UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBABILIDADES DE RUINA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

JULISSA HERNÁNDEZ GODÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

Dr. MOGENS BLADT PETERSEN

2007

FACULTAD DE CIENCIAS

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Probabilidades de ruina"

realizado por **Hernández Godínez Julissa,** con número de cuenta **095158680,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Mogens Bladt Petersen	Mogs Bladt
Propietario	Dr.	Ramsés Humberto Mena Chávez	
Propietario	Dr.	Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L
Suplente	Dra.	Eliane Rodrígues Caloni	Eliane Regina Rodrigues
Suplente	Dra.	Ana Meda Guardiola	

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 18 de mayo del 2007.
EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN
DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA
DE
MATEMATICAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

1. Datos del alumno.
Hernández
Godínez
Julissa
56 90 40 62
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
095158680

2. Datos de asesor
Dr
Bladt
Petersen
Mogens

3. Datos del sinodal 1
Dr
Ramsés Humberto
Mena
Chávez

4. Datos del sinodal 2
Dr
Pablo
Padilla
Longoria

5. Datos del sinodal 3
Dra
Eliane
Rodrígues
Caloni

6. Datos del sinodal 1
Dra
Ana
Meda
Guardiola

7. Datos del trabajo escrito
Probabilidades de ruina
81 p
2007

Agradecimientos

Durante mi estancia en la licenciatura conocí y conviví con personas valiosas que me brindaron su colaboración en la realización de este trabajo. Así que quiero dedicarles las siguientes palabras de agradecimiento:

- A mis padres Paula y Hermilo por el apoyo económico y moral otorgado en la decisión de estudiar la carrera de Matemáticas. Por predicar siempre con el ejemplo su entereza de salir adelante todas las veces que la vida nos lo demande.
- A mis hermanas Gabriela, Erika y Jacqueline por proporcionarme cada una de ellas una fuente inspiradora diferente para salir adelante ante cualquier adversidad de cualquier tipo. Agradezco la amistad, respeto y confianza que nos tenemos mutuamente y decirles que las considero seres maravillosos.
- A Jorge Ferrer por compartir tantas cosas dentro y fuera de este proyecto. Por participar conmigo tantos años en el aprendizaje mutuo y porque eres una de las piezas fundamentales en muchos aspectos durante el desarrollo de este trabajo y sé que lo sabes.
- A Ana Anaya por la amistad y lealtad que me hizo sentir durante mi estancia en la Facultad de Ciencias, porque me hizo sentir animada y muy bien acompañada.
- A Paula Sánchez por la oportunidad de conocerla, por motivarme a ser mejor estudiante, por brindarme su amistad en un breve lapso de tiempo, y sin embargo, contundente.
- A Jorge Salgado por cooperar en la culminación de este trabajo y por ser mi gran amigo.

- A Cristina Díaz por estimularme y motivarme para concluir este proyecto y otorgarme su amistad.

Quiero también hacer la mención de las distinguidas personas que me apoyaron en la parte fuerte, la parte académica de este proyecto y por supuesto agradecer:

- Al Dr. Mogens Bladt, director de tesis, por todo el tiempo dedicado a la realización y dirección del trabajo. Le agradezco enormemente la paciencia, la tolerancia y, principalmente, la ayuda proporcionada.
- A Jaime Vázquez Alamilla por ser un maestro inspirador y motivador que mostró amistad y apego a sus estudiantes.
- A Leticia Aguilar Pascual por otorgarme su apoyo académico y, principalmente, su apoyo moral a inicios de la licenciatura. Gracias por depositar en mí su confianza.
- A mis sinodales Dr.Ramsés Mena, Dr.Pablo Padilla, Dra.Eliane Rodrígues y Dra.Ana Meda por hacer la respectiva revisión a este trabajo con el propósito de mejorarlo otorgando correcciones y comentarios acerca del mismo.

Indice General

A Cálculo de una Función Tipo Fase a través de *Maple* 75

Prefacio

Debido a que toda institución que inicia una actividad económica lo hace confiada en su éxito, el presente trabajo se enmarca precisamente dentro del ámbito de solvencia en el caso particular de las entidades aseguradoras.

El propósito de este trabajo es proporcionar de forma clara y sencilla una parte de lo que conforma el análisis de riesgo o teoría de riesgo, abarcando uno de sus principales objetivos: la solvencia, la cual se estudiará a través de la probabilidad de ruina.

La solvencia del asegurador puede definirse como la capacidad de hacer frente a sus obligaciones de pagar los siniestros[1] o reclamaciones presentes y futuros de los asegurados.

La solvencia se puede tratar desde dos puntos de vista: la solvencia estática y la solvencia dinámica. La solvencia estática se refiere a la solvencia de balance, es decir, cuando el asegurador es capaz de enfrentar las obligaciones derivadas de su cartera. Mientras que, la solvencia dinámica se considera al negocio de la compañía aseguradora como un flujo continuo de ingresos y pagos que va evolucionando con el paso del tiempo bajo la influencia de diversos factores que hacen que la siniestralidad[2] sufra fluctuaciones alrededor de su valor medio.

Existen métodos que se encargan de estudiar la solvencia. Según *Kastelijn* y *Remmerswaal*(1986), se pueden agrupar en tres grupos: Métodos basados en razones (*ratios*), métodos que consideran especialmente el riesgo de

[1]Daño de cualquier importancia que puede ser indemnizado por una compañía aseguradora.

[2]Frecuencia o índice de siniestros.

variación en el costo total agregado y métodos que incluyen análisis de otras fuentes de riesgo, incluyendo factores tales como gastos, rendimientos de activos, inflación, ciclos, etc.

Así que en el desarrollo de este trabajo, el estudio de la solvencia se tratará dentro del tercer grupo utilizando teoría de la ruina. En las compañías aseguradoras el principal riesgo a considerar es la siniestralidad. Ésta puede causar pérdidas inesperadas e incluso producir la ruina. La siniestralidad se refiere al riesgo de que ocurran más siniestros de los esperados o de que algunos siniestros sean de importe muy superior al esperado de manera que se obtengan pérdidas inesperadas, provocando ruina.

De ahí la importancia de estudiar la variable aleatoria tiempo de ruina, la cual analiza el momento en que una aseguradora se arruinará.

La teoría de la ruina se ocupa de las fluctuaciones en el número e importe de los siniestros. El modelo clásico consiste en modelar el costo total de los siniestros como un proceso Poisson compuesto donde la hipótesis básica es que el número de siniestros sigue un proceso estocástico de Poisson. Este modelo también indica la factibilidad de que la reserva[3] que constituye la aseguradora sea insuficiente para afrontar las obligaciones derivadas de sus contratos.

Por ley, la reserva de una aseguradora debe cumplir con ciertos criterios mínimos, para así mantener solventes las empresas y de esta forma minimizar el riesgo de incumplimiento. En sí la reserva debe mantenerse arriba de un cierto nivel.

El objetivo general del trabajo es analizar la variable momento de ruina en una entidad de seguros, con el enfoque de la teoría de la ruina, y considerando únicamente el riesgo de siniestralidad.

[3]Fondo que cubre gastos (in)esperados que provienen por la aleatoriedad del número de siniestros o reclamaciones que llegan y sus cantidades.

Resumen

El trabajo consta de seis capítulos que a continuación se explican brevemente:

En el Capítulo 1 se presentan los preliminares del trabajo, se abarcan los conceptos y definiciones básicas para el buen entendimiento de los posteriores capítulos. Figuran definiciones tales como: proceso de Poisson, cadenas de Markov, procesos de Markov de saltos, ecuaciones de Kolmogorov, probabilidades de transición y, finalmente, dos tipos de convergencia: la casi segura y en distribución.

En el Capítulo 2, denominado teoría de renovación, muestra desde la definición de renovación, proceso de renovación, los diferentes tipos de procesos de renovación como son terminales (transitorios) y estacionarios; la correspondiente función y la densidad de renovación, así como la ecuación de renovación.

El Capítulo 3 se refiere al método fase, el cual básicamente consiste en descomponer en distintas etapas a una variable aleatoria positiva con duración exponencial en cada una de las etapas. Cuando se aplica el método fase a una variable aleatoria se dice que una variable aleatoria tiene distribución tipo fase.

Se exponen ejemplos cuando se conoce cómo se distribuye la variable aleatoria entre las que se muestran la distribución Coxian, la distribución Erlang y, por supuesto, el caso general cuando la función de densidad es $f_X(s)$, calculando en la mayoría de los casos los respectivos elementos de los que consta una distribución fase: diagrama fase, matriz de intensidad y distribución inicial del proceso.

También se mencionan las propiedades básicas de las variables aleatorias tipo fase: distribución acumulada, densidad, función generadora de momentos y el n-ésimo momento.

En el Capítulo 4 se presenta el modelo de riesgo más sencillo dentro del entorno de las compañías aseguradoras, se denomina modelo de riesgo clásico, también conocido como modelo compuesto de Poisson, o bien, de Cramér-Lundberg; el modelo considera que el número de reclamaciones se distribuye como un proceso de Poisson.

Se calcula la probabilidad de ruina de la aseguradora y, consecuentemente, la probabilidad de que no ocurra ruina (probabilidad de supervivencia). Este cálculo se realiza desde dos enfoques, es decir, utilizando dos distintos procesos de riesgo:

- El proceso R_t conocido como el proceso de riesgo de la reserva de la aseguradora.
- El proceso $Y(t)$ llamado proceso de reclamaciones excedentes o también proceso de escalera.

Dentro del desarrollo del proceso $Y(t)$, se define la variable aleatoria tiempo de ruina, la cual tiene como distribución la denominada distribución escalera, distribución que ayuda al cálculo de las probabilidades de ruina y supervivencia cuando las reclamaciones se distribuyen de manera exponencial hacia el asegurador. Este cálculo también se presenta utilizando el proceso R_t.

Además se presentan los cálculos de la probabilidad de ruina y de la distribución inicial de cruce cuando el tamaño de las reclamaciones tiene distribución tipo fase, analizándose el modelo clásico de riesgo desde el enfoque de los procesos de escalera.

Se hace una comparación gráfica entre una función tipo fase y una distribución log normal. Utilizando *Maple* se hacen las correspondientes operaciones para obtener la probabilidad de ruina para la función tipo fase.

En el Capítulo 5 se plasma una relación entre procesos de riesgo y colas, así que se presenta una breve introducción de los sistemas de espera, mejor conocidos como colas, se definen sus principales elementos: proceso de llegada, distribución del servicio (clientes), disciplina de la cola, número de servidores.

Se mencionan los procesos de Lindley, los cuales son procesos de riesgo, pues en modelos de colas suelen aparecer uno o más de dichos procesos, o bien, procesos de estructura semejante. También se exponen algunos ejemplos particulares de sistemas de colas.

Finalmente, el Capítulo 6 se centra en conclusiones del trabajo desarrollado donde se citan las pertinentes observaciones y conclusiones que se obtuvieron al desarrollar este material, además se mencionan otras posibles líneas de investigación abiertas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se abarca una serie de definiciones necesaria para el buen entendimiento de los siguientes capítulos. Se incluyen definiciones como σ-álgebra, medida de probabilidad, proceso de Poisson, cadenas de Markov, procesos de Markov de saltos, ecuaciones de Kolmogorov, probabilidades de transición y, finalmente, dos tipos de convergencia: la casi segura y en distribución.

Las fuentes de información para este capítulo son: Bladt [7], Bladt [8] y Fernández [10].

1.1 σ-álgebra y Medida de Probabilidad

Definición 1.1.1. (σ-álgebra) Sea Ω un conjunto no vacío.Una σ-álgebra $\mathcal{F}$ sobre Ω es una familia de subconjuntos de Ω tal que:

1. el conjunto vacío $\varnothing$ pertenece a $\mathcal{F}$.
2. si A pertenece a $\mathcal{F}$, entonces el complemento $\Omega \backslash \mathrm{A}$ también pertenece.
3. si A_1, A_2,... es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces la unión numerable $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup ...$ también está en $\mathcal{F}$.

Definición 1.1.2. (Medida de probabilidad) Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra sobre Ω. Una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ es una función:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1],$$

tal que:

1. $\mathbb{P}(\Omega)$=1.

2. si A_1, A_2,... son conjuntos disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ y además pertenecen a $\mathcal{F}$, entonces:

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup ...] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + ...$$

   De este modo, la tercia (Ω,$\mathcal{F}$,$\mathbb{P}$) se denomina un espacio de probabilidad.

1.2 Proceso de Poisson

Definición 1.2.1. (Proceso de Poisson) Una sucesión de variables aleatorias $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ se dice que es un proceso de Poisson con intensidad[1] α>0 si:

1. N_0=0.

   Y si dentro del intervalo (t,t+h]:

2. $\mathbb{P}[N_h=1]=\alpha h+o(h)$.

3. $\mathbb{P}[N_h \geq 2]=o(h)$.

   Donde $o(t)$ es una función que tiene la propiedad de que $\lim_{h\to 0} o(h)/h=0$.

4. Es un proceso con incrementos independientes, lo cual significa que: $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}}, ..., N_{t_1} - N_{t_o}$ son variables aleatorias independientes, donde $0 < t_0 < t_2 ... < t_n$ y $n \geq 1$.

5. Es un proceso con incrementos estacionarios, es decir:

$$N_t - N_s \sim N_{t-s},$$

   para cualquier $s < t$.

Características:

- Los tiempos entre arribos son independientes y con distribución exponencial con parámetro α (exp(α)).
- $N_t \sim Poisson(\alpha t)$.

[1]El número promedio de llegadas en el intervalo [0, t] es αt y el número promedio de llegadas en el intervalo [0,1] es α.

1.3 Cadenas de Markov

Considérese un espacio de probabilidad (Ω,$\mathcal{F}$,$\mathbb{P}$), un conjunto de tiempos T y variables aleatorias $X_n : \Omega \to E, n \geq 0$ donde E es un conjunto a lo más numerable de los posibles valores de las variables aleatorias que recibe el nombre de espacio de estados.

Definición 1.3.1. (Cadena de Markov) Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias en E. Se dice que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov si para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x_o, ..., x_n \in E$:

$$\mathbb{P}[X_n = x_n \mid X_o = x_o, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}] = \mathbb{P}[X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}]$$

$$\forall n \geq 1, \forall x_o, ..., x_n \in E.$$

Estas probabilidades serán llamadas probabilidades de transición en un paso o simplemente probabilidades de transición[2].

En el caso más general, las probabilidades de transición pueden depender de n, cuando son independientes de n se dice que la cadena de Markov es homogénea. Esto quiere decir que una cadena de Markov es homogénea si:

$$\mathbb{P}[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = \mathbb{P}[X_1 = j \mid X_o = i] \qquad \forall n \geq 1$$

y se denotará como:

$$P_{ij} = \mathbb{P}[X_n = j \mid X_{n-1} = i].$$

A partir de esta sección, se supondrá que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov homogénea.

Para facilitar la notación, en ocasiones es común escribir las probabilidades de transición en forma matricial, y que se denota como $\mathbf{P}$, de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . \\ . & P_{i,i+1} & P_{i,i+2} & P_{i,i+3} & . \\ . & P_{i+1,i+1} & P_{i+1,i+2} & P_{i+1,i+3} & . \\ . & P_{i+2,i+1} & P_{i+2,i+2} & P_{i+2,i+3} & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

[2]De aquí en adelante se hará un cambio de notación para los estados por las letras i, j.

Nótese que la matriz es cuadrada y que el renglón i corresponde a la densidad condicional de X_{n+1}, dado que $X_n = i$, por lo que la suma de los términos de cada renglón es igual a 1. A esta matriz se le llama la matriz de probabilidades de transición o simplemente la matriz de transición.

Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una cadena de Markov homogénea con espacio de estados E con densidad inicial $\prod = \{\pi_i, i \in E\}$, es decir, $\mathbb{P}[X_o = i] = \pi_i$, entonces se puede calcular la densidad conjunta de $(X_o, X_1, ..., X_n)$ $\forall n \geq 1$:

$$\mathbb{P}[X_o = x_o, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] = \pi_{x_o} P_{x_o,x_1} P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{n-1},x_n}.$$

Las probabilidades de transición en n pasos (P_{ij}^n) están definidas por:

$$\begin{aligned} P_{ij}^n &= \mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid X_m = i]. \\ P_{ij}^n &= \mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid X_o = x_o, ..., X_m = i]. \end{aligned}$$

Esta relación es un caso particular del siguiente resultado general:

Proposición 1.3.1. *Sea* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *una cadena de Markov homogénea y* $B_1, ..., B_m$, A_o,...,$A_n \in E$ *entonces:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_{n+1} \in B_1, ..., X_{n+m} \in B_m \mid X_o \in A_o, ..., X_n = i] \\ &\quad = \mathbb{P}[X_{n+1} \in B_1, ..., X_{n+m} \in B_m \mid X_n = i] \\ &\quad = \sum_{x_o \in B_1} \cdots \sum_{x_m \in B_m} P_{i,x_1} P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{m-1},x_m}. \end{aligned}$$

Así la función de transición en n pasos se puede expresar de la siguiente manera:

$$P_{ij}^n = \sum_{x_1 \in E} \cdots \sum_{x_m \in E} P_{i,x_1} P_{x_1,x_2} \cdots P_{x_{m-2},x_{m-1}} P_{x_{m-1},j} \qquad n \geq 1.$$

De la previa expresión se puede concluir que:

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_k P_{ik}^n P_{kj}.$$

De forma más general, para $n, m \geq 1$ se tiene:

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_k P_{ik}^n P_{kj}^m.$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación de Chapman-Kolmogorov. La matriz de transición en n pasos se denota como $\mathbf{P}^n$, y también se refiere a una matriz cuadrada cuyos renglones suman 1. Nótese que la ecuación de Chapman-Kolmogorov muestra que la matriz de transición en n pasos es el producto de n veces la matriz de transición $\mathbf{P}$, lo que significa que $\mathbf{P}^n = \underbrace{\mathbf{P} \cdots \mathbf{P}}_{n}$.

