



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

### **Seminúcleos módulo $F$ y núcleos en digráficas**

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

**DOCTORA EN CIENCIAS**

PRESENTA

**MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA AGUIRRE**

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALENA SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F.

AGOSTO, 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

SEMINÚCLEOS MÓDULO  $F$  Y NÚCLEOS EN  
DIGRÁFICAS

Mucuy-kak del Carmen Guevara Aguirre

2007

*A la memoria  
de mi mamá Nena*

# Agradecimientos

Dicen que todo lo que empieza tiene un final y ha llegado el final de mis años de estudiante, aunque espero que no terminen los de aprendizaje. En todo este tiempo de estudiante he disfrutado de privilegios que voy a extrañar (por ejemplo los descuentos en el cine, conciertos, teatro, museos, transporte y congresos), pero de todos ellos, lo que más voy añorar será el ser estudiante de mi querida **Universidad Nacional Autónoma de México**, a la cual le debo no sólo mi profesión, sino también los valores sociales que me ha inculcado en todos estos años y la visión de un México que no conocía, del cual estaba muy alejada. La UNAM ha sido mi segunda madre y el Instituto de Matemáticas, junto con la Facultad de Ciencias, mi segunda familia. Así que es muy triste para mi llegar a esta etapa.

Aún así me llena una enorme alegría el concluir mi Doctorado, pues era un sueño que me acompañaba desde hace mucho tiempo. Pero el lograr este sueño no me ha sido nada fácil y estoy completamente segura que sola no lo hubiera logrado. Afortunadamente conté con la ayuda de muchas personas que eran o se volvieron muy especiales para mí, a las que les debo, al menos, estas palabras de agradecimiento...

A la Dra. Hortensia Galeana Sánchez, aunque es obvia su aportación sobre mi, no quiero dejar de agradecerle el que me haya adoptado con mucho entusiasmo después de que quedé *huérfana* académicamente.

A mis sinodales: Dra. Rocío Rojas, Dr. Hugo Rincón, Dr. Bernardo Llano y Dr. Ricardo Gómez, no sólo por sus correcciones y observaciones a esta

tesis, sino también por su apoyo y amistad, de la cual me siento muy honrada.

A mi comité tutorial: Dr. Francisco Larrión y Dr. Eduardo Rivera que, junto con la enorme cantidad de firmas para inscripciones, evaluaciones, etc., me brindaron su cariño y consejos.

A mis amigos por su compañía, cariño y sobretodo sus porras. Quisiera mencionarlos a cada uno de ellos pero de hecho esta tesis, y en particular estos agradecimientos, ya son muy largos, así que sólo mencionaré los conjuntos a los que pertenecen (no necesariamente disjuntos) y puedan sentirse incluidos cuando lean estas líneas: - el grupo de combinatoria porque no sólo me han transmitido el amor a mis gráficas, sino me han enseñado muchas cosas útiles para la vida, - mis compañeros de estudio con los cuales tuve muchas horas de ejercicios, discusiones, chismes, etc., - mis maestros por sus enseñanzas de matemáticas y su amistad de igual a igual, - mis amigos los físicos porque además de su amistad y gratos momentos, me han ayudado a confirmar que las matemáticas fue mi mejor elección, - a los invitados de los *viernes lúdico-académicos*, por todo lo que ustedes ya saben.

A mi familia por su invaluable apoyo desde siempre, digo invaluable puesto que no han entendido del todo cómo fui capaz de hacerme matemática (pero creo que lo justifican, de manera acertada, con cierta locura de mi parte) y mucho menos como le voy a hacer para vivir de esto, principalmente mi abuelo, con el que muchas veces comparto esa preocupación. Pero se han dado cuenta de que esto es lo que realmente me hace feliz y por eso han decidido apoyarme... lo cual les agradezco enormemente.

A mi querido primer esposo porque *a pesar de* siempre ha estado ahí cuando lo necesito. Tan es así que hasta podemos decir que él como yo hicimos dos doctorados (o bueno uno y medio).

A la familia de mi esposo, que me ha hecho parte de ella y que también han sido parte de mi.

A mi hija Hieródula y mi hijastra Eutelia, que indudablemente sin ellas esta tesis no existiría tal como la ven.

Al Instituto de Matemáticas, por permitirme ser becaria y poder disfru-

tar de los beneficios que esto implica, así como también el poder compartir los pasillos con sus investigadores, trabajadores y becarios, que me hicieron mucho más agradable de lo que ya eran mis estudios de posgrado. Muy particularmente a mis compañeros de cubículo, los cuales me hicieron pasar muchas horas gratas, a los chicos de cómputo por sacarme de tantos apuros y a Leo por su ayuda en LaTeX.

A la Facultad de Ciencias y al Posgrado de Matemáticas por los beneficios recibidos y muy especialmente a la Coordinación de Posgrado, donde incluyo a los coordinadores que pasaron en estos 5 años y a Lauris, Coco y Alexia.

Por último al CONACyT y DGEP de la UNAM, por las becas recibidas en estos años.

A todos ellos mil gracias.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
0.1. Digráficas . . . . .	1
0.2. Operaciones entre digráficas . . . . .	4
0.3. Núcleos . . . . .	7
0.4. Ordenes parciales . . . . .	9
<b>1. Nuevas condiciones suficientes para la existencia de núcleos</b>	<b>11</b>
1.1. Definiciones y notaciones . . . . .	12
1.2. Digráficas núcleo perfectas . . . . .	20
1.2.1. Análisis de las hipótesis . . . . .	66
<b>2. Sobre la estructura de <i>algunas</i> digráficas con o sin núcleo</b>	<b>77</b>
2.1. Seminúcleos módulo $(R, A(D_1))$ y trayectorias dirigidas $(K, D_2)$ - normales . . . . .	77
2.2. Estructura de ciertas digráficas sin núcleo . . . . .	89
2.3. Estructura de <i>algunas</i> digráficas núcleo imperfectas críticas .	100
2.4. Digráficas núcleo perfectas . . . . .	106



---

2.5. Aplicaciones . . . . .	109
<b>3. Consecuencias y más aplicaciones</b>	<b>115</b>
3.1. Dos consecuencias importantes . . . . .	115
3.2. Unión de familias de digráficas conocidas . . . . .	116
3.3. Condiciones sobre $Asim(D)$ para que $D$ sea núcleo perfecta .	136
<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>

# Introducción

El objetivo de este trabajo (además, claro está, de obtener el grado de Doctor) es presentar nuevas condiciones suficientes más débiles que las existentes, para asegurar cuándo una digráfica finita o infinita puede tener núcleo o no. Si usted está leyendo esta tesis es muy probable que conozca el concepto de núcleo y esa haya sido una de las razones para que se encuentre entre sus manos, pero también cabe la posibilidad de que no sea así y que la motivación que lo ha llevado a leer este trabajo es para conocer qué es y para qué sirve un núcleo. Así que permítame introducir brevemente la definición de un núcleo: Un *núcleo* de  $D$  es un conjunto independiente y absorbente de vértices de  $D$ .

El concepto de núcleo de una digráfica fue introducido por J. Von Neumann y Morgenstern [32] en el contexto de la Teoría de Juegos, para ser más precisos en juegos de cooperación entre  $n$  personas: Supongamos que  $n$  personas, denotados por  $1, 2, \dots, n$  tienen que discutir la selección de un solo punto o elemento del conjunto  $X$ , llamado el conjunto de las *situaciones*. Si el jugador  $i$  prefiere la situación  $a$  a la situación  $b$ , escribiremos  $a \geq^i b$ . Las preferencias individuales podrían no ser compatibles y recordemos que se está haciendo una elección de grupo, así que la preferencia individual no será tomada en cuenta. La preferencia unánime de una situación sería la mejor solución, pero esto rara vez sucedería. Así que será necesario introducir el concepto de *preferencia efectiva*. La situación  $a$  se dice que es efectivamente preferida a  $b$ , si existe un grupo dentro de las  $n$  personas que prefieren  $a$  a  $b$  y ellas juntas son capaces de imponer la preferencia de  $a$  sobre  $b$ . Nótese que

la preferencia efectiva no es transitiva. Ahora consideremos la digráfica  $D$ , con  $X$  como el conjunto de vértices de  $D$  y donde  $N^-(x)$  denota el conjunto de las situaciones efectivamente preferidas a  $x$ , i.e.  $ab$  es una flecha de  $D$  si  $b$  es efectivamente preferida sobre  $a$ . Si la digráfica  $D$  tiene un núcleo  $S$ , la selección será confinada a los elementos de  $S$ . Ya que  $S$  es independiente, ninguna situación de  $S$  es efectivamente preferida a otra de  $S$ . Y por ser absorbente, para cada situación  $x \notin S$ , existirá una situación en  $S$  que es efectivamente preferida a  $x$ , así que  $x$  puede ser inmediatamente descartado. Von Neumann y Morgenstern llamaban a  $S$  *solución*.

Ahora consideremos una *teoría*, es decir, un conjunto de proposiciones  $a, b, c, \dots$  que representaremos con vértices; añada una flecha  $ab$  si la proposición  $b$  implica la proposición  $a$ . Podemos observar que la digráfica resultante es transitiva. Una *base de axiomas* de la teoría es un conjunto  $B$  de proposiciones que llamaremos axiomas, tal que:

1. Cada proposición que no está en  $B$  se sigue de alguno de los axiomas (que están en  $B$ ).
2. Ningún axioma se sigue de otro axioma.

El conjunto  $B$  de axiomas es un núcleo de nuestra digráfica.

Posteriormente se han encontrado muchas aplicaciones:

1. En juegos tipo Nim [3]: dados los jugadores  $A$  y  $B$  y una digráfica  $D$ , podemos definir el siguiente juego: se fija un punto inicial  $x_0$ , el jugador  $A$  selecciona un vértice  $x_1$  entre el conjunto de vértices a los que les llega una flecha desde  $x_0$  (la exvecindad de  $x_0$ , denotada por  $N^+(x_0)$ ), el jugador  $B$  selecciona cualquier vértice  $x_2$  en  $N^+(x_1)$  y así sucesivamente. Pierde el primer jugador que no puede elegir un vértice. Podemos observar fácilmente que si la digráfica tiene un núcleo, entonces el jugador que escoge un elemento en el núcleo no pierde.
2. En lógica [2, 1]

3. Y recientemente en complejidad computacional, inteligencia artificial, combinatoria y teoría de códigos [13, 12, 27, 28, 29].

Aplicaciones importantes de núcleos en Teoría de Juegos se pueden encontrar en [13] y en [29].

Una digráfica  $D$  es llamada *núcleo perfecta* si cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.  $D$  es una digráfica *núcleo imperfecta crítica* si  $D$  no tiene núcleo pero cada subdigráfica inducida propia de  $D$  sí tiene núcleo. Este concepto fue motivado por la famosa conjetura de las gráficas perfectas, debida a Berge (una gráfica es *perfecta* si y sólo si no contiene un ciclo de longitud impar inducido de orden mayor o igual a 5, ni su complemento). Una *orientación de un gráfica*  $G = (V, E)$  es una digráfica  $D = (V, A)$  obtenida de orientar cada arista de  $G$ , en una o dos direcciones. Una orientación de una gráfica  $G$  es llamada *clan acíclica* si cada clan  $C$  de  $G$  tiene un núcleo. Una gráfica es llamada *núcleo soluble* si cada una de sus orientaciones clan acíclica tiene núcleo. Las gráfica núcleo soluble fueron consideradas por Berge y Duchet [4], quienes conjeturaron que las gráficas núcleo solubles y las gráficas perfectas son la misma familia.

