

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

**“La Dinámica Asociada a Atractores Superestables en
Mapeos no Lineales ”**

T E S I S

Que para obtener el grado de:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

DAN SILVA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALBERTO ROBLEDO NIETO

MÉXICO, D.F.

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los que con su apoyo contribuyeron en este trabajo de tesis.

Al **Dr. Alberto Robledo Nieto** por brindarme su conocimiento, paciencia y dirección.

Al **Dr. Hugo Hernández Saldaña** por su disposición constante para ayudarme y su gran apoyo computacional.

Al resto de los miembros del jurado: **Dr. Pedro Miramontes Vidal, Dra. María de Lourdes Esteva Peralta y Dr. Denis Pierre Boyer** por revisar este trabajo de tesis.

A mis **padres**, a **paty**, a mis **hermanos** y **amigos** por su apoyo y respeto.

A los “**Miaus** ” y demás **amigos** de la facultad.

A Mariana con todas mis fuerzas.

Hoja de Datos del Jurado

1.Datos del alumno

Silva
López
Dan
57919457
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
098600762

2.Datos del tutor

Dr
Alberto
Robledo
Nieto

3.Datos del sinodal 1

Dr
Pedro
Miramontes
Vidal

4.Datos del sinodal 2

Dr
Hugo
Hernández
Saldaña

5.Datos del sinodal 3

María de Lourdes
Esteva
Peralta

6.Datos del sinodal 4

Denis Pierre
Boyer

7.Datos del trabajo escrito

La Dinámica Asociada a Atractores Superestables en Mapeos no Lineales
77 p
2007

Índice general

1.El mapeo logístico

- 1.1. Dependencia de las iteradas respecto del parámetro μ
- 1.2. Bifurcación de trinche “Pitchfork bifurcation ”
- 1.3. Superciclos
- 1.4. Trayectorias y atractores

2.Sensibilidad a condiciones iniciales ξ_t y Exponencial- q ($\exp_q(x)$)

- 2.1. Sensibilidad ξ_t
- 2.2. Exponente de Liapunov (Caso unidimensional)
- 2.3. Función exponencial- q ($\exp_q(x)$)
- 2.4. Algunas propiedades de la función $\exp_q(t)$

3.Planteamiento

- 3.1. Mapeos con máximo de orden z
- 3.2. Estabilidad
- 3.3. Condiciones iniciales x_i cercanas a un punto atractor o a un punto repulsor
- 3.4. Planteamiento del problema

4.Resultados

- 4.1. Obtención de los puntos superestables $\mu = \mu_k$ en $z = 2$, $z = 1,75$ y $z = 3$
- 4.2. Cálculo de la sensibilidad ξ_t en los puntos superestables $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_3$ (estructura)
- 4.3. Cálculo y obtención de los puntos $x_i \in [-1,1]$ cercanos a puntos repulsores
- 4.4. Experimentos

5.Análisis de resultados

6.Conclusiones

Prefacio

Los mapeos unidimensionales del tipo logístico $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^z$, donde μ es un parámetro de control y z un número real positivo han sido estudiados bajo muchos puntos de vista [1,10,13,14]. El interés de este trabajo de tesis es estudiar dichos sistemas al ir transcurriendo el tiempo, es decir, se estudiará su dinámica bajo condiciones muy particulares. Estos sistemas presentan conducta caótica y conducta periódica, pero nosotros analizaremos la dinámica cuando el comportamiento de los mapeos es periódico.

El presente trabajo se enfocará en estudiar aquellas propiedades dinámicas del mapeo que están relacionadas con la evolución temporal de condiciones iniciales x_i especiales. Dichas propiedades entre las que se encuentra la sensibilidad a condiciones iniciales ξ_t (ver Capítulo 2), están relacionadas con la conducta del sistema a tiempos largos, por lo que su análisis resulta importante para intentar predecir el comportamiento del mismo.

Especialmente estudiaremos la dinámica para $z = 2$ en sus puntos superestables $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_3$ (ver Sección 4.1), con el fin de relacionar tal dinámica con la termoestadística de C. Tsallis [7] mediante la verificación de la validez de la función $\exp_q(t) = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}}$ (ver Sección 2.3) en el régimen periódico del sistema.

Esta tesis se divide en seis capítulos, a continuación se describe cada uno en forma general:

El capítulo 1 muestra un análisis del mapeo logístico $f_\mu(x_n) = 1 - \mu x^2$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 2$ y algunas de sus propiedades, se explica como en este mapeo se presenta una ruta al caos llamada: bifurcación de trinche. Se definen también conceptos básicos como: trayectorias, atractores y superciclos, los cuales servirán para entender y establecer la dinámica del mapeo logístico y de otros mapeos del mismo tipo.

El capítulo 2 trata sobre la función $\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}$ (conocida como exponencial- q) y el concepto de sensibilidad a condiciones iniciales ξ_t , se estudian propiedades tanto de $\exp_q(x)$ como de la sensibilidad ξ_t para verificar si estos dos conceptos están relacionados. Una manera de hacerlo es introduciendo y estudiando la cantidad conocida como exponente de Lya-

parámetro λ del sistema, la cual sirve también para establecer en que regiones del mapeo logístico se presenta conducta caótica o conducta periódica.

El capítulo 3 es la preparación para establecer los objetivos de la tesis y plantear el problema a resolver, para ello se generaliza el estudio del mapeo logístico al caso general de cualquier mapeo unimodal de no linealidad z . Se estudian algunas características de los puntos o condiciones iniciales empleadas, tales como la estabilidad, su cercanía a puntos atractores o su cercanía a puntos repulsores. Lo anterior con el fin de fijar las condiciones adecuadas para entender y establecer el planteamiento de la tesis.

El capítulo 4 presenta los resultados, primero aquellos que servirán de base para solucionar el problema planteado. Dentro de estos están: la obtención de puntos superestables, la obtención de puntos o condiciones iniciales cercanas a puntos repulsores y por último el cálculo de la sensibilidad experimental ξ_t bajo condiciones particulares.

Posteriormente se muestran los resultados de tres experimentos numéricos diferentes. Cada uno de ellos tuvo por objeto verificar si para los sistemas tipo logístico, existía alguna función $\exp_q(x)$ que pudiera modelar la dinámica (en este caso representada por la sensibilidad experimental ξ_t) de dichos sistemas y establecer bajo que condiciones esto ocurría. Cada uno de los tres experimentos tenía el mismo objetivo, pero realizados con métodos diferentes. Finalmente se presentan resultados gráficos que sirven para justificar el camino tomado para resolver y entender la dinámica de los mapeos tipo logístico.

El capítulo 5 trata sobre las diferencias de los experimentos realizados, se discuten, analizan y comparan los resultados obtenidos de los experimentos I, II y III, encontrándose que los resultados del experimento II fueron los más confiables.

El capítulo 6 muestra las conclusiones, por un lado se resuelve el problema de encontrar una función $\exp_q(x)$ que gobierna parte de la dinámica de los mapeos tipo logístico, y por otra parte, se muestran las condiciones encontradas para que lo anterior ocurra y bajo cuales suposiciones o aproximaciones el resultado final de la tesis tiene validez.

Capítulo 1

El mapeo logístico

En este capítulo estudiaremos el mapeo logístico:

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n) = 1 - \mu x^2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \mu \leq 2 \quad (1.1)$$

el cual se muestra en la Figura 1.1.

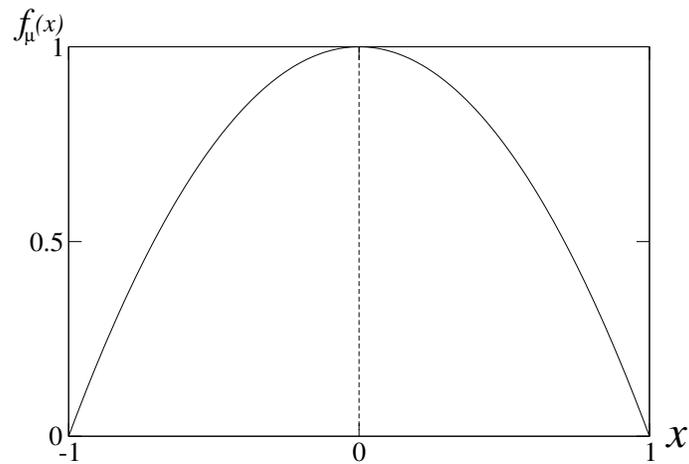


Figura 1.1: Mapeo logístico $f_\mu(x)$

El mapeo logístico es una ecuación no lineal unidimensional que depende de un parámetro de control μ . La versión continua de dicho mapeo fue usada por primera vez en 1845 por P.F Verhulst para modelar el crecimiento

de una población en una área cerrada. En 1976 R. May encontró que el número de individuos x_{n+1} en el año $n + 1$ era proporcional a la población en el año anterior, mostrando que el fenómeno podía describirse mediante la relación $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ con $0 \leq x \leq 1$ [10]. En 1978 Feigenbaum encontró que la función y sus sucesivas composiciones: $x_1, x_2, \dots = f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ si $f = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ dependen funcionalmente del parámetro de control r , así la dinámica ya de por sí complicada, llega a ser caótica al ir aumentando el valor de r desde cero, hasta un valor positivo b no arbitrario. En nuestro caso (ecuación 1.1), el parámetro de control $\mu \in (0, 2)$. Sin embargo, la conducta caótica no está limitada a la forma del mapeo logístico. Feigenbaum mostró que la ruta al caos fundada en el mapeo logístico, la “Feigenbaum route” ocurre en todas las ecuaciones en diferencias y de primer orden de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, en las cuales $f(x_n)$ tiene un máximo simple en el intervalo $0 \leq x_n \leq 1$. Esta ruta ha sido observada experimentalmente en muchos sistemas no lineales. Los resultados numéricos de las iteradas en el mapeo logístico muestran que el número de puntos fijos de $f_\mu(x)$ se duplican y son distintos al incrementarse los valores del parámetro μ . Hemos de suponer que el parámetro μ podemos identificarlo también con la letra r , entonces en cierto valor $r = r_\infty$, el número de puntos fijos se hace muy grande, y más allá de r_∞ , la conducta de las iteradas se vuelve caótica y luego periódica, continuando este comportamiento en forma sucesiva al aumentar r .

La bifurcación de trinche o “pitchfork” provee el mecanismo para el duplicamiento sucesivo de puntos fijos, esta misma, muestra que tal duplicamiento puede ser entendido examinando la imagen de cada una de las composiciones ($f[f(x)], f[f[f(x)]], \dots$) del mapeo original $f(x)$. Esto relaciona la generación de nuevos puntos fijos con una ley de composición funcional llamada la ecuación de punto fijo de Feigenbaum.

Por otro lado, analizando en el mapeo el comportamiento de las iteradas en relación con el parámetro μ , estas forman un conjunto autosimilar (higuera de Feigenbaum) de puntos en el plano cuya dimensión no es entera. En el presente trabajo nosotros sólo consideramos la conducta de las iteradas antes de la transición al caos $\mu < \mu_\infty$, situándonos únicamente en el régimen periódico de la dinámica [1].

Podemos definir la n -ésima composición de una función evaluada en un punto x_0 como sigue:

$$\begin{aligned} f^1(x_0) &= f(x_0) \\ f^2(x_0) &= f[f(x_0)] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f^n(x_0) &= f[f[f\dots[f(x_0)]\dots]]. \end{aligned}$$

Si $f(x)$ depende también del parámetro μ : $f_\mu^n(x_0) = f_\mu[f_\mu[f_\mu\dots[f_\mu(x_0)]\dots]]$, es decir, $f_\mu^n(x_0)$ es simplemente la n -ésima composición de $f(x)$ en algún punto x_0 .

En adelante tomaremos a $f'(x)$ como la primera derivada de $f(x)$ respecto a x , $df(x)/dx = f'(x)$.

Por otro lado, un punto fijo x^* de $f(x)$ satisface:

$$f(x^*) = x^* \tag{1.2}$$

Al conjunto $\{f_\mu^1(x_0), f_\mu^2(x_0), \dots, f_\mu^n(x_0)\}$ se le llama la órbita (trayectoria) del punto x_0 , si para algún índice k , el conjunto $\{f_\mu^k(x_0), f_\mu^{k+1}(x_0), \dots, f_\mu^n(x_0)\}$ permanece solamente entre $1, 2, \dots, m$ valores diferentes, tal conjunto se llama ciclo de x_0 de período (u orden) m , y si dicho conjunto contiene al elemento 0, el ciclo es llamado un ciclo superestable de período (u orden) m .

1.1. Dependencia de las iteradas respecto del parámetro μ

Si iteramos n veces el mapeo (ecuación 1.1) para diferentes valores del parámetro μ , obtenemos un árbol de bifurcaciones, el cual muestra la acumulación de puntos de las iteradas $f_\mu^n(x_0)$ como una función de μ , vease la Figura 1.2: a, por otro lado calculando el exponente de Liapunov,

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| \tag{1.3}$$

se distingue entre un régimen de bifurcaciones para $0 < r < r_\infty$, donde el exponente de Liapunov es siempre negativo (excepto en los puntos de bifurcación r_n donde este se hace cero) y regiones caóticas y periódicas si

$r_\infty < r \leq 2$, en las cuales λ es nuevamente negativo, positivo o cero. El “régimen caótico” es interrumpido por r -ventanas con $\lambda < 0$ donde la secuencia $\{f_\mu^n(x_0)\}$ es nuevamente periódica. Un caso de especial interés es cuando el exponente de Liapunov se vuelve $-\infty$, uno de los casos donde esto ocurre es cuando el valor del parámetro μ es igual a 1 (Figura 1.2:b). Los resultados numéricos muestran entonces regímenes periódicos y regímenes caóticos [1].

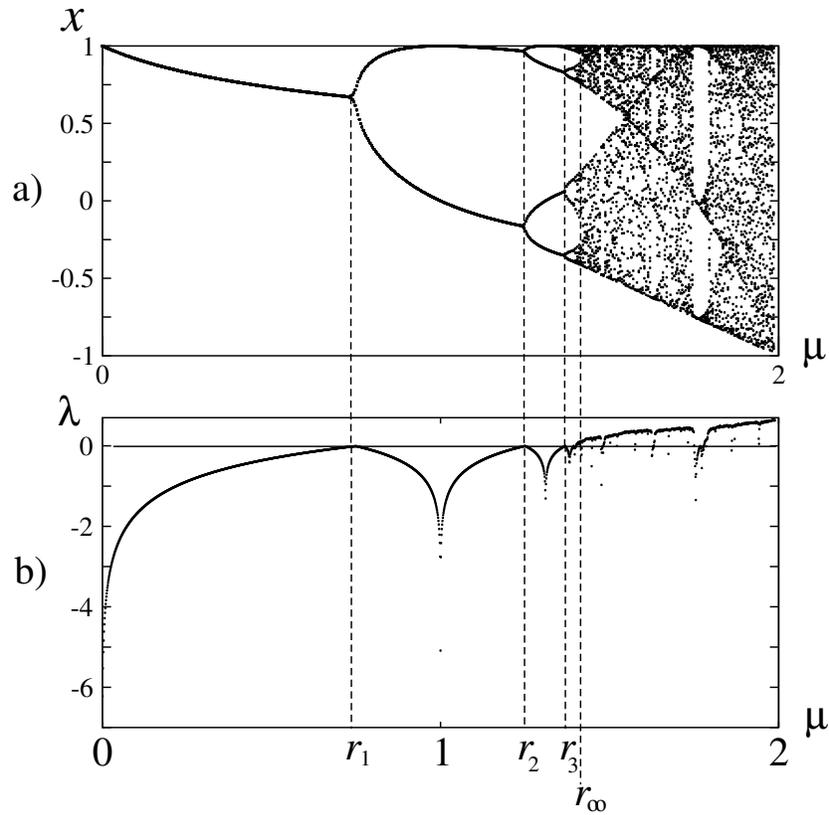


Figura 1.2: a) Iteradas del mapeo logístico b) Exponente de Liapunov λ

Por otro lado (ver Figura 1.3), las distancias d_n desde un punto en un ciclo de orden 2^n al punto $x = 0$ tienden a relaciones constantes:

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \quad n \gg 1 \quad (1.4)$$

Donde α es una de las llamadas constantes de Feigenbaum junto con δ , estas constantes representan dos factores de escala universales. Debido a que el árbol de bifurcaciones de Feigenbaum es un conjunto autosimilar, este puede describirse a través de factores de escalamiento [11,12]; en la dirección de μ por el factor δ y en la dirección de x por un conjunto de factores de escala de entre los cuales se encuentra α , (en términos del factor α , $\delta \approx \alpha^2 - \alpha$) [1, 11], los cuales tienen valores aproximados:

$\delta \approx 4.6692016091\dots$, y $\alpha \approx 2.5029078750\dots$, considerando el mapeo cuando $z = 2$.

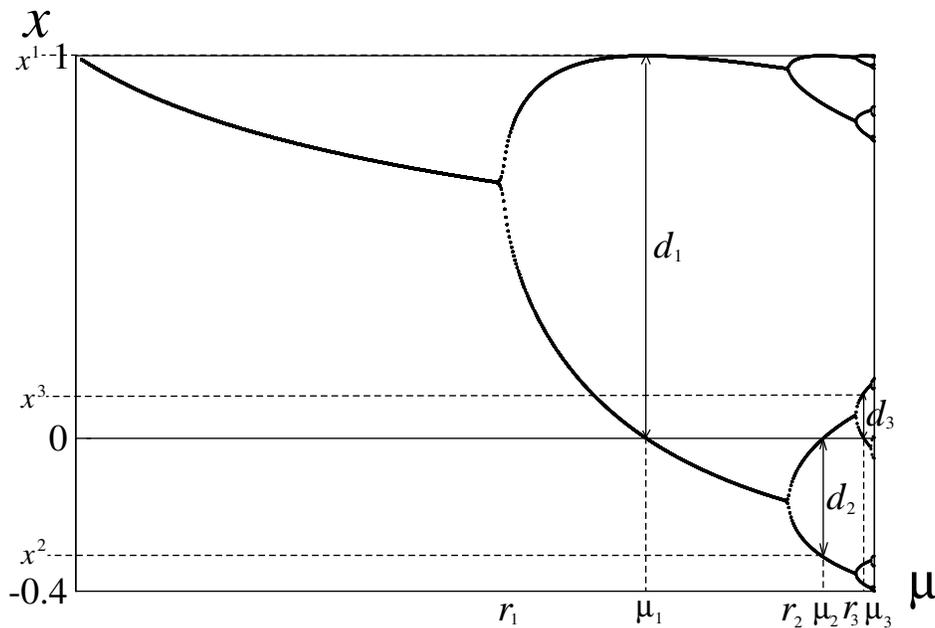


Figura 1.3: Distancias d_n desde algún punto fijo x^i a $x = 0$ en los ciclos 2^n superestables

1.2. Bifurcación de trinche “Pitchfork bifurcation”

Ahora investigaremos la estabilidad de los puntos fijos de $f_\mu(x)$ y $f_\mu^2(x) = f_\mu[f_\mu(x)]$ como funciones de μ . Un criterio bien conocido para determinar si un punto es estable o no es analizar la primera derivada en el punto mismo, de esta manera, sea x^* un punto en el dominio de $f_\mu(x)$, si además x^* es un punto fijo de $f_\mu(x)$ entonces:

$$|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^* \text{ es un punto fijo estable (atractor)} \quad (1.5)$$

$$|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^* \text{ es un punto fijo inestable (repulsor)} \quad (1.6)$$

Sean r_n los valores en el eje μ tales que ahí se presentan las bifurcaciones de trinche (Ver Figura 1.2), y sea r_* un valor cualquiera en el eje μ donde r_* no es necesariamente un valor r_n . La Figura 1.4 muestra que existe un valor r_* tal que si $\mu < r_*$, donde $0 < r_* < r_1 < 2$ entonces $f_\mu(x)$ tiene sólo un punto fijo estable en $0 < x^* < 1$ (ver Figura 1.3), el cual llega a ser inestable si $r_* < \mu < r_1$ y adquiere la forma $x^* = (1/2\mu)(\sqrt{1+4\mu} - 1)$.

Para $\mu > r_1$ se tiene que $|f'_\mu(x^*)| = |\sqrt{1+4\mu} - 1| > 1$, por lo tanto x^* llega a ser un punto inestable según el criterio anterior.

