



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Regiones canónicas y geometría de productos de transformaciones de Möbius

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A :
HÉCTOR BUSTOS CASTRO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE



2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Regiones canónicas y geometría de productos
de transformaciones de Möbius

Héctor Bustos Castro

2 de agosto de 2007

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno
Bustos
Castro
Héctor
55 64 36 32
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
401105856
2. Datos del tutor
Dr
Antonio
Lascurain
Orive
3. Datos del sinodal 1
Dr
Mario
Eudave
Muñoz
4. Datos del sinodal 2
Dr
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco
5. Datos del sinodal 3
M en C
Francisco de Jesús
Struck
Chávez
6. Datos del sinodal 4
M en C
Ana Irene
Ramírez
Galarza
7. Datos del trabajo escrito
Regiones canónicas y geometría de productos de transformaciones de Möbius
68 p
2007

Agradecimientos

A mis Padres, los quiero mucho.

A mis hermanos.

A mi asesor, Dr. Antonio Lascurain, gracias por el apoyo y a los profesores que colaboraron en esta tesis, en particular Héctor Cejudo gracias por toda la ayuda.

A mis amigos: Carolina(biri), Norman, Beto, Ricardo. A mis amigos y compañeros de la facultad. Un agradecimiento muy especial para los "Miaus", donde he conocido a grandes amigos, pero sobre todo a grandes personas.

Contenido

1. Preliminares	3
2. Círculo isométrico y regiones canónicas	13
2.1. Círculo isométrico	13
2.2. Regiones canónicas	21
3. La geometría del producto de isometrías	39

Prefacio

El análisis de los conmutadores de transformaciones de Möbius ha sido objeto de importantes investigaciones, por ejemplo, para obtener cotas mínimas entre los ejes de dos transformaciones elípticas que generan un grupo discreto cf. [3]. Los resultados de este artículo permiten también obtener cotas inferiores de volúmenes de ciertos orbifolios hiperbólicos de dimensión tres. Estos cálculos, así como los de los nudos y las variedades hiperbólicas de dimensión tres, han sido tema de muchas investigaciones en los años recientes cf. [7].

El estudio de los productos de transformaciones de Möbius es relevante por muchas razones, una de ellas es por su semejanza con el de los conmutadores de dichas funciones, ya que como se muestra en [2] pp. 179-187, y en esta tesis, se puede obtener una descripción geométrica de unos y otros en términos de haces de geodésicas.

Por otra parte, el análisis de las regiones canónicas es de gran utilidad, por ejemplo, para entender algunos aspectos de la estructura geométrica de las superficies de Riemann, como son las geodésicas simples cerradas cf. [2] pp. 324-325.

Esta tesis inicia con algunos resultados de los círculos isométricos, se prueba que el círculo isométrico de una transformación g actuando en el disco de Poincaré está formado por los puntos que equidistan del origen y de la preimagen de éste (Teorema 2.1.4). Se prueba también otro resultado que describe que estos círculos se intersecan, son ajenos o paralelos conforme al tipo de isometría (Teorema 2.1.6). Posteriormente, se estudian las regiones canónicas; esencialmente la región canónica de una isometría hiperbólica g consiste en los puntos que se *mueven* menos que una cantidad determinada definida por la traza. Se prueba que estas regiones son invariantes bajo conjugación (Teorema 2.2.1), también se demuestra que están determinadas por las geodésicas que unen los puntos en la recta del infinito con sus imágenes (Proposiciones 2.2.3, 2.2.6, 2.2.9). Estos resultados parciales implican el re-

sultado principal del capítulo 2 (Teorema 2.2.11) que establece que la región determina el tipo de isometría (junto con su inversa). Nótese que la región canónica proporciona una descripción geométrica de cualquier isometría.

Los principales teoremas de esta tesis aparecen en el capítulo 3. Las técnicas usadas para probarlos involucran resultados que relacionan la traza con el producto inversivo (Teorema 3.0.12), y con la longitud de traslación de una transformación hiperbólica. La clave principal es describir las isometrías como composición de dos reflexiones en geodésicas. El primer resultado (Teorema 3.0.18) describe una fórmula de la traza del producto de dos funciones elípticas. Esta descripción permite saber de qué tipo es el producto, dependiendo si los puntos fijos están cerca o no, o si los ángulos de rotación son grandes o pequeños. El segundo resultado (Teorema 3.0.20) describe el producto de dos transformaciones hiperbólicas con ejes disjuntos y, como en el caso anterior, la fórmula de la traza del producto permite describir de qué tipo es éste, en términos de la longitud de traslación y la distancia entre los ejes. Además se exhiben pruebas geométricas relacionadas con polígonos hiperbólicos para los resultados de los productos. La tesis termina con el análisis del producto de dos transformaciones hiperbólicas cuyos ejes se intersecan; en este caso el producto siempre es hiperbólico (Teorema 3.0.24) y el análisis involucra la descripción de una función hiperbólica como composición de dos funciones elípticas de orden dos.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Comenzaremos la exposición con una descripción de algunos resultados y definiciones que se usarán en el transcurso de este trabajo, como la definición de las transformaciones de Möbius complejas y los modelos de la geometría hiperbólica plana \mathbb{H}^2 y Δ . Enunciaremos varios resultados sin probarlos, las demostraciones se pueden consultar, por ejemplo, en [2] o en [5].

Dados $a, b, c, d, \in \mathbb{C}$, tales que $ad - bc \neq 0$, se define una transformación de Möbius en el plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, como sigue

i) si $c \neq 0$,

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d} & \text{si } z \neq \infty, z \neq -d/c, \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \infty, \\ \infty & \text{si } z = -d/c. \end{cases}$$

ii) y si $c = 0$,

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{d} & \text{si } z \neq \infty, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Es fácil mostrar que toda transformación de Möbius se puede definir con una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, y $ad - bc = 1$.

El grupo de estas matrices se denota por $SL(2, \mathbb{C})$. El centro de este grupo está formado por las matrices $\pm Id$. Al cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su centro $\pm Id$ se le llama su proyectivización y a este grupo cociente, se le denota $PSL(2, \mathbb{C})$. Se sigue del primer teorema de isomorfismo de grupos que este grupo es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas. En esta tesis identificaremos a las transformaciones de Möbius complejas con los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$.

Mediante la proyección estereográfica podemos identificar $\widehat{\mathbb{C}}$ con la esfera de Riemann

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}.$$

Usando la proyección estereográfica se define la métrica cordal en $\widehat{\mathbb{R}}^n$

$$d_C(x, y) = \begin{cases} \frac{2|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2}\sqrt{1 + |y|^2}}, & \text{si } x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n. \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |x|^2}}, & \text{si } y = \infty. \end{cases}$$

De esta manera las transformaciones de Möbius complejas, son funciones continuas de $\widehat{\mathbb{C}}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Una de las formas de clasificar las transformaciones de Möbius se obtiene considerando sus puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Definición 1 Sea T una transformación de Möbius. Diremos que T es parabólica si y sólo si fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Obsérvese que cualquier transformación parabólica es conjugada a una traslación.

Definición 2 Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, conjugada a $z \mapsto kz$, $k \neq 0, 1$, entonces

- i) A T se le llama elíptica, si $|k| = 1$;
- ii) A T se le llama hiperbólica, si $k \in \mathbb{R}^+$;

iii) A T se le llama *loxodrómica*, si $|k| \neq 1$, y $k \notin \mathbb{R}^+$.

Otra manera de clasificar las transformaciones de Möbius complejas, es a partir de su traza.

Definición 3 Sea T una transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

se define el cuadrado de la traza como

$$\frac{(a + d)^2}{ad - bc},$$

y se denota por χ^2 .

Teorema 1.0.1 Sea T una transformación de Möbius, $T \neq Id$ y χ^2 el cuadrado de la traza de T . Entonces

- (i) T es parabólica si y sólo si $\chi^2 = 4$;
- (ii) T es elíptica si y sólo si $0 \leq \chi^2 < 4$;
- (iii) T es hiperbólica si y sólo si $4 < \chi^2 < \infty$;
- (iv) T es loxodrómica si y sólo si $\chi^2 \notin \mathbb{R}^+$.

Describamos ahora las transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior, $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

El modelo del semiplano es uno de los más importantes del plano hiperbólico y las transformaciones de Möbius que lo preservan son aquellas que están definidas por $PSL(2, \mathbb{R})$, esto es, las transformaciones determinadas por las matrices en

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \text{ y } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Otro modelo muy importante es el disco unitario, también llamado disco de Poincaré, definido por

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Teorema 1.0.2 *Sea S una transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$, entonces S preserva el disco unitario Δ si y sólo si es de la forma*

$$S(z) = \frac{az + c}{\bar{c}z + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1 \quad a, c \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos por $M(\Delta)$ al subgrupo de transformaciones de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan Δ . Estas transformaciones son conformes en el disco unitario. Para definir las métricas que usaremos en estos dos modelos, es necesario introducir el concepto de densidad.

Definición 4 *Sea A una región en \mathbb{R}^n , diremos que una densidad en A es una función continua $\mu : A \mapsto \mathbb{R}^+$.*

Dada una densidad en una región A y λ una curva de clase C^1 en A se define la μ -longitud de λ como

$$l_\mu(\lambda) = \int_b^a \mu(\lambda(t)) |\lambda'(t)| dt,$$

donde $\lambda : [a, b] \mapsto A$. Esta definición se extiende a curvas de clase C^1 por tramos.

Definición 5 *Sea μ una densidad en una región A , y z_1, z_2 dos puntos en A ; la distancia $\rho_\mu(z_1, z_2)$ se define como*

$$\rho_\mu(z_1, z_2) = \inf l_\mu(\lambda),$$

donde el ínfimo es sobre todas las curvas λ de clase C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 .

Cada distancia induce una métrica en A ; en el caso de \mathbb{H}^2 la métrica está dada por la densidad

$$\gamma(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

y se le llama métrica hiperbólica.

El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica y actúa transitivamente en la familia de todas las circunferencias y rectas ortogonales al eje real. Esto se sigue fácilmente del hecho de que la transformación

$$z \mapsto \frac{z-1}{z+1},$$

transforma al círculo unitario en el eje imaginario, y es una función en $PSL(2, \mathbb{R})$. Las curvas que minimizan la distancia en \mathbb{H}^2 son los círculos o rectas que son ortogonales al eje real, también llamadas geodésicas.

Una fórmula para calcular la distancia ρ entre dos puntos z y $w \in \mathbb{H}^2$ y que será útil más adelante es

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad (1.1)$$

En el caso del disco de Poincaré, la métrica está definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2}.$$

y las geodésicas son los círculos ortogonales a $\partial\Delta$ o los diámetros. La distancia hiperbólica en el disco de Poincaré está dada por la siguiente ecuación

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Definiremos ahora algunos de los conceptos que se usarán en las páginas siguientes.

Definición 6 *Llamaremos horociclo basado en un punto $z_0 \in \widehat{\mathbb{R}}$, al círculo en $\overline{\mathbb{H}^2}$ tangente en z_0 a la recta real, si z_0 es finito, y a cualquier recta en $\overline{\mathbb{H}^2}$ paralela (y distinta) a la recta real, si $z_0 = \infty$.*

Definición 7 *Sean z_1 y z_2 puntos distintos en $\widehat{\mathbb{R}}$. Llamaremos hiperciclo por z_1 y z_2 a la intersección de cualquier "círculo" por z_1 y z_2 con \mathbb{H}^2 .*

Trabajaremos también con reflexiones en esferas y planos (principalmente círculos y rectas). Denotaremos por x^* a $x/|x|^2$, si $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

La ecuación que define la esfera en \mathbb{R}^n , con centro en a y radio r se define como

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\},$$

usando el producto escalar en \mathbb{R}^n , está dada por

$$|x|^2 - 2(x \cdot a) + |a|^2 - r^2 = 0$$

Definición 8 Diremos que la reflexión (o inversión) en $S(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ la esfera de radio r centrado en a , esta dada por

$$\psi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^*, & \text{si } z \in \mathbb{R}^n, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Los puntos de un hiperplano están determinados por

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = t, \ a \in \mathbb{R}^n \ a \neq 0, \ t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\},$$

y la ecuación que lo define está dada por

$$-(x \cdot a) + t = 0.$$

Es conveniente (y así lo haremos) tomar a la normal a unitaria. Denotaremos a $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ como $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Definición 9 Se define la reflexión (o inversión) en el plano $P(b, t)$, como la función $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$, dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} x - 2[(x \cdot a) - t]a^*, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n, \\ \infty, & \text{si } x = \infty, \end{cases}$$

donde $|a| = 1$.

Llamaremos “esferas” a esferas $S(a, r)$ o planos $P(b, t)$ en \mathbb{R}^n , y las denotaremos por Σ . En el caso bidimensional, escribiremos “círculos” para denotar círculos o rectas.

Definición 10 Se define el grupo general de Möbius, denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, como el grupo que consiste de todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en “esferas”.

Para el caso bidimensional estas funciones son homeomorfismos de la esfera de Riemann en sí misma y forman un grupo. Al subgrupo formado por las funciones que son composiciones de un número par de reflexiones lo denotamos por $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, este grupo está formado por las transformaciones que preservan la orientación. Usaremos también algunas consecuencias del siguiente Teorema.

