



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS DINÁMICOS DE LA
FAMILIA λe^z .

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

MARCO ANTONIO MONTES DE OCA BALDERAS

TUTOR
DR. JEFFERSON EDWIN KING DÁVALOS

JUNIO 2007



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios Profesionales



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Aspectos dinámicos de la familia lambda $\exp(z)$."

realizado por **Montes de Oca Balderas Marco Antonio**, con número de cuenta **096207286**, quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a)

Propietario

Dr.

Jefferson Edwin King Dávalos

Propietario

Dr.

Héctor Méndez Lango

Propietario

Dr.

Guillermo Javier Sienna Loera

Suplente

Dra.

Ana Margarita Guzmán Gómez

Suplente

Dr.

Santiago López de Medrano Sánchez

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Ciudad Universitaria, D.F., a 9 de mayo del 2007.

**EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

Índice general

INTRODUCCIÓN	v
1. ANTECEDENTES	1
1.1. Elementos del análisis complejo.	1
1.1.1. Familias de funciones normales.	2
1.2. Elementos de sistemas dinámicos discretos.	4
1.2.1. Resultados.	7
2. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL COMPLEJA	9
2.1. Propiedades de la función	9
2.2. Dinámica para el caso real λe^x , $\lambda \in \mathbb{R}$	10
3. EL CASO $\lambda = 1$	15
3.1. Remolinos dinámicos.	15
3.2. Continuos indescomponibles.	27
3.3. Itinerarios.	33
4. EL CASO $\lambda = \frac{1}{e}$	35
4.1. Madejas de cabellos.	36
4.2. Propiedades.	40
4.3. Cepillos rectos.	44
4.4. Itinerarios excluidos.	47
5. EL CASO $\lambda \in \mathbb{R}$	49
5.1. El caso $\lambda > \frac{1}{e}$	49
5.1.1. El Julia es todo el plano.	50
5.1.2. Continuos indescomponibles.	51
5.1.3. Conjuntos con un itinerario asociado.	52
5.2. El caso $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$	52
5.3. Itinerarios no admisibles.	53
5.4. El caso $\lambda < 0$	54

6. ASPECTOS GENERALES	57
6.1. Conjuntos de Cantor.	57
6.2. Dicotomía en la dinámica de $E_\lambda(z)$	60
7. Apéndice A	65
8. Apéndice B	67
9. Apéndice C	69
10. Glosario de símbolos	71

INTRODUCCIÓN

La idea de este trabajo es aportar, a alumnos y profesores que se dediquen al estudio de sistemas dinámicos discretos, una guía de fenómenos que aparecen en la dinámica de la familia $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Ésta ha resultado ser una fuente abundante de resultados y continúa ofreciendo problemas abiertos. Además el texto enriquece la escasa bibliografía en español que hay disponible en esta área de estudio.

Pensando que el lector cuenta con un cierto manejo de conceptos y resultados propios del área, es decir, tanto del análisis complejo como de sistemas dinámicos discretos, en el primer capítulo simplemente hacemos una revisión de aquellos que utilizamos posteriormente. Como parte de los antecedentes, en el segundo capítulo tratamos la dinámica de la familia $E_\lambda(z)$ con parámetro y variable reales.

En \mathbb{C} muchas diferencias aparecen en la dinámica de las funciones trascendentes respecto al caso de las funciones racionales. Una de ellas es el hecho de que el conjunto de Julia puede ser todo el plano. Éste es el caso cuando el parámetro λ es igual a 1 para la familia $E_\lambda(z)$. En la actualidad se cuenta con poderosas herramientas que simplifican la demostración de este hecho. En 1981 Misiurewicz ya lo había logrado con un procedimiento cuya virtud es la utilización de resultados básicos del análisis complejo. Además en esta demostración se exhibe un comportamiento geométrico que nos permite “sentir” el resultado. Tanto la demostración, siguiendo la idea de Misiurewicz, como el aspecto geométrico lo abordamos en el *Capítulo III*.

En el mismo capítulo tratamos otros fenómenos que aparecen en la dinámica del caso $\lambda = 1$, en el cual usamos la notación $E(z)$ para la función exponencial. Concretamente, la aparición de conjuntos invariantes, cuya topología y dinámica resultan peculiares. Se tratan de conjuntos que son continuos indescomponibles. Al final del capítulo comenzamos el tema de los itinerarios.

En el *Capítulo IV* hacemos una construcción geométrica del conjunto de Julia para el caso en que $\lambda = \frac{1}{e}$. Ella nos permite abordar las propiedades topológicas tan singulares del conjunto de Julia para este parámetro. Estas cualidades hacen del Julia un Cantor bouquet, cuya definición vemos en este capítulo. Al final, retomamos lo referente a los itinerarios.

En los capítulos *III* y *IV* escogimos estudiar los casos cuando el parámetro toma los valores 1 y $\frac{1}{e}$ porque son ilustrativos de lo que ocurre para otros casos. En el *Capítulo V* vemos las generalizaciones correspondientes para el caso en

que $\lambda > 0$. Cerramos el capítulo con un ejemplo de los “trasplantes de cabellos”. Un comportamiento que se presenta en el conjunto de Julia al pasar el parámetro por el valor $-e$ y que ocurre en otros casos.

En el *Capítulo VI* hacemos una construcción geométrica de conjuntos de Cantor invariantes cuando el parámetro es no real. Finalmente tratamos la dicotomía que se presenta en la familia $E_\lambda(z)$ para el conjunto de Julia, o bien es todo el plano, o es un conjunto denso en ninguna parte.

Si bien este trabajo no incluye las demostraciones de todas las propiedades, se dará en la medida de lo posible una idea de cómo son. En todo caso haremos las referencias de los artículos donde podemos encontrar las demostraciones.

Capítulo 1

ANTECEDENTES

En este capítulo revisaremos los conceptos y teoremas de análisis complejo y sistemas dinámicos discretos que necesitaremos a lo largo de este trabajo. Muchos forman parte de los cursos básicos de estas áreas, aunque también incluimos definiciones y teoremas que generalmente se presentan en cursos más avanzados. Las discusiones detalladas y las demostraciones no corresponden a los objetivos de este trabajo y por ello no las incluimos.

En la primera sección abordaremos lo referente al análisis complejo que incluye la definición de familias normales de funciones y resultados al respecto. La segunda sección está dedicada al tema de sistemas dinámicos discretos. La tercera sección está dedicada a revisar propiedades de la exponencial compleja y la dinámica de la exponencial de variable e imagen reales.

Salvo referencias concretas, el material de este capítulo se encuentra en [1], [2], [3] y [4].

En adelante, las funciones de las que hablemos tendrán dominio y rango en los complejos a menos que señalemos otro caso.

1.1. Elementos del análisis complejo.

Las cualidades de las funciones derivables de variable compleja hacen de ellas objetos matemáticos muy importantes. Que una función tenga derivada continua significa que viene acompañada de una gran riqueza de propiedades. En ese caso decimos que la función es analítica, o bien, holomorfa. Una diferencia contrastante con las funciones reales derivables de variable real de las funciones analíticas, es que las segundas tienen derivadas de todos los órdenes.

Debido a la abundancia de resultados acerca de las funciones analíticas, presentaremos oportunamente sólo algunos, aquellos que utilizaremos directamente en los siguientes capítulos.

A continuación enunciamos dos resultados de suma importancia: El Teorema de Riemann y el Lema de Schwarz. Para ello recordemos que, por definición, una región es simple conexa si tiene un complemento conexo. Intuitivamente

ello significa que no tiene “hoyos”.

Teorema 1 *Sea G un abierto simple conexo que no sea todo el plano. Sea z_0 elemento de G y $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, el disco unitario. Entonces existe una única función analítica $h : G \rightarrow D$, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $h(z_0) = 0$ y $|h'(z_0)| > 0$.
2. $h(G) = D$.
3. h es inyectiva en G .

A h se le conoce como la uniformización de G en el disco unitario.

Teorema 2 *Sea D el disco unitario y f una función analítica definida en D que cumple:*

1. $f(D) \subseteq D$.
2. $f(0) = 0$

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo z en D .

Además, si $|f'(0)| = 1$, o bien, si $|f(z_0)| = |z_0|$ para algún z_0 distinto de cero, entonces, existe una constante c , $|c| = 1$, tal que $f(z) = cz$ para todo z en D .

Del lema de Schwarz y el Teorema de Riemann se desprende un corolario, que de hecho es una variante del Lema de Schwarz y que resultará muy útil en el estudio de sistemas dinámicos discretos. Aquí lo formulamos y abordamos la demostración en el Apéndice A.

Corolario 3 *Sea G una región simple conexa que no sea todo el plano. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(G) \subseteq G$, analítica. Supóngase $f(z_0) = z_0$ para algún punto en G . Entonces, una de las siguientes dos condiciones se cumple:*

1. $|f'(z_0)| < 1$ y en este caso $f^n(z) \rightarrow z_0$ para todo punto z_0 en G , o
2. $f'(z_0) = e^{i\theta}$ y en tal caso f es analíticamente conjugada, en G , a una rotación $R : D \rightarrow D$ del disco unitario dada por $R(z) = e^{i\theta}z$.

1.1.1. Familias de funciones normales.

Aunque el tema de convergencia de funciones puede tratarse en un contexto muy general, aquí nos interesan resultados muy propios de la teoría de variable compleja, como es el caso del Teorema de Montel.

Por esta razón, a menos que especifiquemos lo contrario, siempre que hablemos de una sucesión o de una familia de funciones, supondremos que éstas están definidas en un dominio adecuado G en el plano complejo o en la esfera de Riemann. A cualquiera de estos dos espacios lo denotamos por X .

Para este tipo de sucesiones existen diferentes criterios de convergencia, sin embargo, para el estudio de sistemas dinámicos discretos de variable compleja nos interesa la convergencia uniforme.

Definición 4 *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$, $f_n : G \subseteq X \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a f en G si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq N$ se cumple que $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$, para todo z en G .*

Esta definición se puede extender a lo que llamamos convergencia uniforme a infinito. Esto ocurre si para todo M real, existe N natural de forma que si $n \geq N$, $|f_n(z)| > M$ para todo z en el dominio.

En el caso de sucesiones de números reales o complejos contamos con el importante teorema de Bolzano-Weierstrass, que establece que una sucesión acotada siempre tiene una subsucesión convergente. Antes de hablar de condiciones necesarias y suficientes, para que una sucesión de funciones contenga subsucesiones uniformemente convergentes, definimos el concepto de familia normal.

Definición 5 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones. \mathfrak{F} es normal en G si y sólo si para toda sucesión $\{f_n\}$ contenida en la familia, existe una subsucesión uniformemente convergente en todo subconjunto compacto de G .

Observemos que en esta definición nos interesa la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de G . Esto es porque pedir que una sucesión converja uniformemente en todo G es demasiado restrictivo y se obtienen importantes resultados sin necesidad de ello. Muestra de ello es el siguiente teorema.

Teorema 6 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas definidas en un dominio $G \subseteq X$. Si f_n converge uniformemente a f en cada subconjunto compacto de G , entonces, f es analítica.

Este teorema es de gran trascendencia pues establece la completitud del espacio métrico de funciones analíticas definidas en un dominio $G \subseteq X$. La métrica es la inducida por la convergencia uniforme en compactos.

Para ejemplificar lo anterior, tomemos la sucesión de funciones $f_n(z) = z^n$. Si bien la sucesión no converge uniformemente en el disco unitario abierto D , sí lo hace en compactos a la función constante cero.

Montel estableció condiciones necesarias y suficientes para que una familia de funciones analíticas sea normal. Para ello requerimos introducir el concepto de familia localmente acotada.

Definición 7 \mathfrak{F} es una familia localmente acotada si y sólo si para cada punto z_0 en el dominio existe un valor real M y una vecindad de z_0 en donde $|f(z)| < M$, para todo punto z en la vecindad y toda función en la familia.

Y así podemos formular ahora el Teorema de Montel.

Teorema 8 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones analíticas, \mathfrak{F} es normal si y sólo si ocurre una de estas dos opciones:

1. La familia es localmente acotada.
2. Toda sucesión en \mathfrak{F} tiene una subsucesión que converge uniformemente a ∞ en cada subconjunto compacto del dominio.

Del Teorema de Montel se desprende un resultado cuyo corolario nos será muy útil.

Teorema 9 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones analíticas en un dominio G . Si existen dos valores distintos a y b en \mathbb{C} tales que $a \notin f(G)$ y $b \notin f(G)$ para toda función f en la familia, entonces \mathfrak{F} es normal en G .

Corolario 10 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones analíticas tal que para toda vecindad V de z_0 la familia no es normal. Entonces,

$$\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(V)$$

omite a lo más un punto en \mathbb{C} .

Un complemento a la definición 7 es la idea de una familia de funciones acotadas uniformemente en un conjunto $G \subseteq X$. Introducimos aquí este concepto pues nos permitirá utilizar de forma simple el Teorema de Montel.

Definición 11 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones definida en $G \subseteq X$. Decimos que \mathfrak{F} es uniformemente acotada en G , si y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z)| < M$ para toda f en la familia y todos los puntos z en G .

Es inmediato que una familia de funciones acotada uniformemente lo es localmente. De ello se desprende el siguiente corolario.

Corolario 12 Sea \mathfrak{F} una familia de funciones acotada uniformemente en $G \subseteq X$, entonces \mathfrak{F} es normal en G .

Ahora pasaremos a revisar conceptos y teoremas de los sistemas dinámicos discretos.

1.2. Elementos de sistemas dinámicos discretos.

Dada una función f , a la composición de ésta consigo misma le llamamos una *iteración de f* . Tenemos que $f^0(z) = z$, $f^1(z) = f(z)$, $f^2(z) = f(f(z))$ y así sucesivamente. Entonces, $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \circ f$, n veces, le llamamos *la n ésima iteración de f* .

El objeto de estudio de los sistemas dinámicos discretos es el comportamiento de los puntos del dominio al evaluarlos con las sucesivas iteraciones de una función. Como siempre en matemáticas, no sólo nos va a interesar conocer el comportamiento particular de las iteraciones en un punto del dominio, sino poder abarcar aspectos cada vez más generales.

Dado un punto z_0 , el conjunto $\{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ donde $z_n = f^n(z_0)$ le llamamos *la órbita de z_0 bajo f* , y lo denotamos por $orb_f(z_0)$. Al conjunto de puntos límite de la órbita de z_0 bajo f , le llamamos *el omega límite de z_0 bajo f* , y lo denotamos por $\omega(z_0, f)$.

Si f es un homeomorfismo, *la órbita hacia atrás de un punto z_0* es el conjunto de los valores que toman las iteraciones de la función inversa f^{-1} en z_0 . Si existe una subsucesión convergente de la órbita hacia atrás, decimos que el límite pertenece *al alfa límite de z_0* , $\alpha(z_0, f)$.

Un resultado básico es que si w pertenece al $\omega(z_0, f)$, entonces la órbita de w está contenida en el $\omega(z_0, f)$.

Si $f(z_0) = z_0$ decimos que z_0 es un punto fijo.

Si para algún $n \neq 0$ se cumple que $f^n(z_0) = z_0$, z_0 es un punto periódico. Cuando n es el natural menor que satisface esta igualdad, decimos que z_0 es de periodo n . Evidentemente un punto fijo es un punto periódico de periodo 1.

Los puntos fijos y periódicos se clasifican de acuerdo al módulo de la derivada. Esto se debe a las consecuencias dinámicas que de ello se desprenden.

Definición 13 Sea f analítica y z_0 un punto fijo. Si:

1. $|f'(z_0)| = 0$, entonces z_0 es un punto fijo superatractor.
2. $|f'(z_0)| < 1$, entonces z_0 es un punto fijo atractor.
3. $|f'(z_0)| > 1$, entonces z_0 es un punto fijo repulsor.
4. $f'(z_0)$ es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo indiferente racional.
5. $|f'(z_0)| = 1$, pero $f'(z_0)$ no es una raíz de la unidad, entonces z_0 es un punto fijo indiferente irracional.

Esta definición se generaliza a puntos periódicos considerando que si z_0 es de periodo n , entonces z_0 es punto fijo para la *enésima* iteración. Tenemos pues, puntos periódicos superatractores, atractores, repulsores, indiferentes racionales e irracionales según $|(f^n)'(z_0)|$ sea cero, menor a uno y distinto de cero, mayor a uno, siendo uno si es raíz de la unidad o no, respectivamente.

Para la familia de la exponencial que nos proponemos estudiar no existen puntos críticos, es decir, donde la derivada se anula. En particular no hay puntos periódicos superatractores. Por ello nos referiremos solamente a los puntos periódicos atractores. Siempre que un punto periódico, o fijo, cumpla que $|(f^n)'(z_0)| = 1$, nos referimos a z_0 simplemente como punto periódico, o fijo, indiferente.

Si z_0 es un punto periódico de periodo n , entonces diremos que la órbita de z_0 es un ciclo atractor, repulsor o indiferente, según z_0 sea atractor, repulsor o indiferente.

Cuando ocurre que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(z) = z_0$$

se dice que z converge asintóticamente a la órbita de z_0 .

En general, a dos puntos z_1 y z_2 que cumplan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z_1) - f^n(z_2)| = 0$$

se les llama *puntos asintóticos hacia adelante*.

Los puntos no periódicos que son preimágenes de un punto periódico, se llaman *preperiódicos* o *eventualmente periódicos*.

Decimos que f es normal en z_0 si la familia de iteraciones $F = \{f^0, f^1, f^2, \dots\}$ es normal en alguna vecindad V que tenga a z_0 como elemento. Naturalmente f no es normal en z_0 si para toda vecindad de z_0 la familia de iteraciones no es normal. Con base en esto se pueden clasificar los puntos del dominio en dos conjuntos ajenos.

Definición 14 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. $J(f) = \{z \in \mathbb{C} : f \text{ no es normal en } z\}$ es el conjunto de Julia de f .
2. $F(f) = \{z \in \mathbb{C} : f \text{ es normal en } z\}$ es el conjunto de Fatou de f , o el conjunto estable de f .

Históricamente al conjunto de puntos donde f no es normal se le ha identificado con el nombre de conjunto de Julia. Más recientemente, en 1984, al conjunto estable se le empezó a llamar conjunto de Fatou. Estos nombres se deben a los creadores de la teoría, dos matemáticos franceses, Pierre Fatou y Gaston Julia, alrededor de 1914.

Cuando $f(A) = A$ para algún subconjunto del dominio de f , decimos que A es un conjunto invariante hacia adelante. Si $f^{-1}(A) = A$ se dice que A es invariante hacia atrás. Si el conjunto cumple ambas condiciones se le llama completamente invariante. Para muchos autores A es invariante hacia adelante si $f(A) \subseteq A$, y en el caso de darse la igualdad, se dice que A es fuertemente invariante hacia adelante.

Por su definición, los conjuntos de Julia y Fatou son completamente invariantes.

Dada una órbita atractora, al conjunto de puntos que convergen a ella se le llama la cuenca de atracción de la órbita, un conjunto abierto. Cada elemento z_j del ciclo atractor pertenece a una componente abierta de la cuenca de atracción que se conoce como la cuenca inmediata de atracción de z_j .

Las componentes del conjunto de Fatou se clasifican de acuerdo a sus propiedades dinámicas.

Definición 15 Sea Φ una componente de $F(f)$ el conjunto de Fatou. Φ es:

1. periódica, si existe $n > 0$ tal que $f^n(\Phi) = \Phi$.
2. eventualmente periódica, si existe n natural tal que $f^n(\Phi)$ es periódica.
3. errante, si para todo $n \geq 0$ los conjuntos $f^n(\Phi)$ son ajenos por pares entre sí.

Cuando Φ satisface 3 se le llama también dominio errante.

Hay variantes de cómo se define el caos. Aquí presentamos la que utiliza Devaney que parte desde un punto de vista topológico.

Definición 16 Sea $f : X \rightarrow X$, X un espacio métrico.

1. Decimos que f es topológicamente transitiva en X si para cualesquiera A y B subconjuntos abiertos no vacíos de X , existe n tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.
2. Decimos que f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en X si existe $\delta > 0$ de modo que para cualquier punto z_1 en X y cualquier vecindad V de z_1 , existe z_2 en V y algún natural n tal que $|f^n(z_1) - f^n(z_2)| > \delta$, donde la δ depende de X y de f pero no del punto.

Definición 17 f es caótica en X si se cumplen las siguientes propiedades:

1. El conjunto de puntos periódicos repulsivos es denso en X .
2. f es topológicamente transitiva en X .
3. f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en X .

La siguiente propiedad es de gran utilidad para conocer el comportamiento dinámico de unas funciones a través de otras.

Definición 18 Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$. f y g son topológicamente conjugadas si y sólo si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. En tal caso decimos que h es una conjugación topológica entre f y g . Cuando adicionalmente h es analítica decimos que f y g son analíticamente conjugadas.