La existencia de núcleos en digráficas ha sido el tema de más de 80 artículos. Notemos que algunas digráficas no tienen núcleo, algunas tienen varios núcleos y otras tienen un único núcleo, (Fig. 1).

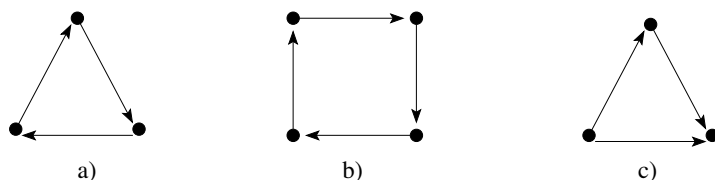


Figura 1. a) no hay núcleo, b) hay 2 núcleos y c) hay único núcleo.

Algoritmos para construir todos los núcleos de una digráfica  $D$  han sido presentados por Roy en [37] y Rundeanu en [38]. Aparte de éstos, existen muy pocos resultados algorítmicos concernientes a núcleos. En [6]

Chvátal probó que el problema de decidir si una digráfica tiene núcleo es NP-completo. Posteriormente Fraenkel [12] demostró que el problema de decidir si una digráfica tiene núcleo es NP-completo, aún para digráficas planas  $D$  con restricciones de grado  $d_D^+(x) \leq 2$ ,  $d_D^-(x) \leq 2$  y  $d(x) \leq 3$  para todo vértice  $x$ . Con esto se observa que aún en digráficas relativamente sencillas es difícil saber si tiene núcleo o no.

Uno de los resultados fundamentales dado por Berge en [2], es el siguiente:

**Teorema 1** *Si  $S$  es un núcleo de una digráfica  $D$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente maximal y absorbente minimal.*

Uno de los problemas que ha despertado un particular interés es el de establecer condiciones suficientes para que exista un núcleo en una digráfica. El siguiente teorema debido a Berge da una condición necesaria y suficiente para que un conjunto  $S \subseteq V(D)$  sea núcleo de  $D$ . Recordemos que la *función característica*  $\phi_S(x)$  de  $S$  está definida por  $\phi_S(x) = 1$ , si  $x \in S$  y  $\phi_S(x) = 0$ , si  $x \notin S$ . Si  $N^+(x) = \emptyset$ , definimos  $\max_{y \in N^+(x)} \{\phi_S(y)\} = 0$ .

**Teorema 2 (Berge, [3])** *Un conjunto  $S \subseteq V(D)$  es núcleo de la digráfica  $D$  si y sólo si su función característica  $\phi_S(x)$  satisface  $\phi_S(x) = 1 - \max\{\phi_S(y) \mid y \in N^+(x)\}$ .*

Nótese que podemos cambiar la pregunta anterior a una más general, la de establecer condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta. Una propiedad  $P$  es hereditaria si para cualquier digráfica  $D$  que cumple la propiedad  $P$ , cada subdigráfica inducida de  $D$  también cumple la propiedad  $P$ . Propiedades como la transitividad, el ser acíclica y el ser simétrica son hereditarias. Así que para mostrar que una digráfica  $D$  con una propiedad  $P$  hereditaria es núcleo perfecta, es suficiente probar que  $D$  tiene núcleo. Usando esta idea los siguientes resultados clásicos pueden ser obtenidos:

1. Una digráfica simétrica es núcleo perfecta. [2]

2. Una digráfica transitiva es núcleo perfecta y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad. (König, [24])
3. Una digráfica sin ciclos dirigidos es núcleo perfecta y su núcleo es único. (Von Neumann, [32])
4. Una digráfica sin ciclos dirigidos de longitud impar es núcleo perfecta. (Richardson, [34])

El principal resultado de este trabajo (Capítulo 1) y del cual se derivan los demás contenidos aquí, es probar que digráficas que cumplen con una propiedad en particular (la cual denotamos por  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ ) tienen núcleo y observar que esta propiedad sea hereditaria para así obtener digráficas núcleo perfectas.

Cabe mencionar que muchas extensiones del Teorema de Richardson han sido encontradas. Una importante, ya que ha sido estudiada y generalizada, es la de Duchet [8].

**Teorema 3** *Si  $D$  es una digráfica tal que cada ciclo dirigido de longitud impar tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

Otros resultados similares se muestran a continuación:

1. Si cada ciclo dirigido de longitud impar  $(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}, x_1)$  en una digráfica  $D$  tiene dos pseudodiagonales del tipo  $(x_i, x_{i+2}), (x_{i+1}, x_{i+3})$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta. (Duchet, [7]).
2. Si cada ciclo dirigido de longitud impar en una digráfica  $D$  tiene al menos dos pseudodiagonales con polos consecutivos, entonces  $D$  es núcleo perfecta. (Galeana-Sánchez y Neumann-Lara, [19]).

Sin embargo, es falso que una digráfica  $D$  tal que todos sus ciclos dirigidos de longitud impar tienen dos pseudodiagonales es núcleo perfecta (Galeana-Sánchez, [14]).

Inspirados en los resultados anteriores, en el Capítulo 2, presentamos teoremas que nos dicen cómo es la estructura de las digráficas núcleo perfectas en términos también de ciclos dirigidos de longitud impar y sus pseudodigonales.

Otros resultados ya existentes que se destacan son:

1. La unión de dos digráficas transitivas es núcleo perfecta. (Sands, Sauer, Woodrow, [39])
2. Una digráfica quasitransitiva, tal que cada clan tiene núcleo, es núcleo perfecta. [5]
3. Digráficas pretransitivas derecha o izquierda son núcleo perfectas. [8]
4. Digráficas localmente semicompletas son núcleo perfectas siempre que cada clan tenga núcleo. [5]

Como consecuencia de nuestro principal resultado que se muestra en el Capítulo 1 y siguiendo la línea de los resultados anteriores, se obtuvieron condiciones para asegurar cuándo uniones entre digráficas transitivas, asimétricamente transitivas, pretransitivas derechas e izquierdas y simétricas pueden dar como resultado digráficas núcleo perfectas (Capítulo 3).

Otros resultados relacionados con núcleos son los publicados por Richardson [35, 36], Duchet y Meyniel [10], Duchet [8, 9], Galeana-Sánchez [14], así como Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [19, 20]. Estos han dado lugar al desarrollo de muchos resultados más.

Aunque no todas las digráficas tienen núcleos, se ha demostrado que casi todas las digráficas tienen uno. Sea  $D(n, p)$  una digráfica aleatoria de  $n$  vértices, donde cada flecha dirigida  $xy$  tiene probabilidad  $p$  de estar en la digráfica. Fernández de la Vega [11] estableció el siguiente resultado:

**Teorema 4** *Sea  $p$  fijo,  $0 \leq p \leq 1$ . La probabilidad de que una digráfica aleatoria  $D(n, p)$  posea un núcleo tiende a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

Tomescu en [40] notó el mismo resultado. Mostró que casi todas las digráficas  $D$  de orden  $n$  contienen núcleos  $K$ , tal que

$$\log(n) - \log(\log(n)) - 1.43 \leq |K| \leq \log(n) - \log(\log(n)) + 2.11$$

y el número de núcleos,  $K(D)$ , de  $D$  satisface que

$$n^{0.913+O(1)} < K(D) < n^{1+O(1)}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

También se han desarrollado generalizaciones del concepto de núcleo como las de seminúcleo y seminúcleo módulo  $F$ , lo cual ha llevado a obtener condiciones más débiles pero suficientes para la existencia de núcleo en una digráfica.

Neumann-Lara en [33], introduce el concepto de seminúcleo y establece condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta. Un *seminúcleo*  $S$  de una digráfica es un conjunto de vértices independiente tal que si existe una  $(S, u)$ -flecha en  $D$ , entonces existe una  $(u, S)$ -flecha en  $D$ .

**Teorema 5 (Neumann-Lara, [33])** *Todas las subdigráficas inducidas de una digráfica tienen seminúcleo si y sólo si la digráfica es núcleo perfecta.*

Más adelante en [15], Galeana-Sánchez introduce el concepto de seminúcleo módulo  $F$ ; un *seminúcleo módulo  $F$* ,  $S$ , de una digráfica  $D$ , con  $F$  un conjunto de flechas de  $D$ , es un conjunto de vértices independiente tal que si existe una  $(S, u)$ -flecha en el complemento de  $F$ , entonces existe una  $(u, S)$ -flecha en  $D$ . Galeana-Sánchez también da condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta:

**Teorema 6 (Galeana-Sánchez, [15])** *Sean  $D$  una digráfica finita y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , tal que cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ . Si  $D$  es una digráfica  $\beta_{D_1}$ -libre, esto es, que no contiene como subdigráfica inducida a ningún elemento de la familia  $\beta_{D_1}$  (Fig. 2; las flechas etiquetadas con 1 están en  $D_1$ , las etiquetadas con 2 no están en  $D_1$  y las que no tienen etiqueta pueden estar o no en  $D_1$ ), entonces  $D$  es núcleo perfecta.*



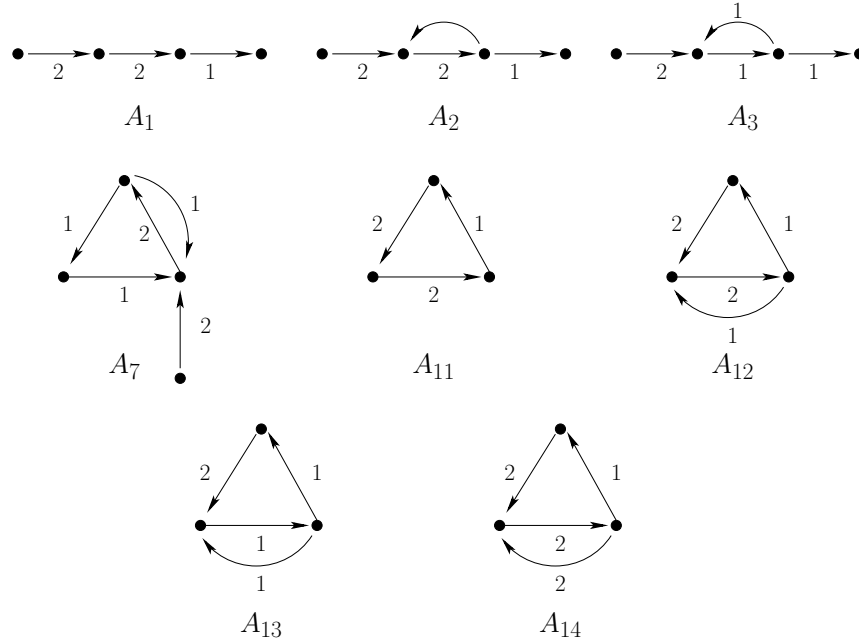


Figura 2. Familia  $\beta_{D_1}$ .

De hecho los dos teoremas anteriores son la motivación de nuestro resultado principal (Capítulo 1). En esta tesis se puede encontrar un teorema que da condiciones suficientes del tipo de los Teoremas 5 y 6 para saber cuándo una digráfica finita o infinita es núcleo perfecta, pero en términos de seminúcleos módulo  $F$ .