De la Figura 1.5, se observan cuatro propiedades de $f^2(x)$:

a) $f^2(x)$ tiene tres extremos, como $f^{2'} := f'[f(x)]f'(x) = 0$ en $x = 0$ porque $f'(0) = 0$, $x = 0$ es un extremo, los otros dos son $x' = f^{-1}(0)yx'' = f^{-1}(0)$ porque $f'[f[f^{-1}(0)]] = f'(0) = 0$.

b) Un punto fijo x^* de $f(x)$ es también un punto fijo de f^2 y de todas sus iteradas de mayor orden.

c) Si un punto fijo x^* llega a ser inestable con respecto a $f(x)$, este llega a ser inestable con respecto a f^2 y también lo es de sus iteradas de mayor orden, porque $|f'(x^*)| > 1$ implica $|f^{2'}(x^*)| = |f'[f(x^*)]f'(x^*)| = |f'(x^*)|^2 > 1$.

d) Para $r_1 < \mu \leq 1$, el punto fijo antiguo x^* se vuelve inestable en f^2 , y dos nuevos puntos estables x_0, x'' son creados vía la bifurcación de trinche

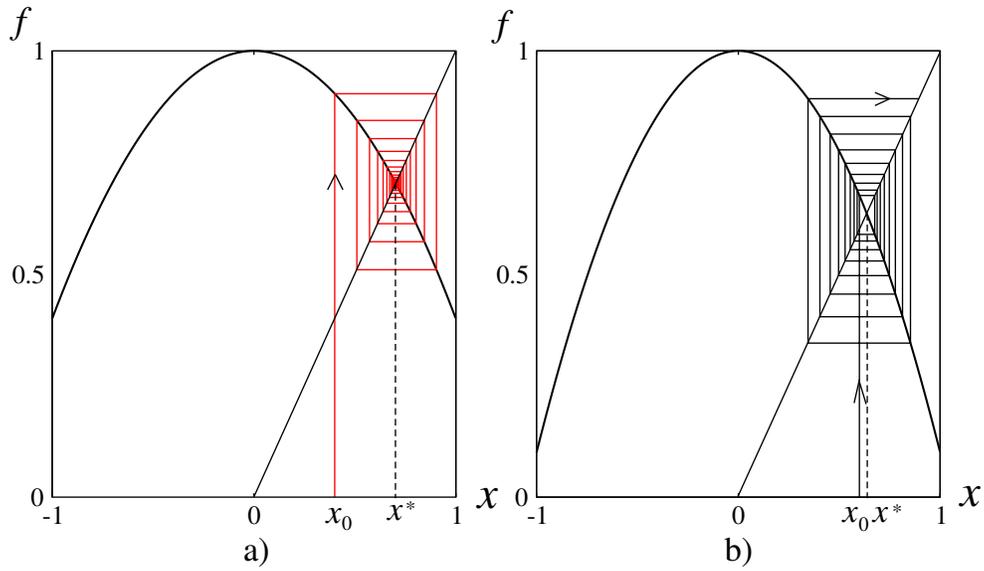


Figura 1.4: Puntos fijos de $f_\mu(x)$ para a) $\mu < r_*$ y b) $r_* < \mu < r_1$

[1].

El par x_0, x'' de puntos fijos estables de f^2 es llamado un atractor de $f(x)$ de periodo dos, esto es debido a que cada secuencia de iteradas (trayectoria) cuyo inicio esta entre $[0, 1]$ llega a ser atraida por los puntos x_0, x'' como se muestra en la Figura 1.6.

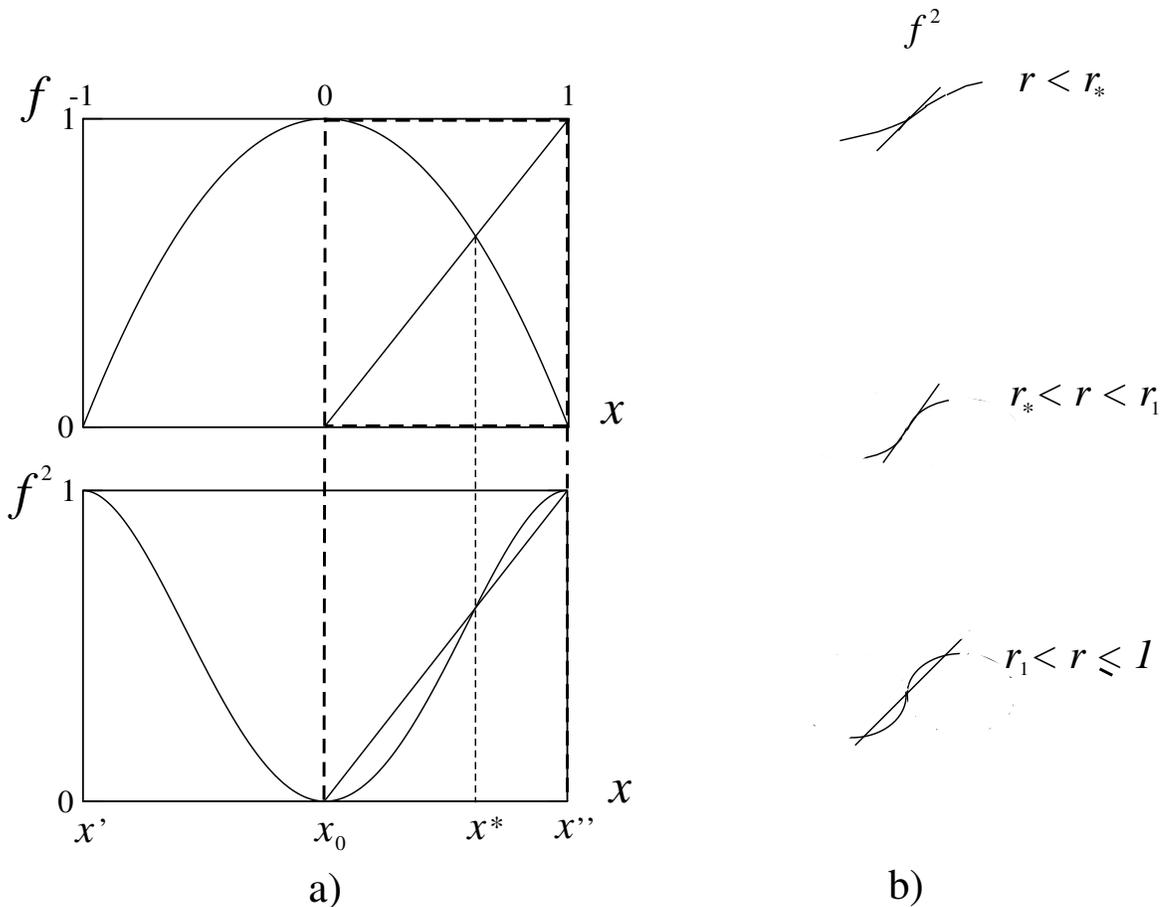


Figura 1.5: a) $f(x)$ y $f^2(x) = f[f(x)]$ para $\mu > r_1$. b) Generación de dos nuevos puntos fijos estables vía la bifurcación de trinche.

Es fácil ver que los puntos fijos de $f(x)$ y $f'(x)$ son puntos fijos de f^2 y de cada una de las funciones compuestas f^n , es decir;
 $f(x_0) = x''$ y $f(x'') = x_0$ porque $f^2(x_0) = x_0$ implica que $ff[f(x_0)] = f[f^2(x_0)] = f(x_0)$, del mismo modo sucede si en las expresiones anteriores usamos f' en lugar de f , pues $f'(x_0) = f'(x'')$.
 Si ahora incrementamos el valor de μ más allá de 1, los puntos fijos x_0 y x'' de f^2 se vuelven inestables para un valor particular de μ .
 Esto se debe a que la primera derivada de $f^2(x)$ en x_0 y en x'' tiene el mismo valor

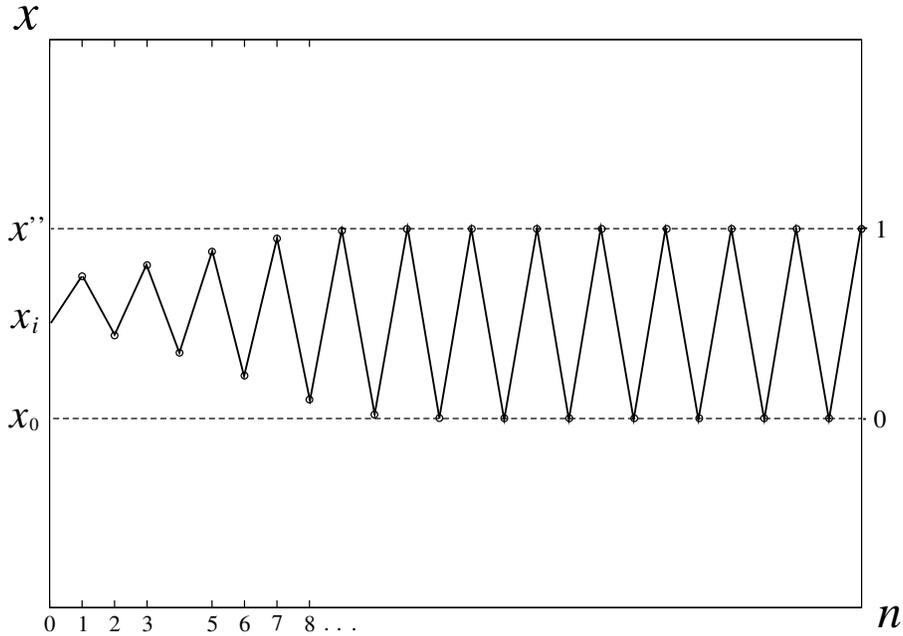


Figura 1.6: Iteradas de x_i (condición inicial), si $f(x)$ tiene un atractor de periodo dos.

$$f^{2'}(x_0) = f'[f(x_0)]f'(x_0) = f'(x'')f'(x_0) = f^{2'}(x''),$$

entonces los puntos fijos x_0 y x'' se vuelven inestables simultáneamente.

La Figura 1.7, muestra que después de dicha inestabilidad, la cuarta iterada $f^4 = f^2 f^2$ exhibe dos nuevas bifurcaciones de trinche, las cuales traen consigo un atractor de periodo cuatro, es decir; se observa una duplicación de periodo (ver Figura 1.7).

Estos ejemplos pueden generalizarse de la siguiente forma:

a) Para el intervalo $r_n < \mu < r_{n+1}$, podemos encontrar un ciclo estable 2^{n-1} con elementos (iteradas) $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{2^{n-1}-1}^*$, el cual esta caracterizado por:

$$f_\mu(x_i^*) = x_{i+1}^*$$

$$f_\mu^{2^{n-1}}(x_i^*) = x_i^*$$

$$\left| \frac{d}{dx_0^*} f_\mu^{2^{n-1}}(x_0^*) \right| = \left| \prod_i f'_\mu(x_i^*) \right| < 1 \quad (1.7)$$

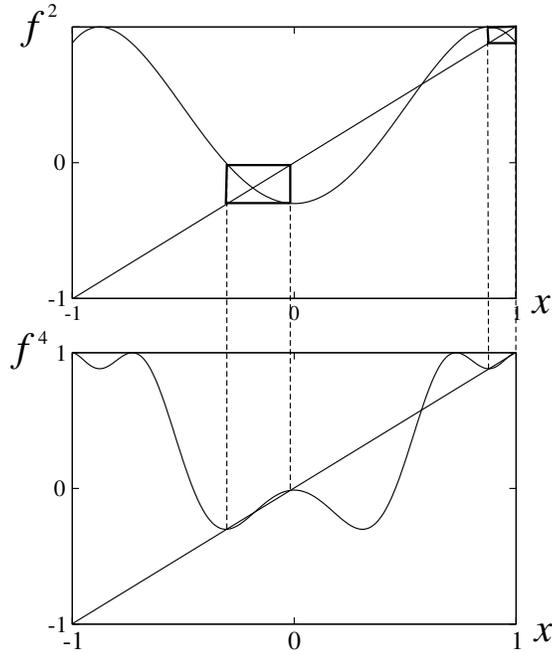


Figura 1.7: Dos bifurcaciones de trinche en f^4 generan un atractor de periodo 4.

donde x_i^* es el elemento i -ésimo y x_0^* es la condición inicial.

b) En r_{n+1} , todos los puntos del 2^{n-1} -ciclo llegan a ser simultáneamente inestables vía la bifurcación de trinche en

$$f_\mu^{2^n} = f_\mu^{2^{n-1}} f_\mu^{2^{n-1}}$$

y en $r_{n+1} < \mu < r_{n+2}$, se dirigen hacia un nuevo 2^n -ciclo estable [1].

1.3. Superciclos

Un 2^n -superciclo, es simplemente un 2^n -ciclo superestable definido por

$$\frac{d}{dx_0^*} f_{R_n}^{2^n}(x_0^*) = \prod_i f'_{R_n}(x_i^*) = 0, \quad (1.8)$$

lo cual implica que el punto $x_0^* = 0$ siempre esta contenido como un elemento

del ciclo, porque este es el único punto donde $f'_\mu(x) = 0$. En la Figura 1.8 se puede ver que las distancias d_n son justamente las distancias entre los elementos del ciclo $x_0^* = 0$ y $x_1 = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0)$, es decir

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0) - 0 = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0) \quad (1.9)$$

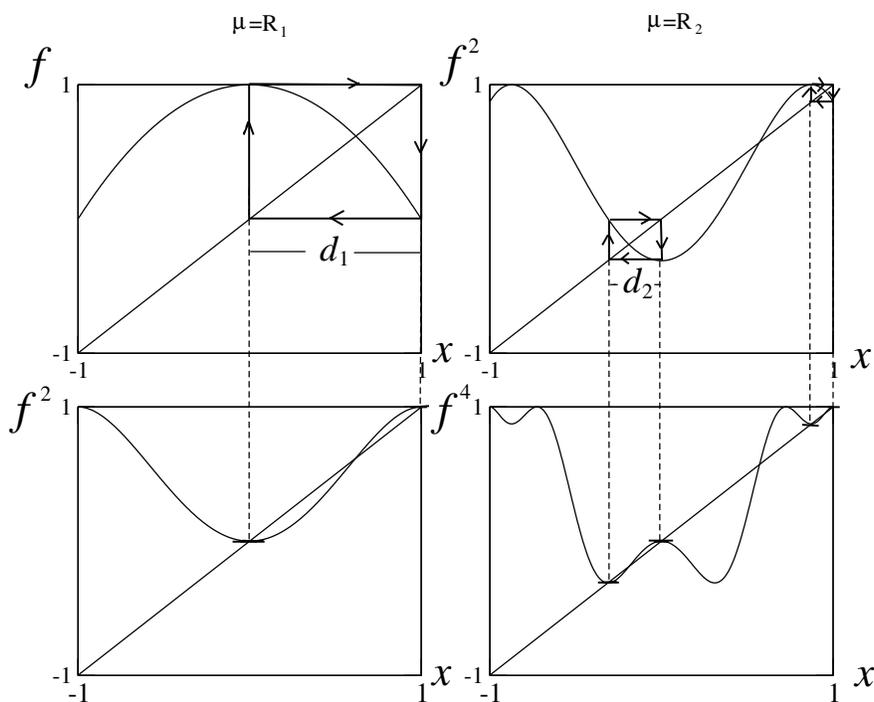


Figura 1.8: Ciclos superestables en R_1 y R_2 , donde los segmentos horizontales muestran los puntos fijos estables en f^2 y f^4 .

1.4. Trayectorias y atractores

Supongamos que tenemos un mapeo unidimensional expresado por

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1.10)$$

donde x es un elemento del espacio fase X . Llamamos espacio fase X al conjunto de los posibles valores de las coordenadas del mapeo. Iterando el mapeo un número n de veces, se obtiene en cada paso de iteración i un valor x_i , con $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Como cada paso de iteración toma el mismo tiempo, es usual considerar el número de iteraciones n como el tiempo total t . El conjunto de los valores obtenidos, genera una trayectoria, que se define como la secuencia dada por la iteraciones (x_1, x_2, \dots, x_n) . La trayectoria describe el movimiento de un punto en el espacio fase X y su longitud es igual al tiempo total t [2]. Una trayectoria puede volverse periódica o permanecer aperiódica por siempre. Decimos que una trayectoria es periódica si después de iterar k veces el mapeo, las iteradas se aproximan a una secuencia $(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$ que permanece repitiéndose, tal secuencia se conoce también como órbita periódica o ciclo de x_0 . El número de elementos de la secuencia $(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l})$ se conoce como el período u orden de la órbita periódica de x_0 . El valor más pequeño de l que satisface la condición anterior es la longitud del ciclo cuando $l = 1$. Una órbita periódica de longitud $l = 1$ es un punto fijo del mapeo f .

Un punto fijo x_0^* que además es condición inicial satisface como se ha visto

$$f(x_0^*) = x_0^* \quad (1.11)$$

Una órbita periódica de longitud l se puede considerar como un punto fijo de la función f iterada l veces

$$f^l(x) = f(f(\dots f(x))) \quad (l \text{ veces}) \quad (1.12)$$

Por lo tanto un estudio de periodicidad, se puede restringir a un estudio de puntos fijos. Cuando se estudia un sistema no lineal, interesa principalmente su comportamiento a tiempos grandes ($t \gg 1$) a partir de un valor inicial x_0 . Dicho comportamiento será distinto para diferentes tipos de mapeos, distinguiéndose entre dos tipos de sistemas dinámicos; los hamiltonianos y los disipativos. Un sistema hamiltoniano tiene la propiedad de que conserva el volumen de un elemento de volumen arbitrario del espacio fase durante su evolución temporal.

Por otro lado, para un sistema disipativo, un pequeño volumen del espacio fase se expande o se contrae, dependiendo, usualmente, de la posición x en el espacio fase. En este caso, un gran número de trayectorias se aproximan a cierto subconjunto A del espacio fase X en el límite cuando $n \rightarrow \infty$. El subconjunto A se conoce como atractor. Pueden existir uno o varios atractores,

pero generalmente sólo un atractor atrae la mayoría de las trayectorias. Un punto fijo estable es un atractor. Como ya se mencionó si $|f'(x^*)| < 1$ entonces x^* es un punto fijo estable, la estabilidad significa que un gran número de trayectorias son atraídas por x^* .

¿Qué le ocurre a un punto x bajo f tomado en la vecindad de un punto fijo x^* , donde $|x^* - x| \ll 1$?, claramente x es mapeado en $f(x)$, pero si se desarrolla $f(x)$ en serie de Taylor alrededor de x^* , se obtiene:

$$f(x) = x^* + (x - x^*)f'(x^*) \quad (1.13)$$

entonces la nueva distancia en el siguiente paso de iteración será

$$|f(x) - x^*| = |(x - x^*)||f'(x^*)| \quad (1.14)$$

menor que la distancia anterior $|x - x^*|$ por lo que $|f'(x^*)| < 1$. Por lo tanto una característica de un punto fijo estable es que su vecindad se contrae bajo la acción de f . Note que si pudiéramos desarrollar en serie de Taylor a $f^l(x)$ en lugar de $f(x)$ sería posible que la vecindad del punto fijo también se contrajera bajo la acción de $f^l(x)$ (entonces un punto fijo estable de f también sería un punto fijo estable de $f^l(x)$).

En general, un atractor puede ser una órbita periódica estable de longitud l , la cual puede ser considerada como un punto fijo de la función iterada l veces, es decir un punto fijo de $f^l(x)$. Una órbita periódica inestable no es un atractor, porque repele todas las trayectorias, así un punto fijo es de relevancia en el comportamiento a tiempos grandes sólo si es un punto fijo estable[2].

Finalmente podemos decir que un atractor crítico es un atractor en algún punto crítico, en otras palabras: es el atractor cuando se ha considerado el mapeo en un punto crítico, tales puntos críticos son aquellos valores de μ donde aparece la bifurcación de trínche o duplicación de periodo, es en estos puntos donde también el exponente de Lyapunov se hace cero, si observamos la Figura 1.2, veremos que los puntos críticos son r_1, r_2, r_3, \dots

Capítulo 2

Sensibilidad a condiciones iniciales ξ_t y Exponencial- q ($\exp_q(x)$)

Se estudiarán a continuación algunas características de los sistemas dinámicos en función de la sensibilidad a condiciones iniciales ξ_t y se mostrará una forma de obtener el exponente de Liapunov. Por otro lado, se estudiará la función $\exp_q(x)$ y algunas de sus características, y la forma en cómo la sensibilidad ξ_t se relaciona con el exponente de Liapunov o con la expresión llamada $\exp_q(x)$.

0.1. Sensibilidad ξ_t

Junto con las órbitas periódicas estables, existen otro tipo de atractores que corresponden con el movimiento caótico. Un sistema dinámico se dice que es caótico si es determinista, si carece de comportamiento periódico a tiempos arbitrariamente grandes, y si depende sensiblemente de las condiciones iniciales. Esto significa que dos valores inicialmente muy cercanos x_0 y $x'_0 = x_0 + \delta$ generan trayectorias totalmente diferentes a tiempos grandes. Consideremos un mapeo unidimensional $f(x)$, las iteraciones de $f(x)$ (inicialmente evaluadas en x_0) al tiempo n se denotarán por x_n y las iteraciones de $f(x)$ con la condición inicial x'_0 por x'_n . Como regla, para mapeos caóticos se observa un incremento exponencial de la diferencia $|x_n - x'_n|$

$$|x_n - x'_n| \approx |\delta| e^{\lambda x_n} \quad (1)$$

con ($|\delta| \ll 1$). El promedio de la rapidez de separación λ se conoce como exponente de Liapunov del mapeo.

