UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

RESULTADOS RECIENTES EN CONTROL A CERO DE LA ECUACIÓN DEL CALOR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOSÉ MATEOS CORTÉS

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARÍA DE LA LUZ JIMENA DE TERESA DE OTEYZA

MÉXICO, D. F., JULIO 2007

Resultados Recientes en Control a Cero de la Ecuación del calor

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias presenta:

José Mateos Cortés

Junio 2007

A mi madre.
A Frida.
A mis hermanos.

Quiero agradecerle a mi directora de tesis por su infinita paciencia y dedicación para la realización de éste trabajo. Sin estas virtudes no hubiera sido posible terminarlo. Tal vez si enumerará a todas las personas que intervinierón a lo largo de este trabajo se me olvidarían algunos nombres, por lo cual, me llevaria a cometer alguna injusticia. Así, les agradezco por todas las bondades que me proporcionaron para concluirlo. En particular, a todos mis sinodales por la lectura y las recomendaciones para mejorar esta tesis.
En la etapa final de este proceso hago patente mi gratitud en especial al Dr. Francisco Marcos López García por la lectura de mi trabajo y las sugerencias que enriquecieron esta tesis.

Gracias colegas.

Contenido

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo presentamos una serie de resultados que se han desarrollado en los últimos diez años sobre el control a cero de la ecuación del calor. La literatura sobre este tema es muy extensa y los resultados publicados son de distinta índole. Véase por ejemplo en [7], [9] y [11]. Nos concentraremos pues a analizar el control de la ecuación del calor en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, no vacío y con frontera de clase C^2. Además consideramos problemas con control distribuido, es decir, cuando el control actúa en un subconjunto abierto y no vacío $\omega \subset \Omega$. Sólo imponemos condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera de Ω. Otras condiciones en la frontera se pueden ver en [8], [10] y [13] se pueden encontrar resultados con control en la frontera.

Dado $T > 0$, definimos $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$. Consideremos la siguiente ecuación del calor lineal

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + a(x,t)y = h1_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

donde 1_ω denota la función característica del conjunto ω, $a(x,t) \in L^\infty(Q)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ es un dato inicial fijo y $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ es un "control" a determinar.
Decimos que el sistema (1.1) es controlable a cero (o que h es un control nulo de (1.1)) si para todo $y^0 \in L^2(\Omega)$ existe $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que la solución correspondiente satisface

$$y(T) = 0. \tag{1.2}$$

A lo largo de esta tesis también consideramos la ecuación semilineal

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h1_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

donde f es una función con distintos comportamientos.

Cuando f es una función globalmente Lipschitz la definición de control a cero de (1.3) coincide con la definición dada para el caso lineal. Sin embargo, cuando f tiene un crecimiento "superlineal" existe la posibilidad de una "explosión en tiempo finito", es decir, existe T^* tal que $y(t) \to \infty$ cuando $t \to T^*$. En ese caso necesitamos encontrar $h \in V$, V un espacio de Banach a determinar, de manera que y solución de (1.3) verifique

$$y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$$

y

$$y(T) = 0.$$

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 1 damos una serie de resultados preliminares que utilizaremos a lo largo de toda la tesis. En particular, presentamos resultados de existencia y unicidad de soluciones y estimaciones de energía. Además damos algunos resultados de compacidad y un teorema de punto fijo que utilizaremos cuando estudiemos los casos semilineales siguientes: cuando f es una función Lipschitz continua y cuando f es una función con crecimiento ligeramente superlineal.

En el capítulo 2 demostramos una "desigualdad de Carleman" para la ecuación del calor. Esta parte seguramente es la más técnica de la tesis pero es necesaria ya que nos permite obtener una desigualdad de observabilidad para el sistema adjunto que a su vez conduce al control a cero de la ecuación del calor. En el capítulo 3 demostramos el control a cero de la ecuación del calor lineal. El capítulo 4 está dedicado a demostrar el control a cero de (1.3) cuando f es una función globalmente Lipschitz. Para hacer esto utilizamos el resultado de control a cero en el caso lineal y mediante una técnica de punto fijo resolvemos el caso semilineal. Finalmente, en el capítulo 5, demostramos el resultado principal de esta tesis. Veremos que cuando se puede escribir

$$f(s) = sg(s)$$

con

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(s)|}{log^{3/2}(1+|s|)} = 0$$

entonces para todo dato inicial $y^0 \in W^{2,p}(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$ con $p > n+2$, existe un control $h \in L^2(Q)$ tal que la solución y de (1.3) verifica $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ y $y(T) = 0$.

Este resultado se demostró originalmente en [7]. Sin embargo hemos utilizado una técnica muy distinta a la utilizada allí. De hecho, construimos un control más regular a partir del control en L^2 que se obtiene en el caso lineal utilizando una técnica que aprovecha el efecto regularizante de la ecuación del calor. Esta técnica fue introducida por Bodart et all (ver[3]) en un contexto muy distinto conocido como "control insensibilizante". Este problema analiza el control de dos ecuaciones de calor "en cascada" y en ese contexto no es posible utilizar las técnicas de [7]. La técnica que utilizamos tiene la ventaja de adaptarse a otros contextos como el de dominios no acotados (ver [12]).

Capítulo 2

Resultados preliminares

En este capítulo presentamos una serie de resultados que se utilizarán a lo largo de la tesis. Empezamos recordando resultados de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación del calor.
En general consideraremos en este trabajo a Ω un conjunto abierto, acotado y con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 aunque algunas definiciones y resultados son válidos en otro contexto. También utilizamos distintos espacios de Sobolev. Para $1 \leq p \leq \infty$ introducimos el espacio de Sobolev

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) | D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad \text{para todo multiíndice de orden} \quad |\alpha| \leq m\}$$

donde

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n} f$$

es la derivada en el sentido de distribuciones de f, y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ es el orden del multiíndice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I\!N^n$.
Para $p = 2$ denotamos

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Estos espacios vectoriales son espacios de Banach (de Hilbert cuando $p = 2$) respecto a la norma

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{m} |D^\alpha f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular, en $H^1(\Omega)$ tenemos la siguiente norma

$$\|f\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |\nabla f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ con la norma de $W^{m,p}(\Omega)$. Así $H_0^1(\Omega)$ denota la cerradura de $C_c^\infty(\Omega)$ con la norma de $H^1(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y, cuando Ω es acotado en alguna dirección,

$$\|f\|_{H_0^1} \sim \left(\int_\Omega |\nabla f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta equivalencia de normas se prueba con la desigualdad de Poincaré (ver [4] página 134). Definimos $W^{-m,p}(\Omega)$ como el espacio dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$.
También consideraremos espacios del tipo $L^p(0,T;X)$ y $W^{1,p}(0,T;X)$ para X un espacio de Banach. El espacio $L^p(0,T;X)$ entra en la teoría que se conoce como espacios de Bochner [16]. En estos espacios es

necesario definir una integral. Esta integral que tiene sentido cuando (A, Σ, μ) es un espacio de medida y tomamos funciones $f : A \to X$ con X un espacio de Banach.
En nuestro caso consideraremos $A = [0, T]$ y $\mu = dt$ la medida de Lebesgue en $[0, T]$. A continuación definiremos funciones simples $f : [0, T] \to X$.
Si $\{A_1, \ldots, A_k\}$ es una colección finita de subconjuntos mutuamente disjuntos de $[0, T]$ cada uno con medida finita, y si $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es un conjunto en X, se le llama a la función f, definida por

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(t) x_i, \qquad t \in [0, T],$$

una función simple de $[0, T]$ en X. Para las funciones simples se define

$$\int_0^T f(t)dt := \sum_{i=1}^{k} |A_i| x_i.$$

La integral está bien definida. Sea ahora f una función arbitraria definida de $[0, T]$ en X. Se dice que f es medible sobre $[0, T]$, si existe una sucesión de funciones simples $\{f_j\}$ con soporte en $[0, T]$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} \|f_j(t) - f(t)\|_X = 0 \qquad c.t.p. \quad [0, T] \tag{2.1}$$

Se puede mostrar que f es medible si su rango es separable y si, para x' en el dual de X, la función escalar $x'(f(\cdot))$ es medible sobre $[0, T]$.
Supóngase que una sucesión de funciones simples $\{f_j\}$ que satisfacen (2.1) se puede escoger de tal manera que

$$\lim_{j \to \infty} \int_0^T \|f_j(t) - f(t)\|_X dt = 0.$$

Se dice entonces que f es Bochner integrable sobre X y se define

$$\int_0^T f(t)dt = \lim_{j \to \infty} \int_0^T f_j(t)dt, \tag{2.2}$$

donde el límite no depende de la elección de las funciones simples. Una función medible f es integrable sobre $[0, T]$ si y sólo si la función escalar $\|f(\cdot)\|_X$ es integrable sobre $[0, T]$. De hecho se tiene la desigualdad siguiente

$$\| \int_0^T f(t)dt\|_X \leq \int_0^T \|f(t)\|_X dt.$$

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se dice que $f \in L^p(0, T; X)$ si $\|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty$, con

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ ess\ sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

En este contexto definimos $W^{1,p}(0, T; X)$. Si $1 \leq p \leq \infty$, se dice que $f \in W^{1,p}(0, T; X)$ si $\|f\|_{W^{1,p}(0,T;X)} < \infty$, con

$$\|f\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T [\|f_t(t)\|_X^p + \|f(t)\|_X^p]\, dt\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ ess\ sup_{t \in [0,T]} (\|f_t(t)\|_X + \|f(t)\|_X) & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

donde la derivada de f con respecto a t está definida en el sentido de distribuciones. Decimos que $F \in W^{-m,1}_{loc}(0,T;X)$ si existe $G \in L^1_{loc}(0,T;X)$ tal que $F = \frac{\partial^m G}{\partial t^m}$ en el sentido de distribuciones.
Para $a(x,t) \in L^\infty(Q)$ consideremos la siguiente ecuación del calor:

$$
\left\{ \begin{array}{ll} w_t - \Delta w + a(x,t)w = f & \text{en } Q \\ w = 0 & \text{en } \Sigma \\ w(0) = w^0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.3}
$$

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea $f \in L^2(Q)$, $w^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces, existe una única solución w de (2.3) tal que*

$$
w \in C([0,T], L^2(\Omega)),
$$

$$
w \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega)).
$$

Además para cada $0 \leq t' < t \leq T$ se tiene que

$$
\left(\int_\Omega w^2(t)dx \right)^{1/2} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|w(t')\|_{L^2(\Omega)} \right). \tag{2.4}
$$

En particular

$$
\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|w^0\|_{L^2(\Omega)} \right) \tag{2.5}
$$

y

$$
\|w\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq \tilde{C} \left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|w^0\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{2.6}
$$

donde $C > 0$ es una constante genérica que puede variar de renglón en renglón. Más aún, cuando $w^0 \in H^1_0(\Omega)$, $\quad w \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ con

$$
\|w\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(Q)} + \|w^0\|_{H^1_0(\Omega)} \right). \tag{2.7}
$$

Demostración:
Los resultados de existencia quedan fuera de los objetivos de este trabajo pero se pueden encontrar en [2]. Demostraremos únicamente las estimaciones de energía. Empezaremos con la demostración de (2.5) y de (2.6). Para probar estos resultados se multiplica por w a la ecuación (2.3), e integrando por partes en Ω se obtiene

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + \int_\Omega |\nabla w|^2 dx + \int_\Omega a(x,t)w^2 dx = \int_\Omega fw dx.
$$

Utilizando $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ para cada $\alpha, \beta \in I\!R$ y la desigualdad de *Hölder* tenemos:

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + 2\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leq \int_\Omega f^2 dx + (1 + 2\|a\|_\infty)\int_\Omega w^2 dx. \tag{2.8}
$$

Multiplicando (2.8) por e^{-Ct} con $C = (2\|a\|_\infty + 1)$ obtenemos

$$
\frac{d}{dt}\left(e^{-Ct}\int_\Omega w^2(t)dx \right) + e^{-Ct}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \leq e^{-Ct}\int_\Omega f^2 dx
$$

Integrando sobre el intervalo $[t', t]$, tenemos

$$
\begin{aligned}
e^{-Ct}\int_\Omega w^2(t)dx + \int_{t'}^t e^{-Cs}\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt \quad &\leq \quad \int_{t'}^t e^{-Cs}\int_\Omega f^2 dxds \\
&\quad + e^{-Ct'}\int_\Omega w^2(t')dxdt.
\end{aligned}
$$

Así, finalmente tenemos

$$\int_\Omega w^2(t)dx + \int_{t'}^t e^{-Cs}\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt \leq C\left(\int_0^T\int_\Omega f^2 dxdt + \int_\Omega w^2(t')dx\right),$$

por lo cual, obtenemos (2.4). Esto implica en particular (2.5). Como $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(Q)$, se obtiene (2.6). De manera similar, probaremos (2.7), es decir, multiplicamos por $-\Delta w$ la ecuación (2.3). Integrando por partes en $\Omega \times (0,t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_\Omega \nabla w \nabla w_t dxdt + \int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt &= \int_0^t\int_\Omega f\Delta w dxdt \\ &+ \int_0^t\int_\Omega a(x,t) w \Delta w dxdt.\end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt \leq \frac{\epsilon}{2}\int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt \\ +\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t\int_\Omega f^2 dxdt + \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t\int_\Omega a^2 w^2 dxdt + \frac{\epsilon}{2}\int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Para $\epsilon = 1/2$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t\int_\Omega |\nabla w|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dx &\leq C\int_0^t\int_\Omega f^2 dxdt \\ &+C\|a\|_\infty^2 \int_0^t\int_\Omega w^2 dxdt.\end{aligned}$$

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w(t)|^2 dx + \int_0^t\int_\Omega |\Delta w|^2 dx \leq C\int_0^t\int_\Omega f^2 dxdt \\ +C\|a\|_\infty^2 \int_0^t\int_\Omega w^2 dxdt + \int_\Omega |\nabla w(0)|^2 dx.\end{aligned}$$

Esto termina la prueba de (2.7). ■

A continuación se presentarán una serie de resultados necesarios para el desarrollo de la tesis. En algunos casos se menciona el resultado con su respectiva refencia.

En lo que sigue X y B son espacios de Banach. Sea $\tau_h f(x) = f(x+h)$. Utilizaremos los siguientes resultados que son una versión del Teorema de Fréchet-Kolmogorov debida a Simon [14].

Teorema 2 *Supongamos que $X \subset B$ con inclusión compacta, $F \subset L^p(0,T;B)$ donde $1 \leq p < \infty$. Supongamos que F está acotado en $L^1_{loc}(0,T;X)$ y que $\|\tau_h f - f\|_{L^p(0,T-h;B)} \to 0$ cuando $h \to 0$ uniformemente para toda $f \in F$. Entonces F es relativamente compacto en $L^p(0,T;B)$.*

Observación 3 *El teorema nos dice en particular que $L^2(0,T;H^1_0(Q)) \cap H^1(0,T;L^2(Q)) \subset L^2(Q)$ es una inclusión compacta.*

Utilizaremos también el siguiente corolario:

Corolario 4 *Sea $X \subset B$ con inclusión compacta, y sea m cualquier entero. Sea F un conjunto acotado en $W^{-m,1}_{loc}(0,T;X)$ tal que $\frac{\partial F}{\partial t}$ está acotado en $L^r(0,T;B)$ donde $r > 1$. Entonces F es relativamente compacto en $C(0,T;B)$.*

Para la prueba ver [14].
El Teorema 6 es un teorema de punto fijo debido a Kakutani que utilizaremos en los capítulos 4 y 5. No incluiremos la demostración pues queda lejos de los objetivos de esta tesis. Sin embargo el lector interesado puede encontrar la demostración en [1]. Para este teorema necesitamos primero incluir la definición de correspondencia hemicontinua superiormente.

