



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

*COMPORTAMIENTO TERMICO EN ESTADO
TRANSITORIO DEL CONDUCTOR ELECTRICO
ACSR 26/7 "DRAKE"*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA

INGENIERIA MECANICA - TERMOFLUIDOS

PRESENTA:

ING. OSCAR ARTURO CHÁVEZ LÓPEZ



DIRECTOR DE TESIS:
DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

MÉXICO, DF.;

JUNIO DE 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1 Introducción

1.1 Generalidades	8
1.2 Antecedentes.....	11

2 Análisis del problema

2.1 Modelo físico	14
2.2 Modelo matemático.....	16
2.2.1 Efecto de la porosidad.....	16
2.2.2 Calor generado por el efecto Joule.....	22
2.2.3 Ecuaciones de difusión de calor.....	23
2.2.4 Condiciones de frontera y condición inicial.....	23
2.3 Estimación de los órdenes de magnitud.....	25
2.3.1 Generalidades.....	25
2.3.2 Análisis de órdenes de magnitud.....	25
2.4 Ecuaciones adimensionales.....	26
2.4.1 Para el aluminio.....	27
2.4.2 Para el acero.....	27
2.5 Esfuerzos térmicos.....	29

3 Método de solución del problema

3.1 Generalidades.....	31
3.2 Discretización de la ecuación de calor y condiciones de frontera.....	32
3.3 Esquema de discretización en diferencias finitas.....	35
3.4 Discretización del dominio espacial y temporal.....	38
3.5 Reducción a ecuaciones algebraicas.....	41
3.6 Método de solución de las ecuaciones.....	44

4 Resultados y conclusiones

4.1 Solución analítica de la distribución de temperaturas adimensionales en estado permanente.....	49
4.2 Evolución de los perfiles de temperatura adimensionales.....	50
4.3 Comportamiento de los esfuerzos térmicos.....	55
4.4 Validación del modelo matemático en estado transitorio.....	56
4.5 Conclusiones.....	58
Apendice A	60
Referencias.....	61

Nomenclatura

Definición de símbolos

a	Radio del núcleo de acero, coeficiente de la ecuación discretizada del acero
b	Radio del conductor, coeficiente de la ecuación discretizada del acero
Bi	Número de Biot
c	Coeficiente de la ecuación discretizada del aluminio, calor específico
d	Coeficiente de la ecuación discretizada del aluminio
E	Modulo elástico
G	Parámetro de tortuosidad
h	Coeficiente convectivo
I	Corriente eléctrica
k	Conductividad térmica
L	Longitud del alambre
n	Número de alambres
q	Calor generado
r	Coordenada radial, radio de cada alambre
t	Tiempo
T	Temperatura
V	Volumen
z	Coordenada longitudinal

Griegos

α	Parámetro adimensional definido en la ecuación (29)
β	Parámetro adimensional definido en la ecuación (28)
χ	Coordenada radial adimensional del aluminio
Δ	Diferencia

δ	Coeficiente de expansión
ε	Relación geométrica (a/b)
γ_1, γ_2, η	Parámetros definidos en la ecuación (46)
λ	Resistividad eléctrica
θ	Temperatura adimensional
ρ	Densidad
Σ	Esfuerzo térmico adimensional
σ	Esfuerzo térmico
τ	Tiempo adimensional
ζ	Coordenada radial adimensional
ϕ	Porosidad

Subíndices

<i>ac</i>	Referente al acero
<i>air</i>	Referente al aire
<i>al</i>	Referente al aluminio
<i>c</i>	Característico
<i>e</i>	Equivalente
<i>i</i>	Punto a estudiar en el aluminio
<i>j</i>	Punto a estudiar en el acero
<i>M</i>	Referente al último punto en el aluminio
<i>N</i>	Referente al último punto en el acero
<i>T</i>	Total
0	Referente al primer punto a estudiar en ambos dominios

Resumen

En la actualidad, debido al aumento de la demanda de energía eléctrica y a las restricciones económicas de instalar nuevas líneas aéreas de transporte de corriente eléctrica, es necesario aumentar el flujo de energía que fluye a través de los conductores ya instalados, y tomando en cuenta que el voltaje es usualmente fijo, el aumento de energía solo puede lograrse mediante el aumento de la corriente eléctrica.

En general, cada conductor ejerce una resistencia al flujo de corriente eléctrica, lo que da origen a un calentamiento hasta cierta temperatura, que depende de las características físicas del conductor, la magnitud de la corriente y el tiempo que fluye, y el grado de enfriamiento de las condiciones atmosféricas, dicho calentamiento se conoce como efecto Joule.

La cantidad de corriente eléctrica que puede ser transportada debe ser determinada por la temperatura máxima permisible del conductor eléctrico, ya que el incremento de temperatura hace que se dilate el conductor perdiendo la fuerza de tensión, incluso si la temperatura sobrepasa la temperatura crítica del acero se realiza el tratamiento térmico de recocido.

En esta tesis se analizó un conductor tipo ACSR (Aluminium Conductor, Steel Reinforced), el cual es un conductor bimetálico; es decir, este conductor está formado por dos metales distintos, en este caso un conjunto de alambres trenzados de acero conforman el núcleo y otro conjunto de alambres de

aluminio trenzados alrededor de dicho núcleo. El núcleo de acero es usado para proporcionar la fuerza de tensión, mientras que el aluminio transporta la mayor parte de la corriente eléctrica, por lo que la generación de calor debido al efecto Joule se realiza principalmente en el aluminio.

El proceso de transferencia de calor en el cable es a través de un medio poroso, por lo que en los conductores conformados por filamentos, las propiedades físicas se ven afectadas por la heterogeneidad del medio. Principalmente la conductividad térmica se reduce de manera importante debido a la baja conductividad térmica del aire atrapado entre los filamentos.

Existen muchos modelos para describir la transferencia de calor a través de un medio poroso en estado permanente, por lo que fue necesario buscar un modelo que tomara en cuenta la transferencia de calor en el medio poroso en estado transitorio. Por lo que se tomó un modelo bajo la condición de equilibrio térmico local, éste modelo supone que la fase sólida se encuentra en equilibrio termodinámico con la fase gaseosa.

Bajo el modelo anterior la tarea principal es determinar la conductividad térmica equivalente, ya que depende de las conductividades térmicas del sólido y del fluido, también depende de la geometría interfacial, por lo que usó un modelo de capa de fase segregada.

El modelo matemático consta de dos ecuaciones diferenciales parciales, una modela la transferencia de calor en el acero, mientras que la otra modela la transferencia de calor en el aluminio, además el modelo consta de cuatro condiciones de frontera, la primera es la condición de simetría en el centro del cable, las dos condiciones de frontera siguientes son las más importantes ya que acoplan a las ecuaciones diferenciales; es decir, estas condiciones de frontera dan la información de la tasa de transferencia calor entre el acero y el

aluminio. La última condición de frontera está en la parte exterior del conductor, y nos dice la tasa de transferencia de calor al ambiente.

Las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan al fenómeno físico se adimensionalizaron con el fin de englobar la solución en estado transitorio de todos los cables ACSR 26/7, y mediante un análisis de ordenes de magnitud se logró demostrar que el calor generado en el acero es despreciable, por lo que la ecuación de difusión de calor del acero queda simplificada.

Para resolver el sistema acoplado de ecuaciones se usó el método de diferencias finitas, para discretizar la ecuación se usó el esquema de Crank-Nicolson, ya que con éste esquema no hay restricción en el paso temporal, mientras que para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas se usó el algoritmo de Thomas, debido a que aprovecha la gran cantidad de ceros que hay en la matriz tridiagonal.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

La carga máxima de corriente que puede ser transportada por un conductor es denominada como ampacidad del conductor [1] y esta determinada por una temperatura máxima de operación. Por lo que el análisis de la ampacidad de conductores aéreos es de gran importancia para la completa utilización del conductor, especialmente en situaciones de sobrecarga y cortocircuitos.

Dos características físicas, holgura y recocido, están directamente ligadas con la vida de un conductor. Para preservar la vida útil de un conductor, se imponen los niveles de ampacidad para asegurar que los límites de temperatura son satisfechos.

La ampacidad depende de manera significativa de las condiciones climáticas, como son la velocidad del viento y temperatura ambiental, ya que el

conductor en estado transitorio disipa el calor generado tanto en el núcleo de acero como en el ambiente, hasta llegar al estado permanente en el cual todo el calor generado se tiene que ir al ambiente, por lo que si se transfiere una gran cantidad de calor al medio ambiente, es posible transportar una mayor cantidad de corriente eléctrica.

En la siguiente figura se muestra el efecto de las condiciones climáticas sobre un conductor ACSR DRAKE, la figura muestra que para una misma corriente eléctrica el conductor puede alcanzar la temperatura máxima de operación o incluso sobrepasarla, dependiendo de las condiciones climáticas. De la figura 1 se observa que conforme el coeficiente de convección es más pequeño, la temperatura del cable en estado permanente es mayor, y en la situación de $h=3.63 \text{ W/m}^2\text{K}$, ya no es posible transportar más corriente eléctrica, debido a que se encuentra en su temperatura límite de operación, mientras que para el caso de $h=7.58 \text{ W/m}^2\text{K}$, todavía es posible transportar una mayor cantidad de corriente eléctrica.

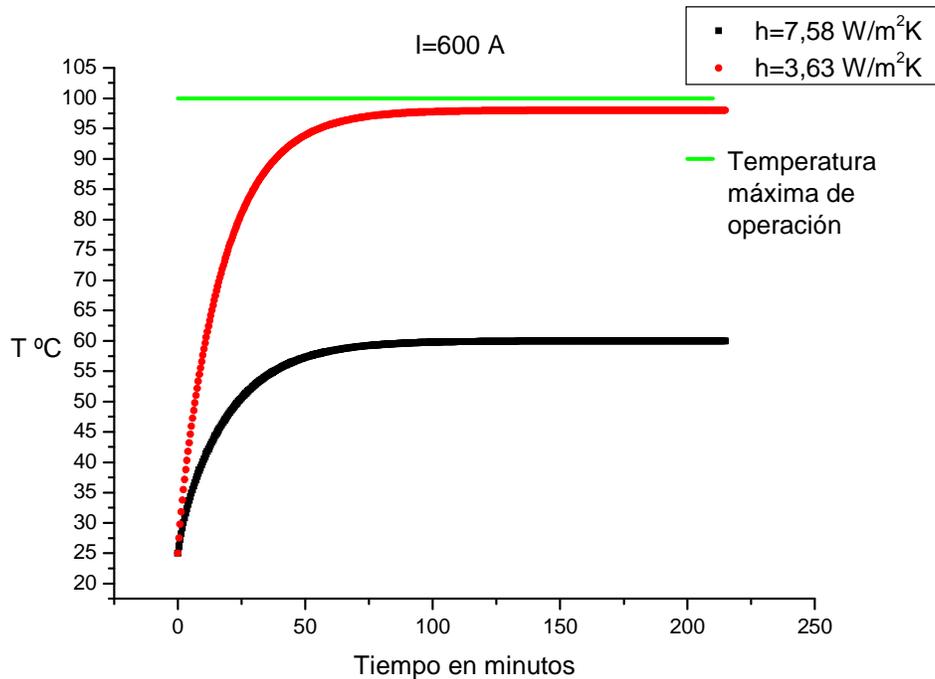


Figura 1. Comportamiento de la temperatura exterior de un cable ACSR DRAKE para distintos coeficientes convectivos.

La figura 2 ejemplifica claramente el concepto del estudio de la ampacidad, ya que para una condición climática determinada el cable puede transportar una mayor corriente eléctrica sin sobrepasar su temperatura máxima de operación. Para el caso mostrado en la figura 2 se observa que para una condición climática determinada, es posible transportar una mayor corriente eléctrica para su completa utilización, que en el caso mostrado en la figura 2 es de alrededor del 50% extra.

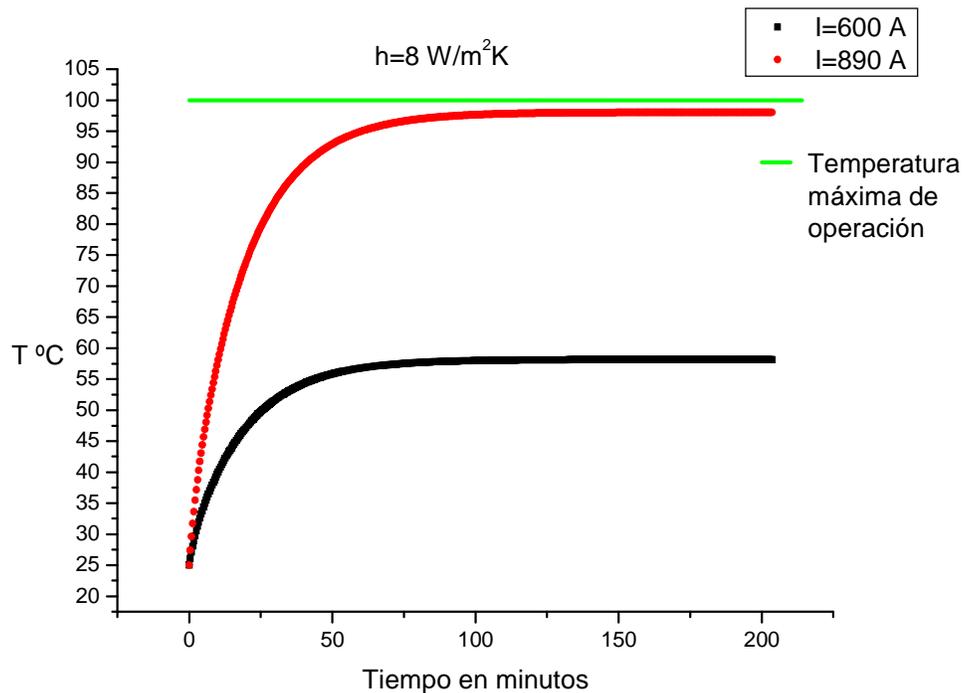


Figura 2. Comportamiento de la temperatura exterior de un cable ACSR DRAKE para distintas corrientes eléctricas.