Por otra parte, la sensibilidad a condiciones iniciales se define como

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \quad (2)$$

por lo tanto, podemos escribir

$$\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{|x_t - x'_t|}{|x_0 - x'_0|} \approx e^{\lambda t}. \quad (3)$$

Note que si $x_n = f_n(x_0)$ y $x'_n = f_n(x_0 + \Delta x_0)$ entonces: $\xi_n \approx df^n(x_0)/dx_0$

0.2. Exponente de Liapunov (Caso unidimensional)

En general el exponente de Liapunov se puede obtener a partir de la n -ésima iteración de alguna función f en un punto específico, en nuestro caso, f es un mapeo unidimensional. Se tiene que

$$\{x_0, x_0 + \epsilon\} \longrightarrow \{f^n(x_0), f^n(x_0 + \epsilon)\} \quad \text{bajo } f^n$$

si suponemos además que el sistema es caótico, entonces

$$\epsilon e^{\lambda(x_0)} = |f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)| \quad \text{ahora despejando } \lambda \text{ y tomando límites}$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| \quad (4)$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f^n(x_0 + \epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| = \lambda(x_0). \quad (6)$$

En una dimensión se obtiene la ecuación $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|$, usada en el Capítulo 1. Note que λ se puede escribir también en terminos de ξ_t , es decir

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln |\xi_t|) \quad \text{por lo tanto} \quad \xi_t = e^{\lambda(x_0)t} \quad (7)$$

0.3. Función exponencial- q ($\exp_q(x)$)

Una generalización no extensiva de la mecánica estadística de Boltzman-Gibbs (BG) ha despertado mucho interes y debate en los últimos años, debido a que existe firme evidencia[3,4] de su aplicación en circunstancias específicas donde el sistema se encuentra fuera del rango de validez de la teoría canónica de BG. Entender y reconocer la existencia de tal límite de validez es uno de los retos de la física estadística de nuestros días. La sensibilidad a condiciones iniciales es un aspecto relevante asociado con la estructura del atractor de Feigenbaum[1,3,4]. En general la sensibilidad es medida como un efecto de la incertidumbre en las variables del sistema.

En adelante denotaremos a la función $\exp_q(x)$ por $\exp_q(t)$ si la variable independiente en cuestión es el tiempo t .

Para sistemas que no exhiben órbitas periódicas, el efecto de alguna incertidumbre en las condiciones iniciales provoca una evolución temporal exponencial con $\xi(t) \equiv e^{\lambda t}$ como ya se ha dicho. Cuando el exponente de Liapunov es $\lambda < 0$, $\xi(t)$ caracteriza una rapidez de contracción hacia la órbita periódica. Por otro lado, para $\lambda > 0$, $\xi(t)$ caracteriza una rapidez de divergencia de las órbitas caóticas. En los puntos de bifurcación r_n (puntos críticos) el exponente del Liapunov se hace cero [1,2]. Recientemente, se ha propuesto que esta característica en r_n está relacionada con una sensibilidad del tipo $\exp_q(t)$ [3,6,4,5]

$$\xi_t = e_q^{\lambda_q t} \equiv [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} = [1 - (q - 1)\lambda_q t]^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (8)$$

con λ_q definida como un factor de escala del tiempo t , la cantidad q representa el grado de deformación de la termodinámica asociada al sistema, pues a muchos sistemas dinámicos es posible asociarles una termodinámica bien definida, donde las nuevas variables termodinámicas en cuestión ya no son de tipo físico como la presión o la temperatura, sino parámetros o índices cuyos valores estan asociados con los estados o transiciones del sistema, un ejemplo es considerar a q como la cantidad de campo magnético externo o presión aplicadas a un sistema físico termodinámico tal que ocurra una transición de fase.

Los valores de λ_q para los atractores críticos (en los puntos críticos r_n) del mapeo logístico han sido encontrados analíticamente mediante técnicas de grupo de renormalización obteniéndose que su valor máximo es $\lambda_q = 1.323...$

[4,5]. En algunos artículos recientes [4,5] se han probado formalmente las predicciones de la teoría no extensiva en las bifurcaciones de trinche y tangentes de los mapeos tipo logístico, así como para el borde del caos de estos mismos mapeos. Lo anterior se ha llevado a cabo analíticamente por A. Robledo y F. Baldovin [5] empleando la técnica del grupo de renormalización (GR) y tomando en cuenta que la sensibilidad a las condiciones iniciales sigue un comportamiento descrito por una función $\exp_q(t)$ [5], la cual tiene la forma de la ecuación 2.8, en la que ξ_t es como se ha dicho antes la sensibilidad a condiciones iniciales.

Dicha expresión contiene el índice entrópico (relacionado con una entropía del sistema) no extensivo q y el coeficiente de Liapunov q -generalizado λ_q . Esta ecuación también se ha propuesto como la contraparte de la sensibilidad exponencial usual $\xi_t = e^{\lambda_1 t}$ a las condiciones iniciales que prevalecen cuando el coeficiente de Liapunov ordinario λ_1 no se hace cero, la forma exponencial usual de Boltzman-Gibbs (ecuación 2.3) se recobra cuando $q \rightarrow 1$.

Mediante la técnica del grupo de renormalización ha sido posible conocer las expresiones de λ_q para todos los atractores críticos de los mapeos tipo logístico. Estas expresiones se han interpretado en términos de los parámetros del mapeo de punto fijo y corroborados numéricamente vía cálculos a priori. Específicamente, para el borde del caos ($\mu_\infty = 1.401155189\dots$) del mapeo logístico si $z = 2$, el valor máximo de λ_q y q están dados por $\lambda_q = \ln(\alpha) / \ln(2)$ y $q = 1 - \ln(2) / \ln(\alpha)$ donde α es la constante universal de Feigenbaum [11,5].

0.4. Algunas propiedades de la función $\exp_q(t)$

La sensibilidad ξ_t en la ecuación 2.8 depende además de la variable t de dos parámetros q y λ_q , siendo q el parámetro del cual depende el exponente $1/(1 - q)$, dicho exponente es el exponente de la función $\exp_q(t)$. Entonces, para diferentes valores de q , tenemos diferentes formas o comportamientos de la función $\exp_q(t)$.

En particular, la función $\exp_q(t)$ se comporta como una ley de potencias para valores del argumento t grandes, $t \gg 1$, y si $q \neq 1$, pero si $q = 1$ entonces se comporta como la función exponencial usual. En la Figura 2.1 se muestran algunos comportamientos para diferentes valores de q de la función $\exp_q(t)$.

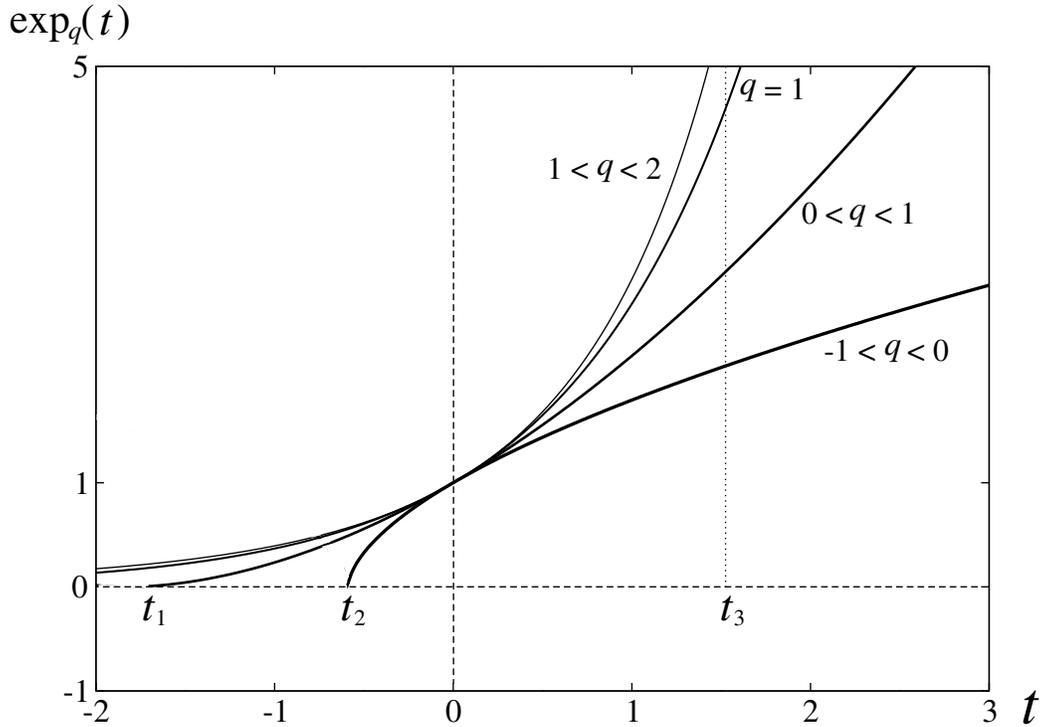


Figura 1: Gráficas de la función $\exp_q(t) = \xi_t$ para diversos valores de q , donde t_1, t_2 y t_3 son puntos de la forma $t = -1/(1-q)\lambda_q$, es decir en estos valores del tiempo; $[1 + (1-q)\lambda_q t_j] = 0$.

El análisis del comportamiento de la función $\xi_t = \exp_q(t)$ señala dos valores de t importantes, cuando $t = -1/(1-q)\lambda_q$ y cuando $t = 0$, es decir:

$$\text{si } t = -1/(1-q)\lambda_q \Rightarrow \xi_t = 0, \quad \text{y} \quad \text{si } t = 0 \Rightarrow \xi_t = 1$$

lo anterior sucede para cualesquiera valores de λ_q y q . Teniendo en cuenta tales valores de t y las formas que adopta la función $\exp_q(t)$ para diferentes valores de q (ver Figura 2.1), se puede interpretar la conducta de la $\exp_q(t)$ de la siguiente manera:

Supongase sin pérdida de generalidad que $\lambda_q > 0$,

Caso I. $1 < q < 2$

Si $t = -1/(1-q)\lambda_q = t_3 \Rightarrow \xi_t = [1 + (1-q)\lambda_q t]^{-\frac{1}{q-1}} = \infty$ porque $1 + (1-q)\lambda_q t = 0$.

Si $t < 0 \Rightarrow [1 + (1-q)\lambda_q t] > 1$ y $1 < 1/(q-1) < \infty$.

Entonces tomando $t \ll 1/(1-q)\lambda_q$ se llega a que $\xi_t \approx 0$.

Caso II. $q = 1$

Si $y = [1 + (1-q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} \equiv \exp_q(t) = e_q^{\lambda_q t}$, entonces $q = 1 \Rightarrow y = e_1^{\lambda_1 t} = e^{\lambda t}$

(donde $e^{\lambda t}$ es la función exponencial usual) porque $y = [(1-q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}}$ es la solución de la ecuación diferencial $dy/d(\lambda_q t) = y^q$ ($q \in \mathfrak{R}$) y cuando $q = 1$, $dy/d(\lambda_q t) = y^q$ se convierte en $dy/d(\lambda_1 t) = y$, cuya solución es $y = e^{\lambda_1 t} = e^{\lambda t}$.

Caso III. $0 < q < 1$

Si $t = -1/(1-q)\lambda_q = t_1 \Rightarrow [1 + (1-q)\lambda_q t] = 0$ y $1/(1-q) > 1$ por lo tanto $\xi_t = 0$.

Si $t \geq 1/(1-q)\lambda_q \Rightarrow [1 + (1-q)\lambda_q t] > 0$ y $1/(1-q) > 1$ por lo tanto, si

$t \gg 1/(1-q)\lambda_q$ entonces $\xi_t \rightarrow \infty$.

Caso IV. $-1 < q < 0$

Si $t = -1/(1-q)\lambda_q = t_2 \Rightarrow \xi_t = [1 + (1-q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} = 0$ con $1/(1-q) > 0$.

Si $t \geq 1/(1-q)\lambda_q \Rightarrow [1 + (1-q)\lambda_q t] > 0$ por lo tanto si $t \gg 1/(1-q)\lambda_q$, $\xi_t > 0$.

Note que λ_q podría tomar valores negativos, en consecuencia la función $\exp_q(t)$ es consistente, pues esta bien descrita por los casos anteriores cuando establecemos la condición experimental de que el tiempo sea siempre positivo $t \geq 1$.

Analizando ahora la primera derivada de la función $\exp_q(t)$.

Si $\exp_q(t) = \xi_t = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}}$, entonces

$$\xi'(t) = \frac{1}{1-q} [[1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}-1}] (1 - q)\lambda_q \quad (9)$$

$$\xi'(t) = \lambda_q [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{q}{1-q}} \quad (10)$$

De la ecuación 2.10 podemos ver que si $t = 0$ entonces $\xi'(0) = \lambda_q$ y si $t = -1/(1 - q)\lambda_q$ entonces $\xi'(-1/(1 - q)\lambda_q) = 0$.

Por otro lado, si consideramos que el tiempo t sólo puede ser positivo, se dan algunas condiciones para $t = -1/(1 - q)\lambda_q$:

$$t = -1/(1 - q)\lambda_q > 0 \quad \text{si } 1/(1 - q) < 0 \text{ y } \lambda_q > 0 \quad \text{ó} \quad \text{si } 1/(1 - q) > 0 \text{ y } \lambda_q < 0.$$

Ahora dada la función $\exp_q(t)$, calculemos su función inversa llamada logaritmo- q (\ln_q), la cual también es una función dependiente de los parámetros q y λ_q .

Como $\xi_t = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}}$ entonces

$$\ln_q(\xi_t) = \xi^{-1}(\xi_t) = \frac{[\xi_t^{1-q}] - 1}{(1 - q)\lambda_q} \quad (11)$$

Note que $\xi^{-1}(\xi_t) = t$ es la identidad.

Supongamos ahora una función ξ_t que contiene un factor de normalización llamado ξ_{max} , donde ξ_{max} es un número, entonces si

$$\xi_t = [[1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}}] \xi_{max} \quad \Rightarrow \quad \xi^{-1}(\xi_t) = \frac{[\frac{\xi_t}{\xi_{max}}]^{1-q} - 1}{(1 - q)\lambda_q} \quad (12)$$

y si $\xi_{max} \in \mathfrak{R}$, ξ_t es también una función $\exp_q(t)$, lo anterior nos dice que una función $\exp_q(t)$ multiplicada por un número real cualquiera, es también una función $\exp_q(t)$.

Capítulo 3

Planteamiento

En este capítulo se analizarán algunos conceptos importantes como la estabilidad de trayectorias, los mapeos logísticos de orden z , y se discutirán las diferencias de la dinámica para condiciones iniciales cerca de puntos atractores o cerca de puntos repulsores.

Todo esto para dirigirnos claramente hacia el planteamiento y establecimiento de los objetivos en el presente trabajo, cuyo contenido principal es: determinar si la sensibilidad a condiciones iniciales del sistema logístico obedece una ley funcional conocida como $\exp_q(t)$.

0.1. Mapeos con máximo de orden z

Los sistemas que muestran duplicación de periodo pueden ser ejemplificados por el mapeo unidimensional $x_{n+1} = 1 - \mu|x_n|^z$ el cual tiene un máximo único de orden z . Asociados a mapeos de este tipo, existen dos factores de escala universales $\alpha(z)$ y $\delta(z)$ que dependen únicamente del valor de z . En la Figura 3.1 se muestran diferentes árboles de bifurcación para algunos valores de z .

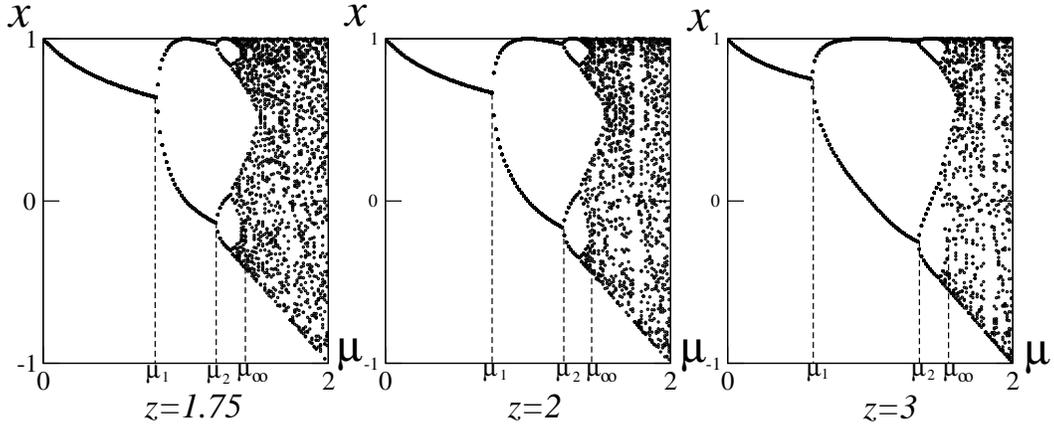


Figura 1: Diagrama de bifurcación para la familia de tipo logístico con $z = 1.75$, $z = 2$, $z = 3$

En la Figura 3.1 se observa que cada rama del árbol de bifurcación es una pequeña copia del árbol original. Si $z > 1$ el mapeo presenta bifurcaciones en sus órbitas periódicas, en las cuales el periodo de éstas se duplica hasta que, al alcanzar el valor del parámetro μ_∞ ($\mu_\infty \approx 1.40115\dots$, para $z = 2$) el periodo de la órbita se vuelve infinito. Iniciando de un 1-ciclo estable en $\mu = 0$ las bifurcaciones del árbol aparecen en valores de $\mu = \mu_j(z)$, $k = 1, 2, \dots$, donde el ciclo 2^{j-1} se hace inestable y aparece un nuevo ciclo estable de período 2^j . Los valores de $\mu = \mu_j$ se acumulan en el borde del caos $\mu = \mu_\infty(z)$. Para $\mu > \mu_\infty(z)$ aparecen regiones alternantes caóticas y periódicas, donde se presentan ventanas de comportamiento periódico dentro de regiones caóticas. La más evidente es una ventana de periodo 3, pero hay también otras ventanas de periodos 5,6, etc.

0.2. Estabilidad

Consideremos un punto x_n en la vecindad de un punto fijo x_n^* de un N -ciclo $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$,

$$x_n = x_n^* - \Delta x_n, \quad (1)$$

después de N iteraciones tendremos

$$x_{n+N} = f_\mu^{(N)}(x_n^* + \Delta x_n) = x_n^* + \Delta x_n \frac{df_\mu^{(N)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_n^*} + \dots, \quad (2)$$

donde f_μ^N denota el mapeo iterado N veces. Ahora, el N -ciclo es estable si $|\Delta x_{n+N}| \leq |\Delta x_n|$ ó

$$-1 \leq \frac{df_\mu^{(N)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_n^*} \leq 1 \quad (3)$$

Empleando la regla de la cadena la ecuación 3.3 se puede escribir como

$$-1 \leq f'_\mu(x_0^*)f'_\mu(x_1^*)\dots f'_\mu(x_{N-1}^*) \leq 1, \quad (4)$$

donde la prima en f indica la diferenciación respecto de x como se mencionó en el Capítulo 1. Ahora consideremos las series de duplicación de periodo de 2^j -ciclos, esto es $N = 2^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, entonces los signos de igualdad en la ecuación 3.4, leídos de izquierda a derecha, corresponden con los valores de bifurcación $\mu_{j+1}(z)$ y $\mu_j(z)$. Entre estos dos valores siempre existe un $\mu = \mu_k(z)$ para el cual el producto en la ecuación anterior se hace cero.

$$f'_\mu(x_0^*)f'_\mu(x_1^*)\dots f'_\mu(x_{N-1}^*) = 0 \quad (5)$$

El 2^k -ciclo correspondiente es llamado ciclo superestable (como se definió en la Sección 1.3). Considerando $f_\mu(x)$ como en la ecuación 1.1 del mapeo logístico se sigue que cada ciclo superestable contiene el punto $x = 0$ (excepto el 1-ciclo superestable $x^* = 1$ en $\mu_0 = 0$). Entonces los valores $\mu_k(z)$ pueden obtenerse como las soluciones de

$$f_{\mu_k}^{(2^k)}(0) = 0 \quad (6)$$

Se puede corroborar fácilmente que $\mu_1 = 1$ para toda z . Los valores superiores de μ_k dependen de z . Para $z \rightarrow \infty$ los valores de μ_k , $k = 2, 3, \dots$, se acumulan cerca de $\mu = 2$. En el presente trabajo dichos valores μ_k serán llamados puntos superestables, porque es en estos sitios, donde las trayectorias convergen fuertemente (ver ecuación 1.3) hacia el atractor y las órbitas 2^k se mantienen periódicas.