1.2.1. Resultados.

Los conjuntos de Julia y Fatou juegan un papel central en el estudio de los sistemas dinámicos. Aquí presentamos algunas de las propiedades de estos conjuntos. Una muy elemental es que uno es complemento del otro:

$$J(f) = (F(f))^c$$

Si llamamos V_{z_0} a una vecindad donde f es normal en z_0 , podemos escribir al conjunto de Fatou como:

$$F(f) = \bigcup_{z \in F(f)} V_z$$

Una de las contenciones es obvia. Para garantizar la otra, necesitamos probar que dado $z_0 \in F(f)$, $V_{z_0} \subseteq F(f)$. Sea z elemento de V_{z_0} , entonces existe una vecindad V de z contenida en V_{z_0} , con ello f es normal en V y por tanto z es elemento del Fatou, quedando demostrada la igualdad anterior.

Al ser el Fatou una unión arbitraria de abiertos, el conjunto es abierto y por tanto el Julia es cerrado.

Los puntos periódicos juegan un papel central en el estudio de los sistemas dinámicos. De hecho están íntimamente relacionados con los conjuntos de Julia y Fatou. Se puede probar que los puntos periódicos atractores pertenecen al conjunto de Fatou, así como su cuenca de atracción. También se puede demostrar que la frontera de la cuenca de atracción está contenida en el conjunto de Julia.

Otro teorema es que los puntos periódicos repulsores pertenecen al conjunto de Julia. Más todavía, para el caso de funciones analíticas no inyectivas (ni constantes) se tiene el siguiente teorema [6]:

Teorema 19 $J(f)$ es la cerradura del conjunto de puntos periódicos repulsores.

En la demostración del teorema anterior se utiliza otro importante resultado, en particular el hecho de que el Julia es no vacío.

Teorema 20 $J(f)$ es perfecto, es decir, es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados.

El comportamiento del punto al infinito en el caso de las funciones racionales es sumamente distinto al caso de las funciones enteras trascendentes. Por ejemplo, para los polinomios el infinito es un punto superatractor generando una

componente de la cuenca de atracción. En general, el comportamiento dinámico del punto al infinito para las funciones racionales no se distingue del resto de los puntos. Para las funciones enteras trascendentes el infinito es una singularidad esencial. Esto es, la imagen de cualquier vecindad de infinito tiene una imagen que cubre todo el plano, salvo algún punto. Además, la imagen inversa de cualquier punto del plano, salvo el posible valor excluido, es un conjunto infinito [9].

Esto tiene como consecuencia otra caracterización adicional del conjunto de Julia para el caso de las funciones enteras trascendentes.

Teorema 21 *Sea f una función entera trascendente, entonces $J(f)$ es la cerradura del conjunto de puntos cuya órbita tiende a ∞ .*

Empleando el corolario 10 del Teorema de Montel se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 22 *Sea f analítica no constante ni inyectiva, entonces, $J(f)$ es denso en ninguna parte o es todo el plano.*

Demostración. Si $J(f)$ no es todo el plano, entonces el conjunto de Fatou es no vacío. Siendo el conjunto de Fatou abierto, existe una infinidad de puntos donde f es normal. Dado un punto z_0 en el conjunto de Julia y una vecindad arbitraria V_{z_0} de este punto, como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(V_{z_0})$ sólo puede excluir a lo más un punto del plano, corolario 10, debe existir N natural, tal que $f^N(V_{z_0})$ tiene intersección no vacía con el conjunto de Fatou. Tomemos a w elemento de ambos conjuntos. Entonces $f^{-N}(\{w\})$ intersecta a V_{z_0} . Al ser Fatou completamente invariante, encontramos elementos del conjunto estable arbitrariamente cerca de z_0 . En tal caso el Julia debe ser denso en ninguna parte. ■

La dinámica en el conjunto de Julia resulta ser muy complicada. Recordemos que si f no es normal en z , quiere decir que en ninguna vecindad de z la familia tiene una subsucesión uniformemente convergente. Las consecuencias dinámicas de este hecho en el conjunto de Julia se resume en el siguiente resultado, ver [5].

Teorema 23 *Sea f analítica, no inyectiva ni constante. Entonces, f es caótica, en el sentido de Devaney, en $J(f)$.*

Capítulo 2

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL COMPLEJA

2.1. Propiedades de la función

Definimos la función $E(z) = e^z$, $z = x + iy$, $z \in \mathbb{C}$, como sigue:

$$E(z) = e^x \cos y + e^x i \sin y$$

considerando que $z = x + iy$.

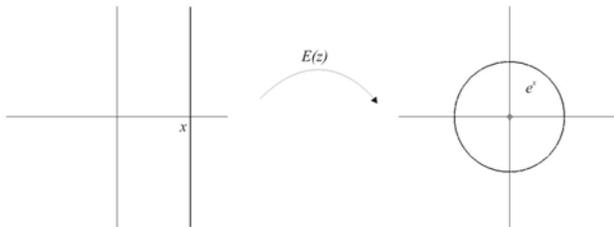
Por tanto, la función satisface que $|E(z)| = e^x$ y $\text{Arg}(E(z)) = y$. Esto trae como consecuencia propiedades analíticas y geométricas peculiares. El cero es un punto omitido en la imagen de la exponencial. Mientras que la imagen de cualquier recta horizontal forma un rayo cuyo ángulo es y , la imagen de cualquier recta vertical es una circunferencia cuyo radio es e^x dando una infinidad de vueltas al cero.

En franjas horizontales de altura 2π la exponencial es una función biyectiva con imagen $\mathbb{C} - \{0\}$.

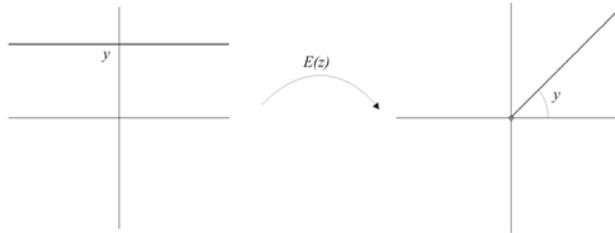
Como $E'(z) = E(z)$ la función no tiene punto críticos. Además, $|E'(z)| = e^x$.

Figura 1.

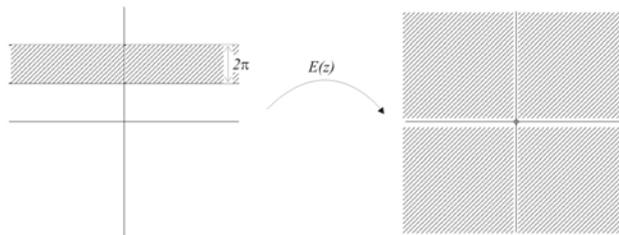
a) *Imagen de rectas verticales.*



b) *Imagen de rectas horizontales.*



c) *Imagen de franjas horizontales de altura 2π .*



Si tomamos un valor λ en $\mathbb{C} - \{0\}$, para la función $E_\lambda(z) = \lambda e^z$ las propiedades anteriores se preservan.

La exponencial es simétrica respecto a la conjugación: $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$.

La función cumple otras propiedades que abordaremos oportunamente en los capítulos posteriores.

2.2. Dinámica para el caso real λe^x , $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como ocurre con muchas familias de funciones, si limitamos la variable y el parámetro a los reales la dinámica puede resultar bastante simple. A continuación presentaremos este caso porque nos ayudará en el estudio posterior del caso complejo.

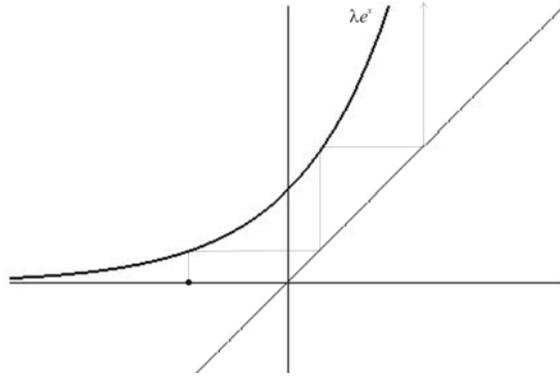
En esta familia aparecen dos fenómenos con el cambio del parámetro. Por un lado tenemos una bifurcación tangente o de punto silla cuando $\lambda = \frac{1}{e}$. Por otro, una bifurcación de duplicación de periodo cuando $\lambda = -e$.

Observemos en las gráficas estas bifurcaciones.

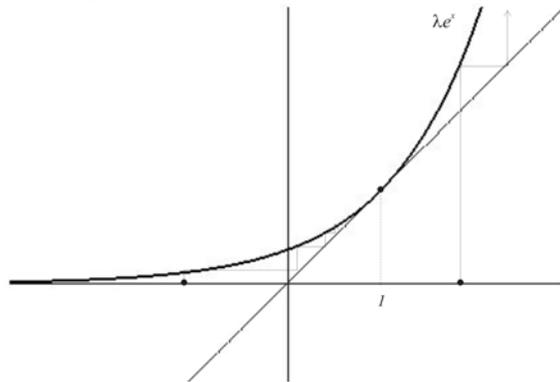
Empecemos con el caso $\lambda > 0$.

Figura 2.

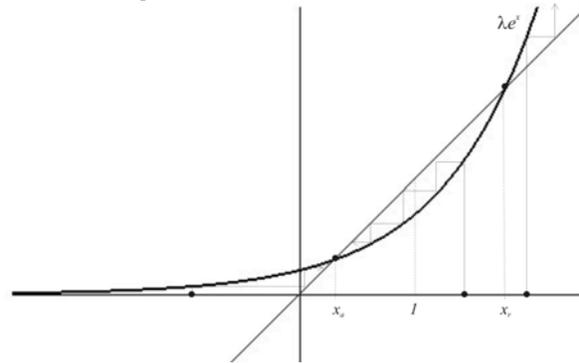
a) *El caso $\lambda > \frac{1}{e}$.*



b) El caso $\lambda = \frac{1}{e}$.



c) El caso $0 < \lambda < \frac{1}{e}$.

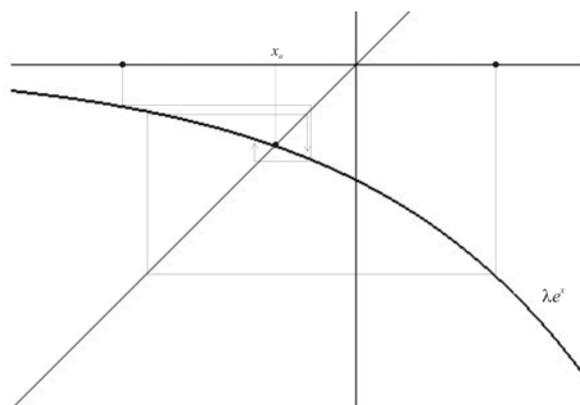


1. Si $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ tenemos dos puntos fijos. Uno x_a que es atractor y otro x_r repulsor. Además se cumple que $0 < x_a < 1 < x_r$. Si $x \in (-\infty, x_r)$ su órbita converge a x_a . Si $x \in (x_r, \infty)$ su órbita se va a infinito.
2. Si $\lambda = \frac{1}{e}$ tenemos un punto fijo indiferente en $x = 1$. Si $x \in (-\infty, 1]$ su órbita converge a 1 y si $x \in (1, \infty)$ su órbita crece hacia infinito.
3. Si $\lambda > \frac{1}{e}$ no existe punto fijo y la órbita de todos los puntos se va a infinito.

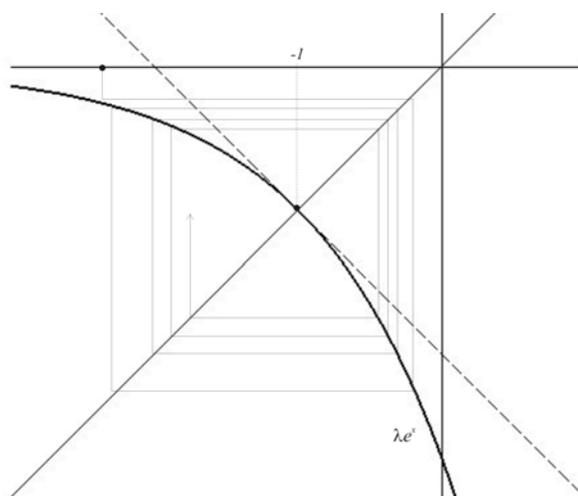
Cuando $\lambda < 0$, tenemos nuevamente tres casos.

Figura 3.

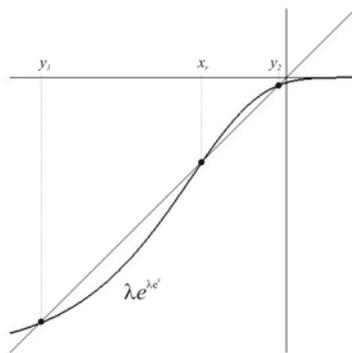
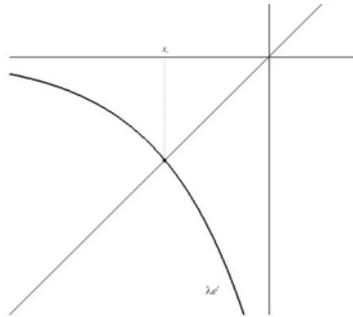
a) *El caso $-e < \lambda < 0$.*



b) *El caso $\lambda = -e$.*



c) *El caso $\lambda < -e$. Primera y segunda iteraciones.*



1. Si $-e < \lambda < 0$ hay un punto fijo atractor y las órbitas de todos los puntos convergen a éste.
2. Cuando $\lambda = -e$ hay un punto fijo indiferente en $x = -1$. Como $E'_\lambda(-1) = -1$ el punto fijo es no hiperbólico, todas las órbitas convergen a él.
3. Si $\lambda < -e$ hay un punto fijo repulsor y un ciclo atractor de periodo dos, a éste último convergen las órbitas de todos los puntos, excepto la del punto fijo.

Con esto terminamos los antecedentes que iremos utilizando en los siguientes capítulos.

Capítulo 3

EL CASO $\lambda = 1$

Como vimos en el caso real, existe una bifurcación cuando el parámetro pasa por el valor $\frac{1}{e}$, de modo que si $\lambda > \frac{1}{e}$ las órbitas de todos los puntos se van a infinito. En este capítulo estudiaremos dos fenómenos que se presentan para estos parámetros.

Por un lado $J(E_\lambda(z)) = \mathbb{C}$. La demostración que presentaremos en este capítulo de este hecho está basada en la que hizo Misiurewicz en 1981, que prescinde del teorema de no existencia de dominios errantes, que presentamos en el *Apéndice C*, Teorema 61. Con ello, Misiurewicz respondió una pregunta de 60 años planteada por Fatou, ver [10] y [4].

Después abordamos la aparición de unos muy peculiares conjuntos invariantes [5], [7]. Terminamos este capítulo introduciendo la discusión referente a los itinerarios [11].

Es usual encontrar la notación $E(z) = E_\lambda(z)$ cuando $\lambda = 1$ y aquí también la emplearemos.

3.1. Remolinos dinámicos.

En la dinámica de la función $E(z)$ se presenta un fenómeno geométrico consistente en que, por una parte, las imágenes de cualquier abierto U se “*arremolinan*” en torno al cero a partir de cierta iteración. Esto trae como consecuencia un “*anclaje*” de las imágenes de U al disco unitario, es decir, a partir de cierta iteración, las posteriores imágenes de U tienen intersección no vacía con el disco unitario. Por otra parte, las iteraciones de U se expanden hacia infinito. Este comportamiento implica que la familia de iteraciones de $E(z)$ no sea normal en todo el plano, lo cual establece que $J(E(z)) = \mathbb{C}$.

A continuación presentamos la demostración formal de estas ideas y después abordaremos la discusión geométrica.

Teorema 24 *Sea $E(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $E(z) = e^z$. Entonces $J(E(z)) = \mathbb{C}$.*

Mostraremos primero, a través de una serie de proposiciones y lemas, que cualquier abierto queda “anclado” a una franja del plano.

Proposición 25 Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo, no vacío. Sea:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $E^n(U) \cap S \neq \emptyset$ para todo $n \geq M$.

Para esta proposición, procedemos a probar los siguientes 3 lemas.

Lema 26 Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo, no vacío. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E^{n_0}(z)$ no es homeomorfismo en U , entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $E^n(U) \cap S \neq \emptyset$ para todo $n \geq M$. Es decir, en este caso se cumple la proposición 25.

Demostración. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E^{n_0}(z)$ no es homeomorfismo en U , es porque la función $E^{n_0}(z)$ pierde la inyectividad en U . Puesto que $E(z)$ manda inyectivamente franjas de altura 2π en todo el plano salvo el cero, que $E^{n_0}(z)$ pierda la inyectividad es porque la imagen de U bajo esta iteración cae en al menos dos de estas franjas y por tanto cruza una de las rectas de altura $k\pi$. De modo que $E^{n_0+1}(U) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Como $E(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ a partir de esta iteración las imágenes de U no dejan de intersectar a \mathbb{R} y por tanto a S . ■

Lema 27 $|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq |(E^n)'(z)|$ con $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Recordemos que $E'(z) = E(z)$ de forma que la desigualdad es trivial para $n = 1$. También es evidente que la desigualdad se cumple si $E^n(z) \in \mathbb{R}$ para alguna n . A continuación la probaremos para el resto de los casos, con $n > 1$ y $E^n(z) \notin \mathbb{R}$.

Puesto que $z = x + iy$:

$$|\operatorname{Im}(E(z))| = e^x |\sin y| \leq e^x |y| = |E'(z)| |\operatorname{Im}(z)|$$

Como z no es real, tenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{|\operatorname{Im}(E(z))|}{|\operatorname{Im}(z)|} \leq |E'(z)|$$

Para usar conveniente la desigualdad anterior observemos la siguiente ecuación:

$$\frac{|\operatorname{Im}(E^n(z))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} = \frac{|\operatorname{Im}(E^2(z))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} \cdot \frac{|\operatorname{Im}(E^3(z))|}{|\operatorname{Im}(E^2(z))|} \cdots \frac{|\operatorname{Im}(E^{n-1}(z))|}{|\operatorname{Im}(E^{n-2}(z))|} \cdot \frac{|\operatorname{Im}(E^n(z))|}{|\operatorname{Im}(E^{n-1}(z))|}$$

Reescribiendo tenemos:

$$\frac{|\operatorname{Im}(E^n(z))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E^{i+1}(z))|}{|\operatorname{Im}(E^i(z))|} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^i(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^i(z))|}$$

Lo que nos permite aplicar la desigualdad anterior considerando a $E^i(z)$ como si fuera z :

$$\frac{|\operatorname{Im}(E^n(z))|}{|\operatorname{Im}(E(z))|} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|\operatorname{Im}(E(E^i(z)))|}{|\operatorname{Im}(E^i(z))|} \leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))|$$

Despejando:

$$|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq |\operatorname{Im}(E(z))| \cdot \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))|$$

Utilizando que $|\operatorname{Im}(E(z))| \leq |E(z)| = |E'(z)|$ obtenemos:

$$|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq |E'(z)| \cdot \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))| = \prod_{i=0}^{n-1} |E'(E^i(z))|$$

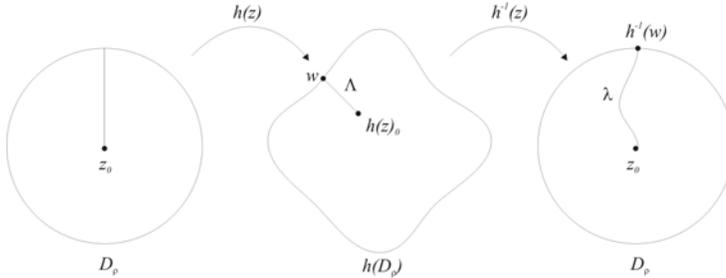
Finalmente, con la regla de la cadena

$$|\operatorname{Im}(E^n(z))| \leq \prod_{i=0}^{n-1} |E'(E^i(z))| = |(E^n)'(z)|.$$

■

Lema 28 Sea D_ρ un disco de radio ρ y h un homeomorfismo analítico que cumple $|h'(z)| \geq \mu > 0$, para todo $z \in D_\rho$. Entonces $h(D_\rho)$ contiene al menos un disco de radio $\mu\rho$.

Figura 4.



Demostración. Sea z_0 el centro de D_ρ . Como la función no es constante, $h(z_0)$ es punto interior de $h(D_\rho)$. Sea w el punto más cercano de la frontera de $h(D_\rho)$ al punto $h(z_0)$. Si no existiera es porque la imagen de D_ρ es todo \mathbb{C} y ya habríamos terminado. Sea Λ el segmento de recta que va de $h(z_0)$ a w sin w , sea $\lambda = h^{-1}(\Lambda)$. Entonces λ es una curva que va de z_0 a la frontera de D_ρ por lo cual $\operatorname{long}\lambda \geq \rho$. Sea $\lambda(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ la parametrización de esta curva donde $\lambda(a) = z_0$. De este modo tenemos que:

$$\operatorname{long}\Lambda = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t |h'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)| dt \geq \mu \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t |\lambda'(t)| dt = \mu \cdot \operatorname{long}\lambda \geq \mu\rho$$

Por tanto tenemos un disco contenido totalmente en $h(D_\rho)$ de radio mayor o igual a $\mu\rho$. ■

Ahora ya podemos terminar la demostración de la proposición 25. Siguiendo a Misiurewicz, procederemos a hacerlo por reducción al absurdo.

