

Núcleos por trayectorias monocromáticas en  
digráficas  $m$ -coloreadas con conjuntos  
monocromáticos de flechas.

Berta Zavala Santana

Instituto de Matemáticas, UNAM

Directora de Tesis: Dra. Hortensia Galeana Sánchez

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Agradecimientos:*

*Muy especialmente a la Dra. Hortensia Galeana Sánchez por todo el apoyo que me ha brindado, por sus comentarios y sugerencias, por la confianza al aceptarme como su alumna, por su tiempo, paciencia, por marcar los tiempos para hacer realidad este trabajo.*

*A la Dra. Rocío Rojas Monroy por su tiempo, paciencia, comentarios, sugerencias.*

*A mis sinodales: Dr. Bernardo Llano, Dr. Ricardo Gómez y al Dr. Gelasio Salazar por sus sugerencias.*

*A la Dra. Martha Takane por todo lo que aprendí. A la Dra. Bertha Tomé, al Dr. José Ríos.*

*A mis hermanos: Ana, Pável, Eli, Oscar H. y Gerardo, a mi familia por su cariño y confianza siempre. A Carlos F.*

*Al Instituto de Matemáticas, por el apoyo que me ha brindado siempre.*

*A todos gracias, por lo que cada uno me ha dado.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Conceptos básicos.</b>	<b>11</b>
1.1. Digráficas. . . . .	11
1.2. Núcleos. . . . .	14
1.3. Núcleos por Trayectorias Monocromáticas. . . . .	14
<b>2. Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en digráficas quasitransitivas.</b>	<b>17</b>
2.1. Trayectorias monocromáticas. . . . .	17
2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas . . . . .	22
<b>3. Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en torneos bipartitos.</b>	<b>43</b>
3.1. Seminúcleo módulo $i$ . . . . .	43
3.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas . . . . .	47
<b>4. Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en digráficas 3-quasitransitivas.</b>	<b>69</b>
4.1. Trayectorias monocromáticas . . . . .	69
4.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>
<b>Abstract</b>	<b>117</b>



# Introducción

La Teoría de Núcleos en Digráficas es importante ya que tiene muchas aplicaciones, algunas de ellas son en: Teoría de Juegos, Teoría de Decisiones, Teoría de Códigos, Complejidad Computacional, Lógica e Inteligencia Artificial, entre otras. Para aplicaciones ver [7], [8], [29], [30], [31].

Una **digráfica**  $D$  es una pareja  $(V(D), F(D))$  tal que  $V(D)$  es un conjunto no vacío de elementos llamados **vértices** y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas **flechas**. El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgenstern [33] en el contexto de la Teoría de Juegos y en un principio fue llamado “solución de un juego”. Posteriormente C. Berge notó que el mismo concepto resultaba útil en muchos otros contextos y lo llamó “núcleo de una digráfica”.

Un **núcleo**  $N$  en una digráfica  $D$  es un conjunto de vértices tal que entre dos de ellos no hay flechas y para todo  $v \in V(D) \setminus N$  existe una flecha hacia algún vértice de  $N$ . Una digráfica es **núcleo perfecta** si toda subdigráfica inducida tiene núcleo. Debido a la gran cantidad de aplicaciones es que se empezó a estudiar la existencia de núcleos en digráficas, principalmente finitas, entre los resultados más destacados se encuentran los realizados por Richardson [35], [36]; Duchet y Meyniel [6]; Duchet [4], [5]; Galeana-Sánchez [9]; Galeana-Sánchez y V. Neumann-Lara [16], [17]. Y para digráficas infinitas principalmente, Sands, Sauer y Woodrow [38]; S. Minggang [32] y muy recientemente por H. Galeana-Sánchez y M. Guevara [14], [15], Galeana-Sánchez y Rojas Monroy [20], [22], Pierre Ille et al. [25].

El problema de decidir si una digráfica plana tiene núcleo es NP-completo, como demostró V. Chvátal en 1980. En 1981 A. Fraenkel [7] probó que el problema de decidir si una digráfica plana tiene núcleo permanece siendo NP-completo aún cuando se pida  $\delta_D(x) \leq 3$ ,  $\delta_D^+(x) \leq 2$  y  $\delta_D^-(x) \leq 2$  para cada vértice  $x$  de  $D$ .

Si una digráfica  $D$  tiene sus flechas coloreadas y se han usado  $m$  colores se dice que  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada. Un conjunto  $N$  de vértices de una digráfica  $m$ -coloreada es un **núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas** si entre los vértices del conjunto no existen trayectorias dirigidas monocromáticas y desde cualquier  $v \in V(D) \setminus N$  existe una trayectoria dirigida monocromática hacia algún vértice de  $N$ . En este trabajo presentamos algunos resultados sobre la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en cierto tipo de digráficas finitas. Los conceptos básicos y algunos resultados ya obtenidos que usaremos a lo largo de la tesis se encuentran en el capítulo 1.

El concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del concepto de núcleo, y fue introducido por H. Galeana Sánchez en [10], en dicho trabajo se establecen condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en torneos  $m$ -coloreados. Además, se tienen otros resultados para ciertas digráficas  $m$ -coloreadas los cuales se pueden encontrar en [10], [11], [12], [13], [18].

Cabe mencionar que aunque el concepto de núcleo por trayectorias monocromáticas es una generalización del de núcleo existe una estrecha relación entre ellos, dada por la cerradura transitiva de una digráfica  $m$ -coloreada. La **cerradura transitiva** de una digráfica  $D$   $m$ -coloreada, denotada por  $\mathfrak{C}(D)$  es la digráfica tal que  $V(\mathfrak{C}(D)) = V(D)$  y  $F(\mathfrak{C}(D)) = F(D) \cup \{(u, v) \text{ de color } i \mid \text{ existe en } D \text{ una trayectoria dirigida de color } i \text{ desde } u \text{ hacia } v\}$ . Se puede probar que para cualquier color  $i$  la subdigráfica de  $\mathfrak{C}(D)$  inducida por todas las flechas de color  $i$  es una digráfica transitiva. También, se puede probar que  $D$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas si y sólo si  $\mathfrak{C}(D)$  tiene núcleo.

Dada la importancia de la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas, es que en el presente trabajo buscamos condiciones suficientes para que algunas familias de digráficas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En [38] Sands, Sauer y Woodrow demuestran que una digráfica 2-coloreada sin trayectorias dirigidas monocromáticas infinitas exteriores tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. En este mismo artículo se prueba, en particular, que todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un vértice  $v$  tal que desde cualquier otro vértice  $u \in V(T)$  existe una trayectoria dirigida monocromática hacia  $v$ . También, plantean el siguiente problema: Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que no tiene ciclos dirigidos de longitud 3 3-coloreados. ¿Entonces  $T$  tiene un vértice que satisface lo anterior?

Shen Minggang [32] prueba que si en el problema anterior se pide además que no tenga subtorneos transitivos tricolores de orden 3, entonces existe tal vértice. También, muestra que esto es lo mejor posible para  $m \geq 5$ , y en [19] H. Galeana-Sánchez y R. Rojas-Monroy demuestran que el resultado planteado por Sands, Sauer y Woodrow no es válido para  $m = 4$ .

En [21] se prueba que para un torneo 3-coloreado  $T$  tal que todo  $C_3$  es casimonocromático y cada vértice de  $T$  tiene vecindad a lo más bicolor, entonces  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta y por lo tanto  $T$  tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Una generalización del concepto de digráfica transitiva es el de digráfica quasitransitiva dada por Ghouilà-Houri [24]. Decimos que una digráfica es **quasitransitiva** si  $(u, v) \in F(D)$  y  $(v, w) \in F(D)$  para  $u, v, w \in V(D)$ , entonces  $(u, w) \in F(D)$  o  $(w, u) \in F(D)$ , y han sido estudiadas en [1], [2], [26], [28], [39]. Las digráficas quasitransitivas son importantes, entre otras cosas, por su relación con las gráficas de comparabilidad. Una gráfica  $G$  se dice que es de **comparabilidad** si existe una orientación asimétrica  $D$  de  $G$  que sea una digráfica transitiva. Estas digráficas han sido estudiadas en [23], [28]. Las digráficas quasitransitivas también son de interés ya que comparten muchas de las propiedades de los torneos [2]. Un **torneo** es una digráfica tal que entre cada par de vértices existe una y sólo una flecha, razón que los hace de una estructura muy rica. Es claro que los torneos son digráficas quasitransitivas.

En [37] se prueba que: Si  $D$  es una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que todo  $C_3$  es monocromático entonces  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta y en consecuencia  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En el presente trabajo hemos usado una condición particular, la cual consiste en pedir que el conjunto  $F^+(u) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in V(D)\}$  sea monocromático para cada  $u \in V(D)$ , y a partir de esto que otras condiciones se necesitan pedir para que ciertas familias de digráficas  $m$ -coloreadas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

En el capítulo 2 damos condiciones suficientes para que las digráficas quasitransitivas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Una digráfica  $D$  es un **torneo bipartito** si existe una bipartición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que toda flecha de  $D$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ , y entre cualquier vértice de  $V_1$  y cualquier vértice de  $V_2$  existe una y sólo una flecha. Los torneos bipartitos tienen cierta similitud con los torneos debido a la gran cantidad de flechas que poseen.

En el capítulo 3 se dan condiciones suficientes para la existencia de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas para torneos bipartitos.

Y por último, en el capítulo 4 damos condiciones suficientes para que las digráficas 3-quasitransitivas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Decimos que  $D$  es **3-quasitransitiva** si para cada  $u, v \in V(D)$  tal que existe  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 3 se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .

# Capítulo 1

## Conceptos básicos.

### 1.1. Digráficas.

En este capítulo presentamos las definiciones y los teoremas básicos de digráficas, núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas que usaremos a lo largo del presente trabajo..

**Definición. 1.1.1.** Una *digráfica*  $D$  es una pareja  $(V(D), F(D))$  tal que  $V(D)$  es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* y  $F(D)$  es un conjunto de parejas ordenadas de vértices distintos llamadas *flechas*. Decimos que una digráfica es de *orden*  $n$  si tiene  $n$  vértices.

**Definición. 1.1.2.** Si  $f$  es una flecha de  $D$  y  $f = (u, v)$  con  $u, v \in V(D)$  decimos que  $u$  y  $v$  son los *extremos* de  $f$  :  $u$  el extremo inicial de  $f$  y  $v$  el extremo final. También, decimos que  $f$  se dirige de  $u$  a  $v$  y que  $u$  es *adyacente hacia*  $v$  y  $v$  es *adyacente desde*  $u$ .

**Definición. 1.1.3.** Si  $D$  es una digráfica y  $f = (u, v)$  es una flecha de  $D$ , decimos que  $f$  es una *flecha simétrica* si  $(v, u)$  también es una flecha de  $D$ .

**Definición. 1.1.4.** Si  $D$  es una digráfica y  $f = (u, v)$  es una flecha de  $D$ , decimos que  $f$  es una *flecha asimétrica* si  $(v, u)$  no es una flecha de  $D$ .

**Definición. 1.1.5.** Decimos que una digráfica  $D$  es una *digráfica completa* si entre cualquier par de vértices distintos de  $D$  existe alguna flecha.

**Definición. 1.1.6.** Una *subdigráfica*  $H$  de una digráfica  $D$  es una digráfica tal que  $V(H) \subseteq V(D)$  y  $F(H) \subseteq F(D)$ . Decimos que  $H$  es una subdigráfica propia si  $V(H) \subset V(D)$  o  $F(H) \subset F(D)$  .

**Definición. 1.1.7.** Una subdigráfica  $H$  de una digráfica  $D$  es una *subdigráfica generadora* de  $D$  si  $V(H) = V(D)$ .

**Definición. 1.1.8.** Sea  $D$  una digráfica, si  $B \subseteq F(D)$ , definimos la *subdigráfica de  $D$  inducida por  $B$*  como la digráfica que tiene como vértices a los extremos de las flechas en  $B$  y a  $B$  como conjunto de flechas.

**Definición. 1.1.9.** Sea  $D$  una digráfica, si  $U \subseteq V(D)$ , definimos la *subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$*  como la digráfica que tiene a  $U$  como conjunto de vértices y como conjunto de flechas a todas las flechas de  $D$  que tienen ambos extremos en  $U$ . Denotamos por  $D[U]$  a la subdigráfica de  $D$  inducida por  $U$ .

Al igual que en gráficas, nos referiremos a las subdigráficas inducidas por un conjunto de vértices simplemente como subdigráficas inducidas, en caso de que hagamos referencia a una subdigráfica inducida por un conjunto de flechas lo especificaremos.

**Definición. 1.1.10.** Dada una digráfica  $D$  definimos su *parte simétrica* denotada por  $\mathbf{Sym}(D)$ , como la subdigráfica generadora de  $D$  cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas simétricas de  $D$ .

**Definición. 1.1.11.** Dada una digráfica  $D$  definimos su *parte asimétrica* denotada por  $\mathbf{Asym}(D)$ , como la subdigráfica generadora de  $D$  cuyo conjunto de flechas es el conjunto de flechas asimétricas de  $D$ .

**Definición. 1.1.12.** Decimos que una digráfica  $D$  es una *digráfica simétrica* si todas sus flechas son flechas simétricas.

**Definición. 1.1.13.** Decimos que una digráfica  $D$  es una *digráfica asimétrica* si todas sus flechas son flechas asimétricas.

**Definición. 1.1.14.** Un *camino* en una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  o  $(u_{i+1}, u_i) \in F(D)$ . En este caso decimos que  $u_1$  y  $u_n$  son los *extremos* del camino y que el camino es un  $u_1u_n$ -camino de la digráfica.

**Definición. 1.1.15.** Una *trayectoria* en una digráfica es un camino  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

**Definición. 1.1.16.** Un *camino cerrado* en una digráfica es un camino  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que  $u_1 = u_n$ .

**Definición. 1.1.17.** Un *ciclo* en una digráfica es un camino cerrado  $(u_1, u_2, \dots, u_n, u_1)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

**Definición. 1.1.18.** Un *camino dirigido* en una digráfica es un camino  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ .

**Definición. 1.1.19.** Una *trayectoria dirigida* en una digráfica es un camino dirigido que además es una trayectoria.

**Definición. 1.1.20.** Un *camino dirigido cerrado* en una digráfica es un camino dirigido que además es un camino cerrado.

**Definición. 1.1.21.** Un *ciclo dirigido* en una digráfica es un camino dirigido cerrado que además es un ciclo. Denotamos por  $C_n$  al ciclo dirigido que consta de  $n$  vértices.

**Definición. 1.1.22.** Dada una digráfica  $D$  y  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  un camino en  $D$  decimos que  $n$  es la *longitud de  $C$*  y la denotamos por  $\ell(C)$ .

Los siguientes teoremas son resultados básicos de digráficas que usaremos a lo largo de la tesis.

**Teorema. 1.1.23.** *Todo  $uv$ -camino dirigido en una digráfica contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida.*

**Teorema. 1.1.24.** *Todo camino cerrado dirigido en una digráfica contiene un ciclo dirigido.*

**Teorema. 1.1.25.** *Todo camino cerrado dirigido de longitud impar en una digráfica contiene un ciclo dirigido de longitud impar.*

**Definición. 1.1.26.** Una digráfica  $D$  es una *digráfica bipartita* si existe una bipartición  $\{U, W\}$  de los vértices de  $D$  tal que cualquier flecha de  $D$  tiene un extremo en  $U$  y otro en  $W$ .

**Teorema. 1.1.27.** *Si  $D$  es una digráfica bipartita entonces no tiene ciclos de longitud impar.*

## 1.2. Núcleos.

**Definición. 1.2.1.** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *conjunto independiente* de la digráfica  $D$  si para cada  $u, v \in N$  no existen flechas entre ellos en  $D$ .

**Definición. 1.2.2.** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *conjunto absorbente* de la digráfica  $D$  si para cada  $u \in V(D) \setminus N$  tenemos que  $u$  es adyacente hacia algún elemento de  $N$ .

**Definición. 1.2.3.** Sea  $D$  una digráfica y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *núcleo* en la digráfica  $D$  si es un conjunto independiente y absorbente de  $D$ .

**Definición. 1.2.4.** Una digráfica  $D$  es llamada *núcleo perfecta* si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

**Definición. 1.2.5.** Una digráfica  $D$  es llamada *núcleo imperfecta crítica* si no tiene núcleo pero toda subdigráfica propia de  $D$  si tiene núcleo.

No todas las digráficas tienen núcleo, por ejemplo, los ciclos dirigidos de longitud impar. El siguiente teorema fue dado por Berge y Duchet en 1980 y es uno de los resultados clásicos sobre la existencia de núcleos en digráficas y nos será de mucha utilidad a lo largo del presente trabajo.

**Teorema. 1.2.6.** *Si una digráfica satisface que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica entonces es núcleo perfecta.*

## 1.3. Núcleos por Trayectorias Monocromáticas.

Una generalización del concepto de núcleo es el de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas dado por H. Galeana Sánchez. En este, se consideran digráficas en las que a cada flecha se le asigna un color, si para las flechas de una digráfica  $D$  se emplean  $m$  colores, diremos que  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada.

**Definición. 1.3.1.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada. Una *trayectoria dirigida monocromática* en una digráfica  $D$  es una trayectoria dirigida tal que todas sus flechas tienen asignado el mismo color.

**Definición. 1.3.2.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas* de la digráfica  $D$  si para cada  $u, v \in N$  no existe en  $D$  trayectoria dirigida monocromática entre  $u$  y  $v$ .

**Definición. 1.3.3.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas* de la digráfica  $D$  si para cualquier  $u \in V(D) \setminus N$  tenemos que existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática para algún  $v \in V(D)$ .

**Definición. 1.3.4.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $N \subseteq V(D)$ ,  $N$  es un *núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas* en  $D$  si es un conjunto independiente y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$ .

El concepto de núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas es una generalización del de núcleo ya que a cualquier digráfica podemos asignarle a cada flecha un color distinto y entonces un conjunto de vértices es un núcleo si y sólo si es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Notemos que la definición de digráfica no permite que haya dos o más flechas con los mismos extremos y en la misma dirección. Las digráficas en las que esto ocurre se llaman *multidigráficas* y a dichas flechas se les llama *flechas múltiples*.

Existe una relación muy importante entre núcleo y núcleo por trayectorias monocromáticas, y está dada por medio del concepto de cerradura transitiva de una digráfica coloreada.

**Definición. 1.3.5.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, la *cerradura transitiva* de  $D$ , denotada por  $\mathfrak{C}(D)$ , se define como la siguiente multidigráfica:

$$V(\mathfrak{C}(D)) = V(D) \text{ y}$$

$$A(\mathfrak{C}(D)) = A(D) \cup \{(u, v) \text{ con color } i \mid \text{ existe una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ en } D\}.$$

A continuación daremos el teorema que muestra la relación entre núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas.

**Teorema. 1.3.6.** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada,  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas si y sólo si  $\mathfrak{C}(D)$  tiene núcleo. Más aún, el número de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  es igual al número de núcleos de  $\mathfrak{C}(D)$ .*

Para la demostración del teorema anterior ver [37].

**Definición. 1.3.7.** Sea  $D$  una digráfica infinita. Una *trayectoria infinita exterior* de  $D$ , es aquella que satisface:

1. Es una sucesión de vértices  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de  $D$ ,
2.  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$  y
3.  $(u_n, u_{n+1}) \in F(D)$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

## Capítulo 2

# Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en digráficas quasitransitivas.

En la tesis trabajamos con una condición especial, la cual consiste en pedir que el conjunto  $F^+(u)$  sea monocromático para cada  $u \in V(D)$ ; y a partir de esta condición decimos cuáles otras hay que pedir para que las digráficas quasitransitivas  $m$ -coloreadas tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.2.3, así como el Corolario 2.2.4. Antes de demostrar el Teorema 2.2.3, daremos algunos lemas que nos serán de gran utilidad, sobretodo en la demostración del Teorema 2.2.2.

### 2.1. Trayectorias monocromáticas.

En esta sección probaremos algunos lemas relacionados con las trayectorias dirigidas monocromáticas en las digráficas quasitransitivas. Iniciaremos dando la definición de digráfica quasitransitiva.

**Definición. 2.1.1.** Una digráfica  $D$  es *quasitransitiva* si para  $\{u, v, w\} \subseteq V(D)$  tales que  $\{(u, v), (v, w)\} \subseteq F(D)$  se implica que  $(u, w) \in F(D)$  o  $(w, u) \in F(D)$ .

Sea  $D$  una digráfica y  $u \in V(D)$  denotaremos por:

$$F^+(u) = \{(u, v) \in F(D) \mid v \in V(D)\}.$$

**Lema. 2.1.2.** *Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada. Si  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, entonces  $(u_i, u_j) \notin F(D)$  para cada  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  con  $j > i + 1$ . En particular para cada  $i \in \{0, \dots, n - 2\}$ ,  $(u_{i+2}, u_i) \in F(D)$ .*

**Demostración.**

Sea  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Sean  $u_i, u_j \in V(T)$  con  $j > i + 1$ .

Supongamos por contradicción que  $(u_i, u_j) \in F(D)$ , ver figura 2.1.

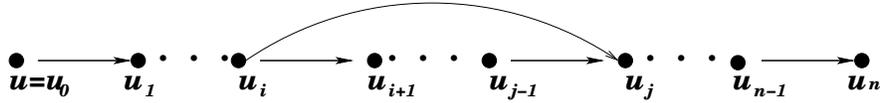


Figura 2.1:

Entonces  $T' = (u = u_0, \dots, u_i, u_j, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática (recordar que  $F^+(u_i)$  es monocromático) tal que  $\ell(T') < \ell(T)$  lo que contradice la elección de  $T$ .

Por lo tanto  $(u_i, u_j) \notin F(D) \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$  con  $j > i + 1$ . Pero  $D$  es quasitransitiva entonces  $(u_{i+2}, u_i) \in F(D), \forall i \in \{0, \dots, n\}$ , ver figura 2.2.

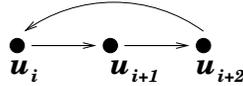


Figura 2.2:

■

**Corolario. 2.1.3.** *Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada. Si  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, entonces  $(u_j, u_i) \in F(D)$  para cada  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  con  $j > i + 1$  a menos que  $|V(T)| = 4$ , pues en este caso la flecha  $(u_3, u_0)$  podría no existir.*

**Demostración.**

Sea  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Procederemos por inducción sobre  $|V(T)|$ .