Preimágenes

Hemos visto que la sucesión $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es llamada trayectoria, sabemos también que $x_1 = f_\mu(x_0)$, $x_2 = f_\mu(x_1) = f_\mu^2(x_0), \dots, x_n = f_\mu(x_{n-1}) = f_\mu^n(x_0)$, donde en el último caso, se dice que x_0 es preimagen de orden n de $f_\mu^n(x_0)$. Sea x_i un punto en la sucesión $\{x_1, \dots, x_n\}$, si además x_i es un punto fijo de $f_\mu(f_\mu(x_i))$ donde $f_\mu(x_i) = x_i$ con $1 < i < n$ y x_i es un punto atractor ($|f'_\mu(x_i)| < 1$), podemos decir que las preimágenes del dicho atractor x_i son

los puntos $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Del mismo modo, para cada punto x_j cualquiera en la sucesión $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (con $1 < j \leq n$) existe un punto preimagen x_{j-1} , y se dice que x_{j-1} es preimagen del punto x_j .

Por otro lado, si x_i es un punto muy cercano a un punto fijo x_{i-m} de f_μ^n y además x_{i-m} es un punto repulsor, es decir $|f'_\mu(x_{i-m})| > 1$, entonces necesariamente, cualquier trayectoria que contenga el punto x_i debe tener la forma $\{\dots, x_{i+4}, x_{i+2}, x_i, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots\}$ o equivalentemente $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\}$, debido a que no se puede llegar al punto x_{i-m} bajo f_μ sino lo contrario, solamente se puede alejar de el, pues es un repulsor.

Sin embargo, x_i si es preimagen de x_{i+1} y $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+(n-1)}\}$ son preimágenes del punto x_{i+n} .

0.3. Condiciones iniciales x_i cercanas a un punto atractor o a un punto repulsor

Tomemos el mapeo logístico con $z = 2$ en la forma $x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$, supongamos ahora que conocemos algún valor de $\mu = \mu_k$ (punto superestable) tal que $f_{\mu_k}^{2^k}(x)$ tiene puntos atractores y repulsores, es decir que el polinomio $f_{\mu_k}^{2^k}(x)$ presenta puntos fijos donde su pendiente es $m = 0$ ó $|m| \gg 0$, en otras palabras se cumplen los criterios de estabilidad dados en la Sección 1.2, pero para el caso $f(x) = f_{\mu_k}^{2^k}(x)$. Supongamos también que conocemos el valor de los puntos atractores y repulsores, ahora tomando un valor inicial x_i arbitrariamente cercano a un punto atractor y calculando numéricamente su evolución temporal dado el mapeo en cuestión, notamos que si $n = t$ al transcurrir un cierto tiempo, x_i se habrá trasladado hasta llegar a permanecer sólo entre 2^k puntos, es decir x_i fue atraída por un atractor de periodo 2^k , la Figura 3.2 muestra tal situación con $k = 1$. Una situación contraria, cuando x_i esta cercana a un punto repulsor, muestra que el tiempo en el que dicha x_i se traslada y permanece sólo entre 2^k puntos es mayor, como se muestra en la Figura 3.3.

De lo anterior se observa que si evolucionamos en el tiempo una condición x_i cercana a un punto repulsor, esta será atraída por el atractor de periodo 2^k en un tiempo mayor que si x_i estuviera cercana a un punto atractor, por lo tanto, puede decirse que una condición x_i cerca de un repulsor es más persistente en el tiempo, por esta razón, en el presente trabajo, los puntos x_i

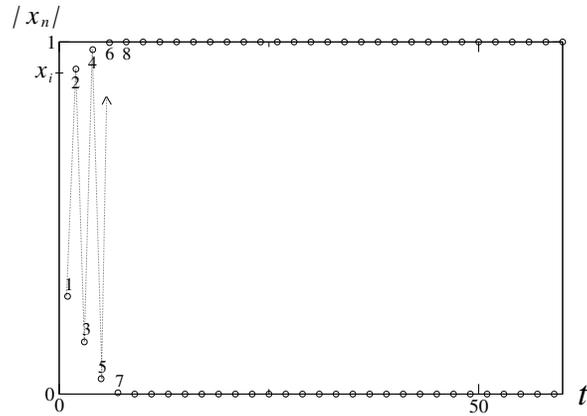


Figura 2: Evolución temporal de una condición inicial cercana a un atractor

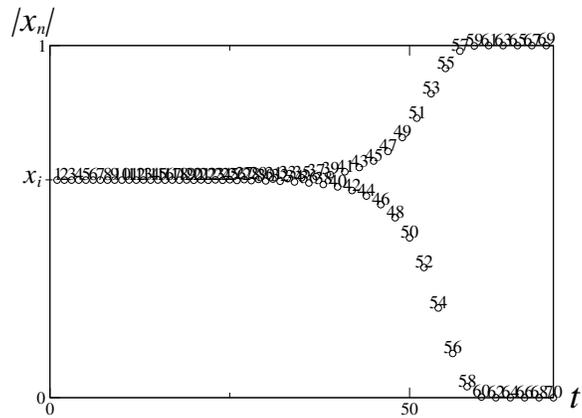


Figura 3: Evolución temporal de una condición inicial cercana a un repulsor

cercanos a repulsores son los importantes, porque son ellos los que permiten un mejor análisis de la dinámica del mapeo (evolución temporal dada una x_i), y son de este tipo los puntos que se considerarán como condiciones iniciales a lo largo del presente trabajo.

0.4. Planteamiento del problema

Diversos aspectos del mapeo logístico han sido ya muy estudiados mediante muchas técnicas, entre algunas de estas están: análisis de las propiedades estáticas y dinámicas usando grupo de renormalización, uso de las propiedades de reescalamiento y su relación con las constantes universales, analogías entre las cantidades del sistema y cantidades termodinámicas, y recientemente la termoestadística de Constantino Tsallis, basada en una entropía no extensiva [7]. A continuación estableceremos el propósito de este trabajo de investigación.

Los mapeos con máximo de orden z han sido muy estudiados desde diferentes puntos de vista como se vió anteriormente. Nosotros estamos interesados en estudiar estos sistemas, dados por la ecuación

$$f(x) = 1 - \mu|x|^z, \quad (7)$$

cuando el parámetro de control $\mu = \mu_k$ es un punto superestable y cuando $z = 2$ principalmente, pero también cuando $z = 1.75$ y $z = 3$. En estos valores de $\mu = \mu_k$, el sistema siempre tiene un comportamiento periódico y eventualmente cuando $\mu_k \rightarrow \mu_\infty$ también, donde μ_∞ es el borde del caos, pero este último caso ya ha sido estudiado formalmente por A. Robledo y E. Mayoral[8].

El presente trabajo se enfocará en estudiar algunas propiedades dinámicas del mapeo, todas ellas manifestadas mediante la evolución temporal de ciertas condiciones iniciales x_i especiales. Dichas propiedades entre las que se encuentra la sensibilidad a condiciones iniciales, están relacionadas con la conducta del sistema a tiempos largos, por lo que su análisis y estudio implican cierta predictibilidad sobre el sistema en cuestión.

Particularmente se estudiará la dinámica para $z = 2$ en sus primeros tres puntos superestables $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_3$, relacionando esta dinámica con la termoestadística de Tsallis mediante la comprobación de la validez de la función $\exp_q(t)$ en el régimen periódico, y eventualmente con $z = 1.75$ y $z = 3$ se estudiará lo mismo en sus respectivos puntos superestables μ_k . Dicha comprobación de la $\exp_q(t)$ conocida como

$$\exp_q(\lambda_q t) = [1 + (1 - q)\lambda_q t]^{\frac{1}{1-q}} \quad (8)$$

se hará calculando la sensibilidad a condiciones iniciales experimental

$$\xi_n = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_n}{\Delta x_0} \quad (9)$$

(proveniente del cálculo de la evolución temporal de 2 condiciones iniciales muy cercanas $x_i, x_i + \delta$ en un mapeo, dado un valor de z fijo y en algún punto superestable $\mu = \mu_k$) y comparando estos datos de ξ_n representados en una gráfica, con alguna $\exp_q(t)$, para determinar si existen valores de q y λ_q tales que una $\exp_q(t)$ gobierne el fenómeno de sensibilidad a condiciones iniciales. En adelante se establece que dada la sensibilidad experimental ξ_n , el tiempo t estará representado por el número n de iteraciones, entonces $t = n$ y por lo tanto $\xi_n = \xi_t$.

Cabe señalar que los datos que se analizarán de la sensibilidad experimental no son los correspondientes al crecimiento, sino al decaimiento (acercamiento al ciclo superestable) de dichos resultados, es decir; una gráfica típica de los resultados de sensibilidad ξ_t vs t se muestra en la Figura 4.1, allí se distinguen tres regiones, la región II es la región que nosotros llamamos decaimiento, y es esta región la que nos interesa estudiar (Ver Figura 4.1), pues la región I de la sensibilidad sigue una ley exponencial usual (ver Figura 4.30).

Se hace notar también que la dinámica del sistema en cuestión ha sido estudiada ya en los puntos críticos r_n donde se han logrado algunos resultados analíticos [5,8], pero no es el caso para la dinámica en los puntos superestables μ_k , por lo que algunos de los resultados del presente trabajo, son resultados nuevos. El carácter casi en su totalidad de nuestro análisis de la dinámica es numérico.

Específicamente los objetivos de este trabajo son:

I. Analizar y determinar si es que la sensibilidad obedece una ley funcional conocida como función $\exp_q(t)$.

Si es cierto la anterior, o si lo es de manera aproximada, nos proponemos:

II. Encontrar numéricamente el valor de los parámetros q y λ_q tales que una función $\exp_q(t)$, gobierne el decaimiento de la dinámica en los puntos superestables μ_1, μ_2 y μ_3 para $z = 2$.

III. Determinar si los valores de q y λ_q encontrados para $z = 2$ son los mismos para otros valores de z ó para todos los valores de z .

Capítulo 4

Resultados

0.1. Obtención de los puntos superestables $\mu = \mu_k$ en $z=2$, $z=1.75$ y $z=3$

En adelante se emplearan μ_1, μ_2 y μ_3 para denotar $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_3$.

Caso $z=2$

Como se mencionó en la Sección 3.2, las soluciones de la ecuación $f_{\mu_k}^{2^k}(0) = 0$ con $k = 1, 2, \dots$, determinan los valores del parámetro de control $\mu = \mu_k$ para las órbitas superestables, es decir; determinan los puntos superestables $\mu = \mu_k$. Entonces considerando los polinomios

$$f_{\mu_1}^{2^1}(x) = 1 - \mu[1 - \mu x^2]^2 \quad \text{si } k = 1 \quad (1)$$

$$f_{\mu_2}^{2^2}(x) = 1 - \mu[1 - \mu[1 - \mu[1 - \mu x^2]^2]^2]^2 \quad \text{si } k = 2 \quad (2)$$

$$f_{\mu_3}^{2^3}(x) = 1 - \mu[1 - \mu x^2]^2]^2]^2]^2]^2]^2 \quad \text{si } k = 3 \quad (3)$$

en $x = 0$ y resolviendo $f_{\mu_k}^{2^k}(0) = 0$ para $k = 1, k = 2$ y $k = 3$, se obtienen ecuaciones en μ de 1ro, 4to y 8vo grados respectivamente.

Resolviendo numéricamente dichas ecuaciones y tomando las soluciones adecuadas se obtuvieron los valores en el Cuadro 4.1.

Casos $z= 1.75$ y $z= 3$

En estos casos los puntos superestables se calcularon menos formalmente, por aproximación numérica directa a los puntos $\mu = \mu_k$ en cada árbol de bifurcación respectivo, ver Figura 3.1 y Cuadro 4.2.

$\mu_1 = 1.0$
$\mu_2 = 1.31070264$
$\mu_3 = 1.38154748$

Cuadro 1: Primeros tres puntos superestables para $z = 2$

$z = 1.75$	$z = 3$
$\mu_1 = 1.0$	$\mu_1 = 1.0$
$\mu_2 = 1.26856426$	$\mu_2 = 1.42802812$
$\mu_3 = 1.33454166$	$\mu_3 = 1.50621362$

Cuadro 2: Primeros tres puntos superestables para $z = 1.75$ y $z = 3$

0.2. Cálculo de la sensibilidad ξ_t en los puntos superestables $\mu = \mu_1, \mu = \mu_2$ y $\mu = \mu_3$ (estructura)

Dada una condición inicial cualquiera x_0 y un punto muy cercano a ella, $x_0 + \delta$, se calculó numéricamente la cantidad $\xi_t = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} [\Delta x_t / \Delta x_0]$ (ecuación 3.9), donde $x_{t+1} = f(x_t) = 1 - \mu x_t^2$ y $\Delta x_0 = x_0 + \delta - x_0 = \delta$ para un determinado tiempo t . Aquí t representa el número de iteraciones hechas en el programa. Nótese que ahora denotamos la variable tiempo por la letra t , mientras que en los capítulos anteriores empleábamos la letra n .

Graficando entonces las cantidades ξ_t vs t , se observa que ξ_t tiene una estructura formada de varias curvas desplazadas, de las cuales, la que esta por encima de las demás es una curva envolvente.

La figura 4.1 es una gráfica típica de sensibilidad ξ_t vs t donde se aprecia la parte creciente y la parte decreciente, es claro que dicha gráfica esta formada por dos curvas que pasan de la parte creciente a la parte decreciente hasta llegar aparentemente a cero.

Entonces podemos diferenciar tres regiones:

I. Región creciente o transitoria

II. Región decreciente

III. Región donde ξ_t se anula

Esta última región muestra el caso cuando x_i ya ha sido atraída por el atractor de periodo k y ahí permanece al transcurrir el tiempo t , por ello supondremos que en algún tiempo finito t , ξ_t se hace cero. Esto es una aproximación que adoptaremos en este estudio, dado que la dinámica exacta establece que partiendo de una condición inicial x_i que no pertenece al atractor, este se alcanza cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto ξ_t se anula en un tiempo infinito. El orden de magnitud que tomamos para el cual $\xi_t = 0$ fue desde 1×10^{-8} hasta 1×10^{-32} , debido a nuestras posibilidades computacionales.

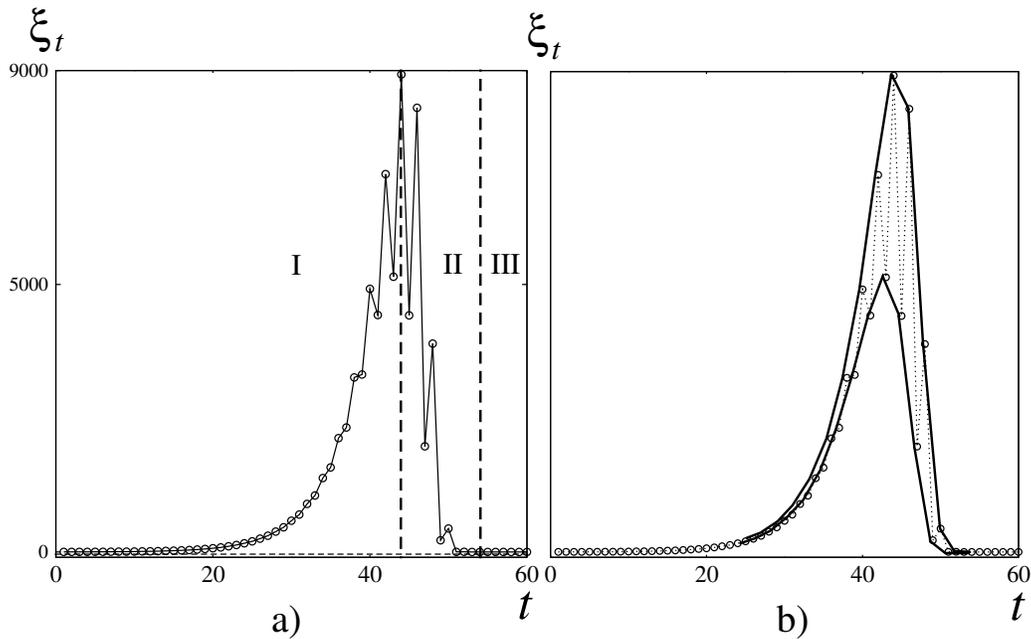


Figura 1: a) Gráfica de ξ_t vs t donde se reconocen tres regiones: I. Crecimiento, II. Decaimiento y III. Región nula (atractor) b) Curva envolvente más una curva o familia de puntos menor a ésta.

En el presente estudio, la región que interesa analizar en este tipo de datos es la región II, puesto que se ha encontrado que la región I tiene forma de una exponencial usual, y es tal función la que modela la conducta creciente, este hecho se identifica y forma parte del llamado caos transitorio[9].

Por lo tanto, para el caso $z=2$ y situados en el punto superestable μ_1 se observan las siguientes estructuras en la región decreciente. En este caso se

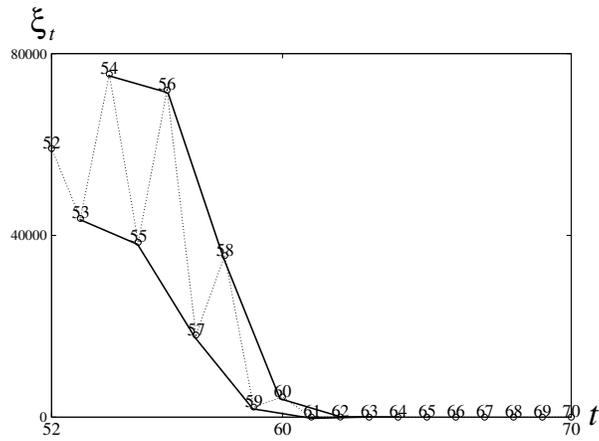


Figura 2: Decaimiento de la sensibilidad ξ_t para $z = 2$ en μ_1 .

observan dos gráficas, la envolvente (que se ubica en la parte superior) y otra curva menor, la cual está desplazada horizontalmente una unidad respecto a la curva envolvente.

Para el siguiente caso, $z=2$ en μ_2 , se observa además de la curva envolvente, puntos que están desplazados 1, 2 y hasta 3 unidades, los cuales forman otras 3 curvas por separado y por debajo de la envolvente.

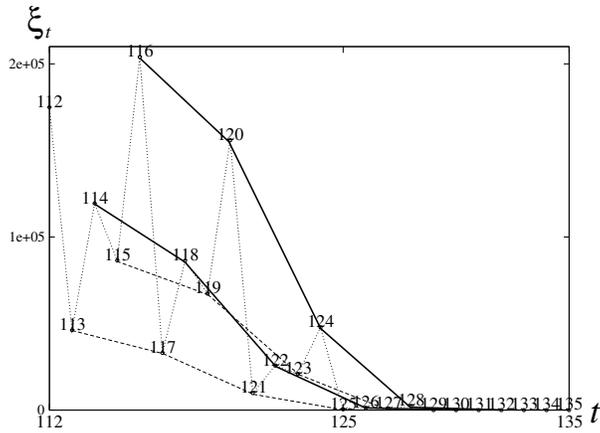


Figura 3: Estructura del decaimiento, donde se ven 4 curvas desplazadas una respecto de otra, cuando y situados en el punto μ_2 .

En el último caso $z=2$, μ_3 , se observan además de la envolvente otras 7 curvas bajo ella, en total 8, las cuales están formadas por puntos que se desplazan 1, 2, ..., 8 unidades, es decir las familias de puntos que forman cada curva son de la forma; $8n, 8n+1, 8n+2, \dots, 8n+7$, donde todas ellas describen el mismo fenómeno.

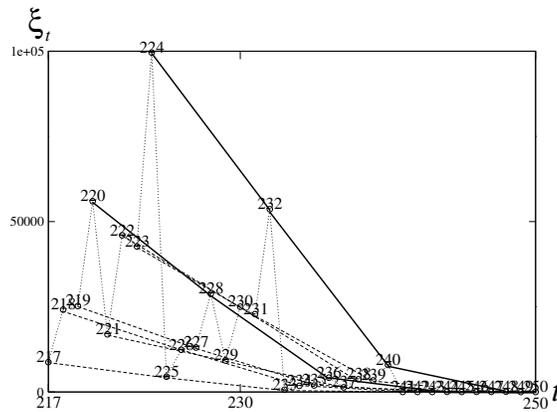


Figura 4: Estructura del decaimiento, 8 curvas desplazadas formadas por puntos de la forma $8n + m$, $m=0, \dots, 7$ cuando $z = 2$ y en μ_3 .

