UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

AGUJEROS EN HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A:

M. en C. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

DIRECTOR DE TESIS: **DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA**

MÉXICO, D. F. AGOSTO 2007

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Dios

Por seguirme dando más de lo que merezco.

A mis padres: Néstor y Ma. del Rosario

Por haberme enseñado a enfrentar la vida con responsabilidad
y por apoyarme en cada decisión que he tomado.

A mi esposita: Irma

Por todas las cosas que hemos compartido, por darme ánimos y tenerme paciencia cuando las cosas no iban bien.

A mis hermanos: Ana, Rosy, Juan e Ivan

Por su apoyo y cariño.

A Raúl, Emiliano, Lupita, Jennifer y Naomi

Por ser parte de mi familia.

A mis tíos, tías y primos

La vida no sería divertida sin ustedes.

A Alejandro

Por todo el tiempo dedicado, por las agradables charlas que hemos teníamos pero sobre todo por todo lo que me enseñaste respecto a las matemáticas.

A mis sinodales

Por su tiempo y consejos.

A mis amigos: Alejandro Fuentes, Fernando, Miguel, Enrique y Félix

Por su amistad y por las buena aventuras que hemos tenido.

Al IMATE

Un agradable lugar para trabajar.

A CONACYT.

Índice general

1. Preliminares **5**
1.1. Continuidad 6
1.2. Los Hiperespacios 7
1.2.1. Introducción 7
1.2.2. Convergencia de sucesiones. 10
1.2.3. Arcos ordenados en 2^X y $C(X)$ 12
1.2.4. Funciones de Whitney 15
1.3. Conexidad 15
1.4. Unicoherencia y propiedad b) 17

2. Resultados generales **32**
2.1. Introducción 32
2.2. Los singulares 33
2.3. El total 38
2.3.1. Introducción 38
2.3.2. Métrica convexa 38
2.3.3. Teorema 42
2.4. Arcos libres 43
2.5. Curvas cerradas simples 52

3. Continuos localmente conexos **58**
3.1. Introducción 58
3.2. Subcontinuos localmente conexos 59
3.2.1. Resultados auxiliares 59
3.2.2. Resultado principal 67

3.3. Gráficas finitas 68
3.3.1. Introducción 68
3.3.2. S no agujera a $C(G_0)$ 69
3.4. Curvas cerradas simples en continuos localmente conexos . . . 72
3.4.1. Introducción 72
3.4.2. Resultados auxiliares 73
3.4.3. Resultado principal 75
3.5. Subcontinuos no localmente conexos 76
3.5.1. Introducción 76
3.5.2. Resultados auxiliares 77
3.5.3. Teorema 81
3.6. Clasificación 83

4. Abanicos suaves **85**
4.1. Introducción 85
4.2. Resultados auxiliares 86
4.3. Resultados principales 89
4.4. Clasificación 98

5. Productos simétricos **100**
5.1. Introducción 100
5.2. Resultados auxiliares 101
5.3. Resultados principales 106
5.4. Clasificación 116

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. Dado un continuo X, un hiperespacio de X es una cierta familia de subconjuntos de X. Los más estudiados son (n es un entero positivo).

$$\begin{aligned} &2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ &C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}, \\ &C_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\right\} \text{ y} \\ &F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\right\}. \end{aligned}$$

A estos hiperespacios se les dota de la llamada métrica de Hausdoff.

Decimos que un espacio topológico Z es unicoherente, si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo. La unicoherencia es una propiedad muy útil para distinguir espacios topológicos. Por ejemplo, en [16, Lemas 2.1 y 2.2, pp. 348 y 349] A. Illanes probó que $C_2([0,1]) - \{A\}$ es unicoherente, para cada $A \in C_2([0,1])$, (de hecho, R. M. Schori probó que $C_2([0,1])$ es un 4-celda, la prueba fue comunicada a A. Illanes y aparece en [16, Lema 2.2, p. 349]), mientras que, si S^1 es una curva cerrada simple $C_2(S^1) - \{S^1\}$ no es unicoherente, A. Illanes probó que $C(S^1)$ es homeomorfo al cono sobre un toro sólido, con S^1 en el vértice (vease [17]). Como consecuencia obtuvo que $C_2([0,1])$ y $C_2(S^1)$ no son homeomorfos, lo que contrasta con el hecho de que $C([0,1])$ y $C(S^1)$ son homeomorfos.

Si Z es un espacio topológico unicoherente y $z \in Z$, decimos que *z agujera a Z*, si $Z - \{z\}$ no es unicoherente, en caso contrario, decimos que *z no agujera a Z*. En [25, Corolario 1.176, p. 178] S. B. Nadler, Jr. probó que, para cualquier continuo X, 2^X y $C(X)$ son unicoherentes y S. Macías en [21, Teorema 4.8, p. 244] probó que, para cada $n \geq 2$, $C_n(X)$ es unicoherente.

El trabajo está enfocado en el siguiente problema:

Problema: Dado un continuo X y un hiperespacio $\mathcal{H}$, ¿para cuáles elementos $A \in \mathcal{H}$ se tiene que A agujera a $\mathcal{H}$?

La estructura de este trabajo es la siguiente.

En el Capítulo 1 presentamos las propiedades básicas de los hiperespacios y algunos resultados de propiedad b) y unicoherencia que son necesarios para las pruebas de los resultados importantes de este trabajo. Es importante mencionar que los resultados que aparecen en este capítulo no son originales de este trabajo, por tal motivo, si el lector tiene conocimientos acerca de estos temas, puede omitir su lectura.

En el Capítulo 2, damos solución al problema en el caso en que X es cualquier continuo y A es un singular, un arco libre, una curva cerrada simple libre o el total. Cabe mencionar que dichos resultados aparecen en el artículo [1] que ya fue aceptado para su publicación en la revista Topology and its Applications.

En el Capítulo 3 presentamos la clasificación completa de los subcontinuos de un continuo localmente conexo que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos. La clasificación lograda en este capítulo generaliza a otra que había obtenido hace tiempo: una clasificación de los subcontinuos de una gráfica finita que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos. Una de las ventajas de haber logrado la clasificación de los subcontinuos de un espacio localmente conexo que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos, es que las pruebas se simplifican considerablemente en comparación con las que teníamos para gráficas finitas que eran muy largas, muy técnicas y, por tanto, muy tediosas, pues imagínese, sobre dicha clasificación tengo escritas más de 100 páginas, de las cuales ninguna aparece en el trabajo que usted tiene en sus manos.

En el Capítulo 4, con ayuda de los resultados hechos por S. B. Nadler, Jr. y C. Eberhart acerca del hiperespacio de continuos de un abanico suave, logramos establecer una clasificación completa de los subcontinuos de un abanico suave que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos.

En el Capítulo 5, establecemos una clasificación completa de los elementos de hiperespacio $F_2(X)$, donde X es un árbol, que lo agujeran.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo prensentamos algunas definiciones básicas de la Teoría de Continuos e Hiperespacios, necesarias para el desarrollo de este trabajo. También mencionaremos algunos resultados que serán de gran relevancia en las próximas secciones.

Empezaremos con la notación. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X, entonces denotaremos:

a) el *interior* de A en X como $int(A)$.

b) la *cerradura* de A en X como $Cl\,(A)$.

c) la *frontera* de A en X como $Fr\,(A)$.

Si los elementos de A son números reales, denotaremos, cuando tenga sentido:

a) el *supremo* de A como $\sup A$ y el *ínfimo* de A, como $\text{ínf } A$,

b) el *máximo* de A, como $\text{máx}\, A$ y el *mínimo* de A, como $\text{mín}\, A$.

Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ denotarán los conjuntos de números naturales y enteros, respectivamente y $\emptyset$ representará al conjunto vacío. Al conjunto de los números reales lo denotaremos por la letra $\mathbb{R}$.

Sea (Z, d) un espacio métrico. Tomemos $a \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Al conjunto $B_{\varepsilon}^{d}(a) = \{x \in Z : d(x, a) < \varepsilon\}$ lo llamaremos la *bola de radio ε con centro* *en a*. Cuando no haya posibilidad de confusión con la métrica que se use, el conjunto $B_{\varepsilon}^{d}(a)$ se denotará, simplemente, por $B_{\varepsilon}(a)$. La letra I denotará el conjunto $[0,1]$. Un *arco* es cualquier espacio homeomorfo a I.

1.1. Continuidad

En esta sección presentaremos algunos resultados que nos serán de gran ayuda para probar la continuidad de funciones.

Proposición 1.1.1. *([28, Teorema 7.6, p. 45]) Sean Z, Y espacios topológicos y A, B subconjuntos cerrados de Z tales que $Z = A \cup B$. Si $g_1 : A \to Y$ y $g_2 : B \to Y$ son continuas y $g_1|_{A\cap B} = g_2|_{A\cap B}$, entonces $f : Z \to Y$ definida por*

$$f(z) = \begin{cases} g_1(z), & \text{si } z \in A, \\ g_2(z), & \text{si } z \in B. \end{cases}$$

es una función continua.

Proposición 1.1.2. *Sean X, Y espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $x_0 = \lim x_n$ existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f(x_0) = \lim f(x_{n_k})$.*

Demostración. Denotemos por d y d' las métricas de X y Y, respectivamente.

(Necesidad). Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión de X tal que $x_0 = \lim x_n$ y $\varepsilon > 0$. Dado que f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que $f\left(B_{\delta}^{d}(x_0)\right) \subset B_{\varepsilon}^{d'}(f(x_0))$. Como $x_0 = \lim x_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in B_{\delta}^{d}(x_0)$. De manera que, para cada $n \geq N$, $f(x_n) \in B_{\varepsilon}^{d'}(f(x_0))$. Esto prueba que $f(x_0) = \lim f(x_n)$ y termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia). Supongamos que f no es continua en x_0. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ se tiene que $f\left(B_{\delta}^{d}(x_0)\right) \not\subseteq B_{\varepsilon}^{d'}(f(x_0))$. De manera que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^{d}(x_0)$ tal que $f(x_n) \notin B_{\varepsilon}^{d'}(f(x_0))$. Como $x_0 = \lim x_n$, por hipótesis, existe una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f(x_0) = \lim f(x_{n_k})$. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $f(x_{n_k}) \in B_{\varepsilon}^{d'}(f(x_0))$, lo cual es una contradicción pues, para cada

$k \in \mathbb{N}$, x_{n_k} es un elemento de $B^d_{\frac{1}{n_k}}(x_0)$ tal que $f(x_{n_k}) \notin B^{d'}_{\varepsilon}(f(x_0))$. Esto prueba que f es continua en x_0. ■

Proposición 1.1.3. *Sean X un espacio métrico, Y un espacio métrico compacto y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto $p \in X$ se tiene que si $q = \text{lím}\, f(p_n)$, para algún $q \in Y$, entonces $q = f(p)$.*

Demostración. (Necesidad). Sean $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X y $p \in X$ tales que $p = \text{lím}\, p_n$. Dado que f es continua, $f(p) = \text{lím}\, f(p_n)$. Ahora si $q = \text{lím}\, f(p_n)$, para algún $q \in Y$, como Y es un espacio de Hausdorff, $q = f(p)$.

(Suficiencia). Sea $x_0 \in X$. Probaremos que f es continua en x_0. Para ello consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_0 = \text{lím}\, x_n$. Dado que Y es compacto existen una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $q \in Y$ tal que $q = \text{lím}\, f(x_{n_k})$. Como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x_0 y $q = \text{lím}\, f(x_{n_k})$, por hipótesis, $q = f(x_0)$. Por la Proposición 1.1.2, f es continua en x_0. ■

Para terminar esta sección mencionaremos el Teorema de Extensión de Tietze.

Teorema 1.1.4. *([28, Teorema 15.8, p. 103]) Sea Z un espacio topológico. Entonces Z es normal si y sólo si siempre que A es un subconjunto cerrado de Z y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, existe un extensión de f a todo Z, es decir, existe una función continua $F : Z \to \mathbb{R}$ tal que $F|_A = f$.*

1.2. Los Hiperespacios

1.2.1. Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. Sean X un continuo y $A \subset X$, A es un *subcontinuo* de X si A es no vacío, conexo y compacto.

En el desarrollo de nuestro trabajo, mientras no se diga lo contrario, la letra X representará un continuo con métrica d.

Consideraremos los siguientes *hiperespacios* de un continuo X:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

Al conjunto 2^X lo dotamos con la *métrica de Hausdorff*.

Para definir la métrica Hausdorff, primero consideremos $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Sea

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \varepsilon\},$$

a este conjunto se le llama, la *nube del conjunto A de radio ε*. Ahora, definimos

$$H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R} \text{ como}$$
$$H(A,B) = \text{ínf}\,\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Una demostración de que H es una métrica para 2^X puede verse en [25, Teorema 0.2, p. 2]. De modo que 2^X es un espacio métrico. Más aún, 2^X es un continuo (ver [25, Teoremas 0.8 y 1.9, p. 7 y 63]). Al espacio $(2^X, H)$ se le llama el *hiperespacio de los subconjuntos cerrados del continuo X*.

Dado que $C(X)$ es un subconjunto de 2^X, $C(X)$ es un espacio métrico, además es compacto (ver [25, Teorema 0.8, p. 7]) y conexo (ver [25, Teorema 1.12, p. 65]). De manera que también $C(X)$ es un continuo.

Al espacio $(C(X), H)$ se le llama el *hiperespacio de los subcontinuos del continuo X*.

El siguiente lema, presenta una propiedad importante que satisface la métrica de Hausdorff. Muestra una relación existente entre la distancia de dos elementos en 2^X y las nubes de estos mismos.

Lema 1.2.1. *Sean A, $B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces*

$H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y A, $B \in 2^X$. Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Dado que $H(A,B) = \text{ínf}\,\{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}$, existe $\delta_0 \in \{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}$ tal que $\delta_0 < \varepsilon$. Entonces $A \subset N(\delta_0, B)$ y $B \subset N(\delta_0, A)$. Como $\delta_0 < \varepsilon$, $N(\delta_0, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta_0, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Así que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Ahora supongamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $\mathcal{S} = \{N(\delta, A) : 0 < \delta < \varepsilon\}$. Notemos que los elementos de $\mathcal{S}$ son subconjuntos abiertos de X. Afirmamos que $\mathcal{S}$ es una cubierta de B. Para ver esto, sea $b \in B$. Como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Sea $\delta \in (d(a,b), \varepsilon)$. Entonces $b \in N(\delta, A)$. Por lo que $\mathcal{S}$ es una cubierta abierta de B. Como B es compacto, existen $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, A)$. Sea $\delta' = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Entonces $B \subset N(\delta', A)$ y $0 < \delta' < \varepsilon$. Con un procedimiento análogo, podemos encontrar un $\delta'' > 0$ tal que $A \subset N(\delta'', B)$ y $\delta'' < \varepsilon$. Sea $\varepsilon' = \text{máx}\{\delta', \delta''\}$. Entonces $A \subset N(\varepsilon', B)$, $B \subset N(\varepsilon', A)$ y $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. De modo que $H(A,B) \leq \varepsilon' < \varepsilon$. ■

Lema 1.2.2. *Sean X un continuo con métrica d y $A \in C(X)$. Entonces $\mathcal{D} = \{B \in C(X) : B \subset A\}$ y $\mathcal{F} = \{B \in C(X) : B \cap A \neq \emptyset\}$ son cerrados en $C(X)$.*

Demostración. Dado que $A \in C(X)$, $\mathcal{D} = C(A)$. De manera que $\mathcal{D}$ es compacto. Como $C(X)$ es un espacio de Hausdorff, $\mathcal{D}$ es cerrado en $C(X)$.

Para mostrar que $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(X)$, probaremos que $C(X) - \mathcal{F}$ es abierto en $C(X)$. Sea $F \in C(X) - \mathcal{F}$. Entonces $F \cap A = \emptyset$. Dado que A y F son compactos y no vacíos, $\varepsilon = \text{ínf}\,\{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in F\} > 0$. Sea $B \in B_\varepsilon(F)$. Entonces $H(F,B) < \varepsilon$. Por el Lema 1.2.1, $B \subset N(\varepsilon, F)$. Supongamos que $B \cap A \neq \emptyset$ y sea $b_0 \in B \cap A$. Como $b_0 \in B$ y $B \subset N(\varepsilon, F)$, existe $x \in F$ tal que $d(b_0, x) < \varepsilon$. Esto contradice la definición de ε, pues $b_0 \in A$ y $x \in F$. De manera que $B \cap A = \emptyset$. Esto demuestra que $B_\varepsilon(F) \subset C(X) - \mathcal{F}$. Así, $C(X) - \mathcal{F}$ es abierto en X. Por tanto $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(X)$. ■

1.2.2. Convergencia de sucesiones.

Proposición 1.2.3. *Sean X un continuo, $a_0 \in X$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X tal que $A = \lim A_n$, para algún $A \in 2^X$. Entonces $a_0 \in A$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $a_0 = \lim a_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$.*

Demostración. (Necesidad). Sea $a_0 \in A$. Consideremos la función $h : X \to [0, \infty)$, definida por $h(x) = d(a_0, x)$. Dada $n \in \mathbb{N}$, como A_n es compacto y h es una función continua existe $a_n \in A_n$ tal que $h(a_n) \leq h(a)$, para todo $a \in A_n$. De esta manera obtenemos una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$.

Mostraremos que $a_0 = \lim a_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $A = \lim A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $H(A, A_n) < \varepsilon$. Sea $n \geq N$. Por el Lema 1.2.1, $A \subset N(\varepsilon, A_n)$. Como $a_0 \in A$, existe $a \in A_n$ tal que $h(a) = d(a_0, a) < \varepsilon$. Como $h(a_n) \leq h(a)$, tenemos que $h(a_n) < \varepsilon$, es decir, $d(a_0, a_n) < \varepsilon$. Esto demuestra que para todo $n \geq N$, $d(a_0, a_n) < \varepsilon$. De manera que $a_0 = \lim a_n$. Esto termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia). Sean $a_0 \in X$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X tal que $a_0 = \lim a_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Probaremos que $a_0 \in A$. Supongamos que $a_0 \notin A$. Como A es compacto, $\inf \{d(a_0, a) : a \in A\} = d(a_0, A) > 0$. Dado que $a_0 = \lim a_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $d(a_n, a_0) < \frac{d(a_0,A)}{2}$.

Por otra parte, como $A = \lim A_n$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq M$, $H(A_n, A) < \frac{d(a_0,A)}{2}$. Sea $n \geq \max\{N, M\}$. Por el Lema 1.2.1, $A_n \subset N\left(\frac{d(a_0,A)}{2}, A\right)$. Como $a_n \in A_n$, existe $a \in A$ tal que $d(a_n, a) < \frac{d(a_0,A)}{2}$. Además, dado que $n \geq N$, $d(a_n, a_0) < \frac{d(a_0,A)}{2}$. Así, $d(a, a_0) \leq d(a, a_n) + d(a_n, a_0) < \frac{d(a_0,A)}{2} + \frac{d(a_0,A)}{2} = d(a_0, A)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $a_0 \in A$ y termina la prueba de la suficiencia de la proposición. ■

En el desarrollo de este trabajo, utilizaremos constantemente la siguiente propiedad, la cual es satisfecha por las sucesiones en 2^X.

Lema 1.2.4. *Sea X un continuo. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en 2^X tales que $A = \lim A_n$ y $B = \lim B_n$, para algunos A, $B \in 2^X$, entonces*

a) si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$, entonces $A \subset B$.

b) si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

c) $A \cup B = \lim A_n \cup B_n$.

Demostración. Para ver a), sea $a \in A$. Mostraremos que $a \in B$. Por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a = \lim a_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Como, para toda $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in B_n$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in B_n$ y además $a = \lim a_n$. Entonces por la Proposición 1.2.3, $a \in B$. Esto prueba que $A \subset B$.

Prueba de b). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n \cap B_n$. De manera que tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X. Dado que X es compacto, podemos suponer que existe $x \in X$ tal que $x = \lim x_n$. Por la Proposición 1.2.3, $x \in A \cap B$.

Demostración de c).Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq M$, entonces $H(A, A_n) < \varepsilon$ y $H(B, B_n) < \varepsilon$. Por el Lema 1.2.1, para cada $n \geq M$, $A_n \subset N(\varepsilon, A)$ y $B_n \subset N(\varepsilon, B)$. Así que, para cada $n \geq M$, $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B)$. Pero $N(\varepsilon, A) \cup N(\varepsilon, B) = N(\varepsilon, A \cup B)$. Por tanto, para cada $n \geq M$, $A_n \cup B_n \subset N(\varepsilon, A \cup B)$.

Análogamente se prueba que, para cada $n \geq M$, $A \cup B \subset N(\varepsilon, A_n \cup B_n)$. Por el Lema 1.2.1, para cada $n \geq M$, $H(A \cup B, A_n \cup B_n) < \varepsilon$. Esto demuestra que $A \cup B = \lim A_n \cup B_n$. ■

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X. Definimos el *límite inferior* de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como:

$$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para todo } \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para toda } n \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

Y el *límite superior* como

$$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para todo } \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una cantidad infinita de números } n\}.$$

La siguiente proposición establece una relación, entre esta convergencia de sucesión en el hiperespacio 2^X y los conjuntos $\liminf A_n$ y $\limsup A_n$.

Proposición 1.2.5. *[25, Teorema 0.7, p. 14]. Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$. Entonces la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \in 2^X$ si y sólo si $\liminf A_n = A = \limsup A_n$.*

1.2.3. Arcos ordenados en 2^X y $C(X)$

La existencia de arcos ordenados en los hiperespacios 2^X y $C(X)$, es de gran ayuda para probar algunas de sus propiedades. En esta parte definiremos este tipo de arcos y mostraremos algunas de sus propiedades.

Un *arco ordenado en* 2^X es un subcontinuo no degenerado, α, de 2^X tal que si A, $B \in \alpha$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$. Si α es un arco ordenado en 2^X y α está contenido en $C(X)$, entonces diremos que α es un arco ordenado en $C(X)$. Por [25, Lema 1.3, p. 57], los arcos ordenados en 2^X son homeomorfos a I. La siguiente proposición establece cuándo un subconjunto de 2^X es un arco ordenado.

Además.

Proposición 1.2.6. *([25, Lema 1.5, p. 58]) Si α es un arco ordenado en 2^X, entonces $\bigcap \alpha \in \alpha$ y $\bigcup \alpha \in \alpha$.*

Teorema 1.2.7. *([25, Teorema 1.6, p. 59]) Si α es un arco ordenado en 2^X, entonces los dos puntos extremos de α son $\bigcap \alpha$ y $\bigcup \alpha$.*

De manera que si α es un arco ordenado en 2^X, diremos que α es un *arco ordenado de* $\bigcap \alpha$ *a* $\bigcup \alpha$. El siguiente resultado, establece una condición necesaria y suficiente para que exista un arco ordenado entre dos elementos de 2^X.

Proposición 1.2.8. *([25, Teorema 1.8, p. 59]) Si X es un continuo y A, $B \in 2^X$, entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersecta a A .*

Proposición 1.2.9. *([25, Lema 1.11, p. 64]) Si α es un arco ordenado en 2^X, tal que $\bigcap \alpha \in C(X)$, entonces $\alpha \subset C(X)$.*

Usando las proposiciones anteriores es sencillo probar el siguiente teorema.

Teorema 1.2.10. *Si X es un continuo y A, $B \in C(X)$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$ si y sólo si $A \subsetneq B$.*

Lema 1.2.11. *Sean X un continuo, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos ordenados y $\alpha_0 \subset 2^X$ tal que $\alpha_0 = \lim \alpha_n$. Supongamos que α_0 es un subconjunto no degenerado de 2^X. Entonces α_0 es un arco ordenado.*

Demostración. Notemos que cada α_n es un subcontinuo de 2^X, por lo que α_n es un elemento de $C\left(2^X\right)$. Como 2^X es, por sí mismo, un continuo, tiene sentido hablar de la métrica de Hausdorff para $C\left(2^X\right)$, que a su vez está inducida por la métrica de Hausdorff de 2^X. Esto le da sentido al símbolo $\alpha_0 = \lim \alpha_n$. Y, de hecho, como $C\left(2^X\right)$ es compacto, $\alpha_0 \in C\left(2^X\right)$, de manera que α_0 también es un subcontinuo de 2^X.

Como α_0 es no degenerado, por definición, para demostrar que α_0 es un arco ordenado, basta con probar que, para cualesquiera A, $B \in \alpha_0$, $A \subset B$ o $B \subset A$.

Sean A, $B \in \alpha_0$. Dado que $\alpha_0 = \lim \alpha_n$, por la Proposición 1.2.3, existen dos sucesiones $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en 2^X tales que $A = \lim A_n$, $B = \lim B_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n, $B_n \in \alpha_n$.

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, α_n es un arco ordenado, tenemos que $A_n \subset B_n$ o $B_n \subset A_n$. Supongamos, sin perder generalidad, que existen subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} \subset B_{n_k}$. Así que $A = \lim A_{n_k}$ y $B = \lim B_{n_k}$. Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_{n_k} \subset B_{n_k}$, por el inciso *a)* de Lema 1.2.4, $A \subset B$. ■

En el siguiente corolario, $\mathcal{H}$ representará a 2^X o $C(X)$.

Corolario 1.2.12. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $\mathcal{H} - \{X\}$ tal que $A_0 = \lim A_n$, para algún $A_0 \in \mathcal{H} - \{X\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea α_n, un arco ordenado de A_n a X en $\mathcal{H}$. Supongamos que existe un subconjunto no degenerado y cerrado α_0 en $2^{\mathcal{H}}$ tal que $\alpha_0 = \lim \alpha_n$. Entonces α_0 es un arco ordenado de A_0 a X.*

Demostración. Por el Lema 1.2.11, α_0 es un arco ordenado. De manera que sólo debemos mostrar que

$$A_0 = \bigcap \alpha_0 \text{ y } X = \bigcup \alpha_0.$$

Primero veamos que $A_0 = \bigcap \alpha_0$. Como $A_0 = \text{lím}\, A_n$, $\alpha_0 = \text{lím}\, \alpha_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \alpha_n$, tenemos que $A_0 \in \alpha_0$. De manera que $\bigcap \alpha_0 \subset A_0$.

Ahora, sea $B \in \alpha_0$. Dado que $\alpha_0 = \text{lím}\, \alpha_n$, por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $B = \text{lím}\, B_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \alpha_n$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B_n$. Entonces, por el Lema 1.2.4, $A_0 \subset B$. De manera que $A_0 \subset \bigcap \alpha_0$. Por tanto $A_0 = \bigcap \alpha_0$.

Ahora probaremos que $X = \bigcup \alpha_0$. Claramente $\bigcup \alpha_0 \subset X$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \in \alpha_n$. Así que $X \in \alpha_0$. De aquí $X \subset \bigcup \alpha_0$. Esto muestra que $X = \bigcup \alpha_0$ y termina la prueba del corolario. ■

Sean X un continuo y A, $B \in C(X)$, decimos que β es una *trayectoria ordenada de A a B en $C(X)$*, si $\beta = \{B\}$, en el caso en que $A = B$ o β es un arco ordenado de A a B en $C(X)$, si $A \neq B$.

Proposición 1.2.13. *Sean X un continuo y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subset B$. Entonces existe una trayectoria ordenada β de A a B en $C(X)$.*

Demostración. En el caso en que $A = B$, consideramos $\beta = \{A\}$.

Si $A \neq B$, dado que $A \subset B$, por el Teorema 1.2.10, existe un arco ordenado β de A a B en $C(X)$. Por tanto, existe una trayectoria ordenada de A a B en $C(X)$. ■

Proposición 1.2.14. *Sean X un continuo, A, $B \in C(X)$ y α una trayectoria ordenada de A a B en $C(X)$. Entonces existe una función continua $h : [0,1] \to \alpha$ tal que $h(0) = A$ y $h(1) = B$.*

Demostración. En el caso en que $A = B$, definimos $h : [0,1] \to \alpha$ por $h(t) = A$. Supongamos que $A \neq B$. Entonces α es un arco ordenado de A a B en $C(X)$. Por el Lema 1.3 de [25, p. 56], existe una función continua $h : [0,1] \to \alpha$ tal que $h(0) = A$ y $h(b) = B$. Esto termina la prueba de la proposición. ■

1.2.4. Funciones de Whitney

Si X es un continuo, una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$, es una *función de Whitney para* 2^X si satisface las siguientes condiciones:

1. para todo $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$,
2. si A está contenido propiamente en B, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

En [25, (0.50.1) y (0.50.2), pp. 25 y 26, respectivamente] se presentan ejemplos de funciones de Whitney para 2^X, donde X es un continuo cualquiera.

Cuando hablamos de una función de Whitney para $C(X)$ simplemente estaremos refiriéndonos a una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que satisface las condiciones 1 y 2. Entonces la restricción de cada función de Whitney de 2^X a $C(X)$ es una función de Whitney para $C(X)$.

Dado que 2^X y $C(X)$ son compactos, la imagen de ellos bajo una función de Whitney es un conjunto compacto de $[0, \infty)$. Lo que es más, la condición 2 asegura que el máximo de una función de Whitney siempre se alcanza en el elemento X de 2^X (o de $C(X)$, según en donde estemos contemplando a la función). Cuando X es no degenerado (es decir, cuando X tiene más de un punto), las condiciones 1 y 2 garantizan que $\mu(X) > 0$, así que podemos tomar la función $\frac{\mu}{\mu(X)} : 2^X \to [0, 1]$ (o con dominio $C(X)$, según sea el caso), definida por $\frac{\mu}{\mu(X)}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$. Observemos que esta nueva función sigue cumpliendo las propiedades 1 y 2 pero ahora tiene dos propiedades adicionales, a saber, su imagen está contenida en el intervalo $[0, 1]$ y $\mu(X) = 1$. Así que cuando hablemos de funciones de Whitney supondremos que X es no degenerado y le pediremos la propiedad adicional:

3. $\mu(X) = 1$.

1.3. Conexidad

En esta sección presentamos algunos resultados que serán de gran ayuda en demostraciones posteriores.

Teorema 1.3.1. *([13, Teorema 1.53 inciso 5, p. 55]) Sean Z un espacio topológico conexo y A un subconjunto conexo de Z. Si M_1 y M_2 es una separación de $Z - A$, entonces $A \cup M_1$ y $A \cup M_2$ son conexos.*

Proposición 1.3.2. *Sean Z un espacio topológico conexo y $p \in Z$. Si Y_1 y Y_2 son subconjuntos cerrados de Z tales que $Z = Y_1 \cup Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 = \{p\}$, entonces Y_1 y Y_2 son conexos. Además, si C es un subconjunto conexo de Z, entonces $C \cap Y_1$ y $C \cap Y_2$ son conexos y si $C \cap Y_1 \neq \emptyset$ y $C \cap Y_2 \neq \emptyset$, entonces $p \in C$.*

Demostración. Haremos la demostración por casos:

Caso 1. $Y_1 = \{p\}$.

En este caso $Z = Y_2$, pues $Z = Y_1 \cup Y_2$ y $p \in Y_2$. Por tanto Y_1 y Y_2 son conexos.

Sea C un subconjunto conexo de Z. Entonces $C \cap Y_1 = \{p\}$ o $C \cap Y_1 = \emptyset$, en ambas situaciones se cumple que $C \cap Y_1$ es conexo y $C \cap Y_2 = C \cap Z = C$ es conexo. Pero si $C \cap Y_1 \neq \emptyset$ y $C \cap Y_2 \neq \emptyset$, entonces $C \cap Y_1 = \{p\}$ y por tanto $p \in C$.

De manera que si $Y_1 = \{p\}$, la conclusión es cierta.

Análogamente, si $Y_2 = \{p\}$, la conclusión también es cierta.

Caso 2. $\{p\} \neq Y_1$ y $\{p\} \neq Y_2$.

En este caso se cumple que $Y_1 - \{p\} \neq \emptyset$ y $Y_2 - \{p\} \neq \emptyset$, además $Y_1 - \{p\}$ y $Y_2 - \{p\}$ son subconjuntos cerrados de $Z - \{p\}$, pues Y_1 y Y_2 son cerrados en Z y $Z - \{p\} = (Y_1 - \{p\}) \cup (Y_2 - \{p\})$ es una separación de $Z - \{p\}$. Por el Teorema 1.3.1, $Y_1 = (Y_1 - \{p\}) \cup \{p\}$ y $Y_2 = (Y_2 - \{p\}) \cup \{p\}$ son conexos.

Sea C un subconjunto conexo de Z. Mostraremos que $C \cap Y_1$ y $C \cap Y_2$ son conexos.

Subcaso 2.1. Supongamos que $C \subset Y_1$.

En este caso $C = C \cap Y_1$ y por tanto $C \cap Y_1$ es conexo.

Ahora, dado que $C \cap Y_2 \subset Y_1 \cap Y_2 = \{p\}$, tenemos que $C \cap Y_2 = \emptyset$ o $C \cap Y_2 = \{p\}$ y en ambas situaciones se cumple que $C \cap Y_2$ es conexo.

Subcaso 2.2. Supongamos que $C \not\subseteq Y_1$.

Si $C \subset Y_2$, procedemos como en el párrafo anterior.

Ahora, si $C \nsubseteq Y_2$, entonces $C \cap Y_1 - \{p\} \neq \emptyset$. Como $C \nsubseteq Y_1$ tenemos que $C \cap Y_2 - \{p\} \neq \emptyset$. Dado que $C \cap Y_1 - \{p\} \neq \emptyset$ y $C - \{p\} = (C \cap Y_1 - \{p\}) \cup (C \cap Y_2 - \{p\})$ es una separación de $C - \{p\}$. Como C es conexo, C no tiene separación, así que $C \neq C - \{p\}$, por lo que $p \in C$, por el Teorema 1.3.1, $C \cap Y_1 = (C \cap Y_1 - \{p\}) \cup \{p\}$ y $C \cap Y_2 = (C \cap Y_2 - \{p\}) \cup \{p\}$ son conexos. Esto termina la prueba del subcaso 2.2.

Ahora supongamos que $C \cap Y_1 \neq \emptyset$ y $C \cap Y_2 \neq \emptyset$. Demostraremos que $p \in C$. Dado que Y_1 y Y_2 son cerrados en Z, $C = (C \cap Y_1) \cup (C \cap Y_2)$, $C \cap Y_1 \neq \emptyset$, $C \cap Y_2 \neq \emptyset$ y C es conexo, tenemos que $(C \cap Y_1) \cap (C \cap Y_2) \neq \emptyset$. Pero $\emptyset \neq (C \cap Y_1) \cap (C \cap Y_2) \subset Y_1 \cap Y_2 = \{p\}$, por tanto $p \in C$. ■

Para finalizar esta sección, citaremos el teorema de los golpes en la frontera.

Teorema 1.3.3. *([27, Teorema 5.6, p. 74]) Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $Cl\,(K) \cap Fr\,(E) \neq \emptyset$.*

1.4. Unicoherencia y propiedad b)

Decimos que un espacio topológico conexo Z es *unicoherente,* si siempre que $Z = A \cup B$, donde A y B son subconjuntos conexos y cerrados en Z, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Denotaremos por S^1 a la circunferencia de radio uno centrada en el origen del plano y exp denotará la función continua $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $\exp(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$. Recordemos que al plano lo podemos identificar con los números complejos, así que si $z \in S^1$, escribiremos indistintamente $z = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ y $z = \cos(2\pi t) + i\operatorname{sen}(2\pi t)$. Sean Z un espacio topológico conexo y $f : Z \to S^1$ una función continua, decimos que f *tiene un levantamiento,* si existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ h = f$, llamaremos a h *levantamiento de* f. Un espacio topológico conexo, Z, tiene la *propiedad b)*, si, toda función continua $f : Z \to S^1$ tiene un levantamiento.

Ahora, demostraremos algunos resultados acerca de la propiedad b).