Chvátal y Berge conjeturaron que si  $D$  tiene núcleo, entonces la digráfica  $D^{-1}$ , que resulta de *voltear* todas las flechas de  $D$  es núcleo perfecta. Un contraejemplo fue encontrado por Duchet y Meyniel [10]. Del mismo modo Kwasnik [26, 25] y Marcu [30, 31] obtuvieron resultados concernientes a digráficas fuertemente conexas, los cuales son generalizaciones del Teorema de Richardson.

Ya que no toda digráfica tiene núcleo es también interesante preguntarse acerca de las digráficas sin núcleos, como las núcleo imperfectas críticas. El

siguiente resultado es un resultado muy interesante que envuelve digráficas núcleo imperfectas críticas y digráficas fuertemente conexas:

**Teorema 7 (Duchet, [7])** *Una digráfica núcleo imperfecta crítica es fuertemente conexa.*

Construcciones de digráficas núcleo imperfectas críticas pueden ser encontradas en [10, 20, 21]. Después del surgimiento de la *núcleo perfección* de las digráficas, muchos *graficólogos* han hecho contribuciones significantes. Entre ellos se encuentran Galeana-Sánchez y Neumann-Lara. Ellos definieron una *R-digráfica* como aquella que cada subdigráfica inducida no vacía tiene seminúcleo no vacío. Esta definición es equivalente a la de núcleo perfecta.

En [20], estos dos autores investigaron otras condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta. Ellos mostraron que la parte asimétrica de una digráfica núcleo imperfecta crítica  $D$ ,  $Asim(D)$ , es fuertemente conexa. A continuación presentamos algunos de sus resultados, reemplazando el término *R-digráfica* por el de núcleo perfecta. Estos resultados proveen evidencias de que usando composiciones ordinarias de gráficas, la familia de las núcleo perfectas puede ser extendida.

**Teorema 8** *Si  $V(D)$  tienen una bipartición  $\{V_1, V_2\}$  tal que cada  $(V_1, V_2)$ -flecha es simétrica y  $D[V_1]$  y  $D[V_2]$  son núcleo perfectas, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Teorema 9** *Una digráfica es núcleo perfecta si y sólo si para cada componente fuertemente conexa  $\alpha$  de  $Asim(D)$ ,  $D[V(\alpha)]$  es núcleo perfecta.*

**Corolario 10** *Si para cada componente fuertemente conexa  $\alpha$  de  $Asim(D)$ ,  $D[V(\alpha)]$  es bipartita, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Teorema 11 (Jacob, [23])** *Sean  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D$  digráficas tal que  $V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\}$  y  $D = D_1 \cup D_2$ . Entonces  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si  $D_1$  y  $D_2$  son núcleo perfectas.*

En fin, se ha hecho mucho en el tema de núcleos en digráficas y nuestra aportación más importante dentro de éste es el de dar condiciones más débiles de las existentes hasta ahora y que también pueden ser aplicadas a digráficas infinitas. Así que en el primer capítulo encontrará el principal resultado que se menciona anteriormente, del tipo de los obtenidos por V. Neumann-Lara [33] y H. Galeana-Sánchez [15], pero también visto desde una perspectiva mucho más general y en algunas derivaciones de este resultado verificaremos que las hipótesis pedidas sean justas, (los resultados obtenidos en este capítulo se incluyeron en los artículos de investigación [16] y [17].)

En el segundo capítulo trataremos sobre la estructura que tienen las digráficas núcleo perfectas y las núcleo imperfectas críticas. En las primeras digráficas, los resultados que se obtuvieron aunque son más débiles que los existentes a la fecha no pueden ser aplicados a digráficas infinitas y en el caso de las segundas sí se pueden aplicar a digráficas infinitas, aunque hasta el momento no se conocen si existen tales digráficas. Con el material de este capítulo se escribió el artículo [18].

Y por último, Capítulo 3, damos una recopilación de consecuencias (nuevas y ya conocidas) que se derivan del resultado principal.

Así que sólo me resta desearles una deliciosa travesía a través de los núcleos y seminúcleos. Sólo les pido un poco de paciencia, pues muchas de las veces las demostraciones han sido divididas en casos y subcasos (¡y a veces subsubcasos!), pero tanto en esas como en otras demostraciones sin casos, he intentado ir describiendo paso por paso lo que se va demostrando, buscando llevarlos así un poco de la mano para evitar que queden perdidos y tristes de no poder seguir la demostración. Espero haberlo logrado.

# Preliminares

En esta parte de la tesis presento los conceptos y notaciones que emplearemos a lo largo del trabajo, así como también resultados básicos sobre núcleos. En algunos casos, ciertas definiciones se darán justo antes de ser utilizadas, por lo que no se encuentran en este capítulo.

## 0.1. Digráficas

**Definición 0.1** Una **digráfica**  $D$  es una pareja  $(V(D), A(D))$  donde  $V(D)$  es un conjunto no vacío y  $A(D) \subseteq (V(D) \times V(D))$ . Los elementos de  $V(D)$  son los **vértices** de  $D$  y los de  $A(D)$  son las **flechas**. El **orden** de una digráfica es la cardinalidad del conjunto de vértices. Decimos que la digráfica es **finita** o **infinita** si tiene orden finito o infinito, respectivamente. En toda la tesis se consideran digráficas infinitas, a menos que se diga lo contrario, y sin flechas de la forma  $(v, v)$ , las cuales son llamadas **lazos**.

Cuando se sabe que  $v$  (resp.  $f$ ) hace referencia a un vértice (resp. una flecha)  $v \in D$  (resp.  $f \in D$ ) denotará de manera más simple que  $v \in V(D)$  (resp.  $f \in A(D)$ ). También escribiremos la flecha  $uv$  en vez de  $(u, v)$ .

Si  $f = v_1v_2 \in A(D)$ , diremos que  $f$  va de  $v_1$  a  $v_2$ , que  $f$  sale de  $v_1$  ó que  $f$  llega a  $v_2$ , también diremos que  $v_1$  y  $v_2$  son los **extremos** de  $f$  y que  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) es el punto inicial (resp. final). Dos flechas son **adyacentes** si tienen un extremo común. Si además  $v_1 \in S_1$  y  $v_2 \in S_2$ , con  $S_1, S_2 \subset V(D)$ , se dirá que  $f$  es una  $(v_1, S_2)$ -**flecha**,  $(S_1, v_2)$ -**flecha**,  $(S_1, S_2)$ -**flecha** o simplemente una

$(v_1, v_2)$ -**flecha**.

**Definición 0.2** Una flecha  $v_1v_2 \in A(D)$  es llamada **asimétrica**, (resp. **simétrica**) si  $v_2v_1 \notin A(D)$  (resp.  $v_2v_1 \in A(D)$ ).

**Definición 0.3** Dada una digráfica  $D$  y  $u \in V(D)$ , definimos la **exvecindad de  $u$**  como  $\Gamma^+(u) = \{v \in V(D) \mid uv \in A(D)\}$  y la **invecindad de  $u$**  como  $\Gamma^-(u) = \{v \in V(D) \mid vu \in A(D)\}$ . Sea  $B \subseteq V(D)$ , definimos por  $\Gamma^+(B) = \{v \in V(D) \mid \text{existe una } (B, v)\text{-flecha}\}$  a la **exvecindad de  $B$**  y por  $\Gamma^-(B) = \{v \in V(D) \mid \text{existe una } (v, B)\text{-flecha}\}$  a la **invecindad de  $B$** . Denotemos por  $\delta^+(u) = |\Gamma^+(u)|$  y  $\delta^-(u) = |\Gamma^-(u)|$ ; a  $\delta^+(u)$  y  $\delta^-(u)$  le llamaremos **exgrado** e **ingrado** de  $u$ , respectivamente, y **grado** de  $u$  a  $\delta(u) = \delta^+(u) + \delta^-(u)$ . También denotamos por  $F_u^+ = \{f \in A(D) \mid \text{existe } v \in V(D) \text{ tal que } f = uv\}$  y  $F_u^- = \{f \in A(D) \mid \text{existe } v \in V(D) \text{ tal que } f = vu\}$ .

**Definición 0.4** Sea  $D$  una digráfica. Decimos que  $H = (V(H), A(H))$  es una **subdigráfica de  $D$** ,  $H \subseteq$ , si  $\emptyset \neq V(H) \subseteq V(D)$  y  $A(H) \subseteq A(D)$ . Si  $A \subseteq V(D)$ , definimos la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $A$**  como la digráfica que tiene como conjunto de vértices a  $A$  y como conjunto de flechas a todas las flechas de  $D$  que tienen ambos extremos en  $A$ , es decir, todas las  $(A, A)$ -flechas. Denotamos por  $D[A]$  a la subdigráfica de  $D$  inducida por  $A$ . Si  $B \subseteq A(D)$ , definimos la **subdigráfica de  $D$  inducida por  $B$**  como la digráfica que tiene como vértices a los extremos de las flechas en  $B$  y como conjunto de flechas a  $B$ . Llamaremos una subdigráfica inducida de  $D$  a la subdigráfica  $H$  de  $D$ , tal que si  $u, v \in H$ , entonces  $uv \in A(H)$  si y sólo si  $uv \in A(D)$  y se denotará por  $H \subseteq^* D$ .

**Definición 0.5**  $S$  es una **subdigráfica generadora** de  $D$ , si  $S$  es una subdigráfica de  $D$  y  $V(S) = V(D)$ .

**Definición 0.6** Sea  $\mathcal{H}$  una familia finita de digráficas. Una  $\mathcal{H}$ -subdigráfica de una digráfica  $D$  es una subdigráfica inducida de  $D$  isomorfa a un miembro de  $\mathcal{H}$ . Una digráfica es  $\mathcal{H}$ -libre si no contiene ninguna  $\mathcal{H}$ -subdigráfica.

**Definición 0.7** La *parte asimétrica* de  $D$  (resp. *parte simétrica* de  $D$ ), que será denotada por  $Asim(D)$  (resp.  $Sim(D)$ ), es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas asimétricas (resp. simétricas) de  $D$ .

**Definición 0.8** Decimos que una digráfica  $D$  es una **digráfica simétrica** (resp. **digráfica asimétrica**) si todas sus flechas son simétricas (resp. asimétricas).

**Definición 0.9** Sea  $D$  una digráfica. Si  $uv, vw \in D$  implica que  $uw \in D$ , entonces decimos que  $D$  es una digráfica **transitiva**. Si  $uv, vw \in Asim(D)$  implica que  $uw \in Asim(D)$ , entonces  $D$  será llamada **asimétricamente transitiva**.

**Definición 0.10** Sean  $D$  una digráfica y  $H$  una subdigráfica de  $D$ . Definiremos a la flecha  $uv$  como una **pseudodiagonal** de la digráfica  $H$  en  $D$  si  $u, v \in V(H)$  y  $uv \in A(D) \setminus A(H)$ . Sean  $A, B \subset V(H)$ , si la flecha  $uv$  es una pseudodiagonal de  $H$ , con  $u \in A$  y  $v \in B$ , llamaremos a  $uv$  una  $(A, B)$ -pseudodiagonal.