Aunque hasta ahora la temperatura del cable no ha sobrepasado la temperatura máxima de operación, en una situación de emergencia es posible transportar una corriente eléctrica mayor. Como se muestra en la figura 3, con el coeficiente convectivo de $h=8 \text{ W/m}^2\text{K}$ y una corriente de $I=1000 \text{ A}$, la temperatura correspondiente en estado permanente es superior a la temperatura máxima de operación, pero existe cierto periodo de tiempo en el

cual su temperatura es inferior y puede transportar la cantidad de corriente eléctrica necesaria durante la situación de emergencia, por lo que el conocimiento del comportamiento térmico del cable, tanto en su estado transitorio, como en su estado permanente es de gran importancia.

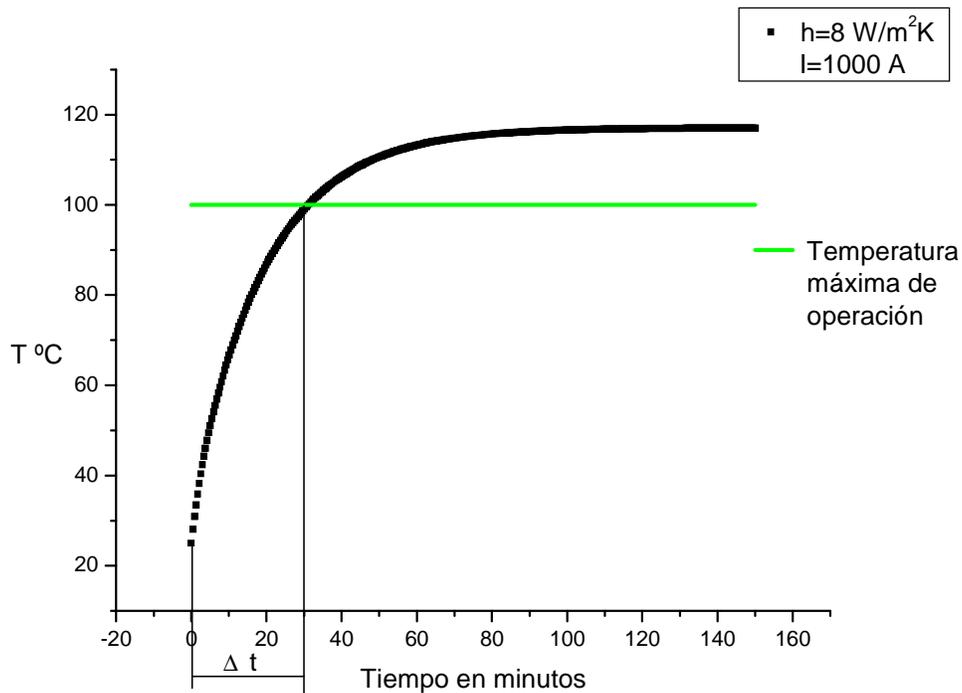


Figura 3. Tiempo de operación antes de alcanzar la temperatura máxima de operación.

1.2 Antecedentes

El estudio del comportamiento térmico de cables aéreos inicialmente se llevó a cabo mediante sistemas que calculaban la temperatura del cable en tiempo real; dicho sistema incluía ecuaciones de transferencia de calor por convección forzada y natural, tomando en cuenta el régimen y dirección del viento. Los sistemas no contaban con representaciones matemáticas rigurosas, y las temperaturas calculadas eran generalmente superiores a las reales, Davis 1977 [2] y [3], lo que impedía la completa utilización del conductor.

Paralelamente se realizaron estudios sobre la pérdida de tensión debido al incremento de temperatura del conductor [4-6] y en base a estos experimentos realizados, una serie de relaciones empíricas han sido obtenidas para distintos tipos de conductores.

Posteriormente el objetivo principal era optimizar el proceso de traducir los datos meteorológicos y de corriente eléctrica en una temperatura en estado transitorio, en base a modelos térmicos simplificados, con el fin de poder determinar la ampacidad; es decir, la corriente eléctrica máxima que puede transportar el conductor sin sobrepasar la temperatura máxima permisible. Foss et al 1983 [7-8] desarrolló un algoritmo dinámico de ampacidad combinado con mediciones meteorológicas y del cable en tiempo real, mostrando además el modelo de fase segregada en capas para determinar la conductividad térmica efectiva radial. Paralelamente, Black et al. [9] formularon un modelo térmico que no considera que existan gradientes de temperatura; dicho modelo consiste en un balance de energía tanto en estado transitorio como en estado permanente.

Posteriormente se observó que los gradientes de temperatura en los cables trenzados son mucho mayores que los gradientes de temperatura de los cables sólidos, debido al aire atrapado entre los alambres que conforman al cable. Morgan 1990 [10] mostró la función de la distribución de temperaturas en estado permanente de cables monometálicos, sólidos y trenzados, con densidad de corriente uniforme. Además presentó un nuevo análisis para el cálculo de la conductividad térmica equivalente en conductores trenzados. Black et al. 1988 [11] hicieron una comparación de los gradientes de temperatura en estado permanente con los resultados obtenidos bajo la suposición de que la temperatura en el conductor es uniforme, mostrando que la temperatura en el centro del conductor es siempre superior a la temperatura calculada bajo la suposición de temperatura constante.

En la actualidad con el avance computacional es posible obtener de manera sencilla la solución de las ecuaciones de transferencia de calor en estado transitorio y de esta manera obtener los perfiles de temperatura durante el estado transitorio. Miñambres et al. 1999 [12] realizaron un modelo basado en la técnica de elemento finito para la transferencia de calor en un cable trenzado. Por lo que la tendencia actual es observar el efecto que tiene el calor generado en el aluminio sobre el acero durante el estado transitorio.

La presente tesis propone un modelo térmico con el cual es posible obtener los perfiles de temperatura para el conductor eléctrico ACSR "DRAKE" en estado transitorio, con el fin de obtener la magnitud de los esfuerzos térmicos generados en el núcleo de acero, además observar el efecto del número de Biot en los perfiles de temperatura.

Capítulo 2

Análisis del problema

2.1 Modelo físico

Los conductores ACSR 26/7 son como el que se muestra en la figura 4. La parte sombreada representa al núcleo de acero, que generalmente se emplea para tensar el conductor y prácticamente no transporta corriente eléctrica, mientras la parte no sombreada representa al aluminio el cual transporta casi toda la corriente. En el trabajo presente se tomó como conductor de referencia al conductor DRAKE ACSR, debido al extenso uso que tiene en la industria. La tabla 1 muestra las características del conductor DRAKE ACSR [13].

Tabla 1. Características del conductor DRAKE ACSR.

Número de alambres de acero del núcleo (n_{ac})	7
Número de alambres de aluminio (n_{al})	26
Radio del conductor (b)	0.014072 [m]
Radio del núcleo de acero (a)	0.005182 [m]
Radio de cada alambre de aluminio (r_{al})	0.002223 [m]
Radio de cada alambre de acero (r_{ac})	0.001735 [m]

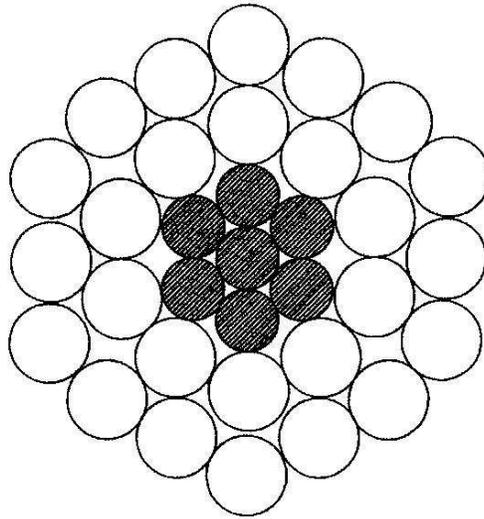


Figura 4. Representación del Conductor DRAKE ACSR

El caso de estudio consiste en un incremento repentino del flujo de la corriente eléctrica, y el calor generado en el aluminio debido al efecto Joule se transfiere al acero por conducción y al ambiente por convección. El análisis se enfoca en los gradientes de temperatura del aluminio y del núcleo de acero en estado transitorio, con el fin de poder estimar el esfuerzo térmico en el acero, ya que este brinda la fuerza de tensión al conductor y al ser calentado pierde dicha fuerza de tensión debido a la dilatación que sufre. Además en presencia de gradientes de temperatura de magnitud considerable, las capas de mayor temperatura sufren una mayor dilatación que las capas de menor temperatura, por lo que la tensión no se reparte en la misma proporción en todas las capas del núcleo de acero.

2.2 Modelo matemático

El modelo matemático parte de la ecuación de difusión de calor aplicado al aluminio y al acero, además se considera los gradientes de temperatura a lo largo del conductor son muy pequeños y de este modo se pueden despreciar las variaciones con respecto a la dirección longitudinal. Con el fin de simplificar el modelo se considera que solo existe variación de temperaturas en la dirección radial, por lo que así el modelo queda reducido a una sola dimensión espacial.

2.2.1 Efecto de la porosidad

Además el modelo matemático debe tener en cuenta que el proceso de difusión de calor se lleva a cabo por un medio poroso y en estado transitorio, por lo que los valores apropiados de las propiedades físicas del conductor para ser usados en el modelo matemático deben ser valores efectivos; es decir, valores que consideren el hecho de que el calor generado en el aluminio debe ser conducido a través de un material compuesto.

Una característica de los conductores ACSR es la conductividad térmica radial relativamente pequeña, debido a que la conductividad térmica del aire que se encuentra entre los alambres es muy baja, por lo que es un excelente aislante térmico, mientras que la conductividad térmica de los conductores sólidos es muy grande.

De la figura 4 se observa que en el conductor se encuentran espacios ocupados por aire por lo que la cuestión principal es saber como se ven afectadas las propiedades físicas como la conductividad térmica, densidad y capacidad térmica específica, debido a que dependen directamente de la cantidad de aire atrapado en el conductor. Por lo que es necesario determinar la porosidad en el acero y en el aluminio mediante el siguiente análisis [10,14-16].

La porosidad queda definida como el porcentaje de volumen del fluido atrapado en el sólido.

Para el acero.

$$\phi_{ac} = 1 - \frac{V_{ac}}{V_{T,ac}}, \quad (1)$$

donde el volumen V_{ac} representa al volumen ocupado por los alambres de acero, mientras que $V_{T,ac}$ representa al volumen total del núcleo de acero y quedan definidos de la siguiente manera:

$$V_{ac} = n_{ac} \times \pi \times r_{ac}^2 \times L, \quad (2)$$

$$V_{T,ac} = \pi \times a^2 \times L. \quad (3)$$

De igual forma para el aluminio.

$$\phi_{al} = 1 - \frac{V_{al}}{V_{T,al}}, \quad (4)$$

donde V_{al} es el volumen ocupado por los alambres de aluminio y V_T es el volumen total que ocupa la cubierta de aluminio y se definen de la siguiente manera:

$$V_{al} = n_{al} \times \pi \times r_{al}^2 \times L, \quad (5)$$

$$V_{T,al} = \pi \times (b^2 - a^2) \times L. \quad (6)$$

Donde ϕ es la porosidad que hay en cada material y V es el volumen, con base a los datos proporcionados por la tabla 1 es posible determinar la

porosidad en el conductor. A continuación se muestra el valor del parámetro de porosidad.

$$\phi_{ac,26/7} = 0.2153026$$

$$\phi_{al,26/7} = 0.2493638$$

Con ayuda del factor de porosidad se determinan las propiedades equivalentes de la siguiente manera [14]:

$$(\rho c)_{ac,e} = \phi_{ac} \times (\rho c)_{air} + (1 - \phi_{ac}) (\rho c)_{ac}, \quad (7a)$$

$$(\rho c)_{al,e} = \phi_{al} \times (\rho c)_{air} + (1 - \phi_{al}) (\rho c)_{al}. \quad (7b)$$

Donde ρ es la densidad y c es el calor específico. La tabla 2 muestra los valores de la densidad y calor específico correspondientes a cada material que conforman al conductor [17].

Tabla 2. Propiedades físicas de los materiales.