1. Si  $|V(T)| = 3$ , el resultado se sigue del Lema 2.1.2.
2. Para  $|V(T)| = 4$ , sea  $T = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  una  $u_0u_3$ -trayectoria dirigida monocromática entonces por el Lema 2.1.2 se tiene que  $\{(u_3, u_1), (u_2, u_0)\} \subseteq F(D)$ . Y posiblemente la flecha que no está es la  $(u_3, u_0)$ , ver figura 2.3.

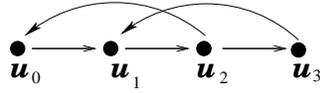


Figura 2.3:

3.  $|V(T)| = 5$ . Sea  $T = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$  una  $u_0u_4$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, entonces por el Lema 2.1.2 y por ser  $D$  quasitransitiva tenemos que  $\{(u_4, u_2), (u_3, u_1), (u_2, u_0), (u_4, u_0)\} \subseteq F(D)$ . También, tenemos que  $\{(u_4, u_0), (u_0, u_1)\} \subseteq F(D)$  entonces por ser  $D$  quasitransitiva se tiene que  $(u_4, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, u_4) \in F(D)$ , pero por el Lema 2.1.2  $(u_1, u_4) \notin F(D)$ , de donde  $(u_4, u_1) \in F(D)$ . Por otro lado tenemos que  $\{(u_3, u_4), (u_4, u_0)\} \subseteq F(D)$ , entonces por ser  $D$  quasitransitiva se tiene que  $(u_3, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, u_3) \in F(D)$ , pero si  $(u_0, u_3) \in F(D)$  se contradice el Lema 2.1.2.

Por lo tanto  $(u_3, u_0) \in F(D)$ , ver figura 2.4.

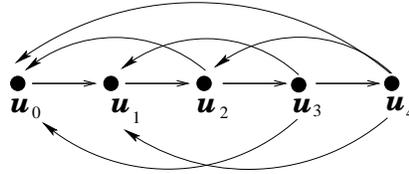


Figura 2.4:

Por lo tanto  $(u_j, u_i) \in F(D)$  para cada  $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  con  $j > i + 1$ .

4. Por hipótesis de inducción, supongamos que si  $T' = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$  es una  $u_0u_{n-1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, con  $n - 1 \geq 6$ , entonces  $(u_j, u_i) \in F(D)$  para cada  $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$  con  $j > i + 1$ .
5. Sea  $T = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$  una  $u_0u_n$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima. Por hipótesis de inducción las trayectorias  $T_1 = (u_0, \dots, u_{n-1})$  y  $T_2 = (u_1, \dots, u_n)$  que son de longitud mínima satisfacen que  $(u_j, u_i) \in F(D)$  para  $j > i + 1$ . Así que sólo falta probar que  $(u_n, u_0) \in F(D)$ , pero  $(u_2, u_0) \in F(D)$  y  $(u_n, u_2) \in F(D)$  por hipótesis de inducción, entonces por ser  $D$  quasitransitiva se tiene que  $(u_0, u_n) \in F(D)$  o  $(u_n, u_0) \in F(D)$ , por el Lema 2.1.2 se tiene que  $(u_0, u_n) \notin F(D)$ , de donde  $(u_n, u_0) \in F(D)$ , ver figura 2.5.

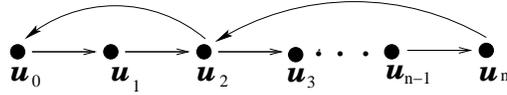


Figura 2.5:

■

**Lema. 2.1.4.** *Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que para cada  $u \in V(D)$ ,  $F^+(u)$  es monocromático. Si existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y  $(v, u) \notin F(D)$  para  $\{u, v\} \subseteq V(D)$  entonces se cumple una de las siguientes condiciones:*

- (1)  $(u, v) \in F(D)$
- (2)  $(u, v) \notin F(D)$  y existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3,  $(u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$  tal que  $\{(u_2, u_0), (u_3, u_1)\} \subseteq F(D)$  y no existe  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 2. Más aún, no existe  $vu$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

### **Demostración.**

Sea  $T$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

**Caso 1)** Si  $\ell(T) = 1$ , entonces  $T = (u, v) \in F(D)$ . Por lo que se satisface la condición (1).

**Caso 2)** Supongamos que  $\ell(T) \geq 2$ .

Demostraremos que  $\ell(T) = 3$

- (a) Primero veamos que no existe  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

Supongamos por contradicción que existe  $T'$  una  $uv$ -trayectoria dirigida tal que  $\ell(T') = 2$ .

$T' = (u, w, v)$ , ver figura 2.6, es una  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

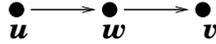


Figura 2.6:

Como  $D$  es quasitransitiva, entonces  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$  pero  $(u, v) \notin F(D)$  por ser  $T$  de longitud mínima y  $(v, u) \notin F(D)$  por hipótesis.

Por lo tanto no existe  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

- (b) Ahora demostraremos que  $\ell(T)$  no puede ser mayor o igual a 4.

Supongamos por contradicción que  $\ell(T) \geq 4$ .

Sea  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$ ,  $n \geq 4$ . Entonces por el Corolario 2.1.3 se tiene que  $(v, u) \in F(D)$ , contradicción con la hipótesis del Lema 2.1.4.

Por lo tanto  $\ell(T) = 3$ .

Sea  $T = (u = u_0, u_1, u_2, u_3 = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3.  $(u_2, u_0) \in F(D)$  y  $(u_3, u_1) \in F(D)$  por el Lema 2.1.2.

Supongamos por contradicción que existe una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 2.

Sea  $T = (v, x, u)$  una  $vu$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

Por ser  $D$  quasitransitiva tenemos que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ . Pero  $(u, v) \notin F(D)$  por (2) y  $(v, u) \notin F(D)$  por hipótesis, ver figura 2.7.

Por lo tanto, no existe  $vu$ -trayectoria dirigida de longitud 2. ■

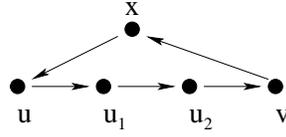


Figura 2.7:

## 2.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas para digráficas quasitransitivas.

A continuación damos la definición de  $\gamma$ -ciclo, la cual generaliza lo que es un ciclo.

**Definición. 2.2.1.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada. Un  $\gamma$ -ciclo en  $D$  es una sucesión de vértices distintos de  $D$ ,  $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$  tal que:

- (1) Existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\} \pmod{n+1}$ .
- (2) No existe  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Diremos que la longitud de  $\gamma$  es  $n+1$ , y la denotaremos por  $\ell(\gamma) = n+1$ .

En adelante denotaremos con  $C_3$  al ciclo dirigido de longitud 3.

El siguiente es uno de los teoremas más importantes en este capítulo.

**Teorema. 2.2.2.** Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, entonces  $D$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

### Demostración.

Por contradicción. Supongamos que  $D$  contiene un  $\gamma$ -ciclo.

Sea  $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$  un  $\gamma$ -ciclo de longitud mínima.

Por ser  $\gamma$  un  $\gamma$ -ciclo tenemos de la definición que:

- a) Existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ .
- b) No existe  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Figura 2.8.

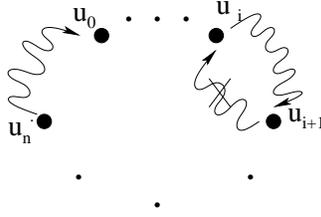


Figura 2.8:

Por el Lema 2.1.4 tenemos que se satisface una de las siguientes condiciones para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ :

- i) Existe  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$ .
- ii)  $(u_i, u_{i+1}) \notin F(D)$  y existe  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3, no hay  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida de longitud 2, y no existe  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

Sea  $T_i = (u_i, u_{i+1})$  si  $(u_i, u_{i+1}) \in F(D)$  o  $T_i = (u_i, v_i, w_i, u_{i+1})$  una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3 si  $(u_i, u_{i+1}) \notin F(D)$ .

Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

1.  $\ell(\gamma) \geq 3$ . Por la definición de  $\gamma$ -ciclo, ya que si  $\ell(\gamma) = 2$  tendríamos  $\gamma = (u_0, u_1, u_0)$ , esto es, existe una  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática y existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual no puede ocurrir por la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.9.

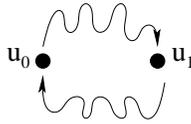


Figura 2.9:

2. No todas las trayectorias  $T_i$  son del mismo color para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Si  $T_i$  es del mismo color que  $T_j$  para cada  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ . Entonces como existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática para cada

$i \in \{0, \dots, n\}$  y estas son del mismo color, se sigue que  $T_{i+1} \cup \dots \cup T_{i-1}$  es un  $u_{i+1}u_i$ -camino dirigido monocromático, entonces por el Teorema 1.1.23, existe una  $u_{i+1}u_i$ -trayectoria dirigida monocromática contenida en el  $u_{i+1}u_i$ -camino dirigido monocromático, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo. Ver figura 2.10.

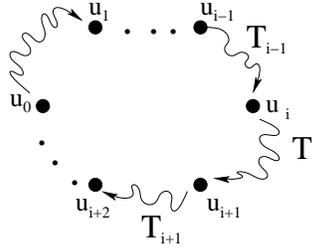


Figura 2.10:

3. Por (2) podemos suponer que en el  $\gamma$ -ciclo hay al menos 2 colores. Supongamos que  $T_0$  es de color 1 y  $T_1$  es de color 2, ver figura 2.11.

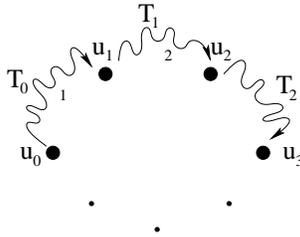


Figura 2.11:

4. No existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Procederemos por contradicción.

Supongamos que existe  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$  una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , ver figura 2.12.

De donde se tienen las siguientes afirmaciones:

- 4.1.  $T$  es de color 3 con  $3 \notin \{1, 2\}$ .

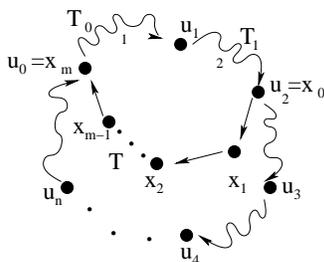


Figura 2.12:

4.1.1.  $T$  no puede ser de color 1, pues en este caso  $T \cup T_0$  es un  $u_2 u_1$ -camino dirigido de color 1, y por el Teorema 1.1.23, existe una  $u_2 u_1$ -trayectoria dirigida de color 1, que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.13.

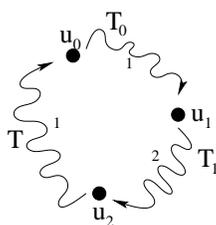


Figura 2.13:

4.1.2.  $T$  no puede ser de color 2, ya que tendríamos que  $T_1 \cup T$  es un  $u_1 u_0$ -camino dirigido de color 2 y por el Teorema 1.1.23 existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida de color 2, que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.14.

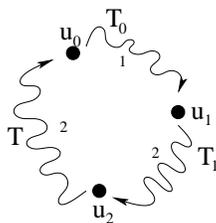


Figura 2.14:

Así,  $T$  es de color 3, con  $3 \notin \{1, 2\}$ .

4.2.  $\ell(T_0) = 3$ .

Supongamos que  $\ell(T_0) = 1$ .

Tenemos que  $(x_{m-1}, u_0) \in F(D)$  y  $(u_0, u_1) \in F(D)$ , entonces  $(x_{m-1}, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, x_{m-1}) \in F(D)$  por ser  $D$  quasitransitiva.

4.2.1.  $(u_1, x_{m-1}) \notin F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(u_1, x_{m-1}) \in F(D)$  y se tiene que es de color 2, pues  $F^+(u_1)$  es monocromático y de  $u_1$  salen flechas de color 2. Entonces,  $(u_0, u_1, x_{m-1}, u_0)$  es un  $C_3$  tricolor, contradicción, ya que por hipótesis  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, ver figura 2.15.

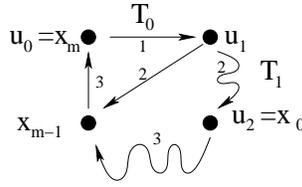


Figura 2.15:

4.2.2.  $(x_{m-1}, u_1) \notin F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(x_{m-1}, u_1) \in F(D)$ , además, es de color 3 ya que  $F^+(x_{m-1})$  es de color 3 y monocromático. En este caso, se tiene que existe  $(u_2 = x_0, \dots, x_{m-1}, u_1)$  una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.16.

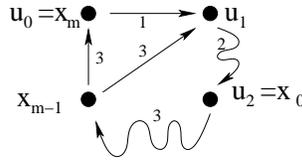


Figura 2.16:

Por lo tanto se sigue de la definición de  $T_i$  y de las afirmaciones (4.2.1) y (4.2.2) que  $\ell(T_0) = 3$ .

- 4.3.  $(u_0, u_1) \notin F(D)$ ,  $(u_1, u_0) \notin F(D)$ , no existe  $u_0u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 2 y no existe  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

Es una consecuencia directa del Lema 2.1.4 y de (4.2).

- 4.4.  $\ell(T_1) = 3$ .

Supongamos por contradicción que  $\ell(T_1) = 1$ .

Consideraremos las dos posibilidades para  $\ell(T)$ .

- 4.4.1. Si  $\ell(T) = 1$ .

Como  $\{(u_1, u_2), (u_2, u_0)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva entonces  $(u_1, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, u_1) \in F(D)$ , contradicción, ya que no ocurre por (4.3), ver figura 2.17.

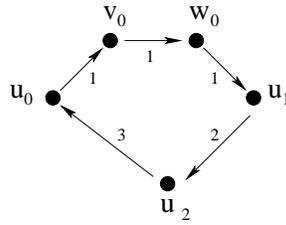


Figura 2.17:

- 4.4.2. Si  $\ell(T) \geq 2$ .

Sea  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$ .

Como  $D$  es quasitransitiva entonces  $(x_1, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, x_1) \in F(D)$ , pues  $\{(u_1, u_2), (u_2, x_1)\} \subseteq F(D)$ .

Si  $(x_1, u_1) \in F(D)$  entonces  $(x_1, u_1)$  es de color 3, pues  $F^+(x_1)$  es de color 3, además  $(u_2, x_1, u_1)$  es una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática y esto contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.18. De donde  $(u_1, x_1) \in F(D)$ .

Nuevamente, como  $D$  es quasitransitiva se tiene que  $(x_2, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, x_2) \in F(D)$ , pues  $\{(u_1, x_1), (x_1, x_2)\} \subseteq F(D)$ .

Si  $(x_2, u_1) \in F(D)$  tenemos que  $(u_2, x_1, x_2, u_1)$  es una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática pues  $F^+(u_2)$ ,  $F^+(x_1)$  y  $F^+(x_2)$  son de color 3 y esto contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.19. Por lo que  $(u_1, x_2) \in F(D)$ .

Procediendo de esta manera llegamos a que si  $(u_1, x_i) \in F(D)$  para  $i \in \{1, \dots, m-2\}$  entonces  $(u_1, x_{i+1}) \in F(D)$ , porque si

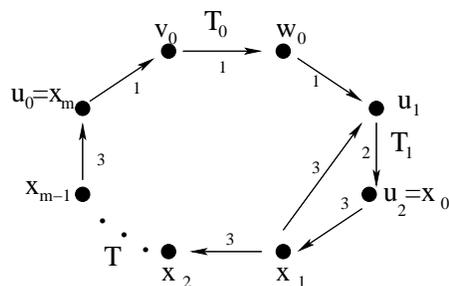


Figura 2.18:

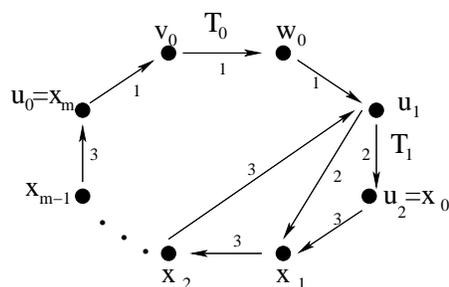


Figura 2.19:

$(u_1, x_i) \in F(D)$ ,  $(x_i, x_{i+1}) \in F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva tenemos que  $(u_1, x_{i+1}) \in F(D)$  o  $(x_{i+1}, u_1) \in F(D)$ . En otro caso,  $(x_{i+1}, u_1) \in F(D)$  entonces  $(x_{i+1}, u_1)$  es de color 3 lo que implica que  $(u_2, x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, u_1)$  es una  $u_2 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.20. Por lo que  $(u_1, x_{i+1}) \in F(D)$ .

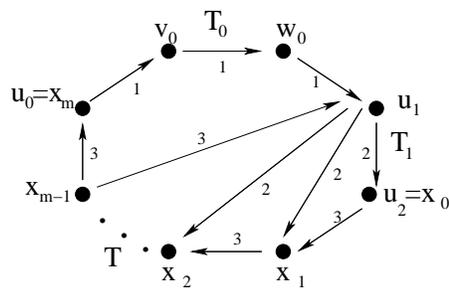


Figura 2.20:

De lo anterior se sigue que  $(u_1, x_{m-1}) \in F(D)$ , así que  $(u_1, x_{m-1}, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que contradice (4.3).

Por lo tanto  $\ell(T_1) = 3$ .

Ahora, podemos suponer que  $\ell(T_0) = 3$ ,  $\ell(T_1) = 3$  y recordemos que estamos asumiendo que existe  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$  una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $3 \notin \{1, 2\}$ .

4.5.  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(u_0, u_2) \in F(D)$ .

Como  $D$  es quasitransitiva y  $\{(u_0, u_2), (u_2, v_1)\} \subseteq F(D)$ , (recuérdese que  $T_i = (u_i, v_i, w_i, u_{i+1})$  para  $i \in \{0, 1\}$  y que por el Lema 2.1.4  $\{(u_{i+1}, v_i), (w_i, u_i)\} \subseteq F(D)$ ), tenemos que  $(u_0, v_1) \in F(D)$  o  $(v_1, u_0) \in F(D)$ .

4.5.1.  $(v_1, u_0) \notin F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(v_1, u_0) \in F(D)$ , entonces  $(u_1, v_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 2 y esto contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.21. De donde  $(u_0, v_1) \in F(D)$ .

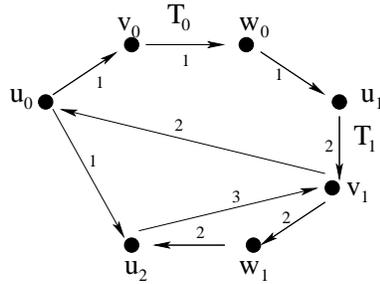


Figura 2.21:

Nuevamente, por ser  $D$  quasitranstiva y  $\{(u_0, v_1), (v_1, w_1)\} \subseteq F(D)$  se sigue que  $(u_0, w_1) \in F(D)$  o  $(w_1, u_0) \in F(D)$ .

4.5.2.  $(w_1, u_0) \notin F(D)$ . Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2 y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.22.

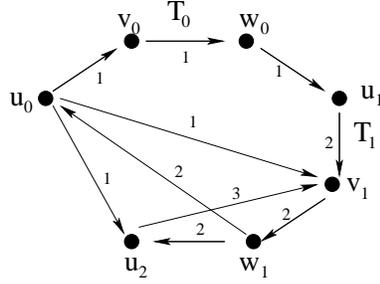


Figura 2.22:

4.5.3.  $(u_0, w_1) \notin F(D)$ . Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$  entonces  $(u_0, w_1, u_1)$  es una  $u_0u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que contradice el Lema 2.1.4, ver figura 2.23.

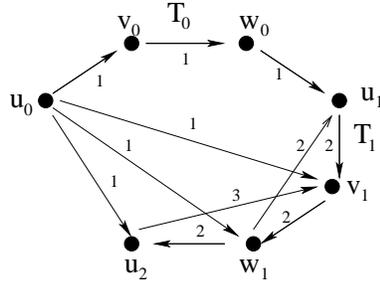


Figura 2.23:

Concluimos de (4.5.1), (4.5.2), (4.5.3) que  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ .

Ya que existe una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática y hemos demostrado que  $(u_0, u_2) \notin F(D)$  entonces por el Lema 2.1.4 existe  $T'$  una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática tal que  $\ell(T') = 1$  o  $\ell(T') = 3$ .

4.6.  $\ell(T') = 3$ .

Supongamos por contradicción que  $\ell(T') = 1$ .

Se tiene que  $\{(w_1, u_2), (u_2, u_0)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva así  $(w_1, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, w_1) \in F(D)$ .

Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$  entonces es de color 2, y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática lo que no puede ocurrir por la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.24.

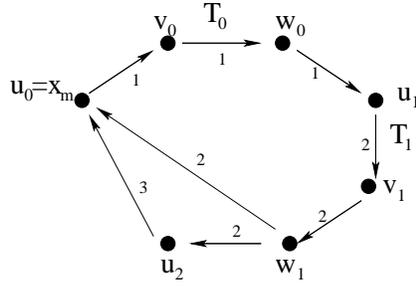


Figura 2.24:

Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$  entonces es de color 1, y  $(u_0, w_1, u_2, u_0)$  es un  $C_3$  tricolor, contradicción, pues por hipótesis  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, ver figura 2.25.

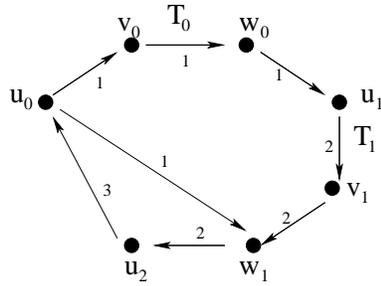


Figura 2.25:

Por lo tanto  $\ell(T') = 3$ .

Sea  $T' = (u_2, v'_2, w'_2, u_0)$  entonces por ser  $D$  quasitransitiva y por el Lema 2.1.4 tenemos que  $\{(u_0, v'_2), (w'_2, u_2)\} \subseteq F(D)$ .

4.7.  $(w_1, v'_2) \in F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(w_1, v'_2) \notin F(D)$ , ya que  $D$  es quasitransitiva y  $\{(w_1, u_2), (u_2, v'_2)\} \subseteq F(D)$  entonces  $(v'_2, w_1) \in F(D)$ . Ya que  $\{(u_0, v'_2), (v'_2, w_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva tenemos que  $(u_0, w_1) \in F(D)$  o  $(w_1, u_0) \in F(D)$ .

Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$  entonces  $(u_0, w_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2 lo cual implica que  $(u_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_0) \in F(D)$  y ya analizamos en (4.5) y (4.6) que los dos casos nos llevan a una contradicción, ver figura 2.26.

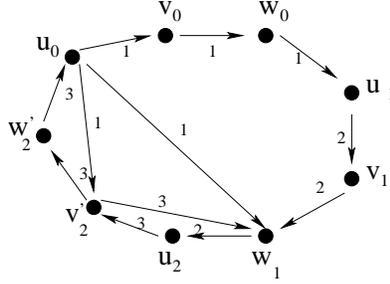


Figura 2.26:

Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$  entonces es de color 2 y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.27.

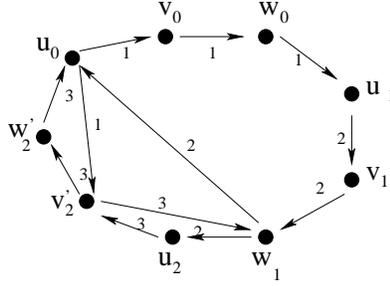


Figura 2.27:

Por lo tanto  $(w_1, v'_2) \in F(D)$ .

4.8.  $(w'_2, w_1) \in F(D)$ .

Tenemos  $\{(w_1, v'_2), (v'_2, w'_2)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  quasitransitiva entonces  $(w_1, w'_2) \in F(D)$  o  $(w'_2, w_1) \in F(D)$ .

Si  $(w_1, w'_2) \in F(D)$ , entonces  $\{(w_1, w'_2), (w'_2, u_0)\} \subseteq F(D)$  así que  $(w_1, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, w_1) \in F(D)$ .

Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$ , entonces tenemos que  $(u_0, w_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que implica que  $(u_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_0) \in F(D)$  que contradice (4.5) y (4.6), ver figura 2.28.

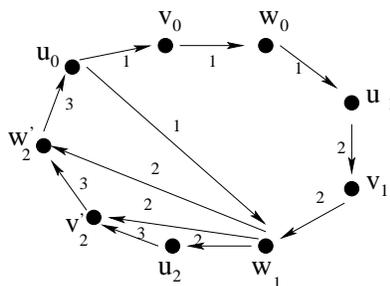


Figura 2.28:

Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2, de donde  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.29.

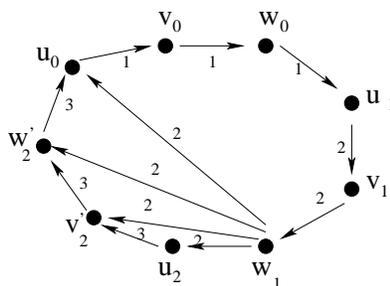


Figura 2.29:

Por lo tanto  $(w'_2, w_1) \in F(D)$ .

Como  $\{(w'_2, w_1), (w_1, u_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva entonces  $(w'_2, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, w'_2) \in F(D)$ .

Si  $(w'_2, u_1) \in F(D)$  entonces es de color 3 y  $(u_2, v'_2, w'_2, u_1)$  es una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.30.

Si  $(u_1, w'_2) \in F(D)$  entonces  $(u_1, w'_2, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 2, contradicción con el Lema 2.1.4, ver figura 2.31.

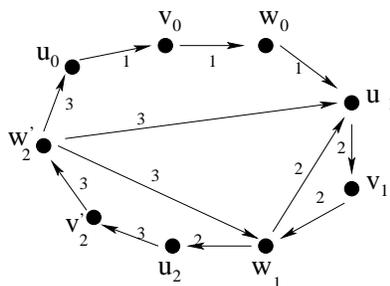


Figura 2.30:

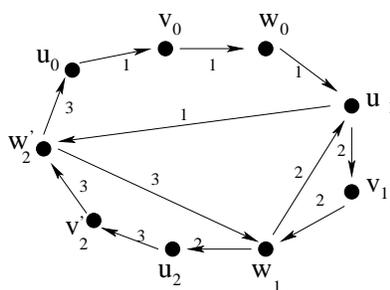


Figura 2.31:

Por lo tanto concluimos de (4.1) a (4.8) que no existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

De (1) y (4) tenemos que  $\ell(\gamma) \geq 4$ .

5. No existe  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática.

Supongamos por contradicción que existe  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Por (4) no existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, entonces  $(u_0, u_2, u_3, \dots, u_n, u_0)$  es un  $\gamma$ -ciclo de longitud menor que  $\gamma$ , contradicción con la elección de  $\gamma$  que es un  $\gamma$ -ciclo de longitud mínima, ver figura 2.32.

Por lo tanto no existe  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática.

6. Concluimos de (4), (5) y por el Lema 2.1.4 que no hay  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática y no hay  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática.

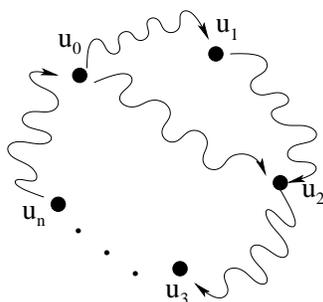


Figura 2.32:

ca,  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ ,  $(u_2, u_0) \notin F(D)$ , no hay  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 2 y no hay  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2.

Recordemos que por (3) podemos suponer que  $T_0$  es de color 1 y  $T_1$  es de color 2.

Ahora analicemos los casos que llevarán a la contradicción que prueba el Teorema 2.2.2.

a)  $\ell(T_0) = \ell(T_1) = 1$ .

En este caso  $\{(u_0, u_1), (u_1, u_2)\} \subseteq F(D)$  y  $(u_0, u_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que contradice (6), ver figura 2.33.

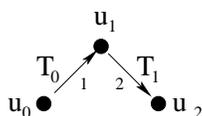


Figura 2.33:

b)  $\ell(T_0) = 1$  y  $\ell(T_1) = 3$ .

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

**b.1)**  $(u_0, v_1) \in F(D)$ .

Como  $\{(u_0, u_1), (u_1, v_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva entonces  $(u_0, v_1) \in F(D)$  o  $(v_1, u_0) \in F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(v_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2 así que  $(u_1, v_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo cual contradice que  $\gamma$  es un  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.34.

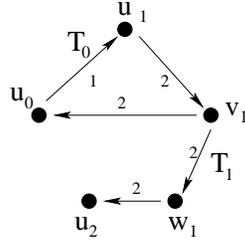


Figura 2.34:

Por lo tanto  $(u_0, v_1) \in F(D)$ .

**b.2)**  $(u_0, w_1) \in F(D)$ .

Como  $\{(u_0, v_1), (v_1, w_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva tenemos que  $(u_0, w_1) \in F(D)$  o  $(w_1, u_0) \in F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(w_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2. Y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.35.

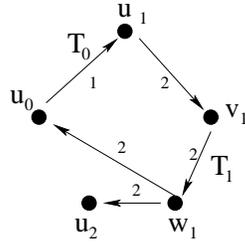


Figura 2.35:

Por lo tanto  $(u_0, w_1) \in F(D)$ .

De donde  $(u_0, w_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo cual contradice (6).

c)  $\ell(T_0) = 3$  y  $\ell(T_1) = 1$ .

Como  $\{(w_0, u_1), (u_1, u_2)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva, se tiene que  $(w_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, w_0) \in F(D)$ .

Si  $(w_0, u_2) \in F(D)$  entonces es de color 1 y  $(u_0, v_0, w_0, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática contradiciendo (5), ver figura 2.36.

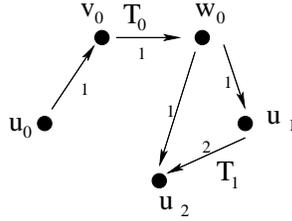


Figura 2.36:

Si  $(u_2, w_0) \in F(D)$ , entonces  $(u_2, w_0, u_0)$  es una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida de longitud de 2, lo que contradice (6), (recuérdese que por el Lema 2.1.4 tenemos que  $(w_0, u_0) \in F(D)$ ), ver figura 2.37.

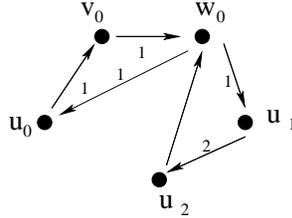


Figura 2.37:

d)  $\ell(T_0) = 3 = \ell(T_1)$ .

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

**d.1)**  $(w_0, v_1) \in F(D)$ .

Tenemos que  $\{(w_0, u_1), (u_1, v_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  quasitransitiva entonces  $(w_0, v_1) \in F(D)$  o  $(v_1, w_0) \in F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(v_1, w_0) \in F(D)$ . Tenemos que  $\{(v_1, w_0), (w_0, u_0)\} \subseteq F(D)$ , de donde  $(v_1, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, v_1) \in F(D)$ .

Si  $(v_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2 y  $(u_1, v_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.38.

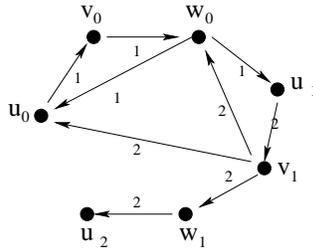


Figura 2.38:

Si  $(u_0, v_1) \in F(D)$ , entonces ya que  $\{(u_0, v_1), (v_1, w_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva se tiene que  $(u_0, w_1) \in F(D)$  o  $(w_1, u_0) \in F(D)$ .

Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$ , entonces es de color 2 y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.39.

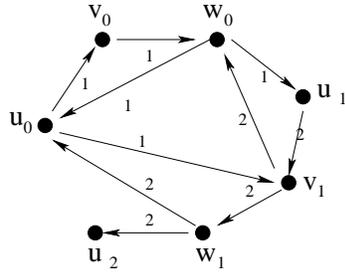


Figura 2.39:

Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$ , entonces  $(u_0, w_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que contradice (6), ver figura 2.40.

Por lo tanto  $(w_0, v_1) \in F(D)$ .

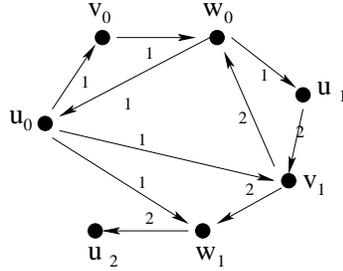


Figura 2.40:

**d.2)**  $(w_1, w_0) \in F(D)$ .

Como  $\{(w_0, v_1), (v_1, w_1)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva entonces  $(w_1, w_0) \in F(D)$  o  $(w_0, w_1) \in F(D)$ .

Supongamos por contradicción que  $(w_0, w_1) \in F(D)$ .

Como  $\{(w_0, w_1), (w_1, u_2)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva, entonces  $(w_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, w_0) \in F(D)$ .

Si  $(w_0, u_2) \in F(D)$  entonces es de color 1 y así  $(u_0, v_0, w_0, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática que contradice (5), ver figura 2.41.

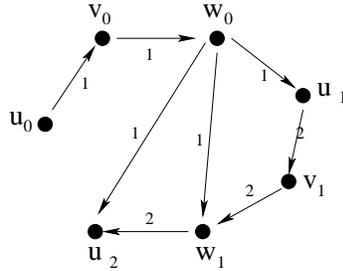


Figura 2.41:

Si  $(u_2, w_0) \in F(D)$ , entonces  $(u_2, w_0, u_0)$  es una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 2, contradicción con (6), ver figura 2.42.

Por lo tanto  $(w_1, w_0) \in F(D)$ .

Tenemos que  $\{(w_1, w_0), (w_0, u_0)\} \subseteq F(D)$  y  $D$  es quasitransitiva, entonces  $(u_0, w_1) \in F(D)$  o  $(w_1, u_0) \in F(D)$ .

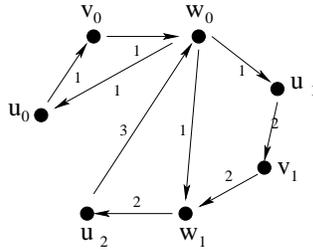


Figura 2.42:

Si  $(u_0, w_1) \in F(D)$  entonces  $(u_0, w_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 2, lo que contradice (6), ver figura 2.43.

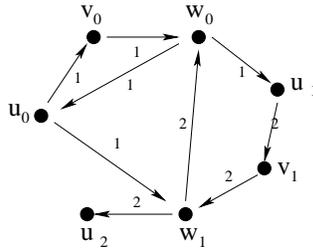


Figura 2.43:

Si  $(w_1, u_0) \in F(D)$  entonces es de color 2 y  $(u_1, v_1, w_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 2.44.

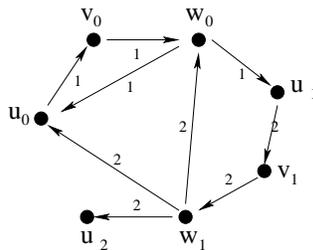


Figura 2.44:

Por lo tanto no hay  $\gamma$ -ciclos en  $D$ .

■

Para la demostración del siguiente teorema usamos los Teoremas 1.2.6, 1.3.6 y 2.2.2, los cuales permiten que la demostración sea muy clara y bonita.

**Teorema. 2.2.3.** *Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, entonces  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Basta demostrar que todo  $\mathcal{C}$  ciclo de  $\mathfrak{C}(D)$  tiene al menos una flecha simétrica, por el Teorema 1.2.6.

Sea  $\mathcal{C}$  un ciclo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

Supongamos que  $\mathcal{C}$  no tiene flechas simétricas.

Es claro que  $\mathcal{C}$ , que es un ciclo en  $\mathfrak{C}(D)$ , resulta ser un  $\gamma$ -ciclo en  $D$  lo cual no puede ocurrir, ya que por el Teorema 2.2.2 sabemos que  $D$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

Por lo tanto  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta.

■

**Corolario. 2.2.4.** *Sea  $D$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

Por los Teoremas 1.3.6 y 2.2.3.

■

**Corolario. 2.2.5.** *Si  $T$  es un torneo  $m$ -coloreado tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$  y  $T$  no contiene  $C_3$  tricolores, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

Todo torneo es una digráfica quasitransitiva, y por el Corolario 2.2.4.

■

**Nota. 2.2.6.** *La condición de que  $D$  no contiene  $C_3$  tricolores en el Teorema 2.2.3 es necesaria. Sea  $C_3$  una digráfica quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$  y  $C_3$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Nota. 2.2.7.** La condición  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$  es necesaria. La siguiente digráfica  $D$  es un contraejemplo, sean  $V(D) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  y  $F(D) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_1, u_4), (u_2, u_3), (u_2, u_4), (u_2, u_5), (u_3, u_4), (u_3, u_5), (u_3, u_6), (u_4, u_5), (u_4, u_6), (u_5, u_6), (u_5, u_1), (u_6, u_1)\}$ , tales que  $(u_1, u_4), (u_3, u_4), (u_3, u_5), (u_3, u_6), (u_6, u_1)$  son de color 1;  $(u_2, u_3), (u_5, u_6)$  son de color 2;  $(u_1, u_2), (u_4, u_5), (u_5, u_1)$  son de color 3 y  $(u_1, u_3), (u_2, u_4), (u_2, u_5), (u_4, u_6)$  son de color 4, ver figura 2.45.  $D$  no contiene  $C_3$  tricolores y  $D$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

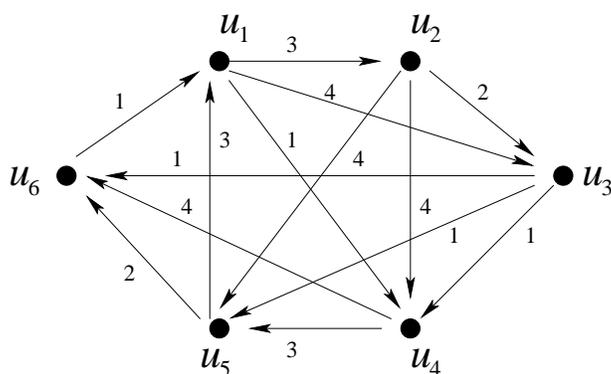


Figura 2.45:

## Capítulo 3

# Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en torneos bipartitos.

En este capítulo daremos condiciones suficientes para que un torneo bipartito  $m$ -coloreado con el conjunto  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$  tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. El resultado principal de este capítulo es el Teorema 3.2.1.

### 3.1. Seminúcleo módulo $i$ por trayectorias monocromáticas.

Iniciamos con la definición de torneo bipartito, los cuales son las digráficas  $m$ -coloreadas que estudiaremos en este capítulo. Además nuestro trabajo será para  $m \geq 3$ , en la Observación 3.1.4 justificamos este hecho.

**Definición. 3.1.1.** Una digráfica  $D$  es un *torneo bipartito* si existe una bipartición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que toda flecha de  $D$  tiene un extremo en  $V_1$  y el otro en  $V_2$ , y entre cualquier vértice de  $V_1$  y cualquier vértice de  $V_2$  existe una y sólo una flecha.

**Teorema. 3.1.2.** [3] *Si  $D$  es una digráfica, entonces existe  $B \subseteq V(D)$  tal que:*

1. *No existen  $uv$ -trayectorias para  $\{u, v\} \subseteq B$ .*

2. Para cada  $x \notin B$  existe una  $xB$ -trayectoria.

**Teorema. 3.1.3** (Sands, Sauer y Woodrow). [38]. *Sea  $D$  una digráfica posiblemente infinita 2-coloreada, sin trayectorias infinitas exteriores. Entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Observación. 3.1.4.** Sea  $T$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado con  $m \leq 2$ . Entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

**Demostración.**

- a.  $m = 1$ . Entonces, por el Teorema 3.1.2,  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas  $N = B$ .
- b.  $m = 2$ . En este caso  $T$  satisface las hipótesis del Teorema 3.1.3, por lo tanto  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Para torneos bipartitos se tiene un lema que nos resultará de gran utilidad y es el siguiente:

**Lema. 3.1.5.** [37]. *Sea  $D$  un torneo bipartito, si  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n)$  es un camino en  $D$  entonces para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  y  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $(u_i, u_j) \in F(D)$  ó  $(u_j, u_i) \in F(D)$  si y sólo si  $j - i \equiv 1 \pmod{2}$ .*

**Definición. 3.1.6.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, sean  $1, 2, \dots, m$  los colores distintos,  $i \in \{1, \dots, m\}$  cualquiera pero fijo. Un subconjunto  $S \subseteq V(D)$  es un *seminúcleo de  $D$  módulo  $i$*  por trayectorias dirigidas monocromáticas si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $S$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, para  $\{u, v\} \subseteq S$ , no existe  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática y no existe  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática.
- ii) Para cada  $z \in V(D) \setminus S$  tal que existe  $Sz$ -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de  $i$ , existe una  $zS$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

La definición anterior generaliza la definición de seminúcleo dada por V. Neumann-Lara [34].

**Teorema. 3.1.7.** *Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Entonces  $D$  tiene seminúcleo  $mod\ i$  distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ .*

**Demostración.**

Podemos suponer que en  $D$  existen flechas de color  $i$  para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ , pues  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada.

Sea  $z_0 \in V(D)$  tal que  $F^+(z_0)$  es de color  $i$ .

Es claro de la definición que  $\{z_0\}$  es un seminúcleo  $mod\ i$  distinto del vacío de  $D$  por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

Sean  $i \in \{1, \dots, m\}$  y  $\Gamma_i = \{S \mid S \text{ es un seminúcleo } mod\ i \text{ distinto del vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas de } D\}$ . Observemos que,  $\Gamma_i \neq \emptyset$  por el Teorema 3.1.7.

**Definición. 3.1.8.** Sea  $\{S_1, S_2\} \subseteq \Gamma_i$ . Decimos que  $S_1 \leq S_2$  si para cada  $x_1 \in S_1$  existe  $x_2 \in S_2$  tal que se satisface una de las siguientes condiciones:

- i)*  $x_1 = x_2$ ,
- ii)* Existe  $x_1x_2$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$  y no existe  $x_2x_1$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$ .

**Notación. 3.1.9.**

- 1.  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  si existe  $x_1x_2$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$ .
- 2.  $x_1 \not\xrightarrow{i} x_2$  si no existe  $x_1x_2$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$ .

**Teorema. 3.1.10.**  $(\Gamma_i, \leq)$  es un conjunto parcialmente ordenado.

**Demostración.**

- 1.  $S \leq S$  para cada  $S \in \Gamma_i$ .

Sea  $x \in S$ .

Es claro que  $x = x$  para cada  $x \in S$ .

Por lo tanto  $S \leq S$ .

- 2.** Si  $\{S_1, S_2\} \subseteq \Gamma_i$  y son tales que  $S_1 \leq S_2$  y  $S_2 \leq S_1$  entonces  $S_1 = S_2$ .

Probemos que  $S_1 \subseteq S_2$ .

Sea  $x_1 \in S_1$ , probaremos que  $x_1 \in S_2$ .

Como  $S_1 \leq S_2$ , tenemos que existe  $x_2 \in S_2$  tal que  $x_1 = x_2$  o  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  y  $x_2 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Analicemos los dos casos:

**Caso 1.** Si  $x_1 = x_2$  entonces  $x_1 \in S_2$ .

**Caso 2.** Si  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  y  $x_2 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Como  $x_2 \in S_2$  y  $S_2 \leq S_1$  existe  $u_1 \in S_1$  tal que  $x_2 = u_1$  o  $x_2 \xrightarrow{i} u_1$  y  $u_1 \not\xrightarrow{i} x_2$ .

Analicemos ambos subcasos:

**2.1.** Si  $x_2 = u_1$  entonces  $x_1 \xrightarrow{i} x_2 = u_1$  con  $\{x_1, u_1\} \subseteq S_1$ , lo que contradice que  $S_1$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

**2.2.** Si  $x_2 \xrightarrow{i} u_1$  y  $u_1 \not\xrightarrow{i} x_2$  entonces  $x_1 \xrightarrow{i} x_2 \xrightarrow{i} u_1$ , y por el Teorema 1.1.23,  $x_1 \xrightarrow{i} u_1$ , contradicción con que  $S_1$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas..

Por lo tanto el caso (2) no es posible.

Por lo tanto  $S_1 \subseteq S_2$ .

La demostración de que  $S_2 \subseteq S_1$  es análoga.

Así  $S_1 = S_2$ .

- 3.** Si  $S_1 \leq S_2$  y  $S_2 \leq S_3$  entonces  $S_1 \leq S_3$ , para  $\{S_1, S_2, S_3\} \subseteq \Gamma_i$ .

Sea  $x_1 \in S_1$ , probaremos que existe  $x_3 \in S_3$  tal que  $x_1 = x_3$  o  $x_1 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Como  $S_1 \leq S_2$ , entonces existe  $x_2 \in S_2$  tal que  $x_1 = x_2$  o  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  y  $x_2 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Analicemos ambos casos.

