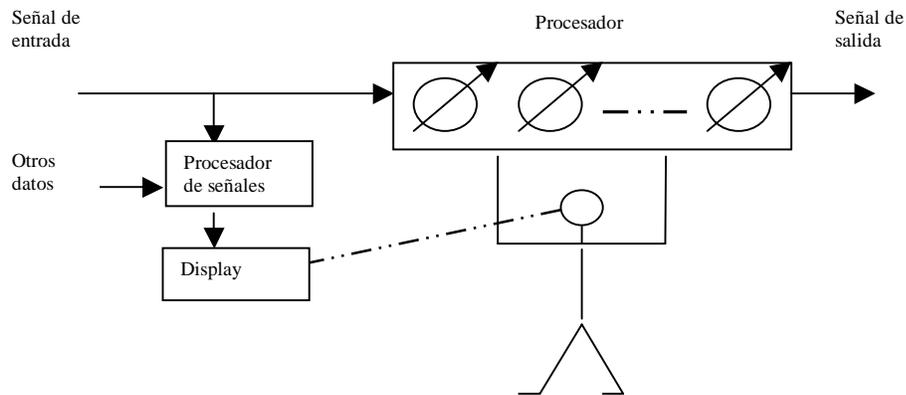
Ciertas formas de sistemas adaptables se convierten en lineales cuando sus ajustes brindan valores a parámetros que pueden tomarse como constantes después de la adaptación. Estos suelen ser llamados “*Sistemas Lineales Adaptables*” [8]. Estos son de gran utilidad debido a que tienden a ser matemáticamente tratables y porque son generalmente más fáciles de diseñar que otras formas de sistemas adaptables.

4.4.4 Procesos Adaptables de Lazo Abierto y Lazo Cerrado

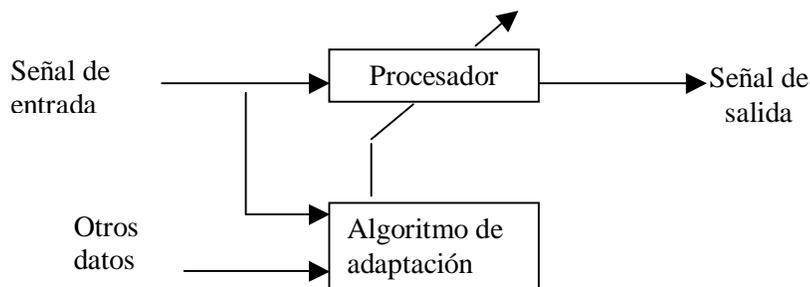
En la literatura se han propuesto muchas maneras de clasificar a los sistemas adaptables; para distinguir a estos sistemas, aquí se utilizan los conceptos de “Proceso Adaptable de Lazo Abierto y Proceso Adaptable de Lazo Cerrado”.

En un proceso adaptable de “**Lazo Abierto**”, se toman mediciones (de la señal a la entrada o de los parámetros en el entorno del sistema) para aplicar dicha información a una fórmula o a un algoritmo computacional, que nos permita a través de la evaluación de los resultados llevar a cabo los ajustes del sistema adaptable.

Los procesos adaptables de “**Lazo Cerrado**”, por otra parte, experimentan en tiempo real con los ajustes y con la evaluación de sus resultados con la finalidad de optimizar mediciones que valoran el desempeño del sistema. Este proceso puede ser llamado también “Proceso Adaptable Retroalimentado” [8]. Los conceptos involucrados en los procesos de adaptación de lazo abierto y lazo cerrado están ilustrados en las Figuras 4.5 y 4.6

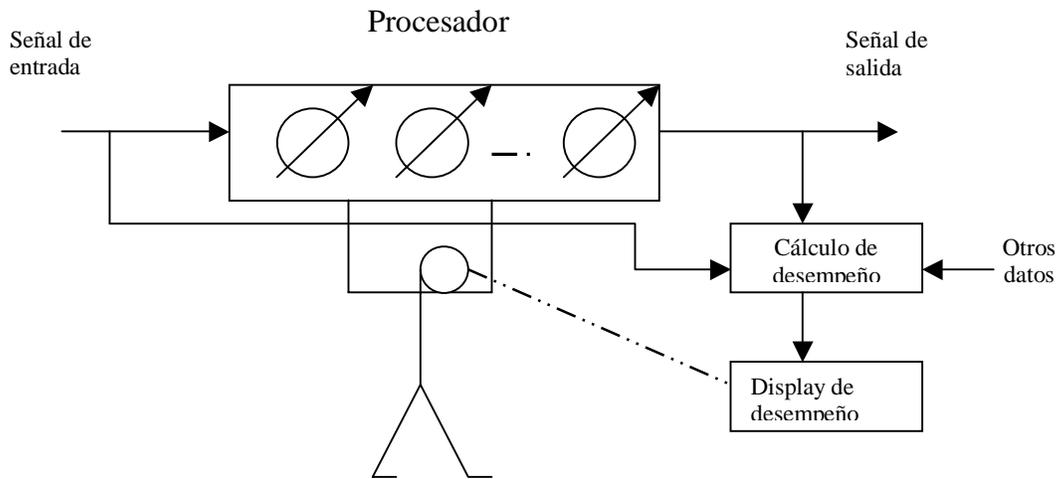


a)

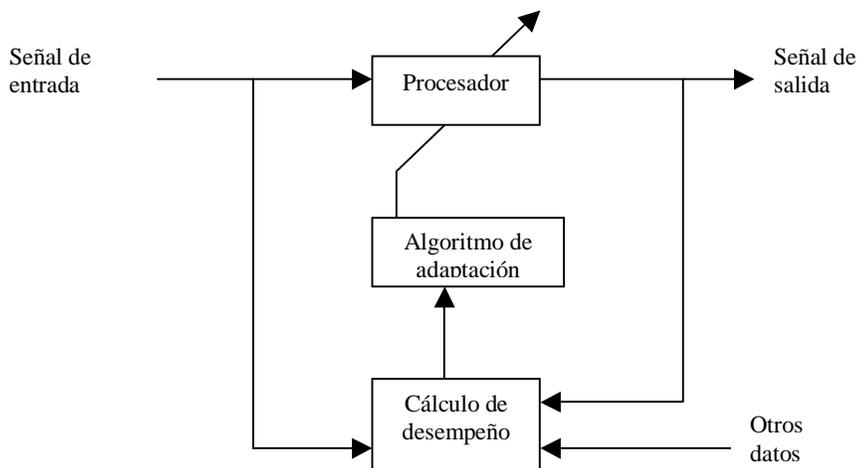


b)

Figura 4.5 a) Proceso de adaptación de lazo abierto b) sistema equivalente



a)



b)

Figura 4.6 a) Proceso de adaptación de lazo cerrado b) sistema equivalente

Figu

En ambos casos es útil imaginar el proceso adaptable como si fuera operado manualmente por un humano o un “*supervisor*”. En las Figuras 4.5 a) y 4.6 a) el *supervisor* ajusta los controles del procesador a consecuencia de la lectura de un display que muestra los resultados de la evaluación del sistema con base en el criterio de desempeño preseleccionado. En los sistemas de lazo abierto este criterio es una característica de la señal de entrada y quizá de otros datos, y en los sistemas de lazo cerrado el criterio es además función de la señal de salida.

Los ajustes en la figura 4.6, son efectuados a pesar de que el operador no tenga conocimiento de las funciones que se llevan a cabo dentro del procesador o de las operaciones que efectúan los controladores. El operador no procesa la señal de entrada, éste solo controla los ajustes del procesador para mantener un desempeño óptimo de acuerdo a un criterio de evaluación preseleccionado; de esta manera, la función del operador es puramente de supervisión. En los sistemas adaptables reales el operador es reemplazado por métodos computacionales o por "*Algoritmos Adaptables*" como se sugiere en las figuras 4.5 b) y 4.6 b).

Los "*otros datos*" en estas figuras pueden ser datos sobre el entorno en el que se desempeña el sistema adaptable o en el caso de los procesos de lazo cerrado, pueden ser versiones de la señal de salida deseada.

Cuando se diseña un proceso adaptable muchos factores intervienen en la elección del método ya sea de lazo abierto o lazo cerrado. La disponibilidad de las señales de entrada y de las señales de evaluación del sistema son la mayor consideración que se toma en cuenta, así como la capacidad de cómputo disponible y el tipo de computador requerido para implementar los algoritmos ya que éstos generalmente difieren dependiendo del tipo de proceso a implementar ya sea de lazo abierto o lazo cerrado. Por ejemplo ciertos algoritmos requieren el uso de una computadora digital de propósito general mientras que otros algoritmos pueden ser implementados de manera más económica por medio de chips de propósito específico.

El proceso de adaptación de lazo cerrado tiene la ventaja de ser aplicable en áreas donde no existen o no son conocidos procedimientos analíticos de síntesis. Por ejemplo, donde el criterio de evaluación del error utilizado sean los medios cuadrados o donde los sistemas sean no lineales o variables en el tiempo o donde las señales sean no estacionarias etc. La adaptación de lazo cerrado también puede ser usada eficientemente en situaciones donde los valores de los parámetros de sistemas físicos son variables o no se conocen con precisión; en este caso el proceso de adaptación de lazo cerrado encontrará los valores óptimos de los parámetros del sistema.

En una falla parcial o total del sistema un mecanismo adaptable que continuamente monitorea el desempeño optimizará su funcionamiento por medio del ajuste y la reoptimización de las partes intactas, como resultado, la confiabilidad del sistema puede ser mejorada la mayoría de las veces mediante el uso de un proceso de retroalimentación [8].

El proceso de adaptación de lazo cerrado, no siempre se encuentra libre de dificultades, en ciertas situaciones no se cuenta con una forma única y óptima para evaluar el desempeño del sistema, en tales situaciones la optimización es un proceso aleatorio, en otras el proceso adaptable de lazo cerrado puede ser inestable, por lo cual los resultados pueden divergir en vez de converger. A pesar de estas dificultades los procesos que involucran retroalimentación son técnicas poderosas, ampliamente aplicables para implementaciones adaptables.

4.4.5 Aplicaciones de Procesos Adaptables de Lazo Cerrado

Representando el proceso de adaptación de lazo cerrado o de retroalimentación de la Figura 4.6 b) más específicamente en la Figura 4.7. Llamaremos " x " a la señal de entrada y definiremos como " d " a una señal de que se asume como la salida deseada de un sistema adaptable. La señal d es para nuestros propósitos, "los otros datos" de la figura 4.6 b).

La señal de error, " ϵ " es la diferencia entre la señal de salida deseada y la señal de salida " y " del sistema adaptable. Usando la señal de error, un algoritmo adaptable ajusta la estructura del sistema, alterando su respuesta característica para minimizar medidas del error y de esta forma cerrar el lazo del proceso adaptable.

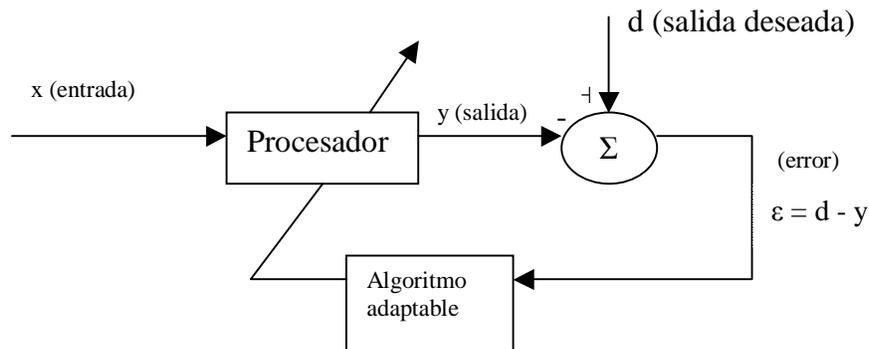


Figura 4.7 Señales involucradas en un proceso adaptable de lazo cerrado

En sistemas adaptables es posible tener diferentes estructuras, aquí mostraremos de una manera general como el esquema de la figura 4.7 es aplicado a diversas situaciones prácticas incluyendo la igualación de canal que es la aplicación de interés en este trabajo.

Algunos ejemplos de estas aplicaciones [8] están dadas en la Figura 4.8 donde se ilustra básicamente el proceso adaptable de lazo cerrado del esquema de la Figura 4.7. Esta estructura es modificada ligeramente para cada una de las aplicaciones pero la esencia se encuentra detrás de cada una de las partes de esta figura; en cada caso, la aplicación específica determina la manera en como se obtiene la señal deseada d .

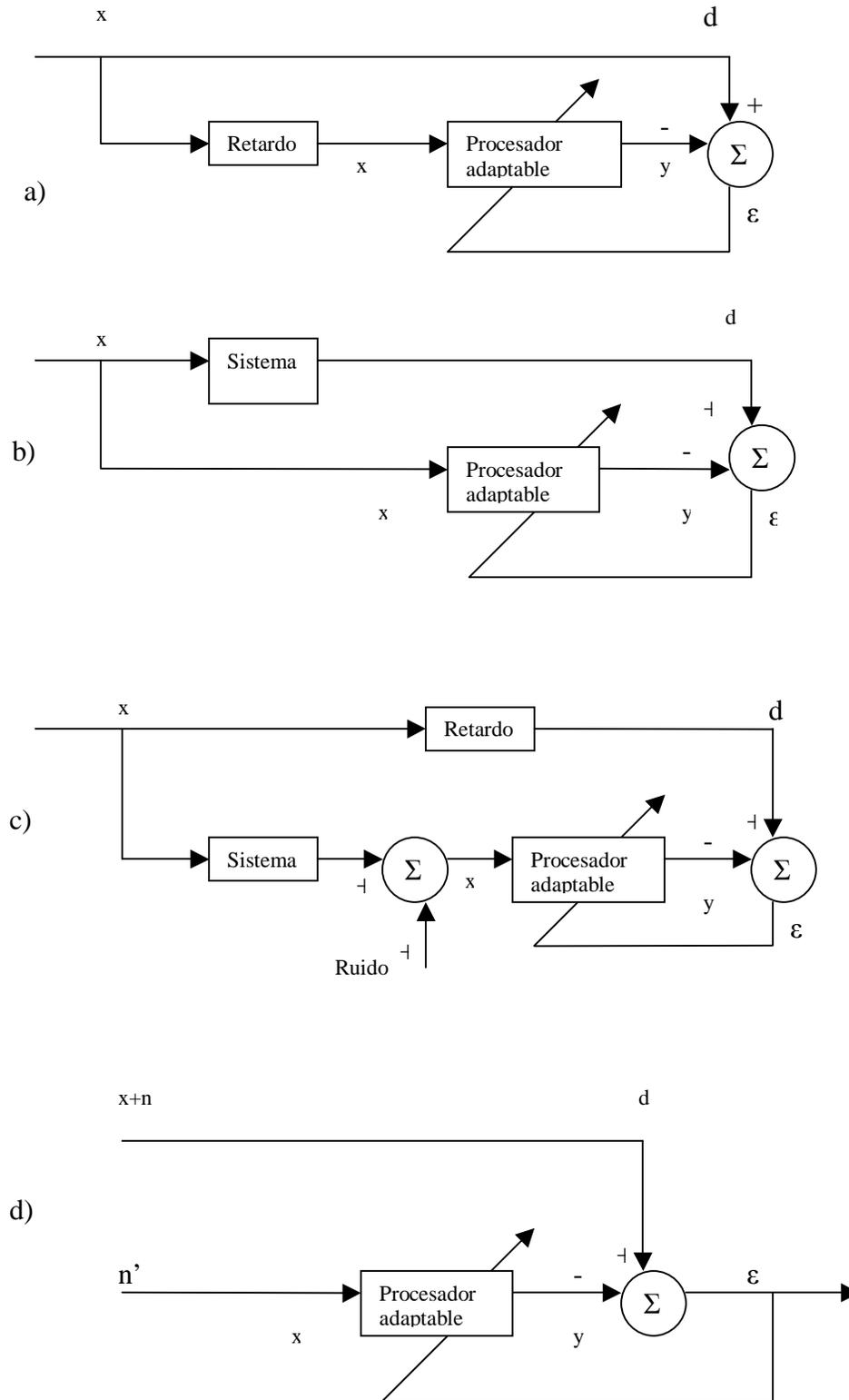


Figura 4.8 Ejemplos de algunas aplicaciones prácticas del esquema de la Figura 4.7: a) Predicción b) Identificación de sistemas (modelado), c) Igualación (deconvolución, filtrado inverso, modelado inverso), d) Cancelación de interferencias

La aplicación de “*Predicción*” de la Figura 4.8 a) es quizá la mas simple de las cuatro, la señal deseada es la señal de entrada, “ x ”, y una versión retardada de esta señal es enviada al procesador adaptable, el cual, debe intentar “*predecir*” la señal de entrada actual con la finalidad de obtener la cancelación entre la señal de salida “ y ” del sistema y la señal deseada “ d ” llevando la señal de error “ ϵ ” hacia un valor que tienda a cero. La predicción en la práctica es utilizada en codificación de señales y reducción de ruido.

La aplicación de “*Identificación de Sistemas*” se muestra en la Figura 4.8 b). Aquí una señal de banda ancha, “ x ”, es la señal de entrada al procesador adaptable y a un sistema desconocido. Para reducir la señal, “ ϵ ”, el procesador adaptable intenta emular la función de transferencia del sistema; después de la adaptación el sistema es identificado, debido a que su función de transferencia es especificada como la función que adquiere el procesador adaptable. La Identificación de sistemas por medio de procesos adaptables se aplica para el modelado de un sistema que varia lentamente para el cual, sus señales de entrada y salida se encuentran disponibles.

La aplicación de “*Igualación*” (con la que se trabaja en esta tesis) se muestra en la Figura 4.8 c), en esta aplicación el procesador adaptable intenta recuperar una versión retardada de la señal, “ x ”, la cual es alterada por el sistema desconocido y por ruido aditivo. El retardo en esta figura corresponde al retardo de propagación de la señal “ x ” entre el sistema desconocido y el procesador adaptable. La Igualación Adaptable en la práctica se utiliza para invertir (deconvolucionar) los efectos de un transductor, de un canal de comunicación, o de algún otro sistema sobre una señal y para producir un modelo inverso de un sistema desconocido.

Finalmente, la Figura 4.8 d) muestra al procesador adaptable en una configuración para la “*Cancelación de Interferencias*”. Aquí la señal “ x ”, es corrompida por ruido aditivo, “ n ”, y una versión distorsionada pero correlacionada del ruido “ n ”, se envía al procesador adaptable. El objetivo del procesador adaptable en este caso es producir una salida “ y ”, que esté altamente correlacionada con “ n ”, de esta forma la salida total “ ϵ ”, será muy semejante a “ x ”.

La aplicación “*Igualación o Modelado Inverso*” mostrada en la Figura 4.8 c), es la aplicación usada en este trabajo, ésta recupera por medio de un sistema adaptable (“*Filtro de Igualación Adaptable*”) una señal distorsionada por un sistema desconocido (“*Canal de Comunicación*”) y por ruido aditivo. La idea detrás de esta aplicación se describe a continuación.

4.5 IDEA GENERAL DEL FILTRO DE IGUALACIÓN ADAPTABLE

Presentemos nuevamente el esquema “*Proceso Adaptable de Igualación*” en este caso para un canal de comunicación en la Figura 4.9.

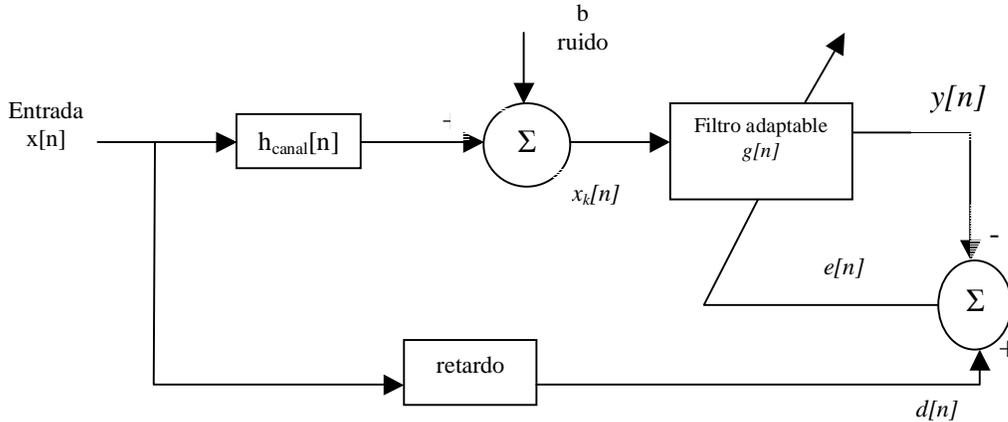


Figura 4.9 Esquema para Igualación de Canal utilizando un Filtro Adaptable

Considerando el problema estándar, dos secuencias en el dominio del tiempo son observadas: $x_k[n]$ y $d[n]$. La secuencia $x_k[n]$ es la señal de entrada $x[n]$ después de su paso por el canal y de la adición de ruido al sistema. Dicha señal se aplica a un filtro adaptable \mathbf{g} , caracterizado por un vector de parámetros \mathbf{g} . La secuencia de salida $y[n]$ se define como:

$$y[n] = g(x_k[n]) \quad \text{ó} \quad y = g(x_k) \quad (4.5.1)$$

Es deseable que el sistema \mathbf{g} opere de forma tal que la salida $y[n]$ sea lo más parecida a la señal $d[n]$, que se toma como referencia; por tanto, la señal de error se define como:

$$e[n] = d[n] - y[n] \quad (4.5.2)$$

La ecuación (4.5.2) debe tomar el mínimo valor posible. Por ejemplo, buscando minimizar este término podemos tomar la cantidad $\overline{e^2[n]}$, donde la barra superior indica algún tipo de promedio en los valores de $e[n]$.

La cantidad $\overline{e^2[n]}$, aunque depende de los parámetros del filtro \mathbf{g} , también puede depender del tiempo n :

$$\overline{e^2[n]} = \varepsilon_n(\mathbf{g}) \quad (4.5.3)$$

Para un esquema con diseño fijo, el problema es encontrar el argumento g que minimiza a $\varepsilon_n(g)$ de la ecuación (4.5.3):

$$\bar{g} = \arg \min \varepsilon_n(g) \quad (4.5.4)$$

El vector obtenido de (4.5.4) representa el filtro que minimiza la función. El cálculo de este vector implica dos pasos: el cálculo de la función promedio (4.5.3) y la búsqueda del valor que minimice la ecuación (4.5.4).

En el proceso adaptable estos dos pasos no son necesarios, ya que el vector definido en (4.5.4) se calcula de una manera recursiva, donde el valor de $g[n]$ cambia cada momento en que un nuevo par de valores $x[n]$ y $d[n]$ se encuentran disponibles. Esto se logra controlando los valores de $g[n]$, con base en la señal de salida $y[n]$ del filtro ajustable. Más precisamente, el parámetro $g[n-1]$ usado por el filtro al tiempo “ n ” es actualizado por un pequeño incremento “ Δ_n ” que está relacionado al error de salida $e[n]$ al tiempo n esto es:

$$g[n] = g[n-1] + \Delta_n(e[n]) \quad (4.5.5)$$

Una característica especial de (4.5.5) es que la señal de salida $y[n]$ se encuentra implícita en $e[n]$; este valor, se mide al tiempo n a la salida del filtro siendo resultado del parámetro $g[n-1]$. Otra característica de Δ_n es que su valor se desvanece conforme lo hace $e[n]$, de esta forma el filtro llega a un estado estable cuando el error se aproxima a cero; en tal situación, los valores de g tienden a un valor óptimo. Esto está directamente relacionado con el hecho de que $\Delta_n(e) \approx 0$ para $e \approx 0$. Cuando el algoritmo está correctamente diseñado, y en un contexto no estacionario el filtro variante con el tiempo brinda en todo momento un desempeño óptimo.

4.5.2 El Filtro Óptimo

La optimización del filtro de igualación g se efectúa actualizando el vector de parámetros g . Varias maneras de implementar el filtro g corresponden a diferentes estructuras para un filtro digital entre las que se encuentran: filtros transversales también llamados filtros de respuesta al impulso finita (filtros FIR), filtros recursivos, filtros Lattice y Ladder [8].

Aunque no siempre, la estructura transversal es la más eficiente, sí es la más simple conceptual y analíticamente hablando. Los filtros transversales están caracterizados por la relación entrada salida:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x[n-i] \quad (4.5.6)$$

Reescribiendo la ecuación (4.5.6) con notación vectorial obtenemos:

$$y[n] = \mathbf{g}^T \mathbf{x}[n] \quad (4.5.7)$$

Donde el vector N-dimensional de parámetros \mathbf{g} se define como:

$$\mathbf{G} \equiv (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})^T \quad (4.5.8)$$

este representa la respuesta al impulso del filtro digital \mathbf{g} , y $\mathbf{x}[n]$ se define como:

$$\mathbf{x}[n] \equiv (x[n], x[n-1], \dots, x[n-N+1])^T \quad (4.5.9)$$

La ecuación (4.5.9) es el vector de entradas. Este vector está formado por muestras sucesivas $x[n-i]$ presentes al tiempo n en la línea de taps retardados que es usado para implementar el filtro digital \mathbf{g} . Un ejemplo de esta estructura se puede observar en la Figura 4.3.

La optimización del vector \mathbf{g} se efectúa con base en una búsqueda del mejor vector \mathbf{g} dado cierto criterio, que minimice la función de error $\mathbf{e}[n]$, sus lineamientos se presentan a continuación.

4.6 FUNCIÓN DE ERROR

Como ya se ha mencionado, el objetivo es que el filtro \mathbf{g} produzca una salida $y[n]$ tan cercana o parecida a la secuencia de referencia $d[n]$, como sea posible. Cuando la entrada es la secuencia $x[n]$, el error se define como:

$$e[n] = d[n] - y[n] \quad (4.6.1)$$

Esta ecuación debe tomar el mínimo valor posible. La mayoría de los criterios de optimización son cuadráticos y esencialmente hay dos criterios dependiendo de las características de la señal $d[n]$ y $x[n]$, que han de ser consideradas. Por ejemplo, frecuentemente $d[n]$ y $x[n]$ pueden verse como cantidades aleatorias con estadísticos bien definidos, en este caso para el proceso de optimización se utiliza el error cuadrático medio (“*Mean Square Error MSE*”). Por otra parte, algunas veces no es posible o no es deseado tomar $d[n]$ y $x[n]$ como secuencias aleatorias; en este caso, la variabilidad involucrada en las muestras puede ser parcialmente removida gracias a un promedio temporal con lo que se obtiene el “error cuadrático mínimo” (LSE), un filtro que se desarrolle bajo este criterio se denomina filtro de mínimos cuadrados (“*Least Square Filter*”).

En este trabajo, las señales utilizadas son de voz, las cuales son señales generadas por un proceso físico, es decir, se generan por medio del funcionamiento del aparato vocal humano, este tipo de señales se consideran no estacionarias por que sus características varían con el tiempo y son aleatorias por que la apariencia de la forma de onda es impredecible [3]. Por tal motivo y para el desarrollo de este trabajo se utiliza el criterio de optimización MSE que se describe a continuación.

4.6.2 El Criterio del Error Cuadrático Medio (MSE)

Tomando el valor esperado (denotado por E) de $e^2[n]$, se obtiene la función de error de los parámetros g del filtro. Esta función es el “*Error Cuadrático Medio*” (MSE):

$$\varepsilon(g) \equiv E((d[n] - y[n])^2) \quad (4.6.2)$$

Aquí las secuencias $d[n]$, $x[n]$ y los parámetros g del filtro presentan valores reales. Usando la ecuación (4.5.7) podemos reescribir (4.6.2) como

$$\varepsilon(g) = E(d^2[n]) - 2E(d[n]x[n]^T)g + E(g^T x[n]x[n]^T g) \quad (4.6.3)$$

Debido a la naturaleza determinística del vector g se puede escribir

$$\varepsilon(g) = P_d - 2R_{xd}^T g + g^T R g \quad (4.6.4)$$

donde P_d denota la potencia de $d[n]$, el vector N-dimensional R_{xd}

$$R_{xd} = E(d[n]x[n]) \quad (4.6.5)$$

y la matriz N x N es R

$$R = E(x[n]x[n]^T) \quad (4.6.6)$$

El vector R_{xd} en (4.6.5) es la correlación cruzada entre la señal de referencia $d[n]$, y el vector de entrada $x[n]$. La matriz R en (4.6.6) es la matriz de covarianza del vector de entrada $x[n]$, nótese que estos dos valores representan valores esperados.

El criterio que se considera en este trabajo es el (MSE). El filtro óptimo es tal que $\varepsilon(g)$ es mínimo; nótese que $\varepsilon(g)$ es una función cuadrática. El término cuadrático es la matriz de covarianza R , por propiedades de este término [7] se encuentra que es invertible y evaluando las derivadas parciales $\partial\varepsilon(g)/\partial g_i$ se obtiene [7]

$$\frac{\partial \mathcal{E}(g)}{\partial g_i} = -2E(d[n]x[n-i]) + 2 \sum_{j=0}^{N-1} R_{i+1, j+1} g_j \quad (4.6.7)$$

Para el vector gradiente

$$\nabla \mathcal{E}(g) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}(g)}{\partial g_0}, \dots, \frac{\partial \mathcal{E}(g)}{\partial g_{N-1}} \right)^T \quad (4.6.8)$$

Lo que resulta en

$$\nabla \mathcal{E}(g) = -2R_{xd} + 2Rg \quad (4.6.9)$$

Ahora, la condición necesaria para que el vector g minimice $\mathcal{E}(g)$ es que produzca un gradiente nulo. Gracias a la invertibilidad de R , existe un vector único que hace nulo al gradiente, ese vector es tal que [7]:

$$R\hat{g} = R_{xd} \quad (4.6.10)$$

Esto es

$$\hat{g} = R^{-1}R_{xd} \quad (4.6.11)$$

La ecuación presentada en (4.6.10) es la forma discreta de la ecuación general de Wiener-Hopf [7] que relaciona el filtro lineal óptimo con la covarianza de las observaciones (R) y con la correlación de las observaciones y la salida deseada (R_{xd}).

Introduciendo (4.6.10) en (4.6.4) de $\mathcal{E}(g)$ se obtiene

$$\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(\hat{g}) + (g - \hat{g})^T R (g - \hat{g}) \quad (4.6.12)$$

Ahora para la siguiente desigualdad [7]

$$\mathcal{E}(g) > \mathcal{E}(\hat{g} \equiv \varepsilon_{\min}) \quad \text{para} \quad g \neq \hat{g} \quad (4.6.13)$$

Se tiene que el filtro óptimo corresponde a un mínimo (no a un máximo). La función $\mathcal{E}(g)$ puede ser representado en el espacio R^{N+1} esta superficie se muestra en la Figura 4.10 para el caso de $N=2$

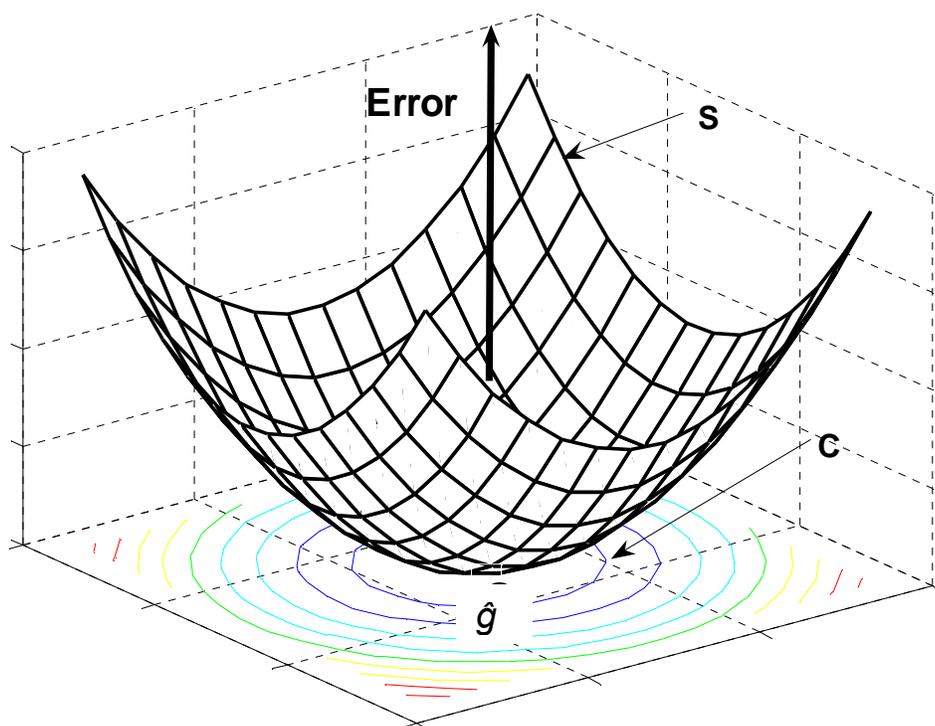


Figura 4.10 La superficie de desempeño MSE. Nótese su forma de tazón hacia arriba.