Demostración de la proposición 25.

Supongamos que existe una infinidad de imágenes de U bajo $E(z)$ contenidas en S^c . Sea $\{n_j\}$ la subsucesión de las iteraciones correspondientes. Por el lema 26, todas las iteraciones de $E(z)$ deben ser homeomorfismos en U .

Tomemos un disco $D_\rho \subseteq U$ de radio ρ . Como $E^{n_j}(D_\rho)$ cae totalmente fuera de S , el lema 27 nos garantiza que $|(E^{n_j})'(z)| \geq \frac{\pi}{3}$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y toda $z \in D_\rho$. Escribamos la j -ésima iteración convenientemente:

$$E^{n_j}(z) = E^{n_j - n_{j-1}} \circ E^{n_{j-1} - n_{j-2}} \circ \dots \circ E^{n_2 - n_1} \circ E^{n_1}(z)$$

Por lo antes señalado, observemos que $E^{n_j - i - n_{j-i-1}}$ son todos homeomorfismos. Si derivamos $E^{n_j}(z)$ utilizando esta igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} [E^{n_j}(z)]' &= [E^{n_j - n_{j-1}}(E^{n_{j-1}}(z))]'. [E^{n_{j-1} - n_{j-2}}(E^{n_{j-2}}(z))]'. \dots \\ &\quad \cdot [E^{n_2 - n_1}(E^{n_1}(z))]'. [E^{n_1}(z)]' \end{aligned}$$

Si restringimos z en D_ρ , podemos utilizar la desigualdad del lema 27 a cada uno de los factores de la igualdad anterior y obtenemos:

$$|(E^{n_j})'(z)| \geq \left(\frac{\pi}{3}\right)^j$$

Y con ello el lema 28 nos garantiza que existe $j \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\rho \left(\frac{\pi}{3}\right)^j > \pi$$

De modo que existe una iteración de la subsucesión que “engorda” lo suficiente a D_ρ para intersectar a alguna recta de altura $k\pi$.

Así, las posteriores iteraciones intersectan a los reales y por tanto a S , contradiciendo la suposición de tener U una infinidad de imágenes contenidas totalmente en S^c . Queda así demostrada la proposición. ■

Si bien hemos probado que cualquier abierto eventualmente permanece “anclado” a la franja S , la siguiente proposición nos dice que, los puntos no reales en S , salen de S en alguna iteración.

Proposición 29 *Sea $z \in S$ no real. Entonces existe n tal que $E^n(z) \notin S$.*

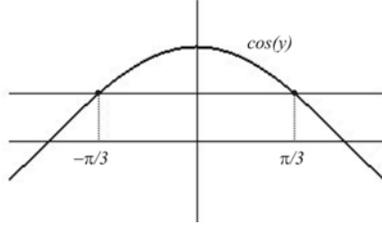
Probaremos dos lemas. El primero nos garantiza que mientras las iteraciones de z permanecen en S , su componente real crece indefinidamente. El segundo, nos dice que si la componente real es suficientemente grande, la componente imaginaria en valor absoluto crece lo suficiente hasta salirse de S .

Lema 30 Sea $z \in S$. Entonces $\operatorname{Re}(E(z)) > \operatorname{Re}(z)$. En particular si $E^n(z) \in S$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\operatorname{Re}(E^n(z)) \rightarrow \infty$.

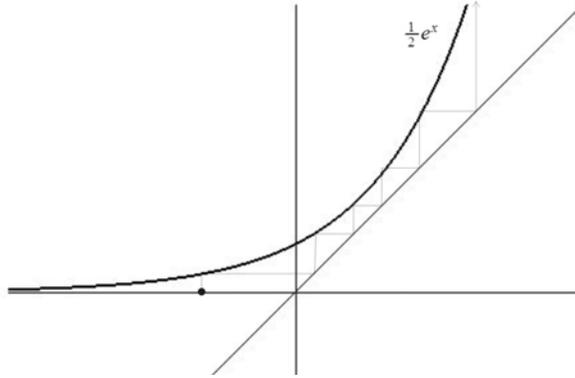
Demostración. Dado que $z = x + iy$ tenemos $|\operatorname{Re}(E(z))| = |e^x \cos y| \geq \frac{1}{2}e^x > x = \operatorname{Re}(z)$. La primera desigualdad queda garantizada pues $|y| \leq \frac{\pi}{3}$ y entonces $|\cos y| \geq \frac{1}{2}$. La segunda desigualdad se desprende por lo visto en la sección anterior del caso λe^x con variable y parámetros reales. Como $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$, podemos asegurar que se cumple la primera parte de nuestro lema. La demostración de la segunda parte del lema es inmediata con el lema 60 del Apéndice B. Ver Figura 5. ■

Figura 5.

a) Comparación del $\cos y$ con la constante $\frac{1}{2}$.



b) Comparación de $\frac{1}{2}e^x$ con la identidad.



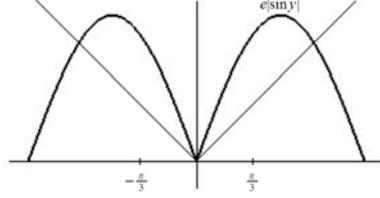
Lema 31 Sea $z \in S - \mathbb{R}$ y $\operatorname{Re}(z) > 1$. Entonces, $|\operatorname{Im}(E(z))| > |\operatorname{Im}(z)|$.

Demostración. Como $z = x + iy$ tenemos que:

$$|\operatorname{Im}(E(z))| = |e^x \sin y| > e |\sin y| \geq |y| = |\operatorname{Im}(z)|$$

En la primera desigualdad utilizamos que $\operatorname{Re}(z) = x > 1$. La segunda se garantiza porque $|y| \leq \frac{\pi}{3}$. ■

Figura 6. Comparación de $e|\sin y|$ con $|y|$.



Con lo anterior ya podemos probar la proposición 29.

Demostración de la proposición 29.

Supongamos que existe $z \in S - \mathbb{R}$ cuyas iteraciones están todas en S . Por el lema 30, existe n_1 para la cual $\operatorname{Re}(E^{n_1}(z)) > 1$. Con ello, podemos utilizar el lema 31 para todas las iteraciones con índice mayor a n_1 . Por el lema 60 del Apéndice B podemos garantizar que existe n_2 que cumple $|\operatorname{Im}(E^{n_2}(z))| > \frac{\pi}{3}$ y por tanto fuera de S , presentándose la contradicción. ■

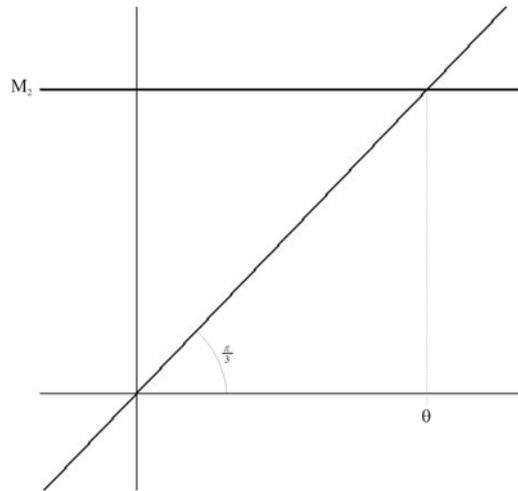
Hasta ahora ya es evidente que la dinámica de la función es suficientemente complicada. Por un lado todos los abiertos deben permanecer intersectando a la franja S a partir de cierta iteración, por otro lado los puntos en la intersección deben salir de la franja en alguna iteración.

Sin embargo lo anterior no es suficiente para concluir nuestro teorema. Para ello mostraremos que las imágenes de cualquier abierto también permanecen “ancladas” a un disco con centro en el cero.

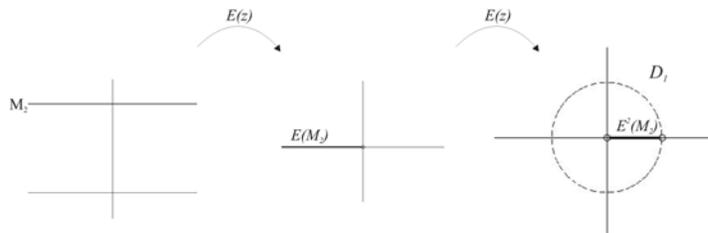
Necesitamos trabajar con un semiplano particular. En la construcción de este semiplano fijémonos en lo siguiente. Sea M_1 la recta horizontal de altura $\frac{\pi}{3}$ y sea M_2 la recta horizontal de altura π . Como la imagen de M_1 bajo $E(z)$ es el rayo de ángulo $\frac{\pi}{3}$, este rayo intersecta a M_2 en un punto. Sea $\theta = \frac{\pi}{\tan \frac{\pi}{3}}$ la parte real de este punto. Observemos que $E(M_2)$ son los reales negativos, y la imagen de estos quedan contenidos en el disco unitario D_1 .

Figura 7.

a) El valor θ .



b) Imágenes de la recta M_2 .



Proposición 32 Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo, no vacío. Sea:

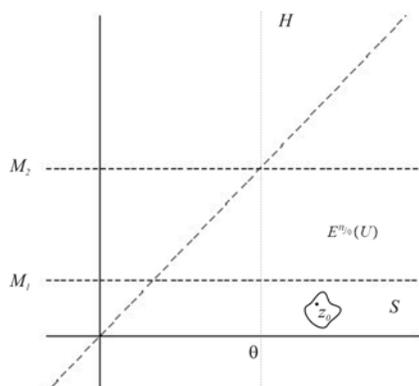
$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq \theta = \frac{\pi}{\tan \frac{\pi}{3}} \right\}.$$

Entonces, sólo una cantidad finita de imágenes de U pueden estar totalmente contenidas en H . Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$, si $n > N$, $E^n(U) \cap H^c \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que existe $\{n_j\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $E^{n_j}(U) \subseteq H$. Por la proposición 25 existe $N \in \mathbb{N}$ para la cual, si $n > N$, $E^n(U) \cap S \neq \emptyset$. Entonces existe $n_{j_0} > N$ tal que para toda $j \geq j_0$, $E^{n_j}(U) \cap S \cap H \neq \emptyset$.

Figura 8.

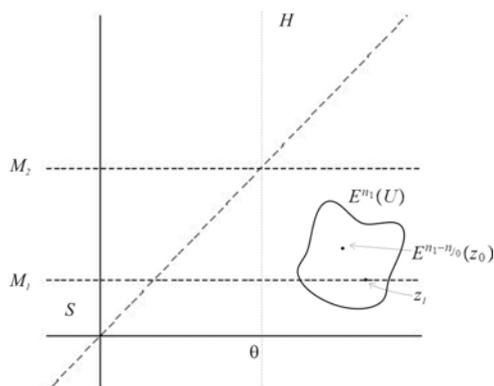
a)



Tomemos z_0 en esta triple intersección. Por la proposición 29 existe $n_1 \geq n_{j_0}$ para la cual $E^{n_1}(z_0) \notin S$. Como U es conexo y el lema 30, $E^{n_1}(U) \cap M_1 \cap H \neq \emptyset$. Tomemos z_1 en esta triple intersección.

Figura 8.

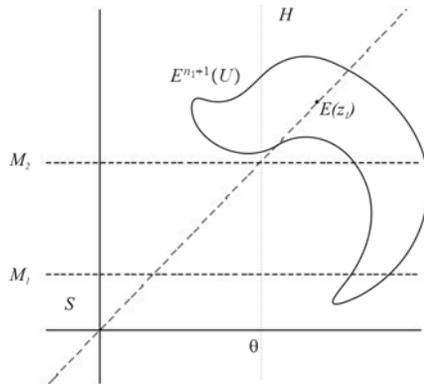
b)



Recordemos que $\operatorname{Re} E(z_1) > \operatorname{Re}(z_1) > \theta$. Esto garantiza que $E(z_1) \in M_2 \cap H$, con ello tenemos que $E^{n_1+1}(U) \cap M_2 \neq \emptyset$. Para lo cual nuevamente se utiliza la conexidad de U . Además las imágenes de U ya están ancladas a S , de modo que también se cumple que $E^{n_1+1}(U) \cap M_1 \cap H \neq \emptyset$.

Figura 8.

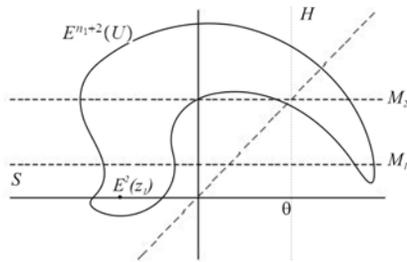
c)



Así, $E^{n_1+2}(U)$ preserva éstas intersecciones y además lo hace con los reales negativos.

Figura 8.

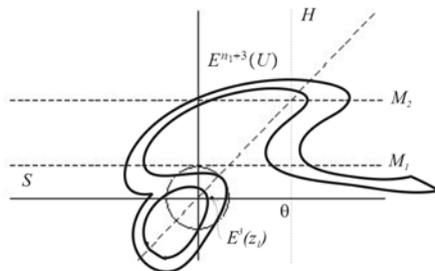
d)



Entonces para toda $n > n_1+2$ las imágenes de U intersectan al disco unitario, lo que contradice la suposición de haber una infinidad de iteraciones contenidas totalmente en H . ■

Figura 8.

e)



Por el momento hemos probado que un abierto no puede tener una infinidad de imágenes contenidas totalmente en H . No hemos probado que cualquier abierto permanece anclado a D_1 el disco unitario. Lo que sí queda demostrado es que para cualquier abierto, las imágenes permanecen ancladas al disco D_{H^c} que es imagen de H^c . Además, las imágenes deben permanecer ancladas a la franja S y a la vez los puntos no reales en S deben ir saliendo todos de esta franja en alguna iteración.

Ahora probemos el siguiente:

Corolario 33 $\mathbb{R} \subseteq J(E(z))$.

Demostración. Sea U un abierto, conexo, no vacío, tal que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Recordemos la dinámica de la función en los reales. La órbita de todos los puntos tiende a infinito. De forma que la única posibilidad para que $E(z)$ sea normal en U es converger uniformemente a ∞ . Sin embargo, por la proposición 32, esto no puede ocurrir. ■

Ahora ya podemos probar el Teorema 24.

Demostración del Teorema 24.

Supongamos que existe $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, conexo, no vacío, donde $E^n(z)$ es normal en U . Por las proposiciones 25 y 32, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq M$, $E^n(U) \cap D_{H^c} \cap S \neq \emptyset$. Por el corolario 33 las imágenes de U no pueden intersectar a los reales. Tomemos una subsucesión de $E^n(z)$ y sea F la función límite. Entonces $F(U) \cap D_{H^c} \cap S \neq \emptyset$. Sea z_0 en esta intersección. Naturalmente no puede ser un valor real, por lo que existe $k \in \mathbb{N}$ para la cual $E^k(z_0) \notin S$. Entonces existe $w \in U$ y una subsucesión de $E^n(z)$ cuya función límite G cumple con que $G(w) \notin S$. Pero ello implica que una vecindad de w cae una infinidad de veces fuera de S , lo que contradice la proposición 25. Por lo tanto no existe un abierto U en donde $E^n(z)$ sea normal. ■

Es notable que por el Teorema 23, el conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en todo el plano.

Corolario 34 Las imágenes inversas de \mathbb{R} son densas en \mathbb{C} .

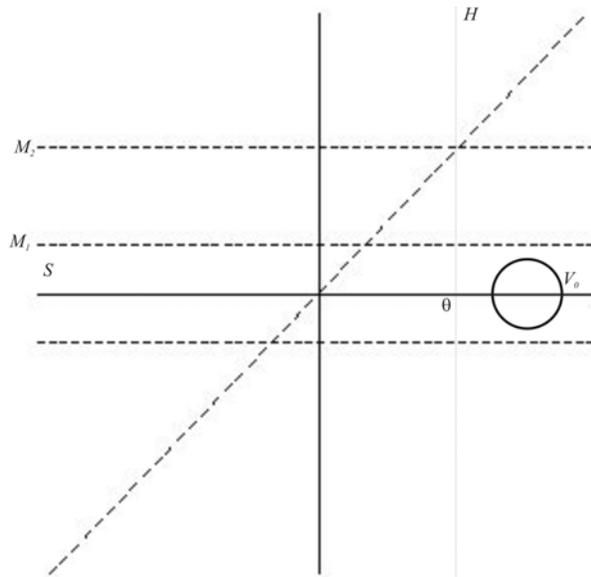
Demostración. Si suponemos que existe algún abierto que no intersecte a \mathbb{R} bajo $E(z)$, por el teorema de Montel $E^n(z)$ es normal en U lo que contradice el Teorema 24. ■

Ahora retomemos la discusión de cómo las imágenes de cualquier abierto U conexo, no vacío, se arremolinan en torno al cero. Aquí solo presentamos una discusión geométrica, utilizando los resultados obtenidos en la demostración del Teorema 24, sería apropiado presentar una demostración formal que no se contempla en este trabajo.

Como las imágenes inversas de \mathbb{R} son densas, limitemos la discusión a los abiertos que intersectan el eje real. Incluso, como las órbitas de los reales tienden a infinito, podemos trabajar con una vecindad $V_0 \subseteq E^n(U) \cap H$ con centro en un valor real para alguna n apropiada.

Figura 9.

a)



Reconstruyendo el procedimiento que seguimos para probar la proposición 32, existe una iteración n_0 para la cual $E^{n_0}(V_0) \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$.

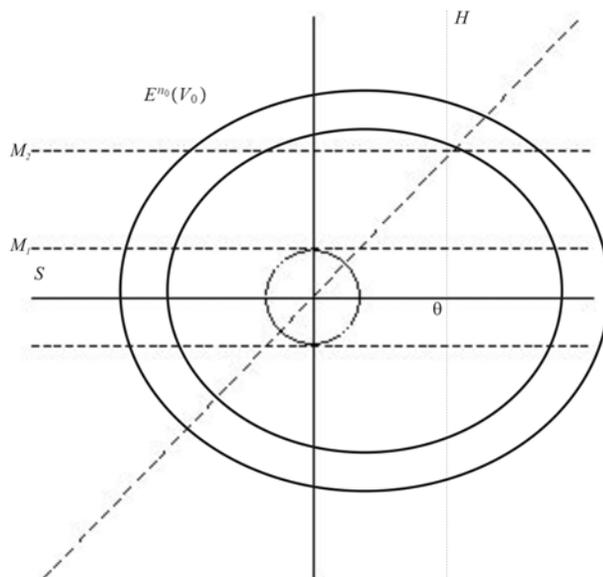
Observemos que la función es simétrica con los conjugados pues satisface

$$E(z) = e^x \cos y + e^x \sin y = e^x \cos(-y) - e^x \sin(-y) = \overline{E(\bar{z})}$$

Como el eje real es un eje de simetría de V_0 , $E^{n_0}(V_0)$ también tiene el mismo eje de simetría. De modo que $E^{n_0}(V_0)$ se cierra en los negativos, al no dejar de intersectar a los positivos, esta imagen de V_0 debe rodear al cero, siendo este un valor excluido de la función.

Figura 9.

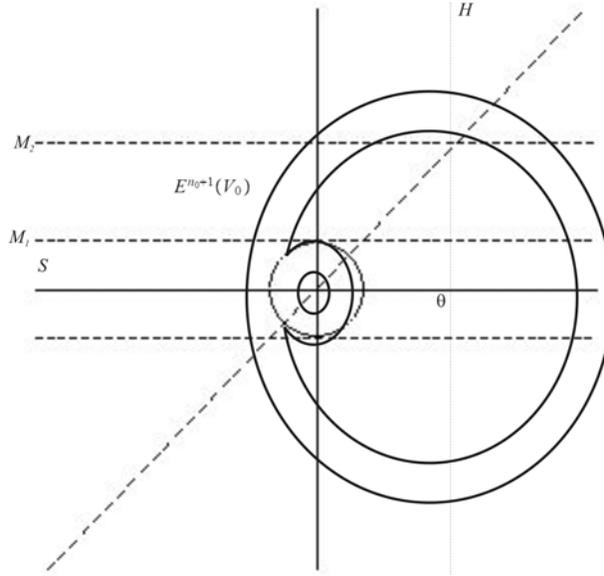
b)



Observemos que podemos escoger un conjunto V_1 contenido propiamente en $E^{n_0}(V_0)$, que cumpla que $E(V_1) \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$, donde \mathbb{R}^- son los reales negativos. Con esta elección de V_1 tenemos un subconjunto propio de $E^{n_0}(V_0)$ que no rodea al cero cuya imagen sí lo hace. Es importante que podemos elegir el conjunto V_1 de forma que $E^{n_0}(V_0) - V_1$ rodee al cero y cumpla las condiciones para que $E^{n_0+1}(V_0)$ también lo haga. Así hemos descompuesto a $E^{n_0}(V_0)$ en dos subconjuntos ajenos. Uno que rodea al cero y su imagen también, el otro que no lo hace y su imagen sí. En consecuencia $E^{n_0+1}(V_0)$ da dos vueltas al cero.