Definición 5 *Sea Λ una correspondencia multivaluada definida sobre un subconjunto compacto $K \subset X$ con X un espacio de Hilbert y donde $\Lambda(x) \subset Y$ con Y otro espacio de Hilbert. Consideraremos únicamente correspondencias donde $\Lambda(x)$ es no vacío convexo y cerrado. Sea Y' el espacio dual de Y. Para todo $p \in Y'$, definimos la función soporte de $\Lambda(x)$ como*

$$\sigma(\Lambda(x), p) = \sup_{y \in \Lambda(x)} < p, y >$$

donde $< \cdot, \cdot >$ denota el producto de dualidad Y', Y. Diremos que Λ es hemicontinua superiormente en $x_0 \in K$ si y sólo si para todo $p \in Y'$ la función $x \mapsto \sigma(\Lambda(x), p)$ es semicontinua superiormente en x_0, i.e,

$$\limsup_{x \to x_0} \sigma(\Lambda(x), p) \leq \sigma(\Lambda(x_0), p), \forall p \in Y'.$$

Teorema 6 *(Punto fijo de Kakutani). Sea K un subconjunto convexo y compacto de un espacio de Banach X, y $G : X \to K$ una correspondencia multivaluada hemicontinua superiormente convexa y cerrada. Entonces G tiene un punto fijo $\overline{x} \in G(\overline{x}) \cap K$.*

Capítulo 3

Desigualdad de Carleman

El objetivo de este capítulo es demostrar con todo detalle una *desigualdad de Carleman* para la ecuación del calor con potenciales. Esta desigualdad es la base para obtener una desigualdad de observabilidad que implica la controlabilidad a cero de la ecuación del calor lineal con potenciales. Con Ω y ω verificando lo enunciado en la introducción y para $a(x,t) \in L^\infty(Q)$, sea w solución de la siguiente ecuación del calor lineal con potenciales:

$$\left\{\begin{array}{ll} w_t - \Delta w + a(x,t)w = f & \text{en } Q \\ w = 0 & \text{en } \Sigma \\ w(0) = w^0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{3.1}$$

donde $f \in L^2(Q)$ y $w^0 \in L^2(\Omega)$ están prefijados. A continuación enunciamos, sin prueba, un resultado que muestra la existencia de cierta función auxiliar. La demostración se puede encontrar en [11].

Lema 7 *Sea Ω abierto, acotado y de clase C^2, dado $\omega \subset \Omega$ abierto y no vacío, existe una función $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi > 0$ en Ω y $\psi = 0$ en $\partial\Omega$ y tal que $|\nabla\psi| \neq 0$ en $\overline{\Omega \setminus \omega}$.*

Más aún, dado $x_0 \in \Omega,$ y $\delta > 0$, tal que $B_\delta(x_0) \subset\subset \omega$, podemos elegir una función ψ de tal manera que $|\nabla\psi| \neq 0$ en $\overline{\Omega \setminus B_\delta(x_0)}$. Nótese que por las condiciones sobre ψ se tiene que $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\nu} < 0$.
A partir del lema anterior, definimos las siguientes funciones:

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi + m\|\psi\|_\infty)}}{t(T-t)} \tag{3.2}$$

y

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x) + m\|\psi\|_\infty)} - e^{2\lambda m\|\psi\|_\infty}}{t(T-t)} \tag{3.3}$$

con $m > 1$ fija.

Observación 8 *Consideramos $m > 1$ para que el numerador de* (3.3) *sea siempre negativo. Con esta definición, es fácil ver que $|\tilde{\varphi}_t| \leq T\varphi^2$ y $|\tilde{\varphi}_{tt}| \leq T^2\varphi^3$.*

El objetivo de esta sección es probar la siguiente desigualdad válida para w solución de (3.1).

Teorema 9 *Sean w solución de* (3.1) *y $\varphi, \tilde{\varphi}$ dadas por* (3.2),(3.3) *respectivamente. Entonces existen $C > 0$, $\hat{\lambda} > 0$ tal que para $\lambda \geq \hat{\lambda}$ existe $s_0(\lambda)$ tal que para toda $s \geq s_0(\lambda)$ se satisface:*

$$\begin{aligned} &\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{1}{s\varphi} e^{2s\tilde{\varphi}}(|\Delta w|^2 + |w_t|^2) + (s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2 + s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2)e^{2s\tilde{\varphi}}dxdt \\ &\leq C\left(\int_0^T\!\!\int_\Omega e^{2s\tilde{\varphi}}f^2dxdt + \int_0^T\!\!\int_\omega s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2e^{2s\tilde{\varphi}}dxdt.\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Demostración:
Hacemos el cambio de variable $v = e^{s\tilde{\varphi}}w$. Observamos que

$$v_t = w_t e^{s\tilde{\varphi}} + w e^{s\tilde{\varphi}} s\tilde{\varphi}_t = w_t e^{s\tilde{\varphi}} + sv\tilde{\varphi}_t$$

y el Laplaciano de v es

$$\Delta v = (\Delta w)e^{s\tilde{\varphi}} + 2s\nabla v\nabla\tilde{\varphi} - s^2 v|\nabla\tilde{\varphi}|^2 + sv\Delta\tilde{\varphi}.$$

Además,

$$\nabla\varphi = \nabla\tilde{\varphi} = \lambda\varphi\nabla\psi.$$

También tenemos

$$\Delta\tilde{\varphi} = \Delta\varphi = div(\lambda\varphi\nabla\psi) = \lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 + \lambda\varphi\Delta\psi.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.1) y reduciendo, se tiene

$$v_t - \Delta v - sv\tilde{\varphi}_t + 2s\lambda\varphi\nabla v\nabla\psi - s^2\lambda^2 v\varphi^2|\nabla\psi|^2 = f_s,$$

donde $v(0) = 0$, $v(T) = 0$, $v|_{\partial\Omega} = 0$ en el siguiente sentido

$$\lim_{t\to 0^+} v(t) = 0, \quad \lim_{t\to T^-} v(t) = 0.$$

Aquí

$$f_s = e^{s\tilde{\varphi}}f - sv\lambda\varphi\Delta\psi - sv\varphi\lambda^2|\nabla\psi|^2 - a(x,t)v.$$

Tenemos que

$$L_1 v + L_2 v = f_s$$

donde

$$L_1 v = -\Delta v - s^2\lambda^2\varphi^2 v|\nabla\psi|^2 - sv\tilde{\varphi}_t$$

y

$$L_2 v = v_t + 2s\lambda\varphi\nabla v\cdot\nabla\psi.$$

Por otro lado

$$\|f_s\|^2 = (L_1 + L_2, L_1 + L_2)$$

donde $(,)$ representa el producto interior en $L^2(Q)$. Tenemos que

$$\|f_s\|^2 = \|L_1\|^2 + 2(L_1, L_2) + \|L_2\|^2. \tag{3.5}$$

Ahora analizamos el producto $(L_1 v, L_2 v)$

$$\begin{aligned}(L_1 v, L_2 v) = \ & -\int_Q \Delta v v_t dxdt - 2s\lambda\int_Q \varphi\nabla\psi\cdot\nabla v\Delta v dxdy \\ & -s^2\lambda^2\int_Q \varphi^2|\nabla\psi|^2 v v_t dxdt \\ & -2s^3\lambda^3\int_Q \varphi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi\cdot\nabla v v dxdy \\ & -s\int_Q \tilde{\varphi}_t v v_t dxdt - 2s^2\lambda\int_Q \varphi\tilde{\varphi}_t\nabla\psi\cdot\nabla v v dxdt.\end{aligned} \tag{3.6}$$

En primer lugar, mostraremos que el producto interior de (3.6) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}(L_1 v, L_2 v) = \ & Y_1 + X_1 + 2s\lambda^2\int_Q \varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2 dxdt - s\lambda^2\int_Q \varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt \\ & +3s^3\lambda^4\int_Q \varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt\end{aligned} \tag{3.7}$$

donde

$$Y_1 = -s\lambda \int_0^T\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 dxdt \geq 0$$

y

$$|X_1| \leq C\left[s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi|\nabla v|^2 dxdt + s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3 v^2 dxdt\right].$$

Para obtener (3.7), desarrollamos los seis términos que aparecen en la expresión de (L_1v, L_2v) es decir, $(L_1v, L_2v) = \sum_{i=1}^6 I_i$. En este desarrollo integraremos por partes en varias ocasiones con respecto al espacio y al tiempo.

Primero calculamos

$$I_1 = -\int_Q \Delta v v_t dxdt.$$

Integrando por partes en Q:

$$-\int_Q \Delta v v_t dxdt = \int_0^T\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v_t dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega} v_t\frac{\partial v}{\partial n} dxdt.$$

Sabemos que $\int_0^T\int_{\partial\Omega} v_t\frac{\partial v}{\partial n}dxdt = 0$, por lo cual,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{d}{dt}|\nabla v|^2 dxdt.$$

Observamos que

$$\lim_{t\to 0}\nabla v = 0$$

y

$$\lim_{t\to T}\nabla v = 0.$$

Así

$$I_1 \equiv 0.$$

Consideremos el segundo término de (3.6)

$$I_2 = -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi\nabla\psi\cdot\nabla v\Delta v dxdt.$$

Integrando por partes en Q, obtenemos

$$\begin{aligned} -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi\nabla\psi\cdot\nabla v\Delta v dxdt &= 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla(\varphi\nabla\psi\cdot\nabla v)\nabla v dxdt \\ &\quad -2s\lambda\int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi\nabla\psi\cdot\nabla v\frac{\partial v}{\partial n}dxdt = I_2^1 + I_2^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\Omega\subset I\!R^n$ y $x\in\partial\Omega$, sean $\tau^1, \tau^2, ..., \tau^{n-1}$ vectores tangenciales a la frontera de manera que $\tau^i(x)\perp\eta(x)$ para $i = 1, 2, ..., n-1$. Tenemos que $\{\tau^1(x), \tau^2(x), ..., \tau^{n-1}(x), \eta(x)\}$ forman una base para $I\!R^n$. De esta manera, si v está definida en $\partial\Omega$ una superficie regular entonces

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \eta_i\frac{\partial v}{\partial\eta} + \sum_{k=1}^{n-1}\tau_i^k\frac{\partial v}{\partial\tau^k}.$$

Si $v = 0$ en $\partial\Omega$ tenemos que $\frac{\partial v}{\partial x_i} = \eta_i\frac{\partial v}{\partial\eta}$. Por lo que, en $\partial\Omega$

$$\nabla v = \left(\eta_i\frac{\partial v}{\partial\eta}\right), \tag{3.8}$$

de esto se deriva que

$$I_2^2 = -2s\lambda \int_0^T\int_{\partial\Omega} \varphi\nabla\psi\cdot\nabla v\frac{\partial v}{\partial\eta}dxdt = -2s\lambda\int_0^T\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 dxdt = -2Y_1.$$

Ahora, analicemos la integral:

$$\begin{aligned} I_2^1 = 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla(\varphi\nabla\psi\cdot\nabla v)\nabla v dxdt &= 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi\nabla(\nabla\psi\cdot\nabla v)\cdot\nabla v dxdt + \\ & 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2 dxdt = I_2^{1,1}+I_2^{1,2}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\varphi\nabla(\nabla\psi\cdot\nabla v)\cdot\nabla v = \varphi\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n(\psi_{ij}v_i+\psi_i v_{ij})v_j$$

donde $\psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, $\psi_{ij} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}$. No es difícil comprobar que

$$\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\psi_i v_{ij}v_j = \frac{1}{2}\nabla\psi\cdot\nabla(|\nabla v|^2).$$

Por tanto, utilizando la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} I_2^{1,2} &= 2s\lambda\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega\varphi\psi_{ij}v_iv_j dxdt \\ &+ s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi\nabla\psi\cdot\nabla(|\nabla v|^2)dxdt. \end{aligned}$$

Para el término

$$2s\lambda\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_Q\varphi\psi_{ij}v_iv_j dxdt$$

aplicamos la desigualdad de Schwarz obteniendo:

$$\begin{aligned} 2s\lambda\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_Q\varphi\psi_{ij}v_iv_jdxdt \le 2s\lambda\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\Bigg[&\left(\int_Q\varphi\psi_{ij}|v_i|^2dxdt\right)^{1/2} \\ &\left(\int_Q\varphi\psi_{ij}|v_j|^2dxdt\right)^{1/2}\Bigg]. \end{aligned}$$

Además, sea

$$M \ge \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\right| \forall i,j,$$

reuniendo los resultados anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\int_Q 2s\lambda\varphi\psi_{ij}v_iv_jdxdt &\le nM\int_Q s\lambda\varphi|\nabla v|^2dxtd + nM\int_Q s\lambda\varphi|\nabla v|^2dxdt \\ &\le 2nMs\lambda\int_Q\varphi|\nabla v|^2dxdt \le Cs\lambda\int_Q\varphi|\nabla v|^2dxdt. \end{aligned}$$

Así

$$I_2 = I_2^{1,2} + s\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi \nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla v|^2) dxdt + 2s\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla\psi \cdot \nabla v|^2 dxdt - 2Y_1.$$

Por lo tanto $I_2^{1,2}$ será un sumando en X_1. Falta analizar el segundo término, para lo que, integrando por partes sobre Q, obtenemos:

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi \nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla v|^2) dxdt &= s\lambda \int_0^T\!\!\int_{\partial\Omega} \varphi (|\nabla v|^2) \frac{\partial\psi}{\partial\eta} dxdt \\ &-s\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla\psi|^2 |\nabla v|^2 dxdt - s\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla v|^2 \Delta\psi dxdt. \end{aligned}$$

Sabemos por (3.8) que sobre $\partial\Omega$

$$|\nabla v|^2 = \left| \left(\eta_i \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right|^2 = \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi \nabla\psi \cdot \nabla(|\nabla v|^2) dxdt &= s\lambda \int_0^T\!\!\int_{\partial\Omega} \varphi \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2 \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \\ -s\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla\psi|^2 |\nabla v|^2 dxdt &- s\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla v|^2 \Delta\psi dxdt = Y_1 + J_2^1 + J_2^2. \end{aligned}$$

Observemos que $|J_2^2| \leq Cs\lambda \int_Q \varphi |\nabla v|^2 dxdt$ y será parte de X_1. Finalmente llegamos a

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1^2 + 2s\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla\psi \cdot \nabla v|^2 dxdt \\ &\quad -s\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi |\nabla\psi|^2 |\nabla v|^2 dxdt - Y_1. \end{aligned}$$

Consideremos la tercera integral del producto interior $(L_1 v, L_2 v)$:

$$I_3 = -s^2\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi^2 |\nabla\psi|^2 v v_t dxdt = -\frac{1}{2} s^2\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi^2 |\nabla\psi|^2 \frac{d}{dt} |v|^2 dxdt.$$

Integrando por partes con respecto a t, tenemos

$$I_3 = s^2\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \varphi\varphi_t |v|^2 dxdt.$$

Como $\varphi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\psi + m\|\psi\|_\infty)}}{t(T-t)}$, derivando con respecto a t obtenemos

$$\varphi_t = \frac{-e^{\lambda(\psi + m\|\psi\|_\infty)}(T-2t)}{t^2(T-t)^2}.$$

Como $\psi > 0$ en Ω, por lo cual,

$$\lambda\psi > 0 \text{ entonces se tiene } e^{\lambda\psi} > 1.$$

Claramente $e^{2\lambda\psi} > e^{\lambda\psi}$ y multiplicando por el factor $e^{2\lambda m\|\psi\|_\infty}$, obtenemos

$$e^{2\lambda(\psi + m\|\psi\|_\infty)} > e^{\lambda(\psi + 2m\|\psi\|_\infty)} > e^{\lambda(\psi + m\|\psi\|_\infty)}.$$

Tomando valor absoluto a φ_t tenemos

$$|\varphi_t| = \frac{e^{\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)}|T-2t|}{t^2(T-t)^2} \leq \frac{Te^{2\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)}}{t^2(T-t)^2} = T\varphi^2.$$

Sustituyendo, obtenemos

$$s^2\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi\varphi_t|v|^2dxdt \leq Ms^2\lambda^2T\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|v|^2dxdt.$$

Esta desigualdad nos permite incluir éste término en X_1. Consideremos la cuarta integral del producto interior de (L_1v, L_2v):

$$I_4 = -2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\cdot\nabla v)vdxdt = -s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\cdot\nabla v^2)dxdt.$$

