UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS TIPO ARCO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A :

MELISA GUTIÉRREZ VIVANCO

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA

2007

¡GRACIAS TOTALES!

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Gutiérrez
Vivanco
Melisa
56104563
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
40100267-6

2. Datos del tutor
Doctora
María Isabel
Puga
Espinosa

3. Datos del cotutor
Doctor
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

4. Datos del sinodal 1
Doctor
Ángel
Tamariz
Mascarúa

5. Datos del sinodal 2
Doctor
Fidel
Casarrubias
Segura

6. Datos del sinodal 3
Maestro en Ciencias
Carlos
Islas
Moreno

7.Datos del trabajo escrito.
Continuos tipo arco
77 p
2007

Índice general

Introducción

Los continuos tipo arco, que se definen como límites inversos de arcos, podrían dar la impresión de ser sencillos, incluso insignificantes, por ser precisamente límites inversos de los continuos más simples, por ser unidimensionales y por estar inmersos en el plano. Sin embargo, aunque estos continuos comparten algunas de sus propiedades con las propiedades de un arco, algunos ejemplos son sumamente complicados. El pseudoarco, por ejemplo, tiene propiedades impresionantes: cada uno de sus subcontinuos es también un pseudoarco. El arco y el pseudoarco son los dos únicos continuos conocidos con esta propiedad. Pero a diferencia de un arco, el pseudoarco no puede expresarse como la unión de dos de sus subcontinuos propios, así que tampoco sus subcontinuos pueden expresarse de esta forma. Más aún, el pseudoarco es un continuo homogéneo, lo que significa que dados cualesquiera dos de sus puntos, uno cualquiera de ellos puede ser mandado en el otro, por medio de un homeomorfismo que va del pseudoarco en sí mismo. El pseudoarco es uno de los tres continuos homogéneos planos que se conocen. Por otra parte, existe un continuo tipo arco universal, es decir, un continuo tipo arco en el cual pueden sumergirse todos los continuos tipo arco. Hay una amplia variedad de ellos: ciertas compactaciones del intervalo $[0, 1)$, el continuo de Knaster y muchos más.

Esta tesis está dedicada a los continuos tipo arco, tema que, desde mi punto de vista, nos abre un amplio terreno de estudio.

Además de la definición con límites inversos, los continuos tipo arco se pueden definir por medio de cadenas (continuos encadenables) y por medio de ε-funciones (continuos como un arco). Esto nos permite elegir una de las tres formas de definirlos cuando queremos probar sus propiedades.

El Capítulo 1 está dedicado a resultados sobre espacios métricos, compacidad y conexidad. Suponemos que el lector tiene conceptos básicos de

Topología.

En el Capítulo 2 exponemos propiedades básicas de los continuos (espacios métricos, compactos y conexos) que nos serán útiles para desarrollar el tema de esta tesis.

Uno de los principales objetivos de esta tesis, es probar la equivalencia de las tres definiciones (Capítulo 3) y posteriormente, en los Capítulos 4 y 5, probar propiedades utilizando una de las tres posibilidades, la que mejor se adapte a nuestro problema.

Específicamente, en el Capítulo 4 probamos que los continuos tipo arco tienen la propiedad del punto fijo, que el ser encadenable es una ε-función, que todos los subcontinuos de un continuo tipo arco, son tipo arco, y algunas propiedades más.

En el capítulo 5 probamos que la propiedad de ser encadenable se preserva bajo funciones monótonas, terminando así, con este trabajo, cuyo fin es presentar al lector un breve estudio acerca de estos bonitos espacios.

Capítulo 1

Preliminares.

Para comprender el desarollo de este trabajo se sugiere que el lector cuente con conocimientos básicos de topología. Como nuestro interés radica en mostrar ciertos resultados de un tipo específico de espacios métricos, compactos y conexos, a continuación se muestran definiciones y resultados sobre espacios métricos, conexidad, compacidad y topología producto, que nos serán útiles más adelante.

1.1. Espacios métricos.

Definición 1.1.1 *Un espacio métrico es una pareja* (X, d) *donde* X *es un espacio topológico y* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *es una función que cumple que para toda* $x, y, z \in X$*:*

1. $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$ *(reflexividad)*

2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetría)*

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad del triángulo).*

Definición 1.1.2 *Supongamos que* (X, d) *es un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $\varepsilon > 0$*. Entonces al conjunto*

$$\mathcal{B}_\varepsilon^d(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

le llamamos la bola con métrica d *de radio* ε *centrada en* x*.*

Definición 1.1.3 *Supongamos que* (X, d) *es un espacio métrico,* $A \subset X$ *y* $\varepsilon > 0$. *Entonces al conjunto*

$$\mathcal{B}_{\varepsilon}^{d}(A) = \{x \in X \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}$$

le llamamos la bola con métrica d *de radio* ε *centrada en* A.

Definición 1.1.4 *Sea* X *un espacio topológico, y* d *y* d' *dos métricas para* X. *Diremos que* d *y* d' *son métricas equivalentes si* d *y* d' *generan la misma topología.*

Teorema 1.1.5 *Sean* d *y* d' *métricas de un espacio* X. *Entonces* d *y* d' *son equivalentes si y sólo si para cada* $x \in X$ *y cada* $r > 0$, *existen* $s > 0$ *y* $s' > 0$ *tales que* $\mathcal{B}_{s}^{d}(x) \subset \mathcal{B}_{r}^{d'}(x)$ *y* $\mathcal{B}_{s'}^{d'}(x) \subset \mathcal{B}_{r}^{d}(x)$

Demostración. Supongamos que las métricas son equivalentes. Sea $x \in X$ y $r > 0$. Como $\mathcal{B}_{r}^{d'}(x)$ es un abierto que contiene a x, existe un abierto básico $\mathcal{B}_{s}^{d}(x)$ en la topología inducida por d tal que $\mathcal{B}_{s}^{d}(x) \subset \mathcal{B}_{r}^{d'}(x)$. Análogamente podemos encontrar $s' > 0$ tal que $\mathcal{B}_{s'}^{d'}(x) \subset \mathcal{B}_{r}^{d}(x)$.

Para probar el recíproco, sean τ la topología inducida por d y τ' la topología inducida por d'. Sean $U \in \tau$ y $x \in X$ tal que $x \in U$. Entonces existe $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_{r}^{d}(x) \subset U$. Por hipótesis existe $s' > 0$ tal que $\mathcal{B}_{s'}^{d'}(x) \subset \mathcal{B}_{r}^{d}(x) \subset U$, así que U es la unión de elementos de τ', de donde $\tau \subset \tau'$. Análogamente se prueba que $\tau' \subset \tau$. ■

Definición 1.1.6 *Un espacio métrico* (X, d) *es acotado si y sólo si*

$$\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\} \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 1.1.7 *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Definimos* $d' : X \times X \to [0, \infty)$ *como* $d'(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$. *Claramente* d' *es una métrica, y es equivalente a* d *por el Teorema 1.1.5.*

Corolario 1.1.8 *Todo espacio métrico es equivalente a un espacio métrico acotado.*

Definición 1.1.9 *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subset X$ *no vacío y acotado. El diámetro de* A *es el número dado por el conjunto,*

$$\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

1.2. Compacidad.

Definición 1.2.1 *Sean X un conjunto y B un subconjunto de X. Una cubierta de B es una familia de subconjuntos de X, $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, cuya unión contiene a B. Si X es un espacio topológico y los conjuntos C_α son abiertos, entonces se dice que la cubierta es abierta. Si Λ es un conjunto finito, entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta finita de B. Una subcubierta de $\mathcal{C}$ es una subfamilia de $\mathcal{C}$ que también cubre a B.*

Definición 1.2.2 *Un espacio X es compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.*

Definición 1.2.3 *Sea X un espacio topológico. Se dice que una cubierta $\mathcal{U}$ de X es esencial, si no existe un subconjunto propio de $\mathcal{U}$, que sea cubierta de X.*

Definición 1.2.4 *Una colección de conjuntos $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tiene la propiedad de la intersección finita si para cualquier subconjunto finito Γ de Λ se tiene que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} C_\alpha \neq \emptyset$.*

Teorema 1.2.5 *Un espacio X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$de conjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X es compacto y que $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una subcolección de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita. Para cada $\alpha \in \Lambda$ sea $U_\alpha = X \setminus C_\alpha$. Si $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X$. Como X es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{\alpha_j} = X$ de donde $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} = \emptyset$ lo que contradice el hecho de que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Ahora supongamos que X no es compacto. Entonces existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, que no tiene una subcubierta finita. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$. La colección $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tiene la propiedad de la intersección finita, pero $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha = \emptyset$. ■

Teorema 1.2.6 *Sea X un espacio compacto y C un subespacio cerrado de X. Entonces C es compacto.*

Demostración. Sea $C \subset X$ un cerrado. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ una cubierta para C de abiertos en X. Como C es cerrado en X, $X \setminus C$ es abierto. Por lo tanto $\mathcal{U}' = (\bigcup \mathcal{U}) \cup \{X \setminus C\}$ es una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de $\mathcal{U}'$. Si $\{U_1, \cdots, U_n\}$ no contiene a $X \setminus C$, entonces $\{U_1, \cdots, U_n\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ para C, luego si $\{U_1, \cdots, U_n\}$ contiene a $X \setminus C$, podemos suponer que $U_1 = X \setminus C$, y entonces $\{U_2, \cdots, U_n\}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ para C, de aquí que C es compacto. ■

Teorema 1.2.7 *Sea X un espacio Hausdorff y $A \subset X$, un compacto. Entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Veamos que $X \setminus A$ es abierto en X. Sean $x \in X \setminus A$ y $y \in A$. Como X es un espacio de Hausdorff, existen U_x y V_y abiertos ajenos tales que $x \in U_x$ y $y \in V_y$. Esto lo podemos hacer para cualquier punto $y \in A$ y el punto x. Sea $\mathcal{V} = \{V_y | y \in A\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A, y como A es compacto, existen $V_{y_1}, \cdots V_{y_n} \in \mathcal{V}$, tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Luego $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ es un conjunto abierto en X, que tiene a x, pues cada U_{y_i} es un abierto de X que tiene a x. Además $\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus V_{y_i}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \subset X \setminus A$. Entonces x es punto interior de $X \setminus A$. Por lo tanto $X \setminus A$ es abierto en X. ■

Teorema 1.2.8 *Sea X un espacio topológico compacto y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces Y es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de de Y. Entonces $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{f^{-1}(U_j)\}_{j=1}^{n}$ de $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$. Además se tiene que f es suprayectiva, por lo tanto, la colección $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. ■

Corolario 1.2.9 *Sean X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ para todo $A \subset X$ (Donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A).*

Demostración. Como f es continua $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Veamos ahora que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Por el Teorema 1.2.6, $\overline{A}$ es compacto, por 1.2.8, $f(\overline{A})$ es compacto y por 1.2.7, $f(\overline{A})$ es cerrado. Por lo tanto $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. ■

Corolario 1.2.10 *Toda función continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, es cerrada.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 1.2.9. ■

El siguiente Teorema nos será de gran utilidad.

Teorema 1.2.11 *Toda función continua y biyectiva de un espacio compacto en un Hausdorff, es un homeomorfismo.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 1.2.10 y del hecho de que una función continua, biyectiva y cerrada es un homeomorfismo. ■

1.3. Compacidad en espacios métricos.

Definición 1.3.1 *Un espacio X es compacto por sucesiones si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Definición 1.3.2 *Un espacio X es numerablemente compacto, si toda cubierta abierta y numerable de X, tiene una subcubierta finita.*

Teorema 1.3.3 *Sea X un espacio compacto por sucesiones. Entonces X es numerablemente compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una cubierta numerable y abierta de X. Supongamos que no existe una subcubierta abierta finita de $\mathcal{U}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X \setminus \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} U_j$. La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tiene una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto, digamos, $x \in X$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k \in \mathcal{U}$. Sin embargo, existe $N \geq k$ tal que si $j \geq N$, entonces $x_{n_j} \in U_k$, lo cual, es una contradicción. ■

Definición 1.3.4 *Un punto x del espacio X, es un punto de acumulación de una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, si para cada vecindad U de x y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k > n$ tal que $x_k \in U$.*

Teorema 1.3.5 *Si X es un espacio métrico y x un punto de acumulación de una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X, entonces $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión que converge a x.*

Demostración. Vamos a construir una subsucesión convergente de forma recursiva. Sean $\mathcal{B}_1(x)$ la bola abierta de radio 1 con centro en x y $N = 1$, como x es punto de acumulación de la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, existe $k > 1$ tal que $x_k \in \mathcal{B}_1(x)$. Sea $x_{k_1} = x_k$ el primer punto de la subsucesión. Supongamos que la subsucesión está definida para un punto x_{k_i}. Tomamos $\mathcal{B}_{\frac{1}{i}}(x)$ y $N = k_i$. Como x es punto de acumulación, existe $k > k_i$ tal que $x_k \in \mathcal{B}_{\frac{1}{i}}(x)$. Sea $x_{k_{i+1}} = x_k$. Siguiendo con este procedimiento, obtenemos una subsucesión $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a x. ■

Definición 1.3.6 *Un espacio métrico (X, d) está totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$, existen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \cdots, x_{N_\varepsilon}\} \subset X$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} \mathcal{B}_\varepsilon(x_j)$.*

Teorema 1.3.7 *Sea X un espacio métrico y compacto por sucesiones. Entonces X está totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $x_1 \in X$, si $X = \mathcal{B}_\varepsilon(x_1)$, ya acabamos. Si $X \neq \mathcal{B}_\varepsilon(x_1)$, tomamos $x_2 \in X \setminus \mathcal{B}_\varepsilon(x_1)$. Si si $X = \mathcal{B}_\varepsilon(x_1) \cup \mathcal{B}_\varepsilon(x_2)$, hemos terminado, si no, elegimos $x_3 \in X \setminus (\mathcal{B}_\varepsilon(x_1) \cup \mathcal{B}_\varepsilon(x_2))$. Siguiendo de esta manera, encontraremos $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $X = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} \mathcal{B}_\varepsilon(x_j)$, ya que, en caso contrario, podríamos construir una sucesión de puntos de X, la cuál no tendría una subsucesión convergente. ■

Teorema 1.3.8 *El espacio métrico (X, d) es numerablemente compacto si y sólo si es compacto por sucesiones.*

Demostración. Ya sabemos que todo espacio compacto por sucesiones es numerablemente compacto (Teorema 1.3.3).

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y numerablemente compacto que no es compacto por sucesiones. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual no tiene subsucesiones convergentes.

Por el Teorema 1.3.5, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene puntos de acumulación. Sea $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que A es infinito (pues de otro modo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendría un punto de acumulación). Para cada $x \in X$, existe un abierto $\widehat{U}_x$ de X tal que $x \in \widehat{U}_x$ y $\widehat{U}_x \cap A$ es finito. Como los puntos son cerrados, existe un abierto U_x de X tal que $x \in U_x$ y $U_x \cap A = \emptyset$, si $x \notin A$ y $U_x \cap A = \{x\}$, si $x \in A$. Entonces, si $U_0 = \displaystyle\bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$, tenemos que $\{U_0\} \cup \{U_a \mid a \in A\}$ es una cubierta numerable de X la cual no tiene subcubiertas propias. ∎

Definición 1.3.9 *Sea X un espacio métrico, y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Decimos que un número $\lambda > 0$ es un número de Lebesgue para la cubierta $\mathcal{U}$, si para cualquier $A \subset X$, con $A \neq \emptyset$ tal que* diám$(A) < \lambda$, *existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$.*

Teorema 1.3.10 *Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de un espacio compacto por sucesiones X, entonces $\mathcal{U}$ tiene un número de Lebesgue.*

Demostración. Supongamos que no existe tal número. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existe A_n, subconjunto no vacío de X tal que diám$(A_n) < \frac{1}{n}$ y A_n no está contenido en ningún elemento de $\mathcal{U}$. Sea $x_n \in A_n$. Como X es compacto por sucesiones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $x \in X$.