Figura 9.

c)



Podemos repetir este proceso en las posteriores imágenes de V_0 incrementando el número de vueltas en torno al cero, dando como resultado el arremolinamiento en torno al cero de las imágenes de U .

3.2. Continuos indecomponibles.

Acabamos de ver cómo el plano complejo se “arremolina” bajo la iteración de la función exponencial de modo que en todos lados se cumplen las condiciones del caos. Por ello, de cierta manera resulta sorprendente que en medio de los remolinos que estudiamos anteriormente aparezcan conjuntos invariantes distintos al conjunto de Julia. De hecho, compactificando de cierta manera algunos de estos conjuntos resultan ser continuos indecomponibles.

Antes de construir estos conjuntos invariantes, presentamos la definición de lo que es un continuo indecomponible.

Definición 35 Sea $A \subseteq X$, espacio métrico. A es un continuo si y sólo si es conexo y compacto y no vacío.

Definición 36 Decimos que A es un continuo descomponible si y sólo existen B y C continuos no vacíos contenidos propiamente en A cuya unión sea A .

Decimos que A es un continuo indecomponible si y sólo si no es un continuo descomponible.

Para un tratamiento sistemático de este tipo de continuos se puede consultar a Kuratowski [19].

La siguiente construcción nos dará una idea geométrica de cómo son los continuos indecomponibles que aparecen en la dinámica de $E(z)$. Si bien el

procedimiento es análogo para todos los casos en que $\lambda > \frac{1}{e}$, tomaremos el caso en que $\lambda = 1$.

Definamos:

$$W = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq \pi\}$$

Observamos que $E(W)$ es el semiplano superior incluyendo los reales sin el cero.

Definamos Λ de la siguiente forma:

$$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : E^n(z) \in W, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Por su definición, es inmediato que Λ es invariante hacia adelante.

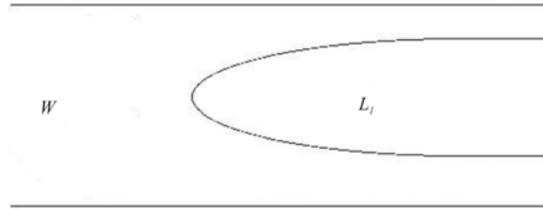
Observemos que hay un subconjunto propio de W , llamémoslo L_1 , cuya imagen está contenida totalmente en el complemento de W . Como W es cerrado, L_1 es abierto.

Definamos a las rectas verticales como:

$$R_x = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = x\}$$

Puesto que la imagen de la intersección de R_x con W son semicírculos en el semiplano superior, cuando $x \leq \ln \pi$, la imagen de este segmento está contenida en W . Si $x > \ln \pi$, sus imágenes correspondientes son semicírculos con arcos cada vez más grandes fuera de W . Geométricamente es evidente que L_1 posee una frontera que tiene a los reales y a la recta horizontal de altura π como asíntotas.

Figura 10.



Si consideramos la preimagen de L_1 contenida en W , ésta corresponderá al conjunto de puntos que bajo la segunda iteración caen fuera de W , llamémosle L_2 . Análogamente podemos obtener L_n , el conjunto de puntos cuya n -ésima imagen cae fuera de W y no antes:

$$L_n = \{z \in S : E^i(z) \in W, i = 1, \dots, n-1; E^n(z) \notin W\}$$

Utilizando estos conjuntos, vemos que Λ cumple lo siguiente:

$$\Lambda = W - \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

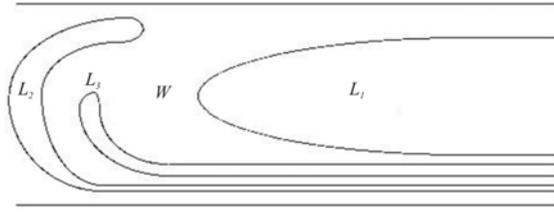
Como cada L_n es un conjunto abierto, tenemos que Λ es cerrado.

Los segmentos verticales en W con componente real suficientemente grande intersectan a $W - L_1$ en dos segmentos. La imagen de uno de ellos es un arco de

circunferencia en el semiplano izquierdo de los reales negativos. El otro segmento tiene como imagen un arco contenido en W que intersecta a L_1 . Por ello la preimagen de L_1 contenida en W se encuentra “abajo” de L_1 . En consecuencia L_2 es un conjunto que se extiende hacia infinito en el semiplano derecho. Al repetir este procedimiento, cada L_n se extiende hacia infinito, con L_{n+1} “debajo” del anterior.

Figura 11.

Adaptada de [21].



Consideremos ahora las fronteras de cada L_n .

$$B_n = \{z \in W : z \in \partial L_n\}$$

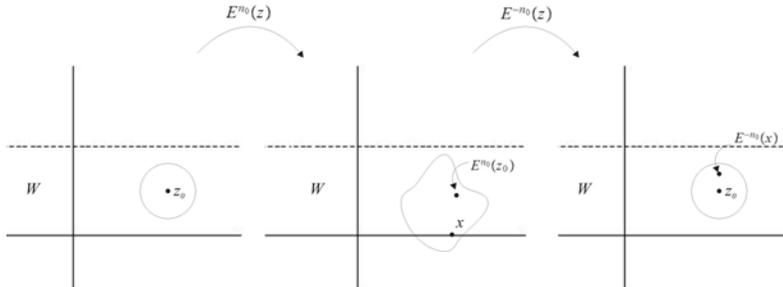
Es importante tener presente que $E^{n+2}(B_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, por lo que las órbitas de los puntos en estas curvas tienden a infinito, además cada $B_n \subseteq \Lambda$.

Resulta que estas curvas se acumulan en todos los puntos de Λ , incluso en sí mismas. La siguiente propiedad es la que hará de la compactificación de Λ un continuo indecomponible.

Lema 37 Sea $\Omega_N = \bigcup_{i=N}^{\infty} B_i$ con N natural. Entonces Ω_N es denso en Λ .

Demostración. Sea N natural, z en Λ y V una vecindad de este punto. Como $E(z)$ no es normal en V , $\bigcup_{i=0}^{\infty} E^i(V) = \mathbb{C} - \{0\}$, por lo que en alguna iteración n_0 la imagen de V contiene un valor real positivo, de modo que las posteriores iteraciones también tendrán intersección no vacía con los reales positivos. Así, para cualquier $i \geq n_0$, B_{i-2} intersecta la imagen de V . Sea $i > N + 2$, entonces V tiene intersección no vacía con Ω_N . ■

Figura 12.



Es decir, que para esta familia de curvas, quitarle una cantidad finita de ellas es como no quitarle nada. Lo que nos queda se acumula en sí mismo y en lo que quitamos.

Es notable el papel que juega el hecho de que el Julia es todo el plano para obtener esta propiedad y naturalmente las que se desprenden de ella.

Teorema 38 Λ es conexo.

Demostración. Supongamos que es desconexo. Entonces existen A y B abiertos no vacíos, con intersección vacía, tal que:

$$\Lambda \subseteq A \cup B$$

Entonces en A o en B está contenida una infinidad de curvas B_{i_k} . Sin pérdida de generalidad, sea $\{B_{i_k}\} \subseteq A$. Tomemos z en $B \cap \Lambda$. Siendo B abierto, z es un punto interior de B . Al tomar una vecindad V de z contenida totalmente en B , por el teorema 37, la intersección B_{i_k} con V es no vacía para algún k . Por tanto la intersección de A y B es distinta del vacío generándose la contradicción. ■

Ahora procedemos a compactificar el conjunto Λ para hacer de él un continuo. Si trabajamos en la esfera de Riemann, tenemos que las propiedades anteriores de Λ se satisfacen y además de ser Λ un conjunto compacto. Tenemos pues que Λ_R , la compactificación de Λ en la esfera de Riemann, es un continuo. Resulta que Λ_R es además indescomponible, ver [11].

Teorema 39 Λ_R es un continuo indescomponible.

Ahora describiremos Λ_c , una compactificación de Λ que utiliza Devaney [7]. El conjunto Λ_c además de ser invariante hacia adelante lo es también hacia atrás con la rama principal del logaritmo.

Primero parametrizamos las curvas B_i con las funciones $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow B_i$. Identifiquemos B_0 con la recta de altura π . Dado que la imagen de B_0 son los reales negativos, escojamos $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow B_0$ tal que:

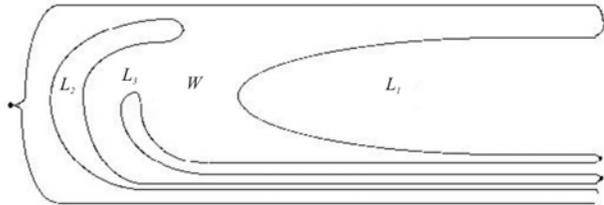
$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\gamma_0(t)) = 0, \text{ y, } \lim_{t \rightarrow -\infty} E(\gamma_0(t)) = -\infty$$

En general, escogemos las parametrizaciones γ_i de forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E^{i+1}(\gamma_i(t)) = 0, \text{ y, } \lim_{t \rightarrow -\infty} E^{i+1}(\gamma_i(t)) = -\infty$$

Figura 13. Compactificación de Λ .

Tomada de [5].



Identificamos en un mismo punto los “extremos” izquierdos de la recta real y la de altura π y este punto lo definimos como:

$$E^{-1}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_0(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t$$

Hacemos lo mismo con el otro “extremo” de B_0 y con el “extremo” superior de B_1 y definimos:

$$E^{-2}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_1(t)$$

Continuando con este procedimiento:

$$E^{-3}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_2(t)$$

Generalizando:

$$E^{-i}(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{i-2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{i-1}(t)$$

La idea es pues, para las curvas B_i con $i > 1$, hacer un solo punto del “extremo” inferior de una con el superior de la siguiente.

De esta manera nos queda una curva que no se cruza consigo misma y que se acumula en sí misma. Al tomar la cerradura de esta curva obtenemos Λ_c , un continuo indescomponible completamente invariante, ver [7].

De esta forma hemos mostrado que en medio del caos de $E(z)$ aparece un conjunto cuya topología es sumamente peculiar. Ahora veamos qué pasa con la dinámica en Λ .

Por un lado tenemos los puntos en \mathbb{R} y en las curvas B_i que tienen órbitas que se van a infinito. ¿Qué pasa con los demás puntos en Λ ? Antes de responder la pregunta necesitaremos tener presente algunos aspectos dinámicos en W .

Lema 40 *Sea z en Λ . Entonces, el $\alpha(z, E)$ tiene como único elemento un punto fijo repulsor en el interior de W .*

Demostración. Primero demos que existe tal punto fijo en el interior de W .

Resolvamos la siguiente ecuación

$$e^{y \cot y} \sin y = y. \quad (3.1)$$

Dado que $y \cot y \rightarrow 1$ si $y \rightarrow 0$ y $e > 1$, tenemos que para y cerca del cero

$$e^{y \cot y} \sin y > y.$$

Por otro lado si $y = \pi$, $e^{y \cot y} \sin y = 0$, lo que por continuidad significa que existe al menos una solución de la ecuación 3.1 en el intervalo $(0, \pi)$. Sea y_r una tal solución y tomemos $x_r = y_r \cot y_r$. Ahora bien, evaluemos $E(z_r)$ con $z_r = x_r + iy_r$.

$$E(z_r) = e^{x_r} \cos y_r + ie^{x_r} \sin y_r = e^{x_r} \cos y_r + iy_r$$

Considerando que

$$e^{x_r} \cos y_r = y_r \cot y_r \iff e^{x_r} \cos y_r = y_r \frac{\cos y_r}{\sin y_r} \iff e^{x_r} \sin y_r = y_r,$$

tenemos que z_r es un punto fijo en el interior de S .

Si uniformizamos W con el Teorema de Riemann en el disco unitario D con $h(z_r) = 0$, con la conjugación $\phi = h \circ E^{-1} \circ h^{-1}$ tenemos una función holomorfa del disco en el disco con el cero como punto fijo. Por el corolario 3 del lema de Schwarz, ϕ es una rotación o z_r es atractor bajo E^{-1} . Además $E^{-1}(W) \subset W$ es una contención propia, por lo que no puede ser una rotación y la derivada debe ser estrictamente menor a uno. Es decir que z_r es un punto fijo atractor de $E^{-1}(z)$. Con ello el $\alpha(z, E)$ de todos los puntos en W , en particular en Λ , tiene como único elemento al punto fijo. ■

Otro hecho notable es el siguiente.

Lema 41 *Sea z en Λ distinto del punto fijo. Entonces, la órbita de z se acumula sólo en la frontera de W .*

Demostración. Uniformicemos nuevamente W en el disco unitario D identificando el cero con el punto fijo z_r . Como éste es atractor para E^{-1} , nuevamente por el corolario 3 del lema de Schwarz, las órbitas de todos los puntos convergen a él. Entonces la conjugación de $E(z)$ manda todos los puntos distintos del punto fijo que están en $h(\Lambda)$ hacia la frontera del disco D , por tanto $E(z)$ lo hace hacia la frontera de W . ■

Si consideramos el infinito como un elemento del $\omega(z, E)$, éste resulta distinto del vacío para todos los puntos en Λ . Ya sabemos que si z es real o es elemento de alguna curva B_i , sólo el punto al infinito es elemento del $\omega(z, E)$. A continuación argumentaremos por qué el $\omega(z_0, E)$ tiene que ser la órbita del cero además del punto al infinito, donde z_0 no pertenece a ningún B_i .

Sea $z_0 \in \Lambda - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, $y \in \omega(z_0, E)$ y supongamos que y no pertenece a la órbita del cero ni es el punto al infinito. Como la órbita de z_0 se acumula en la frontera de W , lo puede hacer tanto en B_0 como en los reales. Como $E(z)$ es inyectiva en W , las imágenes inversas de y restringidas en W pertenecen también al $\omega(z_0, E)$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^{n_k}(z_0) = y \Rightarrow E^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} E^{n_k}(z_0) = E^{-1}(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} E^{n_k-1}(z_0)$$

para lo cual usamos la continuidad de la función inversa de $E(z)$.

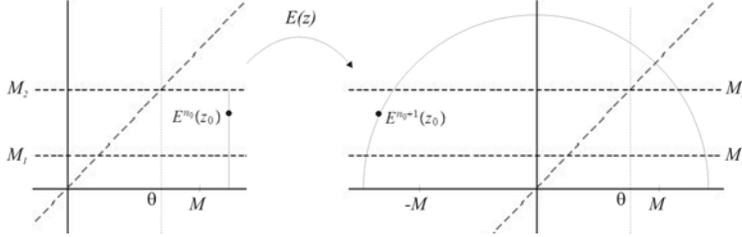
Siendo y ajeno a la órbita del cero y distinto del punto al infinito, las imágenes inversas de y son puntos en el interior de W , lo cual es una contradicción con el lema anterior.

Ahora bien, como el $\omega(z_0, E)$ debe ser no vacío, podemos garantizar que tiene un elemento de la órbita del cero o bien, el punto al infinito.

En el primero caso, como en el $\omega(z_0, E)$ debe estar contenida la órbita completa del cero, y ésta tiende a infinito, ya habríamos terminado, es decir, $\omega(z_0, E)$ estaría constituido por la órbita del cero y el punto al infinito.

En el segundo caso, siendo el punto al infinito elemento del $\omega(z_0, E)$, para todo M real, existe n_0 natural para el cual $E^{n_0}(z_0) > M$. Como podemos escoger M arbitrariamente grande. Sea $M > \theta$, donde θ es el valor definido en la sección anterior, ver *Figura 7a*). Recordemos además que la parte imaginaria de z_0 es distinta de cero. Si $\text{Im } E^{n_0}(z_0) > \frac{\pi}{3}$, entonces $\text{Re } E^{n_0+1}(z_0) < -M$, dado que $\text{orb}_E(z_0)$ está contenida en W .

Figura 14.



Si $\text{Im } E^{n_0}(z_0) \leq \frac{\pi}{3}$, por el lema 31, existe $n_1 > n_0$ tal que $\text{Im } E^{n_1}(z_0) > \frac{\pi}{3}$. Por lo anterior, $\text{Re } E^{n_0+1}(z_0) < -M$.

Es decir, existe N natural, tal que $E^N(z_0)$ es elemento del disco con centro en cero y radio e^{-M} , acercándose arbitrariamente la órbita de z_0 al cero. Con ello la órbita del cero junto con el punto al infinito constituyen el $\omega(z_0, E)$, quedando demostrado el siguiente:

Teorema 42 *Sea z en Λ . Entonces, el $\omega(z, E)$ es el punto al infinito si z pertenece a \mathbb{R} o a algún B_i , en otro caso el $\omega(z, E)$ es la órbita del cero y el punto al infinito.*

3.3. Itinerarios.

Si bien abordaremos ciertos aspectos de este tema en los siguientes capítulos, es conveniente aprovechar el trabajo hecho con los continuos indescomponibles para tener un primer acercamiento a esta discusión y enunciar resultados para el caso $\lambda = 1$.

Podemos asociar un itinerario a cada z con la siguiente regla. Si $s = s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$, una sucesión de números enteros, s es el itinerario asociado a z , donde $s_n = k$ si $E^n(z)$ pertenece a F_k , donde:

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : (2k - 1)\pi < \text{Im}(z) \leq (2k + 1)\pi\}$$

Por ejemplo, con lo que hicimos en la sección anterior podemos ver que el conjunto de puntos con itinerario $s = 0, \dots, 0, \dots$, está formado por dos continuos indescomponibles en la esfera de Riemann, si consideramos la recta horizontal con componente imaginaria $-\pi$. Uno es el que estudiamos anteriormente, el otro corresponde al contenido en la mitad inferior de la franja F_0 , recordemos que $E(z)$ es simétrica respecto a la conjugación.

Al conjunto de todos los itinerarios lo denotamos con Σ .

Un semillero de resultados y problemas abiertos aparece en el estudio de los conjuntos de puntos que tienen un mismo itinerario.

Sea:

$$\Lambda_s = \{z \in \mathbb{C} : S(z) = s \in \Sigma\},$$

donde la función $S(z)$ es la que asigna a cada punto el itinerario correspondiente. Así, si $s = 0, \dots, 0, \dots$, Λ_s contiene dos continuos indescomponibles.

Si s termina en ceros a partir de cierta s_n con $n > 0$, Λ_s no es una curva continua [12]. En particular, si $s = s_0 0 0 \dots$, Λ_s contiene la línea recta horizontal de altura $(2s_0 + 1)\pi$. De hecho Devaney prueba en [11] que sólo estos Λ_s se extienden hacia $-\infty$, lo cual es un corolario del siguiente resultado:

Proposición 43 *Sea $s \neq s_0, 0, \dots, 0, \dots$, $s \in \Sigma_{2k}$. Entonces existe M real tal que $\operatorname{Re} z > M$, para todo z en Λ_s , es decir, Λ_s está contenido en un semiplano derecho, donde $\Sigma_{2k} = \{s \in \Sigma : |s_i| \leq k\}$, el espacio de itinerarios de $2k$ símbolos.*

Ahora bien, si s tiene una cantidad finita de ceros, s se llama un itinerario regular. Si además s es acotado, es decir, elemento de Σ_{2k} , Λ_s es una curva que se extiende hacia infinito en el semiplano derecho, homeomorfa al intervalo $[0, \infty)$. Si γ_s es tal homeomorfismo, $\gamma_s(0)$ es un punto con órbita acotada, mientras que $\gamma_s(t)$ es un punto con órbita que tiende a infinito si $t > 0$. En este caso $\gamma_s((0, \infty))$ se le llama cabello con itinerario s y $\gamma_s(0)$ es el extremo del cabello.

Sorprendentemente, también ocurre que si $s \in \Sigma_{2k}$ tiene cadenas de ceros sucesivos cada vez más grandes, creciendo éstas suficientemente rápido, Λ_s es un continuo indescomponible. De hecho, existe una cantidad no numerable de itinerarios para los cuales Λ_s es un continuo indescomponible.

Si bien a todo punto en \mathbb{C} se le puede asociar un itinerario en Σ , no ocurre que para toda sucesión en Σ existan puntos con tal itinerario. Éstos son los no acotados que crecen demasiado rápido, en la siguiente sección retomaremos esta discusión.

Decimos que s es un itinerario admisible si existe z en \mathbb{C} tal que $S(z) = s$. Una de las preguntas abiertas planteadas en [11] es si existe algún itinerario admisible s , tal que Λ_s no sea ni un continuo indescomponible ni un cabello con extremo.

Si dados dos itinerarios s_1 y s_2 para los cuales Λ_{s_1} y Λ_{s_2} son continuos indescomponibles, tampoco se sabe si estos son homeomorfos.