Teorema 1.0.3 *El grupo de las transformaciones de Möbius complejas es precisamente el subgrupo de transformaciones en $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ que preservan la orientación, es decir,*

$$PSL(2, \mathbb{C}) = M(\widehat{\mathbb{R}^2}).$$

Una demostración de este teorema se puede consultar en [5] p. 70.

Corolario 1.0.4 *Sea $\psi \in M(\widehat{\mathbb{R}^2})$, tal que fija puntualmente un “círculo” U , entonces ψ es la reflexión en U , o es la identidad.*

Las reflexiones en geodésicas son isometrías hiperbólicas, una prueba de este hecho se puede consultar en [5] pp. 72-73. Otro resultado que usaremos frecuentemente es el siguiente.

Teorema 1.0.5 *Sea T una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ no loxodrómica, entonces T se puede expresar como $\sigma_2 \sigma_1$, donde σ_j , $j = 1, 2$ son reflexiones en “círculos” U_1, U_2 respectivamente. Más aún*

- a) *si T es parabólica, entonces U_1 y U_2 son tangentes y se intersecan en el punto fijo de T ;*
- b) *si T es elíptica, entonces U_1 y U_2 se intersecan en los puntos fijos de T ;*
- c) *si T es hiperbólica, entonces U_1 y U_2 son ajenos.*

Una prueba se puede encontrar en [5].

Dada una transformación $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$), se define el haz de geodésicas asociado a g , como sigue

1. si g es parabólica, el haz consiste en las geodésicas que *terminan* en el punto fijo de g en $\widehat{\mathbb{R}}$ o $\partial\Delta$,
2. si g es elíptica, el haz consiste en las geodésicas que *pasan* por el punto fijo de g en \mathbb{H}^2 o (Δ) ,
3. si g es hiperbólica, el haz estará compuesto por las geodésicas que son ortogonales al eje, donde el eje es la geodésica que une los puntos fijos de g en \mathbb{H}^2 o (Δ) .

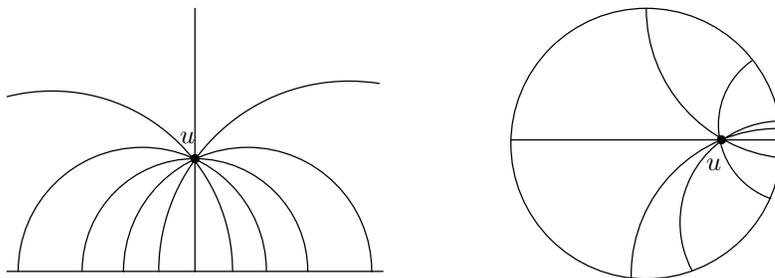


Figura 1.1: Haz de geodésicas elíptico en \mathbb{H}^2 y Δ .

Véase la Figura 1.1.

Dados z, w dos puntos en \mathbb{H}^2 , se define el bisector perpendicular o mediatriz hiperbólica al segmento de geodésica $[z, w]$, como la única geodésica ortogonal a $[z, w]$ que pasa por el punto medio hiperbólico entre z y w . Otra forma de caracterizarlo la exhibe el siguiente resultado.

Proposición 1.0.6 *El bisector perpendicular al segmento $[z, w]$ $z, w \in \mathbb{H}^2$, consiste en los puntos en \mathbb{H}^2 que equidistan hiperbólicamente de z y w , es decir,*

$$\{u \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(u, z) = \rho(u, w)\}.$$

Otro concepto importante que se usará en esta tesis es el producto inversivo, este concepto está relacionado con la conformalidad de dos “esferas”. Nótese que la ecuación de una “esfera” puede escribirse como

$$a_0|x|^2 - 2(x \cdot a) + a_{n+1} = 0,$$

donde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $a_0, a_{n+1} \in \mathbb{R}$. Al vector en $a' = (a_0, a, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, se le llama vector coeficiente y cumple la condición

$$|a|^2 > a_0 a_{n+1};$$

este vector determina a Σ salvo un múltiplo escalar real.

Definición 11 *Sean Σ y Σ' dos “esferas” determinadas por los vectores (a_0, a, a_{n+1}) y (b_0, b, b_{n+1}) . El producto inversivo denotado por (Σ, Σ') , se define por*

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2a \cdot b - a_0 b_{n+1} - b_0 a_{n+1}|}{2(|a|^2 - a_0 a_{n+1})^{1/2} (|b|^2 - b_0 b_{n+1})^{1/2}}. \quad (1.2)$$

A continuación exhibimos algunas expresiones explícitas del producto inversivo, un análisis más detallado se encuentra en [2] y en [1].

Si Σ y Σ' son esferas, sin pérdida de generalidad se puede suponer que los vectores coeficientes están dados por $a' = (1, a, |a|^2 - r^2)$ y $b' = (1, b, |b|^2 - r^2)$ respectivamente, por lo que se sigue de (1.2) que

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{2rt} \quad (1.3)$$

Si Σ es una esfera y Σ' es un plano, con vectores coeficientes dados por $a' = (1, a, |a|^2 - r^2)$ y $b' = (0, b, 2t)$, respectivamente, entonces se sigue de la ecuación (1.2) que

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|2a \cdot b - 2t|}{2r|b|} = \frac{|a \cdot b - t|}{r|b|},$$

en particular si $|b| = 1$,

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{|a \cdot b - t|}{r}.$$

Si Σ y Σ' son planos tales que sus vectores coeficientes estén dados por $a' = (0, a, 2t)$, $b' = (0, b, 2s)$, respectivamente, se sigue de (1.2) que

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{2|a \cdot b|}{2|a||b|} = \frac{|a \cdot b|}{|a||b|} = |\cos \theta|,$$

si $|a| = |b| = 1$, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = |a \cdot b| = |\cos \theta|.$$

Finalmente, exhibimos algunas interpretaciones geométricas. Primero si Σ y Σ' son planos que se intersecan, entonces $(\Sigma, \Sigma') = |\cos \theta|$, donde θ es el ángulo donde se intersecan las “esferas” en alguno de sus puntos, por consiguiente $(\Sigma, \Sigma') = 0 \iff \theta = \pi/2$, es decir, si Σ y Σ' son ortogonales.

Por otra parte si Σ es la esfera $S(a, r)$ y Σ' es un plano denotado por $P(b, t)$, entonces,

$$(\Sigma, \Sigma') = \frac{\delta}{r}, \quad (1.4)$$

donde δ es la distancia de a a $P(b, t)$. Finalmente si Σ y Σ' son paralelas o tangentes, entonces

$$(\Sigma, \Sigma') = 1. \quad (1.5)$$

Las pruebas de estos hechos, se pueden consultar en [1]. Para este trabajo, serán suficiente los resultados en \mathbb{R}^2 .

En el capítulo 3 mencionaremos una interpretación geométrica para el caso en que los “círculos” Σ y Σ' no se intersecan, en términos de la métrica hiperbólica.

El siguiente teorema exhibe una propiedad fundamental del producto inversivo, la prueba se puede consultar en [1] y [2].

Teorema 1.0.7 *Sean Σ y Σ' dos “esferas”, el producto inversivo (Σ, Σ') es invariante bajo las transformaciones en el grupo general de Möbius $GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$. Es decir, si $\psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^n})$, entonces*

$$(\Sigma, \Sigma') = (\psi(\Sigma), \psi(\Sigma')).$$

CAPÍTULO 2

Círculo isométrico y regiones canónicas

2.1. Círculo isométrico

Definición 12 *Sea*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ tal que no fija ∞ . Se define el círculo isométrico de g , denotado por I_g , como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |g'(z)| = 1\}.$$

Para el caso en que $ad - bc = 1$, es fácil verificar que el círculo isométrico es realmente una circunferencia:

$$I(g) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left(\frac{-d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

Esto se sigue de que

$$g'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Proposición 2.1.1 *Sea*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$, entonces g actúa euclidianamente en I_g .

DEMOSTRACIÓN. Sean $z, w \in I_g$, entonces

$$\begin{aligned} |g(z) - g(w)| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right| = \left| \frac{(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)}{(cz + d)(cw + d)} \right| \\ &= |azd + bcw - awd - bcz| = |z - w|. \end{aligned}$$

□

Además, I_g es el único círculo donde g actúa euclidianamente, esto se sigue ya que si g actúa euclidianamente en otro círculo K , podemos tomar $z \in K - I_g$, y una sucesión de puntos $w_n \in K$ que convergen a z , se tendría

$$\lim_{w_n \rightarrow z} \left| \frac{g(z) - g(w_n)}{z - w_n} \right| = 1$$

y $|g'(z)| = 1$, pero entonces $z \in I_g$.

El siguiente resultado es consecuencia de la regla de la cadena y describe la acción geométrica de una transformación con respecto al círculo isométrico, una prueba detallada se puede consultar en [5] pp. 159-160.

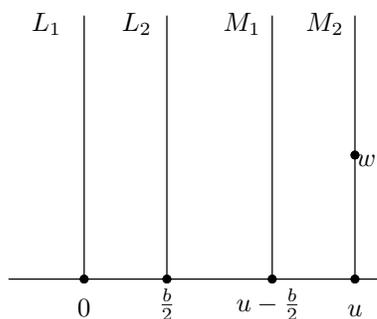


Figura 2.1: Traslaciones como composición de reflexiones en geodésicas.

Teorema 2.1.2 *Sea $g \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que no fija ∞ . Entonces*

- (i) $g(I_g) = I_{g^{-1}}$,
- (ii) $g(Int I_g) = Ext(I_{g^{-1}})$,
- (iii) $g(Ext I_g) = Int(I_{g^{-1}})$.

El siguiente lema es muy importante para los resultados de este capítulo.

Lema 2.1.3 *Sea g una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$ (o en $M(\Delta)$) entonces, $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son las reflexiones en geodésicas L_1 y L_2 . Más aún, dado $w \in \mathbb{H}^2$ (o en Δ) fijo, se puede suponer $w \in L_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos solamente la segunda parte; la demostración de la primera parte aparece en [5] pp. 78-79. Se exhibe únicamente el caso parabólico, los demás son análogos. Probamos primero el caso particular $g(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$. Sea $w = u + iv$ un punto en \mathbb{H}^2 , M_2 la geodésica que pasa por w e ∞ y M_1 la geodésica que pasa por $u - b/2$ e ∞ .

Ahora por la primer parte del lema, $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i , $i = 1, 2$, son reflexiones en las geodésicas L_1 , L_2 , respectivamente, donde L_1 es la geodésica que pasa por 0 e ∞ y L_2 la que pasa por $b/2$ e ∞ (cf. [3] pp. 78-79). (véase la Figura 2.1)

Hay que probar que $g = \tau_2\tau_1$ donde τ_i es la reflexión en M_i , $i = 1, 2$, respectivamente. Para mostrar esto, consideremos la traslación

$$\varphi(z) = z + u - b/2;$$

claramente

$$g = \varphi g \varphi^{-1} = \varphi \sigma_2 \varphi^{-1} \varphi \sigma_1 \varphi^{-1},$$

de lo cual se sigue el resultado en este caso, ya que $\varphi \sigma_i \varphi^{-1}$ es la reflexión en M_i , es decir τ_i , $i = 1, 2$, en virtud del Corolario 1.0.4.

Para el caso general, sea g parabólica con punto fijo z_0 y w un punto en \mathbb{H}^2 , sea L_2 la geodésica por z_0 y w y $\psi \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $\psi(z_0) = \infty$, por ejemplo,

$$\psi(z) = \frac{-1}{z - z_0}.$$

Sea M_2 la geodésica que pasa por ∞ y $\psi(w)$. Usando la primera parte, tenemos que $\psi g \psi^{-1} = \tau_2\tau_1$, donde τ_2 es la reflexión en M_2 (obsérvese que $\psi(L_2) = M_2$), y τ_1 es la reflexión en una geodésica por ∞ . Por lo cual,

$$g = \psi^{-1}\tau_2\psi\psi^{-1}\tau_1\psi.$$

Finalmente, $\psi^{-1}\tau_2\psi$, es la reflexión en $\psi^{-1}(M_2) = L_2$ y $\psi^{-1}\tau_1\psi$, es la reflexión en $\psi^{-1}(M_1) = L_1$, que es una geodésica por z_0 . Esto se sigue nuevamente del Corolario 1.0.4 (véase la Figura 2.2).

Para el caso de $g \in M(\Delta)$, $w \in \Delta$, se conjuga g a una traslación usando la función inversa de Cayley y la prueba es análoga. La función de Cayley está definida por $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, y transforma conformemente \mathbb{H}^2 en Δ . \square

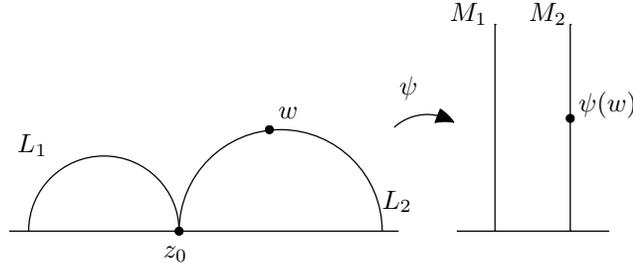


Figura 2.2: Transformación parabólica como composición de dos reflexiones.