Como $\mathcal{U}$ cubre a X, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_{\varepsilon}^{d}(x) \subset U$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para cada $y \in A_n$,

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Entonces $A_n \subset \mathcal{B}_{\varepsilon}^{d}(x) \subset U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe un número de Lebesgue para $\mathcal{U}$. ∎

Teorema 1.3.11 *Sea X un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si X es compacto por sucesiones.*

Demostración. Si X es compacto, entonces es numerablemente compacto, y por el Teorema 1.3.8, X es compacto por sucesiones.

Supongamos que X es compacto por sucesiones. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por el Teorema 1.3.10, existe $\lambda > 0$ tal que si $x \in X$, entonces

$\mathcal{B}_\lambda(x) \subset U$, para alguna $U \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 1.3.7, existen $x_1, \cdots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_\lambda(x_j)$. Tomando para cada $j = 1, \cdots, n$, $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{B}_\lambda(x_j) \subset U_j$, se tiene que $\{U_1, \cdots, U_n\}$, es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. ■

Lema 1.3.12 *Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{V} = \{V_1, \cdots, V_m\}$ es una cubierta abierta finita de X, entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_m\}$ tal que $\overline{U_j} \subset V_j$ para cada $j = 1, \cdots, m$.*

Demostración. Haremos la construcción de $\mathcal{U}$ inductivamente.

Sea $F_1 = X \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{m} V_j \right)$. Entonces $F_1 \subset V_1$ y F_1 es un subconjunto cerrado de X. Como X es un espacio métrico, existe un subconjunto abierto U_1 de X tal que $F_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset V_1$.

Supongamos que U_{k-1} ha sido definido para cada $k < m$. Sea

$$F_k = X \setminus \left(\bigcup_{j=2}^{k-1} U_j \cup \bigcup_{j=k+1}^{m} V_j \right).$$

Entonces $F_k \subset V_k$, y F_k es un subconjunto cerrado de X. Como X es un espacio métrico, existe un subconjunto abierto U_k de X tal que $F_k \subset U_k \subset \overline{U_k} \subset V_k$. Así pues, hemos terminado el paso inductivo.

Ahora, sea $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_m\}$, entonces $\mathcal{U}$ es una familia de m abiertos de X. Veamos que $\mathcal{U}$ cubre X. Para ver ésto, sea $x \in X$, entonces x pertenece a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$, llamémosles $V_{k_1}, \cdots, V_{k_n}$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \cdots, k_n\}$. Ahora, $x \in X \setminus U_l$ para cada $l > k$, y por tanto, si $x \in X \setminus U_j$ para cada $j < k$, entonces $x \in F_k \subset U_k$, así que en cualquier caso $x \in U_j$ para alguna $j = 1, \cdots, m$, por lo tanto $\mathcal{U}$ cubre a X. ■

Definición 1.3.13 *Dado un espacio métrico compacto X, definimos dos de sus hiperespacios, como los siguientes conjuntos:*

$$2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \text{ y}$$
$$\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}.$$

1.4. Conexidad.

Definición 1.4.1 *Una pareja (U, V) de abiertos no vacíos de un espacio X, es una separación de X si $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. En otras palabras, $X = U \cup V$, donde A y B son mutuamente separados en X (recordemos que A y B son mutuamente separados en X, si $A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\overline{A} \cap B = \emptyset$).*

Observación. Supongamos que X es un espacio topológico y que A y B son cerrados, disjuntos y no vacíos de X tales que $X = A \cup B$, entonces (A, B) es una separación de X, ya que sus complementos son abiertos. Así que si X está separado por A y B, entonces A y B son tanto abiertos como cerrados.

Definición 1.4.2 *Un espacio topológico es conexo si no existe una separación para X.*

Teorema 1.4.3 *Sea X un espacio topológico. Si (U, V) es una separación de X y $C \subset X$ es conexo, entonces $C \subset U$ o $C \subset V$.*

Demostración. Sean (U, V) una separación y C un subespacio conexo de X. Supongamos que no ocurre que $C \subset U$ o $C \subset V$, entonces como $U \cup V = X$, $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto $(C \cap U, C \cap V)$ forman una separación para C con la topología relativa. Y ésto es una contradicción, pues C es conexo. ■

Teorema 1.4.4 *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de subespacios conexos del espacio topológico X, y para cada $\alpha, \beta \in \Lambda, A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ es conexa.*

Demostración. Sea $Y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, y supongamos que Y no es conexo. De aquí que existen abiertos disjuntos no vacíos de Y, U y V, cuya unión es Y. Como $U \neq \emptyset$, existe $\alpha \in \Lambda$, tal que $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$, análogamente existe $\beta \in \Lambda$, tal que $A_\beta \cap V \neq \emptyset$. Por el Teorema 1.4.3, se tiene que $A_\alpha \subset U$ o $A_\alpha \subset V$, como $A_\alpha \cap U \neq \emptyset$, $A_\alpha \subset U$, análogamente $A_\beta \subset V$ pero por otra parte, $\emptyset \neq A_\beta \cap A_\alpha \subset U \cap V$, lo que contradice el hecho de que $U \cap V = \emptyset$. ■

Teorema 1.4.5 *X es un espacio conexo si y sólo si no existe una función continua $f : X \to \{0, 1\}$ (donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta) que sea suprayectiva.*

Demostración. Si $f : X \to \{0,1\}$ es continua y suprayectiva, entonces los conjuntos $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ forman una separación de X, por lo tanto X no puede ser conexo. Por otra parte, si X no es conexo, existe una separación (U, V) de X, sea $f : X \to \{0,1\}$ definida como $f(x) = 0$, si $x \in U$ y $f(x) = 1$, si $x \in V$. Claramente f es una función continua y suprayectiva. ■

Teorema 1.4.6 *Si A es un subespacio conexo de X y $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Supongamos que $f : B \to \{0,1\}$ es una función continua, por el teorema anterior, debemos probar que f no es suprayectiva. Como $f|_A$ es continua y A es conexo, podemos suponer que para toda $a \in A$, $f(a) = 0$. Supongamos que para alguna $b \in B$, $f(b) = 1$. Entonces $f^{-1}(b)$ es un conjunto abierto de B que tiene a b y no toca a A. Esto es imposible, pues b es punto de acumulación de A. ■

Definición 1.4.7 *Sea X un espacio topólogico y $A \subset X$. Decimos que A es denso en X si $\overline{A} = X$.*

Corolario 1.4.8 *Sea X un espacio topológico. Si A es un subconjunto denso y conexo de X. Entonces X es conexo.*

Demostración. Como A es denso en X, entonces $\overline{A} = X$, en particular $A \subset X \subset \overline{A}$ y por el Teorema 1.4.6, X es conexo. ■

Teorema 1.4.9 *Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio conexo X en un espacio Y. Entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y no fuese conexo, por el Teorema 1.4.5, existiría una función continua y suprayectiva $g : Y \to \{0,1\}$, de donde $g \circ f : X \to \{0,1\}$, sería continua y suprayectiva, lo que contradice el hecho de que X es conexo. ■

1.5. Producto topológico.

Definición 1.5.1 *Sea $A = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conjuntos. Definiremos el producto cartesiano como*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha | \text{ para toda } \alpha \in \Lambda, \mathrm{f}(\alpha) \in \mathrm{X}_\alpha \right\}.$$

Definición 1.5.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\pi_n : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_n$ definida como $\pi_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = x_n$ es llamada la n-ésima función proyección.*

Definición 1.5.3 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. La topología producto para $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es la que tiene como base el conjunto cuyos elementos son*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$$

donde U_{α_j} es abierto en X_{α_j}.

Teorema 1.5.4 *Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\pi_n : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_n$, es una función continua.*

Demostración. Sea U abierto en X_n. Se sigue de la definición de topología producto, que $\pi_n^{-1}(U)$ es abierto en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. ■

Teorema 1.5.5 *Sea $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico (con la topología producto).*

Demostración. Como métricas equivalentes generan la misma topología, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos cambiar d_n por $d_n' : X_n \times X_n \to [0, 1)$ dada por

$$d_n'(x_n, y_n) = \text{mín}\{1, d_n(x_n, y_n)\}$$

Ahora, definamos una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como sigue,

$$\rho : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to [0, 1) \subset [0, \infty)$$

dada por

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,y_n)}{2^n}.$$

Veamos que en efecto, ρ es métrica.

1. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ tales que $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=0$, ésto ocurre si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,y_n)}{2^n}=0$ lo que significa que $d'_n(x_n,y_n)=0$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y como d'_n es métrica para X_n, $x_n=y_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$ por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}=(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

2. Como d'_n es métrica, $d'_n(x_n,y_n)=d'_n(y_n,x_n)$, entonces $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,y_n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(y_n,x_n)}{2^n}=\rho((y_n)_{n=1}^{\infty},(x_n)_{n=1}^{\infty})$.

3. Como d'_n cumple que $d'_n(x_n,z_n)\leq d'_n(x_n,y_n)+d'_n(y_n,z_n)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,z_n)}{2^n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,y_n)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(y_n,z_n)}{2^n}$ por lo tanto, $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(z_n)_{n=1}^{\infty})\leq\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})+\rho((y_n)_{n=1}^{\infty},(z_n)_{n=1}^{\infty})$.

Ahora, para ver que la métrica ρ en efecto es una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, probaremos que la topología inducida por ρ coincide con la topología producto para $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$.

Sea τ la topología inducida por ρ y τ' la topología producto.

Veamos que $\tau'\subset\tau$. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ y $U=\bigcap_{j=1}^{N}\pi_j^{-1}\left(\mathcal{B}^{d_j}_{\frac{\varepsilon}{2^N}}(x_j)\right)$, un abierto básico de $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ tal que $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in U$. Sea

$$\varepsilon=\text{mín}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon_1,\cdots,\frac{1}{2^k}\varepsilon_k\right\}$$

mostraremos que $\mathcal{B}^{\rho}_{\varepsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})\subset U$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{B}^{\rho}_{\varepsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})$. De aquí que $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty})<\varepsilon$, de donde $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d'_n(x_n,y_n)}{2^n}<\varepsilon$. Por lo que para cada $j=1,\cdots,k$, $\frac{1}{2^j}d_j(x_j,y_j)<\varepsilon<\frac{1}{2^j}\varepsilon_j$, y así $d_j(x_j,y_j)<\varepsilon_j$. Por lo tanto $\mathcal{B}^{\rho}_{\varepsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})\subset U$.

Ahora demostraremos que $\tau \subset \tau'$. Sea $U = \mathcal{B}^{\rho}_{\varepsilon}((x_n)_{n=1}^{\infty})$ un abierto básico de τ. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Afirmamos que
$\bigcap_{j=1}^{N} \pi_j^{-1}\left(\mathcal{B}^{d_j}_{\frac{\varepsilon}{2^N}}(x_j)\right) \subset U$. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{j=1}^{N} \pi_j^{-1}\left(\mathcal{B}^{d_j}_{\frac{\varepsilon}{2^N}}(x_j)\right)$. Solo falta probar que $\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) < \varepsilon$.

Observemos que

$$\rho((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d'_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^N}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^N}\right)\frac{1}{2^N}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Teorema 1.5.6 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio compacto (con la topología producto).*

Demostración. Como en espacios métricos la compacidad y la compacidad por sucesiones coinciden probaremos que toda sucesión de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $\{p^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $p_k = \{p_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ (de esta manera, si fijamos n, $\{p_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de X_n). Como (X_1, d_1) es compacto por sucesiones $\{p_1^k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{p_1^{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a algún $q_1 \in X_1$. Supongamos inductivamente que para alguna $m \in \mathbb{N}$, hemos definido una subsucesión $\{p_m^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{p_m^k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{p_m^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a algún $q_m \in X_m$ como (X_{m+1}, d_{m+1}) es compacto por sucesiones, $\{p_{m+1}^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{p_{m+1}^{k_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge a un $q_{m+1} \in X_{m+1}$, por lo tanto, toda sucesión de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ tiene una subsucesión convergente. ■

Teorema 1.5.7 *Si $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de espacios conexos, entonces $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un espacio conexo (con la topología producto).*

Demostración. Supongamos que X_λ es conexo para toda $\lambda \in \Lambda$, probaremos primero que el producto finito de espacios conexos es conexo.

Consideremos el producto cartesiano $X \times Y$ de dos espacios conexos, entonces cualesquiera dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ se encuentran en el subespacio $(X \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times Y)$ el cual es la unión de dos espacios conexos que tienen en común al punto (x_2, y_1), así que $(X\times\{y_1\})\cup(\{x_2\}\times Y)$ es un subespacio conexo que tiene a (x_1, y_1) y a (x_2, y_2), como estos puntos fueron arbitrarios, para cualesquiera dos puntos en $X\times Y$, hay un subespacio conexo que los tiene y por inducción, el producto finito de espacios conexos es conexo.

Consideremos ahora la familia $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de espacios conexos no vacíos, elegimos para cada $\lambda \in \Lambda$ un punto $x_\lambda \in X_\Lambda$. Denotamos por τ a la familia de todos los subconjuntos finitos de Λ y para cada $T \in \tau$ sea

$$C_T = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \text{ donde } \mathrm{A}_\lambda = \begin{cases} \{x_\lambda\} & \text{si } \lambda \notin \mathrm{T} \\ X_\lambda & \text{si } \lambda \in \mathrm{T} \end{cases}$$

Por el caso finito de nuestro teorema, la familia $\{C_T\}_{T\in\tau}$ consiste de espacios conexos, además $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigcap_{T\in\tau} C_T \neq \emptyset$ y como la unión de espacios conexos con un punto en común es conexa, entonces $\mathcal{C} = \bigcup_{T\in\tau} C_T$ es un espacio conexo.

Ahora probaremos que $\mathcal{C}$ denso en $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Sea $\mathcal{U} = \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$ abierto en $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, donde U_{α_j} es abierto en X_{α_j}. Probaremos que $\mathcal{C} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Sea $R = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. Notemos que $R \in \tau$. Entonces,

$$C_R = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \text{ donde } \mathrm{A}_\lambda = \begin{cases} \{x_\lambda\} & \text{si } \lambda \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\mathrm{n}}\} \\ X_\lambda & \text{si } \lambda \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\mathrm{n}}\} \end{cases}$$

Tomamos $y_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Definimos

$$z_\lambda = \begin{cases} \{x_\lambda\} & \text{si } \lambda \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\mathrm{n}}\} \\ y_{\alpha_i} & \text{si } \lambda = \alpha_{\mathrm{i}} \text{ para algún i} \in \{1, \cdots, \mathrm{n}\} \end{cases}$$

Como $C_R \subset \mathcal{C}$, tenemos que $(z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \mathcal{U} \cap C_R \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{C}$, por lo tanto $\mathcal{C}$ es denso. Entonces por el Corolario 1.4.8 , $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es conexo. ■

Capítulo 2

Continuos.

2.1. Introducción.

Definición 2.1.1 *Un continuo X, es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo contenido en algún espacio métrico.*

Proposición 2.1.2 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un continuo.*

Demostración. Por los Teoremas 1.5.5 -1.5.7, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ con la topología producto, es un continuo. ■

Definición 2.1.3 *Se dice que una sucesión de conjuntos $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, si $X_{n+1} \subset X_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.1.4 *Sean X un espacio métrico, compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de X. Si U es un abierto de X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset U$.*

Demostración. Como U es abierto en X, $X \setminus U$ es cerrado en X y por tanto compacto, por las leyes de De Morgan el hecho de que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset U$ implica que $X \setminus U \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n$, de donde existen $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{k} X \setminus A_{n_j}$. Sea $N = \text{máx}\{n_1, \cdots, n_k\}$. Entonces $\bigcup_{j=1}^{k} X \setminus A_{n_j} = X \setminus A_N$, por lo tanto $A_N \subset U$. ∎

Teorema 2.1.5 *Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subcontinuos de X, entonces $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Como A es un subespacio de X, hereda su métrica. Además X es un espacio Hausdorff y A_n es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que cada A_n es cerrado, observemos también que A es cerrado (por ser intersección de cerrados) en un compacto y por tanto, es compacto. Como X es compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita, por el teorema 3, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \neq \emptyset$.