En lo que respecta a la dinámica en estos conjuntos. Sabemos que si s es idénticamente cero, el $\alpha(z, E)$ para z en Λ_z es uno de los puntos fijos en la franja F_0 . En lo que respecta al destino de las órbitas de los puntos en los conjuntos Λ_s se tiene el siguiente teorema:

Teorema 44 *Sea s un itinerario en Σ_{2k} , entonces existe un único punto z_s con órbita acotada. Si $z \neq z_s$, el $\omega(z, E)$ sólo tiene dos opciones, o bien es $\{\infty\}$, o $\{\operatorname{orb}_E(0), \infty\}$. Si Λ_s es un cabello y su extremo, con $z \neq z_s$, entonces el $\omega(z, E)$ sólo puede ser $\{\infty\}$.*

En el siguiente capítulo continuaremos con otros resultados acerca de los itinerarios.

Capítulo 4

EL CASO $\lambda = \frac{1}{e}$

Vimos en el capítulo 1 que se presenta una bifurcación tangente cuando λ pasa por el valor $\frac{1}{e}$. En el capítulo anterior demostramos que si $\lambda = 1$, Julia es todo el plano. Devaney generaliza la demostración de Misiurewicz en [4] para $\lambda > \frac{1}{e}$. En este capítulo abordaremos esta generalización.

Devaney ha mostrado en [4] que si $\lambda = \frac{1}{e}$, el conjunto de Julia $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$ es denso en ninguna parte. Como este cambio en el conjunto de Julia ocurre abruptamente cuando pasamos de $\lambda = \frac{1}{e}$ a $\lambda > \frac{1}{e}$, Devaney identifica al conjunto de Julia para la familia $E_\lambda(z)$ como un Julia explosivo.

En este capítulo veremos que si $\lambda = \frac{1}{e}$, el conjunto de Julia es un *Cantor bouquet*, la cerradura de la unión numerable de conjuntos que son el producto de un conjunto de Cantor con el intervalo $[0, \infty)$.

En la primer sección de este capítulo haremos una construcción geométrica de $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$; la que usaremos para ilustrar muchas de sus propiedades, que comentaremos en la segunda sección. Salvo referencias concretas el material se encuentra en [5], [7], [13] y [14].

En la demostración de algunas de estas propiedades se utilizan conjuntos conocidos como *cepillos rectos*, los cuales nos permiten definir formalmente, desde un punto de vista topológico, lo que es un Cantor bouquet [15]. Esto lo abordaremos en la *sección 4.3*.

Debido a la gran cantidad de propiedades, aunado a las herramientas necesarias para sus demostraciones y en no pocos casos la complejidad de éstas, las demostraciones se excluyen de este trabajo. Si bien en algunos casos comentaremos la idea de la demostración, con mayor o menor detalle, habrá otros en que simplemente haremos referencia a los artículos en donde se pueden encontrar.

En la última sección retomamos la discusión de los itinerarios que empezamos en el capítulo anterior [13]. Aprovecharemos la construcción geométrica de la primera sección para mostrar por qué existen sucesiones en Σ para las cuales no hay puntos con tales itinerarios. En otras palabras, introduciremos un resultado que muestra que $S(z)$ no es suprayectiva, donde $S(z)$ es la función que asigna

a los puntos en \mathbb{C} un itinerario en Σ .

4.1. Madejas de cabellos.

Consideremos los semiplanos:

$$\begin{aligned} G &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 1\} \\ H &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 1\}. \end{aligned}$$

Tenemos que $|E_{\frac{1}{e}}(z)| < 1$ si z está en G , además $E_{\frac{1}{e}}(G) \subseteq G$. Por el corolario 12 del *Capítulo I*, la familia de iteraciones de $E_{\frac{1}{e}}(z)$ es normal en G .

Si nos fijamos en las preimágenes de G tendremos una buena idea de cómo son los conjuntos de Julia y Fatou.

Recordemos que $E_{\frac{1}{e}}(z)$ manda biyectivamente a cada franja de altura 2π a todo el plano menos el cero y que definimos F_k como sigue:

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : (2k - 1)\pi < \operatorname{Im}(z) \leq (2k + 1)\pi\}.$$

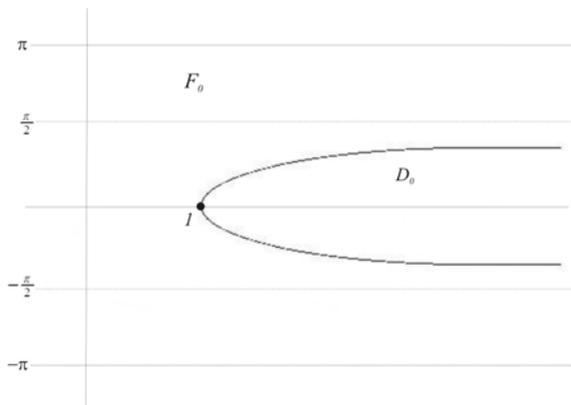
Entonces, cada una de estas franjas contiene un subconjunto cuya imagen es $G - \{0\}$, por tanto, el subconjunto pertenece al conjunto de Fatou. El complemento de dicho subconjunto tiene como una componente D_k en cada franja F_k , cuya imagen es H :

$$D_k = \left\{ z \in F_k : E_{\frac{1}{e}}(z) \in H \right\}.$$

Es decir, D_k es la componente de la imagen inversa de H que está contenida en F_k . Contemplemos la franja F_0 para contruir geométricamente D_0 y con ello sabremos qué forma tienen los otros D_k .

Recordemos que las rectas verticales $R_x = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = x\}$ tienen como imagen circunferencias con centro en el cero, siendo $E_{\frac{1}{e}}(x)$ el radio. Si tomamos el segmento $R_x \cap F_0$ con $x = 1$, tenemos que $E_{\frac{1}{e}}(1) = 1$. El resto de la circunferencia $E_{\frac{1}{e}}(R_x)$ cae en G . Conforme x es mayor a 1, arcos de la circunferencia $E_{\frac{1}{e}}(R_x)$ cada vez mayores caen en H . Notemos que conforme x crece, el arco dentro de H se aproxima a la mitad de la circunferencia. Es decir, que segmentos en $R_x \cap F_0$ cada vez más grandes están contenidos en D_0 y la longitud de estos tiende a π .

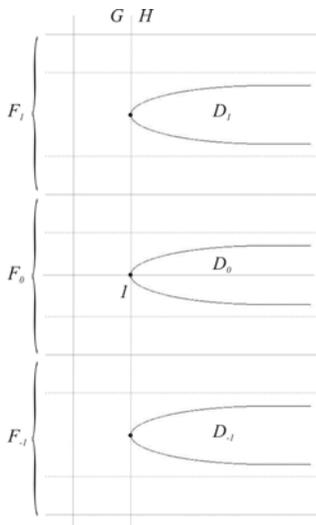
Figura 15. El dedo D_0 .



Como $E_\lambda(x + iy) = E_\lambda(x + i(y + 2k\pi))$, D_k lo obtenemos al trasladar verticalmente a D_0 a cada franja F_k . Con ello tenemos que $E_{\frac{1}{e}}^{-1}(H)$ tiene una infinidad de componentes, una en cada franja F_k . Por la forma que tienen los D_k les llamamos “dedos”. La unión de todos estos dedos es la imagen inversa de H .

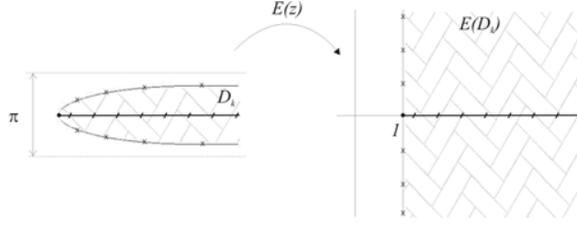
$$E_{\frac{1}{e}}^{-1}(H) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$$

Figura 16. Dedos.



En este conjunto debe estar contenido el conjunto de Julia. El extremo izquierdo de cada D_k es preimagen del 1. De cada uno de estos extremos se desprende un rayo que se extiende a infinito, que corresponde a una componente de la preimagen de los reales mayores a 1, por ello los puntos en estos rayos tienen órbitas que tienden a infinito.

Figura 17. La imagen de D_k .

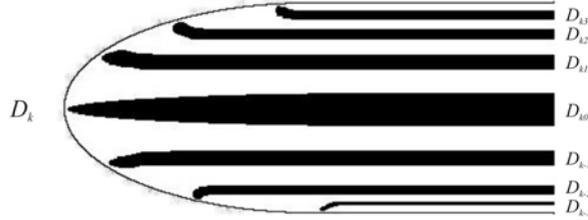


Si tomamos la segunda imagen inversa de H , $E_{\frac{1}{e}}^{-2}(H)$, en cada dedo D_{k_0} debe haber un subconjunto con una infinidad de componentes. A cada una de ellas cada le llamamos el “subdedo” $D_{k_0 k_1}$, que satisface:

$$E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 k_1}) = D_{k_1}$$

Figura 18. Subdedos.

Adaptada de [5].



Notemos que en la frontera de cada dedo D_{k_1} se encuentran distribuidos los extremos izquierdos de cada $D_{k_0 k_1}$, extendiéndose el conjunto de estos extremos hacia infinito. Estos puntos corresponden a la segunda imagen inversa del uno. Además, de cada extremo sale una curva que se extiende hacia infinito. Los puntos en estas curvas son la segunda preimagen de los reales mayores a uno, siendo estas curvas ajenas entre sí, a las cuales llamaremos “cabellos”.

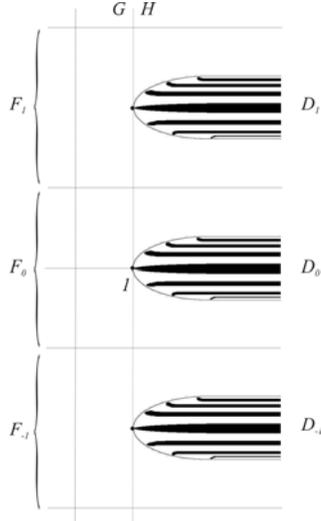
Nótese que para nosotros los extremos no son parte de lo que llamamos cabellos. Los cabellos sólo son preimágenes de reales mayores estrictamente que uno, mientras que los extremos son preimágenes del uno. La distinción entre cabellos y extremos se debe a que hay propiedades topológicas y dinámicas diferentes de unos y otros.

Así pues, al tomar $E_{\frac{1}{e}}^{-2}(H)$, obtenemos una infinidad de subdedos en cada uno de los dedos, de los cuales hay también una infinidad. Cada subdedo cumple que:

$$D_{k_0 k_1} = D_{k_0} \cap E^{-1}(D_{k_1})$$

Nótese que $D_{k_0 k_1} \subset F_{k_0}$ y $E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 k_1}) = D_{k_1} \subset F_{k_1}$.

Figura 19. Dedos y subdedos.



Nuevamente cada uno de los subdedos $D_{k_0 k_1}$ contiene a su vez una infinidad de subdedos, cada uno de ellos contenido en $E_{\frac{1}{e}}^{-3}(H)$ e identificados como $D_{k_0 k_1 k_2}$, donde $D_{k_0 k_1 k_2} \subset D_{k_0 k_1} \subset D_{k_0}$, $E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 k_1 k_2}) = D_{k_1 k_2}$ y $E_{\frac{1}{e}}^2(D_{k_0 k_1 k_2}) = D_{k_2}$.

Además, los extremos de estos nuevos subdedos y sus correspondientes cabellos satisfacen las mismas propiedades que los demás. Así mismo $D_{k_0 k_1 k_2} \subset F_{k_0}$, $E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 k_1 k_2}) \subset F_{k_1}$ y $E_{\frac{1}{e}}^2(D_{k_0 k_1 k_2}) \subset F_{k_2}$.

Al repetir este procedimiento n veces obtenemos un subdedo $D_{k_0 \dots k_n} \subset D_{k_0}$ para el cual $D_{k_0 \dots k_n} \subset D_{k_0 \dots k_{n-1}}$, $E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 \dots k_n}) = D_{k_1 \dots k_n}$, $E_{\frac{1}{e}}^2(D_{k_0 \dots k_n}) = D_{k_2 \dots k_n}$, ..., $E_{\frac{1}{e}}^n(D_{k_0 \dots k_n}) = D_{k_n}$.

Los extremos y sus cabellos cumplen las mismas propiedades antes mencionadas, es decir, los extremos son preimágenes del uno; mientras que los cabellos son curvas que no se intersectan entre sí y las órbitas de los puntos en ellos tienden a infinito. También se cumple que $D_{k_0 \dots k_n} \subset F_{k_0}$, $E_{\frac{1}{e}}(D_{k_0 \dots k_n}) \subset F_{k_1}$, $E_{\frac{1}{e}}^2(D_{k_0 \dots k_n}) \subset F_{k_2}$, ..., $E_{\frac{1}{e}}^n(D_{k_0 \dots k_n}) \subset F_{k_n}$.

Entonces habiendo definido D_{k_0} , recursivamente se tiene que:

$$D_{k_0 \dots k_n} = \left\{ z \in D_{k_0} : E_{\frac{1}{e}}(z) \in D_{k_1 \dots k_n} \right\}$$

Tomemos s en Σ , $s = k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$, para definir la siguiente intersección:

$$D_s = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{k_0 \dots k_i}$$

Resulta que si tomamos $s \in \Sigma$ arbitrario, esta intersección puede ser vacía. Esto lo tenemos en la última sección de este capítulo. Por ahora podemos observar que en el caso en que $k_i = 0$ para toda i , tenemos la intersección de dedos cada vez más delgados, al final nos quedamos con un curva, cuyo extremo es el uno y el cabello son los reales mayores a uno.

Tomemos un s de modo que D_s sea no vacío, entonces se cumple que $D_s \subset F_{k_0}$, $E_{\frac{1}{e}}(D_s) \subset F_{k_1}$, ..., $E_{\frac{1}{e}}^n(D_s) \subset F_{k_n}$, ...

Consideremos la unión:

$$C_b = \bigcup_{s \in \Sigma} D_s,$$

donde Σ es el espacio de itinerarios. Además se cumple:

$$C_b = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{1}{e}}^{-n}(H)$$

La justificación de la igualdad entre la unión arbitraria y la intersección infinita se debe a las propiedades del conjunto C_b que veremos en la siguiente sección.

Hemos pues construido un conjunto usando un procedimiento similar al utilizado para el Cantor clásico. En lugar de trabajar en un intervalo, lo hacemos en un semiplano. A esta región la dividimos en una infinidad de componentes y quitamos el resto. Después en cada una de estas componentes repetimos el proceso. Tenemos un fenómeno de anidamiento donde a cada dedo lo dividimos en una infinidad de subdedos, el resto es parte del conjunto estable y en los subdedos está contenido el conjunto de Julia.

Al igual que en la construcción del Cantor clásico, aunque sólo podemos visualizar que nos vamos quedando con los extremos de los intervalos, al final queda muchos más que eso. En este caso, podemos convencernos que las preimágenes del uno y sus cabellos correspondientes están contenidos en todos los dedos. Como ocurre en el Cantor clásico, lo que nos queda es mucho más que estos extremos de los dedos y sus cabellos. Al tipo de conjunto que hemos construido se le llama un Cantor bouquet C_b . La definición formal de lo que es un Cantor bouquet la veremos más adelante.

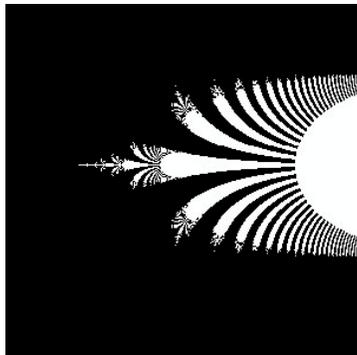
4.2. Propiedades.

Muchas propiedades de este Cantor bouquet son difíciles siquiera de intuir a partir de esta construcción y hay otras que se dejan entrever. En esta sección comentaremos todas ellas. Básicamente comentaremos la idea de las demostraciones, aunque habrá casos en que simplemente señalaremos los artículos donde se pueden encontrar. Utilizaremos lo visto en la sección anterior para ilustrar múltiples fenómenos que aparecen tanto en el aspecto topológico como dinámico de este conjunto.

Para generar en computadora la *Figura 20* se utiliza el hecho de que los puntos cuya órbita tiende a infinito son densos en el Julia. Para ello se elige cierto número de iteraciones y se busca aquellos z en el plano tal que, $\text{Re}(z) \geq 50$. En blanco se muestran estos puntos, dándonos una idea de cómo es $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$ [21].

Figura 20.

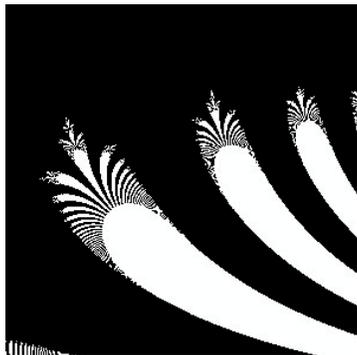
a) El conjunto de Julia para $\lambda = \frac{1}{e}$.



Tomada de [21].

Figura 20.

b) Detalle del conjunto de Julia para $\lambda = \frac{1}{e}$.



1. **El Julia es un Cantor bouquet.** Al ser el Cantor bouquet una intersección infinita de cerrados, las imágenes inversas de H , obtenemos un conjunto cerrado y se cumple

$$J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right) = C_b$$

Una contención es inmediata: Si z está en el conjunto de Julia, entonces, por el corolario 10, dada cualquier vecindad V de z , la unión de sus imágenes cubre todo el plano salvo el cero. Así, existe n tal que $1 \in E_{\frac{1}{e}}^n(V)$, entonces existen preimágenes del uno acumulándose en z . Siendo C_b cerrado, z pertenece a él.

En la siguiente sección discutiremos la otra contención con mayor detalle, por ahora utilicemos la construcción geométrica.

Es natural pensar que al ir tomando las imágenes inversas de los dedos, los subdedos se adelgacen rápidamente. Además los extremos de los subdedos se distribuyen a lo largo de los dedos, de modo que para cualquier punto z en el Cantor bouquet C_b y cualquier vecindad V de z , podemos encontrar

puntos cuya órbita se va a infinito y otros cuya órbita converge al uno, haciendo de z un elemento del Julia, ver Teorema de Montel 8.

2. **Un Julia cantoriano.** Como lo comentamos al final de la sección anterior, si recordamos la construcción del conjunto de Cantor clásico entendemos por qué el nombre que se le da a este conjunto. En lugar de ir quitando tercios en un segmento, quitamos una infinidad de regiones entre los dedos. Al igual que ocurre en el Cantor clásico, obtenemos un conjunto denso en ningún lado, cerrado y no hay puntos aislados.
3. **Cabellosidad.** Es notable que al tomar la intersección infinita de las imágenes inversas de H , no sólo nos quedamos con los cabellos asociados a las preimágenes del 1, sino que, ¡cualquier punto en el Cantor bouquet es parte de algún cabello o es un extremo!

Los cabellos son curvas continuas, todas ajenas entre sí, que se pueden parametrizar con el segmento $(0, \infty)$. Dado un cabello, los extremos son la imagen del cero bajo la parametrización. Es decir, que todos los cabellos tienen su extremo y todos los extremos tienen su cabello.

Por ahora un conjunto del estilo $C \times [0, \infty)$, donde C es un Cantor clásico, podría cumplir las propiedades **2** y **3**. La siguiente propiedad hace del Julia un conjunto no tan simple.

4. **Una corona muy densa.** Llamémosle corona al conjunto de los extremos de los cabellos. Si proyectamos este conjunto en una recta vertical, los extremos se acumulan entre sí. Es decir, para todo extremo existe una sucesión de extremos que convergen en él, tanto por la izquierda como por la derecha.

Ocurre que $C \times [0, \infty)$ también satisface esta propiedad, la **2** y la **3**.

Sin embargo, del corolario 10 del Teorema de Montel, se concluye de inmediato que los extremos se acumulan en todo el conjunto C_b . Esto resulta sorprendente al momento de tratar de imaginarnos cómo es el conjunto. Geométricamente se puede observar esta propiedad a través de los subdedos, cuyos extremos se distribuyen a lo largo de la frontera de cada dedo. Al irse adelgazando los subdedos, tenemos extremos de nuevos subdedos acumulándose en todo el conjunto.

5. **Una corona expuesta y envolvente.** La forma en que se acumulan los extremos en C_b es tal, que los puntos en los cabellos son “inaccesibles” desde el complemento. En otras palabras, no existe una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, con $\gamma(t) \in \mathbb{C} - J(E_{\frac{1}{e}})$ si $0 \leq t < 1$ y $\gamma(1) = z$, con z elemento de algún cabello. Por otro lado todos los extremos son accesibles desde el complemento.
6. **Una corona explosiva.** El conjunto de extremos resulta ser totalmente disconexo: dados dos extremos z_1 y z_2 , existen A y B abiertos, ajenos entre sí, tales que z_1 pertenece a A y z_2 a B .

Sin embargo, si tomamos la corona en la esfera de Riemann y le unimos el punto al infinito, obtenemos un conjunto conexo. Así pues, el infinito es un punto de explosión del conjunto de extremos [14]. Por definición, un punto x en un espacio X es un punto de explosión si y sólo si X es conexo y $X - \{x\}$ es totalmente desconexo.