Obsérvese que bajo las hipótesis de la segunda parte del lema, la geodésica L_1 está unívocamente determinada. Otra caracterización del círculo isométrico la establece el siguiente resultado.

Teorema 2.1.4 *Si g es una isometría del plano hiperbólico Δ , entonces*

$$I_g \cap \Delta = \{ z \mid \rho(z, 0) = \rho(z, g^{-1}(0)) \}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 2.1.3, podemos escribir a g como $\sigma_2\sigma_1$ donde σ_i denota la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, 2$ y podemos suponer que $0 \in L_2$. Entonces σ_2 es una isometría euclidiana, ya que cualquier reflexión en una recta que pase por el origen es una transformación ortogonal. Se sigue entonces que g actúa euclidianamente en L_1 , por consiguiente se tiene $I_g \cap \Delta = L_1$.

Por otra parte como $\sigma_2(0) = 0$, entonces, $g^{-1}(0) = \sigma_1\sigma_2(0) = \sigma_1(0)$. Por lo tanto, por la Proposición 1.0.6 $I_g \cap \Delta$ es el bisector perpendicular de 0 y $g^{-1}(0)$, ya que como σ_1 es una isometría hiperbólica, se tiene que para todo $z \in L_1 (= I_g)$,

$$\rho(z, 0) = \rho(\sigma_1(z), \sigma_1(0)) = \rho(z, g^{-1}(0)).$$

□

Definición 13 *Sea g una isometría en $PSL(2, \mathbb{C})$ en el plano hiperbólico (Δ o \mathbb{H}^2) y w cualquier punto en el plano hiperbólico o en el círculo al infinito, tal que $g(w) \neq w$. Si $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, 2$, y $w \in L_2$, entonces a L_1 se le llama el w -círculo isométrico de g y se denota por $I_g(w)$.*

Nótese que siempre existe dicho círculo, en virtud de la Proposición 2.1.1.

Obsérvese que si $w = 0$ ($g \in M(\Delta)$), $I_g(0)$ es el círculo isométrico. La siguiente proposición muestra que el w -círculo isométrico tiene cierta propiedad de invariabilidad bajo conjugación.

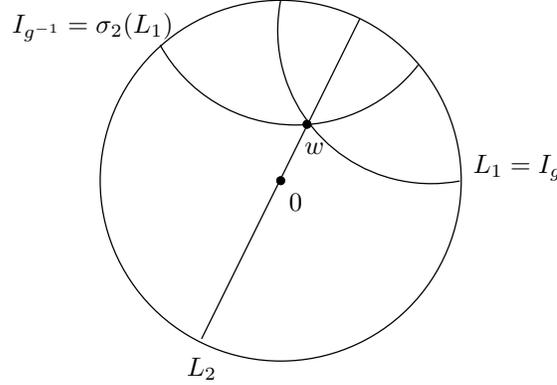


Figura 2.3: Círculos isométricos de una transformación elíptica y su inversa.

Proposición 2.1.5 Sea $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ una isometría en el plano hiperbólico (Δ o \mathbb{H}^2) y w un punto en dicho plano, tal que $g(w) \neq w$, entonces

$$I_{hgh^{-1}}(hw) = h(I_g(w)),$$

donde h es una isometría conforme.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodésicas L_i , $i = 1, 2$, y $w \in L_2$, entonces L_1 es el w -círculo isométrico de g , ahora

$$hgh^{-1} = (h\sigma_2h^{-1})(h\sigma_1h^{-1})$$

y se tiene que $h\sigma_2h^{-1}$ es la reflexión en $h(L_2)$ y $h\sigma_1h^{-1}$ es la reflexión en $h(L_1)$ en virtud del Corolario 1.0.4. Finalmente, como $h(w) \in h(L_2)$, tenemos que el $h(w)$ -círculo isométrico para hgh^{-1} es $h(L_1)$, que es lo que se quería probar. □

Notemos ahora que si $g \in M(\Delta)$, entonces g actúa simétricamente con respecto al círculo unitario ($\partial\Delta$), por lo que w puede ser cualquier punto del

plano extendido; se puede definir de manera análoga el w - círculo isométrico; se tiene

$$I_g(w) = I_g\left(\frac{1}{\bar{w}}\right).$$

Esto se sigue ya que w y $1/\bar{w}$ son puntos inversos con respecto a Δ , y por consiguiente el “círculo” que contiene a la única geodésica que pasa por w en el haz de geodésicas determinadas por g , pasa por $1/\bar{w}$ (cf. [2] p. 32). En particular podemos observar que $I_g(0) = I_g(\infty)$.

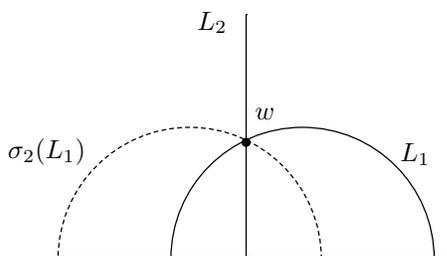


Figura 2.4: Círculos isométricos de una transformación elíptica y su inversa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 2.1.6 *Sea g una isometría hiperbólica en \mathbb{H}^2 (o en $M(\Delta)$); g es elíptica, parabólica o hiperbólica de acuerdo a que I_g e $I_{g^{-1}}$ se intersequen, sean paralelas o sean ajenas, respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos primero la necesidad tomando casos.

- (i) Caso elíptico. Si g es una transformación elíptica en $M(\Delta)$, se sigue del Teorema 1.0.5 que $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodésicas L_i , $i = 1, 2$, y se cumple que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 2.1.3, podemos suponer que $0 \in L_2$, se sigue entonces que $I_g = L_1$, ya que g actúa euclidianamente en L_1 . Se afirma que

$$\sigma_2(L_1) = I_{g^{-1}}.$$

Para probar esto se escribe $g^{-1} = \sigma_2(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)$; ahora, $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)$ es la reflexión en $\sigma_2(L_1)$ por el Corolario 1.0.4. Y como σ_2 es una isometría euclidiana, se sigue la afirmación, ya que g^{-1} actúa euclidianamente

en $\sigma_2(L_1)$. Finalmente, como L_1 y $\sigma_2(L_1)$ claramente se intersecan, se sigue este caso (Véase la Figura 2.3).

Si $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, de manera análoga al caso en Δ , usamos el Teorema 1.0.5, entonces $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodesicas L_i , $i = 1, 2$, y $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Aplicando el Lema 2.1.3, podemos suponer que L_2 sea ortogonal al eje real, se sigue que $I_g = L_1$. Una afirmación análoga a la anterior prueba que $\sigma_2(L_1) = I_{g^{-1}}$ y podemos concluir que $I_{g^{-1}}$ e I_g se intersecan (véase la Figura 2.4).

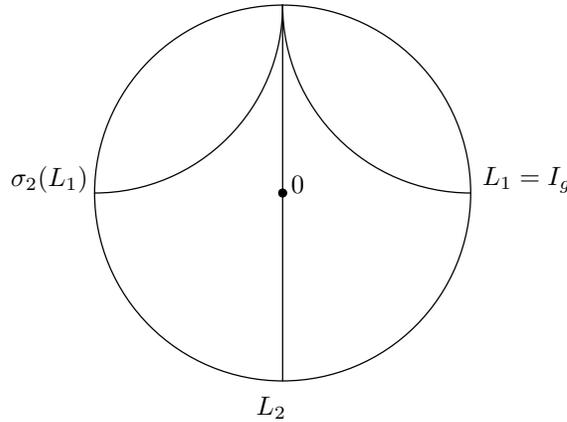


Figura 2.5: Círculos isométricos de una transformación parabólica y su inversa.

- (ii) Caso parabólico. Sea g parabólica en $M(\Delta)$, usando el Teorema 1.0.5 se tiene, $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodesicas L_i , $i = 1, 2$, y se cumple que L_1 es paralela a L_2 . Nuevamente podemos suponer que $0 \in L_2$, por el Lema 2.1.3, como en el caso anterior $I_g = L_1$, también, de manera análoga al caso elíptico se tiene

$$\sigma_2(L_1) = I_{g^{-1}}.$$

Por lo tanto, como L_1 es paralela a L_2 , I_g es paralela a $I_{g^{-1}}$ (véase la Figura 2.5).

Para el caso en que $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, la prueba es análoga al caso elíptico (véase la Figura 2.6).

- (iii) Caso hiperbólico. Si g es hiperbólica en $M(\Delta)$, usando el Teorema 1.0.5, se tiene $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodesicas

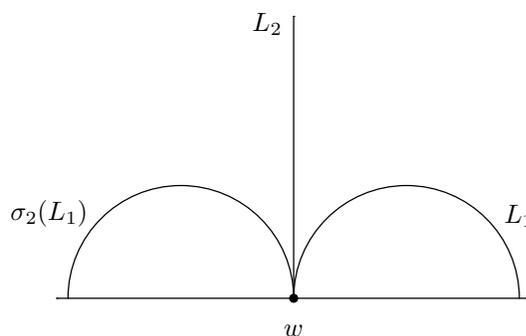


Figura 2.6: Círculos isométricos de una transformación parabólica y su inversa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

L_i , $i = 1, 2$, y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. De nuevo usando el Lema 2.1.3 se puede suponer que $0 \in L_2$ y se sigue que $L_1 = I_g$. Como en los casos anteriores $\sigma_2(L_1) = I_{g^{-1}}$, y se concluye que $I_g \cap I_{g^{-1}} = \emptyset$ (véase la Figura 2.7).

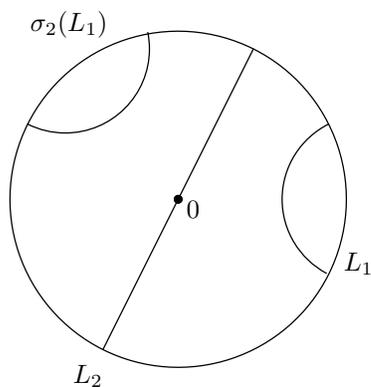


Figura 2.7: Círculos isométricos de una transformación hiperbólica y su inversa.

Para la prueba en \mathbb{H}^2 , sea M el eje de g y L_2 la geodésica que es ortogonal a M y a la recta real, como en los casos anteriores, usamos el Teorema 1.0.5 y escribimos $g = \sigma_2\sigma_1$, donde σ_i son reflexiones en las geodésicas L_i , $i = 1, 2$, y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, procedemos de manera análoga a los demás casos y concluimos que $I_g \cap I_{g^{-1}} = \emptyset$ (véase la Figura 2.8).

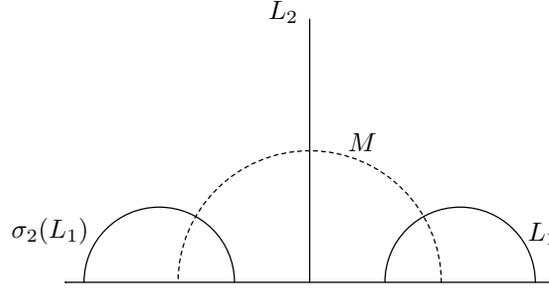


Figura 2.8: Círculos isométricos de una transformación hiperbólica y su inversa en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Probaremos ahora la suficiencia.

Si $I_g \cap I_{g^{-1}} \neq \emptyset$, se sigue de (ii) y (iii) que g es elíptica, etcétera.

□

2.2. Regiones canónicas

La región canónica de una isometría conforme g del plano hiperbólico se encuentra determinada por $\{g, g^{-1}\}$ y determina esta pareja de transformaciones, es decir, está íntimamente ligada a la acción geométrica de g . Intuitivamente es el lugar de los puntos en el plano hiperbólico, que se mueven menos que una cantidad fija determinada por la traza.

Definición 14 *Sea g una isometría conforme distinta de la identidad, y que no es elíptica de orden dos. La región canónica Σ_g está definida por*

$$\Sigma_g = \left\{ z \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) < \frac{1}{2} |tr(g)| \right\}. \quad (2.1)$$

Si g es de orden dos con punto fijo v , entonces $\Sigma_g = \{v\}$.

Nótese que si g es de orden dos $tr g = 0$, por lo que no se puede aplicar la definición dada por la ecuación (2.1).

Obsérvese que Σ_g y $\Sigma_{g^{-1}}$ describen la misma región, ya que

$$\rho(z, g(z)) = \rho(g^{-1}(z), g^{-1}(g(z))) = \rho(g^{-1}(z), z)$$

y como $|tr(g)| = |tr(g^{-1})|$, se sigue que $\Sigma_g = \Sigma_{g^{-1}}$.

A continuación mencionamos algunas de las propiedades de las regiones canónicas.