Si siguiéramos construyendo gráficas para más superciclos $\mu = \mu_k$ encontraríamos

amos las mismas estructuras aquí observadas, es decir encontraríamos 16, 32, 64, ..., curvas para $\mu_4, \mu_5, \mu_6, \dots$, donde cada una de ellas estaría desplazada de cualquier otra y en cada caso habría una curva mayor o envolvente.

Haciendo calculos similares de ξ_t para $z=1.75$ y $z=3$ en sus respectivos $\mu = \mu_k$ se observa que allí también se presentan estructuras similares a las mostradas para el caso $z=2$, por lo tanto se plantea que para cualquier z , la estructura de la sensibilidad ξ_t como se ha mostrado aquí es similar para cada $\mu = \mu_k$. Aunque las estructuras mostradas en su conjunto exhiben el fenómeno de la sensibilidad en cada particular caso, la manera de estudiar el fenómeno por curvas separadas es un criterio arbitrario tomado para disminuir la dificultad y acceder de alguna forma al estudio de la sensibilidad.

En el presente estudio, una vez calculadas las sensibilidades ξ_t para los diferentes casos ($z = 2$, $z = 1.75$ y $z = 3$ en sus respectivos valores de $\mu = \mu_k$), se tomaron dichos datos de ξ_t para luego correlacionarlos con el inverso de la función $\exp_q(\lambda_q t)$, de lo cual se esperaban obtener líneas rectas para valores adecuados de q y de λ_q al graficar ξ^{-1} (ecuación 2.11) vs ξ_t , pero por la complicación de poder separar cada familia de puntos que forman las curvas de sensibilidad ξ_t , se optó mejor por seleccionar solo dos familias ó 2 curvas con las cuales hacer las correlaciones, a saber, los datos que formaban la curva envolvente más los datos de la siguiente curva menor, es decir; la envolvente más otra curva desplazada 1, 2 ó 4 unidades, dependiendo esto de en que punto nos encontrabamos μ_1, μ_2 ó μ_3 y por lo tanto dependiendo de la estructura de las gráficas de ξ_t vs t (en las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 las curvas en cuestión son las que aparecen con línea continua), esto para cada caso, es decir dado un z y situados en algún punto superestable $\mu = \mu_k$.

0.3. Cálculo y obtención de los puntos $x_i \in [-1, 1]$ cercanos a puntos repulsores.

Existen diversas maneras de calcular las posiciones iniciales x_i cercanas a algún punto repulsor, una de ellas es mediante la evolución temporal de cualesquiera x_i en un mapeo y la comparación del tiempo en que los puntos llegan al atractor de periodo k , otra es haciendo análisis de las primeras derivadas de los polinomios $f_{\mu_k}^{2^k}$, pues si nos encontramos cerca de un punto fijo ó en un punto fijo de alguno de esos polinomios y si en ese lugar el valor

absoluto de la pendiente de dicho polinomio se hace muy grande (casi una línea vertical), entonces estaremos cerca de algún punto repulsor ó en algún punto repulsor.

La técnica que en este trabajo se usó para calcular las posiciones iniciales x_i fue la que considera la sensibilidad experimental ξ_t , es decir dadas muchas condiciones iniciales arbitrarias x_i entre el intervalo $[-1,1]$, se calculó la cantidad ξ_t establecida en la ecuación 3.9 para cada una de ellas, observando que para cada x_i , la cantidad ξ_t se hacia prácticamente indistinguible de cero a partir de algún tiempo t , entonces a cada condición inicial x_i se le asoció un valor de t para el cual la sensibilidad ξ_t calculada a partir del propio x_i era $\xi_t \approx 0$.

Entonces graficando cada condición inicial x_i vs t , siendo t el tiempo asociado en el que $\xi_t \approx 0$, se obtienen gráficas que muestran conjuntos aparentemente fractales (excepto en el caso de $\mu = \mu_1$), donde cada pico en estas gráficas representa un punto x_i muy cercano a otro x_1 punto repulsor, pues mientras más cercano este un punto a un punto repulsor, más grande es el tiempo t de llegada al atractor (como se vió en la sección 3.3), por otro lado cada valle en estas gráficas representa un punto x_i muy cercano a otro x_2 punto atractor, pues un punto cercano a un punto atractor tendrá un tiempo corto de llegada al mismo atractor.

En resumen, estas gráficas representan cuencas de atracción y repulsión, es decir cada una es como un mapa geográfico que muestra la posición (con precisión finita) de los puntos atractores y repulsores en el intervalo $[-1,1]$. Para el caso $z=2$ y en los puntos superestables μ_1, μ_2 y μ_3 se obtuvieron las siguientes gráficas, que ubican con cierto margen de error la posición de los puntos x_i en función del tiempo que tardan en ser atraídos por algún atractor de periodo 2^k , donde $k = 1, k = 2$ y $k = 3$.

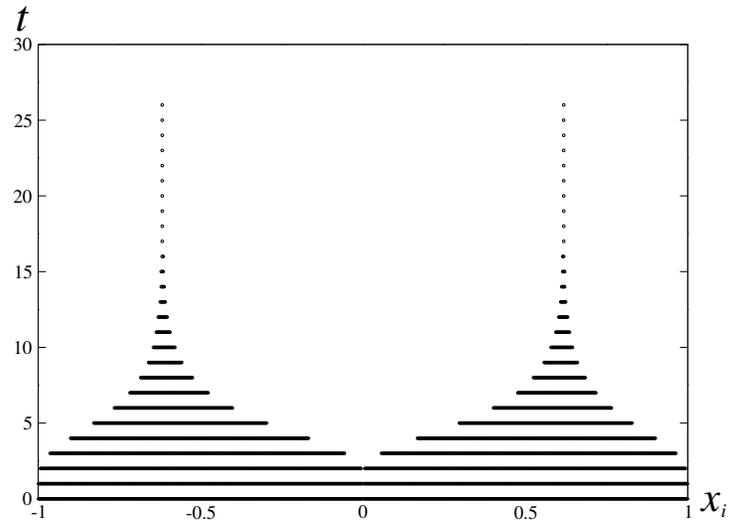


Figura 5: Posición de puntos atractores y repulsores cuando $z = 2$ y $\mu_k = \mu_1$, t vs x_i (La envolvente de esta gráfica).

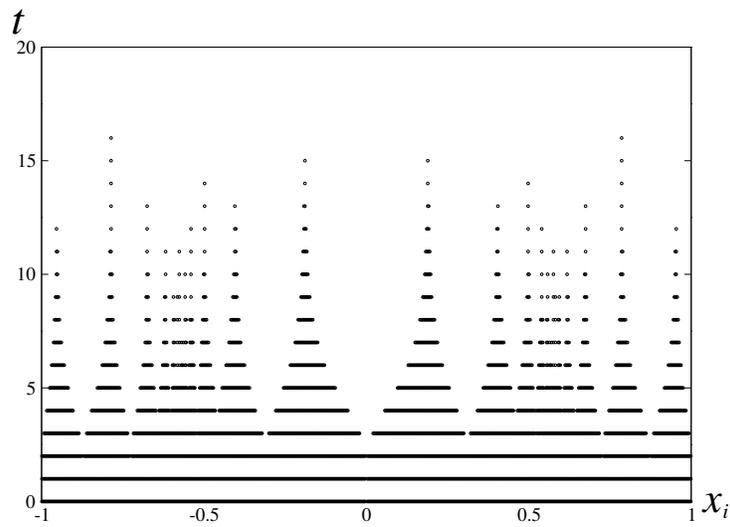


Figura 6: Posición de puntos atractores y repulsores cuando $z = 2$ y $\mu_k = \mu_2$, t vs x_i (La envolvente de esta gráfica).

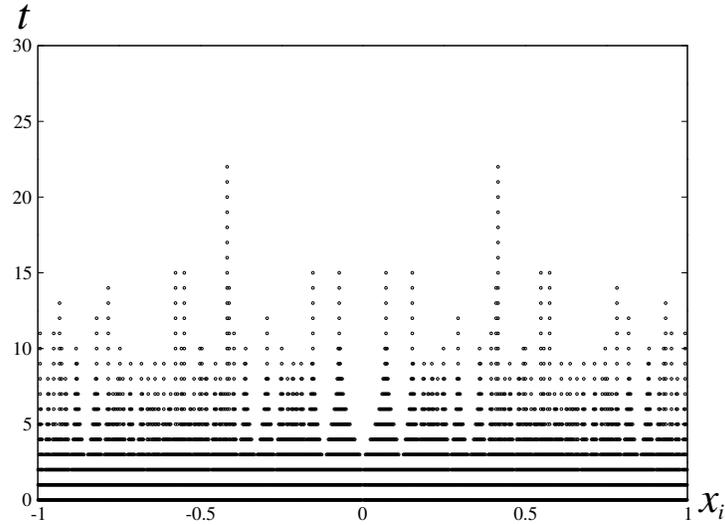


Figura 7: Posición de puntos atractores y repulsores cuando $z = 2$ y $\mu_k = \mu_3$, t vs x_i (La envolvente de esta gráfica).

Un análisis cuidadoso de las gráficas anteriores muestra que no todo pico es repulsor y no todo valle es atractor, pues para que un punto sea uno u lo otro, primero debe cumplir que tal punto sea punto fijo.

Veamos con cuidado la Figura 4.6 donde $\mu_k = \mu_2$ y comparemosla con su polinomio asociado $f_{\mu_2}^4(x)$.

La Figura 4.8 muestra que en realidad hay solamente cuatro puntos atractores $\{x_1, x_3, x_5, x_7\}$ y tres puntos repulsores $\{x_2, x_4, x_6\}$. ¿Qué está pasando entonces?

Lo primero que hay que saber es que $f_{\mu_1}^2(x)$, $f_{\mu_2}^4(x)$ y $f_{\mu_3}^8(x)$ presentan dos atractores y un repulsor, cuatro atractores y tres repulsores y ocho atractores y siete repulsores respectivamente en $[-1,1]$.

Lo segundo es que existen condiciones iniciales x_i diferentes tales que al calcular su evolución temporal, tardan casi el mismo tiempo en llegar a un atractor, aunque no necesariamente estén estas cerca de uno, es decir obsérvese lo que sucede con los puntos x_a y x_b de la Figura 4.9.

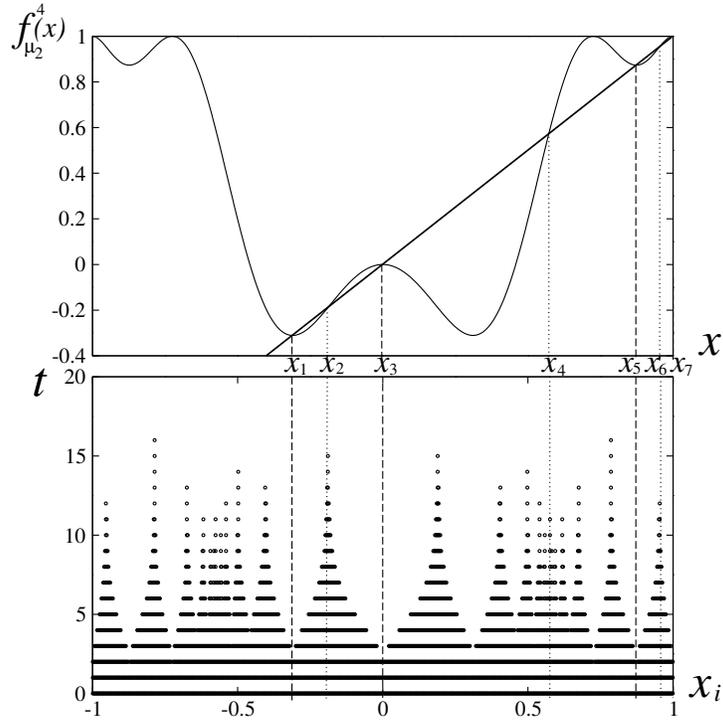


Figura 8: Puntos fijos de $f_{\mu_2}^4(x)$, los puntos x_n con n impar son atractores y los puntos con n par son repulsores (Considerando sólo la curva envolvente).

Si x_a y x_b son condiciones iniciales, entonces estas tardan casi el mismo tiempo en ser atraídas por el atractor de periodo 2^k (donde el tiempo en ser atraídas depende del orden de cada preimagen, pues el orden $n = t$, (ver preimágenes en la Sección 3.2), y por lo tanto en las gráficas anteriores de t vs x_i puntos del mismo tipo que x_a y x_b se exhiben como picos del mismo tamaño.

Cálculos semejantes se hicieron para $z = 1.75$ y $z = 3$ obteniéndose la tabla de datos en el cuadro 4.3, datos de x_i condiciones iniciales persistentes en el tiempo ó cercanas a algún punto repulsor.

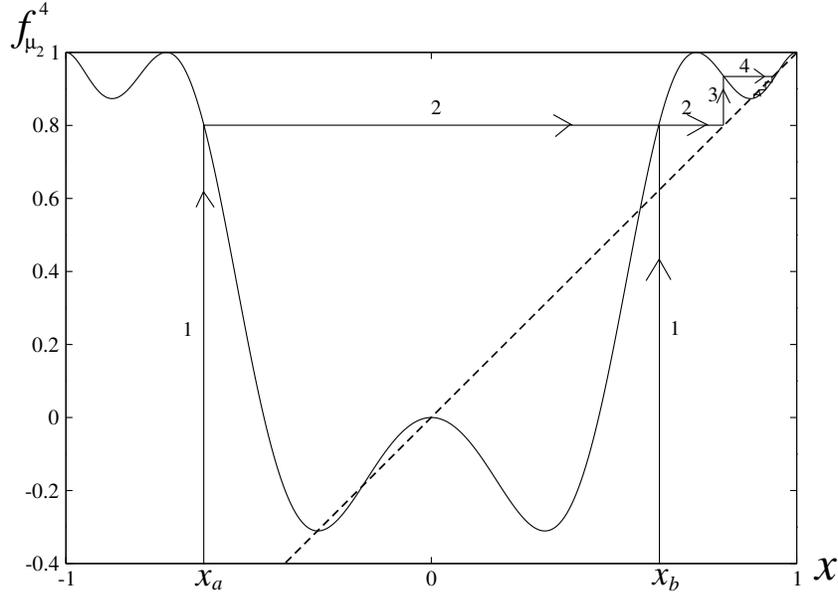


Figura 9: x_a es preimagen de orden 4 de $f_{\mu_2}^4(x_a) = f_{\mu_2}^4(x_b)$, x_a y x_b tienen casi la misma evolución temporal antes de llegar al atractor.

μ_k	$z = 1.75$	$z = 2$	$z = 3$
μ_1	0.595872	0.618033	0.682327
μ_2	0.158531	0.189822	0.287510
μ_2	0.949474	0.952772	0.966061
μ_3	0.053068	0.072457	0.145544
μ_3	0.873401	0.992746	0.912798

Cuadro 3: Condiciones iniciales x_i cercanas a puntos repulsivos

0.4. Experimentos

La manera de relacionar la sensibilidad ξ_t con alguna función $\exp_q(t)$ fue en primer lugar; comparar cada gráfica de ξ_t para los diferentes casos analizados con las gráficas de las funciones $\exp_q(t)$ (Figura 2.1), para ver cual de estas se ajustaba al comportamiento de ξ_t , es decir por simple inspección sobre las $\exp_q(t)$ se determinó el intervalo de valores adecuado del parámetro q tal que la función $\exp_q(t)$ en ese intervalo se ajustaba a las gráficas obtenidas de ξ_t en la región II (decaimiento).

Así, se encontró que las funciones $\exp_q(t)$ que describían adecuadamente el comportamiento gráfico de nuestras ξ_t eran aquellas donde el parámetro q estaba en el intervalo $(0, 1)$ y cuando $t = -t$, es decir en el caso en que las funciones $\exp_q(t)$ fueran evaluadas en $-t$, pero tal descripción adecuada se conseguía además sólo si nuestros datos de ξ_t podían ser normalizados, entonces se decidió usar $\exp_q(-t)$ para realizar las correlaciones. Así cada grupo de datos obtenidos de ξ_t se normalizó mediante un valor experimental máximo de ξ_t llamado ξ_{max} , y se desplazó hasta el valor inicial de $t = 0$, esto se muestra a continuación.

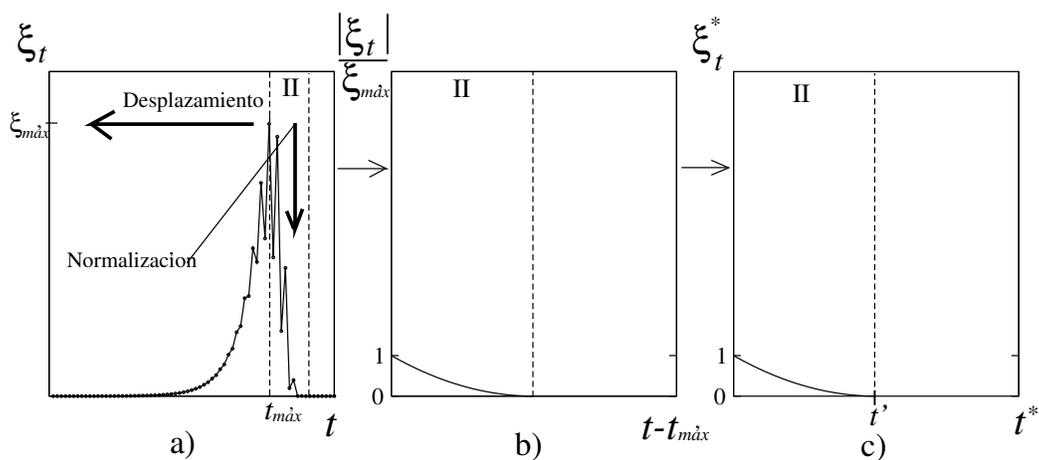


Figura 10: a) Gráfica original b) Gráfica normalizada y desplazada (Región II) c) Gráfica final con $\xi_t^* = |\xi_t|/\xi_{max}$ y $t^* = t - t_{max}$ (Región II)

Una vez hecho lo anterior, nuestros datos cumplían los requerimientos de la Figura 2.1 cuando $0 < q < 1$ y evaluada en $-t$, es decir una función $\exp_q(t)$ que en $t = 0$, $\exp_q(0) = 1 = \xi_t(0)$, además para alguna $t = t'$, $\exp_q(t') \approx 0 \approx \xi_t(t')$, por lo tanto la función $\exp_q(t)$ que esta en discusión es la mostrada en la Figura 4.11.

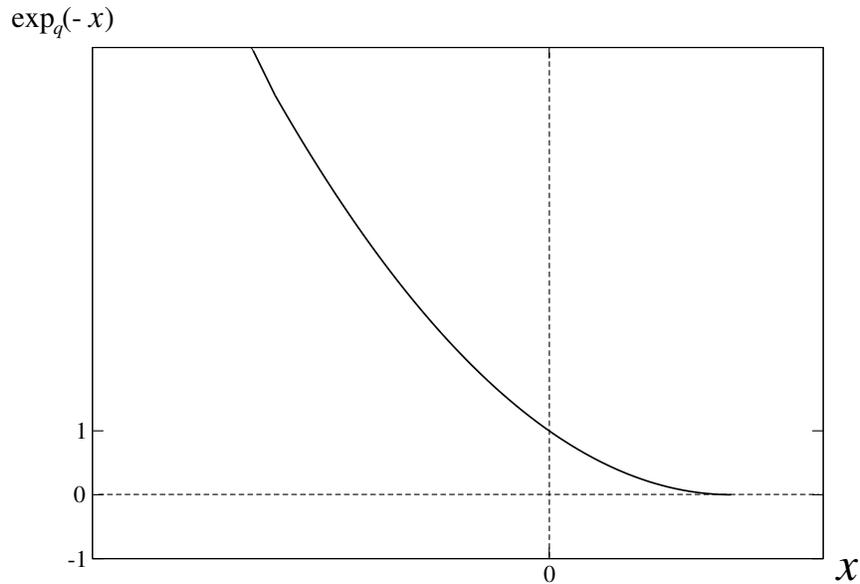


Figura 11: Gráfica de una función $\exp_q(-x)$ que es semejante en su forma a las gráficas experimentales ξ_t vs t en $x > 0$

De esta manera nuestros datos podrían entonces ser correlacionados para hallar un valor de q adecuado entre $(0, 1)$ tal que la función $\exp_q(t)$ asociada a dicho valor de q gobernara la conducta de nuestros datos numéricos de ξ_t .