	$\rho [kg/m^3]$	$c [J/kg \cdot K]$
Aluminio	2702	903
Acero	8055	480
Aire	1.1614	1007

A continuación se muestra el valor de las propiedades de los metales afectados por el aire atrapado entre los alambres de acero:

$$(\rho c)_{ac,e} = 3034206 \left[\frac{J}{m^3 \cdot K} \right]$$

$$(\rho c)_{al,e} = 1831773 \left[\frac{J}{m^3 \cdot K} \right]$$

El problema principal en el estudio de transferencia de calor en un medio poroso en estado transitorio es determinar la conductividad térmica equivalente. A continuación se muestra el modelo de la conductividad térmica equivalente en estado transitorio mostrado en la referencia [14]:

$$k_{ac,e} = \phi_{ac} \times k_{air} + (1 - \phi_{ac}) K_{ac} + k_{air} \left(1 - \frac{k_{ac}}{k_{air}} \right)^2 G_{ac}, \quad (8a)$$

$$k_{al,e} = \phi_{al} \times k_{air} + (1 - \phi_{al}) K_{al} + k_{air} \left(1 - \frac{k_{al}}{k_{air}} \right)^2 G_{al}. \quad (8b)$$

Donde G representa al parámetro de tortuosidad, cuyo valor depende solo en la geometría interfacial y de las propiedades térmicas del sólido y el fluido, y se define como:

$$G_{ac} = \left[\frac{\frac{k_{ac}}{\phi_{ac}} \frac{k_{ac}}{k_{air}}}{\frac{k_{ac}}{\phi_{ac}} \frac{k_{ac}}{k_{air}} + (1 - \phi_{ac})} - \phi_{ac} - \frac{k_{ac}}{k_{air}} (1 - \phi_{ac}) \right] \left/ \left(1 - \frac{k_{ac}}{k_{air}} \right)^2 \right., \quad (9a)$$

$$G_{al} = \left[\frac{\frac{k_{al}}{\phi_{al}} \frac{k_{al}}{k_{air}}}{\frac{k_{al}}{\phi_{al}} \frac{k_{al}}{k_{air}} + (1 - \phi_{al})} - \phi_{al} - \frac{k_{al}}{k_{air}} (1 - \phi_{al}) \right] \left/ \left(1 - \frac{k_{al}}{k_{air}} \right)^2 \right.. \quad (9b)$$

Con el fin de poder determinar los valores de la conductividad equivalente, se requiere el uso de los valores de la conductividad térmica del acero, aluminio y el aire, para este caso se usaron los valores mostrados en la referencia [17].

$$k_{ac} = 15.1 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right], \quad k_{al} = 237.0 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \quad \text{y} \quad k_{air} = 0.0263 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right].$$

A continuación se muestra el valor de la conductividad térmica equivalente:

$$k_{ac,e} = 0.1213831 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right] \quad \text{y} \quad k_{al,e} = 0.1054332 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right].$$

Con el cálculo de las propiedades equivalentes se considera al medio poroso como un sólido pero con las propiedades afectadas debido al aire atrapado entre los alambres. Por lo que el conductor a modelar se muestra en la figura 5.

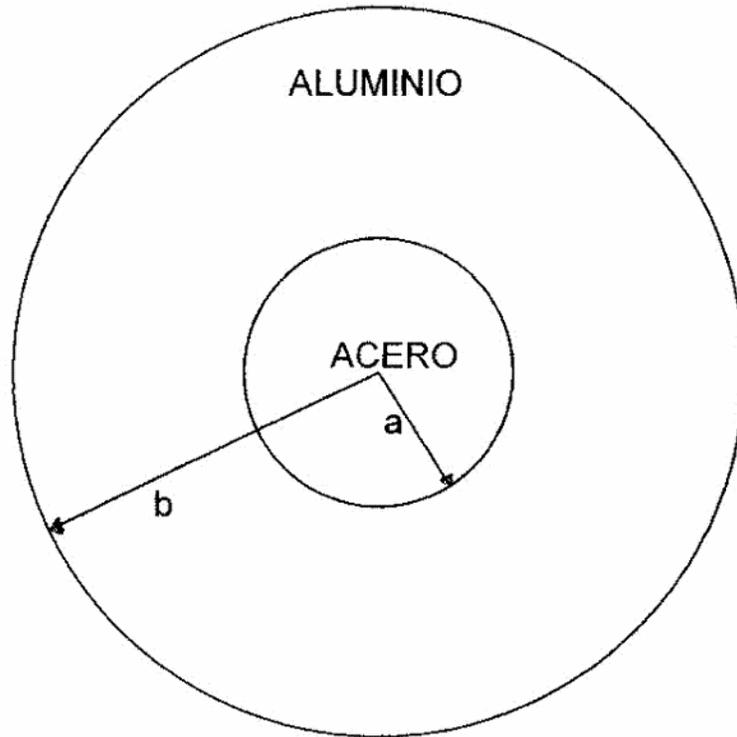


Figura 5. Conductor equivalente

El mecanismo de transferencia de calor que ocurre en el conductor es por conducción entre el aluminio y el núcleo de acero y por convección entre el aluminio y el ambiente, entonces para obtener la distribución de temperaturas tanto en el aluminio como en el acero es necesario resolver la ecuación de conducción de calor para cada material.

Para simplificar las ecuaciones resultantes se hacen las siguientes consideraciones:

- 1.- La corriente eléctrica que fluye a través del conductor es permanente, manteniendo la misma corriente eléctrica durante el estado transitorio.
- 2.- Las condiciones climáticas son independientes del tiempo.
- 3.- La temperatura del conductor está en función solamente de la dirección radial.
- 4.- Las conductividades térmicas de los materiales del conductor así como la del aire son constantes, esto se verifica en el apéndice A.
- 5.- Las resistencias eléctricas se consideran constantes, esto se muestra en el apéndice A.
- 6.- La distribución de corriente eléctrica se supone uniforme.
- 7.- Las ganancias de calor solo son por el efecto Joule.

2.2.2 Calor generado por el efecto Joule

El calor generado por unidad de volumen en el acero así como en el aluminio debido al efecto Joule se determina de la siguiente manera:

$$\dot{q}_{ac} = \frac{\lambda_{ac} I_{ac}^2}{\pi^2 n_{ac} r_{ac}^2 a^2}, \quad (10)$$

$$\dot{q}_{al} = \frac{\lambda_{al} I_{al}^2}{\pi^2 n_{al} r_{al}^2 (b^2 - a^2)}. \quad (11)$$

Donde las corrientes eléctricas que fluyen a través del acero y el aluminio dependen directamente de sus resistividades eléctricas y de las dimensiones del núcleo de acero y del recubrimiento de aluminio, como se muestra a continuación [10]:

$$I_{ac} = \frac{\lambda_{al}}{\lambda_{al} + \lambda_{ac} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} \right)}, \quad (12)$$

$$I_{al} = \frac{\lambda_{ac}}{\lambda_{ac} + \lambda_{al} \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right)}. \quad (13)$$

Donde I corresponde a la corriente eléctrica, mientras λ es la resistividad eléctrica y sus valores fueron tomados de la referencia [18] y son los siguientes:

$$\lambda_{al} = 2.63 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m],$$

$$\lambda_{ac} = 20 \times 10^{-8} [\Omega \cdot m].$$

2.2.3 Ecuaciones de difusión de calor

Bajo las consideraciones anteriores y con el valor del calor generado por el efecto Joule, se obtienen las ecuaciones de difusión de calor en estado transitorio para el aluminio y el acero.

Ecuación de conducción de calor en el aluminio en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{k_{al,e}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right) + \dot{q}_{al} = (\rho c)_{al,e} \frac{\partial T_{al}}{\partial t} \quad (14)$$

Ecuación de conducción de calor en el acero en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{k_{ac,e}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right) + \dot{q}_{ac} = (\rho c)_{ac,e} \frac{\partial T_{ac}}{\partial t} \quad (15)$$

2.2.4 Condiciones de frontera y condición inicial

La distribución de temperaturas se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

En el centro del conductor existe simetría en la distribución de temperaturas, debido a que se considera que no hay gradiente de temperaturas en la dirección angular.

$$r = 0: \quad \left. \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (16)$$

Las condiciones de frontera en la interfase tienen una gran importancia, ya que dichas condiciones de frontera dan la información de la tasa de transferencia de calor del aluminio al acero; además se considera que el acero y el aluminio tienen buen contacto, y de este modo la temperatura en la interfase debe ser la misma. Esta condición de frontera acopla la ecuación de difusión de calor del aluminio y del acero, por lo que se tienen que resolver simultáneamente.

$$r = a : \quad T_{al} = T_{ac}, \quad -k_{al,e} \left. \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right|_{r=a} = -k_{ac,e} \left. \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right|_{r=a}. \quad (17)$$

La condición de frontera en el exterior del conductor depende directamente de las condiciones atmosféricas como la velocidad del viento y su temperatura, ya que nos dice la tasa de transferencia de calor del conductor al ambiente.

$$r = b : \quad -k_{al,e} \left. \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right|_{r=b} = h(T_{al} - T_i) \quad (18)$$

Además de las condiciones de frontera es necesaria una condición inicial. En esta condición inicial se supone que el conductor se encuentra inicialmente a temperatura ambiente.

$$t = 0 : \quad T_{al} = T_{ac} = T_i. \quad (19)$$

2.3 Estimación de los órdenes de magnitud

En esta sección, se analizarán los órdenes de magnitud del proceso de transferencia de calor, con el fin de obtener parámetros adimensionales que relacionen las propiedades físicas del fenómeno.

2.3.1 Generalidades

En los problemas de transferencia de calor existen una gran cantidad de variables y propiedades físicas involucradas, quedan como resultado la posibilidad de obtener una amplia gama de soluciones. Por lo anterior es recomendable que antes de resolver las ecuaciones que modelan un problema físico, se realice un análisis de órdenes de magnitud con el fin de obtener parámetros adimensionales. El objetivo de introducir los parámetros adimensionales, es debido a que ellos engloban un conjunto de dichas variables y propiedades físicas, y de esta manera es posible hacer un comparativo de los términos dominantes de la ecuación, así como para englobar una gran cantidad de soluciones.

2.3.2 Análisis de órdenes de magnitud.

Identificamos una escala de tiempo en este problema, $t_c \sim (\rho c)_{al,e} (b-a)/h$. Por otro lado la escala espacial correspondiente al núcleo de acero en este proceso de transferencia de calor corresponde directamente al radio del núcleo; entonces $r_{ac} \sim a$, mientras que la escala espacial correspondiente al aluminio es el espesor del conductor de aluminio que recubre al núcleo de acero, por lo tanto $r_{al} \sim b-a$. Además, el aumento

característico de temperatura ΔT_c del sistema, se obtiene fácilmente mediante un balance de energía entre el término de generación interna de calor y el término transitorio.

$$\Delta T_c \sim \frac{\dot{q}_{al}(b-a)^2}{k_{al,e}Bi}, \quad (20)$$

donde Bi es el número de Biot, que en este caso se define como:

$$Bi = \frac{h(b-a)}{k_{al,e}} \quad (21)$$

Se observa que el incremento de temperatura crítico ΔT_c queda escalado primordialmente por el número de Biot. Si el número de Biot es pequeño el incremento de temperatura es muy alto, lo que quiere decir que la transferencia de calor al ambiente puede ser muy deficiente, y por lo tanto el conductor se calienta más, en comparación con un número de Biot grande, que significa una buena tasa de transferencia de calor del conductor al ambiente y un menor incremento de temperatura.

2.4 Ecuaciones adimensionales

En esta sección se obtendrá el sistema de ecuaciones adimensionales que describen el fenómeno de transferencia de calor a estudiar; para tal efecto es necesario definir una serie de valores adimensionales, con el uso de las escalas físicas y geométricas obtenidas en la sección anterior, además se define un parámetro que da la relación del radio del acero con el del aluminio.

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \quad (22)$$

2.4.1 Para el aluminio

La ecuación de difusión de calor en el aluminio puede adimensionalizarse sustituyendo las siguientes variables adimensionales,

$$\tau = \frac{t}{\left[(\rho c)_{al,e} (b-a)/h \right]}, \quad \theta_{al,ac} = \frac{T_{al,ac} - T_i}{\Delta T_c}, \quad (23)$$

$$\chi = \frac{r-a}{b-a}. \quad (24)$$

En las expresiones anteriores ΔT_c es el aumento de temperatura característico definido en la relación (20). Sustituyendo las variables anteriores en la ecuación de difusión de calor del aluminio (14), se obtiene la ecuación de difusión de calor en forma adimensional,

$$\frac{1}{\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} + Bi = Bi \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \tau}, \quad (25)$$

2.4.2 Para el acero

La ecuación de difusión de calor en el acero puede adimensionalizarse introduciendo las variables adimensionales (23) y la variable adimensional espacial para la región del acero:

$$\zeta = \frac{r}{a} \quad (26)$$

Sustituyendo las variables adimensionales en la ecuación de difusión de calor del acero (15), se obtiene la ecuación de forma adimensional,

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} + \beta = \alpha \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \tau}, \quad (27)$$

Donde los parámetros β y α quedan definidos de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{k_{al,e} \dot{q}_{ac}}{k_{ac,e} \dot{q}_{al}} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 Bi, \quad (28)$$

$$\alpha = \frac{k_{al,e} (\rho c)_{ac,e}}{k_{ac,e} (\rho c)_{al,e}} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 Bi. \quad (29)$$

El sentido físico del parámetro β es la razón del calor generado en el acero y en el aluminio, mientras que el parámetro α representa a un parámetro difusivo; es decir, es la razón de las difusividades térmicas del aluminio y del acero, sus valores se muestran a continuación:

$$\beta = 0.037124731 \cdot Bi$$

$$\alpha = 0.4888589 \cdot Bi$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0.0759416$$

El parámetro β es dos órdenes de magnitud menor que el parámetro α , además β corresponde al término de generación de calor y comparado con el término de generación de calor de la ec. (25) es también de los ordenes de magnitud por lo se puede despreciar el término de generación de calor en el acero. De tal modo que la ecuación (27) queda de la siguiente manera.