Teorema 2.2.1 *Sea g una isometría conforme en el plano hiperbólico, entonces Σ_g es invariante bajo conjugación, en el sentido de que si h es otra isometría conforme, se tiene*

$$\Sigma_{hgh^{-1}} = h(\Sigma_g).$$

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por P al plano hiperbólico, es decir, $P = \Delta$ o $P = \mathbb{H}^2$. Sea h una isometría conforme, entonces

$$\begin{aligned} h(\Sigma_g) &= \left\{ h(z) \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) < \frac{1}{2} |tr(g)| \right\} \\ &= \left\{ h(z) \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(h(z), h(g(z))) < \frac{1}{2} |tr(hgh^{-1})| \right\} \\ &= \left\{ w \mid \sinh \frac{1}{2} \rho(w, hgh^{-1}(w)) < \frac{1}{2} |tr(hgh^{-1})| \right\} = \Sigma_{hgh^{-1}}, \end{aligned}$$

donde, $z = h^{-1}(w)$.

Las igualdades anteriores se deben a que la traza es invariante bajo conjugación (cf. [5] p. 37) y a que g y h son isometrías hiperbólicas. □

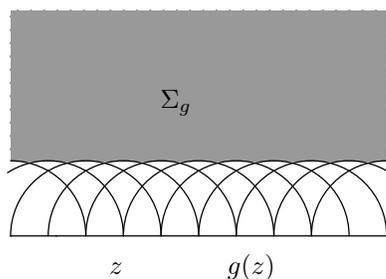


Figura 2.9: Región canónica de una traslación.

Probaremos que la región canónica Σ_g se puede construir de la siguiente manera. Si g no es de orden dos, entonces para cada z en el círculo al

infinito, sea L_z la geodésica que une z con $g(z)$. Si P denota al plano hiperbólico, se probará que

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z.$$

Para esto necesitamos primero un Lema. Escribimos L_z^g para L_z .

Lema 2.2.2 *Sea $B_g = P - \bigcup_z L_z^g$, entonces B es invariante bajo conjugación; es decir, si h es una isometría conforme, entonces*

$$h(B_g) = B_{hgh^{-1}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$A_g = \bigcup_z L_z^g,$$

es decir A_g es el complemento de B_g . Probaremos primero la invariabilidad de A_g , esto es, hay que probar que

$$h(A_g) = A_{hgh^{-1}}.$$

Como $A_g = \bigcup_z L_z^g$, entonces

$$\begin{aligned} h(A_g) &= h\left(\bigcup_z L_z^g\right) = \bigcup_z h(L_z^g) \\ &= \bigcup_{h(z)} L_{hz}^{hgh^{-1}} = \bigcup_w L_w^{hgh^{-1}} = A_{hgh^{-1}}, \end{aligned}$$

dado que $hgh^{-1}(h(z)) = hg(z)$, donde $h(z) = w$.

Finalmente, B_g también es invariante bajo conjugación, ya que como h es biyectiva.

$$\begin{aligned} h(B_g) &= h(P - A_g) = h(P \cap (A_g)^c) \\ &= h(P) \cap h((A_g)^c) = P \cap (h(A)_g)^c \\ &= P \cap (A_{hgh^{-1}})^c = P - A_{hgh^{-1}} = B_{hgh^{-1}}. \end{aligned}$$

□

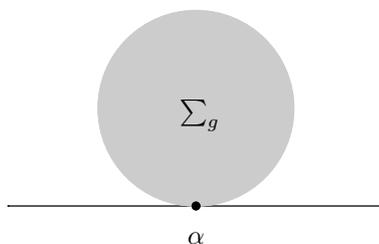


Figura 2.10: Región canónica de una transformación parabólica

Proposición 2.2.3 *Sea g una transformación parabólica, entonces*

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z.$$

DEMOSTRACIÓN. Hemos visto que Σ_g y $P - \bigcup_z L_z$, son invariantes bajo conjugación, por consiguiente basta probar la proposición para las traslaciones. Consideremos el caso en que $g(z) = z + 1$, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$, tenemos por el Teorema 1.0.1, que si g es parabólica, entonces $|tr(g)| = 2$.

Es fácil probar, usando (1.1) que se cumple la siguiente igualdad,

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, g(z)) = \frac{|z - g(z)|}{2 (Im[z] Im[g(z)])^{1/2}},$$

cf. [2] pp. 130-131. Por consiguiente, $z \in \Sigma_g$, si y sólo si

$$\frac{1}{2y} < \frac{1}{2} |tr(g)| = 1,$$

esto es,

$$\Sigma_g = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid Im z > \frac{1}{2} \right\}.$$

Falta probar que

$$\bigcup_z L_z = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid Im z \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Claramente el miembro izquierdo está contenido en el derecho. Ahora, sea $w \in \mathbb{H}^2$, $w = x_0 + iy_0$, tal que $y_0 < 1/2$ (si $y_0 = 1/2$, $w \in \bigcup_z L_z$),

tomando primero la geodésica por w , con centro euclidiano en x_0 , y posteriormente las geodésicas por w , con centro euclidiano x , $x \in \mathbb{R}$, $x > x_0$. Por continuidad una de estas geodésicas tiene radio $1/2$ (véase la Figura 2.9). \square

El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la Proposición al con-
jugar.

Corolario 2.2.4 *La región canónica de una función parabólica con punto fijo $\alpha \neq \infty$, es el disco tangente en α , a la recta real, llamado horodisco; y si $\alpha = \infty$, la región canónica de la función está dada por el conjunto $\{z \mid \text{Im } z > y_0\}$, donde $y_0 > 0$ (véase las Figuras 2.9 y 2.10).*

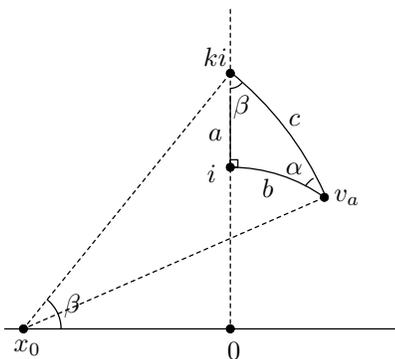


Figura 2.11: $\sinh b = \sinh c \sin \beta$.

Para el caso elíptico, usaremos el siguiente resultado de trigonometría hiperbólica (basado en el teorema de Pitágoras hiperbólico, cf. [2] Teorema 7.11.2), que es válido para cualquier triángulo con ángulos $\alpha, \beta, \pi/2$ y lados a, b, c , como en la Figura 2.11,

$$\sinh b = \sinh c \sin \beta. \quad (2.2)$$

También, aplicaremos la propiedad de paralelismo para T un triángulo con ángulos $\alpha, 0, \pi/2$ ($\alpha \neq 0$).

Teorema 2.2.5 *Para cualquier triángulo con ángulos $\alpha, 0, \pi/2$ ($\alpha \neq 0$), se tienen las siguientes igualdades*

$$\cosh b \sin \alpha = 1; \quad (2.3)$$

$$\sinh b \tan \alpha = 1; \quad (2.4)$$

$$\tanh b \sec \alpha = 1. \quad (2.5)$$

donde b es el lado finito del triángulo.

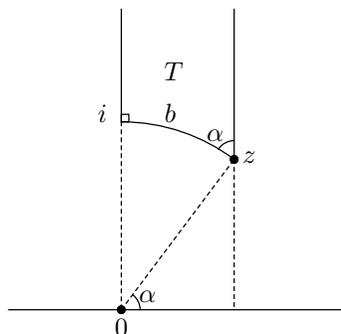


Figura 2.12: Propiedad de paralelismo.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, trabajaremos en \mathbb{H}^2 y asumiremos que los vértices son

$$v_c = i, v_b = \infty, v_a = z,$$

donde $z = x + iy$, por lo que $x^2 + y^2 = 1$. La primera igualdad se sigue usando (1.1) y $y = \sin \alpha$, entonces

$$\cosh b = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2y + 1}{2y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin \alpha},$$

por lo que se sigue (2.3). Demostraremos ahora la equivalencia de (2.4) con (2.5). Notemos que

$$\tanh b \sec \alpha = \frac{\sinh b}{\cosh b} \sec \alpha = 1 \iff \sinh b \sec \alpha = \cosh b$$

$$\iff \sinh b \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \iff \sinh b \tan \alpha = 1.$$

Sólo falta checar que (2.4) y (2.5) son equivalentes con (2.3), para esto observemos que

$$\sinh b \tan \alpha = \tanh b \sec \alpha$$

de donde

$$\frac{\sinh b \tan \alpha}{\tanh b \sec \alpha} = 1$$

y finalmente

$$\cosh b \sec \alpha = 1.$$

Por lo que las tres igualdades son equivalentes (véase la Figura 2.12). \square

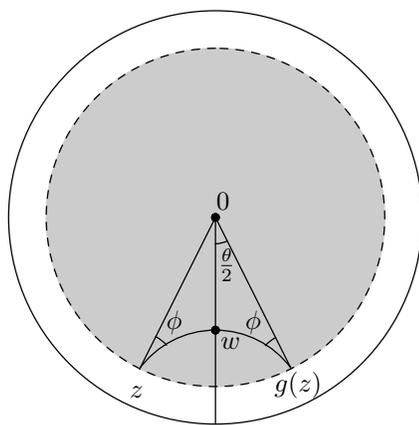


Figura 2.13: Prueba de la Proposición 2.2.6.

Proposición 2.2.6 *Sea g una transformación elíptica, entonces*

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z.$$

DEMOSTRACIÓN. Al igual que en el caso parabólico, basta probar el caso canónico, es decir, el caso $g(z) = e^{i\theta}z$, $g \in M(\Delta)$, donde $0 < \theta < \pi$ (si $\theta > \pi$, se puede tomar g^{-1}).

Sea $z \in \Delta$. Observemos que el triángulo formado por los vértices 0 , z , $g(z)$ tiene en 0 el ángulo de rotación de g . Además, ϕ el ángulo en z y $g(z)$ es el mismo, ya que si tomamos el bisector perpendicular al segmento de geodésica $[z, g(z)]$, éste pasa por 0 (ya que 0 equidista de z y $g(z)$, en virtud de la Proposición 1.0.6), y la reflexión sobre el bisector es conforme.

El bisector forma dos triángulos rectángulos con ángulos $\theta/2$ en 0 , ϕ en z y $\pi/2$ en w , el punto medio de $[z, g(z)]$, por lo que usando (2.2), aplicado al triángulo con vértices $0, z$ y w ; tenemos

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, g(z))\right) = \sinh\rho(z, 0) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.6)$$

véase la Figura 2.13.

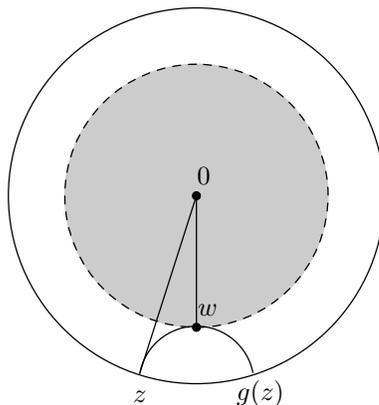


Figura 2.14: Geodésicas tangentes a la región canónica de una rotación.

Por otro lado, una matriz asociada a g en $SL(2, \mathbb{C})$ es

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix},$$

por lo que se tiene

$$\frac{1}{2} |tr(g)| = |\cos(\theta/2)|. \quad (2.7)$$

Por consiguiente, de (2.6), (2.7) y de la definición de Σ_g , se sigue que

$$\begin{aligned} \Sigma_g &= \left\{ z \mid \sinh\rho(z, 0) \sin(\theta/2) < |\cos(\theta/2)| \right\} \\ &= \left\{ z \mid \sinh\rho(z, 0) \frac{|\sin(\theta/2)|}{|\cos(\theta/2)|} < 1 \right\} \\ &= \left\{ z \mid \sinh\rho(z, 0) \tan(\theta/2) < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Falta probar

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z.$$

Para esto, dada $z \in \partial\Delta$, consideremos el triángulo formado por z , 0 y w donde w es el punto más cercano al origen en L_z (véase la Figura 2.14).

Ahora, es claro que al rotar z todos los puntos correspondientes w están en un mismo círculo, con centro en el origen. Usando la propiedad (2.4), que en nuestro caso está dada por

$$\tan(\theta/2) \sinh \rho(0, w) = 1,$$

se sigue que

$$\left\{ u \mid \tan(\theta/2) \sinh \rho(0, u) < 1 \right\} \subset P - \bigcup_z L_z.$$

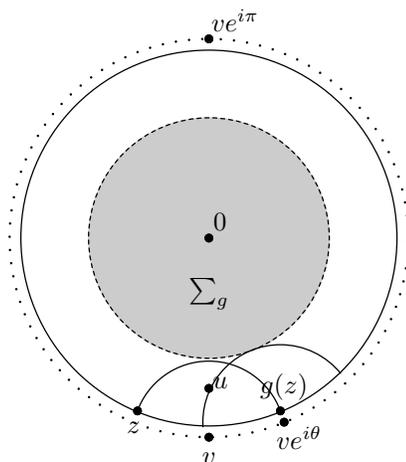


Figura 2.15: Las geodésicas $[z, g(z)]$ cubren $\Delta - \Sigma_g$.

Finalmente, falta probar que

$$P - \bigcup_z L_z \subset \left\{ u \mid \tan(\theta/2) \sinh \rho(0, u) < 1 \right\}.$$

Basta mostrar que si u está en el complemento del disco $D(0, r)$ en Δ , donde $\tan(\theta/2) \sinh r = 1$, entonces $u \in \bigcup_z L_z$.