**Definición 0.11** Un **camino**  $C$  en una digráfica  $D$  es una sucesión de vértices  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene que  $u_i u_{i+1} \in A(D)$  ó  $u_{i+1} u_i \in A(D)$ . En este caso decimos que es un  $(u_1, u_n)$ -camino de  $D$ . Decimos que  $n$  es la **longitud** de  $C$  y la denotamos por  $l(C)$ . Una **trayectoria** de  $D$  es un camino  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

Sea  $C = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  un camino en una digráfica  $D$ . Si  $0 \leq i < j \leq n$  denotamos por  $(u_i, C, u_j)$  al  $(u_i, u_j)$ -camino contenido en  $C$ , es decir,  $(u_i, C, u_j) = (u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j)$

**Definición 0.12** Un **camino cerrado** en una digráfica  $D$  es un camino  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ , tal que  $u_0 = u_n$ . Un **ciclo** de  $D$  es un camino cerrado  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_0)$  tal que  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ .

**Definición 0.13** Un **camino dirigido** en una digráfica  $D$  es un camino  $(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$ , tal que para cada  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se tiene que  $u_i u_{i+1} \in A(D)$ . Una **trayectoria dirigida** en  $D$  es un camino dirigido que además es una trayectoria. Si la trayectoria dirigida inicia en un vértice  $u_0$  es de longitud infinita, es decir, es de la forma  $(u_0, u_1, u_2, \dots)$  y  $u_i u_j \in A(D)$ , con  $i < j$ , entonces decimos que es una **trayectoria infinita exterior**. Sea  $T = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_n)$  una  $(A, B)$ -trayectoria, esto es, que  $w_0 \in A$  y  $w_n \in B$ . Decimos que  $T$  es **directa** si  $T \cap B = \{w_n\}$ .

**Definición 0.14** Un **camino dirigido cerrado** en una digráfica  $D$  es un camino dirigido que además es un camino cerrado. Un **ciclo dirigido** en  $D$  es un camino dirigido cerrado que además es un ciclo. Denotamos por  $C_n$  al ciclo dirigido de orden  $n$ .

**Definición 0.15** Una digráfica  $D$  es una **digráfica bipartita** si existe una bipartición  $\{X, Y\}$  de los vértices de  $D$  tal que cualquier flecha de  $D$  tiene un extremo en  $X$  y otro en  $Y$ .

**Definición 0.16** Una digráfica  $D$  es **conexa** o **débilmente conexa** si existe una trayectoria (no necesariamente dirigida) entre cualesquiera dos vértices de  $D$  y **fuertemente conexa** si existe una trayectoria dirigida entre cualesquiera dos vértices de  $D$ .

## 0.2. Operaciones entre digráficas

Para simplificar la escritura a lo largo de la tesis nos ayudaremos con el signo  $-$ , como sigue:

Sea  $v$  un vértice en la digráfica  $D$ .  $D-v$  denotará la subdigráfica inducida por  $V(D) \setminus \{v\}$ . Si  $A \subset V(D)$ , entonces  $D-A$  es la subdigráfica inducida por  $V(D-A) = V(D) \setminus A$ . Si  $B \subset A(D)$ , entonces  $D-B$  es la digráfica que tiene como conjunto de vértices al  $V(D)$  y como conjunto de flechas  $A(D) \setminus B$ .

Si  $D_0 \subset D$ , entonces  $D - D_0$  es la subdigráfica de  $D$ ,  $D - A(D_0)$ .

**Definición 0.17** ([20]) Sean  $D_1, D_2$  digráficas,  $v \in V(D_i)$  y  $u_i \in V(D_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Supóngase que

$$V(D_1) \cap V(D_2) = \{v\},$$

$$u_i v \in \text{Sim}(D_i) \text{ y } H_i = D_i - \{u_i v, v u_i\}, i = 1, 2.$$

Entonces definimos  $D_1 \odot D_2$  de la siguiente manera:

$$V(D_1 \odot D_2) = V(D_1) \cup V(D_2) \text{ y}$$

$$A(D_1 \odot D_2) = A(H_1) \cup A(H_2) \cup \{u_1 u_2, u_2 u_1\}.$$

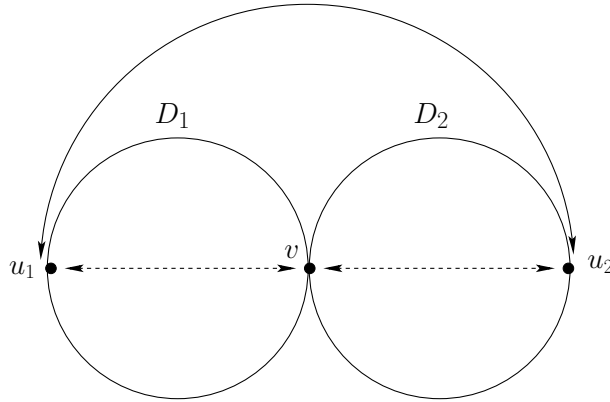


Figura 0.1.  $D_1 \odot D_2$ .

En esta primera operación  $D_1 \odot D_2$ , lo que se hace es **pegar** a las dos digráficas,  $D_1$  y  $D_2$ , en el vértice  $v$ , **quitar** a cada digráfica las flechas  $vu_i, u_i v, i = 1, 2$  y **agregarle** las flechas  $u_1 u_2$  y  $u_2 u_1$  (Fig. 0.1).

**Definición 0.18** ([20]) Si  $f = uv \in A(D)$ ,  $D(f/P_n)$  denotará la digráfica  $D'$  tal que  $D' = (D - f) \cup P_n(u, v)$ , donde  $P_n(u, v)$  es una  $(u, v)$ -trayectoria dirigida de longitud  $n - 1$ , que satisface que  $V(P_n(u, v) \cap V(D)) = \{u, v\}$ .





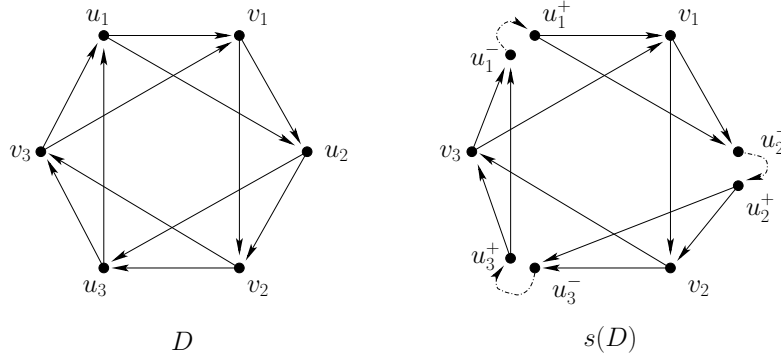


Figura 0.3.  $s(D)$ , con  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ . De  $u_i^-$  a  $u_i^+$  hay una trayectoria dirigida de longitud par.

En esta última operación un vértice  $u$  se **parte** en dos vértices,  $u^+$  y  $u^-$ , las flechas que le llegaban a  $u$  ahora le llegan a  $u^-$  y las flechas que le salían a  $u$  ahora salen de  $u^+$  y se añade una trayectoria dirigida de longitud par de  $u^-$  a  $u^+$  (Fig. 0.3).

### 0.3. Núcleos

**Definición 0.20** Sean  $D$  una digráfica e  $I \subseteq V(D)$ . Se dice que  $I$  es **independiente** si para cualesquiera dos vértices  $x, y \in I$ ,  $xy, yx \notin A(D)$ . Y se le llama **absorbente** si para cada  $x \in V(D) \setminus I$  existe una  $(x, I)$ -flecha.

**Definición 0.21 (Von Neumann, Morgenstern, [32])** Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ .  $S$  es un **núcleo** de  $D$  si  $S$  es independiente y absorbente.

Berge probó lo siguiente:

**Proposición 0.22 (Berge, [3])** Un núcleo es independiente maximal y absorbente minimal.

**Definición 0.23** (Neumann-Lara, [33]) Sean  $D$  una digráfica y  $S \subseteq V(D)$ .  $S$  es un **seminúcleo**, si satisface lo siguiente:

1.  $S$  es independiente y
2. Si existe una  $(S, x)$ -flecha, con  $x \in V(D) \setminus S$ , entonces existe una  $(x, S)$ -flecha.

**Definición 0.24** (Galeana-Sánchez, [15]) Sean  $D$  una digráfica y  $F$  un subconjunto de  $A(D)$ .  $S \subset V(D)$  es un **seminúcleo módulo  $F$** , si se satisface lo siguiente:

1.  $S$  es independiente y
2. Si existe una  $(S, x)$ -flecha en  $A(D) \setminus F$ , con  $x \in V(D) \setminus S$ , entonces existe una  $(x, S)$ -flecha en  $D$ .

Se puede observar que un núcleo de una digráfica  $D$  es seminúcleo de la digráfica, porque todos los vértices fuera del núcleo son absorbidos, en particular aquellos a los que les llega una flecha desde el núcleo. También se puede observar que un seminúcleo de  $D$  es también seminúcleo módulo  $F$  de  $D$ , con  $F$  cualquier conjunto de flechas, porque a todos los vértices fuera del seminúcleo que les llega una flecha desde el seminúcleo, en particular a los que les llega una flecha que no está en  $F$ , son absorbidos por el seminúcleo. El conjunto de flechas  $F$  son precisamente las flechas que **estorban** para que el seminúcleo módulo  $F$  sea un seminúcleo, pues sus vértices finales son precisamente los que no sabemos si son absorbidos o no. Así que si se remueven las flechas de  $F$  en  $D$ , los seminúcleos módulo  $F$  son seminúcleos de la nueva digráfica.

**Definición 0.25** Diremos que una digráfica  $D$  es **núcleo perfecta**, si toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un núcleo.

Neumann-Lara demostró el siguiente teorema, dando así otra definición de digráfica núcleo perfecta:

**Teorema 0.26 ([33])** *D es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida de D tiene un seminúcleo no vacío.*

**Definición 0.27** *Una digráfica D es núcleo imperfecta crítica si cada subdigráfica inducida propia de D tiene un núcleo, pero D no tiene núcleo.*

**Teorema 0.28 ([20])** *Si  $D_1$  y  $D_2$  son dos digráficas núcleo imperfectas críticas, entonces la digráfica  $D_1 \ominus D_2$  núcleo imperfecta crítica.*

**Teorema 0.29 ([20])** *Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica y n es par, entonces  $D(f/P_n)$  es núcleo imperfecta crítica.*

**Teorema 0.30 ([21])** *Si D es núcleo imperfecta crítica, entonces  $s(D)$  también es núcleo imperfecta crítica.*

**Teorema 0.31 ([19])** *Si cada ciclo dirigido de la digráfica D tiene una flecha simétrica, es decir, si no hay ciclos dirigidos en la parte asimétrica, entonces D es núcleo perfecta.*

Denotaremos por  $\vec{C}_n(j_1, j_2, j_3, \dots, j_k)$  a la digráfica con conjunto de vértices  $V(\vec{C}_n(j_1, j_2, j_3, \dots, j_k)) = \{0, 1, \dots, n-1\}$  y conjunto de flechas  $A(\vec{C}_n(j_1, j_2, j_3, \dots, j_k)) = \{(u, v) \mid v - u \equiv j_s \pmod{n}, s = 1, 2, \dots, k\}$ . [20]

**Teorema 0.32 ([20])** *Las digráficas  $\vec{C}_n(1, 2, 3, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, -2, -3, \dots, -\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  son digráficas núcleo imperfectas críticas para  $n \geq 4$ .*

## 0.4. Ordenes parciales

**Definición 0.33** *Un conjunto parcialmente ordenado,  $(A, R)$ , es un conjunto A con una relación de orden R que cumple:*

**Reflexividad.**  $(a, a) \in R$ , para toda  $a \in A$ .

**Antisimetría.** Si  $\{(a, b), (b, a)\} \subseteq R$ , entonces  $a = b$ .

**Transitividad.** Si  $\{(a, b), (b, c)\} \subseteq R$ , entonces  $(a, c) \in R$ .

Si tenemos un subconjunto  $B$  de un conjunto parcialmente ordenado  $A$ , se puede observar que  $B$  es también un conjunto parcialmente ordenado con el mismo orden parcial.

