



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

" RELATIVIDAD NUMÉRICA EN  
SIMETRÍA PLANA "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICA

P R E S E N T A :

MARTHA DONAJÍ MÉNDEZ TORRES



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

	Hoja de Datos del Jurado
<p>1. Datos del alumno.</p> <p>Autor.</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido Materno:</p> <p>Nombre(s) :</p> <p>Teléfono:</p> <p>Universidad:</p> <p>Facultad o Escuela:</p> <p>Carrera:</p> <p>Número de Cuenta:</p>	<p>1. Datos del alumno</p> <p>Méndez Torres Martha Donají 56737960 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 401047910</p>
<p>2. Datos del tutor.</p> <p>Grado:</p> <p>Nombre(s):</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p>	<p>2. Datos del tutor</p> <p>Dr. Miguel Alcubierre Moya</p>
<p>3. Datos del sinodal 1</p> <p>Grado:</p> <p>Nombre(s):</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p>	<p>3. Datos del sinodal 1</p> <p>Dr. Darío Núñez Zúñiga</p>
<p>4. Datos del sinodal 2</p> <p>Grado:</p> <p>Nombre(s):</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p>	<p>4. Datos del sinodal 2</p> <p>Dr. William Henry Lee Alardín</p>
<p>5. Datos del sinodal 3</p> <p>Grado:</p> <p>Nombre(s):</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p>	<p>5. Datos del sinodal 3</p> <p>Dr. Marcelo Salgado Rodríguez</p>
<p>6. Datos del sinodal 4</p> <p>Grado:</p> <p>Nombre(s):</p> <p>Apellido paterno:</p> <p>Apellido materno:</p>	<p>6. Datos del sinodal 4</p> <p>Dr. Tonatiuh Matos Chassin</p>
<p>7. Datos del Trabajo Escrito</p> <p>Título:</p> <p>Número de páginas:</p> <p>Año:</p>	<p>7. Datos del trabajo escrito</p> <p>Relatividad Numérica en Simetría Plana 95 p 2007</p>

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Introducción a la Relatividad General</b>	<b>1</b>
1.1. Métrica . . . . .	1
1.1.1. Transporte Paralelo y Ecuación Geodésica . . . . .	3
1.2. Curvatura . . . . .	4
1.2.1. Tensor de Riemann . . . . .	4
1.2.2. Tensor de Ricci . . . . .	5
1.2.3. Identidades de Bianchi . . . . .	6
1.2.4. Derivada Covariante . . . . .	6
1.3. Ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	7
<b>2. Formalismo 3+1</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Curvatura extrínseca . . . . .	11
2.3. Descomposición 3+1 de las Ecuaciones de Einstein . . . . .	13
<b>3. Ecuaciones de Evolución en Simetría Plana</b>	<b>15</b>
3.1. Ecuaciones de Evolución . . . . .	15
3.1.1. Condición de foliación de Bona-Massó . . . . .	17
3.2. Cambio de variables . . . . .	18
3.3. Hiperbolicidad . . . . .	19
3.3.1. Introducción . . . . .	20
3.3.2. Análisis . . . . .	20
3.4. Generalización . . . . .	23
3.4.1. Modificando las ecuaciones de $K$ y $K_{BB}$ . . . . .	24
3.4.2. Modificando las ecuaciones de $K$ y $D_A$ . . . . .	25
<b>4. Eigencampos</b>	<b>29</b>
4.1. Introducción . . . . .	29
4.2. Sistema con la ecuación modificada de $K$ . . . . .	30
4.3. Sistema con las ecuaciones modificadas de $K_{BB}$ y $K$ . . . . .	31
4.4. Sistema con las ecuaciones modificadas de $D_A$ y $K$ . . . . .	32

<b>5. Choques</b>	<b>35</b>
5.1. Introducción . . . . .	35
5.2. Explosión Geométrica y Degeneración Lineal . . . . .	36
5.2.1. Degeneración Lineal Indirecta . . . . .	37
5.3. Mecanismo EDO; Criterio de Fuentes . . . . .	37
5.3.1. Criterio de Fuentes . . . . .	38
5.4. Relación entre mecanismos . . . . .	39
5.5. Análisis . . . . .	40
5.5.1. Degeneración Lineal Indirecta . . . . .	40
5.5.2. Criterio de Fuentes . . . . .	41
5.5.3. Sistema con la ecuación modificada de $K$ . . . . .	42
5.5.4. Sistema con las ecuaciones modificadas de $K$ y $K_{BB}$ . . . . .	42
5.5.5. Sistema con las ecuaciones modificadas de $K$ y $D_A$ . . . . .	43
5.5.6. Conclusiones . . . . .	44
<b>6. Resultados Numéricos</b>	<b>47</b>
6.1. Choques de norma . . . . .	47
6.1.1. Datos Iniciales . . . . .	48
6.1.2. $f = \text{constante}$ . . . . .	49
6.1.3. Lapso Evita Choques . . . . .	52
6.1.4. Análisis . . . . .	54
6.2. Choques de Constricciones . . . . .	57
6.2.1. Condiciones Iniciales . . . . .	58
6.2.2. Sistema con la ecuación modificada de $K_{BB}$ . . . . .	58
6.2.3. Sistema con la ecuación modificada de $D_A$ . . . . .	68
<b>7. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>A. Convergencia, Consistencia y Estabilidad</b>	<b>81</b>
<b>B. Diferencias Centradas y Crank-Nicholson Iterado</b>	<b>83</b>
<b>C. Norma</b>	<b>85</b>
<b>Referencias</b>	<b>87</b>

# Introducción

En esta tesis vamos a estudiar las ecuaciones de Einstein en un sistema que presenta simetría plana e isotropía. En este caso la simetría la consideraremos con respecto a los planos con  $x = cte$ , es decir que nuestro espacio-tiempo será simétrico con respecto a los planos que presenten  $x = cte$  y que se medirá de la misma manera en las direcciones  $y$  y  $z$ . La métrica que cumple con estas características y que vamos a utilizar es:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + A dx^2 + B (dy^2 + dz^2). \quad (0.0.1)$$

Para poder estudiar el comportamiento de las ecuaciones de Einstein en este sistema las reescribiremos como un problema de valores iniciales para lo cual usaremos el formalismo 3+1 en el cual la parte temporal se separa de la parte espacial de las ecuaciones. De esta manera las ecuaciones que utilizaremos para realizar la evolución serán las llamadas *Ecuaciones ADM*<sup>1</sup> escritas a la manera de York<sup>2</sup> [5, 13].

Las ecuaciones ADM constan de las ecuaciones de evolución de la norma tridimensional,  $\gamma_{ij}$ , y la curvatura extrínseca de la foliación utilizada,  $K_{ij}$ . La evolución de dichas variables está sujeta a las llamadas Constricciones Hamiltoniana y de momento que también provienen de las ecuaciones de Einstein sólo que en este caso las ecuaciones no involucran derivadas temporales de las variables de interés sino únicamente derivadas espaciales.

Haremos la evolución de las ecuaciones de manera numérica utilizando diferencias finitas y el método de “Cranck-Nicholson Iterado” el cuál es de segundo orden, mientras que el programa que las evoluciona está escrito en lenguaje FORTRAN 90.

Debido a que las ecuaciones ADM no presentan un sistema de ecuaciones fuertemente hiperbólico les sumaremos múltiples de las ecuaciones de constricción, Hamiltoniana y de momento, obteniendo así 3 sistemas de ecuaciones, fuertemente hiperbólicos, diferentes entre sí. Vamos a analizar estos 3 sistemas para ver bajo que condiciones se presentan los llamados *choques*, en uno de los sistemas estudiaremos los choques en la función de lapso, mientras que en los otros dos nos enfocaremos en choques en las

---

<sup>1</sup>Ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner.

<sup>2</sup>Esta diferencia se debe a que la forma en la que las utilizaremos está dada en el artículo de York [13], mientras que las originales de ADM utilizan otras variables.

De ahora en adelante las llamaremos por simplicidad “ADM”

constricciones.

Modificaremos las ecuaciones de ADM de la siguiente manera:

1. Al primer sistema se le suma la restricción Hamiltoniana a la ecuación de evolución de  $K^3$ .
2. Al segundo se le suma un múltiplo de la restricción Hamiltoniana tanto a la ecuación de evolución de  $K$  como a la de  $K_{BB}$ .
3. Al tercer sistema de ecuaciones se le suma un múltiplo de la Restricción Hamiltoniana a la ecuación de evolución de  $K$  y un múltiplo de la Restricción de momento a la de  $D_A$ .

Cabe mencionar que en el caso 2 y 3 los múltiplos de las restricciones que se suman a las ecuaciones de evolución no están fijos desde un principio, sino que se dejan como coeficientes libres a determinar.

Vamos a considerar *choques* en las soluciones, en este caso nos enfocaremos en los choques de restricciones y veremos unos choques de norma sólo para confirmar que el código está funcionando correctamente.

Para estudiar los choques utilizaremos dos métodos: el de *Degeneración lineal indirecta* en el que se encuentran condiciones para evitar que las derivadas de las variables de evolución se vuelvan infinitas, y el *Criterio de Fuentes* en el que las condiciones son para evitar que la variable misma de evolución se vuelva infinita. Aplicaremos ambos criterios a los 3 distintos sistemas de ecuaciones de evolución mencionados previamente.

Para el sistema 1 estudiaremos los choques de norma comparando distintas elecciones de lapso, encontrando que la elección de lapso dada por:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (0.0.2)$$

nos lleva a que no se presenten dichos choques de norma, a esta elección de lapso se le conoce como *evita-choques*.

En los sistemas 2 y 3 estudiaremos los choques de restricciones, en estos dos sistemas la conclusión a la que llegamos al utilizar los criterios arriba mencionados es que se deben de cumplir las siguientes relaciones:

$$h_K = 1/2, \quad (0.0.3)$$

$$h_{K_{BB}} = m_{D_A} = 0, \quad (0.0.4)$$

i.e. que se debe modificar la ecuación de evolución de  $K$  por el factor  $-\frac{\alpha B}{4} h_{K_{BB}} C_H$  mientras que las ecuaciones de evolución de  $K_{BB}$  y de  $D_A$  no deben de modificarse, al

---

<sup>3</sup>la traza de la curvatura extrínseca

menos no modificarse de la manera que lo hicimos en este trabajo.

Por otro lado hay que recalcar que aun cuando no se presentan choques de constricciones, las constricciones no son estrictamente cero, como deberían de ser, si no que las constricciones son un mínimo con respecto a aquellas evoluciones en las que no se respeta los parámetros resultados de los métodos para evitar choques.

# Capítulo 1

## Introducción a la Relatividad General

Para poder enunciar las ecuaciones de campo de Einstein y las ecuaciones con las cuales trabajaremos, primero vamos a dar los conceptos básicos necesarios. Debido a que en dichas ecuaciones se utilizan cantidades con varios índices por simplicidad tomaremos la convención en la cuál los índices griegos ( $\alpha, \beta \dots$ ) toman los valores  $\{0, 1, 2, 3\}$  y los índices latinos ( $i, j \dots$ ) toman los valores  $\{1, 2, 3\}$ , en dónde la componente 0 siempre se toma cómo la componente temporal y las componentes  $\{1, 2, 3\}$  como las espaciales.

### 1.1. Métrica

Empecemos por considerar un espacio-tiempo de 4 dimensiones, i.e. 3 dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal, y sean  $x^\alpha$  las coordenadas de un evento en este espacio-tiempo. Si tomamos dos eventos infinitesimalmente cercanos cuyas coordenadas sean  $x^\alpha$  y  $x^\alpha + dx^\alpha$ , podemos definir una *distancia invariante*  $ds^2$  cómo:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1.1)$$

en dónde  $g_{\alpha\beta}$  es conocido como el *tensor métrico* o la *métrica* y en la segunda igualdad tomamos la *convención de suma de Einstein* en la cuál índices que se repiten implican una suma. La cantidad  $ds^2$  se llama *intervalo* y al ser una cantidad escalar no depende del sistema de coordenadas utilizado para describir a nuestro espacio-tiempo de manera que su valor es igual en cualquier sistema de referencia.

En cada punto del espacio  $g_{\alpha\beta}$  es una matriz simétrica de 4 x 4 elementos, con eigenvalores con signos  $(-, +, +, +)^1$ , i.e. un eigenvalor negativo que está asociado al tiempo y 3 eigenvalores positivos asociados al espacio. En relatividad especial el tensor métrico

---

<sup>1</sup>Esta elección de signos es por convención, lo que importa es que la métrica es *Lorentziana* es decir que su signatura es negativa, otra opción es poner la métrica con signos  $(+,-,-,-)$

es la llamada *métrica de Minkowski* dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1.2)$$

la cual corresponde a un espacio plano en coordenadas cartesianas. Por otro lado en relatividad general  $g_{\alpha\beta}$  puede depender, y en general lo hace, de las variables coordenadas, de manera que cambia punto a punto.

Debido a la presencia de un eigenvalor negativo en  $g_{\alpha\beta}$  el intervalo  $ds^2$  no es una cantidad positiva definida. Debido a esto a partir de la métrica se pueden distinguir 3 formas distintas de relacionar a los eventos, dadas por:

$$ds^2 > 0 \quad \text{intervalo espacialoide,} \quad (1.1.3)$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{intervalo temporaloide,} \quad (1.1.4)$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{intervalo nulo.} \quad (1.1.5)$$

Un intervalo espacialoide corresponde a eventos separados de manera tal que una señal tendría que moverse más rápido que la luz para llegar de un evento a otro. Un intervalo temporaloide corresponde a eventos en donde una señal tiene que moverse más lento que la luz para llegar de uno a otro y un intervalo nulo corresponde a eventos en los que una señal tiene que moverse justo a la velocidad de la luz para llegar de uno a otro.

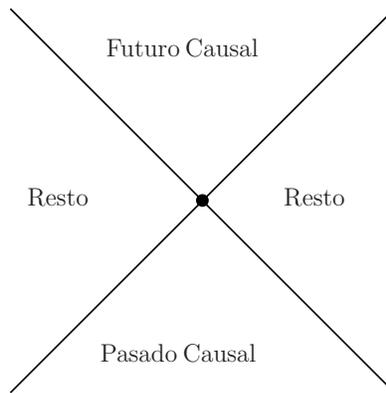


Figura 1.1: Cono de Luz.

De esta manera los intervalos espacialoides corresponden a eventos que están separados principalmente en el espacio y los temporaloides a eventos que están separados en el tiempo, mientras que los intervalos nulos marcan la frontera entre separación espacial y separación temporal.

### 1.1.1. Transporte Paralelo y Ecuación Geodésica

#### Transporte Paralelo

Cuando estamos en un espacio plano, un vector al transportarse de manera paralela a sí mismo no cambia, mientras que en un espacio curvo el vector sí lo hace. El ejemplo más sencillo es el de una esfera, en la figura 1.2 se puede ver claramente que al transportarse un vector paralelamente a sí mismo en un circuito cerrado al llegar al punto de partida el vector cambió.

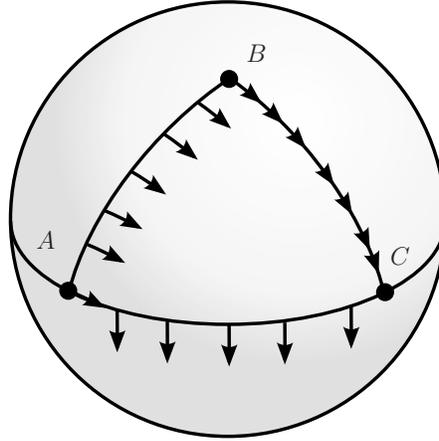


Figura 1.2: Transporte Paralelo

#### Ecuación Geodésica

En la teoría de la relatividad los objetos en caída libre se mueven siguiendo las trayectorias más rectas posibles (i.e. trayectorias extremas en cualquier métrica), a éstas trayectorias extremas se les llama *geodésicas*, así la gravedad no es vista como una fuerza externa sino como una distorsión en la curvatura del espacio-tiempo.

Para encontrar la ecuación que siguen dichas trayectorias extremas, vamos a empezar definiéndolas como aquellas trayectorias cuyos vectores tangentes se transportan paralelamente a sí mismos, es decir:

$$\frac{D}{Du} \left( \frac{dx^\alpha}{du} \right) = \lambda(u) \frac{dx^\alpha}{du}, \quad (1.1.6)$$

en dónde  $\frac{D}{Du}$  es la derivada absoluta de un tensor definida a lo largo de una curva cómo:

$$\frac{D}{Du} (T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}) = \Lambda_X T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}, \quad (1.1.7)$$

con  $x^\alpha = x^\alpha(u)$  una curva parametrizada por  $u$  y  $\frac{dx^\alpha}{du} = X^\alpha$  el vector tangente a  $x^\alpha$ .

Sin embargo siempre podemos parametrizar a la curva de manera que  $\lambda(u)$  se anule, de manera que la ecuación general para una geodésica está dada por:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (1.1.8)$$

en dónde  $\tau$  se llama *parámetro afín a las geodésicas* que es el que anula a  $\lambda$ .

En el caso de un observador  $\tau$  se asocia al llamado *tiempo propio* que corresponde al tiempo medido por un reloj ideal atado al objeto en movimiento definido como  $d\tau^2 := -ds^2$ , y  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$  son los llamados *Símbolos de Christoffel* que están dados en términos de la métrica de la siguiente manera:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right], \quad (1.1.9)$$

en dónde los coeficientes  $g^{\alpha\beta}$  se definen cómo los coeficientes de la matriz inversa de  $g_{\alpha\beta}$ , de manera que  $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$ .

Entonces dado un campo gravitacional, i.e. dada la métrica del espacio-tiempo, la ecuación de las geodésicas describe la trayectoria de los objetos, es decir, el espacio-tiempo le dice a los objetos como moverse.

## 1.2. Curvatura

Para poder distinguir un espacio plano de un espacio curvo, necesitamos otra cantidad que nos de información acerca de la curvatura del espacio, ya que a partir de los símbolos de Christoffel no es posible distinguirlos debido a que el hecho de que los símbolos de Christoffel se anulen no implica que el espacio es plano. Esto puede corroborarse sacando los Christoffel para un espacio plano con la métrica en coordenadas esféricas, en este caso los Christoffel son distintos de cero y la curva geodésica ya no tiene una expresión trivial.

### 1.2.1. Tensor de Riemann

La manera de distinguir un espacio plano de uno curvo es mediante el *tensor de curvatura de Riemann*. Este tensor mide el cambio de un vector al transportarlo paralelamente. La manera de ver si un espacio es plano o curvo es que el vector no cambia al transportarlo paralelamente en un espacio plano, mientras que si el espacio es curvo el vector sí cambia.

En términos de los Christoffel el tensor de Riemann está dado de la siguiente manera:

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}. \quad (1.2.10)$$

Este tensor es antisimétrico en su segundo par de índices:

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} = -R^\sigma{}_{\rho\nu\mu}. \quad (1.2.11)$$

Aparte tenemos la siguiente identidad:

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} + R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} + R^\sigma{}_{\nu\rho\mu} = 0, \quad (1.2.12)$$

Si ahora se baja el primer índice utilizando la métrica<sup>2</sup> se puede ver que el tensor de Riemann es simétrico bajo intercambios del primer y segundo par de índices:

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\sigma\mu}. \quad (1.2.13)$$

Tomando las ecuaciones (1.2.11) y (1.2.13) se puede ver que  $R_{\sigma\mu\nu\rho}$  también es antisimétrico en su primer par de índices:

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = -R_{\mu\sigma\nu\rho}, \quad (1.2.14)$$

si ahora consideramos las ecuaciones (1.2.11), (1.2.13) y (1.2.14), llegamos a que se cumplen las siguientes propiedades:

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} = -R_{\sigma\mu\rho\nu} = -R_{\mu\sigma\nu\rho} = R_{\nu\rho\sigma\mu}, \quad (1.2.15)$$

$$R_{\sigma\mu\nu\rho} + R_{\sigma\rho\mu\nu} + R_{\sigma\nu\rho\mu} = 0. \quad (1.2.16)$$

Si  $n$  es el número de dimensiones del espacio en el cual estamos evaluando a  $R_{\sigma\mu\nu\rho}$ , entonces estas simetrías reducen el número de componentes independientes de  $n^4$  a  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . En nuestro caso estamos en 4D, así que nos reducen de 256 componentes a únicamente 20 componentes independientes.

## 1.2.2. Tensor de Ricci

A partir del tensor de Riemann podemos definir otros dos objetos matemáticos, el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y el escalar de Ricci o “escalar de curvatura” de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.2.17)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.2.18)$$

El tensor de Ricci es de hecho la única contracción posible del tensor de Riemann, ya que cualquier otra combinación ó es idénticamente cero o se reduce a  $\pm R_{\mu\nu}$ .

Aquí es importante señalar que el hecho de que el tensor de Ricci sea cero no implica que el espacio sea plano. Esto es debido a que el tensor de Riemann tiene 20 componentes independientes, mientras que el de Ricci sólo tiene 10 (en 4D), de manera que el que sus 10 componentes sean cero no nos dice nada acerca de las otras 10 del Riemann.

---

<sup>2</sup> $R_{\sigma\mu\nu\rho} = g_{\sigma\lambda} R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}$

### 1.2.3. Identidades de Bianchi

A partir de la definición del Riemann, ecuación (1.2.10), se puede demostrar que se satisface el siguiente conjunto de identidades diferenciales:

$$\nabla_{\sigma} R_{\rho\lambda\mu\nu} + \nabla_{\nu} R_{\rho\lambda\sigma\mu} + \nabla_{\mu} R_{\rho\lambda\nu\sigma} \equiv 0, \quad (1.2.19)$$

en dónde  $\nabla_{\sigma}$  es la derivada covariante definida a continuación. A estas identidades se les llama *Identidades de Bianchi*, y son muy importantes en la relatividad general.

### 1.2.4. Derivada Covariante

Ahora voy a definir un concepto que más adelante será muy útil, y es la derivada covariante.

Cuando queremos ver el cambio de un campo vectorial o de uno tensorial tenemos que tomar en cuenta que al moverse de un punto a otro no únicamente pueden cambiar las componentes del campo sino que también puede cambiar la base con la que se miden dichas componentes.

Para ver como afecta esto, tomemos como ejemplo un vector:

$$\vec{v} = v^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad (1.2.20)$$

en dónde  $\vec{e}_{\alpha}$  son los vectores de la base en la que está escrito  $\vec{v}$  y  $v^{\alpha}$  son sus componentes. Considerando ahora el cambio del vector a lo largo de una coordenada cualquiera:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} (v^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}) \quad (1.2.21)$$

$$= \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + v^{\alpha} \frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad (1.2.22)$$

en dónde la derivada  $\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$  es un vector, de tal manera que podemos escribirla como combinación lineal de los vectores de la base de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \vec{e}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \vec{e}_{\mu}, \quad (1.2.23)$$

con  $\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$  los símbolos de Christoffel que ya definimos anteriormente. Substituyendo esto en la ecuación (1.2.22) llegamos a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \vec{e}_{\alpha} + v^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} \vec{e}_{\mu}, \quad (1.2.24)$$

como los índices que se suman son *mudos* lo cuál quiere decir que podemos renombrarlos, tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^{\beta}} = \left( \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + v^{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} \right) \vec{e}_{\alpha}. \quad (1.2.25)$$

Definimos la *Derivada Covariante* de un vector de la siguiente manera:

$$v^\alpha{}_{;\beta} \equiv \nabla_\beta v^\alpha := \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\mu \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}. \quad (1.2.26)$$

Para un vector con los índices abajo  $v_\beta$  la derivada covariante se define de la siguiente manera:

$$v_{\alpha;\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} v_\mu. \quad (1.2.27)$$

Este concepto de derivada covariante se puede extender a tensores de mayor rango, esto se hace agregando un símbolo de Christoffel por cada índice extra, de manera que para tensores de rango 2 tenemos las siguientes definiciones:

$$\nabla_\beta A_{\mu\nu} = \partial_\beta A_{\mu\nu} - A_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} - A_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}, \quad (1.2.28)$$

$$\nabla_\beta A^{\mu\nu} = \partial_\beta A^{\mu\nu} + A^{\alpha\nu} \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha} \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}, \quad (1.2.29)$$

$$\nabla_\beta A^\mu{}_\nu = \partial_\beta A^\mu{}_\nu + A^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - A^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}, \quad (1.2.30)$$

en dónde utilizamos la expresión que nos convenga dependiendo de los índices del tensor que tengamos.

### 1.3. Ecuaciones de campo de Einstein

Dentro de la teoría de gravitación de Einstein son las *ecuaciones de campo de Einstein* las que relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y de energía. Einstein llegó a ellas al generalizar, de una manera relativista y consistente, la ley de gravitación de Newton. Sin embargo, de manera casi paralela, Hilbert las derivó formalmente a partir de un Lagrangiano. De cualquiera de las dos maneras las ecuaciones están dadas de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{c^4} G T_{\mu\nu}, \quad (1.3.31)$$

en dónde  $G_{\mu\nu}$  es el *tensor de Einstein* que se define más adelante,  $T_{\mu\nu}$  es el *tensor de energía-momento* de la materia,  $c$  es la velocidad de la luz y  $G$  es la constante de gravitación de Newton. En esta tesis trabajaremos en las *unidades geométricas*, en las que se toman los siguientes valores:

$$c = 1, \quad (1.3.32)$$

$$G = 1. \quad (1.3.33)$$

El tomar estos valores de  $c$  y de  $G$  nos implica un cambio en las unidades de masa y de tiempo, ahora ambas se medirán en metros ( $m$ ) y no en las unidades en las que estamos acostumbrados.

Entonces las ecuaciones de Einstein con las que trabajaremos en adelante son las siguientes:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.3.34)$$

El tensor de Einstein está definido en términos del tensor de Ricci de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.3.35)$$

El tensor de energía-momento describe la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de momento de un campo de materia. Cada una de sus componentes se explica de la siguiente manera:

$$T^{00} = \text{densidad de energía}, \quad (1.3.36)$$

$$T^{0i} = \text{densidad de momento}, \quad (1.3.37)$$

$$T^{ij} = \text{flujo de momento } i \text{ a través de la superficie } j. \quad (1.3.38)$$

En dónde las cantidades anteriores están medidas por observadores inerciales en reposo en un sistema localmente plano, i.e. que la métrica del espacio tiempo en una vecindad lo suficientemente pequeña se ve como la métrica de Minkowski, ecuación (1.1.2).