Esta afirmación intuitivamente es evidente, sin embargo incluimos una demostración formal. Podemos considerar la geodésica que pasa por 0 y u y prolongarla hasta encontrar el centro del círculo euclidiano v , fuera de Δ que contiene la geodésica L_z que une z y $g(z)$. Por Pitágoras, tenemos $1 + r_0 = |v|^2$, donde r_0 es el radio del círculo euclidiano. Podemos ver claramente que $|u - v| \leq r_0$.

Rotando el centro v y manteniendo los radios euclidianos r_0 , se obtienen claramente todos los círculos ortogonales a $\partial\Delta$ que contienen a las geodésicas L_z . Por continuidad, para alguna φ , se tiene que el círculo con centro en $e^{i\varphi}v$ y radio r_0 , pasa por u ya que $|e^{i\pi}v - u| > r_0$ (véase la Figura 2.15). □

En analogía con el caso parabólico, al conjugar tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.7 *La región canónica generada por una transformación elíptica con punto fijo α , es un “disco” con centro hiperbólico en α (véase la Figura 2.16).*

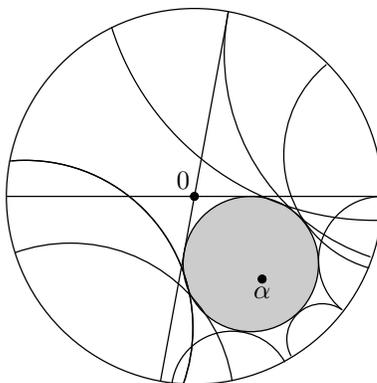


Figura 2.16: Región canónica de una transformación elíptica.

Para probar el caso hiperbólico, primero necesitamos introducir algunas ideas sobre las isometrías hiperbólicas. Se define el eje de una transformación hiperbólica g como la geodésica que une los puntos fijos de g . Definimos ahora la longitud de traslación T , de una isometría hiperbólica g como

$$T = \inf_z \rho(z, g(z)),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los puntos $z \in \mathbb{H}^2$. Nótese que T es invariante bajo conjugaciones, ya que si φ es una isometría, se tiene

$$\begin{aligned} \inf_z \rho(z, g(z)) &= \inf_z \rho(\varphi(z), \varphi g(z)) \\ &= \inf_w \rho(\varphi\varphi^{-1}(w), \varphi g\varphi^{-1}(w)), \end{aligned}$$

donde $\varphi(z) = w$. Resulta que $T > 0$. Para probar esto podemos conjugar g en $PSL(2, \mathbb{R})$ a $h(z) = kz$, $k > 1$.

Usando la fórmula de la distancia (1.1), se sigue fácilmente que

$$\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w)^{1/2}},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, h(z))\right) &= \frac{|z - h(z)|}{2(\operatorname{Im} z \operatorname{Im} h(z))^{1/2}} \\ &= \frac{|z||1 - k|}{2y\sqrt{k}} \geq \frac{k - 1}{2\sqrt{k}} > 0, \end{aligned}$$

y la igualdad se cumple en $z = iy$, por lo cual $\inf_z \rho(z, kz)$ se alcanza en el eje.

Nótese que se tiene

$$\sinh\left(\frac{1}{2}T\right) = \frac{k - 1}{2\sqrt{k}};$$

más aún,

$$T_h = \rho(ti, tki) = \rho(i, ki) = \log k.$$

donde T_h es la longitud de traslación de h .

Se cumple también que la traza determina la longitud de traslación T , ya que como

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{1}{2}T\right) &= 1 + \sinh^2\left(\frac{1}{2}T\right) \\ &= 1 + \frac{(k - 1)^2}{4k} = \frac{(k + 1)^2}{4k} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{1}{4}|tr^2(h)|, \end{aligned}$$

se tiene

$$\cosh\left(\frac{1}{2}T\right) = \frac{1}{2}|tr(h)|. \quad (2.8)$$

Usaremos también la siguiente propiedad relacionada con el paralelismo:

$$\cosh \rho(z, A) = \frac{1}{\cos \theta}, \quad (2.9)$$

donde A es el eje imaginario positivo y θ es el ángulo descrito en la Figura 2.17. La prueba se sigue fácilmente de (1.1), ya que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|x + iy - it|^2}{2yt} \\ &= \frac{2yt + x^2 + (y - t)^2}{2yt} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y} \end{aligned}$$

y si $t = |z|$ tenemos la igualdad. Por lo que $\cosh \rho(z, iz) = \frac{|z|}{y} = \frac{1}{\cos \theta}$ (véase la Figura 2.17).

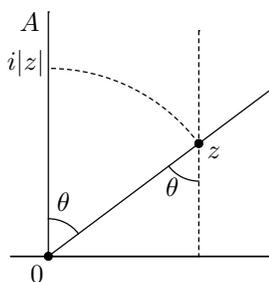


Figura 2.17: $\cosh \rho(z, A) \cos \theta = 1$.

Estas ideas tienen como consecuencia el siguiente resultado. Los detalles se pueden consultar en [2] p.p. 174-175 y en [8].

Teorema 2.2.8 *Sea g una isometría conforme hiperbólica del plano hiperbólico, con eje A y longitud de traslación T ; entonces*

$$\sinh \left(\frac{1}{2} \rho(z, g(z)) \right) = \cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right).$$

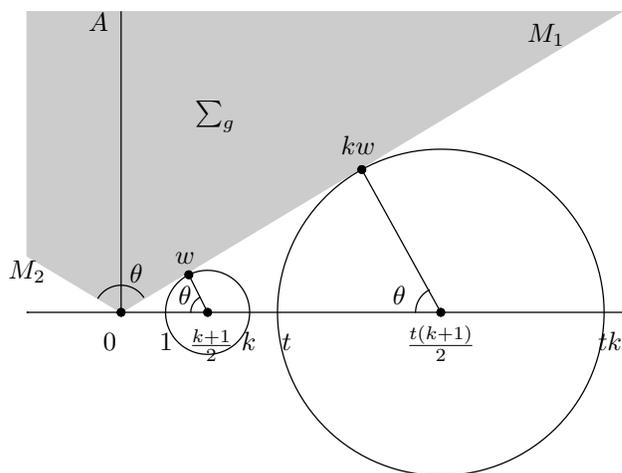


Figura 2.18: Región canónica de una homotecia.

Proposición 2.2.9 *Sea g una transformación hiperbólica; entonces*

$$\Sigma_g = P - \bigcup_z L_z.$$

DEMOSTRACIÓN. Análogamente a los casos anteriores, basta probar el caso canónico, es decir, $g(z) = kz$, $k > 1$, y $g \in \mathbb{H}^2$. Denotamos por A al eje imaginario positivo. Usando el Teorema 2.2.8 y la igualdad (2.8), tenemos que la región canónica está dada por

$$\Sigma_g = \left\{ z \mid \cosh \rho(z, A) \sinh \left(\frac{1}{2} T \right) < \cosh \left(\frac{1}{2} T \right) \right\},$$

o

$$\Sigma_g = \left\{ z \mid \cosh \rho(z, A) < \frac{\cosh(T/2)}{\sinh(T/2)} \right\}. \quad (2.10)$$

Para probar el resultado, primero hacemos unas observaciones.

Observación 1. *Los círculos que determinan a las geodésicas por t y kt , donde $t \in \mathbb{R}^+$, son todos tangentes a dos semirectas por el origen.*

Para probar esto, tomemos la geodésica que pasa por 1 y k . Sea M_1 la semirecta por el origen tangente a esta geodésica (véase la Figura 2.18); llamamos w al punto de tangencia de M_1 con dicha geodésica. Al aplicar

la homotecia $s \rightarrow st$, el círculo por $1, w, k$ va a otro círculo por t, tw, kt y claramente, éste contiene a la geodésica por t y kt . Como esto es válido para cualquier t , se sigue la observación (véase la Figura 2.18). El razonamiento es análogo para M_2 .

Observación 2.

$$\frac{\cosh(T/2)}{\sinh(T/2)} = \frac{1}{\cos \theta}, \quad (2.11)$$

donde θ es el ángulo determinado por M_1, M_2 con A .

Para probar esto, nótese que θ es también el ángulo formado en $(k+1)/2$ como en la Figura 2.18. Ahora, como el radio del círculo por 1 y k es $(k-1)/2$ y $T = \log k$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{k-1}{2}} = \frac{k+1}{k-1} = \frac{e^T + 1}{e^T - 1} \\ &= \frac{e^{T/2}}{e^{T/2}} \left(\frac{e^{T/2} + e^{-T/2}}{e^{T/2} - e^{-T/2}} \right) = \frac{\cosh(T/2)}{\sinh(T/2)}. \end{aligned}$$

Observación 3. Si $z \in M_1 \cup M_2$, se cumple

$$\cosh \rho(z, A) = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Esto se sigue de (2.9). Por consiguiente, la observación 2 y (2.10) implican que

$$\Sigma_g = \left\{ z \mid \cosh \rho(z, A) < \frac{1}{\cos \theta} \right\},$$

es decir, la región canónica está dada precisamente por la Figura 2.18, en virtud de la Observación 3.

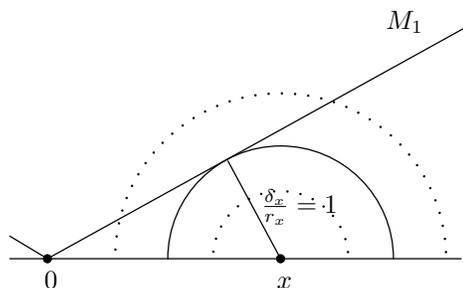
Ahora tomemos $u \in \Sigma_g$; entonces

$$\cosh \rho(u, A) < \frac{1}{\cos \theta}. \quad (2.12)$$

de donde se sigue claramente de la Observación 1 que $\Sigma_g \subset P - \bigcup_z L_z$.

Para probar la otra contención, notemos primero que

$$P - \bigcup_z L_z \subset \Sigma_g \iff (\Sigma_g)^c \subset \bigcup_z L_z.$$

Figura 2.19: Producto inversivo de Σ_x y M_1 .

Una forma de probar la contención usa técnicas elementales de geometría analítica. Alternativamente, podemos considerar $u \in (\Sigma_g)^c$, donde el punto $u = x_0 + y_0$, $x_0 > 0$ (el otro caso es análogo) y probar que existe una geodésica que contiene a u y que es tangente a la semirecta M_1 . Para esto, consideremos la familia de geodésicas que pasa por u y usemos el producto inversivo. Denotamos por Σ_x a los círculos que contienen a las geodésicas que pasan por u , donde x es el centro euclidiano de los círculos Σ_x , r_x su radio euclidiano y δ_x la distancia de x a M_1 . El producto inversivo de Σ_x y M_1 está dado por (1.4), es decir,

$$\frac{\delta_x}{r_x},$$

ésta es una función continua que depende de $x \in \mathbb{R}$, por lo que si

$$\frac{\delta_x}{r_x} > 1,$$

el círculo no interseca a M_1 , y si

$$\frac{\delta_x}{r_x} < 1,$$

el círculo interseca a M_1 , por lo tanto, por continuidad, haciendo $x \rightarrow 0$, existe una geodésica para la cual se cumple que

$$\frac{\delta_x}{r_x} = 1,$$

la cual es tangente a M_1 y pasa por u (véase la Figura 2.19). \square

Análogamente a los otros casos, al conjugar tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.10 *La región canónica generada por una transformación hiperbólica g , está dada por una región hipercíclica, alrededor del eje de g .*

(véase la Figura 2.20)

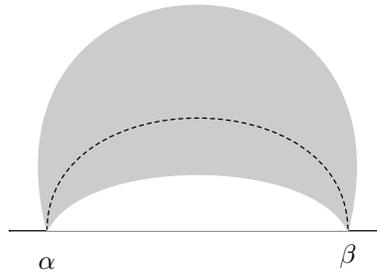


Figura 2.20: Región canónica de una transformación hiperbólica.

Teorema 2.2.11 *Sea g una isometría conforme en el plano hiperbólico; entonces, Σ_g determina el par $\{g, g^{-1}\}$, es decir, $\Sigma_g = \Sigma_h$ si y sólo si $h = g$ o $h = g^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia ya se probó. Para probar la necesidad, recordemos que la región canónica es invariante bajo conjugación, en el sentido del Teorema 2.2.1, por lo que sólo hay que considerar los casos canónicos.

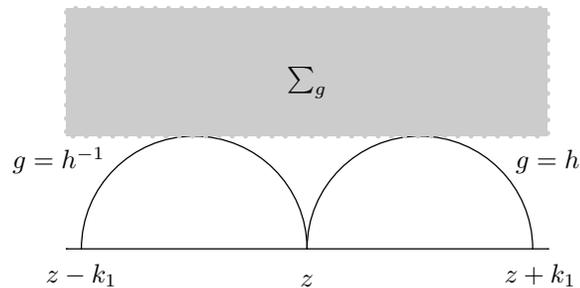


Figura 2.21: La región canónica determina la transformación, caso parabólico.