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \alpha \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \tau}. \quad (30)$$

El sistema resultante de ecuaciones a resolver son las ecuaciones (25) y (30) con las siguientes condiciones de frontera:

$$\zeta = 0: \quad \left. \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0 \quad (31)$$

$$\zeta - 1 = \chi = 0: \quad \frac{k_{ac,e}}{k_{al,e}} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) \left. \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = \left. \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} \quad y \quad \theta_{ac} = \theta_{al} \quad (32)$$

$$\chi = 1: \quad \left. \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} \right|_{\chi=1} = -Bi\theta_{al} \quad (33)$$

Y la condición inicial:

$$\tau = 0: \quad \theta_{ac} = \theta_{al} = 0 \quad (34)$$

2.5 Esfuerzos térmicos

Con las soluciones de las ecuaciones de difusión es posible obtener un gradiente de temperaturas para cada tiempo, por lo que con la presencia de gradientes de temperatura se generan esfuerzos térmicos, de tal manera que las distintas capas o fibras que conforman el núcleo de acero tienden a expandirse de manera no uniforme.

El estudio de los esfuerzos térmicos es de gran importancia debido a que estos esfuerzos pueden llegar a ser muy grandes, originando en el núcleo de acero esfuerzos que sobrepasen el límite de elasticidad e incluso el de ruptura.

Los esfuerzos térmicos se determinan de la siguiente manera [19]:

$$\sigma(t) = E \cdot \delta \cdot \Delta T_{ac} = E \cdot \delta \cdot (T_{ac}(r = a, t) - T_{ac}(r = 0, t)) \quad (35)$$

Y sin perder generalidad se determina el esfuerzo térmico adimensional haciendo uso de la definición de la temperatura adimensional.

$$\Sigma(\tau) = \frac{\sigma}{E \cdot \delta \cdot \Delta T_c} = \theta_{ac}(\zeta = 1, \tau) - \theta_{ac}(\zeta = 0, \tau) \quad (36)$$

Capítulo 3

Método de solución del problema

3.1 Generalidades

Con el aumento de capacidad computacional y velocidad de procesos, el interés en los métodos numéricos ha aumentado considerablemente, para resolver problemas gobernados por ecuaciones diferenciales. Por lo que la solución de problemas de ingeniería puede ahora obtenerse con ayuda de computadoras en un tiempo muy corto y a muy bajo costo.

Las soluciones a las ecuaciones que modelan el fenómeno físico a estudiar se obtendrán mediante el método de “diferencias finitas”, ya que es un método fácil de utilizar, además de que es capaz de resolver ecuaciones lineales y no lineales, y puede ser extendida a problemas de dos o tres dimensiones, así como transitorios.

El primer paso para aplicar el método de diferencias finitas es discretizar la ecuación de difusión, las condiciones de frontera y la condición inicial, posteriormente se tiene que discretizar el dominio espacial y temporal, para después transformar la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales y finalmente se selecciona el método de solución del sistema de ecuaciones, ya sea iterativo o exacto, dependiendo de la capacidad computacional.

3.2 Discretización de la ecuación de difusión y condiciones de frontera.

Para discretizar una ecuación diferencial es necesario conocer primero la representación de las derivadas en diferencias finitas. A continuación se muestra la representación de las primeras derivadas parciales espaciales en diferencias finitas [20-21].

En la representación de la primera derivada hacia adelante se ocupa un punto posterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} = \frac{\theta_{al,i+1} - \theta_{al,i}}{\Delta\chi} + O(\Delta\chi), \quad (37a)$$

Acero:

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{ac,j+1} - \theta_{ac,j}}{\Delta\zeta} + O(\Delta\zeta). \quad (37b)$$

En la representación de la primera derivada hacia atrás se ocupa un punto anterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \chi} = \frac{\theta_{al,i} - \theta_{al,i-1}}{\Delta\chi} + O(\Delta\chi), \quad (38a)$$

Acero

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \zeta} = \frac{\theta_{ac,j} - \theta_{ac,j-1}}{\Delta\zeta} + O(\Delta\zeta). \quad (38b)$$

Cuando se ocupa un punto posterior y un punto anterior al punto de análisis se le llama representación central y genera un error de orden $\Delta\chi^2$ y $\Delta\zeta^2$.

Aluminio:

$$\frac{\partial\theta_{al}}{\partial\chi} = \frac{\theta_{al,i+1} - \theta_{al,i-1}}{2 \cdot \Delta\chi} + O(\Delta\chi^2), \quad (39a)$$

Acero:

$$\frac{\partial\theta_{ac}}{\partial\zeta} = \frac{\theta_{ac,j+1} - \theta_{ac,j-1}}{2 \cdot \Delta\zeta} + O(\Delta\zeta^2). \quad (39b)$$

La representación de las segundas derivadas parciales espaciales en diferencias finitas queda de la siguiente manera:

Hacia adelante: en este caso se usa el punto de análisis y dos puntos posteriores, generando un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2\theta_{al}}{\partial\chi^2} = \frac{\theta_{al,i} - 2\theta_{al,i+1} + \theta_{al,i+2}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi), \quad (40a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2\theta_{ac}}{\partial\zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j} - 2\theta_{ac,j+1} + \theta_{ac,j+2}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta) \quad (40b)$$

Hacia atrás: es decir se emplea el punto de análisis y dos puntos anteriores y genera un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{al,i-2} - 2\theta_{al,i-1} + \theta_{al,i}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi), \quad (41a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j-2} - 2\theta_{ac,j-1} + \theta_{ac,j}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta). \quad (41b)$$

En la representación central se usa el punto de análisis, un punto anterior y un punto posterior, dando un error de orden $\Delta\chi^2$ y $\Delta\zeta^2$.

Aluminio:

$$\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \chi^2} = \frac{\theta_{al,i-1} - 2\theta_{al,i} + \theta_{al,i+1}}{(\Delta\chi)^2} + O(\Delta\chi^2), \quad (42a)$$

Acero:

$$\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \zeta^2} = \frac{\theta_{ac,j-1} - 2\theta_{ac,j} + \theta_{ac,j+1}}{(\Delta\zeta)^2} + O(\Delta\zeta^2). \quad (42b)$$

De las discretizaciones anteriores es posible observar que se obtiene un error de orden $\Delta\chi$ y $\Delta\zeta$ en las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, mientras que en las aproximaciones centrales el error se reduce en forma cuadrática. Por lo que en el presente trabajo se tomarán las aproximaciones centrales debido a su mayor exactitud.

La representación de la derivada temporal queda de la siguiente manera,

Aluminio:

$$\frac{\partial \theta_{al}}{\partial \tau} = \frac{\theta_{al,i}^{n+1} - \theta_{al,i}^n}{\Delta \tau}, \quad (43a)$$

Acero:

$$\frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \tau} = \frac{\theta_{ac,j}^{n+1} - \theta_{ac,j}^n}{\Delta \tau}. \quad (43b)$$

El dominio de las variables χ y ζ es de cero a uno, mientras que τ va de cero a infinito, y quedan definidas de la siguiente forma.

$$\chi = i \cdot \Delta \chi$$

$$\zeta = j \cdot \Delta \zeta$$

$$\tau = n \cdot \Delta \tau$$

3.3 Esquema de discretización en diferencias finitas.

El esquema seleccionado para resolver el problema en estado transitorio es el método de Cranck-Nicolson [20], debido a que no tiene restricción en cuanto al tamaño del paso temporal. Este método propuesto por Cranck y Nicolson, mantiene la discretización del transitorio, mientras que hace un promedio aritmético temporal del término difusivo y el término de generación de calor del tiempo actual n y del tiempo siguiente $n+1$.

Desarrollando las derivadas de la ec. (25) por sus respectivas representaciones en diferencias finitas, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\theta_{al,i-1}^{n+1} - 2\theta_{al,i}^{n+1} + \theta_{al,i+1}^{n+1}}{(\Delta\chi)^2} + \frac{1}{i \cdot \Delta\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left(\frac{\theta_{al,i+1}^{n+1} - \theta_{al,i-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta\chi} \right) + Bi^{n+1} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\theta_{al,i-1}^n - 2\theta_{al,i}^n + \theta_{al,i+1}^n}{(\Delta\chi)^2} + \frac{1}{i \cdot \Delta\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \left(\frac{\theta_{al,i+1}^n - \theta_{al,i-1}^n}{2 \cdot \Delta\chi} \right) + Bi^n \right) \right\} = Bi \frac{\theta_{al,i}^{n+1} - \theta_{al,i}^n}{\Delta\tau} \end{aligned} \quad (44)$$

Y equivalentemente la ec. (30) se transforma en la siguiente expresión en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\theta_{ac,j-1}^{n+1} - 2\theta_{ac,j}^{n+1} + \theta_{ac,j+1}^{n+1}}{(\Delta\zeta)^2} + \frac{1}{j \cdot \Delta\zeta} \left(\frac{\theta_{ac,j+1}^{n+1} - \theta_{ac,j-1}^{n+1}}{2\Delta\zeta} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\theta_{ac,j-1}^n - 2\theta_{ac,j}^n + \theta_{ac,j+1}^n}{(\Delta\zeta)^2} + \frac{1}{j \cdot \Delta\zeta} \left(\frac{\theta_{ac,j+1}^n - \theta_{ac,j-1}^n}{2\Delta\zeta} \right) \right) \right\} = \alpha \frac{\theta_{ac,j}^{n+1} - \theta_{ac,j}^n}{\Delta\tau} \end{aligned} \quad (45)$$

La transformación de las condiciones de frontera (31)-(33) a su representación en diferencias finitas se realiza usando las discretizaciones centrales, con el fin de obtener una mayor exactitud, pero surge el problema de eliminar un punto falso, por lo que para el uso de este método es necesario resolver un sistema de ecuaciones. Este método se encuentra descrito detalladamente en la referencia [20].

Con el fin de simplificar las ecuaciones posteriores se requiere el uso de los siguientes parámetros

$$\gamma_1 = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\zeta)^2 \cdot \alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\tau}{(\Delta\chi)^2 \cdot Bi}, \quad \eta = \frac{2\Delta\chi}{\Delta\zeta} \frac{k_{ac,e}}{k_{al,e}} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right). \quad (46)$$

La discretización en el centro queda de la siguiente manera:

$$j=0: \quad (2+4\gamma_1)\theta_0^{n+1} - 4\gamma_1\theta_1^{n+1} = (2-4\gamma_1)\theta_0^n + 4\gamma_1\theta_1^n. \quad (47)$$

Se observa que la condición de frontera en el centro tiene la siguiente forma:

$$a_{0,0}\theta_0^{n+1} + a_{0,1}\theta_1^{n+1} = b_{0,0}\theta_0^n + b_{0,1}\theta_1^n,$$

donde a y b representan a los coeficientes respectivos de la discretización de la ecuación de difusión de calor para el acero.

Representación en diferencias finitas para la condición de frontera que acopla la ecuación de difusión de calor del acero con el aluminio:

$$j = N, \quad i = 0:$$

$$\begin{aligned} & -\gamma_2\eta \left(1 - \frac{1}{\frac{2}{\Delta\chi} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} \right) \theta_{N-1}^{n+1} + \left(2 + 2\gamma_2 + \gamma_2\eta \left(1 - \frac{1}{\frac{2}{\Delta\chi} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} \right) \right) \theta_{N,0}^{n+1} - 2\gamma_2\theta_1^{n+1} = \\ & = \gamma_2\eta \left(1 - \frac{1}{\frac{2}{\Delta\chi} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} \right) \theta_{N-1}^n + \left(2 - 2\gamma_2 - \gamma_2\eta \left(1 - \frac{1}{\frac{2}{\Delta\chi} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)} \right) \right) \theta_{N,0}^n + 2\gamma_2\theta_1^n + 2\Delta\tau \end{aligned} \quad (48)$$

Y la ecuación del acoplamiento tiene la siguiente forma

$$a_{N,N-1}\theta_{N-1}^{n+1} + a_{N,N}\theta_{N,0}^{n+1} + a_{N,N+1}\theta_1^{n+1} = b_{N,N-1}\theta_{N-1}^n + b_{N,N}\theta_{N,0}^n + b_{N,N+1}\theta_1^n + g$$

Representación en diferencias finitas de la condición de frontera hacia el exterior:

$i = M :$

$$\begin{aligned}
 & -2\gamma_2\theta_{M-1}^{n+1} + \left(2 + 2\gamma_2 + 2Bi \cdot \Delta\chi \cdot \gamma_2 \left(1 + \frac{1}{2 \left(M + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \right) \theta_M^{n+1} = \\
 & = 2\gamma_2\theta_{M-1}^n + \left(2 - 2\gamma_2 - 2Bi \cdot \Delta\chi \cdot \gamma_2 \left(1 + \frac{1}{2 \left(M + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \right) \theta_M^n + 2\Delta\tau
 \end{aligned} \tag{49}$$

A continuación se muestra la forma que tiene la ecuación de la condición de frontera al exterior

$$c_{M,M-1}\theta_{M-1}^{n+1} + c_{M,M}\theta_M^{n+1} = d_{M,M-1}\theta_{M-1}^n + d_{M,M}\theta_M^n + g.$$

Donde c , d y g representa a los coeficientes resultantes de la discretización de la ecuación de difusión de calor del aluminio.