7. **Un Julia flaco.** Como señalamos en el punto 1, los dedos se adelgazan rápidamente y lo hacen de tal modo que la medida de Lebesgue de C_b es cero [16].
8. **Una corona espesa y una cabellera delgada.** La dimensión de Hausdorff del Cantor bouquet es 2 [16]. A ello se debe que el Julia en la *Figura 20* tenga la apariencia de contener conjuntos abiertos.
Karpinska [20] demostró una propiedad sorprendente de este conjunto. Mientras el conjunto de todos los cabellos tiene dimensión de Hausdorff 1, ¡la corona tiene dimensión de Hausdorff 2!
9. **Una cabellera que crece rápidamente.** Las órbitas de los puntos en los cabellos tienden todas a ∞ . Sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ la parametrización del cabello. Si observamos las iteraciones de la curva $\gamma([0, M])$, para algún M positivo, veríamos cómo el cabello crece rápidamente, naturalmente del orden de la exponencial.
10. **Extremos y cabellos itinerantes.** Recordando lo que hicimos en la construcción geométrica, se puede probar que D_s es una curva cerrada, es pues, un extremo y su cabello, los cuales tienen el mismo itinerario. Dado z en el Cantor bouquet, podemos asignarle un elemento del espacio de itinerarios mediante la función:

$$S(z) = k_0 k_1 \dots = s \in \Sigma$$

11. **Periódicos en la corona.** Del punto 9 y del hecho de que los puntos periódicos repulsores forman un conjunto denso en el Julia, se deduce que éstos están contenidos en la corona, es decir, son extremos de los cabellos. Más todavía, para toda sucesión periódica $s \in \Sigma$, existe un único z punto periódico del mismo periodo tal que $S(z) = s$.
12. **Itinerarios excluidos.** Como se mencionó en la sección previa, existen sucesiones s en Σ para las cuales D_s es vacío. Aunque retomaremos este tema al final del capítulo, por ahora vale la pena mencionar que las sucesiones s en Σ que no tienen asociadas cabellos ni extremos en el Cantor bouquet, son aquellas cuyos términos k_i crecen muy rápidamente. Por ejemplo, si $s = 3^1, 3^2, \dots, 3^i, \dots$, entonces D_s es vacío. Si s es elemento de Σ_{2k} , es decir, una sucesión acotada, D_s es no vacío.

Las propiedades 3 y 10 son las que justifican la igualdad:

$$C_b = \bigcup_{s \in \Sigma} D_s = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{1}{e}}^{-n}(H)$$

4.3. Cepillos rectos.

Muchas de las propiedades dinámicas y topológicas enunciadas en la sección anterior se demuestran utilizando los llamados cepillos rectos, los cuales se utilizan para caracterizar a los Cantor bouquet [15].

Definición 45 *Un cepillo recto B es un subconjunto de $[0, \infty) \times \mathbb{I}$ en \mathbb{R}^2 , donde \mathbb{I} son los irracionales. B tiene las siguientes propiedades:*

Cabellosidad: Para todo $(y, \alpha) \in B$ existe $t_\alpha \in [0, \infty)$, tal que $(y, \alpha) \in \{t : (t, \alpha) \in B\} = [t_\alpha, \infty)$. El punto $e_\alpha = (t_\alpha, \alpha)$ se llama el extremo del cabello en α dado por $c_\alpha = [t_\alpha, \infty) \times \{\alpha\}$.

Densidad: El conjunto $P = \{\alpha \in \mathbb{I} : (y, \alpha) \in B \text{ para alguna } y\}$ es denso en \mathbb{I} . Además para cualquier $(y, \alpha) \in B$, existen sucesiones $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ contenidas en P que satisfacen que $\beta_n \uparrow \alpha$, $\gamma_n \downarrow \alpha$, $t_{\beta_n} \rightarrow t_\alpha$ y $t_{\gamma_n} \rightarrow t_\alpha$.

Secciones compactas: B es cerrado en \mathbb{R}^2 .

Un conjunto con estas características se emplea para definir lo que es un Cantor bouquet.

Definición 46 *Un subconjunto C_b del plano es un Cantor bouquet si y sólo si existe un homeomorfismo entre el conjunto C_b y un cepillo recto B .*

De inmediato salta a la vista que las propiedades de la definición del cepillo recto coinciden con las enunciadas en **2**, **3**, y **4** de la sección anterior. Con ellas se demuestran varias otras. En particular la primera:

$$J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right) = C_b$$

A continuación daremos antecedentes para la demostración de que $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$ es un Cantor bouquet.

Vamos a construir una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow C_b$. La idea es poner restricciones al dominio de h para obtener el homeomorfismo que estamos buscando. Es decir, se trata de definir h de manera que el dominio sea un cepillo recto.

Primero procedemos a asignar a todo α irracional una cadena de enteros $k_0 k_1 \dots$. Buscamos descomponer a los reales en intervalos abiertos $I_{k_0 k_1 \dots k_n}$ con las siguientes propiedades:

- $I_{k_0 \dots k_{n+1}} \subset I_{k_0 \dots k_n}$.
- Los extremos de estos intervalos son racionales.
- $\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{k_0 \dots k_n}$.

Una forma de lograrlo es siguiendo un método basado en el árbol de Farey. Para ello definimos los intervalos inductivamente como sigue:

$$I_{k_0} = (k_0, k_0 + 1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } I_{k_0 \dots k_{n-1}} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta} \right) \\
I_{k_0 \dots k_n} &= \left(\frac{p_{k_n}}{q_{k_n}}, \frac{p_{k_n+1}}{q_{k_n+1}} \right) \\
\frac{p_0}{q_0} &= \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \\
\frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} &= \frac{p_{(k_n-1)} + \gamma}{q_{(k_n-1)} + \delta} \text{ si } k_n > 0 \\
\frac{p_{k_n}}{q_{k_n}} &= \frac{p_{(k_n+1)} + \alpha}{q_{(k_n+1)} + \beta} \text{ si } k_n < 0
\end{aligned}$$

Se puede probar que de esta forma hay una relación biunívoca $T(\alpha)$ entre el conjunto de irracionales y el espacio de itinerarios Σ .

Example 47 Sea $I_0 = (0, 1) = (k_0, k_0 + 1)$. Entonces:

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{2}$$

Ahora bien, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{p_1}{q_1} &= \frac{p_0 + \gamma}{q_0 + \delta} = \frac{1 + 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \\
\frac{p_2}{q_2} &= \frac{p_1 + \gamma}{q_1 + \delta} = \frac{2 + 1}{3 + 1} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

En general, si $k_1 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{k_1}}{q_{k_1}} &= \frac{k_1 + 1}{k_1 + 2} \\
I_{0k_1} &= \left(\frac{k_1 + 1}{k_1 + 2}, \frac{k_1 + 2}{k_1 + 3} \right)
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{-1}}{q_{-1}} &= \frac{p_0 + \alpha}{q_0 + \beta} = \frac{1 + 0}{2 + 1} = \frac{1}{3} \\
\frac{p_{-2}}{q_{-2}} &= \frac{p_{-1} + \alpha}{q_{-1} + \beta} = \frac{1 + 0}{3 + 1} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

En general, si $k_1 < 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{k_1}}{q_{k_1}} &= \frac{1}{-k_1 + 2} \\
I_{0k_1} &= \left(\frac{1}{-k_1 + 2}, \frac{1}{-k_1 + 1} \right)
\end{aligned}$$

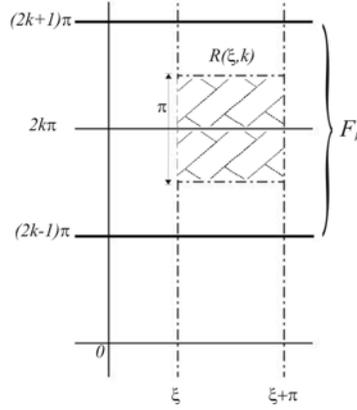
Continuemos con la construcción de $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow C_b$. La primera restricción al dominio de h es considerar $(t, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tal que $t \geq 1$ y $\alpha \in \mathbb{I}$.

Empecemos por definir en el plano complejo los cuadrados cerrados:

$$R(\xi, k) = \left\{ x + iy : \xi \leq x \leq \xi + \pi, \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi \leq y \leq \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}$$

Observemos que estos son cuadrados de lado π , cuyo eje horizontal de simetría corresponde con aquel de las franjas F_k , que es donde se encuentran los extremos de los dedos D_k . Es decir, que $R(\xi, k) \subset F_k$. Tenemos que ξ determina el lado izquierdo del cuadrado. Además, la imagen de uno de estos cuadrados es un “semianillo” en el semiplano derecho, con centro en cero, definidos por las semicircunferencias de radio $E_{\frac{1}{e}}(\xi)$ y $E_{\frac{1}{e}}(\xi + \pi)$.

Figura 21. Los cuadrados $R(\xi, k)$.



Entonces, dado (t, α) un punto en el plano, tenemos que determinar si pertenece o no al dominio de h , es decir, si este punto es elemento del cepillo recto que estamos construyendo. Sea $T(\alpha) = s = k_0 k_1 \dots$

Definamos:

$$R_0 = R(x_0, k_0) \text{ con } x_0 = t$$

$$R_n = R(x_n, k_n)$$

$$x_n = \inf \left\{ \xi \geq 1 : R(\xi, k_n) \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R_{n-1}) \right\}$$

Si no existe $\xi \geq 1$ que cumpla la contención $R(\xi, k_n) \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R_{n-1})$, entonces:

$$R_n = \phi$$

Así, (t, α) está en el dominio de h si y sólo si $R_n \neq \phi$ para toda n .

Sea B el dominio de h .

Es importante notar que por la definición de R_n , se cumplen las siguientes contenciones:

$$R_1 \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R_0)$$

$$R_{n+1} \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R_n)$$

$$R_n \subseteq E_{\frac{1}{e}}^n(R_0)$$

Definamos ahora h de la siguiente manera:

$$h(t, \alpha) = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_{\frac{1}{e}}^{-n}(R_n)$$

Revisemos que h esté bien definida, es decir, que la intersección es un solo punto en \mathbb{C} .

Sea $\ln_{0, \frac{1}{e}} : \mathbb{C} \rightarrow F_0$ una rama del logaritmo, donde $R_0 \subseteq F_0$ y $\ln_{0, \frac{1}{e}} \circ E_{\frac{1}{e}}(z) = z$. Obsérvese que:

$$\ln_{0, \frac{1}{e}}^n(R_n) \subseteq R_0$$

Además:

$$h(t, \alpha) = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_{\frac{1}{e}}^{-n}(R_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln_{0, \frac{1}{e}}^n(R_n)$$

Como $|E'(z)| > 1$ si $\operatorname{Re} z > 1$, entonces, $|\ln_{0, \frac{1}{e}}'(z)| < 1$ si $\operatorname{Re} z > 1$. Ya que el interior de cada cuadrado R_n , $\operatorname{Int}(R_n)$, está contenido en el semiplano derecho $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, tenemos que $\ln_{0, \frac{1}{e}}(\operatorname{Int}(R_n))$ es una contracción. Así pues, el límite del diámetro de $\ln_{0, \frac{1}{e}}^n(R_n)$ es cero. Como tenemos una intersección anidada de conjuntos cerrados, la intersección no puede ser vacía. Entonces la intersección es un solo punto.

Con esta construcción de h se puede demostrar que éste es un homeomorfismo [15] además de las siguientes propiedades:

1. B el dominio de h es un cepillo recto.
2. $h(B) = C_b = \bigcup_{s \in \Sigma} D_s = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{\frac{1}{e}}^{-n}(H) = J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$
3. Los puntos de los cabellos son inaccesibles y los extremos son todos accesibles.
4. Dado s un itinerario periódico, existe un único punto z periódico del mismo periodo que siendo un extremo de un cabello, $S(z) = s$.
5. Un cabello y su extremo tienen el mismo itinerario.

4.4. Itinerarios excluidos.

Terminaremos este capítulo comentando qué tipo de itinerarios no tienen un punto asociado en el Julia.

Como vimos en la construcción geométrica, los subdedos se anidan en los dedos. Los extremos de los subdedos se distribuyen a lo largo de la frontera de

los dedos hacia infinito. Por ello si los extremos se van muy rápido hacia infinito, cuando tomamos la intersección:

$$D_s = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{k_0 \dots k_i}$$

puede ocurrir que D_s sea vacío.

Sea $s = k_0 k_1 \dots$ en Σ .

Llamemos $p_{k_0 \dots k_i}$ al extremo del subdedo $D_{k_0 \dots k_i}$. Siendo los conjuntos $D_{k_0 \dots k_i}$ cerrados y anidados, para que D_s sea vacío se requiere que el conjunto de extremos sea no acotado. Además, si este conjunto es acotado, podemos garantizar que la intersección es no vacía. Esto nos permite formular el siguiente:

Lema 48 D_s no es vacío si y solo si la sucesión $\{|p_{k_0 \dots k_i}|\}$ es acotada.

Entonces necesitamos analizar las condiciones para que se cumpla este lema.

Recordemos que $E_{\frac{1}{e}}^i(D_{k_0 \dots k_i}) = D_{k_i}$, por ello $E_{\frac{1}{e}}^i(p_{k_0 \dots k_i}) = p_{k_i}$. Entonces

$|p_{k_0 \dots k_i}| = \left| E_{\frac{1}{e}}^{-i}(p_{k_i}) \right|$, tomando la rama del logaritmo que manda p_{k_i} a la franja k_0 . Por ello la sucesión es acotada si y sólo si $\{|E^{-i}(p_{k_i})|\}$ es acotada, tomando la misma rama del logaritmo.

Esto nos lleva a escribir la forma general de las imágenes de p_{k_i}

$$p_{k_i} = (1, 2k_i\pi)$$

Si damos un itinerario $s = k_0 k_1 \dots$, tenemos que el candidato en el Julia a tener este itinerario esta contenido en F_{k_0} , lo que quiere decir que la parte imaginaria de la sucesión está acotada. Tomemos $k_0 = 0$ para facilitar las cuentas, entonces $E_{\frac{1}{e}}^{-1}(z)$ es la rama principal del logaritmo. Recordemos que

$$|\ln z| = \ln |z|$$

Además tenemos $|p_{k_i}| = \sqrt{1 + (2k_i\pi)^2} \leq 3k_i\pi$. Entonces, $\{|p_{k_0 \dots k_i}|\}$ es acotada si y sólo si:

$$\ln_{\frac{1}{e}}^i(3k_i\pi) \leq M$$

para alguna M real, donde \ln es la rama principal del logaritmo. Dado que sólo k_i puede crecer, esto se cumple si y sólo si:

$$\ln_{\frac{1}{e}}^i(k_i) \leq M$$

para alguna M . Así, tenemos el siguiente:

Lema 49 Sea $s = k_0 \dots k_i \dots$ un itinerario en Σ . Existe z en $J\left(E_{\frac{1}{e}}(z)\right)$ tal que s es el itinerario de z si y sólo si $k_i \leq E^i(M)$ para alguna M real y toda i natural.

Si $s = 3, 3^3, 3^{3^3}, \dots$, se puede verificar que existe i natural tal que:

$$k_i > E^i(M)$$

Ello nos da una idea del tipo de itinerarios no acotados los cuales son imagen de z bajo la función que asigna itinerarios $S(z)$. Por ejemplo, $s = 1, 2, 3, \dots, i, \dots$

Capítulo 5

EL CASO $\lambda \in \mathbb{R}$

En este capítulo retomamos la discusión de los capítulos anteriores para otros parámetros reales positivos. Además de generalizar las propiedades que ya vimos, revisaremos algunas de las demostraciones y las construcciones geométricas. En varios casos, tanto unas y otras, no sufren mayor cambio. Por esta razón mencionaremos los detalles a tomar en cuenta y enunciaremos los resultados. La idea es condensar las propiedades en los distintos casos.

Sin embargo, nos detendremos nuevamente con la demostración de que $J(E_\lambda(z))$ es todo el plano, pues prescindiremos de lemas análogos a 30 y 31 del *Capítulo III*.

En la última sección revisaremos el caso en que $\lambda < 0$. Esto es porque nos ilustrará un fenómeno que se presenta cuando existe una órbita atractora de periodo mayor a uno.

El material se encuentra en [7], [5], [15], [14], [13], [11], [21].

5.1. El caso $\lambda > \frac{1}{e}$.

Tenemos las siguientes propiedades para cada $\lambda > \frac{1}{e}$.

1. $J(E_\lambda(z)) = \mathbb{C}$ [7].
2. Existe un conjunto invariante $\Lambda_\lambda \subset J(E_\lambda(z))$ que en la esfera de Riemann contiene dos conjuntos que son continuos indescomponibles [?].
3. Se puede dividir el plano en conjuntos $\Lambda_{\lambda,s}$ cuyos puntos compartan un mismo itinerario s .

$$\Lambda_{\lambda,s} = \{z \in \mathbb{C} : S_\lambda(z) = s \in \Sigma\}$$

Si bien no se conoce del todo la estructura de estos conjuntos, existe una infinidad no numerable de itinerarios s para los cuales $\Lambda_{\lambda,s}$ es continuo indescomponible. Para toda otra familia de itinerarios, $\Lambda_{\lambda,s}$ es un cabello con extremo [11].

5.1.1. El Julia es todo el plano.

La demostración para el caso general en que $\lambda > \frac{1}{e}$, siguiendo el procedimiento de Misiurewicz, prescinde de algunos lemas análogos utilizados para el caso $\lambda = 1$. Por esta razón reformulamos la demostración. Algunos lemas que utilizamos en el *Capítulo III* son fácilmente generalizables al caso $\lambda > \frac{1}{e}$, por ello sólo los enunciaremos.

Siguiendo a Misiurewicz, para demostrar que $J(E_\lambda(z)) = \mathbb{C}$, se procede a probar primero que los reales están contenidos en el Julia, y después que las imágenes inversas de los reales son densas en el plano.

Proposición 50 $\mathbb{R} \subset J(E_\lambda(z))$.

Demostración. Por lo visto en el *Capítulo II*, la órbita de z_0 , un valor real, tiende a infinito; entonces, existe V vecindad de z_0 donde la familia de iteraciones de $E_\lambda(z)$ es normal, sólo si la convergencia es uniforme a infinito en todo subconjunto compacto de V y para toda subsucesión de $\{E_\lambda^n(z)\}$.

Sea $E_\lambda^{n_k}(z)$ una subsucesión uniformemente convergente a infinito en un compacto $K \subset V$, tal que $z_0 \in K$ y K contiene una vecindad U de z_0 .

Sea M real, $M > 2$ y k_0 natural, tal que $|E_\lambda^{n_k}(z)| > M$, para toda $k \geq k_0$ y toda z en U . Si exhibimos que existe $n_1 > n_0$ y z_1 en U que cumplan que $|E_\lambda^{n_1}(z_1)| < M$, habremos terminado.

Por ello todas las iteraciones posteriores a n_0 de U deben estar contenidas en el interior de F_0 , pues la imagen de la frontera de esta franja son los reales negativos y la imagen de estos es el intervalo $(0, 1)$. Con ello tenemos que $E_\lambda^{n_k}(z)$ es un homeomorfismo en U para todo $k \geq k_0$.

Recordemos que $|E_\lambda'(z)| = |E_\lambda(z)|$, por ello $|(E_\lambda^{n_k})'(z)| > 2$ para toda $k \geq k_0$ y toda z en U . Por el lema 28 del *Capítulo III*, existe un disco contenido en $E_\lambda^{n_{k_0}+j}(U)$ con radio $2^j \rho$, donde ρ es el radio de un disco contenido en $E_\lambda^{n_{k_0}}(U)$. Por lo tanto existe j que hace crecer lo suficiente a U y por tanto la imagen de $E_\lambda^{n_{k_0}+j}(U)$ interseca la frontera de F_0 , generándose la contradicción. ■

Para terminar la demostración de que $J(E_\lambda(z)) = \mathbb{C}$ se requieren lemas análogos a los que vimos en el *Capítulo III* que se pueden generalizar a estos parámetros.

Lema 51 Sea z en \mathbb{C} y V una vecindad de z . Sea $S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi}{3}\}$. Entonces, sólo una cantidad finita de imágenes de V puede ser ajena a S .

Este lema es la generalización del lema 25 del *Capítulo III*. Se puede demostrar con el mismo procedimiento.

El siguiente es la generalización del lema 27 del mismo capítulo. Su demostración también es semejante. Ver [7].

Lema 52 $|\operatorname{Im}(E_\lambda^n(z))| \leq |(E_\lambda^n)'(z)|$ con $z \in \mathbb{C}$.

Finalmente, se generaliza una propiedad que demostramos para el caso $\lambda = 1$. La argumentación es esencialmente la misma que para dicho caso, se basa en la existencia de un punto fijo en W y la utilización del corolario 3.