Ahora, integrando por partes en Q

$$\begin{aligned} -s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\cdot\nabla v^2)dxdt &= s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \nabla\cdot(\varphi^3|\nabla\psi|^2\nabla\psi)v^2dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_{\partial\Omega} s^3\lambda^3\varphi^3|\nabla\psi|^2v^2\frac{\partial\psi}{\partial\eta}dxdt. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} -s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|\nabla\psi|^2(\nabla\psi\cdot\nabla v^2)dxdt &= 3s^3\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|\nabla\psi|^4v^2dxdt \\ &\quad +3\lambda^3s^3\int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2\Delta\psi\varphi^3v^2dxdt \end{aligned}$$

El último término $3\lambda^3s^3\int_0^T\int_\Omega |\nabla\psi|^2\Delta\psi\varphi^3v^2dxdt \leq C\lambda^3s^3\int_0^T\int_\Omega \varphi^3v^2dxdt$ por lo que se incluir en X_1. Por tanto

$$I_4 = X_1 + 3s^3\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|v|^2dxdt$$

Consideremos la quinta integral del producto interior de (L_1v, L_2v):

$$I_5 = -\int_0^T\int_\Omega s\tilde{\varphi}_tvv_tdxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\tilde{\varphi}_t\frac{d}{dt}v^2dxdt$$

Integrando por partes con respecto a t, obtenemos

$$I_5 = \frac{1}{2}s\int_0^T\int_\Omega \tilde{\varphi}_{tt}|v|^2dxdt.$$

Como

$$|\tilde{\varphi}_{tt}| \leq T^2\varphi^3$$

$$|I_5| = \left|\frac{1}{2}s\int_0^T\int_\Omega \tilde{\varphi}_{tt}|v|^2dxdt\right| \leq CT^2\int_0^T\int_\Omega s\varphi^3|v|^2dxdt$$

Por tanto, I_5 podemos incluirlo también en el término X_1. Consideremos la última integral de (L_1v, L_2v): a saber

$$I_6 = -2s^2\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t(\nabla\psi\cdot\nabla v)vdxdt = -s^2\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t\nabla\psi\cdot\nabla v^2dxdt$$

Calculando

$$
\begin{aligned}
-s^2\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t \nabla\psi\cdot\nabla v^2 dxdt &= s^2\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega div(\varphi\tilde{\varphi}_t\nabla\psi) v^2 dxdt + 0\\
&= 2s^2\lambda^2 \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t |\nabla\psi|^2 v^2 dxdt\\
&+s^2\lambda \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t \Delta\psi v^2 dxdt
\end{aligned}
$$

Por un cálculo anterior, sabemos que

$$|\tilde{\varphi}_t| \leq CT\varphi^2$$

Acotando a las derivadas de ψ en $\overline{\Omega}$, se tiene

$$
-\int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda\varphi^3\nabla\psi\cdot\nabla v^2 dxdt \leq CT\left(\int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi^3 v^2 dxdt + \int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda\varphi^3 v^2 dxdt.\right)
$$

Observando la parte derecha de la última desigualdad, se tiene que ambos terminos se absorben en el término X_1. Juntando los resultados de todas las integrales, tenemos

$$
\begin{aligned}
(L_1v, L_2v) &= Y_1 + X_1 - \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt + 2\int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2 dxdt\\
&+3\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3|\nabla\psi|^4 v^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, sabemos que $f_s = L_1v + L_2v$. Multiplicando por el término $\lambda^2 s\varphi v|\nabla\psi|^2$, se tiene

$$f_s\lambda^2 s\varphi v|\nabla\psi|^2 = s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 L_1v + s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 L_2v.$$

Sustituyendo la expresión de $L_1v = -\Delta v - s^2\lambda^2\varphi^2 v|\nabla\psi|^2 - sv\tilde{\varphi}_t$, en la igualdad anterior, e integrando sobre Q,

$$
\begin{aligned}
s\lambda^2\int_0^T\!\!\int_\Omega f_s\varphi v|\nabla\psi|^2 dxdt &= -s\lambda^2\int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi v|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt - s^3\lambda^4\int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt\\
&-s^2\lambda^2\int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\tilde{\varphi}_t v^2|\nabla\psi|^2 dxdt + s\lambda^2\int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi v|\nabla\psi|^2 L_2v dxdt.
\end{aligned}
$$

Despejando

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt &= -\int_0^T\!\!\int_\Omega f_s\lambda^2 s\varphi v|\nabla\psi|^2 dxdt - \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt\\
&-\int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi\tilde{\varphi}_t v^2|\nabla\psi|^2 dxdt + \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 L_2v dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Queremos reducir esta expresión a

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt = \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt + X_2,$$

donde

$$|X_2| \leq \frac{1}{16}\int_Q |L_2v|^2 dxdt + C_1\int_Q s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + \frac{1}{2}\|f_s\|^2.$$

Usando la desigualdad $cd \leq \frac{c^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon d^2}{2}$ con $\varepsilon = 8$, $c = L_2 v$ y $d = s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2$ e integrando sobre $\Omega \times (0,T)$, obtenemos

$$\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 L_2 v dxdt \leq \frac{1}{16}\int_0^T\int_\Omega |L_2 v|^2 dxdt + 4\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^2 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt.$$

Acotando $|\nabla\psi|^4$ tenemos

$$\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 L_2 v dxdt \leq \frac{1}{16}\int_0^T\int_\Omega |L_2 v|^2 dxdt + C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt.$$

Por otro lado, para la segunda integral en (3.9) e integrando por partes sobre Q, tenemos

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt &= \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla(\varphi v|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla v dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\frac{\partial v}{\partial n} dxdt, \end{aligned}$$

como $v = 0$ en $\partial\Omega$, $\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\frac{\partial v}{\partial n}dxdt = 0$.
Así,

$$-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla(\varphi v|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla v dxdt. \tag{3.10}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla(\varphi v|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla v dxdt &= \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt \\ &\quad +\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 v\nabla v\cdot\nabla(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt. \end{aligned}$$

Analicemos la segunda integral de la igualdad anterior, esto es,

$$\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 v\nabla v\cdot\nabla(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla(\varphi|\nabla\psi|^2)\cdot\nabla v^2 dxdt.$$

Por la fórmula de Green, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla v^2\cdot\nabla(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt &= \int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2 v^2\frac{\partial(\varphi|\nabla\psi|^2)}{\partial\eta}dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 v^2\Delta(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt \end{aligned}$$

Como $v = 0$ en la $\partial\Omega$, se tiene que $\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2 v^2\frac{\partial(\varphi|\nabla\psi|^2)}{\partial n}dxdt = 0$.
Así,

$$\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\nabla v^2\cdot\nabla(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt = -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 v^2\Delta(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt.$$

Ahora bien, por la definición de φ, se tiene que

$$\Delta(\varphi|\nabla\psi|^2) = \lambda\Delta\psi|\nabla\psi|^2\varphi + \lambda^2|\nabla\psi|^4\varphi + \varphi\Delta|\nabla\psi|^2 + 2\lambda\varphi\nabla\psi\cdot\nabla|\nabla\psi|^2.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 v^2\Delta(\varphi|\nabla\psi|^2)dxdt &= -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2|\nabla\psi|^2\Delta\psi dxdt \\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^4\varphi v^2|\nabla\psi|^4 dxdt - \int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\Delta(|\nabla\psi|^2)dxdt \\ &\quad -2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\nabla\psi\cdot\nabla(|\nabla\psi|^2)dxdt. \end{aligned}$$

De lo anterior y de (3.10) obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt \\
\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2|\nabla\psi|^2\Delta\psi dxdt - \int_0^T\int_\Omega s\lambda^4\varphi v^2|\nabla\psi|^4 dxdt \\
-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\Delta(|\nabla\psi|^2) dxdt - 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\nabla\psi\cdot\nabla(|\nabla\psi|^2) dxdt.
\end{aligned}
$$

Acotando superiormente la norma infinito de las derivadas ψ obtenemos

$$
\left|-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2|\nabla\psi|^2\Delta\psi dxdt\right| \leq C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt
$$

$$
\left|-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^4\varphi v^2|\nabla\psi|^4 dxdt\right| \leq C_1\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt
$$

$$
\left|-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\Delta(|\nabla\psi|^2) dxdt\right| \leq C_2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt
$$

$$
\left|-2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3\varphi v^2\nabla\psi\cdot\nabla(|\nabla\psi|^2) dxdt\right| \leq C_3\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt,
$$

concluyendo que

$$
-\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v^2|\nabla\psi|^2\Delta v dxdt = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2 dxdt + X_2
$$

Consideremos la tercera integral de (3.9):

$$
-\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi\tilde{\varphi}_t v^2|\nabla\psi|^2 dxdt
$$

Ya probamos anteriormente que $|\tilde{\varphi}_t| \leq T\varphi^2$. Tomando el valor absoluto a la siguiente expresión, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\left|-\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi\tilde{\varphi}_t v^2|\nabla\psi|^2 dxdt\right| \quad &\leq \quad \int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2 v^2|\varphi\tilde{\varphi}_t||\nabla\psi|^2 dxdt \\
&\leq T\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2 v^2\varphi^3 dxdt \\
&\leq T\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt,
\end{aligned}
$$

por lo que éste termino pertenece a X_2. Considerando la última integral de (3.9):

$$
-\int_0^T\int_\Omega f_s s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 dxdt
$$

tenemos por la desigualdad de Schwarz

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega f_s s\lambda^2\varphi v|\nabla\psi|^2 dxdt \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega f_s^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^2 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt \\
&\leq \frac{1}{2}\|f_s\|^2 + C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Resumiendo, hemos probado que

$$\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2dxdt + X_2, \tag{3.11}$$

donde

$$|X_2| \leq \frac{1}{16}\int_0^T\int_\Omega |L_2v|^2dxdt + C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3v^2dxdt + \frac{1}{2}\|f_s\|^2.$$

Regresando al producto interior

$$\begin{aligned}(L_1v, L_2v) &= Y_1 + X_1 + 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2dxdt\\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2dxdt\\ &\quad +3\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt\end{aligned}$$

y sustituyendo

$$2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt$$

por la expresión en (3.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}&(L_1v, L_2v) = Y_1 + 2X_2 + X_1 + 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2dxdt\\ &+\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2dxdt + \int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Sabemos por otra parte, que

$$\|f_s\|^2 = \|L_1v\|^2 + 2(L_1v, L_2v) + \|L_2v\|^2.$$

Sustituyendo (3.12) se tiene

$$\begin{aligned}\|f_s\|^2 &= \|L_1v\|^2 + 2Y_1 + 2X_1 + 4X_2 + 2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla v|^2dxdt\\ &\quad 2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt + 4\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi\cdot\nabla v|^2dxdt\\ &\quad +\|L_2v\|^2.\end{aligned}$$

Acotemos inferiormente $\|f_s\|^2$:

Recordemos que $Y_1 = -\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda\varphi\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2\frac{\partial\psi}{\partial n}dxdt \geq 0$, por la construcción de ψ. Además por las estimaciones para X_1 y X_2 tenemos

$$\begin{aligned}&\|f_s\|^2 \geq \|L_1v\|^2 - C_1\int_0^T\int_\Omega s\lambda\varphi|\nabla v|^2dxdt\\ &\quad -C_2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^3\varphi^3v^2dxdt - \frac{1}{4}\|L_2v\|^2 + C_3\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3v^2dxdt - 2\|f_s\|^2\\ &\quad +2\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2\cdot|\nabla v|^2dxdt + 2\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3v^2|\nabla\psi|^4dxdt + \|L_2v\|^2.\end{aligned}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}
3\|f_s\|^2 \quad \geq \quad & \|L_1 v\|^2 + \frac{3}{4}\|L_2 v\|^2 - C_1 \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \\
& -C_2 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt + C_3 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt \\
& +2\int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \cdot |\nabla v|^2 dxdt + 2\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f_s\|^2 \quad \geq \quad & \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 - \tilde{C}_1 \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \\
& -\tilde{C}_2 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt + \tilde{C}_3 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt \\
& +\frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \cdot |\nabla v|^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt.
\end{aligned}$$

En lo que sigue, utilizaremos la bola centrada en algún $x_0 \in \Omega$ y de radio $\delta > 0$, $B_\delta \subset \omega$ para lo que se construyó la función ψ dada en el lema 1.

$$\begin{aligned}
\|f_s\|^2 \quad \geq \quad & \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 - \tilde{C}_1 \int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \\
& -\tilde{C}_2 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt + \tilde{C}_3 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt \\
& +\frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \cdot |\nabla v|^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt \\
& = \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 - \tilde{C}_1 \int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \\
& -\tilde{C}_1 \int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt - \tilde{C}_2 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt \\
& +\tilde{C}_3 \int_0^T\!\!\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \cdot |\nabla v|^2 dxdt \\
& +\frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2 \cdot |\nabla v|^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt.
\end{aligned}$$

Por construcción de ψ, existe k_δ tal que $0 < k_\delta \leq |\nabla\psi(x)|$ para toda $x \in \Omega \setminus B_\delta$
Así,

$$\frac{2}{3}k_\delta^2 \int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt \leq \frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2|\nabla\psi|^2 dxdt.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
& \|f_s\|^2 + C_1 \int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \geq \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 \\
& \quad + \int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} \left(\frac{2}{3}k_\delta^2 s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 - C_1 s\lambda\varphi|\nabla v|^2\right) dxdt - C_2 \int_Q s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt \\
& \quad +C_3 \int_Q s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt.
\end{aligned}$$

Tenemos que para cualquier $\alpha < \frac{2}{3}\min(k_\delta^4, k_\delta^2)$ y para cada $\lambda > \widehat{\lambda} = \max\left(\frac{c_1}{2/3k^2-\alpha}, \frac{c_2}{2/3k^4-\alpha}\right)$

$$
\begin{aligned}
\|f_s\|^2 + C_1\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt \geq{}& \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 \\
&+\alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt \\
&-C_2\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s^3\lambda^3\varphi^3 v^2 dxdt + \\
&+\frac{2}{3}\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^4 dxdt + C_3\int_Q s^2\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|f_s\|^2 + C_1\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \tilde{C}\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt \geq{}& \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 \\
+\alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega\setminus B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt.&
\end{aligned}
$$

Sumando los terminos $\alpha\int_0^T\!\int_{B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt$ y $\alpha\int_0^T\!\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt$ en ambos lados de la desigualdad anterior, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\|f_s\|^2 + C\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \tilde{C}\int_0^T\!\!\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt \geq{}& \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 \\
+\alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \alpha\int_0^T\!\!\int_{\Omega} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt.&
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Por otro lado, sabemos que

$$-\Delta v = L_1 v + s^2\lambda^2\varphi^2|\nabla\psi|^2 v + s\tilde{\varphi}_t v.$$

Hemos obtenido con anterioridad $|\tilde{\varphi}_t| \leq T\varphi^2$, por lo cual

$$|-\Delta v| \leq |L_1 v| + s^2\lambda^2\varphi^2|\nabla\psi|^2|v| + Ts\varphi^2|v|$$

Dividiendo por $(s\varphi)^{\frac{1}{2}}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\left|-\frac{\Delta v}{(s\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right| \quad &\leq \quad \left|\frac{L_1 v}{(s\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right| + \left|s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\varphi^{\frac{3}{2}}|\nabla\psi|^2 v\right| + \left|Ts^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{3}{2}}v\right| \\
&\leq \left|\frac{L_1 v}{(s\varphi)^{\frac{1}{2}}}\right| + Ms^{\frac{3}{2}}\lambda^2\varphi^{\frac{3}{2}}|v| + Ts^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{3}{2}}|v|
\end{aligned}
$$

Como $s > 1$ es arbitraria, para toda $\lambda \geq \sqrt{T}$ se tiene que $s^{\frac{3}{2}}\lambda^2\varphi^{\frac{3}{2}} \geq Ts^{\frac{1}{2}}\varphi^{\frac{3}{2}}$.
Integrando sobre Q obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi} dxdt \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{|L_1 v|^2}{s\varphi} dxdt + C\int_0^T\!\!\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2. \tag{3.14}$$