**Definición 0.34** Sea  $A$  un conjunto parcialmente ordenado con la relación  $\leq$  y  $B \subseteq A$ .  $x \in B$  es un **elemento maximal** de  $B$  si no existe  $y \in B$  tal que  $x \leq y$  y  $x \neq y$ . Una **cota superior** de  $B$  es un elemento  $z \in A$ , tal que  $x \leq z$  para todo  $x \in B$ . Una **cadena**  $C$  de  $A$  es un conjunto de elementos de  $A$ , tal que si  $a, b \in C$ , entonces  $a \leq b$  ó  $b \leq a$ .

**Lema 0.35 (Lema de Zorn)** Sea  $A$  un conjunto no vacío con un orden parcial  $R$ . Si toda cadena  $C$  tiene cota superior, entonces  $A$  tiene un elemento maximal bajo el orden  $R$ .

**Proposición 0.36** Sea  $(A, R)$  un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena tiene cota superior, entonces para todo  $a \in A$  existe  $b \in A$  maximal tal que  $(a, b) \in R$ .

**Demostración.** Sea  $a \in A$ . Supongamos que  $a$  es elemento maximal de  $(A, R)$ , entonces tenemos que  $(a, a) \in R$ , pues  $R$  es reflexiva y así concluimos. Si  $a$  no es elemento maximal, sea  $\Omega = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}$ . Sea  $C$  una cadena de  $\Omega \subseteq A$ , por lo tanto tiene cota superior  $z \in A$ , es decir,  $(b, z) \in R$ , para toda  $b \in C \subset \Omega$ . Por el Lema de Zorn 0.35 sabemos que  $\Omega$  tiene elemento maximal  $z^*$ .

$z^*$  es elemento maximal de  $A$ , de lo contrario  $w \in A$ , tal que  $(z^*, w) \in R$ . Pero como  $z^* \in \Omega$ , se tiene que  $(a, z^*) \in R$ . Por lo tanto  $(a, w) \in R$ , lo que implica que  $w \in \Omega$ , esto contradice la maximalidad de  $z^*$ .

■

## Capítulo 1

# Nuevas condiciones suficientes para la existencia de núcleos

Dentro de la teoría de núcleos, uno de los problemas principales es poder caracterizar digráficas que son núcleo perfectas. En 1971 V. Neumann-Lara, [33], ofreció condiciones suficientes para determinar cuándo una digráfica era núcleo perfecta en términos de *seminúcleos*, un concepto más débil que núcleo. Este resultado ha sido la base para otros más, como por ejemplo [15]. En [15], H. Galeana-Sánchez definió el concepto de *seminúcleo módulo  $F$* , similar a los de núcleo y seminúcleo, pero aún más débil y dio condiciones suficientes para decidir cuándo una digráfica finita es núcleo perfecta en términos de seminúcleo módulo  $F$ .

En este capítulo se generaliza el resultado de H. Galeana-Sánchez para digráficas infinitas y se obtiene así también un teorema base (Teo. 1.15) con condiciones suficientes más débiles que las dadas en [15, 33].

### 1.1. Definiciones y notaciones

Si  $D_1$  es una subdigráfica de  $D$  denotaremos de aquí en adelante por  $D_2$  a la subdigráfica de  $D$ ,  $D - D_1$ . Escribiremos  $u \xrightarrow{i} v$  (resp.  $u \xrightarrow{i} v$ ) para denotar que  $uv \in A(D_i)$  (resp.  $uv \notin A(D_i)$ ),  $i = 1, 2$ . Diremos que una flecha simétrica  $uv$  es del **tipo**  $i/j$ , si  $u \xrightarrow{i} v$  y  $v \xrightarrow{j} u$ . Denotamos por  $\beta_{D_1}$  a la familia de digráficas  $\{A_1, A_2, A_3, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}\}$  (Fig. 1.1) y por  $\Gamma_{D_1}$  a  $\beta_{D_1} \cup \{A_4, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}\}$  (Fig. 1.2).

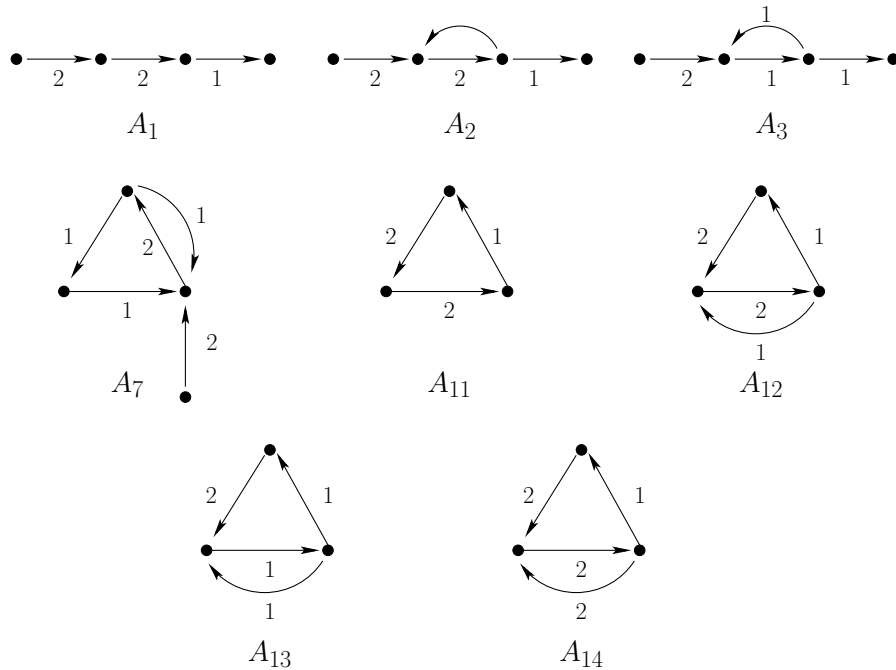


Figura 1.1. Familia  $\beta_{D_1}$ .

Nótese que  $\beta_{D_1} \subset \Gamma_{D_1}$  y que las flechas están etiquetadas con 1, 2 ó no lo están.

**Observación 1.1** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ . Más adelante se trabajará con digráficas  $D$ ,  $\beta_{D_1}$  ó  $\Gamma_{D_1}$ -

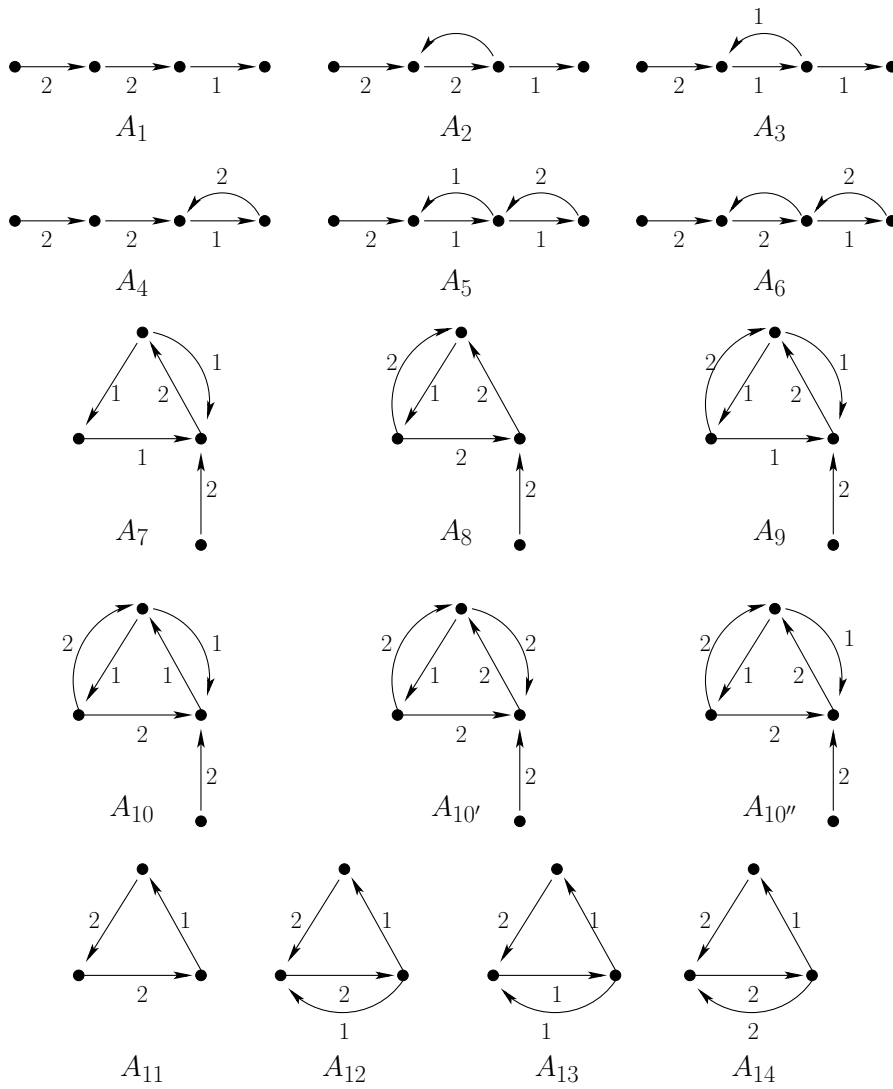


Figura 1.2. Familia  $\Gamma_{D_1}$ .



libre (véase la Definición 0.6). Las flechas etiquetadas con 1 se encuentran contenidas en la digráfica  $D_1$ , aquellas etiquetadas con 2 en la digráfica  $D_2 = D - D_1$  y las que no están etiquetadas pueden estar en  $D_1$  ó  $D_2$ .

**Notación 1.2** Sean  $D$  una digráfica,  $D_1$  una subdigráfica de  $D$  y  $S$  un subconjunto del conjunto de vértices de  $D$ . Entonces definimos el siguiente conjunto:

$$B_S = \{v \in V(D) \setminus S \mid \text{no existe una } (v, S)\text{-flecha en } D\}$$

y definimos  $T_S^{S'}$  como:

$$T_S^{S'} = \{v \in S \mid \text{no existe una } (v, S')\text{-flecha en } D_1 \text{ con } S' \text{ un seminúcleo módulo } A(D_1) \text{ de } B_S\}.$$

Denotaremos por  $\alpha_{D_1}$  el conjunto de todos los seminúcleos no vacíos módulo  $A(D_1)$ , con  $D_1 \subset D$ .