- (i) Si g es una traslación $g(z) = z + k_1$, entonces la región canónica Σ_g es un horociclo con ∞ como su punto fijo, ahora claramente h también es una traslación, ya que $\Sigma_g = \Sigma_h$. Entonces si $h(z) = z + k_2$, tenemos $k_1 = k_2$ ó $k_1 = -k_2$, (debido a que las geodésicas que determinan la región canónica tiene la misma *altura*) por lo cual $g = h$ o $g = h^{-1}$. Véase la Figura 2.21.

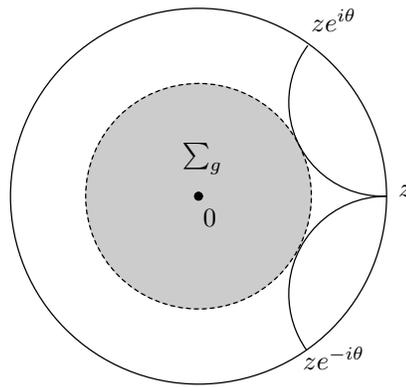


Figura 2.22: La región canónica determina la transformación, caso elíptico.

- (ii) Si g es una rotación $g(z) = e^{i\theta_1}z$, la región canónica es un círculo con centro en el origen. De nuevo, como $\Sigma_g = \Sigma_h$, entonces, $h(z) = e^{i\theta_2}z$, por lo que $\theta_1 = \theta_2$ ó $\theta_1 = -\theta_2$, ya que si $z \in \partial\Delta$, la geodésica $[z, h(z)]$ debe ser tangente a $\partial\Sigma_g = \partial\Sigma_h$. Por lo cual $g = h$ ó $g = h^{-1}$. Véase la Figura 2.22.

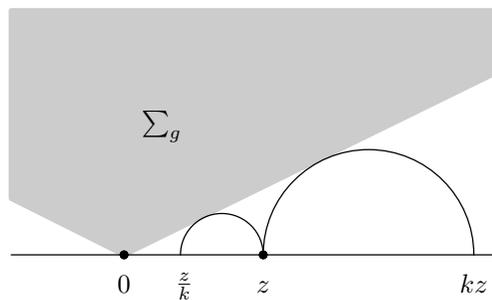


Figura 2.23: La región canónica determina la transformación, caso hiperbólico.

- (iii) Por último, si g es una homotecia $g = k_1z$, la región canónica es un hiperciclo determinado por 0 e ∞ . Una vez más, como $\Sigma_g = \Sigma_h$, $h(z)$ es una homotecia $h(z) = k_2z$, por lo que $k_1 = k_2$ o $k_1 = -k_2$, ya que las geodésicas $[z, h(z)]$ son tangentes a la región canónica; con esto podemos concluir que $g = h$ o $g = h^{-1}$. Véase la Figura 2.23.

□

Por último observemos que Σ_g puede ser construida a partir de los puntos fijos de g y un par $[z, g(z)]$, en el círculo al infinito. Esto es claro para el caso canónico y el caso general se sigue por conjugación. Nótese también que $\partial\Sigma_g$ está formada por una o dos curvas de la familia de curvas ortogonales al haz de geodésicas asociado a g .

CAPÍTULO 3

La geometría del producto de isometrías

Discutiremos en esta sección los productos de isometrías conformes en el plano hiperbólico. Para esto se usará la descripción de una isometría como reflexión en dos geodésicas. La posición relativa de las geodésicas determina la naturaleza de la isometría.

Teorema 3.0.12 Sean L_1, L_2 dos geodésicas distintas σ_i la reflexión en cada L_i , $i = 1, 2$, y $g = \sigma_1\sigma_2$. Entonces, el producto inversivo (L_1, L_2) satisface

$$(L_1, L_2) = \frac{1}{2} |tr(g)|.$$

Antes de probar el teorema, demostramos unos lemas que establecen resultados recíprocos al Teorema 1.0.5 y también un resultado que proporciona una interpretación geométrica del producto inversivo en términos de la métrica hiperbólica.

Lema 3.0.13 Sea g una isometría en el plano hiperbólico de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, 2$, con L_1, L_2 paralelas; entonces g es parabólica.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad trabajamos en \mathbb{H}^2 . Sea ψ una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$, de tal forma que $\psi(z_0) = \infty$ donde z_0 es el punto de tangencia de L_1 y L_2 . De esta forma, tenemos

$$\psi g \psi^{-1} = z + t, \quad t \in \mathbb{R},$$

por lo cual g es parabólica. □

Lema 3.0.14 *Sea g una isometría en el plano hiperbólico de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, 2$, y $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$; entonces g es elíptica.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos trabajar en Δ . Sea $z_0 \in \Delta$, $\{z_0\} = L_1 \cap L_2$. Podemos suponer que $z_0 = 0$ (conjugando con una transformación en $M(\Delta)$) y es fácil probar que g es una rotación. \square

Lema 3.0.15 *Sea g una isometría en la cerradura del plano hiperbólico de la forma $\sigma_2\sigma_1$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, 2$, con L_1, L_2 ajenas, entonces g es hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sean L_1, L_2 dos geodésicas ajenas en \mathbb{H}^2 . Entonces, existe $\psi \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que manda L_1 en la geodésica $|z| = 1$ y L_2 en la geodésica $|z| = k$, $k \in \mathbb{R}^+$. Para hacer esto, se toma la transformación que envía L la ortogonal común a L_1 y L_2 en el semieje imaginario positivo y posteriormente, si es necesario, una homotecia. Ahora se tiene que

$$\varphi(z) = \psi\sigma_2\psi^{-1}\psi\sigma_1\psi^{-1}(z) = k^2z,$$

que es una homotecia, por lo cual g es hiperbólica. \square

Teorema 3.0.16 *El producto inversivo de dos “círculos” L_1, L_2 que no se intersecan está dado por*

$$(L_1, L_2) = \cosh \rho(L_1, L_2).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean L_1, L_2 dos círculos de tal forma que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y sea A el círculo ortogonal a cada uno de estos. Tomemos φ una transformación en $PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $\varphi(A) = I$, donde I es el eje imaginario positivo, por lo que $\varphi(L_1) = C_1 = \{z \mid |z| = r\}$ y $\varphi(L_2) = C_2 = \{z \mid |z| = R\}$, y se puede suponer que $R > r$.

De la definición del producto inversivo (1.3), tenemos

$$\begin{aligned} (\varphi(L_1), \varphi(L_2)) &= \frac{r^2 + R^2}{2rR} \\ &= \frac{r^2 + R^2 + 2rR - 2rR}{2rR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{|ir - iR|^2}{2rR} = \cosh \rho(ir, iR) \\
&= \cosh \rho(\varphi(L_1), \varphi(L_2)).
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que la distancia entre dos geodésicas disjuntas se alcanza a lo largo de su ortogonal común cf. [2] p. 166. Finalmente, el producto inversivo y la distancia hiperbólica son invariantes bajo transformaciones de Möbius (cf. Teorema 1.0.7), por lo cual

$$(L_1, L_2) = (\varphi(L_1), \varphi(L_2)) = \cosh \rho(\varphi(L_1), \varphi(L_2)) = \cosh \rho(L_1, L_2)$$

de donde se sigue el resultado. □

DEMOSTRACIÓN. [Del Teorema 3.0.12] Probamos este resultado por casos.

Si L_1, L_2 son paralelas, entonces por el Lema 3.0.13, g es parabólica, por lo que $|tr(g)| = 2$ y además, como se mencionó en los preliminares

$$(L_1, L_2) = 1.$$

Si L_1, L_2 se intersecan con un ángulo θ , $0 < \theta \leq \pi/2$, entonces por el Lema 3.0.14, g es elíptica. Ahora recordemos del capítulo de preliminares que

$$(L_1, L_2) = \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo de intersección de L_1 y L_2 . Ahora, usando el Teorema 1.0.5 se puede suponer que g es una rotación, por lo que

$$|tr(g)| = tr \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = 2 \cos \theta,$$

ya que el ángulo de rotación es 2θ .

Si L_1, L_2 son disjuntas, entonces por el Lema 3.0.15, g es hiperbólica. Se probó que

$$\frac{1}{2} T = \rho(L_1, L_2), \tag{3.1}$$

donde T es la longitud de traslación. Ahora, por el Teorema 3.0.16, tenemos

$$(L_1, L_2) = \cosh \rho(L_1, L_2),$$

por lo que usando (2.8) y (3.1) se tiene

$$(L_1, L_2) = \cosh \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} |tr(g)|.$$

□

Dadas dos isometrías $g = \sigma_1\sigma_2$ y $h = \sigma_3\sigma_4$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, \dots, 4$, se puede tomar en algunos casos $L_2 = L = L_3$, donde L_2 pertenece al haz de geodésicas asociado a g y L_3 pertenece al haz de geodésicas asociado a h . Por lo que $\sigma_2 = \sigma_3$, y se tiene

$$gh = (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_3\sigma_4) = (\sigma_1\sigma_4).$$

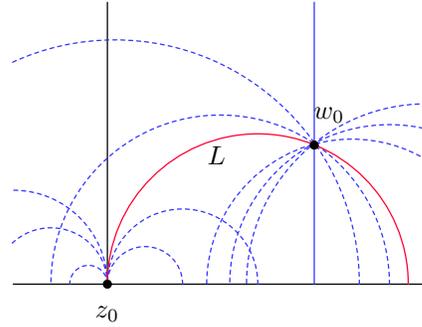


Figura 3.1: Haces de geodésicas asociados a una transformación elíptica y una parabólica.

Es fácil ver que siempre existe L cuando una de las transformaciones es parabólica o elíptica (véanse las Figuras 3.1 y 3.2). Para el caso en que tanto g como h son isometrías hiperbólicas, esta propiedad no necesariamente se cumple.

Proposición 3.0.17 Sean g y h dos isometrías hiperbólicas tales que sus ejes se intersecan o son paralelos; entonces, los haces de geodésicas definidos por g y h son ajenos.

DEMOSTRACIÓN. Sean A_g y A_h los ejes de las isometrías g y h , donde $A_g \cap A_h \neq \emptyset$, o son paralelos. Supongamos que existe L una geodésica, ortogonal tanto a A_g como a A_h , entonces, la suma interna de los ángulos del triángulo formado por L , A_g y A_h , está dada por

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha \geq \pi,$$

lo que contradice que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea menor a π , por lo que dicha geodésica no existe (cf. [2] p.p. 150,151). \square

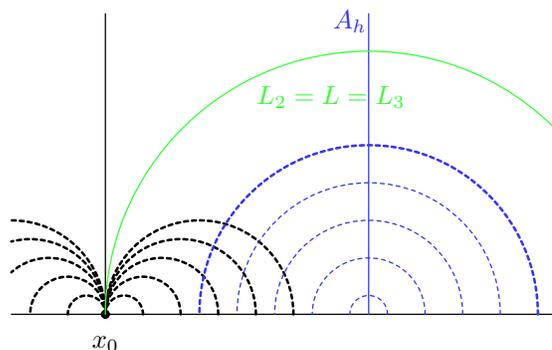


Figura 3.2: Haces de geodésicas asociados a una transformación parabólica y una hiperbólica.

Bajo la notación previa a la Proposición 3.0.17 y usando el Teorema 3.0.12, tenemos

$$|tr(gh)| = 2(L_1, L_4).$$

Los siguientes teoremas, proporcionan información sobre los productos de isometrías, tomando en cuenta la posición relativa de L_1 y L_4 , y nos permite conocer la naturaleza del producto.

Teorema 3.0.18 Sean g, h isometrías elípticas, donde g es una rotación de ángulo 2θ alrededor de u y h una rotación de ángulo 2ϕ alrededor de v . Se supone también que g y h son rotaciones en el mismo sentido, $u \neq v$, y $\theta, \phi \in (0, \pi)$, entonces

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \cosh \rho(u, v) \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \cos \phi.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que g y h son transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ y u, v están en el eje imaginario positivo, que denotamos por L . Usando el Lema 2.1.3, se puede escribir $g = \sigma_1 \sigma_2$, $h = \sigma_3 \sigma_4$, donde σ_i es la reflexión en la geodésica L_i , $i = 1, \dots, 4$,

y $L_2 = L = L_3$. Usaremos la misma notación para las geodésicas que para los círculos que las contienen.

Deduciremos las ecuaciones de L_1, L_4 a partir del círculo que las origina (véase la Figura 3.3). Encontramos primero la ecuación para L_1 .

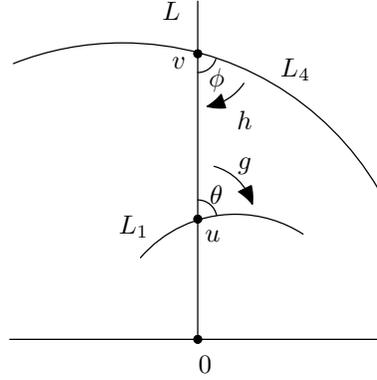


Figura 3.3: Prueba del Teorema 3.0.18.