Razonando de manera semejante con $L_2 v = v_t + 2s\lambda\varphi\nabla\psi\cdot\nabla v$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi} dxdt \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega \frac{|L_2 v|^2}{s\varphi} dxdt + C\int_0^T\!\!\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt. \tag{3.15}$$

Multiplicando por un $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ a (3.14) y (3.15) respectivamente, tenemos

$$\frac{1}{6}\int_0^T\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{3}\int_0^T\int_\Omega \frac{|L_1 v|^2}{s\varphi}dxdt + C\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt$$

y

$$\frac{1}{8}\int_0^T\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega \frac{|L_2 v|^2}{s\varphi}dxdt + C\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt.$$

donde $C > 0$ es una constante genérica que puede cambiar de línea en línea. Sumando ambas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8}\int_0^T\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi}dxdt + \frac{1}{6}\int_0^T\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi}dxdt \\
&\leq \frac{1}{3}\int_0^T\int_\Omega \frac{|L_1 v|^2}{s\varphi}dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega \frac{|L_2 v|^2}{s\varphi}dxdt \\
&+C\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + C\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Si $s \geq T^2$ se tiene que $\frac{1}{s\varphi} < 1$

$$\frac{1}{3}\int_Q \frac{|L_1 v|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2,$$

y

$$\frac{1}{4}\int_Q \frac{|L_2 v|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2.$$

Sumando ambas desigualdades tenemos

$$\frac{1}{3}\int_Q \frac{|L_1 v|^2}{s\varphi}dxdt + \frac{1}{4}\int_Q \frac{|L_2 v|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 + \frac{1}{4}\|L_2 v\|^2.$$

Tenemos que para cada $s \geq T^2$, $\lambda \geq \sqrt{T}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\int_0^T\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi}dxdt + \frac{1}{6}\int_0^T\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi}dxdt \leq \frac{1}{3}\|L_1 v\|^2 \\
+\frac{1}{4}\|L_2 v\|^2 + C\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + C\int_Q s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
C\left(\|f_s\|^2 + \int_0^T\int_{B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \int_0^T\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt\right) \geq \int_0^T\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi}dxdt + \\
\int_0^T\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi}dxdt + \int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt + \int_Q s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Observemos que el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos un término que involucra al gradiente de v sobre la bola B_δ. Para ello consideramos $B_r \subset\subset \omega$ con $r > \delta$. Definimos $\rho(x) \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \rho(x) = 1 & \text{en } B_\delta \\ 0 < \rho(x) \leq 1 & \text{en } B_r \setminus B_\delta \\ \rho(x) = 0 & \text{en } \Omega \setminus B_r. \end{cases} \tag{3.17}$$

Multiplicando por el factor $\rho s\lambda^2\varphi v \in L_2(Q)$ a $f_s = L_1 v + L_2 v$, tenemos

$$f_s\rho s\lambda^2\varphi v = -\Delta v\rho s\lambda^2\varphi v - \rho s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^2 - \rho s^2\lambda^2\varphi\tilde{\varphi}_t v^2 + \rho s\lambda^2\varphi v v_t + 2\rho s^2\lambda^3\varphi^2 v\nabla\psi\cdot\nabla v.$$

Integrando sobre Q

$$\begin{aligned}\int_Q f_s\rho s\lambda^2\varphi v dxdt = & -\int_Q \Delta v\rho s\lambda^2\varphi v dxdt - \int_Q \rho s^3\lambda^4\varphi^3 v^2|\nabla\psi|^2 dxdt \\ & -\int_Q \rho s^2\lambda^2\varphi\tilde{\varphi}_t v^2 dxdt + \int_Q \rho s\lambda^2\varphi v v_t dxdt \\ & +2\int_Q \rho s^2\lambda^3\varphi^2 v\nabla\psi\cdot\nabla v dxdt = \sum_{i=1}^{5} J_i\end{aligned} \tag{3.18}$$

Consideremos la primer integral de la expresión derecha de la igualdad de (3.18). Integrando por partes sobre Ω tenemos

$$J_1 = -\int_0^T\int_\Omega \Delta v\rho s\lambda^2 v\varphi dxdt = \int_0^T\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(\rho s\lambda^2\varphi v)dxdt - \int_0^T\int_{\partial\Omega}\rho s\lambda^2\varphi v\frac{\partial v}{\partial n}.$$

Como $v = 0$ en la $\partial\Omega$, entonces $-\int_0^T\int_{\partial\Omega}\rho s\lambda^2\varphi v\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Por otra parte,

$$\nabla(s\lambda^2\rho\varphi v) = s\lambda^2\rho\varphi\nabla v + s\lambda^2\varphi v\nabla\rho + s\lambda^2\rho v\nabla\varphi.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(s\lambda^2\rho\varphi v)dxdt = & \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi v\nabla\rho\cdot\nabla v dxdt \\ & + \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho v\nabla\varphi\cdot\nabla v dxdt.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}& J_1 = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\varphi|\nabla v|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla v^2 dxdt \\ & +\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\nabla\varphi\cdot\nabla v^2 dxdt = \sum_{i=1}^{3} J_1^i.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned}J_1^1 = & \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\nabla\varphi\cdot\nabla v^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 div(\rho\nabla\varphi)v^2 dxdt \\ & +\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2 v^2\frac{\partial(\rho\nabla\varphi)}{\partial n}dxdt.\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}J_1^2 = & \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla v^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 div(\varphi\nabla\rho)v^2 dxdt \\ & +\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2 v^2\frac{\partial(\varphi\nabla\rho)}{\partial n}dxdt\end{aligned}$$

Pero como $v = 0$ en $\partial\Omega$, $\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Omega} s\lambda^2 v^2\frac{\partial(\rho\nabla\varphi)}{\partial n}dxdt = 0$. Obtenemos así que

$$\begin{aligned}& J_1 = \int_0^T\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla(s\lambda^2\rho\varphi v)dxdt = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\varphi|\nabla v|^2 dxdt \\ & -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 div(\varphi\nabla\rho)v^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2 div(\rho\nabla\varphi)v^2 dxdt.\end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollando $div(\varphi\nabla\rho)$ tenemos

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2div(\varphi\nabla\rho)dxdt=-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2\varphi\Delta\rho dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3v^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla\psi dxdt.$$

Es decir:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2div(\varphi\nabla\rho)dxdt=&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega\backslash B_r} s\lambda^2v^2\varphi\Delta\rho dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2v^2\varphi\Delta\rho dxdt\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega\backslash B_r} s\lambda^3v^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla\psi dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^3v^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla\psi dxdt.\end{aligned}$$

Como $supp\rho\subset B_r$ tenemos que

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2div(\varphi\nabla\rho)dxdt=-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\Delta\rho s\lambda^2v^2\varphi dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^3v^2\varphi\nabla\rho\cdot\nabla\psi dxdt.$$

Similarmente calculando $div(\rho\nabla\varphi)$, multiplicando por el término $s\lambda^2v^2$ e integrando sobre Q tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2div(\rho\nabla\varphi)dxdt\;=\;&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\rho\lambda^4\varphi v^2|\nabla\psi|^2dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\rho\lambda^3\varphi v^2\Delta\psi dxdt\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^3v^2\varphi\nabla\psi\cdot\nabla\rho dxdt.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2v^2div(\rho\nabla\varphi)dxdt\;=\;&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\rho s\lambda^4\varphi v^2dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\rho s\lambda^3v^2\varphi dxdt\\&-\frac{1}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi\nabla\psi\cdot\nabla\rho v^2dxdt\end{aligned}$$

En conclusión

$$\begin{aligned}J_1\;=\;&\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2dxdt\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2v\varphi dxdt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^3v^2\varphi dxdt\\&-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^4v^2\varphi dxdt-\frac{1}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi\nabla\psi\cdot\nabla\rho v^2dxdt.\end{aligned}$$

Consideremos la segunda integral de (3.18), es decir:

$$J_2=-\int_0^T\int_\Omega s^3\rho\lambda^4v^2\varphi^3|\nabla\psi|^2dxdt=-\int_0^T\int_{B_r} s^3\lambda^4v^2\varphi^3\rho dxdt$$

Tomando la tercera integral de (3.18), se tiene

$$\begin{aligned}|J_3|=\left|-\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\rho\tilde{\varphi}_tv^2\varphi dxdt\right|\;\le\;&\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\rho|\tilde{\varphi}_t|v^2\varphi dxdt\le C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\rho v^2\varphi^3dxdt\\&=C\int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^2\varphi^3v^2\rho dxdt.\end{aligned}$$

Considerando la cuarta integral de (3.18), integrando por partes con respecto a t tenemos

$$J_4 = \int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\varphi v v_t dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\rho\varphi\frac{d}{dt}|v|^2 dxdt = -\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \rho\varphi_t|v|^2 dxdt$$

Finalmente obtenemos

$$|J_4| = \left|-\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \rho\varphi_t|v|^2 dxdt\right| \leq T\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2 v^2\varphi^2\rho dxdt.$$

Tomando la última integral de (3.18), calculando

$$\begin{aligned} J_5 = 2\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^3\rho\varphi^2 v\nabla v\nabla\psi dxdt &= \int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^3\rho\varphi^2\nabla v^2\nabla\psi dxdt \\ = -\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^3 div(\rho\varphi^2\nabla\psi)v^2 dxdt. \end{aligned}$$

Desarrollando esta última integral obtenemos

$$\begin{aligned} J_5 = &-\int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^3 v^2\varphi^2\rho\Delta\psi dxdt \\ &-\int_0^T\int_{B_r} 2s^2\lambda^4\rho\varphi^2 v^2|\nabla\psi|^2 dxdt - \int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^3 v^2\varphi^2\nabla\psi\cdot\nabla\rho dxdt. \end{aligned}$$

Ahora en la siguiente integral $\int_0^T\int_\Omega f_s\rho s\lambda^2\varphi v dxdt$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega f_s\rho s\lambda^2\varphi v dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega f_s^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \rho^2 s^2\lambda^4\varphi^2 v^2 dxdt \\ &\leq C\left(\int_0^T\int_\Omega f_s^2 dxdt + \int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^4\varphi^2 v^2 dxdt\right). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_{B_r} s\rho\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt \leq &\int_0^T\int_\Omega f_s\rho s\lambda^2\varphi v dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2\varphi v^2\Delta\rho dxdt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^3\varphi v^2\nabla\psi\cdot\nabla\rho dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} \rho s\lambda^4\varphi v^2|\nabla\psi|^2 dxdt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} \rho s\lambda^3\varphi v^2\Delta\psi dxdt + \int_0^T\int_{B_r} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2\rho|\nabla\psi|^2 dxdt \\ &-c\int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^2\varphi^3 v^2\rho dxdt + c_1\int_0^T\int_{B_r} s\lambda^2\varphi^2 v^2\rho dxdt \\ &+\int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^3\varphi^2 v^2\rho\Delta\psi dxdt + \int_0^T\int_{B_r} 2s^2\lambda^4\varphi^2 v^2\rho|\nabla\psi|^2 dxdt \\ &+\int_0^T\int_{B_r} s^2\lambda^3\varphi^2 v^2\nabla\psi\cdot\nabla\rho dxdt \end{aligned}$$

Como $\rho = 1$ en B_δ, tenemos que

$$\int_0^T\int_{B_\delta} s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega f_s^2 dxdt + C\int_0^T\int_{B_r} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{8}\int_0^T\int_\Omega \frac{|v_t|^2}{s\varphi}dxdt+\frac{1}{6}\int_0^T\int_\Omega \frac{|\Delta v|^2}{s\varphi}dxdt+\alpha\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt$$
$$+\alpha\int_Q s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt \leq C\left(\|f_s\|^2+\int_0^T\int_{B_\delta} s^3\lambda^4\varphi^3 v^2 dxdt\right).$$

Usando

$$e^{s\tilde{\varphi}}\nabla w=\nabla v+sv\varphi\nabla\psi,$$

encontramos que

$$\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi e^{2s\tilde{\varphi}}|\nabla w|^2 dxdt \leq C\left(\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2 dxdt+\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3|v|^2 dxdt.\right) \tag{3.20}$$

Por otra parte sabemos

$$e^{s\tilde{\varphi}}w_t=v_t-sv\tilde{\varphi}_t,$$

calculando encontramos que

$$\int_0^T\int_\Omega (s\varphi)^{-1}e^{2s\tilde{\varphi}}|w_t|^2 dxdt \leq \int_0^T\int_\Omega (s\varphi)^{-1}|v_t|^2 dxdt+sT^2\int_0^T\int_\Omega \varphi^3|v|^2 dxdt. \tag{3.21}$$

Para Δw, utilizamos la siguiente igualdad

$$e^{s\tilde{\varphi}}\Delta w=\Delta v-2s\lambda\varphi\nabla v\cdot\nabla\psi+s^2\lambda^2\varphi^2 v|\nabla\psi|^2-s\lambda\varphi v\Delta\psi-s\lambda\varphi v|\nabla\psi|^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (s\varphi)^{-1}e^{2s\tilde{\varphi}}|\Delta w|^2 dxdt \leq\ & C\Bigg(\int_0^T\int_\Omega (s\varphi)^{-1}|\Delta v|^2 dxdt\\ &+\int_0^T\int_\Omega s\lambda^2\varphi|\nabla v|^2+\int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3|v|^2 dxdt.\Bigg)\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sumando las desigualdades (3.20), (3.21) y (3.22) se obtiene para cada $s\geq T^2$, $\lambda\geq\sqrt{T}$.

$$\int_0^T\int_\Omega (s\varphi)^{-1}e^{2s\tilde{\varphi}}(|\Delta w|^2+|w_t|^2)+(s\lambda^2\varphi|\nabla w|^2+s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2)e^{2s\tilde{\varphi}}dxdt$$
$$\leq C\left(\int_0^T\int_\Omega e^{2s\tilde{\varphi}}f_s^2 dxdt+\int_0^T\int_\omega s^3\lambda^4\varphi^3|w|^2 e^{2s\tilde{\varphi}}dxdt\right)$$

Recordemos que

$$f_s=e^{s\tilde{\varphi}}f-se^{s\tilde{\varphi}}w\lambda\varphi\Delta\psi-se^{s\tilde{\varphi}}w\varphi\lambda^2|\nabla\psi|^2-a(x,t)e^{s\tilde{\varphi}}.$$

Elevando al cuadrado y acotando obtenemos para $s\geq\max(\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}},C(\Omega,\omega))$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega e^{2s\tilde{\varphi}}f_s^2 dxdt \quad\leq\quad & \int_0^T\int_\Omega e^{2s\tilde{\varphi}}f^2 dxdt\\ &+C\int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^4\varphi^2 e^{2s\tilde{\varphi}}w^2 dxdt\end{aligned}$$

Hemos concluido la prueba del Teorema 8. ∎

Capítulo 4

Control a cero en la ecuación del calor caso lineal

Hoy día es bien sabido que los espacios de Hilbert son frecuentemente el marco adecuado para la resolución de muchos problemas de una gran cantidad de ecuaciones de la física matemática. Habida cuenta que las configuraciones de equilibrio son aquellas en las que la energía del sistema alcanza su mínimo, muchos de estos problemas se pueden resolver encontrarando el mínimo de un funcional $J : I\!\!H \to I\!\!R$, siendo $I\!\!H$ un espacio de Hilbert. En la práctica, frecuentemente, $I\!\!H$ es un espacio de funciones como por ejemplo, $L^2(\Omega)$ o un espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, se trata de espacios de dimensión infinita. Esto conlleva un número importante de dificultades matemáticas nuevas. Sabemos que muchas de las propiedades en dimensión finita dejan de serlo cuando la dimensión es infinita. La más importante, tal vez, es que los conjuntos acotados dejan de ser automáticamente relativamente compactos. A causa de este hecho el Método Directo del Cálculo de Variaciones (MDCV) que tan fácilmente se aplica a $I\!\!R^n$ encuentra dificultades adicionales al pasar a espacios de Hilbert de dimensión infinita. En su momento, mostraremos como salvamos ésta dificultad en la prueba del teorema 11 de este capítulo.