3.4 Discretización del dominio espacial y temporal.

Una vez discretizadas las ecuaciones y condiciones de frontera es necesario definir como se discretizará el dominio; es decir, definir las magnitudes de $\Delta\zeta$, $\Delta\chi$ y $\Delta\tau$; en cuanto a las discretizaciones espaciales, entre más pequeñas sean, el error en la aproximación disminuye en proporción cuadrática. Mientras que $\Delta\tau$ no tiene restricción alguna en cuanto a su magnitud, debido al esquema seleccionado para discretizar las ecuaciones y

las condiciones de frontera, por lo que decidió dar un paso temporal de $\Delta\tau = 0.005$.

A continuación se muestra una representación de la forma en que se realizó la discretización del cable mostrado en la figura 5.

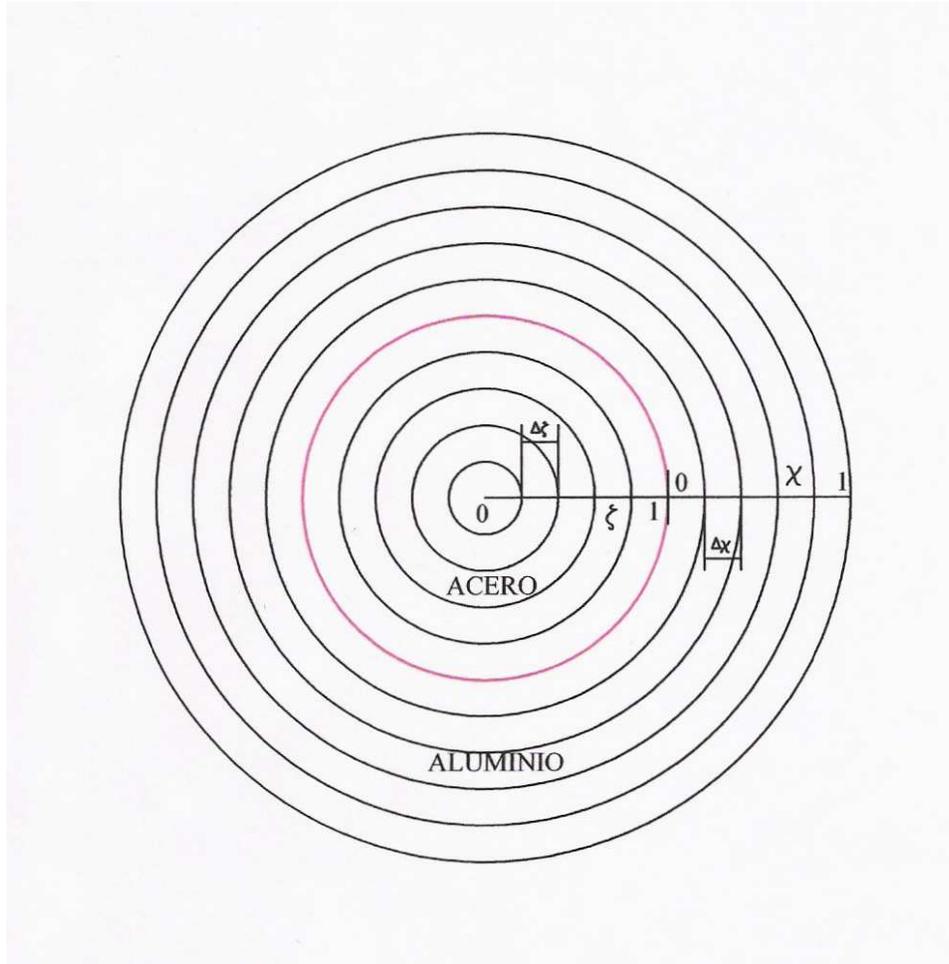


Figura 6. Representación de la discretización del dominio.

Debido a que no existe gradiente de temperatura en la dirección angular la discretización del dominio queda en forma de círculos concéntricos, y entre mayor sea el número de divisiones, $\Delta\zeta$ y $\Delta\chi$ son de menor longitud y por lo tanto generan un menor error.

Haciendo un balance para que $\Delta\zeta$ fuera lo suficientemente pequeño con el fin de que el error generado sea despreciable y además no requiera grandes recursos computacionales. Se determinó discretizar el dominio del acero en cien celdas, Por lo que la magnitud de $\Delta\zeta$ es 0.01, como lo muestra la figura7.

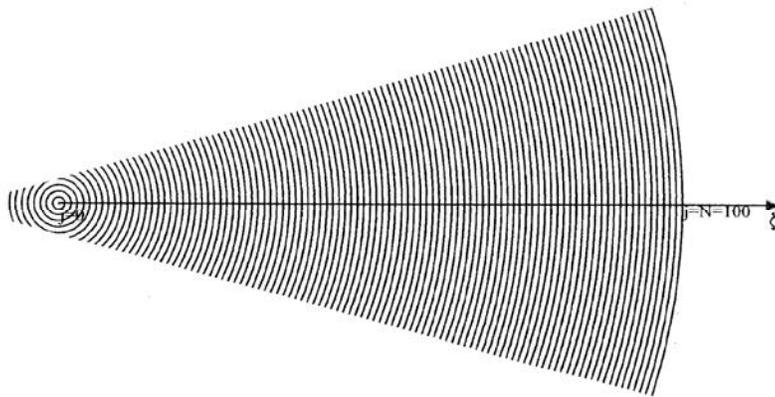


Figura 7. Discretización del acero.

De la misma forma se determinó que el dominio del aluminio se dividiera en cien celdas como se muestra en la figura 8. Y la magnitud de $\Delta\chi$ es también 0.01.

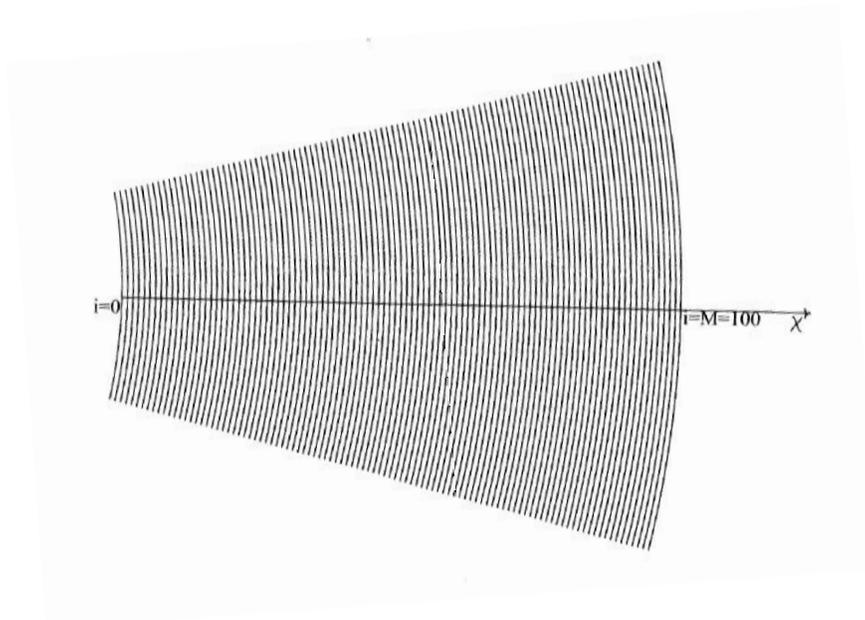


Figura 8. Discretización del aluminio.

3.5 Reducción a ecuaciones algebraicas

El siguiente paso es reacomodar los términos de las ecuaciones discretizadas de tal modo que queden ordenadas de la siguiente forma.

$$c_{i,i-1}\theta_{i-1}^{n+1} + c_{i,i}\theta_i^{n+1} + c_{i,i+1}\theta_{i+1}^{n+1} = d_{i,i-1}\theta_{i-1}^n + d_{i,i}\theta_i^n + d_{i,i+1}\theta_{i+1}^n + g. \quad (50)$$

Por lo que la ecuación (42) queda como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & -\gamma_2 \left(1 - \frac{1}{2 \left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \theta_{i-1}^{n+1} + (2 + 2\gamma_2) \theta_i^{n+1} - \gamma_2 \left(1 + \frac{1}{2 \left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \theta_{i+1}^{n+1} = \\ & = \gamma_2 \left(1 - \frac{1}{2 \left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \theta_{i-1}^n + (2 - 2\gamma_2) \theta_i^n + \gamma_2 \left(1 + \frac{1}{2 \left(i + \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)\Delta\chi} \right)} \right) \theta_{i+1}^n + 2\Delta\tau \end{aligned} \quad (51)$$

De la misma forma se reagrupa la ecuación (43), con el fin de que tenga la siguiente forma

$$a_{j,j-1}\theta_{j-1}^{n+1} + a_{j,j}\theta_j^{n+1} + a_{j,j+1}\theta_{j+1}^{n+1} = b_{j,j-1}\theta_{j-1}^n + b_{j,j}\theta_j^n + b_{j,j+1}\theta_{j+1}^n. \quad (52)$$

Por lo que queda reagrupada como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} & -\gamma_1 \left(1 - \frac{1}{2j} \right) \theta_{j-1}^{n+1} + (2 + 2\gamma_1) \theta_j^{n+1} - \gamma_1 \left(1 + \frac{1}{2j} \right) \theta_{j+1}^{n+1} = \\ & = \gamma_1 \left(1 - \frac{1}{2j} \right) \theta_{j-1}^n + (2 - 2\gamma_1) \theta_j^n + \gamma_1 \left(1 + \frac{1}{2j} \right) \theta_{j+1}^n \end{aligned} \quad (53)$$

A continuación se reacomodan los términos de las ecuaciones en matrices con el fin de representar el sistema de ecuaciones de la siguiente forma matricial.

$$[A][\theta]=[B].$$

Colocando respectivamente los coeficientes en la matriz A se obtiene una matriz tridiagonal.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} & a_{N,N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M-2,M-3} & c_{M-2,M-2} & c_{M-2,M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M-1,M-2} & c_{M-1,M-1} & c_{M-1,M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{M,M-1} & c_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \theta_2^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{N,0}^{n+1} \\ \theta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{M-2}^{n+1} \\ \theta_{M-1}^{n+1} \\ \theta_M^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_{0,0}\theta_0^n + b_{0,1}\theta_1^n \\ b_{1,1}\theta_0^n + b_{2,1}\theta_1^n + b_{3,j}\theta_2^n \\ b_{1,2}\theta_1^n + b_{2,2}\theta_2^n + b_{3,2}\theta_3^n \\ \vdots \\ b_{N,N-1}\theta_{N-1}^n + b_{N,N}\theta_{N,0}^n + b_{N,N+1}\theta_1^n + g \\ d_{1,0}\theta_0^n + d_{1,1}\theta_1^n + d_{1,2}\theta_2^n + g \\ \vdots \\ d_{M-2,M-3}\theta_{M-3}^n + d_{M-2,M-2}\theta_{M-2}^n + d_{M-2,M-2}\theta_{M-1}^n + g \\ d_{M-1,M-2}\theta_{M-2}^n + d_{M-1,M-1}\theta_{M-1}^n + d_{M-1,M}\theta_{i+1}^n + g \\ d_{M,M-1}\theta_{M-1}^n + d_{M,M}\theta_M^n + g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N, d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{M-2} \\ d_{M-1} \\ d_M \end{bmatrix}.$$

De esta forma la ecuación diferencial queda representada por un sistema algebraico de ecuaciones lineales, en éste caso como se decidió dividir el dominio del acero y el aluminio en cien partes cada uno, el sistema

resultante es un sistema de doscientas una ecuaciones con doscientas un incógnitas, que deberán resolverse para cada tiempo.

En la figura 9 se muestra el diagrama de flujo para resolver el estado transitorio.

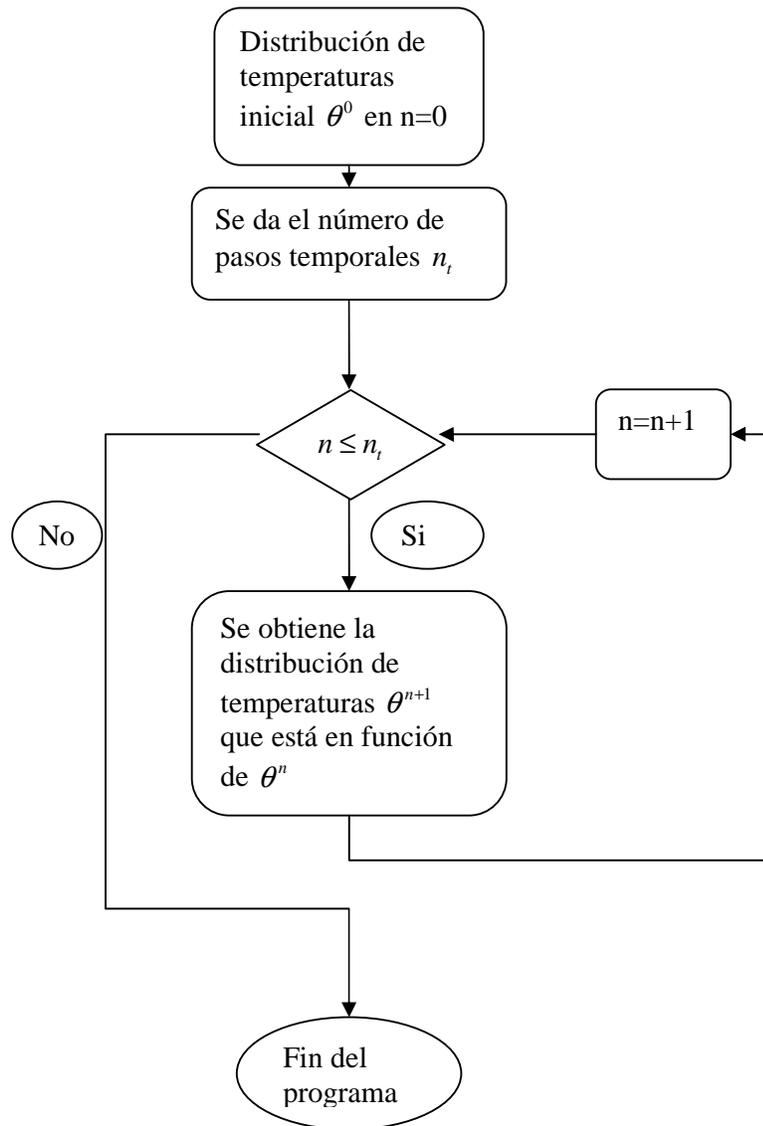


Figura 9. Diagrama de flujo del estado transitorio.