Para llegar al punto mínimo de la función de error existe un algoritmo particularmente simple de implementar denominado LMS (Least Mean Square). Este algoritmo nos permite determinar el filtro de igualación $\hat{\mathbf{g}}$ óptimo. A continuación se expone la deducción de tal algoritmo.

4.6.3 Recursividad en Algoritmos Adaptables

Para obtener un filtro óptimo que recupere una señal distorsionada por un sistema desconocido a partir de las muestras pasadas de una señal recibida $x[n]$, es necesario calcular el vector (4.6.11) que se muestra nuevamente:

$$\hat{\mathbf{g}} = R^{-1}R_{Xd}$$

El cálculo de este vector implica evaluar los dos valores esperados en R y R_{Xd} definidos en las ecuaciones (4.6.5) y (4.6.6) respectivamente, el cálculo de la matriz inversa R^{-1} y el producto $R^{-1}R_{Xd}$.

Esta forma, de efectuar el cálculo del vector \hat{g} es la llamada optimización directa o también puede llamarse optimización por bloques [7], la idea general se muestra en la Figura 4.11 a)

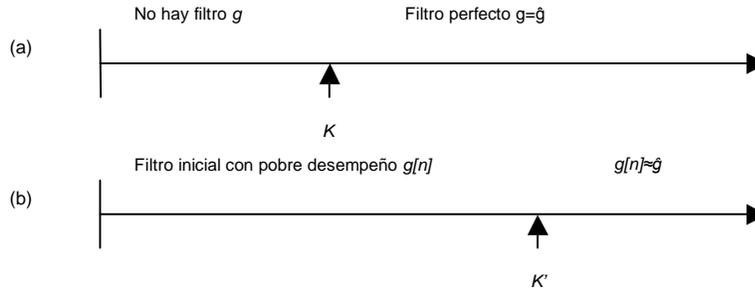


Figura 4.11 Procedimientos de optimización para obtener \hat{g} : a) optimización por bloques (método directo); b) optimización adaptable (método recursivo)

En este método se emplea un preámbulo de duración K muestras, para evaluar los valores esperados R y R_{Xd} , con base en la observación de la señal de referencia $d[n]$ y la señal recibida $x[n]$ para el cual $n \leq K$. Al final de este periodo el vector \hat{g} es calculado usando los valores obtenidos, por tanto, al tiempo $n=K$ un único valor de g muy cercano a \hat{g} se encuentra disponible; con el cual se comienza a estimar nuestra señal de interés. Nótese que no se puede efectuar estimación alguna para un tiempo menor a $n \leq K$, lo anterior impone serias restricciones, por ejemplo, en un sistema de transmisión síncrono donde el mensaje se presenta en un flujo constante de señales que deben ser recuperadas, dicha recuperación no podría efectuarse en sincronía con la señal transmitida debido al preámbulo de duración K necesario para el cálculo del vector de parámetros g .

En la práctica este procedimiento debe repetirse constantemente, debido a que las condiciones de la transmisión pueden variar haciendo que el vector óptimo \hat{g} cambie significativamente, causando que el vector de parámetros g calculado durante el preámbulo previo no se adecue lo suficiente para un desempeño óptimo en la recuperación de la señal de interés. Nótese que toda vez que sea necesario recalcular g , se debe utilizar un nuevo periodo de duración K en el cual no se cuenta con valor alguno g que nos permita efectuar estimaciones de nuestra señal de interés. Esto limita la implementación de este procedimiento para esquemas de funcionamiento en tiempo real por lo cual raramente es usado en el campo de las transmisiones.

El propósito de la optimización adaptable es evitar los periodos vacíos o en blanco $[0, K]$ que nos impiden iniciar o reiniciar sistemas de transmisión síncronos, debido a que no se encuentra disponible valor alguno del filtro g que nos permita hacer estimaciones de la señal de interés.

En este procedimiento, la estimación de la señal de interés con base a la observación de la señal recibida $x[n]$, se desarrolla desde el inicio de la transmisión, es decir, desde el tiempo $n=0$ usando un valor inicial $g(0)$ para el filtro

de estimación; el propósito de $g(0)$ es “estimar” el valor de \hat{g} , con el inconveniente de que este valor puede ser distante del valor del filtro óptimo que buscamos. Sin embargo esta aproximación se mejora conforme pasa el tiempo, usando un algoritmo de actualización recursivo (en línea) de la forma:

$$g[n] = g[n-1] + \mu_n \Delta_n \quad (4.6.14)$$

donde el incremento Δ_n se diseña de tal manera que $g[n]$ llega al valor \hat{g} cuando se incrementa “ n ”, por ejemplo cuando $n=K'$ como se muestra en la Figura 4.11. En (4.6.14) μ_n es un número positivo llamado el tamaño del paso. Además Δ_n debe ser calculado con las muestras pasadas y presentes al tiempo n de la señal de referencia $d[n]$ y la señal de entrada $x[n]$, y no debe involucrar muestras futuras, es decir, las muestras $d[n+k]$ y $x[n+k]$ donde $k>0$, no deben ser tomadas en cuenta para el cálculo de Δ_n .

En la práctica este incremento suele ser fácilmente calculable, con la finalidad de aplicar dicho procedimiento en áreas donde la capacidad de cómputo es limitada.

La idea básica para asegurar que $g[n]$ sea óptimo es hacer que Δ_n tienda a cero, si el error de desempeño del filtro en su estado presente $g[n-1]$ definido como

$$e[n] \equiv d[n] - g^T[n-1]x[n] \quad (4.6.15)$$

tiende a cero. Esto debido a que para optimizar $g[n-1]$, el incremento Δ_n en todo momento usa como principal indicador el valor del error $e[n]$. Con esto parece ser que en caso de que seamos capaces de diseñar el incremento Δ_n de tal manera que $g[n] \approx \hat{g}$ para $n \geq K'$, los dos problemas principales que son el cálculo de R y R_{xd} y la consecuente inversión de R se efectuarían en un solo paso, gracias a las virtudes de la recursividad involucrada en la fórmula de actualización del vector g dada por la ecuación (4.6.14).

En los apartados siguientes se presenta la forma en que el incremento Δ_n es calculado y como se da solución a los dos problemas principales comentados con anterioridad.

4.6.4 Cálculo del Filtro Óptimo \hat{g}

El primer problema al que nos enfrentamos, es al cálculo adecuado de los valores esperados involucrados en la matriz de covarianza R y el vector de correlación R_{xd} , a sabiendas de que los únicos datos disponibles son los valores de las muestras de las secuencias $d[n]$ y $x[n]$. El segundo problema, es pasar de la matriz R a su inversa R^{-1} , que no es un problema trivial como parecería a primera vista, esto debido a la complejidad de cómputo necesario.

Para darnos una idea, es sabido que para efectuar la inversión de una matriz, se requieren de $O(N^3)$ operaciones, (el símbolo O es un estándar matemático que significa “del orden de”) multiplicaciones y de un número N de divisiones, donde N es el número de taps del filtro [7].

Por ejemplo, para la igualación de canal si N fuera igual a 30, significaría que serían necesarias ¡ $N^3=27000$ operaciones! La correspondiente carga computacional por supuesto es inoperable debido a que el igualador resultante tendría una complejidad extrema.

Sin embargo, R , es una matriz de covarianza, de la forma Toeplitz [7] donde todos los elementos paralelos a la diagonal principal son iguales, de esta forma la carga computacional se reduce, debido a que se requieren de $O(N^2)$ multiplicaciones usando algunos algoritmos especiales [7], y de $O(N)$ divisiones.

Para un igualador con 30 taps, las correspondientes 900 multiplicaciones aún representan una alta carga computacional. Además, esta ventaja no está garantizada si R pierde su característica Toeplitz durante el transcurso de la estimación de los valores esperados.

En resumen, se puede decir que el problema de la inversión de la matriz R implica serios problemas computacionales.

4.6.5 El Gradiente Determinístico

En los dos apartados siguientes retomaremos los dos problemas principales, el cálculo de R y R_{Xd} , y se mostrará como un algoritmo recursivo puede dar solución a los dos problemas de manera conjunta. Se procederá en dos pasos: Primeramente, en esta sección se asume que el cálculo de R y R_{Xd} ha sido ya efectuado por lo cual esos valores se encuentran disponibles. Se presenta un método iterativo (fuera de línea) para invertir R . Este método esta libre de divisiones y requiere $O(N^2)$ en lugar de $O(N^3)$ multiplicaciones.

Después en la sección siguiente, gracias a una ligera modificación, el método iterativo se convierte en recursivo efectuando de manera conjunta el cálculo de los valores R y R_{Xd} y la inversión de R , reduciendo la carga computacional a tan solo $O(N)$ multiplicaciones.

Como se dijo anteriormente, asumamos que los valores esperados R y R_{Xd} son conocidos. Por tanto para un vector g de valor conocido, el valor MSE es conocido también, este valor viene dado por

$$\varepsilon(g) = g + Rg - 2\text{Re}\{g^T R_{Xd}\} + P_d \quad (4.6.16)$$

(conociendo también el valor P_d). Entonces dado un valor g , es posible graficar el correspondiente punto M en la superficie $(g, \varepsilon(g))$, como se muestra en la Figura 4.12.

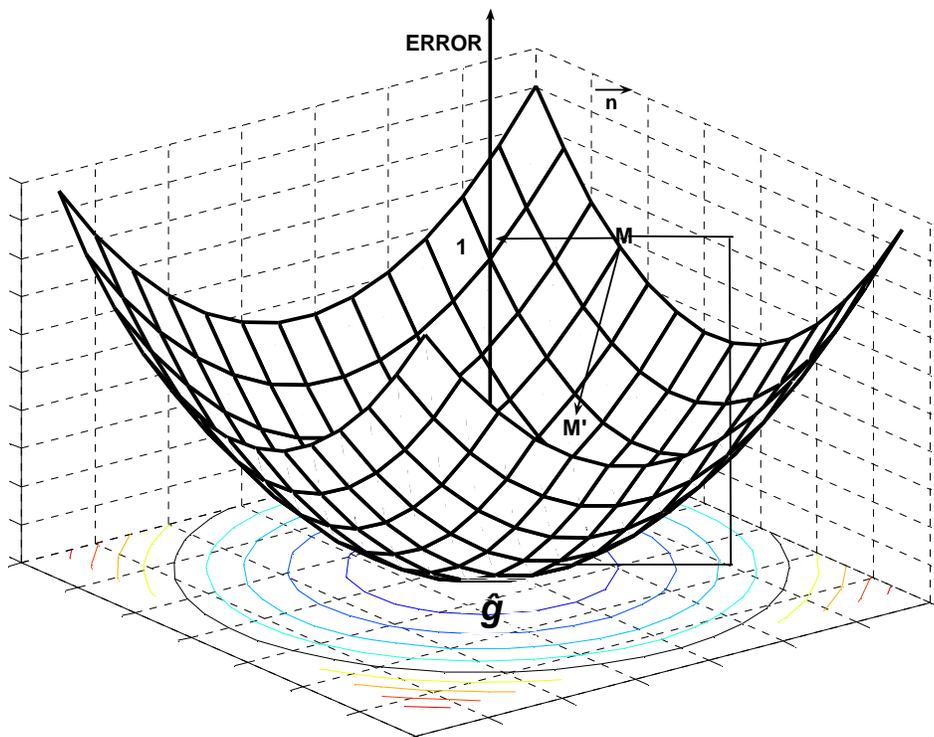


Figura 4.12 El método de los pasos descendentes.

Esta superficie tratada en el apartado 4.6.2 tiene la forma de un tazón donde \hat{g} se encuentra en su punto mínimo.

Es sabido que el vector \vec{n} con coordenadas $-\nabla(g)$ en el espacio de g (el plano horizontal) y $\mathbf{1}$ a lo largo del eje vertical donde $\varepsilon(g)$ es medido, proporciona la dirección de la normal a la superficie apuntando hacia dentro del tazón. De esta manera el semi plano vertical que contiene M y \vec{n} interseca al tazón a lo largo de la línea con el descenso mas pronunciado. Cualquier punto M' de esta línea se encuentra debajo de M , esto es:

$$\varepsilon(M') < \varepsilon(M) \quad (4.6.17)$$

por lo cual, el correspondiente filtro g' es de la forma

$$g' = g - \mu' \nabla \varepsilon(g) \quad \text{con} \quad \mu' > 0 \quad (4.6.18)$$

Esto significa que si μ' es positiva, el algoritmo (4.6.18) busca el punto óptimo en la dirección correcta, por que en esa dirección disminuye el valor del error medio cuadrático (MSE). Por supuesto que μ' no debe ser muy grande para evitar que g' adquiera valores del lado contrario del tazón al que aumenten los valores del error MSE.

Nótese que el algoritmo (4.6.18) es realizable para g , porque la expresión para el gradiente

$$\nabla \varepsilon(g) = 2(Rg - R_{Xd}) \quad (4.6.19)$$

muestra que con el conocimiento de los valores R y R_{Xd} , es posible calcular el valor del incremento en (4.6.18). Esta fórmula (4.6.18) se puede usar una y otra vez para disminuir $\varepsilon(g)$, lo cual produce el siguiente algoritmo recursivo

$$g(k) = g(k-1) - \mu'_k \nabla \varepsilon(g(k-1)) \quad \mu'_k > 0 \quad (4.6.20)$$

A este algoritmo recursivo, se le da el calificativo de iterativo para indicar que la actualización se efectúa sin el uso de nueva información.

Nótese que el valor positivo μ'_k puede depender del número de iteración k . También es importante notar lo siguiente

1.- El número de iteración k de la fórmula iterativa (4.6.20) no tiene nada que ver con el tiempo, por esta razón no se usa el índice n . La implementación de este algoritmo es fuera de línea (off-line), independientemente de que el sistema de transmisión se encuentre enviando datos, alguna computadora evalúa iterativamente el mínimo de la función cuadrática $\varepsilon(g)$, conociendo sus coeficientes R y R_{Xd} .

2.- Al algoritmo (4.6.20) se le denomina determinístico debido a que ninguno de sus elementos es aleatorio. El algoritmo determinístico no es un filtro adaptable en todos los sentidos, pero nos ayuda a descender en la superficie MSE para obtener el filtro óptimo \hat{g} .

4.6.6 El Gradiente Estocástico

Regresemos ahora al problema inicial, al cálculo de los valores R y R_{Xd} . En vez de calcular los valores esperados de estos elementos

$$R = E(X[n]X^T[n]) \quad R_{Xd} = E(X[n]d[n]) \quad (4.6.21)$$

consideremos el valor esperado involucrado en el cálculo del criterio MSE en sí mismo

$$\varepsilon(g) = E(e_g^2[n]) \quad (4.6.22)$$

en donde

$$e_g[n] \equiv d[n] - y_g[n] \quad (4.6.23)$$

y donde

$$y_g[n] \equiv g^T X[n] \quad (4.6.24)$$

para un filtro FIR con respuesta al impulso g . Con la finalidad de simplificar esta exposición y sin pérdida de generalidad, se considera que todas las cantidades representan valores reales en función del tiempo. Ahora, debido a que el gradiente como cualquier derivada es una transformación lineal [7], esta transformación conmuta con el valor esperado. Por lo que de acuerdo con (4.6.22) y (4.6.23)

$$\nabla \mathcal{E}(g) = -2E[e_g[n] \nabla_g (y_g[n])] \quad (4.6.25)$$

El subíndice g se utiliza para indicar en ∇_g con respecto a que variable se efectúa la derivada.

La expresión (4.6.25) muestra que la estructura del filtro juega un rol importante en el algoritmo que estamos tratando [7]. Por ejemplo, solo para el filtro FIR (transversal) se obtiene la expresión más simple para el gradiente de la salida “ y ” en función de los parámetros del filtro esto es

$$\nabla_g (y_g[n]) = X[n] \quad (4.6.26)$$

como puede notarse solo corresponde al vector de entrada y no se requiere de ninguna otra operación para el cálculo de este gradiente. En particular, en este caso es independiente del estado del filtro, propiedad que simplificará algunos de los problemas involucrados. Para cualquier otra estructura, por ejemplo, para un filtro IIR se requerirán cálculos adicionales para evaluar el mismo gradiente.

Basándonos en la ecuación (4.6.25) el algoritmo para el gradiente determinístico dado en (4.6.20) se puede reescribir de la manera siguiente:

$$g(k) = g(k-1) + \mu_k E(\Delta_k) \quad (4.6.27a)$$

$$\Delta_k \equiv e_{g(k-1)}[n] \nabla_{g(k-1)} [y_{g(k-1)}[n]] \quad (4.6.27b)$$

donde $\mu_k \equiv 2\mu_k'$ es un valor positivo. Ya que la ecuación (4.6.27) y (4.6.20) son equivalentes, $g(k-1)$ es también un vector determinístico, por tanto en (4.6.27a) el valor esperado de Δ_k se calcula sobre las cantidades aleatorias $d[n]$ y $x[n]$ involucradas en $y_{g(k-1)}[n]$, y en $e_{g(k-1)}[n]$. Ahora contrariamente al índice de iteración k , la variable n tiene un significado físico, es el índice temporal. En este momento recordemos que el problema a resolver, es la obtención de los valores esperados involucrados en R y R_{Xd} , sin tener que calcularlos directamente, es decir, se debe

utilizar un método iterativo que nos permita llegar a dichos valores, para esto, se utilizará un “*procedimiento*” basado en la ley de los números grandes [7] que nos dice que especialmente para el valor Δ_k , es posible obtener $E(\Delta_k)$ por medio de un promedio sobre la base de tiempo n , para los últimos valores $d[n]$ y $x[n]$ lo cual nos permite llegar al valor que deseamos de manera asintótica.

Nótese que la ecuación iterativa (4.6.27a) agrega incrementos $\mu_k E(\Delta_k)$, los cuales si μ_k y $g(k-1)$ no cambian rápidamente, son casi iguales. De esta manera, la ecuación (4.6.27a) efectúa el promedio antes mencionado, pero sobre la variable k de $E(\Delta_k)$, cada uno de ellos siendo un promedio independiente sobre el índice temporal n . Esto es, una manera de efectuar un doble promedio, sobre k y luego sobre n , lo cual parece redundante. Con esto surge la pregunta de porque efectuar un promedio sobre otro promedio? en vez de simplemente efectuarlo una sola vez? La idea aquí es relacionar $k=n$ en la fórmula (4.6.27b) de esta manera las iteraciones sobre k implementaran el promedio necesario para el calculo de $E(\Delta_k)$ sobre la variable n , de esta manera no necesitamos el cálculo de dicho valor esperado, por que este es efectuado por medio del promedio anteriormente comentado. Esto produce el nuevo algoritmo:

$$g[n] = g[n-1] + \mu_n e_{g[n-1]}[n] \nabla_{g[n-1]}(y_{g[n-1]}[n]) \quad (4.6.28)$$

De la misma forma que el algoritmo determinístico (4.6.20) este es un mecanismo recursivo, donde las iteraciones se efectúan sobre la base temporal n . Aunque este algoritmo se deriva de una manipulación muy simple de la ecuación (4.6.27) que es equivalente en forma a (4.6.20), esta nueva ecuación (4.6.28) es conceptualmente muy diferente; Aunque, el algoritmo determinístico (4.6.27) es un procedimiento iterativo fuera de línea el nuevo algoritmo efectúa los cálculos en línea.

Para cada valor de n , un nuevo par de valores $d[n]$ y $x[n]$ se encuentran disponibles para alimentar al mecanismo de actualización que permite el cálculo del incremento en concordancia con (4.6.28). Produciéndose así un nuevo filtro $g[n]$ para cada valor de n de manera simultanea con el sistema de transmisión.

Esta forma de operación concuerda con el concepto designado a la palabra “*adaptabilidad*”. De esta manera (4.6.28) describe un algoritmo adaptable.

En (4.6.28) la notación es muy complicada pero tiene la ventaja de mostrar todas las dependencias de cada variable. La notación que se muestra en la ecuación (4.6.29) es menos explicita pero mas simple, y comúnmente mas usada

$$\begin{aligned} y[n] &\equiv y_{g(n-1)}[n] \\ e[n] &\equiv d[n] - y_{g(n-1)}[n] \end{aligned} \quad (4.6.29)$$

de esta manera el algoritmo (4.6.28) se reescribe

$$g[n] = g[n-1] + \mu_n e[n] \nabla_{g[n-1]} y[n] \quad (4.6.30)$$

Al algoritmo anterior se le denomina “*El Algoritmo del Gradiente Estocástico*”. El filtro $g[n]$ es estocástico debido a que las cantidades $e[n]$ y $y[n]$ dependen directamente de las cantidades aleatorias $d[n]$ y $x[n]$.

4.7 EL ALGORITMO LMS

El algoritmo LMS es un caso especial del algoritmo del gradiente estocástico cuando el filtro empleado es un filtro transversal FIR para el cual [7]:

$$y_{g[n-1]}[n] = g^T[n-1]X[n] \quad (4.7.1)$$

como se comentó anteriormente, para esta estructura de filtro

$$\nabla_{g[n-1]}(y_{g[n-1]}[n]) = X[n] \quad (4.7.2)$$

De aquí que el algoritmo adaptable del gradiente estocástico simplifique su forma a

$$g[n] = g[n-1] + \mu_n X[n]e[n] \quad (4.7.3)$$

Mas generalmente, se tiene lo siguiente

$$g[n] = g[n-1] + \mu_n X[n]e[n] \quad (4.7.4)$$

$$e[n] = d[n] - g^T[n-1]X[n] \quad (4.7.5)$$

La ecuación (4.7.5) se denomina “*Ecuación de Filtrado*”, ésta evalúa el error entre la señal de referencia $d[n]$ y la salida del filtro en su estado actual $g[n-1]$ al tiempo n .

La ecuación (4.7.4) se denomina “*Ecuación de Adaptación*”. El procedimiento que se comentó en la sección anterior está implícito en el signo “+” de dicha ecuación. Esta suma da solución al par de problemas planteados, efectúa tanto el promedio

temporal requerido para el cálculo de los valores esperados en R_{Xd} y R , como las iteraciones requeridas para invertir la matriz de covarianza y minimizar el MSE. Cuando el tamaño del paso $\mu_n = \mu$ es una constante, el algoritmo adaptable (4.7.4) y (4.7.5) se conoce generalmente como “Least Mean Square” (LMS).

4.7.2 Implementación del Filtro Inverso a partir del Algoritmo LMS

La implementación del filtro en base al algoritmo LMS se muestra en la Figura 4.13

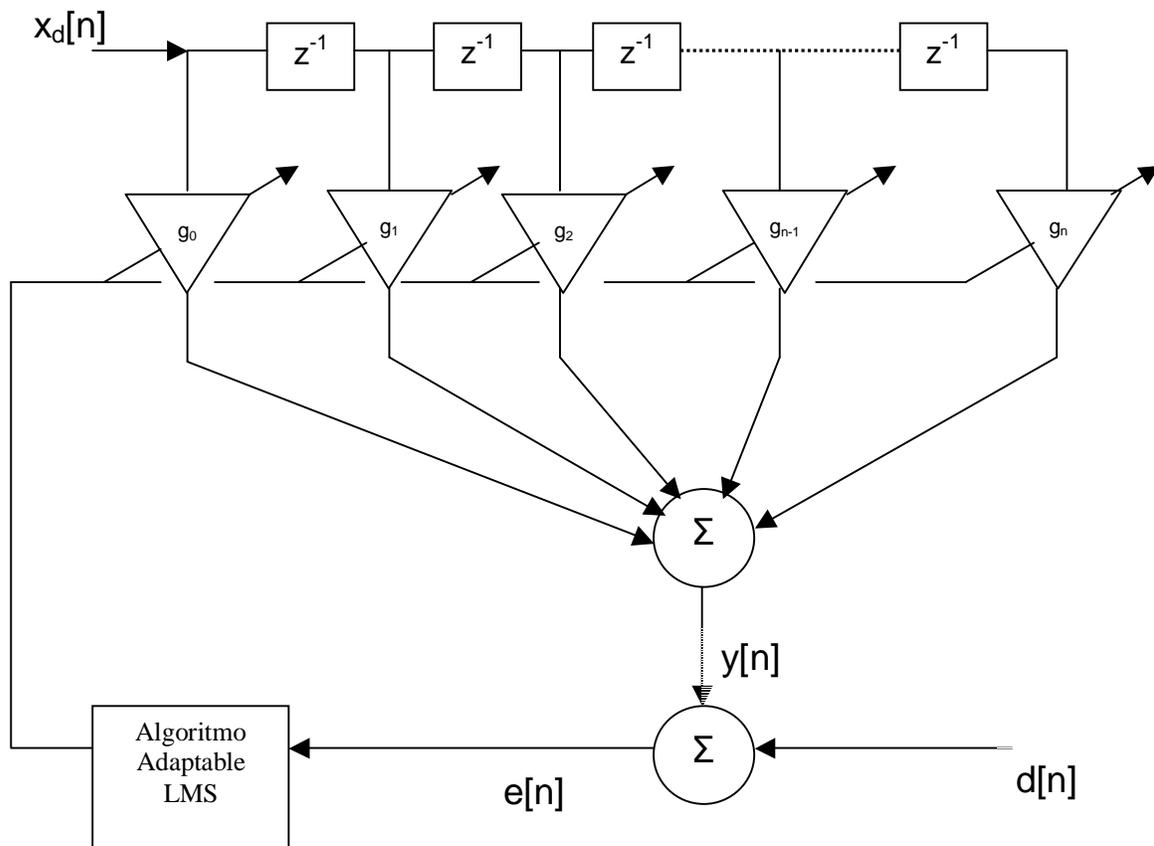


Figura 4.13 El filtro a partir del algoritmo LMS

Hay dos bloques, el variante con el tiempo, es el bloque de filtrado con los taps de la línea de retardo incluyendo $(N-1)$ elementos de retardo (las cajas con las “ z^{-1} ”), con N multiplicaciones, correspondientes al número de elementos en g . La salida $y[n]$ de este filtro en su estado $g[n-1]$, es usado para obtener la señal de error $e[n]$, basado en el valor de la señal de referencia $d[n]$. Después $e[n]$ entra en el bloque de adaptación representado por el algoritmo adaptable LMS. Lo anterior incluye N operaciones recursivas de primer orden en paralelo, una para cada Tap g_j , $j=1, \dots, N$, el “Tap” presente $g_j[n-1]$ es alimentado por el circuito de adaptación para evaluar el siguiente valor $g_j[n]$.

4.7.3 Ventajas del Algoritmo LMS

El algoritmo LMS tiene un gran número de ventajas, es simple, eficiente, robusto y numéricamente estable. Estas ventajas se comentan en lo que sigue.

Simplicidad: Usualmente la selección del tamaño del paso μ , no es crítico, éste suele ser tomado como potencias negativas de 2 [7]:

$$\mu = 2^{-p} \quad \text{con } p \text{ entero} \quad (4.7.6)$$

De ésta manera, efectuar la multiplicación por μ en el bloque de adaptación simplemente requiere cambiar por “ p ” la representación binaria, y esta operación requiere de un costo computacional insignificante. Con ésto, los dos bloques (adaptación y filtrado) implican exactamente la misma complejidad, una multiplicación y una suma por cada coeficiente; ésto es una cantidad total de $2N$ multiplicaciones (haciendo caso omiso de las sumas), y no se encuentra involucrada división alguna. En particular su costo computacional es mucho menor que el involucrado en el procedimiento de optimización descrito en la sección 4.6.3 donde al tiempo K , la estimación \hat{R} la matriz de covarianza R y su correspondiente inversión deberían ser calculadas con al menos $O(N^2)$ multiplicaciones. Tal inversión efectuada en pocas iteraciones temporales requiere de medios computacionales significativos los cuales no serán usados después del preámbulo. Posterior el valor encontrado para \hat{g} solo es usado por la etapa de filtrado que requiere de solo N multiplicaciones. De esta manera en el procedimiento de optimización por bloques, los medios computacionales no son usados de la mejor manera. El filtro LMS tiene su eficiencia computacional distribuida uniformemente en el tiempo. La ausencia de divisiones es otra ventaja del filtro LMS comparado con otros algoritmos adaptables [7].

Eficiencia: La eficiencia del algoritmo LMS radica en que provee un filtro $g[n]$, el cual de modo probabilístico, tiende hacia el filtro óptimo \hat{g} . Esto se mantiene independientemente de el contexto, esto es, de las condiciones iniciales (los valores en $H(0)$), e independientemente del entorno (el canal de transmisión o el nivel del ruido) [7].

Robustez: El algoritmo LMS es robusto, en particular contra las variaciones del entorno. Si el entorno presenta variaciones con el tiempo, el algoritmo adaptable es capaz de seguir dichas variaciones. Esta propiedad se denomina “*Tracking*” [7].

Estabilidad numérica: El algoritmo LMS es numéricamente estable, debido a que la acumulación de errores de redondeo no propicia divergencia para los valores de $g[n]$, durante su funcionamiento [7].

En resumen, el algoritmo LMS es realmente funcional, por tal motivo, ha servido como base de comparación para el diseño de otros algoritmos adaptables a lo largo de la historia y por lo cual es el método seleccionado para desarrollar este trabajo.

4.8 RESUMEN

En este apartado se presentaron las ideas que permiten analizar las funciones de transferencia de sistemas lineales e invariantes en el tiempo, las características y requisitos que los sistemas deben reunir para que exista su sistema inverso, además se mostró como la función de transferencia de un sistema de transmisión de pulsos en banda base expone los parámetros involucrados en la determinación de un sistema inverso que reduzca la interferencia intersímbolo. Se propusieron dos soluciones, el filtro de igualación fijo y el adaptable y se explicó porqué se opta por el filtro de igualación adaptable debido a las consideraciones prácticas y por que brinda una mejor solución que el anterior para un ambiente de telecomunicaciones real. Se mostró la teoría en que se fundamenta el desarrollo del filtro adaptable así como las ventajas del método empleado.

Este capítulo es la base teórica que nos permite brindar solución al problema de la *Interferencia Intersimbólica*, el siguiente capítulo tiene que ver con la implementación de los sistemas y la aplicación de todas las ideas mostradas con anterioridad.

5 IMPLEMENTACIÓN DEL IGUALADOR ADAPTABLE

En este capítulo se describen los pasos que se llevan a cabo en la simulación del sistema de comunicación propuesto, comenzando desde la adquisición de la señal de voz hasta la decodificación y reconstrucción del mensaje en el extremo receptor. Se hace énfasis en la implementación de los *Filtros de Igualación* tanto en el esquema *Fijo* como en el *Adaptable*, debido a que son las soluciones propuestas en este trabajo para el problema de la *Interferencia Intersimbólica*, se muestran además, las consideraciones prácticas que hacen viable o no la implementación de cada esquema.

El sistema de comunicación propuesto se divide en tres bloques principales, en el primer apartado se describen los pasos que se siguieron para la conversión de la señal de voz analógica en una secuencia de datos digitales en serie denominada señal PCM, en el segundo apartado se describe al canal de comunicación y en el tercer apartado se describe al receptor donde se encuentra el sistema igualador.