Una de las consecuencias más importantes de las identidades de Bianchi antes mencionadas es que la divergencia covariante del tensor de Einstein es cero:

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.39)$$

Si ahora se utilizan las ecuaciones (1.3.34), tenemos la siguiente propiedad:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.40)$$

Estas 4 ecuaciones representan las leyes locales de conservación de energía y momento, y garantizan que la pérdida de energía y momento en una región esta compensada por el flujo de energía y momento fuera de dicha región. De esta manera se puede ver que las ecuaciones de Einstein implican automáticamente a las leyes de conservación de energía y momento.

Cuándo se trabaja en el vacío, entonces el tensor de energía-momento es cero y las ecuaciones (1.3.34) se reducen a:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (1.3.41)$$

o equivalentemente:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.3.42)$$

Aquí es donde toma importancia el que cuando el tensor de Ricci es cero no signifique que el espacio sea plano, ya que sabemos que el campo gravitacional de un objeto se extiende más allá del objeto, por lo que la curvatura en una región del vacío cercana a un objeto masivo no puede ser cero.

Las ecuaciones (1.3.41) describen la forma en la que el campo gravitacional se propaga en el vacío y predicen la existencia de las ondas gravitacionales, perturbaciones del campo gravitacional que se propagan a la velocidad de la luz.

# Capítulo 2

## Formalismo 3+1

### 2.1. Introducción

Lo primero que se hace para estudiar la evolución en el tiempo de un sistema físico en particular es formular dicha evolución como un *problema de valores iniciales* o *Problema de Cauchy*, en el que dadas las condiciones iniciales y de frontera adecuadas, las ecuaciones de evolución puedan predecir el futuro o el pasado del sistema.

Para poder expresar las ecuaciones de Einstein, ecuaciones (1.3.34), como un problema de Cauchy tenemos una dificultad, ésta es que las ecuaciones están escritas de manera tal que el espacio y el tiempo son simétricos y juegan papeles equivalentes, por lo que la evolución en el tiempo del campo gravitacional no es evidente. Una manera de remediar esto es separando las partes temporal y espacial de forma explícita. A la formulación resultante de esta separación se le conoce como *formalismo 3+1*.

Consideremos un espacio-tiempo con métrica  $g_{\alpha\beta}$  y supongamos que dicho espacio-tiempo puede ser *foliado*, es decir, separado en cortes tridimensionales tales que cada hoja tridimensional es espacialoide (ecuación (1.1.3)); se dice que dicho espacio-tiempo es *globalmente hiperbólico*. En un espacio-tiempo así definido no existen curvas temporales cerradas, lo cuál implica que no se permiten viajes hacia atrás en el tiempo. En la figura 2.1 podemos ver un ejemplo de foliación de este tipo.

La foliación de un espacio-tiempo globalmente hiperbólico en general no es única. Definimos el parámetro  $t$  como aquél que identifica a las hojas de la foliación, de esta manera  $t$  se puede considerar como un *tiempo universal*. Es importante notar que  $t$  puede no coincidir con el tiempo propio de ningún observador.

Consideremos una cierta foliación y dos hipersuperficies infinitesimalmente cercanas  $\Sigma_t$  y  $\Sigma_{t+dt}$ , tal como se muestra en la figura 2.2. La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre ambas hipersuperficies se puede determinar a partir de las siguientes cantidades:

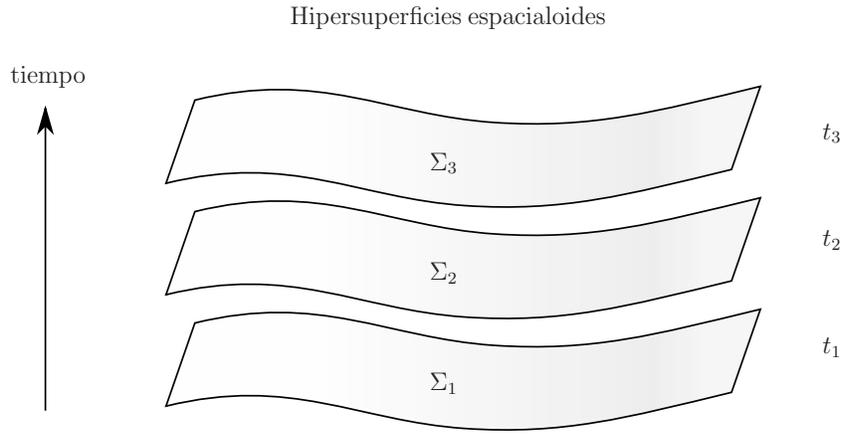


Figura 2.1: Foliación del Espacio-Tiempo.

- La métrica tridimensional  $\gamma_{ij}$ , que mide las distancias dentro de la hipersuperficie misma:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1.1)$$

- El *lapso* de tiempo propio  $\alpha$  entre ambas hipersuperficies que mide un observador que se mueve en la dirección normal a ellas (observador de Euler) :

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (2.1.2)$$

- La velocidad relativa  $\beta^i$  entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^i) dt, \quad (2.1.3)$$

en donde la última ecuación vale para observadores de Euler y al vector  $\beta^i$  se le llama *vector de corrimiento* o *shift*.

Cómo puede notarse la manera de hacer la foliación no es única y tampoco lo es la manera en la que se propaga el sistema de coordenadas espacial de una superficie a otra. Esto último significa que tanto la función de lapso  $\alpha$  como el vector de corrimiento  $\beta^i$  son funciones que se pueden especificar libremente. Estas funciones determinan el sistema de coordenadas y son conocidas como *funciones de norma*.

Si expresamos la métrica del espacio-tiempo en términos de las funciones  $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$  se tiene lo siguiente:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1.4)$$

con  $\beta_i \equiv \gamma_{ij} \beta^j$ .

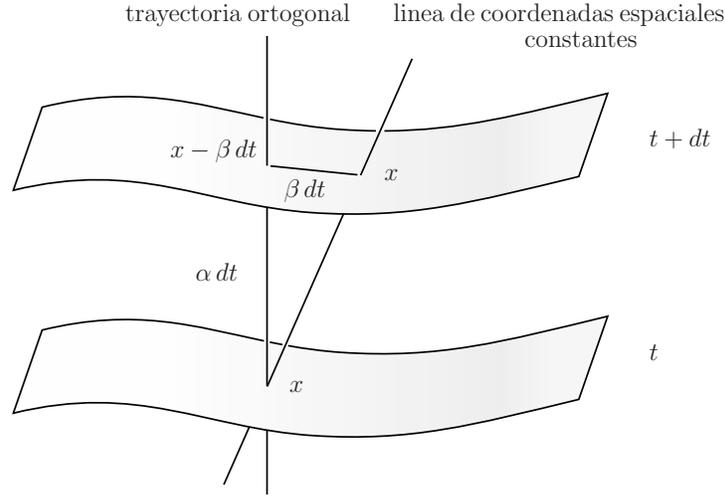


Figura 2.2: 2 Hipersuperficies infinitamente cercanas.

Explícitamente la métrica toma la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.1.5)$$

cuya inversa es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1.6)$$

Las componentes del vector normal unitario  $n^\mu$  a las hipersuperficies son:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (2.1.7)$$

Aquí hay que hacer la anotación que  $n^\mu$  es un vector unitario temporal, i.e.  $n^\mu n_\mu = -1$ .

## 2.2. Curvatura extrínseca

En las hipersuperficies que forman la foliación del espacio-tiempo hay que hablar de *curvatura intrínseca* y *curvatura extrínseca*, la primera relacionada con su geometría interna y la segunda con la forma en la que dichas hipersuperficies se encuentran inmersas en el espacio-tiempo (4-D).

La curvatura intrínseca está dada por el tensor de Ricci tridimensional definido en términos de  $\gamma_{ij}$ , la métrica en 3-D. La curvatura extrínseca está definida en términos de lo que le pasa al vector  $n^\mu$  al transportarlo paralelamente de un punto de la hipersuperficie a otro, en general el nuevo vector ya no será normal a la hipersuperficie. Una medida de que tanto cambia  $n^\mu$  bajo transporte paralelo es el *tensor de curvatura extrínseca*  $K_{\alpha\beta}$ . Para poder definirlo primero tenemos que definir el operador de

proyección  $P_\beta^\alpha$  a las hiper-superficies espaciales:

$$P_\beta^\alpha \equiv g_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta, \quad (2.2.8)$$

y se tiene la siguiente propiedad:

$$(P_\beta^\alpha v^\beta) n_\alpha = 0, \quad \forall v^\beta, \quad (2.2.9)$$

i.e. todo vector proyectado a la hiper-superficie es ortogonal a  $n^\alpha$ .

Utilizando el operador de proyección el tensor de curvatura extrínseca se define de la siguiente manera:

$$K_{\alpha\beta} \equiv -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\beta, \quad (2.2.10)$$

en dónde se proyectan todos los índices libres a la hiper-superficie espacial y  $\nabla_\alpha$  es la derivada covariante en 4D.

A partir de la ecuación (2.2.10) se puede mostrar que el tensor de curvatura extrínseca tiene las siguientes propiedades:

$$K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}, \quad (2.2.11)$$

$$n^\alpha K_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.2.12)$$

es decir, que es un tensor simétrico y que es *puramente espacial*, de esta manera lo denotaremos únicamente como  $K_{ij}$ . Si ahora sustituimos la ecuación (2.1.7) en la definición (2.2.10), se encuentra que  $K_{ij}$  tiene la siguiente forma en términos de la métrica espacial:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} [-\partial_t \gamma_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i], \quad (2.2.13)$$

con  $D_i$  la derivada covariante tridimensional, en términos de los Christoffel correspondientes a la métrica espacial. La ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i. \quad (2.2.14)$$

De esta manera se puede ver como  $K_{ij}$  está relacionada con el cambio en el tiempo de la métrica espacial.

La ecuación (2.2.14) nos da la evolución temporal de la métrica espacial, sólo hace falta una que nos de la evolución temporal de  $K_{ij}$ . Aquí es necesario puntualizar que la ecuación obtenida es puramente cinemática ya que fue derivada únicamente con conceptos geométricos, mientras que la ecuación de evolución para  $K_{ij}$  tendrá la información dinámica del sistema, para determinarla utilizaremos las ecuaciones de campo de Einstein, ecuaciones (1.3.34).

## 2.3. Descomposición 3+1 de las Ecuaciones de Einstein

Utilizando el operador de proyección definido en la ecuación (2.2.8) podemos separar las ecuaciones de Einstein (1.3.34) en 3 grupos:

- Proyección normal (1 ecuación):

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (2.3.15)$$

- Proyección a la hiper-superficie (6 ecuaciones):

$$P_\mu^\alpha P_\nu^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (2.3.16)$$

- Proyección mixta (3 ecuaciones):

$$P_\mu^\alpha [n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})] = 0. \quad (2.3.17)$$

De la ecuación (2.3.15) se obtiene la siguiente ecuación:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho, \quad (2.3.18)$$

con  ${}^{(3)}R$  el escalar de curvatura de Ricci tridimensional,  $\rho$  la densidad de energía de la materia medida por los observadores de Euler y  $K$  la traza de la curvatura extrínseca, definidas de la siguiente manera:

$$K := \gamma^{ij}K_{ij}, \quad (2.3.19)$$

$$\rho := n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (2.3.20)$$

Debido a que la ecuación (2.3.18) no tiene derivadas temporales no es una ecuación de evolución. Como contiene derivadas espaciales (en el escalar de Ricci), se le llama una *constricción* y ya que involucra a  $\rho$  se le conoce como *constricción Hamiltoniana*.

De la ecuación (2.3.17) se obtiene:

$$D_j[K^{ij} - \gamma^{ij}K] = 8\pi j^i, \quad (2.3.21)$$

con  $j^i$  el *flujo de momento* medido por los observadores de Euler dado de la siguiente manera:

$$j^i := -P_\beta^i (n_\alpha T^{\alpha\beta}). \quad (2.3.22)$$

La ecuación (2.3.21) tampoco tiene derivadas temporales pero sí espaciales, por lo que a estas 3 ecuaciones se les conoce como *constricciones de momento*.

A partir de las ecuaciones (2.3.16) se obtienen las 6 ecuaciones que contienen la dinámica del sistema, las cuáles son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ij} &= \beta^a D_a K_{ij} + K_{ia} D_j \beta^a + K_{ja} D_i \beta^a \\ &\quad - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} K] \\ &\quad + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]\end{aligned}\tag{2.3.23}$$

en dónde se ha introducido el llamado *tensor de esfuerzos*  $S_{ij}$ , que se define de la siguiente manera:

$$S_{ij} := P_i^n P_j^m T_{nm},\tag{2.3.24}$$

y su traza  $S$  definida como:

$$S := \gamma^{ij} S_{ij}.\tag{2.3.25}$$

En la ecuación (2.3.23), los términos que tienen  $\beta^i$  son derivadas de Lie, las cuáles están dadas por:

$$\mathcal{L}_\beta K_{ij} = \beta^l \partial_l K_{ij} + K_{lj} \partial_i \beta^l + K_{il} \partial_j \beta^l.\tag{2.3.26}$$

Las ecuaciones (2.2.14) y (2.3.23) forman el siguiente sistema cerrado de ecuaciones de evolución:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i,\tag{2.3.27}$$

$$\begin{aligned}\partial_t K_{ij} &= \beta^a D_a K_{ij} + K_{ia} D_j \beta^a + K_{ja} D_i \beta^a \\ &\quad - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} K] \\ &\quad + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}].\end{aligned}\tag{2.3.28}$$

A éstas ecuaciones se les conoce simplemente cómo las ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner o simplemente ecuaciones ADM en la forma de York ([5],[13]).

Aquí es importante señalar que no hemos obtenido ecuaciones de evolución para las funciones de norma  $\{\alpha, \beta^i\}$ , ya que éstas se pueden elegir libremente. De manera que al fijar la norma, i.e. el sistema de coordenadas, se puede especificar la forma en la que evolucionaran las funciones de norma.

También es posible demostrar, como consecuencia de las identidades de Bianchi, ecuaciones (1.2.19), que si las constricciones se satisfacen al tiempo inicial entonces también lo harán después, i.e. las ecuaciones de evolución propagan las constricciones.

# Capítulo 3

## Ecuaciones de Evolución en Simetría Plana

En este capítulo presentaremos los distintos sistemas de ecuaciones de evolución que utilizaremos para hacer nuestra simulación numérica y su respectivo análisis.

También veremos sus propiedades matemáticas para asegurarnos que sean aptos para su evolución. Más adelante explicaré esto con mayor detalle.

### 3.1. Ecuaciones de Evolución

Las ecuaciones de evolución que se utilizarán son las ecuaciones ADM que se encontraron en la sección anterior y que pongo de nuevo como referencia:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^a D_a K_{ij} + K_{ia} D_j \beta^a + K_{ja} D_i \beta^a \\ & - D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} K] \\ & + 4\pi\alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}]. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Sin embargo en este análisis tomamos las ecuaciones en el vacío, es decir, sin materia. Para esto se toman las ecuaciones con las siguientes restricciones:

$$\beta^i = 0, \quad (3.1.3)$$

$$S_{ij} = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\rho = 0, \quad (3.1.5)$$

$$J_i = 0. \quad (3.1.6)$$

Al hacer esto<sup>1</sup> las ecuaciones utilizadas se reducen a:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij}, \quad (3.1.7)$$

$$\partial_t K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha [{}^{(3)}R_{ij} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} K]. \quad (3.1.8)$$

---

<sup>1</sup>El tomar el vector de corrimiento cero representa que las líneas coordenadas y las normales coinciden.

De ahora en adelante se llamará a las constricciones simplemente  $C_H$  (Hamiltoniana) y  $C_M$  (momento), y se tomarán como las siguientes:

$$C_H := {}^{(3)}R - K_{ab}K^{ab} + K^2 = 0, \quad (3.1.9)$$

$$C_M := D_a K_i^a - \partial_i K = 0. \quad (3.1.10)$$

En esta tesis vamos a trabajar con una métrica en simetría plana, lo que significa que nuestro espacio-tiempo es simétrico con respecto al plano  $y - z$  o  $x = cte$ , también vamos a considerar isotropía en las superficies con  $x = cte$ , i.e. el espacio se medirá igual en  $y$  y en  $z$ . La métrica completa y el intervalo  $dl^2$  están dados por:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + A dx^2 + B (dy^2 + dz^2), \quad (3.1.11)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (3.1.12)$$

en dónde  $A$  y  $B$  son sólo funciones de  $x$ .

Después de hacer los cálculos con esta métrica, se tienen las siguientes 4 ecuaciones de evolución:

$$\partial_t A = -2\alpha K_{AA}, \quad (3.1.13)$$

$$\partial_t B = -2\alpha K_{BB}, \quad (3.1.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{AA} = & -\partial_x^2 \alpha + \frac{1}{2A} \partial_x \alpha \partial_x A + \alpha \left( -\frac{1}{B} \partial_x^2 B + \frac{1}{2AB} \partial_x A \partial_x B \right. \\ & \left. + \frac{1}{2B^2} (\partial_x B)^2 + \frac{2}{B} K_{AA} K_{BB} - \frac{1}{A} K_{AA}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{BB} = & -\frac{1}{2A} \partial_x \alpha \partial_x B + \alpha \left( -\frac{1}{2A} \partial_x^2 B + \frac{1}{4A^2} \partial_x A \partial_x B \right. \\ & \left. + \frac{1}{A} K_{AA} K_{BB} \right). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

En dónde hemos hecho las siguientes definiciones:

$$K_{AA} \equiv K_{xx}, \quad (3.1.17)$$

$$K_{BB} \equiv K_{yy} = K_{zz}. \quad (3.1.18)$$

Calculando las constricciones con la métrica de la ecuación (3.1.12) llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_H : & -\frac{2}{AB} \partial_x D_B + \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 \\ & + \frac{4}{AB} K_{AA} K_{BB} + \frac{2}{B^2} K_{BB}^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

$$C_M : -\frac{2}{B} \partial_x K_{BB} + \frac{1}{B} D_B \left( \frac{K_{BB}}{B} + \frac{K_{AA}}{A} \right) = 0. \quad (3.1.20)$$

### 3.1.1. Condición de foliación de Bona-Massó

Lo unico que nos falta elegir para poder empezar a calcular las ecuaciones de evolución es la condición de foliación. En este caso la elección será la condición de foliación de Bona-Massó, [6], la cual está dada por la siguiente ecuación:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (3.1.21)$$

donde  $f$  es una función arbitraria de  $\alpha$  tal que:

$$f(\alpha) > 0, \quad (3.1.22)$$

y la traza de  $K_{ij}$ ,  $K$  se define cómo:

$$K \equiv tr K = \gamma^{ij} K_{ij} = \frac{K_{AA}}{A} + 2 \frac{K_{BB}}{B}. \quad (3.1.23)$$

La ecuación (3.1.21) surgió al hacer una reformulación hiperbólica de las ecuaciones de Einstein, [6], y es muy importante y práctica ya que para diversos valores de  $f$  se “recuperan” otras condiciones de foliación que han sido utilizadas para la evolución numérica de las ecuaciones de Einstein, por ejemplo al tomar  $f = 1$  se recupera la *Foliación Armónica* en la cual se definen las coordenadas armónicas las cuales están dadas por  $\square x^\alpha = 0^2$ . Mientras que al poner  $f = \frac{2}{\alpha}$  se llega a la llamada *Foliación 1+log* la cual a probado ser bastante robusta en la práctica.

Un punto importante que debe de ser tomado en cuenta en el momento de escoger la condición de foliación es que *evite singularidades* lo cuál quiere decir que no se permite que las hipersuperficies lleguen arbitrariamente cerca a la singularidad física, cómo sería el horizonte de eventos de un agujero negro. La condición de foliación Bona-Massó, ecuación (3.1.21), tiene como consecuencia el llamado *Colapso del lapso*, i.e. que el lapso se va hacia cero, lo que significa que el tiempo avanza en la región exterior al horizonte del hoyo negro (singularidad) pero se “congela” dentro del horizonte. Esto permite cubrir una gran parte del espacio-tiempo exterior sin alcanzar la singularidad física y que por ende el código numérico falle. Con esto se puede ver que la ecuación (3.1.21) tiene la particularidad de evitar singularidades.

Al derivar la ecuación (3.1.21) una segunda vez con respecto al tiempo y utilizando la ecuación de evolución para  $K_{ij}$  (2.3.23), encontramos que el lapso obedece una ecuación de onda. Esto nos indica que la condición (3.1.21) es una condición de foliación hiperbólica ya que el lapso evoluciona siguiendo una ecuación de tipo hiperbólico.

---

<sup>2</sup> $\square x^\alpha = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu x^\alpha$

## 3.2. Cambio de variables

Las ecuaciones (3.1.13) - (3.1.16) son ecuaciones de segundo orden y queremos un sistema de primer orden, por lo que definimos las siguientes variables:

$$D_\alpha = \partial_x \ln \alpha, \quad (3.2.24)$$

$$D_A = \partial_x A, \quad (3.2.25)$$

$$D_B = \partial_x B. \quad (3.2.26)$$

La ecuación (3.2.24) implica que:

$$\partial_x \alpha = \alpha D_\alpha. \quad (3.2.27)$$

Haciendo los cambios de variables necesarios se encuentra que las ecuaciones a primer orden están dadas por:

$$\partial_t D_\alpha = \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \quad (3.2.28)$$

$$\partial_t D_A = -2 \partial_x (\alpha K_{AA}), \quad (3.2.29)$$

$$\partial_t D_B = -2 \partial_x (\alpha K_{BB}), \quad (3.2.30)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{AA} = & -\alpha D_\alpha^2 - \alpha \partial_x D_\alpha + \frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_A + \alpha \left( -\frac{1}{B} \partial_x D_B \right. \\ & \left. + \frac{1}{2AB} D_A D_B + \frac{1}{2B^2} D_B^2 + \frac{1}{A} K_{AA}^2 + \frac{2}{B} K_{AA} K_{BB} \right), \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{BB} = & -\frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B + \alpha \left( -\frac{1}{2A} \partial_x D_B + \frac{1}{4A^2} D_A D_B \right. \\ & \left. + \frac{1}{A} K_{AA} K_{BB} \right). \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Las ecuaciones de evolución para  $D_A$  y  $D_B$  (3.2.29) y (3.2.30), se obtuvieron de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_x (\partial_t A) &= \partial_x (-2\alpha K_{AA}), \\ \Rightarrow \partial_t (\partial_x A) &= \partial_x (-2\alpha K_{AA}). \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Recordando la ecuación (3.2.25), finalmente queda que la ecuación de evolución para  $D_A$  se calcula de la siguiente manera:

$$\partial_t D_A = \partial_x (-2\alpha K_{AA}) = -2 \partial_x (\alpha K_{AA}),$$

la cual es la ecuación (3.2.29). El procedimiento es totalmente análogo para  $D_B$ . Por otro lado la ecuación de evolución de  $D_\alpha$  se obtuvo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_x (\partial_t \alpha) &= \partial_x (-\alpha^2 f(\alpha) K) \\ \Rightarrow \partial_t (\partial_x \alpha) &= \partial_x (-\alpha^2 f(\alpha) K), \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

y substituyendo la ecuación (3.2.24) en la ecuación anterior, llegamos a:

$$\partial_t(\alpha D_\alpha) = \partial_x(-\alpha^2 f(\alpha)K),$$

de donde se sigue que la ecuación de evolución para  $D_\alpha$  es:

$$\partial_t D_\alpha = \frac{1}{\alpha} (\partial_x(-\alpha^2 f(\alpha)K) - D_\alpha \partial_t \alpha). \quad (3.2.35)$$

Finalmente las variables en las que trabajaremos no son  $(D_\alpha, D_A, D_B, K_{AA}, K_{BB})$  sino que cambiaremos  $K_{AA}$  por  $K$ , la cual está relacionada con  $K_{AA}$  y  $K_{BB}$  de la siguiente manera:

$$K = \frac{1}{A}K_{AA} + \frac{2}{B}K_{BB}. \quad (3.2.36)$$

De aquí obtenemos la siguiente expresión para  $K_{AA}$  en términos de  $K$  y  $K_{BB}$ :

$$K_{AA} = A \left( K - \frac{2}{B}K_{BB} \right). \quad (3.2.37)$$

Derivando ésta ecuación con respecto al tiempo y utilizando las ecuaciones de evolución conocidas para  $K_{AA}$  y  $K_{BB}$  se llega a la siguiente ecuación de evolución para  $K$ :

$$\begin{aligned} \partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha - 2\frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B \\ &+ \alpha \left[ -\frac{1}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \right. \\ &+ \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 \\ &\left. + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} + 4 \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

De esta manera el sistema de ecuaciones con el que se trabajará es el formado por las ecuaciones (3.2.28)-(3.2.30), (3.2.32) y (3.2.38).

### 3.3. Hiperbolicidad

En esta sección nos preocuparemos de la hiperbolicidad de los sistemas de ecuaciones de evolución que vamos a utilizar para nuestras simulaciones numéricas.

Cuando decimos que tenemos un sistema de ecuaciones hiperbólico nos hace pensar en un sistema formado por ecuaciones de onda o por sus generalizaciones. Cómo los sistemas así compuestos son matemáticamente bien puestos entonces podemos hacer el símil a que nuestros sistemas de ecuaciones también lo serán. En este caso decir que un problema está matemáticamente bien puesto implica que el sistema depende de los datos iniciales de una manera continua, es decir que para cambios pequeños en

los datos iniciales se corresponde un cambio pequeño en la solución. A esto le vamos a llamar estabilidad de la solución numérica.

Otra propiedad que tienen estos sistemas de ecuaciones de onda es que tienen una velocidad finita de propagación lo cual implica que tienen un dominio de dependencia pasado finito, i.e. que lo que sucede en el presente tiene causalidad con lo que sucedió en el pasado.

Cabe destacar que el que hiperbolicidad implique un problema bien puesto no es puramente por parecido entre ecuaciones, sino que se puede demostrar que hiperbolicidad fuerte, definida en la siguiente sección, implica que el sistema está bien puesto.