Ahora bien, a partir de las probabilidades de transición de n pasos y la distribución inicial $\prod = \{\pi_i, i \in E\}$ se puede calcular la densidad de X_n, puesto que con el teorema de probabilidad total se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n = j] &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}[X_o = i, X_n = j] \\ &= \sum_{i \in E} P_{ij}^n \mathbb{P}[X_o = i] = \sum_{i \in E} P_{ij}^n \pi_i. \end{aligned}$$

Tiempos de entrada o inicios de un conjunto

Definición 1.3.2. (Tiempo de entrada a un conjunto) Sea $A \in E$. Se define el tiempo de entrada de la cadena $\{X_n\}_{n \geq 0}$ al conjunto A como la variable aleatoria T_A dada por:

$$T_A = \begin{cases} \inf\{n > 0 \mid X_n \in A\} & \text{si } X_n \in A, \text{ para alguna } n > 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

En algunos casos esta variable aleatoria puede tomar valores ∞ con probabilidad positiva, es decir, con probabilidad positiva la cadena nunca estará en el conjunto A. Para facilitar la notación si $A = \{i\}$, se denotará $T_A = T_i$ y:

$$\mathbb{P}_i[T_A < \infty] = \mathbb{P}[T_A < \infty \mid X_0 = i].$$

Proposición 1.3.2. *Para cada $i, j \in E$*

$$\mathbb{P}_i[T_j = n + 1] = \sum_{k \neq j} P_{ik} \mathbb{P}_k[T_j = n], \qquad n \geq 1.$$

La ecuación anterior es una fórmula recursiva para la densidad de T_j, la cual es posible calcular ya que para toda $i, j \in E$:

$$\mathbb{P}_i[T_j = 1] = P_{ij}.$$

Además se tiene:

$$\mathbb{P}_i[T_j = \infty] = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i[T_j = k].$$

Notación 1.3.1. Sea $\rho_{ij} = \mathbb{P}_i[T_j < \infty]$.

Obsérvese que $\rho_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_i[T_j = k]$.

Definición 1.3.3. (Estado recurrente y transitorio) Se dice que un estado $i \in E$ de una cadena de Markov es recurrente si $\rho_{ii} = 1$ y transitorio si $\rho_{ii} < 1$. En particular si $\rho_{ii} = 1$, entonces i es un estado recurrente que se llamará absorbente.

Ahora si i es un estado recurrente entonces $\mathbb{P}_i[T_i = \infty] = 0$, por otro lado, si i es un estado transitorio entonces $\mathbb{P}_i[T_i = \infty] > 0$, es decir, si i es transitorio con una probabilidad positiva la cadena no se regresa al estado i.

Definición 1.3.4. (Comunicación entre estados) Sean $i, j \in E$, se dice que i accede a j si $\rho_{ij} > 0$, y se denota $i \to j$. Si $i \to j$, $j \to i$ se dice que i y j comunican entre sí y se denota por $i \leftrightarrow j$.

A continuación se muestran algunas propiedades de los estados recurrentes y transitorios que están basadas en el tiempo de ocupación, es decir, el tiempo que la cadena pasa en cada estado.

Definición 1.3.5. (Tiempo de ocupación en un estado) Para cada $i \in E$ se define el tiempo de ocupación en el estado i, N_i como:

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_i(X_n),$$

donde $\mathbf{1}_i(X_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } X_n = i \\ 1, & \text{si } X_n \neq i \end{array} \right.$.

En otras palabras, N_i es el número de veces que la cadena pasa en cada estado.

Proposición 1.3.3. *Sean $i, j \in E$, entonces*

▷ $\mathbb{P}_i[N_j = k] = \begin{cases} \rho_{ij}\rho_{jj}^{k-1}(1-\rho_{jj}), & 1 \leq k < \infty \\ 1-\rho_{ij}, & k = 0 \end{cases}.$

▷ Si $j \in E$ es un estado recurrente, entonces:
$\mathbb{P}_i[N_j = k] = \begin{cases} 0, & 1 \leq k < \infty \\ 1-\rho_{ij}, & k = 0 \\ \rho_{ij}, & k = \infty \end{cases}$
y
$\mathbb{E}_i[N_j] = \begin{cases} \infty, & \text{si } \rho_{ij} > 0 \\ 0, & \text{si } \rho_{ij} = 0 \end{cases}.$

En particular:

$$\mathbb{P}_j[N_j = \infty] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_j[N_j] = \infty.$$

▷ Si $j \in E$ es un estado transitorio:

$$\mathbb{P}_i[N_j < \infty] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}_i[N_j] = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}}.$$

1.4 Procesos de Markov de Saltos

Definición 1.4.1. (Proceso de Markov) Un proceso de Markov $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ($t \in \mathbb{R}$) sobre un espacio finito E es un proceso estocástico con la propiedad que:

$$\mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = i_1, X(0) = i_o) = \mathbb{P}(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{n-1}).$$

El proceso de Markov es homogéneo en tiempo si además $\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = P_{ij}^h$ solamente depende de h. Se llama P_{ij}^h sus probabilidades de transición y la matriz $\mathbf{P}^h = \{P_{ij}^h\}_{i,j\in E}$ su matriz de transición.

Teorema 1.4.1. Chapman-Kolmogorov:

$$\mathbf{P}^{s+t} = \mathbf{P}^s\mathbf{P}^t.$$

Demostración. Por la ley de la probabilidad total y la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned} P_{ij}^{t+s} &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_s = k \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = k, X_0 = i)\mathbb{P}(X_s = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_k \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = k)\mathbb{P}(X_s = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_k P^s_{ik} P^t_{kj}.
\end{aligned}$$

□

Notación 1.4.1. Sea $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Sea $S_0 = 0 < S_1 < S_2 < \ldots$ los tiempos de salto. Las diferencias $T_n = S_{n+1} - S_n$ son los tiempos de ocupación en los estados entre saltos. Hay que notar con cuidado la notación usada: T_0 es el tiempo hasta el primer salto, T_1 es el tiempo entre el primer salto y el segundo salto, y así para adelante. Finalmente sean $Y_0, Y_1, \ldots$ la secuencia de estados visitados, denótese $Y_i = X(S_i)$. En caso que existiera un último S_n, i.e. en caso de absorción en algún estado, entonces se define $T_n = T_{n+1} = \ldots = \infty$ y $Y_n = Y_{n+1} = \ldots = i$ si $X(S_n) = i$.
Está claro que las trayectorias de X_t se pueden reconstruir usando el conocimiento de $\{(Y_n, T_n)\}_{n\geq 0}$. Entonces la distribución simultánea o conjunta de (Y_n, T_n) es de principal interés. Sea

$$p_n = \mathbb{P}_i(Y_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \ldots, n).$$

Teorema 1.4.2. Existen números $\lambda_i \geq 0$ y una matriz de transición $\mathbf{Q}$ tal que

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} q_{i_{k-1} i_k} \exp(-\lambda_{i_{k-1}} t_k).$$

Demostración. Defina $f(t) = \mathbb{P}_i(T_0 > t)$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(t+s) &= \mathbb{P}_i(T_0 > t+s) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{P}_i(T_0 > t+s \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_i(\mathbb{P}_i(T_0 > t+s, T_0 > t \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_i(I\{T_0 > t\}\mathbb{P}_i(T_0 > t+s \mid \mathcal{F}_t)) \quad \text{(pues la indicadora } I\{T_0 > t\} \text{ es } \mathcal{F}_t \text{ medible)} \\
&= \mathbb{E}_i(I\{T_0 > t\}\mathbb{P}_i(T_0 > s)) \quad \text{(Markov y } X_t = i) \\
&= f(t)f(s).
\end{aligned}$$

Como f es no creciente (es la probabilidad de la cola de una distribución) entonces f es de la forma

$$f(t) = \exp(-\lambda_i t)$$

para algún $\lambda_i \geq 0$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(Y_1 = j, T_0 > t) &= \mathbb{E}_i(\mathbb{P}_i(Y_1 = j, T_o > t \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_i(I\{T_0 > t\}\mathbb{P}_i(Y_1 = j)) \\
&= q_{ij}\exp(-\lambda_i t),
\end{aligned}$$

donde $q_{ij} = \mathbb{P}_i(Y_1 = j)$.

La fórmula general sigue de inducción y la propiedad fuerte de Markov. Supóngase que la fórmula p_m es válida para $m = n-1$. Entonces

$$\begin{aligned}
p_n &= \mathbb{P}_i(Y_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \ldots, n) \\
&= \mathbb{P}_i(Y_n = i_n, T_n > t_n, Y_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \ldots, n-1) \\
&= \mathbb{E}_i\left(\mathbb{P}_i(Y_n = i_n, T_n > t_n, Y_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \ldots, n-1) \mid \mathcal{F}_{S_{n-1}})\right) \\
&= \mathbb{E}_i\left(I\{Y_k = i_k, T_{k-1} > t_k, k = 1, \ldots, n-1\}\mathbb{P}_i(Y_n = i_n, T_{n-1} > t_n \mid \mathcal{F}_{S_{n-1}})\right) \\
&= \mathbb{P}_{i_{n-1}}(Y_1 = i_n, T_0 > t_n)p_{n-1} \quad \text{(la función indicadora es medible y Markov fuerte)} \\
&= q_{i_{n-1}i_n}\exp(-\lambda_{i_{n-1}}t_n)p_{n-1},
\end{aligned}$$

y el resultado se sigue por inducción. $\square$

Corolario 1.4.1. (i) *$\{Y_n\}$ es una cadena de Markov.*
(ii) *Existen números $\lambda_i \geq 0$ tal que $\{T_\ell\}$ son condicionalmente independientes con $T_\ell \sim \exp(\lambda_{Y_\ell})$.*

Demostración.

(i) Utilizando **Teorema** (**1.4.2**).

(ii) Nótese que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(T_0 &> t_0, \ldots, T_{n-1} > t_{n-1} \mid Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n) \\
&= \frac{\mathbb{P}_i(T_0 > t_0, \ldots, T_{n-1} > t_{n-1}, Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n)}{\mathbb{P}_i(Y_1 = i_1, \ldots, Y_n = i_n)} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^n q_{i_{k-1}i_k} \exp(-\lambda_{i_{k-1}} t_k)}{\prod_{k=1}^n q_{i_{k-1}i_k}} \quad (i_0 = i) \\
&= \prod_{k=1}^n \exp(-\lambda_{i_{k-1}} t_k),
\end{aligned}
$$

implicando la independencia condicional y las distribuciones exponenciales.
□

Se ha demostrado que si $\{X_t\}$ es un proceso de Markov de saltos entonces existen constantes $\lambda_i \geq 0$ y probabilidades q_{ij} con las propiedades mencionadas en el Teorema (1.4.2). La implicación contraria del Teorema (1.4.2), es decir, el regreso del teorema, también es cierta pero no se va a profundizar en la demostración, la cual principalmente es un ejercicio en el uso del teorema de existencia de Kolmogorov.

Definición 1.4.2. (Matriz de intensidad) La matriz de intensidad de $\{X_t\}_{t\geq 0}$, o bien, generador infinitesimal, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j\in E}$ está definida por

$$
\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad i \neq j, \quad \lambda_{ii} = -\sum_{j\neq i} \lambda_{ij} = -\lambda_i.
$$

Se nota que los elementos en las filas de $\mathbf{\Lambda}$ suman cero. Como los tiempos de ocupación en el estado i son exponenciales $\exp(\lambda_i)$, la probabilidad de que habrá un salto del estado i en el intervalo $[t, t+dt)$ es de $\lambda_i dt$ (o formalmente $\lambda_i h + o(h)$, donde $o(h)$ es una función tal que $o(h)/h \to 0$ cuando $h \to 0$). Condicionalmente que habrá un salto en $[t, t+dt)$ y $X_{t_-} = i$ (límite por la izquierda), la probabilidad de que el siguiente estado sea j es de q_{ij}. Entonces la probabilidad de un salto del estado i al estado j en $[t, t+dt)$ es de $\lambda_i dt q_{ij} = \lambda_{ij} dt$.

Teorema 1.4.3. *Ecuaciones diferenciales de Kolmogorov.*
Si $\mathbf{P}^t = \{P_{ij}^t\}$ denotan las probabilidades de transición del proceso de Markov de saltos,

$$
P_{ij}^t = \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j \mid X_s = i),
$$

entonces

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{P}^t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^t\mathbf{\Lambda}.
$$

Demostración. Condicionando en el tiempo del primer arribo T_0,

$$\begin{aligned}
P_{ij}^t &= \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) \\
&= \mathbb{P}_i(T_0 > t)\delta_{ij} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i s} \sum_{k \neq i} q_{ij} P_{kj}^{t-s} ds \\
&= e^{-\lambda_i t}\delta_{ij} + \int_0^t \lambda_i e^{-\lambda_i (t-u)} \sum_{k \neq i} q_{ij} P_{kj}^{u} du \\
&= e^{-\lambda_i t}\left(\delta_{ij} + \int_0^t e^{\lambda_i u} \sum_{k \neq i} \lambda_{ki} P_{kj}^{u} du\right).
\end{aligned}$$

El integrante es acotado sobre $[0, T]$ y por lo tanto se concluye que P_{ij}^t es diferenciable con respecto a t. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} P_{ij}^t &= -\lambda_i e^{-\lambda_i t}\left(\delta_{ij} + \int_0^t e^{\lambda_i u} \sum_{k \neq i} \lambda_{ki} P_{kj}^{u} du\right) \\
&\quad + e^{-\lambda_i t} e^{\lambda_i t} \sum_{k \neq i} \lambda_{ki} P_{kj}^t \\
&= -\lambda_i P_{ij}^t + \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} P_{kj}^t \\
&= \lambda_{ii} P_{ij}^t + \sum_{k \neq i} \lambda_{ik} P_{kj}^t \\
&= \sum_{k} \lambda_{ik} P_{kj}^t,
\end{aligned}$$

lo cual es lo mismo que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}^t = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{\mathbf{t}}.$$

La otra ecuación es más difícil de demostrar en general y se hará solamente sujeto a la restricción que las intensidades son acotadas, i.e. $\sup_i \lambda_i < \infty$. Recuérdese que

$$P_{ij}^h = \lambda_{ij} h + o(h)$$

cuando $h \to 0$, y cuando $i = j$,

$$P_{ii}^h = 1 - \lambda_i h + o(h).$$

Entonces
$$\frac{P_{ij}^h - \delta_{ij}}{h} \to \lambda_{ij} \quad \text{cuando} \quad h \to 0.$$
Se necesita que la expresión anterior esté uniformemente acotada en i, j y h. Primero,

$$\begin{aligned}
0 \leq P_{ij}^s &\leq \text{probabilidad de que haya un arribo en } [0, s] \\
&= \int_0^s \lambda_i e^{-\lambda_i u} du \\
&= \lambda_i \int_0^s e^{-\lambda_i u} du \\
&\leq \lambda_i \int_0^s 1 du \\
&= \lambda_i s,
\end{aligned}$$

lo cual implica que
$$0 \leq \frac{P_{ij}^s}{s} \leq \lambda_i \leq \sup_j \lambda_j.$$
Similarmente,

$$\begin{aligned}
0 \leq 1 - P_{ii}^s &\leq \text{probabilidad de un salto en } [0, s] \\
&\leq \lambda_i s,
\end{aligned}$$

implicando lo mismo que antes. Entonces por convergencia dominada

$$\begin{aligned}
\frac{P_{ij}^{s+h} - P_{ij}^s}{h} &= \frac{1}{h}\left(\sum_k P_{ik}^s P_{kj}^h - P_{ij}^s\right) \\
&= \sum_k P_{ik}^s \frac{P_{kj}^h - \delta_{kj}}{h} \\
&\to \sum_k P_{ik}^s \lambda_{kj},
\end{aligned}$$

implicando que
$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}^t = \mathbf{P^t}\mathbf{\Lambda}.$$

□

Corolario 1.4.2. Si E es finito, entonces

$$\mathbf{P}^t = \exp(\mathbf{\Lambda} t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda}^n t^n}{n!}.$$

Demostración. Sigue de teoría estándar de ecuaciones diferenciales y de

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{I}.$$

□

Definición 1.4.3. (Cadena irreducible) Se dice que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es irreducible si existe un $t > 0$ tal que $P^t_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in E$.

Entonces $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es irreducible si y sólo si $\{Y_n\}_{n\in E}$ es irreducible o si y sólo si $P^t_{ij} \geq 0$ para todo $t > 0$.

Teorema 1.4.4. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
(i) $\{Y_n\}_{n\in E}$ *es irreducible.*
(ii) $\forall i,j \in E \quad \exists t > 0 : P^t_{ij} > 0.$
(iii) $\forall i,j \in E \quad \forall t > 0 : P^t_{ij} > 0.$

Demostración. (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) es obvio. Falta demostrar (i) $\Rightarrow$ (iii). Tómese $i, j \in E$. Entonces i, j comunican (con respecto a $\{Y_n\}$) y por lo tanto existe un camino de i a j, sea $i, i_1, i_2 \ldots, i_n, j$ tal que $q_{ii_1} > 0, q_{i_1 i_2} > 0, \ldots, q_{i_n j} > 0$. Ahora la probabilidad

$$P^t_{ij} \geq \quad \text{prob. de irse} \quad i \to i_1 \to \ldots \to i_n \to j \quad \text{en tiempo } t.$$

La expresión a la mano derecha es una convolución de exponenciales (gama), la cual tiene una densidad estrictamente positiva en todos sus puntos y lo cual entonces implica que $P^t_{ij} \geq 0$ para todo $t > 0$. □

1.5 Convergencia

Sea $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y X una variable aleatoria definida sobre el mismo espacio.

Definición 1.5.1. (Convergencia casi segura) Se dice que $\{X_n\}$ converge casi seguramente a X con probabilidad 1 si existe $A \in \mathcal{F}$ nulo, es decir, que $\mathbb{P}(A) = 0$, tal que $X_n(w) \to X(w)$ para cualquier $w \in A^c$.

Notación 1.5.1. Este tipo de convergencia se denota como:

$$X_n \xrightarrow{c.s} X.$$

Definición 1.5.2. (Convergencia en distribución) Si $\{\mathbf{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathbf{F}$ son las funciones de distribución de $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y X respectivamente. Se dice que $\{X_n\}$ converge en distribución, o débilmente, a X si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}_n(x) = \mathbf{F}(x)$ para cualquier x punto de discontinuidad de $\mathbf{F}$.