5.1 TRANSMISOR

La Figura 5.1 muestra los bloques empleados en la simulación del sistema de comunicación digital propuesto en este trabajo. El esquema mostrado en esta figura es la aplicación del esquema general de la Figura 2.10. Esta figura divide el sistema de comunicación en tres partes:

1. *El Transmisor*
2. *El Canal*
3. *El Receptor*

En este primer apartado se describen los bloques que integran al “**El Transmisor**”. El primer bloque representa al transductor que efectúa la conversión de la señal de voz en una señal eléctrica. En este trabajo esta señal de voz es adquirida y grabada por el puerto de entrada de audio de una PC por medio del comando “**wavrecord**” del software **Matlab**, este comando nos permite establecer algunos parámetros en la grabación de la señal como por ejemplo: el número de muestras a grabar, la frecuencia de muestreo y el formato numérico en el que las muestras de dicha grabación son representadas; esta función tiene la estructura siguiente.

$$y=\text{wavrecord}(n,Fs,'dtype'); \quad (5.1.1)$$

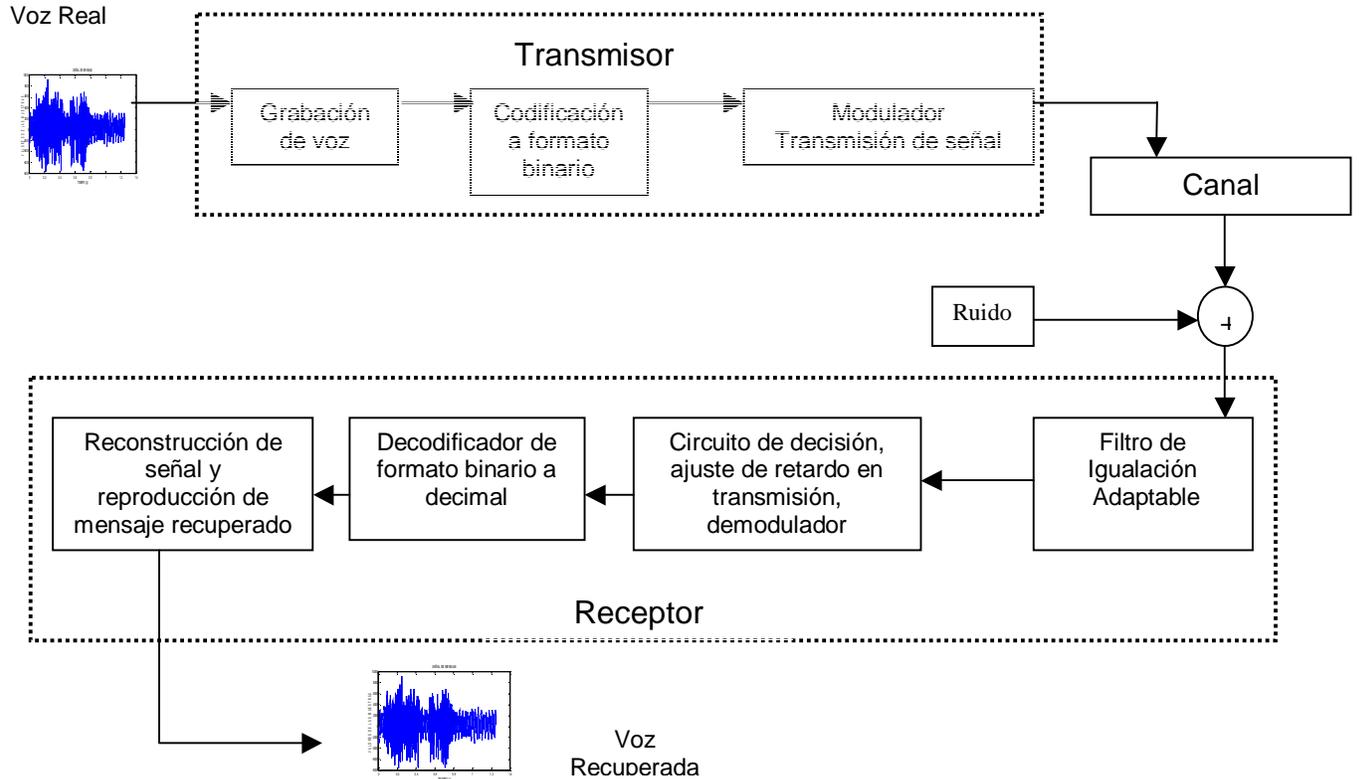


Figura 5.1 Esquema general para la simulación del sistema de comunicación empleado.

Este comando asigna a la variable “ y ” un número “ n ” de muestras tomadas de una señal de audio usando el puerto de entrada de audio de una PC a una frecuencia de muestreo “ F_s ” y en un formato numérico declarado por la cadena de caracteres “ $dtype$ ”.

Para el desarrollo de este trabajo esta función tomó los siguientes valores:

$$voz=waverecord(10000,8000,'int16'); \quad (5.1.2)$$

El mensaje grabado corresponde a una voz masculina en lo que podría ser el saludo de inicio de una conversación telefónica: “**Hola buenas tardes**”, esta señal tiene una duración de 1.25 segundos y una longitud de 10000 muestras. Esta señal se muestra en la Figura 5.1

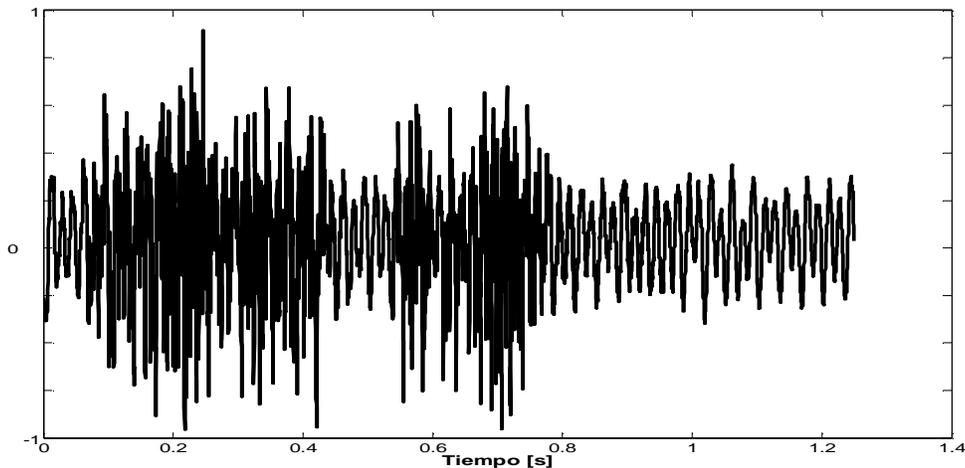


Figura 5.1 Forma de onda obtenida para la señal de voz masculina “hola buenas tardes”

La frecuencia de muestreo en el comando (5.1.2), “***F_s***”, toma el valor de 8000 Hz éste es el valor estándar para el muestreo de señales de voz y el parámetro “***dtype***” corresponde al formato numérico *int16* en el cual los valores de las muestras se representan como números de valor entero tanto positivos como negativos con una longitud de palabra de 16 bits. Aunque el estándar para señales de voz es de 8 bits/muestra se decidió tomar 16 bits/muestra para una señalización de alta calidad y para duplicar la velocidad de transmisión estándar de 64kbps a 128kbps y mostrar que el igualador adaptable nos permite aumentar la velocidad de transmisión a pesar de la ISI.

5.1.2 Codificación a Formato Binario

Al terminar el proceso de adquisición de la señal de voz, cada elemento de la variable “***voz***”, un vector columna de 10000×1 en base 10 con valores tanto positivos como negativos, se convierte a una representación en base 2, es decir, se obtiene el valor binario de cada elemento incluyendo la representación de su signo.

Para representar cada elemento se usa un formato denominado “***True-Magnitude Form***” [10], donde el valor absoluto de cada elemento es convertido a su valor binario equivalente y el bit en la posición más significativa MSB se ajusta con un **1** para representarlo como un número negativo, o con un **0** para representarlo como un número positivo. La conversión a formato binario se hace con el objeto de mostrar el efecto de la ISI del canal sobre los símbolos digitales, y la recuperación que se lleva a cabo en el igualador de canal.

Ejemplos de esta conversión se muestran en la tabla 3.1 la cual se reproduce aquí en la tabla 5.1 por conveniencia de la presentación.

Muestra	Valor de muestra cuantizada	Palabra en formato (True-Magnitude Form)
61	-757	1000001011110101
62	-249	1000000011111001
63	-165	1000000010100101
64	237	0000000011101101
65	303	0000000100101111
66	430	0000000110101110

Tabla 5.1. Conversión de muestras con valor decimal a binario en formato *True Magnitud Form*.

Para efectuar esta conversión en el vector “**voz**” se localiza e identifica la posición de los valores positivos o negativos para después extraer ese signo y posteriormente situarlo en el MSB de las magnitudes convertidas en binario. Para efectuar esta tarea se usan los siguientes comandos:

$$\text{voz}=\text{double}(\text{voz}); \quad (5.1.3)$$

$$\text{signos}=\text{sign}(\text{voz}); \quad (5.1.4)$$

Con el comando (5.1.3) se convierte el formato numérico del vector **voz** a un formato *double* (doble precisión) para poder ser operado por comandos subsecuentes. El segundo comando obtiene un vector columna con valores -1 si la muestra evaluada en **voz** es < 0 y con 1 si el valor de la muestra es > 0 , después que hemos identificado las posiciones de los signos convertimos cada valor del vector **voz** a un valor absoluto con el comando

$$\text{datospositivos} = \text{abs}(\text{voz}); \quad (5.1.5)$$

debido a que el comando para la conversión de números decimales en binarios solo opera sobre valores positivos. La conversión a binario se efectúa con el comando:

$$\text{datosbinarios}=\text{de2bi}(\text{datospositivos}, 16, \text{'left-msb'}); \quad (5.1.6)$$

Con el comando (5.1.6) se obtiene una matriz de 10000×16 que contiene en cada renglón la correspondiente representación binaria de cada muestra del mensaje en valor absoluto con una longitud de palabra de 16 bits y donde el bit mas a la izquierda es el bit mas significativo MSB. Para representar el signo de cada muestra en el MSB se efectúa lo siguiente:

Con el vector *signos* (5.1.4) creamos un nuevo vector **B**

$$\text{B}=\text{sign}(\text{signos}) < 0; \quad (5.1.7)$$

El comando “*sign*” arroja un vector columna con valores “1” en las posiciones de los números negativos y con valores “0” para las posiciones de los valores positivos, este renglón se utiliza para reemplazar la primera columna de la matriz datos binarios. Esto se efectúa con el comando:

$$\text{datosbinarios}(:,1)=B; \quad (5.1.8)$$

Finalmente cada renglón de la matriz *datosbinarios* obtenida después de ejecutar el comando (5.1.8) representa la codificación en valor binario de cada muestra del mensaje original con formato *True Magnitud Form* [10] con una longitud de 16 bits por palabra.

5.1.3 Modulador Para la Transmisión de la Señal en PCM

Una señal PCM se define como un flujo continuo en serie de datos binarios [5]. Es decir la señal PCM será un vector renglón con cada uno de los bits que representan cada muestra del mensaje. Para convertir nuestra matriz *datosbinarios* en un vector de 1×160000 que represente una secuencia en serie de datos binarios; *datosbinarios* se opera de la siguiente forma:

$$\text{senal}=\text{datosbinarios}'; \quad (5.1.9)$$

$$\text{SENALPCM}=\text{senal}(:); \quad (5.1.10)$$

El primer comando traspone la matriz *datosbinarios* con lo cual se obtiene una matriz de 16×10000 donde cada columna representa cada muestra de nuestra señal codificada en binario y el segundo comando convierte a la matriz *senal* en un vector renglón *SENALPCM* de 1×160000 el cual representa la señal PCM que ha de ser transmitida por el canal telefónico y sobre el que se efectuarán todas las manipulaciones involucradas en el sistema de comunicación.

Para poder visualizar con detalle la señal obtenida de este proceso los primeros 64 valores y no los 160000 de *SENALPCM* se muestran en la Figura 5.2. La Figura 5.3 muestra el código de línea unipolar sin retorno a cero (empleado en este trabajo, véase capítulo 3) para la señal mostrada en la Figura 5.2.

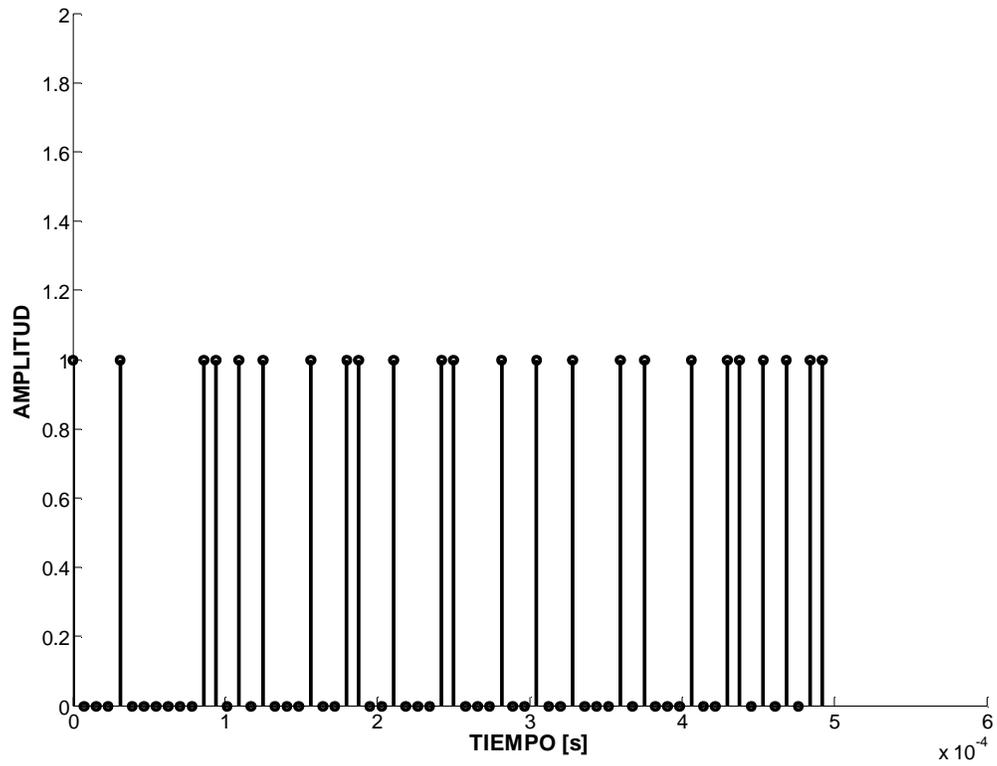


Figura 5.2 Primeros 64 valores de la señal PCM que se transmite por el canal telefónico

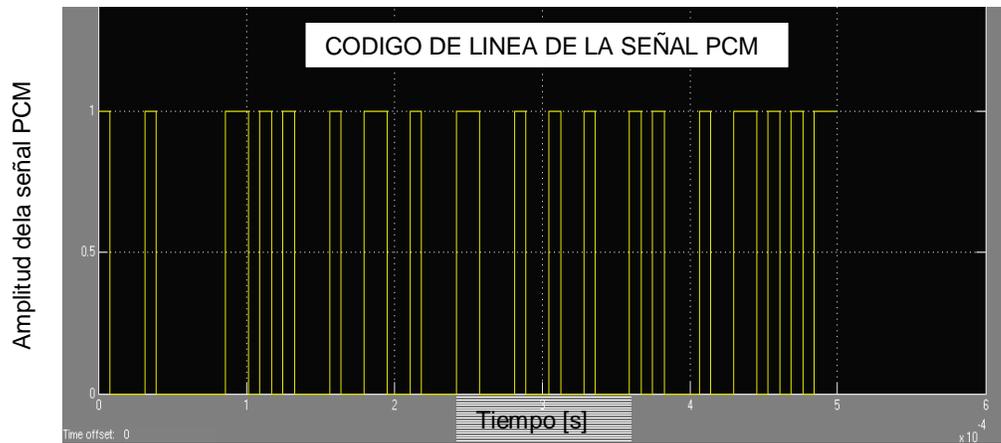


Figura 5.3 Código de línea unipolar sin retorno a cero de los primeros 64 valores de la señal PCM transmitida por el canal telefónico

5.2 CANAL DISPERSIVO

La segunda parte del sistema de comunicación de la Figura 5.1 es el *Canal Dispersivo*, este se define como aquel canal en el que las componentes de una señal correspondientes a diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades [8]. En este trabajo se emplea el modelo usual de un canal telefónico dado por la ecuación (5.2.1) [9].

$$H(z)=0.3887+z^{-1}+0.3887z^{-2} \quad (5.2.1)$$

El modelo dado por (5.2.1) tiene la siguiente respuesta al impulso:

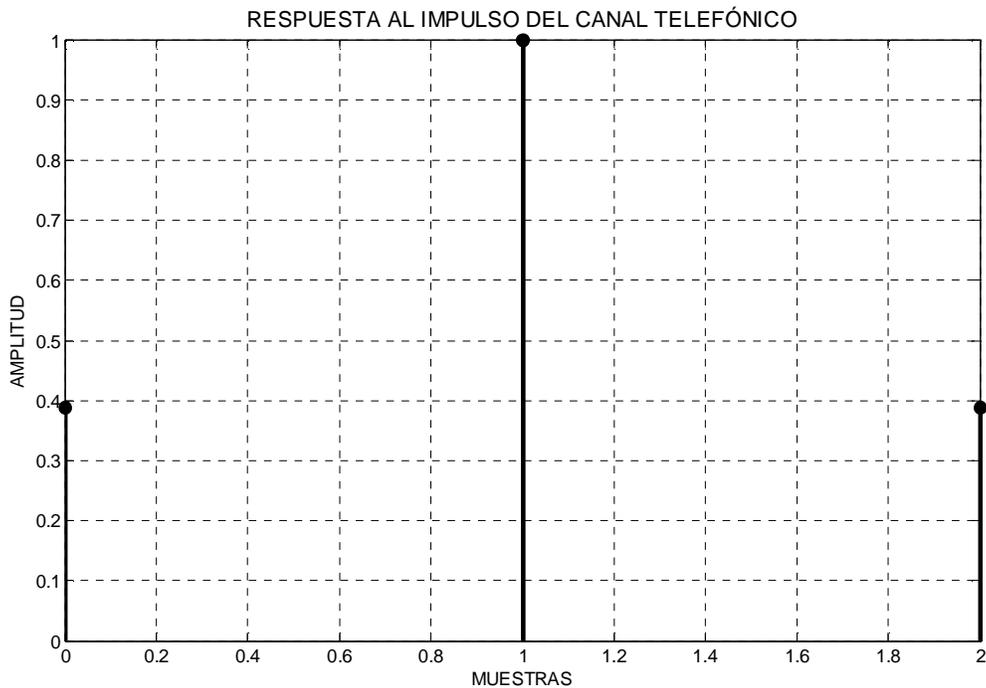


Figura 5.4 Respuesta al impulso del modelo de canal telefónico

Las respuestas en magnitud y en fase de la respuesta en frecuencia de este modelo, son mostradas en el capítulo 3 y se reproducen a continuación:

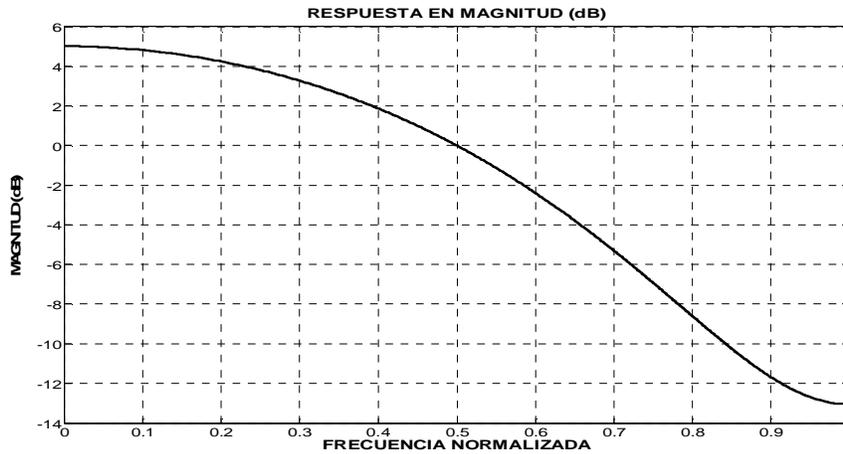


Figura 5.5 Resposta em magnitude do modelo do canal telefónico empregado

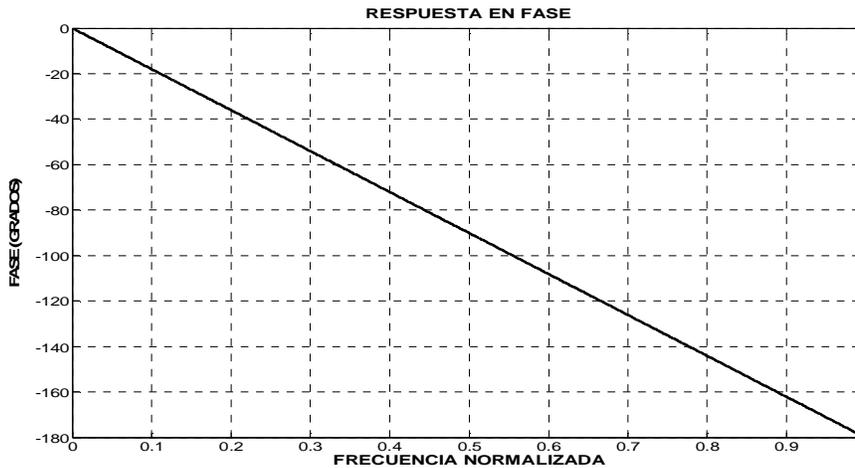


Figura 5.6 Resposta em fase do modelo do canal telefónico empregado

Estas propiedades do canal telefónico são as que provocam distorção sobre a sinal PCM em su transmissão devido a su comportamento como un filtro *pasobajas*. Además este sistema resulta ser de fase no mínima o de fase mixta, como lo indica su patrón de polos y ceros Figura 5.7, característica que impondrá restricciones en el tipo de *Filtro de Igualación* a implementar dadas las propiedades de estabilidad del sistema inverso. A continuación se describe el procedimiento para producir distorção sobre la señal PCM.

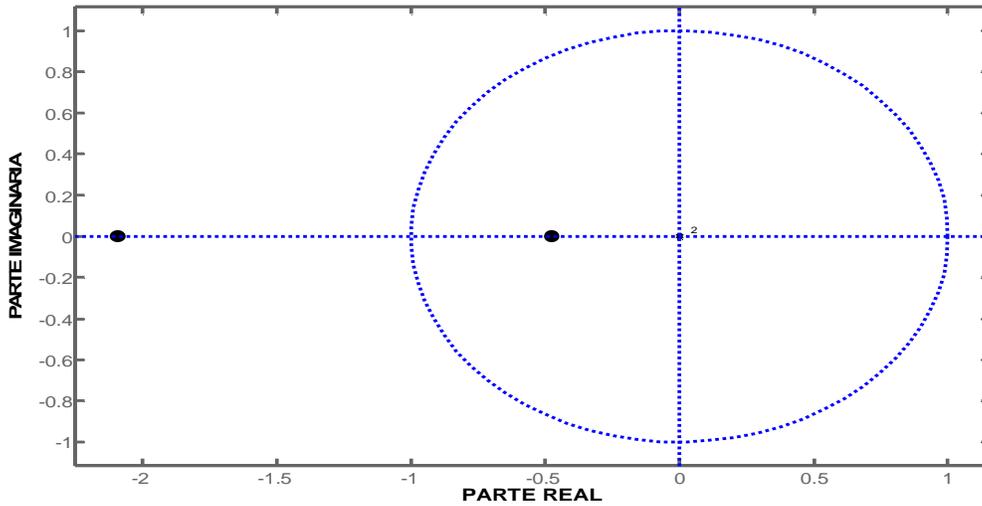


Figura 5.7 Patrón de Polos y Ceros del canal telefónico. El polo fuera del círculo unitario muestra que el sistema es de fase no mínima o de fase mixta.

La señal distorsionada por el canal se obtiene como resultado de la acción de filtrado de la señal PCM por el modelo del canal telefónico como se sugiere a continuación utilizando el comando **filter** de **Matlab** que se basa en la ecuación (2.2.10):

$$\text{Senaldistorsionada} = \text{filter}([0.3887, 1, 0.3887], 1, \text{"SENALPCM"}); \quad (5.2.2)$$

Este comando produce la señal que se muestra en la Figura 5.8.

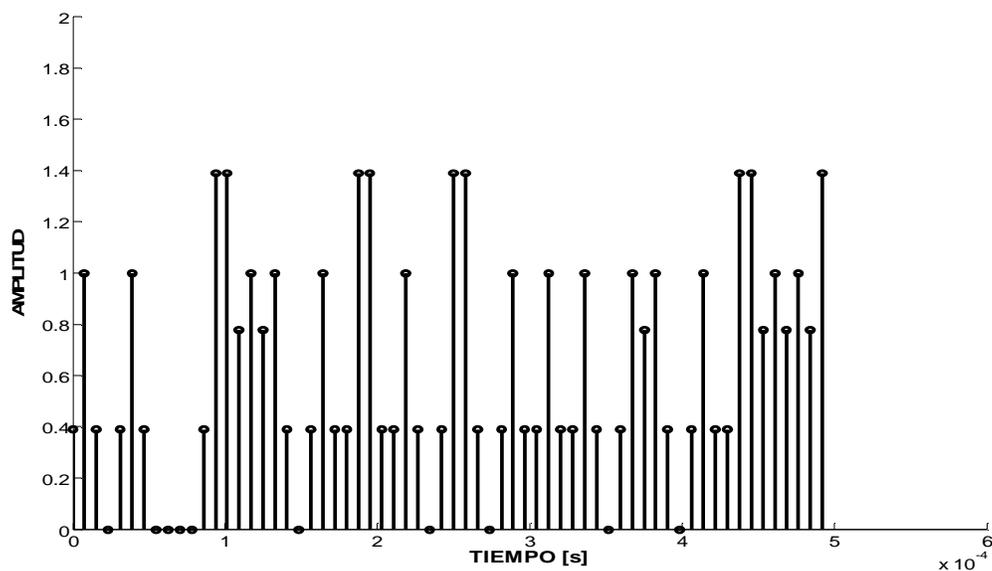


Figura 5.8 Primeros 64 valores de la señal PCM distorsionada por el canal telefónico

Esta señal a través del canal tendría la siguiente forma

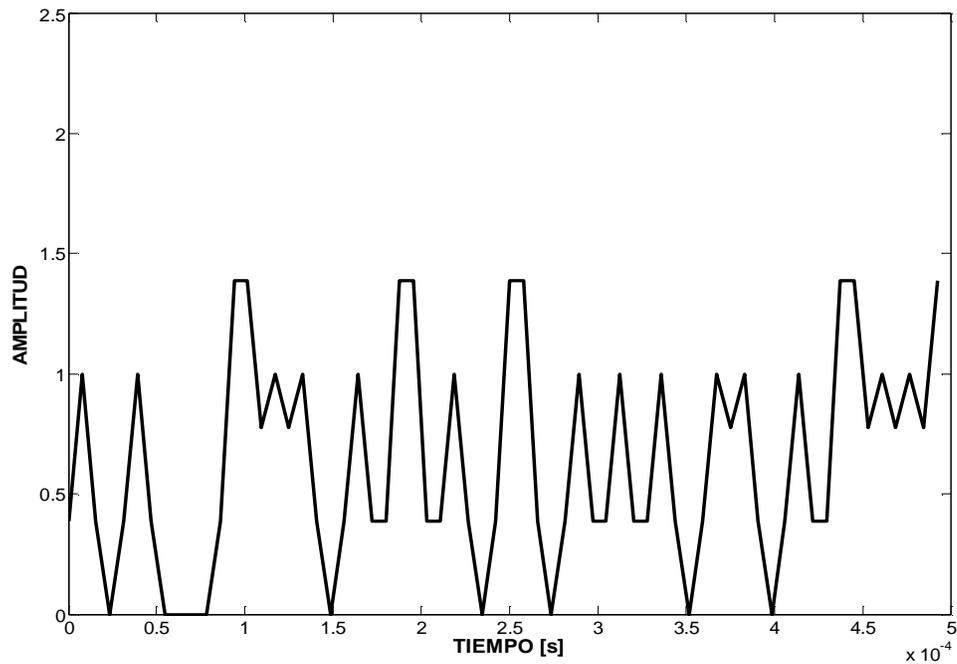


Figura 5.9 Primeros 64 valores de la señal PCM distorsionada por el canal telefónico

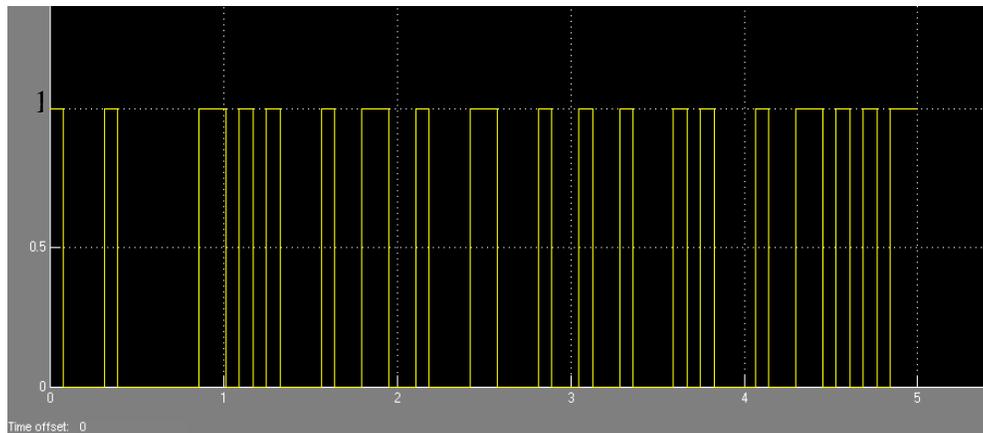


Figura 5.3 Los 64 valores de la Señal PCM sin distorsión, reproducida aquí para comparación con Figura 5.9

Esta señal distorsionada (compárese con las Figuras 5.2 y 5.3) no podría ser decodificada en el receptor para reconstruir el mensaje originalmente transmitido. El problema de la *Interferencia Intersimbólica* se hace evidente en las Figuras 5.8 y 5.9, los símbolos interfieren entre sí, haciendo imposible la detección de los símbolos individuales; además si se toma en cuenta que el sistema es susceptible al ruido como lo sugiere la Figura 5.1, tenemos una mayor complicación en la detección de los símbolos y por lo tanto una mayor probabilidad de ocurrencia de errores de bit.

Los problemas que ocasiona la ISI en la transmisión de señales digitales, es lo que nos proponemos resolver en este trabajo por medio de la implementación de un *Filtro de Igualación*, además se probará su desempeño ante la interferencia del ruido, estos puntos se muestran a continuación.

5.3 RECEPTOR

Como se observa en la Figura 5.1 el primer bloque contenido dentro de “*El Receptor*” es el *Filtro de Igualación*. El objetivo de este bloque es invertir los efectos producidos por el canal telefónico sobre la señal transmitida para que los demás bloques puedan operar sobre ella y como consecuencia final se pueda reconstruir el mensaje originalmente transmitido. El primer esquema que se propone para la solución de la **ISI** es el “*Filtro de Igualación Fijo*”. La viabilidad de este esquema se analiza a continuación.

5.3.2 Filtro de Igualación Fijo

La primera solución que se plantea en este trabajo es un “*Filtro de Igualación Fijo*” para ello recurrimos al procedimiento mostrado en el apartado 4.3.2 y más específicamente a la ecuación (4.3.4) que se reproduce aquí en la ecuación (5.3.1).

$$G(j\omega) = \begin{cases} \frac{e^{j\omega\alpha_0}}{H_{canal}} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Esta ecuación representa el sistema inverso del canal telefónico. El procedimiento del apartado 4.3.2 indica que debemos obtener la transformada inversa de $G(j\omega)$ como primer paso; para ello se debe contar con el sistema inverso del canal telefónico que define al sistema $G(j\omega)$. El sistema inverso de un sistema $H[z]$ viene dado por la ecuación (4.1.8) la cual se reproduce aquí por conveniencia:

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} \quad (5.3.2)$$

La ecuación (5.3.2) para nuestra aplicación específica toma la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{1}{0.3887 + z^{-1} + 0.3887z^{-2}} \quad (5.3.3)$$

La ecuación (5.3.3) representa el sistema inverso del canal telefónico y es el sistema que en teoría conectado en cascada con el canal telefónico invertiría los efectos que este produce sobre la señal PCM transmitida. Tomemos en cuenta primero algunas consideraciones prácticas, lo que debemos especificar en primera instancia es que estamos interesados en sistemas “*Estables y Causales*” y que la estabilidad de un sistema depende de la posición que guardan los polos de su función de transferencia con respecto al círculo unitario en el plano z [4].