Sea w solución de la ecuación del calor lineal:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + a(x,t)w = f & \text{en } Q, \\ w = 0 & \text{en } \Sigma, \\ w(0) = w^0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $f \in L^2(Q)$ y $w^0 \in L^2(\Omega)$ están prefijados. A continuación probaremos una desigualdad de observabilidad para el sistema (3.1) que nos proporcionará un método para probar la controlabilidad a cero de la ecuación del calor lineal.

Teorema 10 *Sea w solución del sistema* (4.1) *y $\omega \subset \Omega$ un abierto no vacío entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega w^2(T)dx \le e^{C(T+\frac{1}{T}+T\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}})} \left(\int_0^T\!\!\int_\Omega f^2 dxdt + \int_0^T\!\!\int_\omega w^2 dxdt \right).$$

Demostración:
A lo largo de la demostración C denotará una constante genérica que puede variar de línea a línea. Multiplicando por w a la ecuación de (4.1), e integrando por partes en Ω y aplicando la desigualdad de Gronwall se obtiene para $t > t^{'} \ge 0$, (ver preliminares)

$$\int_\Omega w^2(t)dx \le e^{C(1+2\|a\|_\infty)t} \left(\int_{t'}^t\!\!\int_\Omega f^2 dxdt + \int_\Omega w^2(t')dx \right). \tag{4.2}$$

Definimos $M(t) = exp^{C(2\|a\|_\infty+1)t}$. Sabemos $|w^2(t')| \leq \int_{t_0}^{T-t_0} |w^2(\tau)|d\tau$ con $t' \in [t_0, T-t_0]$. Integrando sobre Ω se tiene

$$\int_\Omega |w^2(t')|dx \leq \int_{t_0}^{T-t_0}\int_\Omega |w^2(\tau)|d\tau dx$$

Por (4.2), tenemos

$$\int_\Omega |w^2(t)|dx \leq M(t)\left(\int_0^T\int_\Omega f^2 dxdt + \int_{t_0}^{T-t_0}\int_\Omega |w^2(\tau)|d\tau dx\right). \tag{4.3}$$

Queremos ahora utilizar la desigualdad de Carleman para estimar el lado derecho de (4.3). Elijamos $t_0 = \frac{T}{4}$ que para $0 < \frac{T}{4} < \tau < \frac{3T}{4}$ se tiene

$$\frac{1}{(\frac{3T}{4})^2} \leq \frac{4}{3\tau T} \leq \frac{1}{\tau(T-\tau)} \leq \frac{4}{T(T-\tau)} < \frac{16}{T^2}.$$

Sea $\tau \in (\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$, sabemos que $e^{\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)} \geq c_1 > 0$. Así

$$\left(\frac{e^{\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)}}{\tau(T-\tau)}\right)^3 \geq \frac{C}{T^6}.$$

Recordando la definición de φ, obtenemos $\varphi^3 \geq C$. Por otro lado sabemos que

$$e^{2s\tilde{\varphi}} = exp\left(2s\left(\frac{e^{\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)} - e^{2m\lambda\|\psi\|_\infty}}{t(T-t)}\right)\right).$$

Vamos a acotar inferiormente a $e^{2s\tilde{\varphi}}$ en el intervalo $(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4})$. Como $e^{\lambda(\psi+m\|\psi\|_\infty)} - e^{2m\lambda\|\psi\|_\infty} \geq e^{2m\lambda\|\psi\|_\infty}$. Calculando se obtiene finalmente

$$e^{\left(\frac{-Cs}{T^2}\right)} < e^{2s\tilde{\varphi}}.$$

Para s y λ fijas, elegidas de tal manera que la desigualdad de Carleman sea válida, se tiene

$$s^3\lambda^4\varphi^3 e^{2s\tilde{\varphi}} \geq \frac{Cs^3 e^{\frac{-Cs}{T^2}}}{T^6}$$

Despejando

$$1 \leq \frac{e^{\frac{Cs}{T^2}}T^6}{s^3} s^3\lambda^4\varphi^3 e^{2s\tilde{\varphi}}.$$

Multiplicando por $w^2(t)$ e integrando sobre $\Omega \times [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}]$, se tiene

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega w^2(\tau)dxd\tau \leq \frac{e^{\frac{Cs}{T^2}}T^6}{s^3}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 e^{2s\tilde{\varphi}} w^2(\tau)dxd\tau.$$

Finalmente combinando con (4.3) obtenemos:

$$\int_\Omega w^2(t)dx \leq M(T)\left(\int_0^T\int_\Omega f^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega s^3\lambda^4\varphi^3 e^{2s\tilde{\varphi}} w^2 d\tau\right).$$

Por la desigualdad de Carleman, para cada $t > 0$

$$\int_\Omega w^2(t)dx \leq M(t)\left(\int_0^T\int_\Omega f^2 dxdt + \int_0^T\int_\omega w^2 dxdt\right)$$

■

Como ya anunciamos, utilizando la desigualdad de observabilidad obtenemos la controlabilidad a cero de la ecuación lineal del calor.

Teorema 11 *Consideremos la ecuación del calor con control localizado en ω:*

$$\left\{\begin{array}{ll} y_t - \Delta y + a(x,t)y = h1_\omega & en\ Q, \\ y = 0 & en\ \Sigma, \\ y(0) = y^0 & en\ \Omega, \end{array}\right. \tag{4.4}$$

donde $a(x,t) \in L^\infty(\Omega)$ y $y^0 \in L^2(\Omega)$. Entonces existe un control $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que $y(T) = 0$. Más aún

$$\|h\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq Ce^{C(T+\frac{1}{T}+T\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}})}\|y^0\|_{L^2}.$$

Para demostrar el teorema 11 necesitaremos un resultado relacionado con el sistema adjunto de (4.4), es decir, consideremos la ecuación

$$\left\{\begin{array}{ll} -\psi_t - \Delta\psi + a(x,t)\psi = 0 & \text{en } Q, \\ \psi = 0 & \text{en } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi^0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.5}$$

No sólo mostramos la existencia de un control sino que, además, proporcionamos un método para calcular éste de manera efectiva minimizando un funcional convexo, continuo y coercivo en $L^2(\Omega)$.
Para $\varepsilon > 0$ y $\psi^0 \in L^2(\Omega)$. Definimos el siguiente funcional:

$$J_\varepsilon : L^2(\Omega) \to I\!R$$

$$J_\varepsilon(\psi^0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \psi^2 dxdt + \varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega y^0\psi(0)dx,$$

donde ψ es solución de (4.5).

Lema 12 *El operador J_ε es continuo, convexo y coercivo. Por tanto, J_ε alcanza su mínimo en un único $\widehat{\psi^0}$.[CorolarioV.8, [4]] Más aún, cuando $\widehat{\psi^0} \neq 0$ se tiene que satisface la siguiente condición de optimalidad*

$$\int_0^T\int_\omega \widehat{\psi}\psi dtdx + \frac{\varepsilon}{\|\widehat{\psi^0}\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega \widehat{\psi}^0\psi^0 dx + \int_\Omega y^0\psi(0)dx = 0, \tag{4.6}$$

para cada $\psi^0 \in L^2(\Omega)$ y ψ la solución correspondiente a (4.5).

Demostración:
Veamos primero que J_ε es un funcional continuo. Dado $\eta > 0$ veremos que existe $\delta > 0$ tal que $\|\gamma^0 - \psi^0\| < \delta$ entonces $|J_\varepsilon(\gamma^0) - J_\varepsilon(\psi^0)| < \eta$. Para $\psi^0, \gamma^0 \in L^2(\Omega)$ denotamos respectivamente por ψ, γ, la solución correspondiente a (4.5). Tenemos que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\psi^0) - J_\varepsilon(\gamma^0) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^T\int_\omega \psi^2 dxdt - \int_0^T\int_\omega \gamma^2 dxdt\right) + \varepsilon\left(\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)} - \|\gamma^0\|_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+ \int_\Omega y^0\left(\psi(0) - \gamma(0)\right). \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(\psi^0) - J_\varepsilon(\gamma^0)| &\leq \frac{1}{2}\left|\int_0^T\int_\omega \psi^2 dxdt - \int_0^T\int_\omega \gamma^2 dxdt\right| + \varepsilon\|\psi^0 - \gamma^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|y^0\|_{L^2(\Omega)}\|\psi(0) - \gamma(0)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dado que $\psi^2-\gamma^2=(\psi+\gamma)(\psi-\gamma)$ obtenemos

$$\left|\int_0^T\int_\omega \psi^2 dxdt-\int_0^T\int_\omega \gamma^2 dxdt\right| \leq (\|\psi\|+\|\gamma\|)_{L^2(\omega\times(0,T))}(\|\psi-\gamma\|_{L^2(\omega\times(0,T))}.$$

Por estimaciones de energía [Teorema 1, capítulo 2], sabemos que $\|\psi\|_{L^2(Q)}\leq C\|\psi^0\|$, de manera similar $\|\gamma\|_{L^2(Q)}\leq C\|\gamma^0\|$. Consideremos ψ^0 tal que $\|\psi^0-\gamma^0\|\leq 1$ tenemos que $\|\psi\|_{L^2(Q)}+\|\gamma\|_{L^2(Q)}\leq 2C\|\gamma^0\|+C$. Por tanto si $\|\psi^0-\gamma^0\|\leq 1$ se tiene que $|J_\varepsilon(\psi)-J_\varepsilon(\gamma)|\leq C\|\psi^0-\gamma^0\|$. Donde C depende de $\|\gamma^0\|$ y de $\|y^0\|$. Por tanto para cada ψ^0 tal que

$$\|\psi^0-\gamma^0\|<\frac{1}{C}\min(1,\eta)$$

Se tiene$|J_\varepsilon(\psi)-J_\varepsilon(\gamma)|<\eta$. Por tanto el operador es continuo.
Vamos a demostrar que J_ε es convexo. Por la linealidad del sistema (4.5) es claro que J_ε es un funcional convexo. Falta probar que éste operador es coercivo, es decir, $J_\varepsilon(\psi^0)\to\infty$ cuando $\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty$. Es suficiente mostrar que

$$\liminf_{\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty}\frac{J_\varepsilon(\psi^0)}{\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}}\geq\varepsilon. \tag{4.7}$$

En efecto, sea ψ la solución de (4.5) con dato inicial ψ^0 y

$$J_\varepsilon(\psi^0)=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2dxdt+\varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}+\int_\Omega y^0\psi(0)dx.$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$\left|\int_\Omega y^0\psi(0)dx\right|\leq\left(\int_\Omega|y^0|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\psi^2(0)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora bien, el teorema 10 aplicado al sistema (4.5), (observa que $f=0$)tenemos

$$\left(\int_\Omega\psi^2(0)dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq C\left(\int_0^T\int_\omega\psi^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así,

$$\int_\Omega y^0\psi(0)dx\geq -C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\omega\psi^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se sigue que

$$J_\varepsilon(\psi^0)\geq\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega\psi^2dtdx+\varepsilon\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}-C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\omega\psi^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sea una sucesión $\{\psi_n^0\}\subset L^2(\Omega)$ tal que $\|\psi_n^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty$, $n\to\infty$. Definimos $\tilde{\psi}_n^0=\frac{\psi_n^0}{\|\psi_n^0\|_{L^2(\Omega)}}$ y $\tilde{\psi}_n$ es la solución de (4.5) con condición inicial $\tilde{\psi}_n(T)=\tilde{\psi}_n^0$.

$$\frac{J_\varepsilon(\psi_n^0)}{\|\psi_n^0\|_{L^2(\Omega)}}\geq\left(\int_0^T\int_\omega\tilde{\psi}_n^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\|\psi_n^0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\omega\tilde{\psi}_n^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}-C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\right]+\varepsilon.$$

Si $\liminf \int_0^T\int_\omega \tilde{\psi}_n^2 dxdt > 0$ es claro que

$$\liminf_{\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}\to\infty} \frac{J_\varepsilon(\psi^0)}{\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}} = \infty$$

Supongamos que $\liminf \int_0^T\int_\omega \tilde{\psi}_n^2 dxdt = 0$ al sustituir en la expresión anterior tenemos:

$$\frac{J_\varepsilon(\psi^0)}{\|\psi^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

Por lo anterior el operador $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \to I\!R$ es continuo, coercivo y convexo, por tanto existe un único elemento $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$ donde J alcanza su mínimo. [Corolario V.8,[4]].

Supongamos $\widehat{\varphi}^0 \neq 0$. Entonces para cualquier $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ y $h \in I\!R$ tenemos

$$J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0) \leq J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0)$$

Sea φ^0 fijo pero arbitrario. Probaremos ahora la condición de optimalidad (4.6). Es decir probaremos que $J_\varepsilon(\varphi^0)$ es Gâteaux diferenciable en $\widehat{\varphi}^0$ en la dirección φ^0, y por tanto la derivada se anula en el mínimo $\widehat{\varphi}^0$

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0) - J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0) &= \frac{h^2}{2}\int_0^T\int_\omega \varphi^2 dxdt + h\int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}\varphi dxdt \\ &+\varepsilon\left(\left(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &+h\int_\Omega y^0\varphi(0)dx. \end{aligned}$$

Reduciendo y multiplicando por un factor adecuado tenemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0) - J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0) &= \frac{h^2}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi|^2 dxdt + h\int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}\varphi dxdt \\ &+\varepsilon\left[\left(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0|^2 dx\right)^{1/2} - \left(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0|^2 dx\right)^{1/2}\right] \frac{(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0|^2 dx)^{1/2}}{(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0|^2 dx)^{1/2}} \\ &+h\int_\Omega y^0\varphi(0)dx. \end{aligned}$$

Factorizando a h y dividiendo por h, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0) - J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0)}{h} &= \frac{h}{2}\int_0^T\int_\omega \varphi^2 dxdt + \int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}\varphi dxdt \\ &+\varepsilon\left[\frac{2\int_\Omega \widehat{\varphi}^0\varphi^0 dx + h\int_\Omega |\varphi^0|^2 dx}{(\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0 + h\varphi^0|^2 dx)^{1/2} + (\int_\Omega |\widehat{\varphi}^0|^2 dx)^{1/2}}\right] + \int_\Omega y^0\varphi(0)dx. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $h \to 0$ se tiene

$$D_{\varphi^0}(J_\varepsilon(\widehat{\varphi}^0) = \int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}\varphi dxdt + \frac{\varepsilon}{\|\widehat{\varphi}^0\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega \widehat{\varphi}^0\varphi^0 dx + \int_\Omega y^0\varphi(0)dx.$$

Como $\widehat{\varphi}^0$ es un punto crítico, queda probado (4.6). ■

Estamos ahora ya en posibilidad de demostrar la existencia de un control a cero de la ecuación del calor lineal.

Demostración del Teorema 11:

La demostración la haremos por etapas. En primer lugar mostramos que existe un control tal que $\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon$. Luego hacemos estimaciones sobre los controles y en una tercera etapa obtenemos el control nulo por un proceso al límite.

Primera parte. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos $\widehat{\varphi^0}$ el minimizador de J_ε. Definimos $h_\varepsilon = \widehat{\varphi}_\varepsilon 1_\omega$ donde $\widehat{\varphi_\varepsilon}$ es la solución de (4.4) correspondiente a $\widehat{\varphi}^0$. Sea y_ε la solución asociada con este control, entonces $\|y_\varepsilon(T)\| \leq \varepsilon$.