3.6 Método de solución de las ecuaciones

Hasta ahora el fenómeno físico gobernado por un conjunto de ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera está ahora transformado a un sistema de ecuaciones algebraicas. Los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas pueden clasificarse en dos categorías:

- 1.- Métodos directos: son los métodos en los cuales un número finito de operaciones están involucrados en la solución.
- 2.- Métodos iterativos: son los métodos en los cuales la solución se vuelve progresivamente más exacta conforme el número de iteraciones es incrementado hasta que el criterio de convergencia se satisface.

La selección apropiada del método para resolver el sistema de ecuaciones depende principalmente del número de ecuaciones, por lo que en este trabajo se determinó usar un método directo, mas específicamente se usó el algoritmo de Thomas [20-21].

El algoritmo de Thomas, es básicamente el método de eliminación de Gauss, sólo que aprovecha la gran cantidad de ceros que hay en la matriz tridiagonal [A] y el método consiste en transformar la matriz tridiagonal en una matriz bidiagonal por medio del siguiente cambio:

$$\text{Reemplazar " } a_{j,j} \text{ " por } \left(a_{j,j} - \frac{a_{j,j-1} \cdot a_{j-1,j}}{a_{j-1,j-1}} \right) \text{ para } j=1, 2, 3, \dots, N,$$

$$\text{Reemplazar " } c_{i,i} \text{ " por } \left(c_{i,i} - \frac{c_{i,i-1} \cdot c_{i-1,i}}{c_{i-1,i-1}} \right) \text{ para } i=1,2,3, \dots, M.$$

Además es necesario modificar el vector [B] de la siguiente manera.

Reemplazar “ b_j ” por $\left(b_j - \frac{a_{j,j-1}b_{j-1}}{a_{j-1,j-1}} \right)$ para $j=1, 2, 3, \dots, N$,

Reemplazar “ d_i ” por $\left(d_i - \frac{a_{i,i-1}d_{i-1}}{a_{i-1,i-1}} \right)$ para $i=1, 2, 3, \dots, M$.

Una vez que la matriz está transformada, en el último renglón queda sólo un término, de tal manera que es posible determinar el valor de θ_M como se muestra a continuación:

$$\theta_M = \frac{d_M}{c_{i,i}}.$$

Con el valor de θ_M es posible determinar el valor anterior θ_{M-1} haciendo una sustitución hacia atrás hasta llegar a θ_0 mediante la siguiente expresión:

$$\theta_i = \frac{d_i - c_{i,i+1}\theta_{i+1}}{c_{i,i}} \quad i=M-1, M-2, \dots, 1, 0.$$

$$\theta_j = \frac{b_j - a_{j,j+1}\theta_{j+1}}{a_{j,j}} \quad j=N-1, N-2, \dots, 1, 0.$$

Capítulo 4

Resultados y conclusiones

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos para el problema de transferencia de calor en el conductor aéreo tipo ACSR, donde el calor generado en el aluminio se transfiere al ambiente, así como al acero. Los resultados fueron obtenidos bajo la consideración de que el parámetro β es despreciable y usando los valores de $\alpha = 0.4888589 \cdot Bi$ y $\varepsilon = 0.368249$. En los resultados se muestra la influencia del número de Biot en la temperatura máxima del conductor, así como su distribución, por lo que los resultados se presentan con números de Biot, $Bi=0.01$, $Bi=0.05$ y $Bi=0.1$. La finalidad es cubrir una amplia gama de condiciones climáticas desde una buena transferencia de calor al ambiente ($Bi=0.1$), hasta una situación crítica, en la cual la transferencia de calor al ambiente es mínima ($Bi=0.01$) y una situación intermedia ($Bi=0.05$).

En la figura 10 se observa la evolución de la temperatura adimensional en el centro del conductor con respecto al tiempo, con los tres números de Biot mencionados anteriormente, las tres curvas comienzan en el mismo punto debido a la condición inicial en la cual se considera que el cable está a temperatura ambiente, pero durante el estado transitorio se separan. Aparentemente parece contradictorio que la curva correspondiente al número $Bi=0.1$ (buena transferencia de calor al ambiente) alcanza el mayor valor de la temperatura adimensional, mientras que la curva correspondiente al número $Bi=0.01$ (transferencia mínima de calor al ambiente) es la que tiene el menor valor de la temperatura adimensional θ . Cabe mencionar que esto es debido a la forma en que se realizó la adimensionalización de la variable θ , ya que queda multiplicada por el número de Biot, por lo que para un número de Biot grande, se alcanza un valor mayor de θ .

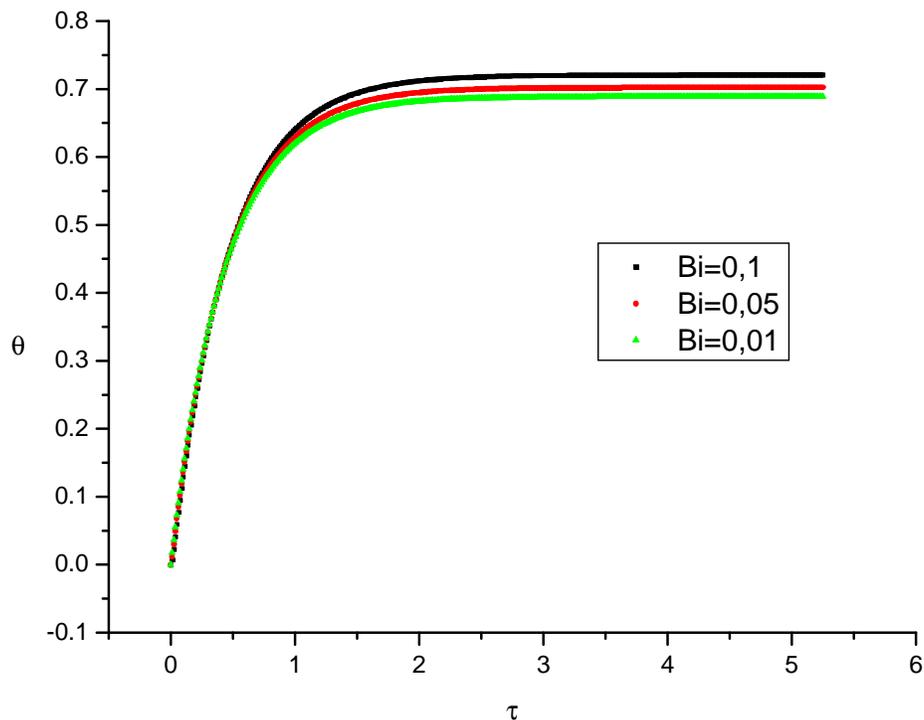


Figura 10. Estado transitorio de la temperatura adimensional en el centro para distintos números de Biot.

En la figura anterior se puede apreciar la duración del estado transitorio. En particular se observa que para el valor de $\tau=5.0$ es posible considerar que se encuentra en estado permanente. Y en éste punto es posible comparar la solución numérica con la solución analítica, con el fin de validar la simulación numérica en su estado permanente.

La solución en estado permanente de las ecuaciones (25) y (30) se obtienen haciendo el término $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$. Y resulta un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas.

$$\frac{1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \zeta \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} = 0 \quad (30')$$

$$\frac{1}{\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \frac{d}{d\chi} \left(\chi + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \frac{d\theta_{al}}{d\chi} + Bi = 0 \quad (25')$$

Sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\zeta = 0: \quad \left. \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad (31')$$

$$\zeta - 1 = \chi = 0: \quad \left. \frac{k_{ac,e}}{k_{al,e}} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) \frac{d\theta_{ac}}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = \left. \frac{d\theta_{al}}{d\chi} \right|_{\chi=0} \quad y \quad \theta_{ac} = \theta_{al} \quad (32')$$

$$\chi = 1: \quad \left. \frac{d\theta_{al}}{d\chi} \right|_{\chi=1} = -Bi\theta_{al}. \quad (33')$$

4.1 Solución analítica de la distribución de temperaturas adimensionales en estado permanente.

Para el acero

$$\theta_{ac}(\zeta) = \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right] + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1}$$

Para $0 \leq \zeta \leq 1$

Para el aluminio

$$\theta_{al}(\chi) = -\frac{Bi}{4} \left[\chi^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \chi - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(\chi + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right] + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) + 1} + \frac{Bi}{4} \left[1 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) \right) \right]$$

Para $0 \leq \chi \leq 1$

4.2 Evolución de los perfiles de temperaturas adimensionales.

Con el fin de poder mostrar el comportamiento térmico del cable durante el estado transitorio se seleccionaron cinco tiempos adimensionales representativos, $\tau = 0.0025$, $\tau = 0.25$, $\tau = 0.5$, $\tau = 1.0$, $\tau = 2.0$ y $\tau = 5.0$.

En las gráficas mostradas se encuentran las soluciones del acero y del aluminio en la misma gráfica, con la finalidad de observar en la interfase el efecto de la transferencia de calor hacia el acero.

De las figuras correspondientes a $\tau = 0.0025$ hasta $\tau = 5.0$, es decir de la figura 11 a la figura 16 se observa la evolución de la distribución de temperaturas adimensionales durante el estado transitorio, se puede decir que conforme el tiempo adimensional aumenta, el punto máximo en la distribución de temperaturas adimensionales del aluminio se desplaza hacia la interfase hasta llegar al estado permanente donde el punto máximo se encuentra en $\chi = 0$, además la distribución de temperaturas del núcleo de acero tiende a ser mas uniforme conforme se acerca el punto máximo del aluminio hasta que en estado permanente es una distribución constante.

Es posible observar durante todo el estado transitorio que la curva correspondiente al número de Biot $Bi = 0.01$ es la curva más uniforme de todas, mientras que la curva correspondiente al número de Biot $Bi = 0.1$ es la que presenta el mayor gradiente de temperatura; por lo que se puede concluir que el número de Biot influye principalmente en los perfiles de temperatura.

En la figura 16, correspondiente a $\tau = 5.0$ se hace una comparación con la solución analítica (curva en color azul), con el fin de poder validar el modelo numérico en estado permanente.