Para analizar la estabilidad del canal telefónico se presenta su función de transferencia y el análisis del patrón de polos y ceros mostrado nuevamente en la Figura 5.10.

$$H_{\text{canal telefonico}}(z) = 0.3887 + z^{-1} + 0.3887z^{-2} \quad (5.3.4)$$

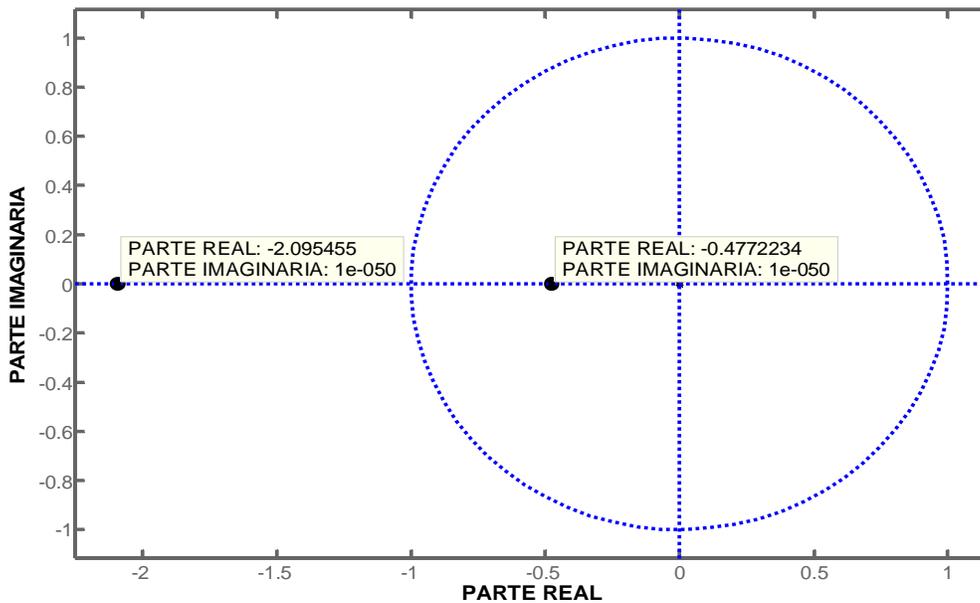


Figura 5.10 Patrón de Polos y Ceros de la Función de Transferencia del Canal Telefónico

La Figura 5.10 muestra que no existen polos fuera del círculo unitario por lo cual se dice que el canal telefónico es estable, se nota también que existe un cero fuera del círculo unitario por lo cual podemos decir que el canal telefónico es de “fase no mínima o de fase mixta” [4]. Recordando que los ceros del canal telefónico serán los polos del sistema inverso (capítulo 4) se tiene lo siguiente según el patrón de polos y ceros del sistema inverso \mathbf{G} mostrado en la Figura 5.11.

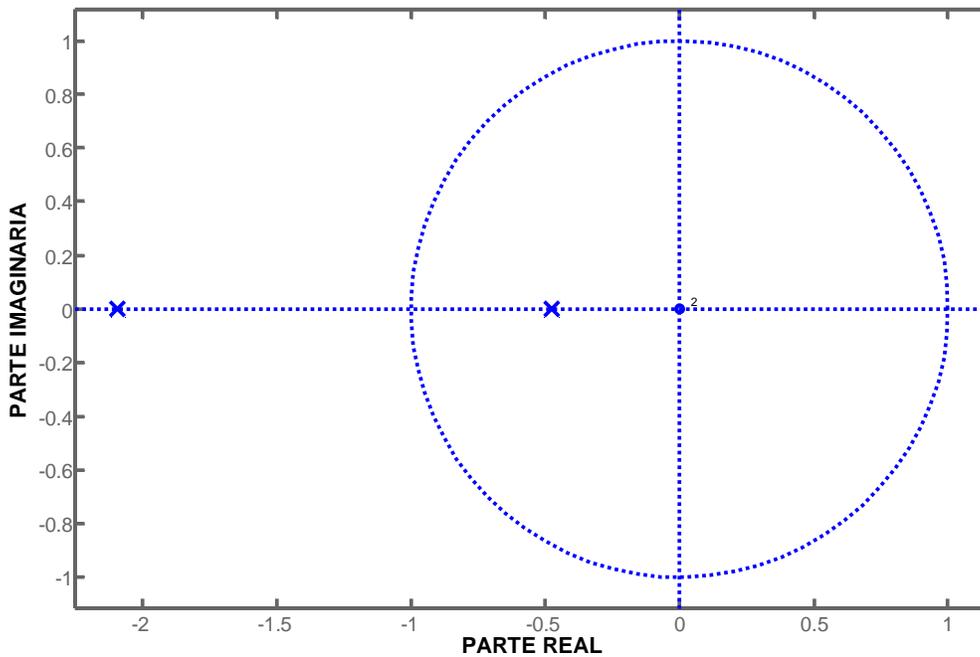


Figura 5.11 Patrón de polos y ceros de la función de transferencia del sistema inverso \mathbf{G}

La Figura 5.11 muestra que un polo del sistema inverso \mathbf{G} se encuentra fuera del círculo unitario por lo cual podemos decir que este sistema resulta inestable [4].

La Figura 5.12 presenta otra prueba de la inestabilidad del sistema inverso “ \mathbf{G} ” ya que las muestras de su respuesta al impulso van tomando valores que divergen, de aquí que para los sistemas de *fase no mínima* sea difícil encontrar sus sistemas inversos [4].

La respuesta al impulso mostrada en la Figura 5.12 es la que en el procedimiento descrito en la sección 4.3.2 debe ser multiplicada por una ventana $w[n]$ de longitud M para obtener los correspondientes “taps” del *Filtro de Igualación*, pero de lo anterior concluimos que el *sistema inverso no cumple las condiciones de estabilidad en el sentido que una entrada acotada produce una salida acotada*.

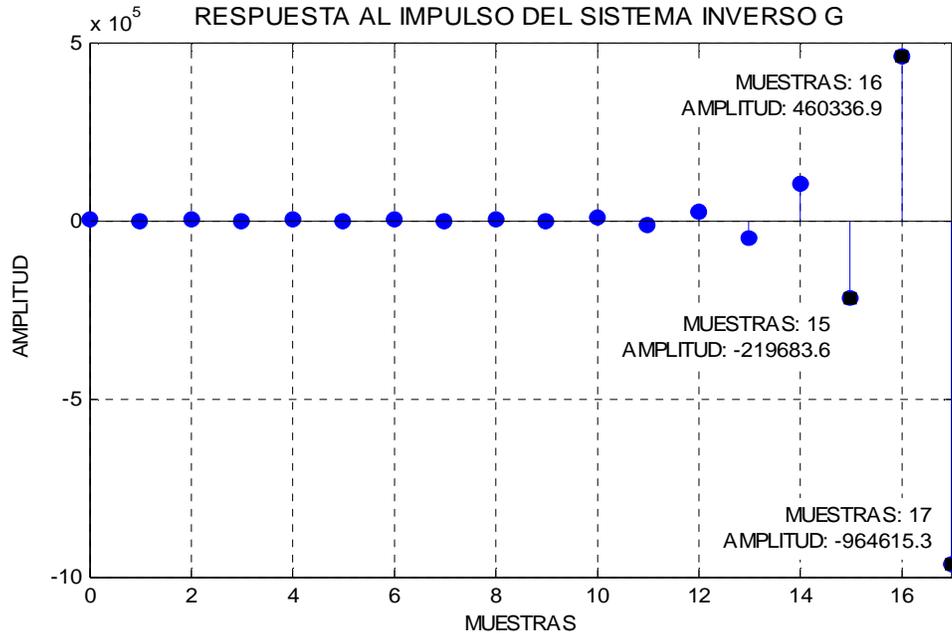


Figura 5.12 Respuesta al impulso del sistema inverso G

Para intentar solucionar este problema se insertaron retardos en el sistema inverso para hacer que los valores de la respuesta al impulso adquirieran valores medrados. Introduciendo un retardo equivalente de 15 unidades temporales (multiplicar el sistema inverso por z^{-15}) se obtiene la respuesta al impulso de la Figura 5.13:

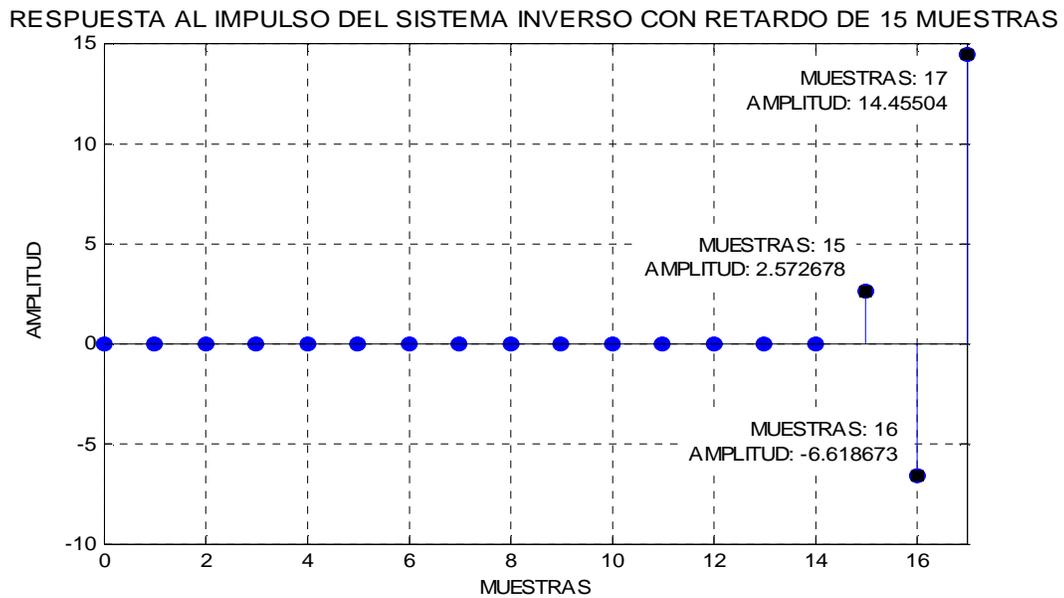


Figura 5.13 Respuesta al impulso de sistema con una introducción de 15 muestras de retardado

En la Figura 5.13 puede observarse que los valores de la respuesta al impulso toman valores que podrían considerarse como acotados sin embargo el patrón de polos y ceros de la Figura 5.14 muestra que el sistema permanece con características de inestabilidad.

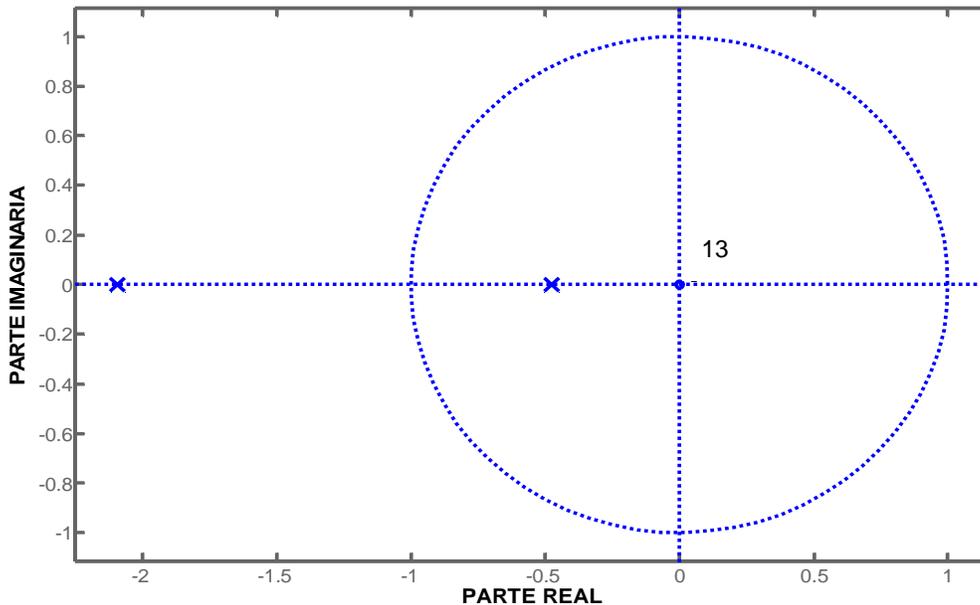


Figura 5.14 Patrón de polos y ceros del sistema inverso con la introducción de 15 muestras de retardo. El polo que se encuentra fuera del círculo unitario causa la inestabilidad del sistema.

Debido a que el canal telefónico es un sistema de *fase no mínima* o *fase mixta* su correspondiente sistema inverso no cumple con las características de estabilidad requeridas para el diseño del Filtro de Igualación Fijo según se muestra en el apartado 4.3.2. Cabe mencionar que la solución para este tipo de problema donde el canal es de fase no mínima existe, pero en este trabajo no se aborda por que las características cambiantes de la red telefónica bajo las que opera nuestro sistema hacen que el igualador fijo no se desempeñe en forma óptima razón por la cual se opta por aplicar un esquema adaptable para brindar una solución adecuada al problema de la ISI.

Pese a que no se implemente el filtro de igualación fijo de una forma ideal por la inestabilidad que resulta del sistema inverso del canal telefónico, podemos tomarlo como ejemplo de las características del sistema que estamos buscando. Para darnos una idea de dicho sistema las respuestas en magnitud del canal telefónico, del sistema inverso y del sistema canal-igualador se muestran en la Figura 5.15.

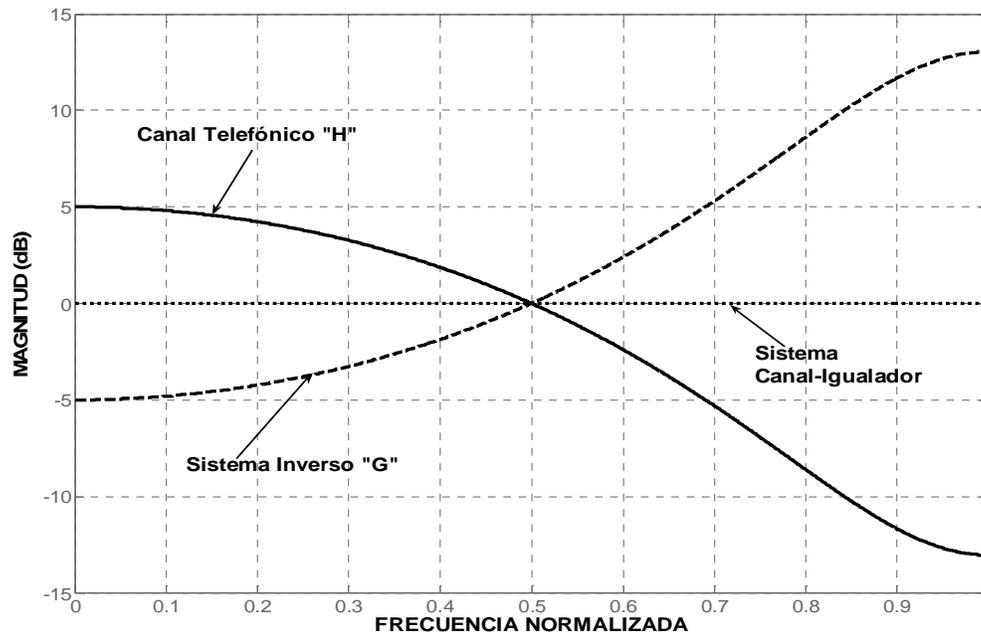


Figura 5.15 Ejemplo de Respuestas en magnitud de Canal Telefónico, Sistema Inverso ideal y Sistema Equivalente resultado de la conexión en cascada de canal telefónico y sistema inverso ideal.

Nótese de la Figura 5.15 que el sistema Canal-Igualador presenta una respuesta en magnitud constante en todo el rango de frecuencias, condición ideal para la transmisión sin distorsión (véase capítulo 3). La Figura 5.16 muestra la respuesta al impulso del sistema Canal-Igualador.

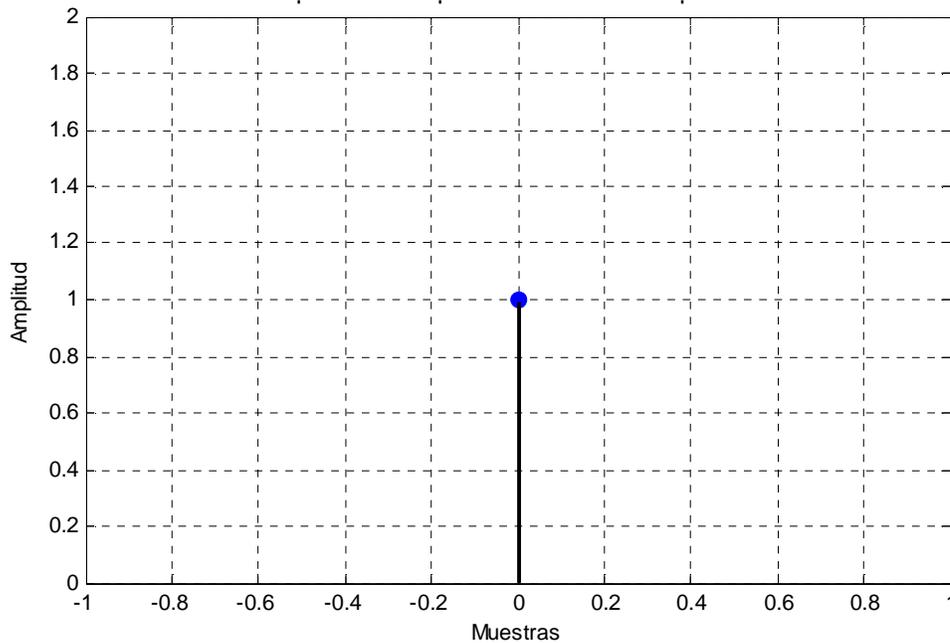


Figura 5.16 Respuesta el impulso ideal de sistema equivalente.

Este sistema Canal-Igualador tiene como respuesta al impulso la *función impulso unitario* que corresponde con lo establecido por la ecuación (4.1.5) que se reproduce aquí por conveniencia de la presentación:

$$h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (5.3.5)$$

Del sistema Canal-Igualador ideal se deduce que la transmisión de la señal PCM por un sistema con estas características, resultaría en:

$$x[n] * (h[n] * g[n]) = x[n] \quad (5.3.6)$$

De esta ecuación se puede decir que la señal PCM transmitida por un sistema cuya respuesta al impulso sea la *función Impulso Unitario*, viaja sin distorsión como se explico en el capítulo 4; Aunque este es un **resultado ideal** debido a que estamos empleando un sistema inverso que físicamente no puede ser implementado por su inestabilidad, podemos utilizarlo como ejemplo de las características de sistema que buscamos implementar.

Debido a lo anterior, a las características cambiantes y aleatorias de la red telefónica conmutada y porque es sabido que no es posible diseñar filtros de igualación óptimos y fijos para los canales que varían en el tiempo [9], **nos vemos obligados a aplicar otro método** que nos permita encontrar un sistema que conectado en cascada con el canal telefónico invierta los efectos que éste impone sobre la transmisión de nuestra señal PCM y que resulte en la reducción de la *Interferencia Intersimbólica*. El método aquí propuesto se basa en la *teoría de adaptabilidad* y su desarrollo se muestra a continuación.

5.3.3 Filtro de Igualación Adaptable

Como se vio en el apartado anterior, debido a que el canal telefónico es un sistema de fase no mínima o de fase mixta, no es posible implementar en la forma descrita en el apartado 4.3.2 su sistema inverso debido a que resulta en un sistema inestable. Por esta razón debemos buscar un sistema que si bien no es el inverso estrictamente hablando del canal telefónico si pueda aproximarse tanto como sea posible a este sistema ideal. Esto es precisamente lo que obtenemos si aplicamos en la búsqueda del filtro de igualación el criterio del error medio cuadrático (**MSE**), es decir obtenemos el sistema **G** que se sitúa en el punto de mínimo error en la superficie de desempeño (véase apartado 4.6.2) para poder invertir de forma adecuada los efectos del canal sin caer en problemas de inestabilidad; por otro lado, si tomamos en cuenta las condiciones operativas de la red conmutada de

telefonía, encontramos que la propiedad de adaptabilidad del algoritmo “Least Mean Square” (**LMS**) derivado del criterio **MSE** se ajusta correctamente a las características cambiantes del canal telefónico brindando una solución adecuada al problema de la ISI.

En este trabajo se aplica el algoritmo LMS y dos de sus variantes, estas son: el algoritmo **LMS Normalizado (NLMS)** y el algoritmo “**Leaky**” **LMS (LLMS)**; esto se hace con el fin de probar el desempeño de cada uno de estos algoritmos, comparar su velocidad de convergencia y determinar que algoritmo presenta mejores resultados para la aplicación que aquí se trata.

A manera de ejemplo, en este apartado se presenta la implementación únicamente del algoritmo LMS, sus otras dos variantes no son radicalmente diferentes, de hecho la implementación para estos algoritmos guarda muchas similitudes con la que aquí se presenta (para ver sus estructuras véase el **apéndice A** al final de este trabajo). Los resultados obtenidos de la implementación de estos tres algoritmos se muestran en el siguiente capítulo.

5.3.4 Implementación del algoritmo LMS

Las ecuaciones que representan al algoritmo LMS y de las que se obtienen los coeficientes del *Filtro de Igualación* **G** se presentan en el capítulo cuatro, ecuaciones (4.7.4) y (4.7.5). Estas se reproducen aquí por conveniencia en la presentación.

$$G[n] = G[n-1] + \mu_n X[n]e[n] \quad (5.3.7)$$

$$e[n] = d[n] - y[n] \quad (5.3.8)$$

La ecuación (5.3.8) se denomina ecuación de *filtrado* y determina el **error** existente entre nuestra señal de referencia $d[n]$ y la señal $y[n]$ que se obtiene a la salida del *Filtro Igualador*. La ecuación (5.3.7) nos brinda la característica **adaptable** que nos permite seguir los cambios presentes en la función de transferencia del sistema a ser igualado.

Para implementar estas ecuaciones nos basamos en la Figura 4.9 que se reproduce aquí nuevamente en la Figura 5.17.

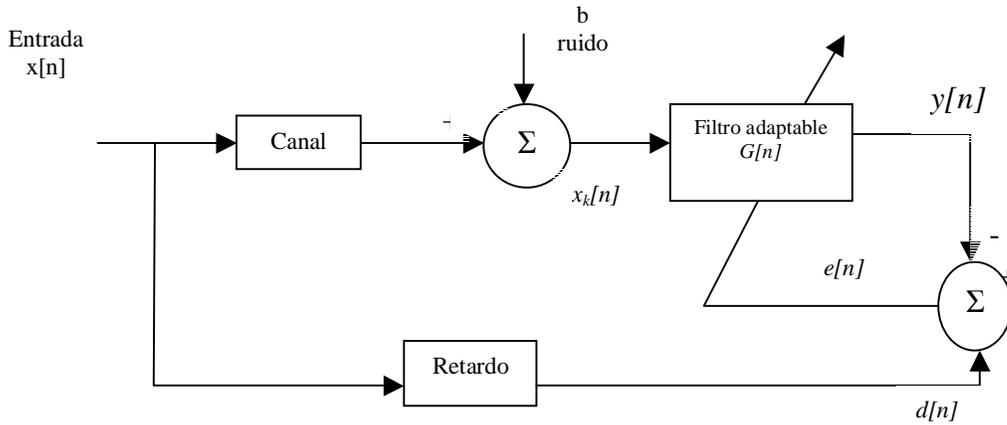


Figura 5.17 Diagrama para la igualación de canal utilizando Filtrado Adaptable

El esquema indica que la señal $x[n]$ pasa a través del canal, en este caso un canal telefónico, que dicha señal es distorsionada y afectada por ruido, y que después entra en el bloque adaptable el cual es alimentado por la señal de error. La Figura 5.18 muestra como la señal distorsionada por el canal telefónico $x_k[n]$ pasa por cada uno de los "taps" o retardos, después cada muestra retardada es multiplicada por cada uno de los pesos variables que se obtienen de la ecuación 5.3.7

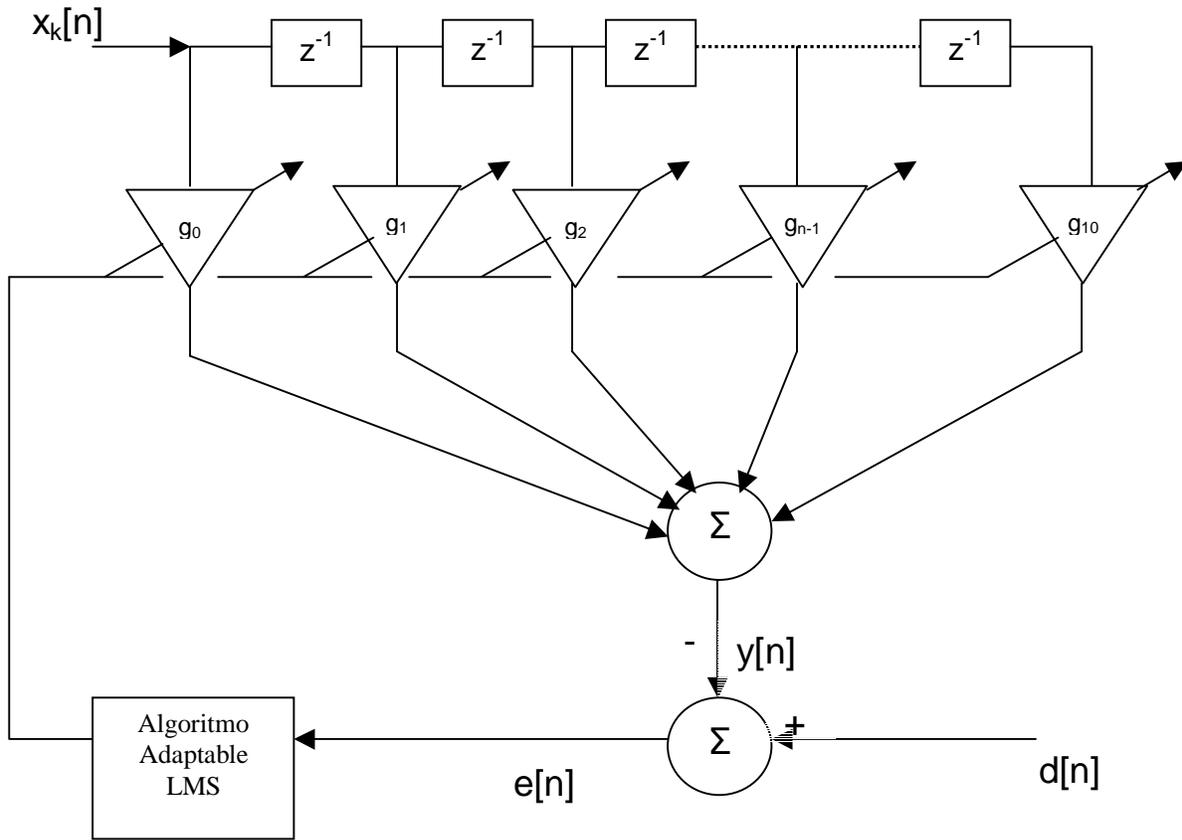


Figura 5.18 Implementación del sistema adaptable

adaptable para después sumarse y conformar la respuesta o la salida $y[n]$. Esta señal posteriormente sirve para determinar la señal de error como se muestra en la misma figura o como lo indica la ecuación (5.3.8). La señal de error resultante $e[n]$ sirve para alimentar al algoritmo adaptable, este algoritmo adaptable esta dado por la ecuación (5.3.7) y es el encargado de cambiar los valores de los taps con la finalidad de minimizar el valor de la señal de error tanto como sea posible.

5.3.5 Selección de la longitud N del Filtro de Igualación

El error medio cuadrático (MSE) total a la salida del Filtro de Igualación está relacionado con los siguientes puntos [7]:

1. La cantidad de ruido aditivo b presente en el sistema.
2. La diferencia entre la longitud N del filtro adaptable estimado y la longitud N_1 del filtro ideal a ser identificado.
3. Las fluctuaciones en estado estable del sistema.

Con respecto al punto uno, el ruido b es claramente irreductible.

El punto dos sugiere que la potencia del ruido $\epsilon_{min}(N)$ a la salida del filtro óptimo es dependiente de N . De hecho cuando N es muy pequeño ($N < N_1$), incluso en la ausencia de ruido, el filtro estimado no es capaz de producir la misma salida que produciría el filtro real. En aplicaciones de igualación, N_1 está relacionado con la duración L de la respuesta al impulso del canal [7], donde N_1 es mayor que L como resultado de los requerimientos en la inversión de la función de transferencia que se desea igualar.

Actualmente la longitud estándar de los *Filtros de Igualación Adaptable* aplicados a productos comerciales corresponde a 30 “taps” [7]. En este trabajo después de pruebas realizadas se observó que para una longitud mayor a 11 no se obtenían cambios perceptibles en el desempeño del *Filtro de Igualación* razón por la cual la longitud del filtro se estableció en 11 “taps”.

5.3.6 Selección del Tamaño del Paso μ

Otro parámetro de gran importancia es el tamaño del paso μ . En los algoritmos adaptables el tamaño del paso depende de los objetivos que pueden ser cualquiera de los dos propósitos siguientes [7].

Aprendizaje: El propósito primario del filtrado adaptable es la convergencia al valor del sistema desconocido \mathbf{G} . Por tal motivo podría escogerse el tamaño del paso inicial con un valor “*grande*” con la finalidad de llevar rápidamente a \mathbf{G} de sus valores inexactos iniciales hacia unos que muestren un mejor desempeño. En la medida en la que \mathbf{G} mejora, al tamaño del paso se le pueden asignar valores “*refinados*” con la finalidad de obtener un valor de \mathbf{G} con mayor grado de exactitud. A este periodo se le denomina “*periodo de aprendizaje*” [7].

Seguimiento: El segundo propósito del Filtrado Adaptable es seguir las variaciones impredecibles que presenta en el tiempo el filtro óptimo \mathbf{G} . Una vez que el valor de \mathbf{G} se ha estabilizado y alcanza un desempeño lo suficientemente bueno, se selecciona el tamaño del paso con un valor “*pequeño*” pero constante con la finalidad de lograr el *seguimiento*.

Para mostrar un ejemplo operativo de la implementación del algoritmo LMS fijamos los siguientes valores para los parámetros involucrados: tamaño del paso $\mu=0.001$, bloque de retardo igual a 6 unidades (valor que mostró buenos resultados), longitud del filtro igual a 11 taps.

El valor de \mathbf{G} obtenido a partir de esos parámetros en estado estable para igualar el modelo empleado del canal telefónico se muestra en la Figura 5.19.

$$G(z) = -0.0170 + 0.0598z^{-1} - 0.1476z^{-2} + 0.335z^{-3} - 0.7296z^{-4} + 1.5603z^{-5} - 0.7296z^{-6} \\ + 0.3351z^{-7} - 0.1476z^{-8} + 0.0598z^{-9} - 0.0170z^{-10}$$

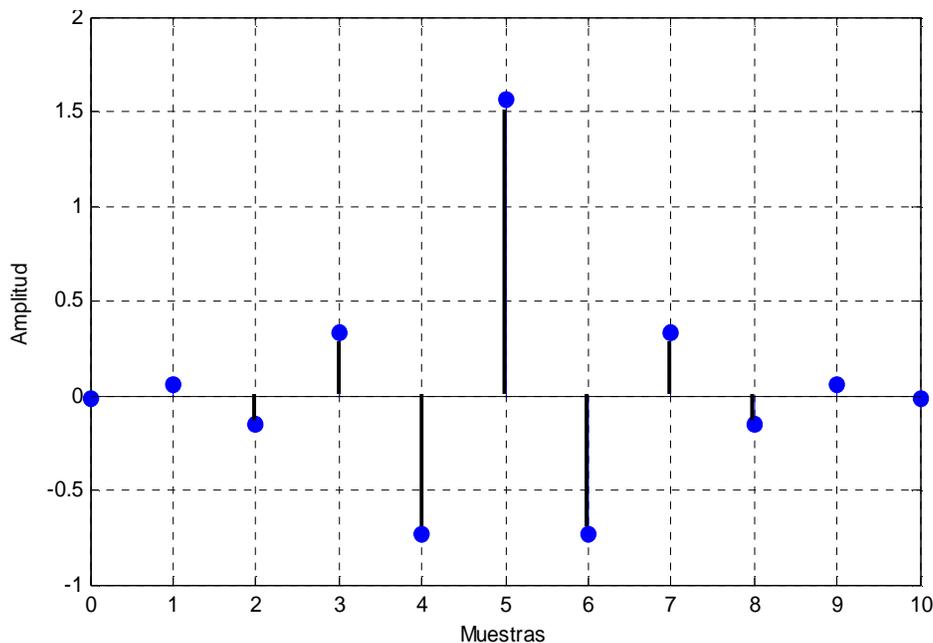


Figura 5.19 Respuesta al Impulso del Filtro de Igualación obtenido empleando el algoritmo adaptable.