En efecto multiplicando por φ a (4.4)la ecuación e integrando por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T\int_\Omega \varphi_t y_\varepsilon dxdt + \int_\Omega y_\varepsilon\varphi\Big|_0^T dx - \int_0^T\int_\Omega y_\varepsilon \Delta\varphi dxdt \\
+\int_0^T\int_\Omega a(x,y) y_\varepsilon\varphi dxdt = \int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon\varphi dxdt.
\end{aligned}$$

Como φ es solución del sistema adjunto (4.5), se obtiene

$$\int_\Omega y_\varepsilon(T)\varphi^0 dx - \int_\Omega y^0\varphi(0)dx = \int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon\varphi dxdt.$$

Por la condición de optimalidad (4.6) tenemos,

$$\int_\Omega y_\varepsilon(T)\varphi^0 dx = \int_\Omega y^0\varphi(0)dx + \int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon\varphi dxdt = -\frac{\varepsilon}{\|\widehat{\varphi}^0\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega \widehat{\varphi}^0\varphi^0 dx.$$

Así,

$$\left|\int_\Omega y_\varepsilon(T)\varphi^0\right| \leq \varepsilon\|\varphi^0\|_{L^2(\Omega)},$$

para cada $\widehat{\varphi}^0 \in L^2(\Omega)$. Por tanto,

$$\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Segunda parte. Como $\widehat{\varphi_\varepsilon}$ es un minimizador de J_ε tenemos que

$$0 = J_\varepsilon(0) \geq J_\varepsilon(\widehat{\varphi_\varepsilon}),$$

es decir,

$$\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon^2 dxdt + \epsilon\|\widehat{\varphi}_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega y^0\widehat{\varphi}_\varepsilon(0)dx \\
& \geq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon^2 dxdt - C^{1/2}\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_0^T\int_\omega \widehat{\varphi}_\varepsilon^2 dxdt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, como $\left(\int_0^T\int_\omega |\widehat{\varphi}_\varepsilon|^2 dtdx\right)^{1/2} \neq 0$ hemos obtenido:

$$\left(\int_0^T\int_\omega |\widehat{\varphi}_\varepsilon|^2 dtdx\right)^{1/2} \leq C\|y^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.8}$$

donde C es independiente de ε. (De hecho C sólo depende de la desigualdad de observabilidad). Hemos construido una familia $\{\widehat{\varphi}_\varepsilon\}_{\varepsilon\geq 0}$ acotada en $L^2(\omega\times(0,T))$. Si hacemos $\varepsilon=\frac{1}{n}$, podemos extraer una subsucesión tal que existen $\widehat{\varphi}$ y $\{\widehat{\varphi}_n\}_n\in L^2(\omega\times(0,T))$ tal que

$$\widehat{\varphi}_n \rightharpoonup \widehat{\varphi} \text{ débilmente en } L^2(\omega\times(0,T)) \text{ además } \|y_n(T)\|\leq \frac{1}{n},$$

donde y_n es la solución correspondiente a (4.4). Ponemos $h=\widehat{\varphi}$ en (4.4), entonces

$$\left\{\begin{array}{ll} y_t-\Delta y+a(x,t)y=\widehat{\varphi}1_\omega & \text{en } Q,\\ y=0 & \text{en } \Sigma,\\ y(0)=y^0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Afirmamos que $y_n(T)\longrightarrow y(T)$ cuando $n\longrightarrow\infty$. Notamos que si $v_n=y_n-y$, satisface

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{n,t}-\Delta v_n+a(x,t)v_n=(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi})1_\omega & \text{en } Q,\\ v_n=0 & \text{en } \Sigma,\\ v_n(0)=0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.10}$$

Por estimaciones de energía tenemos:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |v_n(s)|^2dx\Big|_0^t+\int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla v_n|^2dsdx\leq C\int_0^t\!\!\int_\omega(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi})^2dsdx,$$

para $0\leq t\leq T$. Por tanto

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\leq C. \tag{4.11}$$

Además

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}\leq C. \tag{4.12}$$

De (4.11) y (4.12) se obtiene que existe una subsucesión, que seguimos denotando por v_n, tal que $v_n\rightharpoonup 0$ débilmente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

Ahora si multiplicamos la ecuación (4.10) por $v_{n,t}$. Por estimaciones de energía obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v_{n,t}^2dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla v_n|^2dx\leq C\left(\int_\omega(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi})^2dx+\int_\Omega|v_n|^2dx\right).$$

Así,

$$\int_0^t\!\!\int_\Omega|v_{n,t}|^2dsdx+\int_\Omega|\nabla v_n|^2dx\Big|_0^t\leq C\left(\int_0^t\!\!\int_\omega(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi})^2dsdx+\int_0^t\!\!\int_\Omega|v_n|^2dsdx\right).$$

Finalmente se tiene

$$\int_0^t\!\!\int_\Omega|v_{n,t}|^2dtdx+\int_\Omega|\nabla v_n(t)|^2dx\leq C\left(\int_0^t\!\!\int_\omega(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi})^2dtdx+\int_0^t\!\!\int_\Omega|v_n|^2dtdx\right).$$

De (4.8) y (4.11) se sigue que existe $C>0$ tal que

$$\|\nabla v_n\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))}\leq C$$

y

$$\|v_n\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}\leq C,$$

para cada $n\in I\!N$. Además

$$\|v_{n,t}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}\leq C$$

por lo que,

$$\|\tau_h v_n - v_n\|_{L^\infty(0,T-h,L^2(\Omega))} \leq h^{1/2}c \longrightarrow 0$$

cuando $h \longrightarrow 0$.
Así, la sucesión $\{v_{n,t}\}$ está acotada en $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Por la observación 3 es una inyección compacta. Obtenemos que es un conjunto relativamente compacto (compacto). Para ver que $\{v_n\}$ está acotada en $W^{-1,1}_{loc}(0,T;H^1_0)$. Es suficiente probar que $\|w_n\|_{L^1_{loc}}(0,T;H^1_0) \leq C$, donde $w_n(t) = \int_0^t v_n(s)ds$. Para ello integramos la ecuación (4.10) de $[0,t]$.

$$\int_0^t v_{n,t}dt - \int_0^t \Delta v_n dt + \int_0^t a(x,t)v_n dt = \int_0^t (\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi})1_\omega dt.$$

Entonces

$$w_{n,t} - \Delta w_n = \int_0^t (\widehat{\varphi}_n - \widehat{\varphi})1_\omega dt - \int_0^t a(x,t)v_n dt$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \left|\int_0^t a(x,\tau)v_n d\tau\right|^2 dxdt \quad &\leq \quad \int_0^T\int_\Omega \|a\|_\infty T \int_0^T |v_n(\tau)|^2 dxd\tau dt \\
&\leq \|a\|^2_\infty T^2 \int_0^T\int_\Omega |v_n(\tau)|^2 dxd\tau \\
&\leq \|a\|^2_\infty T^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$w_{n,t} - \Delta w_n = F_n$$

con $F_n \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Así $\|w_n\|_{L^1_{loc}(0,T;H^1_0)} \leq C$, por lo que,

$$\|v_n\|_{W^{-1,1}_{loc}(0,T;H^1_0)} \leq C.$$

Entonces $v_n \longrightarrow 0$ en $C(0,T;L^2(\Omega))$.
Por tanto $\|y_n(T)\|_{L^2} \longrightarrow \|y(T)\|_{L^2}$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Como $\|y_n(T)\| \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in IN$, $y(T) = 0$. ■

Capítulo 5

Controlabilidad nula: Caso semilineal

En este capítulo estudiamos el problema de la controlabilidad nula para la ecuación del calor semilineal y desarrollamos algunos resultados para este fin.

Sean Ω, ω y $T > 0$ como antes. Sea f una función real, globalmente Lipschitz y tal que $f(0) = 0$. Consideremos la siguiente ecuación del calor semilineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + f(y) = h1_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array} \right. \tag{5.1}$$

El objetivo central de este capítulo es probar lo siguiente:

Teorema 13 *Sea $f : I\!\!R \to I\!\!R$ una función globalmente Lipschitz tal que $f(0) = 0$, entonces, para cada $y^0 \in L^2(\Omega)$ existe un control $h \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que la solución y de (5.1) verifica que $y(T) = 0$.*

En la demostración de este teorema utilizamos los resultados del capítulo anterior y las estimaciones explícitas obtenidas. También utilizamos el Teorema de punto fijo de Kakutani [1].

Demostración:

La demostración se hace en dos partes. Primero analizamos el caso $f \in C^1(\Omega)$ y en una segunda parte mostramos el caso general.

Parte 1.

Sea $f \in C^1(I\!\!R)$. En este caso la función g definida como

$$g(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(s)}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } s = 0 \end{array} \right.$$

es continua y acotada. En particular $g(z) \in L^\infty(Q)$ para cada $z \in L^2(Q)$. Linealizando el sistema (5.1) en el origen, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \Delta y + g(z)y = h1_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Como $g(z) \in L^\infty(Q)$, sabemos que existe al menos un control h_z tal que la solución y_z de la ecuación (5.2) satisface $y_z(T) = 0$. Así definimos la siguiente aplicación multivaluada:

$$\Lambda : L^2(Q) \to P(L^2(Q))$$

dedinida por la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned}\Lambda(z) \quad = \quad & \{\, y_z : y_z \text{ es solución de (5.2) con } \quad y_z(T) = 0, \quad h_z \in L^2(\omega \times (0,T)) \\ & y \quad \|h_z\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|a\|_\infty, T)\|y^0\|_{L^2(\Omega)}\}\end{aligned}$$

donde C es la constante dada en el Teorema 11.
Tenemos que $\Lambda(z) \neq \emptyset$ para cada $z \in L^2(Q)$. Por el Teorema 11, sabemos que para cada $z \in L^2(\Omega)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío de $L^2(Q)$. La idea es obtener un control de (5.1) utilizando un teorema de punto fijo para $\Lambda(z)$. Como $\Lambda(z)$ es una aplicación multivaluada, utilizaremos el teorema del punto fijo de Kakutani, que introdujimos en el segundo capítulo.

Proposición 14 *Si $f \in C^1(I\!R)$ y f es una función globalmente Lipschitz, entonces:*
(i) Existe un subconjunto acotado X de $L^2(Q)$ tal que para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \subset X$.
(ii) Para cada $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $L^2(Q)$.
(iii) $\Lambda(z)$ es hemicontinua superiormente en $L^2(Q)$.
Es decir, $\Lambda(z)$ verifica las hipótesis del teorema de Kakutani.

Demostración de la proposición 14:
(i)Denotamos y en lugar de y_z y h en lugar de h_z para simplificar la notación. Por estimaciones de energía

$$\int_\Omega |y(t)|^2 dx + \int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla y|^2 dxdt \leq C\left(\int_0^t\!\!\int_\omega |h|^2 dxds + \int_\Omega |y^0|^2 dx\right).$$

Como h es tal que $\|h\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|g\|_\infty, T)\|y^0\|_{L^2(\Omega)}$, se tiene que

$$\int_\Omega |y(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla y|^2 dxdt \leq C(\|g\|_\infty, T)\|y^0\|^2_{L^2(\Omega)},$$

donde C no depende de z y $\|g\|_\infty$ tampoco pues f es globalmente Lipschitz. La desigualdad anterior nos permite afirmar que $\Lambda(z)$ es un conjunto acotado en $L^2(Q)$, es decir, existe un conjunto acotado X en $L^2(Q)$ tal que para toda $z \in L^2(Q)$, $\Lambda(z) \subset X$.
(ii) Por la linealidad de (5.2) es claro que $\Lambda(z)$ es un conjunto convexo. Vamos a probar la compacidad del conjunto $\Lambda(z)$. Para lo cual, mostraremos que $\Lambda(z)$ es un conjunto cerrado y posteriormente que es un conjunto relativamente compacto. Sea $\{y_n\} \in \Lambda(z)$ tal que $y_n \to y$. Queremos demostrar que $y \in \Lambda(z)$. Como $y_n \in \Lambda(z)$ existe una sucesión de controles $\{h_n\}$ tal que y_n la solución correspondiente para cada $n \in I\!N$

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{n,t} - \Delta y_n + g(z)y_n = h_n 1_\omega & \text{en } Q \\ y_n = 0 & \text{en } \Sigma \\ y_n(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.3}$$

con $y_n(T) = 0$ y

$$\|h_n\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C\|y^0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.4}$$

También por (5.4) existen una subsucesión (ver [4]) (que seguimos denotando por n) h_n y $\widetilde{h} \in L^2(Q)$ tales que

$$h_n \rightharpoonup \widetilde{h} \quad \text{débil en} \quad L^2(Q).$$

Sea v la solución correspondiente a $\widetilde{h}$

$$\left\{\begin{array}{ll} v_t - \Delta v + g(z)v = \widetilde{h} 1_\omega & \text{en } Q \\ v = 0 & \text{en } \Sigma \\ v(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Definimos $v_n = y_n - v$. Claramente v_n es solución de

$$(5.6) \qquad \begin{cases} v_{n,t} - \Delta v_n + g(z)v_n = (h_n - \widetilde{h})1_\omega & \text{en } Q \\ v_n = 0 & \text{en } \Sigma \\ v_n(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Por estimaciones de energía, la definición de h_n y (5.4), obtenemos

$$\int_\Omega |v_n(t)|^2 dx + C\int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dxdt \leq \left(\|g\|_\infty + \frac{1}{2}\right)\|v_n\|^2 + \|h_n - \widetilde{h}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}$$

Por las estimaciones sobre las normas de h_n y $\widetilde{h}$,

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$

y

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(Q)} \leq C.$$

Definimos $w_n(x,t) = \int_0^t v_n(x,s)ds$. Procediendo como antes obtenemos

$$(5.7) \qquad \begin{cases} w_{n,t} - \Delta w_n = F_n & \text{en } Q \\ w_n = 0 & \text{en } \Sigma \\ w_n(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

con $F_n \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ donde $\|F_n\|_{L^2(Q)} \leq C$. Por Corolario 4 página 4 obtenemos $\|w_n\|_{L^1_{loc}(0,T;H^1_0)} \leq C$, por lo cual, $\|v_n\|_{W^{-1,1}_{loc}(0,T;H^1_0)} \leq C$. Vemos que se satisfacen las hipótesis del teorema 2 página 4. Entonces tenemos $v_n \to v$ en $C(0,T;L^2(\Omega))$. De las propiedades de convergencia débil tenemos que

$$\int_0^t\!\!\int_\Omega |v_n(h_n - \widetilde{h})|dxdt + \|g\|_\infty \int_0^t\!\!\int_\Omega v v_n dxdt \rightharpoonup 0$$

Por las estimaciones de energía (ver preliminares) esto implica que

$$v_n \to 0 \quad \text{en} \quad C([0,T];L^2(\Omega))$$

En particular como $v_n = y_n - v$ esto implica que $y_n \to v$ en $L^2(Q)$ y $v(T) = 0$. Sabiamos que $y_n \to y$ y por tanto $y = v$, y $y \in \Lambda(z)$. Acabamos de probar que $\Lambda(z)$ es un conjunto cerrado. Por la observación 3 del capítulo 2, tenemos que el conjunto es relativamente compacto. Esto nos dice que el conjunto $\Lambda(z)$ es compacto.