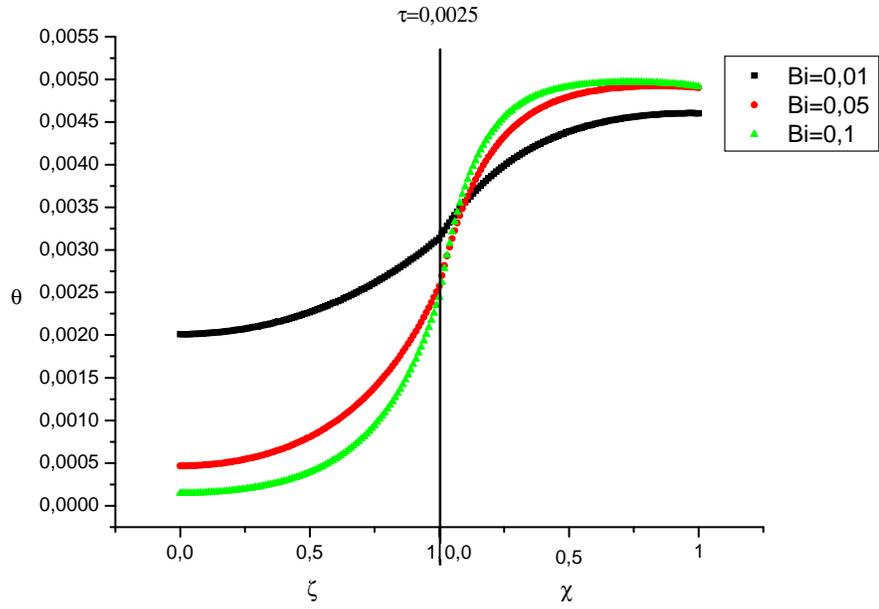


Figura 11. Distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=0.0025$

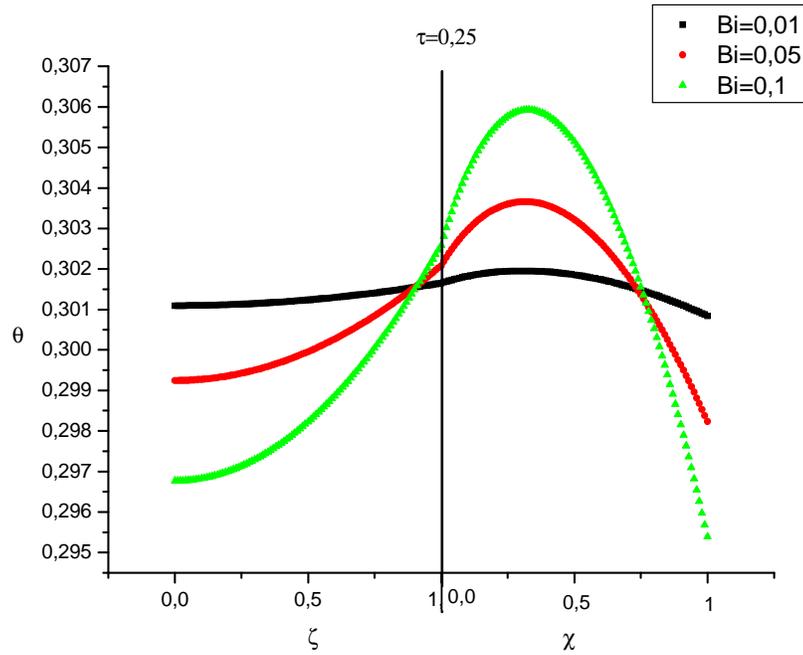


Figura 12. Distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=0.25$

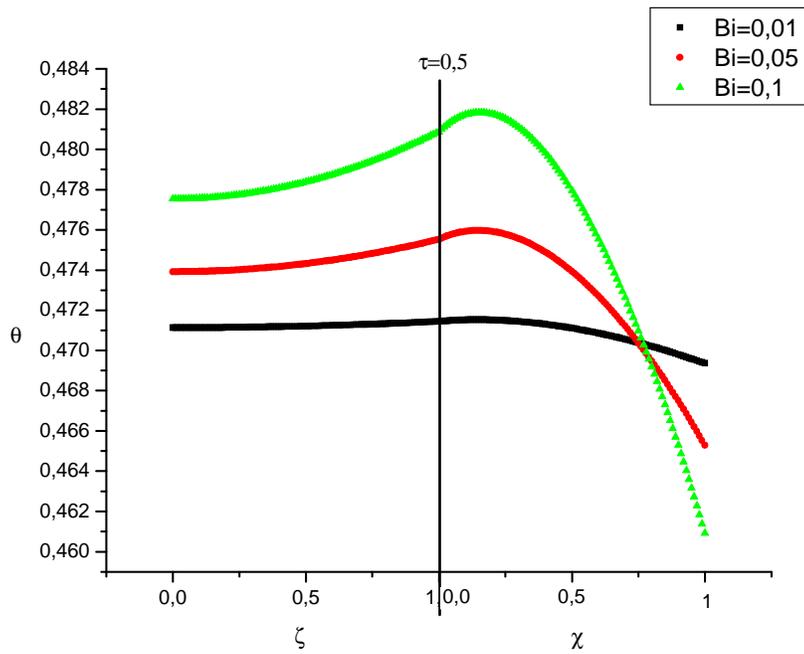


Figura 13. Distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=0.5$

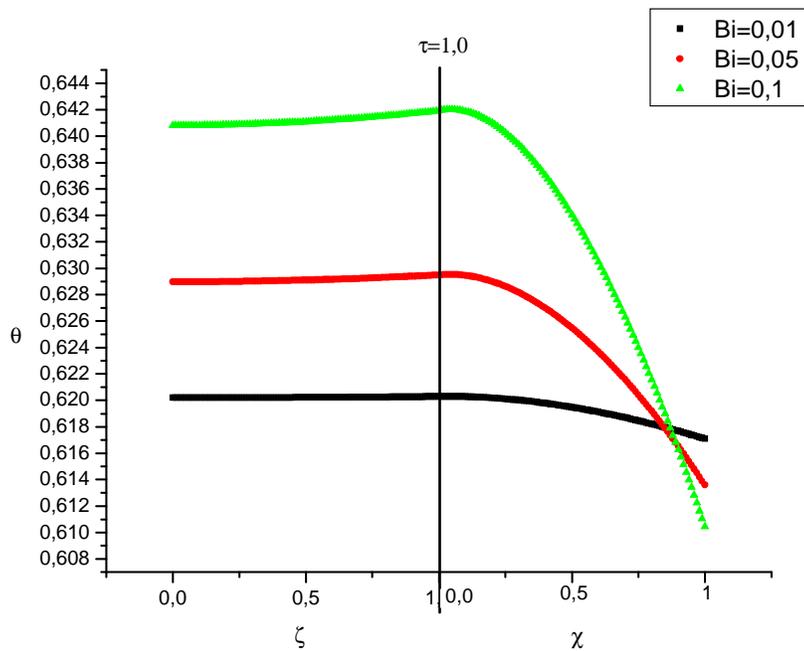


Figura 14. Distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=1.0$

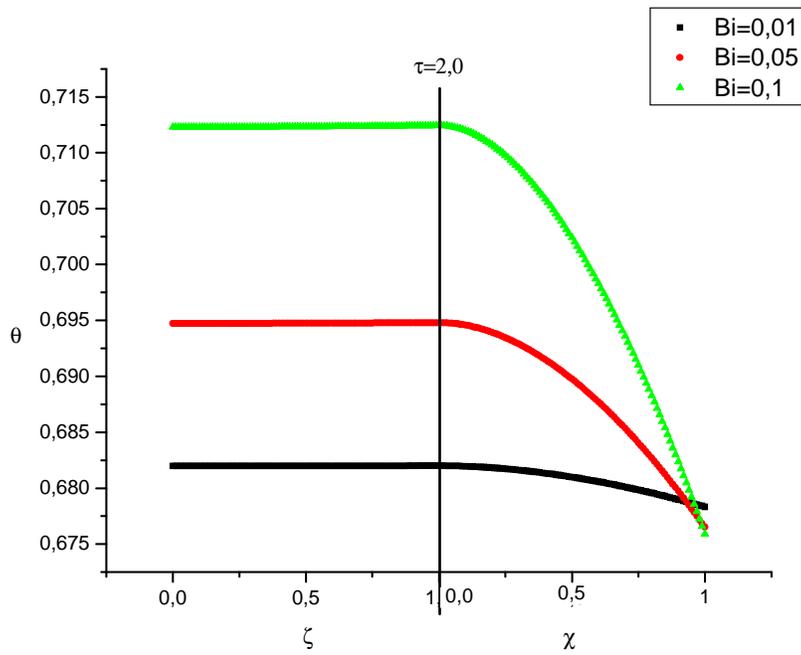


Figura 15. Distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=2.0$

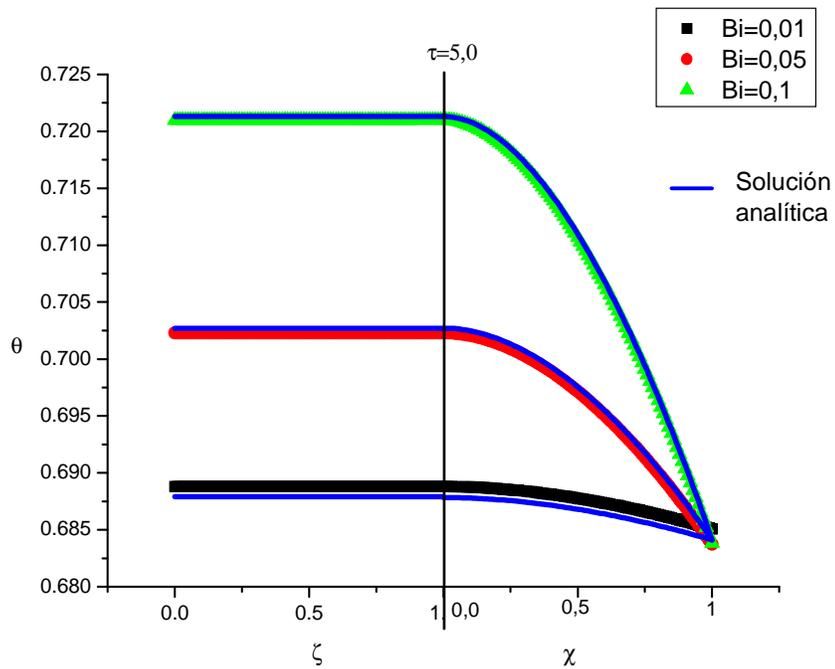


Figura 16. Comparación de la distribución de temperaturas adimensionales para $\tau=5.0$ con la solución analítica del estado permanente.

La figura 17 muestra el valor de la temperatura adimensional en el centro del conductor eléctrico, así como la temperatura adimensional en la parte exterior, en estado permanente; en función del número de Biot. Es posible observar que la diferencia de temperaturas aumenta conforme el número de Biot se va incrementando.

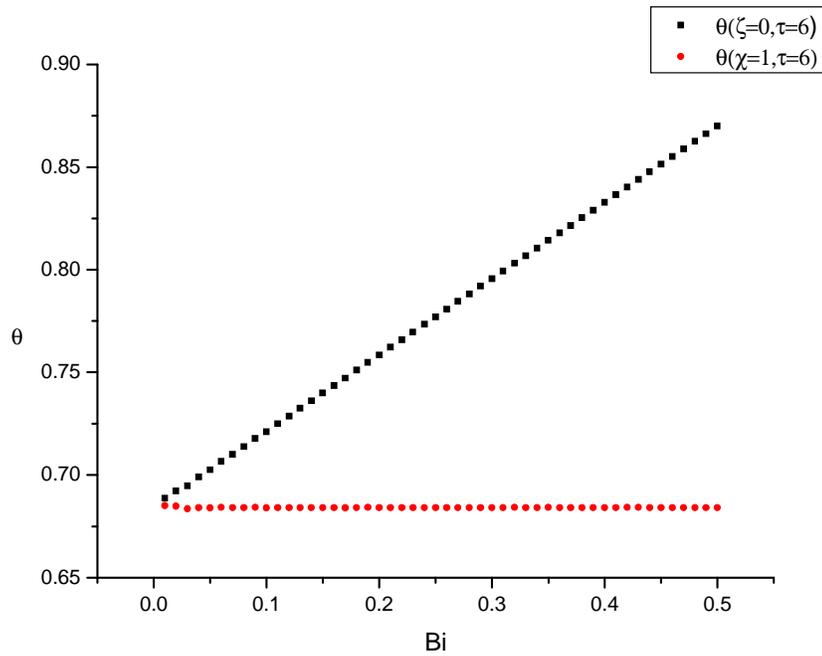


Figura 17. Comportamiento de la temperatura adimensional respecto al número de Biot

4.3 Comportamiento de los esfuerzos térmicos

En la siguiente figura se muestra el comportamiento de los esfuerzos térmicos en el núcleo de acero. Se observa que debido al incremento repentino de la corriente eléctrica se generan esfuerzos térmicos en un tiempo muy corto, los cuáles van decreciendo conforme el perfil de temperaturas adimensionales se va haciendo uniforme.

De igual forma se, se observa los esfuerzos térmicos generados se ven influenciados por el número de Biot. El mayor esfuerzo térmico mayor corresponde al número de Biot $Bi=0.1$ debido a que entre mayor es el número de Biot mayor es el gradiente de temperaturas.

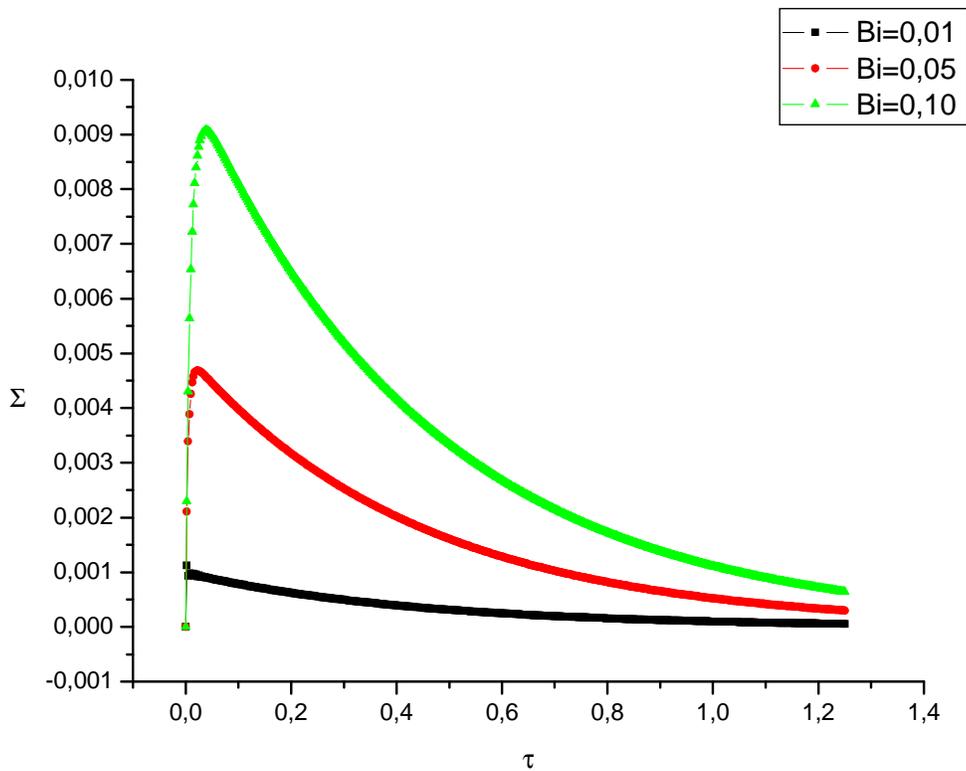


Figura 18. Evolución de los esfuerzos térmicos con el tiempo

4.4 Validación del modelo numérico en estado transitorio

Con el fin de validar el modelo numérico en el estado transitorio, la siguiente figura 20 reprodujo la figura 4 de los resultados de la referencia [9]; la cuál se muestra a continuación, en la cuál se muestra el comportamiento de la temperatura ante un incremento repentino de la corriente eléctrica de un cable ACSR Linnet, desde 600 [A] hasta 750 [A] y 900 [A] durante una hora, para posteriormente regresar a la corriente inicial, el experimento fue realizado a una temperatura ambiente de 25 °C y una corriente de aire a 2 [fts/s]. Debido a que hasta ahora la solución numérica solo había sido validada en estado permanente, mediante la comparación con su solución analítica en estado permanente.