Sólo nos falta probar que A es conexo. Supongamos que no lo es. Entonces existen K y L cerrados ajenos no vacíos tales que $A = K \cup L$. Como X es normal, existen abiertos ajenos U y V tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. Entonces

$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = X \setminus (K \cup L) \supset X \setminus (U \cup V).$$

Así que $\{X \setminus A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de $X \setminus (U \cup V)$, que es cerrado en X (por lo tanto compacto), y por el Lemma 2.1.4, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_m} \subset (U \cup V)$, como A_{n_m} es conexo $A_{n_m} \subset U$ o $A_{n_m} \subset V$, pero $K \subset A \subset A_{n_m}$ y $K \subset U$ por lo tanto $A_{n_m} \cap U \neq \emptyset$. Análogamente, $L \subset A \subset A_{n_m}$ y $L \subset V$ por lo tanto $A_{n_m} \cap V \neq \emptyset$ y ésto no es posible, por lo tanto, A es conexo. ∎

Definición 2.1.6 *Se dice que un continuo X es descomponible, si X puede ser escrito como la unión de dos subcontinuos propios. A un continuo que no es descomponible, le llamaremos indescomponible.*

Definición 2.1.7 *Se dice que un continuo X es unicoherente, si para cada par de subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, $A \cap B$ es conexo. Decimos que X es hereditariamente unicoherente si cada subcontinuo de X es unicoherente.*

Ejemplo 2.1.8 *Sea $I = [0,1]$ y sean A y B subcontinuos de I tales que $A \cup B = I$, ésto sólo puede ocurrir si A y B son subintervalos de I, y en este caso, su intersección es un punto o un subintervalo (los cuales son conexos). Por lo tanto I es unicoherente.*

Definición 2.1.9 *Sea X un continuo, decimos que X es un arco si X es homeomorfo al intervalo* $[0,1]$.

Definición 2.1.10 *Sean X y Y continuos. Se dice que una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$, es monótona si $f^{-1}(y)$ es un conjunto conexo para toda $y \in Y$.*

2.2. Límites inversos.

Definición 2.2.1 *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios métricos, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. La sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es llamada una sucesión inversa y las funciones f_n^{n+1} son llamadas funciones de ligadura. Comunmente representamos una sucesión inversa así,*

$$X_1 \xleftarrow{f_1^2} X_2 \xleftarrow{f_2^3} \cdots X_n \xleftarrow{f_n^{n+1}} \cdots$$

Definición 2.2.2 *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa. El límite inverso de $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ denotado por $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ o X_∞ es el subespacio de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ dado por*

$$\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada n} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definición 2.2.3 *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa, con límite inverso X_∞. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $p_m = \pi_m|_{X_\infty}$. Como p_m es la restricción de una función continua (Teorema 1.5.4), p_m es una función continua, la que llamaremos la m-ésima proyección del límite inverso.*

Nota 2.2.4 *Aunque las proyecciones del producto sean suprayectivas, en general las restricciones al límite inverso no lo son, pero por la definición de límite inverso,* $p_m = f_m^{m+1} \circ p_{m+1}$. *Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
X_\infty \arrow[d, "p_m"'] \arrow[dr, "p_{m+1}"] & \\
X_m & X_{m+1} \arrow[l, "f_m^{m+1}"]
\end{tikzcd}$$

Entonces tenemos que las proyecciones del límite inverso son suprayectivas si y sólo si las funciones de ligadura lo son.

Notación. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$. Entonces $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-2}^{n-1} \circ f_{n-1}^n$.

Proposición 2.2.5 *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *una sucesión inversa de espacios métricos, con funciones de ligadura suprayectivas, cuyo límite inverso es* X_∞. *Si* A *es un subconjunto cerrado de* X_∞, *entonces la sucesión* $\{p_n(A), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}\}$ *es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas y*

$$\varprojlim\{p_n(A), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}\} = A = \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

Demostración. Veamos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "p_n"'] \arrow[dr, "p_{n+1}"] & \\
p_n(A) & p_{n+1}(A) \arrow[l, "f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}"]
\end{tikzcd}$$

Claramente, $f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}$ es una función suprayectiva para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como $p_n(A) = f_n^{n+1} \circ p_{n+1}(A)$, entonces $p_{n+1}(A) \subset p_n(A)$. Por lo tanto, $\{p_n(A), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}\}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura suprayectivas.

Observemos que

$$\varprojlim\{p_n(A), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}\} = \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

Como $A \subset X_\infty$ y $A \subset \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right]$,

$$A \subset \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

Vamos a demostrar que

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_\infty \subset A.$$

Sea $\varepsilon > 0$, y sea $\hat{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_\infty$. Ahora, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in p_n(A)$, existe $\hat{a} = (a_m)_{m=1}^{\infty} \in A$ tal que $p_n(\hat{a}) = y_n$. Ahora observemos que

$$\hat{a} = (\cdots, f_{n-1}^n(y_n), y_n, a_{n+1}, \cdots)$$
$$\hat{y} = (\cdots, f_{n-1}^n(y_n), y_n, y_{n+1}, \cdots).$$

Entonces,

$$\rho(\hat{a}, \hat{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(a_n, y_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} d(a_n, y_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d(a_n, y_n) < \varepsilon.$$

Como ε fue arbitrario, $y \in \overline{A} = A$. ∎

Proposición 2.2.6 *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos con límite inverso X_∞. Si A y B son subconjuntos cerrados de X_∞, $C = A \cap B$ y $C_n = p_n(A) \cap p_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C = \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}$.*

Demostración. Sea $\hat{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}$. Entonces por definición $x_n \in C_n = p_n(A) \cap p_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, por la Proposición 2.2.5

$$\hat{x} \in \varprojlim\{p_n(A), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(A)}\} = A \text{ y } \hat{x} \in \varprojlim\{p_n(B), f_n^{n+1}|_{p_{n+1}(B)}\} = B.$$

Así, $\hat{x} \in A \cap B = C$.

Ahora, sea $\hat{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in C = A \cap B$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in p_n(A)$ y $y_n \in p_n(B)$, es decir $y_n \in p_n(A) \cap p_n(B) = C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\hat{y} \in \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}$. ■

Proposición 2.2.7 *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}$ una sucesión inversa , para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$Q_n(X_i, f_i^{i+1}) = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda i} \leq \text{n}\}.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $Q_{n+1}(X_i, f_i^{i+1}) \subset Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.
2. $Q_n(X_i, f_i^{i+1}) \cong \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para cada n $\in \mathbb{N}$.
3. $\varprojlim\{X_n, f_i^{i+1}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.

Demostración.

1. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_{n+1}(X_i, f_i^{i+1})$. Entonces $f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ para cada $i \leq n+1$, en particular para cada $i \leq n$, por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.
2. Sea $h : Q_n(X_i, f_i^{i+1}) \to \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ dada por
$$h((x_i)_{i=1}^{\infty}) = (x_i)_{i=n+1}^{\infty}.$$

Por el Teorema 1.2.11, basta ver que h es continua y biyectiva. Una función que tiene como codominio un producto, es continua si y sólo si es continua coordenada a coordenada, por lo tanto es suficiente probar que $\pi_k \circ h$ es continua para toda $k \in \{n+1, n+2, \cdots\}$. Observemos que para toda $k \geq n+1$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} Q_n\left(X_i, f_i^{i+1}\right) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi_k|_{Q_n\left(X_i, f_i^{i+1}\right)}"'] & \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i \arrow[d, "\pi_k"] \\ & X_k \end{tikzcd}$$

Así que $\pi_k \circ h = \pi_k|_{Q_n(X_i, f_i^{i+1})}$ es continua, por lo tanto h es continua.

Ahora veamos que h es inyectiva. Sea $h(\hat{x}) = h(\hat{y}) = (z_{n+1}, z_{n+2}, \cdots)$. Entonces

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (\cdots, f_n^{n+1}(z_{n+1}), z_{n+1}, \cdots) \text{ y} \\ \hat{y} &= (\cdots, f_n^{n+1}(z_{n+1}), z_{n+1}, \cdots). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{x} = \hat{y}$.

Sólo falta ver que h es suprayectiva, sea $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots) \in \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, $(f_1^2(x_2), \cdots, f_n^{n+1}(x_{n+1}), x_{n+1}, \cdots) \in Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ y

$h((f_1^2(x_2), \cdots, f_n^{n+1}(x_{n+1}), x_{n+1}, \cdots)) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$.

Concluimos así que $Q_n(X_i, f_i^{i+1}) \cong \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para toda n $\in \mathbb{N}$.

3. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \varprojlim\{X_n, f_i^{i+1}\}$ por definición, ésto quiere decir que $f_i^{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, en particular para toda $i \leq n$, entonces $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$.

■

Teorema 2.2.8 *Si X_∞ es límite inverso de continuos, entonces X_∞ es un continuo.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.2, $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ es un continuo, entonces por 2. de 2.2.7, $Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}$. Por 1. de 2.2.7, $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n(X_i, f_i^{i+1})$ es una intersección anidada y por el Teorema 2.1.5, es un continuo. Finalmente aplicando 3. de 2.2.7, tenemos que $\varprojlim\{X_i, f_i^{i+1}\}$ es un continuo. ■

Proposición 2.2.9 *Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de continuos unicoherentes con funciones de ligadura suprayectivas y sea $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} = X_\infty$. Entonces X_∞ es un continuo unicoherente.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X_∞ tales que $A \cup B = X_\infty$ y sea $C = A \cap B$. Como las funciones de ligadura son suprayectivas por la Nota 2.2.4, las proyecciones también lo son, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = p_n(A) \cup p_n(B)$. Como los espacios factores son unicoherentes $p_n(A) \cap p_n(B) = C_n$ es conexo, además por ser la intersección de dos cerrados, por 1.2.6, C_n es compacto para toda $n \in \mathbb{N}$, así que C_n es un subcontinuo de X_n y por la Proposición 2.2.6, $C = \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}$. Como el límite inverso de continuos es un continuo (por el Teorema 2.2.8), C es un continuo, y por tanto $C = A \cap B$ es conexo. ■

Capítulo 3

Continuos tipo arco, encadenables y como un arco.

Los continuos tipo arco son sumamente interesantes, pues aunque pudieran parecer algo insignificantes (por ser de dimensión 1 o por ser límite inverso de arcos, etc...), existen ejemplos muy complejos de este tipo de continuos, que a pesar de tener construcciones complicadas y propiedades muy especiales, por el hecho de ser tipo arco coinciden en muchas características con el más sencillo continuo no degenerado; el arco.

Un ejemplo de estos continuos es el Pseudoarco, (del cual no explicaremos la construcción, pues es complicada y se sale de nuestros objetivos). Este continuo tiene propiedades impresionantes, por ejemplo, cada uno de sus subcontinuos es homeomorfo al total, no puede escribirse como unión de dos subcontinuos propios (por la primera propiedad, sus subcontinuos tampoco), cada uno de sus puntos puede ser mandado a cualquier otro punto bajo un homeomorfismo, etc. A pesar de ésto, este continuo comparte muchas propiedades con el intervalo $[0, 1]$ (por ser ambos encadenables), de las cuales mostraremos algunas más adelante. Otro ejemplo de este tipo, es un continuo que se construye con límites inversos [6], el cual, es un continuo universal, es decir, cualquier continuo tipo arco se puede encajar en él, en fin, la clase de los continuos tipo arco nos abre un amplio terreno de estudio.

Así pues, los continuos tipo arco tienen muchas propiedades interesantes, en ocasiones es muy difícil realizar las pruebas usando límites inversos, y resulta más sencillo utilizar el hecho de que los continuos tipo arco son encadenables o de que son como un arco, de hecho, este fenómeno ocurre en las tres direcciones, por eso es tan útil el Teorema de equivalencias que probaremos en este capítulo, pues siempre tenemos la opción de utilizar la definición que más nos convenga según sea el problema que se nos presente.

3.1. Continuos tipo arco.

Definición 3.1.1 *Sea* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *una sucesión inversa de arcos (es decir, para cada* $n \in \mathbb{N}$, $X_n \cong [0,1]$*), con funciones de ligadura suprayectivas. Entonces* $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *es llamado un continuo tipo arco.*

3.2. Continuos encadenables.

Definición 3.2.1 *Sea* X *un espacio métrico y compacto. Una cadena* $\mathcal{U}$ *de* X *es una sucesión finita,* $U_1, \cdots, U_n$*, de subconjuntos de* X *tales que* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *si y sólo si* $|i-j| \leq 1$ *para cada* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*. A los* U_j *los llamamos eslabones de* $\mathcal{U}$*. Si cada eslabón de* $\mathcal{U}$ *es abierto, entonces* $\mathcal{U}$ *es llamada una cadena abierta.*

Definición 3.2.2 *Sea* X *un espacio métrico, compacto y* $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ *una cadena abierta de* X *definimos la malla de* $\mathcal{U}$ *como*

$$\mathrm{malla}(\mathcal{U}) = \mathrm{máx}\{\mathrm{diám(U_i)} \mid 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}.$$

Definición 3.2.3 *Sea* X *un espacio métrico y compacto ,* $\mathcal{U}$ *una cadena de* X *y* $\varepsilon > 0$*. Decimos que* $\mathcal{U}$ *es una* ε*-cadena si malla(*$\mathcal{U}$*)* $< \varepsilon$*.*

Definición 3.2.4 *Se dice que un continuo* X *es encadenable, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una* ε*-cadena tal que cubre a* X*. Sean* $x_1, x_2, x_3 \in X$*. Diremos que* X *es encadenable de* x_1 *a* x_2*, si para cada* $\varepsilon > 0$*, existe una* ε*-cadena* $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ *que cubre a* X *tal que* $x_1 \in U_1$ *y* $x_2 \in U_n$*. Finalmente, diremos que* $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ *pasa a través de* x_3*, si* $x_3 \in U_i$ *para alguna* $1 < i < n$*.*

Ejemplo 3.2.5 *El intervalo* $[0,1]$ *es encadenable.*

Ejemplo 3.2.6 *Sea*

$$X = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right] \right\}.$$

Figura 3.1: Continuo seno de $\frac{1}{x}$

Entonces X es un continuo encadenable.

Ejemplo 3.2.7 *Sea X el continuo del ejemplo anterior y sea X' la reflexión de X en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la linea $x = \frac{2}{\pi}$. Sea $Z = X \cup X'$.*

Figura 3.2: Reflexión seno de $\frac{1}{x}$

Entonces Z es un continuo encadenable.

Ejemplo 3.2.8 *El continuo Knaster, $\mathcal{K}$, el cual es definido de la siguiente manera. El continuo consiste de*
(a) todos los semicírculos en $\mathbb{R}^2$ con ordenadas no negativas, centrados en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y que pasan por cada punto del conjunto de Cantor.
(b) todos los semicírculos en $\mathbb{R}^2$ con ordenadas no positivas, los cuales tienen para cada $n \in \mathbb{N}$, el centro en el punto $\left(\frac{5}{2\cdot 3^n}, 0\right)$ y pasan por cada punto del conjunto de Cantor en el intervalo $\left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right]$.

Figura 3.3: Continuo Knaster

Entonces $\mathcal{K}$ es un continuo encadenable.

Ejemplo 3.2.9 *Sea $\mathcal{K}'$ la reflexión de $\mathcal{K}$ en $\mathbb{R}^2$ con respecto al origen $(0,0)$. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$.*

Figura 3.4: Continuo doble Knaster

Entonces $\mathcal{M}$ es un continuo encadenable.