### 3.3.1. Introducción

Consideremos un sistema de ecuaciones de evolución de la siguiente forma:

$$\partial_t u_i + \partial_x F_i = q_i, \quad i \in \{1, \dots, N_u\}, \quad (3.3.39)$$

con  $F_i$  y  $q_i$  funciones arbitrarias de las  $u$ 's pero no de sus derivadas. Reescribimos el sistema de la siguiente manera:

$$\partial_t u_i + \sum_j M_{ij} \partial_x u_j = q_i, \quad (3.3.40)$$

en donde  $\mathbf{M}$  es la matriz jacobiana dada por:

$$M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \quad (3.3.41)$$

Sean  $\lambda_i$  los eigenvalores de  $\mathbf{M}$ . El sistema (3.3.40) se clasifica de la siguiente manera:

- “Hiperbólico” si todas las  $\lambda_i$  son funciones reales.
- “Fuertemente hiperbólico” si la matriz  $\mathbf{M}$  tiene un conjunto completo de eigenvectores.
- “Débilmente hiperbólico” si la matriz  $\mathbf{M}$  tiene todos sus eigenvalores reales pero no existe un conjunto completo de eigenvectores.
- “Simétricamente hiperbólico” si la matriz  $\mathbf{M}$  cumple con  $M_{ij} = M_{ji}$ .

### 3.3.2. Análisis

Para ver si el sistema formado por las ecuaciones (3.2.28)-(3.2.30), (3.2.32) y (3.2.38) es hiperbólico se escribe en la siguiente manera:

$$\partial_t \vec{v} + \mathbf{M} \partial_x \vec{v} = \vec{q}_v. \quad (3.3.42)$$

En donde  $\vec{v} = (D_\alpha, D_A, D_B, K_{BB}, K)$ . Acomodando esto se tiene que  $\mathbf{M}$  es:

$$\mathbf{M} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4A}{B} & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & \frac{2}{AB} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.43)$$

Al analizar esta matriz se encuentra que sus eigenvalores son los siguientes:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{A^{1/2}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{A^{1/2}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \alpha \left(\frac{f}{A}\right)^{1/2}, \quad \lambda_5 = -\alpha \left(\frac{f}{A}\right)^{1/2}, \quad (3.3.44)$$

con sus respectivos eigenvectores:

$$v_1 = \left(1, \frac{A(f+1)}{f}, -\frac{B(f-1)}{2f}, \frac{B(f-1)}{4fA^{1/2}}, -\frac{1}{fA^{1/2}}\right), \quad (3.3.45)$$

$$v_2 = \left(1, \frac{A(f+1)}{f}, -\frac{B(f-1)}{2f}, -\frac{B(f-1)}{4fA^{1/2}}, \frac{1}{fA^{1/2}}\right), \quad (3.3.46)$$

$$v_3 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad (3.3.47)$$

$$v_4 = \left(1, \frac{2A}{f}, 0, 0, -\frac{1}{(Af)^{1/2}}\right), \quad (3.3.48)$$

$$v_5 = \left(1, \frac{2A}{f}, 0, 0, \frac{1}{(Af)^{1/2}}\right), \quad (3.3.49)$$

es decir, que el sistema es fuertemente hiperbólico a primera vista. Sin embargo para el caso particular  $f = 1^3$  se tiene que:

$$v_1 = \left(1, 2A, 0, 0, -\frac{1}{A^{1/2}}\right) = v_4 \quad (3.3.50)$$

$$v_2 = \left(1, 2A, 0, 0, \frac{1}{A^{1/2}}\right) = v_5 \quad (3.3.51)$$

por lo que no se tiene un conjunto completo de eigenvectores y por lo tanto el sistema no es fuertemente hiperbólico para  $f = 1$ .

Para hacer el sistema hiperbólico para toda  $f$ , se suma  $C_H$  a la ecuación de evolución de  $K$ , ecuación (3.2.38), y se suma con un factor de  $-\alpha$ , i.e.

$$\begin{aligned} \partial_t K \rightarrow \partial_t K - \alpha C_H &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + \alpha \left[ \frac{1}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2 \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3.52)$$

---

<sup>3</sup>ésta elección corresponde a un  $t$  armónico, i.e.  $\square t = 0$  por eso se le conoce como lapso armónico

Es importante recalcar que debido a que estamos en vacío la  $C_H$  es cero, (ecuación (3.1.19)), en realidad estamos sumando un cero a la ecuación (3.2.38). Esto es válido siempre y cuando la solución corresponda a un caso físico, que son los casos de nuestro interés por lo que siempre podemos hacer esta operación sin que afecte las soluciones que nos ocupan en esta tesis. El mismo razonamiento se aplicará cuándo se utilice  $C_M$  para modificar las ecuaciones de evolución.

A la ecuación (3.3.52) la llamaremos la ecuación de evolución para  $K$  y es la que usaremos de ahora en adelante.

Considerando esta última ecuación para  $\partial_t K$  en lugar de la ecuación (3.2.38) y acomodando el sistema en la forma de la ecuación (3.3.42), se llega al siguiente sistema de ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned}
\partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\
\partial_t D_A &= -2 \partial_x (\alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)), \\
\partial_t D_B &= -2 \partial_x (\alpha K_{BB}), \\
\partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B, \\
&\quad + \alpha \left( -\frac{1}{2A} \partial_x D_B + \frac{1}{4A^2} D_A D_B + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right), \\
\partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + \alpha \left[ \frac{1}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2 \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 \right], \tag{3.3.53}
\end{aligned}$$

en este caso la matriz  $\mathbf{M}$  es la siguiente:

$$\mathbf{M} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4A}{B} & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.54}$$

Al hacer el análisis de hiperbolicidad de la matriz  $\mathbf{M}$  se encuentra que sí se tiene un sistema completo de eigenvectores, y por lo tanto es hiperbólica para toda  $f$ .

En este caso sus eigenvalores son los siguientes:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, \quad \lambda_5 = -\alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, \tag{3.3.55}$$

con sus correspondientes eigenvectores:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left( 0, -\frac{2A}{B}, 1, \frac{1}{2\sqrt{A}}, 0 \right), \\
v_2 &= \left( 0, -\frac{2A}{B}, 1, -\frac{1}{2\sqrt{A}}, 0 \right), \\
v_3 &= (0, 1, 0, 0, 0), \\
v_4 &= \left( \frac{f}{2A}, 1, 0, 0, \frac{\sqrt{f}}{2A^{3/2}} \right), \\
v_5 &= \left( \frac{f}{2A}, 1, 0, 0, -\frac{\sqrt{f}}{2A^{3/2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.56}$$

De estos eigenvectores podemos notar que la elección  $f = 1$  no rompe con la hiperbolicidad del sistema, entonces este es el sistema que vamos a utilizar en nuestra simulación numérica.

### 3.4. Generalización

En la sección pasada se modificó la ecuación de evolución de la  $K$  sumando  $-\alpha C_H$ , en ésta sección modificaremos no sólo la ecuación para la  $K$ , sino también la de  $K_{BB}$  y la de  $D_A$ .

Esto lo haremos para investigar si de esta manera podemos obtener sistemas que se comporten de una manera más robusta en la evolución, ya que en el caso de las ecuaciones de Einstein y de nuestra formulación se ha encontrado que diversos sistemas de ecuaciones de evolución que son fuertemente hiperbólicos, y por lo tanto matemáticamente bien puestos, se comportan de manera diferente en las simulaciones numéricas, es decir que en la práctica algunos sistemas son mejor comportados que otros, sin que se sepa muy bien porque.

En la primera parte de ésta sección se modificará la ecuación para  $K$  de una manera más general, al mismo tiempo que se modifica la ecuación de evolución para  $K_{BB}$  también sumándole un múltiplo de  $C_H$ , mientras que en la segunda se modificará la ecuación de evolución para  $D_A$  sumándole un múltiplo de  $C_M$ .

El hecho de que se haga por partes la generalización y tengamos 3 sistemas de ecuaciones de evolución en lugar de uno solo es por simplicidad de análisis y también nos permitirá encontrar si algún sistema es más robusto<sup>4</sup> en la simulación numérica.

Al generalizar dejaremos indicadas las constantes  $h_K$ ,  $h_{K_{BB}}$  y  $m_{D_A}$  como parámetros libres, lo cual nos ayudará más adelante al hacer el análisis de choques.

---

<sup>4</sup>Por robusto nos referimos a que se comporta mejor en la simulación.

### 3.4.1. Modificando las ecuaciones de K y $K_{BB}$

En este caso se sumó  $C_H$  a ambas ecuaciones de evolución, de manera que las potencias de  $\alpha$  sean las correctas y se tengan 2 parámetros libres,  $h_K$  y  $h_{K_{BB}}$ , lo cual se realizó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{BB} - \frac{\alpha B}{4} h_{K_{BB}} C_H &= \frac{\alpha}{2A} \partial_x D_B (h_{K_{BB}} - 1) - \frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B - \frac{\alpha}{8AB} h_{K_{BB}} D_B^2 \\ &+ \alpha \left( \frac{1}{4A^2} D_A D_B + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right) (1 - h_{K_{BB}}) \\ &- \frac{\alpha B}{2} h_{K_{BB}} \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.4.57)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K - \alpha h_K C_H &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2 \frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) + \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\ &+ \alpha \left( \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right) (1 - h_K) \\ &+ \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K). \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

Al tomar en cuenta estas dos últimas ecuaciones de evolución, y substituir la ecuación (3.2.37), en lugar de las ecuaciones (3.2.32) y (3.3.52) se llega al siguiente sistema de ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned} \partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\ \partial_t D_A &= -2 \partial_x \left( \alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) \right), \\ \partial_t D_B &= -2 \partial_x (\alpha K_{BB}), \\ \partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} \partial_x D_B (1 - h_{K_{BB}}) - \alpha \left( \frac{1}{2A} D_\alpha D_B + \frac{2}{B} K_{BB}^2 \left( 1 - \frac{3}{4} h_{K_{BB}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4A^2} D_A D_B (1 - h_{K_{BB}}) - K K_{BB} (1 - h_{K_{BB}}) + \frac{1}{8AB} h_{K_{BB}} D_B^2 \right) \\ \partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2 \frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) + \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\ &+ \alpha \left( \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right) (1 - h_K) \\ &+ \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K). \end{aligned} \quad (3.4.59)$$

Al acomodar éste sistema en la forma de la ecuación (3.3.42) se tiene que la matriz  $\mathbf{M}$

es la siguiente:

$$\mathbf{M} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4A}{B} & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2A}(h_{K_{BB}} - 1) & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & -\frac{2}{AB}(h_K - 1) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.60)$$

En este caso los eigenvalores de  $\mathbf{M}$  son los siguientes:

$$\lambda_1 = \alpha \sqrt{\frac{1 - h_{K_{BB}}}{A}}, \quad \lambda_2 = -\alpha \sqrt{\frac{1 - h_{K_{BB}}}{A}}, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, \quad \lambda_5 = -\alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, \quad (3.4.61)$$

y sus respectivos eigenvectores son:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left( f\sqrt{A}(h_K - 1), -A^{3/2}(-2h_K + 1 + f + h_{K_{BB}}), \frac{\sqrt{AB}(f + h_{K_{BB}} - 1)}{2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{B(f + h_{K_{BB}} - 1)\sqrt{1 - h_{K_{BB}}}}{4}, (h_K - 1)\sqrt{1 - h_{K_{BB}}} \right), \\ v_2 &= \left( -f\sqrt{A}(h_K - 1), A^{3/2}(-2h_K + 1 + f + h_{K_{BB}}), -\frac{\sqrt{AB}(f + h_{K_{BB}} - 1)}{2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{B(f + h_{K_{BB}} - 1)\sqrt{1 - h_{K_{BB}}}}{4}, (h_K - 1)\sqrt{1 - h_{K_{BB}}} \right). \\ v_3 &= (0, 1, 0, 0, 0), \\ v_4 &= \left( \sqrt{fA}, \frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, 0, 0, 1 \right), \\ v_5 &= \left( -\sqrt{fA}, -\frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, 0, 0, 1 \right). \end{aligned} \quad (3.4.62)$$

En este caso para que  $\mathbf{M}$  tenga un conjunto completo de eigenvectores (y que el sistema sea fuertemente hiperbólico), tenemos que pedir que  $h_{K_{BB}} < 1$  (para que nuestros eigenvalores sean reales), y que  $h_K$  y  $h_{K_{BB}}$  no sean cero de manera simultánea, ya que en este último caso para  $f = 1$  tenemos que  $v_1 = v_5$  y  $v_2 = v_4$  y no se tiene un conjunto completo de eigenvectores.

Es importante notar que para el caso  $h_K = 1$ ,  $h_{K_{BB}} = 0$ , los eigenvectores del sistema (3.4.62) se reducen a los del sistema (3.3.56) con lo que verificamos que el sistema de ecuaciones de evolución (3.4.59) es una generalización del sistema (3.3.53) y no un sistema nuevo.

### 3.4.2. Modificando las ecuaciones de $\mathbf{K}$ y $D_A$

Para este caso se modificará la ecuación para la  $K$  sumándole un múltiplo de  $C_H$  y la ecuación de evolución de  $D_A$  sumándole un múltiplo de  $C_M$ , de manera que las

potencias de  $\alpha$  fueran las correctas (i.e. que fueran homogéneas) y que quedaran 2 parámetros libres,  $m_{D_A}$  y  $h_K$ . Esto se realizó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\partial_t D_A + 2\alpha m_{D_A} A C_M &= -2\alpha A \partial_x K + 4\frac{\alpha A}{B} \partial_x K_{BB} (1 - m_{D_A}) \\ &+ 2\frac{\alpha A}{B^2} D_B K_{BB} (m_{D_A} - 2) - 2\frac{\alpha}{A} K_{AA} (A D_\alpha + D_A) \\ &+ 2m_{D_A} \frac{\alpha}{B} K_{AA} D_B.\end{aligned}\tag{3.4.63}$$

$$\begin{aligned}\partial_t K - \alpha h_K C_H &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2\frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) \\ &+ \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\ &+ \alpha \left[ \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right] (1 - h_K) \\ &+ \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K).\end{aligned}\tag{3.4.64}$$

De esta manera se tiene la misma ecuación de evolución para la  $K$ , mientras que para  $D_A$  después de substituir la ecuación (3.2.37) llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\partial_t D_A &= -2\alpha A \partial_x K + 4\alpha \frac{A}{B} \partial_x K_{BB} (1 - m_{D_A}) \\ &- 2\alpha \left[ \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) (A D_\alpha + D_A) + \frac{A}{B^2} D_B K_{BB} (2 + m_{D_A}) \right. \\ &\left. - m_{D_A} \frac{A}{B} D_B K \right].\end{aligned}\tag{3.4.65}$$

Sin embargo aquí hay que notar que al haber modificado la ecuación para  $\partial_t D_A$  ya no se cumple la ecuación (3.2.25):  $D_A = \partial_x A$ . Para ver porqué recordemos la ecuación (3.2.33), la cuál está dada por:

$$\partial_t (\partial_x A) = \partial_x (-2\alpha K_{AA}).$$

En este caso se está sumando  $2\alpha m_{D_A} A C_M$  a la ecuación (3.2.29), entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\partial_t D_A &= \partial_x (-2\alpha K_{AA}) + 2\alpha m_{D_A} A C_M, \\ \Rightarrow D_A &\neq \partial_x A.\end{aligned}\tag{3.4.66}$$

Lo anterior es cierto para el caso en el que  $C_M \neq 0$ , y ya que el cálculo que haremos será numérico siempre habrá una pequeña violación de las constricciones así que podemos tomarlo por verdadero.

Para evitar confusiones, necesitamos una nueva variable que sí cumpla con la ecuación (3.2.25), a ésta le llamaremos  $\hat{D}_A$ , de manera que para cálculos posteriores no utilizaremos la ecuación (3.2.25), sino la siguiente:

$$\hat{D}_A = \partial_x A.\tag{3.4.67}$$

Y ya que tenemos una variable extra, entonces el sistema de ecuaciones de evolución con el que trabajaremos tiene 6 ecuaciones, dicho sistema es:

$$\begin{aligned}
\partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\
\partial_t \hat{D}_A &= -2 \partial_x \left( \alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) \right), \\
\partial_t D_A &= -2 \alpha A \partial_x K + 4 \frac{\alpha A}{B} \partial_x K_{BB} (1 - m_{D_A}) \\
&\quad + 2 \frac{\alpha A}{B^2} D_B K_{BB} (m_{D_A} - 2) - 2 \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) (A D_\alpha + D_A) \\
&\quad + 2 \alpha m_{D_A} \frac{A}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) D_B, \\
\partial_t D_B &= -2 \partial_x (\alpha K_{BB}), \\
\partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B \\
&\quad + \alpha \left( -\frac{1}{2A} \partial_x D_B + \frac{1}{4A^2} D_A D_B + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right), \\
\partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2 \frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) \\
&\quad + \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\
&\quad + \alpha \left( \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right) (1 - h_K) \\
&\quad + \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2 \alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K). \tag{3.4.68}
\end{aligned}$$

Al acomodar este sistema en la forma (3.3.42), se tiene la siguiente matriz  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4A}{B} & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4A}{B} (1 - m_{D_A}) & 2A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2A} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 & -\frac{2}{AB} (h_K - 1) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4.69}$$

La matriz  $\mathbf{M}$  tiene los siguientes eigenvalores:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha \frac{1}{\sqrt{A}}, & \lambda_2 &= -\alpha \frac{1}{\sqrt{A}}, \\
\lambda_3 &= 0, & \lambda_4 &= 0, \\
\lambda_5 &= \alpha \sqrt{\frac{f}{A}}, & \lambda_6 &= -\alpha \sqrt{\frac{f}{A}}.
\end{aligned} \tag{3.4.70}$$

Con sus respectivos eigenvectores:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left( f\sqrt{A}(h_K - 1), A^{3/2}(2h_K - 1 - f), \right. \\
&\quad \left. A^{3/2}(-1 - f - m_{DA} + m_{DA}f + 2h_K), \frac{(f-1)B\sqrt{A}}{2}, \frac{(f-1)B}{4}, h_K - 1 \right), \\
v_2 &= \left( -f\sqrt{A}(h_K - 1), -A^{3/2}(2h_K - 1 - f), \right. \\
&\quad \left. -A^{3/2}(-1 - f - m_{DA} + m_{DA}f + 2h_K), -\frac{(f-1)B\sqrt{A}}{2}, \frac{(f-1)B}{4}, h_K - 1 \right), \\
v_3 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
v_4 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\
v_5 &= \left( \sqrt{fA}, \frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, \frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, 0, 0, 1 \right), \\
v_6 &= \left( -\sqrt{fA}, -\frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, -\frac{2A^{3/2}}{\sqrt{f}}, 0, 0, 1 \right).
\end{aligned} \tag{3.4.71}$$

Para que  $\mathbf{M}$  tenga un conjunto completo de eigenvectores hay que pedir que  $h_K$  y  $m_{DA}$  no sean simultáneamente cero porque en ese caso se tiene  $v_1 = v_5$  y  $v_2 = v_6$  y  $\mathbf{M}$  ya no tiene un conjunto completo de eigenvectores de manera que el sistema (3.4.68) ya no es hiperbólico.

En los eigenvectores anteriores hay que tener cuidado de no poner  $f = 1$  y  $h_K = 1$  de manera simultánea ya que al hacer eso tenemos que  $v_1 = v_2$  con lo que el sistema ya no es fuertemente hiperbólico.

Aquí también hay que recalcar que si se toman  $h_K = 1$  y  $m_{DA} = 0$  los eigenvectores (3.4.71) se reducen a los de la ecuación (3.3.56), lo cual nos permite checar que efectivamente el sistema (3.4.68) es la generalización del sistema de ecuaciones de evolución (3.3.53) y no otro diferente.

# Capítulo 4

## Eigencampos

### 4.1. Introducción

En esta sección vamos a encontrar los llamados “eigencampos” correspondientes para los sistemas (3.4.59) y (3.4.68). Estos los ocuparemos para hacer el análisis de choques en el siguiente capítulo.

Consideremos una matriz jacobiana definida como en la ecuación (3.3.41), y asumamos que el sistema de ecuaciones al que se refiere es fuertemente hiperbólico. En ese caso definimos los “eigencampos”  $w_i$  de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \mathbf{R}\vec{w} \quad (4.1.1)$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \mathbf{R}^{-1}\vec{v}. \quad (4.1.2)$$

en dónde  $\mathbf{R}$  es la matriz con los eigenvectores de  $\mathbf{M}$  como vectores columnas, i.e. si  $\vec{\xi}_i$  son los eigenvectores de nuestro sistema entonces  $\mathbf{R}$  está dada por:

$$\mathbf{R} = \left( \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_n \right), \quad (4.1.3)$$

con  $n$  la dimensión de  $\mathbf{M}$ . Así  $\mathbf{M}$  se puede diagonalizar de la siguiente manera:

$$\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R} = \mathbf{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \equiv \mathbf{\Lambda}. \quad (4.1.4)$$

Si ahora multiplicamos el sistema (3.3.42) por la izquierda por  $\mathbf{R}^{-1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t (\mathbf{R}^{-1}\vec{v}) + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R}) \partial_x (\mathbf{R}^{-1}\vec{v}) \\ = \mathbf{R}^{-1}\vec{q}_v + [\partial_t \mathbf{R}^{-1} + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R}) \partial_x \mathbf{R}^{-1}] \vec{v}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Entonces la ecuación (4.1.5) se ve de la siguiente manera:

$$\partial_t \vec{w} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \vec{w} = \vec{q}_w. \quad (4.1.6)$$

Esta es la ecuación de evolución para los eigencampos y en donde se hizo la siguiente definición:

$$\vec{q}_w = \mathbf{R}^{-1}\vec{q}_v + [\partial_t \mathbf{R}^{-1} + (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{R}) \partial_x \mathbf{R}^{-1}] \vec{v}. \quad (4.1.7)$$

Aquí hay que hacer la aclaración de que el término  $\partial_t \mathbf{R}^{-1}$  no contiene derivadas de nuestras variables de evolución y por lo tanto contiene únicamente términos fuente. Recordando que  $\mathbf{R}$  depende de las variables  $A$ ,  $f$  y  $\alpha$ , entonces  $\partial_t \mathbf{R}^{-1}$  tendrá como variables a  $D_A$ ,  $f'$  y  $D_\alpha$  y no a sus derivadas, de manera que son términos fuentes.

De esta manera tenemos que en nuestras ecuaciones de evolución el lado izquierdo está desacoplado y que se redujeron a simples ecuaciones de advección<sup>1</sup>, de manera que lo que hay que resolver es un sistema de ecuaciones desacoplado.

Para encontrar los eigencampos lo que haremos será derivar con respecto al tiempo la ecuación (4.1.2), tanto para el sistema (3.4.59) como para el (3.4.68), los sistemas de evolución obtenidos serán los que se utilicen en la simulación numérica.