(iii) Tenemos que probar que la función multivaluada Λ es hemicontinua superiormente en $z \in L^2(Q)$, esto es, debemos probar que para cada $k \in L^2(Q)$, la función

$$z \mapsto \sigma(\Lambda(z), k) = \sup_{y\in\Lambda(z)} \int_Q k(x,t)y(x,t)dxdt$$

es semicontinua superiormente en z. Es decir, tenemos que mostrar que para cada

$$z \in L^2(Q) \qquad \limsup_{z_n\to z} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z), k).$$

Como $\Lambda(z)$ es compacto para cada $n \in IN$ existe $y_n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(x,t)y_n(x,t)dxdt$$

Ahora como $\{y_n\} \subset X$ el cual es compacto en $L^2(Q)$ por lo que existe $y \in L^2(Q)$ tal que la subsucesión que siguiremos denotando por n tenemos que $y_n \to y$.

$$\int_Q k(x,t)y_n \to \int_Q k(x,t)y.$$

Sea $\{z_n\} \subset L^2(Q)$ tal que $z_n \to z$ fuerte en $L^2(Q)$. Elijamos $y_n \in \Lambda(z_n)$ una sucesión tal que $y_n \to y$ fuerte en $L^2(Q)$ para algún $y \in \Lambda(z)$. Tenemos

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{n,t} - \Delta y_n + g(z_n)y_n = h_n 1_\omega & \text{en } Q \\ y_n = 0 & \text{en } \Sigma \\ y_n(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.8}$$

con $y_n(T) = 0$ y

$$\|h_n\|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq C\|y^0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

Como $z_n \to z$ existe una subsucesión (que seguiremos denotando por n) tenemos que $z_n(x,t) \to z(x,t)$ casi dondequiera en Q. Como g es una función continua y acotada tenemos $g(z_n(x,t)) \to g(z(x,t))$ casi dondequiera en $L^2(Q)$. Por (5.9) existe una subsucesión [4](que seguimos denotando por n) h_n y $\widetilde{h} \in L^2(Q)$ tales que

$$h_n \rightharpoonup \widetilde{h} \text{ débilmente en } L^2(Q).$$

Sea v la solución correspondiente a $\widetilde{h}$ y z

$$\left\{\begin{array}{ll} v_t - \Delta v + g(z)y_n = \widetilde{h}1_\omega & \text{en } Q \\ v = 0 & \text{en } \Sigma \\ v(0) = y^0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.10}$$

Definimos $v_n = y_n - v$. Claramente v_n es solución de

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{n,t} - \Delta v_n + v(g(z_n) - g(z)) = (h_n - \widetilde{h})1_\omega & \text{en } Q \\ v_n = 0 & \text{en } \Sigma \\ v_n(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{array}\right. \tag{5.11}$$

Por estimaciones de energía, la definición de h_n y (5.9), obtenemos

$$\int_\Omega |v_n(t)|^2 dx + C\int_0^t\!\!\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dxdt \leq \|g\|_\infty \left(\|v_n\|^2 + \|h_n - \widetilde{h}\|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}\right).$$

Por estimaciones sobre las normas de h_n y $\widetilde{h}$

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C.$$

Procediendo como en la cerradura obtenemos que

$$v_n \to 0 \text{ en } \quad C([0,T];L^2(\Omega))$$

Finalmente, $y \in \Lambda(z)$. Es decir que

$$\limsup_{z_n \to z} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z), k).$$

La función Λ es hemicontinua superiormente en z. Uniendo los resultados anteriores, podemos concluir que $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de $L^2(Q)$ y también hemos probado que la función es hemicontinua superiormente. ■

Caso general. Supongamos que f es globalmente Lipschitz es decir, para cada $x, y \in \Omega$ se satisface $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Además $f(0) = 0$.

Consideremos ρ_n una sucesión regularizante, esto es, $\rho_n \in C^\infty(I\!R)$, $\rho_n \geq 0$, $supp(\rho_n) \subset B(0, 1/n)$ y $\int_{I\!R} \rho_n(s)ds = 1$.

Para cada $n \geq 1$, hagamos

$$f_n = \rho_n * f$$

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n(0)$$

y

$$G_n(s) = \begin{cases} \frac{F_n(s)}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ \\ F_n^{'}(0) & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Es bien sabido por las propiedades de la convolución que $f_n \in C^\infty(I\!R)$ y $f_n \to f$ uniformemente en intervalos compactos. Por las propiedades de ρ_n y de la convolución, así como a las hipótesis sobre f, no es difícil probar que las funciones F_n y G_n verifican las siguientes propiedades:

i) G_n es continua y $F_n(0) = 0$ para cada $n \geq 1$. Esto se puede observar directamente de la definición de F_n.

ii)$F_n \to f$ en $C(K)$ para cualquier compacto $K \subset I\!R$. En efecto, por las propiedades de la convolución $f_n \to f$ en $C(K)$. Además, $f_n(0) \to f(0)$. Sabemos que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual. En consecuencia $F_n \to f$ en $C(K)$ para cada compacto $K \subset I\!R$.

Por el resultado anterior para cada $n \in I\!N$, existe y_n y una sucesión de controles $(h_n)_n$ tales que y_n es solución de

$$\begin{cases} y_{n,t} - \Delta y_n + F_n(y_n) = h_n 1_\omega & \text{en } Q, \\ y_n = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y_n(0) = y^0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.12}$$

$y_n(T) = 0$. Además, se cumple que

$$\|h_n\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \leq C\|y^0\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.13}$$

Por estimaciones de energía de (5.7) y, como los controles están acotados se obtiene que la sucesión y_n está uniformemente acotada en $L^2(Q)$. También por el Corolario III.26 de [4] existen una subsucesión (que seguimos denotando por n) y $\tilde{h} \in L^2(Q)$ tales que $h_n \rightharpoonup \tilde{h}$ es débil en $L^2(\omega \times (0, T))$. Sea y la solución correspondiente a $\widetilde{h}$

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = \widetilde{h} 1_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{5.14}$$

Definimos $v_n = y_n - y$. Claramente v_n es solución de

$$\begin{cases} v_{n,t} - \Delta v_n + F_n(y_n) - f(y) = (h_n - \widetilde{h})1_\omega & \text{en } Q, \\ v_n = 0 & \text{en } \Sigma, \\ v_n(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{5.15}$$

Calculando

$$v_{n,t} - \Delta v_n + F_n(y_n) - F_n(y) + F_n(y) - f(y) = (h_n - \widetilde{h})1_\omega$$

Por otra parte

$$|F_n(y_n) - F_n(y)| \leq L|v_n|$$

Teniendo en cuenta la propiedad *ii.*, se tiene la convergencia puntual $F_n(y) \to f(y)$ en $C(K)$. Por estimaciones de energía de (5.10) y las acotaciones anteriores se tiene

$$\int_\Omega |v_n(t)|^2 dx + C \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dxdt \leq C(T)\|y^0\|_{L^2(\Omega)}$$

Por lo cual, se obtiene

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C$$

Nuevamente por corolario 2 página 5. Demostraremos que v_n está acotada en $W_{loc}^{-1,1}(0,T;H_0^1)$, es decir, $\|v_n\|_{L^2(0,T,H_0^1)} \leq C$. Sea $w_n = \int_0^t v_n$. Procediendo como antes obtenemos

$$w_{n,t} - \Delta w_n = F_n$$

con $F_n \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Así $\|w_n\|_{L^1_{loc}(0,T;H_0^1)} \leq C$, por lo cual,
$\|v_n\|_{W_{loc}^{-1,1}(0,T;H_0^1)} \leq C$. Vemos que se satisfacen las hipótesis del Corolario 1 del teorema 3 de Simón. Entonces tenemos

$$v_n \longrightarrow 0$$

en $C(0,T;L^2(\Omega))$. Como ya vimos $y_n \to y$ uniformemente en particular tenemos la convergencia puntual esto es, $y_n(T) \to y(T)$ sabemos que $y_n(T) = 0$ para cada $n \in N$. Así tenemos que $y(T) = 0$. Esto resuelve el problema de controlabilidad nula de (5.2). ■

Capítulo 6

Caso superlineal

Para resolver este problema requerimos los resultados obtenidos en el control de la ecuación lineal con potencial y una utilización reiterada del efecto regularizante de la ecuación del calor. La estrategia que seguiremos es la siguiente: en una primera etapa construiremos controles L^2 para la ecuación linealizada (ver capítulo 4) pero con los controles actuando en un $\omega_0 \subset\subset \omega$.
Utilizando los efectos regularizantes de la ecuación del calor y con una técnica de “localización” veremos que es posible obtener soluciones (y controles) más regulares a cambio de aumentar el soporte de los controles a ω. Después procederemos a implementar un argumento de punto fijo pero en $L^\infty \cap L^2$ en vez de en L^2 como se hizo en el capítulo anterior.
Estamos en condiciones de presentar los resultados sobre la existencia de controles para la controlabilidad nula en la ecuación del calor superlineal. Consideremos la ecuación del calor semilineal siguiente:

$$(6.1) \qquad \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = h 1_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde f es una función de clase $C^1(\Omega)$ definida sobre $I\!R$ con un pequeño crecimiento superlineal en el infinito, el dato inicial y^0 conocido y suficientemente regular y $f(s) = g(s)s$, donde

$$(6.2) \qquad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|g(s)|}{log^{3/2}(1+|s|)} = 0,$$

observemos que en particular $f(0) = 0$. Con estas hipótesis procederemos a demostrar el teorema siguiente:

Teorema 15 *Sea f una función de clase $C^1(\Omega)$, verificando(6.2). Entonces para todo $y_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ y $T > 0$, existe $h \in L^2(\omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\omega \times (0,T))$ tal que la solución correspondiente a (6.1) verifica $y(T) = 0$.*

Como mencionamos en la introducción a este capítulo, la demostración de este teorema utiliza un resultado de control de la ecuación lineal pero utilizando controles en $L^2 \cap L^\infty$. De manera más precisa, utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 16 *Sea $\omega \subset \Omega$ abierto, no vacío y $T > 0$. Sea $y^0 \in L^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ y $a(x,t) \in L^\infty(Q)$, existe $h = h(a, y^0) \in L^\infty((0,T) \times \omega) \cap L^2((0,T) \times \omega)$ tal que la solución de*

$$(6.3) \qquad \begin{cases} y_t - \Delta y + a(x,t) y = h 1_\omega & \textit{en } Q, \\ y = 0 & \textit{en } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \textit{en } \Omega, \end{cases}$$

verifica $y(T) = 0$. *Además*

$$\|h\|_{L^\infty \cap L^2} \leq C\|y^0\|_{W^{1,\infty}\cap L^2}$$

$C = e^{C_1(1+T+\frac{1}{T}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+T\|a\|_\infty)}$.

Introducimos los espacios de Banach siguientes:

$$W(0,T;\Omega) = \{u \,:\, u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)),\, u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

con norma

$$\|u\|_{W(0,T;\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u_t\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

Si $\mathcal{V} \subset \Omega$ es un subconjunto abierto, $p \in [2,\infty)$ y $\delta \in [0,T)$

$$X^p(\delta,T;\mathcal{V}) = \{u \,:\, u \in L^p(\delta,T;W^{2,p}(\mathcal{V})),\, u_t \in L^p(\mathcal{V}\times(\delta,T))\}$$

con la norma

$$\|u\|_{X^p(\delta,T;\mathcal{V})} = \|u\|_{L^p(\delta,T;W^{2,p}(\mathcal{V}))} + \|u_t\|_{L^p(\mathcal{V}\times(\delta,T))}.$$

Tenemos el siguiente resultado

Lema 17 *Sea* $a \in L^\infty(Q)$. *Consideremos una solución débil* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ *de*

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - \Delta u + a(x,t)u = f & en\ Q \\ u = 0 & en\ \Sigma \\ u(0) = u^0 & en\ \Omega, \end{array}\right. \tag{6.4}$$

Sean $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{V}'$ *dos abiertos tales que* $\mathcal{V}' \subset\subset \mathcal{V} \subset \Omega$ *y sea* $r \in [2,\infty)$.
1)Supongamos que $f \in L^r(\delta,T;L^r(\mathcal{V}))$, *con* $\delta \in [0,T)$ *arbitrario. Entonces*

$$u \in X^r(\delta',T;\mathcal{V}') \qquad \forall \delta' \in (\delta,T)$$

2) Si además $u(0) = 0$ *en* Ω *y* $f \in L^r(0,T;L^r(\mathcal{V}))$, *entonces*

$$u \in X^r(0,T;\mathcal{V}')$$

y existe una constante $C(\Omega,n,r,\mathcal{V},\mathcal{V}')$ *tal que*

$$\|u\|_{X^r(0,T;\mathcal{V}')} \leq C(1+T^\alpha)(1+\|a\|_\infty)\left(\|f\|_{L^r((0,T)\times\mathcal{V})} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap(C(0,T;L^2(\Omega))}\right)$$

donde α *depende de* r.

La demostración de este lema es muy técnica por lo que esbozaremos su demostración al final de este capítulo. Procederemos a demostrar la proposición 1.
Demostración de la proposición 16:
Sea $\omega_0 \subset\subset \omega$. Consideremos el siguiente problema de control auxiliar:

$$\left\{\begin{array}{ll} \tilde{y}_t - \Delta\tilde{y} + a(x,t)\tilde{y} = \tilde{h}1_{\omega_0} & \text{en } Q, \\ \tilde{y} = 0 & \text{en } \Sigma, \\ \tilde{y}(0) = y^0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.5}$$

con $a \in L^\infty(\Omega)$ y $y^0 \in L^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$. Por el Teorema 5 existe un control $\tilde{h} \in L^2(\omega_0 \times (0,T))$ tal que $\tilde{y}(T) = 0$ y $\|\tilde{h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|a\|_\infty,T)\|y^0\|_{L^2(\Omega)}$. Donde $C(\|a\|_\infty,T) = e^{C(\Omega,\omega)\left(1+T+1/T+\|a\|_\infty^{2/3}+T\|a\|_\infty\right)}$.

Sea $w = \tilde{y} - \eta(t)Y$, donde $\eta \in C^\infty([0,T])$ satisface $0 \le \eta \le 1$ en $[0,T]$, $\eta \equiv 1$ en $[0,T/4]$ y $\eta \equiv 0$ en $[3T/4,T]$ y Y es solución de

$$\left\{\begin{array}{ll} Y_t - \Delta Y + a(x,t)Y = 0 & \text{en } Q, \\ Y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ Y(0) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.6}$$

Obtenemos que w es solución

$$\left\{\begin{array}{ll} w_t - \Delta w + a(x,t)w = h1_{\omega_0} - \eta_t Y & \text{en } Q, \\ w = 0 & \text{en } \Sigma, \\ w(0) = 0 \quad y \quad w(T) = 0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.7}$$

Sean $\omega_0 \subset\subset \omega_1 \subset\subset \omega$. Definimos θ como:

$$\theta = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{en } \omega_1 \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{\omega}. \end{array}\right. \tag{6.8}$$

Sea $v = (1-\theta)w$. Con este cambio de variable obtenemos que v es solución de

$$\left\{\begin{array}{ll} v_t - \Delta v + a(x,t)v = h_1 - \eta_t Y & \text{en } Q, \\ v = 0 & \text{en } \Sigma, \\ v(0) = 0 \quad y \quad v(T) = 0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.9}$$

donde $h_1 = w\Delta\theta + 2\nabla\theta \cdot \nabla w + \theta\eta_t Y$. Por construcción h_1 es un control que tiene soporte en ω. Vemos que v es solución de un problema similar a (6.7) pero con h_1 una función con soporte en ω. Veamos que $h_1 \in L^\infty$. El término $\theta\eta_t Y \in L^\infty$ pues $y^0 \in W^{1,\infty}$ y por tanto $Y \in L^\infty$ y estamos multiplicando por $\theta\eta_t$ que son funciones acotadas. Para ver que h_1 está en L^∞ veremos que $w\Delta\theta$ y $2\nabla\theta\nabla w$ están en L^∞. Como $\mathit{supp}\, w\Delta\theta \subset \Omega \setminus \omega_1$ y $\mathit{supp}\, 2\nabla\theta\nabla w \subset \Omega \setminus \omega_1$ basta ver la regularidad de w y de ∇w en $\Omega \setminus \omega_1$. Aplicando el Lema 17 con $\mathcal{V} = \Omega \setminus \overline{\omega_0}$ y $\mathcal{V}' = \Omega \setminus \overline{\omega_1}$ vemos que $w \in X^r(0,T;\mathcal{V}')$ para cada $r \ge 2$. Por las inclusiones de Sobolev para r suficientemente grande tenemos $X^r(0,T;\mathcal{V}') \subset L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathcal{V}'))$ en conclusión $h_1 \in L^\infty$. Además

$$\|h_1\|_{L^\infty \cap L^2} \le C\|y^0\|_{W^{1,\infty}\cap L^2}.$$

Definimos $y = v + \eta(t)Y$ entonces y es solución de (6.3) con el control $h = h_1 \in L^\infty$. ∎

Para $R > 0$, introducimos la función truncatura T_R definida por

$$T_R(s) = \left\{\begin{array}{ll} s & \text{si } |s| \le R \\ R \operatorname{sgn} s & \text{si } |s| > R. \end{array}\right.$$

Demostración del Teorema 15:

Sea $Z = L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$, para cada $z \in Z$, consideremos el siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{ll} y_t - \Delta y + g(T_R(z))y = h1_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{6.10}$$