Ejemplo 3.2.10 *A continuación construiremos un continuo X, encadenable, no degenerado, el cuál es indescomponible (Definición 3.5).*

Sean a, b y c distintos puntos en $\mathbb{R}^2$. Vamos a tomar una sucesión de cadenas $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$, cuyos eslabones serán discos en $\mathbb{R}^2$ de diámetro menor que $\frac{1}{2^n}$, que satisfacen las siguientes condiciones,

1. Para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$, $\mathcal{U}_{3n+1}$ es una cadena de a a c através de b , $\mathcal{U}_{3n+2}$ es una cadena de b a c através de a, y $\mathcal{U}_{3n+3}$ es una cadena de a a b através de c.

2. Para cada $n = 1, 2, \cdots$, $\bigcup \mathcal{U}_n \supset \bigcup \mathcal{U}_{n+1}$.

Nuestro continuo X, es la intersección anidada de la unión de estas cadenas, es decir,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{U}_n \right).$$

Por el Teorema 2.1.5, X es un continuo.

Figura 3.5: Continuo indescomponible con tres puntos extremos.

Lema 3.2.11 *Si X es un continuo encadenable, entonces existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de cadenas esenciales de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes condiciones:*
(a) $\mathcal{U}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$-cadena con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas; y
(b)La cerradura de la unión de cualesquiera tres eslabones consecutivos de $\mathcal{U}_{n+1}$ está contenida en un eslabón de $\mathcal{U}_n$.

Demostración. Notemos que si dada una cadena $\mathcal{U} = \{U_0, \cdots, U_n\}$ que cubra a X, ésta no es esencial, por la definición de cadena, sólo puede ocurrir que $U_0 \subset U_1$ y/o $U_n \subset U_{n-1}$, si ésto ocurriera podemos simplemente quitar U_0 y/o U_n y reorganizar los subíndices, obteniendo de esta forma una cadena esencial.

Probaremos el lema por inducción. Como X es encadenable, existe una $\frac{1}{2}$-cadena $\mathcal{V} = \{V_0, \cdots, V_n\}$, por el Lema 1.3.12 existe una cadena $\mathcal{U} = \{U_0, \cdots, U_n\}$ tal que $\overline{U_j} \subset V_j$ para toda $j = 0, \cdots, n$ por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una $\frac{1}{2}$-cadena que cumple con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas.

Supongamos que para alguna $n \in \mathbb{N}$ hemos construido $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{n}$ que cumple con las propiedades (a) y (b). Vamos a construir $\mathcal{U}_{n+1}$ como sigue.

Por el Teorema 1.3.10, existe λ_{n+1} un número de Lebesgue para $\mathcal{U}_n$, sea $\alpha < \text{mín}\left\{\frac{1}{3}\lambda_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}\right\}$. Como X es encadenable, existe una α-cadena $\mathcal{V}_{n+1} = \{V_{n+1,0}, V_{n+1,1}, \cdots, V_{n+1,k(n+1)}\}$ que cubre a X, nuevamente, por el Lema 1.3.12, existe $\mathcal{U}_{n+1} = \{U_{n+1,0}, U_{n+1,1}, \cdots, U_{n+1,k(n+1)}\}$ que cubre a X, tal que $\overline{U_{n+1,j}} \subset V_{n+1,j}$ para toda $j = 0, 1, \cdots, k(n+1)$. Entonces $\mathcal{U}_{n+1}$ es una $\frac{1}{2^{n+1}}$-cadena de X, con la propiedad de que eslabones ajenos tienen cerraduras ajenas.

Veamos ahora que la unión de cualesquiera tres eslabones consecutivos de $\mathcal{U}_{n+1}$, está contenida en un eslabón de $\mathcal{U}_n$. Sean $U_{n+1,j}, U_{n+1,j+1}, U_{n+1,j+2}$ eslabones consecutivos de $\mathcal{U}_{n+1}$, como $\text{diám}(\overline{U_{n+1,j} \cup U_{n+1,j+1} \cup U_{n+1,j+2}}) = \text{diám}(U_{n+1,j} \cup U_{n+1,j+1} \cup U_{n+1,j+2}) \leq 3\alpha < \lambda_{n+1}$ y λ_{n+1} es un número de Lebesgue para $\mathcal{U}_n$, existe $U_{n,k} \in \mathcal{U}_n$ tal que $\overline{U_{n+1,j}} \cup \overline{U_{n+1,j+1}} \cup \overline{U_{n+1,j+2}} \subset U_{n,k}$, ésto concluye el paso inductivo y queda probada la existencia de estas sucesiones de cadenas. ■

Definición 3.2.12 *Sea X un continuo encadenable. Una sucesión $\mathcal{U} = \{\mathcal{U_\prime}, \cdots, \mathcal{U_\backslash}, \cdots\}$ de cadenas esenciales que satisfacen las propiedades del Lema anterior, es llamada una sucesión definitoria de cadenas para X.*

3.3. Continuos como un arco.

Definición 3.3.1 *Sean X y Y espacios métricos y $\varepsilon > 0$. Una ε-función, es una función continua y suprayectiva $f_\varepsilon : X \to Y$ con la propiedad de que* $\text{diám}(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ *para cada $y \in Y$.*

Lema 3.3.2 *Sean X y Y espacios compactos com métricas d y d' respectivamente y sea $\varepsilon > 0$. Si $f_\varepsilon : X \to Y$ es una ε-función, entonces existe $\delta > 0$ tal que* $\text{diám}(f^{-1}(U)) < \varepsilon$ *para cada subconjunto U de X con* $\text{diám}(U) < \delta$.

Demostración. Como para cualquier conjunto U ocurre que $\text{diám}(U) = \text{diám}(\overline{U})$, es suficiente probar el lema para conjuntos cerrados.

Supongamos que el Lema no es cierto. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto cerrado U_n de Y tal que $\text{diám}(U_n) < \frac{1}{n}$ y $\text{diám}(f^{-1}(U_n)) \geq \varepsilon$.

Sean $x_n, x'_n \in f^{-1}(U_n)$ tal que $d(x_n, x'_n) = \text{diám}(f^{-1}(U_n))$, como X es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existen dos puntos $x, x' \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x'$, notemos que $d(x, x') \geq \varepsilon$, y por la continuidad de f,

$$d'(f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x')) = \lim_{n\to\infty} d'(f_\varepsilon(x_n), f_\varepsilon(x'_n)) \leq \lim_{n\to\infty} \text{diám}(U_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Por lo tanto $f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(x')$, pero la $d(x, x') \geq \varepsilon$, lo que contradice el hecho de que f_ε es una ε-función. ■

Lema 3.3.3 *Sea $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión inversa con límite inverso X_∞. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n : X_\infty \to X_n$ es una $\frac{1}{2^n}$-función.*

Demostración. Sea $p_n : X_\infty \to X_n$, donde $p_n((x_i)_{i=1}^{\infty}) = x_n$. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in p_n^{-1}(x_n)$. Entonces, como la función f_{n-1}^{n} determina los primeros $n-1$ lugares de la sucesión, tenemos que

$$p_n(\hat{x}) = x_n, \text{ es decir, } \hat{x} = (f_1^n(x_n) \cdots, f_{n-1}^n(x_n), x_n, x_{n+1}, \cdots) \text{ y}$$

$$p_n(\hat{y}) = x_n, \text{ es decir, } \hat{y} = (f_1^n(x_n) \cdots, f_{n-1}^n(x_n), x_n, y_{n+1}, \cdots).$$

Entonces,

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = 0 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Por lo tanto diám$(p_n^{-1}((x_i)_{i=1}^{\infty})) < \frac{1}{2^n}$. ■

Definición 3.3.4 *Sea X un continuo y Y un arco. Si para toda $\varepsilon > 0$ existe $f_\varepsilon : X \to Y$ una ε-función, entonces se dice que X es un continuo como un arco.*

3.4. Conceptos equivalentes.

A continuación vamos a enunciar y a demostrar el principal Teorema de este capítulo. Este es un Teorema que relaciona los conceptos de continuo tipo arco, continuo encadenable y continuo como un arco, definidos en las tres secciones anteriores, que como puede darse cuenta el lector, están planteados en términos completamente distintos (el de límites inversos, el de cadenas y el de ε-funciones), y a pesar de que a simple vista no es clara la relación, estos conceptos son equivalentes. Esta prueba es dada por James T. Rogers, Jr.

Teorema 3.4.1 *Sea X un continuo con métrica d. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X es encadenable.*

2. *X es tipo arco.*

3. *X es como un arco.*

Demostración. Primero supongamos que X es encadenable y veamos que ésto implica que X es tipo arco. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definitoria de cadenas (Definición 3.2.12), y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = [0, 1]$. Vamos a usar la siguiente notación para las cadenas, $\mathcal{U}_n = \{U_{n,0}, \cdots, U_{n,k(n)}\}$, y vamos a dividir cada intervalo I_n en $k(n)$ subintervalos iguales con extremos, a los que llameremos vértices $v_{n,0} = 0, \cdots, v_{n,k(n)} = 1$. Notemos que existe una correspondencia uno a uno entre los vértices de I_n y los eslabones de $\mathcal{U}_n$.

Vamos a definir nuestras funciones de ligadura $f_n^{n+1} : I_{n+1} \to I_n$ como sigue,

$$f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = \begin{cases} v_{n,j} & \text{si } U_{n,j} \text{ es el único eslabón de } \mathcal{U}_n \\ & \text{conteniendo a } U_{n+1,m}; \\ \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2} & \text{si } U_{n+1,m} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1} \end{cases}$$

y extendemos linealmente f_n^{n+1} sobre I_{n+1}. Como las cadenas son esenciales, un vértice de I_{n+1} no puede ir a dar a más de un vértice de I_n bajo f_n^{n+1}, por lo tanto la función f_n^{n+1} está bien definida para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que todas estas funciones son suprayectivas.

Sea $X_\infty = \varprojlim\{I_n, f_n^{n+1}\}$. Entonces X_∞ es un continuo tipo arco.

Figura 3.6: funciones de ligadura

Ahora debemos ver que X_∞ es homeomorfo a X.

Para poder definir el homeomorfismo, definimos primero la siguiente función

$$h_n : X \to \mathcal{C}(I_n) \text{ dada por}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} \{v_{n,j}\} & \text{si } U_{n,j} \text{ es el único eslabón de } \mathcal{U}_n \\ & \text{que tiene a } x; \\ & \\ [v_{n,j}, v_{n,j+1}] & \text{si } x \in U_{n,j} \cap U_{n,j+1} \end{cases}$$

donde $C(I_n)$ es como en la Definición 1.3.13.

Figura 3.7: $h_n : X \to \mathcal{C}(I_n)$

Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) \subset h_n(x)$, para ésto, debemos considerar los seis casos que se muestran en la figura 3.7.

Caso 1. Si $x \in U_{n+1,m} \setminus (U_{n+1,m-1} \cup U_{n+1,m+1})$ y $U_{n+1,m} \subset U_{n,j} \setminus (U_{n,j-1} \cup U_{n,j+1})$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}(\{v_{n+1,m}\}) = \{v_{n,j}\} = h_n(x)$.

Caso 2. Si $x \in U_{n+1,m} \setminus (U_{n+1,m-1} \cup U_{n+1,m+1})$ y $U_{n+1,m} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}(\{v_{n+1,m}\}) = \left\{\frac{v_{n+1,m}+v_{n+1,m+1}}{2}\right\} \subset [v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1}] = h_n(x)$.

Caso 3. Si $x \in U_{n+1,m} \setminus (U_{n+1,m-1} \cup U_{n+1,m+1})$, $U_{n+1,m} \subset U_{n,j}$ y $U_{n+1,m} \cap U_{n,j+1} \neq \emptyset$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}(\{v_{n+1,m}\}) = \{v_{n,j}\} \subset [v_{n,j}, v_{n,j+1}] = h_n(x)$.

Caso 4. Si $x \in U_{n+1,m} \cap U_{n+1,m+1}$ y $U_{n+1,m} \cap U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j} \setminus (U_{n,j-1} \cup U_{n,j+1})$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}([v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1}]) = \{v_{n,j}\} = h_n(x)$.

Caso 5. Si $x \in U_{n+1,m} \cap U_{n+1,m+1}$ y $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}([v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1}]) = \left\{\frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2}\right\} \subset [v_{n,j}, v_{n,j+1}] = h_n(x)$.

Caso 6. Si $x \in U_{n+1,m} \cap U_{n+1,m+1}$, $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j}$ y $U_{n+1,m+1} \cap U_{n,j+1} \neq \emptyset$, entonces $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) = f_n^{n+1}([v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1}]) = \left[\frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2}\right] \subset [v_{n,j}, v_{n,j+1}] = h_n(x)$.

Por lo tanto $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) \subset h_n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Figura 3.8: $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) \subset h_n(x)$

Sea $p_n : X_\infty \to X_n$ donde $p_n((x_i)_{i=1}^\infty) = x_n$. Afirmamos que la sucesión $\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^\infty$, es una sucesión decreciente. Entonces, debemos demostrar que $p_{n+1}^{-1}(h_{n+1}(x)) \subset p_n^{-1}(h_n(x))$.

Sea $(x_i)_{i=1}^\infty \in p_{n+1}^{-1}(h_{n+1}(x))$

$\Rightarrow x_{n+1} \in h_{n+1}(x)$

$\Rightarrow f_n^{n+1}(x_{n+1}) \in f_n^{n+1}(h_{n+1}(x))$.

Y como ya probamos que $f_n^{n+1}(h_{n+1}(x)) \subset h_n(x)$, tenemos que $f_n^{n+1}(x_{n+1}) \in h_n(x)$, pero $f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$, así que $x_n \in h_n(x)$, entonces $p_n((x_i)_{i=1}^\infty) \in h_n(x)$, por lo tanto $(x_i)_{i=1}^\infty \in p_n^{-1}(h_n(x))$.

Entonces $\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente. Ahora veamos que $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^\infty \neq \emptyset$.

Como $h_n(x)$ siempre es un punto o un intervalo cerrado, y las proyecciones son continuas, $\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión anidada de cerrados, por el Teorema 1.2.5, $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$.

Entonces $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$. Más aún, probaremos que esta intersección consta de sólo un punto.

En el Lema 3.3.3, probamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, p_n es una $\frac{1}{2^n}$-función. Entonces, por el Lema 3.3.2, existe $\delta > 0$ tal que diám$(p_n^{-1}(\hat{x})) < \frac{1}{2^n}$, cuando diám$(\hat{x}) < \delta$. Notemos además que $\lim\limits_{n\to\infty}$ diám$(h_n(x)) = 0$. Tomamos $m \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande tal que $\delta >$diám$(h_m(x))$, entonces diám$(p_m^{-1}(h_m(x))) < \frac{1}{2^m}$, así pues, cuando $n \to \infty$, diám$(p_n^{-1}(h_n(x))) \to 0$, y como

$$\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset,$$

concluímos que $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ es sólo un punto.

Ahora ya estamos listos para dar el homeomorfismo. Definimos $g : X \to X_\infty$ como,

$$g(x) = \text{el único punto en } \bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}.$$

Como $g(x)$ es el único punto en $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty} \subset X_\infty$, g está bien definida.

Para ver que g es homeomorfismo, por el Teorema 1.2.11, basta probar que es una función continua y biyectiva.

Vamos a demostrar que g es una función inyectiva. Sean $x, x' \in X$ con $x \neq x'$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{m,j} \setminus U_{m,l}$ y $x' \in U_{m,l} \setminus U_{m,j}$ para algunas $j, l = 0, \cdots, k(m)$, por lo tanto $h_n(x) \neq h_n(x')$ y en consecuencia $p_n^{-1}(h_n(x)) \neq p_n^{-1}(h_n(x'))$, y como $\bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$ consta de un solo punto, $g(x) \neq g(x')$.

Ahora probaremos que g es suprayectiva. Sea $\hat{y} \in X_\infty$. Queremos ver que existe $x \in X$ tal que $g(x) = \hat{y}$.