Proposición 1.4.1. *Sean Z y Y espacios topológicos conexos. Si Z es homeomorfo a Y y Z tiene la propiedad b), entonces Y tiene la propiedad b).*

Demostración. Sean $f : Y \to S^1$ una función continua y $h : Z \to Y$ un homeomorfismo. Dado que Z tiene la propiedad b), existe un levantamiento $g : Z \to \mathbb{R}$ de la función continua $f \circ h$. Definimos $g' : Y \to \mathbb{R}$ por $g'(y) = (g \circ h^{-1})(y)$. Como g y h^{-1} son continuas, g' es continua, además

$$\begin{aligned}(\exp \circ g')(y) &= (\exp \circ (g \circ h^{-1}))(y) \\ &= ((\exp \circ g) \circ h^{-1})(y) \\ &= ((f \circ h) \circ h^{-1})(y) \\ &= f(y).\end{aligned}$$

De manera que g' es un levantamiento de f. Por tanto Y tiene la propiedad b). ■

Teorema 1.4.2. *Sean Z un espacio topológico conexo, $f : Z \to S^1$ continua y h_1, $h_2 : Z \to \mathbb{R}$ dos levantamientos de f. Si existe $z_0 \in Z$ tal que $h_1(z_0) = h_2(z_0)$, entonces $h_1 = h_2$.*

Demostración. Para cada $z \in Z$,

$$\exp \circ h_1(z) = \cos(2\pi h_1(z)) + isen(2\pi h_1(z)) = e^{ih_1(z)}$$

y

$$\exp \circ h_2(z) = \cos(2\pi h_2(z)) + isen(2\pi h_2(z)) = e^{ih_2(z)}.$$

Como h_1 y h_2 son levantamientos de f, para cada $z \in Z$, $e^{ih_1(z)} = f(z) = e^{ih_2(z)}$. De manera que, para cada $z \in Z$, $\frac{e^{ih_1(z)}}{e^{ih_2(z)}} = 1$. Por tanto, para cada $z \in Z$, $e^{i(h_1-h_2)(z)} = 1$. De esto, para todo $z \in Z$, $(h_1 - h_2)(z) \in \mathbb{Z}$. Como Z es conexo y los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Z}$ son los conjuntos de un solo punto, $h_1 - h_2$ es constante. Dado que $h_1(z_0) = h_2(z_0)$, tenemos que $h_1 = h_2$. ■

Lema 1.4.3. *Sean W un espacio topológico con la propiedad b), $f : W \to S^1$ una función continua, $w_0 \in W$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que* $\exp(t_0) = f(w_0)$. *Entonces existe un levantamiento de f $h : W \to \mathbb{R}$ tal que $h(w_0) = t_0$.*

Demostración. Dado que W tiene la propiedad b), existe $g : W \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ g = f$. Así que, $(\exp \circ g)(w_0) = f(w_0) = \exp(t_0)$. Entonces

$$(\exp \circ g)(w_0) = \cos(2\pi g(w_0)) + isen(2\pi g(w_0)) = e^{ig(w_0)}$$

y

$$\exp(t_0) = \cos(2\pi t_0) + isen(2\pi t_0) = e^{it_0}.$$

De manera que $e^{it_0} = f(t_0) = e^{ig(w_0)}$. Así que $e^{i(t_0 - g(w_0))} = \frac{e^{it_0}}{e^{ig(w_0)}} = 1$. Por tanto $t_0 - g(w_0) = k_0 \in \mathbb{Z}$. Definimos $h : W \to \mathbb{R}$ por $h(w) = g(w) + k_0$. Claramente h es continua, $h(w_0) = g(w_0) + k_0 = t_0$ y además, para cada $w \in W$,

$$\begin{aligned}
(\exp \circ h)(w) &= \exp(h(w)) \\
&= \exp(g(w) + k_0) \\
&= (\cos(2\pi(g(w) + k_0)), sen(2\pi(g(w) + k_0))) \\
&= (\cos(2\pi g(w) + 2\pi k_0), sen(2\pi g(w) + 2\pi k_0)) \\
&= (\cos(2\pi g(w)), sen(2\pi g(w))) \\
&= (\exp \circ g)(w) \\
&= f(w). \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 1.4.4. *Sean W un espacio topológico y Z_1, Z_2 subconjuntos cerrados de W que tienen la propiedad b). Si $Z_1 \cap Z_2$ es conexo, entonces $Z_1 \cup Z_2$ tiene la propiedad b).*

Demostración.

Sea $f : Z_1 \cup Z_2 \to S^1$ una función continua.

Caso 1. $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$.

Sean $x_0 \in Z_1 \cap Z_2$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, fijos, tales que $\exp(t_0) = f(x_0)$. Dado que Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b), por el Lema 1.4.3, existen dos funciones continuas $h_1 : Z_1 \to \mathbb{R}$ y $h_2 : Z_2 \to \mathbb{R}$, tales que $f|_{Z_1} = \exp \circ h_1$, $f|_{Z_2} = \exp \circ h_2$ y $h_1(x_0) = t_0 = h_2(x_0)$. Definimos $h : Z_1 \cup Z_2 \to \mathbb{R}$ por

$$h(z) = \begin{cases} h_1(z), & \text{si } z \in Z_1, \\ h_2(z), & \text{si } z \in Z_2. \end{cases}$$

Dado que $h_1|_{Z_1 \cap Z_2}$ y $h_2|_{Z_1 \cap Z_2}$ son levantamientos de $f|_{Z_1 \cap Z_2}$, $Z_1 \cap Z_2$ es conexo y $h_1(x_0) = h_2(x_0)$, por el Teorema 1.4.2, $h_1|_{Z_1 \cap Z_2} = h_2|_{Z_1 \cap Z_2}$. De manera que h está bien definida y, por la Proposición 1.1.1, h es continua. Más aún, $f = \exp \circ h$. Esto termina la prueba del Caso 1.

Caso 2. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Dado que Z_1 y Z_2 tienen la propiedad b), existen dos funciones continuas $h_1 : Z_1 \to \mathbb{R}$ y $h_2 : Z_2 \to \mathbb{R}$ tales que $\exp \circ h_1 = f|_{Z_1}$ y $\exp \circ h_2 = f|_{Z_2}$. Definimos $h : Z_1 \cup Z_2 \to \mathbb{R}$, por

$$h(z) = \begin{cases} h_1(z), & \text{si } z \in Z_1, \\ h_2(z), & \text{si } z \in Z_2. \end{cases}$$

Dado que Z_1 y Z_2 son subconjuntos cerrados de W y $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, h es continua y claramente $\exp \circ h = f$. Esto termina la prueba del Caso 2. ■

Sean Z, Y espacios topológicos y f, g funciones continuas de Z a Y. Decimos que f *es homotópica a* g, si existe una función continua $F : Z \times [0,1] \to Y$ tal que, para todo $z \in Z$, $F(z,0) = f(z)$ y $F(z,1) = g(z)$. El siguiente resultado fue probado por S. Mardešić en [22].

Teorema 1.4.5. *([22, Lema 5, p. 39]) Sean Z un espacio topológico y $f : Z \to S^1$ una función continua. Entonces f tiene un levantamiento si y sólo si f es homotópica a una función constante.*

Sean Z un espacio topológico y $Y \subset Z$. Una *retracción de Z en Y*, es una función continua $r : Z \to Y$ tal que, para toda $y \in Y$, $r(y) = y$. Decimos que Y es un *retracto por deformación de Z*, si existen una retracción $r : Z \to Y$ y una función continua $F : Z \times [0,1] \to Z$, tales que, para todo $z \in Z$, $F(z,0) = z$, y $F(z,1) = r(z)$. Un espacio topológico Z es *contraible* si existe $p \in Z$ tal que $\{p\}$ es un retracto por deformación de Z.

Teorema 1.4.6. *Sean Z un espacio topológico y Y un retracto por deformación de Z. Entonces Z tiene la propiedad b) si y sólo si Y tiene la propiedad b).*

Demostración. Dado que Y es un retracto por deformación de Z, existen una retracción $r : Z \to Y$ y una función continua $F : Z \times [0,1] \to Z$, tales que, para cada $z \in Z$, $F(z,0) = z$ y $F(z,1) = r(z)$.

(Necesidad). Sea $f : Y \to S^1$ una función continua. Dado que Z tiene la propiedad b), existe un levantamiento $h : Z \to \mathbb{R}$ de $f \circ r$. Consideremos $h|_Y : Y \to \mathbb{R}$. Dado $y \in Y$, tenemos que $\exp \circ h|_Y (y) = f \circ r(y) = f(y)$, pues $r(y) = y$. Esto demuestra que $h|_Y$ es un levantamiento de f. De manera que Y tiene la propiedad b).

(Suficiencia). Consideremos una función continua $f : Z \to S^1$. Probaremos que f es homotópica a una constante. Dado que Y tiene la propiedad b), por el Teorema 1.4.5, $f|_Y$ es homotópica a una constante. De manera que existen $s_0 \in S^1$ y una función continua, $H : Y \times [0,1] \to S^1$ tales que, para cada $y \in Y$, $H(y,0) = f|_Y(y)$ y $H(y,1) = s_0$. Definimos $H_1 : Z \times [0,1] \to S^1$ por

$$H_1(z,t) = \begin{cases} f(F(z,2t)), & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ H(r(z), 2t-1), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Como $f(F(z,1)) = f(r(z))$ y $H(r(z),0) = f(r(z))$, para toda $z \in Z$, tenemos que H_1 es continua. Además, para cada $z \in Z$,

$$H_1(z,0) = f(F(z,0)) = f(z),$$

y

$$H_1(z,1) = H(r(z),1) = s_0.$$

De manera que f es homotópica a una constante. Por el Teorema 1.4.5, f tiene un levantamiento. Esto prueba que Z tiene la propiedad b). ■

Corolario 1.4.7. *Sea Z un espacio topológico. Si Z es contraible entonces Z tiene la propiedad b).*

Demostración. Si Z es contraible, existe $p \in Z$, tal que $\{p\}$ es un retracto por deformación de Z. Dado que $\{p\}$ tiene la propiedad b), por el Teorema 1.4.6, Z tiene la propiedad b). ■

Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$, I^n es contraible, tenemos que:

Corolario 1.4.8. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces I^n tiene la propiedad b).*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, S^n denotará la esfera unitaria de dimensión n, es decir $S^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\right\}$.

Corolario 1.4.9. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$, entonces S^n tiene la propiedad b).*

Demostración. Denotemos por

$$M_1 = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1 \text{ y } x_1 \geq 0\right\},$$

y

$$M_2 = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1 \text{ y } x_1 \leq 0\right\}.$$

Sea

$$M = \left\{(x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n} : x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 \leq 1\right\}.$$

Definimos $h : M_1 \to M$ por $h(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (x_2, ..., x_{n+1})$. Claramente h es continua y además $g : M \to M_1$ definida por $g(x_2, ..., x_{n+1}) = \left(\sqrt{1 - \left(x_2^2 + ... + x_{n+1}^2\right)}, x_2, ..., x_{n+1}\right)$ es su función inversa, la cual también es continua. De manera que h es un homeomorfismo. Así que M_1 es homeomorfo a M.

De manera análoga se prueba que M_2 es homeomorfo a M.

Ya que la función $H : M \times [0,1] \to M$ dada por $H((x_2, ..., x_{n+1}), t) = (1-t)(x_2, ..., x_{n+1})$ nos lleva a que M es contraible, por el Corolario 1.4.7, M_1 y M_2 tienen la propiedad b). Dado que S^{n-1} es conexo y $M_1 \cap M_2 = S^{n-1}$, por el Lema 1.4.4, S^n tiene la propiedad b). ■

Lema 1.4.10. *Si M es una celda de dimensión mayor o igual a tres y $p \in M$, entonces $M - \{p\}$ tiene la propiedad b).*

Demostración. Sea n la dimensión de M. Supongamos que $M = [-1, 1]^n$. Si $p \in Fr_{\mathbb{R}^n}(M)$, entonces la función $F : (M - \{p\}) \times [0, 1] \to M - \{p\}$ definida por $F(q, t) = tq$ es continua y además, para cada $q \in M - \{p\}$, $F(q, 1) = q$, $F(q, 0) = \overline{0}$, donde $\overline{0} = (0, 0, ..., 0) \in M$. De manera que $M - \{p\}$ es contraible. Por el Corolario 1.4.7, $M - \{p\}$ tiene la propiedad b).

Ahora, si $p \in int_{\mathbb{R}^n}(M)$, para cada $q \in M - \{p\}$, denotamos por r_q el punto de intersección de $Fr(M)$ y el segmento de recta que inicia en p y pasa por el punto q. Definimos $r : M - \{p\} \to Fr(M)$ por $r(q) = r_q$. Claramente r es una retracción de $M - \{p\}$ en $Fr(M)$. Definimos $H : (M - \{p\}) \times [0, 1] \to M - \{p\}$ por $H(q, t) = (1 - t) q + tr_q$. Notemos que H es continua y además, para cada $q \in M - \{p\}$, $H(q, 0) = q$ y $H(q, 1) = r_q = r(q)$. De manera que $Fr(M)$ es un retracto por deformación de $M - \{p\}$. Dado que $Fr(M)$ es homeomorfo a la esfera S^{n-1} y $n \geq 3$, por el Colorario 1.4.9, $Fr(M)$ tiene la propiedad b). Así, por el Teorema 1.4.6, $M - \{p\}$ tiene la propiedad b). ■

Los siguientes resultados establecen la relación entre ser unicoherente y tener la propiedad b).

Teorema 1.4.11. *Sea Z un espacio topológico normal. Si Z tiene la propiedad b), entonces Z es unicoherente.*

Demostración. Supongamos que Z no es unicoherente. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y conexos A y B tales que $Z = A \cup B$ y $A \cap B$ no es conexo. Sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados no vacíos de Z tales que $A \cap B = F_1 \cup F_2$ y $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Como Z es un espacio normal, por el Teorema 1.1.4, existe una función continua $f : Z \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tal que $f(F_1) = \{0\}$ y $f(F_2) = \frac{1}{2}$.

Definimos $g : Z \to S^1$ por

$$g(z) = \begin{cases} \exp(f(z)), & \text{si } z \in A, \\ \exp(-f(z)), & \text{si } z \in B. \end{cases}$$

Dado que g es continua en los conjuntos A y B, los cuales son cerrados en Z, para ver que g es continua en Z basta mostrar, por la Proposición 1.1.1, que, para cada $z \in A \cap B$, $\exp(f(z)) = \exp(-f(z))$. Sea $z \in A \cap B = F_1 \cup F_2$. Entonces $z \in F_1$ o $z \in F_2$. En el caso en que $z \in F_1$, tenemos que $f(z) = 0$. Entonces $f(z) = -f(z)$ y por tanto $\exp(f(z)) = \exp(-f(z))$.

Por otro lado, en el caso en que $z \in F_2$, tenemos que $f(z) = \frac{1}{2}$. De manera que $\exp(f(z)) = (\cos(\pi), sen(\pi)) = (-1, 0)$. Por otra parte, $\exp(-f(z)) = (\cos(-\pi), sen(-\pi)) = (-1, 0)$. Por tanto $\exp(f(z)) = \exp(-f(z))$. Esto demuestra que la función g es continua en Z.

Dado que Z tiene la propiedad b), existe una función continua $h : Z \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ h = g$. Sea $L = \exp(h(A) \cap h(B))$. Dado que A y B son conexos, $h(A)$ y $h(B)$ son subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$, por tanto $h(A) \cap h(B)$ es conexo. Por tanto, como exp es una función continua, L es conexo.

Mostraremos que $L = \{(1, 0), (-1, 0)\}$ y con ello obtendremos una contradicción con el hecho de que L es conexo.

Notemos que

$$\exp(h(A \cap B)) \subset \exp(h(A) \cap h(B)) = L \subset \exp(h(A)) \cap \exp(h(B)).$$

Dado que h es un levantamiento de g,

$$\exp(h(A \cap B)) = g(A \cap B),$$
$$\exp(h(A)) = g(A)$$

y

$$\exp(h(B)) = g(B).$$

De manera que

$$g(A \cap B) \subset L \subset g(A) \cap g(B).$$

Pero

$$\begin{aligned} g(A \cap B) &= g(F_1 \cup F_2) \\ &= g(F_1) \cup g(F_2) \\ &= \exp(f(F_1)) \cup \exp(f(F_2)) \\ &= \exp(\{0\}) \cup \exp\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) \\ &= \{(1, 0), (-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que $\{(1,0),(-1,0)\} \subset g(A) \cap g(B)$. Además, si $x \in g(A) \cap g(B)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $g(a) = \exp(f(a)) = x = \exp(-f(b))$. Entonces $\frac{\exp(f(a))}{\exp(-f(b))} = 1$. De manera que $f(a) + f(b) \in \mathbb{Z}$. Pero $f(a),\ f(b) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, por tanto $f(a) = 0 = f(b)$ o $f(a) = \frac{1}{2} = f(b)$. Así que $x = \exp(f(a)) = (1,0)$ o $x = \exp\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (-1,0)$. Entonces $x \in \{(1,0),(-1,0)\}$. Esto demuestra que $g(A) \cap g(B) = \{(1,0),(-1,0)\}$.

Como $g(A \cap B) \subset L \subset g(A) \cap g(B)$ y $g(A \cap B) = \{(1,0),(-1,0)\} = g(A) \cap g(B)$, $L = \{(1,0),(-1,0)\}$. De manera que L no es conexo. Lo cual es una contradicción pues ya habíamos establecido que L es conexo.

Por tanto Z es unicoherente. ■

Tener la propiedad b) y ser unicoherente son equivalentes si el espacio es conexo, normal, T_1 y localmente conexo, es decir:

Teorema 1.4.12. *([9, Teorema 3]) Sea Z un espacio topológico normal, T_1 y localmento conexo. Entonces Z es unicoherente si y sólo si Z tiene la propiedad b).*

Sam. B. Nadler, Jr. probó el siguiente resultado.

Teorema 1.4.13. *([25, Corolario 1.176, p. 178]) Para cualquier continuo X, 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad (b) y entonces son unicoherentes.*

Este resultado será obtenido en este trabajo como corolario del Teorema 2.2.2. La prueba que ofrecemos aquí es diferente a la hecha por Sam. B. Nadler, Jr.

Proposición 1.4.14. *Sean Z un espacio topológico normal y conexo con la propiedad b), $p \in Z$ y W una vecindad de p en Z tal que $W - \{p\}$ tiene la propiedad b). Si existe una vecindad U de p tal que $Fr(U)$ es conexa y $Cl(U) \subset W$, entonces $Z - \{p\}$ tiene la propiedad b).*

Demostración. Sea $f : Z - \{p\} \to S^1$ una función continua. Dado que $W - \{p\}$ tiene la propiedad b), existe una función continua $h : W - \{p\} \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ h = f|_{W-\{p\}}$. Dado que $Fr(U)$ es cerrado en Z y Z es un espacio topológico normal, por el Teorema 1.1.4, existe una función continua $h' : Z \to \mathbb{R}$ tal que $h'|_{Fr(U)} = h|_{Fr(U)}$. Sea $z_0 \in Fr\,(U)$. Definimos $f' : Z \to S^1$ por

$$f'\,(x) = \begin{cases} f\,(x)\,, & \text{si } x \in Z - int\,(U)\,, \\ (\exp \circ h')\,(x)\,, & \text{si } x \in Cl\,(U)\,. \end{cases}$$

Dado que $(Z - int\,(U)) \cap Cl\,(U) = Fr\,(U)$ y, para cada $x \in Fr\,(U)$, $(\exp \circ h')\,(x) = (\exp \circ h)\,(x) = f\,(x)$, pues $\exp \circ h = f|_{W-\{p\}}$, obtenemos que f' es continua. Dado que Z tiene la propiedad b), existe una función continua, $h_1 : Z \to \mathbb{R}$, tal que $\exp \circ h_1 = f'$ y $h_1\,(z_0) = h\,(z_0)$. Definimos $h_2 : Z - \{p\} \to \mathbb{R}$ por

$$h_2\,(x) = \begin{cases} h_1\,(x)\,, & \text{si } x \in Z - int\,(U)\,, \\ h\,(x)\,, & \text{si } x \in Cl\,(U) - \{p\}\,. \end{cases}$$

Dado que $h_1|_{Fr(U)}$ y $h|_{Fr(U)}$ son levantamientos de $f|_{Fr(U)}$, $h_1\,(z_0) = h\,(z_0)$ y $Fr\,(U)$ es conexo, por el Teorema 1.4.2, $h_1|_{Fr(U)} = h|_{Fr(U)}$. De manera que h_2 es continua y claramente $\exp \circ h_2 = f$. Esto prueba que $Z - \{p\}$ tiene la propiedad b). ■

Proposición 1.4.15. *Sea Z un continuo localmente conexo y unicoherente y sea $p \in Z$ tal que p no es punto de corte de Z, entonces p tiene una base de vecindades con frontera conexa.*

Demostración. Sea W un abierto de Z tal que $p \in W$. Probaremos que existe un abierto U de Z tal que $p \in U \subset W$ y $Fr\,(U)$ es conexa.

Dado que Z es un continuo localmente conexo, para cada elemento q de $Z - W$, existe un abierto conexo U_q de X tal que $q \in U_q$ y $p \notin Cl\,(U_q)$. Así, $\{U_q : q \in Z - W\}$ es una cubierta abierta de $Z - W$. Como $Z - W$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y q_1, q_2, ..., $q_n \in Z - W$ tales que

$$Z - W \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{q_i}.$$

Sea $W' = Z - \bigcup_{i=1}^{n} Cl\,(U_{q_i})$. Notemos que W' es abierto, $W' \subset W$ y $Z - W'$ tiene un número finito de componentes. Sean K_1, K_2, ..., K_m las componentes conexas de $Z - W'$. Dado que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, K_i es cerrado en $Z - W'$ y $Z - W'$ es cerrado en Z, tenemos que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$, K_i es cerrado en Z.

Como p no es punto de corte de Z, $Z - \{p\}$ es conexo. Así, $Z - \{p\}$ es abierto y conexo en Z. Dado que Z es un continuo localmente conexo, $Z - \{p\}$ es conexo por arcos (ver [27, Teorema 8.26, p. 132]). Sean $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$, ..., $k_m \in K_m$. Como

$$Z - W' = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \subset Z - \{p\},$$

para cada $1 \leq i \leq m - 1$, existe un arco α_i en $Z - \{p\}$ con puntos extremos k_i y k_{i+1}. De manera que

$$Y = \left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right),$$

es conexo. Además Y es cerrado en Z.

Sea U la componente de $Z - Y$ tal que $p \in U$. Dado que Z es localmente conexo y $Z - Y$ es abierto en Z, U es abierto en Z. Mostraremos que $Fr\,(U)$ es conexo.

Como U es conexo, pues es una componente de $Z - Y$, $Cl\,(U)$ es conexo.

Ahora probaremos que $Z - U$ es conexo. Sea F una componente de $Z - Y$, distinta de U, entonces $F \subset Z - U$, además $Cl\,(F)$ es conexo. Por el Teorema 1.3.3, $Cl\,(F) \cap Fr\,(Z - Y) \neq \emptyset$. Dado que $Fr\,(Z - Y) = Fr\,(Y) \subset Y$, pues Y es cerrado, tenemos que $Cl\,(F) \cap Y \neq \emptyset$. Además, como $Z - U$ es cerrado en X y $F \subset Z - U$, $Cl\,(F) \subset Z - U$. Notemos que $Z - U = Y \cup \left(\bigcup_{F \in \mathcal{D}} Cl\,(F) \right)$, donde $\mathcal{D} = \{F \subset Z : F \text{ es un componente de } Z - Y\} - \{U\}$. Además Y es conexo y para cada $F \in \mathcal{D}$, $Cl\,(F)$ es conexo y $Cl\,(F) \cap Y \neq \emptyset$. Esto demuestra que $Z - U$ es conexo.

Así, $Cl\,(U)$ y $Z - U$ son cerrados conexos de Z tales que $Z = Cl\,(U) \cup (Z - U)$. Como Z es unicoherente, $Cl\,(U) \cap (Z - U) = Fr\,(U)$ es conexo.

Falta probar que $U \subset W$. Dado que

$$Z - W' = \bigcup_{i=1}^{m} K_i,$$

y

$$Y = \left(\bigcup_{i=1}^{m} K_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right),$$

tenemos que $Z - W' \subset Y$. Entonces $Z - Y \subset W'$. Por tanto $U \subset W' \subset W$. Esto termina la prueba de la proposición. ■

Lema 1.4.16. *Sean X un continuo, $A_0 \in 2^X - \{X\}$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión en $2^X - \{X\}$ tales que $A_0 = \lim A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea α_n es un arco ordenado de A_n a X y $\alpha_0 = \lim \alpha_n$ (ver Corolario 1.2.12). Sean $f : \mathcal{A} \to S^1$, donde $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \alpha_n$, una función continua, $t_0 \in \exp^{-1}(f(X))$ y, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h_n : \alpha_n \to \mathbb{R}$ un levantamiento de $f|_{\alpha_n}$ tal que $h_n(X) = t_0$. Entonces $h_0(A_0) = \lim h_n(A_n)$.*

Demostración. Sea $\mu : 2^X \to [0,1]$ una función de Whitney. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotemos por μ_n a la función $\mu|_{\alpha_n} : \alpha_n \to \mu(\alpha_n)$.

Afirmación 1. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, μ_n es un homeomorfismo.

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dado que α_n es compacto, $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff y μ_n es continua, para probar que μ_n es un homeomorfismo, sólo tenemos que mostrar que μ_n es continua y biyectiva. Dado que μ es continua, μ_n es continua.

Claramente μ_n es una función suprayectiva.

Sean $A, B \in \alpha_n$, con $A \neq B$. Dado que α_n es un arco ordenado, podemos suponer que $A \subset B$. Así, $\mu(A) < \mu(B)$. De manera que $\mu_n(A) \neq \mu_n(B)$. Por tanto μ_n es inyectiva. Así que μ_n es un homeomorfismo.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, consideremos la función $f_n : [0,1] \to [\mu(A_n), 1]$ definida por $f_n(t) = (\mu_n(A_n) - 1)t + 1$. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f_n es un homeomorfismo.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea L_i el segmento convexo, contenido en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, que une a $(0,0)$ y $\left(1, \frac{1}{i}\right)$. Sean $L_0 = [0,1] \times \{0\}$ y $Y = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$. Denotemos por v al punto $(0,0)$.

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos la función $p_n : L_n \to [0,1]$ por $p_n(x,y) = x$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, p_n es un homeomorfismo.

Como, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, μ_n, f_n y p_n son homeomorfismos, al considerar la función $g_n = (\mu_n)^{-1} \circ f_n \circ p_n$ obtenemos un homeomorfismo entre L_n y α_n.

Definimos la función $g : Y \to \mathcal{A}$ por $g(x,y) = g_n(x,y)$, si $(x,y) \in L_n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} g_n(v) &= g_n(0,0) \\ &= \left((\mu_n)^{-1} \circ f_n \circ p_n\right)(0,0) \\ &= \left((\mu_n)^{-1} \circ f_n\right)(0) \\ &= (\mu_n)^{-1}(1) \\ &= X. \end{aligned}$$

Ya que $(0,0)$ es el único punto común que pueden tener dos conjuntos L_n, obtenemos que g está bien definida.

Afirmación 2. g es continua.

Para probar esto, consideremos una sucesión $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ en Y tal que $(x_0, y_0) = \lim (x_k, y_k)$, para algún $(x_0, y_0) \in Y$.

En el caso en que $(x_0, y_0) \in L_m - \{v\}$, para algún $m \in \mathbb{N}$, como $L_m - \{v\}$ es abierto en Y, tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq M$, entonces $(x_k, y_k) \in L_m - \{v\}$. De manera que $\{(x_k, y_k) : k \geq M\}$ es una sucesión en L_m que converge a (x_0, y_0). Dado que g_m es continua tenemos que $g_m(x_0, y_0) = \lim g_m(x_k, y_k)$. Así, $g(x_0, y_0) = \lim g(x_k, y_k)$.

Ahora, cuando $(x_0, y_0) \in L_0$, si existe una subsucesión $\{(x_{k_l}, y_{k_l})\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, contenida en L_0, por un razonamiento análogo al anterior, podemos concluir que $g(x_0, y_0) = \lim g(x_{k_l}, y_{k_l})$.

De manera que el caso interesante es cuando $(x_0, y_0) \in L_0$ y existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq M$, entonces $(x_k, y_k) \notin L_0$.

Consideremos la subsucesión $\{(x_{M+s}, y_{M+s})\}_{s=1}^{\infty}$ de $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ y, para cada $s \in \mathbb{N}$, sea $n_s \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{M+s}, y_{M+s}) \in L_{n_s}$.

Ahora, supongamos que existe $B \in \mathcal{A}$, tal que $B = \lim g(x_{M+s}, y_{M+s})$. Por la Proposición 1.1.3, para probar la continuidad de g en (x_0, y_0) basta mostrar que $B = g(x_0, y_0)$.

Como $\{\alpha_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\alpha_0 = \operatorname{lím} \alpha_n$, $\alpha_0 = \operatorname{lím} \alpha_{n_s}$. Dado que, para cada $s \in \mathbb{N}$, $g\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right) \in \alpha_{n_s}$,

$$B = \operatorname{lím} g\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right)$$

y $\alpha = \operatorname{lím} \alpha_{n_s}$, tenemos que $B \in \alpha_0$.

Por otra parte, como $(x_0, y_0) \in L_0$, tenemos que $g\left(x_0, y_0\right) \in \alpha_0$.

Dado que $g\left(x_0, y_0\right)$, $B \in \alpha_0$ y α_0 es un arco ordenado, se cumple que $g\left(x_0, y_0\right) \subset B$ o $B \subset g\left(x_0, y_0\right)$.

Pero,

$$\begin{aligned} \mu\left(g\left(x_0, y_0\right)\right) &= \mu\left(g_0\left(x_0, y_0\right)\right) \\ &= \mu\left(\left(\mu_0^{-1} \circ f_0 \circ p_0\right)\left(x_0, y_0\right)\right) \\ &= f_0\left(p_0\left(x_0, y_0\right)\right) \\ &= f_0\left(x_0\right) \\ &= \left(\mu\left(A_0\right) - 1\right) x_0 + 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado que $\{A_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ es un subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $A_0 = \operatorname{lím} A_n$, tenemos que $A_0 = \operatorname{lím} A_{n_s}$, además $B = \operatorname{lím} g\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right)$ y μ es continua. Así que,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \operatorname{lím} \mu\left(g\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right)\right) \\ &= \operatorname{lím} \mu\left(g_{n_s}\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right)\right) \\ &= \operatorname{lím} \mu\left(\mu_{n_s}^{-1} \circ f_{n_s} \circ p_{n_s}\right)\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right) \\ &= \operatorname{lím} f_{n_s}\left(p_{n_s}\left(x_{M+s}, y_{M+s}\right)\right) \\ &= \operatorname{lím} f_{n_s}\left(x_{M+s}\right) \\ &= \operatorname{lím}\left(\left(\mu\left(A_{n_s}\right) - 1\right) x_{M+s} + 1\right) \\ &= \left(\mu\left(\operatorname{lím} A_{n_s}\right) - 1\right)\left(\operatorname{lím} x_{M+s}\right) + 1 \\ &= \left(\mu\left(A_0\right) - 1\right) x_0 + 1. \end{aligned}$$

De manera que $\mu(B) = \mu\left(g\left(x_0, y_0\right)\right)$. Como $B \subset g\left(x_0, y_0\right)$ o $g\left(x_0, y_0\right) \subset B$, podemos concluir que $B = g\left(x_0, y_0\right)$. Esto prueba la continuidad de g en el caso en que $(x_0, y_0) \in L_0$ y con ello hemos terminado la demostración de la afirmación.

Dado que Y es contraible, por el Corolario 1.4.7, Y tiene la propiedad b). Como, $f \circ g : Y \to S^1$ es una función continua, existe una función continua,

$l : Y \to \mathbb{R}$, tal que $f \circ g = \exp \circ l$, además, como $g(v) = X$ y $f(g(v)) = f(X)$, podemos pedir que $l(v) = t_0$ (ver Lema 1.4.3).

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l|_{L_n}$ es un levantamiento de $f \circ g|_{L_n}$, tal que $l|_{L_n}(v) = t_0$.

Por otro lado, dada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por la definición de g,

$$\begin{aligned} \exp \circ (h_n \circ g)|_{L_n} &= \exp \circ (h_n \circ g_n) \\ &= (\exp \circ h_n) \circ g_n \\ &= f|_{\alpha_n} \circ g_n \\ &= (f \circ g)|_{L_n}. \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que $v = (0, 0)$ y $g(v) = X$. Así,

$$\begin{aligned} (h_n \circ g)|_{L_n}(v) &= h_n(X) \\ &= t_0. \end{aligned}$$

De manera que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l|_{L_n}$ y $h_n \circ g|_{L_n}$ son levantamientos de $f \circ g|_{L_n}$ y además satisfacen que $l|_{L_n}(v) = h_n \circ g|_{L_n}(v)$. Así, por el Teorema 1.4.2, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l|_{L_n} = h_n \circ g|_{L_n}$.

Ahora, sean $q_0 = (1, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} l(q_n) &= (h_n \circ g|_{L_n})(q_n) \\ &= h_n(g_n(q_n)) \\ &= h_n((\mu_n^{-1} \circ f_n \circ p_n)(q_n)) \\ &= h_n(\mu_n^{-1}((\mu(A_n) - 1)1 + 1)) \\ &= h_n(\mu_n^{-1}(\mu(A_n))) \\ &= h_n(A_n). \end{aligned}$$

Dado que $q_0 = \lim q_n$, por la continuidad de l, se cumple, $l(q_0) = \lim l(q_n)$. Así, $h_0(A_{n_0}) = \lim h_n(A_n)$. Esto termina la demostración del lema. ■

Capítulo 2

Resultados generales

2.1. Introducción

Sean Z un espacio topológico unicoherente y $z \in Z$. Decimos que *z agujera a Z* si $Z - \{z\}$ no es unicoherente. Un *arco libre en X*, es un arco pq, donde p y q son los puntos extremos, tal que $pq - \{p, q\}$ es abierto en X.

Sam B. Nadler Jr. probó que, para cualquier continuo X, los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son unicoherentes (ver [25, Corolario 1.176, p. 178]). Los problemas en los que estamos interesados son: ¿Cuáles elementos de $C(X)$ lo agujeran? y ¿cuáles elementos de 2^X lo agujeran?

En este capítulo mostraremos que:

1. Si X es un continuo y $x \in X$, entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$ ni a 2^X (Teorema 2.2.3).

2. Si X es un continuo localmente conexo no homeomorfo a S^1, entonces X no agujera a $C(X)$ (Teorema 2.3.6).

3. Si X es un continuo y pq es un arco libre en X, tal que $p, q \notin int(pq)$, entonces pq agujera a $C(X)$ (Teorema 2.4.2).

4. Si X es un continuo y pq es un arco libre en X, tal que $p \notin int(pq)$, pero $q \in int(pq)$, entonces pq no agujera a $C(X)$ (Teorema 2.4.5).

5. Si X es un continuo, S es una curva cerrada simple contenida en X y $p \in X$ son tales que $S - \{p\}$ es abierto en X, entonces S agujera a $C(X)$.

Si uno observa las afirmaciones 3 y 4 notará que faltaría considerar el caso en que pq es un arco libre y p, $q \in int(pq)$. Lo que ocurre aquí es que $int(pq) = pq$. De manera que pq es cerrado y abierto en X, pero X es conexo, entonces $X = pq$. Por el Teorema 2.3.6, pq no agujera a $C(X)$.

Combinando este párrafo con las afirmaciones 3 y 4 hemos analizado todas las posibilidades para un arco libre y sabemos exactamente cuándo tal arco agujera a $C(X)$.

2.2. Los singulares

En esta sección, $\mathcal{H}$ denotará a 2^X o a $C(X)$. Diremos que un subconjunto $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$ es *cerrado bajo arcos ordenados* si $X \in \mathcal{K}$ y dados $A \in \mathcal{K} - \{X\}$ y un arco ordenado α de A a X se tiene que $\alpha \subset \mathcal{K}$.