## 4.2. Sistema con la ecuación modificada de K

Ahora vamos a calcular los eigencampos del sistema de ecuaciones (3.3.53), el cuál está dado por:

$$\begin{aligned}
\partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\
\partial_t D_A &= -2 \partial_x (\alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)), \\
\partial_t D_B &= -2 \partial_x (\alpha K_{BB}), \\
\partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B, \\
&\quad + \alpha \left[ -\frac{1}{2A} \partial_x D_B + \frac{1}{4A^2} D_A D_B + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right], \\
\partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + \alpha \left[ \frac{1}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2 \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 \right], \tag{4.2.9}
\end{aligned}$$

Ahora la matriz de eigenvectores  $\mathbf{R}$  es la siguiente:

$$\mathbf{R} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (Af)^{1/2} & -(Af)^{1/2} \\ -4 \frac{A^{(3/2)}}{B} & 4 \frac{A^{(3/2)}}{B} & 1 & 2 \frac{A^{(3/2)}}{f^{1/2}} & -2 \frac{A^{(3/2)}}{f^{1/2}} \\ 2A^{1/2} & -2A^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.10}$$

---

<sup>1</sup>Una ecuación de advección es del tipo:

$$\partial_t \xi + v \partial_x \xi = 0. \tag{4.1.8}$$

Al hacer el cálculo de la ecuación (4.1.2), nos queda que los eigencampos correspondientes al sistema de ecuaciones (3.3.53) son los siguientes:

$$w_c^\pm = K_{BB} \pm \frac{D_B}{2A^{1/2}}, \quad (4.2.11)$$

$$w_0 = -2\frac{AD_\alpha}{f} + D_A + 2\frac{AD_B}{B}, \quad (4.2.12)$$

$$w_f^\pm = K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}}. \quad (4.2.13)$$

De esta manera el vector  $\vec{w}$  que utilizaremos en la ecuación (4.1.6) es el formado por las ecuaciones (4.2.11)-(4.2.13), en dónde la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  es la siguiente:

$$\mathbf{\Lambda} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{A^{1/2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A^{1/2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{f}{A})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\frac{f}{A})^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.14)$$

### 4.3. Sistema con las ecuaciones modificadas de $K_{BB}$ y $K$

En esta sección trabajaremos con el sistema (3.4.59), el cual es:

$$\begin{aligned} \partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\ \partial_t D_A &= -2\partial_x \left( \alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) \right), \\ \partial_t D_B &= -2\partial_x (\alpha K_{BB}), \\ \partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} \partial_x D_B (1 - h_{K_{BB}}) - \alpha \left( \frac{1}{2A} D_\alpha D_B + \frac{2}{B} K_{BB}^2 \left( 1 - \frac{3}{4} h_{K_{BB}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4A^2} D_A D_B (1 - h_{K_{BB}}) - K K_{BB} (1 - h_{K_{BB}}) + \frac{1}{8AB} h_{K_{BB}} D_B^2 \right) \\ \partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2\frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) + \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\ &\quad + \alpha \left[ \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right] (1 - h_K) \\ &\quad + \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K). \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

En este caso la matriz  $\mathbf{R}$  de eigenvectores es la siguiente:

$$\mathbf{R} = \alpha \begin{pmatrix} f \left( \frac{A}{1-h_{K_{BB}}} \right)^{1/2} & f \left( \frac{A}{1-h_{K_{BB}}} \right)^{1/2} & 0 & (fA)^{1/2} & -(fA)^{1/2} \\ -\frac{A^{3/2}(-2h_K+1+f+h_{K_{BB}})}{(h_K-1)(1-h_{K_{BB}})^{1/2}} & \frac{A^{3/2}(-2h_K+1+f+h_{K_{BB}})}{(h_K-1)(1-h_{K_{BB}})^{1/2}} & 1 & \frac{2A^{3/2}}{f} & -\frac{2A^{3/2}}{f} \\ \frac{A^{1/2}B(f+h_{K_{BB}}-1)}{2(h_K-1)(1-h_{K_{BB}})^{1/2}} & -\frac{A^{1/2}B(f+h_{K_{BB}}-1)}{2(h_K-1)(1-h_{K_{BB}})^{1/2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{B(f+h_{K_{BB}}-1)}{4(h_K-1)} & \frac{B(f+h_{K_{BB}}-1)}{4(h_K-1)} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Realizando el cálculo de la ecuación (4.1.2) nos queda que los eigencampos para el sistema anterior son los siguientes:

$$w_c^\pm = 2K_{BB} \pm \left( \frac{1-h_{K_{BB}}}{A} \right)^{1/2} D_B, \quad (4.3.17)$$

$$w_0 = -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A + \frac{2AD_B}{B}, \quad (4.3.18)$$

$$w_f^\pm = (h_{K_{BB}} - 1 - f) \left( K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}} \right) - \frac{2}{B} (h_K - 1) \left( 2K_{BB} \pm \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} D_B \right). \quad (4.3.19)$$

Entonces el sistema a resolver en esta sección es la ecuación (4.1.6) en dónde el vector  $\vec{w}$  será el formado por los eigencampos (4.3.17)-(4.3.19) y la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  es la siguiente:

$$\mathbf{\Lambda} = \alpha \begin{pmatrix} \left( \frac{1-h_{K_{BB}}}{A} \right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left( \frac{1-h_{K_{BB}}}{A} \right)^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.20)$$

#### 4.4. Sistema con las ecuaciones modificadas de $D_A$ y $K$

Ahora vamos a trabajar con el sistema (3.4.68), el cuál consiste en:

$$\begin{aligned} \partial_t D_\alpha &= \alpha D_\alpha f K - \frac{1}{\alpha} \partial_x (\alpha^2 f K), \\ \partial_t \hat{D}_A &= -2 \partial_x \left( \alpha A \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) \right), \\ \partial_t D_A &= -2 \alpha A \partial_x K + 4 \alpha \frac{A}{B} \partial_x K_{BB} (1 - m_{D_A}) \end{aligned}$$

$$-2\alpha \left( \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) (AD_\alpha + D_A) + \frac{A}{B^2} D_B K_{BB} (2 + m_{D_A}) - \frac{A}{B} m_{D_A} D_B K \right). \quad (4.4.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t D_B &= -2\partial_x (\alpha K_{BB}), \\ \partial_t K_{BB} &= -\frac{\alpha}{2A} D_\alpha D_B \\ &+ \alpha \left( -\frac{1}{2A} \partial_x D_B + \frac{1}{4A^2} D_A D_B + \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right), \\ \partial_t K &= -\frac{\alpha}{A} \partial_x D_\alpha + 2\frac{\alpha}{AB} \partial_x D_B (h_K - 1) + \frac{\alpha}{A} D_\alpha \left( \frac{1}{2A} D_A - \frac{1}{B} D_B - D_\alpha \right) \\ &+ \alpha \left( \frac{1}{A^2 B} D_A D_B + \frac{1}{2AB^2} D_B^2 + \frac{4}{B} \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right) K_{BB} \right) (1 - h_K) \\ &+ \alpha \left( K - \frac{2}{B} K_{BB} \right)^2 + 2\alpha \left( \frac{K_{BB}}{B} \right)^2 (2 - h_K). \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Para este sistema la matriz  $\mathbf{R}$  es la siguiente:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{f\sqrt{A}}{-\frac{A^{3/2}(1+f-2h_K)}{h_K-1}} & \frac{-f\sqrt{A}}{\frac{A^{3/2}(1+f-2h_K)}{h_K-1}} & 0 & 0 & \sqrt{Af} & -\sqrt{Af} \\ \frac{A^{3/2}(-1-f-m_{D_A}+mf+2h_K)}{h_K-1} & -\frac{A^{3/2}(-1-f-m_{D_A}+mf+2h_K)}{h_K-1} & 0 & 1 & 2\frac{A^{3/2}}{\sqrt{f}} & -2\frac{A^{3/2}}{\sqrt{f}} \\ \frac{(f-1)B\sqrt{A}}{2(h_K-1)} & -\frac{(f-1)B\sqrt{A}}{2(h_K-1)} & 1 & 0 & 2\frac{A^{3/2}}{\sqrt{f}} & -2\frac{A^{3/2}}{\sqrt{f}} \\ \frac{(f-1)B}{4h_K-1} & \frac{(f-1)B}{4h_K-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.23)$$

Al hacer el cálculo que se muestra en la ecuación (4.1.2), queda que los eigencampos para el sistema anterior son los siguientes:

$$w_c^\pm = 2K_{BB} \pm \frac{D_B}{\sqrt{AB}}, \quad (4.4.24)$$

$$w^e = -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A - \frac{2A(m_{D_A} - 1)D_B}{B}, \quad (4.4.25)$$

$$w^0 = -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A + \frac{2AD_B}{B}, \quad (4.4.26)$$

$$\begin{aligned} w_f^\pm &= \left( K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}} \right) \\ &- \frac{2(h_K - 1)}{B(f - 1)} \left( 2K_{BB} \pm \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} D_B \right). \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

En la ecuación (4.4.27) se puede ver que para este sistema la elección de  $f = 1$  nos mete en un problema, ya que tendríamos una división entre cero, sin embargo al poner

$h_K = 1$  el problema se desvanece, por lo tanto  $f = 1$  requiere poner  $h_k = 1$ . Sin embargo ésta elección hace que los eigenvectores de  $\mathbf{M}$  ya no formen un sistema completo y que el sistema deje de ser fuertemente hiperbólico.

En este caso, el vector  $\vec{w}$  utilizado en la ecuación (4.1.6) será el formado por los eigencampos (4.4.24)-(4.4.27), mientras que la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  es la siguiente:

$$\mathbf{\Lambda} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{A^{1/2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A^{1/2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\frac{f}{A})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\frac{f}{A})^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.4.28)$$

Aquí hay que hacer notar que el vector  $\vec{w}$  tiene 6 componentes en lugar de las 5 que se usaron anteriormente, esto se debe a que en este caso se tuvo que incluir la variable auxiliar  $\hat{D}_A$ , la cuál corresponde al eigencampo  $\omega^e$ .

# Capítulo 5

## Choques

### 5.1. Introducción

En las secciones anteriores nos hemos preocupado por encontrar sistemas de ecuaciones que fueran fuertemente hiperbólicos para que las soluciones numéricas que encontráramos fueran estables en el sentido que un pequeño cambio en los datos iniciales ocasione un pequeño cambio en la solución, a la cuál llamaremos  $u$  en adelante. Sin embargo hay que recordar que las ecuaciones de evolución no evolucionan únicamente los grados de libertad físicos. En particular hay grados de libertad de norma que pueden ocasionar singularidades de coordenadas durante la evolución, por ejemplo singularidades debidas al cruzamiento de las líneas características asociadas a la propagación de la norma como se demuestra en [1].

También hay que considerar la violación de las constricciones ( $C_H$  y  $C_M$ ) que aunque para datos iniciales físicos deberían de ser nulas (en vacío) los errores numéricos hacen inevitable su presencia durante las evoluciones numéricas. Dicha violación de las constricciones pueden dar pie a que la  $u$  explote en un tiempo finito, éste efecto puede ser reducido o eliminado si se escoge cuidadosamente la manera en la que se utilizan las constricciones en el momento de construir el sistema hiperbólico que se va a estudiar. Es por esto que en los sistemas (3.4.59) y (3.4.68) hemos dejado indicadas las constantes  $h_K$ ,  $h_{K_{BB}}$  y  $m_{D_A}$  para poder analizar qué valores pueden tomar de manera que las explosiones debidas a la suma de constricciones al sistema formado por las ecuaciones (2.3.27) y (2.3.28) puedan ser minimizadas. De ahora en adelante me referiré indistintamente a las explosiones como “choques”.

En las siguientes secciones expondré dos métodos que son utilizados para analizar los términos fuente de las ecuaciones de evolución con el fin de ver si dichos términos pueden dar lugar a explosiones en las soluciones. Más adelante veremos si dichas explosiones se deben a la propagación de la norma o a la violación de las constricciones.

## 5.2. Explosión Geométrica y Degeneración Lineal

Consideremos una ecuación del siguiente tipo:

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = \partial_t u + a(u)\partial_x u = 0, \quad (5.2.1)$$

en donde  $a(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial u}$ , ( la ecuación (5.2.1) es del tipo de ecuaciones que estamos evolucionando). Sus líneas características<sup>1</sup> están dadas por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \partial_t u + \left(\frac{dx}{dt}\right) \partial_x u \\ &= \partial_t u + a(u)\partial_x u = 0, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

a lo largo de las cuales el valor de  $u$  no cambia.

Consideremos dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  de manera que  $x_1 < x_2$ , con sus correspondientes valores iniciales  $u_1 = u_0(x_1)$  y  $u_2 = u_0(x_2)$ . A menos que  $a(u)$  sea estrictamente creciente puede encontrarse una región en la cual  $a(u_1) > a(u_2)$ , de manera que las características de la izquierda vayan más rápido que las de la derecha, de manera que se cruzan.

El tiempo en el cuál las características se cruzan esta dado por la siguiente expresión:

$$t^* = - \left( \frac{x_1 - x_2}{a(u_1) - a(u_2)} \right). \quad (5.2.3)$$

En  $t^*$  tenemos que  $u$  toma los valores  $u_1$  y  $u_2$  de manera que  $u$  ya no es única, en este momento la derivada espacial se vuelve infinita y ya no se puede seguir resolviendo la ecuación diferencial, i.e. después de  $t = t^*$  ya no existe una solución suave.

Debido a que la explosión de  $u$  es causada porque las características se cruzan, a este mecanismo de choque se le conoce como “*explosión geométrica*”. Una condición suficiente para que no se crucen sería pedir que  $a(u)$  fuera lineal, i.e. pedir que:

$$a'(u) = 0, \quad (5.2.4)$$

cómo queremos  $a$  como función de  $u$  en este caso requerimos que  $a = \eta u$  con  $\eta = cte$ .

La generalización de ésta condición para sistemas hiperbólicos como los que estamos analizando, para evitar los choques relacionados a la propagación de los eigencampos  $w_i$ , es la siguiente:

$$\nabla_v \lambda_i \cdot \vec{\xi}_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial w_i} = \sum_{j=1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial w_i} = 0, \quad (5.2.5)$$

en donde  $\vec{\xi}_i$  son los eigenvectores de la matriz  $\mathbf{M}$  de la ecuación (3.3.42). La ecuación (5.2.5) quiere decir que  $w_i$  es “linealmente degenerado”, i.e. que  $\lambda_i$  debe ser constante

---

<sup>1</sup>i.e. las *líneas de flujo*, son líneas en las cuales  $u$  permanece constante, si la fuente es cero como en este caso, lo anterior implica que:  $\frac{du}{dt} = 0$ .

a lo largo de la curva integral del correspondiente  $\xi_i$ .

Sin embargo, este criterio es insuficiente para evitar explosiones para nuestro sistema, primero porque hay términos fuente que no se desvanecen y segundo porque todos los  $\lambda_i$  son linealmente degenerados de manera trivial ya que la matriz  $\mathbf{M}$  depende únicamente de las variables ( $\alpha$ ,  $A$  y  $B$ ) y no de sus derivadas.

### 5.2.1. Degeneración Lineal Indirecta

Para poder aplicar este criterio a nuestro sistema de evolución, se substituye  $\lambda$  por  $\dot{\lambda}$  en la ecuación (5.2.5), para llegar a la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \nabla_v \dot{\lambda}_i \cdot \vec{\xi}_i &= \frac{\partial \dot{\lambda}_i}{\partial w_i} \\ &= \sum_{j=1} \frac{\partial \dot{\lambda}_i}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial w_i} = 0, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

a esta condición se le conoce como “*Degeneración Lineal Indirecta*”, y da resultados no-triviales si las derivadas temporales de las  $u$ 's, que aparecen al derivar  $\lambda_i$  con respecto al tiempo, dependen del eigencampo correspondiente.

## 5.3. Mecanismo EDO; Criterio de Fuentes

Este mecanismo de explosión es cuando en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), ecuaciones diferenciales parciales o sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, una variable de evolución se vuelve infinita en un punto debido a un proceso de “auto-crecimiento”, a diferencia de la *explosión geométrica* en el cual la derivada de la variable de evolución es la que se vuelve infinita. A este mecanismo de explosión se le llama *Mecanismo-EDO*, y el nombre se debe a que suele encontrarse en EDO's simples como la siguiente:

$$\frac{du}{dt} = cu^2, \quad c = \text{cte} \neq 0 \quad (5.3.7)$$

para datos iniciales no triviales la solución de (5.3.7) es:

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 ct}, \quad u_0 \neq 0 \quad (5.3.8)$$

esta última ecuación explota al tiempo finito  $t^*$ :

$$t^* = \frac{1}{u_0 c}, \quad (5.3.9)$$

y dependiendo del signo del producto  $u_0 c$  se puede tener la explosión en el “pasado” o en el “futuro” de la evolución. Es importante recalcar que las explosiones tipo-ODE se pueden presentar incluso cuando  $c$  no es constante sino una función del tiempo, para esta demostración ver [9]. A continuación presentaré un criterio con el cual se pueden evitar choques debido al *Mecanismo-EDO*.

### 5.3.1. Criterio de Fuentes

Recordando el sistema de ecuaciones (4.1.6):

$$\partial_t \vec{w} + \mathbf{\Lambda} \partial_x \vec{w} = \vec{q}_w,$$

y la expresión de sus fuentes:

$$\vec{q}_w = \mathbf{R}^{-1} \vec{q}_v + [\partial_t \mathbf{R}^{-1} + (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{R}) \partial_x \mathbf{R}^{-1}] \vec{v},$$

si originalmente  $\vec{q}_v$  tiene términos cuadráticos en las derivadas de las  $\{\alpha, A, B, f\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{dt} &= \partial_t w_i + \lambda_i \partial_x w_i \\ &= \sum_{j,k=1}^{(n+m)} c_{ijk} w_j w_k + \mathcal{O}(w). \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

En este caso el término dominante es el  $c_{iii} w_i^2$ , de manera que los términos mixtos y de menor orden pueden despreciarse, así que se puede hacer la siguiente aproximación:

$$\frac{dw_i}{dt} \approx c_{iii} w_i^2, \quad (5.3.11)$$

sólo tomamos en cuenta el término que es proporcional al eigencampo al cuadrado porque éste evoluciona inversamente al tiempo de evolución (i.e.  $\frac{1}{t}$ ), así que al empezar la evolución el eigencampo se va a infinito, mientras que los términos que son lineales en  $w_i$  evolucionan como una exponencial en el tiempo ( $e^{\gamma t}$ ) y ya que siempre puede hacerse  $\gamma$  tal que la exponencial no explote no nos interesa este término.

El llamado *Criterio de Fuentes* para evitar choques debidos al mecanismo ODE es pedir que los coeficientes  $c_{iii}$  de la ecuación (5.3.11) desaparezcan, i.e:

$$c_{iii} = 0 \quad (5.3.12)$$

Es importante resaltar que no existen contribuciones al término  $c_{iii}$  que vengan de la segunda parte de la ecuación (4.1.5), ya que los términos cuadráticos que aparecen debido a las operaciones  $[\partial_t \mathbf{R}^{-1} + (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{R}) \partial_x \mathbf{R}^{-1}] \vec{v}$  se desvanecen<sup>2</sup>, esto indica que los  $c_{iii}$  provienen únicamente de la ecuación de evolución original y no del hecho de que estemos evolucionando los eigencampos en lugar de  $\{D_\alpha, D_A, D_B, K_{BB}, K\}$ .

También es necesario decir que los eigencampos no son únicos ya que pueden ser multiplicados por una función arbitraria de las variables de evolución:

$$\tilde{w} = \Omega_i(\vec{u}) w_i. \quad (5.3.13)$$

En el caso particular de nuestras ecuaciones éste re-escalamiento de las  $w_i$  no introduce nuevos términos a las  $c_{iii}$  (ver [9]), de manera que siempre se puede reescalar a los eigencampos para que su manejo sea más sencillo.

---

<sup>2</sup>La demostración de esto se puede ver en la referencia [9]

## 5.4. Relación entre mecanismos

Consideremos la ecuación (5.2.1) que vimos en la sección 5.2 que genera una explosión geométrica e introducimos una nueva variable  $D \equiv \partial_x u$ . Al hacer esto obtenemos el siguiente sistema:

$$\partial_t u = -a(u)D, \quad (5.4.14)$$

$$\partial_t D + a(u)\partial_x D = -a'(u)D^2, \quad (5.4.15)$$

en donde la segunda ecuación se obtiene derivando espacialmente la ecuación (5.2.1) e intercambiando el orden de  $\partial_x$  y  $\partial_t$ . Cómo lo que queremos es la solución de la ecuación (5.2.1) se consideran condiciones iniciales que conserven la constricción  $D = \partial_x u$ . Recordando que  $u$ , y por lo tanto  $a(u)$  y  $a'(u)$ , es constante a lo largo de la línea característica de (5.2.1), tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dD}{dt} = \partial_t D + a(u)\partial_x D = -a'(u)D^2, \quad (5.4.16)$$

con solución:

$$D(t) = \frac{D_0}{1 + D_0 a'(u)t} \Rightarrow t^* = -\frac{1}{D_0 a'(u)}, \quad (5.4.17)$$

en dónde  $t^*$  es el valor de tiempo para el cual se producirá el choque.

Por otro lado tomemos  $Q \equiv \partial_t u$ . Al hacer esto obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\partial_t u = Q, \quad (5.4.18)$$

$$\partial_t Q + a(u)\partial_x Q = \frac{a'(u)}{a(u)}Q^2, \quad (5.4.19)$$

en donde la ecuación (5.4.19) se obtiene derivando con respecto al tiempo la ecuación (5.2.1). De nuevo podemos integrar la ecuación:

$$\frac{dQ}{dt} = \partial_t Q + a(u)\partial_x Q = \frac{a'(u)}{a(u)}Q^2. \quad (5.4.20)$$

A lo largo de la característica tenemos la siguiente solución:

$$Q(t) = \frac{Q_0}{1 - \left(Q_0 \frac{a'(u)}{a(u)}\right)t} \Rightarrow t^* = \frac{a(u)}{Q_0 a'(u)}. \quad (5.4.21)$$

Para que los sistemas (5.4.15) y (5.4.19) no desarrollaran choques se necesitaría imponer  $a'(u) = 0$ , que es la condición (5.2.4) de la explosión geométrica, sin embargo el único eigenvalor  $a(u)$  de los sistemas es linealmente degenerado, (es independiente de  $D$  y de  $Q$ ), por lo que la explosión se debe al mecanismo ODE y no a la explosión geométrica. De este modo lo que puede ser considerado como una explosión geométrica

de una variable  $u$  puede ser reinterpretado como una explosión del tipo del mecanismo EDO de sus derivadas, por lo tanto ambos mecanismos de choques están cercanamente relacionados.

En algunos casos se ha visto que el criterio de Degeneración Lineal Indirecta y el Criterio de Fuentes dan las mismas condiciones para evitar choques, y en aquellos casos en dónde los resultados han sido diferentes el resultado del Criterio de Fuentes ha demostrado ser más importante [9]. Sin embargo, en este caso haré ambos análisis para comparar resultados cuando se cumplen ambos criterios y cuando únicamente se cumple uno de ellos.

## 5.5. Análisis

En esta sección vamos a hacer el análisis de choques para nuestros 3 sistemas de evolución.

### 5.5.1. Degeneración Lineal Indirecta

Recordemos la ecuación (5.2.6):

$$\nabla_v \dot{\lambda}_i \cdot \vec{\xi}_i = \frac{\partial \dot{\lambda}_i}{\partial \omega_i} = 0, \quad (5.5.22)$$

de ella podemos ver que en este caso vamos a analizar los eigenvalores de los sistemas de ecuaciones de evolución.

Para el primer sistema, el (3.3.53) tenemos los siguientes resultados:

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{1,2}}{\partial \omega_c^\pm} = -\lambda_{1,2} \frac{2\alpha}{B}, \quad (5.5.23)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \omega_0} = \lambda_3, \quad (5.5.24)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{4,5}}{\partial \omega_f^\pm} = \lambda_{4,5} \alpha \left( 1 - f - \frac{\alpha}{2} f' \right). \quad (5.5.25)$$

Aquí podemos darnos cuenta que para las ecuaciones (5.5.23) es imposible evitar choques ya que se necesitaría  $\alpha = 0$ , mientras que para la ecuación (5.5.24) simplemente no se producen choques ya que  $\lambda_3 = 0$ . Dejaremos el resultado de la ecuación (5.5.25) para el final de la sección.

Para el sistema en el que se sumó  $C_H$  a las ecuaciones de evolución de  $K$  y  $K_{BB}$ , el (3.4.59), los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{1,2}}{\partial \omega_c^\pm} = -\lambda_{1,2} \frac{\alpha}{h_K - 1} (h_{K_{BB}} + (1 - f)(1 - 2h_K)), \quad (5.5.26)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \omega_0} = \lambda_3, \quad (5.5.27)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{4,5}}{\partial \omega_f^\pm} = \lambda_{4,5} \alpha \left( 1 - f - \frac{\alpha}{2} f' \right). \quad (5.5.28)$$

De nuevo tenemos que para  $\lambda_3$  no hay choques, y obtenemos la misma condición en la ecuación (5.5.28) que para el sistema anterior. En este caso de la ecuación (5.5.26) si podemos encontrar una condición que nos evite choques dada por:

$$h_{K_{BB}} - f - 2h_K + 2fh_k + 1 = 0 \quad (5.5.29)$$

$$\Rightarrow h_{K_{BB}} = (f - 1)(1 - 2h_K). \quad (5.5.30)$$

Por último analicemos los eigenvalores del sistema al que se le sumó  $C_H$  a las ecuaciones de evolución de  $K$  y  $C_M$  a la de  $D_A$ , en este caso tenemos que:

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{1,2}}{\partial \omega_c^\pm} = -\lambda_{1,2} \frac{\alpha (f - 1) (2h_K - 1)}{h_K - 1}, \quad (5.5.31)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_3}{\partial \omega_0} = \lambda_3, \quad (5.5.32)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_4}{\partial \omega_e} = \lambda_4, \quad (5.5.33)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{5,6}}{\partial \omega_f^\pm} = \lambda_{5,6} \alpha \left( 1 - f - \frac{\alpha}{2} f' \right), \quad (5.5.34)$$

los resultados para los eigenvalores  $\lambda_{3,4}$  y  $\lambda_{5,6}$  son los mismos que en los casos anteriores, mientras que de las ecuaciones (5.5.30) y (5.5.31) podemos obtener la siguiente relación:

$$(f - 1) (2h_K - 1) = 0 \quad (5.5.35)$$

$$\Rightarrow f = 1 \quad \text{ó} \quad h_K = 1/2. \quad (5.5.36)$$

Con respecto a la condición de las ecuaciones (5.5.25), (5.5.28) y (5.5.34) tenemos que debe cumplirse que:

$$1 - f - \frac{\alpha}{2} f' = 0, \quad (5.5.37)$$

con solución:

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\kappa}{\alpha^2}, \quad \kappa = cte \quad (5.5.38)$$

## 5.5.2. Criterio de Fuentes

A continuación presentaré los resultados que se obtuvieron al aplicar el Criterio de Fuentes (ecuación (5.3.12)), a los sistemas hiperbólicos de las secciones 3.3.2, 3.4.1 y 3.4.2.

Lo que hice fue elaborar una hoja de cálculo en el programa *Maple 9.5* en la que se derivan con respecto al tiempo los eigencampos correspondientes al sistema hiperbólico a estudiar, y se substituyen las variables originales de evolución (i.e.  $D_\alpha$ ,  $D_A$ ,  $D_B$ ,  $K_{BB}$ ,  $K$ ) en términos de los eigencampos. De esta manera se obtienen un sistema de ecuaciones del tipo (4.1.6), i.e:

$$\partial_t \vec{w} + \Lambda \partial_x \vec{w} = \vec{q}_w.$$

### 5.5.3. Sistema con la ecuación modificada de K

Los eigencampos asociados al sistema (3.3.53) son los siguientes:

$$\begin{aligned} w_c^\pm &= K_{BB} \pm \frac{D_B}{2A^{1/2}}, \\ w_0 &= -2\frac{AD_\alpha}{f} + D_A + 2\frac{AD_B}{B}, \\ w_f^\pm &= K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Al derivarlos con respecto al tiempo y obtener sus ecuaciones de evolución, encontramos que los factores cuadráticos de sus fuentes son los siguientes:

$$\partial_t w_c \sim -\alpha \frac{2}{B} w_c^{\pm 2}, \quad (5.5.39)$$

$$\partial_t w_0 \sim 0 w_0^2, \quad (5.5.40)$$

$$\partial_t w_f \sim \alpha \left( f - 1 + \frac{\alpha}{2} f' \right) w_f^{\pm 2}. \quad (5.5.41)$$

Como queremos que estos coeficientes sean nulos, de la ecuación (5.5.41) se tiene que satisfacer la siguiente igualdad:

$$1 - f - \frac{\alpha}{2} f' = 0, \quad (5.5.42)$$

cuya solución general es la siguiente:

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\kappa}{\alpha^2}, \quad \kappa = \text{cte.} \quad (5.5.43)$$

De la ecuación (5.5.39) se tendría que tener  $\alpha = 0$ , de modo que en este caso en particular no podemos evitar que se forme un choque debido a la propagación de los eigencampos  $w_c^\pm$ . Y de la ecuación (5.5.40) tenemos que no existen choques debido a la propagación del eigencampo  $w_0$ .

### 5.5.4. Sistema con las ecuaciones modificadas de K y $K_{BB}$

El sistema que vamos a analizar es el (3.4.59) y sus respectivos eigencampos son:

$$w_c^\pm = 2K_{BB} \pm \left( \frac{1 - h_{K_{BB}}}{A} \right)^{1/2} D_B,$$

$$\begin{aligned}
w_0 &= -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A + \frac{2AD_B}{B}, \\
w_f^\pm &= (h_{K_{BB}} - 1 - f) \left( K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}} \right) \\
&\quad - \frac{2}{B} (h_K - 1) \left( 2K_{BB} \pm \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} D_B \right).
\end{aligned} \tag{5.5.44}$$

Al derivarlos con respecto al tiempo encontramos que los coeficientes cuadráticos de sus fuentes van como:

$$\partial_t w_c \sim \alpha \frac{(f + h_{K_{BB}} - 1)(3h_{K_{BB}} - 8h_K + 4)(h_{K_{BB}} - 2)}{16(h_K - 1)(h_{K_{BB}} - 1)} w_c^{\pm 2}, \tag{5.5.45}$$

$$\partial_t w_0 \sim 0 w_0^2, \tag{5.5.46}$$

$$\partial_t w_f \sim \alpha \left( f - 1 + \frac{\alpha}{2} f' \right) w_f^{\pm 2}. \tag{5.5.47}$$

De nuevo encontramos la condición (5.5.42) para la propagación de los eigencampos  $w_f^\pm$  así que tenemos que pedir que  $f(\alpha)$  sea de la forma (5.5.43).