Sea $y_n = p_n(\hat{y}) \in I_n$, entonces, éste tiene sólo dos opciones,

Caso 1. $y_n = v_{n,j}$, es decir, $p_n(\hat{y}) = v_{n,j}$, (y_n es vértice de algún subintervalo de I_n)

Caso 2. $y_n \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$, es decir, $p_n(\hat{y}) \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$, ($y_n$ está entre dos vértices de algún subintervalo de I_n).

Vamos a definir los conjuntos R_n como sigue,

Caso 1. Si $p_n(\hat{y}) = v_{n,j}$, entonces definimos $R_n = U_{n,j}$

Caso 2. Si $p_n(\hat{y}) \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$, entonces definimos $R_n = U_{n,j} \cup U_{n,j+1}$.

Veamos que $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente. Debemos probar que $R_{n+1} \subset R_n$.

Caso 1. Sea $R_{n+1} = U_{n+1,m}$ y $R_n = U_{n,j}$. Entonces $p_{n+1}(\hat{y}) = v_{n+1,m}$ y $p_n(\hat{y}) = v_{n,j}$, es decir, $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j}$ y por como definimos nuestras funciones de ligadura, ésto quiere decir que $U_{n+1,m} \subset U_{n,j}$, por lo tanto $R_{n+1} \subset R_n$.

Caso 2. Sea $R_{n+1} = U_{n+1,m}$ y $R_n = U_{n,j} \cup U_{n,j+1}$. Entonces $p_{n+1}(\hat{y}) = v_{n+1,m}$ y $p_n(\hat{y}) \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$, es decir, $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$ por lo tanto $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2}$ y ésto implica que $U_{n+1,m} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1} \subset U_{n,j} \cup U_{n,j+1}$, por lo tanto $R_{n+1} \subset R_n$.

Caso 3. Sea $R_{n+1} = U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1}$ y $R_n = U_{n,j}$. Entonces $p_{n+1}(\hat{y}) \in (v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1})$ y $p_n(\hat{y}) = v_{n,j}$, es decir, $f_n^{n+1}((v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1})) = v_{n,j}$ por lo tanto $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j} = f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1})$, es decir, $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j}$, por lo tanto $R_{n+1} \subset R_n$.

Caso 4. Sea $R_{n+1} = U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1}$ y $R_n = U_{n,j} \cup U_{n,j+1}$. Entonces $p_{n+1}(\hat{y}) \in (v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1})$ y $p_n(\hat{y}) \in (v_{n,j}, v_{n,j+1})$, esto implica que $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2} = f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1})$, es decir, $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1} \subset U_{n,j} \cup U_{n,j+1}$, por lo tanto $R_{n+1} \subset R_n$.

Como $R_{n+1} \subset R_n$, entonces $\overline{R_{n+1}} \subset \overline{R_n}$, por lo tanto $\{\overline{R_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de cerrados en un compacto, así que por el Teorema 1.2.5, $\bigcap\{\overline{R_n}\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$, y como $\lim_{n\to\infty} malla(\mathcal{U}_n) = 0$, entonces $\bigcap\{\overline{R_n}\}_{n=1}^{\infty} = x$

Ahora veamos que en efecto, $g(x) = \hat{y}$. Como ya vimos, pueden ocurrir dos casos.

Caso 1. $\hat{y} \in p_n^{-1}(v_{n,j})$.

Caso 2. $\hat{y} \in p_n^{-1}((v_{n,j}, v_{n,j+1}))$.

Debemos probar que $\hat{y} \in \bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$.

Caso 1. Si $\hat{y} \in p_n^{-1}(v_{n,j})$, entonces $\hat{y} \in p_n^{-1}(h_n(x))$, cuando $h_n(x) = \{v_{n,j}\}$.

Caso 2. Si $\hat{y} \in p_n^{-1}((v_{n,j}, v_{n,j+1}))$, entonces $\hat{y} \in p_n^{-1}([v_{n,j}, v_{n,j+1}])$, es decir, $\hat{y} \in p_n^{-1}(h_n(x))$, cuando $h_n(x) = [v_{n,j}, v_{n,j+1}]$.

Como éstas son las únicas posibilidades, tenemos que $\hat{y} \in p_n^{-1}(h_n(x))$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\hat{y} \in \bigcap\{p_n^{-1}(h_n(x))\}_{n=1}^{\infty}$, y como $g(x)$ es el único punto en esta intersección, $g(x) = \hat{y}$.

Sólo nos falta probar que g es una función continua.

Probaremos que $p_n \circ g$ es una función continua para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver que existe $l > n$ tal que para toda $m = 1, \cdots, k(l) - 2$, diám$(f_n^l([v_{l,m}, v_{l+2}])) < \varepsilon$, (recordemos que $k(l)$ es el índice del último eslabón de la l-ésima cadena).

Por la segunda propiedad del Lema 3.2.11, no puede ocurrir que $U_{n,j}$ sea el único eslabón conteniendo a $U_{n+1,m}$ y $U_{n,j+1}$ sea el único eslabón conteniendo a $U_{n+1,m+1}$, es decir, no puede ocurrir que $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j}$ y $f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1}) = v_{n,j+1}$, o sea, dos vértices consecutivos de I_{n+1} no pueden ir bajo las funciones de ligadura a dos vértices consecutivos de I_n. Entonces sólo nos quedan cinco casos de cómo se pueden comportar las imágenes de las funciones de ligadura.

Caso 1. Si $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j}$, entonces $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j} = f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1})$.

Figura 3.9: Caso 1

Caso 2. Si $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2} = f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1})$.

Figura 3.10: Caso 2

Caso 3. Si $U_{n+1,m} \cup U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j+1} = f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1})$.

Figura 3.11: Caso 3

Caso 4. Si $U_{n+1,m} \subset U_{n,j}$ y $U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = v_{n,j}$ y $f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1}) = \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2}$.

Figura 3.12: Caso 4

Caso 5. Si $U_{n+1,m} \subset U_{n,j} \cap U_{n,j+1}$ y $U_{n+1,m+1} \subset U_{n,j+1}$, entonces $f_n^{n+1}(v_{n+1,m}) = \frac{v_{n,j}+v_{n,j+1}}{2}$ y $f_n^{n+1}(v_{n+1,m+1}) = v_{n,j}$.

Figura 3.13: Caso 5

Entonces concluímos que

$$\text{diám}(f_n^{n+1}([v_{n+1,m}, v_{n+1,m+1}])) \leq \frac{1}{2}\text{diám}([v_{n,j}, v_{n,j+1}])$$

lo que implica que

$$\text{diám}(f_n^{n+1}([v_{n+1,m}, v_{n+1,m+2}])) \leq \text{diám}([v_{n,j}, v_{n,j+1}]).$$

Tomemos $l \in \mathbb{N}$ tal que $l > n$. Entonces

$$\text{diám}(f_{l-1}^{l}([v_{l,m}, v_{l,m+2}])) \leq \text{diám}([v_{l-1,j}, v_{l-1,j+1}]) = \frac{1}{2^0} \cdot \frac{1}{k(l-1)},$$

$$\text{diám}(f_{l-2}^{l}([v_{l,m}, v_{l,m+2}])) = \frac{1}{2}\text{diám}([v_{l-2,k}, v_{l-2,k+1}]) = \frac{1}{2^1} \cdot \frac{1}{k(l-2)},$$

$$\text{diám}(f_{l-3}^{l}([v_{l,m}, v_{l,m+2}])) \leq \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{k(l-3)}.$$

En general,

$$\text{diám}(f_{n}^{l}([v_{l,m}, v_{l,m+2}])) \leq \frac{1}{2^{(l-n)-1}} \cdot \frac{1}{k(n)}.$$

Así que dada $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $l > n$ lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^{(l-n)-1}} \cdot \frac{1}{k(n)} < \varepsilon$ y por lo que acabamos de ver, esta l cumple con la condición de que para toda $m = 1, \cdots, k(l)-2$, $\text{diám}(f_n^l([v_{l,m}, v_{l,m+2}])) < \varepsilon$.

Sea $\lambda > 0$ un número de Lebesgue para $\mathcal{U}_l$. Entonces dados $x, x' \in X$ tal que $d(x, x') < \lambda$, existe $j \in \{1, \cdots, k(l)\}$ tal que $x, x' \in U_{l,j}$. Como $g(U_{l,j}) \subset p_l^{-1}(h_l(U_{l,j}))$, entonces $p_l \circ g(U_{l,j}) \subset h_l(U_{l,j}) \subset [v_{l,m}, v_{l,m+2}]$ para alguna $m \in \{1, \cdots, k(l) - 2\}$. Además diám$(p_n \circ g(U_{l,j}))$ = diám$(f_n^l \circ p_l \circ g(U_{l,j})) \leq$diám$f_n^l([v_{l,m}, v_{l,m+2}]) < \varepsilon$. Entonces $d_n(p_n \circ g(x), p_n \circ g(x')) < \varepsilon$ (donde d_n es la distancia en I_n), por lo tanto g es continua, y ésto concluye la prueba de que X es homeomorfo a X_∞.

Ahora demostraremos que todo continuo tipo arco es como un arco. Sea X un continuo tipo arco. Entonces $X_\infty = \varprojlim\{I_n, f_n^{n+1}\}$, donde $\{I_n, f_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa de arcos con funciones de ligadura suprayectivas.

Debemos demostrar que para toda $\varepsilon > 0$, existe $f_\varepsilon : X \to I$, una ε-función de X en el intervalo $[0, 1]$.

Dada $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ y sea $p_N : X_\infty \to I_N$, la N-ésima proyección. Veamos que p_N es una ε-función.

Sea $z \in I_N$ y sean $(x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty \in p_N^{-1}(z)$. Entonces $p_N((x_i)_{i=1}^\infty) = z$ y $(p_N((y_i)_{i=1}^\infty) = z$, es decir,

$$
\begin{aligned}
(x_i)_{i=1}^\infty &= (f_1^N(z) \cdots, f_{N-1}^N(z), z, x_{N+1} \cdots) \text{ y} \\
(y_i)_{i=1}^\infty &= (f_{t1}^N(z) \cdots, f_{N-1}^N(z), z, y_{N+1} \cdots).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\rho((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = 0 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} < \varepsilon.
$$

Entonces p_N es una ε-función y por lo tanto X es un continuo como un arco.

Ahora, supongamos que X es un continuo como un arco. Demostraremos que X es un continuo encadenable.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $f_\varepsilon : X \to I$ una ε-función, por el Lema 3.3.2, existe $\delta > 0$ tal que dado $U \subset I$ con diám$(U) < \delta$, se tiene que diám$(f^{-1}(U)) < \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, dividimos el intervalo en n partes iguales y sea

$$\mathcal{U} = \left\{ f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right), f^{-1}\left(\left(0, \frac{2}{n}\right)\right), f^{-1}\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right)\right), \cdots, \right.$$
$$\left. f^{-1}\left(\left(\frac{n-2}{n}, 1\right)\right), f^{-1}\left(\left(\frac{n-1}{n}, 1\right]\right) \right\}.$$

Como

$$\mathcal{V} = \left\{ \left[0, \frac{1}{n}\right), \left(0, \frac{2}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}\right), \cdots, \left(\frac{n-2}{n}, 1\right), \left(\frac{n-1}{n}, 1\right] \right\}$$

es una δ-cadena de $[0,1]$, $\mathcal{U}$ es una ε-cadena que cubre a X. Como ε fue arbitraria, entonces X es encadenable. ■

Capítulo 4

Algunas propiedades de los continuos tipo arco.

En este capítulo vamos a ver que los continuos tipo arco tienen propiedades muy interesantes. Por ejemplo, ser encadenable es una ε-propiedad, los continuos tipo arco tienen la propiedad del punto fijo, los subcontinuos de un continuo encadenable son encadenables, etc. Es fácil imaginar que los continuos tipo arco cumplen muchas de estas propiedades, pero algunas no son tan evidentes. Al probar estas propiedades nos daremos una idea de lo útil que es el Teorema 3.4.1, pues muchas de las pruebas serían sumamente difíciles si no contaramos con esta poderosa herramienta.

Probaremos también que los continuos tipo arco son unicoherentes y no contienen triodos, estas dos propiedades son muy importantes, pues un concepto muy utilizado en la Teoría de continuos es el de la irreducibilidad (es decir, no ocurre que para cualesquiera dos puntos de un continuo, exista un subcontinuo que los contenga a ambos), y un Teorema muy importante de Sorgenfrey, [7], nos dice que si un continuo es unicoherente y no contiene triodos, entonces es irreducible.

Muchos matemáticos dedicados a la Teoría de continuos, han buscado caracterizar a los continuos tipo arco a través de sus propiedades, pero ésta no es una labor sencilla. En fin, la clase de los continuos tipo arco es muy grande y compleja. A continuación estudiaremos algunas de las propiedades mencionadas.

4.1. La propiedad del punto fijo.

Definición 4.1.1 *Sea X un espacio métrico, y sea $f : X \to X$ una función continua. Decimos que f tiene un punto fijo, si $f(x) = x$ para alguna $x \in X$.*

Definición 4.1.2 *Sea X un espacio métrico. Decimos que X tiene la propiedad del punto fijo, si toda función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.*

Lema 4.1.3 *Sea X un espacio compacto con métrica d y $f : X \to X$ una función continua. Si para toda $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$, entonces f tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_n, f(x_n)) < \frac{1}{n}$. Como X es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que existe $x \in X$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Además, como f es continua, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x, x_N) < \frac{\varepsilon}{3}, d(f(x), f(x_N)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_N) + d(x, f(x_N)) + d(f(x_N), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto $d(x, f(x)) < \varepsilon$.

Como ε fue arbitraria, $d(x, f(x)) = 0$, por lo tanto $x = f(x)$. Así pues, f tiene la propiedad del punto fijo.

■

Teorema 4.1.4 *Si X es un continuo encadenable con métrica d, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $f : X \to X$ una función continua, y sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definitoria de cadenas para X.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 1.2.5, basta encontrar un punto $x_\varepsilon \in X$ tal que $d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Consideremos la cadena

$\mathcal{U}_k$ (recordemos que por el Lema 3.2.12, la $malla(\mathcal{U}_k) < \frac{1}{2^k}$). Definimos los siguientes subconjuntos de X

$$A = \{x \in X \mid x \in \overline{U_{k,i}}, f(x) \in \overline{U_{k,j}} \text{ y } j > i\}$$

$$B = \{x \in X \mid x, f(x) \in \overline{U_{k,i}}, \text{ con } i = 0, \cdots, n(k)\}$$

$$C = \{x \in X \mid x \in \overline{U_{k,i}}, f(x) \in \overline{U_{k,j}} \text{ y } j < i\}$$

Entonces, debemos probar que $B \neq \emptyset$. Supongamos que que $B = \emptyset$, sea $x \in X \setminus A$, entonces $x \in \overline{U_{k,i}}$, $f(x) \in \overline{U_{k,j}}$ y $j < i$. Sea λ un número de Lebesgue para $\mathcal{U}_k$. Como X es compacto, f es uniformemente continua, así que existe $\delta > 0$, con $\delta < \lambda$ tal que dados $x, z \in X$ y $d(x, z) < \delta$ entonces $d(f(x), f(z)) < \lambda$. Vamos a probar que x es punto interior de $X \setminus A$. Veamos que $\mathcal{B}^d_\delta(x) \subset X \setminus A$. Sea $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$, como $\delta < \lambda$, existe $U_{k,m} \in \mathcal{U}_k$ tal que $x, y \in U_{k,m} \subset \overline{U_{k,m}}$, como $x \in \overline{U_{k,m}} \cap X \setminus A$, entonces $f(x) \in \overline{U_{k,l}}$ y $l < m$, además $d(f(x), f(y)) < \lambda$, así que $f(y) \in \overline{U_{k,j}}$ y $j \leq m$, pero como $B = \emptyset$, $j < m$, $y \in X \setminus A$, lo que quiere decir que $X \setminus A$ es abierto, por lo tanto A es cerrado. Utilizando un argumento similar, tenemos que C es cerrado. Como $B = \emptyset$ tenemos que $X = A \cup C$, también notemos que $A \cap C = \emptyset$, ésto no es posible pues X es conexo, por lo tanto $B \neq \emptyset$. ∎

4.2. ε-propiedades.