El patrón de polos y ceros se muestra en la Figura 5.20

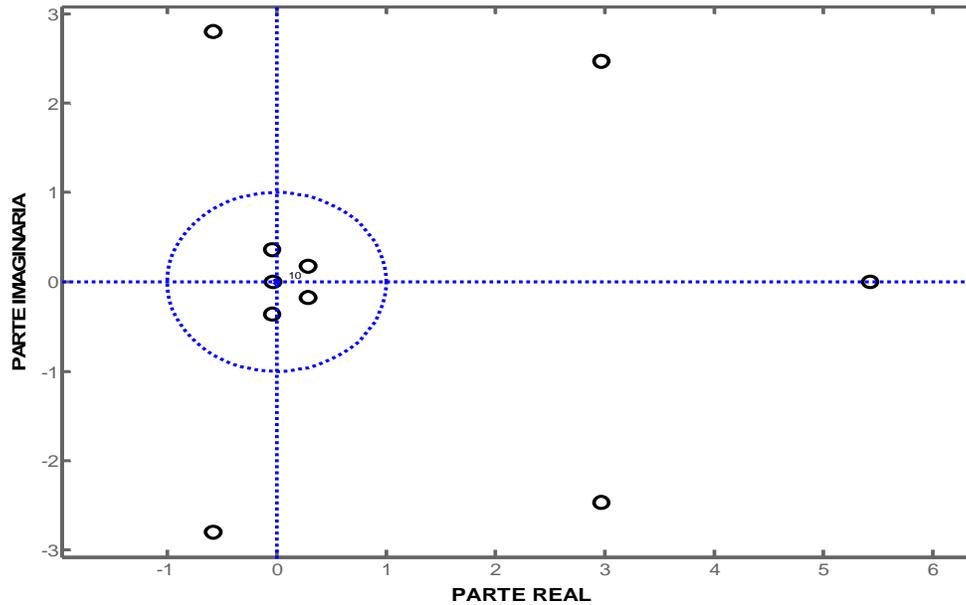


Figura 5.20 Patrón de polos y ceros del Filtro de Igualación Adaptable

De las Figura 5.19 y 5.20 se observa que el sistema obtenido es *causal y estable*, es decir, el valor de la función $g[n]$ es *cero* para $n < 0$ y el patrón de polos y ceros no presenta polos fuera del círculo unitario características en las que estamos interesados y que no cumplió el *Filtro de Igualación Fijo*.

Las Figuras 5.21 y 5.22 muestran las graficas de la respuesta en magnitud y fase del *Filtro de Igualación Adaptable* obtenido.

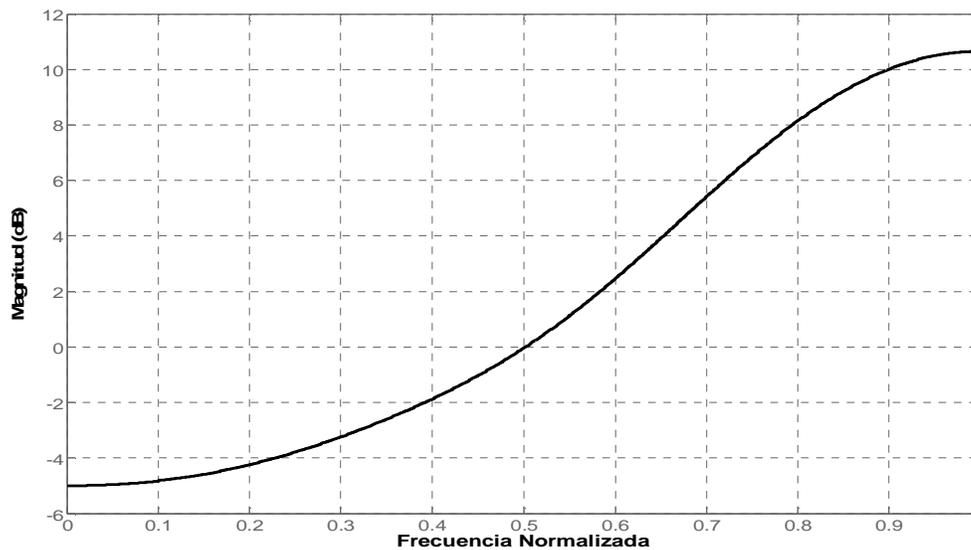


Figura 5.21 Respuesta en magnitud del Filtro de Igualación Adaptable

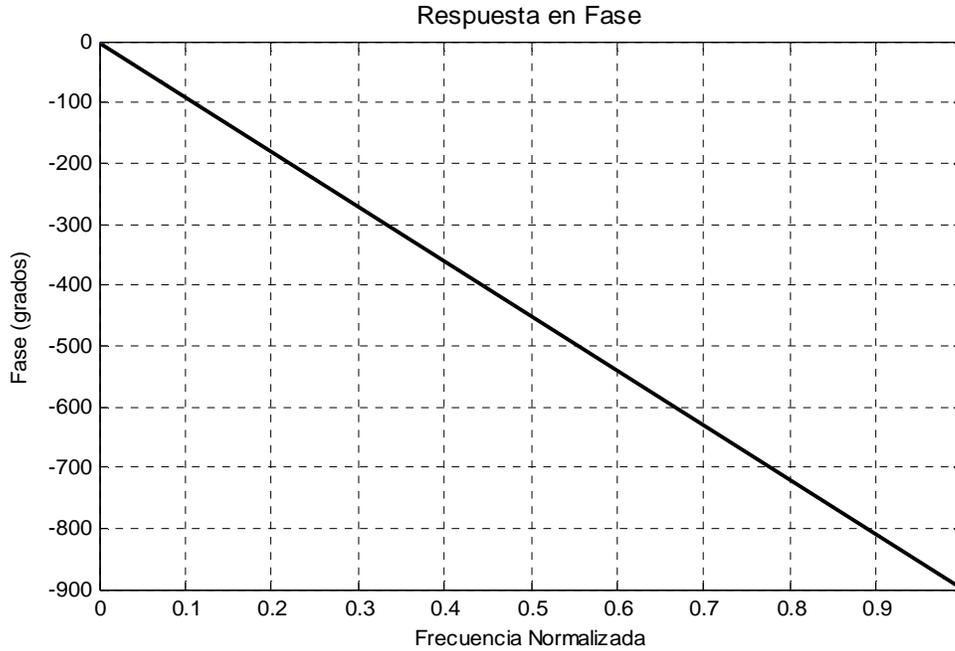


Figura 5.22 Respuesta en Fase del Filtro de Igualación Adaptable

La Figura 5.23 muestra la comparación de las respuestas en magnitud del Canal Telefónico del Filtro de Igualación Adaptable y del Sistema Canal-Igualador.

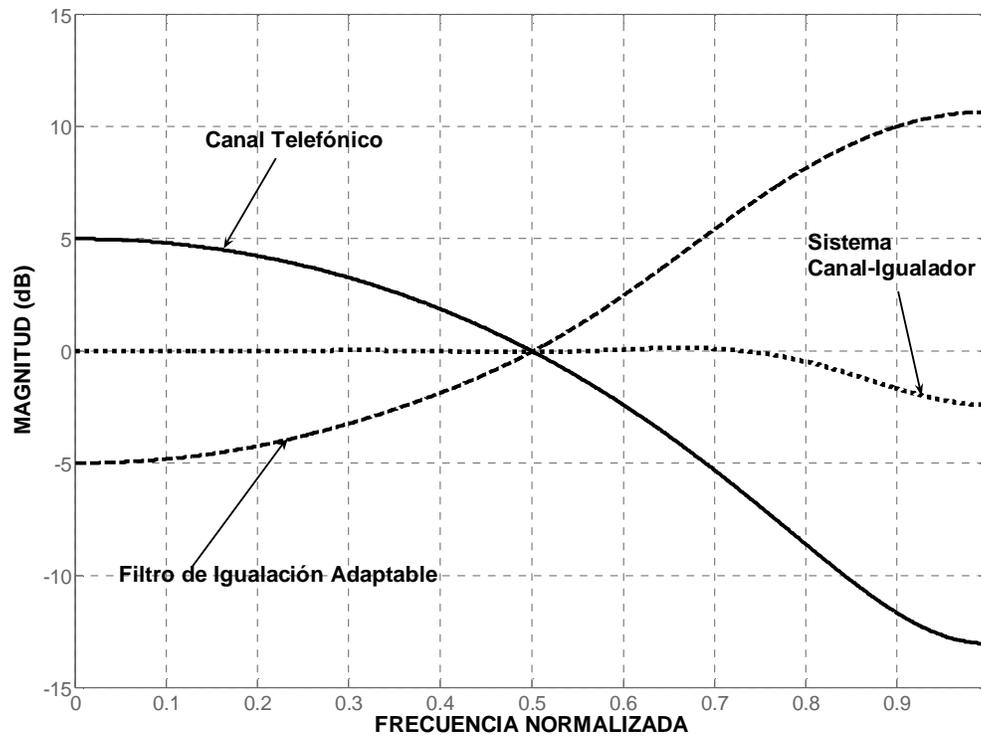


Figura 5.23 Respuestas en Magnitud de Canal Telefónico, Filtro de Igualación Adaptable y Sistema Equivalente resultado de su conexión en cascada.

Como se observa en la Figura 5.23 la respuesta del *Filtro de Igualación Adaptable* no es exactamente la inversa del canal telefónico como lo muestra la respuesta en frecuencia del *Filtro Fijo Inverso* de la Figura 5.15. Ésto es un efecto que esperábamos debido a que el algoritmo *LMS* no produce un sistema inverso propiamente dicho si no que busca un sistema que se situé en el punto de mínimo error en la superficie de desempeño según el criterio *MSE*. Para que este efecto sea más evidente en la Figura 5.24 se muestra la respuesta en magnitud del sistema Canal-Igualador oscilando dentro de un margen de 0.1 dB. El rizo muestra que la respuesta en magnitud del sistema obtenido no es totalmente plana, y representa el error existente entre el sistema inverso y el sistema de mínimo error *MSE*, además su respuesta al impulso muestra el retardo introducido en la transmisión de la señal, lo que concuerda con lo establecido en la ecuación (4.1.5).

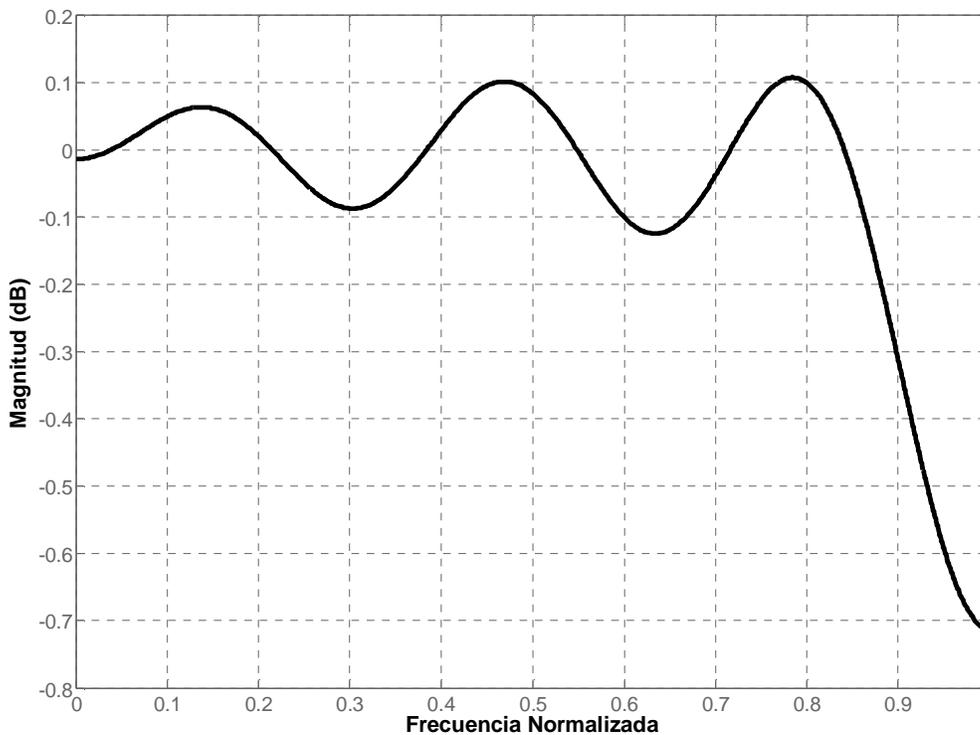


Figura 5.24 Respuesta en Magnitud de Sistema Canal-Igualador.

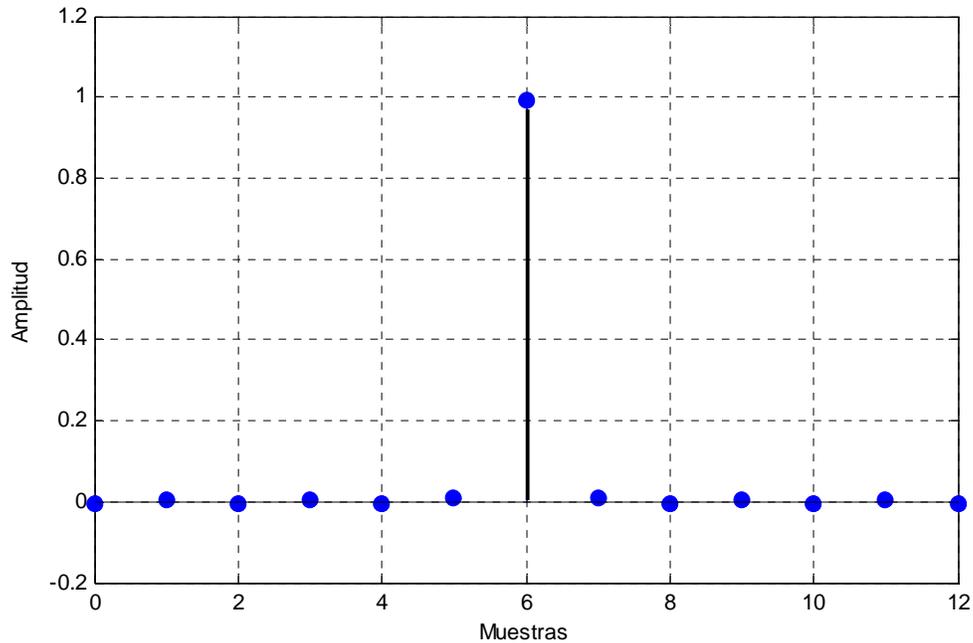
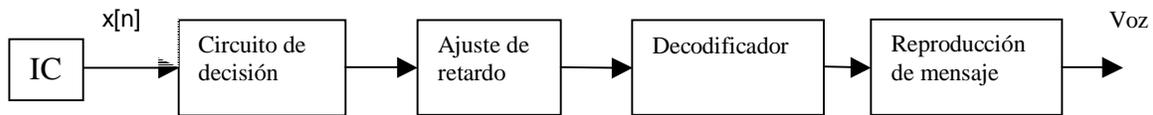


Figura 5.25 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador

Aunque el sistema obtenido por medio del algoritmo adaptable LMS no es exactamente el sistema inverso del canal telefónico su valor es muy aproximado de hecho su respuesta en frecuencia invierte los efectos dispersivos del canal telefónico produciendo una señal de error menor al 3.5%. Algunos ejemplos comparativos con diferentes valores de μ utilizados para mejorar el tiempo de convergencia del algoritmo son tratados en el siguiente capítulo donde además evaluaremos los desempeños del algoritmo LMS y el de sus dos variantes: el algoritmo LMS Normalizado y el algoritmo Leaky LMS.

5.3.7 Reconstrucción de Mensaje Transmitido

En este apartado se explica el funcionamiento de los últimos tres bloques del receptor, empleados en la simulación del sistema de comunicación mostrado en la Figura 5.1. En este punto del sistema, la señal estimada por el filtro de igualación $x[n]$ se encuentra *libre de Interferencia Intersimbólica* o al menos esta interferencia tiene el mínimo valor posible. Los bloques involucrados se muestran nuevamente en la Figura 5.26.



Figur

a 5.26 Últimos bloques del sistema de comunicación simulado.

5.3.8 Circuito de Decisión

La necesidad de un circuito de decisión resulta debido a que la señal estimada por el Filtro de Igualación puede tener valores que sobrepasan los umbrales que un circuito digital puede interpretar como símbolos dentro del código empleado.

Para reconocer un determinado símbolo y poderlo interpretar, el circuito de decisión con función de transferencia equivalente a la función Signum [5], asigna un valor previamente seleccionado que se asocia a un símbolo del código empleado si el valor de la señal sobrepasa, o si se encuentra por debajo de un valor de un umbral tomado como referencia y sobre el cual se decide si se asigna un valor correspondiente a un cero o un uno binario por ejemplo para el caso de la señalización binaria.

En nuestro caso el siguiente conjunto de instrucciones hacen las veces del circuito de dedición dentro del sistema de comunicación simulado en Matlab.

```

m=find(senal3raparte>0.5);      % encuentra valores mayores que 0.5 dentro de la señal estimada
senal3raparte(m)=ones(size(m)); % esto sustituye los valores mayores que 0.5 por 1
k=find(senal3raparte<0.5);      % encuentra los valores menores que 0.5
senal3raparte(k)=zeros(size(k)); % los sustituye por ceros
  
```

5.3.9 Ajuste del Retardo en la Transmisión de la Señal

En el segundo bloque se efectúa el ajuste del retardo en la transmisión. Cada bit dentro de las palabras binarias tiene una función muy importante, por poner un ejemplo el MSB o bit 16 de cada palabra representa el signo del valor decimal representado por dicha palabra con 16 bits, es fácil entender que si este bit fuera erróneo, sería imposible reconstruir el mensaje deseado, de aquí la importancia del ajuste del retardo en la señal digital transmitida. Esto hace que cada bit ocupe su posición correcta dentro de cada palabra. Esta tarea se efectuó por medio del siguiente conjunto de instrucciones.

```

senalrecuperada=senal3raparte(7:160000,1);      % recorre la señal 6 posiciones
senal3raparte(1:159994,:)=senalrecuperada(1:159994,:); % coloca el MSB en la posición adecuada
  
```

5.3.10 Decodificación y Reproducción del Mensaje

La secuencia de bits recibida después del ajuste del retardo en un vector donde cada elemento representa un bit de información, cada uno de estos bits forma parte de una palabra de determinada longitud para nuestro caso esa longitud es de 16 bits. A cada bit se le asocia una posición dentro de la palabra y cuando se reciben el número necesario de bits para formar una palabra a esa palabra se le coloca dentro de un matriz. Cada palabra representa el valor de la muestra del mensaje analógico original. Esta tarea se repite tantas veces como palabras puedan formarse con el número de bits recibidos dentro del mensaje digital transmitido. Las palabras contenidas en esta matriz serán procesadas, para ello se identificará el signo de cada palabra y se convertirá a un valor decimal el valor binario de cada palabra. Una vez que se tienen todos los valores de las muestras que representan el mensaje analógico originalmente transmitido, estamos en condiciones para reproducirlo. Esta tarea se efectúa por medio del siguiente conjunto de instrucciones:

```
R=ones(10000,16);
for i=0:9999
    A=[(1+i*16):(16*i+16)]; % determina los índices de los datos PCM
    K=senal3raparte(A); % direcciona o saca los datos en grupos de 16 de la señal que proviene de
    % simulink
    G=K'; % crea un vector de 16 bits el cual formara cada renglón de la matriz
    if i+1>0
        R([i+1],:)=G(:,:); % sustituye cada renglón obtenido en la matriz de reconstrucción
    end
end

% proceso de la decodificación de la matriz recuperada

Signos=R(:,1);
Signre=-Signos; %obtiene los signos negativos de la secuencia
Signrecu=Signre>=0; %obtiene los signos positivos de la secuencia
Signosrecuperados=Signre+Signrecu; % estos son los signos recuperados listos para multiplicarse %
% por números decimales positivos

ceros=zeros(10000,1);
R(:,1)=ceros; %se inserta una columna de ceros para poder pasar a decimal
mensajedecimal=bi2de(R,'left-msb'); % conversión de valores binarios a decimales
mensaje=Signosrecuperados'.*mensajedecimal';
mensajerecuperado=int16(mensaje);
wavplay(mensajerecuperado,8000) % reproduce el mensaje
clear
end
```

5.4 Resumen

En este capítulo se mostró la manera en la que se llevó a cabo la implementación del sistema de comunicación digital propuesto para el análisis y reducción de la *Interferencia Intersimbólica*. Se explicó el funcionamiento de cada uno de los bloques y como se desarrolló su implementación utilizando el software Matlab. Se hizo especial énfasis a la implementación del Filtro de Igualación debido a que es el sistema propuesto para dar solución a los problemas que producen los efectos dispersivos del canal telefónico en la transmisión de una señal digital, y se explicó el por qué de la necesidad de la implementación de la solución en un esquema adaptable debido a las características inestables del sistema inverso del canal telefónico y de las consideraciones prácticas bajo las que opera el sistema.

En el siguiente capítulo se tratara con los resultados obtenidos de aplicar el algoritmo LMS y sus variantes en busca de la mejor solución para los problemas que causa la *Interferencia Intersimbólica*.

6 RESULTADOS

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de aplicar los algoritmos LMS, LMS Normalizado y Leaky LMS a la igualación del modelo del canal telefónico empleado en este trabajo. Aunque el filtro \mathbf{G} obtenido en cada caso proporciona una solución adecuada al problema de la *Interferencia Intersimbólica* (nos permite reconstruir el mensaje originalmente transmitido); lo que se busca aquí es poder determinar qué algoritmo y qué parámetros brindan una mayor velocidad de convergencia manteniendo en todo momento la estabilidad del sistema y el valor del error MSE en el nivel mas bajo posible.

El desempeño del sistema se evaluó sobre: *Curvas de convergencia, repuesta en magnitud y respuesta al impulso para sistemas \mathbf{G} , correlación de la señal estimada con respecto a la señal originalmente transmitida y desempeño del sistema frente a diferentes SNR de entrada.*

6.1 CURVAS DE CONVERGENCIA

Las curvas de convergencia son gráficas que muestran la evolución del error cuadrático medio frente al número de iteraciones efectuadas por el algoritmo. Se dice que el algoritmo converge cuando llega a un punto estable en el que se obtiene el mínimo valor MSE posible. De aquí que el algoritmo que emplea un menor número de iteraciones para llegar al punto de mínimo valor MSE tenga una mayor velocidad de convergencia.

El número de iteraciones para las curvas de convergencia que se muestran en este trabajo corresponde a 160000 que es el número máximo de iteraciones que se pueden realizar con la duración del mensaje transmitido.

En todo caso estamos interesados en que el algoritmo converja en el menor número de iteraciones posibles (*el interés principal es la operación de los algoritmos en tiempo real*).

6.1.2 Curvas de Convergencia para el Algoritmo LMS

La Figura 6.1 muestra las *Curvas de Convergencia* para el algoritmo LMS empleando diferentes valores para el tamaño de paso (μ). Como referencia para determinar la convergencia del algoritmo se toma el punto donde el valor MSE oscila en un rango menor al uno por ciento con respecto al valor de la amplitud de la señal originalmente transmitida.

El primer caso donde a μ se le asigna un valor igual a **0.001**, al algoritmo le toma **90,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia.

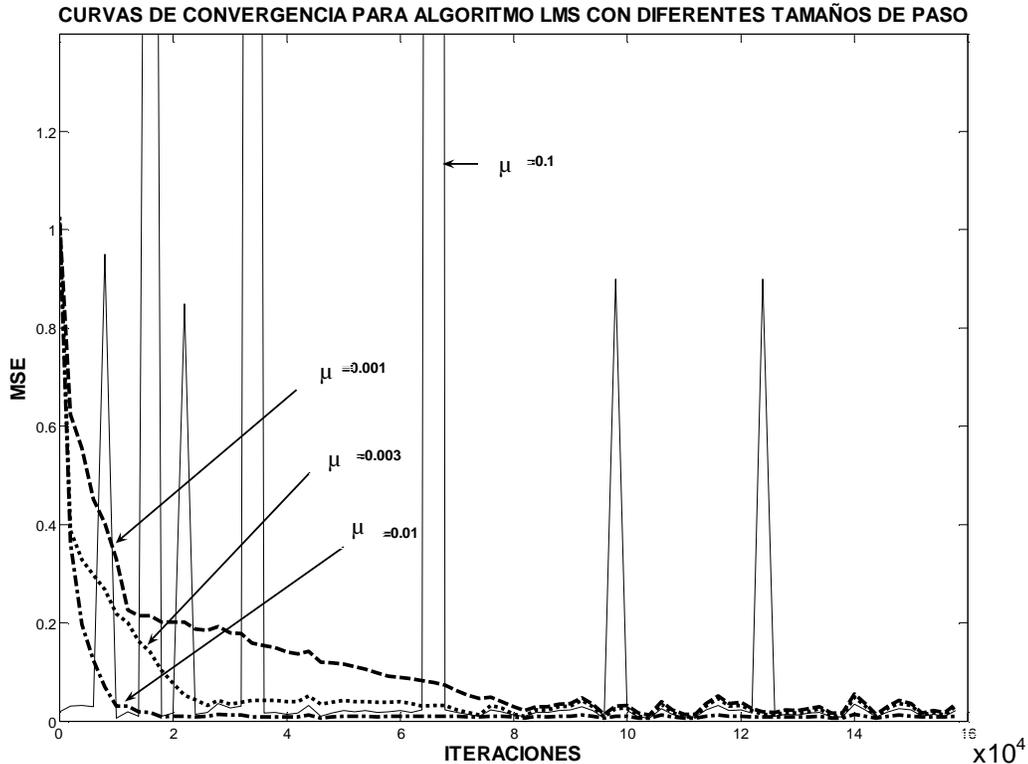


Figura 6.1 Curvas de Convergencia para algoritmo LMS empleando diferentes valores de μ .

En el segundo caso donde a μ se le asigna un valor igual a **0.003** al algoritmo le toma **35,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia.

En el tercer caso donde a μ se le asigna un valor igual a **0.01** al algoritmo le toma **10,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia.

En el cuarto caso donde a μ se le asigna un valor igual a **0.1** aunque en gran parte de la gráfica el valor del error se encuentra por debajo del uno por ciento, no se puede hablar de convergencia debido a que se presentan iteraciones en las cuales el valor de **MSE** llega a casi **3000** por ciento, esto indica que el algoritmo es estable para valores menores a **0.01** de μ . En el último caso el algoritmo es inestable casi desde el inicio.

6.1.3 Curvas de Convergencia para el Algoritmo NLMS

La Figura 6.2 muestra las curvas de convergencia para el algoritmo NLMS.

En el primer caso donde μ es igual a **0.001**, aunque el valor **MSE** disminuye, al algoritmo no le son suficientes las 160,000 iteraciones disponibles para llegar al punto de convergencia, manteniéndose el valor **MSE** oscilando dentro de un intervalo no menor al 20 por ciento.

En el segundo caso donde el valor de μ es igual a **0.01** al algoritmo le toma 60,000 iteraciones para llegar al punto de convergencia.

En el tercer caso donde el valor de μ es igual a **0.1** al algoritmo le toma 7,500 iteraciones para llegar al punto de convergencia.

Para el cuarto caso donde μ es igual a **0.25** al algoritmo le toma 2,500 iteraciones para llegar al punto de convergencia.

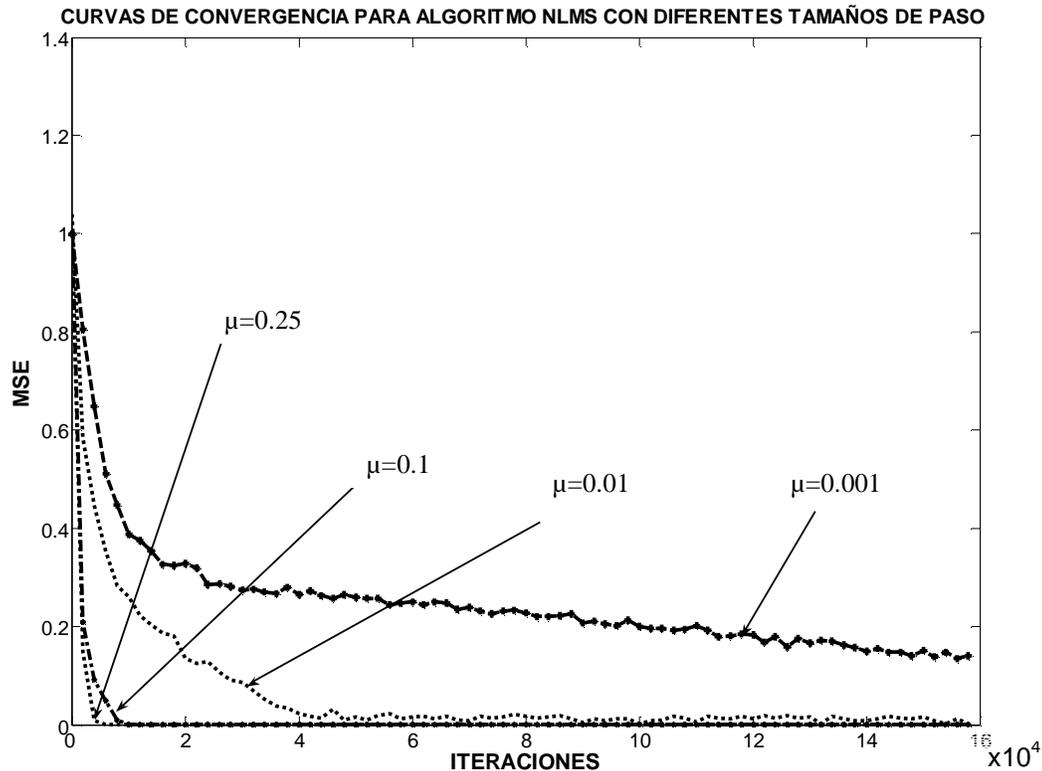


Figura 6.2 Curvas de convergencia Para el algoritmo NLMS empleando diferentes valores para μ .

Las gráficas de la Figura 6.2, muestran que este algoritmo presenta estabilidad en cada uno de los valores aplicados a μ ; cabe mencionar que para valores mayores a 0.5 el algoritmo comienza a dar muestras de inestabilidad. Este algoritmo se caracteriza por ser estable debido a que independiza la convergencia del algoritmo de la potencia de la señal de entrada [8], además presenta una mayor velocidad de convergencia debido a que permite utilizar valores de mayor magnitud para μ .

6.1.4 Curvas de Convergencia para el Algoritmo LLMS

El algoritmo Leaky LMS (**LLMS**) presenta dos parámetros variables μ y el *Factor de Fuga* o *Factor Leakage* γ ; Este algoritmo fue creado para superar la lenta convergencia del algoritmo *LMS estándar* en condiciones especiales que pueden presentarse en la señal de entrada (véase apéndice **A**).

La Figura 6.3 muestra las *Curvas de Convergencia* para el algoritmo *LLMS* manteniendo el valor de μ fijo en un valor igual a **0.001** y variando γ con los valores: **0.0001**, **0.001**, **0.01**; Esta figura muestra también la curva de convergencia para el algoritmo *LMS estándar* con la finalidad de comparar la velocidad de convergencia de este algoritmo.