Notemos que los centros de los círculos no pueden ambos tener el mismo signo, ya que las rotaciones de las isometrías se suponen en el mismo sentido. Sea x_0 el centro del círculo que contiene a L_1 (suponemos $x_0 > 0$, de otra manera, podemos conjugar con $z \mapsto -1/z$ para llegar a esto). Por Pitágoras tenemos

$$(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2 + s^2,$$

donde $u = is$. Podemos observar que

$$\cot \theta = \frac{x_0}{s}$$

o

$$x_0 = s \cot \theta, \tag{3.2}$$

donde $0 < \theta < \pi$ (véase la Figura 3.4), por lo que

$$(x - s \cot \theta)^2 + y^2 = s^2 \cot^2 \theta + s^2$$

y

$$x^2 + y^2 - 2sx \cot \theta - s^2 = 0.$$

La ecuación del círculo por L_4 se encuentra de forma similar; la única diferencia es el signo del centro de la geodésica, es decir,

$$x_1 = -t \cot \phi \quad (3.3)$$

donde $v = it$ y $0 < \phi < \pi$ (véase la Figura 3.5). De esta forma la ecuación está dada por

$$x^2 + y^2 + 2xt \cot \phi - t^2 = 0.$$

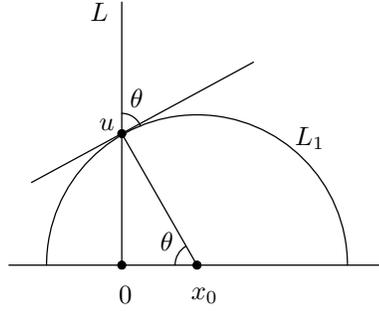


Figura 3.4: Centro de la geodésica L_1 .

Para encontrar el producto inversivo (L_1, L_4) , notemos que el radio de L_1 está dado por

$$(r_{L_1})^2 = s^2 \cot^2 \theta + s^2 = s^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1 \right) = s^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right)$$

y análogamente el de L_4 , está dado por

$$(r_{L_4})^2 = t^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \phi} \right),$$

usando los radios, los centros (3.2), (3.3) y la definición del producto inversivo (1.3), tenemos que

$$\begin{aligned} (L_1, L_4) &= \left| \frac{\frac{s^2}{\sin^2 \theta} + \frac{t^2}{\sin^2 \phi} - |s \cot \theta + t \cot \phi|^2}{2 \frac{s}{\sin \theta} \frac{t}{\sin \phi}} \right| \\ &= \frac{\sin \theta \sin \phi}{2st} \left| \frac{s^2}{\sin^2 \theta} + \frac{t^2}{\sin^2 \phi} - \left| s \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + t \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right|^2 \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{2st} \left| \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 \phi} - \left(s \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} + t \frac{\cos \phi}{\operatorname{sen} \phi} \right)^2 \right| \\
&= \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{2st} \left| \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} - s^2 \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 \phi} - t^2 \frac{\cos^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi} - 2st \frac{\cos \theta \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \right| \\
&= \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{2st} \left| s^2 + t^2 - 2st \frac{\cos \theta \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} \right| \\
&= \left| \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}{2st} (s^2 + t^2) - \cos \theta \cos \phi \right| \\
&= \left| \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi - \cos \theta \cos \phi \right|.
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que $\rho(u, v) = \log\left(\frac{s}{t}\right)$, por lo que

$$\cosh\left(\log\frac{s}{t}\right) = \frac{e^{\log\frac{t}{s}} + e^{-\log\frac{t}{s}}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{s} + \frac{s}{t} \right),$$

y se sigue el teorema, en virtud del Teorema 3.0.12. □

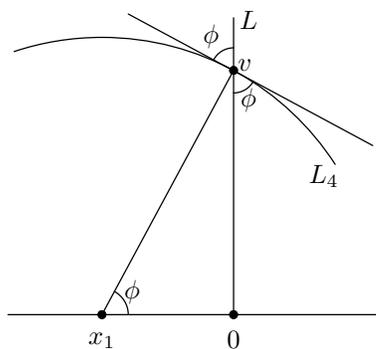


Figura 3.5: Centro de la geodésica L_4 .

Nótese que la fórmula del teorema muestra que en el caso en que los ángulos θ y ϕ se acerquen a $\pi/2$, las geodésicas L_1 y L_4 se acercarán a semicírculos ortogonales al eje imaginario y el producto gh se aproximará a

ser hiperbólico, de igual forma, si la distancia $\rho(u, v)$ es muy grande. Esto se puede intuir también gráficamente.

Corolario 3.0.19 *Bajo las hipótesis del Teorema 3.0.18, el producto gh es parabólico si y sólo si*

$$\cosh \rho(u, v) = \frac{1 + \cos \theta \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}.$$

DEMOSTRACIÓN. El producto gh es parabólico si y sólo si $|tr(gh)| = 2$, y esto se cumple si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 &= \cosh \rho(u, v) \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi - \cos \theta \cos \phi, \\ \iff \frac{1 + \cos \theta \cos \phi}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi} &= \cosh \rho(u, v). \end{aligned}$$

□

Esta última fórmula coincide con un resultado de trigonometría hiperbólica, que relaciona los ángulos de un triángulo con uno de sus lados, es decir, para cualquier triángulo en \mathbb{H}^2 con ángulos $\alpha, \beta, 0$ se tiene la siguiente relación (véase la Figura 3.6)

$$\cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta},$$

cf. [2] p. 146.

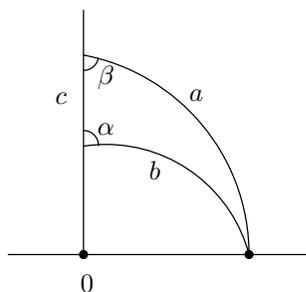


Figura 3.6: Triángulo con ángulos $\alpha, \beta, 0$.

Discutiremos ahora los casos del producto gh donde g y h son isometrías hiperbólicas.

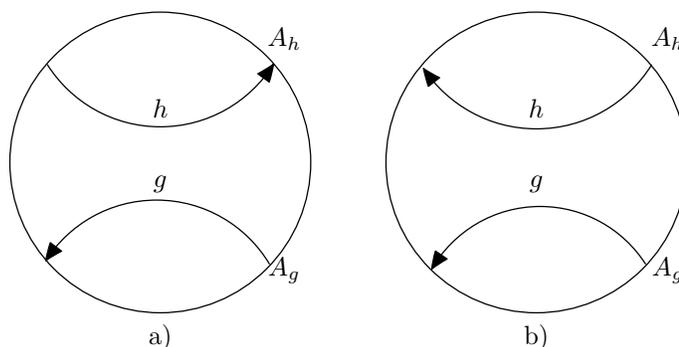


Figura 3.7: a) $\varepsilon = -1$ b) $\varepsilon = 1$.

Teorema 3.0.20 Sean g y h dos transformaciones hiperbólicas con longitudes de traslación T_g, T_h y ejes disjuntos A_g, A_h , entonces

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \left| \cosh \rho(A_g, A_h) \sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \varepsilon \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) \right|,$$

donde $\varepsilon = \pm 1$, dependiendo de las direcciones relativas de g y h , conforme a la Figura 3.7.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, suponemos que el eje imaginario es la ortogonal común a A_g y A_h . Usaremos la terminología previa a la Proposición 3.0.17, esto es, el eje imaginario se denota por $L_2 = L = L_3$ y podemos tomar

$$gh = (\sigma_4 \sigma_3)(\sigma_2 \sigma_1) = \sigma_4 \sigma_1.$$

Ahora se sigue del Teorema 3.0.12 que

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = (L_4, L_1).$$

Analizaremos primero el caso $\varepsilon = -1$, es decir, la dirección de las transformaciones g y h es distinta, por lo que los centros de los círculos que determinan las geodésicas L_1 y L_4 son, sin pérdida de generalidad, positivos (véase la Figura 3.8). Si A_h y A_g están dados por ecuaciones de la forma $|z| = t$ y por $|z| = s$, respectivamente, entonces tenemos que

$$\text{sen } \theta = \frac{t}{x_1},$$

donde x_1 es el centro del círculo que contiene a la geodésica L_1 , por lo que

$$x_1 = \frac{t}{\operatorname{sen} \theta}. \quad (3.4)$$

Para obtener el radio de L_1 que denotamos por r_1 , notemos que

$$\tan \theta = \frac{t}{r_1},$$

por lo que

$$r_1 = \frac{t}{\tan \theta}. \quad (3.5)$$

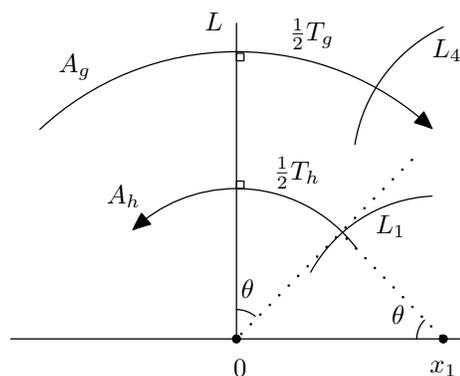


Figura 3.8: Prueba del Teorema 3.0.20.

Usando (3.5) se obtiene la ecuación del círculo que contiene a L_1

$$|z - x_1| = \frac{t}{\tan \theta},$$

y en virtud de (3.4), se tiene

$$\left(x - \frac{t}{\operatorname{sen} \theta}\right)^2 + y^2 = \frac{t^2}{\tan^2 \theta},$$

desarrollando, obtenemos

$$x^2 - \frac{2xt}{\operatorname{sen} \theta} + y^2 + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{t^2}{\tan^2 \theta} = 0,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2xt}{\operatorname{sen} \theta} + t^2 \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) = 0,$$

como

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 1,$$

entonces

$$(x^2 + y^2) - \frac{2xt}{\operatorname{sen} \theta} + t^2 = 0$$

y

$$(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \theta - 2xt + t^2 \operatorname{sen} \theta = 0. \quad (3.6)$$

Aplicando la propiedad de paralelismo (2.5) a nuestro caso, tenemos

$$\tanh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \sec (\pi/2 - \theta) = 1,$$

llamamos $\varphi = \pi/2 - \theta$, entonces

$$\tanh \left(\frac{1}{2} T_h \right) = \frac{1}{\sec \varphi} = \cos \varphi,$$

y

$$\tanh \left(\frac{1}{2} T_h \right) = \operatorname{sen} \theta.$$

Sustituyendo en (3.6), tenemos

$$\tanh \left(\frac{1}{2} T_h \right) (x^2 + y^2) - 2xt + t^2 \tanh \left(\frac{1}{2} T_h \right) = 0. \quad (3.7)$$

Aplicando el mismo razonamiento para la ecuación que define L_4 , se obtiene

$$\left(x - \frac{s^2}{\operatorname{sen} \phi} \right)^2 + y^2 = \frac{s^2}{\tan^2 \phi},$$

de donde

$$\tanh \left(\frac{1}{2} T_g \right) (x^2 + y^2) - 2xs + s^2 \tanh \left(\frac{1}{2} T_g \right) = 0. \quad (3.8)$$

Para determinar el producto inversivo (L_1, L_4) , usamos la definición (1.2), que involucra al vector de coeficientes de las ecuaciones (3.7) y (3.8). Los coeficientes de cada ecuación están dados por

$$\left(\tanh \frac{1}{2} T_g, s, 0, s^2 \tanh \frac{1}{2} T_g \right),$$

para la ecuación de L_4 , y

$$\left(\tanh \frac{1}{2} T_h, t, 0, t^2 \tanh \frac{1}{2} T_h \right)$$

para la ecuación de L_1 . Sustituyendo cada uno de estos coeficientes en la definición (1.2), tenemos que (L_1, L_4) es igual a

$$\frac{\left| 2(ts) - s^2 \tanh \frac{1}{2} T_h \tanh \frac{1}{2} T_g - t^2 \tanh \frac{1}{2} T_g \tanh \frac{1}{2} T_h \right|}{2(t^2 - t^2 \tanh^2 \frac{1}{2} T_g)^{1/2} (s^2 - s^2 \tanh^2 \frac{1}{2} T_h)^{1/2}}, \quad (3.9)$$

notamos que el factor del denominador

$$t^2(1 - \tanh^2 \frac{1}{2} T_g),$$

se puede reescribir como

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2 \frac{1}{2} T_g &= 1 - \frac{\sinh^2 \frac{1}{2} T_g}{\cosh^2 \frac{1}{2} T_g} \\ &= \frac{\cosh^2 \frac{1}{2} T_g - \sinh^2 \frac{1}{2} T_g}{\cosh^2 \frac{1}{2} T_g} = \frac{1}{\cosh^2 \frac{1}{2} T_g}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (3.9), tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\left| 2st - (s^2 + t^2) (\tanh \frac{1}{2} T_h \tanh \frac{1}{2} T_g) \right|}{2 \left(\frac{t^2}{\cosh^2 \frac{1}{2} T_g} \right)^{1/2} \left(\frac{s^2}{\cosh^2 \frac{1}{2} T_h} \right)^{1/2}} \\ &= \cosh \frac{1}{2} T_g \cosh \frac{1}{2} T_h \frac{\left| 2st - (s^2 + t^2) (\tanh \frac{1}{2} T_h \tanh \frac{1}{2} T_g) \right|}{2st}, \end{aligned}$$

sabemos que $s, t > 0$ y $\cosh x > 1$, para toda x , por lo que esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} &\cosh \frac{1}{2} T_g \cosh \frac{1}{2} T_h \left| 1 - \frac{s^2 + t^2}{2st} (\tanh \frac{1}{2} T_h \tanh \frac{1}{2} T_g) \right| \\ &= \left| \cosh \frac{1}{2} T_g \cosh \frac{1}{2} T_h - \frac{s^2 + t^2}{2st} (\sinh \frac{1}{2} T_g \sinh \frac{1}{2} T_h) \right|. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{s^2 + t^2}{2st} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right) = \cosh \rho(is, it) = \cosh \rho(A_g, A_h),$$

aplicando el Teorema 3.0.12, se sigue de (3.8) y (3.9) el resultado.