**Caso 1.** Si  $x_1 = x_2$ . Como  $S_2 \leq S_3$  entonces existe  $x_3 \in S_3$  tal que  $x_2 = x_3$  o  $x_2 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2$ .

Entonces tenemos los siguientes 2 subcasos:

**1.1.** Si  $x_2 = x_3$ , entonces  $x_1 = x_2 = x_3$  con  $x_3 \in S_3$ .

**1.2.** Si  $x_2 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2$ . Como  $x_1 = x_2$ , tenemos que  $x_2 = x_1 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2 = x_1$ .

**Caso 2.** Si  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  y  $x_2 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Tenemos los siguientes dos subcasos:

**2.1.** Si  $x_2 = x_3$  entonces  $x_1 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

**2.2.** Si  $x_2 \xrightarrow{i} x_3$  y  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2$ , entonces  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$  y  $x_2 \xrightarrow{i} x_3$  entonces por el Teorema 1.1.23,  $x_1 \xrightarrow{i} x_3$ .

Probaremos que  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_1$ .

Supongamos por contradicción que existe  $x_3 \xrightarrow{i} x_1$ . Como existe  $x_1 \xrightarrow{i} x_2$ , entonces por el Teorema 1.1.23, existe  $x_3 \xrightarrow{i} x_2$ , que contradice que  $x_3 \not\xrightarrow{i} x_2$ .

Por lo tanto  $S_1 \leq S_3$ . ■

## 3.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas para torneos bipartitos.

Notemos que como  $D$  es finita  $(\Gamma_i, \leq)$  tiene elementos máximos.

Recordemos que estamos denotando por  $C_3$  al ciclo dirigido de longitud 3.

Denotaremos con  $T_4$  a la digráfica tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (u, x)\}$ , y denotaremos con  $(1, 1, 2)$  a la digráfica 3-coloreada tal que  $V(1, 1, 2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $F(1, 1, 2) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$  tal que  $(v_1, v_2)$  es de color  $a$ ,  $(v_2, v_3)$  es de color  $b$ ,  $(v_3, v_4)$  es de color  $c$  y  $(v_4, v_1)$  es de color  $c$ , ver figura 3.1.

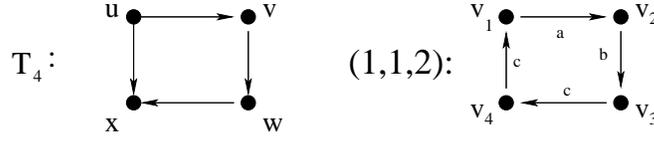


Figura 3.1:

En adelante, sin perder generalidad supondremos que  $m \geq 3$ , por la Observación 3.1.4.

**Teorema. 3.2.1.** *Sea  $T$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado, con  $m \geq 3$  tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$ . Si todo  $T_4$  contenido en  $T$  es a lo más 2-coloreado y  $T$  no contiene  $(1, 1, 2)$  subdivisiones de  $C_3$  tricolor, entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

La demostración se hará por inducción sobre  $|V(T)|$ .

Observemos que si  $|V(T)| \leq 3$  a lo más tenemos 2 flechas y por lo tanto  $T$  no puede ser 3-coloreado.

1. Si  $|V(T)| = 4$ .

Tenemos los siguientes casos:

- 1.1. Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, v), (u, w), (u, x)\}$ , este caso no es posible, pues  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$ , ver figura 3.2.

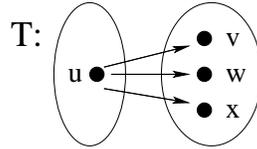


Figura 3.2:

- 1.2. Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, v), (w, u), (x, u)\}$ , con  $(u, v)$  es de color 1,  $(w, u)$  es de color 2 y  $(x, u)$  es de color 3. Es este caso  $N = \{v, w, x\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $T$ , ver figura 3.3.

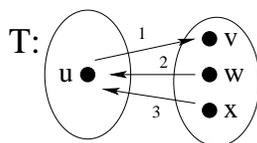


Figura 3.3:

- 1.3.** Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(v, u), (w, u), (x, u)\}$ , donde  $(v, u)$  es de color 1,  $(w, u)$  es de color 2 y  $(x, u)$  es de color 3. Es este caso  $N = \{u\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $T$ , ver figura 3.4.

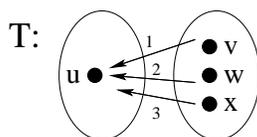


Figura 3.4:

- 1.4.** Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, w), (u, x), (v, w), (v, x)\}$ , este caso no es posible, pues  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$ , ver figura 3.5.

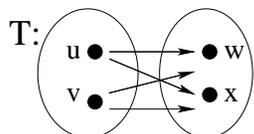


Figura 3.5:

- 1.5.** Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, w), (v, w), (v, x), (x, u)\}$ , donde  $(u, w)$  es de color 1,  $(x, u)$  es de color 2 y  $(v, w)$  y  $(v, x)$  son de color 3. Este caso no es posible, pues  $T$  contiene un  $T_4$  3-coloreado, ver figura 3.6.
- 1.6.** Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, v), (u, w), (x, u)\}$ , este caso no es posible, pues  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(T)$ , ver figura 3.7.

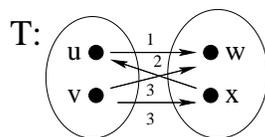


Figura 3.6:

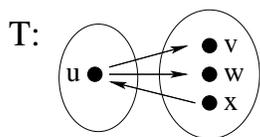


Figura 3.7:

- 1.7. Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, w), (u, x), (w, v), (x, v)\}$ , donde  $(u, w)$  y  $(u, x)$  son de color 1,  $(w, v)$  es de color 2 y  $(x, v)$  es de color 3. En este caso  $N = \{u, v\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, ver figura 3.8.

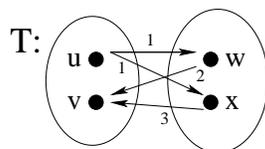


Figura 3.8:

- 1.8. Si  $T$  es un torneo bipartito tal que  $V(T) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(T) = \{(u, w), (v, x), (w, v), (x, u)\}$ , donde  $(u, w)$  es de color 1,  $(w, v)$  es de color 2,  $(x, u)$  es de color 3 y  $(v, x)$  es de color  $b$ , ver figura 3.9.

Es este caso tenemos los siguientes subcasos:

- 1.8.1. Si  $b = 1$ ,  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas,  $N = \{u, v\}$ .
- 1.8.2. Si  $b = 2$  no es posible, pues  $T$  contiene  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor.

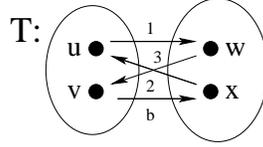


Figura 3.9:

- 1.8.3. Si  $b = 3$  no es posible, pues  $T$  contiene  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor.
  - 1.8.4. Si  $b = 4$ ,  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas,  $N = \{u, v\}$ .
2. Por hipótesis de inducción supongamos que si  $T'$  es un torneo bipartito  $m$ -coloreado que satisface las hipótesis del Teorema 3.2.1 y  $|V(T')| \leq n - 1$ , entonces  $T'$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.
  3. Sea  $T$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado que satisface las hipótesis del Teorema 3.2.1 y  $|V(T)| = n$ ,  $n \geq 5$ .

Probaremos que  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Supongamos por contradicción que  $T$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Por el Teorema 3.1.7 sabemos que  $T$  tiene un seminúcleo *modi* no vacío por trayectorias dirigidas monocromáticas. Sea  $S$  un elemento máximo de  $(\Gamma_i, \leq)$ . Entonces  $S$  no es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $T$ .

Sea  $X_0 = \{x \in V(T) \setminus S \mid \text{no existe } xS\text{-trayectoria dirigida monocromática}\}$ .

Como  $S \neq \emptyset$  se tiene que  $T[X_0]$  es una subdigráfica inducida propia de  $T$ .

Por lo tanto por hipótesis de inducción  $T[X_0]$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, llamémosle  $N_0$ .

Sea  $B = \{x \in S \mid \text{no existe } xN_0\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ en } T\}$ .

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

a)  $B \cup N_0 \in \Gamma_i$ .

a.1) Primero probaremos que  $B \cup N_0$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Tenemos que:

a.1.1)  $B$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas pues  $B \subseteq S$ , que es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

a.1.2)  $N_0$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $T$ .

Primero observemos que  $N_0$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $T[X_0]$  pues  $N_0$  es núcleo de  $T[X_0]$ .

Supongamos por contradicción que  $N_0$  no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $T$ , entonces existe  $\{x, y\} \subseteq N_0$  tal que existe una  $xy$ -trayectoria dirigida monocromática,  $\alpha = (x, u_1, \dots, u_n, y)$ , ver figura 3.10.

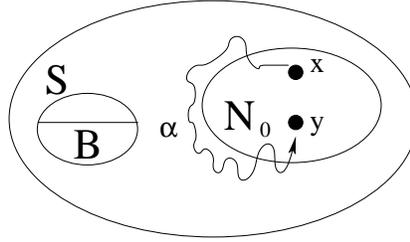


Figura 3.10:

Para  $\alpha$  tenemos las siguientes afirmaciones.

a.1.2.1)  $V(\alpha) \cap (V(T) \setminus X_0) \neq \emptyset$ .

Supongamos por contradicción que  $V(\alpha) \cap (V(T) \setminus X_0) = \emptyset$ , entonces  $V(\alpha) \subseteq X_0$ , lo que contradice que  $N_0$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $T[X_0]$ .

Por lo tanto  $V(\alpha) \cap (V(T) \setminus X_0) \neq \emptyset$ .

**a.1.2.2)**  $V(\alpha) \cap S = \emptyset$ .

Supongamos por contradicción que  $V(\alpha) \cap S \neq \emptyset$ , de donde existe  $w \in V(\alpha) \cap S$  entonces  $w = u_i$  para alguna  $i \in \{1, \dots, n\}$ , así que  $(x, u_1, \dots, u_i = w)$  es una  $xS$ -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo que  $x \in X_0$ , ver figura 3.11.

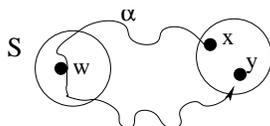


Figura 3.11:

Por lo tanto  $V(\alpha) \cap S = \emptyset$ .

Como  $V(\alpha) \cap (V(T) \setminus X_0) \neq \emptyset$  entonces existe  $z \in V(\alpha) \cap (V(T) \setminus X_0)$ , y podemos suponer que  $z \notin S$  por (a.1.2.2). Por lo tanto existe  $zS$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , llamémosle  $\gamma$ , ver figura 3.12.

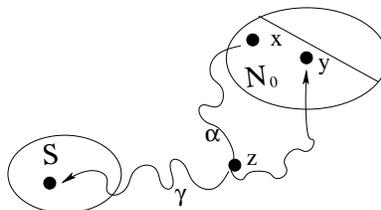


Figura 3.12:

Como  $z \in V(\alpha) \cap V(\gamma)$  y  $F^+(z)$  es monocromático se tiene que  $\alpha$  y  $\gamma$  son del mismo color ya que  $z \neq x$  y  $z$  no es el último punto de  $\gamma$  pues  $z \notin S$ .

De donde  $(x, \alpha, z) \cup \gamma$  es un camino que por el Teorema 1.1.23 contiene una  $xS$ -trayectoria dirigida monocromática, contradiciendo que  $x \in N_0 \subseteq X_0$ .

Por lo tanto  $N_0$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $T$ .

**a.1.3)** Ahora demostraremos que no existe  $BN_0$ -trayectoria dirigida monocromática.

Supongamos por contradicción que existe  $v \in B$  y existe  $u \in N_0$  tal que existe una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática, llamémosla  $\alpha$  la cual es de color distinto de  $i$ , ya que  $v \in B$ . Como  $S \in \Gamma_i$ ,  $S$  es seminúcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas *mod*  $i$  distinto del vacío, entonces por definición existe  $uS$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , lo que contradice que  $u \in N_0 \subseteq X_0$ .

Ahora, probaremos que no existe  $N_0B$ -trayectoria dirigida monocromática.

Se sigue de que  $B \subseteq S$ ,  $N_0 \subseteq X_0$  y la definición de  $X_0$ .

Por lo tanto  $B \cup N_0$ , es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas.

- a.2)** Ahora, demostraremos que para cada  $z \in V(T) \setminus (B \cup N_0)$  tal que existe  $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de  $i$ , existe una  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática.

Observemos que  $N_0$  es distinto del vacío, pues es núcleo de  $T[X_0]$ , de donde  $B \cup N_0$  es distinto del vacío.

Sea  $z \in (V(T) \setminus (B \cup N_0))$  tal que existe  $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$  de color distinto de  $i$ .

Supongamos por contradicción que no existe  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ .

Sea  $w \in B \cup N_0$  y sea  $\alpha$  una  $wz$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $j$ , con  $j \neq i$ , supongamos  $j = 2$ .

Tenemos los siguientes casos:

- Caso 1.** Si  $w \in B$ . Como  $w \in B \subseteq S$  y  $S \in \Gamma_i$  entonces existe  $zS$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , por lo que existe  $s \in S$  y existe  $zs$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , (llamémosla  $\alpha'$ ).

Como estamos suponiendo que no existe  $zB$ -trayectoria dirigida monocromática entonces  $s \notin B$  y así  $s \in S \setminus B$ , ver figura 3.13.

Como  $\{w, s\} \subseteq S$  que es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, se sigue que  $\alpha$  y  $\alpha'$  son de distinto color, supongamos que  $\alpha'$  es de color  $b \neq 2$ .

Como  $s \in S \setminus B$ , entonces por la definición de  $B$ , se tiene que existe  $u \in N_0$  y existe  $su$ -trayectoria dirigida

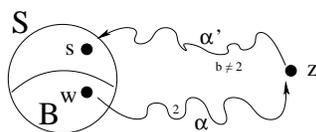


Figura 3.13:

monocromática de color  $i$ , llamémosle  $\alpha''$ , ver figura 3.14.

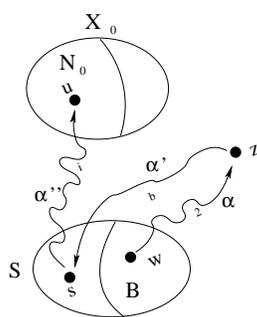


Figura 3.14:

Si  $b = i$  entonces  $\alpha' \cup \alpha''$  es un camino que, por el Teorema 1.1.23, contiene una  $zu$ -trayectoria dirigida monocromática con  $u \in N_0$ , ver figura 3.15.

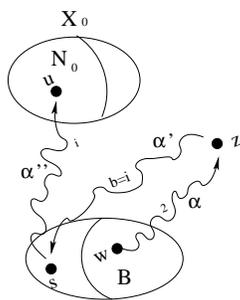


Figura 3.15:

Por lo tanto existe  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

Luego podemos suponer que  $b \neq i$ , entonces tenemos que  $b \neq i$  y  $b \neq 2$ , supongamos que  $b = 3$ .

Si  $\ell(\alpha') = 1$ , tomemos  $z^-$  el vértice de  $\alpha$  anterior inmediato de  $z$  en  $\alpha$  tal que  $(z^-, z) \in F(\alpha)$  y tomemos  $s^+$  el vértice de  $\alpha''$  posterior inmediato de  $s$  tal que  $s^+ \in \alpha''$  y  $(s, s^+) \in F(\alpha'')$ . Entonces  $(z^-, z, s, s^+)$  es una trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.5,  $z^-$  y  $s^+$  son adyacentes.

Si  $(z^-, s^+) \in F(T)$ , se tiene que es de color 2, pues  $\alpha$  es de color 2 y  $F^+(z^-)$  es monocromático. Entonces  $(z^-, z, s, s^+)$

$\cup (z^-, s^+)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción con la hipótesis, ver figura 3.16.

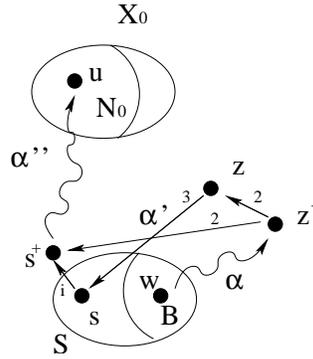


Figura 3.16:

Si  $(s^+, z^-) \in F(T)$ , como tenemos que  $\alpha''$  es de color  $i$  y  $F^+(s^+)$  es monocromático entonces tenemos las siguientes posibilidades:

a.  $\ell(\alpha'') \geq 2$ .

Entonces  $(s^+, z^-)$  es de color  $i$ , de donde se tiene que  $(z^-, z, s, s^+, z^-)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, lo que contradice la hipótesis del Teorema, ver figura 3.17.

b.  $\ell(\alpha'') = 1$ , en este caso tenemos que  $s^+ = u$ .

Si  $(u, z^-) \in F(T)$ , se tienen los siguientes casos:

b.1.  $(u, z^-)$  es de color  $i$ , entonces  $(u, z^-, z, s, u)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, contradicción, ver figura 3.18.

b.2. Si  $(u, z^-)$  es de color 2, contradicción, ya que  $(u, z^-, z, s, u)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, ver figura 3.19.

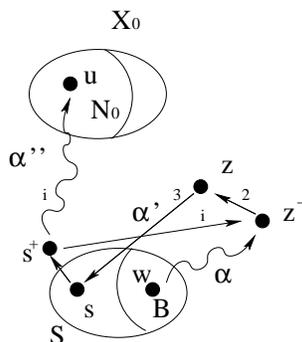


Figura 3.17:

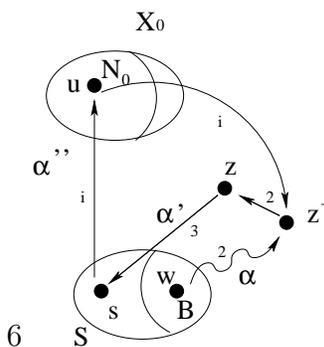


Figura 3.18:

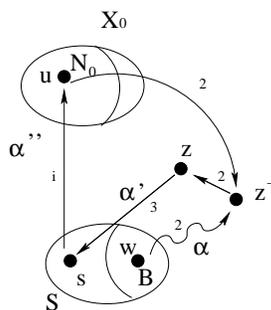


Figura 3.19:

- b.3. Si  $(u, z^-)$  es de color  $j$  con  $2 \neq j \neq i$ .  
Tenemos los siguientes casos:
- b.3.1.  $\ell(\alpha) \geq 2$ , entonces sea  $z''$  el vértice anterior inmediato



Si  $(w, u) \in F(T)$  es de color 2, entonces  $(w, z, s, u) \cup (w, u)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción, ver figura 3.22.

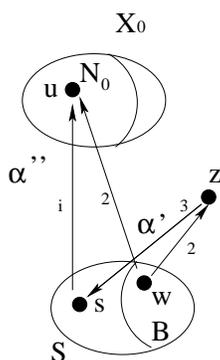


Figura 3.22:

Si  $(u, w) \in F(T)$ , contradicción con la definición de  $X_0$ , pues  $u \in X_0$ , ver figura 3.23.

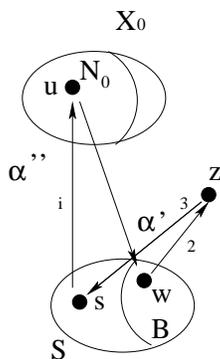


Figura 3.23:

Si  $\ell(\alpha') > 1$ , sea  $s^- \in V(\alpha')$  tal que  $(s^-, s) \in F(\alpha')$ . Como  $w$  no es adyacente a  $s$  (pues  $\{w, s\} \subseteq S$  y  $S$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas), y por ser  $T$  un torneo bipartito, tenemos que  $w$  y  $s^-$  son adyacentes.

Si  $(s^-, w) \in F(T)$ , entonces  $(s^-, w)$  es de color 3, pues  $\alpha'$  es de color 3 y  $F^+(s^-)$  es monocromático; así que

$(z, \alpha', s^-) \cup (s^-, w)$  es una  $zw$ -trayectoria dirigida monocromática, ver figura 3.24.

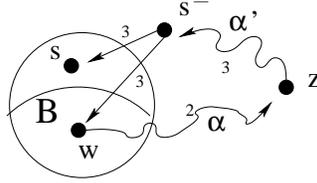


Figura 3.24:

Por lo tanto existe  $zB$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , contradicción.

Si  $(w, s^-) \in F(T)$  entonces es de color 2, pues  $\alpha$  es de color 2 y  $F^+(w)$  es monocromático, así  $(w, s^-, s, s^+)$  es una trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.5 tenemos que  $w$  y  $s^+$  son adyacentes.

Si  $(w, s^+) \in F(T)$  entonces es de color 2, pues  $\alpha$  es de color 2 y  $F^+(w)$  es monocromático, así  $(w, s^-, s, s^+) \cup (w, s^+)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción, ver figura 3.25.

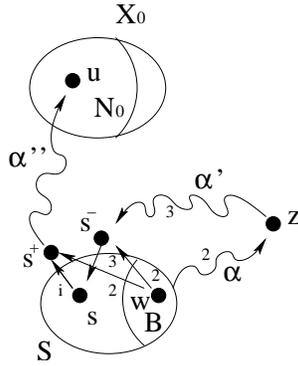


Figura 3.25:

Si  $(s^+, w) \in F(T)$  y  $\ell(\alpha'') \geq 2$ , se tiene que  $(s^+, w)$  es de color  $i$ , pues  $\alpha''$  es de color  $i$  y  $F^+(s^+)$  es monocromático y así  $(w, s^-, s, s^+, w)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, contradicción, ver figura 3.26.

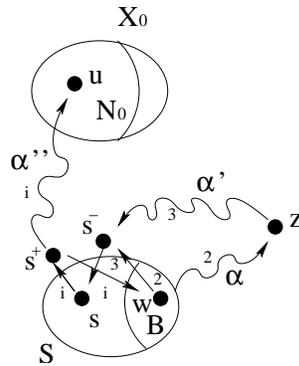


Figura 3.26:

Si  $(s^+, w) \in F(T)$  y  $\ell(\alpha'') = 1$ , tenemos que  $s^+ = u$ , así  $(u, w) \in F(T)$ , contradicción con la definición de  $X_0$ , ver figura 3.27.