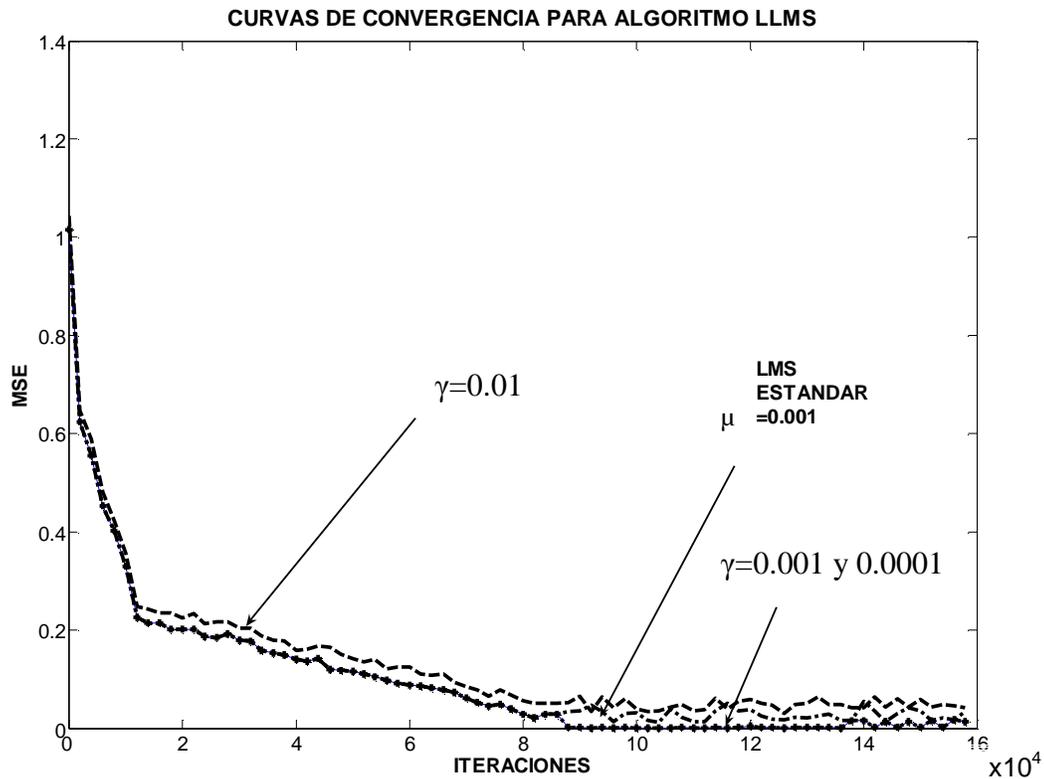


Figura 6.3 Curvas de Convergencia para algoritmo L LMS manteniendo $\mu = 0.001$ y variando los valores de γ .

En el primer caso donde se utiliza un *valor para* γ igual a **0.01** al algoritmo no son suficientes las 160,000 iteraciones para llegar al punto de convergencia, el valor **MSE** oscila en un rango menor al 10 por ciento.

En el segundo caso donde se utiliza una γ igual a **0.001** al algoritmo le toma **100,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia.

En el tercer caso donde se utiliza una γ igual a **0.0001** al algoritmo le toma **130,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia.

La Figura 6.4 muestra las *Curvas de Convergencia* para el algoritmo *LLMS* manteniendo μ fijo en un valor igual a **0.01** y variando γ con los siguientes valores: **0.0001**, **0.001**, **0.01**; Esta figura muestra también la curva de convergencia para el algoritmo *LMS estándar* para comparar la velocidad de convergencia.

Para los tres casos en los que se utiliza un *Factor Leakage* igual a **0.001**, **0.0001** y para el *LMS* estándar respectivamente hablando se observa que al algoritmo le toma alrededor de **12,000** iteraciones para llegar al punto de convergencia, en el caso en que se usa un *Factor Leakage* de **0.01** no se llega a la convergencia.

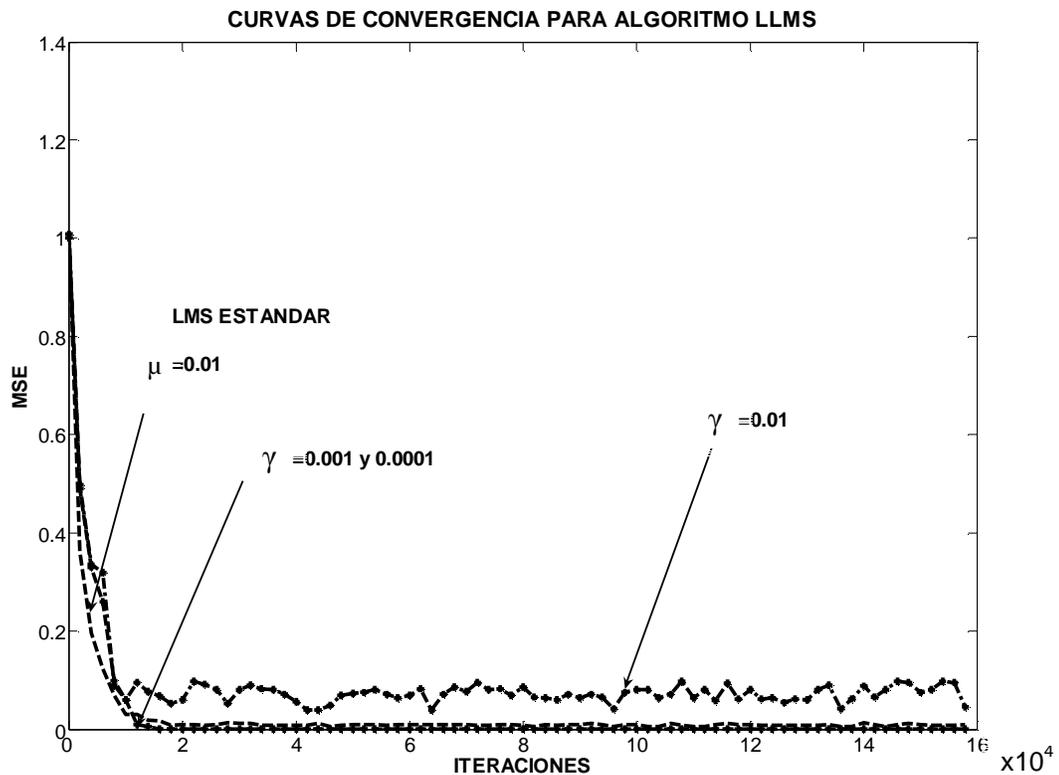


Figura 6.4 Curvas de Convergencia para el algoritmo LLMS manteniendo el valor de μ fijo en 0.01 y variando γ .

Las gráficas de la Figura 6.4 muestran que la velocidad de convergencia del algoritmo *LLMS* es menor a la del algoritmo *LMS estándar* ("**para esta aplicación**") compárese los resultados de Figura 6.3 y 6.4.

6.2 RESPUESTA EN MAGNITUD DEL SISTEMA INVERSO \mathbf{G}

En esta sección, se analiza la respuesta en magnitud de los sistemas \mathbf{G} obtenidos a partir de la aplicación del algoritmo *LMS*, *NLMS* y *LLMS* en la igualación del modelo del canal telefónico empleado en este trabajo; se compara la proximidad de cada sistema \mathbf{G} con el sistema inverso ideal dado por la inversa del canal telefónico y se muestran las respuestas en magnitud de los sistemas canal-igualador (resultado de la conexión en cascada del canal telefónico con el sistema \mathbf{G} en cada caso) así como su respuesta al impulso.

6.2.2 Respuesta en Magnitud de Sistemas \mathbf{G} obtenidos del algoritmo *LMS*

La respuesta en magnitud de los sistemas \mathbf{G} obtenidos del algoritmo *LMS* aplicando los valores de μ utilizados para las curvas de convergencia se muestran en la Figura 6.5. En esta figura se muestra también la respuesta en magnitud del *modelo del canal telefónico* empleado y la *respuesta en magnitud del sistema inverso ideal* para una mejor comparación de los sistemas \mathbf{G} obtenidos.

Debido a que el valor del *MSE* en el punto de convergencia se tomó para todos los casos dentro de un intervalo de oscilación menor al uno por ciento, existe una gran proximidad entre la respuesta en magnitud de los sistemas \mathbf{G} obtenidos, estos sistemas guardan una diferencia entre ellos menor al 1 por ciento, véanse los siguientes datos: El sistema \mathbf{G} obtenido de aplicar un valor para μ igual a **0.001** tiene una diferencia con respecto del sistema inverso ideal del **18.77** por ciento. El sistema \mathbf{G} obtenido de aplicar un valor de μ igual a **0.003** tiene una diferencia con respecto del sistema inverso ideal del **19.75** por ciento y por último el sistema \mathbf{G} obtenido de aplicar un valor de μ igual a **0.01** tiene una diferencia con respecto del sistema inverso ideal del **19.54** por ciento.

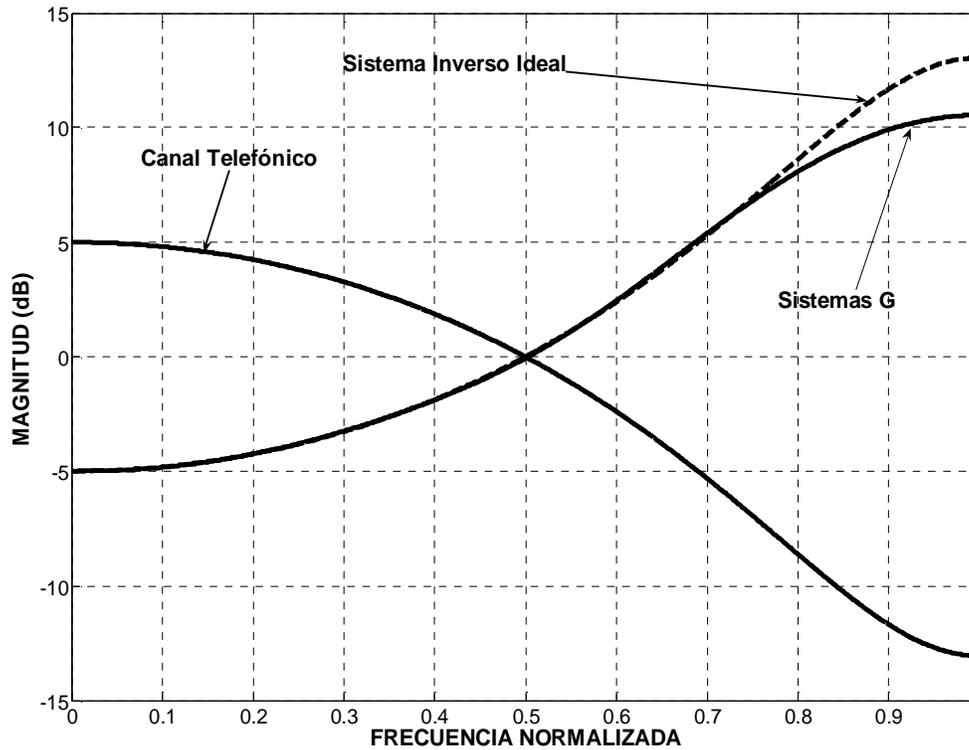


Figura 6.5 Respuesta en Magnitud de Sistemas G obtenidos a partir del algoritmo LMS aplicando diferentes valores para μ .

6.2.3 Respuesta en Magnitud de Sistemas G obtenidos del algoritmo NLMS

La Figura 6.6 muestra la respuesta en magnitud de los sistemas **G** obtenidos del algoritmo *NLMS* para los valores del *Step-Size* que alcanzaron el punto de convergencia dentro de las primeras 160000 iteraciones. Dentro de esta misma figura se muestra la respuesta en magnitud del modelo del canal telefónico empleado y la respuesta en magnitud del sistema inverso ideal con la finalidad de hacer la comparación entre estos sistemas.

Los sistemas G basados en el algoritmo *NLMS* difieren entre si de manera insignificante presentando una diferencia del **18.77** por ciento con respecto al sistema inverso ideal a excepción del sistema obtenido para una $\mu=0.01$ que difiere en un **19.55** por ciento.

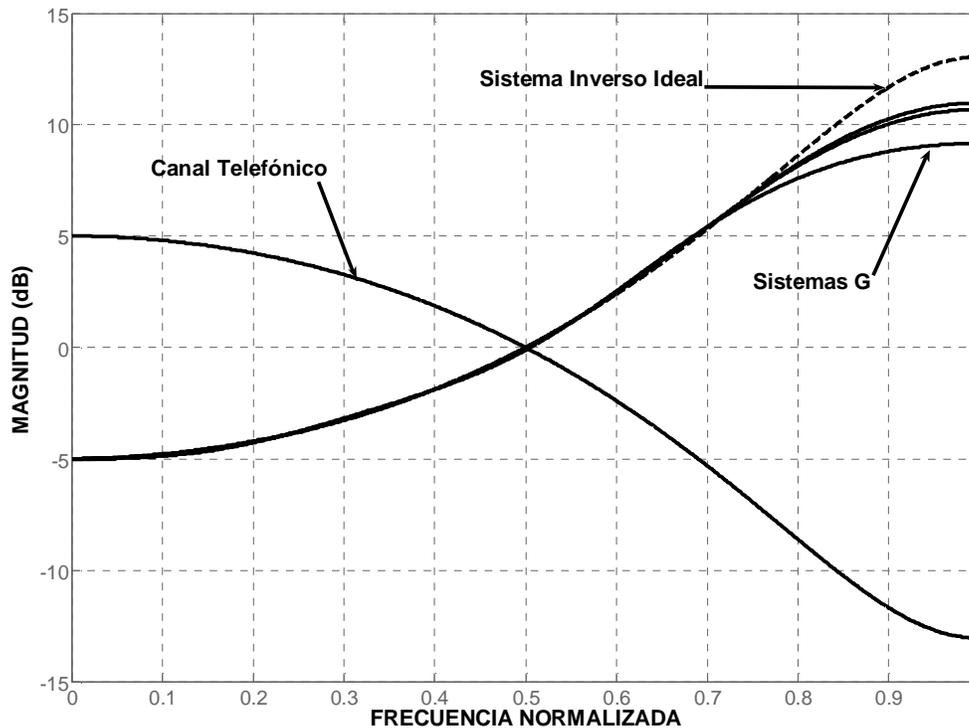


Figura 6.6 Respuesta en magnitud de sistemas G obtenidos del algoritmo NLMS y de aplicar los valores de μ que alcanzaron el punto de convergencia

6.2.4 Respuesta en Magnitud de Sistemas G obtenidos del algoritmo LLMS

Los sistemas G obtenidos del algoritmo LLMS fijando el valor de μ y variando γ para los mismos valores utilizados en las curvas de convergencia se muestran en la Figura 6.7.

Al igual que en los apartados anteriores la semejanza entre los sistemas obtenidos se debe a que los sistemas G presentan prácticamente el mismo valor MSE en el punto de convergencia. Los sistemas G obtenidos difieren en un **19.23** por ciento con respecto al sistema inverso ideal.

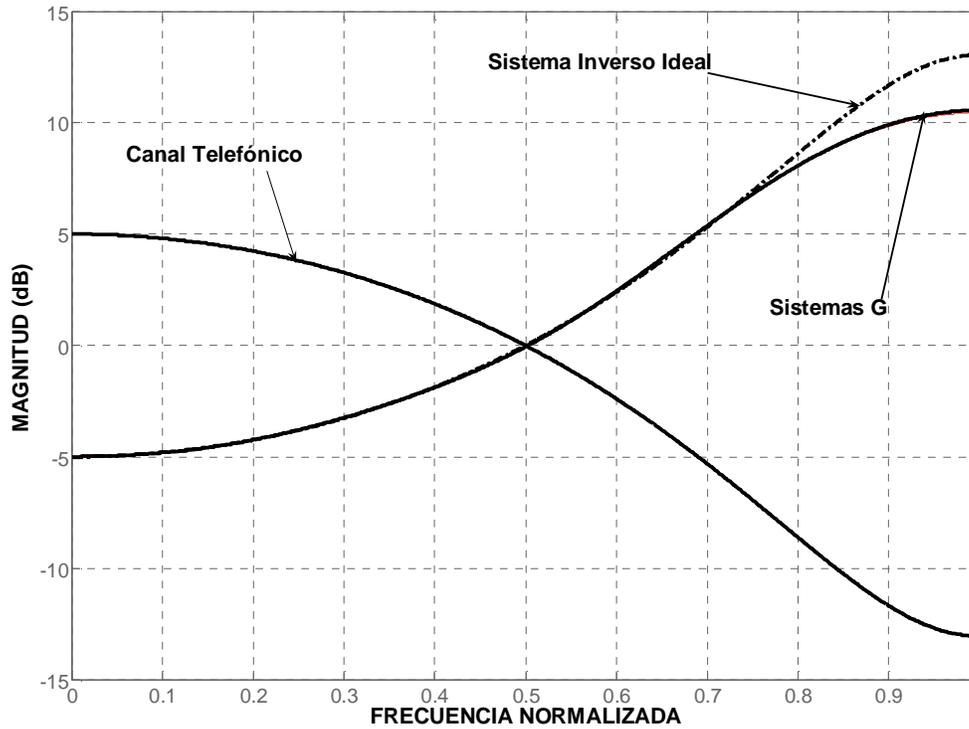


Figura 6.7 Respuestas en Magnitud de sistemas G obtenidos del algoritmo LLMS para los puntos en los que se llega a la convergencia.

6.3 RESPUESTA EN MAGNITUD DE SISTEMA CANAL-IGUALADOR

Nombramos como “*El Sistema Canal-Igualador*” al sistema que se obtiene como resultado de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y del sistema **G** obtenido a partir de alguna variación del algoritmo LMS. Lo que se busca mostrar en este apartado es la proximidad de la respuesta en magnitud de estos sistemas con respecto al sistema ideal para una transmisión sin distorsión (véase capítulo 3).

6.3.2 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo LMS

La Figura 6.8 muestra la respuesta en magnitud de los sistemas Canal-Igualador obtenidos a partir del algoritmo *LMS* y de aplicar los valores estudiados con anterioridad para μ . Nótese de esta figura que la respuesta en magnitud del sistema ideal es constante para todo el intervalo de frecuencias, que los sistemas Canal-Igualador guardan una proximidad notable entre ellos y que su respuesta en

magnitud no decae a valores menores a -2.5 decibeles. Este valor corresponde con la definición del ancho de banda de *potencia media* dada en el capítulo 3, por lo que prácticamente contamos con el mismo ancho de banda que el sistema ideal para la transmisión sin distorsión.

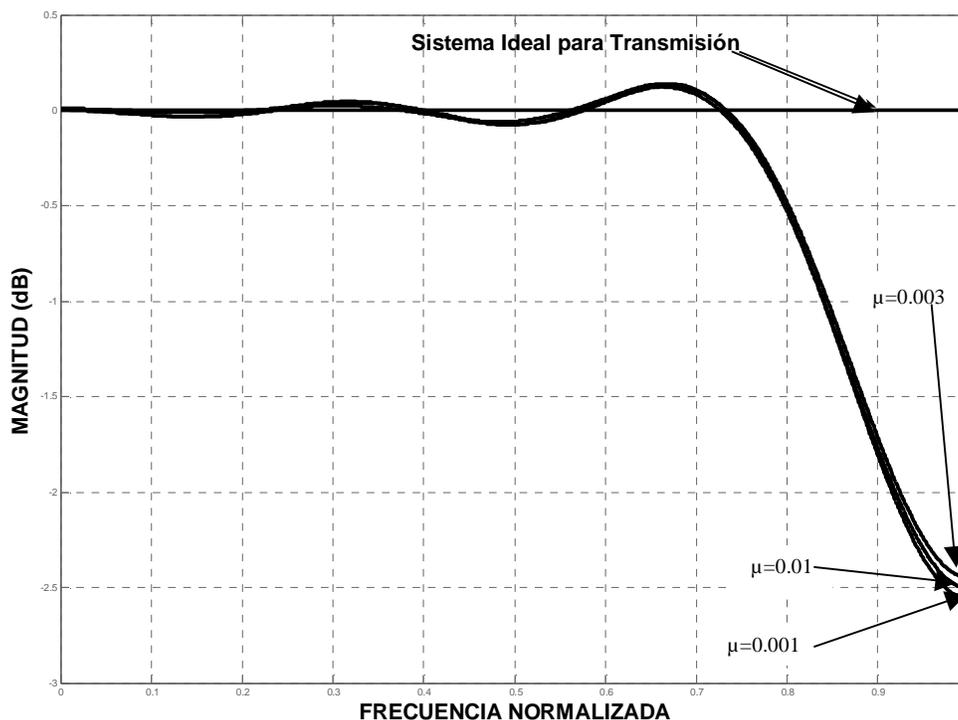


Figura 6.8 Respuesta en magnitud de sistemas canal-igualador obtenidos a partir del algoritmo LMS y de aplicar diferentes valores a μ .

6.3.3 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo NLMS

La Figura 6.9 muestra la respuesta en magnitud de los sistemas Canal-Igualador derivados del algoritmo NLMS, estos sistemas son los que alcanzaron la convergencia dentro de las primeras 160000 iteraciones, nótese que los sistemas guardan una mayor proximidad con respecto al sistema ideal para valores pequeños de μ . El sistema ideal presenta una magnitud constante para todo el intervalo de frecuencias y la respuesta en magnitud de los sistemas Canal-Igualador no decae a valores menores a 4 dB con lo cual obtenemos un ancho de banda de *potencia media* prácticamente cubriendo todo el intervalo de frecuencias.

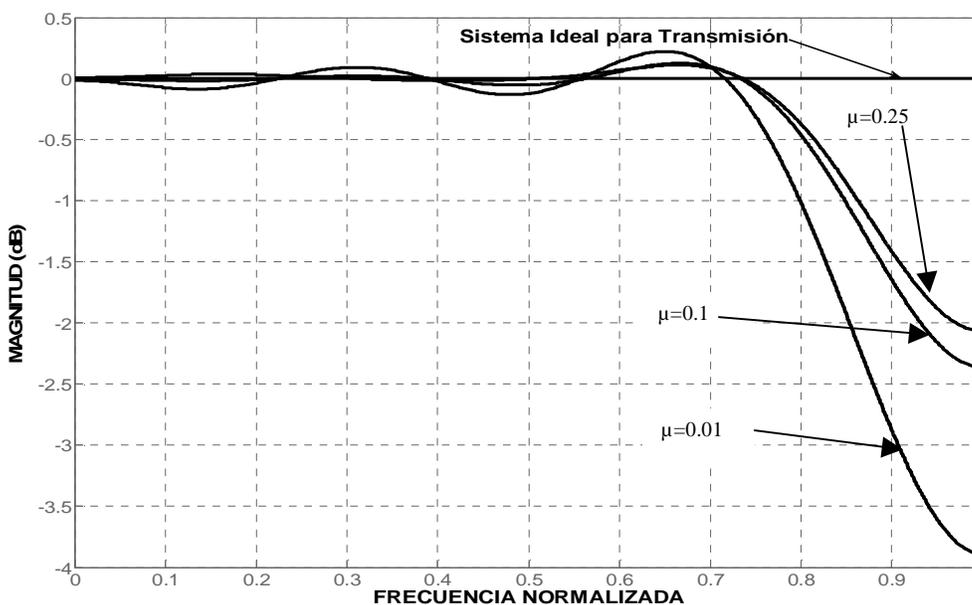


Figura 6.9 Respuesta en magnitud de sistemas Canal-Igualador utilizando el algoritmo NLMS

6.3.4 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo LLMS

La Figura 6.10 muestra la respuesta en magnitud de los sistemas equivalentes derivados del algoritmo LLMS para los Factores γ indicados, al igual que en los casos anteriores se cuenta prácticamente con un ancho de banda de potencia media prácticamente igual al sistema ideal.

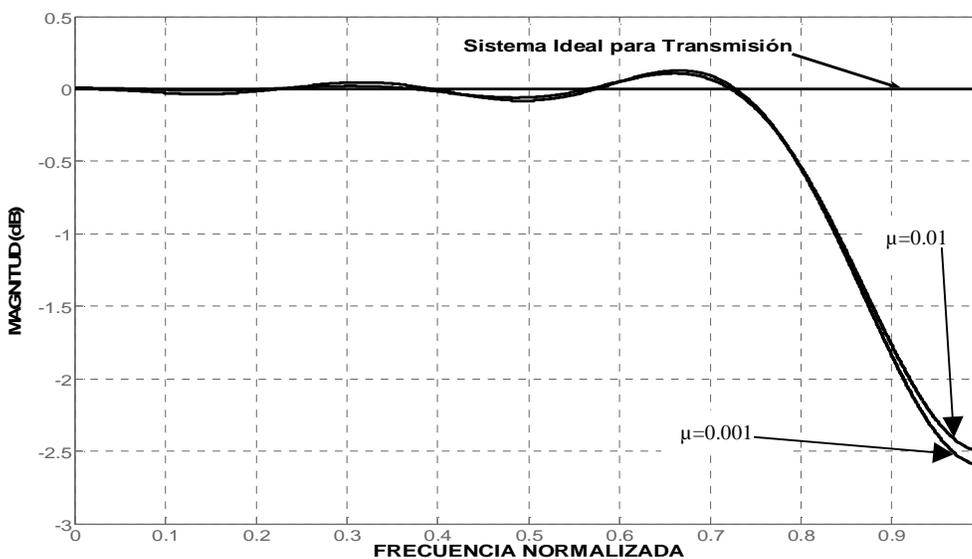


Figura 6.10 Respuesta en Magnitud de sistemas equivalentes obtenidos del algoritmo LLMS para los valores de μ indicados en la figura y para un factor de fuga en ambos casos de 0.0001

6.4 RESPUESTA AL IMPULSO DE SISTEMAS CANAL-IGUALADOR

La respuesta al impulso de un sistema ideal para una *transmisión sin distorsión* corresponde a una función impulso unitario modificado a lo más por un factor de escalamiento en amplitud y un posible retardo en el tiempo (véase capítulo 3).

Lo que se busca en este apartado es comparar la proximidad de la respuesta al impulso del sistema ideal para la transmisión sin distorsión y la del sistema Canal-Igualador donde este último es obtenido a partir de la aplicación del algoritmo LMS o de alguna de sus variantes en la igualación del modelo del canal telefónico. La respuesta al impulso de un sistema ideal para la transmisión sin distorsión se muestra en la Figura 6.11.

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

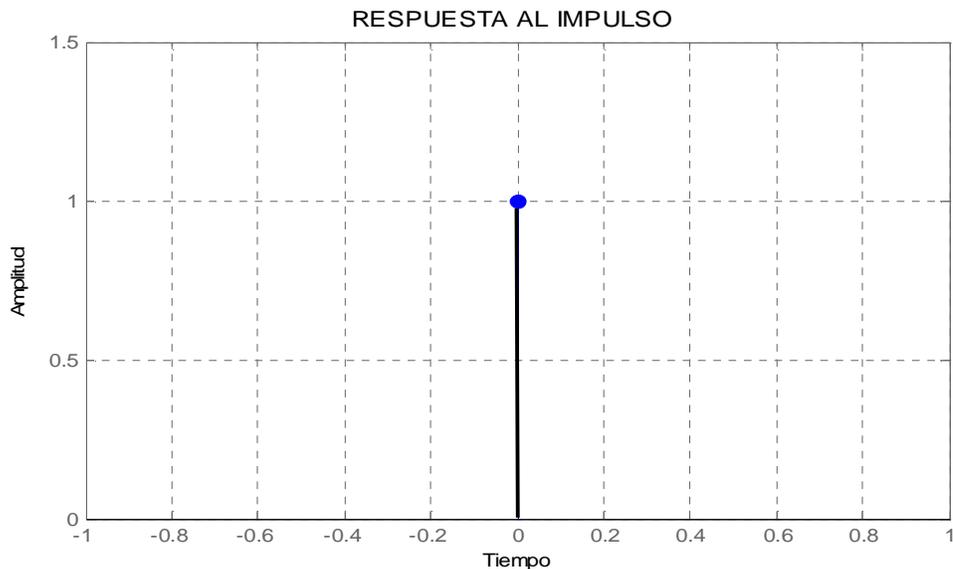


Figura 6.11 Respuesta al impulso de un sistema ideal para transmisión sin distorsión

6.4.2 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo LMS

A continuación se muestran las respuestas al impulso de los sistemas Canal-Igualador obtenidos de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y los sistemas **G** derivados de la aplicación del algoritmo LMS y los diferentes valores para μ .

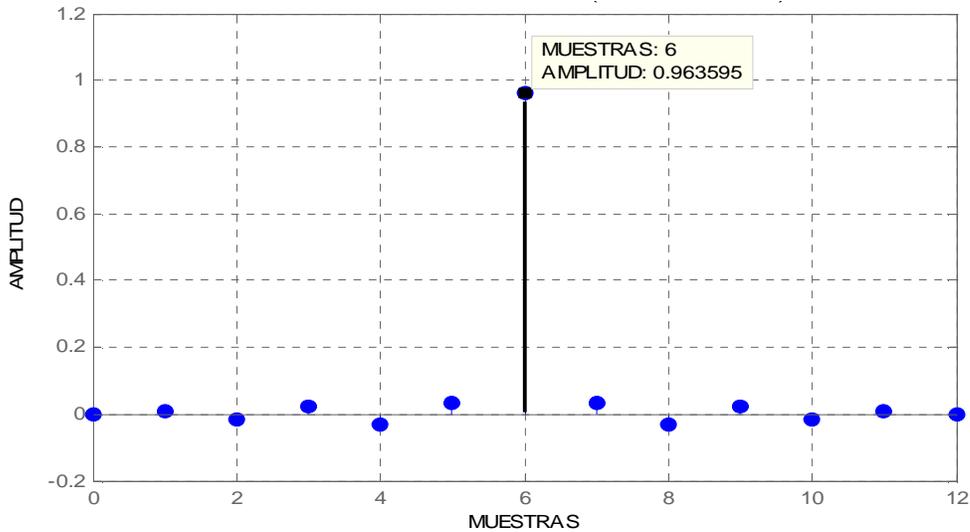


Figura 6.12 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador aplicando un valor $\mu=0.001$

La Figura 6.12 muestra la respuesta al impulso del sistema Canal-Igualador donde se utiliza el sistema **G** donde el valor de μ es igual a **0.001**. En esta figura se nota la respuesta al impulso escalada en amplitud por **0.9635** y con un retardo de **6** muestras lo cual concuerda con la definición para un sistema de transmisión sin distorsión. Alrededor del impulso se encuentran muestras con pequeños valores que son el resultado de la diferencia o el valor de **MSE** existente entre el sistema **G** obtenido y el sistema inverso ideal.

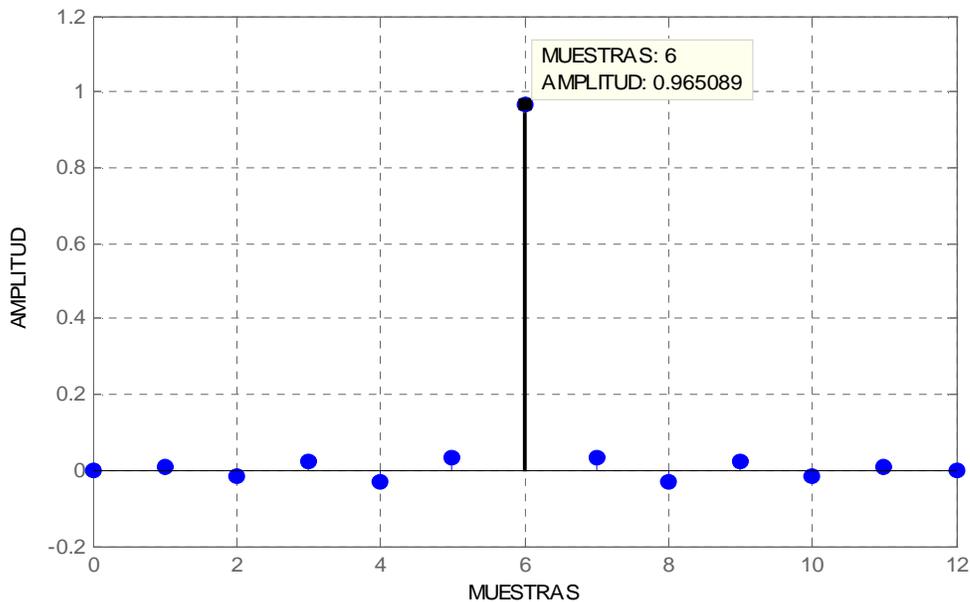


Figura 6.13 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador utilizando el sistema G y un valor de μ igual a 0.003

La Figura 6.13 muestra la respuesta al impulso del sistema Canal-Igualador obtenido de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y el sistema **G** obtenido del algoritmo LMS con un valor de μ igual a **0.003**. En esta figura se puede ver que dicha función impulso unitario está escalada con un factor igual a **0.9650** y que presenta un retraso temporal de **6** muestras, estas características corresponden con lo que se necesita para un sistema para transmisión sin distorsión y las muestras con pequeños valores que se encuentran alrededor de dicha función impulso corresponden al valor **MSE** o diferencia resultante entre el sistema inverso ideal y el sistema **G** obtenido.