**Definición 1.3** Decimos que una digráfica  $D$  cumple la **Propiedad  $\mathbf{P}(\alpha_{D_1}, \leq)$** , si existe una subdigráfica,  $D_1$ , de  $D$  tal que se satisface las siguientes condiciones:

- i) Existe un orden parcial,  $\leq$ , en el conjunto de conjuntos independientes de vértices de  $D$ .
- ii) El conjunto de seminúcleos módulo  $A(D_1)$ ,  $\alpha_{D_1}$ , con el orden parcial  $\leq_{D_1}$  tiene un elemento maximal.
- iii) Si  $S \in \alpha_{D_1}$ , pero no es núcleo, es decir,  $B_S \neq \emptyset$  y  $S'$  un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ , entonces  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y  $T_S^{S'} \cup S' > S$ .
- iv) Si  $S_0 \in \alpha_{D_1}$  es maximal, entonces para cada  $S < S_0$ ,  $S \subset S_0 \cup \Gamma^-(S_0)$ .

**Definición 1.4** Sean  $D$  una digráfica,  $D_1$  una subdigráfica de  $D$  y  $A, B \subset V(D)$ . Definimos la relación  $\preceq_{D_1}$  en el conjunto de subconjuntos de  $V(D)$  de

la siguiente manera:  $A \preceq_{D_1} B$  si y sólo si para cada  $a \in A$  existe  $b \in B$ , tal que  $a = b$  ó  $(a \xrightarrow{1} b \text{ y } b \not\xrightarrow{1} a)$ . Obsérvese que para este orden en particular se usa el símbolo  $\preceq_{D_1}$ . Cuando se haga referencia a cualquier orden en general se usará el símbolo  $\leq$ .

**Lema 1.5** Sea  $D$  una digráfica. Si  $D_1$  es una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , entonces  $(\alpha_{D_1}, \preceq_{D_1})$  es un conjunto parcialmente ordenado.

**Demostración.**

i) **Reflexividad.**  $S \preceq_{D_1} S$  pues  $S \subseteq S$  y entonces para cada  $a \in S$ , existe  $b = a \in S$ .

ii) **Antisimetría.** Supongamos que  $S \preceq_{D_1} S'$  y  $S' \preceq_{D_1} S$ . Probaremos que  $S = S'$ , para esto demostraremos que  $S \subseteq S'$  y  $S' \subseteq S$ . Sea  $s \in S$ , entonces existe  $s' \in S'$  tal que (a)  $s = s'$  ó (b)  $s \xrightarrow{1} s'$  y  $s' \not\xrightarrow{1} s$ . (a) implica que  $s \in S'$ . Si sucede (b) como  $S' \preceq_{D_1} S$ , entonces existe  $s'' \in S$  tal que (c)  $s' = s''$  ó (d)  $s' \xrightarrow{1} s''$  y  $s'' \not\xrightarrow{1} s'$ . Obsérvese que  $s \neq s''$  porque  $s \xrightarrow{1} s'$ . (b) y (c) implican que  $s \xrightarrow{1} s''$  que contradice que  $S$  es independiente ( $S \in \alpha_{D_1}$ ) pues  $\{s, s''\} \subseteq S$ . Si sucede (d), entonces se tiene que  $s \xrightarrow{1} s'$  y  $s' \xrightarrow{1} s''$  pero  $s'' \not\xrightarrow{1} s'$  y  $s' \not\xrightarrow{1} s$  y como  $D_1$  es asimétricamente transitiva se tiene que  $s \xrightarrow{1} s''$ , lo que contradice que  $S$  es independiente, obsérvese que  $\{s, s''\} \subseteq S$  (Fig. 1.3), por lo tanto  $S \subseteq S'$ . De manera análoga se tiene que  $S' \subseteq S$ .

iii) **Transitividad.** Supongamos que  $S_1 \preceq_{D_1} S_2$  y  $S_2 \preceq_{D_1} S_3$ . Probaremos que  $S_1 \preceq_{D_1} S_3$ . Sea  $s_1 \in S_1$ , como  $S_1 \preceq_{D_1} S_2$  existe  $s_2 \in S_2$  tal que (a)  $s_1 = s_2$  ó (b)  $s_1 \xrightarrow{1} s_2$  y  $s_2 \not\xrightarrow{1} s_1$  y como  $S_2 \preceq_{D_1} S_3$  existe  $s_3 \in S_3$  tal que (c)  $s_2 = s_3$  ó (d)  $s_2 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \not\xrightarrow{1} s_2$ . Si sucede (a) concluimos, pues tenemos que  $s_1 = s_3$  ó  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \not\xrightarrow{1} s_1$ . Si ocurre (b) puede pasar que se cumpla (c) ó que se cumpla (d). Si sucede (b) y (c) se cumple que  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \not\xrightarrow{1} s_1$  por ser  $s_3 = s_2$ . Si sucede (b) y (d), como  $D_1$  es asimétricamente transitiva, se tiene que  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \not\xrightarrow{1} s_1$ . Por lo tanto  $S_1 \preceq_{D_1} S_3$  (Fig. 1.4).

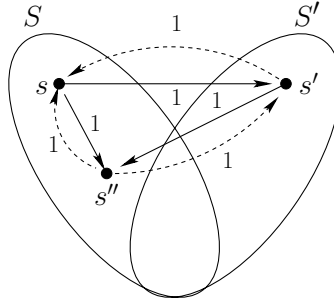


Figura 1.3. Las flechas continuas con etiqueta 1 están en  $D_1$  y las flechas punteadas con etiqueta 1 no están en  $D_1$ .

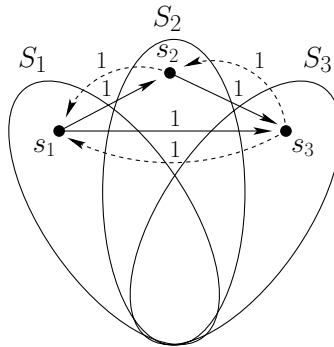
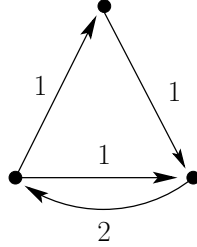


Figura 1.4. Las flechas continuas con etiqueta 1 están en  $D_1$  y las flechas punteadas con etiqueta 1 no están en  $D_1$ .

■

**Definición 1.6** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica de  $D$ . Definimos la relación  $\lesssim_{D_1}$  entre los subconjuntos de  $V(D)$  como sigue: sea  $A, B \subseteq V(D)$ , decimos que  $A \lesssim_{D_1} B$  si y sólo si para cada  $a \in A$  existe  $b \in B$  tal que (a)  $a = b$  ó (b)  $a \xrightarrow{1} b$  y  $ba \notin A(D)$ .

Figura 1.5.  $A_{15}$ .

**Lema 1.7** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D_1$  es una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , tal que  $D$  sea  $\{A_{15}\}$ -libre (Fig. 1.5), entonces  $\lesssim_{D_1}$  es un orden parcial en el conjunto de los independientes de  $V(D)$ .*

**Demostración.**

1. Reflexividad.  $S \lesssim_{D_1} S$ , ya que  $S \subseteq S$ .
2. Antisimetría. Supongamos que  $S \lesssim_{D_1} S'$  y  $S' \lesssim_{D_1} S$ . Sea  $s \in S$ , así que existe  $s' \in S'$  tal que (a)  $s = s'$  ó (b)  $s \xrightarrow{1} s'$  y  $s's \notin A(D)$ . (a) implica que  $s \in S'$ . Y si sucede (b) (recuérdese que  $S' \lesssim_{D_1} S$ ), entonces existe  $s'' \in S$  tal que (c)  $s' = s''$  ó (d)  $s' \xrightarrow{1} s''$  y  $s''s' \notin A(D)$ . (b) y (c) implican que  $s \xrightarrow{1} s''$  que contradice la independencia de  $S$ , ya que  $s, s'' \in S$ . Si se tiene (b) y (d), entonces  $s \xrightarrow{1} s'$  y  $s' \xrightarrow{1} s''$  y  $s''s', s's \notin A(D)$  y por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva, tenemos que  $s \xrightarrow{1} s''$  lo que contradice la independencia de  $S$ , recordemos que  $s, s'' \in S$  (Fig. 1.6), por lo tanto  $S \subset S'$ . Análogamente se tiene que  $S' \subset S$ .
3. Transitividad. Supongamos que  $S_1 \lesssim_{D_1} S_2$  y  $S_2 \lesssim_{D_1} S_3$ . Sea  $s_1 \in S_1$ , como  $S_1 \lesssim_{D_1} S_2$ , existe  $s_2 \in S_2$  tal que (a)  $s_1 = s_2$  ó (b)  $s_1 \xrightarrow{1} s_2$  y  $s_2s_1 \notin A(D)$  y ya que  $S_2 \lesssim_{D_1} S_3$ , existe  $s_3 \in S_3$  tal que (c)  $s_2 = s_3$  ó (d)  $s_2 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3s_2 \notin A(D)$ . Si tenemos (a), entonces  $s_1 = s_3$  ó  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3s_1 \notin A(D)$ . Si se tiene (b) y (c), entonces  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$

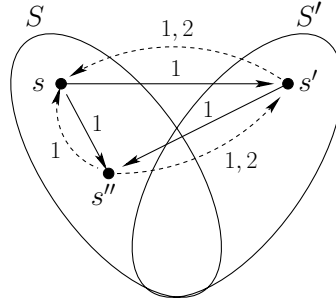


Figura 1.6. Las flechas continuas con etiqueta 1 están en  $D_1$  y las flechas punteadas no están en  $D$ , es decir, no están ni en  $D_1$ , ni en  $D_2$ .

y  $s_3 s_1 \notin A(D)$ . Si se cumple (b) y (d), entonces se tiene que  $s_1 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \xrightarrow{1} s_1$  por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva y más aún  $s_3 \xrightarrow{2} s_1$ , pues de lo contrario  $D[\{s_1, s_2, s_3\}] \cong A_{15}$ , lo que contradice la hipótesis de que  $D$  es  $A_{15}$ -libre, por lo tanto  $S_1 \lesssim_{D_1} S_3$  (Fig. 1.7).

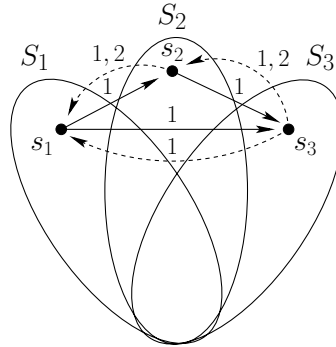


Figura 1.7. Las flechas continuas con etiqueta 1 están en  $D_1$  y las flechas punteadas no están en  $D$ , es decir, no están ni en  $D_1$ , ni en  $D_2$ .

■

**Definición 1.8** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica de  $D$ . Llamaremos por  $H(k, D_1)$ ,  $k = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''$ , a la subdigráfica de  $D$  que satisface lo siguiente:

$$V(H(k, D_1)) = \{t\} \cup \{s_1^*, s_2^*, s_3^* \dots\} \cup \{x_1, x_2, x_3 \dots\}$$

donde

$$t \notin \{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\} \cup \{x_1, x_2, x_3 \dots\},$$

$$\{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\} \cap \{x_1, x_2, x_3 \dots\} = \emptyset$$

y

$$D[\{s_1^*, t, x_i, s_{i+1}^*\}] \cong A_k \in \Gamma_{D_1} \setminus \beta_{D_1}$$

Donde las flechas etiquetadas con 1 (resp. 2) se encuentran contenidas en la digráfica  $D_1$  (resp.  $D_2 = D - D_1$ ), las que no están etiquetadas pueden estar en  $D_1$  ó  $D_2$  y  $(s_1^*, t, x_i, s_{i+1}^*)$  es la trayectoria de longitud máxima de  $A_k$  (véase ejemplos en Fig. 1.8) y con las siguientes propiedades:

- $\{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\}$  es independiente en  $D$ .
- $x_i s_j^* \notin A(D)$ , con  $i \geq j$ .
- $s_i^* x_j \notin A(D)$ , con  $i \leq j$ .
- $t s_i^* \notin A(D)$ .
- $x_i x_j \notin \text{Asim}(D_1)$ , con  $i > j$ .
- $s_i^* x_j \notin \text{Asim}(D_1)$ , con  $i > j$ .