Lema 53 *Sea z en Λ_λ . Entonces, la órbita de z se acumula en la frontera de W .*

Donde W y Λ_λ se definen como:

$$W = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq \pi\}$$

$$\Lambda_\lambda = \{z \in W : E^n(z) \in W, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

El punto fijo en W se encuentra resolviendo la siguiente ecuación con los mismos argumentos que dimos en la *sección 3.2*:

$$\lambda e^{y \cot y} \sin y = y$$

Ya podemos pasar a la demostración de la proposición:

Proposición 54 *Las imágenes inversas de \mathbb{R} bajo E_λ son densas en \mathbb{C} .*

Demostración. Supongamos que existe z_0 en \mathbb{C} en donde no se acumulen las imágenes inversas de \mathbb{R} . Existe pues una vecindad de z_0 cuyas iteraciones son todas ajenas a los reales. Entonces por el teorema ?? de Montel-Carathédory existe una vecindad V de z_0 donde E_λ es normal. Por el lema 51, tenemos que salvo una cantidad finita, las imágenes de V deben estar contenidas en el interior de W . Pues la imagen de su frontera está contenida en los reales. Entonces existe U abierto en W imagen de V tal que todas sus iteraciones están contenidas en el interior de W .

Como E_λ es normal en z , existe una subsucesión uniformemente convergente. Sea w el límite de z con esta subsucesión. Por lo que hicimos en la proposición anterior, w no puede ser el punto al infinito. Entonces w es un punto en el interior de W . Como las imágenes de U no se pueden salir del interior de W , la órbita de w debe estar contenida en W , es decir, que w pertenece a Λ_λ . Por el lema anterior, su órbita se acumula en la frontera de W y por tanto z también, generándose la contradicción. ■

Con estas dos proposiciones se demuestra el siguiente Teorema:

Teorema 55 *Sea $\lambda > \frac{1}{e}$. Entonces, $J(E_\lambda(z)) = \mathbb{C}$.*

5.1.2. Continuos indescomponibles.

Dado que la imagen de la franja W bajo E_λ es el semiplano superior sin la órbita del cero, podemos construir conjuntos invariantes como lo hicimos en el capítulo 2. Como λ es real, geoméricamente tenemos una homotecia, por ella la forma de Λ_λ no cambia mucho.

Se puede demostrar [11] que para toda $\lambda > \frac{1}{e}$, al compactificar Λ_λ se obtiene un continuo indescomponible. En consecuencia, Λ_λ debe contener una infinidad no numerable de componentes [19]. Incluso, Devaney y Krych en [13] muestran que Λ_λ contiene una infinidad no numerable de curvas.

El conjunto de puntos cuya órbita tiende a infinito es una familia numerable de curvas que es densa en Λ_λ , aun cuando le quitamos una cantidad finita de

curvas a esta familia [7]. El resto de los puntos, salvo el punto fijo, tienen como $\omega(z, E_\lambda)$ la órbita del cero incluido el infinito. El $\alpha(z, E_\lambda)$ de todos los puntos en Λ_λ , salvo la órbita del cero, es el punto fijo en W [11].

Lyubich en [17] demostró que la medida de Lebesgue de estos conjuntos Λ_λ es cero.

Douady y Goldberg en [18] demostraron que dados dos parámetros $\lambda, \mu > \frac{1}{e}$, E_λ y E_μ no son topológicamente conjugadas. Sigue siendo un problema abierto si Λ_λ y Λ_μ son homeomorfos o no [5].

5.1.3. Conjuntos con un itinerario asociado.

Definimos $S_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$, como sigue:

$$S_\lambda(z) = s = s_0 s_1 \dots s_k \dots, \text{ donde } E_\lambda^k(z) \in F_k.$$

Con ello definimos los conjuntos de puntos de un mismo itinerario:

$$\Lambda_{\lambda, s} = \{z \in \mathbb{C} : S_\lambda(z) = s \in \Sigma\}$$

Devaney y Jarque en [11] exhiben la existencia de una cantidad no numerable de itinerarios en Σ_{2k} para los cuales $\Lambda_{\lambda, s}$ son continuos indescomponibles. En particular esto ocurre si s tiene una infinidad de cadenas finitas de ceros cuya longitud crece suficientemente rápido. Sólo un punto en estos conjuntos tiene órbita acotada, para todos los demás el $\omega(z, E_\lambda)$ es el punto al infinito, o bien, la órbita del cero junto con el punto al infinito.

Mientras que si s en Σ_{2k} tiene una cantidad finita de ceros, $\Lambda_{\lambda, s}$ es un cabello, es decir, una curva continua homeomorfa al intervalo $[0, \infty)$. El extremo del cabello es el único punto con órbita acotada, las órbitas de los demás puntos tienden a infinito [11].

Se desconoce del todo la estructura de los conjuntos $\Lambda_{\lambda, s}$ si s pertenece Σ . ¿Existe s en Σ para el cual $\Lambda_{\lambda, s}$ no sea ni un cabello con extremo ni un continuo indescomponible? En particular se desconoce la estructura topológica de estos conjuntos si s contiene cadenas de ceros cuya longitud crece sin cotas [11]. De hecho, para el caso Λ_λ , es un problema abierto conocer la estructura de la componente a la que pertenece el punto fijo.

Si s y t son itinerarios admisibles para $E_\lambda(z)$, tal que $\Lambda_{\lambda, s}$ y $\Lambda_{\lambda, t}$ son continuos indescomponibles, se desconoce si estos son homeomorfos [11].

5.2. El caso $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$.

De la dinámica del caso real sabemos que para $\lambda = \frac{1}{e}$ hay un punto fijo indiferente. En el caso $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ tenemos dos puntos fijos. Uno menor a uno z_a que es atractor, otro mayor a uno repulsor z_r . De las propiedades que comentamos en el *Capítulo IV*, ésta es la única diferencia. Por ello en la construcción geométrica consideramos los siguientes semiplanos:

$$\begin{aligned} G_\lambda &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < z_r\} \\ H_\lambda &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq z_r\} \end{aligned}$$

Naturalmente las órbitas de los puntos en el conjunto de Fatou convergen al punto fijo atractor. El resto de la construcción geométrica es igual. Para estos parámetros se cumplen las siguientes propiedades:

1. Existe un cepillo recto homeomorfo al conjunto de Julia de E_λ , con $0 < \lambda \leq \frac{1}{e}$ [15].
2. Todo punto en el Julia es elemento de una curva continua homeomorfa al intervalo $[0, \infty)$, ello determina los cabellos y sus extremos. De hecho las curvas son C^∞ , un resultado de Viana [25].
3. El conjunto de puntos periódicos esta contenido en la corona, el conjunto de extremos de los cabellos.
4. La órbita de los puntos en los cabellos tiende a infinito.
5. La corona se acumula en todo el Julia.
6. Los puntos de los cabellos son inaccesibles desde el complemento, sólo los elementos de la corona son accesibles.
7. El infinito es un punto de explosión de la corona [14].
8. La medida de Lebesgue del Julia es cero [16].
9. La dimensión de Hausdorff del Julia es 2 [16], donde la del conjunto de los cabellos es 1 y la de la corona es 2 [20].
10. Los itinerarios de los puntos en el Julia son de orden exponencial [13], ver la siguiente sección. De hecho existe una semiconjugación entre $E_\lambda(z)$ y la función corrimiento en el espacio de itinerarios Σ .
11. El conjunto de Fatou es homeomorfo al interior de un disco abierto [21].

5.3. Itinerarios no admisibles.

Para $\lambda > 0$, si definimos:

$$\Lambda_{\lambda,s} = \{z \in \mathbb{C} : S_\lambda(z) = s\}$$

Donde $S_\lambda(z) = s_0, \dots, s_k, \dots = s \in \Sigma$, si $E_\lambda^k(z)$ es elemento de F_k , con:

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \operatorname{Im}(z) \leq (2k+1)\pi\}$$

Devaney y Krych en [13] establecen condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando $\Lambda_{\lambda,s}$ es vacío.

Sea s un itinerario en Σ . Decimos que s es admisible si es de orden λ exponencial, es decir, cuando existe M real tal que, para todo k :

$$|s_k| \leq E_\lambda^k(M)$$

Este resultado es válido si $\lambda > 0$. Σ_λ es el espacio de itinerarios admisibles para $E_\lambda(z)$.

5.4. El caso $\lambda < 0$.

Nuestro interés en esta sección es ilustrar el fenómeno de “trasplante de cabellos” [7]. Esto ocurre en la bifurcación de periodo cuando el parámetro pasa por $\lambda = -e$. Para $\lambda > -e$ tenemos un punto fijo atractor y el Julia es un Cantor bouquet con las mismas propiedades del caso en que λ es positivo.

Conforme λ se aproxima al valor $-e$, una órbita repulsora de periodo 2 se aproxima al punto fijo, llevando consigo los cabellos asociados a los puntos periódicos. Cuando $\lambda = -e$, la órbita repulsora se “funde” con el punto fijo atractor creando un punto fijo indiferente, convirtiéndose en el extremo de dos cabellos que fueron. Al pasar el parámetro por la bifurcación, es decir, cuando $\lambda < -e$, el punto fijo repulsor sigue siendo el extremo de dos cabellos, mientras que la órbita repulsora se desprende nuevamente. A este fenómeno se le conoce como “trasplante de cabellos”.

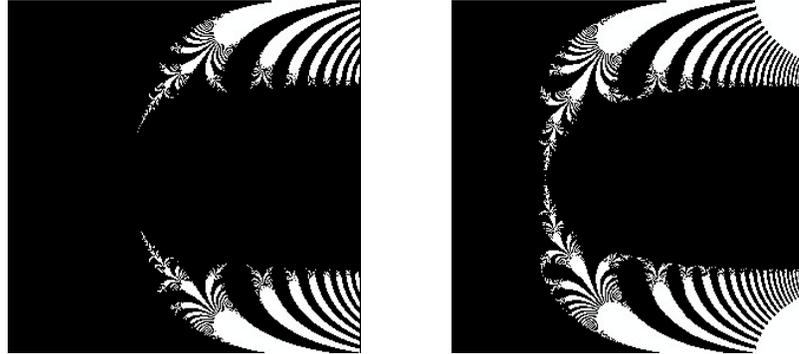
El conjunto de Julia ya no tiene la misma topología que los cepillos rectos, sin embargo, sigue conteniendo conjuntos de Cantor invariantes. Estos siguen siendo familias de curvas continuas cuyos extremos se acumulan en todo el Julia [23].

Otra consecuencia de esta unión de cabellos es que el conjunto de Fatou deja de tener sólo una componente y se fracciona en una infinidad de ellas.

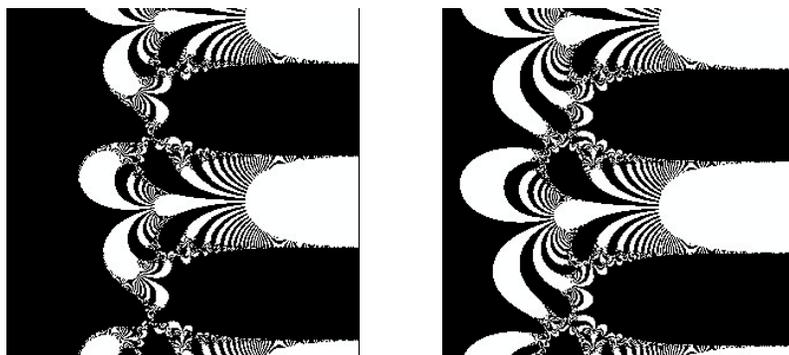
Figura 22.

Tomados de [21].

a) Los conjuntos de Julia para $\lambda = -2,5$ y $\lambda = -3,5$.



b) Trasplante de cabellos. El caso de la existencia de periodo 3 atractor, para $\lambda = 5 + \pi i$ y $\lambda = 10 + 3\pi i$.



Capítulo 6

ASPECTOS GENERALES

En la primera sección abordaremos el tema de conjuntos de Cantor invariantes que aparecen para todos los parámetros. Haremos la construcción geométrica para el caso en que $\lambda \notin \mathbb{R}^-$. Enunciaremos resultados que se han obtenido al respecto de estos conjuntos [23].

En la segunda sección abordaremos la dicotomía que se presenta en esta familia. Utilizaremos la generalización del teorema de clasificación de Sullivan para demostrar que para ciertos parámetros $J(E_\lambda)$ es todo el plano. El material al respecto se puede encontrar en [9].

6.1. Conjuntos de Cantor.

En los capítulos anteriores hemos asignado a los puntos en el plano un itinerario de acuerdo a cómo las órbitas “visitan” las franjas F_k del plano. Es natural pensar que lo mismo podemos hacer para todos los parámetros λ en \mathbb{C} .

En el caso del Cantor bouquet mostramos cómo el conjunto de puntos con un mismo itinerario en el conjunto de Julia está constituido por un cabello con un extremo. En [23] se demuestra que para todos los parámetros, existen conjuntos de Cantor invariantes. Estos bajo la exponencial, se comportan como lo hace el espacio de itinerarios de finitos símbolos con la función corrimiento. Además, cada uno de estos puntos tiene asociada una curva continua que tiene el mismo itinerario.

Con lo que hicimos en el *Capítulo IV* respecto a los Cantor bouquet, esta propiedad queda exhibida. En esta sección daremos una construcción geométrica general para el caso λ en $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.

Si definimos como el espacio de itinerarios regulares de $2M$ símbolos como:

$$\Sigma_{2M} = \{s = k_0 k_1 k_2 \dots k_i \dots : |k_i| \leq M, k_i \in \mathbb{Z}, k_i \neq 0, M \in \mathbb{N}\}$$

Se puede probar que Σ_{2M} es homeomorfo a un conjunto de Cantor.

Vamos a construir, para $M \in \mathbb{N}$ y $\lambda \notin \mathbb{R}^-$, un conjunto $C_{\lambda, M}$ homeomorfo a Σ_{2M} y por tanto a un conjunto de Cantor, invariante en el plano bajo la función $E_\lambda(z)$.

Recordando:

$$F_k = \{z \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \text{Im}(z) \leq (2k+1)\pi\}$$

Dado λ y k_i , construimos los rectángulos $R_{k_i} \subset F_{k_i}$ del modo siguiente:

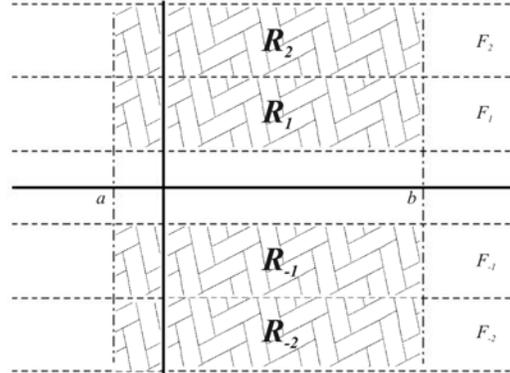
$$R_{k_i} = \{z \in F_{k_i} : a \leq \text{Re } z \leq b\}$$

donde a y b los escogemos de modo que $a < \ln\left(\frac{\pi}{|\lambda|}\right)$ y $b > 2 \ln\left[\frac{\pi(2k+1)}{|\lambda|}\right]$. Omitimos las cuentas que determinan los valores de a y b , pero tomándolos con estas restricciones, garantizamos que las imagen de cualquier R_{k_i} contienen a todos los R_{k_j} . Es decir, que dado $|k_0| \leq M$:

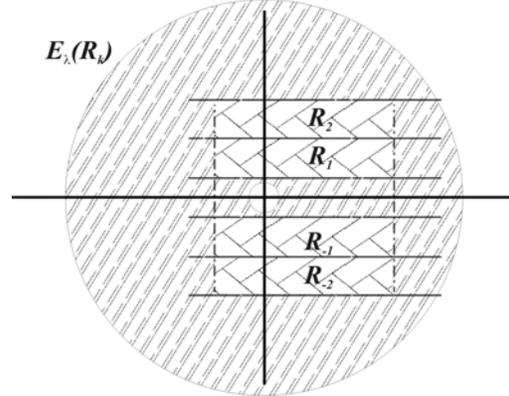
$$\bigcup_{0 < |k_i| \leq M} R_{k_i} \subseteq E_\lambda(R_{k_0})$$

Figura 23.

a) Los rectángulos R_k .



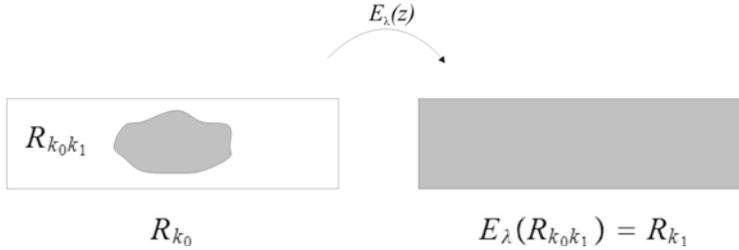
b) La imagen de R_k bajo $E_\lambda(z)$.



Esto tiene una consecuencia muy importante en la dinámica de $E_\lambda(z)$. Tomemos cualquiera de estos rectángulos y llamémoslo R_{k_0} , para señalar que los puntos se encuentran en el rectángulo con subíndice k_0 . En este conjunto podemos encontrar un conjunto $R_{k_0 k_1}$ contenido propiamente en R_{k_0} cuya imagen es el rectángulo R_{k_1} .

$$R_{k_0 k_1} = E_\lambda^{-1}(R_{k_1}) \cap R_{k_0}$$

Figura 24.



Así sucesivamente, podemos construir $R_{k_0 k_1 \dots k_i}$ un conjunto contenido en R_{k_0} el cual satisface que $E_\lambda^i(R_{k_0 k_1 \dots k_i}) = R_{k_i}$. Incluso que $E_\lambda^j(R_{k_0 k_1 \dots k_j \dots k_i}) \subset R_j$. Se demuestra que la función inversa restringida en los conjuntos $R_{k_0 k_1 \dots k_i}$ es una contracción. De modo que si repetimos este proceso indefinidamente tenemos conjuntos anidados no vacíos cuya intersección corresponde a un punto.

Llamemos:

$$z_s = \bigcap_{i=0}^{\infty} R_{k_0 k_1 \dots k_i}$$

donde naturalmente s es el itinerario en Σ_{2M} dado por $s = k_0 \dots k_i \dots$

Se puede probar que:

$$C_{\lambda, k} = \bigcup_{s \in \Sigma_k} z_s$$

es homeomorfo a Σ_{2M} y existe una conjugación entre $E_\lambda(z)$ y la función corrimiento en los espacios correspondientes.

Incluso, si s es un itinerario periódico de periodo n , entonces z_s es un punto periódico repulsor de periodo n .

También en [23] se demuestra la existencia de los cabellos con el mismo itinerario que cada uno de estos z_s .

Como vimos en los capítulos anteriores, para todos los parámetros se pueden encontrar puntos y cabellos para itinerarios no regulares ni acotados. Por otro lado, se pueden encontrar itinerarios para los que el conjunto de puntos con tales itinerarios es vacío.

Siempre que exista un punto fijo atractor, el conjunto de Julia es un Cantor bouquet [21]. En tal caso, el conjunto de Fatou es homeomorfo al disco unitario. De haber una órbita atractora de periodo mayor a uno, la cuenca de atracción consta de una infinidad de componentes y diferentes cabellos se unen en sus extremos. Bhattacharjee y Devaney estudian este fenómeno en [24].

6.2. Dicotomía en la dinámica de $E_\lambda(z)$.

Sullivan probó que para funciones racionales el conjunto de Fatou sólo puede estar compuesto por cierto tipo de dominios. El comportamiento de los dominios está determinado por el punto periódico que contenga en su interior o en su frontera.

Cada punto periódico atractor o súper atractor define una componente de Fatou, en la cual las órbitas de todos los puntos son *asintóticamente convergentes* a la del punto periódico. En este caso decimos que las componentes de Fatou son cuencas atractoras o super atractoras.

Si la función tuviera un punto periódico indiferente, se definirá una componente de Fatou y el punto periódico estará en la frontera. En este caso tenemos dos posibilidades: la primera, que los puntos del dominio tengan órbitas asintóticamente convergentes a la del punto indiferente, conocido como dominio parabólico; la segunda, que exista una conjugación entre la función restringida a esta componente de Fatou y una rotación en el disco unitario, conocida como disco de Siegel. Ver en *Apéndice C* el Teorema de Clasificación de Sullivan 62.

Un resultado probado por Goldberg, Keen, Eremenko y Lyubich establece que para cierto tipo de funciones enteras trascendentales se extiende el teorema de clasificación de Sullivan. Para ello necesitamos hablar de los puntos críticos y asintóticos.

Los puntos críticos son aquellos donde la derivada de la función $F(z)$ se hace cero. Mientras que w un valor asintótico debe satisfacer lo siguiente:

Existe una curva continua $\gamma(t)$ para la cual $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\gamma(t)) = w$.

Un ejemplo de valor asintótico es el del cero para el caso de $E_\lambda(z)$. Siempre el cero es un valor omitido y se satisface la condición arriba mencionada, donde la curva continua pueden ser los reales negativos.