Definición 4.2.5 *Sea X un continuo y P una propiedad topológica. Decimos que X es casi P, si para toda $\varepsilon > 0$, existe un continuo Y_ε con la propiedad P y una ε-función $f_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$.*

Definición 4.2.6 *Sea P una propiedad topológica. Decimos que P es una ε-propiedad si todo continuo casi P, tiene la propiedad P.*

Teorema 4.2.7 *Ser encadenable es una ε-propiedad.*

Demostración. Sea X un continuo casi encadenable, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe un continuo Y_ε encadenable y $f_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$, una ε-función. Debemos probar que X es encadenable.

Por el Lema 3.3.2, existe $\delta > 0$ tal que si U es un subconjunto de Y_ε con diám$(U) < \delta$, entonces diám$(f^{-1}(U)) < \varepsilon$, y como Y_ε es encadenable, por el Teorema 3.4.1, existe una δ-función $g_\delta : Y_\varepsilon \to I$, por lo tanto $g_\delta \circ f_\varepsilon : X \to I$ es una ε-función. Aplicando una vez más el Teorema 3.4.1, concluímos que X es encadenable. ■

Ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, la proyección $p_n : X_\infty = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\} \to X_n$ es una $\frac{1}{2^n}$-función, tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 4.2.8 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un continuo encadenable. Entonces $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ es un continuo encadenable.*

4.3. Otras propiedades

Lema 4.3.1 *Sea X un continuo y sea $\mathcal{C} = \{U_0, U_1, \cdots, U_n\}$ una cadena que cubre a X. Si H es un subconjunto conexo de X tal que $H \cap U_j \neq \emptyset$ y $H \cap U_l \neq \emptyset$ para algunas $j, l \in \{0, 1, \cdots, n\}$ con $j < l$, entonces $H \cap U_k \neq \emptyset$ siempre que $j < k < l$.*

Demostración. Fijemos un entero k tal que $j < k < l$. Sean $V = H \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i\right)$ y $W = H \cap \left(\bigcup_{i=k+1}^{n} U_i\right)$. Si U_k no intersectara a H, podríamos escribir a H como $V \cup W$ donde $V \cap W = \emptyset$, lo que es una contradicción, pues H es conexo. ■

Teorema 4.3.2 *Sea X un continuo encadenable y H un subcontinuo de X. Entonces H es encadenable.*

Demostración. Como X es encadenable, dada $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \cdots, U_n\}$ una cadena que cubre a X.

Sea $j = \text{mín}\{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $H \cap U_j \neq \emptyset$ y
sea $l = \text{máx}\{0, 1, \cdots, n\}$ tal que $H \cap U_l \neq \emptyset$.

Por el Lemma 4.3.1, $H \cap U_k \neq \emptyset$ siempre que $j < k < l$. Entonces $\mathcal{U}' = \{U_j \cap H, \cdots, U_k \cap H, \cdots, U_l \cap H\}$ es una cadena que cubre a H y claramente la *malla*$(\mathcal{U}') < \varepsilon$, por lo tanto H es encadenable. ■

Teorema 4.3.3 *Si X es un continuo tipo arco, entonces X es unicoherente.*

Demostración. Como X es un continuo tipo arco, entonces $X = \varprojlim\{I_n, f_n^{n+1}\}$, donde $\{I_n, f_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa de arcos con funciones de ligadura suprayectivas. Como el Arco es un continuo unicoherente (Ejemplo 2.1.8), por el Teorema 2.2.9, X es unicoherente. ■

Corolario 4.3.4 *Sea X un continuo tipo arco. Entonces X es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X. Por el Teorema 4.3.2, A es encadenable. Por el Teorema 3.4.1, A es un continuo tipo arco y aplicando el Teorema 2.2.9, tenemos que A es un continuo unicoherente. ■

Proposición 4.3.5 *Sea X un continuo, y C un subcontinuo de X tal que $X \setminus C = (A, B)$, (donde (A, B) es como en la definición 1.4.1). Entonces, tanto $A \cup C$, como $B \cup C$, son continuos.*

Demostración. Como C es compacto, entonces por el Teorema 1.2.7, C es un conjunto cerrado. Además como $A \cup C = X \setminus B$, y B es abierto, tenemos que $A \cup C$ es un conjunto cerrado, y por el Teorema 1.2.6, es compacto. Entonces, ya tenemos que $A \cup C$ es un espacio métrico compacto, sólo nos falta ver que es conexo.

Supongamos que $A \cup C$ no es conexo, entonces existen K y L abiertos en $A \cup C$, tales que $A \cup C = (K, L)$. Como C es conexo, entonces, por el Teorema 1.4.3, $C \subset K$ o $C \subset L$. Supongamos si pérdida de generalidad que $C \subset K$, ésto implica que $L \subset A$, por lo tanto, como (A, B) es una separación, tenemos que $\overline{L} \cap B = \emptyset$ y $L \cap \overline{B} = \emptyset$. Entonces

$$X = (L, K \cup B),$$

y ésto es una contradicción, pues X es conexo. Por lo tanto $A \cup C$ es un continuo. La prueba de que $B \cup C$ es un continuo, es análoga. ■

Definición 4.3.6 *Decimos que un continuo X es un triodo, si existe un subcontinuo Z de X, tal que $X \setminus Z$ es la unión de tres conjuntos no vacíos, mutuamente separados.*

Definición 4.3.7 *Decimos que un continuo es atriódico, si ninguno de sus subcontinuos es un triodo.*

Teorema 4.3.8 *Todo continuo tipo arco es atriódico.*

Demostración. Por el Teorema 4.3.2, es suficiente probar que si X es un continuo tipo arco, entonces, él mismo no es un triodo.

Sea X un continuo tipo arco. Supongamos que X es un triodo. Entonces existe un subcontinuo Z de X, tal que $X \setminus Z = \bigcup_{i=1}^{3} U_i$, donde cada U_i es no vacío, y U_1, U_2 y U_3 son mutuamente separados en X. Entonces observemos que,

$$X \setminus Z = (U_i, U_j \cup U_k), \text{ donde } i \neq j, i \neq k \text{ y } j \neq k,$$

y por la Proposición 4.3.5, tenemos que $Z \cup U_i$ es un continuo para cada $i = 1, 2, 3$.

Fijemos $p_i \in U_i$, para cada i. Sea d una métrica para X, y sea

$$d(p_i, X \setminus U_i) = \inf\{d(p_i, y) \mid y \in X \setminus U_i\} \text{ para toda } i = 1, 2, 3.$$

Ahora, sea

$(*)$ $\varepsilon = \text{mín}\{d(p_i, X \setminus U_i) \mid i = 1, 2, 3\}$.

Notemos que $\varepsilon > 0$, pues como $U_i = X \setminus (Z \cup \overline{U_j} \cup \overline{U_k})$, entonces U_i es abierto, por lo tanto, dada $x \in U_i$, existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B}_\delta^d(x) \subset U_i$.

Como X es un continuo tipo arco, por el Teorema 3.4.1, existe $f_\varepsilon : X \to [0, 1]$, una ε-función.

Sea

$J_i = f_\varepsilon(U_i \cup Z)$, para cada $i = 1, 2, 3$.

Como $U_i \cup Z$ es un continuo para toda i, entonces $f_\varepsilon(U_i \cup Z)$, es un subconjunto cerrado y conexo de $[0, 1]$. Por lo tanto, cada J_i es un subintervalo cerrado de $[0, 1]$.

Como f_ε es una función suprayectiva,

$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{3} J_i$.

Además, como $f_\varepsilon(Z) \subset J_i$ para cada $i = 1, 2, 3$,

$f_\varepsilon(Z) \subset \bigcap_{i=1}^{3} J_i \neq \emptyset$.

Como $\bigcap_{i=1}^{3} J_i \neq \emptyset$ y $\bigcup_{i=1}^{3} J_i = [0, 1]$, existen J_i y J_k (no necesariamente $j \neq k$) tales que $0 \in J_i$ y $1 \in J_k$, como son conexos y se intersectan, $J_i \cup J_k = [0, 1]$, por lo tanto al menos un elemento de $\{J_1, J_2, J_3\}$ está contenido en la unión de los otros dos. Supongamos $J_1 \subset J_2 \cup J_3$, entonces $f_\varepsilon(p_1) = f_\varepsilon(q)$ para alguna $q \in Z \cup U_2 \cup U_3$.

Como f_ε es una ε-función, tenemos que $d(p_1, q) < \varepsilon$, pero por $(*)$, tenemos que $d(p_1, q) \geq \varepsilon$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto, X no es un triodo.
■

Capítulo 5

Descomposiciones semicontinuas superiormente.

Una pregunta interesante que podemos hacernos acerca de los continuos tipo arco, es si la imagen monótona de un continuo tipo arco es encadenable. Para responder a esta pregunta vamos a dar la definición de descomposición semicontinua superiormente y a probar algunos resultados acerca de este tema.

5.1. Espacios descomposición.

Definición 5.1.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío. Sea $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos no vacíos de X mutuamente ajenos tales que $\bigcup \mathcal{D} = X$ ($\mathcal{D}$ es llamada una partición de X). Sea*

$$\tau(\mathcal{D}) = \left\{ \mathcal{U} \subset \mathcal{D} \mid \bigcup \mathcal{U} \in \tau \right\}.$$

A $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ le llamaremos un espacio descomposición para X (también se le conoce como espacio cociente o espacio identificación), y a $\tau(\mathcal{D})$ le llamaremos la topología descomposición.

5.2. Identificaciones.

Definición 5.2.1 *Una función $f : X \to Y$ es una identificación, si la topología de Y es la máxima que hace a f continua.*

Ejemplo 5.2.2 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ una descomposición para X. La función natural $\pi : X \to \mathcal{D}$, definida como*

$$\pi(x) = \text{ el único } D \in \mathcal{D} \text{ talque } x \in D,$$

es una identificación, pues claramente $\tau(\mathcal{D})$ es la más grande topología que hace a π continua.

Nota 5.2.3 *Observemos que dado $W \subset \mathcal{D}$, $W \in \tau(\mathcal{D})$ si y sólo si $\pi^{-1}(W) \in \tau$.*

Lema 5.2.4 *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) continuos, y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es una identificación.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.10, f es una función cerrada. Sea τ_2' la máxima topología que hace a f continua, es decir,

$$\tau_2' = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_1\}.$$

Vamos a demostrar que $\tau_2 = \tau_2'$. Claramente $\tau_2 \subset \tau_2'$. Probemos entonces que $\tau_2' \subset \tau_2$.

Sea $A_0 \in \tau_2'$. Entonces $f^{-1}(A_0) \in \tau_1$, por lo tanto, $X \setminus f^{-1}(A_0) = f^{-1}(Y \setminus A_0)$, es un conjunto cerrado en X, lo que implica que

$$f(X \setminus f^{-1}(A_0)) = f(f^{-1}(Y \setminus A_0)) = Y \setminus A_0.$$

Como f es cerrada, $Y \setminus A_0$ es cerrado en Y, y por lo tanto, $A_0 \in \tau_2$. ■

Ahora vamos a enunciar y a demostrar un lema, el cual, a pesar de tener una demostración sencilla, es sumamente útil en el estudio de los espacios descomposición. A este lema se le conoce como el Lema de Transgresión.

Lema 5.2.5 *Sean X y Z espacios topológicos, Y una descomposición de X, $q : X \to Y$ una identificación y $g : X \to Z$ una función continua con la propiedad de que para todo $y_0 \in Y$, $g(q^{-1}(y_0))$ es un solo punto. Entonces, $g \circ q^{-1} = G$ es una función continua.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, "G"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea U un abierto en Z. Queremos ver entonces que $G^{-1}(U)$ es abierto en Y.

Observemos que

$$G^{-1}(U) = (g \circ q^{-1})^{-1}(U) = (q^{-1})^{-1} \circ (g^{-1})(U) = q \circ g^{-1}(U).$$

Entonces bastará probar que $q^{-1}(q(g^{-1}(U)))$ es un abierto de X.

Afirmamos que $q^{-1}(q(g^{-1}(U))) = g^{-1}(U)$. Una vez probada esta igualdad, habremos terminado, pues por la continuidad de g, sabemos que $g^{-1}(U)$ es abierto en X.

Claramente, si $x \in g^{-1}(U)$, entonces $x \in q^{-1}(q(g^{-1}(U)))$.

Ahora, sea $x \in q^{-1}(q(g^{-1}(U)))$, entonces existe $z \in U$, tal que $x \in q^{-1}(q(g^{-1}(z)))$, de aquí que $q(x) \in q(g^{-1}(z))$, es decir, $q(x) = q(y)$, para algún $y \in g^{-1}(z)$, entonces $x, y \in q^{-1}(y_0)$, para algún $y_0 \in Y$.

Además, $g(y) = z$, y como g tiene la propiedad de que para todo $y_0 \in Y$, $g(q^{-1}(y_0))$ es un solo punto, $g(x) = g(y)$. Por lo tanto $x \in g^{-1}(z) \subset g^{-1}(U)$.
■

Lema 5.2.6 *Si un espacio Hausdorff es imagen continua de un espacio métrico compacto, entonces es metrizable.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto, Y un espacio de Hausdorff, y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Como la imagen continua de un espacio compacto, es un compacto (por 1.2.8), tenemos que Y es un espacio compacto. Entonces para ver que Y es metrizable, basta ver que Y tiene una base numerable, [2, p. 260].

Como X es métrico y compacto, por el Teorema 4.2.8 de [2], entonces X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X, y para cada subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}$, sea

$$E(\mathcal{L}) = Y \setminus f\left(X \setminus \bigcup \mathcal{L}\right).$$

Sea $\mathcal{P} = \{E(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{B}\}$. Claramente $\mathcal{P}$ es numerable. Como X es compacto y Y es Hausdorff, por el Corolario 1.2.10, f manda cerrados en cerrados, por lo tanto, cada miembro de $\mathcal{P}$ es abierto en Y.

Sólo nos falta probar que en efecto, $\mathcal{P}$ es una base para Y. Sea U un abierto de Y, y sea $y \in U$. Entonces como $f^{-1}(y)$ es un subconjunto compacto del abierto $f^{-1}(U)$, y $\mathcal{B}$ es base para X, existe un subconjunto finito $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$.

Como $f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{L}$, entonces
$y \notin f(X \setminus \bigcup \mathcal{L})$, por lo tanto
$y \in Y \setminus f(X \setminus \bigcup \mathcal{L}) = E(\mathcal{L})$. Entonces $y \in E(\mathcal{L})$.

Probaremos ahora, que $E(\mathcal{L}) \subset U$.

Sea $x \in E(\mathcal{L})$. Entonces
$x \in Y$ y $x \notin f(X \setminus \bigcup \mathcal{L})$, lo que implica que,
$f^{-1}(x) \cap (X \setminus \bigcup \mathcal{L}) = \emptyset$, entonces,
$f^{-1}(x) \subset \bigcup \mathcal{L} \subset f^{-1}(U)$, y ésto quiere decir que $x \in U$.

Entonces tenemos que, existe $E(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}$ tal que $y \in E(\mathcal{L}) \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{P}$ es una base numerable para Y, así que Y es un espacio metrizable. ■

Teorema 5.2.7 *Sean X un espacio métrico compacto y $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$, una descomposición para X. Entonces $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es metrizable si y solo si $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Como $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función continua y suprayectiva, por el lema 5.2.6, $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es metrizable. La otra implicación es inmediata, pues todo espacio métrico es de Hausdorff. ■

Teorema 5.2.8 *Una descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de un continuo es un continuo si y sólo si $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Si $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo, entonces claramente es un espacio Hausdorff.