De la ecuación (5.5.45) encontramos las siguientes posibles relaciones:

$$\begin{aligned}
h_{K_{BB}} - 1 + f &= 0, \\
3h_{K_{BB}} - 8h_K + 4 &= 0, \\
h_{K_{BB}} &= 2,
\end{aligned}$$

sin embargo lo que buscamos es una condición sobre nuestros parámetros libres  $h_K$  y  $h_{K_{BB}}$ , y debido a que en la sección 3.4.1 encontramos la restricción  $h_{K_{BB}} < 1$ , entonces la condición que tenemos para evitar choques es la siguiente:

$$h_{K_{BB}} = \left( h_K - \frac{1}{2} \right) \frac{8}{3}. \tag{5.5.48}$$

De esta manera tenemos a  $h_K$  como un “parámetro libre” a escoger y a  $h_{K_{BB}}$  como parámetro dependiente.

También hay que recalcar que de nuevo se encontró que no hay choques debido a la propagación del eigencampo  $w_0$ .

### 5.5.5. Sistema con las ecuaciones modificadas de K y $D_A$

En este caso vamos a estudiar el sistema (3.4.68). Sus eigencampos asociados son los siguientes:

$$w_c^\pm = 2K_{BB} \pm \frac{D_B}{\sqrt{AB}},$$

$$\begin{aligned}
w^e &= -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A + \frac{2A(m_{D_A} - 1)D_B}{B}, \\
w^0 &= -\frac{2AD_\alpha}{f} + D_A + \frac{2AD_B}{B}, \\
w_f^\pm &= \left( K \pm \frac{D_\alpha}{(Af)^{1/2}} \right) (f - 1) \\
&\quad - \frac{2}{B} (h_K - 1) \left( 2K_{BB} \pm \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2} D_B \right).
\end{aligned} \tag{5.5.49}$$

Al encontrar sus ecuaciones de evolución tenemos que los términos cuadráticos de sus fuentes son:

$$\partial_t w_c \sim -\alpha \frac{(f-1)(4h_K - 2 - m_{D_A})}{4(h_K - 1)} w_c^{\pm 2}, \tag{5.5.50}$$

$$\partial_t w_0 \sim 0 w_0^2, \tag{5.5.51}$$

$$\partial_t w_e \sim 0 w_e^2, \tag{5.5.52}$$

$$\partial_t w_f \sim -\alpha \left( f - 1 + \frac{\alpha}{2} f' \right) w_f^{\pm 2}. \tag{5.5.53}$$

De la ecuación (5.5.53) retomamos la condición (5.5.43), mientras que de la ecuación (5.5.50) debemos de satisfacer la siguiente igualdad para poder evitar choques debido a la propagación de los eigencampos  $w_c^\pm$ :

$$4h_K - 2 - m_{D_A} = 0, \tag{5.5.54}$$

$$\Rightarrow m_{D_A} = 4h_K - 2. \tag{5.5.55}$$

En este caso no tenemos ninguna restricción para  $m_{D_A}$ , de esta manera tenemos toda una familia de parejas de parámetros  $(m_{D_A}, h_K)$  que evitaría la presencia de choques debido a los eigencampos  $w_c^\pm$ . Por otro lado de nuevo encontramos que los eigencampos con velocidad cero,  $w_0$  y  $w_e$  (de hecho éste es el resultado esperado) no generan explosiones, ya que sus fuentes no tienen términos cuadráticos en ellos.

### 5.5.6. Conclusiones

En nuestros tres sistemas de ecuaciones de evolución, (3.3.53), (3.4.59) y (3.4.68) encontramos la condición (5.5.42) para que no se produzcan choques asociados a los eigencampos  $w_f^\pm$ :

$$1 - f - \frac{\alpha}{2} f' = 0, \tag{5.5.56}$$

con solución:

$$f(\alpha) = 1 + \frac{\kappa}{\alpha^2}, \quad \kappa = \text{cte.} \tag{5.5.57}$$

A la ecuación (5.5.57) se le conoce como elección de lapso “evita choques” debido a que

nos da toda una familia de  $f$ 's con las que se pueden evitar los choques debidos a  $w_f^\pm$ , o lo que es lo mismo nos evita los choques debidos a la propagación de la función de lapso.

Para el caso particular en el que en la ecuación (5.5.57) se toma  $\kappa = 0$ , se tiene que:

$$f = 1, \tag{5.5.58}$$

a esta elección de lapso se le conoce como “lapso armónico” y al ser parte de la familia de la ecuación (5.5.57) nos permite evitar choques para nuestros tres sistemas de ecuaciones de evolución.

Con respecto a las otras condiciones encontradas, para el sistema (3.3.53) nos es imposible evitar el choque debido a los eigencampos  $w_c^\pm$  ya que la ecuación (5.5.39) nos impone pedir  $\alpha = 0$  lo que en la práctica no podemos hacer.

Para el sistema (3.4.59) tenemos la condición (5.5.48), lo que también nos da toda una familia de parámetros  $h_{K_{BB}}$  y  $h_K$  que nos permiten evitar los choques debidos a la propagación de los eigencampos  $w_c^\pm$ , en este caso estos choques están asociados a la violación de las constricciones  $C_H$  y  $C_M$ .

Para el sistema (3.4.68) tenemos la condición (5.5.55) la cual de nuevo nos brinda una familia de parámetros, en este caso  $h_K$  y  $m_{DA}$  que evitan los choques debidos  $w_c^\pm$ , los cuales asociaremos a la violación de las constricciones.

Por último es importante señalar que las condiciones obtenidas mediante el criterio de degeneración lineal indirecta son substancialmente diferentes a las que se obtienen mediante el criterio de fuentes, por lo que las evoluciones las haré tratando de empatar ambos criterios de manera que se cumplan simultáneamente.

# Capítulo 6

## Resultados Numéricos

En esta sección presento los resultados de mis simulaciones numéricas, para esto utilicé los 3 sistemas de ecuaciones (3.3.53), (3.4.59) y (3.4.68) que encontré en la sección 3.

La forma en la que verificaré si es que hay choques es mediante la convergencia<sup>1</sup> de la variable en cuestión, para los choques de norma me fijaré en la función de lapso  $\alpha$ , mientras que para los choques de constricciones me fijaré en  $C_H$  y  $C_M$ .

Lo que haré será experimentar con los parámetros libres que encontramos en las ecuaciones (5.5.57), (5.5.48) y (5.5.55), para verificar que cuando no se cumplen dichas ecuaciones existen choques y que cuando se cumplen es posible evitarlos.

En las simulaciones ocupe 5 resoluciones diferentes,  $dx = 0, 1$ ,  $dx = 0, 05$ ,  $dx = 0, 0125$ ,  $dx = 0, 0125$  y  $dx = 0, 00625$  el programa que utilicé está escrito en lenguaje “FORTRAN 90”.

Aquí es importante especificar que lo que se evoluciona en el código no son los eigencampos  $\{w_c^\pm, w_0, w_e, w_f^\pm\}$ , sino las variables  $\{\alpha, A, B, D_\alpha, D_A, D_B, K_{BB}, K\}$ . Esto es debido a que las ecuaciones de evolución de los eigencampos son demasiado complicadas, mientras que las ecuaciones de las variables programadas no lo son tanto.

### 6.1. Choques de norma

Las evoluciones las hice hasta un tiempo final  $t = 28$  y para dos elecciones de norma distintas, la primera con lapso armónico y  $f = \text{cte}$ , la segunda con el lapso evita-choques, esto con el fin de mostrar que para elecciones de  $f = \text{cte} \neq 1$  existen choques de norma, mientras que para lapso armónico y lapso evita choques no se presentan.

Para checar la convergencia de la variable  $\alpha$  lo que hice fue calcular en mi programa

---

<sup>1</sup>Ver el Apéndice A.

la siguiente diferencia:

$$C_\alpha = D_\alpha - \partial_x \ln \alpha^2, \quad (6.1.1)$$

en donde  $D_\alpha$  es la variable de evolución que aparece en nuestros sistemas de ecuaciones, entonces lo que representa  $C_\alpha$  es la diferencia entre la variable de evolución y la derivada parcial espacial de  $\alpha$  calculada punto a punto durante la simulación numérica. Así lo que nos da  $C_\alpha$  es una medida del error numérico que tenemos paso a paso.

En las gráficas se muestra la razón de convergencia de  $C_\alpha$ , a diferentes resoluciones en donde la razón de convergencia está dada por la siguiente ecuación:

$$\text{Razón de convergencia} = \frac{|C_\alpha|_{dx_1}}{|C_\alpha|_{dx_2}}, \quad (6.1.2)$$

con  $dx$  el tamaño del paso que utilizo en el programa,  $|C_\alpha|$  la norma<sup>3</sup> de  $C_\alpha$  y  $dx_1 > dx_2$ . Debido a que estamos utilizando como método numérico el ICN<sup>4</sup> de segundo orden, esperamos que la razón de convergencia sea 4.

$$\begin{aligned} \text{Error} &\sim (\Delta x)^2, \\ \frac{E_{\Delta x}}{E_{\Delta x/2}} &= \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x/2)^2} \sim 4 \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

También se espera que a mayor resolución mejor sea la convergencia, i.e. que se acerque más al 4.

En esta sección se utilizó para los cálculos el sistema de ecuaciones (3.3.53).

### 6.1.1. Datos Iniciales

Los datos iniciales que utilizo en este caso son los siguientes:

$$\alpha_{t=0} = \alpha + \gamma_0 e^{\left(\frac{-(x-x_0)}{\sigma_0}\right)^2} \quad (6.1.4)$$

con los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0,2 \\ x_0 &= 0,0 \\ \sigma_0 &= 1,0 \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

El método de integración utilizado es el ICN con diferencias finitas centradas<sup>5</sup>.

---

<sup>2</sup>i.e.  $C_\alpha$  mide la violación de la constricción (3.2.27)

<sup>3</sup>Ver Apéndice C

<sup>4</sup>Iterative Crank Nicolson

<sup>5</sup>Ver Apéndice B

### 6.1.2. $f = \text{constante}$

En este caso la elección de función de lapso es poner  $f = \text{cte}$ , y utilizo 3 diferentes valores, uno de los cuáles es  $f = 1$  que es justamente el lapso armónico de la ecuación (5.5.58). Recordando la condición de foliación de Bona-Massó :

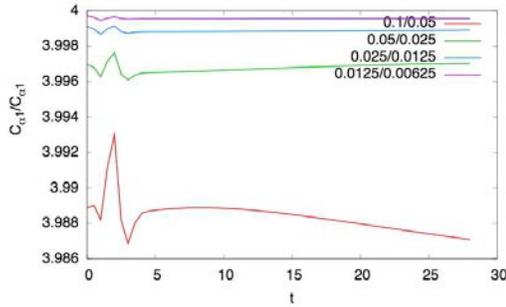
$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (6.1.6)$$

entonces la condición de foliación que estaremos usando será la siguiente:

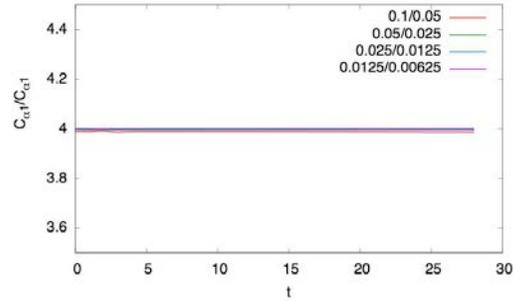
$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 \mu K, \quad \text{con } \mu = 1, 1/2 \text{ o } 2. \quad (6.1.7)$$

■  $\mu = 1$

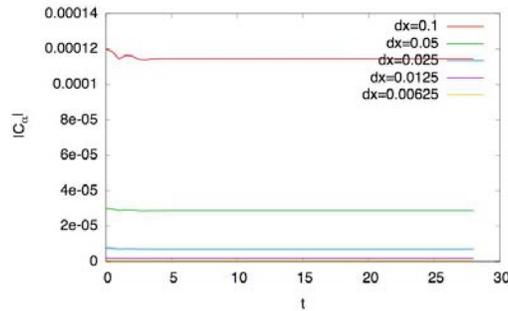
En la figura 6.1(a) se muestra la razón de convergencia de  $C_\alpha$  en un rango vertical corto, y en la figura 6.1(b) se presenta la misma gráfica pero en un rango vertical más amplio, en la figura 6.1(c) muestro la norma de  $C_\alpha$ .



(a) Razón de Convergencia de  $C_\alpha$



(b) Razón de Convergencia de  $C_\alpha$  en el intervalo 3.5-4.5



(c) Norma de  $C_\alpha$

Figura 6.1: Lapso armónico:  $f = 1$ .

En las figuras 6.1(a) y 6.1(b) podemos apreciar que la razón de convergencia es 4 y que a mayor resolución es más cercana a 4. Con esto podemos decir que no hay choque de norma porque no se está perdiendo la convergencia, mientras que en la figura 6.1(c) se ve que a mayor resolución el valor de la norma de  $C_\alpha$  se acerca

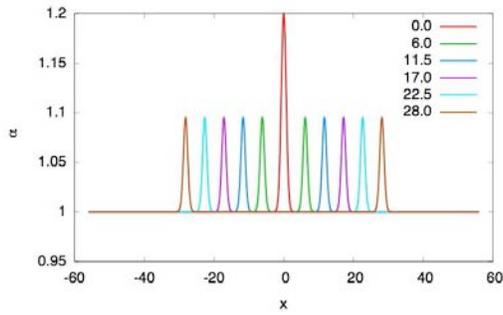


Figura 6.2: Función de lapso para  $\mu = 1$  a distintos tiempos

más al cero en un factor de 4.

Si ahora nos fijamos en la figura 6.2 podemos darnos cuenta que la evolución de la función de lapso es totalmente uniforme, es decir empieza en  $\alpha = 1,2$  e inmediatamente se estabiliza en el  $\alpha \sim 1,095$  y esto pasa para cualquier tiempo, lo cuál indica que la evolución de la función de lapso es suave y que no presenta choques.

■  $\mu = 1/2$

En este caso estamos escogiendo la siguiente condición de foliación:

$$\partial_t \alpha = -\frac{\alpha^2}{2} K. \quad (6.1.8)$$

En la figura 6.3(a) se ve claramente una pérdida de convergencia, lo que se puede apreciar es que para tiempos cercanos a  $t = 12$  la gráfica de convergencia se parece a una función tipo escalón, lo que vemos es que la razón de convergencia de  $C_\alpha$  cae por debajo de 1. Esto indica que el error a resolución alta es mayor que el error a resolución baja, lo que quiere decir que la solución numérica ha empezado a diverger.

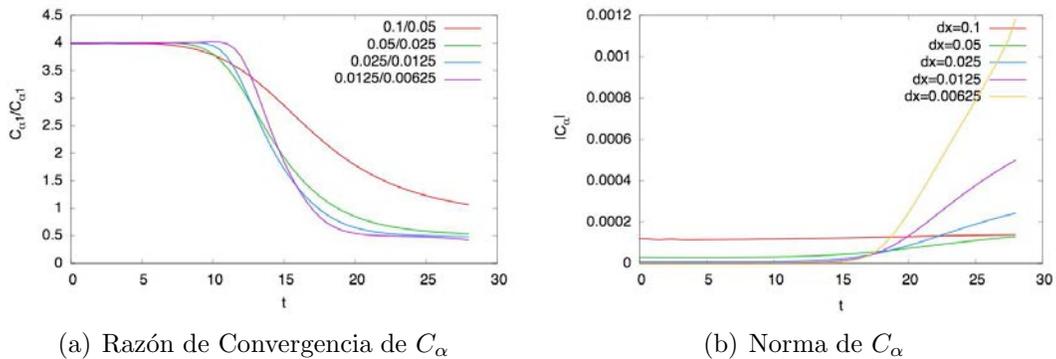


Figura 6.3: Lapso Bona-Massó con  $f = 1/2$ .

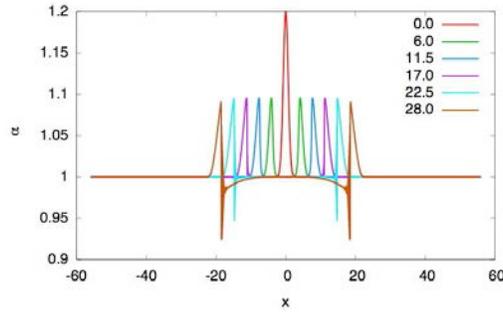


Figura 6.4: Función de lapso para  $\mu = 1/2$  a distintos tiempos

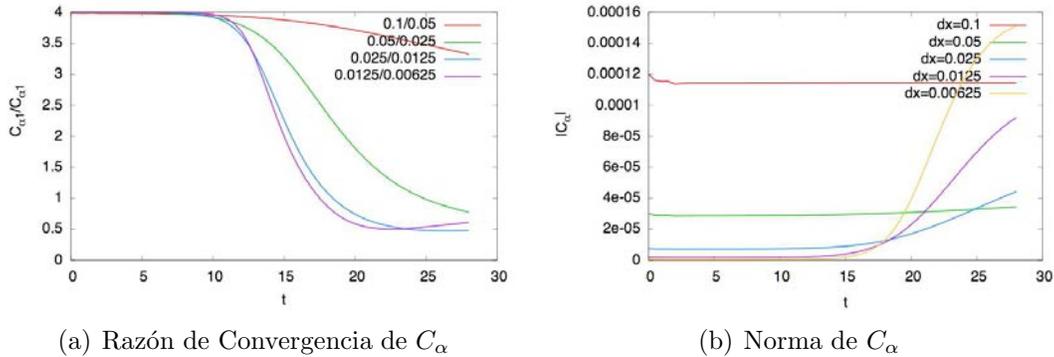
Lo anterior podemos verlo más claramente en la figura 6.3(b), en esta se presenta la norma <sup>6</sup> de  $C_\alpha$ , la cual si la solución convergiera debería de ir a cero, pero se puede apreciar que a mayor resolución lejos de disminuir aumenta rápidamente.

Por otro lado al fijarnos en la figura 6.4 nos podemos dar cuenta que la evolución de la función de lapso no es suave, si no que al avanzar la evolución la parte de atrás del pulso, es decir la que está más cercana al cero, de alguna manera alcanza a la parte delantera, lo que está sucediendo es que la derivada de la parte trasera del pulso se está volviendo infinita lo que indica un choque de norma.

■  $\mu = 2$

La condición de foliación utilizada es la siguiente:

$$\partial_t \alpha = -2\alpha^2 K. \quad (6.1.9)$$



(a) Razón de Convergencia de  $C_\alpha$

(b) Norma de  $C_\alpha$

Figura 6.5: Lapso Bona-Massó con  $f = 2$ .

En la figura 6.5(a) se muestra de nuevo que la razón de convergencia de  $C_\alpha$  va decayendo conforme la resolución del código va aumentando, esto quiere decir que la solución numérica está divergiendo y nos muestra un choque en la función

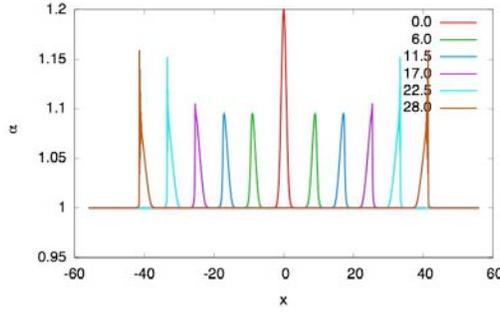


Figura 6.6: Función de lapso para  $\mu = 2$  a distintos tiempos

de lapso.

En la figura 6.5(b) se ve que la norma de  $C_\alpha$  está aumentando rápidamente con la resolución, esto nos indica que el error crece conforme la resolución crece, lo cual quiere decir que la solución está presentando un choque.

Al fijarnos en la figura 6.6 podemos ver que de nuevo la evolución de la función de lapso no es suave, en este caso el valor de  $\alpha$  aumenta en el tiempo y la parte delantera del pulso se va frenando, volviéndose casi vertical, en este caso la derivada de la parte delantera del pulso se está volviéndose infinita lo cuál nos indica la presencia de un choque de norma.

### 6.1.3. Lapso Evita Choques

Ahora la elección de función de lapso es el evita-choques (5.5.57), recordando la condición de foliación de Bona-Massó:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (6.1.10)$$

entonces la condición de foliación que estaremos usando será la siguiente:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 \left(1 + \frac{\kappa}{\alpha^2}\right) K, \quad \text{con } \kappa = 2 \text{ o } 5. \quad (6.1.11)$$

■  $\kappa = 2$

En este caso se utiliza la siguiente condición de foliación:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 \left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right) K. \quad (6.1.12)$$

En la figura 6.7(a) podemos ver que mientras mayor es la resolución utilizada en el código más se acerca al 4, lo cuál indica que no está sucediendo un choque

---

<sup>6</sup>Ver Apéndice A.

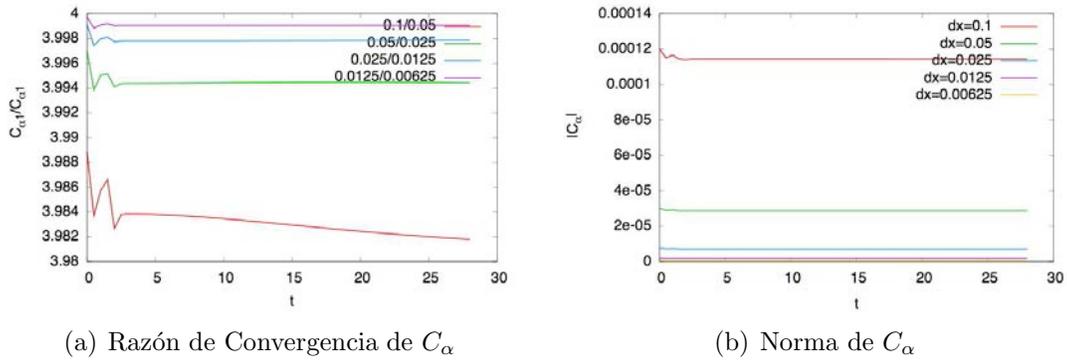


Figura 6.7:  $C_\alpha$  con lapso evita choques y  $\kappa = 2$ .

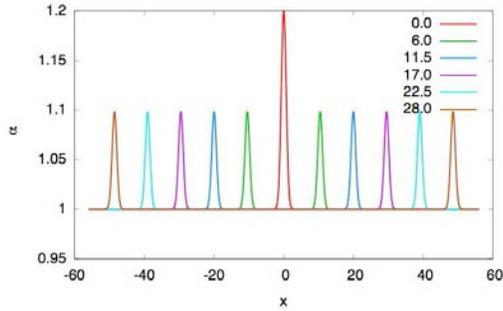


Figura 6.8: Función de lapso para  $\kappa = 2$  a distintos tiempos

ya que no hay pérdida de convergencia. En la figura 6.7(b) podemos ver que a mayor resolución más se acerca el valor de la norma a cero, lo que nos indica que cada vez es más pequeño el error entre la  $D_\alpha$  calculada en el código y la derivada logarítmica de  $\alpha$ .

Lo anterior podemos verificarlo al ver la figura 6.8 en ella se ve que la evolución de  $\alpha$  es suave, que empieza en  $\alpha = 1,2$  y que se estabiliza en  $\alpha \sim 1,1$  lo cuál nos permite ver que la solución no está generando choques de norma.

■  $\kappa = 5$

En este caso se utiliza la siguiente condición de foliación:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 \left( 1 + \frac{5}{\alpha^2} \right) K. \quad (6.1.13)$$

De nuevo notamos en la figura 6.9(a) que a mayor resolución la convergencia no sólo no se pierde si no que se acerca cada vez al 4, mientras que en la figura 6.9(b) se nota que con el aumento de resolución la norma de  $C_\alpha$  se acerca más al cero en un factor de 4, esto nos indica que la solución se comporta exactamente como se espera cuándo no hay choques de norma presentes, tal como es el caso.

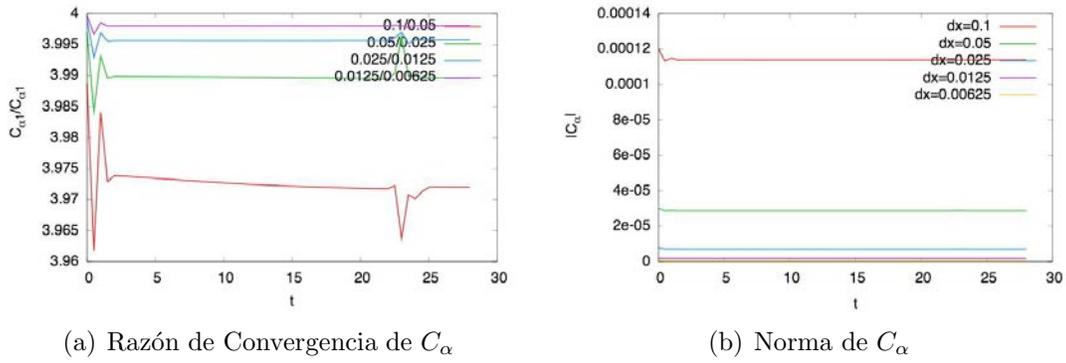


Figura 6.9:  $C_\alpha$  con lapso evita choques y  $\kappa = 5$ .

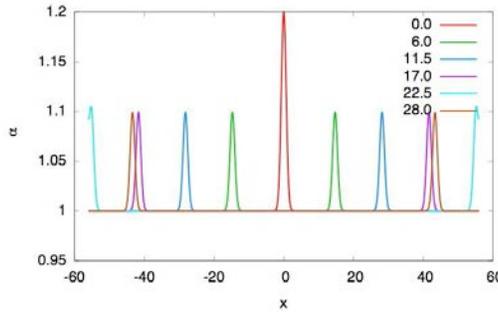


Figura 6.10: Función de lapso para  $\kappa = 5$  a distintos tiempos

De nuevo podemos verificar lo anterior al fijarnos en la figura 6.10 en la cuál se ve que la evolución de  $\alpha$  es suave, en este caso empezando en  $\alpha = 1,2$  y estilizándose alrededor de  $\alpha = 1,1$ , un poco más cercanamente que en el caso anterior. Aquí cabe mencionar que las condiciones de frontera son de tipo periódico, al ser muy larga la evolución y tener la onda una velocidad alta la onda llega a la frontera y se regresa, es por eso que se ve que la  $\alpha$  va y viene.