Llamaremos a  $\{s_1^*, t, x_i, s_{i+1}^*\}$  la  $i$ -ésima rama de  $H(k, D_1)$  y a  $\{x_i, s_{i+1}^*\}$  la  $i$ -ésima subrama de  $H(k, D_1)$ .

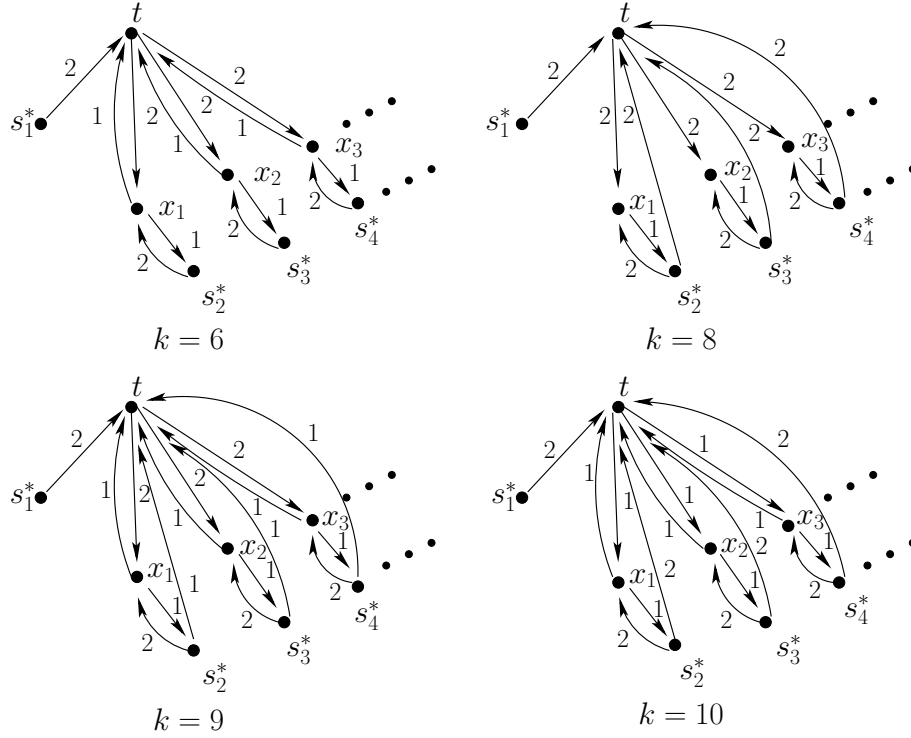


Figura 1.8. Ejemplos de  $H(k, D_1)$ , con  $k = 6, 8, 9, 10$ .

## 1.2. Digráficas núcleo perfectas

**Teorema 1.9** *Sea  $D$  una digráfica. Si  $D_1$  es una subdigráfica de  $D$  tal que se satisface (i)-(iii) de la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ , entonces  $D$  tiene núcleo.*

**Demostración.**

Supongamos por contradicción que  $D$  no tiene núcleo. Sea  $S_0$  un elemento maximal de  $(\alpha_D, \leq)$ , entonces, como  $D$  no tiene núcleo,  $B_{S_0} \neq \emptyset$ , así que la subdigráfica inducida por  $B_{S_0}$  tiene un seminúcleo,  $S'$ , no vacío módulo  $A(D_1)$ . Como  $D$  cumple (iii) de la Propiedad  $P(\alpha_D, \leq)$  se tiene que  $T_{S_0} \cup S'$

es un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  y  $T_{S_0} \cup S' > S$ , que contradice la maximalidad de  $S$ .

■

**Lema 1.10** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ . Si  $D$  no tiene trayectorias infinitas exteriores en  $Asim(D_1)$  y  $X = (v_1, v_2, v_3, \dots)$  es una sucesión infinita de vértices de  $D$ , entonces existe una subsucesión infinita  $Y = (v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots)$  tal que  $v_{i_j} v_{i_k} \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ , para cualquier  $i_j, i_k$ , con  $i_j < i_k$ .

### Demostración.

Se demostrará primero que existe  $i_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $v_{i_1} v_j \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ , para cada  $j$ , con  $i_1 < j$ . Supóngase por contradicción que para cada  $i \in \mathbb{N}$ , existe  $j$ , tal que  $j > i$  y  $v_i v_j \in A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Sea  $v_{l_0} \in X$ , entonces existe  $v_{l_1} \in X$ , tal que  $v_{l_0} v_{l_1} \in A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Luego existe  $v_{l_2} \in X$ , tal que  $v_{l_1} v_{l_2} \in A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Así sucesivamente obtenemos una sucesión  $(v_{l_0}, v_{l_1}, v_{l_2}, \dots)$ .

Afirmamos que  $v_{l_i} \xrightarrow{1} v_{l_j}$  y  $v_{l_j} \not\xrightarrow{1} v_{l_i}$  para toda  $l_i < l_j$ . Fijemos  $i$  y haremos la demostración por inducción sobre  $j$ .

Si  $j = i + 1$ , entonces la afirmación se sigue de que  $(v_{l_0}, v_{l_1}, v_{l_2}, \dots) \in A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Supongamos que  $v_{l_i} \xrightarrow{1} v_{l_t}$  y  $v_{l_t} \not\xrightarrow{1} v_{l_i}$ , con  $t > i + 1$ . Por demostrar que  $v_{l_i} \xrightarrow{1} v_{l_{t+1}}$  y  $v_{l_{t+1}} \not\xrightarrow{1} v_{l_i}$ . Sabemos que  $v_{l_t} \xrightarrow{1} v_{l_{t+1}}$  y  $v_{l_{t+1}} \not\xrightarrow{1} v_{l_t}$  y como  $D_1$  es asimétricamente transitiva, tenemos que  $v_{l_i} \xrightarrow{1} v_{l_{t+1}}$  y  $v_{l_{t+1}} \not\xrightarrow{1} v_{l_i}$ .

Ahora probaremos que la sucesión  $(v_{l_0}, v_{l_1}, v_{l_2}, \dots)$  es una trayectoria. Supongamos lo contrario, que existe  $v_{l_j}$  tal que  $v_{l_j} = v_{l_i}$ , con  $l_i < l_j$ , tenemos que  $v_{l_{j-1}} \xrightarrow{1} v_{l_j} = v_{l_i}$ . Obsérvese que  $l_j \neq l_i + 1$ , ya que recordemos que nuestras digráficas no tienen lazos, por lo cual podemos suponer que  $l_i < l_j - 1$  y por la afirmación anterior  $v_{l_j} = v_{l_i} \xrightarrow{1} v_{l_{j-1}}$  y  $v_{l_{j-1}} \not\xrightarrow{1} v_{l_i} = v_{l_j}$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto la sucesión  $(v_{l_0}, v_{l_1}, v_{l_2}, \dots)$  es una trayectoria, pero esto contradice la hipótesis de que no hay trayectorias



infinitas exteriores contenidas en  $Asim(D_1)$ . Por lo tanto existe un vértice  $v_{k_1} \in X$  tal que para cada  $j > k_1$ ,  $v_{k_1}v_j \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ .

Ahora tomemos la sucesión infinita de vértices  $X_{k_1} = \{v_{k_1+1}, v_{k_1+2}, \dots\}$ . Análogamente a como se encontró en la sucesión  $X$  el vértice  $v_{k_1}$ , tal que para cada  $j > k_1$ ,  $v_{k_1}v_j \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ , podemos encontrar en la sucesión  $X_{k_1}$ , un vértice  $v_{k_2}$  tal que para cada  $j > k_2$ ,  $v_{k_2}v_j \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Sea  $X_{k_2} = \{v_{k_2+1}, v_{k_2+2}, \dots\}$ . De manera análoga, encontramos un vértice  $v_{k_3} \in X_{k_2}$ , tal que para cada  $j > k_3$ ,  $v_{k_3}v_j \notin A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ . Si continuamos de esta manera obtenemos una subsucesión  $Y = (v_{k_1}, v_{k_2}, v_{k_3}, \dots)$  con las propiedades requeridas. ■

**Teorema 1.11** *Sea  $D$  una digráfica  $\beta_{D_1}$ -libre (Fig. 1.1), con  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , sin trayectorias infinitas exteriores en  $Asim(D_1)$  y  $\alpha_{D_1} \neq \emptyset$ . Si cada subdigráfica de  $D$  isomorfa a  $H(k, D_1)$ , para alguna  $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$  tiene una pseudodiagonal en  $A(Asim(D)) \cap A(D_1)$ , entonces  $D$  satisface la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ .*

**Demostración.** Antes de comenzar, daremos un esquema de la demostración el cual nos servirá como un pequeño mapa y poder localizarnos en qué punto de la prueba nos encontramos.

Para demostrar que se cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  hay que probar lo siguiente:

- i) Existe un orden parcial.
- ii) El conjunto parcialmente ordenado tiene un elemento maximal. Para esto usaremos el Lema de Zorn: tomamos una cadena  $C$  no vacía y demostraremos que tiene una cota superior  $S^*$ , es decir, probaremos que:

I)  $S^* \geq S$ , para toda  $S \in C$ . Para probar esto se usa la hipótesis de que no hay trayectorias infinitas exteriores en  $Asim(D_1)$ .

- II)  $S^* \neq \emptyset$ .
- III)  $S^* \in \alpha_{D_1}$ .
- a)  $S^*$  es independiente.
- b) Si existe una  $(S^*, t)$ -flecha en  $D_2$ , con  $t \in V(D) \setminus S^*$ , entonces existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ . En esta parte de la demostración se usan las hipótesis de que  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre y que cada subdigráfica  $H(k, D_1)$  tiene una pseudodiagonal en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ .
- iii) Si  $S \in \alpha_{D_1}$  es un elemento maximal pero no núcleo, entonces  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y  $T_S^{S'} \cup S' > S$ .
- I)  $T_S^{S'} \cup S' \in \alpha_{D_1}$ .
- a)  $T_S^{S'} \cup S'$  es independiente.
- b) Si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', t)$ -flecha en  $D_2$ , con  $t \in V(D) \setminus T_S^{S'} \cup S'$ , entonces existe una  $(t, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha en  $D$ . Aquí nuevamente verificamos que  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre.
- II)  $T_S^{S'} \cup S' \geq S$ .
- III)  $T_S^{S'} \cup S' \neq S$ .
- iv) Si  $S_0 \in \alpha_{D_1}$  es maximal, entonces para cada  $S < S_0, S \subset S_0 \cup \Gamma^-(S_0)$ .