Lema 2.2.1. *Sean X un continuo, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un subconjunto cerrado bajo arcos ordenados y $A \in \mathcal{K} - \{X\}$. Dada una función continua $f : \mathcal{K} \to S^1$, supongamos que α, β, son arcos ordenados de A a X. Si h_α y h_β son los levantamientos de $f|_\alpha$ y $f|_\beta$, respectivamente, tales que $h_\alpha(X) = h_\beta(X)$, entonces $h_\alpha(A) = h_\beta(A)$.*

Demostración. Definimos $h : \alpha \times \beta \to S^1$ por $h(C, D) = f(C \cup D)$. Notemos que h está bien definida, pues $\{C \cup D : C \in \alpha \text{ y } D \in \beta\}$ es un arco ordenado de A a X y por tanto $C \cup D \in \mathcal{K}$, para cualesquiera $C \in \alpha$ y $D \in \beta$.

Afirmación 1. h es continua.

Para probar esta arfimación consideremos una sucesión $\{(C_n, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $\alpha \times \beta$ tal que $(C_0, D_0) = \lim (C_n, D_n)$, para algún $(C_0, D_0) \in \alpha \times \beta$. Probaremos que $f(C_0 \cup D_0) = \lim f(C_n \cup D_n)$.

Como $(C_0, D_0) = \text{lím}\,(C_n, D_n)$, $C_0 = \text{lím}\,C_n$ y $D_0 = \text{lím}\,D_n$. Por el inciso c) del Lema 1.2.4, $C_0 \cup D_0 = \text{lím}\,C_n \cup D_n$. Dado que f es continua, $f(C_0 \cup D_0) = \text{lím}\,f(C_n \cup D_n)$. Esto termina la prueba de la afirmación 1.

Sea $t_0 = h_\alpha(X)$. Dado que $\alpha \times \beta$ es homeomorfo a $[0,1]^2$, el cual tiene la propiedad b), existe una función continua, $g : \alpha \times \beta \to \mathbb{R}$, tal que $h = \exp \circ g$ y como $h(X, X) = f(X)$ podemos pedir que $g(X, X) = t_0$.

Afirmación 2. $g(\alpha \times \{X\}) = \{t_0\} = g(\{X\} \times \beta)$.

Dado que, para cada $C \in \alpha$, $h(C, X) = f(C \cup X) = f(X)$, tenemos que $h|_{\alpha \times \{X\}}$ es la función constante $f(X)$. Dado que $\alpha \times \{X\}$ es conexo y $g|_{\alpha \times \{X\}}$ es un levantamiento de $h|_{\alpha \times \{X\}}$, tenemos que $g|_{\alpha \times \{X\}}$ es constante. Como $g(X, X) = t_0$, tenemos que, para cada $C \in \alpha$, $g(C, X) = t_0$.

Análogamente $g|_{\{X\} \times \beta}$ es la función constante t_0.

Ahora, notemos que $g|_{\alpha \times \{A\}}$ es un levantamiento de $h|_{\alpha \times \{A\}}$. La función $k_\alpha : \alpha \times \{A\} \to \mathbb{R}$, definida por $k_\alpha(C, A) = h_\alpha(C)$, también es un levantamiento de $h|_{\alpha \times \{A\}}$, pues si $(C, A) \in \alpha \times \{A\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
(\exp \circ k_\alpha)((C, A)) &= \exp(h_\alpha(C)) \\
&= f|_\alpha(C) \\
&= f(C).
\end{aligned}
$$

como $A \subset C$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f(C) &= f(C \cup A) \\
&= h(C, A) \\
&= h|_{\alpha \times \{A\}}((C, A)).
\end{aligned}
$$

De manera que k_α y $g|_{\alpha \times \{A\}}$ son dos levantamientos de $h|_{\alpha \times \{A\}}$. Por otra parte $k_\alpha(X, A) = h_\alpha(X) = t_0$ y por la Afirmación 2, $g|_{\alpha \times \{A\}}(X, A) = g(X, A) = t_0$. Así, por el Teorema 1.4.1, $k_\alpha = g|_{\alpha \times \{A\}}$.

Análogamente, si definimos $k_\beta : \{A\} \times \beta \to \mathbb{R}$ por $k_\beta((A, D)) = h_\beta(D)$, tenemos que $g|_{\{A\} \times \beta} = k_\beta$.

Ahora,

$$\begin{aligned} h_\alpha(A) &= k_\alpha(A, A) \\ &= g|_{\alpha \times \{A\}}(A, A) \\ &= g(A, A) \\ &= g|_{\{A\} \times \beta}((A, A)) \\ &= k_\beta(A, A) \\ &= h_\beta(A). \end{aligned}$$

Esto termina la prueba del lema. ■

Teorema 2.2.2. *Sean X un continuo y $\mathcal{K}$ un subconjunto de $\mathcal{H}$ cerrado bajo arcos ordenados. Entonces $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b).*

Demostración. En el caso en que $\mathcal{K} = \{X\}$, claramente $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b). Ahora supongamos que $\{X\} \subsetneq \mathcal{K}$, consideremos una función continua, $f : \mathcal{K} \to S^1$, debemos probar que existe una función continua, $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, tal que $f = \exp \circ h$.

Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(X)$.

Dada $A \in \mathcal{K} - \{X\}$, fijamos un arco ordenado α_A de A a X. Por hipótesis $\alpha_A \subset \mathcal{K}$.

Dado que α_A es un arco, por el Corolario 1.4.6, α_A tiene la propiedad b). Así, por el Lema 1.4.2, existe una función continua, $h_A : \alpha_A \to \mathbb{R}$, tal que $f|_{\alpha_A} = \exp \circ h_A$ y $h_A(X) = t_0$.

Definimos $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ por

$$h(A) = \begin{cases} h_A(A), & \text{si } A \neq X, \\ t_0, & \text{si } A = X. \end{cases}$$

Probaremos que:

i) h está bien definida,

ii) h es continua y

iii) $f = \exp \circ h$.

Por el Lema 2.2.1, el valor de $h_A(A)$ no depende del arco ordenado que se considere. Así que h está bien definida.

Ahora mostraremos que *ii)* es cierta. Primero veamos que h es continua en X. Sea $\varepsilon > 0$ y $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta < \varepsilon$ y $2\eta < 1$. Notemos que $\exp|_{[t_0-\eta, t_0+\eta]}$

es un homeomorfismo entre $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ y $\exp([t_0 - \eta, t_0 + \eta])$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(X)) \subset \exp((t_0 - \eta, t_0 + \eta)).$$

Entonces

$$h' = \left(\left(\exp|_{[t_0-\eta, t_0+\eta]} \right)^{-1} \circ f|_{B_\delta(X)} \right),$$

es un levantamiento de $f|_{B_\delta(X)}$. Sea $A \in B_\delta(X)$. Dado que, para cada $B \in \alpha_A$, $A \subset B$ y $H(A, X) < \delta$, tenemos que $H(B, X) < \delta$. Así, $\alpha_A \subset B_\delta(X)$. De manera que $h'|_{\alpha_A}$ es un levantamiento de $f|_{\alpha_A}$. Dado que $h'|_{\alpha_A}(X) = t_0 = h_A(X)$, por el Teorema 1.4.1, $h'|_{\alpha_A} = h_A$. Por tanto $h_A(A) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Esto prueba que h es continua en X.

Sea $A_{n_0} \in \mathcal{K} - \{X\}$, mostraremos que h es continua en A_{n_0}. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{K} - \{X\}$, tal que $A_{n_0} = \lim A_n$. Dado que $\mathcal{H}$ y $\mathbb{R}$ son métricos, para probar la continuidad de h en A_{n_0}, por la Proposición 1.1.2, basta mostrar que existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $h(A_{n_0}) = \lim h(A_{n_k})$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea α_n un arco ordenado de A_n a X en $\mathcal{H}$. Dado que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(\mathcal{H})$ y $C(\mathcal{H})$ es compacto, existen una subsucesión $\{\alpha_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\alpha_{n_0} \in 2^{\mathcal{H}}$ tales que $\alpha_{n_0} = \lim \alpha_{n_k}$.

Dado que X, $A_{n_0} \in \alpha_{n_0}$, α_{n_0} es no degenerado. De manera que, por el Corolario 1.2.12, α_{n_0} es un arco ordenado de A_{n_0} a X. Denotemos por $\mathcal{A}$ el conjunto $\bigcup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \alpha_{n_k}$.

Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como α_{n_k} es un arco ordenado, por el Corolario 1.4.6, α_{n_k} tiene la propiedad b). Por el Lema 1.4.2 existe un levantamiento $h_{\alpha_{n_k}} : \alpha_{n_k} \to \mathbb{R}$ de $f|_{\alpha_{n_k}}$ tal que $h_{\alpha_{n_k}}(X) = t_0$.

Dado que $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es un subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $A_{n_0} = \lim A_n$, $A_{n_0} = \lim A_{n_k}$. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, α_{n_k} es un arco ordenado de A_{n_k} a X, $\alpha_{n_0} = \lim \alpha_{n_k}$, $f|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to S^1$ es un función continua y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $h_{\alpha_{n_k}} : \alpha_{n_k} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de $f|_{\alpha_{n_k}}$ tal que $h_{\alpha_{n_k}}(X) = t_0 = f(X)$. Por el Lema 1.4.15, $h_{\alpha_{n_0}}(A_{n_0}) = \lim h_{\alpha_{n_k}}(A_{n_k})$.

Por el Lema 2.2.1, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h_{\alpha_{n_k}}(A_{n_k}) = h_{A_{n_k}}(A_{n_k}) = h(A_{n_k})$. Por tanto $h(A_{n_0}) = \lim h(A_{n_k})$. Esto prueba la continuidad de h en A_0.

Por la definición de h, tenemos que $\exp \circ h = f$. Así que $\mathcal{K}$ tiene la propiedad b). ■

Notemos que por el Teorema 2.2.2, podemos concluir que 2^X y $C(X)$ tienen la propiedad b). Este hecho fue probado, de forma distinta, por Sam B. Nadler, Jr. (ver [25, Corolario 1.76, p. 178]).

Teorema 2.2.3. *Sean X un continuo y $x \in X$. Entonces $\{x\}$ no agujera a $C(X)$ ni a 2^X.*

Demostración. Consideremos que $\mathcal{H} = 2^X$ y $\mathcal{K} = \mathcal{H} - \{\{x\}\}$. Claramente $X \in \mathcal{K}$. Sean $A \in \mathcal{K}$ y α un arco ordenado de A a X en $\mathcal{H}$. Si $\{x\} \in \alpha$, entonces $\emptyset \neq A \subset \{x\}$. De manera que $A = \{x\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\alpha \subset \mathcal{K}$. Así que $\mathcal{K}$ es cerrado bajo arcos ordenados, por el Lema 2.2.2, $\mathcal{K} = 2^X - \{\{x\}\}$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10, $\{x\}$ no agujera a 2^X.

Análogamente se prueba que $\{x\}$ no agujera a $C(X)$. ■

Sea Z un espacio topológico. Decimos que Z es *totalmente disconexo* si las componentes conexas de Z son conjuntos de un solo punto.

Teorema 2.2.4. *Sea X un continuo y $A \in 2^X$. Si A es totalmente disconexo, entonces A no agujera a 2^X.*

Demostración. Probaremos que $2^X - \{A\}$ tiene la propiedad b). Por el Lema 2.2.2, sólo tenemos que demostrar que $2^X - \{A\}$ es cerrado bajo arcos ordenados. Sean $B \in 2^X - \{A\}$ y β un arco ordenado de B a X. Si $A \in \beta$, entonces $\{C : B \subset C \subset A\}$ es un arco ordenado de B a A. Por el Teorema 1.8 de [25, p. 59], $B \subset A$ y cada componente conexa de A intersecta a B. Sea $a \in A$. Como A es totalmente disconexo, $\{a\}$ es una componente conexa de A. De manera que $\{a\} \cap B \neq \emptyset$. Por tanto $a \in B$. Esto prueba que $A \subset B$. Así que $A = B$, lo cual es una contradicción. De manera que $\beta \subset 2^X - \{A\}$. Esto demuestra que $2^X - \{A\}$ es cerrado bajo arcos ordenados. Por el Teorema

2.2.2, $2^X - \{A\}$ tiene la propiedad b) y por el Teorema 1.4.10, $2^X - \{A\}$ es unicoherente. Así que A no agujera a 2^X. ■

2.3. El total

2.3.1. Introducción

Sabemos que $C(S^1)$ es homeomorfo al disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(ver [19, Ejemplo 5.2, p. 35]), donde S^1 está representado por el punto $(0, 0)$ de D. Por tanto S^1 agujera a $C(S^1)$. ¿Existirá un continuo X, distinto de S^1, tal que X agujera a $C(X)$? La respuesta a esta pregunta es sí, ya que si Y es el circulo de Varsovia, entonces Y agujera a $C(Y)$ (ver [19, Ejercicio 7.8, p. 62]). Pero si hacemos menos general la pregunta, es decir, ¿existirá un continuo localmente conexo X, distinto de S^1, tal que X agujera a $C(X)$? La respuesta a esta pregunta es no y la demostración la haremos en la presente sección. Así que podemos concluir que si X es un continuo localmente conexo, entonces X agujera a $C(X)$ si y sólo si $X \cong S^1$.

2.3.2. Métrica convexa

En esta subsección presentaremos la definición de métrica convexa y algunos resultados acerca de las propiedades de un continuo con métrica convexa.

Sea Z un espacio métrico, con métrica d, $z_0 \in Z$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos por $C_\varepsilon^d(z_0)$ al conjunto $\{z \in Z : d(z, z_0) \leq \varepsilon\}$.

Una métrica ρ para un conjunto S es *convexa* si para cualesquiera x, $y \in S$, existe $z \in S$ tal que $\rho(x, z) = \rho(y, z) = \frac{1}{2}\rho(x, y)$.

Teorema 2.3.1. *([26, Teorema 2.8, p. 169]) Sea X un continuo con métrica convexa ρ. Entonces, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $a \in X$, $Cl(B_\varepsilon^\rho(a)) = C_\varepsilon^\rho(a)$.*

Sea X un continuo, con métrica d. Definimos la función $K_d : [0, \infty) \times 2^X \to 2^X$ por $K_d(t, A) = \bigcup\limits_{a \in A} C_t^d(a)$.

Proposición 2.3.2. *Si X es un continuo con métrica d, entonces K_d está bien definida.*

Demostración. Sea $(t, A) \in [0, \infty) \times 2^X$. Mostraremos que $K_d(t, A) \in 2^X$. Dado que $A \in 2^X$, $A \neq \emptyset$. Como $A \subset K_d(t, A)$, $K_d(t, A) \neq \emptyset$. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión en $K_d(t, A)$ y $x_0 \in X$ tales que $x_0 = \lim x_n$. Probaremos que $x_0 \in K_d(t, A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A$ tal que $d(a_n, x_n) \leq t$. Como A es compacto, podemos suponer que existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 = \lim a_n$. Así que, $d(a_0, x_0) = \lim d(a_n, x_n) \leq t$. De manera que $x_0 \in K_d(t, A)$. Por tanto $K_d(t, A) \in 2^X$. ■

Teorema 2.3.3. *([26, Corolario 3.4, p. 172]) Si X es un continuo con métrica convexa ρ, entonces K_ρ es una función continua.*

Decimos que un continuo X *admite una métrica convexa* ρ, si ρ es una métrica convexa para X y la topología original de X es la misma que la topología de X generada por ρ. En [23] K. Menger probó que si un continuo X admite una métrica convexa, entonces X es localmente conexo. Menger (ver [23]) preguntó si el regreso era cierto, es decir, ¿si un continuo X es localmente conexo, entonces X admite una métrica convexa? Trabajando independientemente, Bing y Moise dieron una respuesta afirmativa a la pregunta de Menger, pues probaron que: cada continuo localmente conexo admite una métrica convexa (ver [2], [24]).

Lema 2.3.4. *Sea X un continuo localmente conexo con métrica convexa ρ. Entonces, para cualesquiera $A \in C(X)$ y $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(A, t) \in C(X)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.2, para cualesquiera $A \in C(X)$ y $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(t, A) \in 2^X$. Sean $A \in C(X)$ y $t \in [0, \infty)$, mostraremos que $K_\rho(t, A) \in C(X)$. Probaremos que para cada $x \in K_\rho(t, A)$, existe un subconjunto conexo γ de X tal que $x \in \gamma \subset K_\rho(t, A)$ y $\gamma \cap A \neq \emptyset$. Sea

$x \in K_\rho(t, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $x \in C_t^\rho(a)$. Si $x = a$, hacemos $\gamma = \{a\}$. En el caso en que $x \neq a$, por el Teorema 2.7 de [26, p. 169], existe un arco $\gamma \subset X$ isométrico al intervalo $[0, \rho(x, a)]$ tal que x y a son sus puntos extremos. De manera que para cada $y \in \gamma$, $\rho(a, y) \leq \rho(a, x)$. Por tanto $\gamma \subset C_t^\rho(a) \subset K_\rho(t, A)$. Además $a \in \gamma \cap A$. Así que γ es un subconjunto conexo de X tal que $x \in \gamma \subset K_\rho(t, A)$ y $\gamma \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que, para cada $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(t, A) \in C(X)$. ■

Lema 2.3.5. *Sean X un continuo localmente conexo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney para $C(X)$ y $t_0 \in (0,1)$. Entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0, t_0])$.*

Demostración. Dado que X es un continuo localmente conexo, X admite una métrica convexa ρ (ver [2], [24]). Por el Teorema 2.3.3, K_ρ es continua y por el Lema 2.3.4, para cualesquiera $A \in C(X)$ y $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(A, t) \in C(X)$.

Sea $s = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in X\}$. Como X es compacto s está bien definida, $s \in \mathbb{R}$ y, para cada $A \in C(X)$, $K_\rho(s, A) = X$. Dado $A \in \mu^{-1}([0, t_0])$, consideramos la función $h : [0, s] \to C(X)$ definida por $h(t) = K_\rho(t, A)$. Ya que, para cada $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(t, A) \in C(X)$, h está bien definida y como K_ρ es continua, h es continua. De manera que $\mu \circ h : [0, s] \to [0, 1]$ es también continua. Dado que $(\mu \circ h)(0) = \mu(A) \leq t_0 < 1 = \mu(X) = (\mu \circ h)(s)$, por el Teorema del Valor Intermedio existe $l \in [0, s]$ tal que $(\mu \circ h)(l) = t_0$. Denotamos por $t_A = \text{ínf}\{l \in [0, s] : (\mu \circ h)(l) = t_0\}$. Dado que $\mu \circ h$ es continua, $\mu(K_\rho(t_A, A)) = t_0$.

Afirmación 1. Si para algún $t \in \mathbb{R}$, se satisface que $\mu(K_\rho(t_A, A)) \leq \mu(K_\rho(t, A))$, entonces $t \geq t_A$.

Dado que $\mu \circ h|_{[0,t]} : [0, t] \to [0, 1]$ es una función continua y

$$\mu(A) = (\mu \circ h)(0) \leq t_0 = \mu(K_\rho(t_A, A)) \leq \mu(K_\rho(t, A)) = (\mu \circ h)(t),$$

por el Teorema del Valor Intermedio, existe $l \in [0, t]$ tal que $(\mu \circ h)(l) = t_0$, por tanto $t_A \leq l \leq t$.

Definimos la función $\lambda : \mu^{-1}([0, t_0]) \to [0, s]$ por $\lambda(A) = t_A$.

Afirmación 2. λ es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $H(A,B) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $K_\rho(t_A, A) \subset K_\rho\left(t_A + \frac{\varepsilon}{2}, B\right)$ y $K_\rho(t_B, B) \subset K_\rho\left(t_B + \frac{\varepsilon}{2}, A\right)$. Como $t_0 = \mu(K_\rho(t_A, A)) \leq \mu\left(K_\rho\left(t_A + \frac{\varepsilon}{2}, B\right)\right)$ y $t_0 = \mu(K_\rho(t_B, B)) \leq \mu\left(K_\rho\left(t_B + \frac{\varepsilon}{2}, A\right)\right)$, tenemos que $\mu(K_\rho(t_A, A)) = t_0 \leq \mu\left(K_\rho\left(t_B + \frac{\varepsilon}{2}, A\right)\right)$ y $t_0 = \mu(K_\rho(t_B, B)) \leq \mu\left(K_\rho\left(t_A + \frac{\varepsilon}{2}, B\right)\right)$. Por la Afirmación 1, $t_B + \frac{\varepsilon}{2} \geq t_A$ y $t_A + \frac{\varepsilon}{2} \geq t_B$. De manera que $|t_A - t_B| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Esto termina la prueba de la afirmación.

Definimos $r : \mu^{-1}([0, t_0]) \to \mu^{-1}(t_0)$ por $r(A) = K_\rho(t_A, A)$.

Afirmación 3. r es una retracción.

Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mu^{-1}([0, t_0])$ y $A_0 \in \mu^{-1}([0, t_0])$ tales que $A_0 = \lim A_n$. Dado que λ es continua, $t_{A_0} = \lim t_{A_n}$. Por tanto $(t_{A_0}, A_0) = \lim(t_{A_n}, A_n)$. Dado que K_ρ es continua,

$$r(A_0) = K_\rho(t_{A_0}, A_0) = \lim K_\rho(t_{A_n}, A_n) = \lim r(A_n).$$

Esto demuestra que r es continua.

Ahora, sea $A \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $K_\rho(0, A) = A$, $\mu(K_\rho(0, A)) = \mu(A) = t_0$. De manera que $t_A = 0$. Entonces $r(A) = K_\rho(0, A) = A$. Esto demuestra que $r|_{\mu^{-1}(t_0)} = id_{\mu^{-1}(t_0)}$ y termina la prueba de la afirmación 3.

Ahora definimos $H : [0,1] \times \mu^{-1}([0, t_0]) \to \mu^{-1}([0, t_0])$ por $H(l, A) = K_\rho(l \cdot t_A, A)$.

Afirmación 4. H es continua.

Sean $\{(l_n, A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0,1] \times \mu^{-1}([0, t_0])$ y $(l_0, A_0) \in [0,1] \times \mu^{-1}([0, t_0])$ tales que $(l_0, A_0) = \lim(l_n, A_n)$. Entonces $l_0 = \lim l_n$ y $A_0 = \lim A_n$. Dado que λ es continua $t_{A_0} = \lim t_{A_n}$. Así, $l_0 \cdot t_{A_0} = \lim l_n \cdot t_{A_n}$. Por tanto $(l_0 \cdot t_{A_0}, A_0) = \lim(l_n \cdot t_{A_n}, A_n)$. Como K_ρ es continua

$$H(l_0, A_0) = K_\rho(l_0 \cdot t_{A_0}, A_0) = \lim K_\rho(l_n \cdot t_{A_n}, A_n) = \lim H(l_n, A_n).$$

Esto prueba que H es continua.

Además $H(0, A) = K_\rho(0, A) = A$ y $H(1, A) = K_\rho(t_A, A) = r(A)$. Por tanto $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0, t_0])$. ■

2.3.3. Teorema

Teorema 2.3.6. *Sea X un continuo locamente conexo que no es una curva cerrada simple. Entonces X no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Probaremos que $C(X)-\{X\}$ tiene la propiedad b). Para ello consideremos una función continua $f: C(X)-\{X\} \to S^1$. Mostraremos que f tiene un levantamiento. Fijamos puntos $x_0 \in X$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tales que $\exp(t_0) = f(\{x_0\})$.

Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$, una función de Whitney para $C(X)$. Como X no es una curva cerrada simple, por el Teorema D de [15], $\mu^{-1}(t)$ es unicoherente, para cada $0 < t < 1$. Más aún, dado que la conexidad local es una propiedad de Whitney (ver [25, Teorema 14.9, p. 408]), se cumple que, $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo y por el Teorema 1.4.11, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad b), para cada $0 < t < 1$.

Por el Lema 2.3.5, $\mu^{-1}(t)$ es un retracto por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$. Dado que, para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad b), por el Teorema 1.4.5, para cada $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}([0,t])$ tiene la propiedad b).

Para cada $n \in \mathbb{N}-\{1\}$, sean $t_n = 1-\frac{1}{n}$ y $f_n = f|_{\mu^{-1}([0,t_n])}$. Para cada $n \in \mathbb{N}-\{1\}$, sea $h_n : \mu^{-1}([0,t_n]) \to \mathbb{R}$ el levantamiento de f_n tal que $h_n(\{x_0\}) = t_0$.

Notemos que, si $n \in \mathbb{N}-\{1\}$, entonces $h_{n+1}|_{\mu^{-1}([0,t_n])}$ es un levantamiento de f_n que también satisface que $h_{n+1}|_{\mu^{-1}([0,t_n])}(\{x_0\}) = t_0$. Así, por el Teorema 1.4.1, $h_{n+1}|_{\mu^{-1}([0,t_n])} = h_n$. De esto, tenemos que

$$h : \bigcup_{n=2}^{\infty} \mu^{-1}([0,t_n]) \to \mathbb{R},$$

definida por

$$h(A) = h_n(A) \text{ si } A \in \mu^{-1}([0,t_n]),$$

está bien definida.

Afirmación 1. h es continua.

Notemos que $\bigcup_{n=2}^{\infty} \mu^{-1}([0,t_n]) = \mu^{-1}([0,1))$. Dada $A \in \mu^{-1}([0,1))$ existe $m \in \mathbb{N}-\{1\}$ tal que $\mu(A) < t_m$. Así que $\mu^{-1}([0,t_m))$ es una vecindad de A

tal que h es continua en ella (pues conincide con h_m). Por tanto h es continua en A. Por tanto h es continua.

Más aún, si $A \in \mu^{-1}([0,1))$, entonces existe $n \in \mathbb{N}-\{1\}$ tal que $A \in \mu^{-1}([0,t_n])$. De manera que

$$\begin{aligned}(\exp \circ h)(A) &= \exp(h(A)) \\ &= \exp(h_n(A)) \\ &= f_n(A) \\ &= f(A).\end{aligned}$$

Dado que $\mu^{-1}([0,1)) = C(X) - \{X\}$, concluimos que h es un levantamiento para f. Así, $C(X) - \{X\}$ tiene la propiedad b). Por tanto X no agujera a $C(X)$. ■

2.4. Arcos libres

Lema 2.4.1. *Sea pq un arco libre en X tal que p, $q \notin int(pq)$. Entonces o bien.*

a) $X = C \cup pq$, donde C es un subcontinuo no degenerado de X tal que $C \cap int(pq) = \emptyset$ y p, $q \in C$; o

b) $X = Y_1 \cup Y_2 \cup pq$ donde Y_1 y Y_2 son subcontinuos no degenerados de X tales que, $Y_1 \cap int(pq) = \emptyset = Y_2 \cap int(pq)$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $p \in Y_1$ y $q \in Y_2$.

Demostración. En el caso en que $X - int(pq) = C$ es conexo. Entonces p, $q \in C$, C es un subcontinuo no degenerado de X y $X = C \cup pq$.

Si $X - int(pq)$ es disconexo, existen Y_1 y Y_2 subconjuntos cerrados de X tales que $X - int(pq) = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \neq \emptyset \neq Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Si $Y_1 \cap \{p,q\} = \emptyset$, entonces $Y_1 \cap pq = \emptyset$ y $X = Y_1 \cup (Y_2 \cup pq)$ sería una separación de X, de manera que X no sería conexo. Se sigue de aquí que $p \in Y_1$ y $q \in Y_2$. Supongamos que $Y_1 = A \cup B$ es una separación de Y_1. Entonces $p \in A$ o $p \in B$, digamos que $p \in B$. Entonces $A \cup (B \cup pq \cup Y_2)$ es una separación de

X, lo cual es una contradicción. Así que, Y_1 es conexo y análogamente Y_2 es conexo.

Dado que $q \in Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $q \notin Y_1$. Como X es un espacio regular, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(q) \cap Y_1 = \emptyset$. Pero $q \notin int(pq)$, entonces $B_\varepsilon(q) \nsubseteq pq$. De manera que existe $x \in B_\varepsilon(x) - pq$. Dado que $X = Y_1 \cup Y_2 \cup pq$ y $B_\varepsilon(q) \cap Y_1 = \emptyset$, $x \in Y_2$. Por tanto Y_2 es no degenerado. Análogamente se demuestra que Y_1 es no degenerado. Así que Y_1 y Y_2 son dos subcontinuos no degenerados de X tales que $X = Y_1 \cup Y_2 \cup pq$, $Y_1 \cap int(pq) = \emptyset = Y_2 \cap int(pq)$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $p \in Y_1$ y $q \in Y_2$. ■

Teorema 2.4.2. *Sean X un continuo y pq un arco libre en X. Si p y q no son puntos interiores del arco pq, entonces pq agujera a $C(X)$.*

Demostración. Denotemos por Y al conjunto $X - int(pq)$. Dado que pq es arco libre y p y q no son puntos interiores del arco, tenemos que $int(pq) = pq - \{p, q\}$. Así que $Y = (X - pq) \cup \{p, q\}$.

Para probar que pq agujera a $C(X)$, necesitamos demostrar que existen dos subconjuntos conexos y cerrados $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$ en $C(X) - \{pq\}$, tales que $C(X) - \{pq\} = \mathcal{D} \cup \mathcal{B}$ y $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$ no es conexo.

Sean

$$\mathcal{A} = \{A \in C(X) : A \subset pq\}$$

y

$$\mathcal{F} = \{B \in C(X) : B \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Definimos $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap (C(X) - \{pq\})$ y $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cap (C(X) - \{pq\})$. Por el Lema 1.2.2, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{F}$ son cerrados en $C(X)$. Entonces $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$ son cerrados en $C(X) - \{pq\}$. Notemos que $\mathcal{D}$ es homeomorfo a $C(pq) - \{pq\}$. Dado que $C(pq)$ es una 2-celda (ver [18, ejemplo 3.1, p. 29]), tenemos que $\mathcal{D}$ es conexo.

Ahora mostraremos que $\mathcal{B}$ es conexo. Para ello, demostraremos que, para todo elemento B de $\mathcal{B}$, existe un conjunto conexo, α, tal que $\alpha \subset \mathcal{B}$ y B, $X \in \alpha$. Sea $B \in \mathcal{B}$. Si $B = X$, consideramos el conjunto $\alpha = \{X\}$. Ahora supongamos que $B \neq X$, haremos la demostración por casos.

Caso 1. $B \nsubseteq pq$.

Por el Teorema 1.2.10, existe un arco ordenado, α, de B a X en $C(X)$. Sea $C \in \alpha$, como $B \subset C$ y $B \cap Y \neq \emptyset$, tenemos que $C \cap Y \neq \emptyset$. Entonces, para cada $C \in \alpha$, $C \in \mathcal{F}$.

Dado que $B \nsubseteq pq$, $pq \notin \alpha$. Así que $\alpha \subset \mathcal{B}$. Esto termina la prueba del caso 1, pues α es homeomorfo a I (ver [25, Lema 1.3, p. 57]), por tanto α es conexo y además B, $X \in \alpha$.

Caso 2. $B \subset pq$.

Como $(B - \{p, q\}) \cap Y = \emptyset$, se cumple que $(B - \{p, q\}) \subset int\,(pq)$. Como $B \in C(X) - \{pq\}$ y $B \cap Y \neq \emptyset$, se cumple que $B = pr$, para algún $r \in pq$, con $r \neq q$ o $B = tq$, para algún $t \in pq$, con $t \neq p$.

Supongamos primero que $B = pr$, para algún $r \in pq - \{q\}$. Por el Lema 2.4.1, tenemos que:

a) $X = C \cup pq$, donde C es un subcontinuo no degenerado de X tal que $C \cap int\,(pq) = \emptyset$ y p, $q \in C$; o

b) $X = Y_1 \cup Y_2 \cup pq$ donde Y_1 y Y_2 son subcontinuos no degenerados de X tales que, $Y_1 \cap int\,(pq) = \emptyset = Y_2 \cap int\,(pq)$, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $p \in Y_1$ y $q \in Y_2$.

En el caso que se satisface el inciso a), tenemos que $B \cup C \in C(X)$ y $B \cup C \nsubseteq pq$. Por el Caso 1, existe un arco ordenado α de $B \cup C$ a X contenido en $\mathcal{B}$. Como $p \in C$, por el Teorema 1.2.10, existe un arco ordenado β de $\{p\}$ a C en $C(X)$. Definimos $\beta' = \{B \cup D : D \in \beta\}$. Entonces β' es un arco ordenado de B a $B \cup C$ y, para cada $D \in \beta$, $(B \cup D) \cap pq = B$ y $p \in B \cup D$. Por tanto $pq \notin \beta'$ y $\beta' \subset \mathcal{B}$. Dado que $B \cup C \in \alpha \cap \beta'$, $\beta' \cup \alpha$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{B}$ y además $B \in \beta' \cup \alpha$.

Por otro lado si se satisface b), se cumple que $Y_1 \cup B \in C(X)$ y $Y_1 \cup C \nsubseteq pq$. Por el Caso 1, existe un arco ordenado α de $Y_1 \cup B$ a X contenido en $\mathcal{B}$. Como $p \in Y_1$, por el Teorema 1.2.10, existe un arco ordenado β de $\{p\}$ a Y_1 en $C(X)$. Definimos $\beta' = \{B \cup D : D \in \beta\}$. Entonces β' es un arco ordenado de B a $Y_1 \cup B$ y, para cada $D \in \beta$, $(B \cup D) \cap pq = B$ y $p \in B \cup D$. Por tanto $pq \notin \beta'$ y $\beta' \subset \mathcal{B}$. Dado que $Y_1 \cup B \in \alpha \cap \beta'$, $\beta' \cup \alpha$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{B}$ y además $B \in \beta' \cup \alpha$. Esto termina la prueba del Caso 2. ■

Por los Casos 1 y 2 podemos concluir que $\mathcal{B}$ es conexo.

Sean $\mathcal{H}_1 = \{pr \subset pq : r \in pq - \{q\}\}$ y $\mathcal{H}_2 = \{tq \subset pq : t \in pq - \{p\}\}$. Ahora probaremos que

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{B} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2.$$

Claramente $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$. Ahora consideremos $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}$. Como $A \in \mathcal{D}$, $A \subset pq$. Además, $A \in \mathcal{B}$, por tanto $A \cap Y \neq \emptyset$. De esto $A = pr$, para algún $r \in pq - \{q\}$; o $A = tq$, para algún $t \in pq - \{p\}$. Así que $A \in \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Esto prueba que $\mathcal{D} \cap \mathcal{B} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

Más aún, como pq es no degenerado, se cumple que $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ y $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$. Además, $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son cerrados en $C(X) - \{pq\}$, pues $Cl(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1 \cup \{pq\}$ y $Cl(\mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_2 \cup \{pq\}$.

De manera que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ es una separación de $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$. Esto demuestra que $C(X) - \{pq\}$ no es unicoherente. Por tanto pq agujera a $C(X)$. ■

Lema 2.4.3. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $Y_1, Y_2 \in C(X)$ tales que $X = Y_1 \cup Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 = \{p\}$. Denotemos por $\mathcal{H} = \{A \in C(X) : A \cap Y_1 \neq \emptyset\}$. Definimos $\Gamma : \mathcal{H} \to C(Y_1)$ por $\Gamma(A) = A \cap Y_1$. Entonces Γ está bien definida y es continua.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.2, Γ está bien definida.

Para mostrar que Γ es continua consideremos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, tal que $A_0 = \lim A_n$, para algún $A_0 \in \mathcal{H}$ y supongamos que existe $B \in C(Y_1)$ tal que $B = \lim \Gamma(A_n)$. Probaremos que $\Gamma(A_0) = B$.

Veamos que $B \subset \Gamma(A_0)$. Sea $x \in B$. Como $B = \lim \Gamma(A_n)$, por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y_1 tal que $x = \lim x_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \Gamma(A_n)$. Como $\Gamma(A_n) = A_n \cap Y_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$. Así, $x \in A_0$. De manera que $x \in A_0 \cap Y_1$, pues $x \in B$ y $B \in C(Y_1)$. Por tanto $x \in \Gamma(A_0)$. Esto prueba que $B \subset \Gamma(A_0)$.

Ahora, sea $x \in \Gamma(A_0)$. Entonces $x \in A_0 \cap Y_1$.

Caso 1. $x \neq p$.

Dado que $x \in A_0$, por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_0 = \lim x_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$.