#### 6.1.4. Análisis

Es fácil notar que las evoluciones que se muestran en las figuras 6.4 y 6.6 son distintas, en la primera es la derivada de la parte posterior del pulso la que se hace infinita y en la segunda es la derivada de la parte delantera, esto nos indica que los choques de norma a los que nos referimos son diferentes.

En las figuras 6.3(a) y 6.5(a) podemos ver que alrededor de  $t = 12$  la magnitud de la razón de convergencia de  $C_\alpha$  empieza a disminuir y que aproximadamente para  $t = 20$  (en la resolución más alta) se estabiliza alrededor de  $0,5$  lo cuál nos indica claramente que el código está perdiendo convergencia provocada por un choque en la función de lapso, esto se puede ver más claramente en las figuras 6.3(b) y 6.5(b) ya que en ellas podemos ver que la norma de  $C_\alpha$  es mayor para las resoluciones más altas que para las

resoluciones más pequeñas.

La razón por la cuál los choques presentados en los sistemas con  $\mu = 1/2$  y  $\mu = 2$  sean diferentes se debe a que la velocidad de norma en ambos casos es diferente, esto se puede ver más claramente en las figuras 6.11(b) y 6.11(c), en dónde la velocidad de norma está dada por:

$$v_n = \alpha \left( \frac{f}{A} \right)^{1/2}, \quad (6.1.14)$$

$$= \alpha \left( \frac{\mu}{A} \right)^{1/2}. \quad (6.1.15)$$

En la figura 6.11(b) podemos ver que la velocidad empieza en 1,02 y que según avanza el tiempo llega alrededor de 0,70 punto en el que empieza a pararse la gráfica, en este caso se ve que la parte de atrás va más rápido que la de adelante, de alguna manera es como si la parte posterior del pulso “rebasara” a la parte delantera, esto es lo que genera el choque en la norma.

En la figura 6.11(c) se puede observar que la velocidad inicial es del 1,7 mientras que la velocidad final es de 1,515, en este caso la parte delantera del pulso es la que se va parando, de manera que es cómo si la parte trasera del pulso chocara con la parte delantera que se ha vuelto una recta vertical. Esto nos muestra un choque de una onda que, de nuevo, tiene diferentes velocidades para diferentes partes del pulso. Comparando las figuras 6.11(b) y 6.11(c) podemos ver que la velocidad en la primera es menor que en la segunda, es por esto que las evoluciones de la función de lapso, figuras 6.4 y 6.6 el pulso avanza hasta diferentes valores de la posición.

En los sistemas en los que evolucionamos con  $f = 1$ , en el caso de  $f$  constante, y con  $\kappa = 2$  y  $\kappa = 5$ , en el caso de lapso evita-choques, podemos ver en las figuras 6.1(a), 6.7(a) y 6.9(a), que la razón de convergencia de  $C_\alpha$  no disminuye al aumentar la resolución, sino que al contrario a mayor resolución más se acerca la convergencia al 4, esto nos indica que el código converge a la solución correcta y que por lo tanto no hay choques de norma para estas elecciones de función de lapso.

Para ver esto más claramente nos fijamos en las velocidades de norma de estos sistemas. En la figura 6.11(a) podemos ver que la evolución de la velocidad es totalmente suave, no presenta choques ni se “para” en ningún punto, y de hecho después de la perturbación inicial la velocidad regresa a  $v_n = 1$ , lo cuál es lo que se espera ya que cómo  $A$  no está siendo perturbada, y con  $f = 1$ ,  $A = 1$  a  $v_n$  no le queda de otra más que valer 1. En la figura 6.12(a) se puede ver que la velocidad empieza alrededor del 1,85 y que se estabiliza un poco antes de 1,73, lo cuál es lo esperado al substituir el valor dado por la ecuación (5.5.57) con  $\alpha = 1$  en la ecuación (6.1.15). Por otro lado, en la figura 6.12(b) se ve que la velocidad es mayor que en el caso anterior, lo cuál también es lo esperado al substituir los valores utilizados en la ecuación (6.1.15) estabilizándose alrededor del

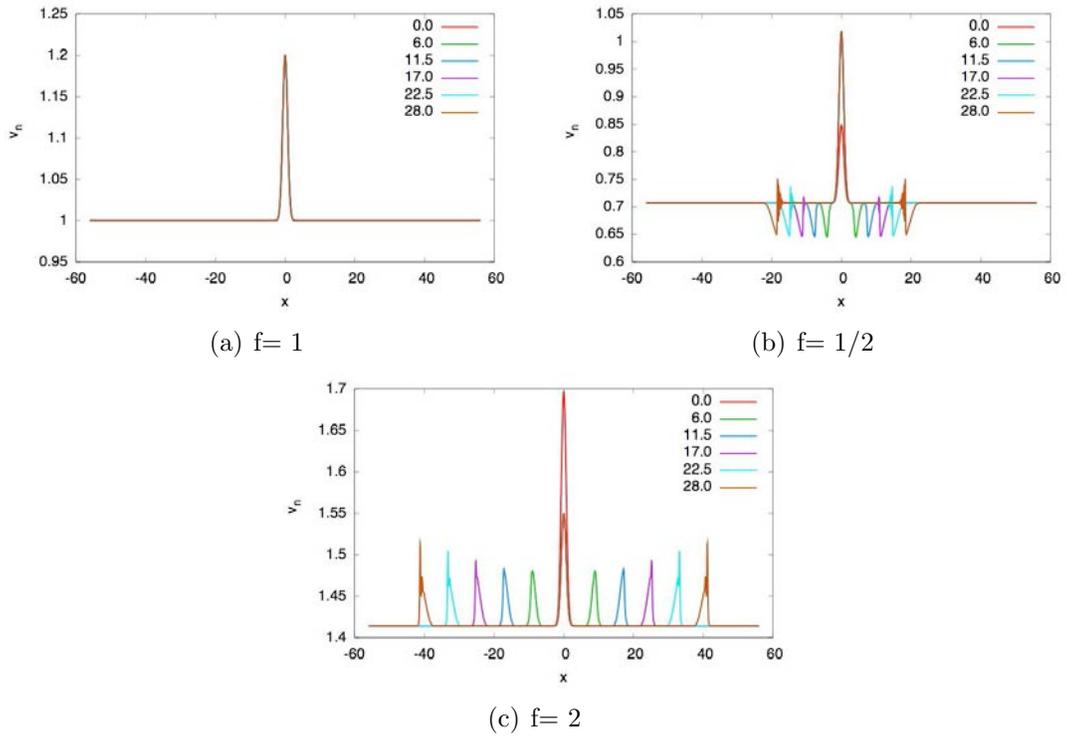


Figura 6.11: Velocidad de norma con  $f$  constante a distintos tiempos

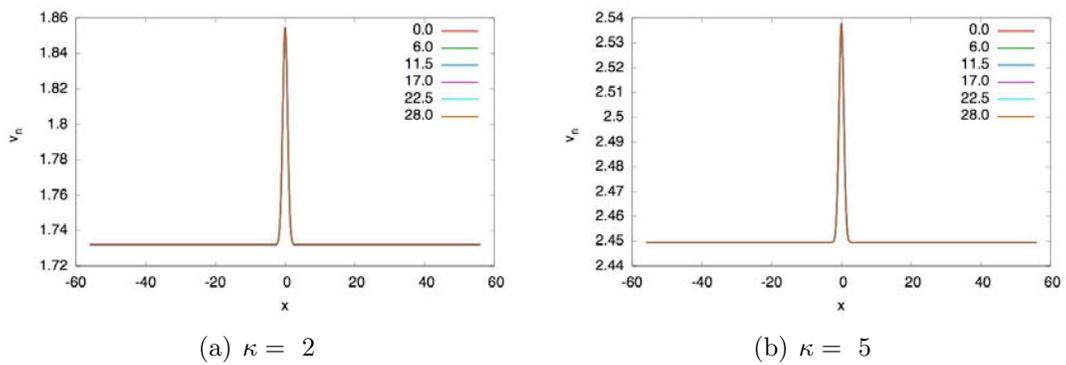


Figura 6.12: Velocidad de norma con lapso evita-choques a distintos tiempos

2,45.

En ambos casos hay que notar que no se ven choques en la velocidad, es decir que la velocidad es suave y de hecho, después de la perturbación inicial se estabilizan en un valor constante, semejándose a la figura 6.11(a) que acabamos de comentar.

Con esto podemos verificar que para cualquier valor de  $\kappa$  en la elección de lapso evita-choques no se presentan choques de norma, recordando que  $f = 1$  corresponde a tomar  $\kappa = 0$  en la ecuación (5.5.57), mientras que para elecciones de  $f = \text{cte}$  distintas de 1 si se presentan, lo cuál es lo que se obtuvo en la sección 5.5.6.

## 6.2. Choques de Constricciones

En éste caso presento los resultados para los sistemas de ecuaciones (3.4.59) y (3.4.68). Cómo voy a utilizar datos iniciales que violan las constricciones es necesario calcular la razón de convergencia de una manera diferente que en la sección anterior, esto se hará con la siguiente ecuación:

$$\text{Razon de Convergencia } c_{H,M} = \frac{\|C_{H,M_\Delta} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{2}}}\|}{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{2}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{4}}}\|}, \quad (6.2.16)$$

en dónde  $\| \cdot \|$  indica norma y  $\Delta$  se refiere a la resolución utilizada en la corrida para ese dato.

Como notación en las gráficas se encuentran las siguientes definiciones:

$$\text{Razon de Convergencia } c_H \equiv F, \quad (6.2.17)$$

$$\text{Razon de Convergencia } c_M \equiv R, \quad (6.2.18)$$

también como notación en las figuras se muestra lo siguiente:

$$F, R_d \equiv \frac{\|C_{H,M_\Delta} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{2}}}\|}{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{2}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{4}}}\|}, \quad (6.2.19)$$

$$F, R_m \equiv \frac{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{2}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{4}}}\|}{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{4}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{8}}}\|}, \quad (6.2.20)$$

$$F, R_q \equiv \frac{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{4}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{8}}}\|}{\|C_{H,M_{\frac{\Delta}{8}}} - C_{H,M_{\frac{\Delta}{16}}}\|}. \quad (6.2.21)$$

También muestro las normas de ambas constricciones, en este caso utilizo como elección de lapso el evita choques con  $\kappa = 2$ , de manera que la condición de foliación que utilizo

es la ecuación (6.1.12), dada por:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 \left( 1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) K. \quad (6.2.22)$$

### 6.2.1. Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales que propongo en esta sección son condiciones que en principio no cumplen con las constricciones,  $C_H$  y  $C_M$ , ecuaciones (3.1.19) y (3.1.20), de esta manera se puede ver si es que hay choques de constricciones o no, ya que de satisfacer las constricciones los datos iniciales nunca habría una perturbación en  $C_H$  y  $C_M$  y permanecerían con valor igual a cero durante toda la evolución.

Los datos iniciales son los siguientes:

$$K_{BB}(t=0) = -2\gamma_0 \frac{(x-x_0)}{\sigma_0^2} e^{\left(\frac{-(x-x_0)}{\sigma_0}\right)^2}, \quad (6.2.23)$$

los cuales corresponden a tomar la derivada con respecto a  $x$  de una gaussiana. Los datos iniciales se toman de esta manera para que la violación de las constricciones no se disipara, ya que al tomar datos iniciales únicamente como una gaussiana la violación se disipaba y esto no me permitía realizar el análisis de choques de constricciones. Se toman los siguientes valores en los datos iniciales:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0,15, \\ x_0 &= 0,0, \\ \sigma_0 &= 1,0. \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

### 6.2.2. Sistema con la ecuación modificada de $K_{BB}$

En esta sección se muestran las gráficas hechas para el sistema de ecuaciones (3.4.59), en este caso se tomaron en cuenta las condiciones dadas por el criterio de degeneración lineal indirecta, ecuaciones (5.5.36):

$$f = 1 \quad \text{ó} \quad (6.2.25)$$

$$h_K = 1/2, \quad (6.2.26)$$

y por el criterio de fuentes, ecuación (5.5.48):

$$h_{K_{BB}} = \left( h_K - \frac{1}{2} \right) \frac{8}{3}. \quad (6.2.27)$$

De las condiciones de la ecuación (6.2.26) al tomar la elección  $f = 1$  el código falla, a una resolución de  $dx = 0,025$  se tiene que  $\alpha$  se vuelve negativa a  $t = 8,1$ , para ver porque me refiero a la figura 6.19 en el análisis para una explicación. Es por esta razón que en este sistema de ecuaciones de manera que escogemos valores de  $h_K$  y de  $h_{K_{BB}}$

tal que satisfagan las ecuaciones (6.2.26) y (6.2.27) simultáneamente. Esto nos lleva al siguiente par de valores:

$$h_{K_{BB}} = 0, \quad (6.2.28)$$

$$h_K = 1/2. \quad (6.2.29)$$

En las gráficas se presentan 5 pares de valores para  $h_K$  y de  $h_{K_{BB}}$ , 4 de los cuales no cumplen con el criterio de fuentes, pero todas cumplen con el criterio de degeneración lineal indirecta, ecuación (6.2.27), estos valores son:

$$h_{K_{BB}} = -0,2 \text{ y } h_K = 0,5, \quad (6.2.30)$$

$$h_{K_{BB}} = -0,4 \text{ y } h_K = 0,5, \quad (6.2.31)$$

$$h_{K_{BB}} = 0,2 \text{ y } h_K = 0,5, \quad (6.2.32)$$

$$h_{K_{BB}} = 0,4 \text{ y } h_K = 0,5, \quad (6.2.33)$$

$$h_{K_{BB}} = 0 \text{ y } h_K = 0,5. \quad (6.2.34)$$

Al evolucionar a  $t > 16,2$  la función de lapso  $\alpha$  se vuelve negativa, cómo esto no puede suceder significa que el código ya no está haciendo las cosas bien, es por esto que las gráficas se ve que el tiempo sólo llega hasta  $t = 16,2$ .

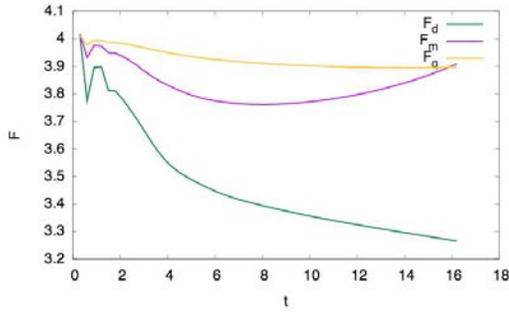
#### ▪ $C_H$

En la figura 6.13 se ve la razón de convergencia de la ecuación (6.2.31)-(6.2.33) y en la figura 6.14 se muestra la norma de la Constricción Hamiltoniana, con una resolución de  $dx = 0,00625$ , para los 5 pares de valores antes mencionados.

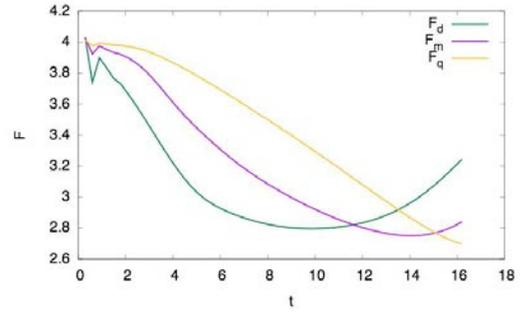
En la figura 6.15 se muestra la evolución de  $C_H$  para los 5 juegos de valores antes mencionados. Al fijarnos en ellas podemos ver que en la figura 6.15(e) la evolución de  $C_H$  es totalmente suave y que los pulsos se mueven a la misma velocidad y son del mismo tamaño, por otro lado en las figuras 6.15(a)-6.15(d) podemos ver que los pulsos derecho e izquierdo no viajan de igual manera, si no que se desplazan a diferentes velocidades. Esto se ve más acentuado en la figura 6.15(d) en dónde el pulso derecho y el izquierdo difieren más en sus magnitudes, y el pulso izquierdo se mueve a una mayor velocidad, esto se nota en el gradiente que se forma en  $C_H$  al final de la evolución.

Al observar las evoluciones en la figura 6.15 podemos reafirmar que el único sistema que no genera choques es aquél en el que se tiene  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0$ , mientras que en los demás si se presentan choques en  $C_H$ .

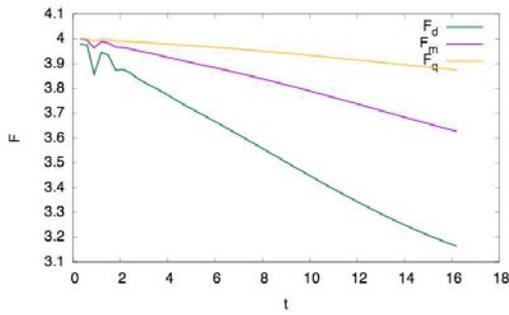
#### ▪ $C_M$



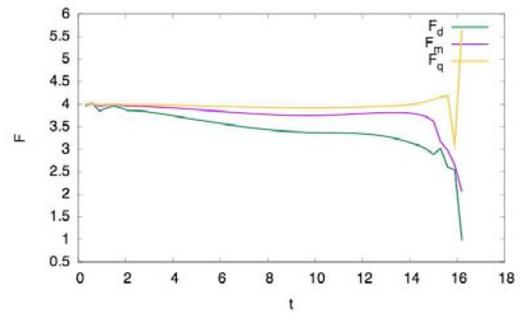
(a)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,2$



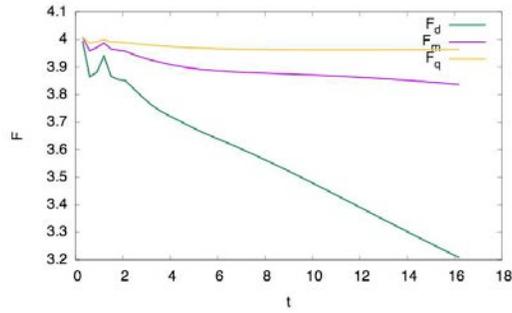
(b)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0$

Figura 6.13: Raz3n de convergencia de  $C_H$  con el sistema de ecuaciones (3.4.59)

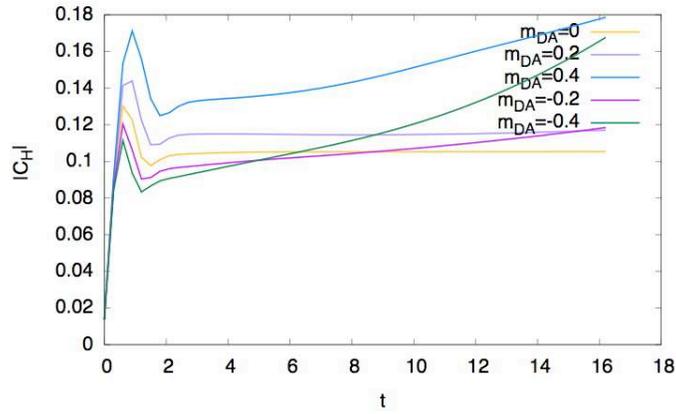


Figura 6.14: Norma de  $C_H$  para el sistema (3.4.59).

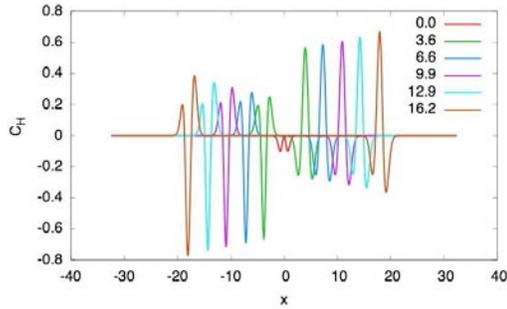
En la figura 6.16 presento las gráficas correspondientes a la Constricción de Momento para el juego de valores (6.2.31)-(6.2.33) y en la figura 6.17 muestro la norma de la Constricción de momento también con una resolución de  $dx = 0,00625$ , para los 5 pares de valores antes mencionados.

En la figura 6.18 se pueden ver la evolución de  $C_M$  para los pares de valores antes mencionados, en este caso en la figura 6.18(e) la evolución es la más suave de las que se muestran, aunque el pulso derecho no es simétrico al izquierdo ambos pulsos se mueven con magnitud constante. Por otro lado, en las figuras 6.18(a)-6.18(d) se puede ver cómo la magnitud de los pulsos varía rápidamente, en dónde se nota esto con mayor claridad es en la figura 6.18(d) en la cuál se aprecia que el pulso del lado izquierdo es mucho mayor al del lado derecho, de hecho el pulso izquierdo se vuelve totalmente vertical, lo que indica que su derivada se ha vuelto infinita de dónde se sigue que un choque se está generando.

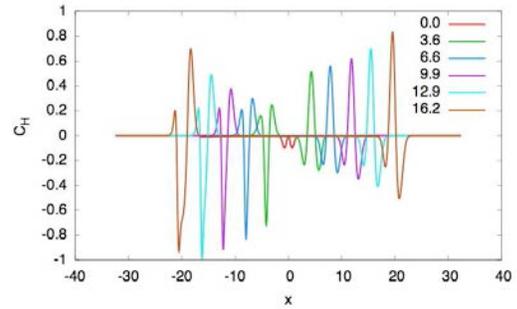
De la figura 6.18 podemos ver que todos los sistemas presentan problemas excepto por el sistema cuya evolución se presenta en la figura 6.18(e).

## ■ Análisis

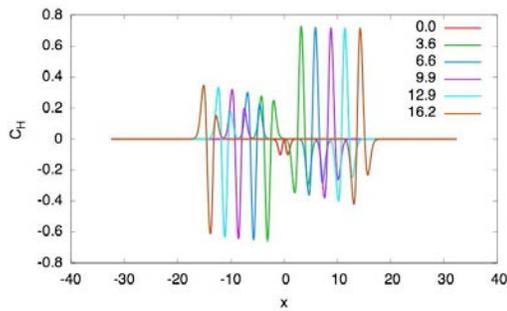
Primero vamos a ver el porque no se puede tomar la condición de  $f = 1$  en este sistema de ecuaciones, para esto me refiero a la figura 6.19 en la cuál se muestra la velocidad de constricción, ecuación (6.2.35), en ella se ve que hacia el final de la evolución la parte trasera del pulso izquierdo se va volviendo vertical, mientras que la parte delantera del pulso derecho tiene el mismo tipo de comportamiento, siendo mucho más pronunciada la verticalidad del lado izquierdo, de éste lado la parte de atrás empieza a “atropellar” a la parte delantera. Esto nos muestra que diferentes partes del pulso se están moviendo a diferentes velocidades lo que nos conlleva a que el código falle, cómo ya lo mencioné con esta elección de lapso  $\alpha$  se vuelve negativa lo cuál físicamente no es correcto.



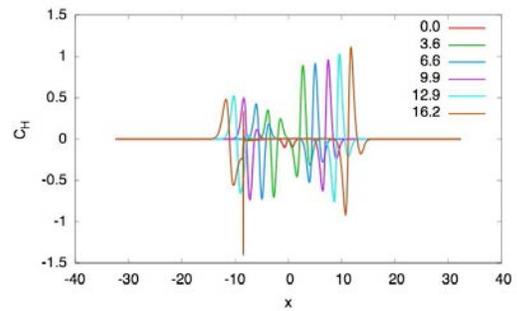
(a)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,2$



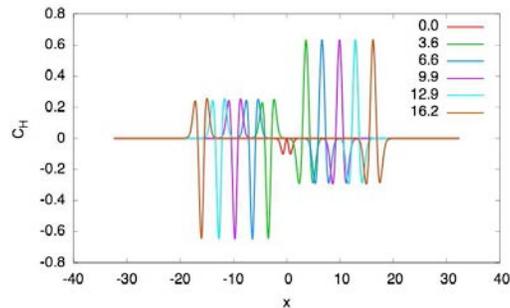
(b)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0$

Figura 6.15: Evolución de  $C_H$  con el sistema de ecuaciones (3.4.59) a diferentes tiempos

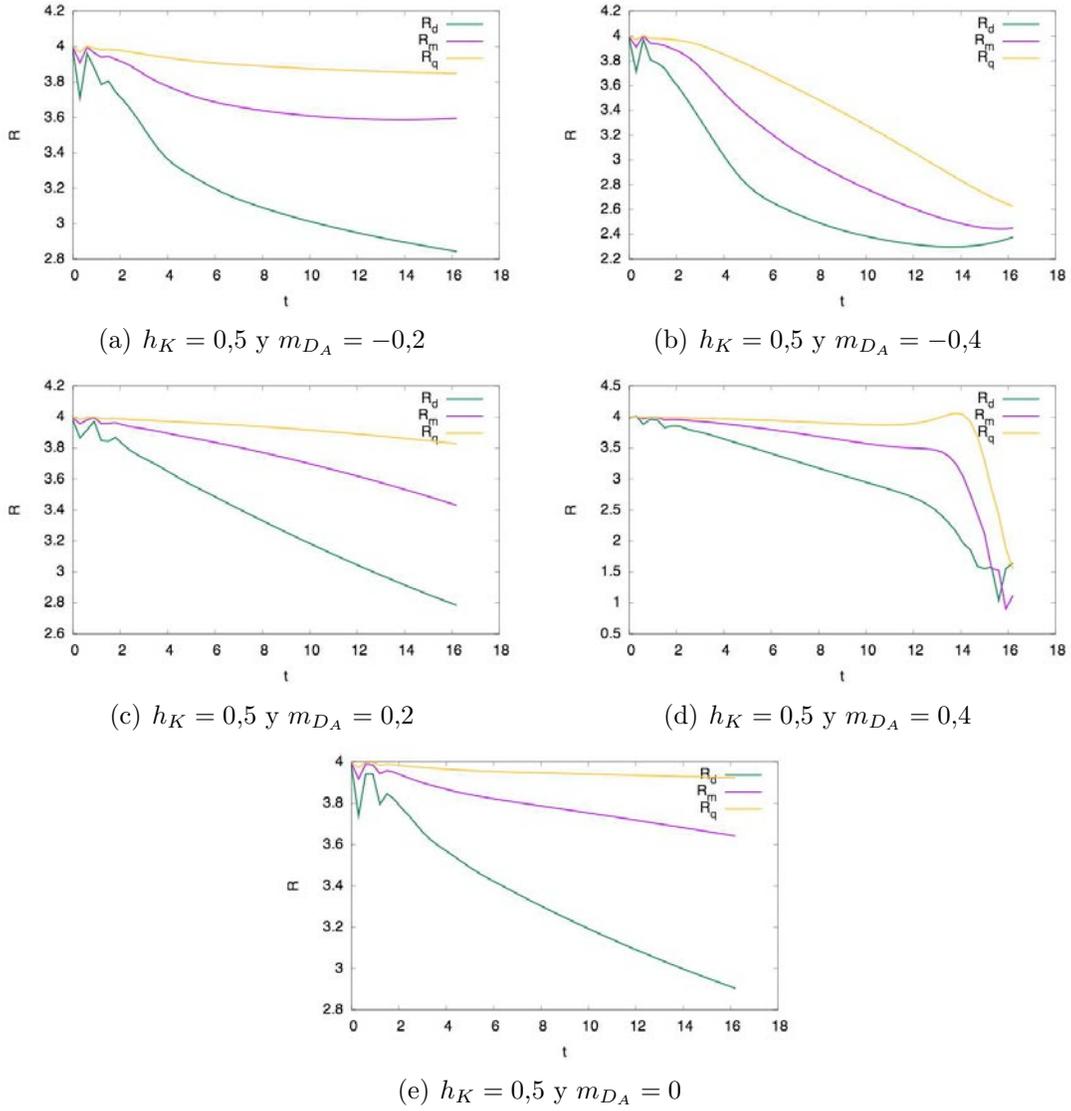


Figura 6.16: Razón de convergencia de  $C_M$  con el sistema de ecuaciones (3.4.59)

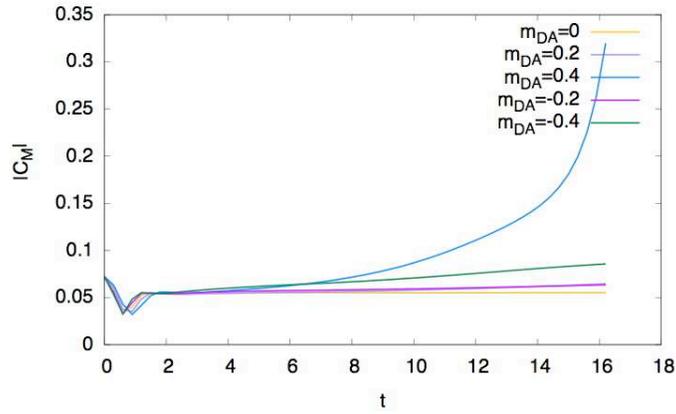


Figura 6.17: Norma de  $C_M$  para el sistema (3.4.59).