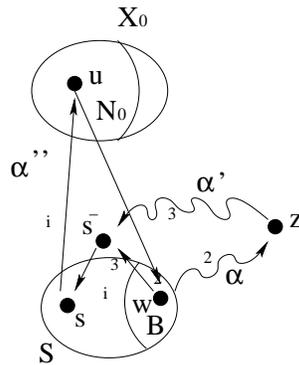


Figura 3.27:

**Caso 2.** Supongamos ahora que  $w \in N_0$ . Sabemos que existe  $wz$ -trayectoria dirigida monocromática de color 2. Si  $z \in X_0$ , como  $N_0$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $T[X_0]$ , se sigue que existe  $zN_0$ -trayectoria dirigida monocromática, ver figura 3.28.

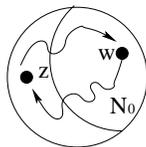


Figura 3.28:

Por lo tanto  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción.

Luego  $z \notin X_0$ .

Por lo tanto existe  $\alpha'$  una  $zs$ -trayectoria dirigida monocromática para alguna  $s \in S$ .

Si  $s \in B$ , entonces existe  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 3.29.

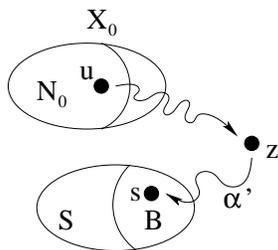


Figura 3.29:

Por lo que  $s \notin B$ .

Por definición de  $B$ , existe  $x \in N_0$  y  $\alpha''$  una  $sx$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$ .

Si  $\alpha'$  es de color 2, entonces  $\alpha \cup \alpha'$  es un camino que por el Teorema 1.1.23 contiene una  $ws$ -trayectoria dirigida monocromática con  $s \in S$ , contradiciendo que  $w \in N_0 \subseteq X_0$ , ver figura 3.30.

De donde  $\alpha'$  no es de color 2.

Si  $\alpha'$  es de color  $i \neq 2$ , entonces  $\alpha' \cup \alpha''$  es un camino que, por el Teorema 1.1.23, contiene una  $zx$ -trayectoria dirigida monocromática con  $x \in N_0$ . Entonces existe  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 3.31.

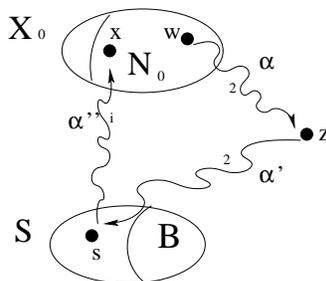


Figura 3.30:

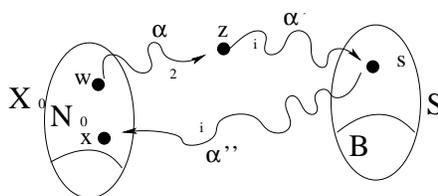


Figura 3.31:

Por lo tanto  $\alpha'$  es de algún color  $k$  distinto de  $i$  y de  $2$ , supongamos que es de color  $k = 3$ , con  $3 \neq i, 3 \neq 2$ .

Tenemos los siguientes subcasos:

- 2.1.** Si  $w$  es adyacente a  $s$ , como  $w \in N_0 \subseteq X_0$ , entonces se sigue de la definición de  $X_0$  que  $(s, w) \in F(T)$  y  $(s, w)$  es de color  $i$  ya que  $\alpha''$  es de color  $i$  y  $F^+(s)$  es monocromático. Sean  $s^-$  el vértice de  $\alpha'$  anterior inmediato de  $s$  en  $\alpha'$  tal que  $(s^-, s) \in F(\alpha')$  y  $w^+$  el vértice de  $\alpha$  posterior inmediato de  $w$  tal que  $w^+ \in V(\alpha)$  y  $(w, w^+) \in F(\alpha)$ , entonces  $(s^-, s, w, w^+)$  es una trayectoria de longitud 3 y por el Lema 3.1.5 tenemos que  $w^+$  y  $s^-$  son adyacentes.
  - a'. Sea  $\ell(\alpha) \geq 2$ . Si  $(w^+, s^-) \in F(T)$ , entonces es de color 2, pues  $\alpha$  es de color 2 y  $F^+(w^+)$  es monocromático, de donde  $(s^-, s, w, w^+, s^-)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, contradicción, ver figura 3.32.
- Si  $(s^-, w^+) \in F(T)$ , entonces es de color 3, pues  $\alpha'$  es de color 3 y  $F^+(s^-)$  es monocromático, así  $(s^-, s, w, w^+) \cup (s^-, w^+)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción, ver figura 3.33.

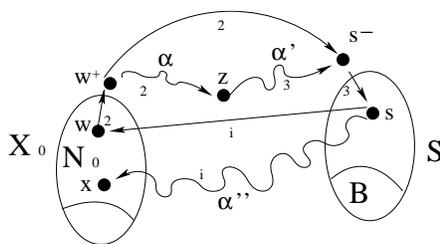


Figura 3.32:

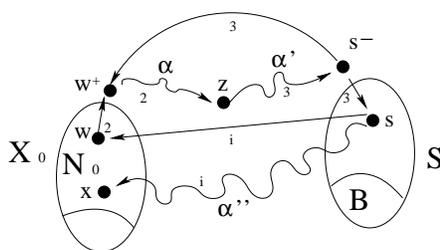


Figura 3.33:

b'. Si  $\ell(\alpha) = 1$ , entonces  $z = w^+$ , en este caso  $(w^+, s^-)$  es de color 3, así  $(z, s^-, s, w, z)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, ver figura 3.34.

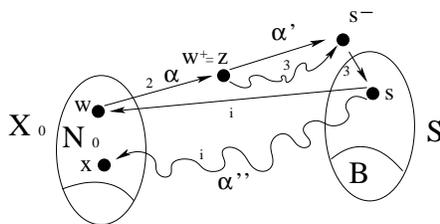


Figura 3.34:

Si  $(s^-, w^+) \in F(T)$ , tenemos que es de color 3, pues  $\alpha'$  es de color 3, y  $F^+(s^-)$  monocromático. Entonces  $(s^-, s, w, z) \cup (s^-, z)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción, ver figura 3.35.

Notemos que  $s^- \neq w^+$  pues  $T$  no tiene ciclos dirigidos de longitud impar por ser un torneo bipartito.

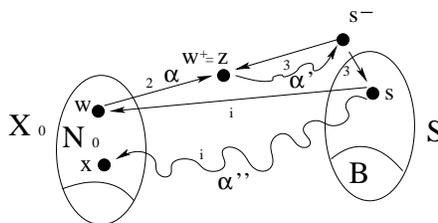


Figura 3.35:

**2.2.** Si  $(s^-, w) \in F(T)$ , entonces es de color 3, ya que  $(s^-, s)$  es de color 3 y  $F^+(s^-)$  es monocromático. Luego  $(z, \alpha', s^-) \cup (s^-, w)$  contiene una  $zw$ -trayectoria dirigida monocromática.

Así existe una  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 3.36.

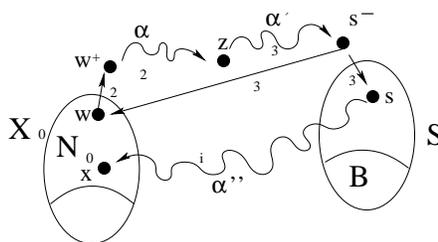


Figura 3.36:

**2.3.** Si  $(w, s^-) \in F(T)$ , entonces es de color 2, pues  $(w, w^+)$  es de color 2 y  $F^+(w)$  es monocromático, sea  $s^+$  el vértice de  $\alpha''$  posterior inmediato de  $s$  en  $\alpha''$  tal que  $(s, s^+) \in F(\alpha'')$ , por lo que  $(w, s^-, s, s^+)$  es una trayectoria dirigida de longitud 3 y por el Lema 3.1.5 tenemos que  $w$  y  $s^+$  son adyacentes.

Si  $(w, s^+) \in F(T)$ , entonces es de color 2, pues  $(w, w^+)$  es de color 2 y  $F^+(w)$  es monocromático, entonces  $(w, s^-, s, s^+) \cup (w, s^+)$  es un  $T_4$  tricolor, contradicción, ver figura 3.37.

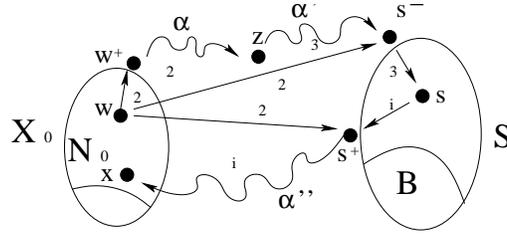


Figura 3.37:

Observemos que  $s^+ \neq x$ , ya que  $x, w \in N_0$  y  $N_0$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $T[X_0]$ . Si  $(s^+, w) \in F(T)$  es de color  $i$ , pues  $\alpha''$  es de color  $i$  y  $F^+(s^+)$  es monocromático, entonces  $(w, s^-, s, s^+, w)$  es una  $(1,1,2)$  subdivisión de  $C_3$  tricolor, contradicción, ver figura 3.38.

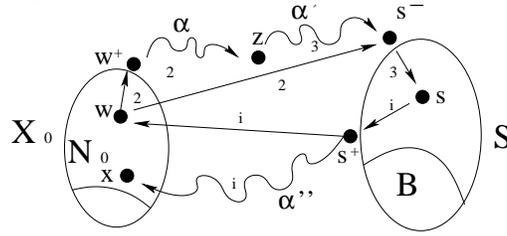


Figura 3.38:

Por lo tanto para cada  $z \in V(T) \setminus (B \cup N_0)$  tal que existe  $(B \cup N_0)z$ -trayectoria dirigida monocromática de color distinto de  $i$ , existe una  $z(B \cup N_0)$ -trayectoria dirigida monocromática.

Por lo tanto,  $B \cup N_0 \in \Gamma_i$ .

b)  $S < B \cup N_0$ .

Sea  $u \in S$ , probaremos que existe  $v \in B \cup N_0$  tal que  $u = v$  o  $u \xrightarrow{i} v$  y  $v \not\xrightarrow{i} u$ .

Si  $u \in B$ , es claro que  $u = u$ .

Si  $u \in S \setminus B$  entonces existe  $uN_0$ -trayectoria dirigida monocromática de color  $i$ , es decir, existe  $v \in N_0$  tal que existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática, y  $v \not\xrightarrow{i} u$  por definición de  $X_0$  ( $N_0 \subseteq X_0$ ).

Luego  $S < B \cup N_0$ , lo que contradice que  $S$  es un seminúcleo *modi* no vacío máximo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $(\Gamma_i, \leq)$ .

Por lo tanto,  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. ■

**Nota. 3.2.2.** *La condición de que  $F^+(u)$  sea monocromático para cada  $u \in V(D)$  es justa. Sea  $T$  el torneo bipartito 3-coloreado definido como sigue:  $V(D) = \{u, v, w, x, y, z\}$  y  $F(D) = \{(u, x), (x, v), (v, y), (y, w), (w, z), (z, u), (x, w), (y, u), (z, v)\}$ ; tal que  $(x, w), (w, z)$  y  $(z, u)$  son de color 1;  $(y, u), (u, x), (x, v)$  son de color 2;  $(z, v), (v, y), (y, w)$  son de color 3.  $T$  no contiene  $(1, 1, 2)$  subdivisiones de  $C_3$  tricolor y todo  $T_4$  en  $T$  es a lo más 2-coloreado. Y  $T$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, ver figura 3.39.*

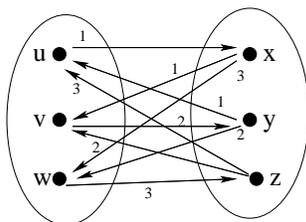


Figura 3.39:



## Capítulo 4

# Trayectorias monocromáticas y conjuntos monocromáticos de flechas en digráficas 3-quasitransitivas.

En este capítulo damos condiciones suficientes para que las digráficas 3-quasitransitivas  $m$ -coloreadas con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$  tengan núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Cabe mencionar que la idea de la demostración es la misma que para las digráficas quasitransitivas, estudiadas en el capítulo 2.

### 4.1. Trayectorias dirigidas monocromáticas en digráficas 3-quasitransitivas

Primero daremos algunos lemas que nos serán de gran utilidad en la demostración del Teorema 4.2.2. Estos lemas nos dan algunas propiedades a cerca de las trayectorias dirigidas monocromáticas en las digráficas 3-quasitransitivas.

**Definición. 4.1.1.** Decimos que  $D$  es *3-quasitransitiva* si para cada  $u, v \in V(D)$  tal que existe  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 3 se tiene que  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .

**Lema. 4.1.2.** *Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, entonces  $(u_i, u_j) \notin F(D)$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  con  $j > i+1$ .*

**Demostración.**

Sea  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Sean  $u_i, u_j \in V(T)$  con  $j > i+1$ .

Supongamos por contradicción que  $(u_i, u_j) \in F(D)$  para algún  $i \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ , y para algún  $j > i+1$ , tenemos que  $(u_i, u_j)$  es del mismo color que  $T$  pues  $F^+(u_i)$  es monocromático.

De donde  $T' = (u = u_0, \dots, u_i, u_j, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática tal que  $\ell(T') < \ell(T)$ , contradicción con la elección de  $T$ , ver figura 4.1.

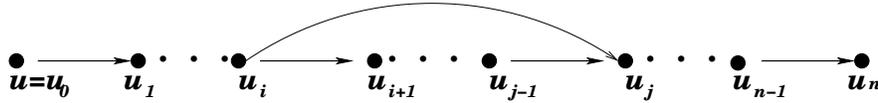


Figura 4.1:

Por lo tanto  $(u_i, u_j) \notin F(D)$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  con  $j > i+1$ . ■

**Lema. 4.1.3.** *Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima, con  $n \geq 3$ , entonces  $(u_i, u_{i-(2m+1)}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{3, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$ . En particular, si  $\ell(T)$  es impar entonces  $(v, u) \in F(D)$  y si  $\ell(T)$  es par se tiene que  $(v, u)$  puede no existir.*

**Demostración.**

Sea  $T = (u = u_0, u_1, \dots, u_n = v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Haremos la demostración considerando si  $\ell(T)$  es impar o par, en ambos casos procederemos por inducción sobre la longitud de  $T$ .

**Caso a.** Si  $\ell(T)$  es impar.

1.  $\ell(T) = 3$ .

Sea  $T = (u_0, u_1, u_2, u_3)$  una  $u_0u_3$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3 mínima.

Como la longitud de  $T$  es 3 y  $D$  es 3-quasitransitiva entonces  $(u_0, u_3) \in F(D)$  o  $(u_3, u_0) \in F(D)$ , pero la longitud de  $T$  es mínima, entonces por el Lema 4.1.2, se tiene que  $(u_0, u_3) \notin F(D)$ .

Por lo tanto,  $(u_3, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.2.

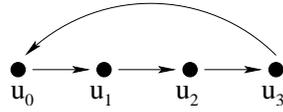


Figura 4.2:

2. Por hipótesis de inducción supongamos que el resultado es cierto para  $\ell(T) = 2n - 1$ .
3. Demostraremos para  $\ell(T) = 2n + 1$ .

Sea  $T = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}, u_{2n}, u_{2n+1})$  una  $u_0u_{2n+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Consideremos  $T' = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{2n-1})$ ,  $T'$  es una  $u_0u_{2n-1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima y  $\ell(T') = 2n - 1$ , por lo que  $T'$  satisface el lema, así que por hipótesis de inducción, tenemos que  $(u_i, u_{i-(2m+1)}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{3, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, \dots, [\frac{i-1}{2}]\}$ , en particular  $(u_3, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.3.

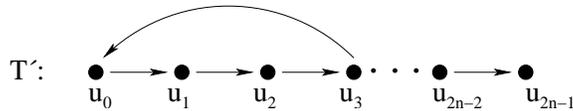


Figura 4.3:

Sea  $T'' = (u_2, T, u_{2n+1})$ ,  $T''$  es una  $u_2u_{2n+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima y  $\ell(T'') = 2n - 1$ . Por hipótesis de inducción  $T''$  satisface el lema, así que  $(u_i, u_{i-(2m+1)}) \in$

$F(D)$  para cada  $i \in \{3, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$ , en particular  $(u_{2n+1}, u_2) \in F(D)$ , ver figura 4.4.

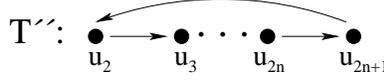


Figura 4.4:

Así que sólo basta mostrar que  $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$  y  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$ . Pero tenemos que  $(u_{2n+1}, u_2, u_3, u_0)$  es una  $u_{2n+1}u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 3 y por ser  $D$  3-quasitransitiva entonces se tiene que  $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, u_{2n+1}) \in F(D)$ , y por el Lema 4.1.2 tenemos que  $(u_0, u_{2n+1}) \notin F(D)$ . Así  $(u_{2n+1}, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.5.

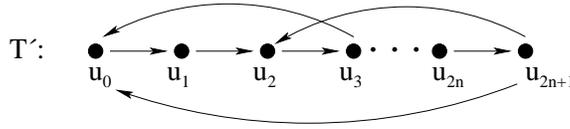


Figura 4.5:

También, por hipótesis de inducción tenemos que  $(u_{2n}, u_3) \in F(D)$ , así  $(u_{2n}, u_3, u_4, u_1)$  es una  $u_{2n}u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3, y por ser  $D$  3-quasitransitiva se tiene que  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, u_{2n}) \in F(D)$ , pero por el Lema 4.1.2 tenemos que  $(u_1, u_{2n}) \notin F(D)$ . Así  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$ , ver figura 4.6.

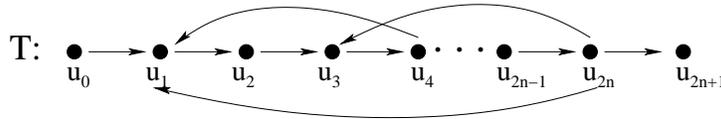


Figura 4.6:

**Caso b.** Si  $\ell(T)$  es par.

1.  $\ell(T) = 4$ .

Sea  $T = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4)$  una  $u_0u_4$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima 4.

Sea  $(u_0, u_1, u_2, u_3)$  una  $u_0u_3$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3, entonces  $(u_0, u_3) \in F(D)$  o  $(u_3, u_0) \in F(D)$  pues  $D$  es 3-quasitransitiva y por el Lema 4.1.2 tenemos que  $(u_0, u_3) \notin F(D)$ . Así  $(u_3, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.7.

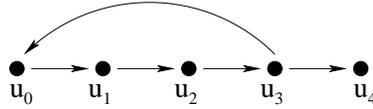


Figura 4.7:

Análogamente, sea  $(u_1, \dots, u_4)$  una  $u_1u_4$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3 y por ser  $D$  3-quasitransitiva tenemos que  $(u_1, u_4) \in F(D)$  o  $(u_4, u_1) \in F(D)$ , pero por el Lema 4.1.2  $(u_1, u_4) \notin F(D)$ . Así  $(u_4, u_1) \in F(D)$ , ver figura 4.8.

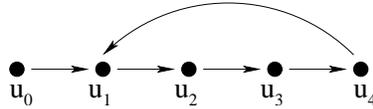


Figura 4.8:

Además,  $(u_4, u_0)$  puede no existir.

2. Por hipótesis de inducción supongamos que el lema se satisface para  $\ell(T) = 2(n - 1)$ .
3. Ahora, demostraremos que el resultado es cierto para  $\ell(T) = 2n$ .

Sea  $T = (u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2(n-1)}, u_{2n-1}, u_{2n})$  una  $u_0u_{2n}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima.

Sea  $T' = (u_0, u_1, \dots, u_{2(n-1)})$  una  $u_0u_{2(n-1)}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud  $2(n-1)$ . Por hipótesis de inducción  $T'$  satisface el lema, así tenemos que  $(u_i, u_{i-(2m+1)}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{3, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$ , en particular  $(u_4, u_1) \in F(D)$ , ver figura 4.9.

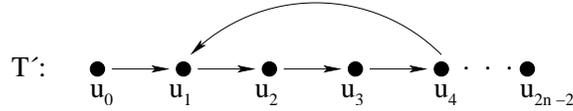


Figura 4.9:

Sea  $T'' = (u_2, T, u_{2n})$  una  $u_2u_{2n}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud  $2(n-1)$ , por hipótesis de inducción  $T''$  satisface el lema, por lo que  $(u_i, u_{i-(2m+1)}) \in F(D)$  para cada  $i \in \{3, \dots, n\}$  y  $m \in \{1, \dots, \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor\}$ , en particular  $(u_{2n}, u_3) \in F(D)$ , ver figura 4.10.

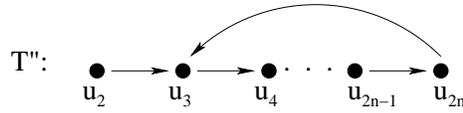


Figura 4.10:

Basta probar que  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$  y  $(u_{2n-1}, u_0) \in F(D)$ .

Tenemos que  $(u_{2n}, u_3, u_4, u_1)$  es una  $u_{2n}u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3 y como  $D$  es 3-quasitransitiva, se tiene que  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$  o  $(u_1, u_{2n}) \in F(D)$ , como  $T$  es de longitud mínima entonces por el Lema 4.1.2 se tiene que  $(u_1, u_{2n}) \notin F(D)$ . Por lo tanto  $(u_{2n}, u_1) \in F(D)$ , ver figura 4.11.

También, tenemos que  $(u_{2n-1}, u_2, u_3, u_0)$  es una  $u_{2n-1}u_0$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud 3, y como  $D$  es 3-quasitransitiva se tiene que  $(u_{2n-1}, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, u_{2n-1}) \in F(D)$ , pero por el Lema 4.1.2,  $(u_0, u_{2n-1}) \notin F(D)$ . Por lo tanto  $(u_{2n-1}, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.12.

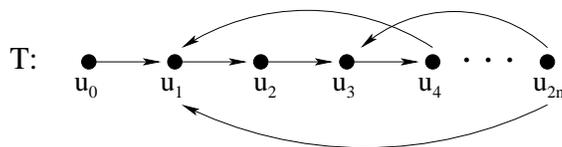


Figura 4.11:

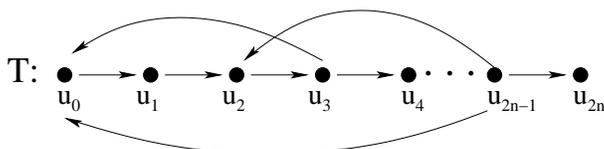


Figura 4.12:

Observemos que  $(u_{2n}, u_0)$  puede no existir.