Sea $U = X - Y_2$. Notemos que $U \subset Y_1$ y U es abierto en X. Como $x \in U$ y $x = \lim x_n$, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in U$, para cada $n \geq M$. De manera que, para cada $n \geq M$, $x_n \in U \cap A_n \subset Y_1 \cap A_n = \Gamma(A_n)$. De manera que $\{x_n\}_{n=M}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x, $\{\Gamma(A_n)\}_{n=M}^{\infty}$ es una sucesión que converge a B y, para cada $n \geq M$, $x_n \in \Gamma(A_n)$. Entonces, por la Proposición 1.2.3, concluimos que $x \in B$.

Caso 2. $x = p$.

Como $A_n \in \mathcal{H}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o bien $p \in A_n$ o $A_n \subset Y_1$. Así que se cumple alguna de las dos posibilidades para una infinidad de n's. Si $p \in A_n$, para una infinidad de n's, $p \in \Gamma(A_n)$, por tanto $p \in B$. Si $A_n \subset Y_1$ para una infinidad de n's entonces existe una subsucesión de $\left\{A_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$tal que $A_{n_j} \subset Y_1$. De manera que $A_{n_j} = \Gamma\left(A_{n_j}\right)$ y $p \in \lim A_n = \lim A_{n_j} = \lim \Gamma\left(A_{n_j}\right) = B$.

Por los casos 1 y 2, podemos concluir que $\Gamma(A_0) \subset B$.

De manera que $\Gamma(A_0) = B$. Por tanto Γ es continua. ■

Lema 2.4.4. *Sean X un continuo, $p \in X$, y Y_1, Y_2 elementos de $C(X)$ tales que Y_1 y Y_2 son no degenerados, $X = Y_1 \cup Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2 = \{p\}$. Entonces existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, \infty)$ tal que $\mu(Y_1) < \mu(Y_2)$ y $\mu^{-1}(\mu(Y_1)) - \{Y_1\}$ es conexo.*

Demostración. Definimos $\omega : \{Y_1, Y_2\} \to [0,1]$ por $\omega(Y_1) = \frac{1}{2}$ y $\omega(Y_2) = \frac{3}{4}$. Por [19, Teorema 23.3, p. 206], existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ tal que $\mu|_{\{Y_1, Y_2\}} = \omega$ y $\mu(X) = 1$. De manera que $\mu(Y_1) < \mu(Y_2)$.

Probaremos que $\mu^{-1}(\mu(Y_1)) - \{Y_1\} = \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \{Y_1\}$ es conexo. Dado que $\mu|_{C(Y_2)}$ es una función de Whitney para $C(Y_2)$, $\left(\mu|_{C(Y_2)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ es conexo (ver [19, Teorema 19.9, p. 160]). Sea $B \in \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \{Y_1\}$. Entonces $B \not\subseteq Y_1$. Sea $q \in B - Y_1$. Entonces $q \in Y_2$. Por [18, Lema 8.1, p. 109], existe $C \in \left(\mu|_{C(Y_2)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ tal que $q \in C$. Por [19, Lema 14.8.1, p. 405] existe una trayectoria, $g : [0,1] \to \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ tal que $g(0) = B$, $g(1) = C$ y, para cada $t \in [0,1]$, $q \in g(t)$. De manera que $g([0,1]) \subset \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \{Y_1\}$. Esto prueba que, cada $B \in \mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \{Y_1\}$ se puede conectar, por un conexo, con un elemento $C \in \left(\mu|_{C(Y_2)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y como $\left(\mu|_{C(Y_2)}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ es conexo, concluimos que $\mu^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \{Y_1\}$ es conexo. ■

Teorema 2.4.5. *Sean X un continuo y pq un arco libre en X tales que $p \notin int\,(pq)$ y $q \in int\,(pq)$. Entonces $C\,(X) - \{pq\}$ tiene la propiedad b) y en consecuencia pq no agujera a $C\,(X)$.*

Demostración. Mostraremos que $C\,(X) - \{pq\}$ tiene la propiedad b). Para ello, sea $f : C\,(X) - \{pq\} \to S^1$, una función continua. Probaremos que existe una función continua $g : C\,(X) - \{pq\} \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ g$.

Denotemos por Y al conjunto $X - int\,(pq)$. Dado que $p \notin int\,(pq)$, $q \in int\,(pq)$ y pq es un arco libre en X, se cumple que $Y = (X - pq) \cup \{p\}$. De manera que $Y \cap pq = \{p\}$. Por la Proposición 1.3.2, Y es conexo.

Elegimos una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en pq, tal que $q = \lim y_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $py_n \subsetneq py_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $Y_n = Y \cup py_n$. Notemos que $Y_n \subset Y_{n+1}$.

Por el Lema 2.4.4, existe una función de Whitney $\mu : C\,(X) \to [0,1]$ tal que $\mu^{-1}\,(\mu\,(pq)) - \{pq\}$ es conexo. Sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $\mu\,(pq) = t_0$. Ahora, f_1 denotará a la función $f|_{\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}}$ y f_2 denotará a la función $f|_{\mu^{-1}([0,t_0]) - \{pq\}}$. Mostraremos que existen funciones continuas

$$g_1 : (\mu^{-1}\,([t_0,1]) - \{pq\}) \to \mathbb{R} \text{ y } g_2 : (\mu^{-1}\,([0,t_0]) - \{pq\}) \to \mathbb{R},$$

tales que $f_1 = \exp \circ g_1$, $f_2 = \exp \circ g_2$ y $g_1|_{\mu^{-1}(t_0) - \{pq\}} = g_2|_{\mu^{-1}(t_0) - \{pq\}}$.

Primero, probaremos la existencia de g_2. Para ello, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{Z}_n = C\,(Y_n) \cup (C\,(pq) - \{pq\}).$$

Afirmación 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}_n$ tiene la propiedad b).

Por [25, Corolario 1.176, p. 178] o por el Teorema 2.2.2, $C\,(Y_n)$ tiene la propiedad b).

Por otra parte, por el Teorema 2.3.6, $C\,(pq) - \{pq\}$ tiene la propiedad b).

Dado que $C\,(Y_n) \cap (C\,(pq) - \{pq\}) = C\,(py_n)$ es un conjunto conexo, (por el Lema 1.4.3) concluimos que $\mathcal{Z}_n$ tiene la propiedad b). Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Por la Afirmación 2, existe una función continua $h_1 : \mathcal{Z}_1 \to \mathbb{R}$ tal que $f|_{\mathcal{Z}_1} = \exp \circ h_1$.

Para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, existe una función continua, $h_n : \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R}$, tal que $f|_{\mathcal{Z}_n} = \exp \circ h_n$ y por el Teorema 1.4.1, h_n es única al pedirle que $h_1 (Y) = h_n (Y)$.

Como $\mathcal{Z}_n \subset \mathcal{Z}_{n+1}$, se cumple que $h_{n+1}|_{\mathcal{Z}_n}$ es un levantamiento para $f|_{\mathcal{Z}_n}$. Por la unicidad de h_n, tenemos que $h_n = h_{n+1}|_{\mathcal{Z}_n}$. De manera que la función

$$h : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n \to \mathbb{R},$$

definida por

$$h (A) = h_n (A), \text{ si } A \in \mathcal{Z}_n,$$

está bien definida.

Afirmación 3. h es continua.

Para probar esto, consideremos una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$, tal que $A_0 = \lim A_k$, para algún $A_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$. Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset Y$.

En este caso, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in C (Y) \subset C (Y_1)$ y además, como $A_0 = \lim A_k$, tenemos que $A_0 \in C (Y_1)$. Dado que h_1 es continua y $C (Y_1) \subset \mathcal{Z}_1$, tenemos que $h_1 (A_0) = \lim h_1 (A_k)$. Así que $h (A_0) = \lim h (A_k)$.

Caso 2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset pq$

En este caso, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in C (pq) - \{pq\}$. Además, como $A_0 = \lim A_k$ y $A_0 \neq pq$ tenemos $A_0 \in C (pq) - \{pq\}$. Dado que h_1 es continua y $C (pq) - \{pq\} \subset \mathcal{Z}_1$, tenemos que $h_1 (A_0) = \lim h_1 (A_k)$. Por tanto $h (A_0) = \lim h (A_k)$.

Caso 3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \not\subset Y$ y $A_k \not\subset pq$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 1.3.2, $p \in A_k$. Por la Proposición 1.2.3, $p \in A_0$. Así, $A_0 \cap pq \neq \emptyset$. Por el Lema 2.4.3, podemos afirmar que $A_0 \cap pq = \lim A_k \cap pq$.

Dado que $A_0 \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_0 \in \mathcal{Z}_{n_0}$. Así, $A_0 \in C(Y_{n_0})$ o $A_0 \in C(pq) - \{pq\}$. Las dos posibilidades implican que $A_0 \cap pq \subsetneq pq$. En el primer caso $q \notin A_0$ y en el segundo, si $q \in A_0$, entonces $p,\ q \in A_0$ y $A_0 \in C(pq)$, de manera que $A_0 = pq$, lo cual es absurdo. Por tanto en ambos casos $q \notin A_0$.

Además $q = \lim y_n$ y por tanto $pq = \lim py_n$. Así que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_0 \cap pq \subsetneq py_m$.

Como $p \in A_0$ y $q \notin A_0 \cap pq$, existe $r \in pq - \{q\}$ tal que $A_0 \cap pq = pr$. De manera que $pr \subsetneq py_m$ y $pr \cap y_m q = \emptyset$. Consideremos

$$\varepsilon = \inf\{d(a,b) : a \in pr \text{ y } b \in y_m q\},$$

entonces $\varepsilon > 0$. Además, $N(\varepsilon, pr) \cap pq \subset py_m$.

Dado que $pr = A_0 \cap pq = \lim A_k \cap pq$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $H(A_k \cap pq, pr) < \varepsilon$. Sea $k \geq N$, entonces $A_k \cap pq \subset N(\varepsilon, pr) \cap pq$. Como $N(\varepsilon, pr) \cap pq \subset py_m$, tenemos que, para cada $k \geq N$, $A_k \cap pq \subset py_m$. De manera que, $A_k \subset Y_m$ y por tanto $A_k \in C(Y_m)$. Así que $\{A_k\}_{k=N}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, contenida en $\mathcal{Z}_m$. Dado que h_m es continua, tenemos que $h_m(A_0) = \lim h_m(A_k)$. Por tanto $h(A_0) = \lim h(A_k)$.

Ya que las condiciones: a) $A_k \subset Y$, b) $A_k \subset pq$ y c) $A_k \not\subset Y$ y $A_k \not\subset pq$ abarcan todas las posibilidades, tenemos que, para alguna de las tres condiciones a), b) o c), hay una infinidad de números k que la satisfacen. Podemos entonces extraer una subsucesión $\{A_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{A_k\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface a), b) o c) y, como hemos visto, esto implica que $h(A_0) = \lim h(A_{k_m})$. Por tanto h es continua. Esto termina la prueba de la afirmación 3.

Observemos que $f|_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_n} = \exp \circ h$

Afirmación 4. $\mu^{-1}([0,t_0]) - \{pq\} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$.

Sea $A \in \mu^{-1}([0,t_0]) - \{pq\}$. Entonces $\mu(A) \leq t_0$. En el caso en que $A \subset pq$ o $A \subset Y$, tenemos que $A \in \mathcal{Z}_1 \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$.

Ahora supongamos que $A \not\subset pq$ y $A \not\subset Y$. Notemos que $pq \not\subset A$, pues $\mu(pq) \geq \mu(A)$. Además $p \in A$ y $q \notin A$. Entonces $A \cap pq \subsetneq pq$. Sea $m \in \mathbb{N}$

tal que $A \cap pq \subset py_m$. Entonces $A \in C(Y_m) \subset \mathcal{Z}_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}_n$. Esto termina la prueba de la afirmación 4.

De manera que al definir $g_2 = h|_{\mu^{-1}([0,t_0])-\{pq\}}$, obtenemos un levantamiento de f_2.

Fijamos un elemento $B \in \mu^{-1}([0,t_0]) - \{pq\}$, tal que $\mu(B) = t_0$. Veamos que $\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}$ es cerrado bajo arcos ordenados. Sean $C \in \mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}$ y α un arco ordenado de C a X. Claramente, para cada $D \in \alpha$, $D \in \mu^{-1}([t_0,1])$. Si $pq \in \alpha$ y $C \subset pq$. Entonces $t_0 \leq \mu(C) \leq \mu(pq) = t_0$. Como μ es una función de Whitney, $C \subset pq$, $C = pq$, lo cual es una contradicción. De manera que $\alpha \subset \mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}$. Esto prueba que $\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}$ es cerrado bajo arcos ordenados. Por el Teorema 2.2.2, $\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}$ tiene la propiedad b). Entonces existe una función continua, $g_1 : (\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}) \to \mathbb{R}$, tal que $f_2 = \exp \circ g_1$ y $g_1(B) = g_2(B)$. Notemos que al pedirle la condición de que $g_1(B) = g_2(B)$, por el Teorema 1.4.1, g_1 es única.

Ahora, dado que

$$(\mu^{-1}([0,t_0]) - \{pq\}) \cap (\mu^{-1}([t_0,1]) - \{pq\}) = \mu^{-1}(t_0) - \{pq\},$$

el cual, por la elección de μ es conexo. Además

$$g_1|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}} \text{ y } g_2|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}},$$

son dos levantamientos de

$$f|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}},$$

que satisfacen que

$$g_1|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}}(B) = g_2|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}}(B),$$

por el Teorema 1.4.1, tenemos que

$$g_1|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}} = g_2|_{\mu^{-1}(t_0)-\{pq\}}.$$

Así, al definir $g : C(X) - \{pq\} \to \mathbb{R}$, por

$$g(A)=\begin{cases} g_2(A), & \text{si } A\in\mu^{-1}([0,t_0])-\{pq\}, \\ g_1(A), & \text{si } A\in\mu^{-1}([t_0,1])-\{pq\}; \end{cases}$$

obtenemos un levantamiento de f.

Esto demuestra que $C(X)-\{pq\}$ tiene la propiedad b) y por tanto pq no agujera a $C(X)$. ■

2.5. Curvas cerradas simples

Sea S una curva cerrada simple contenida en X. Denotaremos por m la función continua $m: C(S)-\{S\}\to S$ definida por las condiciones: si B es un arco, $m(B)$ es el punto de B que lo divide en dos subarcos de igual longitud o, si $B=\{y\}$, para algún punto $y\in S$, $m(B)=y$.

Teorema 2.5.1. *Sean X un continuo, S una curva cerrada simple contenida en X y $p\in S$ tal que $S-\{p\}$ es abierto en X. Entonces S agujera a $C(X)$.*

Demostración. Si $p\in int(S)$ entonces S es cerrado y abierto en X, así que $S=X$. Y como es fácil ver que $C(S)-\{S\}$ no es unicoherente (pues es homeomorfo a un disco sin su centro, ver [19, Ejemplo 5.2, p. 35]) tenemos que S agujera a $C(X)$. Por tanto, supondremos que $p\notin int(S)$. Mostraremos que $C(X)-\{S\}$ no es unicoherente. Sea q el antípoda de p, fijamos un punto $p_1\in S-\{p,q\}$ y llamamos q_1 al antípoda de p_1. Denotemos por p_1q_1 el arco, contenido en S, que une a p_1 con q_1 y que contiene a q. Sea $Y=X-int(S)$. Dado que $S-\{p\}$ es abierto en X y $p\notin int(S)$, $int(S)=S-\{p\}$ y $Y=(X-S)\cup\{p\}$. Así, $Y\cap S=\{p\}$. Por la Proposición 1.3.2, Y es conexo. De manera que $Y\in C(X)$. Definimos,

$$\mathcal{G}_1=\{C\in C(S)-\{S\}: m(C)\in p_1q_1\},$$

y

$$\mathcal{G}_2=C(Y)\cup\{C\in C(S)-\{S\}: m(C)\in S-int(p_1q_1)\}\cup \\ \{C\in C(X)-\{S\}: p\in C\}.$$

Afirmación 1. $\mathcal{G}_1$ es conexo y cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Dado que p_1q_1 es cerrado en X y la función m es continua,

$$\{C \in C(X) : C \subset S \text{ y } m(C) \in p_1q_1\},$$

es cerrado en $C(X)$. Como

$$\mathcal{G}_1 = \{C \in C(X) : C \subset S \text{ y } m(C) \in p_1q_1\} \cap (C(X) - \{S\}),$$

$\mathcal{G}_1$ es cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Ahora veamos que $\mathcal{G}_1$ es conexo. Notemos que $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in p_1q_1\}$ es homeomorfo a p_1q_1. Así, $\mathcal{F}$ es conexo. Si $A \in \mathcal{G}_1$, entonces A es un subcontinuo propio de S tal que $m(A) \in p_1q_1$. Claramente existe un arco ordenado α de $\{m(A)\}$ a A en $C(S)$ tal que, para cada $B \in \alpha$, $m(B) = m(A)$. De manera que a cada elemento de $\mathcal{G}_1$, lo podemos conectar, mediante un arco ordenado, a un elemento de $\mathcal{F}$ y como éste es conexo, podemos concluir que $\mathcal{G}_1$ es conexo. Esto termina la demostración de la Afirmación 1.

Afirmación 2. $\mathcal{G}_2$ es conexo y cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Por un razonamiento análogo al realizado en la Afirmación 1, podemos concluir que,

$$\mathcal{A} = \{C \in C(S) - \{S\} : m(C) \in S - int(p_1q_1)\},$$

es conexo y cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Dado que Y es un continuo, $C(Y)$ es conexo y cerrado en $C(X)$. Dado que $S \notin C(Y)$, $C(Y)$ es cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Claramente,

$$\{C \in C(X) : p \in C\},$$

es cerrado en $C(X)$. Observando que,

$$\mathcal{B} = \{C \in C(X) - \{S\} : p \in C\} = \{C \in C(X) : p \in C\} \cap (C(X) - \{S\}),$$

concluimos que $\mathcal{B}$ es cerrado en $C(X) - \{S\}$.

Ahora veamos que $\mathcal{B}$ es conexo. Sea $A \in \mathcal{B} - \{p\}$. Mostraremos que A puede ser conectado con $\{p\}$, mediante un arco en $\mathcal{B}$.

Caso 1. $A \subsetneq S$.

Sea α un arco ordenado de $\{p\}$ a A en $C(X)$. Claramente, si $C \in \alpha$, entonces $\{p\} \subset C \subset A \subsetneq S$. De manera que $\alpha \subset \mathcal{B}$. Así, A se puede conectar a $\{p\}$ en $\mathcal{B}$, mediante un arco.

Caso 2. $A \not\subseteq S$.

Por la Proposición 1.3.2, $A \cap Y \in C(Y)$. Además, como $A \not\subseteq S$, $A \cap Y$ es no degenerado. Sea α un arco ordenado de $\{p\}$ a $A \cap Y$ en $C(Y)$. Notemos que $\alpha \subset \mathcal{B}$. Si $A \cap Y = A$, ya habríamos conectado a $\{p\}$ con A en $\mathcal{B}$, mediante un arco. Por otra parte, si $A \not\subseteq Y$, existe un arco ordenado β de $\{p\}$ a $A \cap S$ en $C(X)$. Claramente $\{C \cup (A \cap Y) : C \in \beta\}$ es un subconjunto conexo de $C(X)$ que contiene a $A \cap Y$ y a A. Además, $\{C \cup (A \cap Y) : C \in \beta\} \subset \mathcal{B}$, pues $A \cap Y$ es no degenerado y por tanto, para cada $C \in \beta$, $C \cup (A \cap Y) \neq S$. De manera que $\alpha \cup \{C \cup (A \cap Y) : C \in \beta\}$, es un subconjunto conexo de $\mathcal{B}$ que contiene a $\{p\}$ y a A.

De los Casos 1 y 2 podemos concluir que $\mathcal{B}$ es conexo.

De manera que $C(Y)$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conexos y cerrados en $C(X) - \{S\}$. Así, $\mathcal{G}_2$ es cerrado en $C(X) - \{S\}$. Como $Y \in C(Y) \cap \mathcal{B}$ y $\{p\} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{G}_2$ es conexo. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Claramente $C(X) - \{S\} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$. Denotemos por p_1q y qq_1 los subarcos de p_1q_1 que unen a p_1 con q y a q con q_1, respectivamente.

Sean $\mathcal{H}_1$ el conjunto:

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \cup \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\},$$

y $\mathcal{H}_2$ el conjunto:

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = q_1\} \cup \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in qq_1\}.$$

Afirmación 3. $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ es una separación de $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Dado que m es una función continua en $C(S) - \{S\}$ y $\{p_1\}$, $\{q_1\}$, p_1q y qq_1 son conjuntos cerrados de S, tenemos que los conjuntos

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\},\ \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1 q\},$$
$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = q_1\} \text{ y } \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in q q_1\}$$

son cerrados en $C(X) - \{S\}$. Por tanto $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son cerrados en $C(X) - \{S\}$.

Como $\{p_1\} \in \mathcal{H}_1$ y $\{q_1\} \in \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ y $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$.

Ahora veamos que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$. Dado que $p_1 \neq q_1$, pues son antípodas, tenemos que

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \cap$$
$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = q_1\} = \emptyset.$$

Como $p_1 \notin q q_1$ y $q_1 \notin p_1 q$,

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \cap$$
$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in q q_1\} = \emptyset$$

y

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = q_1\} \cap$$
$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1 q\} = \emptyset.$$

Supongamos que existe un elemento

$$A_0 \in \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1 q\} \cap \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in q q_1\}.$$

Entonces $A_0 \in \mathcal{B}$, $A_0 \subset S$ y $m(A_0) \in p_1 q \cap q q_1 = \{q\}$. Dado que $A_0 \in \mathcal{B}$, $p \in A_0$. Entonces A_0 es un subcontinuo propio de S que contiene a p y $m(A_0) = q$. Esto es una contradicción pues q es el antípoda de p y no existe ningún subarco de S que contenga a p y que tenga como punto medio a q. Esto demuestra que

$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1 q\} \cap \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in q q_1\} = \emptyset.$$

De lo anterior podemos concluir que $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \emptyset$.

Para terminar la prueba de la afirmación, mostraremos que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Claramente

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \subset$$
$$\{C \in C(X) - \{S\} : C \subset S \text{ y } m(C) \in p_1q_1\} = \mathcal{G}_1$$

y

$$\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \subset$$
$$\{C \in C(X) - \{S\} : C \subset S \text{ y } m(C) \in S - int(p_1q_1)\}$$
$$\subset \mathcal{G}_2.$$

Esto prueba que $\{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Notemos que

$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\} \subset$$
$$\{C \in C(X) - \{S\} : C \subset S \text{ y } m(C) \in p_1q_1\} = \mathcal{G}_1,$$

y

$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\} \subset \mathcal{B} = \{C \in C(X) - \{S\} : p \in S\} \subset \mathcal{G}_2.$$

Así, $\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\} \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Por tanto

$$\mathcal{H}_1 = \{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \cup$$
$$\{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\} \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2.$$

Análogamente se prueba que $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$. De manera que $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$.

Sea $A \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$. Dado que $A \in \mathcal{G}_1$, $A \subset S$ y $m(A) \in p_1q_1$. Como $m(A) \in p_1q_1$ y $p \notin p_1q_1$, $A \neq \{p\}$. De manera que $A \subset S$ y $A \neq \{p\}$. Por tanto $A \notin C(Y)$. Como $A \in \mathcal{G}_2$ y $A \notin C(Y)$,

$$A \in \{C \in C(X) - \{S\} : C \subset S \text{ y } m(C) \in S - int(p_1q_1)\} \cup$$
$$\{C \in C(X) - \{S\} : p \in C\}.$$

En el caso en que

$$A \in \{C \in C(X) - \{S\} : C \subset S \text{ y } m(C) \in S - int(p_1q_1)\},$$

tenemos que $m(A) \in p_1q_1 \cap (S - int(p_1q_1)) = \{p_1, q_1\}$. De manera que

$$A \in \{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = p_1\} \cup \\ \{A \in C(X) - \{S\} : A \subset S \text{ y } m(A) = q_1\} \subset \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2.$$

En el caso de que $A \in \{C \in C(X) - \{S\} : p \in C\} = \mathcal{B}$, entonces $A \in \mathcal{B}$, $A \subset S$ y $m(A) \in p_1q_1 = p_1q \cup qq_1$. Por tanto

$$A \in \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in p_1q\} \cup \{A \in \mathcal{B} : A \subset S \text{ y } m(A) \in qq_1\} \subset \\ \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2.$$

Esto demuestra que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ y por tanto podemos concluir que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

Así que $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ es una separación de $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$. De manera que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ no es conexo. Esto prueba que $C(X) - \{S\}$ no es unicoherente. Por tanto S agujera a $C(X)$. ■

Capítulo 3

Continuos localmente conexos

3.1. Introducción

Decimos que un continuo X es *localmente conexo* si para cualesquiera $p \in X$ y U subconjunto abierto de X tales que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. En este capítulo mostraremos los siguientes resultados.

1. Si X es un continuo localmente conexo y A es un subcontinuo localmente conexo de X que no es arco libre ni una curva cerrada simple, entonces A no agujera a $C(X)$.

2. Si X es un continuo localmente conexo y S es una curva cerrada simple contenida propiamente en X, entonces S agujera a $C(X)$ si y sólo si S es una curva cerrada simple libre.

3. Si X es un continuo localmente conexo y A es un subcontinuo de X, no localmente conexo, entonces A no agujera a $C(X)$

Con ayuda de estos resultados y los presentados en el Capítulo 2, en lo referente a curvas cerradas simples y arcos libres obtenemos una clasificación completa de los subcontinuos que agujeran al hiperespacio de subcontinuos de un continuo localmente conexo. Dicha caracterización dice lo siguiente.

4. Si X es un continuo localmente conexo y $A \in C(X)$, entonces A agujera a $C(X)$ si y sólo si A es una curva cerrada simple y libre en X o A es un arco libre con extremos p, q tales que $p, q \notin int(pq)$.

En la segunda sección de este capítulo presentaremos la prueba del primero de los dos resultados mencionados. En la tercera sección, presentaremos un resultado sobre una gráfica finita en particular, que nos será de gran ayuda para probar el segundo resultado, que presentaremos en la cuarta sección del capítulo. En la sección quinta de este capítulo presentaremos la prueba de del tercer resultado y finalmente en la sexta y última sección del capítulo probaremos el cuarto resultado.

3.2. Subcontinuos localmente conexos

3.2.1. Resultados auxiliares

Lema 3.2.1. *Sean X un continuo localmente conexo y $A_0 \in C(X)$. Entonces, para cada $A \in C(X)$ tenemos que $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$ si y sólo si $A \subset A_0$ y $A \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$.*

(Necesidad). Sea $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Dado que $Fr_{C(X)}(C(A_0)) \subset C(A_0)$, pues $C(A_0)$ es cerrado en $C(X)$, tenemos que $A \subset A_0$.

Supongamos que $A \cap Fr_X(A_0) = \emptyset$. Entonces $A \subset int_X(A_0)$.

Si $int_X(A_0) = X$, entonces $A_0 = X$, $C(A_0) = C(X)$ y

$$A \in Fr_{C(X)}(C(A_0)) = Fr_{C(X)}(C(X)) = \emptyset,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto $X - int_X(A_0)$ es no vacío. Como este conjunto es compacto y A también lo es, el número

$$\varepsilon = \text{mín}\{d(a,x) : a \in A \text{ y } x \notin int_X(A_0)\}$$

está bien definido y es positivo. Notemos que $N(\varepsilon, A) \subset int_X(A_0)$. Sea $B \in C(X)$ tal que $H(A,B) < \varepsilon$. Entonces $B \subset N(\varepsilon, A) \subset int_X(A_0)$, así que $B \in C(A_0)$. Esto implica que $A \in int_{C(X)}(C(A_0))$ lo cual es una contradicción, pues $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Por tanto $A \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$. Esto termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia). Sea $A \in C(X)$ tal que $A \subset A_0$ y $A \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$. Probaremos que $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Sean $a_0 \in A \cap Fr_X(A_0)$ y $\varepsilon > 0$. Claramente $A \in B_\varepsilon(A) \cap C(A_0)$, de manera que para probar que $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$ basta mostrar que $B_\varepsilon(A) \cap (C(X) - C(A_0)) \neq \emptyset$. Sea V_0 la componente de $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_0)$ que contiene a a_0. Entonces por [28, Teorema 27.9, p. 200], V_0 es abierto en X. Como $a_0 \in Fr_X(A_0)$, existe $y_0 \in (X - A_0) \cap V_0$. Sea $B = A \cup Cl_X(V_0)$. Notemos que B es cerrado. Dado que A y $Cl_X(V_0)$ son conexos y $a_0 \in A \cap Cl_X(V_0)$, B es conexo. De manera que $B \in C(X)$. Como $A \subset B$, $A \subset N(\varepsilon, B)$. Por otra parte, ya que $Cl_X(V_0) \subset B_\varepsilon(a_0)$, $B = A \cup Cl_X(V_0) \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a) = N(\varepsilon, A)$. Por el Lema 1.2.1, $H(A, B) < \varepsilon$. Además, como $y_0 \in B - A_0$, $B \nsubseteq A_0$, por tanto $B \in C(X) - C(A_0)$. Así que $B_\varepsilon(A) \cap (C(X) - C(A_0)) \neq \emptyset$. Esto demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $B_\varepsilon(A) \cap C(A_0) \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(A) \cap (C(X) - C(A_0)) \neq \emptyset$. Por tanto $A \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Esto termina la prueba del la suficiencia. ■

Proposición 3.2.2. *Sean X un continuo localmente conexo y A_0 un subcontinuo localmente conexo de X que no es un arco libre. Entonces*

$$Fr_{C(X)}(C(A_0)) - \{A_0\}$$

es conexa.

Demostración. Denotemos por $\mathcal{D}$ al conjunto $Fr_{C(X)}(C(A_0)) - \{A_0\}$.

Mostraremos que cualesquiera dos elementos A_1 y A_2 de $\mathcal{D}$ se pueden conectar por una trayectoria en $\mathcal{D}$.

Sean A_1, $A_2 \in \mathcal{D}$. Por el Lema 3.2.1, existen $a_1 \in A_1 \cap Fr_X(A_0)$ y $a_2 \in A_2 \cap Fr_X(A_0)$.

Caso 1. $a_1 = a_2$.

Por la Proposición 1.2.14, existen dos funciones continuas $h_1 : [0,1] \to C(X)$ y $h_2 : [0,1] \to C(X)$ tales que $h_1(0) = \{a_1\}$, $h_1(1) = A_1$, $h_2(0) = \{a_1\}$, $h_2(1) = A_2$ y, para cualesquiera s, $t \in [0,1]$ que cumplen $s < t$, se tiene que $h_1(s) \subset h_1(t)$ y $h_2(s) \subset h_2(t)$. Notemos que, para cada $t \in [0,1]$, $a_1 \in h_1(t)$ y $a_1 \in h_2(t)$. De manera que, para cada $t \in [0,1]$, $h_1(t) \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$

y $h_2(t) \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$. Además A_1 y A_2 son subconjuntos propios de A_0, de manera que, para cada $t \in [0,1]$, $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son subconjuntos propios de A_0. Por tanto, por el Lema 3.2.1, para cada $t \in [0,1]$, $h_1(t)$, $h_2(t) \in \mathcal{D}$. Definimos $\gamma : [0,1] \to \mathcal{D}$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} h_1(1-2t), & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ h_2(2t-1), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Por el Lema 1.1.1, γ es continua y además $\gamma(0) = h_1(0) = A_1$ y $\gamma(1) = h_2(1) = A_2$. Así que γ es una trayectoria de A_1 a A_2 en $\mathcal{D}$.

Caso 2. $a_1 \neq a_2$.

Dado que A_0 es localmente conexo, por el Teorema 8.23 de [27, p. 130], A_0 es conexo por arcos. Entonces existe una función continua e inyectiva $h : [0,1] \to A_0$ tal que $h(0) = a_1$ y $h(1) = a_2$. Notemos que $h([0,1]) \in C(A_0)$ y además a_1, $a_2 \in Fr_X(A_0) \cap h([0,1])$, así que, por el Lema 3.2.1, $h([0,1]) \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$.

Subcaso 2.1. $h([0,1]) \neq A_0$.

Dado que $a_1 \in A_1 \cap h([0,1]) \cap Fr_X(A_0)$ y $a_2 \in A_2 \cap h([0,1]) \cap Fr_X(A_0)$, por el Caso 1, aplicado a A_1 con $h([0,1])$ y a A_2 con $h([0,1])$, existen dos trayectorias $\gamma_1 : [0,1] \to \mathcal{D}$ y $\gamma_2 : [0,1] \to \mathcal{D}$ tales que $\gamma_1(0) = A_1$, $\gamma_1(1) = h([0,1])$, $\gamma_2(0) = A_2$ y $\gamma_2(1) = h([0,1])$. Definimos $\gamma : [0,1] \to \mathcal{D}$ por,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \gamma_2(2-2t), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Y obtenemos una trayectoria de A_1 a A_2 en $\mathcal{D}$.

Subcaso 2.2. $h[0,1] = A_0$.

En este caso A_0 es un arco con extremos $h(0)$ y $h(1)$, pero A_0 no es un arco libre, así que $A_0 - \{h(0), h(1)\}$ no es abierto en X, por tanto existe $y_0 \in A_0 - \{h(0), h(1)\}$ tal que $y_0 \notin int(A_0 - \{h(0), h(1)\})$. Si $y_0 \in int_X(A_0)$, entonces el conjunto $U = int_X(A_0) - \{h(0), h(1)\}$ es abierto en X, está contenido en $A_0 - \{h(0), h(1)\}$ y tiene a y_0. Esto implica que $y_0 \in int_X(A_0) - \{h(0), h(1)\}$ lo cual es un absurdo. Por tanto $y_0 \notin int_X(A_0)$. Consideremos los subarcos $h(0)\,y_0$ y $y_0h(1)$ de $h([0,1])$. Notemos que $y_0 \in h(0)\,y_0 \cap y_0h(1) \cap Fr_X(A_0)$ y además $h(0)\,y_0$, $y_0h(1) \in C(A_0)$, por tanto, por el Lema 3.2.1, $h(0)\,y_0$, $y_0h(1) \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Entonces, como $y_0 \in h(0)\,y_0 \cap y_0h(1) \cap Fr_X(A_0)$, por el Caso 1, aplicado a $h(0)\,y_0$ y $y_0h(1)$, existe una trayectoria $\gamma_1 : [0,1] \to \mathcal{D}$ tal que $\gamma_1(0) = h(0)\,y_0$ y $\gamma_1(1) = y_0h(1)$.

Por otra parte, dado que $a_1 = h(0) \in A_1 \cap h(0)\,y_0 \cap Fr_X(A_0)$ y $a_2 = h(1) \in A_2 \cap y_0h(1) \cap Fr_X(A_0)$, por el Caso 1, aplicado a A_1 con $h(0)\,y_0$ y a A_2 con $y_0h(1)$, tenemos que existen trayectorias $\gamma_2 : [0,1] \to \mathcal{D}$ y $\gamma_3 : [0,1] \to \mathcal{D}$ tales que $\gamma_2(0) = A_1$, $\gamma_2(1) = h(0)\,y_0$, $\gamma_3(0) = y_0h(1)$ y $\gamma_3(1) = A_2$.

Definimos $\gamma : [0,1] \to \mathcal{D}$ por,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_2(3t), & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ \gamma_1(3t-1), & \text{si } t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \gamma_3(3t-2), & \text{si } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \end{cases}$$

y obtenemos una trayectoria de A_1 a A_2 en $\mathcal{D}$. Esto termina la prueba del subcaso 2.2 y con ello la prueba de la proposición. ■

Recordemos que una métrica ρ para un conjunto S es *convexa* si para cualesquiera x, $y \in S$, existe $z \in S$ tal que $\rho(x,z) = \rho(y,z) = \frac{1}{2}\rho(x,y)$. Sea X un continuo con métrica d. La función $K_d : [0,\infty) \times 2^X \to 2^X$ definida por $K_d(t,A) = \bigcup_{a \in A} C_t^d(a)$, donde $C_t^d(a) = \{x \in X : d(x,a) \leq t\}$ es continua si d es convexa (ver Teorema 2.3.3). También recordemos que Bing y Moise probaron que cada continuo localmente conexo admite una métrica convexa, es decir, demostraron que para cada continuo localmente conexo X existe una métrica convexa ρ para X tal que la topología original de X es la misma que la topología de X generada por ρ (ver [2] o [24]).