Notación 1.5.2. Este tipo de convergencia se denota como $X_n \xrightarrow{D} X$, o también como $\mathbf{F}_n \xrightarrow{D} \mathbf{F}$ porque no se involucran las variables aleatorias en la definición.

Cabe mencionar que la convergencia casi segura implica la convergencia en distribución pero no a la inversa.

Capítulo 2

Teoría de Renovación

El término de renovación se refiere a un reemplazo de objetos, ya sea bulbos, carros, máquinas, personas, entre otras cosas, en el momento en que termina el tiempo de vida o utilidad de dichas cosas. Partiendo de este concepto, en este capítulo se muestra el proceso de renovación, los diferentes tipos de procesos de renovación como son terminales (transitorios) y estacionarios; la correspondiente función y la densidad de renovación, así como la ecuación de renovación.

Las fuentes bibliográficas para este capítulo son: Beard [4], Bladt [8], Bühlmann [9] y Syski [13].

2.1 Proceso de Renovación

A partir del momento en que termina la vida o utilidad de alguna cosa específica, lo que se busca es un remplazo de ésta, por lo que surge el interés por dos tipos de distribución las cuales corresponden a:

- El tiempo de vida total para n renovaciones.
- El número total de renovaciones al tiempo t.

Se denota a Z_n como el tiempo de vida de los objetos inmediatamente antes de la n-ésima renovación, es decir, como el tiempo de vida de los n objetos en cuestión. Además se supone que los Z_n's son independientes e idénticamente distribuidos.

Ahora, es claro que el tiempo de la n-esima renovación está dado por:

$$S_n = Z_o + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n.$$

Obsérvese que los S_n son no negativos. El número total de renovaciones al tiempo t está dado por $N(t)$.

Nótese que la primera distribución de interés se refiere a la distribución de S_n y la segunda distribución de interés corresponde a la distribución del proceso puntual $N(t)$.

Definición 2.1.1. (Proceso de renovación) Se dice que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un proceso de renovación si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de los tiempos entre ocurrencia de algún suceso y $Z_o, Z_1, Z_2, \ldots$ son variables aleatorias positivas e independientes de tal modo que $Z_1, Z_2, \ldots$ son idénticamente distribuidas.

Entonces $S_n = Z_o + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ se llaman las renovaciones, o bien, las épocas del proceso de renovación.

Z_n's son considerados los tiempos entre los arribos o renovaciones y $N(t)$ es el número de arribos o renovaciones hasta el tiempo t.

Definición 2.1.2. (Proceso de renovación puro y retrasado) Un proceso de renovación se llama puro si $Z_o = 0$ y en caso contrario se llama retrasado.

Definición 2.1.3. (Función de renovación) La función de renovación $U(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ es el número esperado de renovaciones hasta el tiempo t.

Su derivada $u(t) = U'(t)$ es llamada la densidad de renovación y entonces $U(t)dt$ es la probabilidad de renovaciones, o bien, de arribos, durante el periodo de tiempo $[t, t + dt)$.

Nótese que:

$$u(t)dt = U(t + dt) - U(t) = \mathbb{E}[N[t, t + dt)]. \tag{2.1}$$

La densidad de renovación es interpretada como la tasa de renovación en el tiempo.

Existe una relación importante que hace una correspondencia entre el número de arribos y el tiempo en que ocurren dichos arribos la cual es:

$$N(t) \leq n \Longleftrightarrow S_n > t.$$

El lado izquierdo de la previa expresión significa que el número de arribos o renovaciones al tiempo t es menor o igual a n y el lado derecho quiere decir que el tiempo en que ocurre la n-ésima renovación es mayor que t. Véase la figura 2.1, cuando el número de renovaciones es igual a 4 y el tiempo en que ya sucedieron las 4 renovaciones es τ para verificar que la relación es cierta.

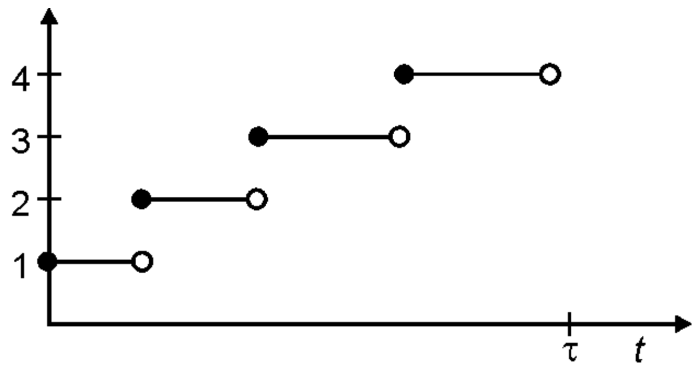

Figura 2.1: Relación entre el número de arribos y el tiempo en que ocurren éstos.

Notación 2.1.1. Sea G una función y $\mathbf{F}$ una medida. Entonces la convolución $\mathbf{F} * G$ es una función y se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} * G(t) = \int_0^t G(t-x) d\mathbf{F}(x).$$

Usando la relación entre el número y el tiempo en que ocurren los arribos, y el hecho de que $N(t)$ es un proceso puntual se obtiene:

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[N(t) = n] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[N(t) > n] = \sum \mathbb{P}[S_n \leq t] \\ &= \mathbb{P}[Z_o \leq t] + \mathbb{P}[Z_o + Z_1 \leq t] + \dots \\ &= \mathbf{F}_o(t) + (\mathbf{F}_o * \mathbf{F}_1)(t) + \dots \end{aligned}$$

Entonces

$$U(t) = \left(\mathbf{F}_o * \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} \right)(t), \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{F}_o$ es la función de distribución de Z_o y $\mathbf{F}$ es la función de distribución de Z_1, y por lo tanto, de todas las demás. El * denota convolución y por convención se tomará $\mathbf{F}^{*0} = I$.

Ahora bien, si el proceso de renovación es puro entonces la ecuación (2.2) se simplifica a:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n}(t).$$

2.2 Procesos de Renovación Estacionarios

Definición 2.2.1. (Proceso de renovación estacionario) Un proceso de renovación es estacionario si tiene una tasa de renovación constante, es decir, que $u(t) = c$ donde c es una constante.

De la ecuación (2.1) se tiene: $U(t) = \mathbb{E}[N(t)] = ct$.

Considérese un proceso de renovación estacionario, entonces usando la ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} U(t) &= \mathbf{F}_o * \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n}(t) = \mathbf{F}_o * \left(\mathbf{F}^{*0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} \right)(t) = \mathbf{F}_0 * \left(I + \mathbf{F} * \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} \right)(t) \\ &= \left(\mathbf{F}_0 + \mathbf{F} * \mathbf{F}_0 * \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} \right)(t) = \left(\mathbf{F}_o + \mathbf{F} * U \right)(t). \end{aligned}$$

Como $U(t) = ct$ entonces:

$$ct = \mathbf{F}_0(t) + \int_0^t c \cdot (t - z) d\mathbf{F}(z).$$

Donde se tiene de igual forma que:

$$\mathbf{F}_0(t) = ct - \int_0^t c \cdot (t - z) d\mathbf{F}(z).$$

Integrando por partes haciendo $u = c \cdot (t - z)$ y $dv = d\mathbf{F}(z)$ resulta que:

$$\begin{aligned}\int_0^t c \cdot (t-z) d\mathbf{F}(z) &= [c \cdot (t-z)\mathbf{F}(z)]_0^t + c\int_0^t \mathbf{F}(z)dz \\ &= c\int_0^t \mathbf{F}(z)dz.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{F}_0(t) = ct - c\int_0^t \mathbf{F}(z)dz = c\int_0^t (1 - \mathbf{F}(z))dz.$$

Ahora, suponiendo que $\mathbf{F}_o$ es una función de distribución propia, es decir, no defectuosa, lo que a su vez significa por definición que $\mathbf{F}_o(\infty) = 1$, se tiene que $c\int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz = 1$. Por otro lado, se sabe que $\int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz = \mu$, lo cual se demostrará más adelante en la Proposición(4.2.2), entonces se tiene que $c = 1/\mu$.

Por la ecuación (2.1), para un proceso de renovación estacionario $N(t)$ se obtiene:

$$\mathbb{E}[N(t, t+dt)] = U(t+dt) - U(t) = (t+dt)/\mu - t/\mu = dt/\mu.$$

2.3 Ecuación de Renovación

La ecuación de renovación está definida por:

$$Z = z + \mathbf{F} * Z,$$

donde Z y z tienen soportes contenidos en $\mathbb{R}_+$. Escribiendo esta ecuación de forma explícita:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)d\mathbf{F}(x).$$

Teorema 2.3.1. Sea la función de renovación de un proceso de renovación puro $U(t) < \infty$ para todo t y supóngase que z es acotado, entonces $Z = U * z$ es la única solución con soporte contenido en $\mathbb{R}_+$, la cual es acotada en intervalos acotados.

Demostración. Sea $S_n = Z_o + Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ dado $\mathbf{F}(0) = 0$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}_+$ existe una n tal que $\mathbb{P}[S_n \leq x] < 1$, o de la forma equivalente, para todo $x \in \mathbb{R}_+$ $\exists \beta \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\mathbf{F}^{*\beta}(x) < 1$. Entonces:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n}(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \beta \mathbf{F}^{*\beta k}(t).$$

Para argumentar esto, nótese que $S_{n+1} \geq S_n$ (por como está definido S_n) lo que implica que:

$$\mathbb{P}[S_{n+1} \leq x] \leq \mathbb{P}[S_n \leq x] \Rightarrow \mathbf{F}^{*(n+1)}(t) \leq \mathbf{F}^{*n}(t).$$

Obsérvese que $\mathbf{F}^{*k}$ es una función decreciente, entonces:

$$\mathbf{F}^{*(r(k-1)+1)}(t) + \mathbf{F}^{*(r(k-1)+2)}(t) + \ldots + \mathbf{F}^{*rk}(t) \leq r\mathbf{F}^{(r(k-1)+1)}(t).$$

Nótese que $\mathbf{F}^{*k}(t) = \mathbb{P}[S_k \leq t] \to 0$ al mismo tiempo que $k \to \infty$, de modo que se obtiene:

$$U(t) \leq \beta(1 - \mathbf{F}^{*\beta}(t)) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*\beta k}(t)}{1 - \mathbf{F}^{*\beta}(t)} \leq \frac{\beta}{1 - \mathbf{F}^{*\beta}(t)} < \infty.$$

Con lo que se prueba que $U(t) < \infty$ para todo t. Ahora, sea $Z(t) = U * z(t)$, sustituyendo en:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} * Z &= \mathbf{F} * U * z = \mathbf{F} * \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} * z \\
&= \mathbf{F} * (\mathbf{F}^{*0} + \mathbf{F}^{*1} + \mathbf{F}^{*2} + \ldots) * z \\
&= \mathbf{F} * \mathbf{F}^{*0} * z + \mathbf{F} * \mathbf{F}^{*1} * z + \mathbf{F} * \mathbf{F}^{*2} * z + \ldots \\
&= \mathbf{F} * z + \mathbf{F}^{*2} * z + \mathbf{F}^{*3} * z + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n} * z - z = U * z - z.
\end{aligned}$$

Con lo cual se prueba que Z es una solución de la ecuación de renovación. Escójase otra solución con las mismas características que Z a la ecuación de renovación, supóngase V, entonces $V = z + \mathbf{F} * V$.

Luego $Z - V = z + \mathbf{F} * Z - (z + \mathbf{F} * V) = \mathbf{F} * Z - \mathbf{F} * V = \mathbf{F} * (Z - V)$ lo que conduce a que $Z - V = \mathbf{F}^{*n} * (Z - V)$ para todo n.

Como $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{*n}(t) < \infty$ entonces $\mathbf{F}^{*n}(t) \to 0$ cuando $n \to \infty$. $Z - V$ está acotada en intervalos acotados y eso se debe a las características tanto de Z como de V, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mid Z - V \mid (t) &= \mid \int_0^t (Z - V)(t - x) d\mathbf{F}^{*n}(x) \mid \\
&\leq \int_0^t \mid (Z - V) \mid (t - x) d\mathbf{F}^{*n}(x) \\
&\leq \int_0^t C d\mathbf{F}^{*n}(x) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Con esto se prueba la unicidad de Z. □

2.4 Procesos de Renovación Terminales o Transitorios

Definición 2.4.1. (Procesos de renovación terminales) Los procesos de renovación los cuales sólo tienen un número finito de renovaciones reciben el nombre de procesos de renovación terminales, y se presentan cuando $S_n = \infty$ para algún n, y esto a su vez sucede si $Z_n = \infty$. Dicha situación ocurre cuando la función de distribución entre los arribos es defectuosa, es decir que, $\|\mathbf{F}\| = \lim_{t\to\infty} \mathbf{F}(t) < 1$, y quiere decir que existe un átomo en ∞.

Definición 2.4.2. (Tiempo de vida de un proceso de renovación) Un proceso de renovación es terminal si $\|\mathbf{F}\| < 1$. El tiempo de vida del proceso de renovación M está definido por:

$$M = \sup\{S_n \mid S_n < \infty\},$$

es decir, la época finita más larga.

Teorema 2.4.1. Para un proceso de renovación terminal puro con función de renovación $U(t)$ se tiene que:

$$\mathbb{P}[M \leq x] = (1 - \|\mathbf{F}\|)U(x).$$

Demostración. Sea $Z(x) = \mathbb{P}[M \leq x]$ para $x \geq 0$. Como el proceso es puro entonces $Z_o = 0$, usando el teorema de probabilidad total condicionado sobre Z_1, se tienen dos casos:

1. Que $Z_1 = \infty$ lo cual ocurre con una probabilidad de $1 - \|\mathbf{F}\|$.
   Esto implica que $M = 0$ y entonces se obtiene que $\mathbb{P}[M \leq x] = 1$ para todo $x \geq 0$.
2. Que $Z_1 = s < \infty$ entonces $M \leq x$ si y sólo si el proceso de renovación el cual inicia a partir del tiempo s tiene el tiempo de vida menor o igual a $x - s$, el cual sucede con la probabilidad $Z(x - s)$.

Entonces conjuntando los dos casos resulta que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[M \leq x] &= \mathbb{P}[M \leq x \mid Z_1 = \infty]\mathbb{P}[Z_1 = \infty] + \int_0^\infty \mathbb{P}[M \leq x \mid Z_1 = s] f_{Z_1}(s)ds \\ &= \mathbb{P}[M \leq x \mid Z_1 = \infty]\mathbb{P}[Z_1 = \infty] + \int_0^\infty \mathbb{P}[M \leq x - s] f_{Z_1}(s)ds.\end{aligned}$$

Pero la integral del segundo sumando es válida sólo en el intervalo $(0, x)$ pues en el otro caso, es decir, en el intervalo (x, ∞) la integral vale cero pues $M < 0$.

Por lo tanto:

$$Z(x) = (1 - \|\mathbf{F}\|) \cdot 1 + \int_0^x Z(x - s) d\mathbf{F}(s).$$

En esta ecuación de renovación en particular, $z(x) = 1 - \|\mathbf{F}\|$, la cual es una constante que está acotada, entonces por el Teorema (2.3.1), la única solución a esta ecuación, $Z(x)$, está dada por:

$$Z(x) = U * (1 - \|\mathbf{F}\|)(x) = \int_0^x (1 - \|\mathbf{F}\|) \, dU(t).$$

Integrando:

$$Z(x) = (1 - \|\mathbf{F}\|) \, U(t) \mid_0^x = (1 - \|\mathbf{F}\|) \, U(x),$$

dado que $U(0) = 0$ pues $\mathbf{F}(0) = 0$. $\square$

Capítulo 3

Método Fase

El método fase se refiere al supuesto de una variable aleatoria positiva X sea descompuesta dentro de etapas, cada una de las cuales tiene una duración con distribución exponencial. En este capítulo se exponen ejemplos cuando se conoce cómo se distribuye la variable aleatoria entre las que se muestran la distribución Coxian, la distribución Erlang y, por supuesto, el caso general cuando la función de densidad es $f_X(s)$, calculando en la mayoría de los casos los respectivos elementos de los que consta una distribución fase: diagrama fase, matriz de intensidad y distribución inicial del proceso.
Se mencionan las propiedades básicas de las variables aleatorias tipo fase: distribución acumulada, densidad, función generadora de momentos y el n-ésimo momento.

Las fuentes consultadas para el desarrollo de este capítulo son: Asmussen [3] y Bladt [6].

3.1 Distribución Tipo Fase

Definición 3.1.1. (Distribución tipo fase) Una distribución tipo fase es una distribución del tiempo hasta que un proceso de Markov sale por primera vez de un conjunto de estados transitorios, dicho de otra forma, es la distribución del tiempo de vida de un proceso de Markov terminal.

Sea $E = \{1, 2, \ldots, p\}$ el conjunto de estados transitorios, y sea $p + 1$ un estado extra que es absorbente.

Considérese un proceso de Markov $\{J_t\}_{t\geq 0}$ sobre el espacio de estados $E_+ = E \cup \{p+1\}$. Este tipo de proceso de Markov se llama proceso de Markov de saltos.

Sea X el tiempo de absorción del proceso (o bien, el tiempo de vida del proceso), es decir, cuando $J_X = p+1$. Entonces X tiene una distribución tipo fase.

Las distribuciones tipo fase son generadas por procesos de Markov sobre un espacio de estados finito.

Definición 3.1.2. (Matriz de intensidad de un proceso de Markov de saltos) La matriz de intensidad $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{ij})_{i,j\in E_+}$ de un proceso de Markov de saltos está dada por:
$\lambda_{ij} = \lambda_i q_{ij}$ con $i \neq j$ y $\lambda_{ii} = -\lambda_i$, donde las q_{ij}'s son las probabilidades de los saltos del proceso (probabilidades de transición) y $\lambda_i > 0$.