Sin embargo no es claro el porqué de este comportamiento ya que en principio se está cumpliendo el criterio de degeneración lineal indirecta y el principio de fuentes, ya que en la figura 6.19 justamente las elecciones de los parámetros corresponden a la elección dada por la ecuación (6.2.34), esto se deja para un estudio futuro.

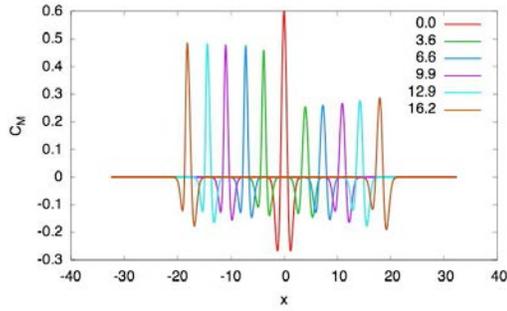
Para poder explicar porque únicamente un sistema de ecuaciones no genera choques vamos a ver la velocidad de constricción la cuál en este caso esta dada por la siguiente ecuación:

$$v_c = \alpha \left( \frac{1 - h_{KBB}}{A} \right)^{1/2}, \quad (6.2.35)$$

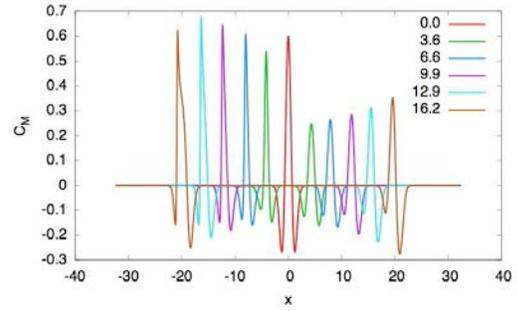
en la figura 6.20 se puede ver la velocidad de constricción para el sistema de ecuaciones (3.4.59)

En la figura 6.20(e) se puede notar que la velocidad es completamente suave, lo que nos indica que la solución en este caso se mueve uniformemente, porque ambos pulsos se mueven con la misma velocidad, ver la figura 6.15(e). En las figuras 6.20(a) y 6.20(c) se puede ver que un gradiente grande se empieza desarrollar en el pulso de la izquierda, mientras que en el pulso de la derecha no es tan grande pero la gráfica se pone un poco más vertical. Mientras que en las figuras 6.20(b) y 6.20(d) se muestra un gradiente muy grande del lado izquierdo, de hecho puntiaguda que casi llega al cero en el caso de la figura 6.20(d), esto indica que la velocidad está a punto de desaparecer, mientras que del lado derecho la velocidad es extremadamente menor a la que se muestra en las figuras anteriores.

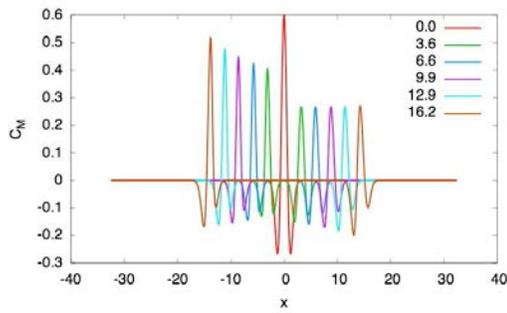
Debido a que la velocidad de constricción de los sistemas de ecuaciones que tienen los juegos de valores de las ecuaciones (6.2.30)-(6.2.33) de los pulsos derecho e izquierdo son diferentes entre sí, e incluso la velocidad en diferentes puntos del



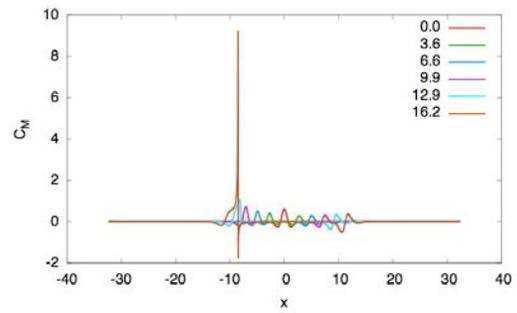
(a)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,2$



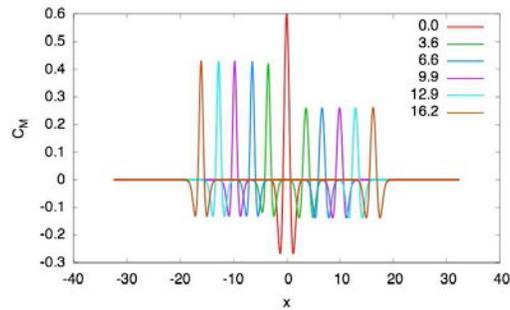
(b)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0$

Figura 6.18: Evolución de  $C_M$  con el sistema de ecuaciones (3.4.59) a diferentes tiempos

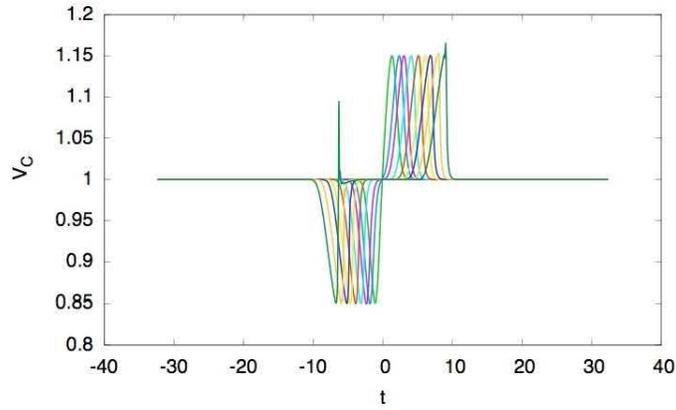


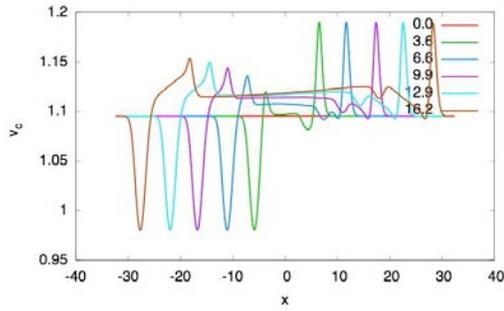
Figura 6.19: Velocidad de constricción para el sistema (3.4.59) cuando tomamos lapso armónico.

pulso es diferente, se generan choques en las constricciones. Esto se ve más acentuado en el sistema que tiene el par de valores (6.2.31) ya que es la velocidad que mayor diferencia de velocidades tiene.

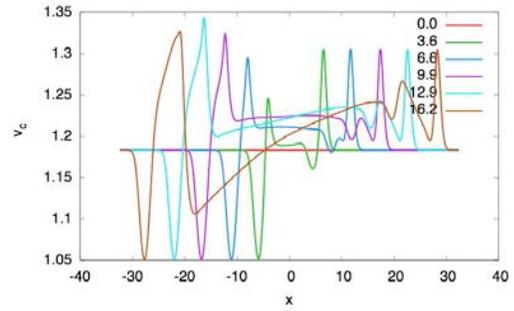
Por otro lado en las gráficas 6.13 se nota que a mayor resolución la razón de convergencia de  $C_H$  de la solución aumenta, cómo era esperado en la figura 6.13(e) la razón con mayor resolución es casi una línea recta en el 4, mientras que en las otras figuras de este grupo se ve que la convergencia es menor a 4, lo cuál nos da exactamente lo que andamos buscando, que al cumplirse tanto el criterio de fuentes como el de degeneración lineal indirecta, no se presentaran choques en la solución. El hecho de que la convergencia sea 4 nos da como resultado el que la solución del código efectivamente converge a la del problema físico en cuestión.

Aquí hay que hacer una aclaración, en la figura 6.13(d) vemos que a mayor resolución, justo antes de terminar la evolución, la convergencia aumenta y se vuelve muy grande, mientras que para resoluciones menores la convergencia es menor a 1 lo cual implica que el código empieza a diverger. En esta gráfica no es muy preciso lo que sucede hacia el final de la evolución. Esto es debido a que para un tiempo ligeramente mayor al mostrado, incluso  $t = 16,3$  la función de lapso se volvía negativa, lo cual aparte de que físicamente no tiene sentido ya que estaríamos midiendo el tiempo “negativamente”, el código dejaba de funcionar. Esto es por la elección de valores de la ecuación (6.2.33), y entonces el comportamiento en la frontera no puede ser tomado a consideración.

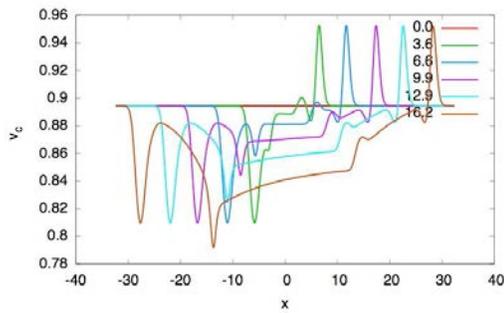
Analicemos el comportamiento de la norma de  $C_H$  vista en la figura 6.14. Lo que buscamos aquí es que el valor de la constricción no crezca demasiado, es decir que sea lo más cercano posible al cero, esto se logra para el caso en que se toma los valores de la ecuación (6.2.34), tenemos un mínimo de la constricción, que se



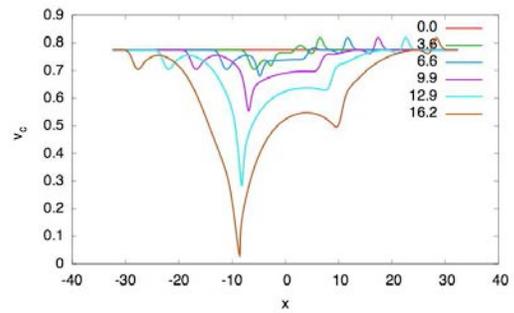
(a)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,2$



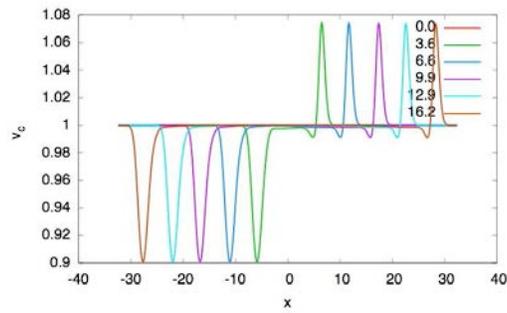
(b)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $h_{K_{BB}} = 0$

Figura 6.20: Velocidad de constricción para el sistema de ecuaciones (3.4.59) a diferentes tiempos

estabiliza en 0.1, mientras que para los demás valores  $C_H$  es mayor.

Fijándonos ahora en la figura 6.16, en ella se puede notar (en general), que a mayor resolución la convergencia de  $C_M$  se acerca más a 4, aunque es únicamente la figura 6.16(e) la que tiene una línea muy cercana a 4, esto nos indica que en todos los demás casos se puede estar presentando un choque en la constricción de momento, de las gráficas nos damos cuenta que la que tiene una convergencia menor a 1 es la 6.16(d) lo cuál concuerda con lo explicado anteriormente que justo este sistema es el que presentaba problemas para un  $t > 16,2$ .

Viendo ahora la norma de  $C_M$  de la figura 6.17 podemos notar que de nuevo los valores de la ecuación (6.2.34) son los que nos dan un mínimo de la constricción, mientras que para los demás valores la norma de  $C_M$  es mayor, incluso crece mucho al utilizar los valores de (6.2.31). El mínimo en esta ocasión se presente en 0,05, lo cuál nos indica que la mejor aproximación a  $C_M = 0$  se da cuándo los 2 criterios aquí probados se cumplen.

Con todo esto podemos concluir que la mejor aproximación a la no-violación de las constricciones se da justo cuándo los 2 criterios aquí ocupados se cumplen simultáneamente, es decir para el sistema en el que se utiliza el juego de valores de la ecuación (6.2.34).

### 6.2.3. Sistema con la ecuación modificada de $D_A$

En esta sección presento las gráficas obtenidas al trabajar con el sistema de ecuaciones (3.4.68), en ellas presento tanto la razón de convergencia como la norma de las constricciones Hamiltoniana y de momento.

En este caso la condición dada por el criterio de degeneración lineal indirecta esta dada por la ecuación (5.5.36):

$$f = 1, \quad \text{ó} \quad (6.2.36)$$

$$h_K = 1/2, \quad (6.2.37)$$

y la del criterio de fuentes por la ecuación (5.5.55):

$$m_{D_A} = 4h_K - 2. \quad (6.2.38)$$

De la ecuación (4.4.27) vemos que la elección  $f = 1$  requeriría poner  $h_K = 1$ , pero de los eigenvectores de este sistema, ecuación (3.4.71), al poner estos valores tenemos que  $v_1 = v_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$  de manera que ya no tenemos un sistema completo de eigenvalores y por lo tanto el sistema de ecuaciones deja de ser hiperbólico y ya no lo podemos seguir utilizando en la simulación numérica. Es por esto que de la ecuación (6.2.37)

tomamos  $h_K = 1/2$ , entonces se obtienen que las siguientes condiciones cumplen con ambos criterios para evitar choques:

$$\begin{aligned} m_{D_A} &= 0, \\ h_K &= 1/2. \end{aligned} \tag{6.2.39}$$

Con ayuda de las condiciones anteriores escogemos 5 pares de valores, de los cuáles 4 no cumplen con el criterio de fuentes, para poder comparar las gráficas resultantes. Los valores escogidos son los siguientes:

$$m_{D_A} = -0,2 \text{ y } h_K = 0,5, \tag{6.2.40}$$

$$m_{D_A} = -0,4 \text{ y } h_K = 0,5, \tag{6.2.41}$$

$$m_{D_A} = 0,2 \text{ y } h_K = 0,5, \tag{6.2.42}$$

$$m_{D_A} = 0,4 \text{ y } h_K = 0, \tag{6.2.43}$$

$$m_{D_A} = 0 \text{ y } h_K = 0,5. \tag{6.2.44}$$

En este caso la evolución se hizo para un tiempo de  $t = 24$ , ya que para tiempos mayores la norma  $A$  se vuelve negativa y por lo tanto el código no puede seguir funcionando.

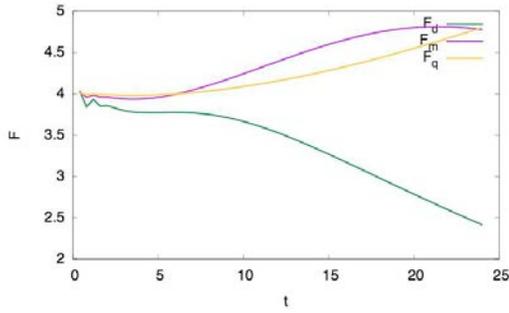
#### ▪ $C_H$

En la figura 6.21 muestro las gráficas que se obtuvieron al utilizar los valores (6.2.41)-(6.2.43) al graficar la razón de convergencia de la Constricción Hamiltoniana y en la figura 6.22 muestro la norma de  $C_H$  para los 5 pares de valores antes mencionados.

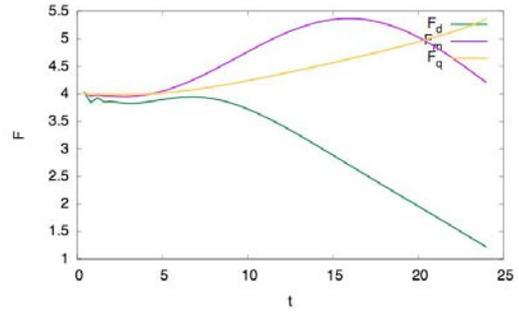
En la figura 6.23 se muestra la evolución de  $C_H$  para los 5 pares de valores utilizados. Al fijarnos en la figura 6.23(e) podemos darnos cuenta de que la evolución de  $C_H$  es totalmente suave y que el pulso derecho es simétrico, con una reflexión horizontal, con respecto al pulso izquierdo. Sin embargo en las figuras 6.23(a), 6.23(c) y 6.23(d) esta simetría se rompe un poco ya que el pulso izquierdo crece mucho más que el pulso de la derecha. Esto se puede ver más acentuado en la figura 6.23(b) en la que el pulso de la derecha es muy pequeño mientras que el pulso de la izquierda crece demasiado, volviéndose prácticamente vertical lo que significa que su derivada se está volviendo infinita, de manera que se está produciendo un choque en  $C_H$ .

Lo anterior nos deja ver que efectivamente el único sistema que no genera un choque es aquél en el que se escogen los parámetros de manera que los dos criterios para evitar choques se cumplen simultáneamente.

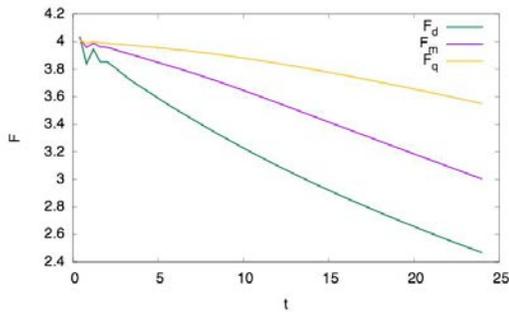
#### ▪ $C_M$



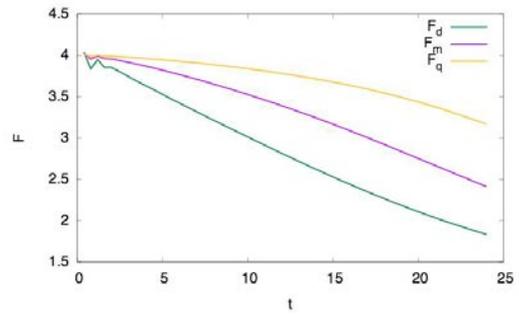
(a)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = -0,2$



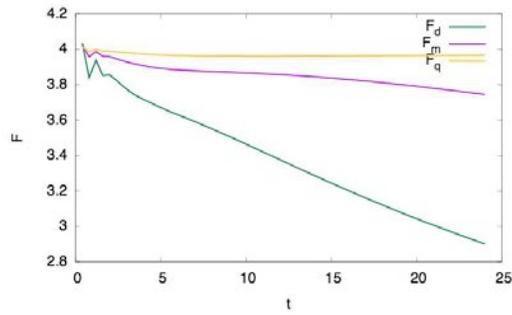
(b)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0$

Figura 6.21: Raz3n de convergencia de  $C_H$  con el sistema de ecuaciones (3.4.68)

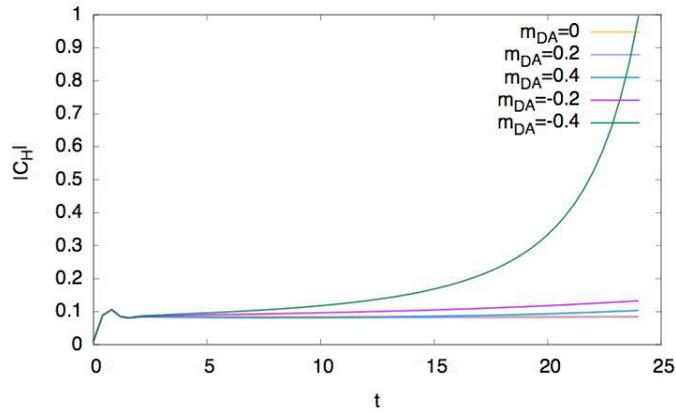


Figura 6.22: Norma de  $C_H$  para el sistema (3.4.68).

En la figura 6.24 se muestran las gráficas correspondientes a la razón de convergencia de la Constricción de Momento con los valores (6.2.41)-(6.2.43), mientras que en la figura 6.25 presento la norma de la Constricción de momento, para los 5 pares de valores antes mencionados.

En la figura 6.26 se muestra la evolución de  $C_M$  para los pares de valores antes mencionados, en este caso se ve que la evolución del sistema que tiene el juego de valores (6.2.44), figura 6.26(e), es suave, ya que aun cuando los pulsos derecho e izquierdo no sean totalmente simétricos, no cambian de tamaño durante la evolución lo cuál nos indica que su velocidad es uniforme. Por otro lado en las figuras 6.26(a) y 6.26(c) se ve que el pulso izquierdo empieza a crecer mucho, en este caso ésta característica es más acentuada en las figuras 6.26(b) y 6.26(d), sobre todo en la primera de ellas, ya que el pulso derecho es muy pequeño en comparación con el de la izquierda, lo cuál quiere decir que el pulso izquierdo está creciendo demasiado rápido y se está volviendo casi vertical lo cuál nos está indicando que hay un choque presente.

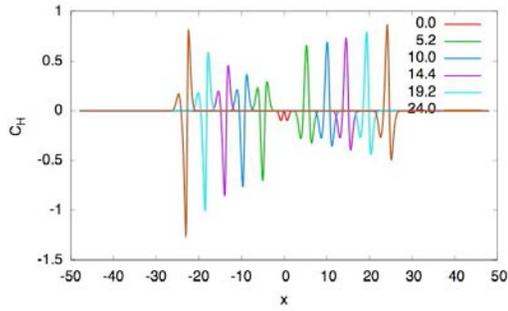
Con esto podemos ver que efectivamente la evolución del sistema que cumple con ambos criterios para evitar choques es aquél en el cuál la evolución de  $C_M$  es suave.