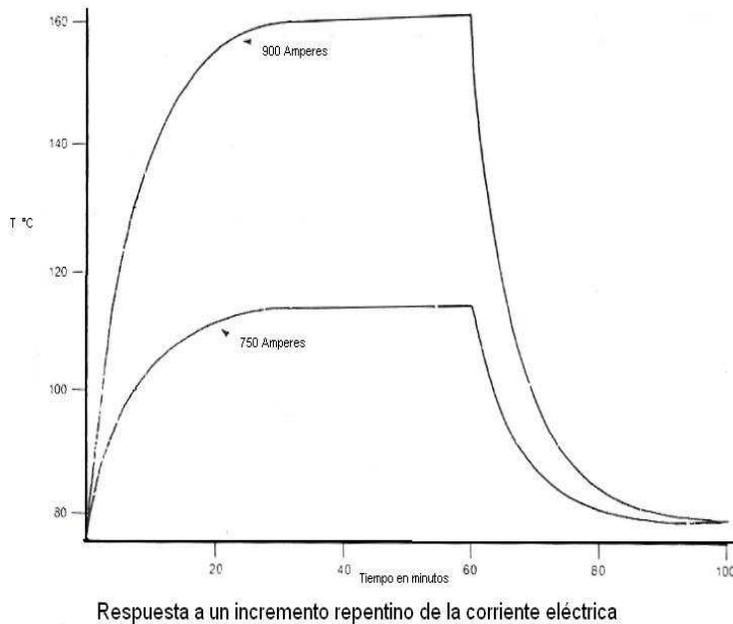


Figura 19. Comportamiento térmico de un cable ACSR 26/7 "LINNET". Referencia [9] figura 4.

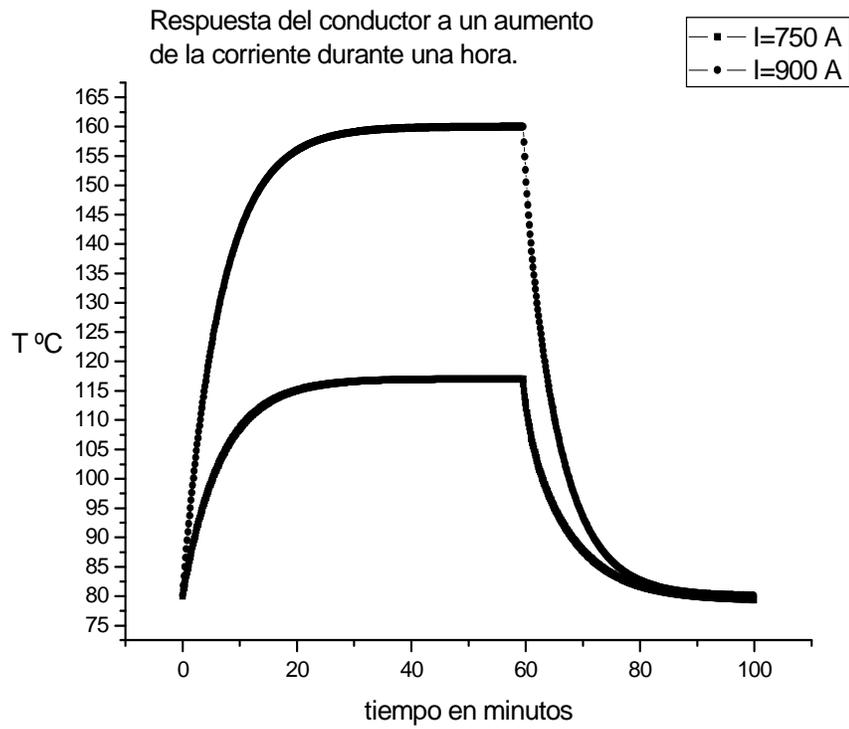


Figura 20. Validación del estado transitorio del modelo numérico.

4.5 Conclusiones

Uno de los objetivos principales del presente trabajo fue el destacar la importancia del estudio de la transferencia de calor en un cable aéreo tipo ACSR. Para ello fue formulado un modelo térmico que al ser adimensionalizado sirve para cualquier conductor bimetálico; sin embargo, las gráficas mostradas solo exponen el comportamiento de los cables ACSR 26/7, debido al hecho de que se tomó como referencia el conductor DRAKE ACSR; es decir, el modelo matemático sirve también para el cable Linnet, Hawk, etc., los cuales son cables ACSR 26/7. Esto es debido al hecho de que las conductividades térmicas dependen en gran medida del aire atrapado entre los alambres que conforman al conductor y todos los cables ACSR 26/7 tienen la misma relación de radios.

Debido al carácter matemático del problema, se utilizaron técnicas numéricas, para obtener la solución del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales, con tal fin se desarrolló un programa computacional en Fortran 90, el cuál calcula la distribución de temperaturas en cualquier instante.

El programa computacional es una herramienta de gran utilidad para el control de líneas aéreas, ya que muestra la duración del estado transitorio, así como el perfil de temperaturas de cualquier cable aéreo bimetálico, ya que calcula la porosidad y las propiedades físicas equivalentes.

El programa computacional está validado en el estado permanente mediante la comparación con su respectiva solución analítica, mostrando que el mayor error generado es para la curva correspondiente al número $Bi=0.01$, el cuál es alrededor de 0.15%, mientras que para las curvas correspondientes a $Bi=0.05$ y $Bi=0.1$, el error es alrededor de 0.05%. Por otro lado el programa computacional se validó en el estado transitorio mediante la reproducción de los resultados reportados en la figura 4 de la referencia [9].

Los resultados se muestran en variables adimensionales con en fin de agrupar la solución en estado transitorio de una gran variedad de conductores ACSR, aunque como se muestra en la figura 20, es posible mostrar los resultados con las variables dimensionales, pero los resultados representarían a un solo conductor.

Los resultados muestran que la temperatura máxima del conductor depende en gran medida de las condiciones climáticas, por lo que es posible transportar una mayor cantidad de corriente eléctrica en un clima frío y/o con corrientes de viento, que en comparación con un clima cálido sin corrientes de viento, además el perfil de temperaturas se ve seriamente afectado por la tasa de transferencia de calor al ambiente, haciendo que para un número de Biot pequeño la distribución de temperaturas sea casi uniforme, mientras que para un mayor número de Biot el gradiente de temperaturas es mayor, como se muestra en la figura 17, cuando el número de Biot es muy pequeño la temperatura del centro del núcleo es muy parecida a la temperatura del exterior, pero conforme el número de Biot se incrementa se observa que la diferencia de temperaturas es mayor.

En la figura 18, se muestra el comportamiento de los esfuerzos térmicos que sufren los cables al ser sometidos a incrementos repentinos de corriente eléctrica, por lo que se debe tener en cuenta que la transferencia de calor del aluminio al acero es de gran importancia, y si se requiere utilizar una mayor cantidad de corriente eléctrica, aparte de tener en cuenta que no sobrepase la temperatura máxima en el estado permanente, es necesario tener cuidado de no sobrepasar el esfuerzo térmico permisible.

Apéndice A

Justificación de las simplificaciones 4 y 5.

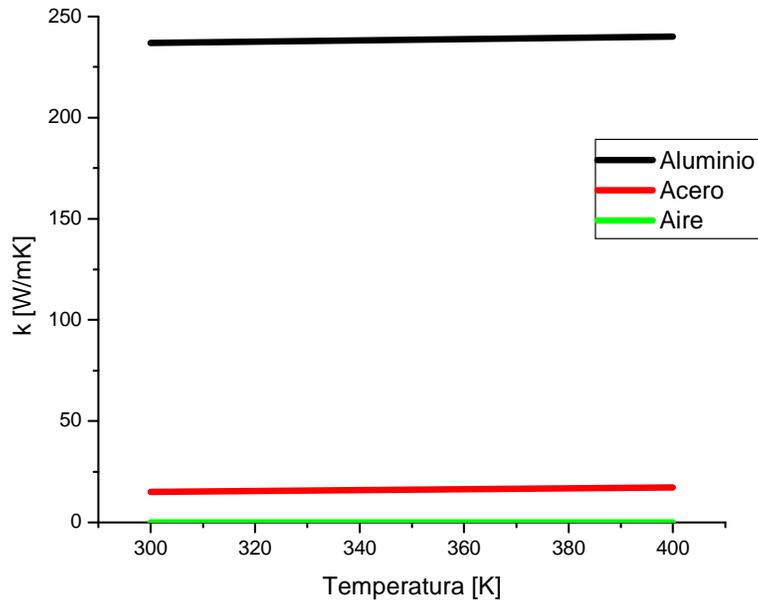


Figura 21. Variación de la conductividad térmica con la temperatura

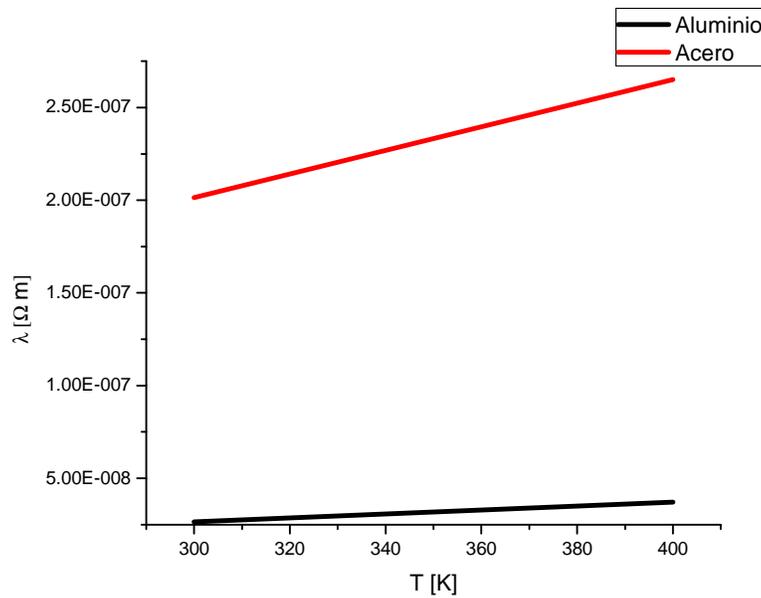


Figura 22. Variación de la resistividad eléctrica con la temperatura

REFERENCIAS

- [1] Koval, D. O. y Billinton, R. "Determination of transmission line ampacities by probability and numerical methods". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-89, No. 7, pp 1485-1492 (1970).
- [2] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part I. General description and justification of the real thermal rating system". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 803-809 (1977).
- [3] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part II. Steady state thermal rating program". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 810-821 (1977).
- [4] Morgan, V. T. "Effect of elevated temperature operation on tensile strength of overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-11, No 1, pp 345-352 (1996).
- [5] Havey, J. R. "Effect of elevated temperature operation on the strength of aluminum conductors". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-91, pp 1769-1772 (1972).
- [6] Morgan, V. T. "The loss of tensile strength of hard-drawn conductors by annealing in service". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-98, No. 3, pp 700-7009 (1979).
- [7] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part I. Dynamic ampacity rating algorithm". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1858-1864 (1983).
- [8] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part II. Conductor temperature sensor and laboratory field test evaluation". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1865-1873 (1983).
- [9] Black, W. Z., y Byrd, W. R. "Real-time ampacity model for overhead lines". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 7, pp 2289-2293 (1983).
- [10] Morgan, V. T. "The radial temperature distribution and effective radial thermal conductivity in bare solid and stranded conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-5, pp 1443-1452 (1990).

- [11] Black, W. Z., Collins, S. S. y Hall, J. F. "Theoretical model for temperature gradients within bare overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-3, No 2, pp 707-715 (1988).
- [12] Miñambres, J. F., Barandiarán, J.J., Alvarez-Isasi, Zorrozua, M. A., Zamora, I. y Mazón, A. J. "Radial temperature distribution in ACSR conductors applying finite elements". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-14, No 2, pp 472-478 (1999).
- [13] www.sural.com
- [14] Vafai, K. *Handbook of porous media*. Dekker, New York. (2000).
- [15] Kaviany, M. *Principles of heat transfer in porous media*. Springer, New York, (1995).
- [16] Morgan, V. T. *Thermal behaviour of electrical conductors: Steady, dynamic and fault-current ratings*. Wiley, Inglaterra, (1991).
- [17] Incropera, F. P. y Dewitt, D. P. *Fundamentals of heat and mass transfer*, Wiley, New York, (1990).
- [18] Sears, F. W., Zemansky, M. W. y Young, H. D. *Física Universitaria*. Addison-Wesley, Delaware (1988).
- [19] Ozisik, M. N. *Finite difference methods in heat transfer*. CRC, Boca Raton (1994).
- [20] Fosythe, G. E. y Wasow, W. R. *Finite difference methods for partial differential equations*. Wiley, New York, (1960).