Proposición 3.1.1. *Una matriz $\mathbf{\Lambda}$ de $E_+ \times E_+$ es la matriz de intensidad de un proceso de Markov $\{J_t\}_{t\geq 0}$ si y sólo si: $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leq 0$ y $\sum_{j\in E_+} \lambda_{ij} = 0$.*

Retomando lo de distribuciones tipo fase, la matriz de intensidad $\mathbf{\Lambda}$ de $\{J_t\}_{t\geq 0}$ está dada por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{T} = \{t_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,p}$ es una matriz de $p \times p$ la cual contiene tasa de transición entre los estados en E, $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1,\ldots,p}$ es un vector columna con p renglones que proporciona las tasas de transición al estado absorbente, es decir, que proporciona las tasas de salida de E y $\mathbf{0}$ es un renglón con p columnas de puros ceros. Sea $\boldsymbol{\pi'} = (\boldsymbol{\pi}, 0) = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p, 0)$ la distribución inicial del proceso $\{J_t\}_{t\geq 0}$ concentrado en E, donde se supondrá que $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_p = 1$; $\pi_i = \mathbb{P}[J_o = i]$ con $i \in E$, por lo que se pueden ver como las probabilidades de entrada.

Entonces $(E, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$ o sólo $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$ es la representación a una distribución tipo fase.

Obsérvese que $\mathbf{t} = -\mathbf{Te}$ donde $\mathbf{e}$ es el vector columna de 1's, pues en una matriz de intensidad, por definición, los renglones suman 0, esto quiere decir que: $\mathbf{t}+\mathbf{Te}=\mathbf{0}$.

Notación 3.1.1. Cuando se dice que $X \sim PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$ se refiere a que X tiene una distribución tipo fase con los correspondientes parámetros antes explicados.

A continuación se proporcionan unos ejemplos para hacer más claro lo antes citado:

Ejemplo 3.1.1. Sea $X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_p$ donde $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ son independientes y exponencialmente distribuidas con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ respectivamente, tomándose a $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, entonces se obtiene:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_p \end{pmatrix} , \quad \mathbf{t} = -\mathbf{Te} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.1.2. Las distribuciones de Coxian son parecidas a sumas de dos variables exponenciales con la característica adicional que la suma contiene al menos 1 y a lo más p variables, siendo entonces un número aleatorio de variables. El siguiente diagrama (llamado diagrama fase) permite ver el comportamiento de dichas distribuciones:

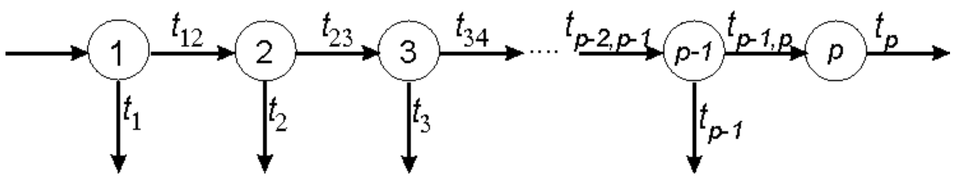

Figura 3.1: Diagrama Fase de una Distribución Coxian.

Como se puede observar, las flechas horizontales indican las probabilidades de transición entre los estados no absorbentes y las flechas verticales indican la probabilidad de transición al estado absorbente.

Por consecuencia, este tipo de distribuciones tipo fase, con $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ tiene como elementos de su matriz de intensidad los siguientes:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -t_1 - t_{12} & t_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 - t_{23} & t_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -t_{p-1} - t_{p-1,p} & t_{p-1,p} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -t_p \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{t} = -\mathbf{Te} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ . \\ . \\ t_{p-1} \\ t_p \end{pmatrix}.$$

Cabe mencionar que la distribución de Erlang es un caso especial de la distribución de Coxian.

Ejemplo 3.1.3. La distribución de Erlang con p fases es la convolución de p densidades exponenciales con la misma intensidad λ, y entonces es definida como una distribución Gamma con parámetro entero p y densidad:

$$\lambda^p \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Dicha distribución tiene el siguiente diagrama fase cuando se habla de 4 fases:

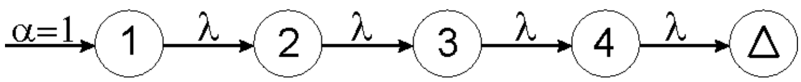

Figura 3.2: Diagrama Fase de una distribución de Erlang con 4 fases.

Por ello, se tienen los siguientes elementos para la matriz de intensidad de la distribución de Erlang con $\boldsymbol{\pi} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & . & -\lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{t} = -\mathbf{Te} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 3.1.3. (Matriz exponencial) Sea $\exp(\mathbf{\Lambda}s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^n s^n/n!$ la cual denota la matriz exponencial de $\mathbf{\Lambda}s$, donde s es una constante y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz.
La matriz de transición $\mathbf{P}^s$ de $\{J_t\}_{t\geq 0}$ está dada por $\mathbf{P}^s = \exp(\mathbf{\Lambda}s)$. Haciendo algunos cálculos se obtiene:

$$\begin{aligned}
\exp(\mathbf{\Lambda}s) &= \mathbf{I}_{p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{\Lambda}^n s^n/n! \\
&= \mathbf{I}_{p+1} + \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{T}s) & -\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & -\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{T}s) & \mathbf{e} - \exp(\mathbf{T}s)\mathbf{e} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.4. Sea $f_X(s)$ la densidad de $X \sim PH(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$. Entonces $f_X(s)ds$ es la probabilidad que $X \in [s, s+ds)$, o bien,$\{J_t\}_{t\geq 0}$ se absorba en el intervalo $[s, s+ds)$. Como se puede observar, esto ocurre si en el tiempo anterior más próximo a s, el proceso $\{J_t\}_{t\geq 0}$ está en algún estado y llega a efectuarse la transición al estado $p+1$ durante $[s, s+ds)$. Véase lo siguiente para $i, j \in E$:

$$\mathbb{P}[J_s = i \mid J_0 = j] = P_{i,j}^s = (\exp(\mathbf{T}s))_{j,i}.$$

Ahora, si $J_s = i$ entonces la probabilidad de salir durante $[s, s+ds)$ es $t_i ds$ dado que los tiempos de estancia son distribuidos exponencialmente. Con el apoyo de la ley de probabilidad total, se condiciona sobre el estado inicial y la tasa de salida:

$$\begin{aligned}
f_X(s)ds &= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}[X \in [s, s+ds) \mid J_0 = j]\pi_j \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}[X \in [s, s+ds) \mid J_s = i, J_0 = j]\mathbb{P}[J_s = i \mid J_0 = j]\pi_j.
\end{aligned}$$

Usando la propiedad de Markov:

$$\begin{aligned}
f_X(s)ds &= \sum_{j=1}^{p} \pi_j \sum_{i=1}^{p} P_{i,j}^s \mathbb{P}[X \in [s, s+ds) \mid J_s = i] \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \pi_j P_{i,j}^s t_i ds = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \pi_j (\exp(\mathbf{T}s))_{j,i} t_i ds,
\end{aligned}$$

$$f_X(s)ds = \boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{t}ds.$$

Ejemplo 3.1.5. Considérese un proceso de renovación con tiempos entre los arribos con distribución tipo fase y representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$. Entonces la densidad de renovación $u(s) = \boldsymbol{\pi}\exp((\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi})s)\mathbf{t}$. Obsérvese que junto con el proceso de Markov de saltos se obtiene un nuevo proceso de Markov, sea $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ con espacio de estados E y matriz de intensidad $\mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi}$, la transición del estado i al j de $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ en el intervalo de tiempo entre arribos $[s, s + ds)$ puede ser de dos maneras diferentes:

1. a través de una transición de $\{J_t\}_{t\geq 0}$ de i a j con probabilidad $t_{ij}ds$.
2. mediante el proceso $\{J_t\}_{t\geq 0}$ sale en [s,s+ds) y el siguiente proceso $\{J_t\}_{t\geq 0}$ inicia en j, lo cual ocurre con una probabilidad de $t_i ds \pi_j$.

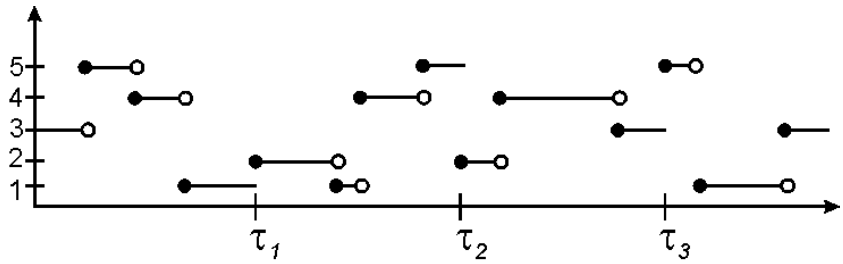

Figura 3.3: Proceso de renovación tipo fase 5 dimensional.

La figura 3.3 representa el proceso del que se está hablando, es un proceso de renovación tipo fase 5 dimensional y τ_1, τ_2, τ_3, representan las épocas de los arribos.

Por lo tanto $t_{ij}ds + t_i\pi_j ds$ conduce a que $\mathbf{T} + \mathbf{t}\pi$ es la matriz de intensidad.
Usando el hecho que $\{J_t\}_{t\geq 0}$ y $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ tienen la misma distribución y el resultado del ejemplo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} u(s) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \pi_j(\exp((\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi})s))_{j,i} t_i ds \\ &= \boldsymbol{\pi}\exp((\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi})s)\mathbf{t}ds. \end{aligned}$$

Lo que significa que la distribución de $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ está dada por:

$$\boldsymbol{\pi}\exp((\mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi})s).$$

Corolario 3.1.1. Sea un proceso de renovación terminal en el cual los arribos siguen una distribución tipo fase defectuosa con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$, lo que significa que $\|\boldsymbol{\pi}\| < 1$, entonces el tiempo de vida, definido como en la Definición (2.4.2), es tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi})$.

Demostración. Basta con sólo notar que $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ es el proceso que gobierna al tiempo de vida y por lo visto en el anterior Ejemplo (3.1.5) dicho proceso tiene los parámetros correspondientes que son matriz de intensidad $\mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi}$ y distribución inicial $\boldsymbol{\pi}$.

□

Ahora para los procesos de renovación que no son terminales, se define al exceso de vida $\xi(t)$ en el tiempo t hasta la siguiente renovación después de t.

Corolario 3.1.2. Sea un proceso de renovación el cual los arribos tienen una distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$, y sea $\mu_X = -\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{e}$ la media de X. Entonces:

i. El exceso de vida $\xi(t)$ al tiempo t es una distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\nu}_x, \mathbf{T})$ donde $\boldsymbol{\nu}_x = \boldsymbol{\pi}\exp((\mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi})x)$.

ii. $\xi(t)$ tiene una distribución límite tanto como $t \to \infty$, la cual tiene una distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{T})$ donde $\boldsymbol{\nu} = -\pi\mathbf{T}^{-1}/\mu_X$.

Demostración. Tómese nuevamente el proceso $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ para proseguir con la demostración.

El tiempo de la siguiente renovación después de t es el tiempo del siguiente salto de la segunda forma que ya antes se mencionó en el Ejemplo (3.1.5), entonces $\xi(t)$ es una distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\nu}_x, \mathbf{T})$ donde $\boldsymbol{\nu}_x$ es la distribución de $\{J'_s\}_{s\geq 0}$ que como se vió en el Corolario (3.1.1), tiene la distribución que se pide para el inciso i.

Para el inciso ii, se tiene que encontrar a qué equivale el valor de $\boldsymbol{\nu}$, entonces la siguiente solución única de:

$$\boldsymbol{\nu}\mathbf{e} = 1 \qquad y \qquad \boldsymbol{\nu}(\mathbf{T}+\mathbf{t}\boldsymbol{\pi}) = 0 \tag{3.1}$$

es $-\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}/\mu_X$, pues satisface las dos condiciones de la ecuación (3.1):

$$\frac{-\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}}{\mu_X}\mathbf{e} = \frac{\mu_X}{\mu_X} = 1.$$

Por otro lado:

$$\frac{-\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}}{\mu_X}(\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi}) = \frac{-\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{t}\boldsymbol{\pi}}{\mu_X} = \frac{-\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}}{\mu_X}$$

(Usando el hecho que $\mathbf{t} = -\mathbf{T}\mathbf{e}$)

$$= \frac{-\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}}{\mu_X} = \frac{-\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}}{\mu_X} = 0.$$

Pues se supone que la suma de las entradas de $\boldsymbol{\pi}$ es igual a 1.
Por lo que se obtiene $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}/\mu_X$. □

3.2 Propiedades Básicas

Las propiedades básicas de las distribuciones tipo fase se presentan en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.1. Sea X tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$, entonces:

a. La función de distribución acumulada es $\mathbf{F}_X(s) = 1 - \boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{e}$.

b. La función de densidad es $f_X(s) = \boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{t}$.

c. La función generadora de momentos $L_X(s) = \int_0^\infty \exp(sx) f_X(s) ds$ está dada por $\boldsymbol{\pi}(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}$.

d. El n-ésimo momento $\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty x^n f_X(s) ds$ es igual a $(-1)^n n! \boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-n}\mathbf{e}$.

Demostración. Para a. Se define a $\bar{\mathbf{P}}^s = \{\bar{P}^s_{ij}\}$ como la matriz de transición en el paso s del proceso $\{J_t\}$ concentrado en E_+ y se denota a $\mathbf{P}^s$ como la matriz de transición del proceso $\{J_t\}$ concentrado en E, entonces para algunos estados $i, j \in E$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dP^s_{ij}}{ds} = \frac{d\bar{P}^s_{ij}}{ds} = t_i \bar{P}^s_{\delta j} + \sum_{k\in E} t_{ik} \bar{P}^s_{kj} = \sum_{k\in E} t_{ik} P^s_{kj}.$$

De lo que se sigue que $\frac{d}{ds}\mathbf{P}^s = \mathbf{T}\mathbf{P}^s$ y como es natural $\mathbf{P}^0 = I$, la cual funciona como condición inicial para la ecuación diferencial dada, entonces la solución a ésta es:

$$\mathbf{P}^s = \mathbf{exp}(\mathbf{T}s).$$

Luego:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{F}_X(s) &= \mathbb{P}[X > s] = \mathbb{P}[J_s \in E] \\ &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \pi_j P_{ij}^s = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^s\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Para b. Se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_X(s) &= \mathbf{F}'_X(s) = -\boldsymbol{\pi}\frac{d}{ds}\mathbf{P}^s\mathbf{e} \\ &= -\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{T}\mathbf{e} = \boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}s)\mathbf{t}, \end{aligned}$$

dado que $-\mathbf{T}\mathbf{e} = \mathbf{t}$, además $\mathbf{T}$ y $\exp(\mathbf{T}s)$ conmutan, pues es lo mismo:

$$\mathbf{T} \cdot \exp(\mathbf{T}x) = \exp(\mathbf{T}x) \cdot \mathbf{T}.$$

Para c. Se tiene que resolver la siguiente integral:

$$\begin{aligned} L_X(s) &= \int_0^\infty \exp(sx)\boldsymbol{\pi}\exp(\mathbf{T}x)\mathbf{t}dx \\ &= \boldsymbol{\pi}\left(\int_0^\infty \exp\left((s\mathbf{I} + \mathbf{T})x\right)dx\right)\mathbf{t} = \boldsymbol{\pi}(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Para el inciso d. Se utiliza la función generadora de momentos derivando a ésta última n veces, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{d}{ds^n}\boldsymbol{\pi}(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t} = (-1)^{n+1}n!\boldsymbol{\pi}(s\mathbf{I} + \mathbf{T})^{-n-1}\mathbf{t}.$$

Evaluando esto cuando $s = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds^n}\boldsymbol{\pi}(-s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}\mathbf{t} \mid_{s=0} &= (-1)^{n+1}n!\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-n-1}\mathbf{t} \\ &= (-1)^n n!\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-n-1}\mathbf{T}\mathbf{e} = (-1)^n n!\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-n}\mathbf{e}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

El Modelo de Riesgo Clásico

Una de las formas tradicionales en donde se presenta lo que es la teoría de riesgo es dentro de una compañía de seguros. Lo que se presenta a continuación es el modelo más sencillo de riesgo que presenta una aseguradora. Este modelo se denomina modelo de riesgo clásico, también conocido como modelo compuesto de Poisson, o bien, de Cramér-Lundberg; el modelo considera que el número de reclamaciones se distribuye como un proceso de Poisson. Se calcula la probabilidad de ruina de la aseguradora y, consecuentemente, la probabilidad de que no ocurra ruina (probabilidad de supervivencia). Este cálculo se realiza utilizando dos distintos procesos de riesgo.

Las fuentes bibliográficas de este capítulo son: Asmussen [1], Asmussen [3], Bladt [5], Bladt [8], Gerber [11] y Grandell [12].

4.1 Modelo de Riesgo

Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, en el cual se definen los siguientes elementos:

1. un proceso puntual $N = \{N(t); t \geq 0\}$ con $N(0) = 0$.
2. una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) $\{Z_k\}_1^\infty$, con función de distribución común $\mathbf{F}$ con media μ y varianza σ^2 y de tal modo que $\mathbf{F}(0) = 0$.

Definición 4.1.1. (Proceso de riesgo) Sea X un proceso de riesgo, el cual se define de la siguiente manera:

$$X(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k,$$

donde c es una constante positiva y $Z_o = 0$.

Dentro de este modelo se considera a $N(t)$ como el número de siniestros o reclamaciones que tiene la compañía dentro de un intervalo de tiempo $(0, t]$. Para cada punto de $N(t)$ la aseguradora tiene que pagar una cantidad de dinero y por cada unidad de tiempo recibirá, de forma determinista, c unidades de dinero. Si $N(t) = 0$ quiere decir que no hay ninguna reclamación; el proceso de riesgo decrece de acuerdo al número de reclamaciones que ocurran a lo largo del tiempo.

La constante c es llamada la tasa de la prima del riesgo total, lo que significa que los incrementos entre los saltos de la tasa son lineales.