Por lo anterior y bajo la hipótesis de que el decaimiento de ξ_t puede ser modelado por una función $\exp_q(t)$ para alguna q adecuada, se procedió a correlacionar los datos normalizados y desplazados de ξ_t con $\ln_q(y)$, es decir, se definió la inversa de la $\exp_q(t)$ como el $\ln_q(y)$ (ver ecuación 2.11) y se calculó su valor haciendo $y = \xi_t$ nuestros datos experimentales, esperando obtener una relación lineal entre $\ln_q \xi_t$ y t para algún valor de $q \in (0, 1)$, porque

si ξ_t tiene forma de una función $\exp_q(t)$ con $t = -t$, entonces:

$$\xi_t = (1 + (1 - q)\lambda_q t)^{\frac{1}{1-q}} \equiv \exp_q(t)$$

y si $\ln_q(\xi_t) = \xi_t^{-1}(\xi_t) = \{\xi_t^{1-q} - 1\}/(1 - q)\lambda_q$ entonces

$$\ln_q(\xi_t) = \{[(1 + (1 - q)\lambda_q t)^{\frac{1}{1-q}}]^{(1-q)} - 1\}/(1 - q)\lambda_q = \frac{(1-q)t}{(1-q)} = t$$

Como se había visto en la ecuación 2.12, note que si $t = -t$ entonces

$$\xi_t = \xi_{-t} \Rightarrow \ln_q(\xi_t) = -t.$$

A este método de correlacionar ξ_t y \ln_q para hallar q se le llamó método de “correlación” en el presente trabajo.

Otro método usado aquí para encontrar q fue el llamado “analítico”, el que consistió en usar la primera derivada de la $\exp_q(t)$ (ecuación 2.10), es decir, nosotros sabemos por las condiciones expuestas en la Sección 2.4 para ξ'_t que: $\xi'(t_0) = \xi'(0) = \lambda_q$ y $\xi'(t) = 0$, donde $t = 1/(1 - q)|\lambda_q|$, ya que $\lambda_q < 0$. Por lo tanto bastaría saber el valor experimental de la pendiente de ξ_t en $t = 0$ para conocer λ_q , y después conocer el valor experimental de t en ξ_t tal que la pendiente de ξ_t fuera cero, así, una vez conocidas λ_q y t experimentales entonces podríamos conocer el valor de q , puesto que $t = 1/(1 - q)|\lambda_q|$ según lo anterior, entonces, despejando q se obtiene $q = 1 - 1/t|\lambda_q|$.

Observe que si $t > 0$ y $|\lambda_q|$ son tales que $|\lambda_q|t > 1$ entonces $q \in (0, 1)$. Pero nuestros datos experimentales son las gráficas de ξ_t , por lo tanto podemos obtener la pendiente en $t_0 = 0$ donde $\xi_t(0) = 1$ (debido a la normalización de los datos) y además el punto $t = 1/(1 - q)|\lambda_q|$ (obtenido con precisión finita entre 1×10^{-8} y 1×10^{-32}) que es el tiempo donde numéricamente $\xi_t \rightarrow 0$.

En otras palabras, el método de “correlación” y el método “analítico” descritos anteriormente se aplicaron a los datos experimentales de la sensibilidad ξ_t para encontrar el valor del parámetro q y por lo tanto haber encontrado una función $\exp_q(t)$ adecuada que se ajustara o gobernara dichos datos experimentales.

En el presente trabajo se realizaron tres experimentos diferentes para calcular q usando los metodos mencionados.

A continuación se describe la forma en que se realizaron y el método usado en cada uno.

Experimento I

Adoptando $z = 2$ y situándonos en los puntos superestables μ_1, μ_2 y μ_3 se usó el método de “correlación” mediante la implementación de un programa estándar de regresión lineal. Este se basó en la minimización de χ^2 (ji cuadrada) y el cálculo del índice de correlación R , lo que se hizo fue lo siguiente: dada una condición inicial x_0 persistente en el tiempo y el punto $x_0 + \delta$, se calculó la sensibilidad ξ_t (normalizando y desplazando ξ_t), después se correlacionaron tales datos de ξ_t con $\ln_q(\xi_t) = \xi^{-1}(\xi_t)$ para valores de $q \in (0, 1)$ y para diferentes valores arbitrarios de λ_q . De esta forma se pudo analizar si para algún valor de q y otro de λ_q adecuados, el $\ln_q(\xi_t)$ mostraba una relación lineal respecto a t .

Para aquellos valores de q y λ_q que linealizaban la relación $\ln_q(\xi_t)$ nuestro programa los discriminaba de otros valores al corroborar que la χ^2 asociada a estos se hacia mínima. De esta manera se empleó dicho programa, empleando con una condición inicial x_0 en μ_1 , siete valores diferentes de x_0 (cercaos a repulsores o a sus preimágenes) en μ_2 y trece (cercaos a repulsores o a sus preimágenes) en μ_3 , obteniendo en cada caso 1, 7 y 13 pares de valores (q, λ_q) , los cuales linealizaban sus respectivos datos de $\ln_q(\xi_t)$. Los resultados en este primer experimento son los siguientes:

z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q
2	μ_1	1	0.780	-0.619
2	μ_2	7	0.744	-0.270
2	μ_3	13	0.740	-0.133
			$\bar{q}_{tot} = 0.754$	

Cuadro 4: Resultados del Experimento I. Valores de q y λ_q encontrados que linealizan la relación $\ln_q(\xi_t)$. En el caso de μ_2 y μ_3 , q y λ_q son los promedios de 7 y 13 pares de valores de (q, λ_q) encontrados.

Por otro lado, si graficamos los datos ξ_t vs t para alguna condición inicial x_0 y al mismo tiempo graficamos la función $\exp_q(-t)$ en el intervalo $(0,1)$ para distintos valores de q , veremos si nuestros resultados anteriores son congruentes con el hecho de que datos experimentales pueden ser modelados por una función $\exp_q(t)$.

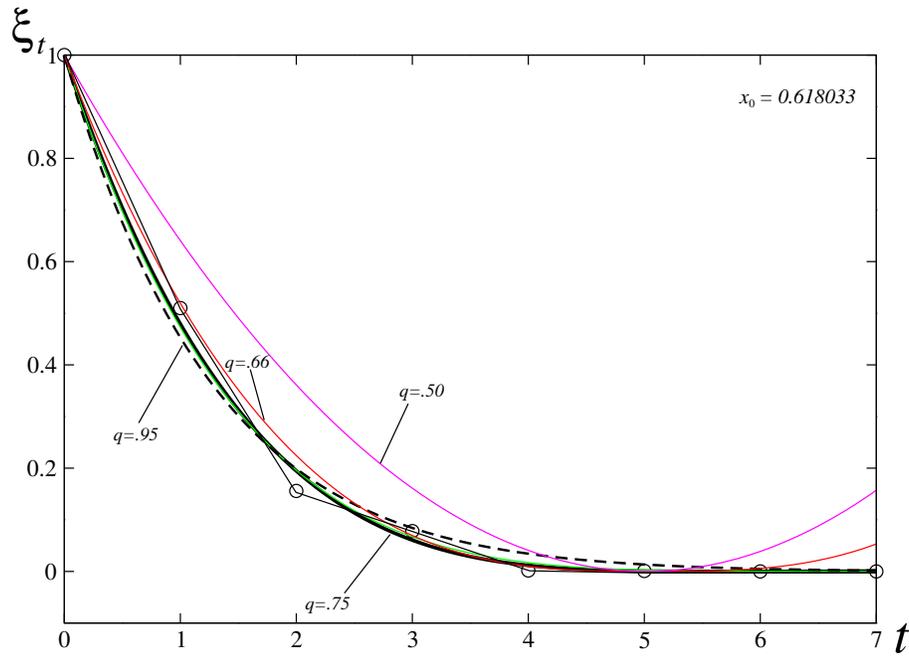


Figura 12: Gráfica de ξ_t vs t en μ_1 y funciones $\exp_q(-t)$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

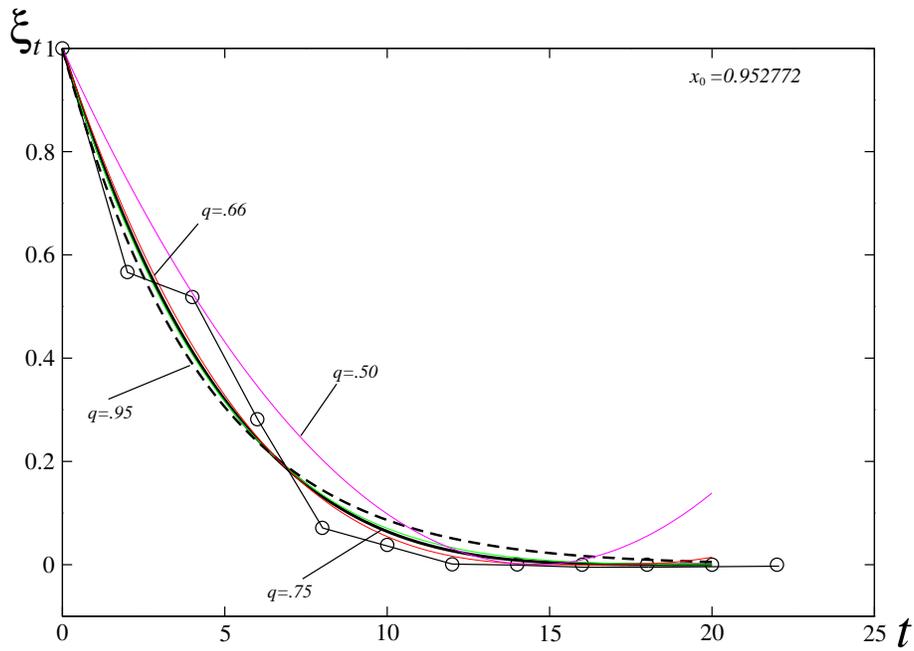


Figura 13: Gráfica de ξ_t vs t en μ_2 y funciones $\exp_q(-t)$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

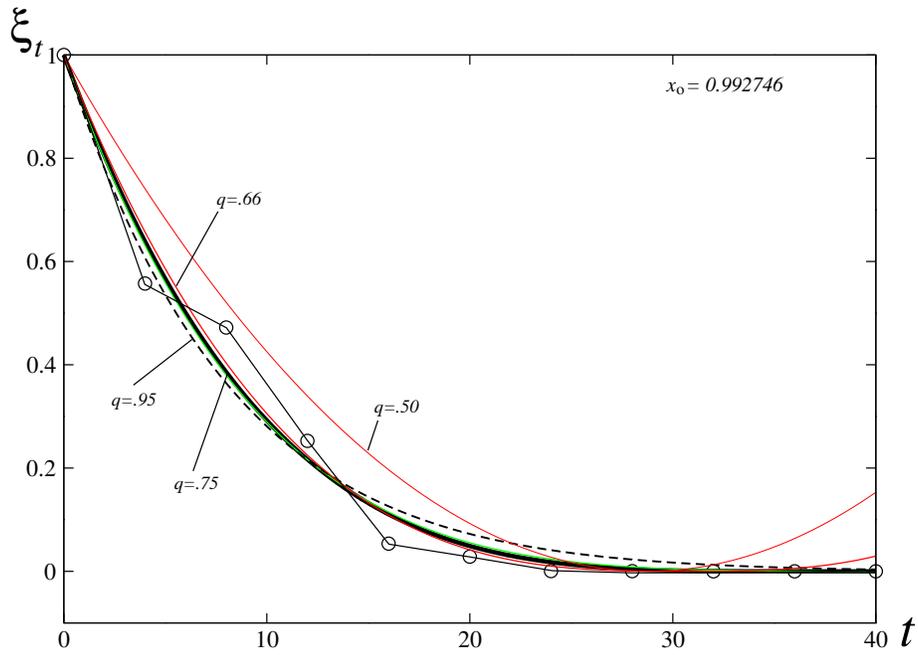


Figura 14: Gráfica de ξ_t vs t en μ_3 y funciones $\exp_q(-t)$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

Ahora, veamos las gráficas de los datos de $\ln_q(\xi_t)$ vs t para algunos pocos valores de q y determinar gráficamente si es que para algún valor de q la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs t es lineal, esto también mostrará si existe alguna linealización entre $\ln_q(\xi_t)$ y $\xi(t)$.

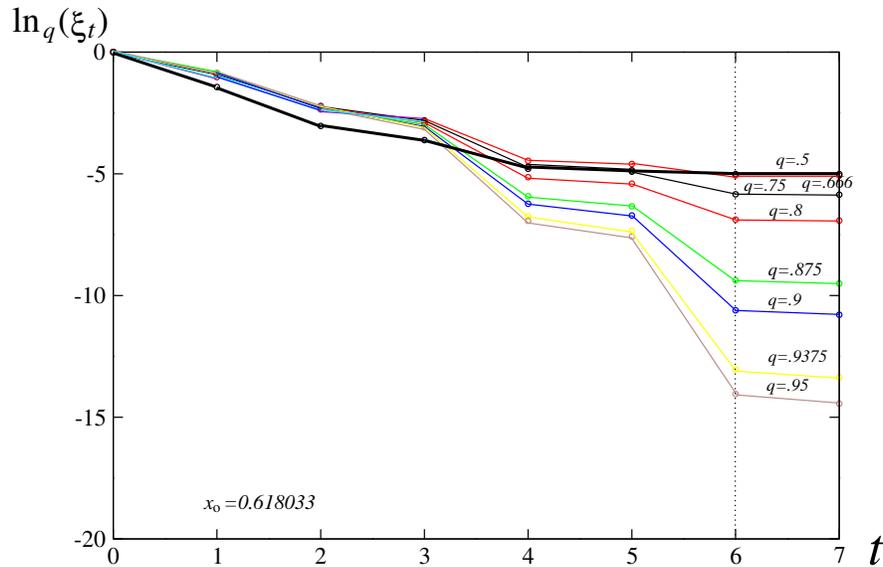


Figura 15: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_1 , en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la línea remarcada corresponde a $q = 0.5$.

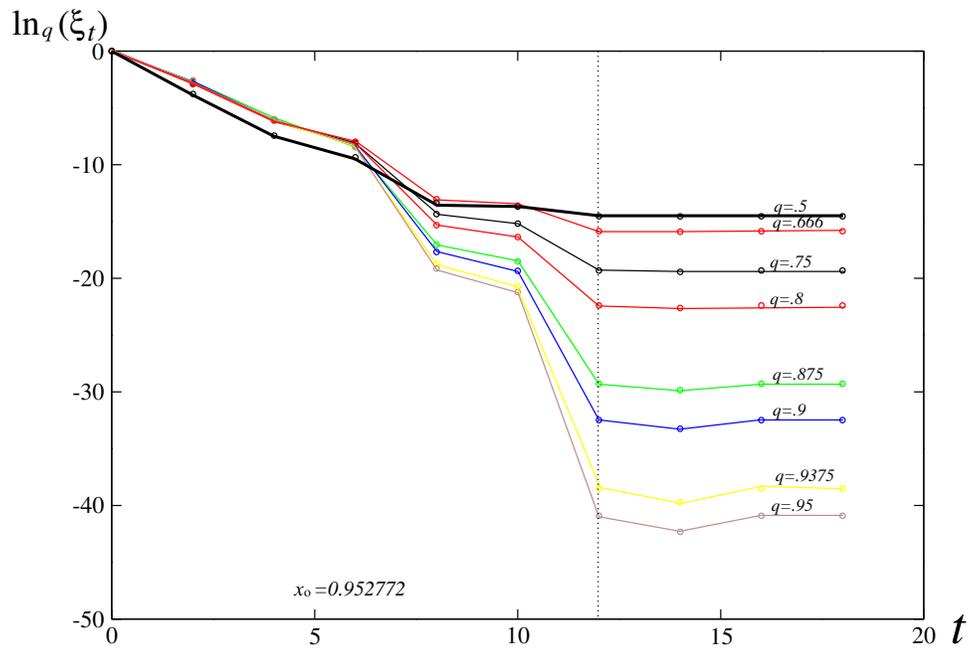


Figura 16: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_2 , en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la línea remarcada corresponde a $q = 0.5$.

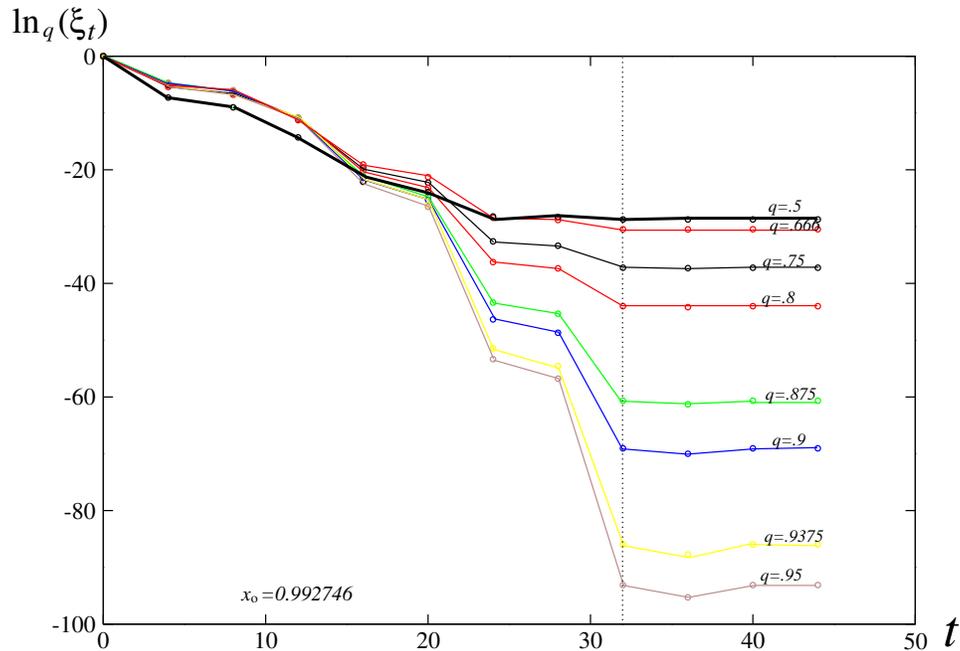


Figura 17: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_3 , en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la línea remarcada corresponde a $q = 0.5$.

En cada una de estas tres gráficas anteriores, se observa que si $q = 0.95$ entonces $\ln_q(\xi_t)$ vs t tiene una curvatura bien definida (convexa), y al ir aumentando q tal curvatura se invierte y en $q = 0.5$ dicha curvatura se ha vuelto concava, por lo tanto podemos inferir que en el paso de $q = 0.95$ a $q = 0.5$ existe un valor de q tal que la curvatura de $\ln_q(\xi_t)$ vs t está entre lo convexo y lo concavo. Es decir, en un valor de q la curvatura de $\ln_q(\xi_t)$ vs t se hace cero ó es aproximadamente una línea recta, en este caso como lo muestra el Cuadro de resultados 4.4, el valor de q que permite que la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs t sea lineal es $q \approx 0.754$.

Experimento II

Consideramos ahora los casos $z = 1.75$, $z = 2$ y $z = 3$ y nos situamos nuevamente en los puntos superestables μ_1, μ_2 y μ_3 . Empleamos por segunda vez el método de “correlación” implementado mediante el mismo programa que en el experimento I, pero ahora aumentamos la precisión en las condiciones iniciales usadas x_0 (empleando un mayor número de dígitos, 12 a 16 dígitos después del punto decimal).

Además, se construyó un nuevo programa usando el método “analítico” que consistió en calcular ξ_t a partir de la condición inicial x_0 y el punto $x_0 + \delta$, luego de normalizar y desplazar los datos de ξ_t vs t , se calculó la pendiente en $t = 0$, pues $\xi'_t(0) = \lambda_q$. Una vez hecho esto se procedió a determinar $q = 1 + 1/\lambda_q t$ a partir de un valor t experimental, el punto donde $\xi(t) \approx 0$ ó $\xi(t) < 1 \times 10^{-32}$.

En este programa, ubicar un par adecuado de números (q, λ_q) significó evaluar los parámetros q y λ_q encontrados tales que una función $\exp_q(-t)$ con dichos valores de q y λ_q se ajustara a nuestros datos experimentales de ξ_t vs t . En contraste de la linealización buscada con el método de “correlación”, por lo tanto se hizo muy factible que una función $\exp_q(t)$ pudiera modelar el fenómeno de sensibilidad experimental ξ_t .

Los resultados en esta sección aparecen como sigue:

Analítico					Correlación				
z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q	z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q
1.75	μ_1	1	0.778	-0.410	1.75	μ_1	1	0.700	-0.389
1.75	μ_2	2	0.779	-0.189	1.75	μ_2	2	0.709	-0.198
1.75	μ_3	2	0.875	-0.095	1.75	μ_2	2	0.635	-0.056
			$\bar{q}_{tot} = 0.811$					$\bar{q}_{tot} = 0.685$	

Cuadro 5: Resultados del Experimento II si $z = 1.75$. Valores de q y λ_q encontrados tales que en el caso analítico una $\exp_q(-t)$ ajusta la relación ξ_t vs t , y en el caso de correlación linealizan la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs ξ_t . Note que al emplear μ_2 y μ_3 , q y λ_q son los promedios de 2 pares de valores de (q, λ_q) encontrados.