■

**Lema. 4.1.4.** *Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si todo  $T_4$  y  $C_4$  contenidos en  $D$  son 2-coloreados, entonces  $D$  no contiene trayectorias dirigidas de longitud 3 tricolor.*

**Demostración.**

Por contradicción.

Supongamos que  $D$  contiene una  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor.

Sea  $T = (u, x, y, v)$  una  $uv$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor. Sin perder generalidad podemos suponer que  $(u, x)$  es de color 1,  $(x, y)$  es de color 2 y  $(y, v)$  es de color 3, ver figura 4.13.

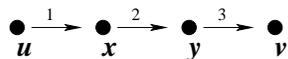


Figura 4.13:

Como  $D$  es 3-quasitransitiva entonces  $(u, v) \in F(D)$  o  $(v, u) \in F(D)$ .

1. Si  $(u, v) \in F(D)$  entonces es de color 1 pues  $(u, x)$  es de color 1 y  $F^+(u)$  es monocromático entonces  $(u, x, y, v)$  induce un  $T_4$  tricolor, contradicción, pues todo  $T_4$  en  $D$  es 2-coloreado, ver figura 4.14.

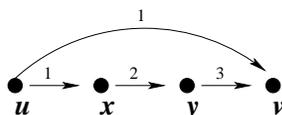


Figura 4.14:

2. Si  $(v, u) \in F(D)$  entonces  $(u, x, y, v)$  es un  $C_4$  al menos tricolor, lo que contradice la hipótesis de que todo  $C_4$  es 2-coloreado, ver figura 4.15.

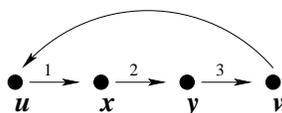


Figura 4.15:

Por lo tanto  $D$  no contiene trayectorias dirigidas de longitud 3 tricolores. ■

**Observación. 4.1.5.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si  $F^+(u)$  es de color  $i$  y  $F^+(v)$  es de color  $j$  con  $i \neq j$ , entonces  $u \neq v$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $u = v$ , entonces  $F^+(u)$  es del mismo color que  $F^+(v)$ , contradicción con la hipótesis.

Por lo tanto  $u \neq v$ . ■

**Lema. 4.1.6.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada con  $F^+(u)$  monocromático para cada  $u \in V(D)$  tal que  $D$  no contiene  $C_3$  tricolores. Si  $(u, u_1, u_2, v)$  es un  $uv$ -camino dirigido de longitud 3 tricolor entonces  $u \neq u_1$ ,  $u \neq u_2$ ,  $u \neq v$ ,  $u_1 \neq u_2$  y  $u_2 \neq v$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $u = v$ , entonces  $(u, u_1, u_2, u = v)$  es un  $C_3$  tricolor, contradicción con la hipótesis, ver figura 4.16.

Por lo tanto  $u \neq v$ .

Como en  $D$  no hay lazos entonces  $u \neq u_1$ ,  $u_1 \neq u_2$  y  $u_2 \neq v$ .

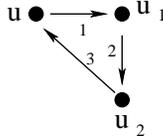


Figura 4.16:

Ahora, como estamos suponiendo que  $(u, u_1, u_2, v)$  es un  $uv$ -camino dirigido de longitud 3 tricolor, tenemos que  $F^+(u)$ ,  $F^+(u_1)$  y  $F^+(u_2)$  son todos de color distinto. Entonces por la Observación 4.1.5 se deduce que  $u \neq u_2$ . ■

## 4.2. Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas 3-quasitransitivas.

**Definición. 4.2.1.** Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada, decimos que  $D$  es *casi-monocromática* si todas sus flechas son del mismo color excepto a lo más una.

**Teorema. 4.2.2.** Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si  $D$  no contiene  $C_3$  tricolor y todo  $T_4$  y  $C_4$  contenidos en  $D$  son casi-monocromáticos. Entonces  $D$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

**Demostración.**

Por contradicción.

Supongamos que  $D$  contiene un  $\gamma$ -ciclo.

Sea  $\gamma = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$  un  $\gamma$ -ciclo de longitud mínima.

Por ser  $\gamma$  un  $\gamma$ -ciclo, tenemos de la definición:

- i) Existe  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$  módulo  $n$ .

- ii) No existe  $u_{i+1}u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , ver figura 4.17.

Tomemos a  $T_i$  una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de longitud mínima para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

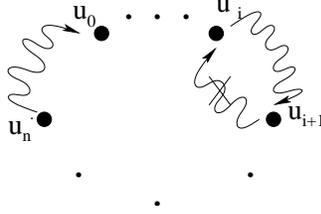


Figura 4.17:

Por (ii) tenemos que  $(u_{i+1}, u_i) \notin F(D)$  y por el Lema 4.1.2,  $\ell(T_i)$  no puede ser impar. De donde  $\ell(T_i)$  es par, además,  $(u_{i+1}, u_i) \notin F(D)$ .

Entonces para el  $\gamma$ -ciclo se tienen las siguientes afirmaciones:

1.  $\ell(\gamma) \geq 3$ .

Supongamos que  $\ell(\gamma) = 2$ . Entonces  $\gamma = (u_0, u_1, u_0)$ , de donde existe  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática y existe  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.18.

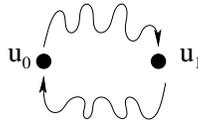


Figura 4.18:

2. No todas las  $T_i$  son del mismo color para  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Si  $T_i$  es del mismo color que  $T_j$  para cada  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ , entonces  $T_{i+1} \cup T_{i+2} \cup \dots \cup T_{i-1}$  es un  $u_{i+1}u_i$ -camino dirigido monocromático que, por el Teorema 1.1.23, contiene una  $u_{i+1}u_i$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.19.

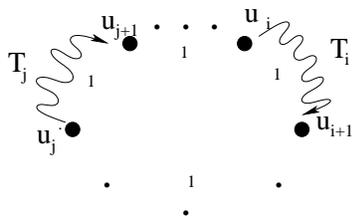


Figura 4.19:

3. Por (2), en el  $\gamma$ -ciclo hay al menos 2 colores en el conjunto de las  $T_i$ , digamos color 1 y color 2, en consecuencia hay un cambio de color.

Sin perder generalidad supongamos que en  $u_1$  ocurre un cambio de color, digamos que  $T_0$  es de color 1 y  $T_1$  es de color 2, ver figura 4.20.

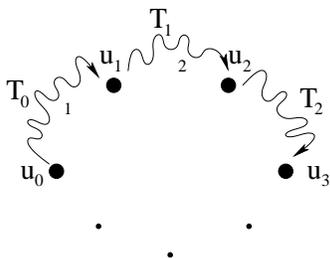


Figura 4.20:

4. No existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Por contradicción.

Supongamos que  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$  es una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  de longitud mínima, ver figura 4.21.

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

- 4.1.  $T$  es de color 3 con  $3 \notin \{1, 2\}$ .

- 1)  $T$  no puede ser de color 1. Supongamos que  $T$  es de color 1, entonces  $T \cup T_0$  es un  $u_2u_1$ -camino dirigido monocromático, y por el Teorema 1.1.23 existe  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida

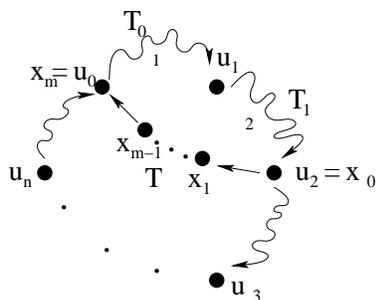


Figura 4.21:

monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.22.

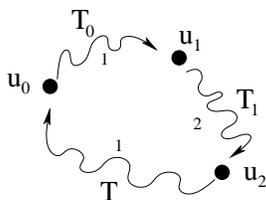


Figura 4.22:

- 2)  $T$  no puede ser de color 2. Si  $T$  es de color 2, tenemos que  $T_1 \cup T$  es un  $u_1 u_0$ -camino dirigido monocromático, y por el Teorema 1.1.23 existe  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.23.

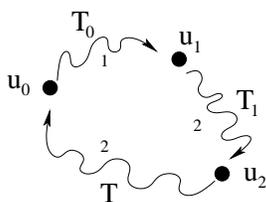


Figura 4.23:

Por lo tanto  $T$  es de color  $3 \notin \{1, 2\}$ .

4.2.  $\ell(T_0) \geq 4$  y  $\ell(T_1) \geq 4$ .

4.2.1. Si  $\ell(T_0) = 1 = \ell(T_1)$ .

Sea  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$ .

Consideremos  $(u_0, u_1, u_2, x_1)$  una  $u_0x_1$ -trayectoria dirigida tricolor de longitud 3, ( $u_1 \neq x_1$  por la Observación 4.1.5 y por el Lema 4.1.6), contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.24.

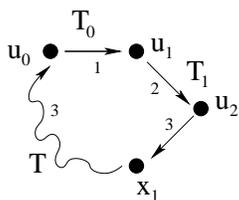


Figura 4.24:

Notemos que  $\ell(T) > 1$ , pues si  $\ell(T) = 1$  se tiene que  $x_1 = u_0$  y así  $(u_0, u_1, u_2, u_0 = x_1)$  es un  $C_3$  tricolor, lo que contradice que  $D$  no contiene  $C_3$  tricolores, ver figura 4.25.

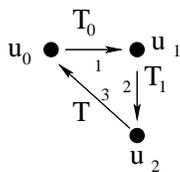


Figura 4.25:

4.2.2. Si  $\ell(T_0) = 2$ ,  $\ell(T_1) = 1$ .

Sean  $T_0 = (u_0, y, u_1)$  y  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = u_0)$ .

En este caso,  $(y, u_1, u_2, x_1)$  es una  $yx_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor, (por el Lema 4.1.6 y  $u_1 \neq x_1$  por la Observación 4.1.5), contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.26.

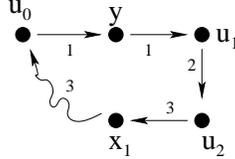


Figura 4.26:

4.2.3. Si  $\ell(T_0) = 2 = \ell(T_1)$ .

Sean  $T_0 = (u_0, y, u_1)$ ,  $T_1 = (u_1, z, u_2)$  y  $T$  como en 4.2.2.

Consiremos la  $u_0z$ -trayectoria dirigida de longitud 3 dada por  $(u_0, y, u_1, z)$ , (ya que  $y \neq u_0$  pues son vértices distintos en  $T_0$  y  $z \neq u_1$  pues son vértices distintos en  $T_1$  y por la Observación 4.1.5), como  $D$  es 3-quasitransitiva tenemos que  $(u_0, z) \in F(D)$  o  $(z, u_0) \in F(D)$ , pero en  $D$  todo  $T_4$  y  $C_4$  son casi-monocromáticos, de donde  $(u_0, z) \in F(D)$ , además se tiene que es de color 1 ya que  $F^+(u_0)$  es monocromático, ver figura 4.27.

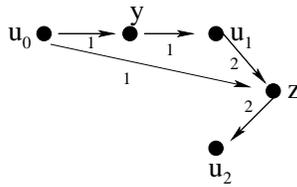


Figura 4.27:

Ahora, consideremos  $(u_0, z, u_2, x_1)$  una  $u_0x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor, ( $u_2 \neq x_1$  ya que son vértices distintos en  $T$  y por la Observación 4.1.5), contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.28.

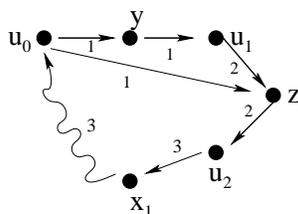


Figura 4.28:

4.2.4. Si  $\ell(T_0) = 1$ ,  $\ell(T_1) = 2$ .

Sean  $T_1 = (u_1, z, u_2)$  y  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m = u_0)$ .

Sea  $(x_{m-1}, u_0, u_1, z)$  una  $x_{m-1}z$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor, por el Lema 4.1.6 y la Observación 4.1.5, contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.29.

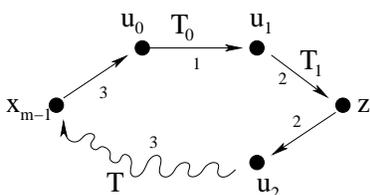


Figura 4.29:

Por lo tanto  $\ell(T_0) \geq 4$  y  $\ell(T_1) \geq 4$ .

4.3.  $\ell(T) \geq 3$ .

Supongamos por contradicción que  $\ell(T) < 3$ .

4.3.1. Supongamos que  $\ell(T) = 1$ .

Sean  $T_0 = (u_0 = y_0, y_1, \dots, y_\ell = u_1)$  y  $T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2)$  con  $\ell \geq 4$  y  $k \geq 4$  por (4.2).

En este caso consideremos  $(z_{k-1}, u_2, u_0, y_1)$  una  $z_{k-1}y_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor, por el Lema 4.1.6 y la Observación 4.1.5, contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.30.

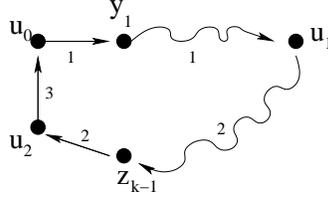


Figura 4.30:

4.3.2. Si  $\ell(T) = 2$ .

Sean  $T_0$  y  $T_1$  como en (4.3.1) y  $T = (u_2, x, u_0)$ .

Tomemos  $(z_{k-1}, u_2, x, u_0)$  una  $z_{k-1}u_0$ -trayectoria dirigida de longitud 3, ( $u_2 \neq x$ ,  $u_2 \neq u_0$  y  $x \neq u_0$  por ser vértices distintos en  $T$  y por la Observación 4.1.5), como  $D$  es 3-quasitransitiva, tenemos que  $(z_{k-1}, u_0) \in F(D)$  o  $(u_0, z_{k-1}) \in F(D)$ .

Si  $(z_{k-1}, u_0) \in F(D)$  es de color 2 pues  $T_1$  es de color 2 y  $F^+(z_{k-1})$  es monocromático, entonces  $\{z_{k-1}, u_2, x, u_0\}$  induce un  $T_4$  que no es casi-monocromático, contradicción, con la hipótesis pues en  $D$  todo  $T_4$  es casi-monocromático, ver figura 4.31.

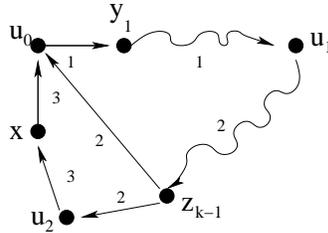


Figura 4.31:

Si  $(u_0, z_{k-1}) \in F(D)$  es de color 1 pues  $T_0$  es de color 1 y  $F^+(u_0)$  es monocromático, entonces  $(u_0, z_{k-1}, u_2, x)$  es una  $u_0x$ -trayectoria dirigida tricolor de longitud 3, contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.32.

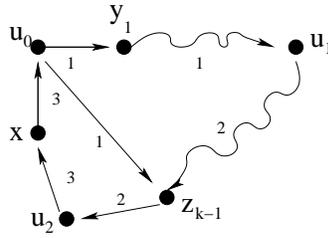


Figura 4.32:

Por lo tanto  $\ell(T) \geq 3$ .

4.4.  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ .

Por contradicción.

Supongamos que  $(u_0, u_2) \in F(D)$ .

Sea  $T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2)$ .

Notemos que  $(u_0, u_2)$  es de color 1, pues  $T_0$  es de color 1 y  $F^+(u_0)$  es monocromático.

$T_1$  satisface las hipótesis del Lema 4.1.3, por lo tanto  $(u_2, z_1) \in F(D)$ , además, es de color 3, pues  $T$  es de color 3 y  $F^+(u_2)$  es monocromático. Entonces tenemos que  $(u_0, u_2, z_1, z_2)$  es una  $u_0 z_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3 tricolor, por el Lema 4.1.6 y la Observación 4.1.5, contradicción con el Lema 4.1.4, ver figura 4.33.

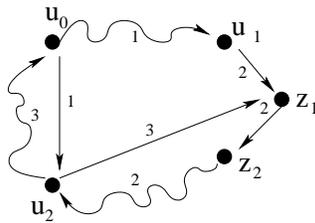


Figura 4.33:

Por lo tanto  $(u_0, u_2) \notin F(D)$ .

Así de (4.3) y (4.4),  $\ell(T) \geq 4$  y de longitud par.

4.5. De (4.2), (4.3) y (4.4) concluimos que  $\ell(T_0) \geq 4$ ,  $\ell(T_1) \geq 4$ ,  $\ell(T) \geq 4$  y de longitud par.

Ahora concluiremos la prueba de la afirmación (4).

Sean  $T = (u_2 = x_0, x_1, \dots, x_m = u_0)$  y  $T_1 = (u_1 = y_0, y_1, \dots, y_\ell = u_2)$ .

Notemos que  $T$  satisface el Lema 4.1.3, así que  $(u_0, x_1) \in F(D)$  y es de color 1, pues  $F^+(u_0)$  es monocromático y  $T_0$  es de color 1, ver figura 4.34.

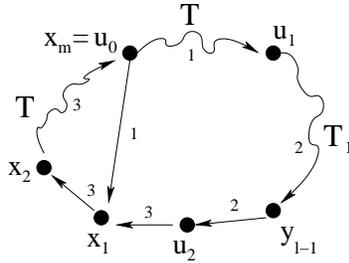


Figura 4.34:

Tomemos  $(y_{\ell-1}, u_2, x_1, x_2)$  que es una  $y_{\ell-1}x_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3 ( $u_2 \neq x_1$ ,  $u_2 \neq x_2$ ,  $x_1 \neq x_2$  ya que son vértices distintos en  $T$  y por la Observación 4.1.5), y por ser  $D$  3-quasitransitiva tenemos que  $(y_{\ell-1}, x_2) \in F(D)$  o  $(x_2, y_{\ell-1}) \in F(D)$ , pero por hipótesis todo  $C_4$  y  $T_4$  en  $D$  es casi-monocromático, por lo que  $(x_2, y_{\ell-1}) \in F(D)$  y es de color 3 pues  $T$  es de color 3 y  $F^+(x_2)$  es monocromático (recordemos que por (4.5),  $\ell(T) \geq 4$ ), ver figura 4.35.

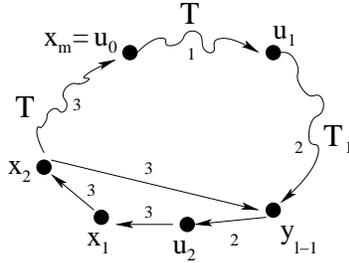


Figura 4.35:

Ahora, tenemos que  $(u_0, x_1, x_2, y_{\ell-1})$  es una  $u_0 y_{\ell-1}$ -trayectoria dirigida de longitud 3, ( $x_1 \neq x_2$  ya que son vértices distintos en  $T$  y por la Observación 4.1.5), entonces por ser  $D$  3-quasitransitiva, tenemos que  $(u_0, y_{\ell-1}) \in F(D)$  o  $(y_{\ell-1}, u_0) \in F(D)$ .

Si  $(u_0, y_{\ell-1}) \in F(D)$ , tenemos que es de color 1, de donde  $\{u_0, x_1, x_2, y_{\ell-1}\}$  induce un  $T_4$  que no es casi-monocromático, contradicción con la hipótesis, ver figura 4.36.

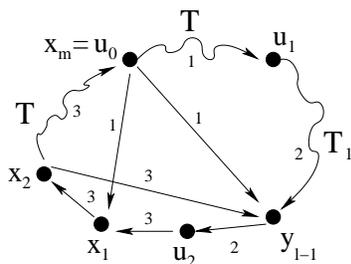


Figura 4.36:

Si  $(y_{\ell-1}, u_0) \in F(D)$ , se tiene que es de color 2, de donde  $(u_0, x_1, x_2, y_{\ell-1}, u_0)$  es un  $C_4$  que no es casi-monocromático, contradicción con la hipótesis, ver figura 4.37.

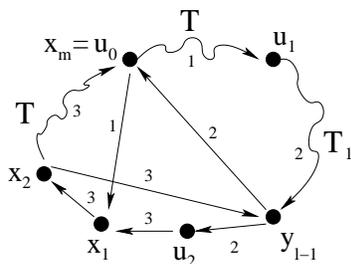


Figura 4.37:

Por lo tanto no existe  $u_2 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

5. De (1) y (4) tenemos que  $\ell(\gamma) \geq 4$ .
6. No existe  $u_0 u_2$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Por contradicción.

Supongamos que existe una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Por (4) no existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, entonces  $(u_0, u_2, u_3, \dots, u_n, u_0)$  es un  $\gamma$ -ciclo de longitud menor que la de  $\gamma$ , contradicción con la elección de  $\gamma$ , ver figura 4.38.

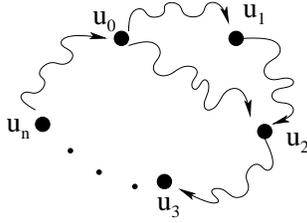


Figura 4.38:

7. No existe  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática, no existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática,  $(u_0, u_2) \notin F(D)$  y  $(u_2, u_0) \notin F(D)$ .
8. Por (3) podemos suponer que  $T_0$  es de color 1 y  $T_1$  es de color 2.
9. Si para alguna  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\ell(T_i) = 1$  y hay un cambio de color en  $u_{i+1}$ , entonces  $\ell(T_{i+1}) = 1$ .

Sin perder generalidad, supongamos que  $\ell(T_0) = 1$  y hay un cambio de color en  $u_1$ .

a) Si  $\ell(T_1) = 2$ .

Sea  $T_1 = (u_1, z, u_2)$ .

En este caso tenemos que  $(u_0, u_1, z, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3 ( $u_1 \neq z$  y  $z \neq u_2$  por ser vértices distintos de  $T_1$ ,  $u_0 \neq u_2$  pues son vértices del  $\gamma$ -ciclo y por la Observación 4.1.5), entonces por ser  $D$  3-quasitransitiva se tiene que  $(u_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_0) \in F(D)$ , contradicción con (7) pues ninguno de los dos casos es posible, ver figura 4.39.

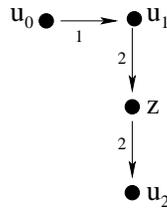


Figura 4.39:

b) Si  $\ell(T_1) > 2$ .

Sea  $T_1 = (u_1 = z_0, z_1, \dots, z_k = u_2)$ .