Se supone que el proceso N tiene una intensidad α y que $\mathbb{E}[N(t)] = \alpha t$. El beneficio o pérdida esperada del negocio sobre el intervalo $(0, t]$ estará dado por:

$$\mathbb{E}[X(t)] = ct - \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[Z_k] = (c - \alpha\mu)t.$$

Donde de manera explícita se desarrolla el cálculo de $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k]$.

Proposición 4.1.1. *$\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k] = \alpha t\mu$.*

Demostración.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k \mid N(t)\right]\right].$$

Por un lado:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k \mid N(t) = n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} Z_k\right] = n\mathbb{E}\left[Z_k\right],$$

dado que las $Z_k's$ tienen la misma distribución.

Entonces:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k \mid N(t)\right] = N(t)\mathbb{E}\left[Z_k\right].$$

Se concluye que:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} Z_k\right] = \mathbb{E}\left[N(t)\mathbb{E}[Z_k]\right] = \alpha t \mathbb{E}\left[Z_k\right] = \alpha t \mu.$$

$\square$

La sobreprima de seguridad relativa ρ está definida como:

$$\rho = \frac{c - \alpha\mu}{\alpha\mu} = \frac{c}{\alpha\mu} - 1.$$

Un proceso de riesgo se dice que tiene sobreprima de seguridad positiva si $\rho > 0$, lo que equivale a que el proceso tiende a ∞.

La probabilidad de ruina[1] que enfrenta la aseguradora se define con respecto al riesgo del proceso, considerando que inicia con una cantidad de capital u.

Definición 4.1.2. (Proceso de riesgo de reserva) Sea R_t un nuevo proceso, llamado proceso de riesgo de la reserva, definido del siguiente modo:

$$R_t = u + X(t),$$

donde $R_o = u$ es el capital inicial de la compañía. Este proceso describe la evolución de la reserva al final de cada periodo.

Definición 4.1.3. (Probabilidad de ruina en horizonte infinito) La probabilidad de ruina en el horizonte infinito es:

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[R_t < 0, \text{para algún } t > 0 \mid R_o = u] = \mathbb{P}\left[\inf_{0 \leq t < \infty} R_t < 0 \mid R_0 = u\right].$$

Significa que se busca la probabilidad de que R_t se encuentre debajo de un cierto nivel crítico.

De lo cual se desprende que la probabilidad de que no-ocurra-ruina es $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$, también conocida como la probabilidad de supervivencia.

Nótese que $\Psi(u) = 1$ para $u < 0$.

[1] En algunos textos esta probabilidad es llamada: función de ruina.

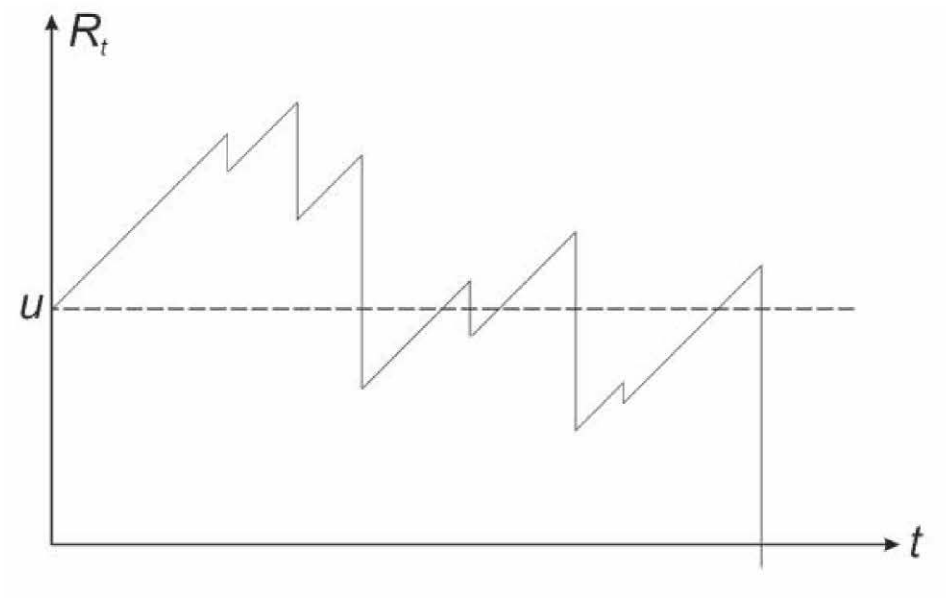

Figura 4.1: Probabilidad de Ruina.

Definición 4.1.4. (Tiempo de ruina) Sea τ una variable aleatoria denominada tiempo de ruina, está dada por:

$$\tau(u) = \inf\{t > 0 \mid R_t < 0\},$$

donde u es la reserva inicial de la aseguradora.

Obsérvese que si $\tau(u) = \infty$ entonces $R_t \geq 0$, $\forall t$.

A partir de la definición anterior se puede conducir a su vez a otras definiciones:

Definición 4.1.5. (Probabilidad de ruina en horizonte finito) La probabilidad de ruina en horizonte finito es:

$$\Psi(u; n) = \mathbb{P}[\tau(u) \leq n].$$

Esto representa la probabilidad que la ruina ocurra no después del periodo n, donde $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1.6. (Probabilidad de ruina en horizonte infinito) La probabilidad de ruina en horizonte infinito es:

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[\tau(u) < \infty].$$

4.2 Probabilidad de Ruina

Cuando se habla de un proceso de riesgo clásico, o también conocido como compuesto de Poisson o de Cramér-Lundberg, X(t), se está refiriendo a un modelo Poisson pues el proceso N se comporta como un proceso Poisson. Ahora para calcular la probabilidad de ruina se utiliza el hecho de que $\Phi(u)$ es diferenciable, resultado que se demuestra en la Proposición (4.2.1).

Teorema 4.2.1. Sea $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ la *probabilidad de supervivencia* entonces tiene la ecuación:

$$\Phi(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - z) f(z) dt dz \tag{4.1}$$

e ilustración la figura 4.2.

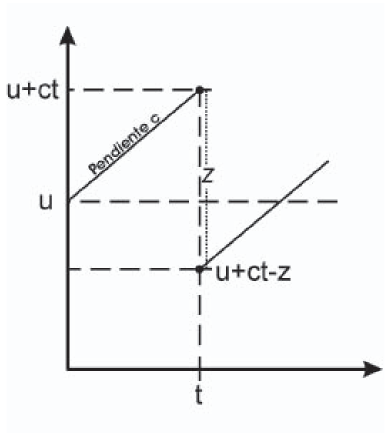

Figura 4.2: Probabilidad de Supervivencia.

La demostración de este teorema se basa en un argumento de renovación expuesto en el Capítulo 2. En este trabajo no se desarrollará explicítamente.

Proposición 4.2.1. $\Phi(u)$ *es diferenciable.*

Demostración. De la ecuación (4.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi \text{ es una probabilidad } &\Rightarrow \Phi \text{ es acotada} \\ &\Rightarrow \int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - z) f(z) dz \text{ es continua} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Phi \text{ es continua}\\
&\Rightarrow \quad \int_0^{u+ct} \Phi(u+ct-z)f(z)dz \text{ es diferenciable}\\
&\Rightarrow \quad \Phi \text{ es diferenciable.}
\end{aligned}
$$

$\square$

Véase el comportamiento de R_t en un pequeño intervalo de tiempo, (0,dt], suceden cuatro posibles casos:

- Ninguna reclamación ocurre en (0,dt].
- Una reclamación ocurre en (0,dt] pero la cantidad a pagar no ocasiona la ruina.
- Una reclamación ocurre en (0,dt] y la cantidad a pagar si ocasiona la ruina.
- Más de una reclamación ocurre en (0,dt].

Nótese que R_t tiene incrementos independientes y estacionarios pues $X(t)$ los tiene, $\Phi(u)$ es diferenciable y utilizando el teorema de la probabilidad total, se tiene el siguiente desarrollo:

$$\Phi(u) = \sum \Phi(u \mid N_t = x)\mathbb{P}[N_t = x].$$

Entonces se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= (1-\alpha dt + o(dt))\Phi(u+cdt) + (\alpha dt + o(dt)) \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-z)f(z)dz\\
&\quad +(\alpha dt + o(dt))0 + o(dt)\\
&= (1-\alpha dt)\Phi(u+cdt) + \alpha dt \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-z)f(z)dz + o(dt)\\
&= \Phi(u+cdt) - \alpha dt\Phi(u+cdt) + \alpha dt \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-z)f(z)dz + o(dt)\\
&= \Phi(u) + cdt\frac{\Phi(u+cdt)-\Phi(u)}{cdt} - \alpha dt\Phi(u+cdt)\\
&\quad +\alpha dt \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-z)f(z)dz + o(dt)\\
&= \Phi(u) + cdt\Phi'(u) - \alpha dt\Phi(u+cdt) + \alpha dt \int_0^{u+cdt} \Phi(u+cdt-z)f(z)dz + o(dt).
\end{aligned}
$$

Dividiendo entre dt y posteriormente tomando $dt \to 0$, se obtiene:

$$\Phi'(u) = \frac{\alpha}{c}\Phi(u) - \frac{\alpha}{c}\int_0^u \Phi(u-z)f(z)dz. \tag{4.2}$$

Ahora $\Phi(u)$ y $\Psi(u)$ se pueden considerar respectivamente como la supervivencia y la ruina del negocio de la compañía. Si se estudia el comportamiento de $\Phi(u)$ se observa que el proceso R_t se renueva a sí mismo cuando sucede la primera reclamación, ya sea conservando una nueva cantidad de dinero si $Z_1 < u + cs$, o bien, terminando si $Z_1 > u + cs$.

Teorema 4.2.2. La probabilidad de supervivencia $\Phi(u) = 1 - \Psi(u)$ satisface la siguiente ecuación de renovación (defectuosa):

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\alpha}{c}\int_0^u (1 - \mathbf{F}(z))(\Phi(u-z))dz.$$

Demostración. Sea S_1 la etapa de la primera reclamación, entonces $X(S_1) = cS_1 - Z_1$ y supóngase que la ruina no ocurre en $(0, S_1)$, entonces se tiene:

$$\Phi(u) = \mathbb{E}[\Phi(u + cS_1 - Z_1)] = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s}\int_0^{u+cs} \Phi(u + cs - z)f(z)dzds.$$

Con el cambio de variables $x = u + cs \Rightarrow s = \frac{x-u}{c}$ se sigue que:

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s}ds = \int_u^\infty \frac{\alpha}{c}e^{-\alpha x/c}e^{\alpha u/c}dx.$$

Por lo que:

$$\Phi(u) = \frac{\alpha}{c}e^{\alpha u/c}\int_u^\infty \alpha e^{-\alpha x/c}\int_0^x \Phi(x-z)f(z)dzdx.$$

Integrar la ecuación (4.2) sobre (0,t) conduce a[2]:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) - \Phi(0) &= \frac{\alpha}{c}\int_0^t \Phi(u)du - \frac{\alpha}{c}\int_0^t\int_0^u \Phi(u-z)f(z)dzdu \\
&= \frac{\alpha}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\alpha}{c}\int_0^t\int_0^u \Phi(u-z)d(1-\mathbf{F}(z))du.
\end{aligned}$$

[2]**Recordatorio**. $f(z)dz = d\mathbf{F}(z)$.

Resolviendo por partes la segunda integral, del segundo sumando, haciendo $u = \Phi(u-z)$ y $dv = d(1-\mathbf{F}(z))$:

$$\begin{aligned}
\Phi(t)-\Phi(0) &= \frac{\alpha}{c}\int_0^t \Phi(u)du \\
&\quad +\frac{\alpha}{c}\int_0^t \left[\Phi(0)(1-\mathbf{F}(u)) - \Phi(u) + \int_0^u \Phi'(u-z)(1-\mathbf{F}(z))dz\right] du \\
&= \frac{\alpha}{c}\Phi(0)\int_0^t (1-\mathbf{F}(u))du + \frac{\alpha}{c}\int_0^t (1-\mathbf{F}(z))dz \int_z^t \Phi'(u-z)du \\
&= \frac{\alpha}{c}\Phi(0)\int_0^t (1-\mathbf{F}(u))du + \frac{\alpha}{c}\int_0^t (1-\mathbf{F}(z))(\Phi(t-z)-\Phi(0))dz \\
&= \frac{\alpha}{c}\int_0^t (1-\mathbf{F}(z))(\Phi(t-z))dz.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable de t por u, se obtiene el resultado:

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\alpha}{c}\int_0^u (1-\mathbf{F}(z))(\Phi(u-z))dz, \tag{4.3}$$

el cual es la ecuación de renovación.

□

Aplicando el teorema de convergencia monótona[3] a la ecuación (4.3), el cual se aplica a sucesiones crecientes y positivas se obtiene:

$$\Phi(\infty) := \lim_{u\to\infty}\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\alpha}{c}\lim_{u\to\infty}\int_0^u (1-\mathbf{F}(z))(\Phi(u-z))dz.$$

[3]**Teorema de Convergencia Monótona.** Sea $f : E \to [0,\infty)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : E \to [0,\infty)$ es una función medible. Además, supóngase que son válidas las dos condiciones siguientes:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$.

ii) $f_n \to f$ puntualmente.

Entonces f es medible y además:

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

$$\Phi(\infty) = \Phi(0) + \frac{\alpha}{c}\Phi(\infty)\int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz = \Phi(0) + \frac{\alpha}{c}\Phi(\infty)\mu. \qquad (4.4)$$

Pero $\Phi(\infty) = 1$ pues sólo puede haber un número finito de reclamaciones para un cierto periodo de tiempo con una sobreprima de seguridad positiva, es decir, cuando $c > \alpha\mu$. Por esta razón, la ecuación (4.4) conduce a:

$$1 = (1 - \Psi(0)) + \frac{\alpha\mu}{c}, \quad \text{o bien,}$$

$$\Psi(0) = \frac{\alpha\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho}. \qquad (4.5)$$

Ahora falta demostrar por qué $\int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz = \mu$ en el desarrollo anterior. Esto proviene del siguiente resultado:

Proposición 4.2.2. *Sea Z una variable aleatoria continua con función de densidad $f(z)$ y función de distribución $\mathbf{F}(z)$ entonces:*

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz - \int_{-\infty}^0 \mathbf{F}(z)dz.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \int_{-\infty}^\infty zf(z)dz = \int_{-\infty}^0 zf(z)dz + \int_0^\infty zf(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^z du\right) f(z)dz + \int_0^\infty \left(\int_0^z du\right) f(z)dz.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^z f(z)dudz = -\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^u f(z)dzdu \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \int_0^z f(z)dudz = \int_0^\infty \int_u^\infty f(z)dzdu.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^u f(z)dzdu + \int_0^\infty \left(1 - \int_{-\infty}^u f(z)dz\right) du. \\
\mathbb{E}[Z] &= \int_0^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz - \int_{-\infty}^0 \mathbf{F}(z)dz.
\end{aligned}$$

□

Observación. En este caso partícular $\int_{-\infty}^{0} \mathbf{F}(z)dz = 0$ dado que $\mathbf{F}(0) = 0$ y además se sabe que $\mathbb{E}[Z] = \mu$.

Por lo que, $\mathbb{E}[Z] = \int_{0}^{\infty}(1 - \mathbf{F}(z))dz = \mu$.

Ejemplo 4.2.1. Reclamaciones exponenciales

Definición 4.2.1. (Variable aleatoria exponencial) Si Z es una variable aleatoria que se distribuye exponencialmente con parámetro δ entonces tiene función de densidad $f(z) = \delta e^{-\delta z}$ y función de distribución $\mathbf{F}(z) = 1 - e^{-\delta z}$. Por consecuencia $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{\delta}$, lo que quiere decir que $\mu = \frac{1}{\delta}$.

Para calcular la probabilidad de ruina en el caso particular cuando las Z_k se distribuyen de forma exponencial se puede utilizar la ecuación (4.2):

$$\Phi'(u) = \frac{\alpha}{c}\Phi(u) - \frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u \Phi(u-z)e^{-\delta z}dz = \frac{\alpha}{c}\Phi(u) - \frac{\alpha}{c\mu}\int_0^u \Phi(z)e^{-(u-z)\delta}dz.$$

Ahora derivando $\Phi'(u)$ con respecto a u:

$$\begin{aligned}
\Phi''(u) &= \frac{\alpha}{c}\Phi'(u) + \frac{1}{\mu}\Big(\frac{\alpha}{c}\Phi(u) - \Phi'(u)\Big) - \frac{\alpha}{c\mu}\Phi(u) \\
&= \left(\frac{\alpha}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\Phi'(u) = \left(\frac{(\alpha\mu - c)/\alpha\mu}{c\mu/\alpha\mu}\right)\Phi'(u) = -\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}\Phi'(u),
\end{aligned}$$

pues se sabe que $1 + \rho = \frac{c}{\alpha\mu}$.

Basta integrar y posteriormente resolver la ecuación diferencial para obtener la solución de $\Phi(u)$ la cual es:

$$\Phi(u) = k_1 + k_2 e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}, \qquad \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son constantes.}$$

Pero las condiciones iniciales son que $\Phi(\infty) = 1$ y que $\Phi(0) = 1 - \Psi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho}$ lo que implica que $\Phi(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho}e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}$ y entonces:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-\rho u/\mu(1+\rho)},$$

lo cual finaliza el cálculo deseado. Ahora, utilizando las ecuaciones (4.4), (4.5) y el Teorema (4.2.2):

$$1 - \Psi(u) = 1 - \Psi(0) + \frac{\alpha}{c}\int_0^u (1 - \Psi(u-z))(1 - \mathbf{F}(z))dz$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\alpha\mu}{c} + \frac{\alpha}{c}\int_0^u (1-\Psi(u-z))(1-\mathbf{F}(z))dz \\
&= 1 - \frac{\alpha}{c}\left(\mu - \int_0^u (1-\mathbf{F}(z))dz + \int_0^u \Psi(u-z)(1-\mathbf{F}(z))dz\right).
\end{aligned}
$$

Lo que implica que:

$$
\Psi(u) = \frac{\alpha}{c}\left(\int_u^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz + \int_0^u \Psi(u-z)(1-\mathbf{F}(z))dz\right). \tag{4.6}
$$

Como $\frac{\alpha}{c}\int_u^\infty (1-\mathbf{F}(z))dz = \frac{\alpha}{c}\mu < 1$ se dice que la ecuación (4.6) es una ecuación de un proceso de renovación defectuoso.