Observemos que si hacemos $a = a_z = g(T_R(z)) \in L^\infty(Q)$. En consecuencia podemos aplicar la Proposición 16, en el intervalo de tiempo $(0,T_z)$ donde

$$T_z = \min\{T, \|g(T_R(z))\|_\infty^{-2/3}\}$$

es decir, encontramos $\widehat{h}_z \in L^\infty(\omega \times (0,T_z)) \cap L^2(\omega \times (0,T_z))$ tal que $y = \widehat{y}_z$ satisface

$$\widehat{y}_z(x,T_z) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega$$

y

$$\|\widehat{h}_z\| \leq \exp C\left(T_z, \|a_z\|_\infty\right)\|y^0\|_{L^2}$$

donde $C(T_z, \|a_z\|_\infty) = e^{C_1(1+T_z+\frac{1}{T_z}+\|a\|_\infty^{\frac{2}{3}}+T_z\|a\|_\infty)}$. Sean $\tilde{h}_z$ y $\tilde{y}_z$ la extensión por cero de $\widehat{h}_z$ y $\widehat{y}_z$ a todo el cilindro $Q = \Omega \times (0, T)$. Claramente por construcción de T_z tenemos que

$$\tilde{y}_z(x, T) = 0 \qquad \|\tilde{h}_z\|_{L^\infty \cap L^2} \leq \exp(C(T, \Omega)(1 + \|a_z\|^{\frac{2}{3}}))\|y^0\|_{W^{1,\infty} \cap L^2}$$

donde C depende de T, de Ω y de ω pero no depende de $\|a_z\|_\infty$. Esta cota es fundamental en el proceso que sigue y por ello se construyó T_z un tiempo auxiliar en el control. Para cada $z \in L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$ definimos

$$\begin{aligned}
\Lambda_R(z) \quad = \quad & \{y_z \,:\, y_z \text{ es solución de (6.10) con } y_z(T) = 0, \\
& h_z \in L^2(\omega \times (0, T)) \cap L^\infty(\omega \times (0, T)) \quad y \\
& \|h_z\|_{L^\infty(Q) \cap L^2(Q)} \leq exp\left(C(T, \Omega)(1 + \|a_z\|^{2/3})\right)\|y^0\|_{W^{1,\infty}(Q) \cap L^2(Q)}\right\}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 16, tenemos que $\Lambda_R(z) \neq \emptyset$ para cada $z \in L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$. Mostraremos que el teorema de Kakutani puede aplicarse a Λ_R, para R fijo. Para probar que $\Lambda_R(z)$ es un subconjunto convexo, uniformemente acotado y compacto de Z. Se procede como en el caso semilineal. Ahora probaremos que $z \to \Lambda(z)$ es hemicontinua superiormente. Tenemos que probar que la función multivaluada Λ_R es hemicontinua superiormente en $z \in L^2(Q)$, esto es, debemos probar que para cada $k \in L^2(Q)$, la función

$$z \mapsto \sigma(\Lambda_R(z), k) = \sup_{y \in \Lambda_R(z)} \int_Q k(x, t) y(x, t) dx dt$$

es semicontinua superiormente en z. Es decir, tenemos que mostrar que para cada

$$z \in L^2(Q) \cap L^\infty \qquad \limsup_{z_n \to z} \sigma(\Lambda_R(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda_R(z), k).$$

Como $\Lambda_R(z)$ es compacto para cada $n \in IN$ existe $y_n \in \Lambda_R(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda_R(z_n), k) = \int_Q k(x, t) y_n(x, t) dx dt$$

Ahora como $\{y_n\} \subset X$ el cual es compacto en $L^2(Q)$ por lo que existe $y \in L^2(Q)$ tal que la subsucesión que siguiremos denotando por n tenemos que $y_n \to y$.

$$\int_Q k(x, t) y_n \to \int_Q k(x, t) y.$$

Sea $\{z_n\} \subset L^2(Q)$ tal que $z_n \to z$ fuerte en $L^2(Q)$. Elijamos $y_n \in \Lambda_R(z_n)$ una sucesión tal que $y_n \to y$ fuerte en $L^2(Q)$ para algún $y \in \Lambda_R(z)$. Sea $\{z_n\} \subset L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$ tal que

$$z_n \to z \text{ fuerte en } L^2(Q) \cap L^\infty(Q).$$

Elijamos $y_n \in \Lambda_R(z_n)$ una sucesión tal que

$$y_n \to y \text{ fuerte en } L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$$

para algún $y \in L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$. Queremos demostrar que $y \in \Lambda_R(z)$. Tenemos que

$$\left\{\begin{array}{ll}
y_{n,t} - \Delta y_n + g(T_R(z_n)) y_n = h_n 1_\omega & \text{en } Q \\
y_n = 0 & \text{en } \Sigma \\
y_n(0) = y^0 & \text{en } \Omega
\end{array}\right. \tag{6.11}$$

con $y_n(T)=0$ y $\|h_{z_n}\|_{L^2(\omega\times(0,T))\cap L^\infty(\omega\times(0,T))}\leq C(T,\Omega,\|a_{z_n}\|_\infty^{\frac{2}{3}})\|y^0\|_{W^{1,\infty}\cap L^2}$. Como $z_n\to z_0$ en $L^2(Q)\cap L^\infty(Q)$ entonces, existe una subsucesión de z_n (que seguimos denotando por z_n) tal que $z_n\to z_0$ en casi todo punto de Q y $T_R(z_n)\to T_R(z_0)$ en casi todo punto de Q. Como g es continua se tiene $g(T_R(z_n))\to g(T_R(z_0))$ en casi todo punto de Q. Además

$$\|h_n\|_{L^2(\omega)\cap L^\infty}\leq \exp C(T,\Omega,R^{2/3})\|y^0\|_{L^2(Q)\cap W^{1,\infty}(Q)} \tag{6.12}$$

Por (6.12) de [4], existe una subsucesión, que seguiremos denotando por $\{h_n\}$, y $\widetilde{h}\in L^2(Q)\cap L^\infty(Q)$:

$$h_n\rightharpoonup\widetilde{h}\quad \text{débil en}\quad L^2(Q).$$

$$h_n\rightharpoonup\widetilde{h}\quad \text{débil}^*\text{ en}\quad L^\infty(Q).$$

Sea v la solución correspondiente a $g(T_R(z))$ y a $\widetilde{h}$, es decir,

$$\begin{cases} v_t-\Delta v+g(T_R(z))v=\widetilde{h}1_\omega & \text{en } Q\\ v=0 & \text{en } \Sigma\\ v(0)=y^0 & \text{en } \Omega\end{cases} \tag{6.13}$$

Definimos $v_n=y_n-v$. Entonces v_n es solución de

$$\begin{cases} v_{n,t}-\Delta v_n+g(T_R(z))v_n+v(g(T_R(z_n))-g(T_R(z)))=(h_n-\widetilde{h})1_\omega & \text{en } Q\\ v_n=0 & \text{en } \Sigma\\ v_n(0)=0 & \text{en } \Omega\end{cases} \tag{6.14}$$

Por las estimaciones sobre las normas de h_n y $\widehat{h}$,

$$\|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\leq C.$$

Cabe aclarar que la constante anterior no depende de z. Definimos $w_n(t,x)=\int_0^t v_n(s,x)ds$. Obtenemos que

$$\begin{cases} w_{n,t}-\Delta w_n=F_n & \text{en } Q\\ w_n=0 & \text{en } \Sigma\\ w_n(0)=0 & \text{en } \Omega\end{cases} \tag{6.15}$$

con $F_n\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ donde $\|F_n\|_{L^2(Q)}\leq C$. Por las estimaciones de energía (referencia) obtenemos que

$$\|w_n\|_{L^1_{loc}(0,T;H^1_0\cap W^{1,r}_0)}\leq C\quad \text{para cada}\, r>2.$$

Por la definición de w_n esto significa que

$$\|v_n\|_{W^{-1,1}_{loc}(0,T;H^1_0\cap W^{1,r}_0)}\leq C$$

r suficientemente grande tenemos $W^{1,r}_0(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ es compacta. Hemos obtenido que v_n satisface las hipótesis del Corolario 2 y por tanto existe $\tilde{v}$ tal que $v_n\longrightarrow\tilde{v}$ en $C(0,T;L^2(Q))$. De las propiedades de convergencia débil y convergencia fuerte tenemos que para todo $T\geq t\geq 0$,

$$\left(\int_0^t\!\!\int_\Omega v_n(h_n-\widehat{h})+\int_0^t\!\!\int_\Omega vv_n(g(T_R(z_n))-g(T_R(z)))dxdt\right)\to 0.$$

Lo anterior nos indica que

$$\tilde{v}\equiv 0.$$

En particular como $v_n = y_n - v$ esto implica que $y_n \to v$ en $L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$ y $v(T) = 0$. Sabíamos que $y_n \to y$ en $L^2(Q) \cap L^\infty(Q)$ y por tanto $y = v$, y $y \in \Lambda_R(z)$. Esto prueba que la función es hemicontinua superiormente. Por lo que, se cumplen las hipótesis del teorema de Kakutani. Denotemos por $z = y^R$ este punto fijo y su sistema lineal

$$(6.16) \qquad \begin{cases} y_t^R - \Delta y^R + g(T_R y^R) y^R = h_R 1_\omega & \text{en } Q \\ y^R = 0 & \text{en } \Sigma \\ y^R(T) = 0,\ y^R(0) = y^0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

■

Demostración del Lema:
Como $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ es regular. Supongamos que $f \in L^r(\omega \times (\delta, T))$ con $r \geq 2$ y $\delta \in (0,T)$ arbitrario, y fijo. Sea $\delta' \in (\delta, T)$. Consideremos el intervalo (δ, δ'). Dividiendo el intervalo anterior en $I+2$ partes iguales, donde I se determinará más adelante. Definimos

$$\delta_i = \delta + \frac{(i+1)(\delta' - \delta)}{I+2}$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, I+2$. De manera semejante elegimos una familia de abiertos $\{\mathcal{V}_i\}_{0 \leq i \leq I+1}$ tales que

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_{I+1} \subset\subset \mathcal{V}_I \subset\subset \cdots \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}_0 \subset\subset \mathcal{V}$$

Sea $\eta_0 \in C^\infty([0,T])$ verificando $\eta_0 \equiv 0$ en $[0, \delta]$, $\eta_0 \equiv 1\, en[\delta_0, T]$ y $0 \leq \eta_0 \leq 1$, $\quad \|\eta_0'(t)\| \leq \frac{C}{\delta_0 - \delta}$ y sea $\xi_0 \in C^\infty(\Omega)$

$$(6.17) \qquad \xi_0 = \begin{cases} 1 & \text{en } \omega_0 \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus \overline{\omega} \end{cases}$$

y $0 \leq \xi_0 \leq 1$.
Poniendo $w_0 = \eta_0 \xi_0 u$. Multiplicando por $\eta_0 \xi_0$ a la ecuación (6.4), tenemos

$$w_{0,t} - \Delta w_0 = \eta_0 \xi_0 f + \eta_0' \xi_0 u - 2\eta_0 \nabla \xi_0 \cdot \nabla u - \eta_0 u \Delta \xi_0 - a \eta_0 \xi_0 u$$

entonces w_0 resuelve el problema

$$(6.18) \qquad \begin{cases} w_{0,t} - \Delta w_0 = G & \text{en } Q \\ w_0 = 0 & \text{en } \Sigma \\ w_0(0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $G = G_0 = \eta_0 \xi_0 f + \eta_0' \xi_0 u - 2\eta_0 \nabla \xi_0 \cdot \nabla u - \eta_0 u \Delta \xi_0 - a \eta_0 \xi_0 u$. Analizando cada término de G vemos que $G \in L^2(\Omega)$ Por el Teorema 2.1 [Giga], se tiene

$$w_0 \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad w_{0,t} \in L^2(\Omega)$$

en particular como $w_0 = \eta_0 \xi_0 u$ restrengida a w_0 es igual a u; tenemos

$$u \in L^2(\delta_0, T; H^2(\omega_0) \cap L^\infty(\delta_0, T; H^1(\omega_0))$$

Sea $\eta_1 \in C^\infty([0,T])$ verificando $\eta_1 \equiv 0$ en $[0, \delta_0]$, $\eta_1 \equiv 1$ en$[\delta_1, T]$ y $0 \leq \eta_1 \leq 1$, $\quad \|\eta_1'(t)\| \leq \frac{C}{\delta_1 - \delta_0}$ en $[0,T]$. Y sea $\xi_1 \in C^\infty(\Omega)$ $\quad \xi_0 \equiv 0$ en $\Omega \setminus \tilde{\omega_0}$ $\quad \xi_1 \equiv 1$ en ω_1. Haciendo $w_1 = \eta_1 \xi_1 u$ resuelve (6.18) con $G = G_1$ dada por $G_1 = \eta_1 \xi_1 f + \eta_1' \xi_1 u - 2\eta_1 \nabla \xi_1 \cdot \nabla u - \eta_0 u \Delta \xi_1 - a \eta_1 \xi_1 u$ calculando $G_1 - \eta_1 \xi_1 f = \eta_0' \xi_0 u - 2\eta_0 \nabla \xi_0 \cdot \nabla u - \eta_0 u \Delta \xi_0 - a \eta_0 \xi_0 u$ así tenemos $G_1 - \eta_1 \xi_1 f \in H^1(\omega_0) \subset L^{2^*}(\Omega)$ donde

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}$$

Tenemos

$$L^2(0,T;L^{2^*}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^r(0,T;L^p(\Omega))$$

donde r esta fijo y p por determinar. Por Lema 7 de [14], obtenemos

$$L^2(0,T;L^{2^*}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^r(0,T;(L^{2*},L^2)_{\theta,r})$$

si $s = 0 \quad \theta = \lambda$ donde

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2^*}$$

despejando λ se tiene

$$\lambda = \frac{2n}{r(n-2)}.$$

Recordemos que $n > 2$. Calculando

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{2^*} + \frac{(1-\lambda)}{2} \tag{6.19}$$

sustituyendo el valor de λ en (6.19) y despejando p finalmente obtenemos

$$p = \frac{2r(n-2)}{(r+2)(n-2)-2n}.$$

Realizando este proceso un número finito de veces podemos alcanzar r.

Bibliografía

[1] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1993.

[2] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam 1998.

[3] O. Bodart y C. Fabre, *Controls Insensitizing the Norm of the Solution of a Semilinear Heat Equation*, J. Math. Anal y App. **195**(1995), p. 658–683.

[4] H. Brézis, *Análisis funcional Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid 1983.

[5] L. de Teresa, *Insensitizing controls for a semilinear heat equation*, Communications in Partial Differential Equations., (2000), p. 39–72.

[6] L. de Teresa, *Aproximate controllability of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$*, Siam J. Control Optim. Vol. **36** (1998), p. 2128–2147.

[7] A. Doubova, E. Fernández Cara, M. Gonzalez Burgos y E. Zuazua, *On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient*, Siam J. Control Optim. Vol. **41** (2002), p. 798–819.

[8] C. Fabre, J. P. Puel y E. Zuazua, *Aproximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh sec. A, **125** (1995), p. 31–61.

[9] E. Fernández-Cara, *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus Variations., Vol. **2** (1997), p. 87–103.

[10] E. Fernández-Cara y S. Guerrero, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, en vías de publicación.

[11] A. Fursikov; O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes, Research Institute of Mathematics, Seoul National University, Korea, 1996.

[12] M. González-Burgos y L. de Teresa, *Some results on controllability for linear and nonlinear heat equations in unbounded domains*. En preparación (comunicación personal).

[13] R. Pérez García, *Nuevos resultados de control para algunos problemas parabólicos acoplados no lineales: controlabilidad y controles insensibilizantes*, Tesis, Sevilla 2004.

[14] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Annali Mat. Pura Appl., **146** (IV) (1987), p. 65–96.

[15] E. Zuazua, *Teoría matemática del control: motor del desarrollo científico, tecnológico y social*, Notas de curso publicadas en internet.

[16] J. Mikusinski,*The Bochner Integral*, Academic Press, Suiza 1978.