Para el caso $\varepsilon = 1$, podemos modificar la Figura 3.8, de tal forma que L_1 y L_4 se encuentren en lados opuestos con respecto a L , y la demostración se sigue de manera análoga al caso $\varepsilon = -1$ (véase Figura 3.9). □

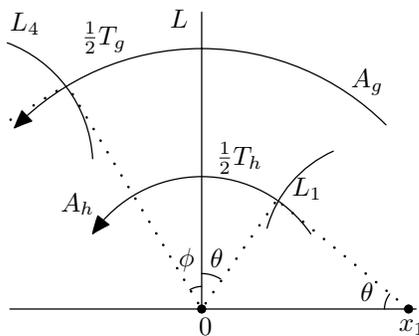


Figura 3.9: Prueba del Teorema 3.0.20, caso $\varepsilon = 1$.

Corolario 3.0.21 *Bajo la hipótesis del Teorema 3.0.20, si las direcciones relativas de g, h son tales que $\varepsilon = 1$ (véase la Figura 3.7), entonces el producto gh es hiperbólico.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\cosh(x) \geq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y $\sinh(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\left| \cosh \rho(A_g, A_h) \sinh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \sinh \left(\frac{1}{2} T_h \right) + \cosh \left(\frac{1}{2} T_g \right) \cosh \left(\frac{1}{2} T_h \right) \right| > 1,$$

y usando el Teorema 3.0.20, tenemos

$$|tr(gh)| > 2,$$

por lo que gh es una transformación hiperbólica. □

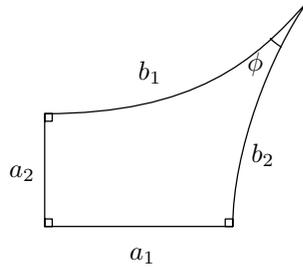


Figura 3.10: Cuadrilátero de Lambert.

Corolario 3.0.22 Sean g, h isometrías hiperbólicas con ejes A_g, A_h disjuntos y con la misma longitud de traslación T , supongamos también que los productos gh y gh^{-1} no son elípticos, entonces

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(A_g, A_h) \sinh \frac{1}{2} T \geq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Analizaremos primero el caso $\varepsilon = -1$. Como tanto g como h son hiperbólicas y su longitud de traslación $T_g = T = T_h$, es la misma, entonces de la fórmula del Teorema 3.0.20, tenemos

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \left| \cosh \rho(A_g, A_h) \sinh^2 \frac{1}{2} T - \cosh^2 \frac{1}{2} T \right|,$$

usando la identidad de trigonometría hiperbólica

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2 \sinh^2 x,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |tr(gh)| &= \left| (2 \sinh^2 [\frac{1}{2} \rho(A_g, A_h)] + 1) \sinh^2 \frac{1}{2} T - (1 + \sinh^2 \frac{1}{2} T) \right|, \\ &= \left| 2 \sinh^2 [\frac{1}{2} \rho(A_g, A_h)] \sinh^2 \frac{1}{2} T - 1 \right|. \end{aligned}$$

Ahora por hipótesis $\frac{1}{2} |tr(gh)| \geq 1$, por lo que si

$$1 - 2 \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(A_g, A_h) \sinh^2 \frac{1}{2} T \geq 1,$$

se tendría

$$-2 \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(A_g, A_h) \geq 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto

$$2 \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(A_g, A_h) \sinh^2 \frac{1}{2} T - 1 \geq 1.$$

Para el caso en que $\varepsilon = 1$, se puede sustituir h por h^{-1} y proceder de manera idéntica. □

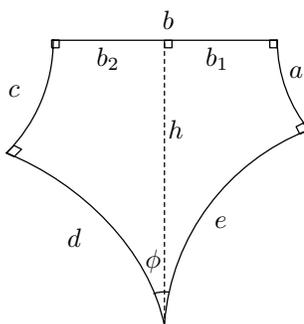


Figura 3.11: Pentágono hiperbólico.

Otra prueba de este corolario se puede deducir de la trigonometría hiperbólica de pentágonos, para esto usamos el cuadrilátero de Lambert.

A un cuadrilátero hiperbólico formado por tres ángulos rectos y el cuarto, ϕ , está definido en $0 \leq \phi < \pi/2$ se le llama de Lambert y cumple la siguiente igualdad (véase la Figura 3.10).

$$\sinh a_1 \sinh a_2 = \cos \phi. \quad (3.11)$$

También se usará la siguiente relación del pentágono hiperbólico, ilustrada en la Figura 3.11, donde $\phi = \pi/2$,

$$\sinh a \sinh b = \cosh d \quad (3.12)$$

Las pruebas de estos resultados se pueden consultar en [2] p.p. 156-160, y con más detalle en [1].

Sin pérdida de generalidad trabajamos en Δ , probamos como antes el caso $\varepsilon = -1$ y suponemos como en los casos anteriores que $L_2 = L = L_3$ es la geodésica ortogonal a los ejes A_g, A_h y está dada por el diámetro $(-1, 1)$, y además, el punto medio entre A_g y A_h es el origen (véase la Figura 3.12).

Trabajamos en el semiplano inferior de Δ , por lo cual la transformación h se escribe como $\sigma_3 \sigma_4$, donde $\sigma_i, i = 3, 4$, es la reflexión en las geodésicas L_i , y L_4 está en el semiplano inferior. Haciendo el producto

$$gh = (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_3 \sigma_4) = \sigma_1 \sigma_4,$$

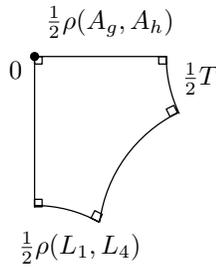


Figura 3.14: Pentágono hiperbólico.

Para el caso en que el producto gh sea parabólico, usamos (3.11) y obtenemos,

$$\sinh \frac{1}{2}T \sinh \frac{1}{2}\rho(A_g, A_h) = \cos 0 = 1,$$

por lo que también se cumple el corolario (véase la Figura 3.15).

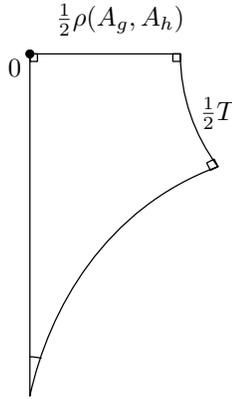


Figura 3.15: Cuadrilátero hiperbólico.

En la construcción anterior se observa que si la longitud de traslación T es muy grande, el producto gh es hiperbólico; es decir, las geodésicas L_1 y L_4 no se intersecan. En cambio, si T es pequeña, el producto será elíptico, es decir, ocurre que $L_1 \cap L_4 \neq \emptyset$, por lo que, por continuidad (al variar el haz de geodésicas), existe una longitud T_1 , de tal forma que

$$\sinh \frac{1}{2}\rho(A_g, A_h) \sinh \frac{1}{2}T_1 = 1.$$

Por último consideramos el caso en que los ejes A_g, A_h asociados a las transformaciones g y h respectivamente, se intersecan. Para demostrar este

caso se usará una expresión alterna de las isometrías hiperbólicas y la ley de cosenos hiperbólicos.

Teorema 3.0.23 *Sea g una isometría, entonces g es hiperbólica si y sólo si se puede expresar como*

$$\varepsilon_2 \varepsilon_1,$$

donde ε_i , $i = 1, 2$ son transformaciones elípticas de orden dos con puntos fijos v_1, v_2 en el eje de g . Más aún, uno de los puntos se puede tomar de manera arbitraria.

Una prueba se puede consultar en [8] p.p. 70-72.

La ley del coseno de un triángulo con lados finitos a, b, c y ángulos α, β, γ , está dada por

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma. \quad (3.13)$$

La demostración aparece en [2] p.p. 148-150. Véase la Figura 3.16.

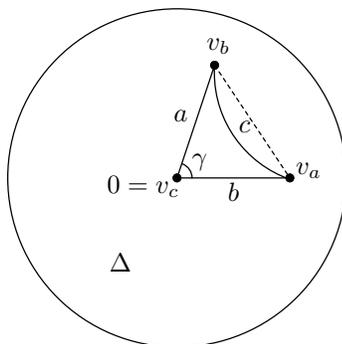


Figura 3.16: Regla del Coseno.

Teorema 3.0.24 *Sean g y h , isometrías hiperbólicas tales que sus ejes A_g, A_h se intersecan en un punto v . Supóngase también que el ángulo entre los semirayos desde v a los puntos fijos atractores de g y de h , es θ donde $0 < \theta < \pi$, entonces el producto gh , es hiperbólico y*

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \cosh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \cosh\left(\frac{1}{2}T_h\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}T_g\right) \sinh\left(\frac{1}{2}T_h\right) \cos \theta.$$

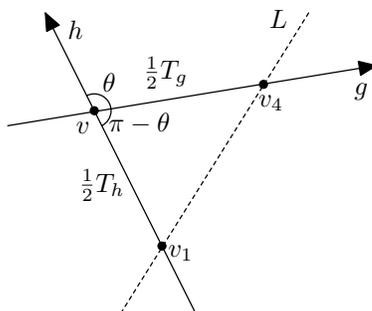


Figura 3.17: Prueba del Teorema 3.0.24.

DEMOSTRACIÓN. Usando el 3.0.23 se puede suponer que $g = \varepsilon_4 \varepsilon_3$ donde $\varepsilon_4, \varepsilon_3$ son transformaciones elípticas de orden dos con puntos fijos v_4, v_3 respectivamente; y $h = \varepsilon_2 \varepsilon_1$ donde $\varepsilon_2, \varepsilon_1$, son transformaciones elípticas de orden dos con puntos fijos v_2, v_1 respectivamente. Se puede suponer que $v_2 = v_3 = v$. Obsérvese que $v_1, v_2 \in A_g$ y $v_3, v_4 \in A_h$. Notemos que

$$h(v_1) = \varepsilon_2 \varepsilon_1(v_1) = \varepsilon_2(v_1),$$

por lo que la longitud de traslación de h está dada por

$$\frac{1}{2}T_h = \rho(v_1, v),$$

véase la Figura 3.17. También

$$g(v) = \varepsilon_4 \varepsilon_3(v) = \varepsilon_4(v),$$

y la longitud de traslación de g está dada por

$$\frac{1}{2}T_g = \rho(v, v_4).$$

Tomando L , la geodésica por v_1 y v_4 , tenemos que el producto gh es de la forma

$$\varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 = \varepsilon_4 \varepsilon_1$$

que es hiperbólico, al ser composición de dos transformaciones elípticas de orden dos. Además gh fija los extremos de L y

$$\frac{1}{2}T_{gh} = \rho(v_1, v_4),$$

entonces

$$\cosh \frac{1}{2}T_{gh} = \cosh \rho(v_1, v_4).$$

Ahora, usando (2.8)

$$\frac{1}{2} |tr(gh)| = \cosh \frac{1}{2}T_{gh} = \cosh \rho(v_1, v_4).$$

Finalmente usando la ley de cosenos (3.13), tenemos

$$\begin{aligned} \cosh \rho(v_1, v_4) &= \cosh \frac{1}{2}T_h \cosh \frac{1}{2}T_g - \sinh \frac{1}{2}T_h \sinh \frac{1}{2}T_g \cos(\pi - \theta) \\ &= \cosh \frac{1}{2}T_h \cosh \frac{1}{2}T_g + \sinh \frac{1}{2}T_h \sinh \frac{1}{2}T_g \cos \theta, \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar.

□

Bibliografía

- [1] ÁVILA BAEZ, V., *Producto inversivo y polígonos hiperbólicos*, tesis de Licenciatura, UNAM, 2005.
- [2] BEARDON, A.F., *The geometry of Discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer Verlag, 1995.
- [3] GEHRING, F.W. AND MARTIN, G.J., Commutators, collars and the Geometry of Möbius Groups, *Journal d'Analyse Mathématique*, vol 63, 1994.
- [4] HOFFMAN, M.J., MARSDEN, J.E., *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, 1996.
- [5] LASCURAIN ORIVE, A., *Una Introducción a la geometría hiperbólica plana*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [6] LEHNER, J., *A Short Course on Automorphic Functions*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.
- [7] MACLACHLAN, C. AND REID, A.W., *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics 219, Springer Verlag, 2003.
- [8] MARTÍNEZ VEGA, R., *Haces para elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ y la función desplazamiento*, tesis de Maestría, UNAM, 2006.