4.3 Probabilidad de Ruina vía Procesos de Escalera

Definición 4.3.1. (Proceso de reclamaciones excedentes o de escalera) Sea $Y(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Z_k - ct$ un nuevo proceso llamado proceso de reclamaciones excedentes.

Obsérvese que $Y(t) = -X(t)$ entonces $\Psi(u) = \mathbb{P}[Y(t) > u$ para algún $t > 0]$, o bien, $\Psi(u) = \mathbb{P}\left[\sup_{t>0} Y(t) > u\right]$.

La probabilidad de ruina es la probabilidad que $Y(t)$ exceda estrictamente el nivel u.

Lema 4.3.1. Para cualquier $t > 0, Y^*(u) := Y(t) - Y(t-u) \stackrel{D}{=} Y(u)$.[4]

Demostración.

$$
\begin{aligned}
Y^*(u) = Y(t) - Y(t-u) &= \sum_{k=0}^{N(t)} Z_k - ct - \left(\sum_{k=0}^{N(t-u)} Z_k - c(t-u)\right) \\
&\stackrel{D}{=} \sum_{k=0}^{N(u)} Z_k - cu = Y(u).
\end{aligned}
$$

[4] $\stackrel{D}{=}$ denota que tienen la misma función de distribución, más no que sean iguales los elementos.

dado que $N(t)-N(t-u)\sim N(u)$ porque N es un proceso de Poisson, en particular, es proceso estacionario.

$\square$

Al proceso $Y(t)$ se le conoce también como proceso escalera.

Sea $t_1=\inf\{t>0 \mid Y(t)>0\}$ la primera vez que $\{Y(t)\}$ cruza al 0, por lo tanto, la cantidad de $Y(t)$ que está por arriba del 0 es $Y(t_1)$. La distribución $Y(t_1)$ es defectuosa ya que t_1 tiene la posibilidad de ser infinito con probabilidad positiva.

Formalmente $t_n=\inf\{t>t_{n-1} \mid Y(t)>Y(t_{n-1})\}$.

Denótese a $G_{t_1}(x)$ como la función de distribución de $Y(t_1)$ y va a ser de la forma:

$$G_{t_1}(x)=\mathbb{P}[Y(t_1)\leq x, t_1<\infty] \qquad \text{y} \qquad \|G_{t_1}\|=\mathbb{P}[t_1<\infty].$$

Por lo tanto, $\|G_{t_1}\|<1$, ya que es defectuosa.

Como se explicó anteriormente, $X(t)$ es un proceso de renovación lo mismo sucede con $Y(t)$ es un proceso de renovación terminal y el máximo M[5] de $Y(t)$ tiene la distribución:

$$\mathbb{P}\left[M\leq x\right]=(1-\|G_{t_1}\|)\sum_{n=0}^{\infty}G_{t_1}^{*n}(x), \tag{4.7}$$

lo cual se debe a un resultado de teoría de renovación (el * se refiere a la convolución). A la ecuación (4.7) se le conoce como la fórmula de Pollaczek-Khinchine que representa la probabilidad de ruina.

Definición 4.3.2. (Tiempo esperado en A) Se define $R_+(A)=\mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} I\{Y(t)\in A\}dt\right]$.

Lema 4.3.2. $R_+(\cdot)$ es la restricción de $1/c$ veces la medida de Lebesgue a $(-\infty,0)$.

[5] M definido análogamente como en la Definición (2.4.2), es decir:

$$M=\sup\{Y(t) \mid Y(t)<\infty\}.$$

Demostración.

$$R_+(A) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty I\{Y(t) \in A, t_1 > t\}dt\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}[Y(t) \in A, t_1 > t]dt.$$

Usando el Lema (4.3.1), es decir, que $Y(u) = Y^*(t) - Y^*(t-u)$ se obtiene:

$$\mathbb{P}[Y(t) \in A, t_1 > t] = \mathbb{P}[Y(t) \in A, Y(u) \leq 0, 0 \leq u \leq t].$$

Como $Y(t)$ tiene la misma distribución que $Y^*(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Y(t) \in A, t_1 > t] &= \mathbb{P}[Y^*(t) \in A, Y(u) \leq 0, 0 \leq u \leq t] \\
&= \mathbb{P}[Y^*(t) \in A, Y^*(t) - Y^*(t-u) \leq 0, 0 \leq u \leq t] \\
&= \mathbb{P}[Y^*(t) \in A, Y^*(t) \leq Y^*(t-u) \leq 0, 0 \leq u \leq t] \\
&= \mathbb{P}[Y(t) \in A, Y(t) \leq Y(t-u) \leq 0, 0 \leq u \leq t] \\
&= \mathbb{P}[Y(t) \in A, Y(t) \leq Y(u) \leq 0, 0 \leq u \leq t].
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
R_+(A) &= \int_0^\infty \mathbb{P}[Y(t) \in A, Y(t) \leq Y(t-u) \leq 0, 0 \leq u \leq t]dt \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty I\{Y(t) \in A, Y(t) \leq Y(u) \leq 0, 0 \leq u \leq t\}dt\right].
\end{aligned}$$

Por esto, se entiende que $R_+(A)$ es el tiempo esperado que $Y(t)$ está en A y también el valor mínimo.
Por la definición $Y(t) \to -\infty$ y como $Y(t)$ es continua fuera de saltos, eventualmente $Y(t)$ pasaría por todo A, además dado que la pendiente fuera de los saltos de $Y(t)$ es $-c$, entonces éste pasa c veces más rápido que si la pendiente fuera 1. $\square$

Corolario 4.3.1. $R_+(dz) = \frac{1}{c}I\{z < 0\}dz$.

Notación 4.3.1. Para la función de distribución G se define una medida

$$\bar{\mathrm{F}}(A) = \int_A d\mathbf{F}(x).$$

Lema 4.3.3. $\bar{G_{t_1}}$ es la restricción de $\alpha R_+ * \bar{\mathrm{F}}$ a $(0, \infty)$.

Demostración. Se tiene que $\bar{G_{t_1}} = \mathbb{P}[Y(t_1) \in A]$ por lo que debe estudiarse el conjunto $\{Y(t_1) \in A\}$ para un conjunto $A \subseteq (0, \infty)$. Sea $\{Y(u)\}_{0 \leq u \leq t}$, $Y(t-)$ (lo que ocurre antes del tiempo t) es conocido y la reclamación Z puede contribuir al conjunto $\{Y(t_1) \in A\}$ si los saltos se dan al tiempo t, de modo que $Y(t-) + Z \in A$.
La probabilidad de esto está dada por:

$$I\{t \leq t_1\} \int I\{x \in A - Y(t-)\} d\mathbf{F}(x) = I\{t \leq t_1\} \bar{\mathrm{F}}(A - Y(t-)).$$

Dado que el proceso de arribos es Poisson, la probabilidad de que haya un arribo en $[t, t + dt)$ es αdt.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\bar{G_{t_1}}(A) &= \mathbb{P}[Y(t_1) \in A] \\
&= \int_0^\infty \left[\mathbb{E} \left(I\{t \leq t_1\} \bar{\mathrm{F}}(A - Y(t-)) \mid \{Y(u)\}_{0 \leq u < t} \right) \right] \alpha dt \\
&= \alpha \mathbb{E} \left[\int_0^\infty I\{t \leq t_1\} \bar{\mathrm{F}}(A - Y(t-)) dt \right] \\
&= \alpha \mathbb{E} \left[\int_0^\infty I\{t_1 > t\} \bar{\mathrm{F}}(A - Y(t)) dt \right] \\
&= \alpha \mathbb{E} \left[\int_0^{t_1} \bar{\mathrm{F}}(A - Y(t)) dt \right].
\end{aligned}$$

Renombrando a $R_+(A) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} I\{Y(t) \in A\} dt\right]$ y por una aproximación por funciones simples, para cualquier función medible $g \geq 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} g(Y(t)) dt\right].$$

Se define $g(y) = \bar{\mathrm{F}}(A - y)$ lo cual es una función medible no negativa, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{t_1}(A) &= \alpha \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} g(Y(t)) dt\right] = \alpha \int_{-\infty}^0 g(y) dR_+(y) \\
&= \alpha \int_{-\infty}^0 \bar{\mathrm{F}}(A - y) dR_+(y) = \alpha R_+ * \bar{\mathrm{F}}(A).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.1. Sea $1/(1+\rho) = \alpha\mu/c < 1$, donde $\mathbb{E}[Z] = \mu$, $Z \sim \mathbf{F}$ lo que quiere decir que, μ es el tamaño esperado de reclamaciones. Entonces G_{t_1} es defectuosa y está dada por la siguiente función de densidad defectuosa:

$$g_{t_1}(x) = \frac{\alpha}{c}(1 - \mathbf{F}(x)).$$

Demostración. Usando el Corolario (4.3.1) y el Lema (4.3.3) resulta:

$$\begin{aligned}
G_{t_1}(x+dx) - G_{t_1}(x) &= \alpha \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{F}(x+dx-z) - \mathrm{F}x - z))\, I\{z<0\} \frac{1}{c} dz \\
&= \frac{\alpha}{c} \int_{-\infty}^{0} \mathbb{P}[Z \in (x-z, x+dx-z]] dz \\
&= \frac{\alpha}{c} \int_{-\infty}^{0} f(x-z) dx dz.
\end{aligned}$$

Haciendo $u = x - z$:

$$G_{t_1}(x+dx) - G_{t_1}(x) = \frac{\alpha}{c} \int_{x}^{\infty} f(u) du dx = \frac{\alpha}{c} \left(1 - \mathbf{F}(x)\right),$$

donde f es la función de densidad de $\mathbf{F}$. □

Definición 4.3.3. (Tiempo de vida de un proceso de renovación) Sea $M = \sup\{Y(t) \mid Y(t) < \infty\}$ el tiempo de vida del proceso de renovación $Y(t)$.

Teorema 4.3.2. Si las reclamaciones son distribuidas exponencialmente con parámetro δ entonces las probabilidad de ruina está dada por:

$$\Psi(u) = \frac{\alpha\mu}{c}(\delta - \alpha/c) \exp(-(\delta - \alpha/c)u),$$

donde $\frac{\alpha\mu}{c} = \frac{\alpha}{\delta c} < 1$ (pues como las reclamaciones se distribuyen exponencialmente entonces la media es $\frac{1}{\delta}$).

Demostración. Sustituyendo el hecho de que las reclamaciones tienen distribución exponencial en la función de densidad de G_{t_1} resulta:

$$g_{t_1}(x) = \frac{\alpha}{c}(1 - \mathbf{F}(x)) = \frac{\alpha}{c} e^{-\delta x}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|G_{t_1}\| &= \int_{0}^{\infty} g_{t_1}(x) dx = \frac{\alpha}{c} \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}[Z > x] dx \\
&= \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

Como g_{t_1} es una densidad exponencial defectuosa, entonces la convolución de n exponenciales defectuosas es una densidad Gamma defectuosa, o bien, también llamada densidad de Erlang defectuosa la cual es:

$$g_{t_1}^{*n}(x) = \left(\frac{\alpha}{c}\right)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\delta x}.$$

La fórmula de Pollaczek-Khinchine, ecuación (4.7), proporciona la densidad de M, $f_M(u)$, la cual está dada por:

$$f_M(u) = \left(1 - \frac{\alpha\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} g_{t_1}^{*}(u).$$

Uniendo las dos ecuaciones antes mencionadas resulta:

$$\begin{aligned}
f_M(u) &= \left(1 - \frac{\alpha\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{c}\right)^n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\delta u} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha\mu}{c}\right) \cdot \frac{\alpha}{c} e^{-\delta u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\alpha/c)u)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha\mu}{c}\right) \cdot \frac{\alpha}{c} e^{-\delta u} e^{(\alpha/c)u} \\
&= \left(1 - \frac{\alpha\mu}{c}\right) \cdot \frac{\alpha}{c} e^{-(1/\mu - \alpha/c)u} \\
&= \frac{\alpha\mu}{c} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{c}\right) e^{-(1/\mu - \alpha/c)u}.
\end{aligned}$$

Además la probabilidad de ruina está dada por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
\Psi(u) = \mathbb{P}[M > u] &= \int_u^{\infty} f_M(s)ds = \int_u^{\infty} \frac{\alpha\mu}{c} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{c}\right) e^{-(1/\mu - \alpha/c)s} ds \\
&= \frac{\alpha\mu}{c} e^{-(1/\mu - \alpha/c)u}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que se obtiene el mismo resultado ya calculado cuando las reclamaciones se distribuyen de manera exponencial (Ejemplo 4.2.1), dicho de forma explícita:

$$\frac{\alpha\mu}{c} = \frac{1}{1+\rho} \qquad \text{y}$$

$$\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{c} = \frac{c - \alpha\mu}{c\mu} = \frac{(c - \alpha\mu)/\alpha\mu}{c\mu/\alpha\mu} = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)}.$$

Entonces de forma equivalente:

$$\Psi(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\rho u/\mu(1+\rho)}.$$

$\square$

Ejemplo 4.3.1. Considérese el modelo de Poisson compuesto, o bien, de Crámer-Lundberg, con la notación utilizada en los previos capítulos. Recordando que α es la intensidad del proceso Poisson, Z_i el tamaño de las reclamaciones. Se supone que Z_i tiene distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$.

Recordatorio:
$\{Y(t)\}$ es el proceso de reclamaciones excedentes.
$G_{t_1}(\cdot) = \mathbb{P}[Y(t_1) \in \cdot, t_1 < \infty]$ es la distribución escalera.
$M = \sup\{Y(t) \mid Y(t) < \infty\}$ es el tiempo de vida del proceso de renovación terminal.

Corolario 4.3.2. Supóngase que la distribución del tamaño de las reclamaciones es de tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{T})$, entonces:

a) G_{t_1} es una distribución de tipo defectuosa con representación $(\boldsymbol{\pi}_+, \mathbf{T})$ donde $\boldsymbol{\pi}_+ = -\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\pi}\mathbf{T}^{-1}$, y M es una distribución tipo fase con representación $(\boldsymbol{\pi}_+, \mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi}_+)$.

b) $\Psi(u) = \boldsymbol{\pi}_+ \exp\left((\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi}_+)u\right)\mathbf{e}$.

(Véanse las figuras 4.3 y 4.4).

Demostración.

Para el inciso a): Sea $t_1 = \inf\{t > 0 \mid Y(t) > 0\}$ la primera vez que $\{Y(t)\}$ cruza al 0, por lo tanto, la cantidad de $Y(t)$ que está por arriba del 0 es $Y(t_1)$. La distribución de $Y(t_1)$ es defectuosa ya que t_1 tiene la posibilidad de ser infinito con probabilidad positiva.

Por lo tanto, $G_{t_1}(x)$ es una distribución defectuosa y de tipo fase pues es la distribución del tiempo de vida de un proceso terminal de Markov.

Para verificar el resultado para M se utiliza el Corolario (3.1.1), ya que M representa el tiempo de vida de un proceso de renovación terminal.

Entonces M tiene representación $(\boldsymbol{\pi}_+, \mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi}_+)$.

Ahora se prosigue a calcular la distribución defectuosa $\boldsymbol{\pi}_+$ y se realiza de la siguiente manera:
Un proceso subyacente cruzará el nivel cero por primera vez en el estado j en el tiempo t si y sólo si $t \leq t_1$ y si el proceso subyacente pasara de algún estado inicial i al estado j en el tiempo $-Y(t)_-$ (el límite por la izquierda con signo negativo). La probabilidad que en $[t, t+dt)$ haya una llegada es de $\boldsymbol{\alpha}dt$. Por la ley de probabilidad total:

$$\begin{aligned}
\pi_{+i} &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^p \pi_i P_{ij}^{-Y(t)_-} I\{t_1 \geq t\}\right] \boldsymbol{\alpha} dt \\
&= \boldsymbol{\alpha} \sum_{i=1}^p \pi_i \int_0^\infty \mathbb{E}\left[P_{ij}^{-Y(t)_-} I\{t_1 \geq t\}\right] dt \\
&= \boldsymbol{\alpha} \sum_{i=1}^p \pi_i \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} P_{ij}^{-Y(t)_-} dt\right].
\end{aligned}$$

Anteriormente, se definió $R_+(A) = \mathbb{E}[\int_0^{t_1} I\{Y(t) \in A\} dt]$ la cual está concentrada sobre $(-\infty, 0)$.
Por teoría de la medida se tiene el siguiente resultado:

$$\int_{-\infty}^0 f(y) R_+(dy) = \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} f(Y(t)) dt\right].$$

Obteniendo a partir de aquí:

$$\begin{aligned}
\pi_{+i} &= \boldsymbol{\alpha} \sum_{i=1}^p \pi_i \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} P_{ij}^{-Y(t)_-} dt\right] \\
&= \boldsymbol{\alpha} \sum_{i=1}^p \pi_i \mathbb{E}\left[\int_0^{t_1} P_{ij}^{-Y(t)} dt\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\pi_i\int_{-\infty}^{0} P_{ij}^{-y}R_+(dy) \\ &= \boldsymbol{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\pi_i\int_{0}^{\infty} P_{ij}^{y}R_+(-dy) \\ &= \int_0^\infty\left(\boldsymbol{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\pi_i P_{ij}^{y}\right)R_+(-dy). \end{aligned}$$

Por el Corolario (4.3.1) y el Lema (4.3.3) se tiene:

$$\pi_{+i} = \int_0^\infty\left(\boldsymbol{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\pi_i P_{ij}^{y}\right)R_+(-dy) = \int_0^\infty \boldsymbol{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\pi_i P_{ij}^{y}dy.$$

Obteniendo como resultado:

$$\boldsymbol{\pi}_+ = \int_0^\infty \boldsymbol{\alpha\pi} e^{\mathbf{T}y}dy = -\boldsymbol{\alpha\pi}\mathbf{T}^{-1},$$

pues $\boldsymbol{\pi}_+ = (\pi_{+i})_{i=1,2,\ldots,p}$.