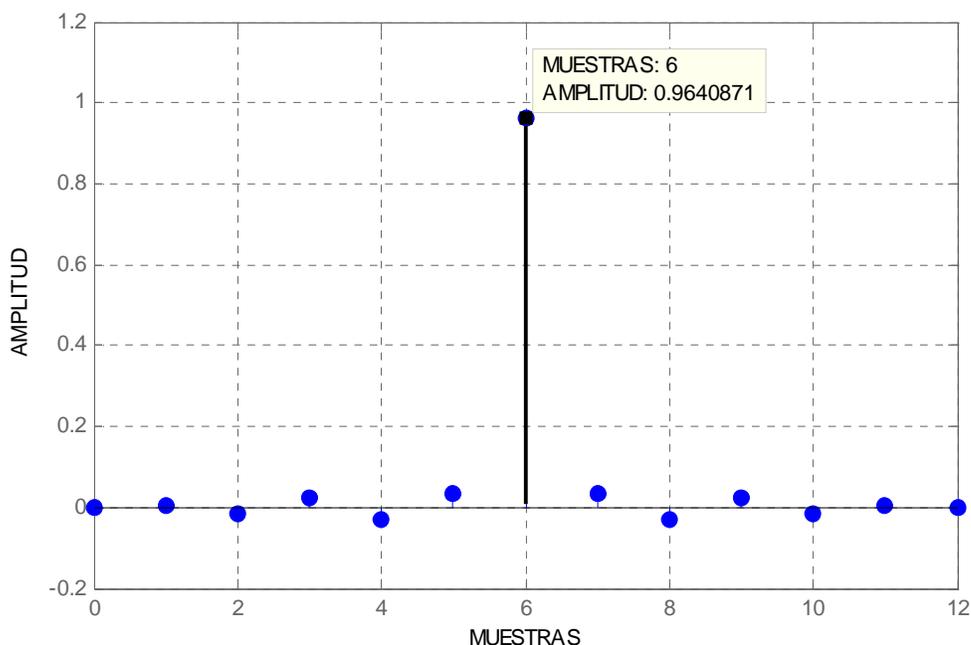


Figura 6.14 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador utilizando algoritmo LMS y un valor de μ igual a 0.01

La Figura 6.14 muestra la respuesta al impulso del sistema Canal-Igualador resultado de la conexión en cascada del sistema **G** obtenido del algoritmo LMS utilizando un valor μ igual a **0.01** y el modelo del canal telefónico en este caso se nota que la función impulso al igual que las anteriores se encuentra escalada por un factor igual a **0.9640** y que tiene un retardo temporal de **6** muestras. Al igual los pequeños valores que circundan al impulso corresponden a la diferencia entre el sistema **G** y el sistema inverso original.

Las figuras anteriores mostraron con todo detalle (debido a la escala de la imagen) la respuesta al impulso de cada sistema esto con la finalidad de observar las características de la función impulso y a continuación la Figura 6.15 muestra una gráfica que permite compararlas todas a la vez.

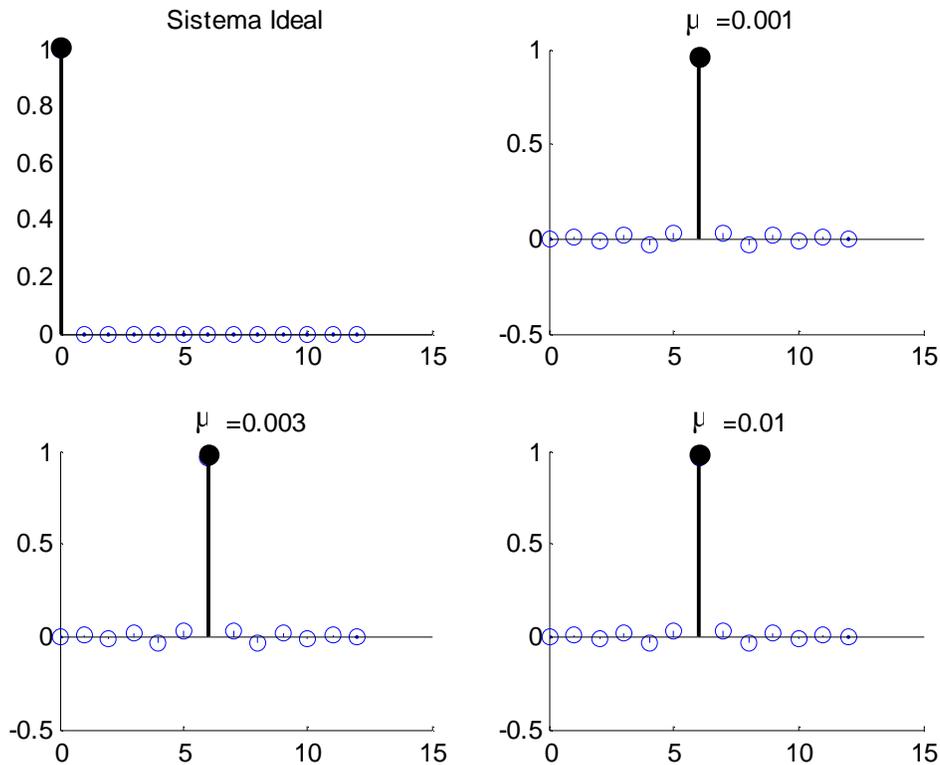


Figura 6.15 Respuestas al impulso de sistemas Canal-Igualador derivados de utilizar el algoritmo LMS

La finalidad de esta gráfica es observar la similitud de los sistemas Canal-Igualador obtenidos de la aplicación de diferentes valores de μ para el algoritmo LMS. Esta similitud, al igual que las respuestas en magnitud previamente analizadas, es consecuencia de que el valor del **MSE** en el punto de convergencia tomó un valor con oscilación menor al uno por ciento para todos los casos.

Cabe destacar que todos los sistemas permiten la reconstrucción del mensaje original, en este caso el punto de interés es determinar que algoritmo presenta una mayor velocidad de convergencia y mantiene las características de estabilidad para todo momento de la operación del sistema.

6.4.3 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo NLMS

La Figura 6.16 muestra la respuesta al impulso para el sistema Canal-Igualador obtenido de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y el sistema **G** obtenido del algoritmo *NLMS* para un valor de μ igual a **0.01**

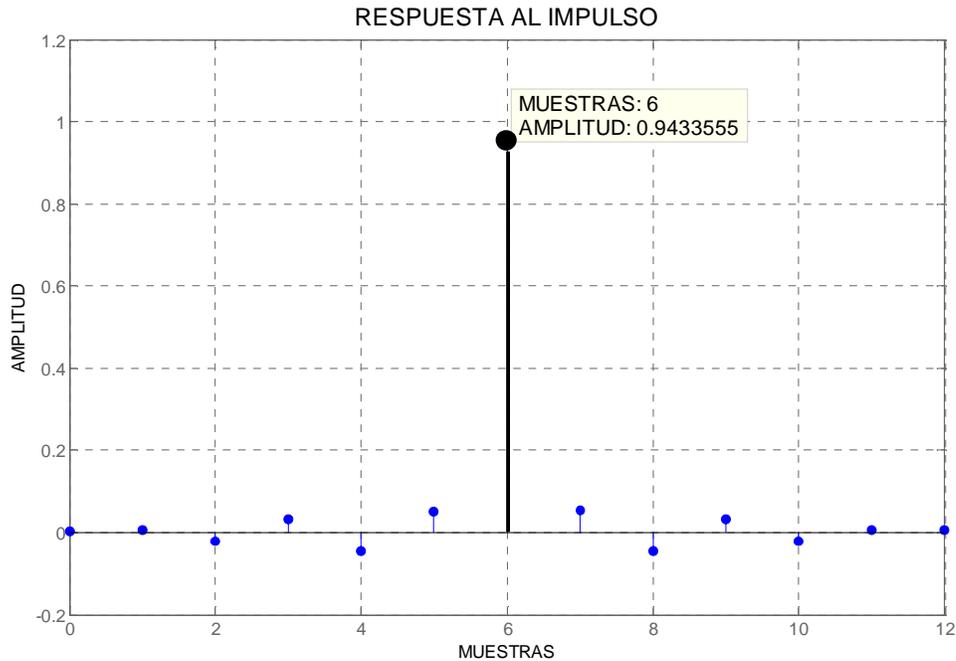


Figura 6.16 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador utilizando el algoritmo NLMS y un valor de $\mu=0.01$

La Figura 6.16 muestra la función impulso unitario escalada por el factor **0.9433** y con un retardo de **6** muestras características que concuerdan con un sistema para transmisión sin distorsión; los valores de las muestras que circundan al impulso representan la diferencia en **MSE** entre el sistema **G** y el sistema inverso ideal.

La Figura 6.17 muestra la respuesta al impulso del sistema equivalente obtenido de emplear el algoritmo NLMS con un valor de μ igual a 0.1.

En la Figura 6.17 se observa la función impulso unitario escalada por el factor **0.9660** y un retardo en el tiempo igual a **6** muestras, los valores que circundan al impulso representan una vez mas el valor **MSE** entre el sistema **G** obtenido y el sistema inverso ideal.

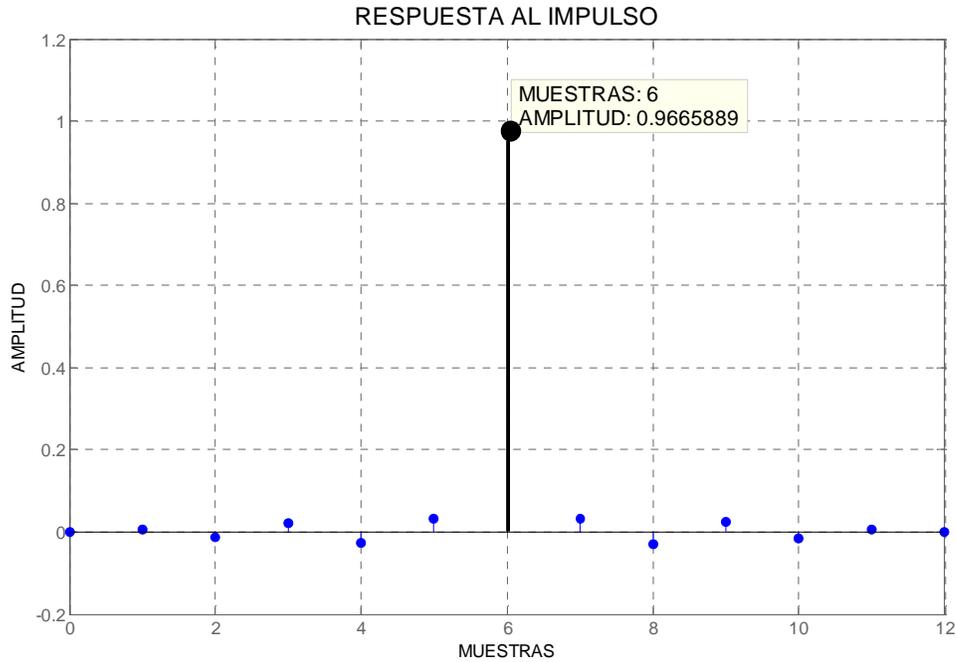


Figura 6.17 Respuesta al impulso para sistema equivalente derivado del algoritmo NLMS y un valor de $\mu=0.1$

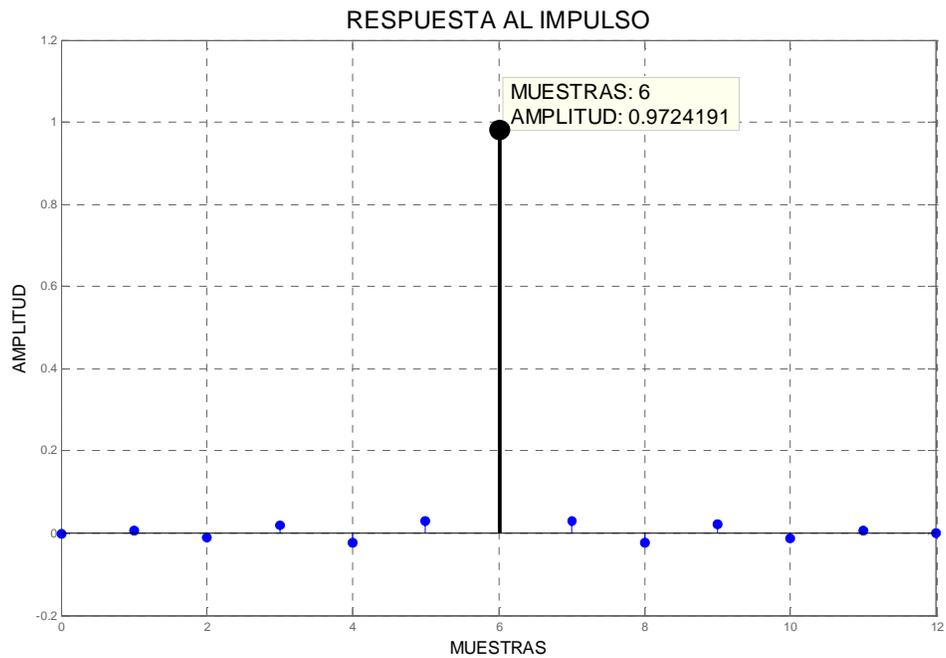


Figura 6.18 Respuesta al Impulso para sistema equivalente derivado del algoritmo NLMS y un valor de μ igual a 0.25

La Figura 6.18 muestra la respuesta al impulso del sistema equivalente obtenido de emplear el algoritmo NLMS con un valor de μ igual a 0.25.

En la Figura 6.18 se observa el escalamiento de la función impulso unitario por un factor igual a **0.9724** y un retardo en el tiempo igual a **6** muestras, los valores que circundan al impulso representan una vez mas el valor **MSE** entre el sistema **G** obtenido y el sistema inverso ideal.

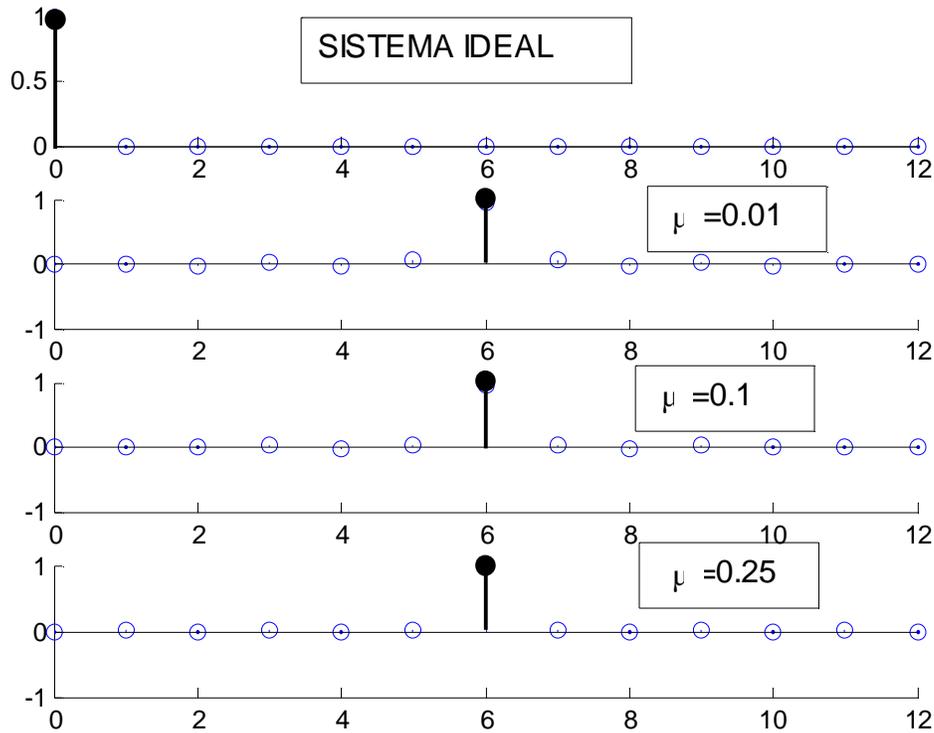


Figura 6.19 Respuestas al impulso para sistemas Canal-Igualador derivados del algoritmo NLMS y para los valores de μ indicados.

La Figura 6.19 muestra la similitud de la respuesta al impulso de los sistemas equivalentes obtenidos, dicha similitud se debe a que prácticamente los sistemas **G** empleados para la construcción de dichos sistemas equivalentes presentan el mismo valor de **MSE**.

6.4.4 Sistemas Canal-Igualador Obtenidos del Algoritmo LLMS

Las Figuras 6.20 y 6.21 muestran las respuestas al impulso de los sistemas equivalentes obtenidos de la aplicación del algoritmo LLMS para la igualación del modelo del canal telefónico empleado, como en los apartados anteriores dichas figuras indican el factor de escalamiento y los retardos presentes en el sistema.

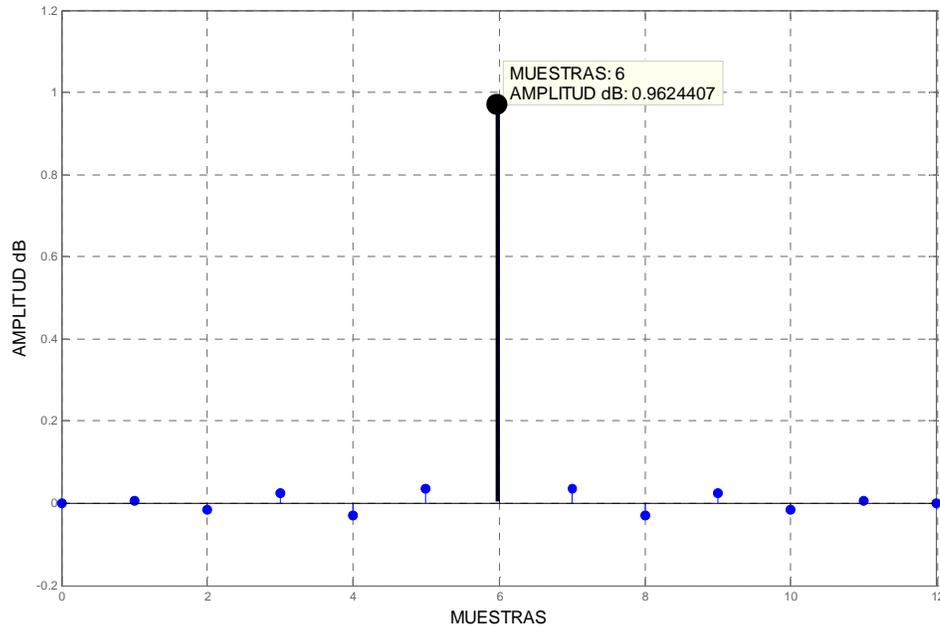


Figura 6.20 Respuesta al impulso de sistema Canal-Igualador derivado de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y el sistema G obtenido con algoritmo LLMS para μ con valor 0.001 y γ de 0.0001

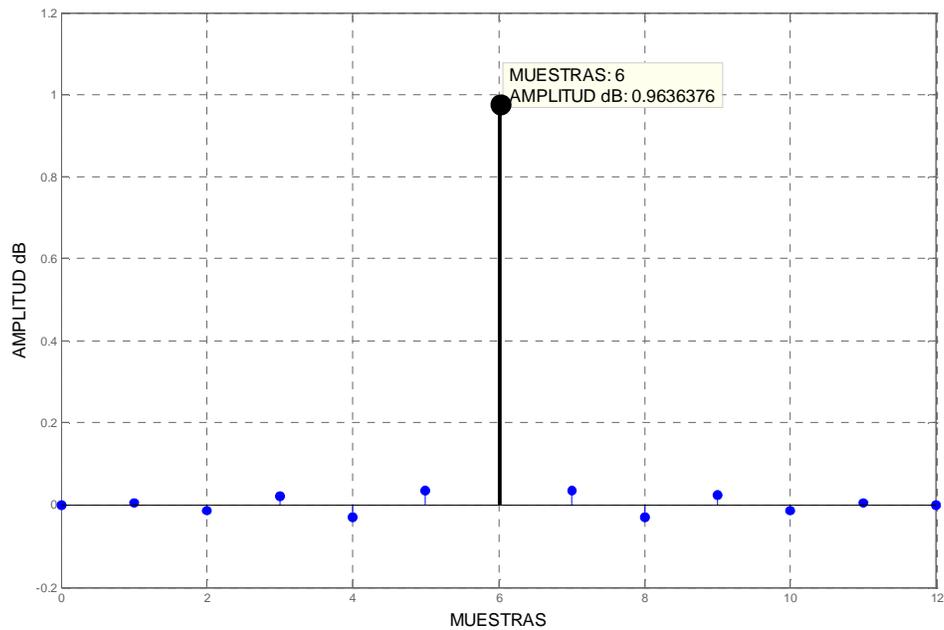


Figura 6.21 Respuesta al impulso de sistema equivalente derivado de la conexión en cascada del modelo del canal telefónico y el sistema G obtenido con algoritmo LLMS y μ con valor 0.01 y γ de 0.0001

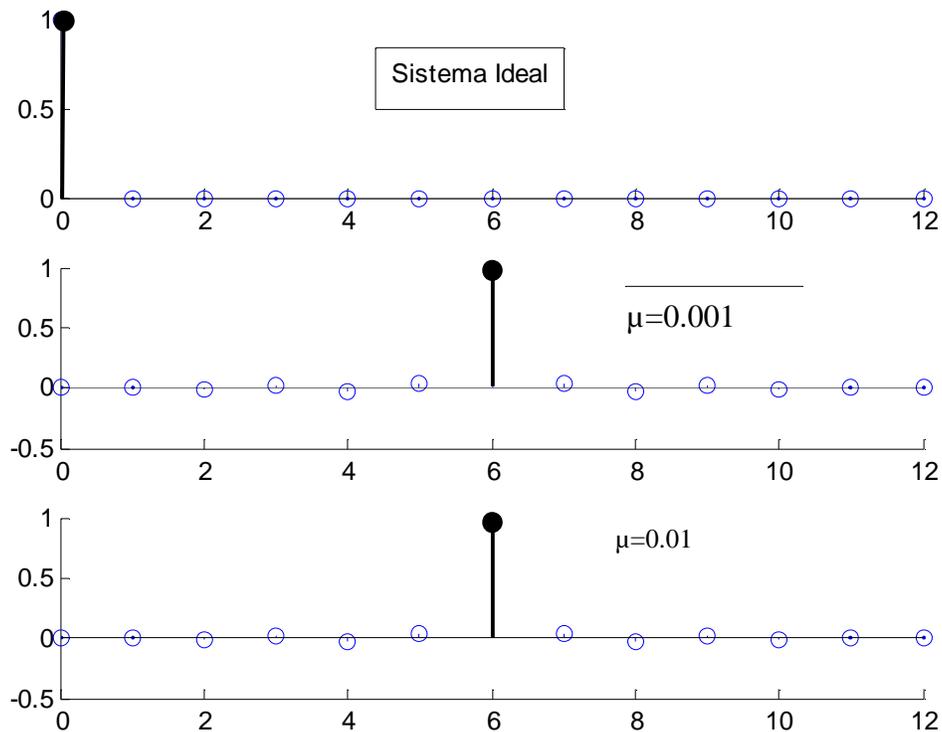


Figura 6.22 Respuestas al impulso de sistemas Canal-Igualador obtenidos con el algoritmo LLMS para los μ indicados y un factor γ en ambos con valor de 0.0001

La Figura 6.22 tiene como finalidad mostrar la similitud esperada entre los sistemas equivalentes obtenidos de la aplicación del algoritmo LLMS debido al valor de **MSE** que presentan los sistemas **G**.

6.5 CANCELACIÓN DE INTERFERENCIAS

La finalidad de este apartado es mostrar gráficamente la señal que el filtro de igualación produce a su salida y como es que ésta se aproxima a la señal originalmente transmitida, conforme incrementa el número de iteraciones que el algoritmo efectúa. La Figura 6.23 muestra las señales involucradas en la igualación de canal durante las primeras iteraciones efectuadas por el algoritmo. La Figura 6.24 muestra las señales involucradas en la igualación de canal una vez que el algoritmo ha alcanzado el punto de convergencia.

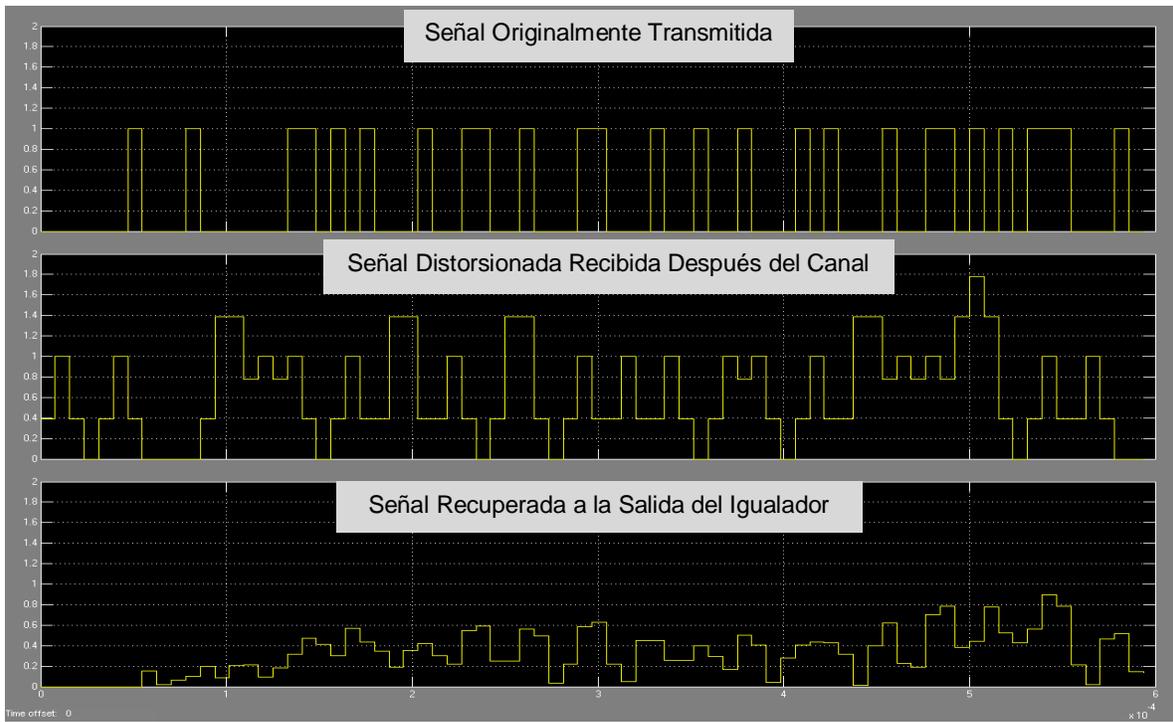


Figura 6.23 Muestras de señales involucradas en la igualación de canal antes de que el algoritmo llegue al punto de convergencia.

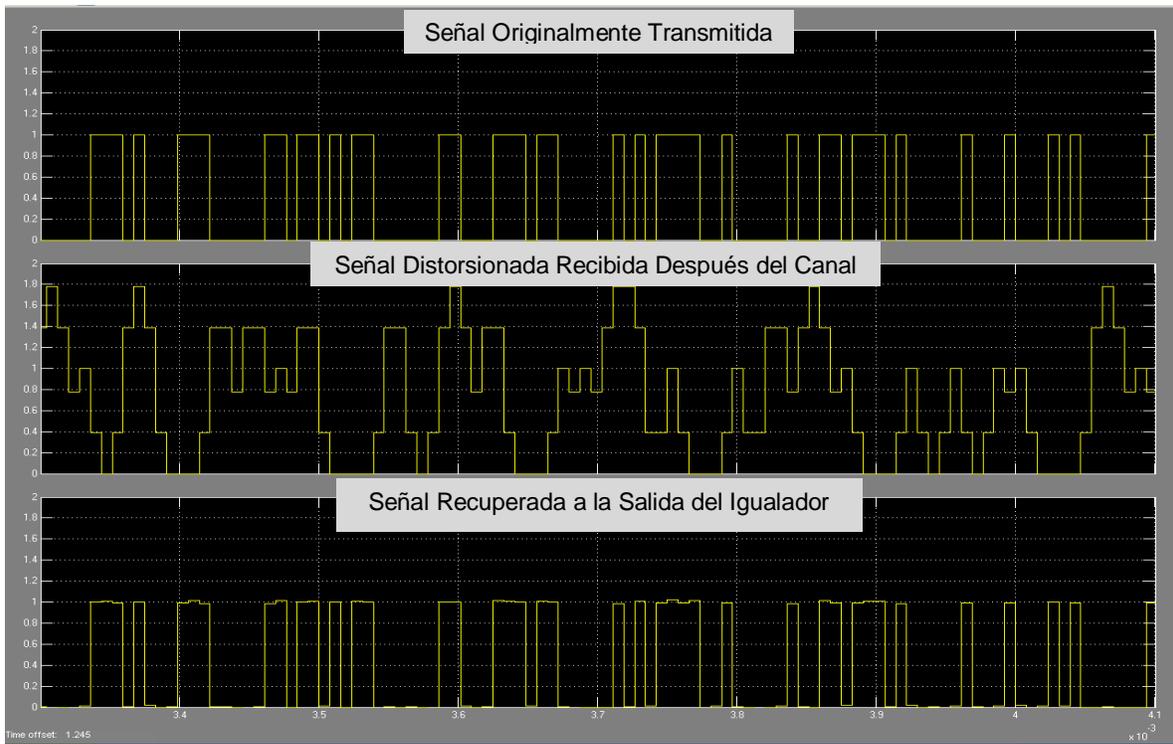


Figura 6.24 Muestras de señales involucradas en la igualación cuando el algoritmo ya ha alcanzado el punto de convergencia.

6.6 CORRELACIÓN DE LA SEÑAL RECUPERADA

Otra evaluación empleada en este trabajo para determinar la calidad de la transmisión de nuestro sistema de comunicación es efectuar la correlación entre las señales analógicas de voz real y voz estimada. Esto se debe a que la correlación es una operación matemática que nos permite evaluar el grado de semejanza entre dos señales [4] (véase apéndice **B**). Aquí es aplicada para efectuar la comparación de dos señales analógicas.

La Figura 6.25 muestra la autocorrelación de la señal de voz que se origina del habla del usuario a la entrada del transmisor

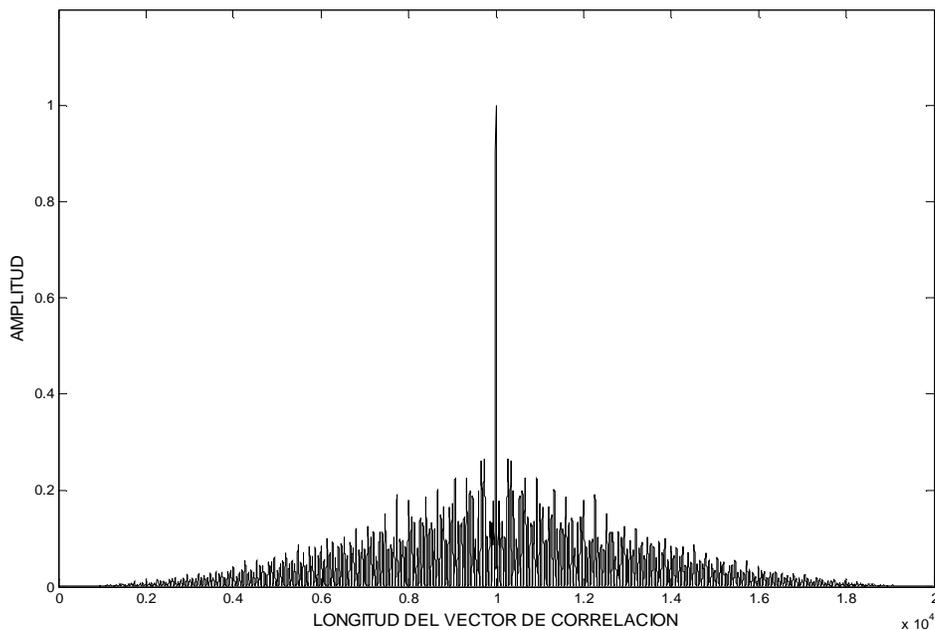


Figura 6.25 Auto correlación de la señal de voz originalmente transmitida, el impulso de amplitud 1 indica que la señal de voz original se acopla consigo misma a la mitad del vector punto que corresponde al retardo cero.