Lema 3.2.3. *Sean X un continuo localmente conexo con métrica convexa ρ y A_0 un subcontinuo propio de X.*

a) Si $B_0 \in C(X) - \{X\}$, entonces $\alpha = \{K_\rho(t,B) : t \in [0,\infty)\}$ es un arco ordenado de B_0 a X en $C(X)$; más aún, si $B_0 \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$, entonces α satisface que $C(A_0) \cap \alpha = \{B_0\}$.

b) Si $B_0 \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(X)$ tal que $B_0 = \lim B_n$, entonces existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$\beta_0 = \lim \beta_{n_k}$, *donde,* $\beta_0 = \{K_\rho (t, B_0) : t \in [0, \infty)\}$ *y, para cada* $k \in \mathbb{N}$, $\beta_{n_k} = \{K_\rho (t, B_{n_k}) : t \in [0, \infty)\}$. *Más aún, si* $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Fr_{C(X)} (C (A_0))$, *se cumple que, para cada* $k \in \mathbb{N}$, $\beta_{n_k} \cap C (A_0) = \{B_{n_k}\}$.

Demostración de a). Por el Lema 2.3.4, para cada $t \in [0, \infty)$,

$$K_\rho (B_0, t) \in C (X).$$

Dado que X es compacto, existe $r_0 \in (0, \infty)$ tal que, para cualesquiera x, $y \in X$, $\rho (x, y) \leq r_0$. Por el Teorema 2.3.3, K_ρ es continua y ya que $t_1 < t_2$ implica que $K_\rho (B_0, t_1) \subset K_\rho (B_0, t_2)$, entonces $\alpha = \{K_\rho (t, B_0) : t \in [0, \infty)\} = \{K_\rho (t, B_0) : t \in [0, r_0]\}$ es un arco ordenado de $B_0 = K_\rho (0, B_0)$ a $X = K_\rho (r_0, B_0)$ en $C (X)$.

Para concluir la prueba del inciso a), supongamos que

$$B_0 \in Fr_{C(X)} (C (A_0)),$$

y demostraremos la siguente afirmación.

Afirmación 1. $\alpha \cap C (A_0) = \{B_0\}$.

Claramente $B_0 \in \alpha \cap C (A_0)$. Sea $A \in \alpha \cap C (A_0)$, como A es un elemento de α, existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $A = K_d (t_0, B_0)$. Supongamos que $t_0 > 0$. Dado que $B_0 \in Fr_{C(X)} (C (A_0))$, por el Lema 3.2.1, $B_0 \subset A_0$ y $B_0 \cap Fr_X (A_0) \neq \emptyset$. Sea $b_0 \in B_0 \cap Fr_X (A_0)$, entonces $B^d_{t_0} (b_0) \subset K_d (t_0, B_0) = A$ y $B^d_{t_0} (b_0) \cap (X - A_0) \neq \emptyset$ y por tanto $A \cap (X - A_0) = K_d (t_0, B_0) \cap (X - A_0) \neq \emptyset$, lo cual contradice que $A \in C (A_0)$. Esto prueba que t_0 no es mayor que cero, por tanto $t_0 = 0$. Así que $A = B_0$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1 y con ello concluimos la demostración del inciso a).

Demostración de b). Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea

$$\beta_n = \{K_d (t, B_n) : t \in [0, \infty)\}.$$

Por el inciso a), para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, β_n es un arco ordenado de B_n a X en $C (X)$. Dado que $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C (C (X))$ y $C (C (X))$ es compacto, existen $\beta' \in C(C(X))$ y una subsucesión $\left\{\beta_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\beta' = \lim \beta_{n_k}$.

Afirmación 2. $\beta' = \beta_0$.

Haremos la prueba por medio de contenciones. Sea $C \in \beta'$. Dado que $\beta' = \lim \beta_{n_k}$, por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $C = \lim C_k$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_k \in \beta_{n_k}$. De manera que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k \in [0, \infty)$, tal que $C_k = K_d(t_k, B_{n_k})$. Como $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0, diam(X)]$, donde $diam(X) = \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$, existen t_0 y una subsucesión $\{t_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $t_0 = \lim t_{k_l}$ y ya que $B_0 = \lim B_{n_{k_l}}$, $(t_0, B_0) = \lim \left(t_{k_l}, B_{n_{k_l}}\right)$. Como la función K_d es continua (ver Teorema 2.3.3), $K_d(t_0, B_0) = \lim K_d\left(t_{k_l}, B_{n_{k_l}}\right) = \lim C_{k_l}$, pero $C = \lim C_{k_l}$ y $C(X)$ es un espacio de Hausdorff, por tanto $C = K_d(t_0, B_0)$. Esto demuestra que $C \in \beta_0$ y por tanto concluimos que $\beta' \subset \beta_0$.

Sea $C \in \beta_0$, entonces existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $C = K_d(t_0, B_0)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $C_k = K_d(t_0, B_{n_k})$. Como K_d es una función continua y $(t_0, B_0) = \lim (t_0, B_{n_k})$, tenemos que $C = \lim C_k = \lim K_d(t_0, B_{n_k})$. Por la Proposición 1.2.3, $C \in \beta'$. Esto prueba que $\beta_0 \subset \beta'$. Por tanto $\beta' = \beta_0$.

Así que existe una subsucesión $\left\{\beta_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\beta_0 = \lim \beta_{n_k}$, donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, β_{n_k} es un arco ordenado de B_{n_k} a X.

En el caso en que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Fr_{C(X)}(C(A_0))$, por el inciso a), tenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\beta_{n_k} \cap C(A_0) = \{B_{n_k}\}$. Esto termina la demostración del inciso b) y con ello terminamos la prueba del lema. ■

Teorema 3.2.4. *Sean X un continuo localmente conexo, $A_0 \in C(X) - \{X\}$ y $C_0 \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Entonces $Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{C_0\}$ tiene la propiedad b).*

Demostración. Sean

$$\mathcal{D} = Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{C_0\},$$
$$\mathcal{C} = C(X) - C(A_0)$$

y

$$\mathcal{F} = Fr_{C(X)}\left(C\left(A_0\right)\right) - \{C_0\}.$$

Notemos que $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{F}$.

Ahora bien $X \in \mathcal{C}$ y si α es un arco ordenado en $C(X)$ de $A \in \mathcal{C}$ a X, entonces $\alpha \subset \mathcal{C}$. Por el Teorema 2.2.2, $\mathcal{C}$ tiene la propiedad b).

Sea $f : \mathcal{D} \to S^1$ una función continua, probaremos que existe una función continua, $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, tal que $f = \exp \circ h$.

Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(X)$.

Por el Lema 1.4.2, existe una función continua $h_1 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ h_1 = f|_{\mathcal{C}}$ y $h_1(X) = t_0$.

Dado que X es localmente conexo, X admite una métrica convexa ρ (ver [2] o [24]). De manera que, por el inciso a) del Lema 3.2.3, para cada $A \in \mathcal{F}$, $\alpha_A = \{K(t, A) : t \in [0, \infty)\}$ es un arco ordenado de A a X en $C(X)$ tal que $\alpha_A \cap C(A_0) = \{A\}$. Notemos que $\{A\} \subset \alpha_A \cap \mathcal{F} \subset \alpha_A \cap C(A_0) = \{A\}$, por tanto $\alpha_A \cap \mathcal{F} = \{A\}$, así que $C_0 \notin \alpha_A$. Además, $\alpha_A - \{A\} \subset C(X) - C(A_0)$. Por tanto $\alpha_A \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{F} = \mathcal{D}$. Dado que α_A es un arco, por el Corolario 1.4.6, α_A tiene la propiedad b). Así que, por el Lema 1.4.2, existe una función continua, $h_A : \alpha_A \to \mathbb{R}$, tal que $f|_{\alpha_A} = \exp \circ h_A$ y $h_A(X) = t_0$.

Definimos $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ por

$$h(A) = \begin{cases} h_A(A), & \text{si } A \in \mathcal{F}, \\ h_1(A), & \text{si } A \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Claramente h está bien definida. Probaremos que:

i) h es continua y

ii) $f = \exp \circ h$.

i). Como $C(X) - C(A_0)$ es abierto en $C(X)$, $\mathcal{C}$ es abierto en $\mathcal{D}$. Además $h|_{\mathcal{C}} = h_1|_{\mathcal{C}}$ es continua, de manera que h es continua en todos los elementos de $\mathcal{C}$.

Ahora consideremos $B_0 \in \mathcal{F}$, mostraremos que h es continua en B_0. Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{D}$ tal que $B_0 = \lim B_n$. Dado que $\mathcal{D}$ y $\mathbb{R}$ son espacios métricos, para probar la continuidad en B_0, basta demostrar que existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $h(B_0) = \lim h(B_{n_k})$ (Proposición 1.1.2).

Recordemos que la función K_ρ es continua.

Caso 1. $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$.

Dado que $\alpha_0 = \{K_\rho(B_0, t) : t \in [0, \infty)\}$ es un arco ordenado de B_0 a X tal que $\alpha_0 \cap C(A_0) = \{B_0\}$ (ver inciso a) del Lema 3.2.3), tenemos que $\mathcal{C} \cap \alpha_0 = \{K_\rho(B_0, t) : t \in (0, \infty)\}$, por tanto $\mathcal{C} \cap \alpha_0$ es conexo. Como $\mathcal{C}$ y α_0 tienen la propiedad b) (ver Teorema 2.2.2, Corolario 1.4.6, repectivamente), por el Lema 1.4.3, $\mathcal{C} \cup \alpha_0$ tiene la propiedad b). Por el Lema 1.4.2, existe una función continua $h' : \mathcal{C} \cup \alpha_0 \to \mathbb{R}$, tal que $\exp \circ h' = f|_{\mathcal{C}\cup\alpha_0}$ y además $h'(X) = t_0$. Notemos que $h'|_{\alpha_0}$ y $h'|_{\mathcal{C}}$ son levantamientos para $f|_{\alpha_0}$ y $f|_{\mathcal{C}}$, respectivamente, y además $h'|_{\alpha_0}(X) = t_0 = h_{B_0}(X)$ y $h'|_{\mathcal{C}}(X) = t_0 = h_1(X)$, entonces, por el Teorema 1.4.1, $h'|_{\alpha_0} = h_{B_0}$ y $h'|_{\mathcal{C}} = h_1$. Así que $h' = h|_{\mathcal{C}\cup\alpha_0}$. Por tanto, ya que h' es continua, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}$ y $B_0 = \lim B_n$,

$$\begin{aligned} h(B_0) &= h|_{\mathcal{C}\cup\alpha_0}(B_0) \\ &= h'(B_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} h'(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} h|_{\mathcal{C}\cup\alpha_0}(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} h(B_n). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $h(B_0) = \lim h(B_n)$, si $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$.

Caso 2. $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$.

Por el inciso b) del Lema 3.2.3, existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, $\beta_{n_0} = \lim \beta_{n_k}$, donde, $\beta_{n_0} = \{K_\rho(t, B_0) : t \in [0, \infty)\}$ y, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\beta_{n_k} = \{K_\rho(t, B_{n_k}) : t \in [0, \infty)\}$. Como $B_0 = \lim B_n$ y $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B_0 = \lim B_{n_k}$. Además, $f|_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \beta_{n_k}} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \beta_{n_k} \to S^1$ es una función continua, para cada $k \in \mathbb{N}$, β_{n_k} es un arco ordenado de B_{n_k} a X y β_{n_0} es un arco ordenado de B_0 a X, $\beta_{n_0} = \lim \beta_{n_k}$, h_{B_0} es un levantamiento de $f|_{\beta_{n_0}}$ tal que $h_{B_0}(B_0) = t_0$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $h_{B_{n_k}}$ es un levantamiento de $f|_{\beta_{n_k}}$ tal que $h_{B_{n_k}}(X) = t_0$. Por el Lema 1.4.15, $h_{B_0}(B_0) = \lim h_{B_{n_k}}(B_{n_k})$. Dado que, $B_0 \in \mathcal{F}$, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$B_{n_k} \in \mathcal{F}$ y por definición de h, $h_{B_0}(B_0) = h(B_0)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $h(B_{n_k}) = h_{B_{n_k}}(B_{n_k})$. Por tanto $h(B_0) = \lim h(B_{n_k})$.

De manera que h es continua en B_0.

Claramente, para cada $A \in \mathcal{D}$, $f(A) = \exp \circ h(A)$. Esto termina le prueba del teorema. ■

3.2.2. Resultado principal

Tenemos todos los resultados necesarios para probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.2.5. *Sean X un continuo localmente conexo y A_0 un subcontinuo propio localmente conexo de X que no es una curva cerrada simple ni un arco libre. Entonces A_0 no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Dado que A_0 no es una curva cerrada simple, por el Teorema 2.3.6, A_0 no agujera a $C(A_0)$, por tanto $C(A_0) - \{A_0\}$ es unicoherente. Por el Teorema 1.92 de [25, p. 134], $C(A_0)$ es localmente conexo, ya que A_0 es localmente conexo. De manera que $C(A_0) - \{A_0\}$ es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 1.4.11, $C(A_0) - \{A_0\}$ tiene la propiedad b).

Ya que A_0 es un subcontinuo propio de X, $Fr_X(A_0) \neq \emptyset$, además

$$Fr_X(A_0) \subset A_0,$$

por tanto $A_0 \cap Fr_X(A_0) \neq \emptyset$. Por el Lema 3.2.1, $A_0 \in Fr_{C(X)}(C(A_0))$. Así que, por el Teorema 3.2.4,

$$Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{A_0\}$$

tiene la propiedad b).

Como

$$(C(A_0) - \{A_0\}) \cap \left(Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{A_0\}\right) = Fr_{C(X)}(C(A_0)) - \{A_0\},$$

y, por el Lema 3.2.2, $Fr_{C(X)}(C(A_0)) - \{A_0\}$ es conexa, concluimos que

$$(C(A_0) - \{A_0\}) \cap \left(Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{A_0\}\right)$$

es conexo. Por el Lema 1.4.3,

$$C(X) - \{A_0\} = (C(A_0) - \{A_0\}) \cup \left(Cl_{C(X)}(C(X) - C(A_0)) - \{A_0\}\right),$$

tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10,

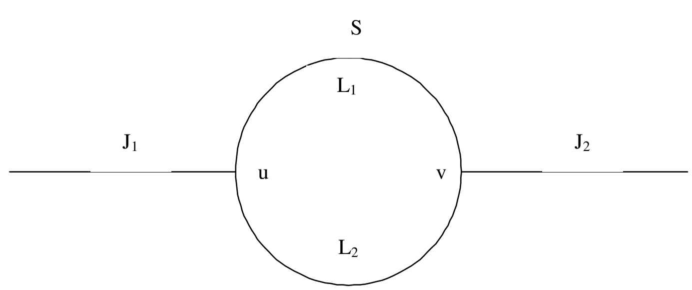
$$C(X) - \{A_0\},$$

es unicoherente y por tanto A_0 no agujera a $C(X)$. Esto termina la prueba del teorema. ■

3.3. Gráficas finitas

3.3.1. Introducción

Una *gráfica finita* es un continuo que puede expresarse como una unión finita de arcos de manera que la intersección de cada par de esos arcos es un conjunto finito (el vacío se considera como un conjunto finito). El propósito de esta sección es mostrar que si G_0 es la siguiente gráfica finita,



entonces $S = L_1 \cup L_2$ no agujera a $C(G_0)$. Las aristas de G_0 son J_1, J_2, L_1 y L_2. Notemos que cada arista de G_0 puede ser identificada con el intervalo $[0,1]$. Considerando esto, podemos pensar que G_0 tiene una métrica d de tal manera que todas sus aristas tienen longitud de arco 1 y que la métrica se comporta como la longitud de arco.

En este capítulo, si $a, b \in G_0$, ab representará una trayectoria de a a b contenida en G_0.

3.3.2. S no agujera a $\mathbf{C(G_0)}$

Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\{u\}) = \{ua_1 \cup ub_1 \cup ub_2 : a_1 \in J_1,\, b_1 \in L_1,\, b_2 \in L_2 \text{ y } ua_1 \subset J_1,\\ ub_1 \subset L_1,\, ub_2 \subset L_2\},\\ \mathcal{M}(\{v\}) = \{va_2 \cup vb_1 \cup vb_2 : a_2 \in J_2,\, b_1 \in L_1,\, b_2 \in L_2 \text{ y } va_2 \subset J_2,\, vb_1 \subset L_1,\\ vb_2 \subset L_2\},\\ \mathcal{M}(L_1) = \{L_1 \cup ua_1 \cup va_2 \cup ub_2 \cup vc_2 : a_1 \in J_1,\, a_2 \in J_2,\, b_2, c_2 \in L_2 \text{ y}\\ ua_1 \subset J_1,\, ua_2 \subset J_2,\, ub_2 \cup vc_2 \subset L_2\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(L_2) = \{L_2 \cup ua_1 \cup va_2 \cup ub_1 \cup vc_1 : a_1 \in J_1,\, a_2 \in J_2,\, b_1, c_1 \in L_1 \text{ y}\\ ua_1 \subset J_1,\, ua_2 \subset J_2,\, ub_1 \cup vc_1 \subset L_1\}.\end{aligned}$$

Por el Lema 5.2 de [4, p. 271] $\mathcal{M}(\{u\})$ y $\mathcal{M}(\{v\})$ son 3-celdas, $\mathcal{M}(L_1)$ y $\mathcal{M}(L_2)$ son 4-celdas y por [4, Teorema 5.4, p. 272] tenemos que,

$$\begin{gathered}C(G_0) =\\ \mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(\{v\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2) \cup C(J_1) \cup C(J_2) \cup C(L_1) \cup C(L_2).\end{gathered}$$

Claramente $S \in \mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1) \cap \mathcal{M}(L_2)$.

Proposición 3.3.1. *S no agujera a $C(G_0)$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{M}(\{u\})$ es una 3-celda, $\mathcal{M}(L_1)$ es una 4-celda y $S \in \mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(L_1)$, por el Lema 1.4.9, $\mathcal{M}(\{u\}) - \{S\}$ y $\mathcal{M}(L_1) - \{S\}$ tienen la propiedad b). Notemos que

$$\mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(L_1) = \mathcal{D},$$

donde

$$\mathcal{D} = \{L_1 \cup ua_1 \cup ub_2 : a_1 \in J_1,\; b_2 \in L_2 \text{ y } ua_1 \subset J_1,\, ub_2 \subset L_2\},$$

Claramente $\mathcal{D}$ es una 2-celda, de manera que $\mathcal{D}-\{S\}$ es conexo, por tanto $\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cap\mathcal{M}\left(L_1\right)-\{S\}$ es conexo. Por el Lema 1.4.3 $\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_1\right)-\{S\}$ tiene la propiedad b).

Análogamente se puede probar que $\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}$ tiene la propiedad b).

Notemos que $\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)$ es una 2-celda, por tanto $\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}$ es conexo.

Claramente

$$S\cup J_1\in\left[\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cap\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)\right]-\{S\}.$$

Como $\mathcal{M}\left(\{u\}\right)-\{S\}$ y $\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}$ son conexos y

$$\left[\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cap\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)\right]-\{S\}\neq\emptyset,$$

entonces

$$\left[\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\left(\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)\right)\right]-\{S\}$$

es conexo.

Dado que

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_1\right)-\{S\}\right)\cap\left(\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}\right)=\\ \left[\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\left(\mathcal{M}\left(L_1\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)\right)\right]-\{S\},\end{gathered}$$

tenemos que

$$\left(\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_1\right)-\{S\}\right)\cap\left(\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}\right),$$

es conexo. Por el Lema 1.4.3, $\mathcal{M}\left(\{u\}\right)\cup\mathcal{M}\left(L_1\right)\cup\mathcal{M}\left(L_2\right)-\{S\}$ tiene la propiedad b).

Dado que

$$\begin{gathered}\mathcal{M}\left(\{v\}\right)\cap\mathcal{M}\left(L_1\right)=\\ \{L_1\cup va_2\cup vc_2: a_2\in J_2,\ c_2\in L_2 \text{ y } va_2\subset J_2,\, vc_2\subset L_2\},\\ \mathcal{M}\left(\{v\}\right)\cap\mathcal{M}\left(L_2\right)=\\ \{L_2\cup va_2\cup vc_1: a_2\in J_2,\ c_1\in L_1 \text{ y } va_2\subset J_2,\, vc_1\subset L_1\},\end{gathered}$$

y

$$\mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(\{v\}) = \{S\},$$

tenemos que $\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1)$ y $\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_2)$ son 2-celdas y por tanto $\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1) - \{S\}$ y $\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1) - \{S\}$ son conexos. Notemos que $\mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(\{v\}) - \{S\} = \emptyset$. Además

$$S \cup J_2 \in [(\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1)) \cap (\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_2))] - \{S\}.$$

De manera que,

$$[(\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1)) \cup (\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_2))] - \{S\},$$

es conexo. Como $\mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(\{v\}) - \{S\} = \emptyset$ tenemos que

$$[(\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_1)) \cup (\mathcal{M}(\{v\}) \cap \mathcal{M}(L_2)) \cup (\mathcal{M}(\{u\}) \cap \mathcal{M}(\{v\}))] - \{S\},$$

es conexo, por tanto

$$[(\mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2)) \cap \mathcal{M}(\{v\})] - \{S\},$$

es conexo. Dado que $(\mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2)) - \{S\}$ y $\mathcal{M}(\{v\}) - \{S\}$ tienen la propiedad b), por el Lema 1.4.3,

$$(\mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2) \cup \mathcal{M}(\{v\})) - \{S\},$$

tiene la propiedad b).

Dado que

$$\begin{gathered} S \in C(G_0) - [C(J_1) \cup C(J_2) \cup C(L_1) \cup C(L_2)] \subset \\ \mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(\{v\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2), \end{gathered}$$

$\mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(\{v\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2)$ es una vecindad cerrada de S en $C(G_0)$.

Como $C(G_0)$ no tiene puntos de corte (ver [18, Ejercicicio 6.4, p. 98]) y $C(G_0)$ es localmente conexo (ver [25, Teorema 1.92, p. 134]) y unicoherente (ver [19, Teorema 19.8, p. 159] o Teorema 2.2.2), por la Proposición 1.4.14, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de S con frontera conexa tal que

$$S \in \mathcal{U} \subset Cl(\mathcal{U}) \subset \mathcal{M}(\{u\}) \cup \mathcal{M}(\{v\}) \cup \mathcal{M}(L_1) \cup \mathcal{M}(L_2).$$

Por la Proposición 1.4.13, $C(G_0) - \{S\}$ tiene la propiedad b). De manera que $C(G_0) - \{S\}$ es unicoherente. Así que S no agujera a $C(G_0)$. ■

3.4. Curvas cerradas simples en continuos localmente conexos

3.4.1. Introducción

Sean X un continuo y S una curva cerrada simple contenida en X, diremos que S *es una curva cerrada simple libre en* X, si existe $p \in S$ tal que $p \notin int\,(S)$ y $S - \{p\}$ es un subconjunto abierto de X. El objetivo de esta sección es probar que si X es un continuo localmente conexo y S es una curva simple contenida propiamente en X, entonces S agujera a $C\,(X)$ si y sólo si S es una curva cerrada libre en X.

Nuevamente, en toda esta sección, G_0 representará la siguiente gráfica finita.

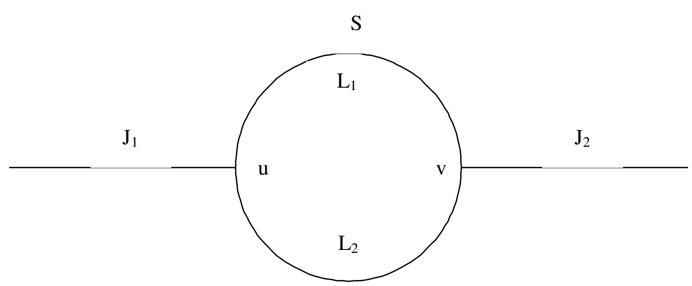


Figura 2: Gráfica G_0

La idea de la prueba es la siguiente: por el Teorema 2.5.1, sabemos que en cualquier continuo X, si S es una curva cerrada simple libre contenida en X, entonces S agujera a $C\,(X)$. Así que, para lograr el objetivo de esta sección, sólo nos falta probar lo siguiente: si X es un continuo localmente conexo y S es una curva cerrada simple contenida propiamente en X que no es una curva cerrada simple libre, entonces S no agujera a $C\,(X)$. Para ello, mostraremos que si X es un continuo localmente conexo y contiene una curva cerrada simple S, que no es una curva cerrada simple libre, entonces X contiene un subcontinuo homeomorfo a G_0 tal que $S \subset G_0$ (ver Figura 2). Por el Teorema 3.4.3, S no agujera a $C\,(G_0)$, entonces $C\,(G_0) - \{S\}$ tiene la propiedad b). También probaremos que $Cl\,(C\,(X) - C\,(G_0)) - \{S\}$ tiene la propiedad b) y que el conjunto

$$(Cl\,(C\,(X) - C\,(G_0)) - \{S\}) \cap (C\,(G_0) - \{S\}) = Fr_{C(X)}\,(C\,(G_0)) - \{S\}$$

es conexo, entonces por el Lema 1.4.3, concluiremos que $C\,(X) - \{S\}$ tiene la propiedad b) y por tanto S no agujera a $C\,(X)$.

3.4.2. Resultados auxiliares

Lema 3.4.1. *Sean X un continuo localmente conexo y S una curva cerrada simple contenida propiamente en X que no es una curva cerrada simple libre. Entonces X contiene un subcontinuo homeomorfo a G_0 tal que $S \subset G_0$.*

Demostración. Notemos que si $int\,(S) = S$, entonces S es cerrado y abierto en X, dado que X es conexo y $S \neq \emptyset$, $S = X$, lo cual contradice el hecho de que S está contenida propiamente en X. De manera que $int\,(S) \subsetneq S$. Si $S - int\,(S) = \{q\}$, para algún $q \in S$, entonces S es una curva cerrada simple libre en X, lo cual es una contradición con la hipótesis. Por tanto, $S - int\,(S)$ es no degenerado. Sean $q_1, q_2 \in S - int\,(S)$, con $q_1 \neq q_2$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d\,(q_1, q_2)$ y, para cada $i \in \{1, 2\}$, sea K_i la componente de $B_\varepsilon\,(q_i)$ que contiene a q_i. Dado que X es localmente conexo, K_i es abierto en X (ver [28, Teorema 27.9, p. 200]), entonces $K_i \cap (X - S) \neq \emptyset$, pues $q_i \notin int\,(S)$. Sea $p_i \in K_i \cap (X - S)$. Dado que K_i es conexo y abierto en X, por el Teorema 8.26 de [27, p. 132], K_i es conexo por arcos, de manera que existe un arco $p_i q_i$ con puntos extremos p_i y q_i contenido en K_i. Sea $f_i : [0, 1] \to p_i q_i$ una biyección continua tal que $f_i\,(0) = p_i$ y $f_i\,(1) = q_i$ y sea $t_i = \text{ínf}\,\{t \in [0, 1] : f_i\,(t) \in S\}$, claramente t_i existe pues $1 \in \{t \in [0, 1] : f_i\,(t) \in S\} \subset [0, 1]$ y además, como S es cerrado en X, tenemos que $f\,(t_i) \in S$. Notemos que $f_i\,([0, t_i])$ es un arco, ya que p_i, $f\,(t_i) \in f_i\,([0, t_i])$ y $p_i \neq f_i\,(t_i)$, pues $p_i \notin S$ y $f_i\,(t_i) \in S$, además, por la definición de t_i, $f_i\,([0, t_i]) \cap S = \{f_i\,(t_i)\}$. Como $f_1\,([0, t_1]) \subset K_1 \subset B_\varepsilon\,(q_1)$, $f_2\,([0, t_2]) \subset K_2 \subset B_\varepsilon\,(q_2)$ y $\varepsilon < d\,(q_1, q_2)$, $f_1\,([0, t_1]) \cap f_2\,([0, t_2]) = \emptyset$.

Definimos $Y = f_1\,([0, t_1]) \cup S \cup f_2\,([0, t_2])$, entonces Y es un subcontinuo de X que es la unión de una curva cerrada simple S con dos arcos $f_1\,([0, t_1])$ y $f_2\,([0, t_2])$ tales que $S \cap f_1\,([0, t_1]) = \{f\,(t_1)\}$, $S \cap f_2\,([0, t_2]) = \{f\,(t_2)\}$ y $f_1\,([0, t_1]) \cap f_2\,([0, t_2]) = \emptyset$. De manera que Y es homeomorfo a G_0, esto termina la prueba del lema. ■

Lema 3.4.2. *Sean X un continuo localmente conexo, S una curva cerrada simple contenida propiamente en X que no es una curva cerrada simple libre. Sea $G_0 \subset X$ como en el Lema 3.4.1. Entonces $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ es conexa.*

Demostración. En el caso en que $S \notin Fr_{C(X)}(C(G_0))$, como $C(G_0)$ y $Cl(C(X) - C(G_0))$ son cerrados conexos de $C(X)$ tales que $C(X) = C(G_0) \cup Cl(C(X) - C(G_0))$ y $C(X)$ es unicoherente (ver [19, Teorema 19.8, p. 159] o Teorema 2.3.3]) tenemos que $C(G_0) \cap Cl(C(X) - C(G_0)) = Fr_{C(X)}(C(G_0))$ es conexa y como $S \notin Fr_{C(X)}(C(G_0))$, $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\} = Fr_{C(X)}(C(G_0))$ es conexa.

Supongamos ahora que $S \in Fr_{C(X)}(C(G_0))$. En este caso mostraremos que si $A \in Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$, entonces existe un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a A y G_0. Sea $A_1 \in Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$. Por el Lema 3.2.1, tenemos que $A_1 \subset G_0$ y $A_1 \cap Fr_X(G_0) \neq \emptyset$. Sea $a_1 \in A_1 \cap Fr_X(G_0)$. Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1. $A_1 \subsetneq S$.

Subcaso 1.1. $u \in A_1$.

Sea α un arco ordenado en $C(G_0)$ de $\{u\}$ a J_1. Entonces

$$\beta = \{A_1 \cup D : D \in \alpha\}$$

es un arco ordenado de A_1 a $A_1 \cup J_1$ contenido en $C(G_0)$. Además, como, para cada $D \in \alpha$, $(A_1 \cup D) \cap S = A_1$ y estamos en el caso en que $A_1 \subsetneq S$, tenemos que $S \notin \beta$. Sea $D \in \alpha$. Dado que $a_1 \in A_1 \cup D \subset G_0$, por el Lema 3.2.1, $A_1 \cup D \in Fr_{C(X)}(C(G_0))$. De manera que β es un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a A_1 y a $A_1 \cup J_1$. Sea α' un arco ordenado de $A_1 \cup J_1$ a G_0 en $C(G_0)$. Dado que $a_1 \in C \subset G_0$, para todo $C \in \alpha'$, por el Lema 3.2.1, $\alpha' \subset Fr_{C(X)}(C(G_0))$. Además $S \notin \alpha'$, pues $J_1 \not\subseteq S$. De manera que $A_1, G_0 \in \beta \cup \alpha' \subset Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ y $\beta \cup \alpha'$ es conexo.

Subcaso 1.2. $v \in A_1$.

Con un procedimiento análogo al que se hizó en el caso anterior podemos encontrar un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contenga a A_1 y a G_0.

Subcaso 1.3. $u, v \notin A_1$.

En este caso se cumple que $A_1 \subset L_1$ o $A_1 \subset L_2$ (ver Figura 2). Podemos suponer que $A_1 \subset L_1$. Consideromos el arco $a_1 u$ que tiene por extremos a a_1 y u y está contenido en L_1. Sea α un arco ordenado en $C(L_1)$ de $\{a_1\}$ a $a_1 u$. Entonces $\beta = \{A_1 \cup C : C \in \alpha\}$ es un arco ordenado de A_1 a $A_1 \cup a_1 u$. Sea $D \in \beta$. Entonces $a_1 \in D \subset G_0$. Por el Lema 3.2.1, $D \in Fr_{C(X)}(C(G_0))$, además $S \notin \beta$. Por tanto $\beta \subset Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$. Por el Caso 1, existe un subconjunto conexo α' de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a $A_1 \cup a_1 u$ y G_0. Así que, $\beta \cup \alpha'$ es un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a A_1 y G_0.

Por los Subcasos 1.1, 1.2 y 1.3, podemos concluir que si $A_1 \subsetneq S$ existe un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a A_1 y G_0.

Caso 2. $A_1 \nsubseteq S$.

Sea α un arco ordenado en $C(G_0)$ de A_1 a G_0. Notemos que $S \notin \alpha$. Dado que, para cada $C \in \alpha$, $a_1 \in A_1 \subset C \subset G_0$, por el Lema 3.2.1, $C \in Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$. De manera que α es un subconjunto conexo de $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ que contiene a A_1 y G_0.

Así que $Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\}$ es conexo. ■

3.4.3. Resultado principal

Teorema 3.4.3. *Sean X un continuo localmente conexo y S una curva cerrada simple contenida propiamente en X. Si S no es una curva cerrada simple libre en X, entonces S no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Por el Lema 3.4.1, existe un subcontinuo Y de X que es homeomorfo a G_0 tal que $S \subset Y$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $S \subset G_0 \subset X$. Por los Teoremas 3.3.1 y 3.2.4, $C(G_0) - \{S\}$ tiene la propiedad b) y $Cl(C(X) - C(G_0)) - \{S\}$ tiene la propiedad b). Por el Lema 3.4.2,

$$Fr_{C(X)}(C(G_0)) - \{S\} = (C(G_0) - \{S\}) \cap (Cl(C(X) - C(G_0)) - \{S\}),$$

es conexa. De manera que por el Lema 1.4.3,

$$C(X) - \{S\} = (C(G_0) - \{S\}) \cup (Cl(C(X) - C(G_0)) - \{S\}),$$

tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10, $C(X) - \{S\}$ es unicoherente y por tanto S no agujera a $C(X)$. ■

Para finalizar esta sección presentamos el resultado principal.

Teorema 3.4.4. *Sean X un continuo localmente conexo y S una curva cerrada simple contenida propiamente en X. Entonces S agujera a $C(X)$ si y sólo si S es una curva cerrada simple libre.*

Demostración. (Necesidad). Si S no es una curva cerrada libre, por el Teorema 3.4.3, S no agujera a $C(X)$. Por tanto si S agujera a $C(X)$, S es una curva cerrada simple libre.

(Suficiencia). Si S es una curva cerrada simple libre, por el Teorema 2.5.1, S agujera a $C(X)$. Esto termina la prueba del teorema. ■

3.5. Subcontinuos no localmente conexos

3.5.1. Introducción

En esta sección probaremos que si X es un continuo localmente conexo y si A es un subcontinuo no localmente conexo de X, entonces A no agujera a $C(X)$. Con este resultado obtenemos una clasificación completa de los subcontinuos de un espacio localmente conexo que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos; dicha clasificación será presentada en la siguiente sección.