Analítico					Correlación				
z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q	z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q
2	μ_1	1	0.744	-0.489	2	μ_1	1	0.760	-0.676
2	μ_2	2	0.770	-0.217	2	μ_2	2	0.740	-0.314
2	μ_3	2	0.760	-0.110	2	μ_2	2	0.751	-0.161
			$\bar{q}_{tot} = 0.758$					$\bar{q}_{tot} = 0.750$	

Cuadro 6: Resultados del Experimento II si $z = 2$. Valores de q y λ_q encontrados tales que en el caso analítico una $\exp_q(-t)$ ajusta la relación ξ_t vs t , y en el caso de correlación linealizan la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs ξ_t . Note que al emplear μ_2 y μ_3 , q y λ_q son los promedios de 2 pares de valores de (q, λ_q) encontrados.

Analítico					Correlación				
z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q	z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q
3	μ_1	1	0.692	-0.649	3	μ_1	1	0.720	-0.890
3	μ_2	2	0.723	-0.301	3	μ_2	2	0.660	-0.332
3	μ_3	2	0.730	-0.154	3	μ_2	2	0.695	-0.197
			$\bar{q}_{tot} = 0.711$					$\bar{q}_{tot} = 0.691$	

Cuadro 7: Resultados del Experimento II si $z = 3$. Valores de q y λ_q encontrados tales que en el caso analítico una $\exp_q(-t)$ ajusta la relación ξ_t vs t , y en el caso de correlación linealizan la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs ξ_t . Note que al emplear μ_2 y μ_3 , q y λ_q son los promedios de 2 pares de valores de (q, λ_q) encontrados.

Una manera de analizar nuestros resultados es graficando ξ_t vs t para alguna condición inicial x_0 y simultáneamente graficar funciones $\exp_q(-t)$ para valores diferentes de q como se hizo en el Experimento I.

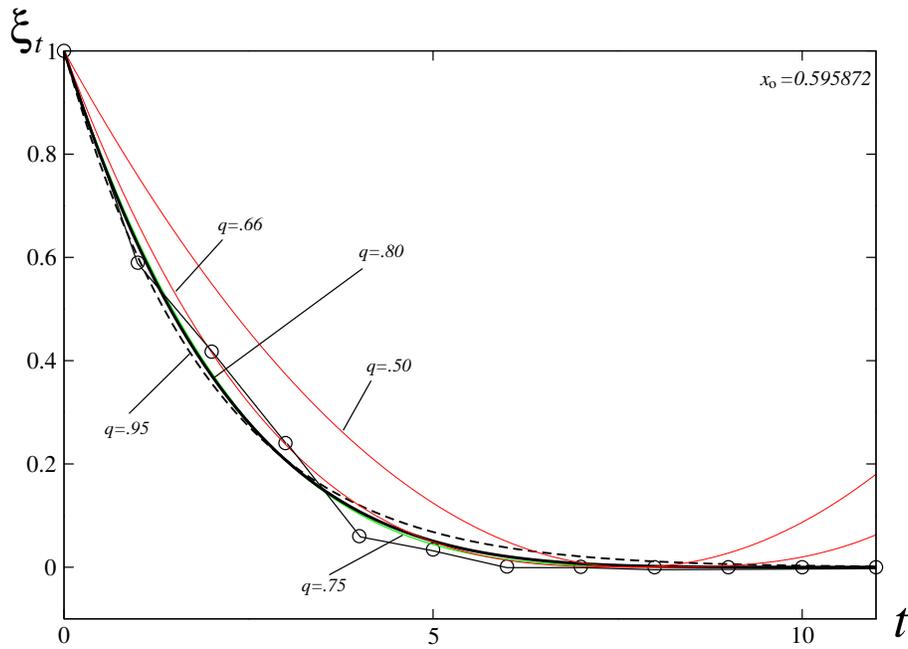


Figura 18: Gráfica de ξ_t vs t en μ_1 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 1.75$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

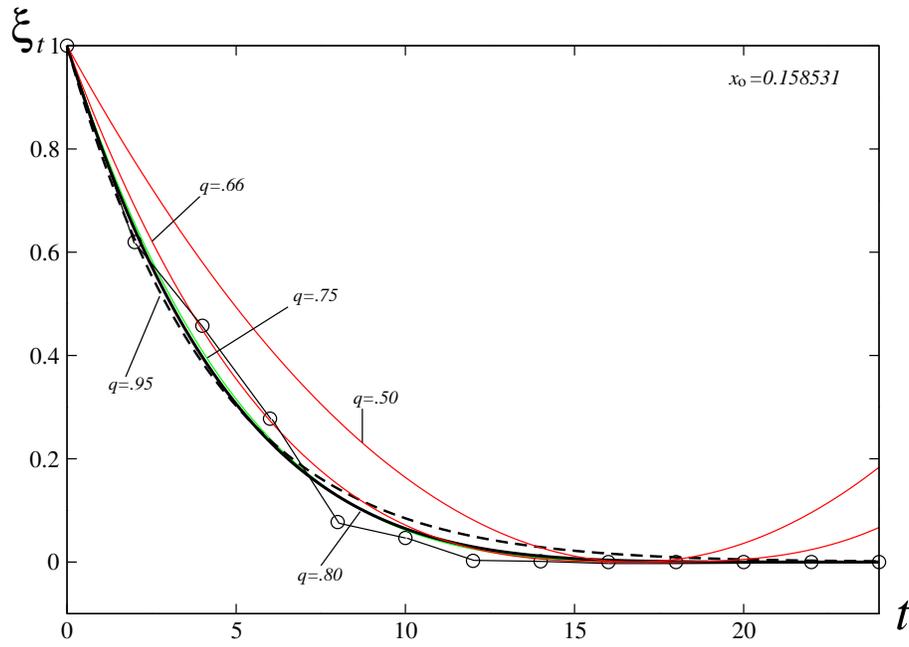


Figura 19: Gráfica de ξ_t vs t en μ_2 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 1.75$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

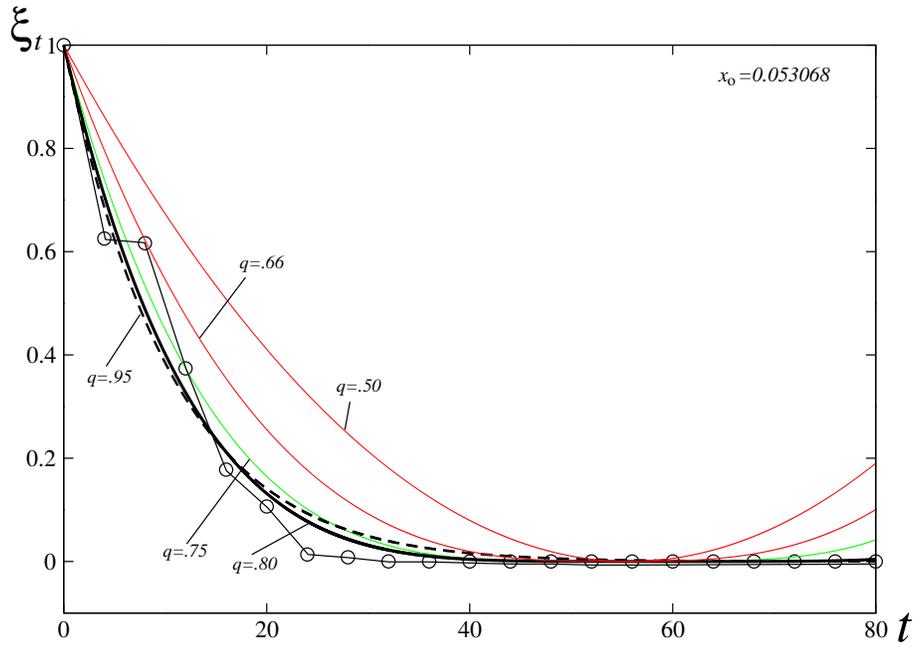


Figura 20: Gráfica de ξ_t vs t en μ_3 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 1.75$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

Si ahora observamos las gráficas de los datos $\ln_q(\xi_t)$ vs t para $z = 1,75$ (Figura 4.21), podemos notar si es que existe alguna relación lineal entre $\ln_q(\xi_t)$ y t para algún valor de q .

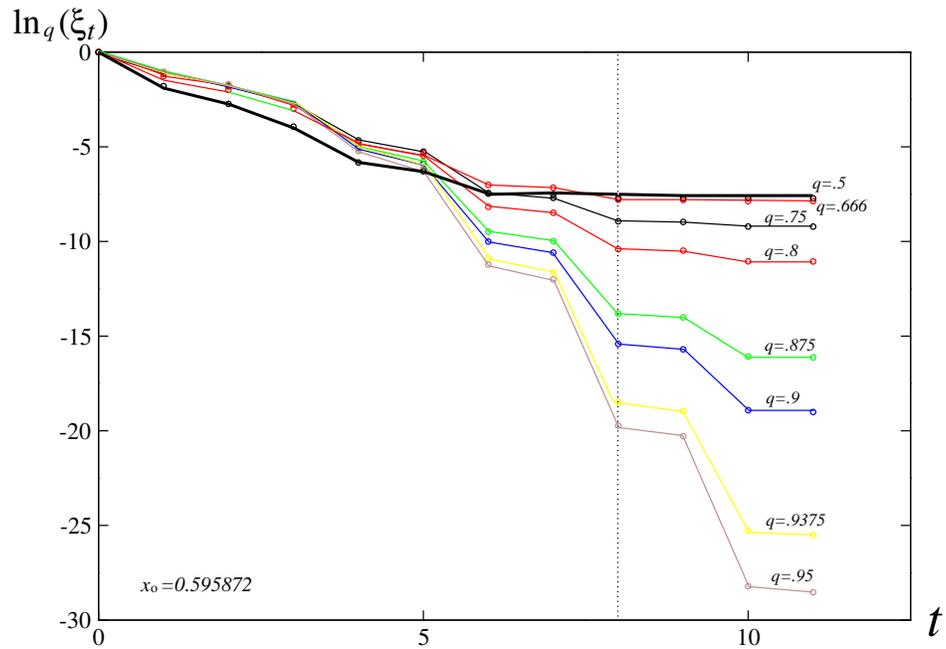


Figura 21: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_1 y $z = 1,75$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

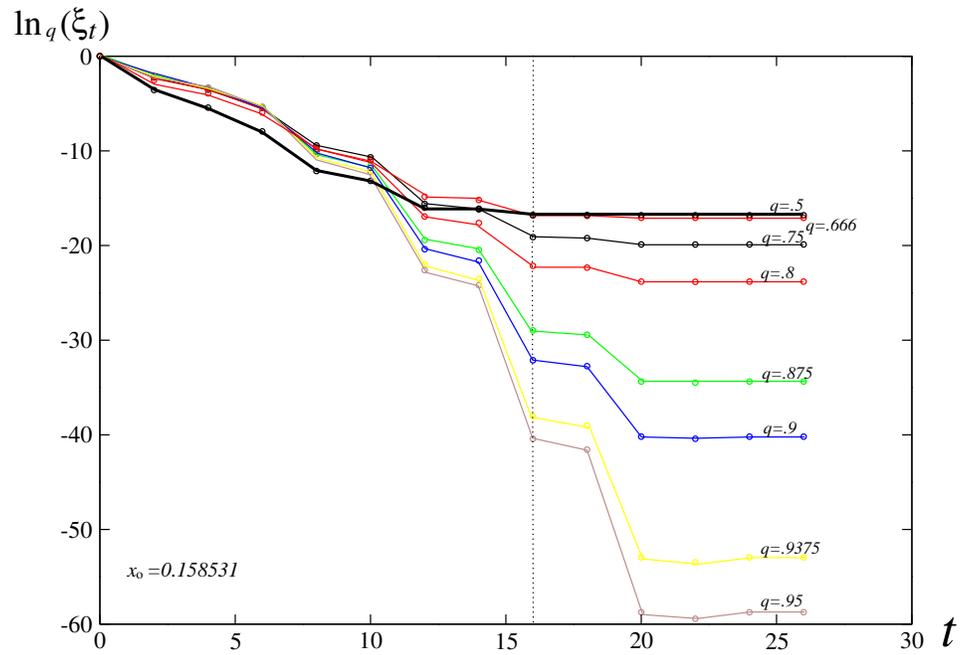


Figura 22: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_2 y $z = 1,75$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

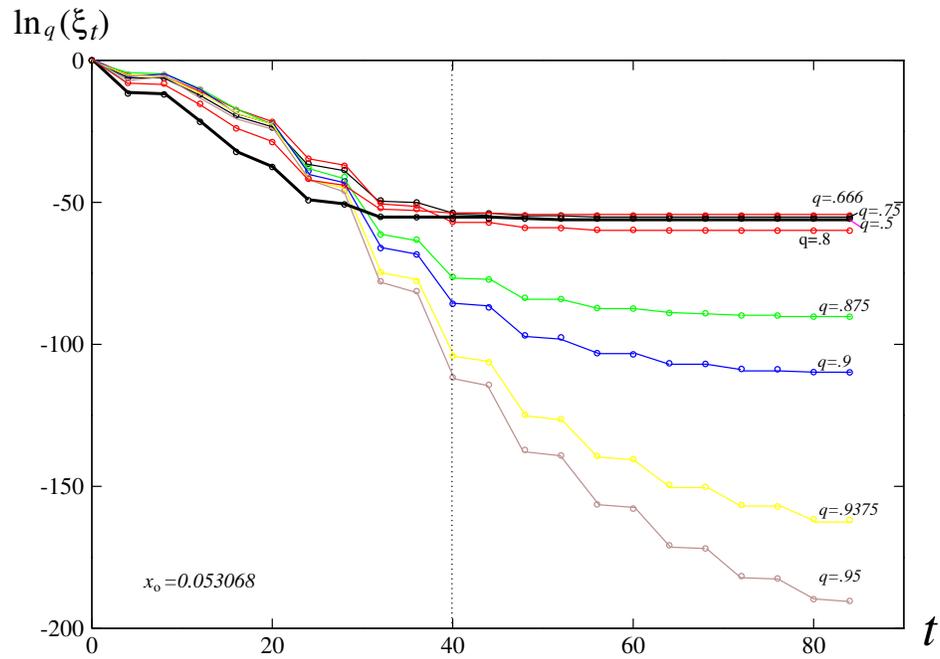


Figura 23: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_3 y $z = 1.75$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

Para el caso $z = 2$ no presentamos aquí las gráficas de ξ_t vs t ni de $\ln_q(\xi_t)$ vs t ya que son muy semejantes a las mostradas en el experimento I, pero para $z = 3$, las curvas son las siguientes:

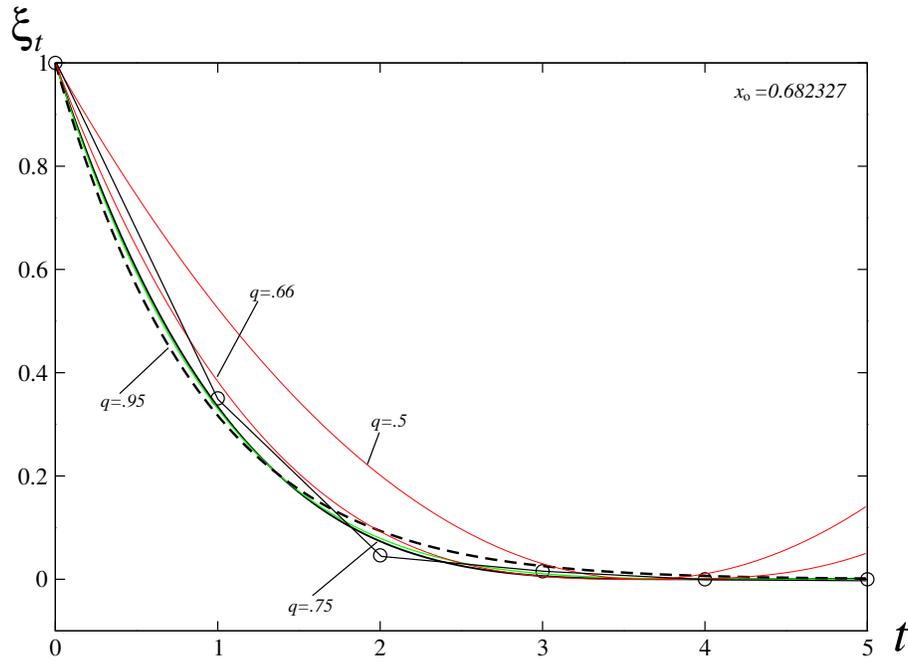


Figura 24: Gráfica de ξ_t vs t en μ_1 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 3$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

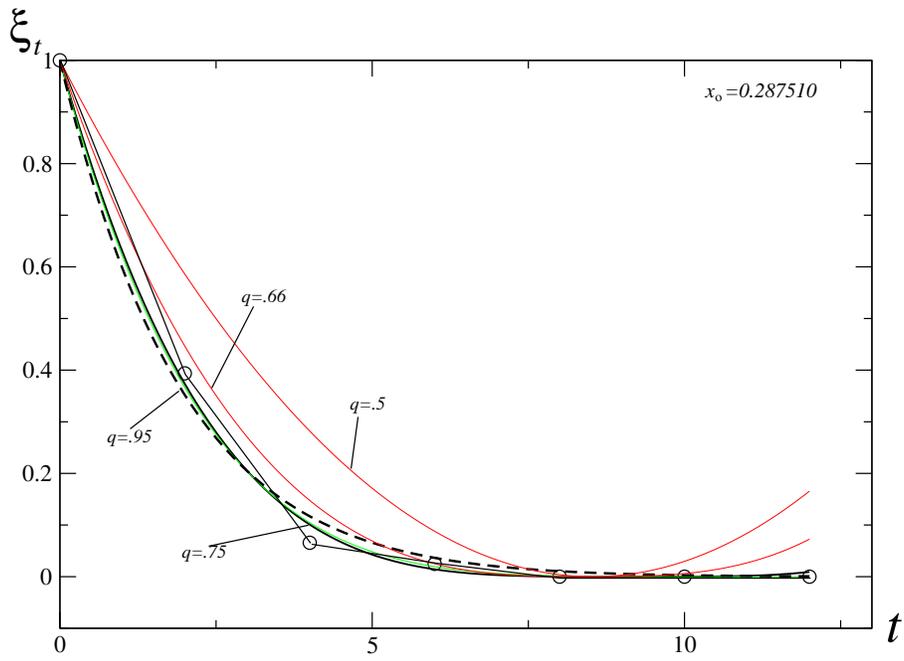


Figura 25: Gráfica de ξ_t vs t en μ_2 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 3$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

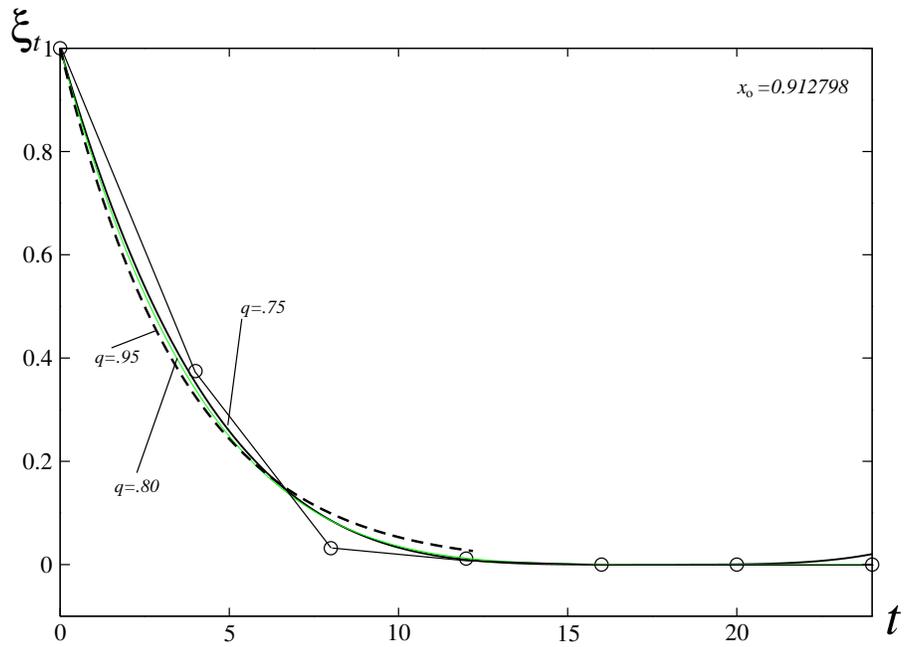


Figura 26: Gráfica de ξ_t vs t en μ_3 y funciones $\exp_q(-t)$, caso $z = 3$, la línea de puntos grandes son datos experimentales.

De la misma forma que en $z = 1.75$, podemos comprobar gráficamente si existe una relación lineal entre $\ln_q(\xi_t)$ y t para el caso $z = 3$.