Cabe mencionar que en este caso se consideró que el proceso tiene pendiente igual a 1, si la pendiente es c entonces la distribución inicial del proceso de renovación terminal es: $\boldsymbol{\pi}_+ = -\boldsymbol{\alpha\pi}\mathbf{T}^{-1}/c$.

Para el inciso b): La ruina sucederá si y sólo si la vida del proceso de renovación rebasara el nivel u, lo cual significa que el proceso de renovación se encuentre en uno de los estados $1, 2, \ldots, p$ en el tiempo u. Por teoría de renovación, utilizando el Ejemplo (3.1.5), la probabilidad de esto es:

$$\Psi(u) = \boldsymbol{\pi}_+\exp\left((\mathbf{T} + \mathbf{t}\boldsymbol{\pi}_+)u\right)\mathbf{e}.$$

□

Ejemplo 4.3.2. El siguiente ejemplo a mostrar, se elaboró a través de *Maple* (ver 9.1)[6], con el fin de presentar de manera clara el cálculo de la probabilidad

[6]ver Apéndice A

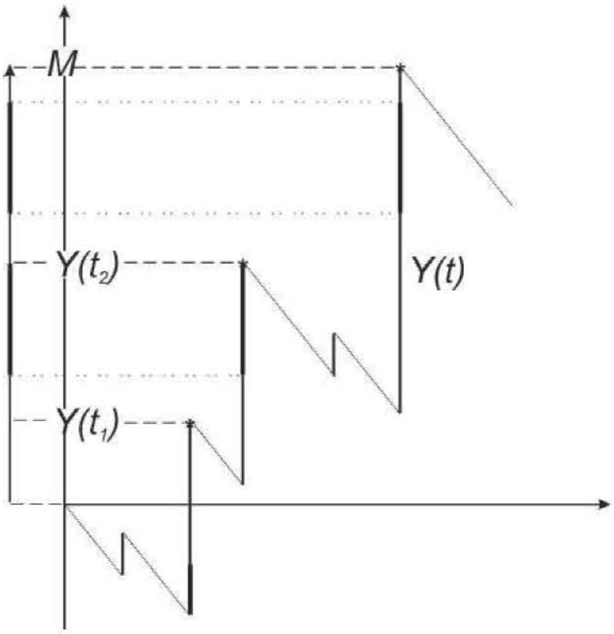

Figura 4.3: Proceso de Reclamaciones Excedentes o Proceso Escalera.

de ruina en el caso de contar con una función de densidad de tipo fase. Se pretende hacer la comparación de las gráficas tanto de la función tipo fase como con la distribución log normal con los parámetros μ=-0.32 y σ^2=0.8 (figura 4.5)

Por otro lado, la figura 4.6 muestra la probabilidad de ruina.

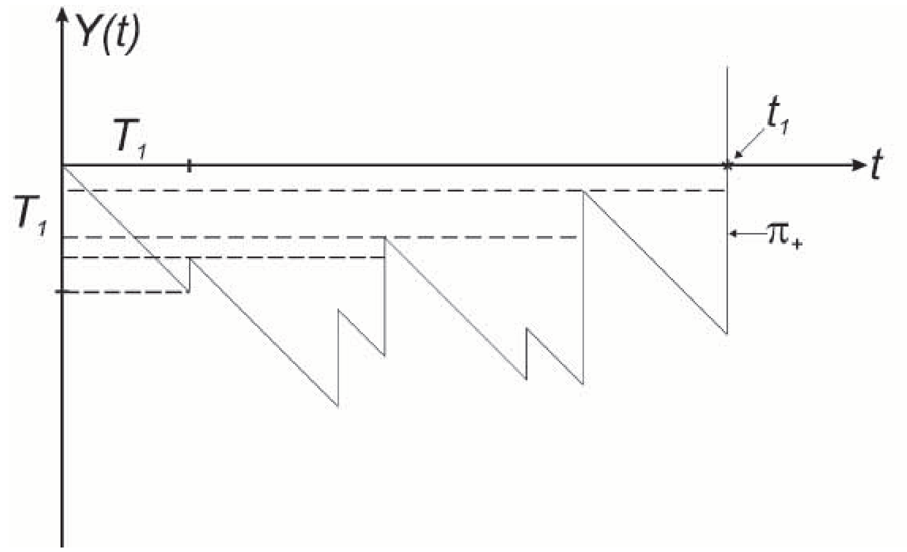

Figura 4.4: Distribución inicial del Proceso Escalera.

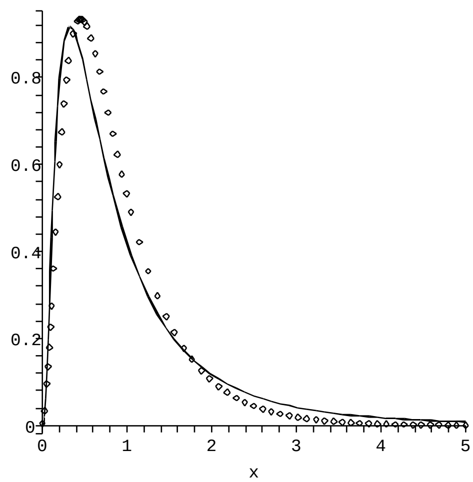

Figura 4.5: Comparación entre la función tipo fase (*línea punteada*) y la distribución *log* normal (*línea continua*).

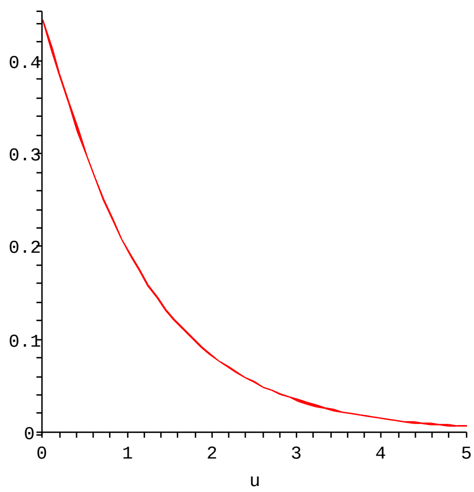

Figura 4.6: Probabilidad de Ruina a partir de una función de densidad tipo fase.

Capítulo 5

Relación entre Procesos de Riesgo y Colas

Existe una relación entre los procesos de riesgo y los sistema de colas, por lo que el presente capítulo trata de plasmar dicha relación, así que presenta una breve introducción de los sistemas de espera o de colas y se definen sus principales elementos: proceso de llegada, distribución del servicio (clientes), disciplina de la cola, número de servidores. Se mencionan los procesos de Lindley, los cuales son procesos de riesgo. También se exponen algunos ejemplos particulares de sistemas de colas.

La fuente consultada en este caso es: Asmussen [2].

5.1 Sistemas de Espera o Colas

Definición 5.1.1. (Sistema de colas) Un sistema de colas consiste en "clientes" que llegan aleatoriamente a alguna estación de servicio, donde reciben servicio y después se van. El término "cliente" se usa genéricamente. Bien se podría refirir a barcos llegando a un puerto, bloques de datos fluyendo en un subsistema computacional, máquinas descompuestas esperando servicio, entre otras cosas.

Los sistemas de colas se clasifican según los siguientes criterios:

1. El proceso de llegada: la distribución de probabilidad del patrón de llegada de los clientes a lo largo del tiempo.

2. La distribución del servicio: la distribución de probabilidad del tiempo aleatorio en que se sirve a un cliente (o grupos de clientes).

3. La disciplina de la cola: el número de servidores y el orden del servicio a los clientes. Los más comunes: FIFO (*first in-first out*), LIFO (*last in-first out*), aleatorios (*Random*) y Colas con prioridades.

Dos tipos simples de proceso de llegada son los que matemáticamente son más fácilmente manejables, a saber: el proceso de llegada en tiempo discreto, donde los clientes llegan en tiempos fijos $T_1, T_2, \ldots$ y el proceso de llegada aleatorio en tiempo continuo, que normalmente es un proceso Poisson.

Considérese un sistema que ha estado operando un tiempo suficientemente grande para haber alcanzado un estado aproximadamente estable, o una posición de equilibrio estadístico. Sean:

$L =$ número promedio de clientes en el sistema (cola+servicio).

$\lambda =$ tasa de llegada de los clientes al sistema.

$W =$ tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema.

La ecuación $L = \lambda W$ es válida en general para los sistemas de colas y es de básica importancia porque relaciona directamente dos de las más importantes medidas del desempeño del sistema: el tamaño promedio de la cola y el tiempo promedio de espera en un estado estable.

La relación $L = \lambda W$ depende de flujos a largo plazo. El razonamiento que le da validez (no es una prueba formal) es el siguiente: sea T un tiempo suficientemente grande, entonces el número total de personas que han entrado al sistema es λT, y el número de personas que han dejado el sistema es $\lambda(T - W)$. Entonces el número de personas que permanecen en el sistema debe estar dado por: $L = \lambda T - [\lambda(T - W)] = \lambda W$.

Existen diferentes tipos de colas para distinguir un sistema de colas de otro, se utiliza la notación de Kendall en la que se usan tres parámetros a saber: $\alpha/\beta/m$, donde α denota la distribución del tiempo entre los arribos, β denota la distribución del tiempo de servicio y m denota el número de servidores. Entre los valores correspondientes a α y β más comunes figuran:

M	La distribución exponencial.
PH	La distribución tipo fase.
GI o G	No hay restricciones en la forma de las distribuciones.

GI significa General Independiente y G significa General.

Notación 5.1.1. T_n denota los intervalos entre los arribos de los clientes n y $n+1$, los T_n's son independientes e idénticamente distribuidos y los instantes de los arribos son $0, T_0, T_0+T_1, \ldots$. El tiempo de servicio del cliente n está denotado por U_n, entonces $U_0, U_1, \ldots$ son también independientes e idénticamente distribuidos y además independientes de T_n.

Otros puntos importantes por definir son los siguientes:

- Q_t La longitud de la cola al tiempo t.
- W_n El tiempo de espera actual del cliente n, esto es, el tiempo que pasa desde que el cliente llega al sistema hasta que inicia su servicio.
- V_t El trabajo residual en el sistema al tiempo t, es decir, el tiempo total en que los m servidores tienen que trabajar para que queden libres de trabajo los m servidores. Cuando $m=1$, sólo hay un servidor, se refiere al tiempo necesario para que el servidor limpie el sistema, es decir, que no haya nuevos clientes. Cuando $m=1$, V_t tambiés es conocido como el tiempo de espera virtual al tiempo t.

Definición 5.1.2. La intensidad de tráfico η es una medida de rendimiento de un sistema de colas que está dada por:

$$\eta = \frac{\textit{tasa de llegada}}{\textit{tasa de servicio}}.$$

5.2 Procesos de Lindley en Tiempo Discreto

Un proceso de Lindley, en tiempo discreto e iniciando en w, es un proceso de la forma:

$$W_0 = w, \qquad W_{n+1} = (W_n + X_n)^+ \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5.1}$$

donde $x^+ = \max(x, 0)$ y $X_o, X_1, X_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas, pueden tomar valores tanto positivos como negativos y tienen función de distribución común $\mathbf{F}$. Los procesos pueden ser descritos como una cadena de Markov con espacio de estados $E = [0, \infty)$ y kernel de transición K dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^s K(w, y)dy &= \mathbb{P}[W_1 \leq s \mid W_o = w] = \mathbb{P}\left[(w + X_o)^+ \leq s\right] \\ &= \mathbb{P}[w + X_o \leq s] = \mathbf{F}(s - w), \qquad w, s \geq 0. \end{aligned}$$

Supóngase que $\mathbf{F}$ es concentrada en $\{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \ldots\}$ y considérese sólo los valores iniciales de la forma $w = k\delta$, entonces el espacio de estados se puede reducir a $E = \{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$.

Lo interesante de los procesos de Lindley es que en modelos particulares de colas suelen aparecer uno o más de dichos procesos, o bien, procesos que tienen una estructura semejante a los Lindley. Véanse algunos ejemplos de sistemas de colas:

Ejemplo 5.2.1. Considérese la cola $GI/M/1$ donde W_n denota el número de clientes justo antes del arribo del cliente n. Sea A la distribución entre los arribos y δ la intensidad del servicio. Para describir la relación entre W_n y W_{n+1}, sea K_n el número de eventos Poisson en el intervalo entre los arribos de los clientes n y $n + 1$ y:

$$q_k = \mathbb{P}[K_n = k] = \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{(\delta t)^k}{k!} dA(t),$$

por ser K_n una variable Poisson y además porque A es la distribución de ínter arribos.

Entonces $W_n + 1$ clientes están presentes justo después del arribo n y $W_{n+1} = (W_n + 1 - K_n)^+$ justo antes del arribo $n + 1$. Entonces la ecuación (5.1) conduce a que $X_n = 1 - K_n$ y nótese que las X_n son independientes. En este ejemplo se tiene que $E = \mathbb{Z}$ y con $r_n = q_{n+1} + q_{n+2} + \ldots$. La matriz de transición de $\{W_n\}$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} r_o & q_o & 0 & 0 & . & . \\ r_1 & q_1 & q_o & 0 & . & . \\ r_1 & q_2 & q_1 & q_o & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Ahora defínase una caminata aleatoria $\{S_n\}$ de la siguiente forma: $S_o = 0$, $S_n = X_0 + \ldots + X_{n+1}$. Entonces la ecuación (5.1) indica que el proceso de Lindley tiene el mismo mecanismo de transición que la caminata aleatoria $\{S_n\}$ con la excepción de que cuando la caminata cruza los valores positivos a los negativos, el proceso de Lindley permanece en cero.

Proposición 5.2.1. $W_n = \max(W_o + S_n, S_n - S_1, \ldots, S_n - S_{n-1}, 0)$.

Demostración. Para llegar a la igualdad es necesario demostrar las dos desigualdades que se especifican en las dos vietas siguientes. Por la ecuación (5.1) se tiene que los incrementos de $\{W_n\}$ son por lo menos aquellos de $\{S_n\}$ obteniendo:

$$W_n - W_{n-k} \geq S_n - S_{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

- Para probar "$\geq$": Si $k = n$ se tiene que $W_n \geq W_o + S_n$, y utilizando el hecho que $W_{n-k} \geq 0$ se obtiene $W_n \geq S_n - S_{n-k}$.
- Para probar "$\leq$": Basta demostrar que $W_n = W_o + S_n$ o $W_n = S_n - S_{n-k}$ para alguna k. El primer caso ocurre si $W_o + S_k \geq 0$, $k \leq n$. El otro caso si $W_l = 0$ para alguna $l \leq n$ y sea k el último semejante a l, la ecuación (5.1) conduce a que $W_n = S_n - S_{n-k}$.

□

Defínase

$$M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k \quad \text{y} \quad M = \max_{0 \leq k < \infty} S_k.$$

La distribución de

$$(S_n, S_n - S_1, \ldots, S_n - S_{n-1}, 0)$$

es la misma que

$$(S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1, S_o = 0),$$

conduciendo al siguiente corolario:

Corolario 5.2.1. $W_n \stackrel{D}{=} \max(W_o + S_n, M_{n-1})$. En particular si $W_o = 0$, entonces $W_n \stackrel{D}{=} M_n$.

Supóngase que $\mathbb{E}[\mid X_n \mid] < \infty$ y sea $\mu = \mathbb{E}[X_n]$.

Corolario 5.2.2. Si $\mu < 0$, entonces $M < \infty$ casi seguramente y $W_n \xrightarrow{D} M$.

Demostración. De $S_n/n \to \mu$ se obtiene $S_n \to -\infty$, cuando $n \to \infty$, pues $\mu n \to -\infty$, lo que implica que $M < \infty$. Además $W_o + S_n \to -\infty$ y $M_n \to M$ casi seguramente y en distribución, entonces $\max(W_o + S_n, M_{n-1}) = M_{n-1}$ y $W_n \xrightarrow{D} M$. □

Corolario 5.2.3. Si $\mu < 0$, entonces $M \stackrel{D}{=} (M + X)^+$ donde X es independiente de M y gobernado por $\mathbf{F}$. Además $H(m) = \mathbb{P}[M \leq m]$ es la única función de distribución sobre $[0, \infty)$, la cual resuelve la ecuación de la integral de Lindley:

$$H(m) = \int_{-\infty}^{m} H(m - x) d\mathbf{F}(x), \quad m \geq 0. \tag{5.2}$$

Demostración. Obsérvese lo siguiente:

$$\begin{aligned} (M + X)^+ &= \max(0, M + X) = \max(0, X, X + X_o, X + X_o + X_1, \ldots) \\ &\stackrel{D}{=} \max(0, X_o, X_o + X_1, X_o + X_1 + X_2, \ldots) = M. \end{aligned}$$

Además el lado derecho de la ecuación (5.2) es:

$$\mathbb{P}[(M + X)^+] \leq m = \mathbb{P}[M + X \leq m]$$

evaluado por la condición de $X = x$ y entonces la ecuación (5.2) equivale a $M \stackrel{D}{=} (M + X)^+$, lo que quiere decir que H es estacionaria para $\{W_n\}$.
Para probar la unicidad de H, supóngase que existen H_1 y H_2 que resuelve la ecuación (5.2), se puede considerar a las dos cadenas estacionarias con distribución inicial H_1 y H_2 respectivamente. Ahora del hecho que las dos convergen en distribución a M se concluye que $H_1 = H_2$. □

5.3 Riesgo de una Aseguradora

En el modelo compuesto de Poisson clásico (ver Capítulo 4) se definió un proceso de riesgo de reserva de una compañía de seguros al tiempo t como:

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

donde $c > 0$ es la tasa de la prima, u es el valor de la reserva inicial, $\mathbb{E}[N_t] = \alpha t$, α indica la tasa de los arribos y $\mathbf{F}(x) = \mathbb{P}[Z \leq x]$ es la distribución del tamaño de las reclamaciones y $\mu = \mathbb{E}[Z] = \int_0^\infty x d\mathbf{F}(x)$.