Si X es un continuo localmente conexo y $A \in C(X)$ es tal que A no es localmente conexo, denotaremos por

$$F(A) = \{a \in A : A \text{ no es localmente conexo en } a\}.$$

3.5.2. Resultados auxiliares

Lema 3.5.1. *Sean X un continuo localmente conexo con métrica convexa d, $A \in C(X)$ no localmente conexo, $B \in C(X)$ y $s_0 \in [0,\infty)$ tales que $B \subset A$ y $K_d(s_0, B) \cap F(A) \neq \emptyset$. Entonces $K_d(t,B) \neq A$, para toda $t \in (s_0,\infty)$.*

Demostración. Sea $t \in (s_0,\infty)$. Mostraremos que existe $x \in K_d(t,B)$ tal que $x \notin A$. Dado que $t > s_0$, $\varepsilon = t - s_0 > 0$. Por hipótesis $K_d(s_0,B) \cap F(A) \neq \emptyset$. Sea $a_0 \in K_d(s_0,B) \cap F(A)$. Como A no es localmente conexo en a_0, por el Lema **??**, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cualquiera número natural $n \geq N$ y cualquier abierto V en A tal que $a_0 \in V \subset B_{\frac{1}{n}}(a_0) \cap A$, V es disconexo. Sea $n_0 \geq N$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dado que X es localmente conexo, existe un abierto conexo W de X tal que $a_0 \in W \subset B_{\frac{1}{n_0}}(a_0)$. Entonces $W \cap A$ es abierto en A, como $n_0 \geq N$ y $W \cap A \subset B_{\frac{1}{n_0}}(a_0) \cap A$, $W \cap A$ es disconexo. De manera que $W \nsubseteq A$, por tanto existe $x \in W - A$. Como $W \subset B_{\frac{1}{n_0}}(a_0)$, $d(x,a_0) < \frac{1}{n_0}$. Dado que $a_0 \in K_d(s_0,B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a_0,b) \leq s_0$. Entonces

$$\begin{aligned} d(b,x) &\leq d(b,a_0) + d(a_0,x) \\ &< s_0 + \tfrac{1}{n_0} \\ &< s_0 + \varepsilon \\ &= s_0 + (t - s_0) \\ &= t. \end{aligned}$$

De manera que $x \in K_d(t,B)$ y $x \notin A$. ■

Lema 3.5.2. *Sean X un continuo localmente conexo con métrica convexa d, a_0, $b_0 \in X$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en X tales que $a_0 = \lim a_n$ y $b_0 = \lim b_n$ y que además satisfacen que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \neq b_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $a_n b_n$ un arco de a_n a b_n isométrico a $[0, d(a_n,b_n)]$. Si la sucesión de arcos $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B, donde $B \in C(X)$, entonces B es un arco de a_0 a b_0 isométrico a $[0, d(a_0,b_0)]$.*

Demostración. Dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a_n, $b_n \in a_n b_n$ y además $B = \lim a_n b_n$ y $a_0 = \lim a_n$, $b_0 = \lim b_n$, por el Lema 1.2.3, a_0, $b_0 \in B$.

Sean z_0, $y_0 \in B$ tales que $d(a_0,z_0) = d(a_0,y_0)$.

Afirmación 1. $z_0 = y_0$.

Por el Lema 1.2.3, existen dos sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $z_0 = \lim z_n$, $y_0 = \lim y_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, z_n, $y_n \in a_n b_n$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n$ es isométrico a $[0, d(a_n, b_n)]$ y z_n, $y_n \in a_n b_n$, se cumple que $d(a_n, z_n) \leq d(a_n, y_n)$ o $d(a_n, y_n) \leq d(a_n, z_n)$. Supongamos, sin perder generalidad, que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(a_n, z_n) \leq d(a_n, y_n)$. Dado que $a_n b_n$ es isométrico a $[0, d(a_n, b_n)]$, $d(z_n, y_n) = d(a_n, y_n) - d(a_n, z_n)$. Como d es una función continua,

$$
\begin{aligned}
d(z_0, y_0) &= \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(d(a_n, y_n) - d(a_n, z_n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} d(a_n, y_n) - \lim_{n\to\infty} d(a_n, z_n) \\
&= d(a_0, y_0) - d(a_0, z_0) \\
&= 0;
\end{aligned}
$$

pues, $(a_0, y_0) = \lim (a_n, y_n)$, $(a_0, z_0) = \lim (a_n, z_n)$ y $d(a_0, y_0) = d(a_0, z_0)$. Dado que d es una métrica y $d(z_0, y_0) = 0$, $z_0 = y_0$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Sea $z \in B$. Como $B = \lim a_n b_n$, por el Lema 1.2.3, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $z = \lim z_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in a_n b_n$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n$ es isométrico a $[0, d(a_n, b_n)]$ y $z_n \in a_n b_n$, $d(a_n, z_n) \leq d(a_n, b_n)$. Por la continuidad de d, $d(a_0, z) = \lim d(a_n, z_n) \leq \lim d(a_n, b_n) = d(a_0, b_0)$. Esto prueba que, para cualquier $z \in B$, $d(a_0, z) \leq d(a_0, b_0)$.

Definimos $h : B \to [0, d(a_0, b_0)]$ por $h(b) = d(a_0, b)$. Claramente h es una función continua y además por la Afirmación 1, h es inyectiva. Así que h es un encaje. Como $h(B)$ es un subcontinuo de $[0, d(a_0, b_0)]$ tal que 0, $d(a_0, b_0) \in h(B)$, pues a_0, $b_0 \in B$, tenemos que $h(B) = [0, d(a_0, b_0)]$. Por tanto B es una arco de a_0 a b_0, isométrico a $[0, d(a_0, b_0)]$. Esto termina la demostración del lema. ■

Sea Z un espacio topológico y $z \in Z$. Decimos que Z *es conexo en pequeño en* z, si para cualquier abierto V de Z tal que $z \in V$, existe un subconjunto conexo A de V tal que $z \in int(A)$. Un espacio topológico *es conexo en pequeño* si es conexo en pequeño en cada uno de sus elementos. Por el Teorema

27.6 de [28, p. 201], la propiedad de ser localmente conexo es equivalente a conexidad en pequeño.

Lema 3.5.3. *Sean X un continuo localmente conexo con métrica covexa d, A un subcontinuo de X, $t_0 \in (0, \infty)$ y B un subcontinuo de A tales que $K_d(t_0, B) = A$ y, para todo $s \in [0, t_0)$, A es localmente conexo en cada punto de $K_d(s, B)$. Entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Mostraremos que A es conexo en pequeño en cada uno de sus elementos. Sea $a_0 \in A$. En el caso en que $a_0 \in B = K(0, B)$, por hipótesis, A es localmente conexo en a_0 y por tanto A es conexo en pequeño en a_0.

Supongamos que $a_0 \notin B$. Sean V un abierto de A y $\varepsilon > 0$ tales que $a_0 \in V$, $B_\varepsilon(a_0) \cap A \subset V$ y $B_\varepsilon(a_0) \cap B = \emptyset$. Sea C_0 la componente de $B_\varepsilon(a_0) \cap A$ que contiene a a_0. Supongamos que $a_0 \notin int_A(C_0)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in B_{\frac{\varepsilon}{n}}(a_0) \cap (A - C_0)$. Notemos que $a_0 = \lim a_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin B$ y $a_n \in A = K_d(t_0, B)$, por tanto, existe $b_n \in B$ tal que $d(a_n, b_n) \leq t_0$ y, por el Teorema 2.3.2 de [26, p. 169], existe un arco $a_n b_n$ en X isométrico a $[0, d(a_n, b_n)]$. Dado que B es compacto, podemos suponer que existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 = \lim b_n$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n$ es isométrico a $[0, d(a_n, b_n)]$ y $d(a_n, b_n) \leq t_0$, $a_n b_n \subset K_d(t_0, B) = A$. Dado que $C(A)$ es compacto y $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(A)$, podemos suponer que existe $B_0 \in C(A)$ tal que $B_0 = \lim a_n b_n$. Por el Lema 3.5.2, B_0 es un arco de a_0 a b_0 isométrico a $[0, d(a_0, b_0)]$. Dado que $d(a_0, b_0) = \lim d(a_n, b_n)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(a_n, b_n) \leq t_0$, se cumple que $d(b_0, a_0) \leq t_0$. Si $d(b_0, a_0) < t_0$, entonces $a_0 \in K_d(d(b_0, a_0), B)$. Por hipótesis, A es localmente conexo en a_0, por tanto A es conexo en pequeño en a_0.

Analicemos el caso en que $d(b_0, a_0) = t_0$.

Dado que C_0 es la componente $B_\varepsilon(a_0) \cap A$ que contiene a a_0, $a_0 \in B_0 \subset A$ y B_0 es isométrico al arco $[0, d(a_0, b_0)] = [0, t_0]$, tenemos que $C_0 \cap B_0 = B_0$, si $t_0 < \varepsilon$; o $C_0 \cap B_0$ es un subarco de B_0 isométrico al arco $[0, \varepsilon)$, si $\varepsilon \leq t_0$. Sean $N_0 \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3\}$ y $x_0 \in C_0 \cap B_0$ tales que $\frac{\varepsilon}{N_0} < t_0$ y $d(a_0, x_0) = \frac{\varepsilon}{N_0}$. Como $x_0 \in B_0$ y $B_0 = \lim a_n b_n$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $x_0 = \lim x_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in a_n b_n$. Dado que $x_0 = \lim x_n$, $a_0 = \lim a_n$ y $d(x_0, a_0) = \lim d(x_n, a_n)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $d(x_n, x_0) <$

$\frac{\varepsilon}{N_0}$, $d(a_n, a_0) < \frac{\varepsilon}{N_0}$ y $|d(x_0, a_0) - d(x_n, a_n)| < \frac{\varepsilon}{N_0}$. Sea $n_0 \geq N$. Por el Teorema 2.3.2 de [26, p. 169], existe un arco $x_{n_0}x_0$ isométrico a $[0, d(x_{n_0}, x_0)]$. Consideremos el subarco $x_{n_0}a_{n_0}$ de $b_{n_0}a_{n_0}$ isométrico a $[0, d(x_{n_0}, a_{n_0})]$.

Afirmación 1. $x_{n_0}x_0 \cup x_{n_0}a_{n_0} \subset B_\varepsilon(a_0) \cap A$.

Como $x_{n_0}a_{n_0} \subset b_{n_0}a_{n_0} \subset A$, tenemos que $x_{n_0}a_{n_0} \subset A$.

Probaremos que $x_{n_0}x_0 \subset A$. Sea $x \in x_{n_0}x_0$. Como $x_{n_0}x_0$ es isométrico a $[0, d(x_{n_0}, x_0)]$, tenemos que $d(x_0, x) \leq d(x_0, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{N_0}$, pues $n_0 \geq N$. Dado que $d(b_0, x_0) = d(b_0, a_0) - d(a_0, x_0) = t_0 - d(a_0, x_0)$, pues $d(a_0, b_0) = t_0$. Como $d(a_0, x_0) = \frac{\varepsilon}{N_0}$, tenemos que $d(b_0, x_0) = t_0 - \frac{\varepsilon}{N_0}$. Así que,

$$\begin{aligned} d(b_0, x) &\leq d(b_0, x_0) + d(x_0, x) \\ &< t_0 - \tfrac{\varepsilon}{N_0} + \tfrac{\varepsilon}{N_0} \\ &= t_0. \end{aligned}$$

Esto muestra que $x \in K(t_0, B) = A$. Por tanto $x_0x_{n_0} \subset A$.

Para terminar la prueba de la afirmación probaremos que $x_{n_0}x_0 \subset B_\varepsilon(a_0)$ y $x_{n_0}a_{n_0} \subset B_\varepsilon(a_0)$. Sea $x \in x_{n_0}x_0$. Como $x_{n_0}x_0$ es isométrico a $[0, d(x_{n_0}, x_0)]$ y $d(x_{n_0}, x_0) < \frac{\varepsilon}{N_0}$, se cumple que $d(x_0, x) \leq d(x_{n_0}, x_0) < \frac{\varepsilon}{N_0}$. Recordemos que $d(a_0, x_0) = \frac{\varepsilon}{N_0}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(a_0, x) &\leq d(a_0, x_0) + d(x_0, x) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{N_0} + \tfrac{\varepsilon}{N_0} \\ &< \varepsilon; \end{aligned}$$

pues $N_0 \geq 4$. Así que $x \in B_\varepsilon(a_0)$. Esto muestra que $x_{n_0}x_0 \subset B_\varepsilon(a_0)$.

Sea $y \in x_{n_0}a_{n_0}$. Dado que $n_0 \geq N$, $|d(a_{n_0}, x_{k_0}) - d(a_0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{N_0}$, además, $d(a_0, x_0) = \frac{\varepsilon}{N_0}$. Por tanto $0 < d(a_{n_0}, x_{n_0}) < \frac{2\varepsilon}{N_0}$. Como $y \in x_{n_0}a_{n_0}$, y $x_{n_0}a_{n_0}$ es isométrico a $[0, d(x_{n_0}, a_{n_0})]$, se cumple que $d(y, a_{n_0}) < \frac{2\varepsilon}{N_0}$. Dado que $d(a_{n_0}, a_0) < \frac{\varepsilon}{N_0}$, pues $n_0 \geq N$

$$\begin{aligned} d(a_0, y) &\leq d(a_0, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, y) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{N_0} + \tfrac{2\varepsilon}{N_0} \\ &< \varepsilon; \end{aligned}$$

pues $N_0 \geq 4$. De manera que $y \in B_\varepsilon(a_0)$. Esto prueba que $x_{n_0}a_{n_0} \subset B_\varepsilon(a_0)$.

Por tanto $x_{n_0}x_0 \cup x_{n_0}a_{n_0} \subset B_\varepsilon(a_0) \cap A$. Esto termina la demostración de la Afirmación 3.

Como $x_0 \in C_0$, $x_{n_0}x_0 \cup x_{n_0}a_{n_0}$ es un subconjunto conexo en $B_\varepsilon(a_0) \cap A$ que contiene a a_{n_0} y x_0 y C_0 es una componente conexa de $B_\varepsilon(a_0) \cap A$, tenemos que $x_{n_0}x_0 \cup x_{n_0}a_{n_0} \subset C_0$. Por tanto $a_{n_0} \in C_0$, lo cual es contradicción, pues $a_{n_0} \in A - C_0$. De manera que, para cada $a \in A$, A es conexo en pequeño en a. Por el Teorema 27.6 de [28, p. 201], A es localmente conexo. ■

3.5.3. Teorema

Teorema 3.5.4. *Sean X un continuo localmente conexo y A un subcontinuo de X no localmente conexo. Entonces A no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Probaremos que $C(X) - \{A\}$ tiene la propiedad b). Sea $f : C(X) - \{A\} \to S^1$ una función continua. Fijamos $t_0 \in \exp^{-1}(f(X))$.

Dado que X es un continuo localmente conexo, X admite una métrica convexa ρ (ver [2], [24]). Por el Teorema 2.3.3, K_ρ es continua. Por el Lema 2.3.4, para cualesquiera $B \in C(X)$ y $t \in [0, \infty)$, $K_\rho(t, B) \in C(X)$.

Para cada $B \in C(X) - \{A, X\}$, por el inciso a) del Lema 3.2.3, $\alpha_B = \{K_\rho(t, B) : t \in [0, \infty)\}$ es un arco ordenado de B a X en $C(X)$.

Supongamos que existen $B_0 \in C(X) - \{A\}$ y $t_0 \in [0, \infty)$ tales que $K_\rho(t_0, B_0) = A$. Claramente $t_0 > 0$ y $B_0 \subset A$. Además, A no es localmente conexo y si existe $s_0 \in [0, t_0)$ tal que, $K_\rho(s_0, B_0) \cap F(A) \neq \emptyset$, por el Lema 3.5.1, para toda $t \in (s_0, \infty)$ $K_\rho(t, B_0) \neq A$, lo cual es una contradicción, pues $t_0 \in (s_0, \infty)$ y $K_\rho(t_0, B_0) = A$, así que A es localmente conexo en cada punto de $K_\rho(s, B_0)$, para toda $s \in [0, t_0)$. Por el Lema 3.5.3, A es localmente conexo, lo cual es una contradicción. Así que, para cada $B \in C(X) - \{A\}$, $A \notin \alpha_B$. De manera que, para cada $B \in C(X) - \{A\}$, $\alpha_B \subset C(X) - \{A\}$. Dado que α_B es un arco, por el Corolario 1.4.6, α_B tiene la propiedad b). Así, por el Lema 1.4.2, existe una función continua, $h_B : \alpha_B \to \mathbb{R}$, tal que $f|_{\alpha_B} = \exp \circ h_B$ y $h_B(X) = t_0$.

Definimos $h : C(X) - \{A\} \to \mathbb{R}$ por

$$h(B) = \begin{cases} h_B(B), & \text{si } B \neq X, \\ t_0, & \text{si } B = X. \end{cases}$$

Afirmación 1. h es continua.

Primero veamos que h es continua en X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que $[t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y $2\eta < 1$. Notemos que $\exp|_{[t_0-\eta,t_0+\eta]}$ es un homeomorfismo entre $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ y $\exp([t_0 - \eta, t_0 + \eta])$ y existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(X)) \subset \exp((t_0 - \eta, t_0 + \eta)).$$

Entonces

$$h' = \left(\left(\exp|_{[t_0-\eta,t_0+\eta]}\right)^{-1} \circ f|_{B_\delta(X)}\right),$$

es un levantamiento de $f|_{B_\delta(X)}$. Sea $B \in B_\delta(X)$. Dado que, para cada $C \in \alpha_B$, $B \subset C$ y $H(B, X) < \delta$, tenemos que $H(C, X) < \delta$. Así, $\alpha_B \subset B_\delta(X)$. De manera que $h'|_{\alpha_B}$ es un levantamiento de $f|_{\alpha_B}$. Dado que $h'|_{\alpha_B}(X) = t_0 = h_B(X)$, por el Teorema 1.4.1, $h'|_{\alpha_B} = h_B$. Por tanto

$$h_B(B) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

Esto prueba que h es continua en X.

Sean $B_{n_0} \in C(X) - \{A, X\}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X) - \{A, X\}$ tales que $B_0 = \lim B_n$. Dado que $C(X) - \{A\}$ y $\mathbb{R}$ son métricos, para probar la continuidad de h en B_{n_0}, por la Proposición 1.1.2, basta mostrar que existe una subsucesión $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $h(B_{n_0}) = \lim h(B_{n_k})$. Dado que $\{\alpha_{B_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $C(C(X))$ y $C(C(X))$ es compacto, existen una subsucesión $\left\{\alpha_{B_{n_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{\alpha_{B_n}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\mathcal{B} \in C(C(X))$ tales que $\mathcal{B} = \lim \alpha_{B_{n_k}}$.

Afirmación 2. $\mathcal{B} = \alpha_{B_{n_0}}$.

Haremos la prueba por contenciones. Sea $C \in \mathcal{B}$. Dado que $\mathcal{B} = \lim \alpha_{B_{n_k}}$, por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $C = \lim C_k$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_k \in \alpha_{B_{n_k}}$. Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $t_k \in [0, \infty)$, tal que $C_k = K_\rho(t_k, B_{n_k})$. Como $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0, diam(X)]$, donde $diam\,(X) = \sup\{d\,(x,y) : x, y \in X\}$, existen t_0 y una subsucesión $\{t_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ de $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $t_0 = \lim t_{k_l}$. Dado que $t_0 = \lim t_{k_l}$ y $B_0 = \lim B_{n_{k_l}}$, $(t_0, B_0) = \lim \left(t_{k_l}, B_{n_{k_l}}\right)$. Como la función K_ρ es continua (ver 2.3.3), $K_\rho\,(t_0, B_0) = \lim K_\rho \left(t_{k_l}, B_{n_{k_l}}\right) = \lim C_{k_l}$, pero $C = \lim C_{k_l}$ y $C\,(X)$ es un espacio de Hausdorff, por tanto $C = K_d\,(t_0, B_0)$. Esto demuestra que $C \in \alpha_{B_{n_0}}$ y por tanto concluimos que $\mathcal{B} \subset \alpha_{B_{n_0}}$.

Sea $C \in \alpha_{B_{n_0}}$, entonces existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $C = K_\rho\,(t_0, B_0)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $C_k = K_d\,(t_0, B_{n_k})$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $C_k \in \alpha_{B_{n_k}}$ y además, como K_ρ es una función continua (ver Teorema 2.3.3) y $(t_0, B_0) = \lim\,(t_0, B_{n_k})$, pues $B_0 = \lim B_{n_k}$, tenemos que $C = \lim C_k = \lim K_\rho\,(t_0, B_{n_k})$. Por la Proposición 1.2.3 $C \in \mathcal{B}$. Esto prueba que $\alpha_{B_{n_0}} \subset \mathcal{B}$. Por tanto $\mathcal{B} = \alpha_{B_{n_0}}$. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Así que $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $h\,(B_{n_0}) = \lim h\,(B_{n_k})$, $\{\alpha_{B_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión $\alpha_{B_{n_0}} = \lim \alpha_{B_{n_k}}$, donde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_{B_{n_k}}$ es un arco ordenado de B_{n_k} a X, $f|_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \alpha_{n_k}} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \alpha_{n_k} \to S^1$ es una función continua y, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h_{B_{n_k}}$ es un levantamiento de $f|_{\alpha_{n_k}}$ tal que $h_{B_{n_k}}\,(X) = t_0$. Por tanto por el Lema 1.4.15, $h_{B_{n_0}}\,(B_{n_0}) = \lim h_{B_{n_k}}\,(B_{n_k})$. Dado que, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h\,(B) = h_{B_{n_k}}\,(B_{n_k})$, $h\,(B_{n_0}) = \lim h\,(B_{n_k})$. Esto prueba la continuidad de h en B_{n_0} y con ello terminamos la prueba de la Afirmación 1.

Claramente $\exp \circ h = f$. Esto demuestra que $C\,(X) - \{A\}$ tiene la propiedad b) y por el Teorema 1.4.11 $C\,(X) - \{A\}$ es unicoherente y por tanto A no agujera a $C\,(X)$. ■

3.6. Clasificación

Teorema 3.6.1. *Sean X un continuo localmente conexo y A un subcontinuo de X. Entonces A agujera a $C\,(X)$ si y sólo si A es una curva cerrada simple libre en X o A es un arco libre con extremos p, q tales que $p, q \notin int\,(pq)$.*

Demostración. (Necesidad). Sea

$\mathcal{A} = \{B \in C(X) : B$ es un arco libre con extremos p y q y $p, q \notin int(B)\}$.

Supongamos que $A \notin \mathcal{A}$ y que A no es una curva cerrada simple libre. Entonces A tiene las siguientes posiblidades: $A = X$, $A = \{x\}$, para algún $x \in X$, A no es localmente conexo, A es localmente conexo y no es una curva cerrada simple ni un arco libre, A es una curva cerrada simple no libre o A es un arco libre con extremos p_0 y q_0, pero $p_0 \in int(A)$ o $q_0 \in int(A)$.

Si $A = X$, por el Teorema 2.3.6, A no agujera a $C(X)$.

Si $A = \{x\}$, para algún $x \in X$, por el Teorema 2.2.3, A no agujera a $C(X)$.

En el caso en que A no es localmente conexo, por el Teorema 3.5.4, A no agujera a $C(X)$.

En el caso en que A es localmente conexo y A no es una curva cerrada simple ni un arco libre, por el Teorema 3.2.5, A no agujera a $C(X)$.

Si A es una curva cerrada simple en X, dado que estamos suponiendo que A no es una curva cerrada simple libre, por el Teorema 3.4.3, A no agujera a $C(X)$.

Finalmente, si A es un arco libre con extremos p_0 y q_0, como $A \notin \mathcal{A}$, tenemos que $p_0 \in int(A)$ o $q_0 \in int(A)$. En el caso en que p_0, $q_0 \in int(A)$, entonces A es cerrado y abierto en X. Como X es conexo y $A \neq \emptyset$, $A = X$, por el Teorema 2.3.6, A no agujera a $C(X)$. En el caso en que $p_0 \in int(A)$ y $q_0 \notin int(A)$ o $q_0 \in int(A)$ y $p_0 \notin int(A)$, por el Teorema 2.4.5 A no agujera a $C(X)$. Esto termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia). Si A es un arco libre con extremos p y q tales que $p, q \notin int(A)$, por el Teorema 2.4.2, A agujera a $C(X)$. En el caso en que A es una curva cerrada simple libre en X, por el Teorema 2.5.1, A agujera a $C(X)$. ■

Capítulo 4

Abanicos suaves

4.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es establecer una clasificación de los subcontinuos de un abanico suave que agujeran a su hiperespacio de subcontinuos. Para ello iniciaremos presentando algunas definiciones y estableceremos la notación que utilizaremos a lo largo del capítulo, posteriormente, en la sección de resultados auxiliares, presentaremos y probaremos los lemas que nos serán de gran ayuda para la demostración de los teoremas principales de este capítulo, los cuales serán presentados en la tercera sección, y en la cuarta y última probaremos el teorema que establece la clasificación de los subcontinuos de un abanico suave que agujera a su hiperespacio de subcontinuos.

Un continuo X es *hereditariamente unicoherente*, si para todo $A \in C(X)$, A es unicoherente o, equivalentemente, para cualesquiera A, $B \in C(X)$ se cumple que $A \cap B$ es conexo. Un *dendroide* es un continuo arco conexo hereditariamente unicoherente. Un *abanico* es un dendroide que tiene sólo un punto de ramificación, a dicho punto de ramificación le llamaremos *vértice*. Una clase especial de los abanicos son los abanicos suaves los cuales se definen de la siguiente manera: un abanico X con vértice v_X se le llama *abanico suave* si, para cada sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto $x_0 \in X$, se tiene que la sucesión de arcos $\{v_X x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ converge al arco $v_X x_0$. C. Eberhart en [7] probó que todo abanico suave es homeomorfo a un subcontinuo del abanico de Cantor (el cono sobre el conjunto de Cantor).

En todo este capítulo Δ representará un conjunto infinito de índices y X denotará un abanico suave con vértice v_X y con conjunto de puntos finales $E(X) = \{e_i : i \in \Delta\}$. Dado que X se puede encajar en el abanico de Cantor (ver [7]), podemos considerar que X se encaja de tal forma que $v_X = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ y, para cada $e_i \in E(X)$, el arco $v_X e_i$ en X es un segmento convexo en $\mathbb{R}^2$. Dado que X se puede encajar en $\mathbb{R}^2$, si $x \in X$ y $t \in [0,1]$, entonces tiene sentido la expresión tx. La letra d representará la métrica de X, heredada de la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Si a, $b \in v_X e_i$, donde $e_i \in E(X)$, $ab = [a,b]$ denotará el arco de X que tiene por extremos a a y b y satisface que $d(v_X, a) < d(v_X, b)$, $C(\{v_X\}, X)$ representará al conjunto $\{A \in C(X) : v_X \in A\}$, el conjunto $\{v_X x : x \in X\}$ será denotado por $N[C(X)]$ y $T[C(X)]$ denotará el conjunto $\bigcup_{i\in\Delta} C(v_X e_i)$. El cubo de Hilbert lo denotaremos por la letra Q.

4.2. Resultados auxiliares

Proposición 4.2.1. *X es homeomorfo a $N[C(X)]$ y $T[C(X)]$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.*

Demostración. Probaremos que $\Gamma : X \to N[C(X)]$ definida por $\Gamma(x) = v_X x$ es un homeomorfismo. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de X tal que $x_0 = \lim x_n$, para algún $x_0 \in X$. Dado que X es un abanico suave, $v_X x_0 = \lim v_X x_n$. Por tanto Γ es continua. Claramente Γ es biyectiva. Como X es compacto y $N[C(X)]$ es un espacio de Hausdorff (pues es un subconjunto de $C(X)$, el cual es métrico), concluimos que Γ es un homeomorfismo. Esto demuestra que X es homeomorfo a $N[C(X)]$.

Sea $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión de $T[C(X)]$ tal que $A_0 = \lim p_n q_n$, para algún $A_0 \in C(X)$. Mostraremos que $A_0 \in T[C(X)]$. Dado que $\{p_n q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T[C(X)] = \bigcup_{i\in\Delta} C(v_X e_i)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $i_n \in \Delta$ tal que $p_n q_n \subset v_X e_{i_n}$. Como X es compacto, existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $\left\{e_{i_{n_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{e_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $x_0 = \lim e_{i_{n_k}}$, además, dado que $X = \bigcup_{e_i\in E(X)} v_X e_i$, existe $e_{i_0} \in E(X)$ tal que $x_0 \in v_X e_{i_0}$. Dado que X es un abanico suave, $v_X x_0 = \lim v_X e_{i_{n_k}}$. Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} q_{n_k} \subset v_X e_{i_{n_k}}$, por el Lema

1.2.4, $A_0 \subset v_X x_0 \subset v_X e_{i_0}$, por tanto $A_0 \in C(v_X e_{i_0}) \subset T[C(X)]$. Esto prueba que $T[C(X)]$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$. ■

El siguiente Teorema fue probado por C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr.

Teorema 4.2.2. *([8, Teorema 3.1, p. 282]) Sea X un abanico suave con vértice v_X. Entonces,*

1. $C(X) = C(\{v_X\}, X) \cup T[C(X)]$.

2. $C(\{v_X\}, X) \cap T[C(X)] = N[C(X)]$.

3. *Si $E(X)$ tiene un número infinito de elementos (respectivamente, exactamente n, $2 < n < \infty$), entonces $C(\{v_X\}, X)$ es homeomorfo a Q (respectivamente, $C(\{v_X\}, X)$ es homeomorfo a una n-celda).*

4. *$T[C(X)]$ es homeomorfo a $(X \times [0,1]) / (\{v_X\} \times [0,1])$, el espacio cociente obtenido de $X \times [0,1]$ al identificar al conjunto $\{v_X\} \times [0,1]$ a un punto.*

Lema 4.2.3. *Sean X un abanico suave con vértice v_X y $E(X)$ el conjunto de puntos finales de X. Si ab es un arco contenido en $v_X e_{i_0}$, donde $e_{i_0} \in E(X)$ y c es un elemento de $ab - \{a, b\}$ tal que $c \notin int(ab)$, entonces $c \notin int(v_X e_{i_0})$. Además, si $int(ab) = \emptyset$, $b \notin int(v_X e_{i_0})$.*

Demostración. Recordemos que la letra d representa la métrica de X, heredada de la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

Supongamos que $c \in int(v_X e_{i_0})$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $c \in B_\varepsilon(c) \subset v_X e_{i_0}$. Sea $\varepsilon' = \text{mín}\{\varepsilon, d(c,b), d(c,a)\}$. Entonces $B_{\varepsilon'}(c) \subset v_X e_{i_0}$. Sea $z \in B_{\varepsilon'}(c) \subset v_X e_{i_0}$. Como $z \in v_X e_{i_0} = v_X a \cup ab \cup b e_{i_0}$, $z \in v_X a$, $z \in ab$ o $z \in b e_{i_0}$. En el caso en que $z \in v_X a$, dado que $v_X e_{i_0}$ es un segmento convexo de $\mathbb{R}^2$ y d es la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, restringida a X, $d(z,c) = d(z,a) + d(a,c)$. Dado que $d(z,c) < \varepsilon' \leq d(a,c)$, $d(z,c) = d(z,a) + d(a,c) < d(a,c)$. Entonces $d(z,a) < 0$, lo cual es una contradicción, por tanto $z \notin v_X a$. Análogamente se demuestra que $z \notin b e_{i_0}$. De manera que $z \in ab$. Esto demuestra que $B_{\varepsilon'}(c) \subset ab$. Así que $c \in int\,(ab)$, lo cual es una contradicción pues $c \notin int\,(ab)$. Por tanto $c \notin int\,(v_X e_{i_0})$.

Ahora supongamos que $int\,(ab) = \emptyset$. Mostraremos que $b \notin int\,(v_X e_{i_0})$. Supongamos que $b \in int\,(v_X e_{i_0})$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $b \in B_\varepsilon(b) \subset v_X e_{i_0}$. Dado que $v_X e_{i_0}$ es un segmento convexo de $\mathbb{R}^2$ y $ab \subset v_X e_{i_0}$, $ab \cap B_\varepsilon(b) - \{b, a\} \neq \emptyset$. Sean $z \in ab \cap B_\varepsilon(b) - \{b, a\}$ y $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z) \subset B_\varepsilon(b)$. Entonces $z \in int\,(v_X e_{i_0})$ y $z \in ab - \{a, b\}$. Por la primera parte $z \in int\,(ab)$ lo cual es absurdo. Por tanto $b \notin int\,(v_X e_{i_0})$. ■

Lema 4.2.4. *Sean X un continuo y pq un arco X con extremos p y q. Entonces pq es un arco libre en X si y sólo si, para cada $c \in pq - \{p, q\}$, $c \in int\,(pq)$.*

Demostración. (Necesidad) Supongamos que pq es un arco libre. Entonces $pq - \{p, q\}$ es abierto en X. Sea $c \in pq - \{p, q\}$. Dado que $pq - \{p, q\}$ es abierto en X y $c \in pq - \{p, q\} \subset pq$, concluimos que $c \in int\,(pq)$. Esto termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia) Supongamos que, para cada $c \in pq - \{p, q\}$, $c \in int\,(pq)$. Probaremos que $pq - \{p, q\}$ es abierto en X. Sea $x_0 \in pq - \{p, q\}$. Por hipótesis, $x_0 \in int\,(pq)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset pq$. Sea $\varepsilon' = \text{mín}\,\{d(x_0, p), d(x_0, q), \varepsilon\}$. Claramente $B_{\varepsilon'}(x_0) \subset B_\varepsilon(x_0) \subset pq$ y además p, $q \notin B_{\varepsilon'}(x_0)$. Por tanto $B_{\varepsilon'}(x_0) \subset pq - \{pq\}$. Esto demuestra que $pq - \{pq\}$ es abierto en X y por tanto pq es un arco libre en X. ■

Lema 4.2.5. *Sean X un abanico suave con vértice v_X y $E(X) = \{e_i : i \in \Delta\}$ el conjunto de puntos finales de X. Si ab es un arco contenido en $v_X e_{i_0}$, donde $e_{i_0} \in E(X)$. Entonces,*

1. *Si $int\,(ab) = \emptyset$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de X tal que, $v_X b = \text{lím}\, v_X x_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin v_X e_{i_0}$.*

2. *Si $e_{i_0} \notin ab$ e $int\,(ab) \neq \emptyset$, entonces be_{i_0} es un arco libre en X.*

Demostración de 1. Como $int\,(ab) = \emptyset$, $b \notin int\,(ab)$. Por la segunda parte del Lema 4.2.3, $b \notin int\,(v_X e_{i_0})$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$

en $X - v_X e_{i_0}$, tal que $b = \lim x_n$. Dado que X es un abanico suave, $v_X b = \lim v_X x_n$. Esto termina la prueba del inciso 1.

Demostración de 2. Supongamos que be_{i_0} no es un arco libre en X. Entonces, por el Lema 4.2.4, existe $y_0 \in be_{i_0} - \{b, e_{i_0}\}$ tal que $y_0 \notin int\,(be_{i_0})$. Por el Lema 4.2.3, $y_0 \notin int\,(v_X e_{i_0})$. Por tanto existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $X - \{v_X e_{i_0}\}$ tal que $y_0 = \lim y_n$. Como X es un abanico suave, $v_X y_0 = \lim v_X y_n$. Dado que $y_0 \in be_{i_0} - \{b, e_{i_0}\}$, $ab \subset v_X b \subset v_X y_0$. Dado que $int\,(ab) \neq \emptyset$, podemos elegir un elemento $z \in int\,(ab) \subset ab$. Por el Lema 1.2.3, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $z_0 = \lim z_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in v_X y_n$. Dado que v_X es el vértice del abanico, $v_X \notin int\,(ab)$. Así que $z_0 \neq v_X$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $v_X \notin B_\varepsilon(z_0)$ y $B_\varepsilon(z_0) \subset ab$. Como $z_0 = \lim z_n$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n \geq N$, $z_n \in B_\varepsilon(z_0)$. Sea $n_0 \geq N$. Entonces $z_{n_0} \in B_\varepsilon(z_0) \subset ab \subset v_X e_{i_0}$, pero $z_{n_0} \in v_X y_{n_0}$. Así que $z_{n_0} \in v_X e_{i_0} \cap v_X y_n$. Dado que X es un abanico y $y_n \in X - \{v_X e_{i_0}\}$, $v_X e_{i_0} \cap v_X y_n = \{v_X\}$. Por tanto $z_{n_0} = v_X$, lo cual es una contradicción pues $v_X \notin B_\varepsilon(z_0)$ y $z_{n_0} \in B_\varepsilon(z_0)$. De manera que para cada $y_0 \in be_{i_0} - \{b, e_{i_0}\}$, $y_0 \in int\,(be_{i_0})$. Por el Lema 4.2.4, be_{i_0} es un arco libre en X. Esto termina la prueba del inciso 2 y con ello la demostración del lema. ■

Lema 4.2.6. *Sea $q \in Q$. Entonces $Q - \{q\}$ tiene la propiedad b).*

Demostración. Consideremos que $Q = \prod_{i \in \mathbb{N}} [0,1]_i$. Por el Teorema 11.9.1 de [19, p. 93], existe un homeomorfismo $g : Q \to Q$ tal que $g(q) = (1,1,1,...)$. Así que $Q - \{q\}$ es homeomorfo a $Q - \{(1,1,1,...)\}$. Dado que $Q - \{(1,1,1,...)\}$ es contraible, por el Corolario 1.4.6, $Q - \{(1,1,1,...)\}$ tiene la propiedad b). Por tanto $Q - \{q\}$ tiene la propiedad b). ■

4.3. Resultados principales

Teorema 4.3.1. *Sean X un abanico suave. Si A es subcontinuo de X tal que $v_X \in A$ y, para todo $e_i \in E(X)$, $A \nsubseteq v_X e_i$, entonces A no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Por el inciso 3 del Teorema 4.2.2, Q es homeomorfo a $C(\{v_X\}, X)$. Recordemos que $T[C(X)] = \bigcup_{i\in\Delta} C(v_X e_i)$ y $h : X \times [0,1] \to T(C(X))$ definida por $h(x,t) = [tx, x]$, es una función continua y suprayectiva (ver la prueba del inciso 4 del Teorema 3.1 de [8, p. 282]).