La Figura 6.26 muestra la correlación cruzada entre la señal analógica original a la entrada del transmisor con la señal de voz recuperada a la salida del receptor. Esta operación matemática nos da una medida del grado de semejanza entre la señal transmitida y la señal recuperada. Nótese que en este caso se supone que el sistema de comunicación no es afectado por el ruido por lo tanto la señal recuperada no presenta muestras de ruido.

En el siguiente apartado se presenta otro parámetro de evaluación que es el desempeño frente al ruido del algoritmo seleccionado con parámetros que brindan estabilidad al sistema en todo momento de la operación y que presentan una rápida convergencia. En el próximo apartado como medida de la calidad de la

señal recuperada se presentara nuevamente la correlación cruzada entre la señal de voz original y la señal de voz recuperada.

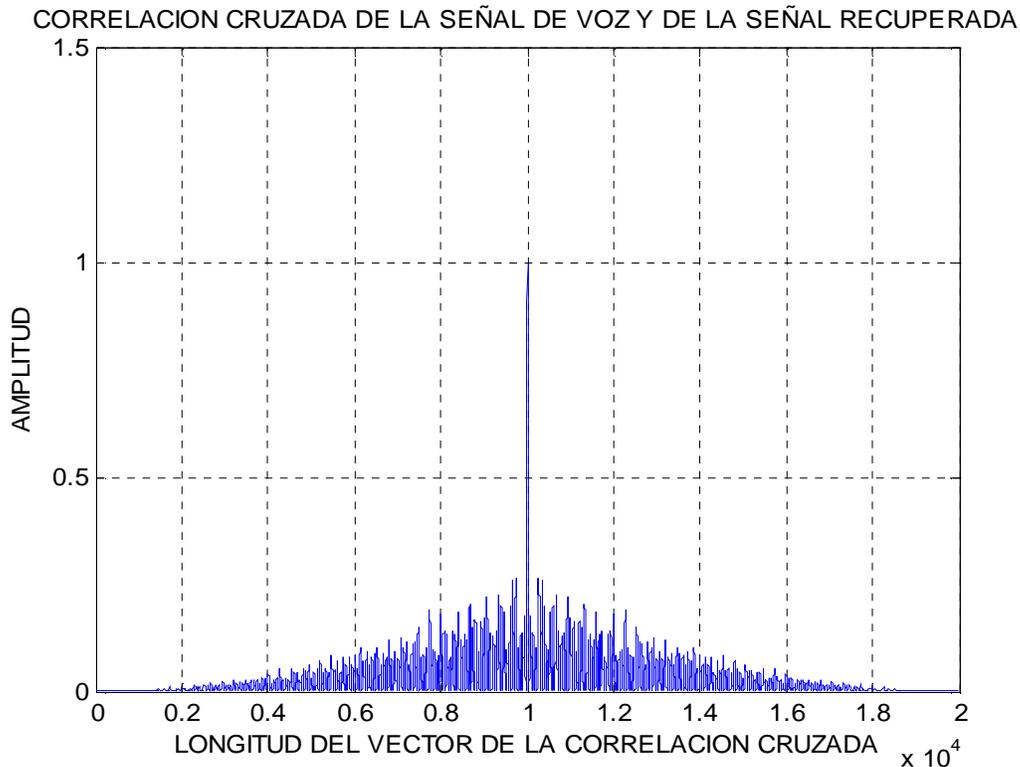


Figura 6.26 Correlación Cruzada para la señal de voz originalmente transmitida y para la señal de voz estimada a la salida del receptor.

6.6 DESEMPEÑO DEL SISTEMA FRENTE AL RUIDO

En este apartado el interés principal es determinar cual es la relación señal a ruido (**SNR**) mínima a la entrada del receptor que nos permite reconstruir el mensaje originalmente transmitido en una forma reconocible por el oído humano.

Para tal efecto, de las variantes del algoritmo **LMS** que se analizaron en los apartados anteriores se seleccionó el que presentó una mayor velocidad de convergencia y que operó con características de estabilidad en todo el intervalo de tiempo estudiado; este algoritmo es el **NLMS** con un valor μ igual a **0.25**.

La definición de la **Relación Señal a Ruido** [5] se da en la ecuación (6.6.1)

$$SNR_{(dB)} = 10 \times \log \left(\frac{\text{Potencia de señal}}{\text{Potencia de ruido}} \right) \quad (6.6.1)$$

A continuación se presentan las Curvas de Convergencia obtenidas del algoritmo para diferentes **SNR**.

Caso 1. SNR = 21.63 dB. La Figura 6.27 muestra la curva de convergencia para éste caso, donde la reproducción del mensaje estimado contiene un poco de ruido pero se interpreta bastante bien por el oído humano.

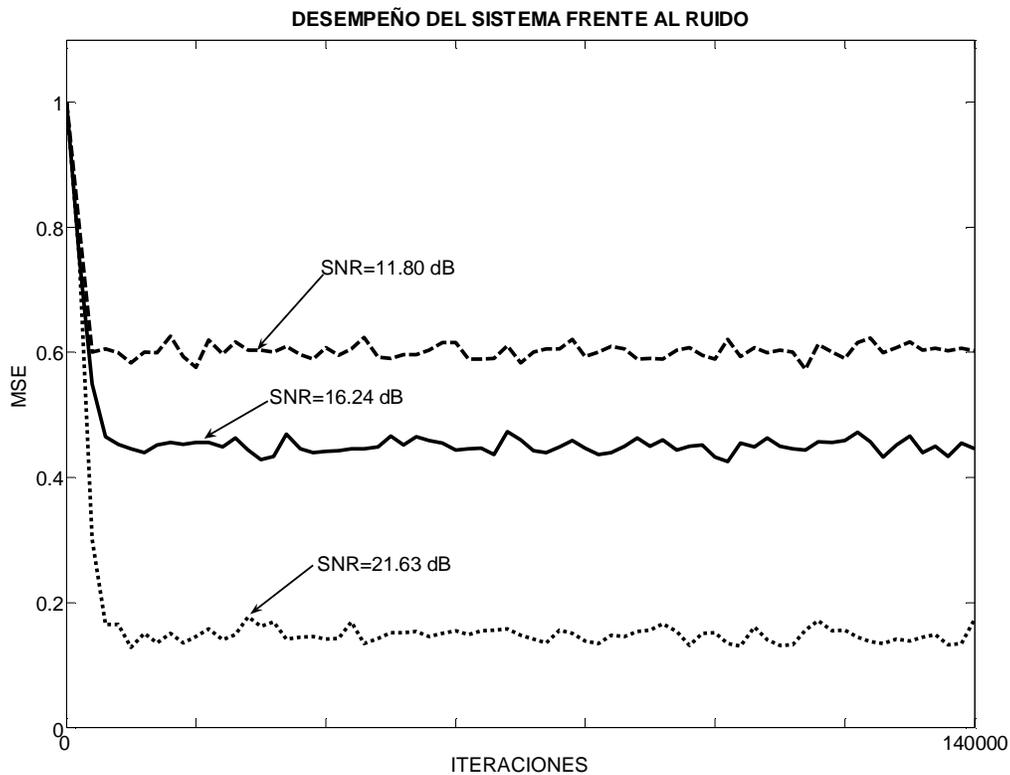


Figura 6.27 Curvas de Convergencia para diferentes SNR en dB

Caso 2. SNR = 16.24 dB. La Figura 6.27 muestra la curva de convergencia para este caso, donde la señal de voz todavía se distingue por encima del ruido pero éste comienza a tener efectos considerables.

Caso 3. SNR = 11.80 dB. La Figura 6.27 muestra la curva de convergencia para este caso. Aquí la señal de voz se distingue pero ya existe mucho ruido.

El caso anterior es de especial importancia debido a que en teoría [7] se considera el valor de **SNR= a 11 dB** como el límite necesario de la relación señal a ruido para realizar una recuperación del mensaje que se pueda interpretar por el oído humano. Con este último valor de SNR, para determinar si la señal que recuperamos guarda parecido con respecto a la señal que se transmitió originalmente la Figura 6.28 muestra la *Correlación Cruzada* entre la señal de voz real y la señal de voz estimada.

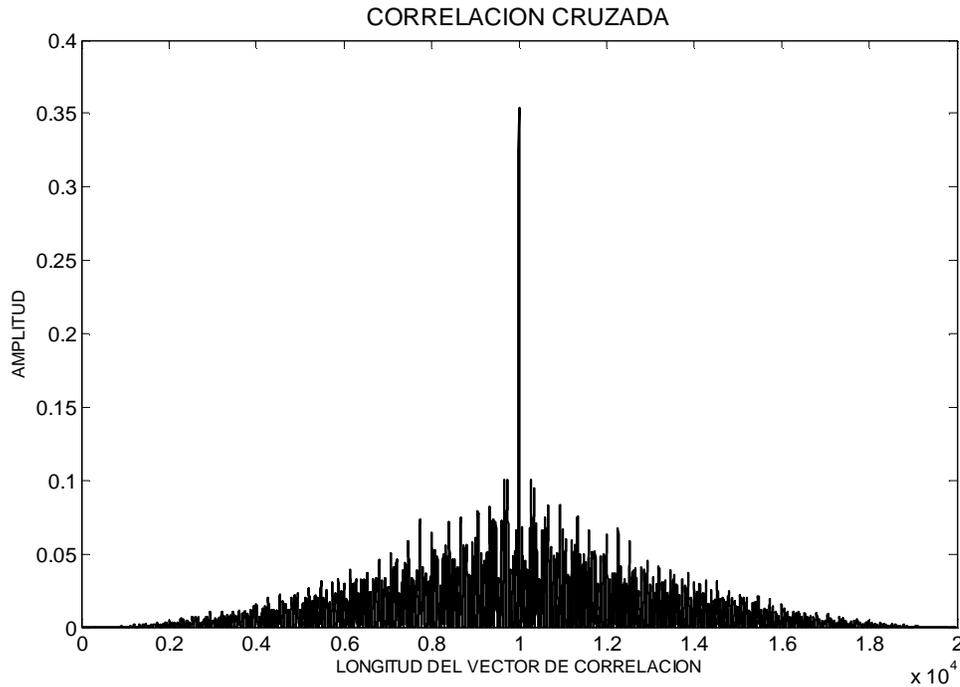


Figura 6.28 Correlación Cruzada entre la señal de voz real y la señal de voz recuperada para el caso en que se tiene una SNR=11.80

Si se compara la amplitud de este impulso con el obtenido en la Figura 6.26 se observa que solo representa un 35% del caso mostrado en aquella figura. Esto nos da una idea de la semejanza entre la señal transmitida y la señal recuperada. En la Figura 6.29 se muestran las señales que se comparan en la Figura 6.28

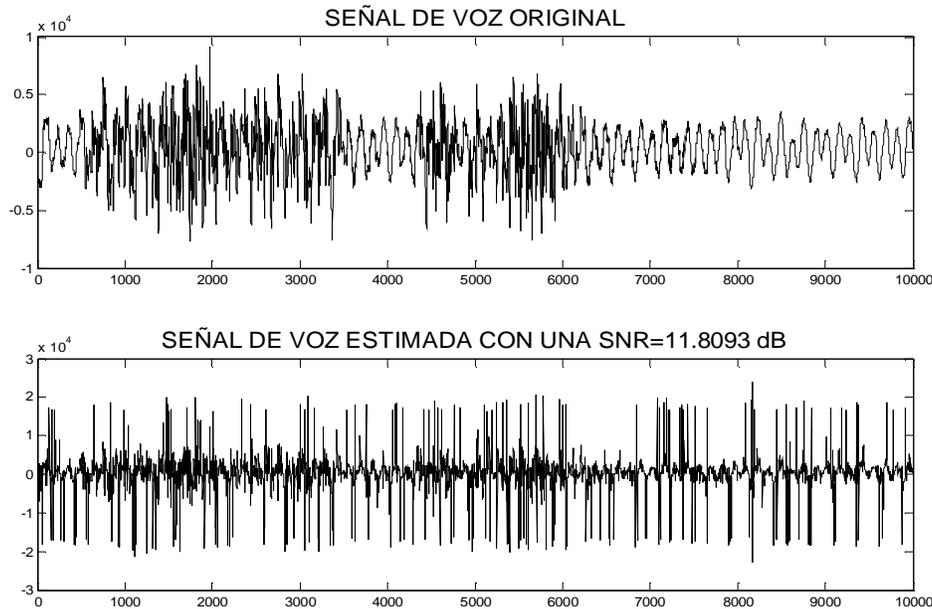


Figura 6.29 Señal de voz original y Señal de voz recuperada

De estos resultados se tiene que para valores de **SNR menores a 11 dB** la calidad en la reproducción del mensaje recuperado es mala y dicho mensaje no puede ser interpretado por el oído humano.

6.7 RESUMEN

En este capítulo se analizó el desempeño de los algoritmos **LMS**, **NLMS** y **LLMS** para diferentes parámetros, esto con la finalidad de seleccionar los parámetros que logran una mayor velocidad de convergencia y que aseguran la estabilidad del sistema durante toda su operación; De los resultados obtenidos se seleccionó el algoritmo **NLMS** con $\mu=0.25$ por presentar la mejor velocidad de convergencia y estabilidad requeridas para el correcto funcionamiento del sistema. Con este algoritmo se probó el desempeño del sistema de comunicación digital en un ambiente afectado por el ruido, el nivel de ruido se varió para determinar la **SNR** mínima necesaria para recuperar el mensaje originalmente transmitido con la calidad mínima para poder ser interpretado por el oído humano.

En el siguiente capítulo se darán las conclusiones generales de este trabajo y los comentarios finales sobre la operación de un sistema de comunicación digital.

7 CONCLUSIONES

En esta tesis se desarrolla un sistema de comunicación para la transmisión de voz digital, con la restricción de que a la salida del receptor se cuente con una señal estimada que tenga un alto grado de proximidad con respecto a la señal de voz originalmente transmitida.

Para desarrollar este sistema, se codificó la señal de voz en formato **PCM** con palabras de 16 bits, obteniéndose una relación *señal a ruido de cuantización* superior a los **90 dB**. Pero mas allá de los problemas involucrados en la construcción de un sistema de comunicación digital de alta calidad, el problema que realmente impone serias restricciones en nuestro objetivo, es el efecto que los canales dispersivos ocasionan sobre la transmisión de señales digitales conocido como **Interferencia Intersímbolo**. Éste trabajo, hace énfasis en la solución a este problema, dicha solución lleva por nombre **Igualación de Canal**, ésta solución consiste en invertir los efectos que el canal dispersivo impone sobre nuestra señal digital transmitida.

Para llevar a cabo esta solución existe una gran variedad de métodos que dependen del tipo de aplicación con la cual se este tratando. Para encontrar el método óptimo que lleve a cabo la igualación de canal, lo primero que debe hacerse es **delimitar las características bajo las cuales operará nuestro sistema y tomar en cuenta las consideraciones prácticas pertinentes**.

En nuestro caso la transmisión de voz digital se efectúa a través de un **canal telefónico**, lo cual implica:

- Primero, que el canal telefónico es un sistema de fase no mínima o de fase mixta por lo cual, el **igualador ideal es inestable**.
- Segundo, que en la red de telefonía conmutada la marcación o enlace telefónico se lleva a cabo por una conexión aleatoria de posibles ensambles físicos para unir dos puntos, lo que tiene como consecuencia que **las características de la función de transferencia del canal telefónico cambien** de una marcación a otra.

Estas consideraciones determinan el tipo de solución implementada, es decir, la solución que se aproxima a la solución del igualador ideal pero que mantiene en todo momento la estabilidad del sistema y que además se adapta a las características cambiantes del canal de comunicación.

Con base en lo anterior se seleccionó el método para llevar a cabo la *Igualación de Canal* y de ésta solución surge el nombre de la presente tesis: **Igualación de un Canal Telefónico Utilizando Filtrado Adaptable**.

El *filtro* implementado tiene una estructura **FIR** basado en el criterio de optimización **MSE** y en el algoritmo *adaptable LMS*, dichas características se adecuan a las consideraciones prácticas antes mencionadas de la siguiente forma:

El criterio MSE o criterio del error medio cuadrático proporciona una solución que tiende a la solución óptima o ideal del filtro de **Wiener** con la ventaja de no requerir información sobre los estadísticos de la señal. El algoritmo LMS basado en el gradiente estocástico ahorra la inversión de la matriz de autocorrelación involucrada en la ecuación de filtrado de Wiener, además de proporcionar **eficiencia, robustez y sencillez computacional**.

Del algoritmo LMS se probaron dos variantes: El algoritmo **NLMS** y el algoritmo **LLMS**, esto con la finalidad de elegir el algoritmo con mayor velocidad de convergencia y con las características de estabilidad deseadas para todo sistema; Con base en lo anterior el algoritmo **NLMS con una μ igual a 0.25** presentó los mejores resultados bajo los esquemas de evaluación seleccionados. Este algoritmo logro la mayor velocidad de convergencia manteniendo la estabilidad del algoritmo para el intervalo considerado (Figura 6.2). Su respuesta en magnitud difiere de la del sistema inverso ideal en un **18.77%** y la respuesta en magnitud del sistema Canal-Igualador utilizando este algoritmo prácticamente tiene un ancho de banda de potencia media equivalente al del sistema ideal (Figura 6.9). Además la correlación cruzada de la señal original y la señal recuperada utilizando este algoritmo indica que dichas señales presentan una semejanza prácticamente del **95.5%**.

Por ultimo el sistema de comunicación digital con este algoritmo integrado en el receptor, probó su desempeño con respecto al ruido sometándose a diferentes **SNR** para determinar la cantidad máxima de ruido tolerable. El resultado fue que la **SNR mínima requerida a la entrada del receptor es 11 dB** para entregar a la salida del receptor una señal de voz estimada con la calidad suficiente para ser interpretada por el oído humano.

Con base a los resultados obtenidos podemos concluir que el algoritmo adaptable seleccionado brinda una solución adecuada al problema de la Interferencia Intersimbólica, dentro de un ambiente de operación que no se encuentre sometido a ruido que provoque una SNR menor a 11 dB.

Como comentario final se destaca que en la actualidad y en el ámbito de las comunicaciones digitales las exigencias tienden hacia aplicaciones en tiempo real con mayores tasas de transmisión. Estas exigencias solo pueden satisfacerse mediante el uso eficiente del ancho de banda del canal disponible y reduciendo al máximo los efectos de la Interferencia Intersimbólica, para lo cual, éste trabajo brinda un camino a seguir para la solución de dicho problema, siendo el inicio de posibles implementaciones en hardware que operen en sistemas conmutados de telefonía para la transmisión de voz digital de alta calidad.

APÉNDICE A

ALGORITMOS NLMS Y LEAKY LMS

Algoritmo NLMS

El algoritmo LMS Normalizado tiene por **objetivo** independizar la velocidad de convergencia de la potencia de la señal de entrada. Es, por ello, más robusto que el algoritmo LMS.

En el algoritmo LMS, la corrección aplicada al vector de pesos $\mathbf{w}[n]$ es proporcional al vector de entrada $\mathbf{x}[n]$. Por tanto, si $\mathbf{x}[n]$ es elevado, el algoritmo LMS experimenta un problema de amplificación de ruido de gradiente. Con la normalización del parámetro de convergencia μ (*Tamaño del Paso*), este problema se reduce y se evita un crecimiento desmesurado de la corrección al vector $\mathbf{w}[n]$ cuando la entrada disminuye drásticamente.

$$w_{n+1} = w_n + \mu * x_n * e[n] \quad (\text{A.1})$$

Para evitar este problema se puede emplear el algoritmo **LMS Normalizado**

$$w_{n+1} = w_n + \mu * \frac{x_n}{(|x_n|^2 + \epsilon)} * e[n] \quad (\text{A.2})$$

La condición de convergencia es $0 < \mu < 2$

Este algoritmo puede verse como un algoritmo LMS con una μ variable dependiente de la potencia de entrada esto es:

$$\mu_n = \frac{\mu}{(|x_n|^2 + \epsilon)} \quad (\text{A.3})$$

Donde ϵ es una constante positiva ($\epsilon=1e^{-10}$) que evita inestabilidades numéricas.

Algoritmo LEAKY LMS

Cuando el proceso de entrada al filtro adaptativo tiene una matriz de autocorrelación con algún autovalor nulo, el algoritmo LMS tiene uno o varios modos que no decaen a cero con el tiempo. Puesto que estos modos pueden hacer que el sistema se vuelva inestable, es necesario estabilizar el LMS forzando estos modos a cero. Una manera de conseguirlo es introduciendo un factor de fuga γ en el algoritmo [9]:

$$w[n+1] = (1 - \mu * \gamma) * w[n] + \mu * x[n] * e[n] \quad (\text{A.4})$$

donde $0 < \gamma \ll 1$. Este factor de fuga, lleva a los coeficientes del filtro a cero si el error o la entrada se anulan, y también consigue que los modos no convergentes decaigan a cero.

Ahora, la condición del parámetro μ para que se exista convergencia en media es

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max} + \gamma} \quad (\text{A.5})$$

para ser más exactos, y asegurar la convergencia en varianza,

$$0 < \mu < \frac{2}{3 * (\lambda_{\max} + \gamma)} \quad (\text{A.6})$$

Esta cota puede expresarse, de manera más restrictiva, utilizando la traza de la nueva matriz R'

$$0 < \mu < \frac{2}{3tr(R')} \quad (\text{A.7})$$

La parte negativa de este algoritmo es que la solución en estado estacionario es sesgada. En efecto, el valor del vector de pesos cuando se alcanza la convergencia es

$$w = (R + \gamma)^{-1} * p \quad (\text{A.8})$$

El compromiso en este caso es robustez frente a sesgo o precisión.

APÉNDICE **B**

CORRELACIÓN DE SEÑALES

La correlación es una operación matemática entre dos secuencias donde uno de sus objetivos es medir el parecido que existe entre dos señales y así extraer información que dependerá de la aplicación concreta considerada [4].

La correlación de señales es una operación que se realiza con frecuencia en distintas áreas de la ingeniería y la ciencia como el radar, sonar, comunicaciones digitales, geología, etc.

CORRELACIÓN CRUZADA Y AUTOCORRELACIÓN

Suponga que tenemos dos secuencias $x[n]$ e $y[n]$, ambas de energía finita. La correlación cruzada de las secuencias $x[n]$ e $y[n]$ es la secuencia $r_{xy}(l)$, que se define como:

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \quad l = \dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\dots \quad (\text{B.1})$$

o, equivalentemente como

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) \quad l = \dots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\dots \quad (\text{B.2})$$

Donde el índice l es el parámetro de desplazamiento o *retardo* en el tiempo y los subíndices xy de la secuencia de correlación $r_{xy}(l)$ indican las señales que han sido correladas. El orden de los subíndices, x precediendo a y indica la dirección en que una secuencia es desplazada con respecto a la otra. Es decir, la secuencia $x(n)$ no se desplaza y la secuencia $y(n)$ se desplaza l muestras hacia la derecha si l es positivo y l muestras hacia la izquierda si l es negativo.

Una propiedad interesante de la correlación cruzada es la siguiente [4]:

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l) \quad (\text{B.3})$$

Por tanto, $r_{yx}(l)$ es simplemente la versión reflejada de $r_{xy}(l)$, donde la reflexión se hace con respecto a $l=0$. De aquí que, $r_{yx}(l)$ nos proporcione exactamente la misma información que $r_{xy}(l)$, con respecto a la similitud entre $x[n]$ e $y[n]$.

En el caso especial de que $y(n)=x(n)$, tenemos la **autocorrelación** de $x[n]$, que se define como [4]:

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \quad (\text{B.5})$$

De estas sumatorias la propiedad que nos brinda información sobre la semejanza de las secuencias es la siguiente [4]:

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y} \quad (\text{B.6})$$

En el caso especial de que $y[n]=x[n]$ la ecuación (B.6) se reduce a

$$|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x \quad (\text{B.7})$$

Donde E es la energía de la señal.

Esto significa que la autocorrelación es una secuencia que alcanza su valor máximo para el retardo cero. Este resultado es consistente con el hecho de que una señal se adapta consigo misma para un retardo cero. En el caso de la correlación cruzada la ecuación (B.6) corresponde una cota superior de sus posibles valores.

APÉNDICE C

PROGRAMACIÓN DE ALGORITMOS EN MATLAB

En este apartado se expone el conjunto de instrucciones con los que se llevó a cabo la implementación de los algoritmos **LMS**, **NLMS** y **Leaky LMS**. Cabe mencionar que estos códigos son muy parecidos entre si debido a que varían solo por la adición de algunos factores de ponderación en su estructura.

ALGORITMO LMS

```

% Este script es la implementacion del algoritmo adaptable LMS

%%%%%%%% Se definen primero los valores que se emplearan %%%%%%%%%%

%%%%%%%% % señal de referencia %%%%%%%%%%

retardo=6; %%%%%%%%%se debe poner el retardo sugerido
SENALDEREFERENCIA=zeros(1,160000+retardo);% produce una vector de ceros equivalentes al retraso
SENALDEREFERENCIA(1,7:160006)=SENALPCM(1,1:160000);
SENALDEREFERENCIA=SENALDEREFERENCIA(1,1:160000); %%%% aquí ya se cuenta con la señal de referencia
retardada

%%%%%%%% % señal corrompida %%%%%%%%%%

b=[0.3887,1,0.3887]; %%%% estos son los coeficientes del modelo del canal
a=1;

SENALCORROMPIDA=filter(b,a,SENALPCM);%% de esto se obtiene la señal corrompida

%%%%%%%% % se definen los valores iniciales del filtro adaptable %%%%%%%%%%

mu=0.1; % este valor define el step-size

CAJA=zeros(1,11);
Gnmenosuno=zeros(1,11);

for i=1:500

    if i-1<=0
        CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);

        y=sum(Gnmenosuno.*CAJA);
        error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
        Gactual(:,i)=Gnmenosuno+mu*error*CAJA;
    end
end

```

```

elseif i-2<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-3<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
    CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;

elseif i-4<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
    CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
    CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-5<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
    CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
    CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
    CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-6<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
    CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
    CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
    CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
    CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-7<=0;
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
    CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
    CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
    CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
    CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);
    CAJA(7)=SENALCORROMPIDA(i-6);

    y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
    error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
    Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-8<=0
    CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
    CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);

```

```

CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);
CAJA(7)=SENALCORROMPIDA(i-6);
CAJA(8)=SENALCORROMPIDA(i-7);

y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-9<=0
CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);
CAJA(7)=SENALCORROMPIDA(i-6);
CAJA(8)=SENALCORROMPIDA(i-7);
CAJA(9)=SENALCORROMPIDA(i-8);

y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-10<=0
CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);
CAJA(7)=SENALCORROMPIDA(i-6);
CAJA(8)=SENALCORROMPIDA(i-7);
CAJA(9)=SENALCORROMPIDA(i-8);
CAJA(10)=SENALCORROMPIDA(i-9);

y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
elseif i-11<=0
CAJA(1)=SENALCORROMPIDA(i);
CAJA(2)=SENALCORROMPIDA(i-1);
CAJA(3)=SENALCORROMPIDA(i-2);
CAJA(4)=SENALCORROMPIDA(i-3);
CAJA(5)=SENALCORROMPIDA(i-4);
CAJA(6)=SENALCORROMPIDA(i-5);
CAJA(7)=SENALCORROMPIDA(i-6);
CAJA(8)=SENALCORROMPIDA(i-7);
CAJA(9)=SENALCORROMPIDA(i-8);
CAJA(10)=SENALCORROMPIDA(i-9);
CAJA(11)=SENALCORROMPIDA(i-10);

y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;

else
CAJA=[SENALCORROMPIDA(i),SENALCORROMPIDA(i-1),SENALCORROMPIDA(i-
2),SENALCORROMPIDA(i-3),SENALCORROMPIDA(i-4),SENALCORROMPIDA(i-5),SENALCORROMPIDA(i-
6),SENALCORROMPIDA(i-7),SENALCORROMPIDA(i-8),SENALCORROMPIDA(i-9),SENALCORROMPIDA(i-
10)];

```

```

y=sum(Gactual(:,i-1).*CAJA);
error=SENALDEREFERENCIA(i)-y;
Gactual(:,i)=Gactual(:,i-1)+mu*error*CAJA;
end

```

end

ALGORITMO NLMS

Como se comentó con anterioridad el conjunto de instrucciones con el que se implementa el algoritmo NLMS varía solo por la adición de un factor de ponderación en la ecuación de actualización de los “taps” del filtro de igualación esa variación se expone a continuación.

$$G_{actual}(:,i) = G_{actual}(:,i-1) + \mu * error * \frac{CAJA}{|CAJA| + a};$$

donde **a** es una constante positiva ($a=1e-10$) que tiene como finalidad evitar posibles inestabilidades numéricas.

ALGORITMO LEAKY LMS

El factor que se agrega a la estructura del algoritmo se muestra a continuación:

$$G_{actual}(:,i) = (1 - \mu * \text{gama})G_{actual}(:,i-1) + \mu * error * CAJA$$

Donde **gama** es el factor de fuga que toma un valor dentro de $0 < \text{gama} < 1$

GLOSARIO

ADC: Convertidor Analógico Digital.
BBC: British Broadcasting Corporation.
Bit: Dígito binario.
Bw: Ancho de Banda.
DAC: Convertidor Digital Analógico.
dB: Decibel.
DTFT: Transformada de Fourier en Tiempo Discreto.
FIR: Respuesta al Impulso Finita.
fs: Frecuencia de Muestreo.
G: Sistema inverso del sistema H.
Gbps: Giga Bit por Segundo.
H: Sistema considerado.
Hz: Ciclo por Segundo.
IIR: Respuesta al Impulso Infinita.
ISI: Interferencia Intersímbolo.
LLMS: Leaky Least Mean Square.
LMS: Least Mean Square.
LTI: Lineal e Invariante en el Tiempo.
Mbps: Mega Bit por segundo.
MSB: Bit más significativo.
MSE: Error Medio Cuadrático.
NLMS: Least Mean Square Normalizado.
PCM: Modulación por Codificación de Pulso.
SNR: Relación señal a Ruido.
TF: Transformada de Fourier.
TZ: Transformada Z.
 μ : Factor de paso.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Simon Haykin. "*Sistemas de Comunicación*". Limusa Wiley, México 2002.
- [2] _____, "*Modern Filters*". Primera Ed. Mc Millan Publishing Company, New York USA 1989.
- [3] Haykin & Van Veen. "*Señales y Sistemas*". Limusa Wiley, México 2004
- [4] Proakis, Manolakis. "*Tratamiento Digital de Señales*". Pearson, Prentice Hall, Madrid 1998.
- [5] Couch. "*Sistemas de Comunicación Digitales y Analógicos*". Prentice Hall, México 1998.
- [6] Stallings. "*Comunicaciones y Redes de Computadoras*". Pearson, Prentice Hall, Madrid 2004.
- [7] Odile Macchi. "*Adaptive Processing*". John Wiley and Sons, England 1995.
- [8] Widrow and Stearns. "*Adaptive Signal Processing*". Prentice Hall New, Jersey 1985.
- [9] J.G. Proakis. "*Digital Communications*". Mc Graw Hill, New York 2001.
- [10] Ronald J. Tocci. "*Micro Processors and Micro Computers*". Prentice Hall Inc. New Jersey USA 1997.