Consideremos  $(u_0, u_1, z_1, z_2)$  una  $u_0z_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, ( $u_1 \neq z_1$ ,  $z_1 \neq z_2$  y  $u_1 \neq z_2$  por ser vértices distintos de  $T_1$  y por la Observación 4.1.5), como  $D$  es 3-quasitransitiva tenemos que  $(u_0, z_2) \in F(D)$  o  $(z_2, u_0) \in F(D)$ , pero por hipótesis todo  $T_4$  y  $C_4$  en  $D$  es casi-monocromático, así que  $(u_0, z_2) \notin F(D)$  de donde  $(z_2, u_0) \in F(D)$  y es de color 2, pues  $T_1$  es de color 1 y  $F^+(z_2)$  es monocromático. Así  $(u_1, z_1, z_2, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.40.

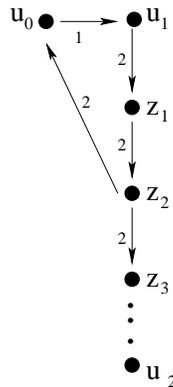


Figura 4.40:

Por lo tanto de (a) y (b) concluimos que  $\ell(T_1) = 1$ .

Ahora analicemos los casos que nos llevarán a la contradicción que prueba el teorema.

Caso 1.  $\ell(T_0) = 1 = \ell(T_1)$ .

Por (5) podemos suponer que  $\ell(\gamma) \geq 4$ .

Supongamos que  $\ell(\gamma) = n \geq 4$ .

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

- a)  $(u_0, u_i) \in F(D)$ , si  $i$  es impar.
- b)  $(u_1, u_i) \in F(D)$ , si  $i$  es par.
- c)  $T_i$  es de color 1 si  $i$  es par.
- d)  $T_i$  es de color 2 si  $i$  es impar.
- e)  $\ell(T_i) = 1$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

La demostración la haremos por inducción, probaremos para  $i$  impar:

- a)  $(u_0, u_i) \in F(D)$ .
- b)  $(u_1, u_{i-1}) \in F(D)$ .
- c)  $T_i$  es de color 2.
- d)  $T_{i-1}$  es de color 1.
- e)  $\ell(T_{i-1}) = 1 = \ell(T_i)$ .

Notemos que si  $i = 1$  se tiene que  $(u_0, u_1) \in F(D)$  por hipótesis, pues estamos suponiendo que  $\ell(T_0) = 1$  y  $T_0$  es de color 1.

1. Probaremos para  $i = 3$ .

Sea  $T_2 = (u_2, x_1, \dots, x_m = u_3)$ .

Consideremos  $(u_0, u_1, u_2, x_1)$  una  $u_0x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3,  $(u_0, u_1, u_2)$  son distintos por ser vértices del  $\gamma$ -ciclo,  $u_2 \neq x_1$  por ser vértices de  $T_2$ ,  $u_1 \neq x_1$  ya que no existe  $u_2u_1$ -trayectoria

dirigida monocromática y  $u_0 \neq x_1$  pues no existe  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática), entonces por ser  $D$  3-quasitransitiva tenemos que  $(u_0, x_1) \in F(D)$  o  $(x_1, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.41.

Si  $(x_1, u_0) \in F(D)$ .

Como en  $D$  todo  $C_4$  es casi-monocromático, tenemos que  $(u_2, x_1)$  y  $(x_1, u_0)$  son de color 1 o son de color 2.

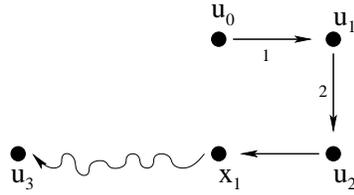


Figura 4.41:

En cualquier caso  $(u_2, x_1, u_0)$  es una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con (4), ver figura 4.42.

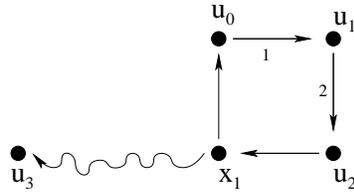


Figura 4.42:

Por lo tanto  $(x_1, u_0) \notin F(D)$ , de donde  $(u_0, x_1) \in F(D)$ .

Como  $T_0$  es de color 1 y  $F^+(u_0)$  es monocromático tenemos que  $(u_0, x_1)$  es de color 1, y como en  $D$  todo  $T_4$  es casi-monocromático, se tiene que  $(u_2, x_1)$  es de color 1, entonces hay un cambio de color en  $u_2$  y por (9),  $\ell(T_2) = 1$ , ver figura 4.43.

Por lo tanto  $T_2$  es de color 1, y  $(u_0, u_3) \in F(D)$ .

Ahora demostraremos que  $(u_1, u_2) \in F(D)$ , lo cual se tiene por hipótesis, así como que  $T_1$  es de color 2 y que  $\ell(T_1) = 1$ .

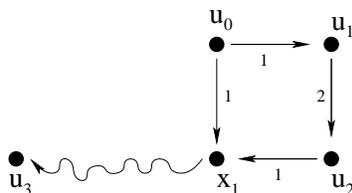


Figura 4.43:

2. Supongamos por hipótesis de inducción que  $(u_0, u_{i-2}) \in F(D)$ ,  $(u_1, u_{i-3}) \in F(D)$ ,  $\ell(T_{i-3}) = 1 = \ell(T_{i-2})$ ,  $T_{i-3}$  es de color 1 y  $T_{i-2}$  es de color 2.
3. Por demostrar que  $(u_0, u_i) \in F(D)$ ,  $(u_1, u_{i-1}) \in F(D)$ ,  $\ell(T_i) = 1 = \ell(T_{i-1})$ ,  $T_i$  es de color 1 y  $T_{i-1}$  es de color 2.

Primero probaremos que  $(u_1, u_{i-1}) \in F(D)$ .

Sea  $T_{i-2} = (u_{i-2}, x_1, x_2, \dots, x_m = u_{i-1})$ .

También, demostraremos que  $\ell(T_{i-2}) = 1$  y que  $T_{i-2}$  es de color 2.

Por hipótesis de inducción tenemos que  $(u_1, u_{i-3}) \in F(D)$ .

Sea  $(u_1, u_{i-3}, u_{i-2}, x_1)$  un  $u_1x_1$ -camino dirigido, pero probaremos que es una  $u_1x_1$ -trayectoria dirigida monocromática, ver figura 4.44.

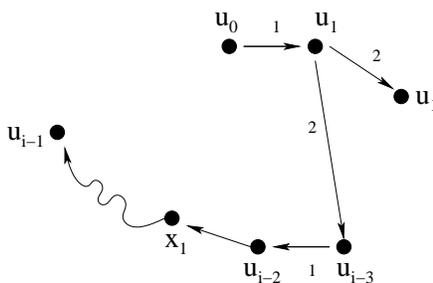


Figura 4.44:

Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

- i.  $u_1, u_{i-3}, u_{i-2}$  son distintos por ser vértices del  $\gamma$ -ciclo.
- ii.  $u_{i-2} \neq x_1$  por ser vértices de la trayectoria  $T_{i-2}$ .
- iii.  $u_{i-3} \neq x_1$  ya que no existe  $u_{i-2}u_{i-3}$ -trayectoria dirigida monocromática.
- iv.  $u_1 \neq x_1$ , para demostrar esta afirmación, supongamos por contradicción que  $u_1 = x_1$ , y entonces se tienen los siguientes casos:

- iv.1 Si  $(u_{i-2}, x_1 = u_1)$  es de color 2, contradicción pues no existe  $u_{i-2}u_{i-3}$ -trayectoria dirigida monocromática, recordemos que por hipótesis de inducción  $(u_1, u_{i-3}) \in F(D)$ , ver figura 4.45.

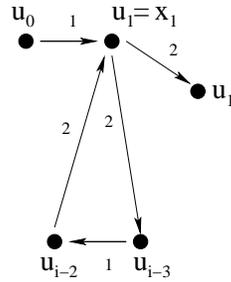


Figura 4.45:

- iv.2. Si  $(u_{i-2}, x_1 = u_1)$  es de color 3, contradicción ya que  $(u_1, u_{i-3}, u_{i-2}, u_1)$  es un  $C_3$  tricolor, ver figura 4.46.
- iv.3. Si  $(u_{i-2}, x_1 = u_1)$  es de color 1, consideremos  $(u_{i-3}, u_{i-2}, u_1, u_2)$  que es una  $u_{i-3}u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, y por ser  $D$  3-quasitransitiva se tiene que  $(u_2, u_{i-3}) \in F(D)$  o  $(u_{i-3}, u_2) \in F(D)$ .

Si  $(u_2, u_{i-3}) \in F(D)$  es de color 1, ya que  $F^+(u_2)$  es de color 1, de donde  $(u_2, u_{i-3}, u_{i-2}, u_1)$  es una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 4.47.

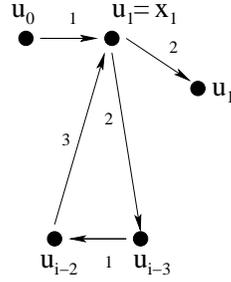


Figura 4.46:

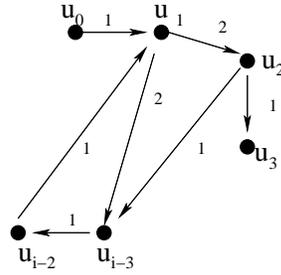


Figura 4.47:

Por lo tanto  $(u_2, u_{i-3}) \notin F(D)$ .

Así  $(u_{i-3}, u_2) \in F(D)$  y es de color 1. De donde  $(u_1, u_{i-3}, u_2, u_3)$  es una  $u_1u_3$ -trayectoria dirigida de longitud 3, y por ser  $D$  3-quasitransitiva, tenemos que  $(u_1, u_3) \in F(D)$  o  $(u_3, u_1) \in F(D)$ .

Si  $(u_1, u_3) \in F(D)$ , entonces es de color 1, ya que  $F^+(u_{i-3})$  es de color 1 y monocromático, de donde tenemos que  $\{u_1, u_{i-3}, u_2, u_3\}$  induce un  $T_4$  que no es casi-monocromático, contradicción con la hipótesis, ver figura 4.48.

Por lo tanto  $(u_1, u_3) \notin F(D)$ .

Así  $(u_3, u_1) \in F(D)$  y es de color 2, pues  $T_3$  es de color 2 por ser  $i = 3$  impar, entonces  $(u_3, u_1, u_2)$  es una  $u_3u_2$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.49.

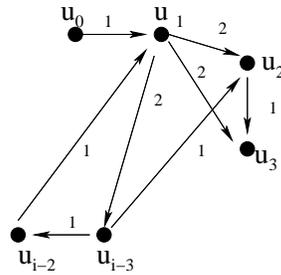


Figura 4.48:

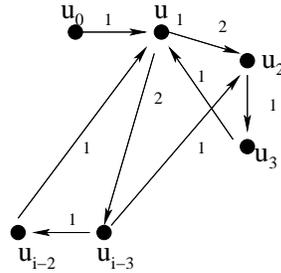


Figura 4.49:

Por lo tanto  $u_1 \neq x_1$ .

Luego  $(u_1, u_{i-3}, u_{i-2}, x_1)$  es una  $u_1x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3.

Como  $(u_1, u_{i-3}, u_{i-2}, x_1)$  una  $u_1x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3 y  $D$  es 3-quasitransitiva, se tiene que  $(u_1, x_1) \in F(D)$  o  $(x_1, u_1) \in F(D)$ .

Si  $(x_1, u_1) \in F(D)$ , entonces  $(x_1, u_1)$  y  $(u_{i-2}, x_1)$  son de color 1 o de color 2, pues por hipótesis en  $D$  todo  $C_4$  es casi-monocromático.

Si  $(x_1, u_1) \in F(D)$  y  $(u_{i-2}, x_1)$  son de color 1, tenemos que  $(u_{i-2}, x_1, u_1, u_2)$  es una  $u_{i-2}u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3,

$u_{i-2}, u_1, u_2$  son distintos por ser vértices en el  $\gamma$ -ciclo,  $u_{i-2} \neq x_1$  por ser vértices de  $T_{i-2}$ ,  $u_1 \neq x_1$  (ya lo probamos en (iv)), y  $u_2 \neq x_1$  pues no existe  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, y por ser  $D$  3-quasitransitiva se tiene que  $(u_{i-2}, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_{i-2}) \in F(D)$ , ver figura 4.50.

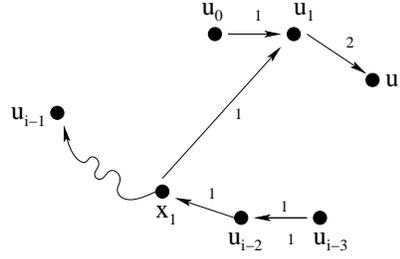


Figura 4.50:

Si  $(u_{i-2}, u_2) \in F(D)$ , se tiene que es de color 1, pues estamos suponiendo que  $F^+(u_{i-2})$  es de color 1, y por hipótesis de inducción tenemos que  $(u_0, u_{i-2}) \in F(D)$  y es de color 1, pues  $F^+(u_0)$  es de color 1, entonces  $(u_0, u_{i-2}, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con (4), ver figura 4.51.

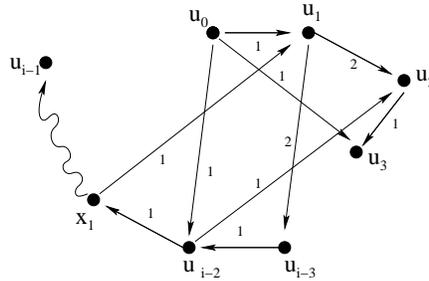


Figura 4.51:

Si  $(u_2, u_{i-2}) \in F(D)$ , se tiene que es de color 1, ya que por (1)  $T_2$  es de color 1, y tenemos que  $(u_2, u_{i-2}, x_1, u_1)$  es una  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.52.

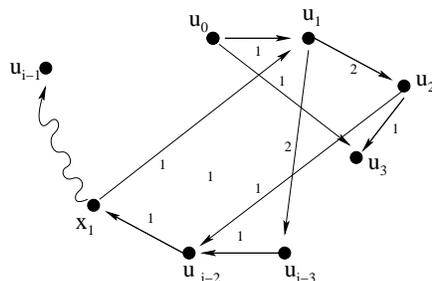


Figura 4.52:

Si  $(x_1, u_1) \in F(D)$  y  $(u_{i-2}, x_1)$  son de color 2, tenemos que  $(u_{i-2}, x_1, u_1, u_{i-3})$  es una  $u_{i-2}u_{i-3}$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.53.

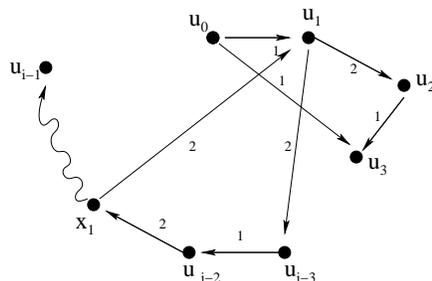


Figura 4.53:

Por lo tanto,  $(x_1, u_1) \notin F(D)$ .

Así  $(u_1, x_1) \in F(D)$ .

Si  $(u_1, x_1) \in F(D)$ , entonces tenemos que es de color 2, pues  $F^+(u_1)$  es de color 2 y monocromático. Entonces  $(u_{i-2}, x_1)$  es de color 2 pues en  $T$  todo  $T_4$  es casi-monocromático, ver figura 4.54.

De donde tenemos que en  $u_{i-2}$  hay un cambio de color, y entonces  $T_{i-2}$  es de color 2 y por (9), se tiene que  $\ell(T_{i-2}) = 1$ .

Ahora demostremos que  $(u_0, u_i) \in F(D)$ ,  $\ell(T_{i-1}) = 1$  y que  $T_{i-1}$  es de color 2.

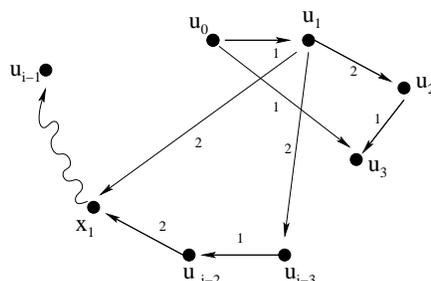


Figura 4.54:

Sea  $T_{i-1} = (u_{i-1}, x_1, x_2, \dots, x_m = u_i)$ .

Por hipótesis de inducción  $(u_0, u_{i-2}) \in F(D)$ .

Consideremos  $(u_0, u_{i-2}, u_{i-1}, x_1)$  un  $u_0x_1$ -camino dirigido de longitud 3, ver figura 4.55. Demostraremos que es una  $u_0x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3:

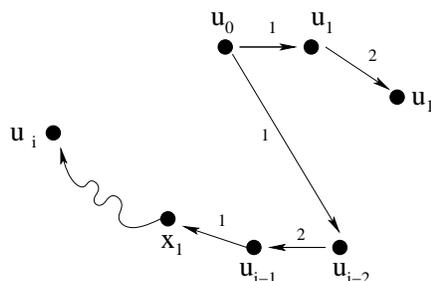


Figura 4.55:

- i'.  $u_0, u_{i-2}, u_{i-1}$  son distintos por ser vértices en el  $\gamma$ -ciclo.
- ii'.  $u_{i-1} \neq x_1$ , pues no existe  $u_{i-1}u_{i-2}$ -trayectoria dirigida monocromática.
- iii'.  $u_{i-2} \neq x_1$  por ser vértices de  $T_{i-1}$ .
- iv'.  $u_0 \neq x_1$ . La demostración de esta afirmación, la haremos por contradicción. Supongamos que  $u_0 = x_1$ , entonces tenemos los siguientes casos:

- iv'.1. Si  $(u_{i-1}, u_0)$  es de color 1, contradicción, pues  $(u_{i-1}, u_0, u_{i-2})$  es una  $u_{i-1}u_{i-2}$ -trayectoria dirigida monocromática, ver figura 4.56.

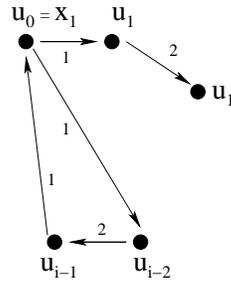


Figura 4.56:

- iv'.2. Si  $(u_{i-1}, u_0)$  es de color 3, entonces  $(u_0, u_{i-2}, u_{i-1}, u_0)$  es un  $C_3$  tricolor, contradicción, ver figura 4.57.

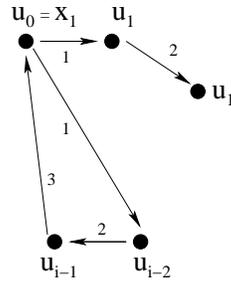


Figura 4.57:

- iv'.3. Si  $(u_{i-1}, u_0)$  es de color 2, consideremos  $(u_{i-2}, u_{i-1}, u_0, u_1)$  una  $u_{i-2}u_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3, y por ser  $D$  3-quasitransitiva, tenemos que  $(u_1, u_{i-2}) \in F(D)$  o  $(u_{i-2}, u_1) \in F(D)$ , ver figura 4.58.

Si  $(u_1, u_{i-2}) \in F(D)$  es de color 2, así  $(u_1, u_{i-2}, u_{i-1}, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 4.59.

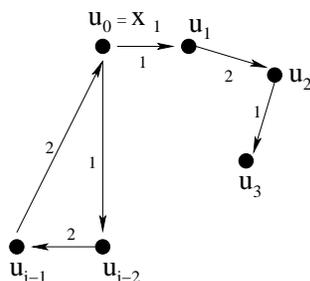


Figura 4.58:

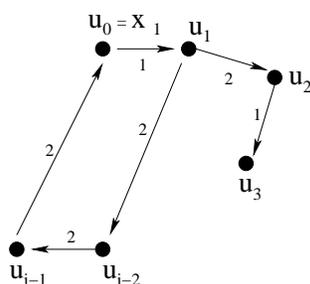


Figura 4.59:

Por lo tanto  $(u_{i-2}, u_1) \in F(D)$  y es de color 2, ya que  $F^+(u_{i-2})$  es de color 2. Entonces  $(u_0, u_{i-2}, u_1, u_2)$  es una  $u_0 u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3 y por ser  $D$  3-quasitransitiva tenemos que  $(u_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.60.

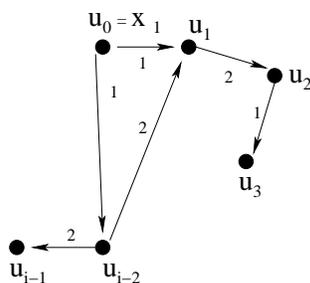


Figura 4.60:

Si  $(u_0, u_2) \in F(D)$ , entonces es de color 1, pues  $F^+(u_0)$  es de color 1, así que  $\{u_0, u_{i-1}, u_1, u_2\}$  unduce un  $T_4$  que no es casi-monocromático, contradicción, ver figura 4.61.

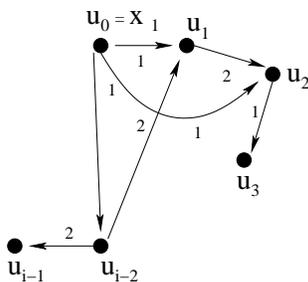


Figura 4.61:

Por lo tanto,  $(u_2, u_0) \in F(D)$  y es de color 1, por lo que  $(u_2, u_0, u_1)$  es una  $u_2u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción, ver figura 4.62.

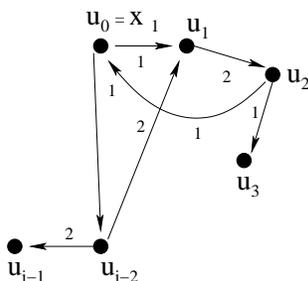


Figura 4.62:

Por lo tanto  $u_0 \neq x_1$ .

Así  $(u_0, u_{i-2}, u_{i-1}, x_1)$  es una  $u_0x_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3, y como  $D$  es 3-quasitransitiva se tiene que  $(u_0, x_1) \in F(D)$  o  $(x_1, u_0) \in F(D)$ , ver figura 4.63.

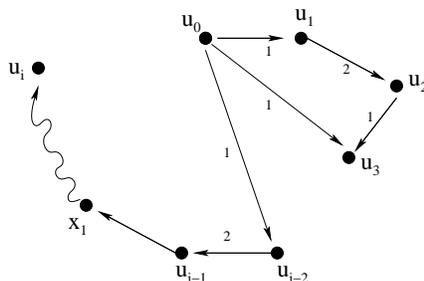


Figura 4.63:

Si  $(x_1, u_0) \in F(D)$ , tenemos que  $(x_1, u_0)$  y  $(u_{i-1}, u_0)$  son de color 1 ó de color 2, ya que en  $D$  todo  $C_4$  es casimonocromático.