Consideramos la función $H : (C(X) - \{A\}) \times [0,1] \to C(X) - \{A\}$ definida por

$$H(B,t) = \begin{cases} B, & \text{si } B \in C(\{v_X\}, X), \\ [(t-1)t_0 x, x], & \text{si } B = [t_0 x, x] \in T[C(X)]. \end{cases}$$

Sea $(B,t) \in (C(X) - \{A\}) \times [0,1]$. En el caso en que $B \in C(\{v_X\}, X)$, se cumple que $H(B,t) = B \neq A$. Si $B \in T[C(X)]$, tenemos que $H(B,t) \in T[C(X)]$. Por hipótesis, para todo $e_i \in E(X)$, $A \not\subseteq v_X e_i$, por tanto $A \notin T[C(X)]$. Así que, $H(B,t) \neq A$, si $B \in T[C(X)]$. Por tanto H está bien definida. Como H es continua y, para cada $B \in C(X) - \{A\}$, $H(B,0) = B$ y $H(B,1) \in C(\{v_X\}, X)$, tenemos que $C(\{v_X\}, X) - \{A\}$ es un retracto por deformación de $C(X) - \{A\}$. Por el inciso 3 del Teorema 4.2.2 y el Lema 4.2.6, se cumple que $C(\{v_X\}, X) - \{A\}$, tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.5, $C(X) - \{A\}$ tiene la propiedad b) y por el Teorema 1.4.10, $C(X) - \{A\}$ es unicoherente. Por tanto A no agujera a $C(X)$. ■

Sea $A \in C(X)$. Decimos que A es un *arco simple* si A es un arco y satisface que:

1. $A \cap E(X) = \emptyset$; y

2. existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ con las siguientes propiedades:

   a) $A = \lim A_n$,

   b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_X \notin A_n$,

   c) para cada $n \in \mathbb{N}$, $int(A_n) \neq \emptyset$ y

   d) para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \cap A_n \neq \emptyset$.

Teorema 4.3.2. *Sea X un abanico suave. Si $A \in C(X)$ es un arco simple, entonces A agujera a $C(X)$.*

Demostración. Sean a, $b \in X$ tales que a y b son los extremos de A. Dado que A es un arco simple, tiene las siguientes propiedades:

1. $A \cap E(X) = \emptyset$; y

2. existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ con las siguientes propiedades:

    a) $A = \lim A_n$,

    b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_X \notin A_n$,

    c) para cada $n \in \mathbb{N}$, $int(A_n) \neq \emptyset$ y

    d) para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \cap A_n \neq \emptyset$.

Afirmación 1. Existe $i_0 \in \Delta$ tal que $A \subset v_X e_{i_0}$.

Por la Proposición 4.2.1, $T[C(X)]$ es compacto. Ya que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $v_X \notin A_n$, tenemos que cada A_n pertenece a $T[C(X)]$ (Teorema 4.2.2), así que $A \in T[C(X)]$. Por tanto, existe $i_0 \in \Delta$ tal que $A \subset v_X e_{i_0}$.

Sea $e_{i_0} \in E(X)$ tal que $A = ab \subset ve_{i_0}$. Entonces $ab \in C(ve_{i_0})$. Recordemos que $T[C(X)] = \bigcup_{i \in \Delta} C(v_X e_i)$ y $h : X \times [0,1] \to T(C(X))$ definida por $h(x,t) = [tx, x]$, es una función continua y suprayectiva (ver la prueba del inciso 4 del Teorema 3.1 de [8, p. 282]). Así que, existe $(x_0, t_0) \in X \times [0,1]$ tal que $h(x_0, t_0) = ab$, por tanto $ab = [t_0 x_0, x_0]$. Notemos que $b = x_0$ y $t_0 x_0 = a$. Así que ab lo podemos escribir como ax_0.

Afirmación 2. $x_0 e_{i_0}$ es un arco libre en X.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dado que $v_X \notin A_n \in C(X)$ y $C(X) = C(\{v_X\}, X) \cup T[C(X)]$, $A_n \in T[C(X)]$. Como $A \cap A_n \neq \emptyset$ y $A \subset ve_{i_0}$, $A_n \subset ve_{i_0}$. Sean a_n, $b_n \in ve_{i_0}$ tales que $A_n = a_n b_n$.

Dividiremos la demostración de la Afirmación 2 en casos.

Caso 1. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} \in v_X x_0$.

Por hipótesis $int\,(a_{n_0}b_{n_0}) \neq \emptyset$ y además $e_{i_0} \notin a_{n_0}b_{n_0}$, por tanto $b_{n_0}e_{i_0}$ es un arco libre (ver inciso 2 del Lema 4.2.5). Dado que $x_0e_{i_0} \subset b_{n_0}e_{i_0}$, tenemos que $x_0e_{i_0}$ es un arco libre de X.

Caso 2. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in x_0e_{i_0} - \{x_0\}$.

Como $ax_0 = \lim a_nb_n$, $x_0 = \lim b_n$. Por hipótesis ax_0 no contiene puntos finales de X, entonces $e_{i_0} \notin ax_0$ y por tanto $d\,(x_0, e_{i_0}) > 0$. Dado que $x_0 = \lim b_n$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, $d\,(x_0, b_n) < d\,(x_0, e_{i_0})$. Por hipótesis, para cada $n \geq N$, $int\,(A_n) \neq \emptyset$ y por el inciso 2 del Lema 4.2.5, tenemos que $b_ne_{i_0}$ es un arco libre en X. Sea $y \in x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$. Como $x_0 = \lim b_n$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N'$, $d\,(x_0, b_n) < d\,(x_0, y)$. Sea $n_0 \geq \max\{N, N'\}$. Dado que ve_{i_0} es un segmento convexo de $\mathbb{R}^2$, b_{n_0}, $y \in x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$ y $d\,(x_0, b_{n_0}) < d\,(x_0, y)$, $y \in b_{n_0}e_{i_0} - \{b_{n_0}, e_{i_0}\}$. Como $b_{n_0}e_{i_0}$ es un arco libre (ver inciso 2 del Lema 4.2.5), $b_{n_0}e_{i_0} - \{b_{n_0}, e_{i_0}\}$ es abierto en X. Así que $y \in b_{n_0}e_{i_0} - \{b_{n_0}, e_{i_0}\} \subset x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$ y $b_{n_0}e_{i_0} - \{b_{n_0}, e_{i_0}\}$ es abierto en X, por tanto $x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$ es abierto en X. Esto demuestra que $x_0e_{i_0}$ es un arco libre de X. Esto termina la demostración del Caso 2 y con ello terminamos la prueba de la Afirmación 2.

Por la Afirmación 2, $x_0e_{i_0}$ es un arco libre de X. Como $v_Xe_{i_0} = v_Xa \cup ab \cup x_0e_{i_0}$, $x_0 \notin int\,(x_0e_{i_0})$. Supongamos que $e_{i_0} \notin int\,(x_0e_{i_0})$. Entonces existe una sucesión en X $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $e_{i_0} = \lim y_m$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, $y_m \notin x_0e_{i_0}$. Como $v_Xe_{i_0} = v_Xa \cup ab \cup x_0e_{i_0}$, $d\,(x_0e_{i_0}) > 0$ y $e_{i_0} = \lim y_m$, podemos suponer que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $y_m \notin v_Xe_{i_0}$. Dado que X es un abanico suave, $v_Xe_{i_0} = \lim v_Xy_m$. Sea $z_0 \in x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\} \subset v_Xe_{i_0}$. Por el Lema 1.2.3, existe una sucesión $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que, $z_0 = \lim z_m$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, $z_m \in v_Xy_m$. Como $x_0e_{i_0}$ es un arco libre y $z_0 \in x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \geq M$, $z_m \in x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\} \subset v_Xe_{i_0}$. Sea $m_0 \geq M$. Entonces $z_{m_0} \in v_Xe_{i_0} \cap v_Xy_m = \{v_X\}$, esto es un absurdo, pues $v_X \notin x_0e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$. De manera que $e_{i_0} \in int\,(x_0e_{i_0})$. Por tanto $int\,(x_0e_{i_0}) = x_0e_{i_0} - \{x_0\}$.

Definimos

$$\mathcal{A} = (C\,(\{v_X\}\,, X) \cup h\,((X - int\,(x_0e_{i_0})) \times [0,1])) - \{ab\},$$

y

$$\mathcal{B} = h\left(x_0e_{i_0} \times [0,1]\right) - \{ab\}.$$

Notemos que $h\left((X - int\left(x_0e_{i_0}\right)) \times [0,1]\right) - \{ab\}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos a

$$\left[\left((X - int\left(x_0e_{i_0}\right)) \times [0,1]\right)\right] / \left(\{v_X\} \times [0,1]\right) - \{(x_0,t_0)\}$$

y

$$x_0e_{i_0} \times [0,1] - \{(x_0,t_0)\},$$

respectivamente, además, dado que $int\left(x_0e_{i_0}\right) = x_0e_{i_0} - \{x_0\}$,

$$X - int\left(x_0e_{i_0}\right) = \left(X - x_0e_{i_0}\right) \cup \{x_0\},$$

es conexo. Por tanto

$$\left[\left((X - int\left(x_0e_{i_0}\right)) \times [0,1]\right)\right] / \left(\{v_X\} \times [0,1]\right) - \{(x_0,t_0)\},$$

es conexo y cerrado en

$$X \times [0,1] / \left(\{v_X\} \times [0,1]\right) - \{(x_0,y_0)\}.$$

Claramente $x_0e_{i_0} \times [0,1] - \{(x_0,t_0)\}$ es conexo y cerrado en

$$X \times [0,1] / \left(\{v_X\} \times [0,1]\right) - \{(x_0,y_0)\}.$$

De manera que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conexos y cerrados en $C(X) - \{ab\}$ y $C(X) - \{ab\} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Como

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = h\left((\{x_0\} \times [0,1]) - \{(x_0,t_0)\}\right) \cup h\left(x_0e_{i_0} \times \{0\}\right)$$

y considerando

$$\mathcal{F}_1 = \left(h\left((\{x_0\} \times [0,t_0]) - \{(x_0,t_0)\}\right)\right) \cup h\left(x_0e_{i_0} \times \{0\}\right)$$

y

$$\mathcal{F}_2 = h\left((\{x_0\} \times [t_0,1]) - \{(x_0,t_0)\}\right)$$

obtenemos una separación de $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ no es conexo. Por tanto $C(X)-\{ab\}$ no es unicoherente. Así que $A=ab$ agujera a $C(X)$. Esto termina la demostración de teorema. ■

Teorema 4.3.3. *Sean X un abanico suave con vértice v_X, $e_{i_0}\in E(X)$ y $a\in v_Xe_{i_0}-\{e_{i_0}\}$. Entonces ae_{i_0} no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Consideremos la siguiente función continua $F:X\times[0,1]\to X$ dada por $E(X)=tx$ ($x\in\mathbb{R}^2$, $t\in[0,1]$, tx significa multiplicar el vector x por el escalar t). Sea $G:(C(X)-\{ae_{i_0}\})\to C(X)-\{ae_{i_0}\}$ dada por $G(A,t)=\{ta\in X:a\in A\}$.

Afirmación 1. G está bien definida.

Primero mostraremos que, para cada $(A,t)\in(C(X)-\{ae_{i_0}\})\times[0,1]$, $G(A,t)\in C(X)$. Como A es cerrado en X, tenemos que $G(A,t)$ es cerrado en X. Supongamos que existe $(A_0,t_0)\in(C(X)-\{ae_{i_0}\})\times[0,1]$ tal que $G(A_0,t_0)$ no es conexo. Entonces existe dos subconjuntos cerrados ajenos no vacíos E_1, E_2 de X tales que $G(A_0,t_0)=E_1\cup E_2$. Sean

$$E_1'=\{x\in A_0:t_0x\in E_1\},$$

y

$$E_2'=\{x\in A_0:t_0x\in E_2\}.$$

Como $E_1\neq\emptyset\neq E_2$, $E_1'\neq\emptyset\neq E_2'$. Si $x\in E_1'\cap E_2'$, entonces $t_0x\in E_1\cap E_2$, lo cual es un absurdo, por tanto $E_1'\cap E_2'=\emptyset$. Sea $x\in A_0$. Entonces $t_0x\in G(A_0,t_0)=E_1\cup E_2$. Así que $x\in E_1'\cup E_2'$. De manera que $A_0=E_1'\cup E_2'$. Por tanto A_0 es disconexo, lo cual también es un contradicción. Así que, para todo $(A,t)\in(C(X)-\{ae_{i_0}\})\times[0,1]$, $G(A,t)\in C(X)$.

Supongamos que existe,

$$(A_0,t_0)\in(C(X)-\{ae_{i_0}\})\times[0,1]$$

tal que $G(A_0,t_0)=ae_{i_0}$. Entonces existe $x\in A_0$ tal que $t_0x=e_{i_0}$, pero e_{i_0} es punto final de X, por tanto $t_0=1$. De manera que $A_0=G(A_0,1)=ae_{i_0}$, lo cual es una contradicción. De manera que G está bien definida.

Afirmación 2. G es continua.

Definimos $G' : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ definida por $G'(A,t) = \{ta : a \in A\}$. Probaremos que G' es continua.

Sean $\{(A_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X) \times [0,1]$ y $(A_0, t_0) \in C(X) \times [0,1]$ tales que $(A_0, t_0) = \lim (A_n, t_n)$. Entonces $A_0 = \lim A_n$ y $t_0 = \lim t_n$. Supongamos que existe $B \in C(X) - \{ae_{i_0}\}$ tal que $B = \lim G'(A_n, t_n)$. Mostraremos que $B = G'(A_0, t_0)$. Sea $b \in B$. Por el Lema 1.2.3, existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $b = \lim b_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in G'(A_n, t_n)$. De manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in A_n$ tal que $b_n = t_n a_n$. Dado que X es compacto podemos suponer que existe $a_0 \in X$ tal que $a_0 = \lim a_n$. Por el Lema 1.2.3, $a_0 \in A_0$, además, por la continuidad de F, $t_0 a_0 = \lim t_n a_n$. Como X es un espacio de Hausdorff, $b = t_0 a_0 \in G'(A_0, t_0)$.

Sea $t_0 a_0 \in G'(A_0, t_0)$. Entonces $a_0 \in A_0 = \lim A_n$. Por el Lema 1.2.3, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $a_0 = \lim a_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A_n$. Como F es continua y $(a_0, t_0) = \lim (a_n, t_n)$, $t_0 a_0 = \lim t_n a_n$. Dado que $B = \lim G'(A_n, t_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $t_n a_n \in G'(A_n, t_n)$, $t_0 a_0 = \lim t_n a_n$ y por el Lema 1.2.3, $t_0 a_0 \in B$.

Por tanto $B = G'(A_0, t_0)$. Por el Lema 1.1.3, G' es continua. Como $G = G'|_{\left(C(X) - \{ae_{i_0}\}\right) \times [0,1]}$, G es continua.

Dado que, para cada $A \in C(X) - \{ae_{i_0}\}$, $G(A,1) = A$ y $G(A,0) = v_X = (0,0)$, tenemos que G es una contracción de $C(X) - \{ae_{i_0}\}$. De manera que $C(X) - \{ae_{i_0}\}$ es contraible. Por el Corolario 1.4.6, $C(X) - \{ae_{i_0}\}$ tiene la propiedad b). Así que $C(X) - \{ae_{i_0}\}$ es unicoherente (ver Teorema 1.4.10). Así que ae_{i_0} no agujera a $C(X)$, esto termina la prueba del teorema. ■

Teorema 4.3.4. *Sean X un abanico suave y $e_{i_0} \in E(X)$ y $ab \in C(v_X e_{i_0})$ tal que $e_{i_0} \notin ab$ y be_{i_0} no es un arco libre de X. Entonces ab no agujera a $C(X)$.*

Demostración. Recordemos que $T[C(X)] = \bigcup_{i \in \Delta} C(v_X e_i)$ y $h : X \times [0,1] \to T(C(X))$ definida por $h(x,t) = [tx, x]$, es una función continua y suprayectiva (ver la prueba del inciso 4 del Teorema 3.1 de [8, p. 282], donde $[tx, x]$ representa el arco txx, el cual une a tx con x en X, cambiamos la notación, para los arcos, en esta parte para evitar confusiones. Así que, existe $(x_0, t_0) \in X \times [0,1]$ tal que $h(x_0, t_0) = ab$, por tanto $ab = [t_0 x_0, x_0]$. Notemos que $t_0 x_0 = a$ y $b = x_0$.

Afirmación 1. $X - \{x_0\}$ es conexo.

Como $x_0 e_{i_0}$ no es un arco libre de X, por el Lema 4.2.4, existe $z_0 \in x_0 e_{i_0} - \{x_0, e_{i_0}\}$ tal que $z_0 \notin int\,(x_0 e_{i_0})$. Por el Lema 4.2.3, $z_0 \notin int\,(v_X e_{i_0})$. Entonces, existe una sucesión $\{z_l\}_{l=1}^{\infty}$ en $X - v_X e_{i_0}$, tal que $z_0 = \lim z_l$. Dado que X es un abanico suave, $v_X z_0 = \lim v_X z_l$. Para cada $l \in \mathbb{N}$, sea $e_{i_l} \in E(X)$, tal que $v_X z_l \subset v_X e_{i_l}$. Dado que X es compacto existen $y_0' \in X$ y una subsucesión $\left\{e_{i_{l_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{e_{i_l}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $y_0' = \lim e_{i_{l_k}}$. Como X es un abanico suave, $v_X y_0' = \lim v_X e_{i_{l_k}}$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $v_X z_{l_k} \subset v_X e_{i_{l_k}}$, $v_X z_0 = \lim v_X z_{l_k}$ y $v_X y_0' = \lim v_X e_{i_{l_k}}$. Por el Lema 1.2.4, $v_X z_0 \subset v_X y_0'$. Dado que $v_X e_{i_0} = v_X x_0 \cup x_0 e_{i_0}$ es un segmento convexo de $\mathbb{R}^2$ y $z_0 \in x_0 e_{i_0}$, $v_X x_0 \subset v_X z_0$, además $x_0 \neq z_0$, por tanto $v_X x_0 \subsetneq v_X z_0$. Por tanto $v_X x_0 \subsetneq v_X y_0'$.

Sean

$$Y_1 = \left[\left(\bigcup\left\{v_X e_{i_{l_k}} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) \cup v_X y_0'\right] - \{x_0\}$$

y

$$Y_2 = \bigcup\left\{v_X e_{i_{l_k}} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Notemos que Y_2 es conexo, y por tanto

$$Cl\,(Y_2) = \left[\left(\bigcup\left\{v_X e_{i_{l_k}} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) \cup v_X y_0\right]$$

es conexo. Dado que $Y_2 \subset Y_1 \subset Cl\,(Y_2)$, Y_1 es conexo. Ademas $Y_1 \cap y_0 e_{i_0} = \{y_0\}$, por tanto $Y_1 \cup y_0 e_{i_0}$ es conexo. Sea

$$Y_3 = \bigcup\{v_X e_i : i \in \Delta - (\{i_m : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})\}.$$

Claramente Y_3 es conexo y además $Y_3 \cap (Y_1 \cup y_0 e_{i_0}) = \{v_X\}$, por tanto $X - \{x_0\} = Y_1 \cup y_0 e_{i_0} \cup Y_3$ es conexo. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A} = h\left(X \times [t_0, 1] - \{(x_0, t_0)\}\right),$$

y

$$\mathcal{B} = h\left(X \times [0, t_0] - \{(x_0, t_0)\}\right).$$

Entonces

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = h\left(X \times \{t_0\} - \{(x_0, t_0)\}\right).$$

Así que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es homeomorfo a $X - \{x_0\}$.

Definimos $H : \mathcal{A} \times [0,1] \to \mathcal{A}$ por $H\left(h\left(x,t\right), s\right) = h\left(x, t + (1-t)\, s\right)$. Dado que H es continua y, para cada $h\left(x,t\right) \in \mathcal{A}$, $H\left(h\left(x,t\right), 0\right) = h\left(x,t\right)$, $H\left(h\left(x,t\right), 1\right) = h\left(x,1\right)$, se cumple que $h\left(X \times \{1\}\right)$ es un retracto por deformación de $\mathcal{A}$. Como $h\left(X \times \{1\}\right)$ es contraible (pues X es contraible), por el Corolario 1.4.6, $h\left(X \times \{1\}\right)$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.5, $\mathcal{A}$ tiene la propiedad b).

Caso 1. $t_0 = 0$.

En este caso tenemos que $\mathcal{A} = T\left[C\left(X\right)\right] - \{ab\}$ y $ab = [t_0 x_0, x_0] = v_X x_0$, por tanto $v_X x_0 \in N\left(C\left(X\right)\right) \subset C\left(\{v_X\}, X\right)$. Por el inciso 3 del Teorema 4.2.2, $C\left(\{v_X\}, X\right)$ es un cubo de Hilbert y por el Lema 4.2.6, $C\left(\{v_X\}, X\right) - \{ab\}$ tiene la propiedad b). Como

$$\mathcal{A} \cap \left(C\left(\{v_X\}, X\right) - \{ab\}\right) = N\left(C\left(X\right)\right) - \{ab\},$$

$N\left(C\left(X\right)\right) - \{ab\}$ es homeomorfo a $h\left(X \times \{0\} - \{(x_0, 0)\}\right)$ y por tanto a $X - \{x_0\}$, se cumple que $\mathcal{A} \cap N\left(C\left(\{v_X\}, X\right) - \{ab\}\right)$ es conexo (ver Afirmación 2). Por el Lema 1.4.3, $C\left(X\right) - \{ab\} = \mathcal{A} \cup \left(C\left(\{v_X\}, X\right) - \{ab\}\right)$ tiene la propiedad b). Esto termina la prueba del Caso 1.

Caso 2. $t_0 > 0$.

Análogamente de como se demostró que $h\left(X \times \{1\}\right)$ es un retracto por deformación de $\mathcal{A}$ se prueba que $h\left(X \times \{0\}\right)$ es un retracto por deformación de $\mathcal{B}$. Como $h\left(X \times \{0\}\right)$ es contraible, por el Corolario 1.4.6, $h\left(X \times \{0\}\right)$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.5, que $\mathcal{B}$ tiene la propiedad b). Además $h\left(X \times \{0\}\right)$ es homeomorfo a $N\left(C\left(X\right)\right)$. Como

$$N(C(X)) \subset C(\{v_X\}, X),$$

$C(\{v_X\}, X)$ es un retracto por deformación de $C(\{v_X\}, X) \cup \mathcal{B}$. Por el inciso 3 del Teorema 4.2.2, $C(\{v_X\}, X)$ es homeomorfo a un cubo de Hilbert, por tanto, $C(\{v_X\}, X)$ tiene la propiedad b). Así que $C(\{v_X\}, X) \cup \mathcal{B}$ tiene la propiedad b). Como

$$(C(\{v_X\}, X) \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$$

y $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ es homeomorfo a $X - \{x_0\}$, pues $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = h(X \times \{t_0\} - \{(x_0, t_0)\})$, por la Afirmación 1 $(C(\{v_X\}, X) \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ es conexo. Así que, por el Lema 1.4.3, $C(X) - \{ab\} = C(\{v_X\}, X) \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ tiene la propiedad b). Esto termina la prueba del Caso 2.

Por los Casos 1 y 2, podemos concluir que $C(X) - \{ab\}$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10, $C(X) - \{ab\}$ es unicoherente y por tanto ab no agujera a $C(X)$. Esto termina la demostración del teorema. ■

4.4. Clasificación

Teorema 4.4.1. *Sean X un abanico suave con vértice v_X y $A \in C(X)$. Entonces A agujera a $C(X)$ si y sólo si A es un arco simple.*

Demostración. (Necesidad) Sea $A \in C(X)$. Entonces A satisface una de las siguientes afirmaciones: A es un singular, A no está contenido en ningún arco $v_X e_i$, donde $e_i \in E(X)$ o A está contenido en algún arco $v_X e_{i_0}$, donde $e_{i_0} \in E(X)$.

Dado que A agujera a $C(X)$, por los Teoremas 2.2.3 y 4.3.1, A no es un singular y existe $e_{i_0} \in E(X)$ tal que $A \nsubseteq ve_{i_0}$. Por tanto $A \in T[C(X)]$. De manera que A es un arco pq. En este caso tenemos las siguientes posibilidades: a) $q = e_{i_0}$; b) $q \neq e_{i_0}$ y qe_{i_0} no es un arco libre de X; y c) $q \neq e_{i_0}$ y qe_{i_0} es un arco libre en X. Por los Teoremas 4.3.3 y 4.3.4, tenemos que los incisos a) y b) no suceden, por tanto A satisface las condiciones del inciso c). Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $pq - \{p, q\}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $qe_{i_0} - \{q\}$, tales que $p = \lim a_n$ y $q = \lim b_n$. Entonces $pq = \lim a_n b_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$v_X \notin a_nb_n$, $pq \cap a_nb_n \neq \emptyset$, pues $a_n \in pq \cap a_nb_n$ y $int\,(a_nb_n) \neq \emptyset$, ya que qb_n es un subarco del arco libre qe_{i_0} y por tanto qb_n es un arco libre. De manera que A es un arco que no contiene puntos finales de X y existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A = \lim A_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int\,(A_n) \neq \emptyset$, $v_X \notin A_n$ y $A \cap A_n \neq \emptyset$. Por tanto A es un arco simple.

(Suficiencia) Si A es un arco simple tenemos que$A$ no contiene puntos finales de X y existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A = \lim A_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $int\,(A_n) \neq \emptyset$, $v_X \notin A_n$ y $A \cap A_n \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema 4.3.2, A agujera a $C\,(X)$. ■

Capítulo 5

Productos simétricos

5.1. Introducción

Dado un continuo X y un número natural $n \in \mathbb{N}$, el *n-ésimo producto simétrico* $F_n(X)$ es el espacio $\left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\right\}$.

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente resultado: Sea X un árbol. Entonces $A \in F_2(X)$ agujera a $F_2(X)$ si y sólo si $A = \{p\}$, donde p es un punto de ramificación de X o $A = \{p, q\}$, donde $p \neq q$ y p, q no son puntos finales de X.

Un *árbol* es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples. Sea G una gráfica finita. Si $Y \subset G$ y Y es no degenerado, conexo y cerrado en X, diremos que Y es un *subárbol* de X. Notemos que no se está pidiendo que Y sea unión de aristas de G. Decimos que $p \in G$, es un *punto de corte de G*, si $G - \{p\}$ no es conexo y p es *punto final de G* si $G - \{p\}$ es conexo. Dado un punto p en G, definimos su *orden* como el número natural n tal que p tiene una vecindad cerrada homeomorfa a un n-odo, de manera que el vértice del n-odo se corresponda con p, aquí daremos la posibilidad de que el orden sea 1 ó 2, para el caso en que sea 2, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco pero p no queda en la orilla de éste, y para el caso en que el orden sea 1, estaremos entendiendo que p tiene una vecindad que es un arco y que p está en la orilla de él. Notemos que los puntos de orden 1 son los puntos finales de X. A los puntos de orden mayor o igual que 3 se les llama *puntos de ramificación* de G, al conjunto de estos puntos lo denotaremos por $R(G)$. Notemos que sólo puede haber un número finito de puntos finales de G y también hay sólo un número finito de puntos de ramificación de G.

En general no es cierto que, para todo continuo X, $F_2(X)$ sea unicoherente (ver [3]), pero, Ganea probó que, $F_n(X)$ es unicoherente, para toda n, si X es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y unicoherente (ver [11]). En particular, si X es un árbol, $F_2(X)$ es unicoherente.

5.2. Resultados auxiliares

Lema 5.2.1. *Sean X un árbol, p un punto de corte de X, $k \in \mathbb{N}$ y $C_1, ..., C_k$ las componentes conexas de $X - \{p\}$. Entonces, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, $C_i \cup \{p\}$ es un subárbol de X y además p es un punto final de $C_i \cup \{p\}$.*

Demostración. Dado que X es localmente conexo, cada C_i es abierto, así que, para cada $i \in \{1, ..., k\}$ C_i y $\bigcup\limits_{j \in \{1,...,k\}-\{i\}} C_j$ es una separación de $X - \{p\}$, por el Teorema 1.3.1, $C_i \cup \{p\}$ es conexo. Además $C_i \cup \{p\} = X - \bigcup\limits_{j \in \{1,...,k\}-\{i\}} C_j$ es cerrado.

De manera que $C_i \cup \{p\}$ es un subcontinuo de X. Además $C_i \cup \{p\}$ no es degenerado, pues $C_i \neq \emptyset$. Así que $C_i \cup \{p\}$ es un subárbol de X.

Dado que C_i es conexo, p es un punto final de $C_i \cup \{p\}$. Esto termina la demostración del lema. ■

Lema 5.2.2. *Sean X un árbol y p, q puntos distintos de X, tales que p y q son puntos de corte de X. Entonces existen, $k, s \in \mathbb{N}$, donde $s < k$, y $K_1, ..., K_k$ subárboles de X tales que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} K_i$, p y $q \in$ son puntos finales de K_1, para cada $i \in \{2, ..., s\}$, p es punto final de K_i y $q \notin K_i$ y, para cada $i \in \{s+1, ..., k\}$, q es punto final de K_i y $p \notin K_i$.*

Demostración. Dado que p es punto de corte de X, por el Lema 5.2.1, si $s \in \mathbb{N}$, y $C_1, ..., C_s$ son todas las componentes de $X - \{p\}$, entonces, para cada $i \in \{1, ..., s\}$, $C_i \cup \{p\}$ es un subárbol de X y p es punto final de

$C_i \cup \{p\}$. Dado que $q \neq p$, existe $i \in \{1, ..., s\}$ tal que $q \in C_i$, supongamos, si perder generalidad, que, $q \in C_1$. Para cada $i \in \{2, ..., s\}$, sea $K_i = C_i \cup \{p\}$. Claramente, para cada $i \in \{2, ..., s\}$, $q \notin K_i$.

Como, para cada $i \in \{2, ..., s\}$, $K_i \cap (C_1 \cup \{p\}) = \{p\}$, tenemos que q no es punto final de $C_1 \cup \{p\}$, pues de serlo, q sería punto final de X. De manera que q es punto de corte de $C_1 \cup \{p\}$. Por el Lema 5.2.1, aplicado a q y $C_1 \cup \{p\}$, si $j \in \mathbb{N}$ y $D_1, ..., D_j$ son las componentes de $C_1 \cup \{p\} - \{q\}$, entonces, para cada $i \in \{1, ..., j\}$, $D_i \cup \{q\}$ es un subárbol de $C_1 \cup \{p\}$ y q es punto final de $D_i \cup \{q\}$. Podemos suponer que $p \in D_1$. Sean $K_1 = D_1 \cup \{q\}$ y, para cada $i \in \{2, ..., j\}$, $K_{s+i-1} = D_i \cup \{q\}$. Así que, para cada $i \in \{1, ..., k\}$, K_i es un subárbol de X, p y q son puntos finales de K_1 y, para cada $i \in \{2, ..., s\}$, p es punto final de K_i y $q \notin K_i$ y, para cada $i \in \{s+1, ..., k\}$, q es punto final de K_i y $p \notin K_i$. Claramente $X = (C_1 \cup \{p\}) \cup \left(\bigcup_{i=2}^{s} K_i \right)$ y $C_1 \cup \{p\} = K_1 \cup \left(\bigcup_{i=s+1}^{k} K_i \right)$. Por tanto $X = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. Esto termina la prueba del lema. ■

Lema 5.2.3. *Sean X un árbol, $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $k_0 > 0$ y $h : X \times [0, k_0] \to X$ una función continua. Entonces la función $H : F_2(X) \times [0, k_0] \to F_2(X)$ definida por $H(\{x, y\}, t) = \{h(x, t), h(y, t)\}$ es continua.*

Demostración. Sean $\{(\{x_n, y_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $F_2(X) \times [0, k_0]$ y $(\{x_0, y_0\}, t_0) \in F_2(X) \times [0, k_0]$ tales que $(\{x_0, y_0\}, t_0) = \lim (\{x_n, y_n\}, t_n)$. Entonces $\{x_0, y_0\} = \lim \{x_n, y_n\}$ y $t_0 = \lim t_n$. Sea $B \in F_2(X)$ tal que $B = \lim \{h(x_n, t_n), h(y_n, t_n)\}$. Por la Proposición 1.1.3, basta probar que $B = \{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\}$ para concluir que H es continua.

Por la Proposición 1.2.3, para x_0 y y_0 existen dos sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tales que $x_0 = \lim z_n$, $y_0 = \lim w_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, z_n, $w_n \in \{x_n, y_n\}$. Dado que h es continua, $h(x_0, t_0) = \lim h(z_n, t_n)$ y $h(y_0, t_0) = \lim h(w_n, t_n)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como z_n, $w_n \in \{x_n, y_n\}$, $h(z_n, t_n)$, $h(w_n, t_n) \in \{h(x_n, t_n), h(y_n, t_n)\}$. Por la Proposición 1.2.3, $h(x_0, t_0) = \lim h(z_n, t_n)$, $h(y_0, t_0) = \lim h(w_n, t_n)$ son elementos de $\lim \{h(x_n, t_n), h(y_n, t_n)\} = B$. Por tanto $\{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\} \subset B$.

Sea $b \in B$. Por la Proposición 1.2.3, existe una sucesión $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $b = \lim b_n$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \{h(x_n, t_n), h(y_n, t_n)\}$. De manera que existe una subsucesión $\{b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_{n_k} = h(x_{n_k}, t_{n_k})$ o, para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_{n_k} = h(y_{n_k}, t_{n_k})$. Supongamos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_{n_k} = h(x_{n_k}, t_{n_k})$. Como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de X y X es compacto, podemos suponer que existe $a_0 \in X$ tal que $a_0 = \text{lím}\, x_{n_k}$. Dado que $\{\{x_{n_k}, y_{n_k}\}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{\{x_n, y_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_0, y_0\} = \text{lím}\,\{x_n, y_n\}$, $\{x_0, y_0\} = \text{lím}\,\{x_{n_k}, y_{n_k}\}$. Por la Proposición 1.2.3, $a_0 \in \{x_0, y_0\}$. Entonces $h(a_0, t_0) \in \{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\}$ y además $h(a_0, t_0) = \text{lím}\, h(x_{n_k}, t_{n_k})$, pues h es continua, $a_0 = \text{lím}\, x_{n_k}$ y $t_0 = \text{lím}\, t_{n_k}$. Dado que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $b_{n_k} = h(x_{n_k}, t_{n_k})$ y $b = \text{lím}\, b_n$, $b = \text{lím}\, h(x_{n_k}, t_{n_k})$. Como $F_2(X)$ es un espacio de Hausdorff, $b = h(a_0, t_0)$. De manera que $b \in \{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\}$. Por tanto $B \subset \{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\}$.