Ahora, sea $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ un espacio Hausdorff. Entonces por el teorema 5.2.7 $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio métrico, además como $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función continua y suprayectiva, por el Teorema 1.2.8, $\mathcal{D}$ es un espacio compacto, y por el Teorema 1.4.9, $\mathcal{D}$ también es conexo. Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es un continuo. ■

5.3. Descomposiciones semicontinuas superiormente.

Definición 5.3.1 *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ una descomposición para X. Decimos que $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, si dados $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$, existe $V \in \tau$ con $D \subset V$, tal que si $A \in \mathcal{D}$ y $A \cap V \neq \emptyset$, entonces $A \subset U$.*

Definición 5.3.2 *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición de un espacio X, entonces cualquier subconjunto de X que sea unión de una subcolección de $\mathcal{D}$, es llamado un conjunto $\mathcal{D}$-saturado.*

Ejemplo 5.3.3 *Sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural definida en el Ejemplo 5.2.2. Entonces cualquier subconjunto de la forma $\pi^{-1}(\mathcal{C})$, con $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, es un conjunto $\mathcal{D}$-saturado.*

Nota 5.3.4 *Un subconjunto A de X es $\mathcal{D}$-saturado si y sólo si $A = \pi^{-1}[\pi(A)]$. Por lo tanto, si V es $\mathcal{D}$-saturado y abierto en X, entonces $\pi(V)$ es abierto en $\mathcal{D}$.*

Lema 5.3.5 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ una descomposición semicontinua superiormente de X. Entonces*

$$\mathcal{U} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \subset U\} \in \tau(\mathcal{D}) \text{ para todo } U \in \tau$$

Demostración. Sea $U \in \tau$ y $\mathcal{U} = \{D \in \mathcal{D} \mid D \subset U\}$, queremos probar que $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Sea $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Entonces existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$ y $D \subset U$, como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, existe $V \in \tau$ tal que $D \subset V$, y si $D' \cap V \neq \emptyset$ para alguna $D' \in \mathcal{D}$, $D' \subset U$.

Como $D \subset V$, entonces $x \in V$, así que si probamos que $V \subset \bigcup \mathcal{U}$, habremos mostrado que x es punto interior de $\bigcup \mathcal{U}$ y por tanto, podremos concluir que $\bigcup \mathcal{U}$ es un abierto de X.

Probemos que $V \subset \bigcup \mathcal{U}$. Sea $v \in V$. Entonces existe $D_V \in \mathcal{D}$ tal que $v \in D_v$, y por tanto, $D_V \cap V \neq \emptyset$, como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, tenemos que $D_V \subset U$, es decir $D_V \in \mathcal{U}$, por lo tanto $v \in \bigcup \mathcal{U}$. ■

Proposición 5.3.6 *Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{D}$ una descomposición de X, y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural definida en el Ejemplo 5.2.2. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *$\mathcal{D}$ es un descomposición semicontinua superiormente.*
2. *π es una función cerrada.*
3. *Dados $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tales que $D \subset U$, existe $V \in \tau$, un conjunto $\mathcal{D}$-saturado, que cumple que $D \subset V \subset U$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente, queremos ver que dado un cerrado C de X, $\pi(C)$ es cerrado en $\mathcal{D}$. Como π es una función continua y suprayectiva, tenemos que $\pi(C)$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto. Entonces probaremos que $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto en X.

Sea $p \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$, vamos a probar que existe $W \in \tau$ tal que $p \in W \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$.

Como $p \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$, entonces $\pi(p) \in \mathcal{D} \setminus \pi(C)$. Notemos que $\pi(p) \subset X \setminus C$ (supongamos que ésto no es cierto, entonces $\pi(p) \cap C \neq \emptyset$, es decir, existe $y \in \pi(p) \cap C$, lo cuál implica que $\pi(y) \in \pi(C)$, y que $\pi(y) = \pi(p)$, por lo tanto $\pi(p) \in \pi(C)$, lo cual es una contradicción, pues $\pi(p) \in \mathcal{D} \setminus \pi(C)$).

Como $\pi(p) \subset X \setminus C \in \tau$ y $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente, existe $W \in \tau$ con $\pi(p) \subset W$ tal que si $x \in W$, entonces $\pi(x) \subset X \setminus C$.

Como $p \in \pi(p) \subset W$, entonces $p \in W$. Además, $\pi(W) \cap \pi(C) = \emptyset$ (pues si existiera $y \in \pi(W) \cap \pi(C)$, entonces $\pi^{-1}(y)$ estaría en $W \cap C$, pero $W \cap C = \emptyset$). Por lo tanto $\pi(W) \subset \mathcal{D} \setminus \pi(C)$, entonces $p \in W \subset \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$. Es decir, todo punto de $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es punto interior, entonces $\pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(C)]$ es abierto, y por definición, ésto implica que $\pi(C)$ es cerrado.

Ahora supongamos que π es una función que manda cerrados en cerrados. Sea $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$. Sea

$$V = \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)].$$

Veamos primero que $D \subset V$. Sea $x \in D$, entonces $\pi(x) = D$, por lo tanto $\pi(x) \subset U$, es decir, $\pi(x) \cap (X \setminus U) = \emptyset$, por lo tanto, $\pi(x)$ no está contenido en $\pi(X \setminus U)$, es decir, $\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$. Por lo tanto $x \in \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)] = V$.

Probemos que $V \subset U$. Sea $y \in V$. Entonces existe $D' \in \mathcal{D}$ tal que $y \in D'$. Por lo tanto $D' \cap V \neq \emptyset$. Como $D \subset U$, $D \subset V$ y $\mathcal{D}$ es emicontinua superiormente, entonces tenemos que $D' \subset U$, por lo tanto $y \in U$.

Notemos también que

$$\pi^{-1}[\pi(V)] = \pi^{-1}[\pi(\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)))] = \pi^{-1}[\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)] = V.$$

Entonces, por la Nota 5.3.4, tenemos que V es un conjunto $\mathcal{D}$-saturado.

Sólo nos falta probar la última implicación. Supongamos que para cada $D \in \mathcal{D}$ y $U \in \tau$ tal que $D \subset U$, existe $V \in \tau$, con la propiedad de que $D \subset V \subset U$, y V es un conjunto $\mathcal{D}$-saturado. Claramente, cualquier elemento de $\mathcal{D}$ que intersecte a V, se queda contenido en U, por lo tanto $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente.

■

Definición 5.3.7 *Se dice que un espacio topológico X, es T_1, si $\{x\}$ es un conjunto cerrado, para cada $x \in X$.*

Lema 5.3.8 *Si (X, τ) es un espacio topológico y $\mathcal{D}$ es una descomposición de X, entonces el espacio descomposición $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$, es un espacio T_1 si y sólo si $\mathcal{D}$ es una descomposición cuyos elementos son conjuntos cerrados en X.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{D}$ es una descomposición cuyos elementos son cerrados en X, entonces $X \setminus D$ es abierto en X y $X \setminus D = \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \{D\})$, por lo tanto $\{D\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{D}$ para cada $D \in \mathcal{D}$, por lo tanto $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio T_1.

Supongamos ahora que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio T_1, entonces $\{D\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{D}$ para todo $D \in \mathcal{D}$, como π es una función continua, $\pi^{-1}(D)$ es cerrado en X. Por lo tanto, el conjunto $\{\pi^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{D}\} = \mathcal{D}$ es una partición cerrada de X. ■

Lema 5.3.9 *Si $\mathcal{D}$ es una descomposición semicontinua superiormente de un espacio X, el cual es T_1, entonces $\mathcal{D}$ es una partición cerrada de X.*

Demostración. Por el Lema 5.3.8, bastará probar que si X es un espacio T_1, entonces una descomposición semicontinua superiormente $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ de X también es T_1. Por la Proposición 5.3.6, tenemos que π es una función cerrada, entonces $\pi(\{x\})$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$, para toda $x \in X$. Como para toda $D \in \mathcal{D}$, se cumple que $D = \pi(x)$ para algún $x \in X$, entonces $\{D\}$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{D}$, para toda $D \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio T_1. ■

Teorema 5.3.10 *Si $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es una descomposición semicontinua superiormente de un espacio métrico compacto X, entonces $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es metrizable.*

Demostración. Por el Teorema 5.2.7, bastará probar que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff.

Sean (X, τ) un espacio métrico compacto, $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ una descomposición semicontinua superiormente de X y $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural definida en el Ejemplo 5.2.2.

Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, tal que $D_1 \neq D_2$. Como $\mathcal{D}$ es una partición, tenemos que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Por el Lema 5.3.9, D_1 y D_2 son cerrados en X. Ya que X es un espacio normal, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 de X, tales que $D_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset U_2$. Como $\mathcal{D}$ es semicontinua superiormente, por el Teorema 5.3.6, existen $V_1, V_2 \in \tau$ tales que $D_1 \subset V_1 \subset U_1$ y $D_2 \subset V_2 \subset U_2$, y tanto V_1 como V_2 son $\mathcal{D}$-saturados.

Como $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ y $D_1 \subset V_1$ y $D_2 \subset V_2$, entonces $D_1 \subset \pi(V_1)$ y $D_2 \subset \pi(V_2)$. Por la Nota 5.3.4, tenemos que $\pi(V_1)$ y $\pi(V_2)$ son abiertos en $\mathcal{D}$.

Claramente, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces como $\pi^{-1}[\pi(V_1)] = V_1$ y $\pi^{-1}[\pi(V_2)] = V_2$, entonces $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$. Con ésto concluímos la prueba de que $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un espacio Hausdorff. ■

Teorema 5.3.11 *Cualquier descomposición semicontinua superiormente de un continuo, es un continuo.*

Demostración. Sea X un continuo y $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ una descomposición semicontinua superiormente de X. Por el Teorema 5.3.10, $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es metrizable. Como $\pi : X \to \mathcal{D}$ es una función continua y suprayectiva, y X es un espacio compacto y conexo, entonces $\mathcal{D}$ es un espacio compacto y conexo. Por lo tanto $(\mathcal{D}, \tau(\mathcal{D}))$ es un continuo. ■

Teorema 5.3.12 *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$$

es una descomposición semicontinua superiormente de X, y $\mathcal{D}_f$ es un espacio homeomorfo a Y.

Demostración. Sea $\pi : X \to \mathcal{D}_f$ la proyección natural y $A \subset X$. Entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) = f^{-1}(f(A))$. Si C es cerrado en X, $f(C)$ es cerrado en Y (por el Corolario 1.2.10), y por ser f continua, $f^{-1}(f(C))$ es cerrado en X. Así, $\pi^{-1}(\pi(C))$ es cerrado, lo que implica que π es una función cerrada. Por lo tanto, por la Proposición 5.3.6, $\mathcal{D}_f$ es una descomposición semicontinua superiormente.

Ahora demostraremos que $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo a Y.

Como $\mathcal{D}_f$ es una descomposición de X, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{D}_f \arrow[dl, "G = f\circ\pi^{-1}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Observemos que dado un punto $y_0 \in \mathcal{D}_f$, donde y_0 es de la forma $f^{-1}(y)$, para alguna $y \in Y$, entonces

$$\pi^{-1}(y_0) = \pi^{-1}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \text{ y } f(f^{-1}(y)) = y.$$

Así que los conjuntos de X que van a dar a un solo punto bajo π, van a dar a un solo punto bajo f, entonces por el Lema de Transgresión (5.2.5), G es una función continua.

Veamos que G tiene inversa, y que ésta es también, una función continua. Observemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[dl, "H"] \\ \mathcal{D}_f & \end{tikzcd}$$

Por el Lema 5.2.4, f es una identificación. Además, dado $y_0 \in Y$, $\pi(f^{-1}(y_0)) = f^{-1}(y_0)$, entonces por el Lema de Transgresión, H es continua.

Veamos que $H = G^{-1}$, donde
$G = f \circ \pi^{-1}$ y
$H = \pi \circ f^{-1}$.

Sea $d \in \mathcal{D}_f$.

$$H \circ G(d) = (\pi \circ f^{-1}) \circ (f \circ \pi^{-1})(d) = \pi(f^{-1}(f(\pi^{-1}(d)))) = \pi(\pi^{-1}(d)) = Id_{\mathcal{D}_f}(d).$$

Sea $y \in Y$.

$$G \circ H(y) = (f \circ \pi^{-1}) \circ (\pi \circ f^{-1})(y) = f(\pi^{-1}(\pi(f^{-1}(y)))) = f(f^{-1}(y)) = Id_Y(y).$$

Así pues, $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo a Y. ■

5.4. La imagen monótona de un continuo tipo arco.

Ahora vamos a ver que dada una descomposición semicontinua superiormente de un continuo tipo arco, ésta es nuevamente un continuo tipo arco, pidiéndole una condición muy simple. Este resultado fue dado por R. H. Bing [6], cuando se encontraba estudiando los continuos tipo arco, motivado por un problema formulado en 1920 por Knaster y Kuratowski, el cual consistía en saber si dado un continuo no degenerado homogéneo en $\mathbb{R}^2$, éste debía ser una curva cerrada simple. En 1921 Mazurkiewicz se pregunta si todo continuo en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que todos sus subcontinuos no degenerados son homeomorfos al total debe de ser un arco. Estas dos preguntas dieron lugar a varios trabajos realizados por Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, Henderson, Moise Waraszkiewicz y Choquet. A lo largo de estos trabajos, mientras se buscaba la respuesta a las preguntas formuladas en 1920 y 1921 sobre este tema, se construyeron varios continuos los cuales daban una respuesta negativa a estas preguntas. Finalmente en 1959 Bing publica el artículo Concerning hereditarily indecomposable continua, en el que prueba que solamente existe un continuo que cumple con la características de las dos preguntas, concluyendo así que los ejemplos que habían sido construidos como respuesta a las dos preguntas eran todos homeomorfos entre sí. En este mismo artículo Bing demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.4.1 *Sea X un continuo tipo arco y $\mathcal{D}$ una descomposición semicontinua superiormente no degenerada (es decir, que consta de más de un punto) de X, con la topología descomposición. Si cada miembro de $\mathcal{D}$ es un subcontinuo de X. Entonces $\mathcal{D}$ es un continuo tipo arco.*

Demostración. Por el Teorema 5.3.11, $\mathcal{D}$ es un continuo. Para probar que es tipo arco, por el Teorema 3.4.1, basta ver que $\mathcal{D}$ es encadenable. Sean d y ρ métricas para X y $\mathcal{D}$ respectivamente. Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a construir una ε-cadena Γ que cubra a $\mathcal{D}$.

Sea $\pi : X \to \mathcal{D}$ la función natural. Como π es continua y X es compacto, π es uniformemente continua, entonces existe $\delta > 0$ tal que

(1) Si $d(x, y) < \delta$, entonces $\rho(\pi(x), \pi(y)) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Como por el Teorema 3.4.1, X es encadenable, existe una δ-cadena $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ que cubre a X. Vamos a definir unos subíndices para ciertos eslabones de $\mathcal{U}$.

Sea $k(1) = 1$. Si $k(1) < n$, definimos

$$k(2) = \max\{j \geq k(1) \mid U_j \cap D \neq \emptyset \text{ y } U_{k(1)} \cap D \neq \emptyset \text{ para alguna } D \in \mathcal{D}\}.$$

Como X es conexo, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Tomemos $x \in U_1 \cap U_2$, tenemos que $x \in D$ para alguna $D \in \mathcal{D}$, entonces $k(2) \geq 2$. Por lo tanto $k(1) < k(2)$.

Si $k(2) < n$, definimos

$$k(3) = \max\{j \geq k(2) \mid U_j \cap D \neq \emptyset \text{ y } U_{k(2)} \cap D \neq \emptyset \text{ para alguna } D \in \mathcal{D}\}.$$

Notemos que como $U_{k(2)} \cap U_{k(2)+1} \neq \emptyset$, $k(2) < k(3)$.

Siguiendo este procedimiento un número finito de veces obtenemos la sucesión de números naturales

$$1 = k(1) < k(2), \cdots, k(m) = n$$

Figura 5.1: Construcción de los subíndices $k(i)$

Las siguientes observaciones se siguen de la definición de los $k(i)$.