Si  $(x_1, u_0)$  y  $(u_{i-1}, x_1)$  son de color 1, tenemos que  $(u_{i-1}, x_1, u_0, u_{i-2})$  es una  $u_{i-1}u_{i-2}$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.64.

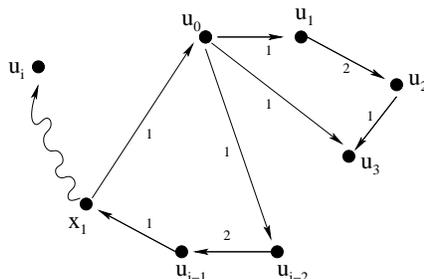


Figura 4.64:

Si  $(x_1, u_0)$  y  $(u_{i-1}, u_0)$  son de color 2, se tiene que  $(u_1, u_{i-1}, x_1, u_0)$  es una  $u_1u_0$ -trayectoria dirigida monocromática, (recordemos que ya se probó que  $(u_1, u_{i-1}) \in F(D)$ ), contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.65.

Por lo tanto  $(x_1, u_0) \notin F(D)$ .

Así  $(u_0, x_1) \in F(D)$  y es de color 1, ya que  $F^+(u_0)$  es monocromático y  $(u_0, u_1)$  es de color 1, y como en  $D$  todo  $T_4$  es casimonocromático, entonces  $(u_{i-1}, x_1)$  es de color 1, ver figura 4.66.

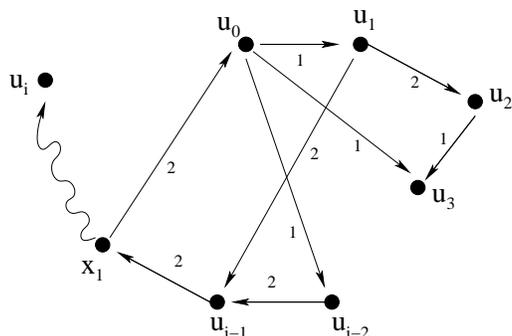


Figura 4.65:

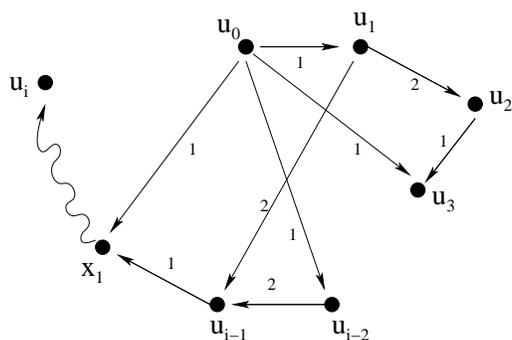


Figura 4.66:

De donde en  $u_{i-1}$  hay un cambio de color.

Por lo tanto  $T_{i-1}$  es de color 1 y por (9), tenemos que  $\ell(T_{i-1}) = 1$ .

Por último, si  $i = n$  con  $i$  impar tenemos que  $(u_n, u_0) \in F(D)$ , pues  $\ell(T_n) = 1$  y  $(u_0, u_n) \in F(D)$  por la afirmación (a), lo que contradice la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.67.

Por lo tanto  $\ell(\gamma)$  no es par.

Por lo tanto  $\ell(\gamma)$  es impar.

Si  $i = n$  par, entonces  $T_n$  es de color 1.

De donde  $n - 1$  es impar y entonces por la afirmación (a) tenemos que  $(u_0, u_{n-1}) \in F(D)$  y es de color 1. Por lo que  $(u_0, u_{n-1}, u_n)$  es una

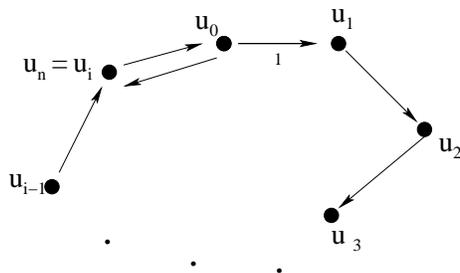


Figura 4.67:

$u_{n-1}u_n$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con la definición de  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.68.

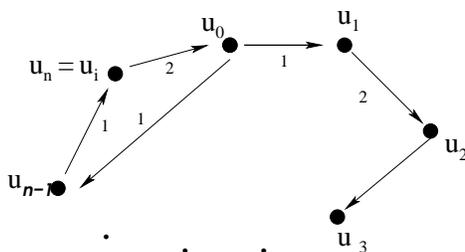


Figura 4.68:

Por lo tanto  $\ell(T_0) \neq 1 \neq \ell(T_1)$ .

Caso 2.  $\ell(T_0) = 2$ ,  $\ell(T_1) = 1$ .

Sea  $T_0 = (u_0, x, u_1)$ . Como  $(u_0, x, u_1, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, ( $u_0 \neq x \neq u_1$  y  $u_0 \neq u_1$  por ser vértices distintos en  $T_0$  y  $x \neq u_2$  pues  $(u_0, u_2) \notin F(D)$  y por la Observación 4.1.5), entonces por ser  $D$  3-quasitransitiva se tiene que  $(u_0, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, u_0) \in F(D)$ , en ambos casos tenemos una contradicción con (7), ver figura 4.69.

Caso 3.  $\ell(T_0) = 2$ ,  $\ell(T_1) \geq 2$ .

Sean  $T_0 = (u_0, x, u_1)$  y  $T_1 = (u_1, y_1, y_2, \dots, y_m = u_2)$ .

Consideremos  $(u_0, x, u_1, y_1)$  que es una  $u_0y_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3, (por ser  $u_0, x$  y  $u_1$  vértices distintos de  $T_0$ ,  $u_1 \neq y_1$  por ser dis-

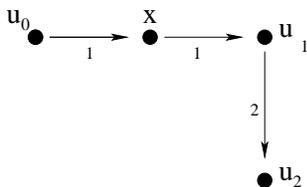


Figura 4.69:

tintos en  $T_1$  y por la Observación 4.1.5), y por ser  $D$  3-quasitransitiva tenemos que  $(u_0, y) \in F(D)$  o  $(y, u_0) \in F(D)$ . Pero por hipótesis, en  $D$  todo  $T_4$  y todo  $C_4$  son casi-monocromáticos, tenemos que  $(y, u_0) \notin F(D)$  y  $(u_0, y) \in F(D)$ .

También, tenemos que  $(x, u_1, y, y_2)$  es una  $xy_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, (ya que  $u_1, y$  y  $y_2$  son vértices distintos en  $T_1$  y por la Observación 4.1.5), y como  $D$  es 3-quasitransitiva se tiene que  $(y_2, x) \in F(D)$  o  $(x, y_2) \in F(D)$ , y por hipótesis todo  $T_4$  y  $C_4$  son casi-monocromáticos en  $D$ , entonces se tiene que  $(y_2, x) \in F(D)$  y es de color 2.

Entonces tenemos que  $(u_0, y, y_2, x)$  induce un  $T_4$  contenido en  $D$  que no es casi-monocromático, contradicción, ver figura 4.70.

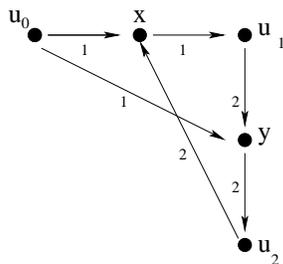


Figura 4.70:

Notemos que en el caso que  $y_2 = u_2$ , también, se sigue de la demostración.

Caso 4.  $\ell(T_0) \geq 4, \ell(T_1) = 1$ .

Sea  $T_0 = (u_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, u_1)$  con  $m \geq 4$ .

Tenemos que  $(x_{m-1}, x_m, u_1, u_2)$  es una  $x_{m-1}u_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, (ya que  $x_m, x_{m-1}$  y  $u_1$  son vértices distintos en  $T_0$  y por la Observación 4.1.5), y por ser  $D$  3-quasitransitiva, tenemos que  $(x_{m-1}, u_2) \in F(D)$  o  $(u_2, x_{m-1}) \in F(D)$ . Si  $(u_2, x_{m-1}) \in F(D)$  tendría que ser de color 1 ya que por hipótesis, en  $D$  todo  $T_4$  y todo  $C_4$  son a lo más casi-monocromáticos, entonces existe  $u_2u_1$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción. Por lo tanto tenemos que  $(u_2, x_{m-1}) \notin F(D)$  y  $(x_{m-1}, u_2) \in F(D)$  y es de color 1, de donde  $(u_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, u_2)$  es una  $u_0u_2$ -trayectoria dirigida monocromática, contradicción con (7), ver figura 4.71.

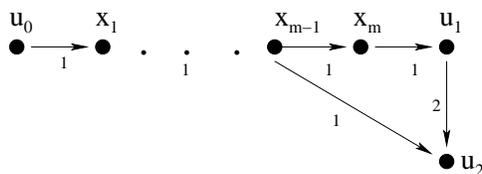


Figura 4.71:

Caso 5.  $\ell(T_0) \geq 4$ ,  $\ell(T_1) \geq 2$ .

Sean  $T_0 = (u_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, u_1)$  y  $T_1 = (u_1, y_1, y_2, \dots, y_\ell = u_2)$ .

$(x_{m-1}, x_m, u_1, y_1)$  es una  $x_{m-1}y_1$ -trayectoria dirigida de longitud 3, (ya que  $x_{m-1}, x_m$  y  $u_1$  son vértices distintos de  $T_0$  y por la Observación 4.1.5), y como  $D$  es 3-quasitransitiva, entonces  $(x_{m-1}, y_1) \in F(D)$  o  $(y_1, x_{m-1}) \in F(D)$ , pero en  $D$  todo  $T_4$  y todo  $C_4$  es casi-monocromático, entonces  $(x_{m-1}, y_1) \in F(D)$  y es de color 1, ver figura 4.72.

$(x_m, u_1, y_1, y_2)$  es una  $x_my_2$ -trayectoria dirigida de longitud 3, (ya que  $u_1, y_1$  y  $y_2$  son vértices distintos en  $T_1$  y por la Observación 4.1.5), y como  $D$  es 3-quasitransitiva, entonces  $(x_m, y_2) \in F(D)$  o  $(y_2, x_m) \in F(D)$ , pero en  $D$  todo  $T_4$  y todo  $C_4$  es casi-monocromático, entonces  $(y_2, x_m) \in F(D)$  y es de color 2, ver figura 4.73.

Entonces  $\{x_{m-1}, y_1, y_2, x_m\}$  induce un  $T_4$  que no es casi-monocromático, contradicción ya que por hipótesis, en  $D$  todo  $T_4$  es casi-monocromático, ver figura 4.74.

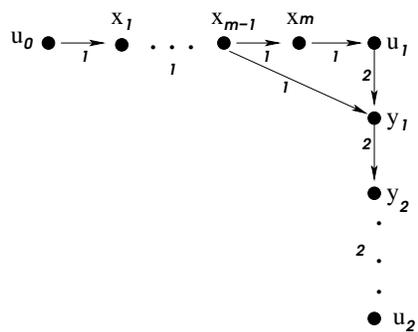


Figura 4.72:

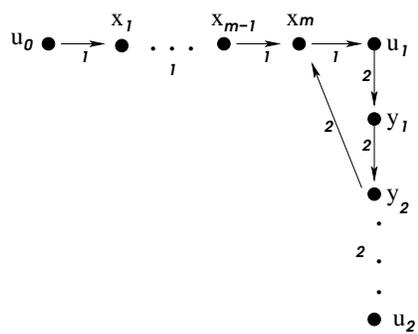


Figura 4.73:

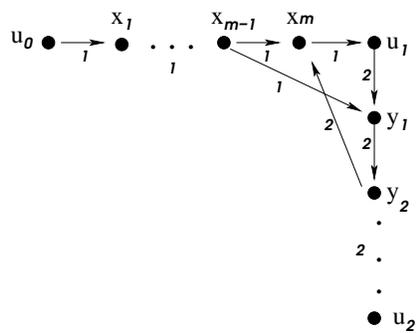


Figura 4.74:

Por lo tanto en  $D$  no hay  $\gamma$ -ciclos.



**Teorema. 4.2.3.** *Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores y todo  $T_4$  y  $C_4$  son casi-monocromáticos en  $D$ , entonces  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.**

Basta demostrar que todo  $\mathcal{C}$  ciclo de  $\mathfrak{C}(D)$  tiene al menos una flecha simétrica, por el Teorema 1.2.6.

Sea  $\mathcal{C}$  un ciclo de  $\mathfrak{C}(D)$ .

Supongamos que  $\mathcal{C}$  no tiene flechas simétricas.

Es claro que  $\mathcal{C}$  resulta ser un  $\gamma$ -ciclo en  $D$  lo cual no puede ocurrir, ya que por el teorema anterior sabemos que  $D$  no tiene  $\gamma$ -ciclos.

Por lo tanto  $\mathfrak{C}(D)$  es núcleo perfecta. ■

**Corolario. 4.2.4.** *Sea  $D$  una digráfica 3-quasitransitiva  $m$ -coloreada tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$  y  $D$  no tiene  $C_3$  tricolores, y todo  $T_4$  y  $C_4$  son casi-monocromáticos, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

Por los Teoremas 1.3.6 y 4.2.3. ■

A continuación enunciamos dos resultados inmediatos del Corolario 4.2.4.

**Corolario. 4.2.5.** *Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si  $T$  no tiene  $C_3$  tricolores, y todo  $T_4$  y  $C_4$  son casi-monocromáticos entonces  $T$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

Todo torneo es una digráfica 3-quasitransitiva y por el Corolario 4.2.4. ■

**Corolario. 4.2.6.** *Sea  $D$  un torneo bipartito  $m$ -coloreado tal que  $F^+(u)$  es monocromático para cada  $u \in V(D)$ . Si todo  $T_4$  y  $C_4$  contenidos en  $D$  son casi-monocromáticos entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.*

**Demostración.**

Todo torneo bipartito es una digráfica 3-quasitransitiva. Y por ser un torneo bipartito no contiene ciclos de longitud impar, así que no contiene  $C_3$  tricolores, y por el Corolario 4.2.4. ■

**Nota. 4.2.7.** Sea  $D$  la digráfica dada por  $V(D) = \{u, v, w, x\}$  y  $F(D) = \{(u, v), (v, w), (w, x), (x, u)\}$  tales que  $(u, v)$  y  $(w, x)$  son de color 1,  $(v, w)$  y  $(x, u)$  son de color 2,  $D$  satisface que para cada  $u \in V(D)$ ,  $F^+(u)$  es monocromático,  $D$  no contiene  $C_3$  tricolores y todo  $T_4$  contenido en  $D$  es casi-monocromático, pero  $D$  es un  $C_4$  que no es casi-monocromático, y  $D$  contiene un  $\gamma$ -ciclo, ver figura 4.75.

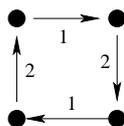


Figura 4.75:

**Nota. 4.2.8.** Sea  $C_3$  el ciclo dirigido de longitud 3 3-coloreado. Satisface que para cada  $u \in V(C_3)$ ,  $F^+(u)$  es monocromático, todo  $T_4$  y  $C_4$  contenidos en  $D$  son casi-monocromáticos, y  $C_3$  contiene un  $\gamma$ -ciclo.



# Bibliografía

- [1] J. Bang-Jensen and J. Huang, *Quasi-transitive digraphs*, J. Graph Theory 20 (2) (1995), 141-161.
- [2] J. Bang-Jensen and J. Huang, *Kings in quasi-transitive digraphs*, Discrete Math. 185 (1-3) (1998) 19-27.
- [3] C. Berge, *Graphs*, (North Holland), Amsterdam, New York, (1985).
- [4] P. Duchet, *Graphes noyau-parfaits*, Ann. Discrete Math. 9 (1980), 93-101.
- [5] P. Duchet, *Classical Perfect Graphs, An introduction with emphasis on triangulated and interval graphs*, Ann. Discrete Math. 21 (1984), 67-96.
- [6] P. Duchet, H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. 33 (1981), 103-105.
- [7] A. S. Fraenkel, *Planar kernel and Grundy with  $d \leq 3, d^+ \leq 2, d^- \leq 2$  are NP-Complete*, Discrete Appl. Math. 3 (1981), 257-262.
- [8] A. S. Fraenkel, *Combinatorial Game theory foundation applied to digraph kernels*, Electron. J. Combin. 4 (1997), 17.
- [9] H. Galeana-Sánchez, *A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel perfect graphs*, Discrete Math. 41 (1982), 105-107.
- [10] H. Galeana-Sánchez, *On monocromatic paths and monocromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996), 103-112.
- [11] H. Galeana-Sánchez, *Kernels in edge coloured digraphs*, Discrete Math. 184 (1998), 87-99.

- [12] H. Galeana-Sánchez, J. J. García Ruvalcaba, *Kernels in the closure of coloured digraphs*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 20 (2000), 243-354.
- [13] H. Galeana-Sánchez, J. J. García Ruvalcaba, *On graphs all of whose  $\{C_3, T_3\}$ -free arc colorations are kernel perfect*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 21 (2001), 77-93.
- [14] H. Galeana-Sánchez, M. Guevara, *A sufficient condition for an infinite digraph to be kernel-perfect*. Submitted.
- [15] H. Galeana-Sánchez, M. Guevara, *Some sufficient conditions for the existence of kernel in infinite digraphs*. Submitted.
- [16] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernel and semikernels of digraphs*, *Discrete Math.* 48 (1984), 67-76.
- [17] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*, *Discrete Math.* 59 (1986), 257-265.
- [18] H. Galeana-Sánchez, L. Pastrana Ramírez, *Kernels in edge coloured line digraph*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 18 (1998), 91-98.
- [19] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Kernels in pretransitive digraphs*, *Discrete Mathematics*, 275 (2004), 129-136.
- [20] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *A counterexample to a conjecture on edge coloured tournaments*, *Discrete Mathematics*, 282 (2004), 275-276.
- [21] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Monochromatic paths and most 2-coloured arc sets in edge-coloured tournaments*, *Graphs and Combinatorics* 21 (2005), 307-317.
- [22] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Kernels in quasi-transitive digraphs*, *Discrete Math.* 306 (2006), 1969-1974.
- [23] T. Gallai, *Transitive orienterbare graphen*, *Acta Math. Sci. Hung.* 18 (1967), 25-66.

- [24] Ghoulà-Houri, *Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris 254 (1962), 1370-1371.
- [25] G. Hahn, P. Ille, R. E. Woodrow, *Absorbing sets in arc-coloured tournaments*, Discrete Mathematics. 283 No. 1-3 (2004), 93-99.
- [26] P. Hell and J. Huang, *Lexicographic orientation and representation algorithms for comparability graphs, proper circular arc graphs, and proper interval graphs*, Submitted.
- [27] J. Huang, *Tournament like oriented graphs*, Ph. D. thesis, Simon Fraser University (1992).
- [28] D. Kelly, *Comparability graphs, in graphs and order*, (ed. I. Rival), Nato ASI Series C. Vol. 147, D. Reidel (1985), 3-40.
- [29] J. M. Le Bars, *Counterexamples of the 0-1 law for fragments of existential second-order: an overview*, Bull. Symbolic Logic 9 (2000), 67-82.
- [30] J. M. Le Bars, *The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional logic*, in: Proceedings of the 17th Symposium on Logic in Computer Science, 2002, pp. 225-234.
- [31] J. van Leeuwen, *Having a Grundy numbering is NP-complete*, Report 207, Computer Science Department, Pennsylvania State University, University Park, PA, 1976.
- [32] Shen Minggang, *On monochromatic paths in  $m$ -coloured tournaments*, J. Combin. Theory Ser. B 45 (1988), 108-111.
- [33] Von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [34] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*, An. Inst. Mat. UNAM, 11 (1971), 55-62.
- [35] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. 58 (2) (1953), 573.
- [36] M. Richardson, *Extension theorems for solutions of irreflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39 (1953), 649.

- [37] R. Rojas Monroy, *Núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas  $m$ -coloreadas*, Tesis (Doctorado), UNAM (2002).
- [38] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B 33 (1982), 271-275.
- [39] D. J. Skrien, *A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular arc graphs and nested interval graphs*, J. Graph Theory 6 (1980), 142-163.

# Índice alfabético

- adyacente, 9
- camino, 10
- camino cerrado, 10
- camino dirigido, 11
- camino dirigido cerrado, 11
- cerradura transitiva, 13
- ciclo, 11
- ciclo dirigido, 11
- conjunto absorbente, 12
- conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas, 13
- conjunto independiente, 12
- conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, 13
- digráfica, 9
- digráfica 3-quasitransitiva, 67
- digráfica asimétrica, 10
- digráfica bipartita, 11
- digráfica casi-monocromática, 75
- digráfica completa, 9
- digráfica quasitransitiva, 15
- digráfica simétrica, 10
- flecha asimétrica, 9
- flecha simétrica, 9
- $\gamma$ -ciclo, 20
- longitud, 11
- núcleo, 12
- núcleo imperfecta crítica, 12
- núcleo perfecta, 12
- núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, 13
- orden, 9
- parte asimétrica, 10
- parte simétrica, 10
- seminúcleo módulo, 42
- subdigráfica, 9
- subdigráfica inducida, 10
- subdigráfica generadora, 10
- torneo bipartito, 41
- trayectoria, 10
- trayectoria dirigida, 11
- trayectoria dirigida monocromática, 12
- trayectoria infinita exterior, 14



# Abstract

A kernel  $N$  of a digraph  $D$  is an independent set of vertices of  $D$  such that for every  $w \in V(D) \setminus N$  there exists an arc from  $w$  to  $N$ .  $D$  is an  $m$ -coloured digraph if the arcs of  $D$  are coloured with  $m$ -colours. A directed path is called monochromatic if all of its arcs have the same color. A set  $N$  of vertices of  $D$  is called a kernel by monochromatic directed paths if for every pair of different vertices there is no monochromatic directed path between them and for every vertex  $v$  not in  $N$  there is a monochromatic directed path from  $v$  to some vertex in  $N$ . A digraph  $D$  is called kernel-perfect digraph when every induced subdigraph of  $D$  has a kernel. In this work we studied the problem of the existence of kernels by monochromatic paths in some kinds of digraphs. We obtained sufficient conditions for the existence of kernels by monochromatic paths in quasi-transitive digraphs, bipartite tournaments and 3-quasitransitive digraphs, for this we defined a  $\gamma$ -cycle in a digraph  $D$  and we defined a semikernel modulo  $i$  for monochromatic directed paths there are generalization of cycle and semikernel modulo  $F$  respectively.