Se ha mencionado que un problema principal en teoría de riesgo es la evaluación de las probabilidades de ruina:

$$\Psi(u) = \mathbb{P}\left[\inf_{0\leq t<\infty} R_t < 0 \mid R_o = u\right] \quad \text{y} \quad \Psi(u,T) = \mathbb{P}\left[\inf_{0\leq t<T} R_t < 0 \mid R_o = u\right].$$

Algunos puntos importantes de la teoría de riesgo son los siguientes:

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k - ct, \qquad \tau(u) = \inf\{t > 0 \mid S_t > u\},$$

$$M_T = \sup_{0\leq t\leq T} S_t \quad \text{y} \quad M = \sup_{0\leq t<\infty} S_t.$$

Se puede observar que $\tau(u)$ es el tiempo en que ocurre la ruina, infiriendo las siguientes probabilidades:

$$\Psi(u) = \mathbb{P}[\tau(u) < \infty] = \mathbb{P}[M > u] \quad \text{y} \quad \Psi(u,T) = \mathbb{P}[\tau(u) \leq T] = \mathbb{P}[M_T > u].$$

Cuando $c > \alpha\mu$ significa que el promedio de las reclamaciones en una unidad de tiempo es menor estrictamente que la prima recibida. La medida de este hecho es llamada la sobreprima de seguridad $\rho = c/\alpha\mu - 1$.

Proposición 5.3.1. *Si $\{V_t\}_{t\geq 0}$ es el proceso del tiempo de espera virtual de una cola inicialmente vacía ($V_0 = 0$) $M/G/1$ con intensidad entre arribos de α y distribución del tiempo de servicio $\mathbf{F}$, entonces $\Psi(u,T) = \mathbb{P}[V_T > u]$, $\Psi(u) = \mathbb{P}[V > u] = \mathbb{P}[W > u]$ con V, W el tiempo de espera virtual y actual respectivamente en el estado estable. Además la sobreprima de seguridad ρ del proceso de riesgo y la intensidad de tráfico η de la cola están conectados por $\rho = 1/(\eta - 1)$ y $\eta = 1/(1 + \rho)$.*

Demostración. La relación $\Psi(u) = \mathbb{P}[W > u]$ se puede probar también de la siguiente forma: si $T_1, T_2, \ldots$ son los tiempos entre las reclamaciones, entonces M es alcanzado en $t = 0$ o en un tiempo de reclamación, entonces:

$$M = \max\{S_{T_1+\ldots+T_N} : N = 0, 1, 2, \ldots\} = \max\left\{\sum_{n=1}^{N}(Z_n - T_n) : N = 0, 1, 2, \ldots\right\}.$$

Se sigue para $\eta < 1$ que la probabilidad de ruina está dada por la fórmula de Pollaczek-Khintchine:

$$1 - \Psi(u) = \mathbb{P}[W \leq u] = (1 - \eta)\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n \mathbf{F}^{*n}(u),$$

donde $\mathbf{F}_0(dx) = (1 - \mathbf{F}(x))/\mu$. La probabilidad de superviviencia está dada por:

$$Z(u) = 1 - \eta + \eta\mathbf{F}_0^* Z(u) = 1 - \eta + \eta\int_0^u Z(u - x)(1 - \mathbf{F}(x))/\mu dx.$$

Una derivación directa de la ecuación anterior viene de la identificación de las distribuciones escalera $M/G/1$. Si $G_+(x) = \mathbb{P}\left[Y(0) \leq x\right]$ es la distribución escalera para $\{Y(t)\}$ entonces:

$$\begin{aligned} Z(u) &= \mathbb{P}[\tau(u) = \infty] + \int_0^u \mathbb{P}[\tau(u - x) = \infty]dG_+(x) \\ &= 1 - \|G_+\| + \int_0^u Z(u - x)dG_+(x). \end{aligned}$$

Por argumentos del Teorema (4.3.2), se tiene el resultado:

$$\|G_+\| = \frac{1}{1 + \rho} = \eta, \quad G_+ = \eta\mathbf{F}_0.$$

□

Ejemplo 5.3.1. En arreglos de fondos de pensiones, se puede pensar en un grande número N de poseedores de pensiones, cada uno teniendo una cierta cantidad de dinero con la cual pagan cierta tasa. Cuando ocurre la muerte de un poseedor, el capital restante de éste es entonces dividido entre los sobrevivientes. Esto conduce al proceso que representa el capital restante para alguno de los poseedores de pensiones que es:

$$R_t = u - ct + \sum_{k=1}^{N_t} T_k,$$

donde $\{N_t\}$ es un proceso de Poisson, con intensidad α, el cual representa los tiempos de muerte de los otros poseedores y $T_1, T_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidos, supóngase que con distribución A. Este modelo está relacionado con colas y caminatas aleatorias. Tomándose a $c = 1$ y sean $U_o, U_1, \ldots$ los tiempos entre los saltos. Para la ruina, se debe tener que $R_t < 0$, es decir, $u - R_t > u$, sólo antes de un salto al tiempo $t = U_o + \ldots + U_{n-1}$. Pero los valores de $u - R_t$ son $U_o, U_o + U_1 - T_1$, $U_o + U_1 + U_2 - T_1 - T_2, \ldots$ así que $\Psi(u) = \mathbb{P}[U_o + W > u]$, donde:

$$W = \max\{0, U_1 - T_1, U_1 + U_2 - T_1 - T_2, \ldots\}$$

es identificado con el tiempo de espera de la cola $GI/M/1$ con distribución entre arribos A y con intensidad de servicio α.

Capítulo 6

Conclusiones

El tema que se abordó en este trabajo hace manifiesto la existencia de un escenario de incertidumbre que evoluciona temporalmente, pues sin la ayuda del preciso cálculo no se sabe en sí cuando una aseguradora se arruinará. Así que se hacen las siguientes observaciones:

- La teoría de probabilidad permite cuantificar la incertidumbre.
- Cuando se tiene una estructura temporal subyacente, se utilizan los procesos estocásticos, que permiten modelar la evolución temporal de esta incertidumbre, de ahí la importancia de utilizar en este trabajo los procesos de riesgo R_t y $Y(t)$.

Mucha de la literatura consultada considera que este tema entra en las aplicaciones de las matemáticas, sin embargo, algunos autores lo encasillan específicamente en el área actuarial por su relación con los seguros, así que en muchos casos la teoría de ruina es considerada una técnica actuarial.

Un hecho importante es que las técnicas actuariales utilizadas para seguros generales, basadas en la teoría de riesgo o teoría de credibilidad, se están utilizando en distintas ramas y en distintos países, por ejemplo Ecuador realizó un estudio en el sector salud utilizando teoría de riesgo.

Ahora bien, el hecho de que se aplique la teoría de riesgo permitirá dar mayor sustento técnico a los proyectos que se ejecuten dentro de las ramas donde se ha implantado así como se podrán realizar proyecciones con mejor exactitud.

Otro punto a agregar es que una compañía es menos riesgosa, mientras su distribución de siniestros o reclamaciones sea menos dispersa con respecto al valor esperado de éstos.

En este sentido, el riesgo se entiende como la variación de un suceso aleatorio, en este caso las reclamaciones de la aseguradora, respecto de su valor esperado.

Por último, la solvencia y la capacidad financiera de una compañía aseguradora se ven afectadas por un conjunto de variables aleatorias, entre las que figuran:

- Ingreso por primas.
- Resultado por inversiones.
- Monto agregado de los siniestros o reclamaciones.
- Gastos.

Otro punto a mencionar es que las compañías aseguradoras podrían modelar los riesgos implícitos de la forma más apropiada conforme a su política de negocios.

Una recomendación acerca del tema de este trabajo sería que a todas las aseguradoras les fuera requerido un capital mínimo dado, satisfaciendo que la probabilidad de ruina de todas y cada una de ellas fuera idéntica, así que el ente regulador correspondiente podría establecer el valor de dicha probabilidad.

Dentro de las posibles líneas de investigación de este trabajo se citan:

- En el modelo clásico de riesgo las primas se asumen constantes, sin embargo, las primas pueden fluctuar en un periodo analizado, así que es importante considerar un modelo que tome en cuenta esta fluctuación.

- También en este trabajo se consideró que los incrementos entre los saltos de la tasa de la prima son lineales, entonces falta exponer el caso no lineal.
- Se pueden trabajar casos distintos donde la distribución de las reclamaciones no necesariamente sea la distribución exponencial o tipo fase.
- Se puede considerar incluir un modelo que englobe las cuatro variables aleatorias citadas: ingresos, resultado por inversiones, monto agregado de los siniestros y gastos en general.

Apéndice A

Cálculo de una Función Tipo Fase a través de *Maple*

A continuación se muestran los comandos ingresados en *Maple* (ver 9.1) con los cuales se elaboró la figura 4.5(figura A.1) y la figura 4.6 (figura A.2) :

```
f:=exp(-lambda*x)/(sqrt(2*Pi)*x)*exp(-(log(x)*log(x))/2);
```

$$f = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{e}^{(-\lambda x)}\sqrt{2}\mathbf{e}^{-(\frac{1}{2}\ln(x)^2)}}{\sqrt{\pi}x}$$

```
int(f,x=0.. infinity);
```

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\frac{\mathbf{e}^{(-\lambda x)}\sqrt{2}\mathbf{e}^{-(\frac{1}{2}\ln(x)^2)}}{\sqrt{\pi}x}$$

```
pi1:=matrix(1,4, [0.9731,0.0152,0.0106,0.001]);
```

$$\pi 1 = \begin{bmatrix} 0.9731 & 0.0152 & 0.0106 & 0.001 \end{bmatrix}$$

```
T:=matrix(4,4,[-28.648,28.532,0.089,0.027,0.102,
               -8.255,8.063,0.086,0.133,0.107,
               -5.807,5.296,.100,.102,.111,-2.176];
```

$$T = \begin{bmatrix} -28.648 & 28.532 & 0.089 & 0.027 \\ 0.102 & -8.255 & 8.063 & 0.086 \\ 0.133 & 0.107 & -5.807 & 5.296 \\ 0.100 & 0.102 & 0.111 & -2.176 \end{bmatrix}$$

```
e:=matrix(4,1,[1,1,1,1]);
```

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
texit:= evalm(-T&*e);
```

$$texit = \begin{bmatrix} -0 \\ 0.004 \\ 0.271 \\ 1.863 \end{bmatrix}$$

```
fph:=evalm(pi1&*exponential(T,x)&*texit)[1,1];
```

$$\begin{aligned} fph &= 2.871719903\mathbf{e}^{-1.662513677x} - 8.647388616\mathbf{e}^{-6.090958978x} \\ &\quad +5.827089243\mathbf{e}^{-8.397648539x} - 0.0466241262\mathbf{e}^{-28.73487881x} \end{aligned}$$

```
flog1:=1/(sqrt(2*Pi*1.8)*x)*exp(-(log(x)+1.62)^2/(2*1.8));
```

$$flog1 = \frac{0.5270462767\mathbf{e}^{(-0.2777777778(\ln(x)+1.62)^2)}}{\sqrt{\pi}x}$$

```
flog2:=1/(sqrt(2*Pi*0.8)*x)*exp(-(log(x)+0.32)^2/(2*0.8));
```

$$flog2 = \frac{0.7905694151\mathbf{e}^{(-0.6250000000(\ln(x)+0.32)^2)}}{\sqrt{\pi}x}$$

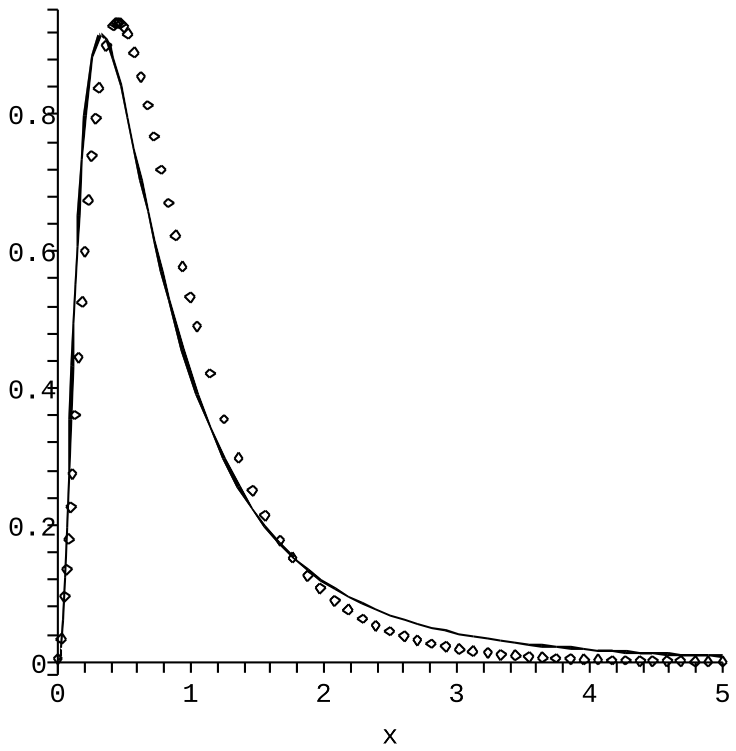

Figura A.1: Comparación entre la función tipo fase (*línea punteada*) y la distribución *log* normal (*línea continua*).

```
plot({fph,flog2},x=0. .5);
```

```
pimas:=evalm(-0.5*pi1&*inverse(T));
```

$$pimas = \begin{bmatrix} 0.01859272496 & 0.06964428745 & 0.1027395964 & 0.2532630124 \end{bmatrix}$$

```
evalm(pimas&*e)[1,1];
```

$$0.4442396212$$

```
S:=eval.(T+texit&*pimas);
```

$$S = \begin{bmatrix} -28.648 & 28.532 & 0.089 & 0.027 \\ 0.1020743709 & -8.254721423 & 8.063410958 & 0.08701305205 \\ 0.1380386285 & 0.1258736019 & -5.779157569 & 5.364634276 \\ 0.1346382466 & 0.2317473075 & 0.3024038681 & -1.704171008 \end{bmatrix}$$

```
evalm(S&*e);
```

$$\begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.00222304195 \\ -0.150611063 \\ -1.035381586 \end{bmatrix}$$

```
phi:=eval.(pimas&*exponential(S,u)&*e)[1,1];
```

$$\begin{aligned} \phi &= -0.00001515222\mathbf{e}^{(-28.73567605u)} + 0.0483375883\mathbf{e}^{(-7.936990632u)} \\ &\quad -0.07531124999\mathbf{e}^{(-6.843295783u)} + 0.4712284362\mathbf{e}^{(-0.8700875396u)} \end{aligned}$$

```
plot(phi, u=0. .5);
```

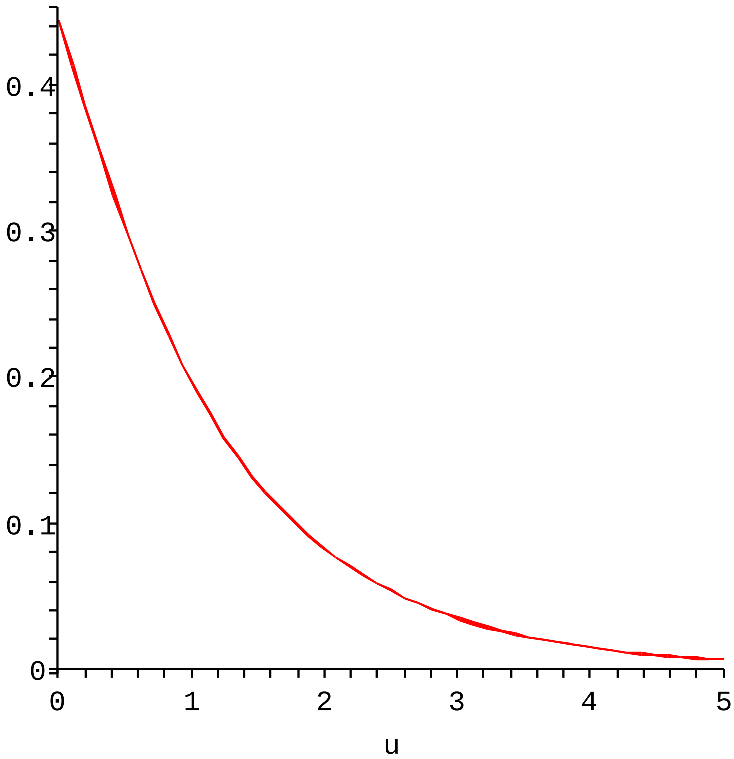

Figura A.2: Probabilidad de Ruina a partir de una función de densidad tipo fase.

Bibliografía

[1] Asmussen, Soren (2000) *Ruin Probabilities.* World Scientific Publishing Company, Singapur.

[2] Asmussen, Soren (2003) *Applied probability and queues.* Springer Verlag.

[3] Asmussen, Soren and Bladt, Mogens (1996) *Phase-type Distribution and Risk Processes with State-Dependent Premiums.* Publicación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIMAS).

[4] Beard, R.E (1984) *Risk Theory.* Chapman & Hall Third edition.

[5] Bladt, Mogens (2001) *Applications of phase-type theory to risk reserve processes.* Publicación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIMAS).

[6] Bladt, Mogens (2002) *The Phase Method.* Publicación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIMAS).

[7] Bladt, Mogens (2003) *Markov processes: Theory, Applications and Inference.* Publicación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIMAS).

[8] Bladt, Mogens (2004) *Teoría de Riesgo I.* Publicación del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIMAS).

[9] Bühlmann, Hans (1970) *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York.

[10] Fernández, Ma. Begoña(2000) *Resumen Cadenas de Markov*. Publicación de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

[11] Gerber, Hans (1979) *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Monograph No. 8. S.S. Huebner Foundation for Insurance Education.

[12] Grandell, Jan (1990) *Aspects of Risk Theory*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York.

[13] Syski, R (1989) *Random processes a first look*. Marcel Dekker Inc New York.

[14] _______(2007) "Teoría de Ruina" [http://portal.cnsf.gob.mx/pls/portal/docs] Consultada 20/marzo/2007.

[15] _______(2007) "Análisis de la Teoría de Riesgo: La transformada del momento de ruina" [en línea]. [http://www.uv.es/asepuma/recta/ordinarios/7/7.2.pdf] Consultada 26/marzo/2007.