Decimos que una función tiene finitos puntos singulares si la cantidad de puntos críticos y asintóticos es finita. Para las funciones enteras trascendentes que satisfacen esta condición es que se extiende el teorema de clasificación de Sullivan.

Teorema 56 *Sea f una función entera trascendente con una cantidad finita de puntos críticos y asintóticos. Si Ω es una componente del conjunto de Fatou de f , entonces, Ω es preperiódica.*

Para probar que $J(E(z))$ es todo el plano, utilizaremos este y otro resultado.

Teorema 57 *Sea f una función entera trascendente. Si z_0 es un punto periódico atractor o indiferente, entonces, al menos un punto crítico o asintótico es asintóticamente convergente a la órbita de z_0 .*

Ya con estos resultados es inmediato que para el caso de la familia $E_\lambda(z) = C$. Esto es porque sólo tengo un valor asintótico y no hay puntos críticos. Para que el conjunto de Fatou sea distinto del vacío deben existir dominios estables

definidos por órbitas atractoras o indiferentes. Entonces, si la órbita del cero no converge a una de estas órbitas, Fatou debe ser vacío.

Se puede probar que se presenta la siguiente dicotomía para funciones enteras con finitos valores críticos [9], [21]:

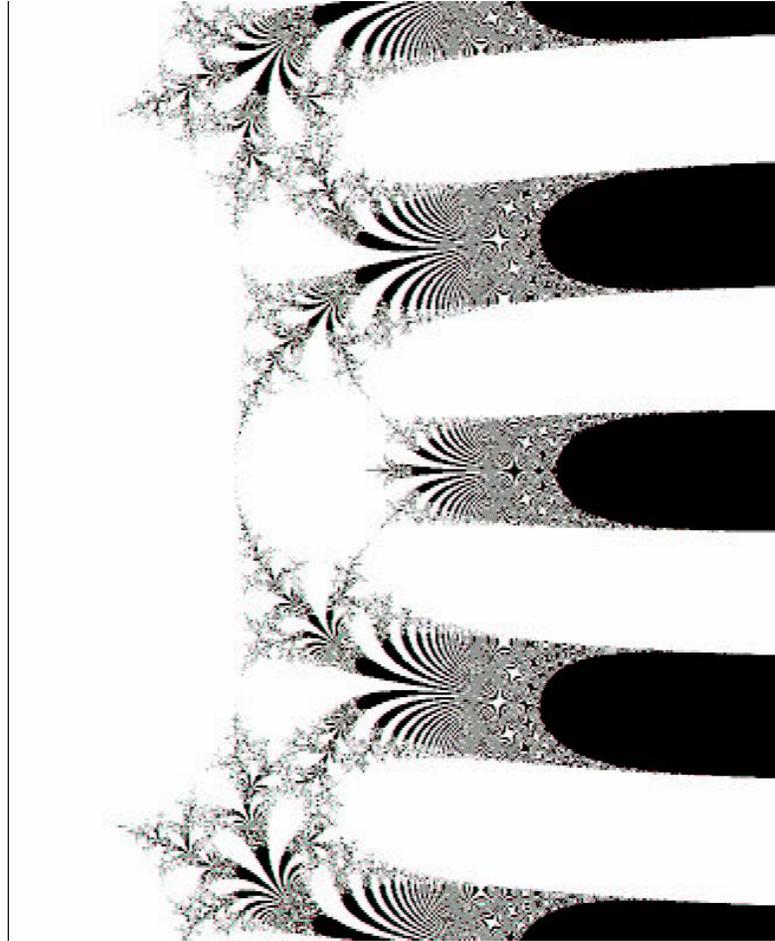
Teorema 58 *Sea $E_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. $E_\lambda(z) = \lambda e^z$. Entonces una de las siguientes condiciones se cumple para el conjunto de Julia.*

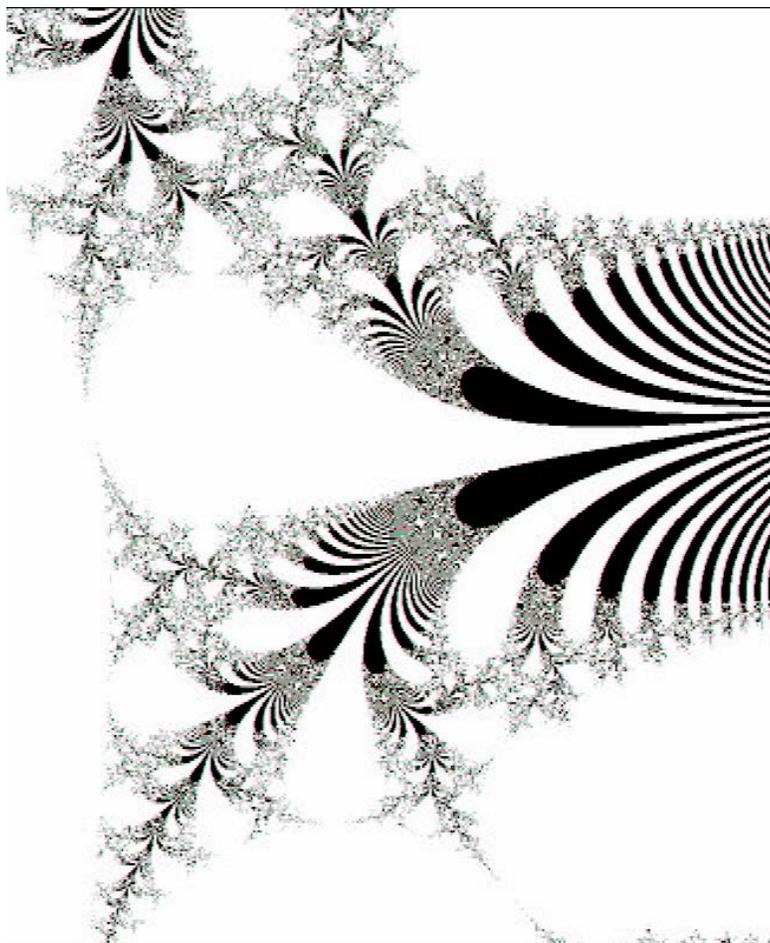
1. *Si la órbita del cero tiene a infinito, entonces Julia es todo el plano.*
2. *Si la órbita del cero es preperiódica, entonces Julia es todo el plano.*
3. *Si existe una órbita atractora o indiferente, entonces Julia es denso en ninguna parte, contiene un Cantor bouquet y está contenido en un semiplano derecho.*

Este teorema es de gran importancia para el estudio del mapa de parámetros. Esta discusión rebasa los objetivos del presente trabajo. Aquí mostramos simplemente unas imágenes que corresponden al mapa de parámetros. En blanco se muestra una aproximación del conjunto de parámetros para los cuales el Julia es todo el plano. Si bien se aprecian zonas “gordas”, tenemos en realidad nuevamente la aparición de cabellos que se “apelmazan” unos con otros dando la percepción de haber grosor.

Figura 25. El mapa de parámetros de la familia $E_\lambda(z)$.

Tomados de [21].





Capítulo 7

Apéndice A

Pasemos ahora a revisar la demostración del corolario 3.

Corolario 59 *Sea G una región simple conexa que no sea todo el plano. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(G) \subseteq G$, analítica. Supóngase $f(z_0) = z_0$ para algún punto en G . Entonces, una de las siguientes dos condiciones se cumple:*

1. $|f'(z_0)| < 1$ y en este caso $f^n(z) \rightarrow z_0$ para todo punto z_0 en G , o
2. $f'(z_0) = e^{i\theta}$ y en tal caso f es analíticamente conjugada, en G , a una rotación $R : D \rightarrow D$ del disco unitario dada por $R(z) = e^{i\theta}z$.

En la demostración de este corolario se utiliza el Teorema de mapeo de Riemann. Entonces existe h analítica que satisface:

1. $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) > 0$.
2. h es inyectiva.
3. $h(G) = D$.

Definimos una función g como sigue:

$$g(z) = h \circ f \circ h^{-1}(z)$$

Veamos que ésta función así definida satisface las condiciones de Lema de Schwarz.

$$g(D) = h \circ f \circ h^{-1}(D) = h \circ f(G) \subseteq h(G) = D$$

Con ello tenemos que $g : D \rightarrow D$. Ahora veamos la siguiente condición.

$$g(0) = h \circ f \circ h^{-1}(0) = h \circ f(z_0) = h(z_0) = 0$$

De la definición de g , $g \circ h(z) = h \circ f(z)$ y con así:

$$\begin{aligned} [g \circ h]'(z_0) &= [h \circ f]'(z_0) \Rightarrow \\ g'(h(z_0)) \cdot h'(z_0) &= h'(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \end{aligned}$$

Como $h(z_0) = 0$ y $f(z_0) = z_0$, cancelando en ambos lados de la igualdad llegamos a que:

$$g'(0) = f'(z_0)$$

En ese caso $|g'(0)| = 1$ o $|g'(0)| < 1$ y por lo tanto g cumple las condiciones del Lema de Schwarz. Es decir, si $|g'(0)| = 1$, entonces $g(z) = cz = e^{i\theta}z$, pues el módulo de c es 1. De la definición de g se cumple también que:

$$f(z) = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(z)$$

Donde $h_1 = h^{-1}$, con lo cual se concluye que f es *analíticamente conjugada con una rotación del disco unitario por $e^i = e^{i\theta}$* .

Para demostrar que si $|f(z_0)| < 1$, entonces $f^n(z) \rightarrow z_0$, vamos a demostrar que $g^n(z) \rightarrow 0$. El caso en que z es z_0 para la f y el caso en que z es cero para la g es trivial y pasamos al otro caso.

Sea z_1 distinto de cero en el disco unitario. Dado que $|g(z_1)| < |z_1|$, tenemos que $|g^n(z_1)|$ es una sucesión decreciente y obviamente acotada, por lo tanto converge. Demostremos que el valor límite es cero. Supongamos que es distinto de cero, entonces existe una subsucesión de las iteraciones tal que $g^{n_k}(z_1) \rightarrow z_2$, con z_2 distinto de cero. Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g^{n_k}(z_1)| = |z_2|$$

por la continuidad de g :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{n_k+1}(z_1) = g(z_2)$$

entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |g^{n_k+1}(z_1)| = |g(z_2)|.$$

Como z_2 es distinto de cero, $|g(z_2)| < |z_2|$. Con ello hemos encontrado dos subsucesiones de la sucesión de módulos que convergen a valores distintos, lo cual genera una contradicción. Por lo tanto la sucesión de módulos converge a cero y con ello:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(z) = 0$$

para todo punto en D .

Ahora resulta inmediato que para todo punto en G :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0.$$

Recordemos que f se puede escribir como:

$$f(z) = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(z).$$

Como $h_1^{-1}(z) = z^*$ es un punto en D y por la continuidad de h_1 , tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_1 \circ g \circ h_1^{-1}(z) = h_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(z^*) \right) = h_1(0) = z_0.$$

Y así hemos terminado la prueba del corolario. ■

Capítulo 8

Apéndice B

El siguiente lema es un criterio para determinar cuando la órbita de un punto tiende a infinito.

Lema 60 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea x_0 en el dominio, tal que, $x < f(x)$ para todo $x \geq x_0$, entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \rightarrow \infty$ para todo $x \geq x_0$.

Sea x en $[x_0, \infty)$. Supongamos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f^n(x) < M$ para todo n . Por hipótesis $f^n(x) < f^{n+1}(x)$, entonces $f^n(x)$ es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto converge a x_1 en (x_0, ∞) . Con ello

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_1 = f(x_1)$$

Pero tenemos que

$$f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_1$$

Entonces $f(x_1) = x_1$, generando la contradicción. ■

Capítulo 9

Apéndice C

Los siguientes resultados ayudan a comprender la dinámica en el conjunto de Fatou. El primero se debe a Sullivan en 1983 contestando una pregunta de Fatou. Este teorema es conocido como el *Teorema de la no existencia de dominios errantes*. Si bien Sullivan obtuvo este resultado para funciones racionales, Goldberg, Keen, Eremenko y Lyubich generalizaron el resultado a otros casos que incluyen la familia $E_\lambda(z)$.

Teorema 61 *Sea f una función racional. Si Ω es una componente del conjunto de Fatou, entonces Ω es eventualmente periódico.*

Para redondear la idea de que la dinámica en el conjunto de Fatou es simple recurrimos al siguiente teorema, conocido como el *Teorema de clasificación de Sullivan*.

Teorema 62 *Sea f una función racional y $\Omega \subseteq F(f)$ una componente invariante hacia delante. Entonces una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *hay un punto fijo atractor en Ω , en tal caso Ω es una componente atractora.*
2. *hay un punto fijo super atractor en Ω , en tal caso Ω es una componente super atractora.*
3. *hay un punto fijo indiferente racional en la frontera de Ω y $f^n(z)$ converge al punto fijo, si z es elemento de Ω . En tal caso Ω es una componente parabólica o dominio de Leau.*
4. *existe una conjugación analítica de f en Ω con una rotación Euclídeana del disco unitario, en tal caso Ω es un disco de Siegel.*
5. *existe una conjugación analítica de f en Ω con una rotación Euclídeana de algún anillo, en tal caso Ω es un anillo de Herman.*

Con estos dos teoremas podemos describir la dinámica en el conjunto de Fatou como dos casos esenciales. Uno es que la función límite de las subsucesiones de la familia de iteraciones en la componente es una función constante. La otra posibilidad es tener una rotación de la componente, ya sea del disco o de algún anillo.

Capítulo 10

Glosario de símbolos

$E_\lambda(z) = \lambda e^z$.

G región simple conexa.

D disco unitario.

\mathfrak{F} familia de funciones.

V vecindad de algún punto dado.

$orb_f(z)$ órbita de z .

$\omega(z, f)$ el omega límite de z bajo f .

$\alpha(z, f)$ el alfa límite de z bajo f .

$F(f)$ conjunto de Fatou de f .

$J(f)$ conjunto de Julia de f .

Φ componente de Fatou.

X y Y conjuntos cualesquiera.

F_k franjas de altura 2π .

h homeomorfismo.

M valor real.

Σ_k el espacio de itinerarios de k símbolos.

$s = s_0 s_1 \dots s_n \dots$ es un itinerario.

Σ_{2M} es el espacio de itinerarios de $2M$ símbolos.

Σ es el espacio de itinerarios.

$E(z) = E_1(z)$.

U conjunto abierto, conexo no vacío.

V_z o V vecindad de un punto dado z .

$S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{\pi}{3}\}$

D_ρ un disco de radio ρ .

H un semiplano. $H = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq \theta = \frac{\pi}{\tan \frac{\pi}{3}}\right\}$ en el *Capítulo III*. $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 1\}$ en el *Capítulo IV*.

D_{H^c} es imagen de H^c .

$W = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$.

$R_x = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = x\}$.

$\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : E^n(z) \in W, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$$L_n = \{z \in W : E^i(z) \in W, i = 1, \dots, n-1; E^n(z) \notin W\}.$$

$$B_n = \{z \in S : z \in \partial L_n\}.$$

γ_n es la parametrización de B_n .

$$\Omega_N = \bigcup_{i=N}^{\infty} B_i \text{ con } N \text{ natural.}$$

$$S(z) = s, \text{ con } s \text{ en } \Sigma, \Sigma_M.$$

$$\Lambda_s = \{z \in \mathbb{C} : S(z) = s \in \Sigma\}.$$

z_s es el punto con órbita acotada e itinerario s .

$$D_k = \left\{ z \in F_k : E_{\frac{1}{e}}(z) \in H \right\}.$$

$$D_{k_0 \dots k_n} = \left\{ z \in D_{k_0} : E_{\frac{1}{e}}(z) \in D_{k_1 \dots k_n} \right\}.$$

$$D_s = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{k_0 \dots k_i}.$$

$$C_b = \bigcup_{s \in \Sigma} D_s \text{ es un Cantor bouquet.}$$

B cepillo recto.

$$I_{k_0 \dots k_n} = \left(\frac{p_{k_n}}{q_{k_n}}, \frac{p_{k_n+1}}{q_{k_n+1}} \right).$$

$$P = \{ \alpha \in \mathbb{I} : (y, \alpha) \in B \text{ para alguna } y \}.$$

$$R(\xi, k) = \left\{ x + iy : \xi \leq x \leq \xi + \pi, \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi \leq y \leq \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \right\}.$$

$$T(\alpha) : \mathbb{I} \text{ en } \Sigma.$$

Los cuadrados R_n :

$$R_0 = R(x_0, k_0) \text{ con } x_0 = t$$

$$R_n = R(x_n, k_n)$$

$$x_n = \inf \left\{ \xi \geq 1 : R(\xi, k_n) \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R(x_{n-1}, k_{n-1})) \right\}$$

Si no existe $\xi \geq 1$ que cumpla la contención $R(\xi, k_n) \subseteq E_{\frac{1}{e}}(R(x_{n-1}, k_{n-1}))$, entonces:

$$R_n = \phi$$

$\ln_{0, \frac{1}{e}} : \mathbb{C} \rightarrow F_0$ una rama del logaritmo, donde $R_0 \subseteq F_0$ y $\ln_{0, \frac{1}{e}} \circ E_{\frac{1}{e}}(z) = z$

$$\Lambda_\lambda = \{z \in W : E^n(z) \in W, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Lambda_{\lambda, s} = \{z \in \mathbb{C} : S_\lambda(z) = s \in \Sigma\}$$

$$S_\lambda(z) = s = s_0 s_1 \dots s_k \dots, \text{ donde } E_\lambda^k(z) \in F_k.$$

Bibliografía

- [1] **Complex Analysis**, Lars V. Ahlfors, second edition, McGraw-Hill, International Student Edition, 1966.
- [2] **Functions of One Complex Variable I**, John B. Conway, second edition, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 1978.
- [3] **Iteration of Rational Functions**, Alan F. Beardon, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1991.
- [4] **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**, Robert L. Devaney, second edition, Addison-Wesley, 1989.
- [5] **A Survey of Exponential Dynamics**, Robert L. Devaney, Department of Mathematics, Boston University, Boston, USA, 2004.
- [6] **Simple proofs of some fundamental properties of the Julia set**, Detlef Bargmann, Ergodic Theory and Dynamical Systems 19, 1999, p. 553-558.
- [7] **Se^x : Dynamics, topology, and bifurcations of complex exponentials**, Robert L. Devaney, Topology and its Applications 110, 2001, p. 133-161.
- [8] **Dynamics of entire functions near the essential singularity**, R. L. Devaney, F. Tangerman, Ergodic Theory Dynamical Systems 6, 1986, p. 489-503.
- [9] **Complex Dynamics and Entire Functions**, Robert L. Devaney, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 49, 1994.
- [10] **On iterates of e^z** , Michal Misiurewicz, Ergodic Theory and Dynamical Systems 1, 1981, p. 103-106.
- [11] **Indecomposable Continua in Exponential Dynamics**, Robert L. Devaney, Xavier Jarque. Preprint. Ver <http://math.bu.edu/people/bob/papers.html>.
- [12] **Knaster-like Continua and Complex Dynamics**, Robert L. Devaney, Ergodic Theory and Dynamical Systems 13, 1993, p. 627-634.

- [13] **Dynamics of $\exp(z)$** , Robert L. Devaney, Michal Krych, *Ergodyc Theory and Dynamical Systems* 4, 1984, p. 35-52.
- [14] **An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of $\lambda \exp(z)$** , John C. Mayer, *Ergodyc Theory and Dynamical Systems* 10, 1990, p. 177-183.
- [15] **The geometry of the Julia Sets**, Jan M. Aarts, Lex G. Oversteegen, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 338, No. 2, 1993, p. 897-918.
- [16] **Area and Hausdorff Dimension of Julia Sets of Entire Functions**, C. McMullen, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 300, 1987, p. 329-342.
- [17] **Measurable dynamics of the exponential**, M. Lyubich, *Soviet Mat. Dokl.* 35, 1987, p. 223-226.
- [18] **The nonconjugacy of certain exponential functions**, A. Douady, L. Golsberg, *Holomorphic Functions and Moduli*, MSRI Publ., Springer, Berlin, 1988, p. 1-8.
- [19] **Topology Vol. 2**, K. Kuratowski, Academic Press, New York, 1968.
- [20] **On the Accesible Points in the Julia Sets of Some Entire Functions**, B. Karpinska, *Fun. Math.* 180, 2003, p. 89-98.
- [21] **Complex Exponential Dynamics**, Robert L. Devaney, 2006, preprint.
- [22] **Open Problems in Complex Dynamics and “Complex” Topology**, Robert L. Devaney, 2006, Preprint.
- [23] **Hairs for the Complex Exponential Family**, Clara Bodelón, Robert L. Devaney, Michal Hayes, Gareth Roberts, Lisa R. Goldberg, John H. Hubbard, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 9, 1999, p. 1517-1534.
- [24] **Tying hairs for structurally stable exponentials**, R. Bhattacharjee, Robert L. Devaney, Preprint.
- [25] **The Differentiability of the Hairs of $\exp(z)$** , M. Viana, *Proc. Amer. Math. Soc.* 103, 1998, p. 1179-1184.