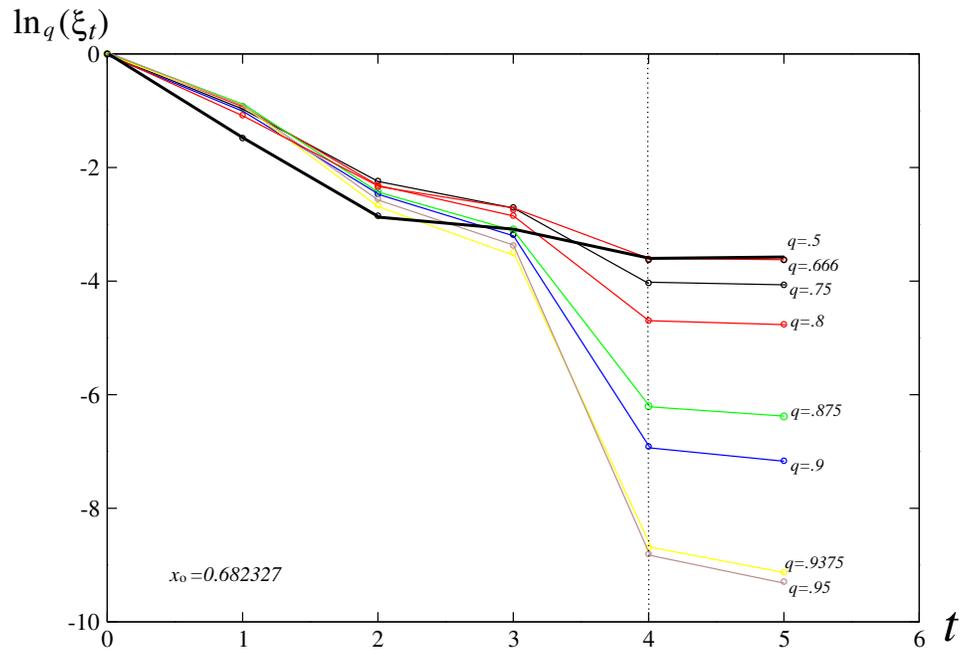


Figura 27: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_1 y $z = 3$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

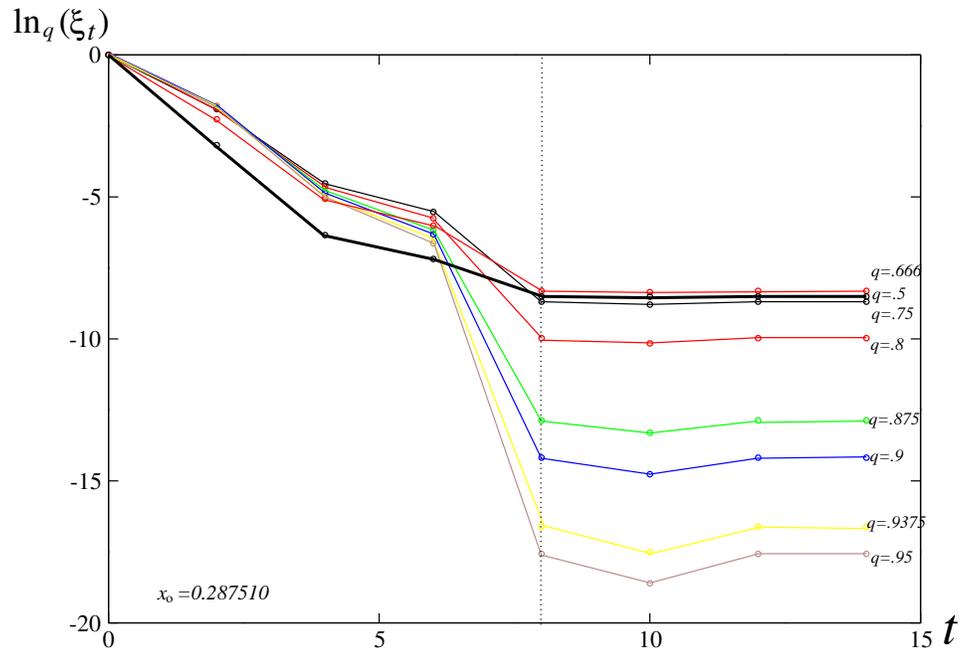


Figura 28: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_2 y $z = 3$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

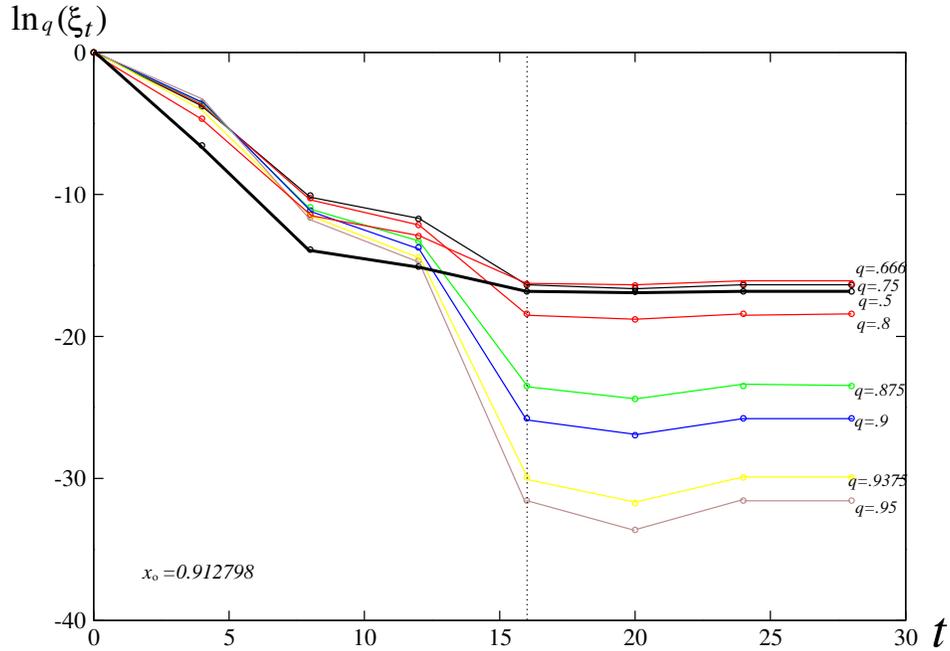


Figura 29: Gráfica de $\ln_q(\xi_t)$ vs t en μ_3 y $z = 3$, en la parte izquierda de la recta punteada las gráficas presentan diferentes curvaturas entre si, la gráfica remarcada corresponde a $q = 0.5$.

Como en el experimento I, en este caso si $z = 1.75$ ó $z = 3$ se observa que al ir cambiando q de un valor cercano a 1 hasta $q \approx 0.5$ la curvatura de las gráficas $\ln_q(\xi_t)$ vs t cambia. Es decir, de ser convexa para algunas q se vuelve concava para otras, por lo tanto podemos inferir que entre estas dos curvaturas existe una tal que la relación $\ln_q(\xi_t)$ vs t es lineal ó donde la curvatura se anula.

En el caso de que $z = 1.75$, el valor de q que linealiza es $q \approx 0.811$ ó $q \approx 0.681$, si $z = 2$ el valor que linealiza es $q \approx 0.758$ ó $q \approx 0.750$ y si $z = 3$ el valor que linealiza es $q \approx 0.711$ ó $q \approx 0.691$ según nuestros promedios mostrados en los Cuadros 4.5, 4.6 y 4.7.

¿Cuáles son entonces los verdaderos valores de q buscados?

Experimento III

Para los casos $z = 1.75$, $z = 2$ y $z = 3$, y situandonos en los puntos superestables μ_1, μ_2 y μ_3 , nuevamente se calculó ξ_t mediante los puntos x_0 y $x_0 + \delta$. Una vez hecho esto, se relacionaron los datos ξ_t con funciones $\exp_q(-t)$, pero sólo para algunos valores de q privilegiados, dichos valores fueron tales que el exponente de las $\exp_q(-t)$, a saber $1/(1 - q)$ era un número entero, entonces los valores aquí considerados de q fueron: 0.5, 0.666, 0.75, 0.8, 0.875, 0.9, 0.9375 y 0.95, porque estos implican que el exponente $1/(1 - q)$ sea 2, 3, 4, 5, 8, 10, 16 y 20 respectivamente.

En este experimento, se usó un método de ajuste de curvas mediante uno o varios parámetros, pero implementado en el programa interno para hacer “ajuste” (basado en mínimos cuadrados) de la aplicación “gnuplot” en “Linux”, el parámetro variable para cada q empleada (en cada $\exp_q(-t)$) fue λ_q , entonces, al ir cambiando q se obtenía un ajuste de curva entre cada $\exp_q(-t)$ y los datos experimentales ξ_t vs t , la manera de distinguir el mejor ajuste fue tomar los valores de q y λ_q tales que el error numérico (abajo de 5%) fuera el menor al realizar las corridas del programa.

Los resultados de dichos ajustes son los siguientes;

z	μ_i	$\#x_o$	q	λ_q
1.75	μ_1	1	0.800	-0.449
1.75	μ_2	1	0.750	-0.200
1.75	μ_3	1	0.800	-0.092
			$\bar{q}_{tot} = 0.783$	
2	μ_1	1	0.750	-0.671
2	μ_2	1	0.666	-0.221
2	μ_3	1	0.666	-0.199
			$\bar{q}_{tot} = 0.694$	
3	μ_1	1	0.750	-0.958
3	μ_2	1	0.750	-0.436
3	μ_3	1	0.666	-0.215
			$\bar{q}_{tot} = 0.722$	

Cuadro 8: Tabla de resultados del Experimento III.

Algunos resultados gráficos

Regresemos por un momento a la estructura general de las curvas experimentales de sensibilidad ξ_t vs t (Figura 4.1). Como se ha visto anteriormente, la estructura se puede visualizar por regiones y por familias de puntos, recordemos además que en el presente trabajo se ha aceptado la hipótesis de que la región II de la estructura de ξ_t vs t puede ser modelada por una $\exp_q(t)$, hecho que no se ha comprobado todavía.

Lo que enseguida se presenta es una prueba gráfica de que la región II de ξ_t vs t no puede ser modelada por una función exponencial usual e , o al menos sería algo muy complicado, a diferencia de la región I, la cual si es gobernada por la función exponencial usual e .

Tomando $z = 2$ y situándonos en los puntos superestables μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 calculamos la sensibilidad para cada caso a partir de alguna condición inicial x_0 (diferente para cada μ_i). Si a cada conjunto de datos obtenido ξ_t le aplicamos la función logaritmo natural, es decir, obtenemos $\ln(\xi_t)$, entonces veremos cuales sectores de ξ_t pueden ser linealizadas bajo el logaritmo natural \ln y cuales otros sectores no pueden serlo, básicamente la región I si y la región II no, es por esto que el presente trabajo adquiere justificación, al buscar una función que modele la región II y que dicha función sea una $\exp_q(-t)$.

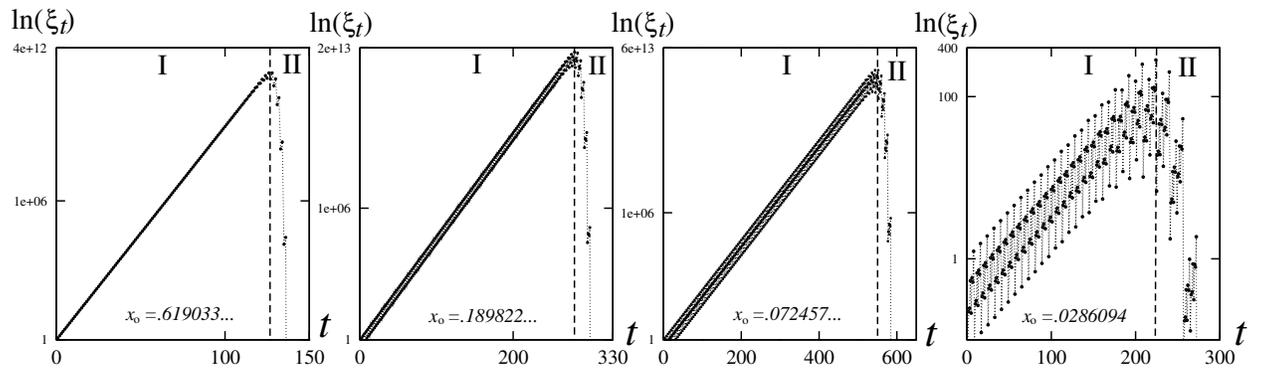


Figura 30: Gráficas de $\ln(\xi_t)$ vs t cuando $z = 2$ y en los puntos superestables μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 respectivamente

Capítulo 5

Análisis de resultados

Comparación de los experimentos I, II y III

A continuación se muestra una tabla comparativa de los resultados obtenidos en los experimentos anteriores.

Experimento	z	Método	\bar{q}_{tot}
I	2	Correlación	0.754
II	1.75	Analítico	0.811
II	1.75	Correlación	0.681
II	2	Analítico	0.758
II	2	Correlación	0.750
II	3	Analítico	0.711
II	3	Correlación	0.691
III	1.75	Ajuste de curva	0.783
III	2	Ajuste de curva	0.694
III	3	Ajuste de curva	0.722

Cuadro 1: Tabla comparativa de los promedios de q . Resultados de los Experimentos I, II y III.

En la tabla anterior es claro que si $z = 2$ el Experimento I y II coinciden en sus resultados, pues muestran que $q \approx 0.75\dots$, para cualquier μ_i , pero no es el mismo caso en Experimento III, donde $q \approx 0.69\dots$, si $z = 2$.

Una observación importante para el Experimento II es que los resultados para $z = 2$ y $z = 3$ mediante el método “analítico” y el de “correlación” son parecidos y congruentes entre sí, pues si $z = 2$ entonces q esta cerca de 0.75 y si $z = 3$, q se acerca a 0.7, a diferencia del caso $z = 1.75$ donde $q = 0.811$

no es tan coincidente con $q = 0.681$.

Si comparamos ahora el Experimento II con el III, vemos que para ninguna z y ningún método los resultados de q coinciden, pero si observamos de cerca lo obtenido en el caso $z = 1.75$ vemos que en el Experimento III $q = 0.78$ y en el Experimento II $q = 0.811$ ó $q = 0.68$, si supusieramos arbitrariamente por un momento que el único resultado válido en el Experimento III fuera el del caso $z = 1.75$ podremos notar que $q = 0.78$ es más cercano a $q = 0.811$ que a $q = 0.68$, entonces se pensaría que quizás el resultado $q = 0.68$ en el Experimento II no es tan certero como $q = 0.811$ y quizás fuera incorrecto dicho resultado.

Una aclaración respecto a los programas usados en los Experimentos I y II es que las fuentes de error fueron considerables, pues algunos programas contenían muchos cálculos en muchas líneas de código, y en algunos casos sólo se conseguía obtener pocos puntos en los datos experimentales (debido a nuestra poca precisión computacional de aproximadamente 28-32 dígitos después de punto decimal), pero de entre los programas empleados, aquellos que calculaban mediante el método analítico fueron los más confiables debido a que los resultados que producían eran obtenidos directamente de la lectura de nuestras curvas experimentales de ξ_t vs t , a diferencia de los otros programas, donde a estos datos se les sometía a más cálculos numéricos.

Entonces, si supusieramos que los únicos resultados confiables fueran aquellos obtenidos por el método analítico, veríamos que del Experimento II resulta que si $z = 1.75$ entonces $q \approx 0.81$, si $z = 2$ entonces $q \approx 0.75$ y si $z = 3$ entonces $q \approx 0.71$, sin embargo estos resultados para $z = 2$ y $z = 3$ son hasta cierto punto corroborados por el método de “correlación” en el mismo experimento II y también en el Experimento I para el caso $z = 2$.

Entonces, debido a lo anterior se observa que si z aumenta de valor, q disminuye, y por lo tanto quizás haya una relación inversamente proporcional entre q y z .

Un resultado del que podemos estar hasta cierto punto confiados según nuestro trabajo es que en general si $z = 2$, entonces $q \approx 0.75\dots$, para cualquier μ_i .

Respecto del parámetro λ_q podemos decir sólo lo que se ve claramente en los resultados: que los valores de λ_q son inversamente proporcionales a los valores de z , pero por otro lado son proporcionales a μ_i , pues si z aumenta entonces λ_q disminuye, y si μ_i aumenta entonces λ_q aumenta.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de la Figura 4.30 se manifiesta que el fenómeno de sensibilidad a condiciones iniciales en los puntos superestables μ_i , tiene esencialmente dos regiones importantes, la primera es gobernada por una función $\exp(x)$ usual, y la segunda no es modelada por dicha función.

La suposición hecha en la Sección 4.2 para la región III de la sensibilidad ξ_t (Figura 4.1), en la que decimos que $\xi_t \approx 0$ en algún tiempo finito, fue fundamental en el presente estudio, debido a que por esta suposición, nuestros datos experimentales de ξ_t en la región II pudieron ser modelados con una función $\exp_q(-x)$ (Figura 4.11) para algún valor de q y de λ_q especiales. El efecto directo de tal suposición es asumir la siguiente hipótesis: para la región II (Decaimiento) de la sensibilidad ξ_t existe una función $\exp_q(t)$ que bajo condiciones particulares si puede describir el comportamiento de ξ_t en dicha región.

Entonces, según nuestra hipótesis; la región del decaimiento de la sensibilidad ξ_t para mapeos con algún valor de z y situados en sus puntos superestables μ_i es modelada por una función $\exp_q(t)$ con $q \neq 1$, además debido a nuestros resultados más confiables, se lograron los objetivos de la tesis planteados en la Sección 3.4, concluyéndose que si $z = 1.75$, entonces $q \approx 0.81, \dots$, para cualquier valor de μ_i , si $z = 2$, entonces $q \approx 0.75, \dots$, para cualquier valor de μ_i y si $z = 3$, entonces $q \approx 0.71, \dots$, para cualquier valor de μ_i , debido a esto, quizás exista una relación funcional e inversamente proporcional entre q y z . Como los valores encontrados de q y λ_q para $z = 2$, $z = 1.75$ y $z = 3$ son diferentes entre si, se concluye también que en general, los valores de q y λ_q si es que existen, son diferentes para valores diferentes de z .

La variación del parámetro λ_q es la siguiente; $\lambda_q < 0$ para todo valor de z y situados en cualquier punto superestable μ_i , además λ_q depende inversamente del valor de z , pero también λ_q es directamente proporcional a los valores de μ_i .

Por todo lo anterior mencionado, es factible pensar que sí existen valores adecuados de q y de λ_q tales que una función $\exp_q(\lambda_q t)$ dependiente de q y λ_q puede modelar el fenómeno de la sensibilidad a condiciones iniciales en la región del decaimiento, esto para los mapeos de orden z y situados en los puntos superestables μ_i particulares de cada mapeo.

Sin embargo, aunque la región del decaimiento (Región II) de la sensibilidad ξ_t representa el acercamiento ultrarápido al atractor de periodo k y en realidad, matemáticamente este se alcance hasta $t \rightarrow \infty$, no es contradictorio suponer que $\xi_t \rightarrow 0$ en algún tiempo finito y considerar válidas nuestras conclusiones anteriores, pues el presente análisis, es una aproximación a la dinámica real.

Bibliografía

- [1] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos*. Physic-Verlag, Weinheim, (1998).
- [2] C. Beck and F. Schlogl. *Thermodynamics of chaotic systems*. Cambridge university press, (1993).
- [3] C. Anteodo and C. Tsallis. Phys. Rev 80 No. 24, 5313, (1998).
- [4] M.L. Lyra and C. Tsallis. Phys. Rev 80 No. 1, 53, (1998).
- [5] F. Baldovin and A. Robledo. Phys. Rev E 66, 045104(R), (2002).
- [6] A. Robledo. Phys. Rev A 328, 467, (2004).
- [7] C. Tsallis, F. Baldovin, R. Cerbino, P. Pierobon. *Introduction to non Extensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*. The Physics of Complex Systems, Volumen 115, International School of Physics Enrico Fermi, Editad by: F. Mallamace and H.E. Stanley, IOS Press 2004.
- [8] E. Mayoral and A. Robledo. Phys. Rev E 72, 026209, (2005).
- [9] H. Kantz and P. Grassberger. *Repellers, semi-attractors and long lived chaotic transients*. Physica 17D (1985) 75-86, North-Holland, Amstterdan.
- [10] RM. May. *Simple Methematical Models with very Complicated Dynamics*. Nature 261 (1976), 459-467.
- [11] M.J. Feigenbaum. *J. of Stat. Phys.*, 21 No. 6:669, 1979.
- [12] M.J. Feigenbaum. *J. of Stat. Phys.*, 19:25, 1978.
- [13] P.F. Verhulst: *Corres. Math. et Physique* 10, 113 (1838).

- [14] T.R. Malthus. *Ensayo sobre el principio de población*. FCE, México, (1977).