(2) Si $1 \leq i \leq m-1$, entonces existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \cap U_{k(i)} \neq \emptyset$ y $D \cap U_{k(i+1)} \neq \emptyset$.

(3) Si $1 \leq i \leq m-2$, entonces no existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $D \cap U_{k(i)} \neq \emptyset$ y $D \cap U_{k(i+1)+1} \neq \emptyset$.

Sean $s, t \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq s \leq t \leq n$. Definimos el conjunto $\mathcal{U}(s;t)$ como

$$\mathcal{U}(s;t) = \left\{ D \in \mathcal{D} \mid D \subset \bigcup_{i=s}^{t} U_i \right\}$$

(4) Por el lema 5.3.5, cada $\mathcal{U}(s;t)$ es abierto en $\mathcal{D}$.

Para el caso $m \geq 5$, definimos $\ell \geq 0$ como el único entero tal que

$$m - 4 \leq 3\ell + 1 \leq m - 2.$$

Ahora sí, vamos a definir la cadena $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{\ell+1}\}$, para cubrir a $\mathcal{D}$. Cada eslabón, está definido como

$$\gamma_i = \begin{cases} \mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2)) & \text{si } 1 \leq i \leq \ell \\ \mathcal{U}(k(3\ell+1); n) & \text{si } i = \ell + 1 \end{cases}$$

Vamos a ver algunos ejemplos para facilitar la comprensión de la construcción de nuestra cadena.

Sea $m = 5$. Ésto implica que $1 \leq 3l + 1 \leq 3$, entonces $l = 0$, por lo tanto $\Gamma = \{\gamma_1\}$, donde

$$\gamma_1 = \mathcal{U}(k(1); n) = \left\{ D \in \mathcal{D} \mid D \subset \bigcup_{j=k(1)}^{n} U_j \right\}.$$

Sea $m = 6$. Ésto implica que $2 \leq 3\ell + 1 \leq 4$, entonces $\ell = 1$, por lo tanto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, donde

$$\gamma_1 = \mathcal{U}(k(1); k(5)) \text{ y}$$
$$\gamma_2 = \mathcal{U}(k(4); n) = \mathcal{U}(k(4); k(6)).$$

Observemos que los casos $m = 7$ y $m = 8$ implican también que $\ell = 1$, por lo que Γ tendrá el mismo número de eslabones, pero γ_2 constará de cuatro y cinco $U_{k(i)}$ respectivamente.

Sea $m = 9$. Ésto implica que $\ell = 2$, por lo tanto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, donde

$$\gamma_1 = \mathcal{U}(k(1); k(5))$$
$$\gamma_2 = \mathcal{U}(k(4); k(8)) \text{ y}$$
$$\gamma_3 = \mathcal{U}(k(7); n) = \mathcal{U}(k(7); k(9)).$$

Es decir, los eslabones de Γ están formados tomando a los subíndices $k(i)$, de cinco en cinco, teniendo en $\gamma_j \cap \gamma_{j+1}$ los dos últimos $k(i)$ de γ_j hasta el ℓ-ésimo eslabón , y el $\ell + 1$-ésimo eslabón toma los últimos tres, cuatro o cinco subíndices $k(i)$. El número exacto de subíndices $k(i)$, de los que consta el último eslabón, está dado por la fórmula $m - 3\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + 3$.

Ahora vamos a demostrar que Γ cumple con las propiedades de cadena.

(5) $\gamma_i \neq \emptyset$ para toda $i = 1, \cdots, \ell + 1$.

Caso 1. Si $1 \leq i \leq \ell$, entonces

$$\gamma_i = \mathcal{U}(k(3i - 2); k(3i + 2)) = \left\{ D \in \mathcal{D} \mid D \subset \bigcup_{j=k(3i-2)}^{k(3i+2)} U_j \right\}.$$

Como $1 \leq i \leq \ell < m$ y $3\ell + 3 \leq m$, entonces $1 \leq 3i \leq m - 1$.

Por la observación (2), existe $D_i \in \mathcal{D}$ tal que $D_i \cap U_{k(3i)} \neq \emptyset$ y $D_i \cap U_{k(3i+1)} \neq \emptyset$.

Por la observación (3), tenemos que $D_i \cap U_{k(3i+1)+1} = \emptyset$ y $D_i \cap U_{k(3i-1)} = \emptyset$, además por el lema 4.3.1 $D_i \cap U_j \neq \emptyset$ siempre que $k(3i) \leq j \leq k(3i+1)$ y $D_i \cap U_j \neq \emptyset$ siempre que $j \leq k(3i-2)$ ó $j \geq k(3i+2)$, lo cuál implica que $D \subset \displaystyle\bigcup_{j=k(3i-2)}^{k(3i+2)} U_j$ y por lo tanto $D_i \in \gamma_i$.

Caso 2. Sea $i = \ell + 1$. Como $\ell \geq 0$, entonces $2 \leq 3i$ y por como construimos Γ, tenemos que $3i \leq m$, es decir, $2 \leq 3i \leq m$, y ésto implica que

$$1 \leq 3i - 1 \leq m - 1.$$

Por la observación (2), existe $D_i \in \mathcal{D}$ tal que $D_i \cap U_{k(3i-1)} \neq \emptyset$ y $D_i \cap U_{k(3i)} \neq \emptyset$, sustituyendo i, tenemos que

$$D_i \cap U_{k(3\ell+2)} \neq \emptyset \text{ y } D_i \cap U_{k(3\ell+3)} \neq \emptyset.$$

Por la observación (3), tenemos que $D_i \cap U_{k(3\ell+1)} = \emptyset$ y por el lema 4.3.1 $D_i \cap U_j \neq \emptyset$ siempre que $k(3\ell+2) \leq j \leq k(3\ell+3)$ y $D_i \cap U_j \neq \emptyset$ para toda $j \leq k(3\ell+1)$, por lo tanto $D_i \subset \displaystyle\bigcup_{j=k(3\ell+1)}^{n} U_j$, por lo tanto $D_i \in \gamma_{\ell+1}$.

(6) $\bigcup \Gamma = \mathcal{D}$.

Como γ_i está formado por elementos de $\mathcal{D}$, claramente $\bigcup \Gamma \subset \mathcal{D}$. Veamos que se cumple la otra contención.

Sea $D \in \mathcal{D}$. Supongamos que $D \notin \gamma_i$ para ninguna $i \in \{1, \cdots, \ell + 1\}$.

Como $\mathcal{U}$ cubre a X, entonces $D \cap \gamma_i \neq \emptyset$ para alguna $i = 1, \cdots, \ell + 1$. Dado que $D \notin \gamma_i$, entonces $D \cap \Gamma \setminus \gamma_i \neq \emptyset$, por la observación (2) y el Lema 4.3.1, ésto quiere decir que sólo tenemos dos casos posibles.

Caso 1. $D \cap \gamma_{i+1} \setminus \gamma_i \neq \emptyset$, pero como $D \notin \gamma_{i+1}$, entonces $D \cap \gamma_i \setminus \gamma_{i+1} \neq \emptyset$, una vez más por la observación (2) y el Lema 4.3.1, notemos que $D \cap (\gamma_i \cap \gamma_{i+1}) \neq \emptyset$, es decir,

$$D \cap U_{k(3i+1)-1} \neq \emptyset, D \cap \mathcal{U}(k(3i+1); k(3i+2)) \neq \emptyset, \text{ y } D \cap U_{k(3i+2)+1} \neq \emptyset.$$

Y ésto no es posible, pues contradice la observación (3). Por lo tanto $D \in \gamma_i$ para alguna $i = 1, \cdots, \ell + 1$

Caso 2. $D \cap \gamma_{i-1} \setminus \gamma_i \neq \emptyset$. En este caso se utiliza el mismo argumento, sustituyendo a i, por $i-1$ y a $i+1$, por i.

(7) $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, si $|i-j| \geq 2$.

Caso 1. Sean $\gamma_i = \mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2))$ y $\gamma_j = \mathcal{U}(k(3j-2); k(3j+2))$. Como $|i-j| \geq 2$, entonces $i \geq j+2$ ó $j \geq i+2$.

a) Sea $i \geq j+2$. Tenemos que

$3j + 2 < 3j + 4$, pues $j \in \mathbb{N}$, entonces

$3j + 2 < 3(j+2) - 2$, y como $i \geq j+2$, tenemos que

$3j + 2 < 3i - 2$. Por lo tanto

$k(3j+2) < k(3i-2)$.

Por como construimos los eslabones γ_i, esta desigualdad implica que

$$U_{k(3j+2)} \cap U_{k(3i-2)} = \emptyset.$$

Y utilizando el Lema 4.3.1, concluimos que $\mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2))$ no puede intersectar a $\mathcal{U}(k(3j-2); k(3j+2))$, por lo tanto $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$

b) Sea $j \geq i+2$. La prueba es análoga intercambiando j por i.

Caso 2. Sean $\gamma_i = \mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2))$ y $\gamma_j = \mathcal{U}(k(3\ell+1); n) = \gamma_{\ell+1}$. Como $\gamma_{\ell+1}$ es el último eslabón de Γ, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $j > i$. Entonces basta probar el caso cuando $j - i \geq 2$.

Sea $i \leq j-2$. Tenemos que

$3j - 4 < 3j - 2$, pues $j \in \mathbb{N}$, entonces

$3(j-2) + 2 < 3j - 2$, y como $i \leq j-2$, tenemos que

$3i+2 < 3j-2$. Por lo tanto

$k(3i+2) < k(3j-2)$.

Esta desigualdad implica que

$$U_{k(3i+2)} \cap U_{k(3j-2)} = \emptyset.$$

Y utilizando el Lema 4.3.1, concluimos que $\mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2))$ no puede intersectar a $\mathcal{U}(k(3\ell+1); n)$, por lo tanto $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$.

(8) γ_i es abierto en $\mathcal{D}$ para toda $i = 1, \cdots, \ell+1$.

Este hecho se sigue inmediatamente de la observación (4).

(9) $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} \neq \emptyset$ para toda $i = 1, \cdots, \ell$.

Supongamos que $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} = \emptyset$ para algún $i = 1, \cdots, \ell$, entonces por las observaciones (5), (6), (7) y (8), tendríamos que existe una separación para $\mathcal{D}$, pero $\mathcal{D}$ es conexo, por lo tanto, $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} \neq \emptyset$.

Hemos probado ya, que Γ es una cadena que cubre a $\mathcal{D}$, entonces solamente nos falta probar que la $malla(\Gamma) < \varepsilon$.

Sea $1 \leq i \leq \ell$ y sean $A_1, A_2 \in \gamma_i = \mathcal{U}(k(3i-2); k(3i+2))$. Entonces $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ y $A_1, A_2 \subset \displaystyle\bigcup_{j=k(3i-2)}^{k(3i+2)} U_j$.

Por la observación (2), existen D_1, D_2, D_3 y $D_4 \in \mathcal{D}$ tales que

$D_1 \cap U_{k(3i-2)} \neq \emptyset$ y $D_1 \cap U_{k(3i-1)} \neq \emptyset$,

$D_2 \cap U_{k(3i-1)} \neq \emptyset$ y $D_2 \cap U_{k(3i)} \neq \emptyset$,

$D_3 \cap U_{k(3i)} \neq \emptyset$ y $D_1 \cap U_{k(3i+1)} \neq \emptyset$, y finalmente,

$D_4 \cap U_{k(3i+1)} \neq \emptyset$ y $D_4 \cap U_{k(3i+2)} \neq \emptyset$.

Figura 5.2: $malla(\Gamma) < \varepsilon$

Observación a)

$$\bigcup_{l=1}^{4} D_l \cap U_j \neq \emptyset \text{ para toda } j = k(3i-2), k(3i-2)+1, \cdots, k(3i+2)-1, k(3i+2).$$

Observación b)

$U_{k(3i-1)} \cap D_1 \neq \emptyset$ y $U_{k(3i-1)} \cap D_2 \neq \emptyset$, también

$U_{k(3i+1)} \cap D_3 \neq \emptyset$ y $U_{k(3i+1)} \cap D_4 \neq \emptyset$.

Por la observación a), existen

$u \in D_1$ y $v \in D_2$ tales que $u, v \in U_{k(3i-1)}$,

$w \in D_2$ y $x \in D_3$ tales que $w, x \in U_{k(3i)}$, y

$y \in D_3$ y $z \in D_4$ tales que $y, z \in U_{k(3i+1)}$.

Como $\mathcal{U}$ es una δ-cadena, por la observación (1) de nuestro Teorema, tenemos que

$$\rho(D_1, D_2) < \frac{\varepsilon}{5}, \rho(D_2, D_3) < \frac{\varepsilon}{5} \text{ y } \rho(D_3, D_4) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Por la observación a), existe $U_j \in \mathcal{U}$ tal que $A_1 \cap U_j \neq \emptyset$ y $D_l \cap U_j \neq \emptyset$ para alguna $l = 1, 2, 3, 4$. Entonces, existen $a_1 \in A_1$ y $d_l \in D_l$ tales que $d(a_1, d_l) < \delta$, una vez más por la observación (1), $\rho(A_1, D_l) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Usando un argumento similar, tenemos que $\rho(A_2, D_k) < \frac{\varepsilon}{5}$, para algún $k = 1, 2, 3, 4$.

En el peor de los casos (es decir, lo más lejos que se puede encontrar A_1 de A_2), $l = 1$ y $k = 4$, entonces,

$$\rho(A_1, D_1) < \frac{\varepsilon}{5} \text{ y } \rho(D_4, A_2) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo,

$$\rho(A_1, A_2) \leq \rho(A_1, D_l) + \rho(D_1, D_2) + \rho(D_2, D_3) + \rho(D_3, D_4) + \rho(D_4, A_2) <$$

$\frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$

Para el caso $m \leq 4$, Γ consta de un sólo eslabón, es decir, $\Gamma = \{\gamma_1\}$, donde

$$\gamma_1 = \mathcal{U}(k(1); n) = \left\{ D \in \mathcal{D} \mid D \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \right\}.$$

Como $\bigcup \mathcal{D} = X = \bigcup_{j=1}^{n} U_j$, entonces $\mathcal{D} = \gamma_1 = \bigcup \Gamma$. Esto implica que $\gamma_1 \neq \emptyset$ y que Γ cubre a $\mathcal{D}$. Además dados $A_1, A_2 \in \gamma_1$, el mismo argumento que se utilizó para el caso $m \geq 5$ prueba que

$$\rho(A_1, A_2) < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5} < \varepsilon$$

. ■

Ahora estamos listos para dar respuesta a la pregunta que motiva este capítulo.

Teorema 5.4.2 *Si X es un continuo tipo arco, Y es un continuo no degenerado, y $f : X \to Y$ es una función monótona. Entonces Y es un continuo tipo arco.*

Demostración. Por la primera parte del Teorema 5.3.12, el conjunto

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$$

es una descomposición semicontinua superiormente de X, como f es continua, por el Teorema 1.2.6, cada $f^{-1}(y)$ es compacto, y por ser f una función monótona, $f^{-1}(y)$ es conexo. Por lo tanto $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo de X

para cada $y \in Y$. Por el Teorema 5.4.1, $\mathcal{D}_f$ es un continuo tipo arco, y por la segunda parte del Teorema 5.3.12, $\mathcal{D}_f$ es homeomorfo a Y. Por lo tanto Y es un continuo tipo arco. ■

Bibliografía

[1] R.H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pacific, J. Math., **1** (1951), 43-51.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[3] B. Knaster, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math., **3** (1922), 247-284.

[4] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York and Singapore, 2005.

[5] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Monographs and text book in pure and applied mathematics, vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[6] R.M. Schori, *A universal snake-like continuum*, Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965), 1313-1316.

[7] R.H. Sorgenfrey, *Concerning continua irreducible about n points*, Amer. J. of Math., **66** (1944), 439-460.

[8] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Publishing Company, Inc., Massachusetts, Menlo Park, California, London, Don Mills and Ontario, 1968.