### ■ Análisis

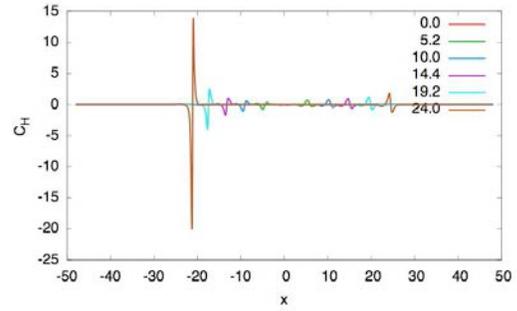
En este caso la velocidad de constricción está dada por la siguiente ecuación:

$$v_c = \alpha \left( \frac{1}{A} \right)^{1/2}, \quad (6.2.45)$$

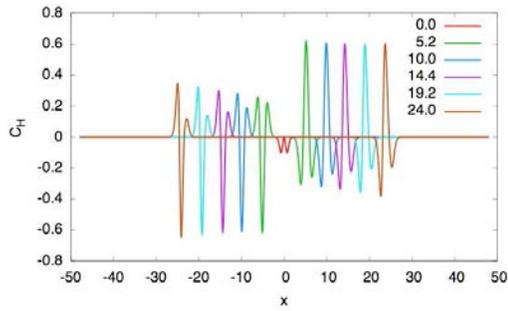
En la figura 6.27 se muestra la velocidad de constricción para este sistema. En ella se puede notar que la única elección de valores que da como resultado una



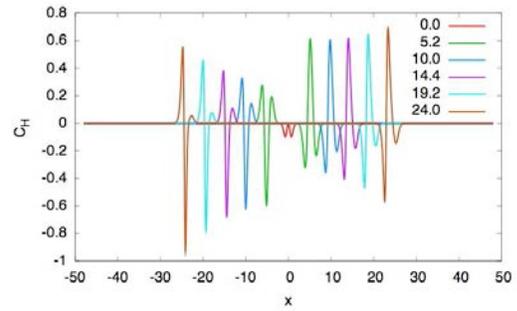
(a)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,2$



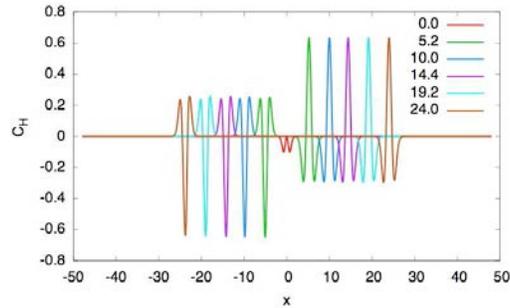
(b)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,2$

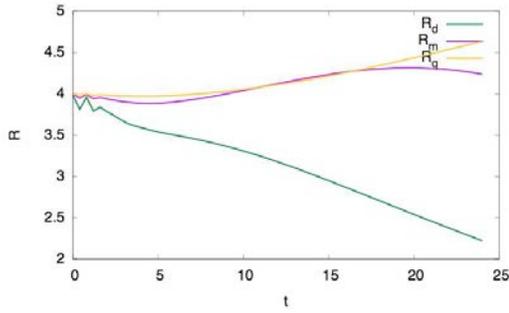


(d)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,4$

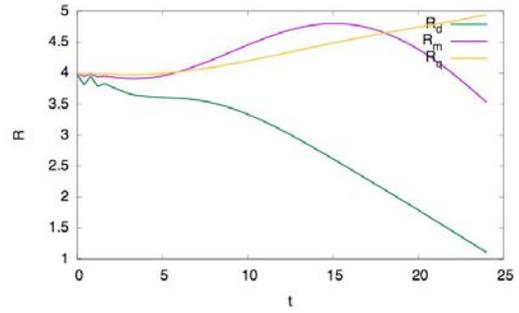


(e)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0$

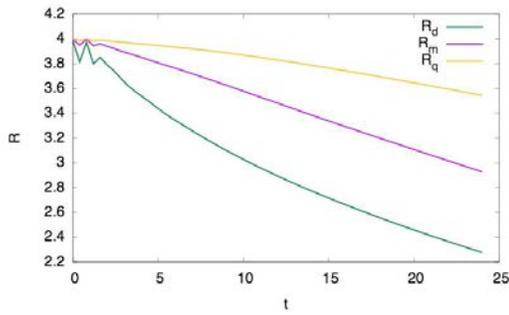
Figura 6.23: Evolución de  $C_H$  con el sistema de ecuaciones (3.4.68) a diferentes tiempos



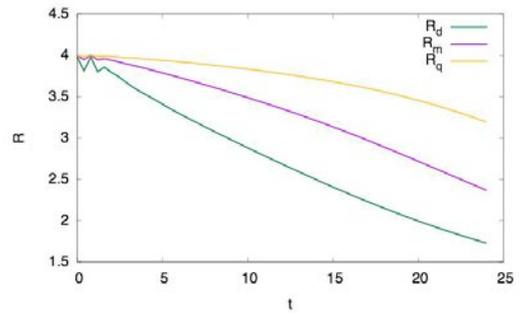
(a)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = -0,2$



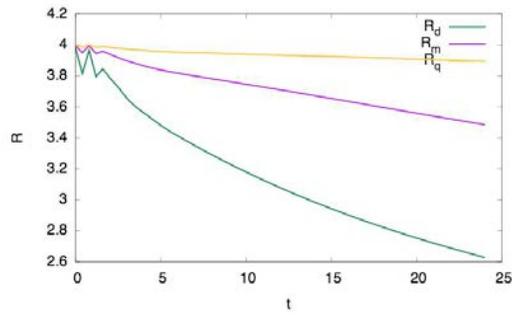
(b)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $m_{DA} = 0$

Figura 6.24: Raz3n de Convergencia de  $C_M$  con el sistema de ecuaciones (3.4.68)

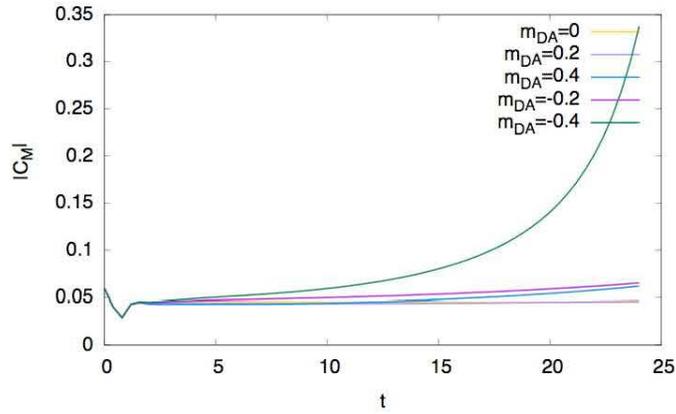


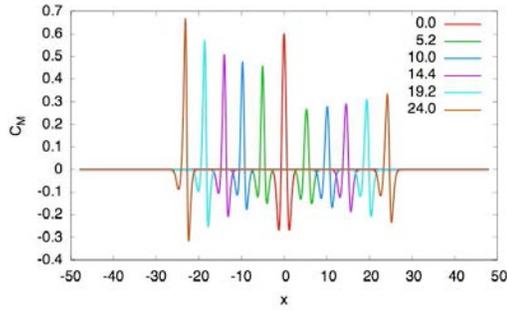
Figura 6.25: Norma de  $C_M$  para el sistema (3.4.68).

velocidad suave es la dada por la ecuación (6.2.44) que se puede ver en la figura 6.27(e). En las figuras 6.27(c) y 6.27(d) se ven gradientes desarrollándose, y la velocidad que se va volviendo un poco más vertical lo que nos indicaría que su derivada se vuelve infinita lo cual implica un choque. Esta característica no se puede notar del todo porque las evoluciones no son lo suficientemente largas, esto es debido a que para tiempos mayores a  $t = 24$  la función de lapso  $\alpha$  se volvía negativa por lo que el código dejaba de funcionar.

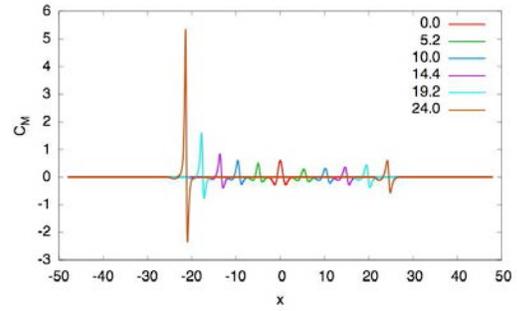
Por otro lado en las figuras 6.27(a) y 6.27(b) se ve que el pulso de la izquierda no sólo se está volviendo vertical si no que también hay un gradiente hacia abajo que se vuelve muy puntiagudo, esto nos muestra que la velocidad se hace muy pequeña y que de nuevo el pulso está viajando a diferentes velocidades. Es debido a esto que en las figuras 6.23 y 6.26 la única gráfica que tiene una evolución suave es aquella que tiene el par de valores dado por la ecuación (6.2.44).

Fijándonos en la figura 6.21 en dónde se ve la razón de convergencia de  $C_H$  podemos ver que en las 5 gráficas se aprecia que en general a mayor resolución la convergencia se acerca más a 4, sin embargo es únicamente en la figura 6.21(e) en la que se tiene una línea recta prácticamente en el 4, mientras que en las figuras 6.21(c) y 6.21(d) se tiene que la convergencia cae incluso cuándo la resolución aumenta.

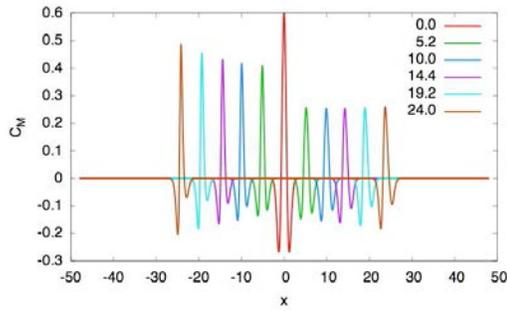
Aquí de nuevo hay que especificar que aunque en las figuras 6.21(a) y 6.21(b) conforme la resolución aumenta, la convergencia parece aumentar (hacia el final de la evolución), incluso es mayor a 4, esto no tiene mucho sentido ya que en estos sistemas el código deja de funcionar si se tomaba un valor de  $t > 24$ , al volverse negativa la función de lapso  $\alpha$ , de manera que estos sistemas presentan problemas graves y por lo tanto su comportamiento hacia el final de la evolución no es muy confiable.



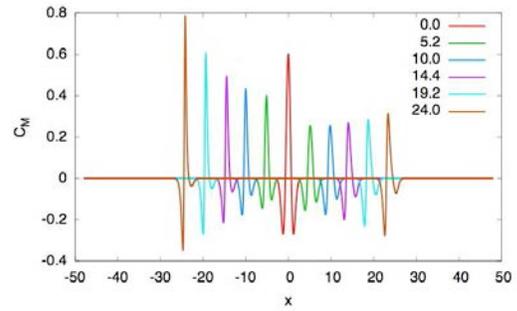
(a)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,2$



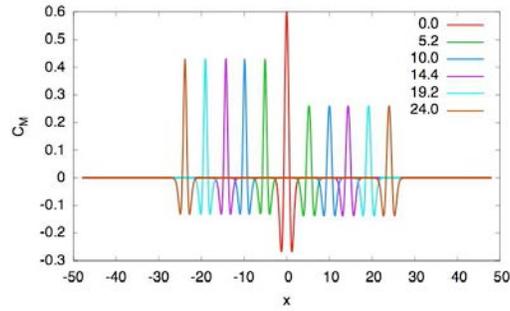
(b)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,2$

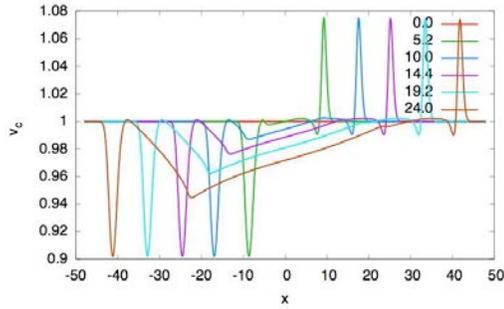


(d)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,4$

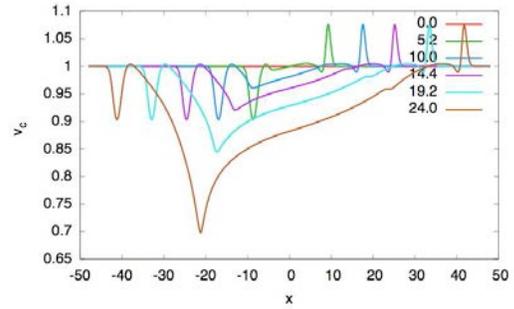


(e)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0$

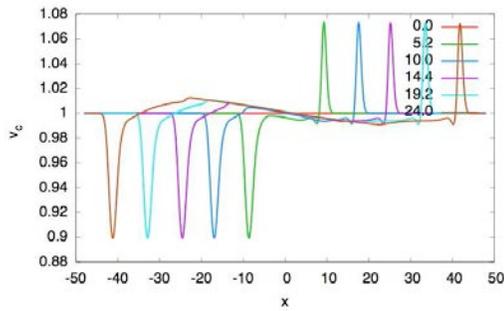
Figura 6.26: Evolución de  $C_M$  con el sistema de ecuaciones (3.4.68) a diferentes tiempos



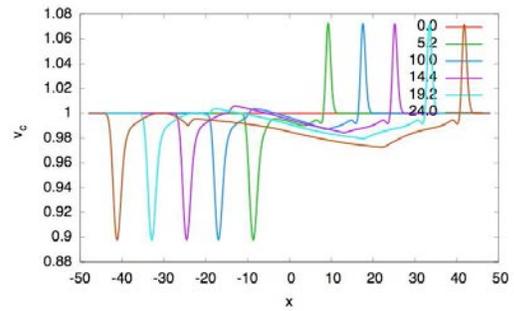
(a)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,2$



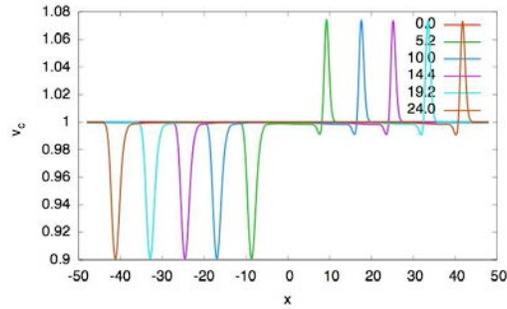
(b)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = -0,4$



(c)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,2$



(d)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0,4$



(e)  $h_K = 0,5$  y  $m_{D_A} = 0$

Figura 6.27: Velocidad de constricción para el sistema (3.4.68) a diferentes tiempos

En la figura 6.22 vemos que la norma de  $C_H$  es efectivamente un mínimo para los valores dados por la ecuación (6.2.44), mientras que para los otros valores la norma de  $C_H$  aumenta y de hecho en el caso particular de los de la ecuación (6.2.41) la norma crece mucho. Hay que recordar que debería de ser del orden de cero y se vuelve del orden 1 lo cuál no es lo esperado, esto concuerda con lo explicado anteriormente de que el código deja de funcionar si se utilizan estos valores en una evolución ligeramente más larga. Con esto podemos decir que la norma de  $C_H$  se acerca más a lo esperado, en este caso se estabiliza en  $C_H = 0,1$  justo cuándo los criterios de fuentes y el de degeneración lineal indirecta se cumplen simultáneamente, que era lo que se esperaba.

Por otro lado, en la figura 6.24(e) se puede notar que a mayor resolución se tiene una recta prácticamente en el 4, lo cuál nos indica que la solución que da el código converge a la del problema físico, mientras que en las figuras 6.24(c) y 6.24(d) tenemos que la convergencia decrece aún cuando la resolución aumenta. En las figuras 6.24(a) y 6.24(b) se nota que al aumentar la resolución también lo hace la convergencia, el argumento aquí es el mismo que en el caso de  $C_H$  y es que este par de sistemas al aumentar un poquito el tiempo de evolución el código deja de funcionar, al volverse  $\alpha < 0$ , de manera que se están dirigiendo a un problema muy grande, por lo que no hay que tener mucho en consideración su comportamiento en cuanto a convergencia en la frontera de la evolución.

Al fijarnos en la norma de  $C_M$  en la figura 6.25 podemos notar que la elección de valores de la ecuación (6.2.44) nos da un mínimo de la norma de  $C_M$ , mientras que en las demás elecciones se tienen valores de la constricción mayores. De nuevo se ve que en el caso de los valores de la ecuación (6.2.41) la norma de  $C_M$  crece mucho, y de hecho por la forma de la curva puede decirse que si el código hubiera evolucionado más tiempo se volvería demasiado grande, éste es el sistema que no puede ser evolucionado más tiempo porque ocasiona que el código truene. Podemos ver que si los dos criterios para evitar choques se cumplen de manera simultánea la norma de  $C_M$  se acerca más al cero esperado, en este caso llega a un valor de 0,05.

Con los argumentos mencionados podemos llegar a la conclusión de que para que las constricciones sean un mínimo y no se presenten choques en ellas es necesario evolucionar el sistema de ecuaciones (3.4.68) con los valores de la ecuación (6.2.44) que es lo que esperábamos encontrar.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En la sección 6.1 pudimos ver que al elegir el lapso armónico y el lapso evita-choques, la solución del sistema de ecuaciones (3.3.53) no presenta choques en la función de lapso, lo cuál concuerda con lo dicho en la sección 5.5.6 al tomar en cuenta lo que los criterios de fuentes y el de degeneración lineal indirecta piden como condiciones.

Cuando nos fijamos en la velocidad de norma para los sistemas en los que se generan choques de norma podemos darnos cuenta de que su evolución no es suave, de hecho se nota que incluso son casi verticales lo que indica que sus derivadas se están volviendo muy altas, también se aprecia que puntos diferentes del mismo pulso se mueven a diferentes velocidades lo cuál inevitablemente provoca problemas en la evolución de la función de lapso  $\alpha$ .

En la sección 6.2 vimos que al satisfacer ambos criterios para evitar choques de constricción se permite que la perturbación inicial en las constricciones, dada por la ecuación (6.2.23) se desvanezca dando paso a que la norma de las constricciones sean mínimas, mientras que si no se satisfacen ambos criterios se presentan problemas y la constricción crece en magnitud.

Al fijarnos en las gráficas de las velocidades de constricción, ecuaciones (6.2.35) y (6.2.45), podemos darnos cuenta que para que no haya choques es necesario que la evolución de la velocidad sea lo más suave posible, y que los pulsos derecho e izquierdo sean simétricos, o casi simétricos, ya que al viajar a diferentes velocidades provocan problemas que ocasionan que las constricciones ya no se propaguen de una manera suave y que generen choques. Esto se logró en los dos casos tratados, al utilizar los parámetros de manera tal que se cumplieran el criterio de fuentes y el de degeneración lineal indirecta de manera simultánea.

También es notorio que para poder explicar bien que pasa en las evoluciones es muy importante fijarnos en la velocidad del pulso, ya sea de norma o de constricción, porque es aquí en dónde se puede encontrar una razón por la cual la evolución se comporta de cierta manera.

Por último, hay que mencionar que en este trabajo surgió una gran dificultad, y es que en trabajos anteriores, ver [9], se había considerado que con satisfacer el criterio de fuentes, únicamente, era necesario para que no se presentaran choques en las constricciones, sin embargo al realizar las evoluciones correspondientes a los sistemas de ecuaciones (3.4.59) y (3.4.68) se encontró con que los resultados esperados no eran los obtenidos.

Al encontrarse con esta dificultad se tuvo que calcular el criterio de degeneración lineal indirecta en el que dieron los mismos resultados para los choques de norma, es decir que volvió a salir la ecuación (5.5.57), pero en lo concerniente a las constantes  $h_{K_{BB}}$  y  $m_{D_A}$  la condición era diferente. Al juntar las condiciones de ambos criterios y al evolucionar el código con estas  $h_{K_{BB}}$  y  $m_{D_A}$  se obtuvieron los resultados que se presentan en esta tesis.

En este punto hay que hacer hincapié en que de los 10 sistemas probados en la parte de choques de constricciones, únicamente 2 de ellos, uno para cada modificación de las ecuaciones de evolución del sistema, no presentan choques y presentan un mínimo en la norma de ambas constricciones: Hamiltoniana y momento. Estos dos sistemas presentan 2 características en común y es que en ambos se exige que la ecuación de evolución de la  $K$  se modifique por el factor:

$$h_K = \frac{1}{2}, \quad (7.0.1)$$

y que el factor por el que se modifica la otra ecuación, la de  $K_{BB}$  o  $D_A$  según sea el caso, sea cero, es decir que no se modifique la otra ecuación:

$$h_{K_{BB}} = m_{D_A} = 0. \quad (7.0.2)$$

De esta manera para cumplir las condiciones derivadas tanto del criterio de fuentes como del criterio de degeneración lineal indirecta simultáneamente se exige que la ecuación de evolución de  $K$  se modifique sumándole  $\frac{1}{2}C_H$  y no se haga ninguna otra modificación. En particular no se requiere que las ecuaciones de evolución sean modificadas por la constricción de momento.

El porqué se requiere estas condiciones no está claro y se deja para un futuro trabajo el investigar porque para este sistema de ecuaciones se necesitan cumplir los 2 criterios simultáneamente cuándo en otros sistemas no ha sido necesario, y el porque la constricción de momento no es necesaria para evitar los choques de constricciones.

# Apéndice A

## Convergencia, Consistencia y Estabilidad

En esta sección voy a explicar 3 conceptos que son importantes para la correcta elección de aproximaciones en diferencias finitas y su eficacia al resolver las ecuaciones diferenciales que se necesiten: Convergencia, Consistencia y Estabilidad.

Cuándo se hace una aproximación numérica a una ecuación diferencial se quiere que la solución numérica se parezca a la solución de la ecuación utilizada y no la de a otra ecuación. Y que al disminuir  $\Delta t$  y  $\Delta x$ <sup>1</sup> uno espera que la aproximación se acerque todavía más a la ecuación original, (i.e. en el límite continuo),cuándo esto sucede de manera local se dice que la aproximación es *Consistente*. Sin embargo ésta es una propiedad local de la solución y por lo tanto es posible que de manera global la solución numérica no se parezca o acerque a la solución de la ecuación diferencial.

Cuándo al refinar la malla computacional, ( $\Delta t$  y  $\Delta x$  que hacen cada vez más pequeños), la diferencia entre la solución exacta y la numérica a un tiempo fijo  $T$  tiende a cero en el límite continuo se dice que la solución es *Convergente*. Aquí hay que hacer la aclaración de que la consistencia de una solución es diferente a la convergencia de una solución ya que una solución puede ser consistente pero a un tiempo finito ser divergente. El problema es que ver que la solución numérica converge a la solución exacta y no a cualquier otra cosa puede ser bastante complicado.

La última propiedad que vamos a ver de las aproximaciones en diferencias finitas es que independientemente del comportamiento de la solución a la ecuación diferencial se debe pedir que las soluciones exactas de las ecuaciones en diferencias finitas permanezcan acotadas para cualquier tiempo finito  $T$  y cualquier intervalo de tiempo  $\Delta t$ , una aproximación que cumple con este requisito se dice que es *estable*. Esta propiedad es del sistema de ecuaciones en diferencias finitas y es el análogo discreto de que el sistema de ecuaciones diferenciales esté bien planteado.

---

<sup>1</sup>Es decir el tamaño de los pasos de integración en el código utilizado.

Un resultado que combina los conceptos anteriores es el *Teorema de Lax*:

*Dado un problema de valores iniciales bien planteado matemáticamente y una aproximación en diferencias finitas a él que satisface la condición de consistencia, entonces la estabilidad es condición necesaria y suficiente para la convergencia.*

Debido a que es mucho más fácil probar estabilidad que convergencia el resultado anterior es muy útil para poder discernir entre aproximaciones en diferencias finitas.

# Apéndice B

## Diferencias Centradas y Crank-Nicholson Iterado

En este trabajo se utilizó un método de líneas para realizar la evolución de los sistemas de ecuaciones. Separando las derivadas temporales y espaciales de la ecuación de evolución llegamos a una ecuación del tipo:

$$\partial_t F = \hat{O}F, \quad (\text{B.0.1})$$

en dónde  $F = F(x, t)$  y  $\hat{O}$  es un operador en el que se expresa la derivada espacial en diferencias finitas así como los términos restantes de nuestra ecuación de evolución que no involucren derivadas temporales. En nuestro caso las diferencias finitas para la derivada espacial utilizadas son centradas y están dadas de la siguiente manera:

$$\partial_x F = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2} dx. \quad (\text{B.0.2})$$

En el caso de los métodos de líneas no importa la estructura del operador  $\hat{O}$  sino la manera en la que se hace la evolución de la parte temporal. Sin embargo no todos los métodos de líneas son estables. En este trabajo utilizamos un método que ha probado ser estable (ver [3, 11]); el método de Crank-Nicholson Iterado (ICN) el cual puede verse de modo esquemático de la siguiente manera:

$$F_j^{(1)} = F_j^n + \frac{\Delta t}{2} \hat{O}F_j^1, \quad (\text{B.0.3})$$

$$F_j^{(i)} = F_j^n + \frac{\Delta t}{2} \hat{O}F_j^{i-1}, \quad i = 2, \dots, N \quad (\text{B.0.4})$$

$$F_j^{(n+1)} = F_j^n + \Delta t \hat{O}F_j^N, \quad (\text{B.0.5})$$

en dónde  $N$  es el número de pasos que se realizan, en [3, 11] se puede ver que con  $N = 2$  ya se obtiene una aproximación estable de segundo orden, es por esto que el método ICN de 3 pasos es el estándar en relatividad numérica y por lo tanto es el que utilizamos.



# Apéndice C

## Norma

En este trabajo, la norma que se utiliza para las diferentes funciones de  $x$  es el llamado *Valor Cuadrático Medio* o RMS por sus siglas en inglés (Root Mean Square) la cuál está dada por la siguiente ecuación:

$$|F| = f_{VCM} = \left( \frac{\sum_i f_i^2}{N + 1} \right)^{1/2}, \quad (\text{C.0.1})$$

en dónde  $N$  es el número de elementos que tiene la suma. En general la división debe ser entre  $N$  y no entre  $N + 1$ , pero en los códigos que utilizo se empieza a contar desde el cero y no desde el uno, es por eso que se utiliza  $N + 1$ .

En este caso cada uno de los elementos  $f_i$  corresponde al valor de una variable en un punto espacial al mismo tiempo, es decir  $f_i$  y  $f_j$  corresponden a diferentes valores espaciales pero evaluados en el mismo tiempo, de manera que la  $f_{VCM}$  obtenida es el valor cuadrático medio de la variable  $f$  a un tiempo dado. Estos son los valores que se grafican en todas las figuras en las que se indica la norma.

# Bibliografía

- [1] Miguel Alcubierre, *The Appearance of Coordinate Shocks in Hyperbolic Formalisms of General Relativity*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 5981-5991, gr-qc/9609015.
- [2] Miguel Alcubierre, Joan Massó, *Pathologies of hyperbolic gauges in general relativity and other field theories*, *Phys.Rev. D* **57** (1998) 4511-4515, gr-qc/9709024
- [3] M. Alcubierre, B. Brügmann, T. Dramlitsch, J.A. Font, P. Papadopoulos, E. Seidel, N. Stergioulas, and R. Takahashi, *Towards a Stable Numerical Evolution of Strongly Gravitating Systems in General Relativity: The Conformal Treatments.*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 044034, gr-qc/0003071 v2
- [4] Miguel Alcubierre, *Are gauge shocks really shocks?*, *Class. Quantum Grav.* **22** (2005) 4071-4082, gr-qc/0503030.
- [5] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *The Dynamics of General Relativity* (En L.Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, pp. 227-265. John Wiley, New York, 1962).
- [6] C. Bona, J. Massó, E. Seidel and J. Stela, *A New Formalism for Numerical Relativity*, *Phys. Rev. Lett.*, 75, pp. 600-603, (1995).
- [7] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, Malta, 2002).
- [8] R.J.LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws* (Birkhauser Verlag, Basel, 1992).
- [9] Bernd Reimann, Miguel Alcubierre, José A. González y Darío Nuñez, *Constraint and Gauge Shocks in One-Dimensional Numerical Relativity*, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 064021, gr-qc/0411094.
- [10] Bernard F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992).
- [11] Saul A. Teukolsky, *On the Stability of the Iterated Crank-Nicholson Method in Numerical Relativity*, *Phys. Rev. D* **61** (2000) 087501, gr-qc/9909026 v1
- [12] J. W. Thomas, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods* (Springer-Verlag, New York, 1998).

- [13] James W. York Jr. *Kinematics and Dynamics of General Relativity* (En Larry L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*, pp. 83-126. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979).