Así que $B = \{h(x_0, t_0), h(y_0, t_0)\}$ y por la Proposición 1.1.3, concluimos que H es continua. Esto termina la prueba del lema. ■

Lema 5.2.4. *Sean X un árbol, $p \in X$, K_1, K_2 subárboles de X tales que $K_1 \cap K_2 = \{p\}$, $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que $k_0 > 0$ y $h_1 : K_1 \times [0, k_0] \to K_1$, $h_2 : K_2 \times [0, k_0] \to K_2$ funciones continuas. Entonces la función $H : \mathcal{D} \times [0, k_0] \to \mathcal{D}$, definida por $H(\{x, y\}, t) = \{h_1(x, t), h_2(y, t)\}$ es continua, donde $\mathcal{D} = \{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in K_1 \text{ y } y \in K_2\}$.*

Demostración. Consideremos las siguientes funciones,

$$h : K_1 \times K_2 \to \mathcal{D},$$

definida por $h(x, y) = \{x, y\}$ y

$$g : \mathcal{D} \times [0, k_0] \to K_1 \times K_2,$$

definida como sigue, si $\{x, y\} \in \mathcal{D} - \{\{p\}\}$ con $x \in K_1$ y $y \in K_2$, entonces $g(\{x, y\}, t) = (h_1(x, t), h_2(y, t))$ y $g(\{p\}, t) = (h_1(p, t), h_2(p, t))$. Claramente h es continua y dado que cada función coordenada de g es continua, g es continua. Así que, $H = h \circ g$ es continua. Esto termina la prueba del lema. ■

De aquí en adelante, si X es un árbol y K_1, K_2 son subárboles de X, $\langle K_1, K_2 \rangle$ representará el conjunto $\{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in K_1 \text{ y } y \in K_2\}$. En el caso en que $x \in K_1 \cap K_2$, tenemos que $\{x\} = \{x, x\} \in \langle K_1, K_2 \rangle$. Notemos que en el caso en que $K_1 = K_2$, $\langle K_1, K_2 \rangle = F_2(K_1)$.

Lema 5.2.5. *Sean X un árbol, K_1, K_2 subárboles de X, $p_1 \in K_1$ y $p_2 \in K_2$ tales que, para cada $i \in \{1, 2\}$, p_i es punto final de K_i. Entonces $\langle K_1, K_2 \rangle$, $\langle K_1, K_2 \rangle - \{\{p_1, p_2\}\}$, son conexos.*

Demostración. Dado que K_1 y K_2 son conexos, por el Teorema 1.7 de [6, p. 109], $K_1 \times K_2$ es conexo. Definimos $h : K_1 \times K_2 \to \langle K_1, K_2 \rangle$ por $h(x, y) = \{x, y\}$. Claramente h es continua y suprayectiva. Por tanto $\langle K_1, K_2 \rangle$ es conexo.

Como, para cada $i \in \{1, 2\}$, p_i es punto final de K_i, para cada $i \in \{1, 2\}$, $K_i - \{p_i\}$ es conexo. Así que, por el Teorema 1.7 de [6, p. 109], $(K_1 - \{p_1\}) \times (K_2 - \{p_2\})$ es conexo. Claramente $(K_1 - \{p_1\}) \times (K_2 - \{p_2\}) \subset K_1 \times K_2 - \{(p_1, p_2), (p_2, p_1)\}$. Notemos que $Cl_X(K_i - \{p_i\}) = K_i$, para cada $i \in \{1, 2\}$. De manera que $Cl_{X \times X}((K_1 - \{p_1\}) \times (K_2 - \{p_2\})) = Cl_X(K_1 - \{p_1\}) \times Cl_X(K_2 - \{p_2\}) = K_1 \times K_2$. Por tanto $K_1 \times K_2 - \{(p_1, p_2), (p_2, p_1)\}$ es un subconjunto intermedio entre un conexo y su cerradura. Así que este conjunto es conexo.

Como

$$h(K_1 \times K_2 - \{(p_1, p_2), (p_2, p_1)\}) = \\ \{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in K_1 \text{ y } y \in K_2\} - \{\{p_1, p_2\}\} \text{ y}$$

h es continua y suprayectiva,

$$\{\{x, y\} \in F_2(X) : x \in K_1 \text{ y } y \in K_2\} - \{\{p_1, p_2\}\},$$

es conexo. Esto termina la demostración del lema. ■

Sean Y un continuo y $p \in Y$. Entonces Y es *arco-suave en* p si existe una función continua $\alpha : Y \to C(Y)$ que satisface:

a) $\alpha(p) = \{p\}$.

b) Para cada $y \in Y - \{p\}$, $\alpha(y)$ es un arco de p a x.

c) Si $z \in \alpha(y)$, entonces $\alpha(z) \subset \alpha(y)$.

Sean X un árbol y $p_0 \in X$. Por el Teorema 1-2-E de [10, p. 549], X es arco-suave en p_0. Entonces, por el Teorema 1-4-A de [10, p. 551] X admite una métrica radialmente convexa en p_0, esto significa que, para cualesquiera $x, y \in X$ y $x \in p_0y$, se cumple que $d(p_0, y) = d(p_0, x) + d(x, y)$. Observemos que si $z, x, y \in X$ tales que $x, y \in p_0z$ y $d(p_0, x) = d(p_0, y)$ tenemos que $x = y$, pues $x \in p_0y \subset p_0z$ o $y \in p_0x \subset p_0z$ y como d es una métrica radialmente convexa en p_0, en el primer caso $d(p_0, y) = d(p_0, x) + d(x, y)$ y en el segundo $d(p_0, x) = d(p_0, y) + d(x, y)$, de ambos casos obtenemos que $d(x, y) = 0$. De manera que, para cualesquiera $y \in X - \{p_0\}$ y $t \leq d(p_0, y)$, existe un único $z \in p_0y$ tal que $d(p_0, z) = t$.

Supongamos que $\sup\{d(p_0, x) : x \in X\} = k_0$.

Definimos $h_d : X \times [0, k_0] \to X$ por.

$$h_d(x,t) =$$
$$\begin{cases} x, & \text{si } d(p_0,x) \leq k_0 - t, \\ \text{El único } y \in xp_0 \text{ tal que } d(p_0,y) = k_0 - t, & \text{si } d(p_0,x) \geq k_0 - t. \end{cases}$$

Proposición 5.2.6. *La función h_d tiene las siguientes propiedades:*

1. *h_d es continua.*

2. *Para cada $x \in X$, $h_d(x, 0) = x$.*

3. *Para cada $x \in X$, $h_d(x, k_0) = p_0$.*

4. *Si q es un punto final de X y $q \neq p_0$, para cualquier $(x, t) \in X \times [0, k_0]$, con $x \neq q$, $h_d(x, t) \neq q$.*

Demostración. Para demostrar 1, sean $(x_0, t_0) \in X \times [0, k_0]$ y $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de $X \times [0, k_0]$ tales que $(x_0, t_0) = \lim (x_n, t_n)$.

Caso 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(p_0, x_n) \leq k_0 - t_n$.

Por la continuidad de d y dado que $x_0 = \lim x_n$ y $t_0 = \lim t_n$, tenemos que $d(p_0, x_0) \leq k_0 - t_0$. Así que, $h_d(x_0, t_0) = x_0 = \lim x_n = \lim h_d(x_n, t_n)$.

Caso1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(p_0, x_n) \geq k_0 - t_n$.

Por la continuidad de d y dado que $x_0 = \lim x_n$ y $t_0 = \lim t_n$, tenemos que $d(p_0, x_0) \geq k_0 - t_0$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $y_n \in p_0x_n$ tales que $d(p_0, y_n) =$

$k_0 - t_n$. Dado que X es compacto, supongamos existe $y_0 \in X$ tal que $y_0 = \lim y_n$. Por el Teorema 8 de [20, p. 116], X es suave en p_0, por tanto $p_0x_0 = \lim p_0x_n$. Por la Proposición 1.2.3, $y_0 \in p_0x_0$. Como $k_0 - t_0 = \lim (k_0 - t_n) = \lim d(p_0, y_n) = d(p_0, y_0)$. De manera que $y_0 \in p_0x_0$ y $d(p_0, y_0) = k_0 - t_0$. Por tanto $h_d(x_0, t_0) = y_0 = \lim y_n = \lim h_d(x_n, t_n)$.

Ya que las condiciones: a) $d(p_0, x_n) \leq k_0 - t_n$ y b) $d(p_0, x_n) \geq k_0 - t_n$, abarcan todas las posibilidades, tenemos que, para alguna de las dos condiciones a) o b) hay una infinidad de números n que la satisfacen. Podemos entonces extraer una subsucesión $\{(x_{n_k}, t_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{(x_n, t_n)\}$ que satisface a) o b) y como hemos visto, esto implica que $h_d(x_0, t_0) = \lim h_d(x_{n_k}, t_{n_k})$. Por tanto h_d es continua (ver Lema 1.1.2).

Dado que, para cada $x \in X$, $d(p_0, x) \leq k_0$, entonces, por definición $h_d(x, 0) = x$. Esto prueba 2.

Para la prueba de 3, dado que, para cada $x \in X$, $d(p_0, x) \geq 0$, por definición de h_d, $h_d(x, k_0)$ es el único punto $y \in xp_0$ tal que $d(p_0, y) = 0$. Así que $y = p_0$, pues d es métrica. Esto termina la prueba de 2.

Para la prueba de 4, sea q un punto final de X y supongamos que existe $(x, t) \in X \times [0, k_0]$, con $x \neq q$ tal que $h_d(x, t) = q$. Dado que $x \neq q$, $d(p_0, x) > k_0 - t$ y $q \in xp_0$. Así que q pertenece al arco xp_0 y como $x \neq q$ y, por hipótesis, $p_0 \neq q$, tenemos que q no es punto terminal de X, lo cual es una contradicción. De manera que, para cada $(x, t) \in (X - \{q\}) \times [0, k_0]$, $h_d(x, t) \neq q$. ■

5.3. Resultados principales

Teorema 5.3.1. *Sean X un árbol y p un punto de ramificación de X. Entonces $\{p\}$ agujera a $F_2(X)$.*

Demostración. Sean C_1, C_2,..., C_k las componentes de $X - \{p\}$. Dado que p es un punto de ramificación de X y X es un árbol, $k \geq 3$. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$, denotaremos por K_i al conjunto $C_i \cup \{p\}$. Notemos que, para cada i, $j \in \{1, ..., k\}$, con $i \neq j$, $K_i \cap K_j = \{p\}$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$. Por el Lema 5.2.1, K_i es un subárbol de X.

Sean

$$\mathcal{F}_1 = (F_2(K_1) \cup F_2(K_2) \cup \langle K_1, K_2 \rangle) - \{\{p\}\}$$

y

$$\mathcal{F}_2 = \left(\left\{ \{x, y\} \in F_2(X) : x, y \in \bigcup_{i=3}^{k} K_i \right\} \cup \left\langle \bigcup_{i=3}^{k} K_i, K_1 \cup K_2 \right\rangle \right) - \{\{p\}\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son cerrados en $F_2(X) - \{\{p\}\}$.

Por el Lema 5.2.5, $F_2(K_1) - \{\{p\}\}$, $F_2(K_2) - \{\{p\}\}$ y $\langle K_1, K_2 \rangle - \{\{p\}\}$ son conexos. Sean $x \in K_1 - \{p\}$ y $y \in K_2 - \{p\}$. Entonces

$$\{p, x\} \in (F_2(K_1) \cap \langle K_1, K_2 \rangle) - \{\{p\}\}$$

y

$$\{p, y\} \in (F_2(K_2) \cap \langle K_1, K_2 \rangle) - \{\{p\}\}.$$

Así que $\mathcal{F}_1$ es conexo.

Por el Lema 5.2.5,

$$\left\{ \{x, y\} \in F_2(X) : x, y \in \bigcup_{i=3}^{k} K_i \right\} - \{\{p\}\}$$

y

$$\left\langle \bigcup_{i=3}^{k} K_i, K_1 \cup K_2 \right\rangle - \{\{p\}\},$$

son conexos. Sea $y_0 \in \bigcup_{i=3}^{k} K_i - \{p\}$. Como

$$\{p, y_0\} \in \left(\left\{ \{x, y\} \in F_2(X) : x, y \in \bigcup_{i=3}^{k} K_i \right\} \cap \left\langle \bigcup_{i=3}^{k} K_i, K_1 \cup K_2 \right\rangle \right) - \{\{p\}\},$$

concluimos que

$$\mathcal{F}_2 = \left(\left\{ \{x,y\} \in F_2(X) : x, y \in \bigcup_{i=3}^{k} K_i \right\} \cup \left\langle \bigcup_{i=3}^{k} K_i, K_1 \cup K_2 \right\rangle \right) - \{\{p\}\},$$

es conexo.

Claramente $\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_1 \subset F_2(X) - \{\{p\}\}$. Sea $\{x,y\} \in F_2(X) - \{\{p\}\}$. Entonces x, $y \in X = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. En el caso en que x, $y \in K_1 \cup K_2$, tenemos que $\{x,y\} \in \mathcal{F}_1$. Si $x \notin K_1$ o $y \notin K_2$, se cumple que $\{x,y\} \in \mathcal{F}_2$. De manera que $F_2(X) - \{\{p\}\} \subset \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Por tanto $F_2(X) - \{\{p\}\} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Como $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\{p,y\} \in F_2(X) : y \in K_1 \cup K_2\} - \{\{p\}\}$, considerando a

$$\mathcal{G}_1 = \{\{p,y\} \in F_2(X) : y \in K_1\} - \{\{p\}\}$$

y

$$\mathcal{G}_2 = \{\{p,y\} \in F_2(X) : y \in K_2\} - \{\{p\}\}$$

obtenemos una separación de $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, por tanto $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es disconexo. Esto demuestra que $F_2(X) - \{\{p\}\}$ no es unicoherente. Así que $\{p\}$ agujera a $F_2(X)$. Esto termina la prueba del teorema. ■

Teorema 5.3.2. *Sean X un árbol y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$ y p, q no son puntos finales de X. Entonces $\{p,q\}$ agujera a $F_2(X)$.*

Demostración. Por el Lema 5.2.2, existen $k, s \in \mathbb{N}$, con $s < k$, $K_1, ..., K_k$ subárboles de X tales que, p y q son puntos finales de K_1, para cada $i \in \{2, ..., s\}$, p es punto final de K_i, pero $q \notin K_i$ y, para cada $i \in \{s+1, ..., k\}$, q es punto final de K_i, pero $p \notin K_i$.

Dado que p y q no son puntos finales de X, tenemos que $k \geq 3$.

Definimos

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup_{i=1}^{k} F_2(K_i) - \{\{p,q\}\}.$$

y

$$\mathcal{F}_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{j=i+1}^{k} \langle K_i, K_j \rangle \right) - \{\{p,q\}\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son cerrados en $F_2(X)-\{\{p,q\}\}$. Por el Lema 5.2.5, para cada $i \in \{1,...,k\}$, $F_2(K_i)-\{\{p,q\}\}$ es conexo. Dado que, para cada $i \in \{2,...,s\}$, $\{p\} \in F_2(K_1) \cap F_2(K_i)-\{\{p,q\}\}$ y, para cada $i \in \{s+1,...,k\}$, $\{q\} \in F_2(K_1) \cap F_2(K_i)-\{\{p,q\}\}$, concluimos que $\mathcal{F}_1$ es conexo.

Sea $j \in \{2,...,k\}$. Si $2 \leq j \leq s$, como q es punto final de K_1 y p es punto final de K_j, por el Lema 5.2.5, $\langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo. En el caso en que $s+1 \leq j \leq k$, tenemos que p es punto final de K_1 y q es punto final de K_j. Por el Lema 5.2.5, $\langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo.

Sean $i \in \{2,...,s\}$ y $j \in \{i+1,...,k\}$. Si $j \leq s$, tenemos que $\{p,q\} \notin \langle K_i, K_j\rangle$ y por el Lema 5.2.5, $\langle K_i, K_j\rangle = \langle K_i, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo. En el caso en que $s+1 \leq j \leq k$, tenemos que p es punto final de K_i y q es punto final de K_j, así que, por el Lema 5.2.5, $\langle K_i, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo.

Sean $i \in \{s+1,...,k-1\}$ y $j \in \{i+1,...,k\}$. Entonces $p \notin K_i \cup K_j$. De manera que $\{p,q\} \notin \langle K_i, K_j\rangle$. Por el Lema 5.2.5, $\langle K_i, K_j\rangle = \langle K_i, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo.

De manera que podemos concluir que para cualesquiera $i \in \{1,...,k-1\}$ y $j \in \{i+1,...,k\}$, $\langle K_i, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo. Como, para cada $j \in \{2,...,s\}$, $\{p\} \in \langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$ y, para cada $j \in \{s+1,...,k\}$, $\{q\} \in \langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\}$,

$$\bigcup_{j=2}^{s} \langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\},$$

y

$$\bigcup_{j=s+1}^{k} \langle K_1, K_j\rangle - \{\{p,q\}\},$$

son conexos.

Sea $s+1 \leq j_0 \leq k$. Por el Lema 5.2.5, $\langle K_2, K_{j_0}\rangle - \{\{p,q\}\}$ es conexo. Sean $x_0 \in K_2 - \{p\}$ y $y_0 \in K_{j_0} - \{q\}$. Entonces

$$\{x_0, q\} \in (\langle K_2, K_{j_0}\rangle \cap \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p,q\}\}$$

y

$$\{p, y_0\} \in (\langle K_2, K_{j_0}\rangle \cap \langle K_1, K_{j_0}\rangle) - \{\{p,q\}\}.$$

Así que $\langle K_2, K_{j_0}\rangle$ intersecta a las dos uniones que hemos mostrado que son conexas, de manera que el conjunto

$$\mathcal{D} = \left[\left(\bigcup_{j=2}^{k} \langle K_1, K_j\rangle\right) \cup \langle K_2, K_{j_0}\rangle\right] - \{\{p,q\}\}$$

es conexo. Sean $i_0 \in \{2, ..., k-1\}$ y $l_0 \in \{i_0+1, ..., k\}$. En el caso en que $i_0 \leq s$ y $l_0 \leq s$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\{p\} \in (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle \cap \langle K_1, K_{i_0}\rangle) - \{\{p,q\}\}\\ &\subset (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle - \{\{p,q\}\}) \cap \mathcal{D}.\end{aligned}$$

Si $i_0 \leq s$ y $l_0 \geq s+1$, sea $y_0 \in K_{l_0} - \{q\}$. Entonces

$$\begin{aligned}&\{p, y_0\} \in (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle \cap \langle K_1, K_{l_0}\rangle) - \{\{p,q\}\}\\ &\subset (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle - \{\{p,q\}\}) \cap \mathcal{D}.\end{aligned}$$

Si $i_0 \geq s+1$, tenemos que $l_0 > s+1$. Entonces

$$\begin{aligned}&\{q\} \in (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle \cap \langle K_1, K_{i_0}\rangle) - \{\{p,q\}\}\\ &\subset (\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle - \{\{p,q\}\}) \cap \mathcal{D}.\end{aligned}$$

De manera que para cualesquiera $i \in \{2, ..., k-1\}$, $j \in \{i+1, ..., k\}$ tenemos que

$$(\langle K_{i_0}, K_{l_0}\rangle - \{\{p,q\}\}) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset.$$

Por tanto $\mathcal{F}_2$ es conexo.

Claramente $F_2(X) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Sean $i_0 \in \{1, ..., k\}$, $j_0 \in \{1, ..., k-1\}$ y $l_0 \in \{j_0+1, ..., k\}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
&\left(F_2\left(K_{i_0}\right)\cap\left\langle K_{j_0},K_{l_0}\right\rangle\right)\\
&=\begin{cases}
\left\{\{p,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}, & \text{si } i_0=1=j_0 \text{ y } l_0\le s,\\
\left\{\{q,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}, & \text{si } i_0=1=j_0 \text{ y } l_0\ge s+1\\
\left\{\{p\}\right\}, & \text{si } i_0=1,\ 1<j_0\le s-1 \text{ y } l_0\le s,\\
\emptyset, & \text{si } i_0=1,\ 1<j_0\le s \text{ y } l_0\ge s+1,\\
\left\{\{q\}\right\}, & \text{si } i_0=1,\ s+1\le j_0 \text{ y } l_0\ge s+1,\\
\left\{\{p,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}, & \text{si } 2\le i_0\le s,\ i_0=j_0 \text{ y } l_0\le s,\\
\emptyset, & \text{si } 2\le i_0\le s,\ i_0=j_0 \text{ y } l_0\ge s+1,\\
\left\{\{p\}\right\}, & \text{si } 2<i_0\le s,\ i_0\ne j_0\le s-1 \text{ y } i_0\ne l_0\le s,\\
\left\{\{p,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}, & \text{si } 2<i_0\le s,\ i_0\ne j_0\le s-1 \text{ y } i_0=l_0,\\
\emptyset, & \text{si } 2<i_0\le s,\ i_0\ne j_0\le s-1 \text{ y } l_0\ge s+1\\
\emptyset, & \text{si } 2<i_0\le s,\ s\le j_0 \text{ y } l_0\ge s+1,\\
\left\{\{q,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}, & \text{si } s+1\le i_0,\ i_0=j_0 \text{ y } l_0\ge s+1,\\
\emptyset, & \text{si } s+1\le i_0,\ j_0\le s-1 \text{ y } l_0\le s,\\
\emptyset, & \text{si } s+1\le i_0,\ j_0\le s-1 \text{ y } i_0\ne l_0\ge s+1,\\
\emptyset, & \text{si } s+1\le i_0,\ j_0\le s-1 \text{ y } i_0=l_0,\\
\left\{\{q\}\right\}, & \text{si } s+1\le i_0,\ s\le j_0\ne i_0 \text{ y } l_0\ge s+1.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Así que

$$
\begin{gathered}
F_2\left(K_{i_0}\right)\cap\mathcal{F}_2-\{\{p,q\}\}=\\
\left(\left\{\{p,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}\cup\left\{\{q,x\}\in F_2(X):x\in K_{i_0}\right\}\right)-\{\{p,q\}\}.
\end{gathered}
$$

Por tanto $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ es igual a.

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcup_{i=1}^{k}\left(\left\{\{p,x\}\in F_2(X):x\in K_i\right\}\cup\left\{\{q,x\}\in F_2(X):x\in K_i\right\}\right)\right)-\{\{p,q\}\}\\
&=\left(\left\{\{p,y\}\in F_2(X):y\in X\right\}\cup\left\{\{q,y\}\in F_2(X):y\in X\right\}\right)-\{\{p,q\}\}
\end{aligned}
$$

Definimos

$$
\mathcal{G}_1=\left\{\{p,y\}\in F_2(X):y\in X\right\}-\{\{p,q\}\}
$$

y

$$\mathcal{G}_2 = \{\{q, y\} \in F_2(X) : y \in X\} - \{\{p, q\}\},$$

entonces $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son una separación de $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, por tanto $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es disconexo. Esto demuestra que $F_2(X) - \{\{p, q\}\}$ no es unicoherente. Así que $\{p, q\}$ agujera a $F_2(X)$. Esto termina la prueba del teorema. ■

Teorema 5.3.3. *Sean X un árbol y q_0, q_1 elementos de X (no necesariamente diferentes) tales que q_0 es punto final de X. Entonces $F_2(X) - \{\{q_0, q_1\}\}$ es contraible y, en consecuencia, tiene la propiedad b).*

Demostración. Mostraremos que $F_2(X) - \{\{q_0, q_1\}\}$ es contraible.

Sea $p_0 \in X - \{q_0, q_1\}$. Por el Teorema 1-2-E de [10, p. 549], X es arco-suave en p_0. Entonces, por el Teorema 1-4-A de [10, p. 551] X admite una métrica radialmente convexa en p_0. De manera que, para cualesquiera $y \in X - \{p_0\}$ y $t \leq d(p_0, y)$, existe un único $z \in p_0 y$ tal que $d(p_0, z) = t$.

Supongamos que $1 = \sup\{d(x, p_0) : x \in X\} = d(p_0, q_0)$. Definimos $h_d : X \times I \to X$ por

$$h_d(x, t) = \begin{cases} x, & \text{si } d(p_0, x) \leq 1 - t, \\ \text{El único } y \in xp_0 \text{ tal que } d(p_0, y) = 1 - t, & \text{si } d(p_0, x) \geq 1 - t. \end{cases}$$

Por la Proposición 5.2.6, podemos afirmar que h_d es un retracto por deformación de X en $\{p_0\}$.

Afirmación 1. Para cada $(x, t) \in (X - \{q_0\}) \times I$, $q_0 \neq h_d(x, t)$.

Dado que q_0 es punto terminal de X, por el inciso 4 de la Proposición 5.2.6, para cada $(x, t) \in (X - \{q_0\}) \times I$, $q_0 \neq h_d(x, t)$. Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Definimos $H : (F_2(X) - \{\{q_0, q_1\}\}) \times I \to F_2(X) - \{\{q_0, q_1\}\}$ por,

$$H(\{x, y\}, t) = \{h_d(x, t), h_d(y, t)\}.$$

Afirmación 2. H está bien definida.

Claramente, para cualquier

$$(\{x,y\},t) \in (F_2(X) - \{\{q_0,q_1\}\}) \times I,$$

tenemos que $H(\{x,y\},t) \in F_2(X)$.

Sea

$$(\{x,y\},t) \in (F_2(X) \times \{\{q_0,q_1\}\}) \times I.$$

Entonces $\{x,y\} \neq \{q_0,q_1\}$. Supongamos que $H(\{x,y\},t) = \{q_0,q_1\}$. Entonces $\{h_d(x,t), h_d(y,t)\} = \{q_0,q_1\}$. Supongamos que $h_d(x,t) = q_0$. Por la Afirmación 1, $x = q_0$. Si $t = 0$, por el inciso 3 de la Proposición 5.2.6, $H(\{x,y\},t) = \{x,y\}$, y entonces $\{x,y\} = \{q_0,q_1\}$, contrario a la elección de $\{x,y\}$. Por tanto $t > 0$. Como $1 = d(p_0,q_0) = d(p_0,x) > 1-t$, por definición de h_d tenemos que $1-t = d(p_0,h_d(x,t)) = d(p_0,q_0)$ lo cual también es un absurdo. Esto prueba que $H(\{x,y\},t) \neq \{q_0,q_1\}$ y termina la prueba de la Afirmación 2.

Afirmación 3. H es continua.

Por el inciso 1 de la Proposición 5.2.6, h_d es continua. Por el Lema 5.2.3, $H' : F_2(X) \times I \to F_2(X)$ definida por $H'(\{x,y\},t) = \{h_d(x,t), h_d(y,t)\}$ es continua. Como $H = H'|_{F_2(X)-\{\{q_0,q_1\}\}}$, concluimos que H es continua. Esto termina la prueba de la Afirmación 3.

Sea $\{x,y\} \in F_2(X) - \{q_0,q_1\}$. Entonces

$$H(\{x,y\},0) = \{h_d(x,0), h_d(y,0)\} = \{x,y\},$$

(ver inciso 2 de la Proposición 5.2.6) y

$$H(\{x,y\},1) = \{h_d(x,1), h_d(y,1)\} = \{p_0\},$$

(ver inciso 3 de la Proposición 5.2.6). De manera que H es una contracción de $F_2(X) - \{q_0,q_1\}$. Así que $F_2(X) - \{q_0,q_1\}$ es contraible y por el Corolario 1.4.6, $F_2(X) - \{q_0,q_1\}$ tiene la propiedad b). ■

Teorema 5.3.4. *Sean X un árbol y p un elemento de X que no es un punto de ramificación. Entonces $\{p\}$ no agujera a $F_2(X)$.*

Demostración.

Caso 1. p es punto final de X.

Por el Teorema 5.3.3, aplicado a $\{p,p\}$, $F_2(X)-\{\{p\}\}$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10, $F_2(X)-\{\{p\}\}$ es unicoherente.

Caso 2. p no es punto final de X.

Entonces p es punto de corte de X. Dado que p no es punto de ramificación de X, $X-\{p\}$ sólo tiene dos componentes conexas, sean C_1 y C_2 dichas componentes conexas. Por el Lema 5.2.1, para cada $i\in\{1,2\}$, $K_i=C_i\cup\{p\}$ es un subárbol de X y p es punto final de K_i. Por el Caso 1, para cada $i\in\{1,2\}$, $F_2(K_i)-\{\{p\}\}$ tiene la propiedad b).

Sean $i\in\{1,2\}$ y $q_i\in K_i-\{p\}$. Por el Teorema 1-2-E de [10, p. 549], K_i es arco-suave en q_i. Entonces, por el Teorema 1-4-A de [10, p. 551] K_i admite una métrica radialmente convexa d_i en q_i. De manera que, para cualesquiera $y\in K_i-\{q_i\}$ y $t\leq d_i(q_i,y)$, existe un único $z\in q_iy$ tal que $d(q_i,z)=t$.

Supongamos que $1=\sup\{d(q_i,z):z\in K_i\}$. Definimos $h_i:K_i\times I\to K_i$ por

$$h_i(z,t)=\begin{cases} z, & \text{si } d(q_i,z)\leq 1-t,\\ \text{El único } w\in zq_i \text{ tal que } d(q_i,w)=1-t, & \text{si } d(q_i,z)\geq 1-t.\end{cases}$$

Afirmación 1. $\langle K_1,K_2\rangle-\{\{p\}\}$ es contraible.

Definimos $H:(\langle K_1,K_2\rangle-\{\{p\}\})\times I\to\langle K_1,K_2\rangle-\{\{p\}\}$ por

$$H(\{z,w\},t)=\{h_1(z,t),h_2(w,t)\}.$$

Primero veamos que H está bien definida. Supongamos que existe

$$(\{z,w\},t)\in(\langle K_1,K_2\rangle-\{\{p\}\})\times I,$$

tal que $H(\{z,w\},t)=\{p\}$. Entonces $\{h_1(z,t),h_2(w,t)\}=\{p\}$ lo cual implica que $h_1(z,t)=p$ y $h_2(w,t)=p$. Dado que p es punto final de K_1 y K_2, por el inciso 4 de la Proposición 5.2.6, $z=p=w$. De manera que $\{z,w\}=\{p\}$, lo cual es una contradicción. Esto demuestra que, para todo

$$(\{z,w\},t)\in(\langle K_1,K_2\rangle-\{\{p\}\})\times I,$$

se cumple que $H(\{z,w\},t) \neq \{p\}$ y por tanto H está bien definida.

Por el Lema 5.2.3, H es continua.

Sea $\{x,y\} \in \langle K_1, K_2\rangle - \{\{p\}\}$. Como

$$H(\{x,y\},0) = \{h_1(x,0), h_2(y,0)\} = \{x,y\},$$

(ver inciso 2 de la Proposición 5.2.6) y

$$H(\{x,y\},1) = \{h_1(x,1), h_2(y,1)\} = \{q_1,q_2\},$$

(ver inciso 3 de la Proposición 5.2.6). Tenemos que $\langle K_1, K_2\rangle - \{\{p\}\}$ es contraible. Por el Corolario 1.4.6, $\langle K_1, K_2\rangle - \{\{p\}\}$ tiene la propiedad b). Esto termina la prueba de la Afirmación 1.

Sea $i \in \{1,2\}$. Dado que

$$(F_2(K_i) \cap \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\} = \{\{p,y\} : y \in K_i\} - \{\{p\}\},$$

se cumple que $(F_2(K_i) \cap \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\}$ es homeomorfo a $K_i - \{p\}$, el cual es conexo, por que p es punto final de K_i. Por tanto $(F_2(K_i) \cap \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\}$ es conexo. Por el Lema 1.4.3, $(F_2(K_i) \cup \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\}$ tiene la propiedad b).

Como

$$((F_2(K_1) \cup \langle K_1, K_2\rangle) \cap (F_2(K_2) \cup \langle K_1, K_2\rangle)) - \{\{p\}\} = \langle K_1, K_2\rangle - \{\{p\}\},$$

y por el Lema 5.2.5, $\langle K_1, K_2\rangle - \{\{p\}\}$ es conexo, concluimos que

$(F_2(K_1) \cup F_2(K_2) \cup \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\}$ tiene la propiedad b) (ver Lema 1.4.3).

Dado que

$$F_2(X) - \{\{p\}\} = (F_2(K_1) \cup F_2(K_2) \cup \langle K_1, K_2\rangle) - \{\{p\}\},$$

$F_2(X) - \{\{p\}\}$ tiene la propiedad b). Por el Teorema 1.4.10, $F_2(X) - \{\{p\}\}$ es unicoherente. Esto termina la prueba del Caso 2.

De los Casos 1 y 2, si p no es punto de ramificación de X, $F_2(X) - \{p\}$ es unicoherente. Por tanto $\{p\}$ no agujera a $F_2(X)$. ■

5.4. Clasificación

Teorema 5.4.1. *Sean X un árbol y $\{x, y\} \in F_2(X)$. Entonces $\{x, y\}$ agujera a $F_2(X)$ si y sólo si $x = y$ y x es punto de ramificación de X o $y \neq x$ y x, y no son puntos finales de X.*

Demostración. (Necesidad). Sea $\{x, y\} \in F_2(X)$. En el caso en que $x = y$ y y no es punto de ramificación de X, por el Teorema 5.3.4, $\{x\}$ no agujera a $F_2(X)$. Así que $x \neq y$ o $x = y$ y y es punto de ramificación de X. En el caso en que $x \neq y$ y alguno de ellos es punto final de X, por el Teorema 5.3.3, $\{x, y\}$ no agujera a $F_2(X)$. Por tanto, en el caso en que $x \neq y$, y y x no son puntos finales de X. Esto termina la prueba de la necesidad.

(Suficiencia). Si $x = y$ y x es punto de ramificación de X, por el Teorema 5.3.1, $\{x, y\}$ agujera a $F_2(X)$.

Si $x \neq y$ y x, y no son puntos finales de X, por el Teorema 5.3.2, $\{x, y\}$ agujera a $F_2(X)$. Esto termina la prueba de la suficiencia y con ello la demostración del teorema. ■

Bibliografía

[1] J. G. Anaya, *Making holes in hyperspaces*, to appear in Topology Appl.

[2] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1101-1110.

[3] E. Castañeda, *A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent.* Proceedings of the 1998 Topology and Dynamics Conference (Fairfax, VA). Topology Proc. 23 (1998), Spring, 61-67.

[4] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of finite graph, I*, Fund. Math. 62 (1968), 265-286.

[5] R. Duda, *Correction to the paper: .^{O}n the hyperspace of subcontinua of finite graph, I"*, Fund. Math. 69 (1970), 207-211.

[6] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass, 1966.

[7] C. Eberhart, *A note on smooth fans*, Colloq. Math. 20 (1969), 89-90.

[8] C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), 279-288.

[9] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan*, Fund. Math. 26 (1936), 61-112.

[10] J. B. Fugate, G. R. Gordh, Jr. y L. Lum, *Arc-smooth continua*, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981), 545-561.

[11] T. Ganea, *Symmetrisch Potenzen topologischer räume,* Math. Nachr., 11 (1954), 305-316.

[12] A. García-Máynez y A. Illanes, *A survey on unicoherence and related properties*, An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México 29 (1989), 17-63.

[13] A. García-Máynez y A. Tamariz, *Topología General*, Porrúa, 1988.

[14] M. J. Greenberg y J. R. Harper, *Algebraic Topology, A First Course* Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1981.

[15] A. Illanes, *Multicoherence of Whitney levels*, Topology Appl. 68 (1996), 251-265.

[16] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph is unique*, Glas. Mat. Ser. III 37 (57) (2002), 347-363.

[17] A. Illanes, *A model for the hyperspace $C_2(S^1)$*, Questions Answers Gen. Topology 22 (2004), 117-130.

[18] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas 28, Soc. Mat. Mex. (2004).

[19] A. Illanes y S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, v. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[20] L. Lum, *Weakly smooth dendroids*, Fund. Math. 83 (1974), 111-120.

[21] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Topology Appl. 109 (2001), 237-256.

[22] S. Mardešić, *Equivalence of singular and Čech homology for ANR-s. Application to unicoherence.* Fund. Math. 46 (1958), 29-45.

[23] K. Menger, *Untersuchungen über allgemeine Mätrik*, Math. Ann. 100 (1928), 75-163.

[24] E. E. Moise, *Grille decomposition and convexification theorems for compact locally connected continua*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1111-1121.

[25] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, v. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[26] S. B. Nadler, Jr., *A characterization of locally connected continua by hyperspace retractions,* Proc. Amer. Math. Soc. 67 (1997), 167-176.

[27] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An introduction,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[28] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 2004.