Ahora sí, iniciemos la demostración del Teorema 1.11:

- i) Por el Lema 1.5 sabemos que  $\alpha_{D_1}$  con el orden  $\preceq_{D_1}$  es un conjunto parcialmente ordenado.
- ii) El conjunto parcialmente ordenado  $(\alpha_{D_1}, \preceq_{D_1})$  tiene un elemento maximal. Para esto probaremos que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \preceq_{D_1})$  tiene cota superior y por el Lema de Zorn sabemos que tiene un elemento maximal. Basta probarlo para cadenas no vacías, ya que la cadena vacía es acotada por cualquier elemento de  $\alpha_{D_1}$ .

Sea  $\mathbf{C}$  una cadena de  $\alpha_{D_1}$ . Demostraremos que existe  $S^* \in \alpha_{D_1}$  tal que para toda  $T \in \mathbf{C}$ , se cumple que  $T \preceq_{D_1} S^*$ .

Definimos

$$S^* = \left\{ s \in \bigcup_{U \in \mathbf{C}} U \mid \text{existe } S \in \mathbf{C} \text{ tal que } s \in S \text{ y para toda } T \in \mathbf{C} \text{ con } S \preceq_{D_1} T \text{ se tiene que } s \in T \right\}$$

I)  $S \preceq_{D_1} S^*$  para toda  $S \in \mathbf{C}$ .

Sea  $S \in \mathbf{C}$ . Probaremos que para cada  $s \in S$  existe un  $s^* \in S^*$ , tal que sucede (a)  $s = s^*$  ó (b)  $s \xrightarrow{1} s^*$  y  $s^* \xrightarrow{1} s$  (Fig 1.9).

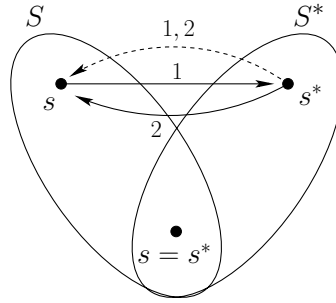


Figura 1.9. La flecha continua etiquetada con 1 representa una flecha que está en  $D_1$ , aquella etiquetada con 2 está en  $D_2$  y la flecha punteada no está en  $D$ , es decir, ni en  $D_1$ , ni en  $D_2$ .

Sea  $s \in S$ . Si  $s \in S^*$ , se cumple (a).

Si  $s \notin S^*$  se sigue de la definición de  $S^*$  que existe  $S_1 \in \mathbf{C}$ , tal que  $S \preceq_{D_1} S_1$  y  $s \notin S_1$ , entonces existe  $s_1 \in S_1$ , tal que  $s \xrightarrow{1} s_1$  y  $s_1 \xrightarrow{1} s$ . Si  $s_1 \in S^*$ , entonces se cumple (b) (Fig. 1.10).

Si  $s_1 \notin S^*$ , existe  $S_2 \in \mathbf{C}$ , tal que  $S_1 \preceq_{D_1} S_2$  y  $s_1 \notin S_2$ . Así que existe  $s_2 \in S_2$ , tal que  $s_1 \xrightarrow{1} s_2$  y  $s_2 \xrightarrow{1} s_1$  y como  $D_1$  es asimétricamente transitiva, se tiene que  $s \xrightarrow{1} s_2$  y  $s_2 \xrightarrow{1} s$ . Si  $s_2 \in S^*$ , entonces se cumple (b) (Fig. 1.11).

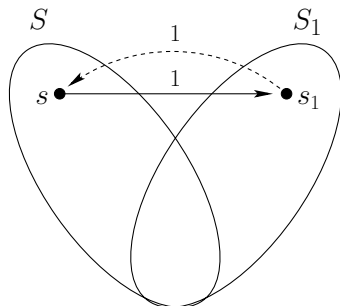


Figura 1.10. La flecha continua etiquetada con 1 está en  $D_1$  y la punteada no está en  $D_1$ .

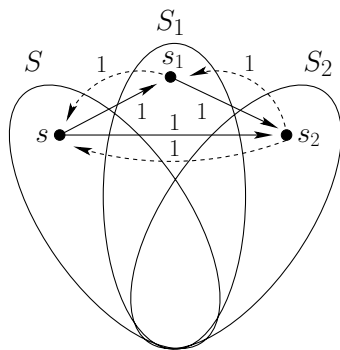


Figura 1.11.

Si  $s_2 \notin S^*$ , existe  $S_3 \in \mathbf{C}$ , tal que  $S_2 \preceq_{D_1} S_3$  y  $s_2 \notin S_3$ . Entonces existe  $s_3 \in S_3$  tal que  $s_2 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \xrightarrow{1} s_2$  y como  $D_1$  es asimétricamente transitiva, se tiene que  $s \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \xrightarrow{1} s$ . Si  $s_3 \in S^*$ , entonces se cumple (b) (Fig. 1.12).

Al continuar este procedimiento se obtienen las siguientes sucesiones de vértices:  $X = (s, s_1, s_2, s_3, \dots)$  tal que  $ss_1, s_1s_2, \dots \in \text{Asim}(D_1)$ , con  $i = 1, 2, \dots$

Probaremos ahora que  $s_i \xrightarrow{1} s_j$  y  $s_j \xrightarrow{1} s_i$  para toda  $i < j$ . Fijemos  $i$  y

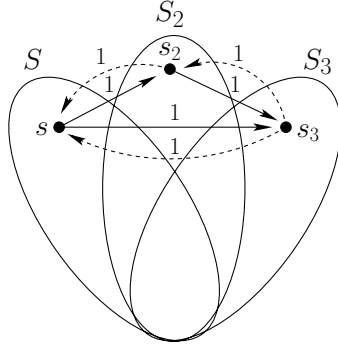


Figura 1.12.

haremos la demostración por inducción sobre  $j$ .

Si  $j = i + 1$ , entonces la afirmación se sigue de la sucesión  $X$ . Supongamos que  $s_i \xrightarrow{1} s_t$  y  $s_t \not\xrightarrow{1} s_i$ , con  $t > i + 1$ . Demostraremos que  $s_i \xrightarrow{1} s_{t+1}$  y  $s_{t+1} \not\xrightarrow{1} s_i$ . Sabemos que  $s_t \xrightarrow{1} s_{t+1}$  y  $s_{t+1} \not\xrightarrow{1} s_t$  y como  $D_1$  es asimétricamente transitiva, tenemos que  $s_i \xrightarrow{1} s_{t+1}$  y  $s_{t+1} \not\xrightarrow{1} s_i$ .

Ahora probaremos que la sucesión  $X$  es una trayectoria. Supongamos que existe  $s_j$  tal que  $s_j = s_i$ , con  $i < j$ , tenemos que  $s_{j-1} \xrightarrow{1} s_j = s_i$  (Fig. 1.13).

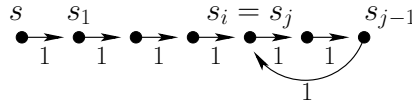


Figura 1.13.

Obsérvese que  $j \neq i + 1$ , pues no hay lazos (Fig. 1.14), por lo cual podemos suponer que  $i < j - 1$  y por la afirmación anterior  $s_j = s_i \xrightarrow{1} s_{j-1}$  y  $s_{j-1} \not\xrightarrow{1} s_i = s_j$ , lo cual es una contradicción (Fig. 1.15).

Por lo tanto,  $X$  es una trayectoria infinita exterior en  $Asim(D_1)$ , lo cual contradice las hipótesis.

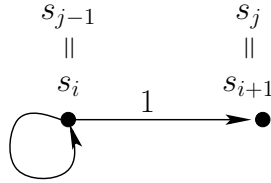


Figura 1.14. Si  $j = i + 1$ , entonces tendríamos un lazo.

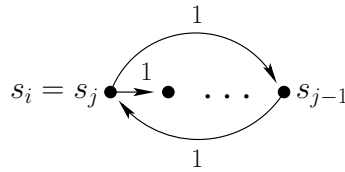


Figura 1.15.

Así que existe  $n$  tal que  $s_n \in S^*$  y por lo tanto se cumple (b)  $s \xrightarrow{1} s_n$  y  $s_n \xrightarrow{1} s$ , concluyéndose que  $S \preceq_{D_1} S^*$ .

II)  $S^* \neq \emptyset$

Sea  $s \in S \in \mathbf{C}$ . Si  $s \in S^*$ , entonces  $S^* \neq \emptyset$ . Si no, como ya probamos que  $S \preceq_{D_1} S^*$ , entonces existe  $s^* \in S^*$  tal que  $s \xrightarrow{1} s^*$  y  $s^* \xrightarrow{1} s$ , por lo tanto  $S^* \neq \emptyset$ .

III)  $S^* \in \alpha_{D_1}$

a)  $S^*$  es independiente.

Sean  $s_1$  y  $s_2 \in S^*$ , con  $s_1 \neq s_2$ . Luego existen  $S_1$  y  $S_2 \in \mathbf{C}$ , tales que  $s_1 \in S_1$  y  $s_2 \in S_2$  y  $s_i \in T$ , con  $i = 1, 2$ , para toda  $T$  tal que  $S_i \preceq_{D_1} T$ . Si  $S_1 = S_2$ , entonces  $s_1$  y  $s_2$  no son adyacentes por ser  $S_1$  un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  y por lo tanto es independiente.

Si  $S_1 \neq S_2$ , ya que  $\mathbf{C}$  es una cadena y  $S_1, S_2 \in \mathbf{C}$ , se tiene que  $S_1 \preceq_{D_1} S_2$  ó  $S_2 \preceq_{D_1} S_1$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $S_1 \preceq_{D_1} S_2$ , entonces, por la elección de  $S_1$ ,  $s_1 \in S_2$ . Así que  $s_1$  y  $s_2$  no

son adyacentes por estar ambos en  $S_2$ , que es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

b) Si existe una  $(S^*, t)$ -flecha en  $D_2$ , con  $t \in V(D) \setminus S^*$ , entonces existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ .

Supongamos que existe una  $(S^*, t)$ -flecha en  $D_2$  y que no existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ , para algún vértice  $t \in V(D) \setminus S^*$ .

Sea  $s_1^* t \in A(D_2)$ , con  $s_1^* \in S^*$ . Entonces por la definición de  $S^*$ , existe  $S_1 \in \mathbf{C}$ , tal que  $s_1^* \in S_1$  y para toda  $S$ , tal que  $S_1 \preceq_{D_1} S$ , con  $S \in \mathbf{C}$ ,  $s_1^* \in S$ . Como  $S_1$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , existe  $tx_1 \in A(D)$ , con  $x_1 \in S_1$  y  $x_1 \notin S^*$ , se supuso que no hay  $(t, S^*)$ -flecha (Fig. 1.16).

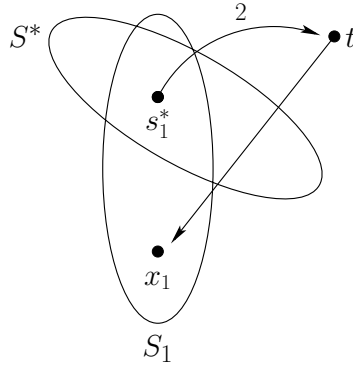


Figura 1.16. La flecha  $s_1^* t \in A(D_2)$  y la flecha  $tx_1 \in A(D)$ .

Como  $S_1 \preceq_{D_1} S^*$ , existe  $s_2^* \in S^*$  tal que  $x_1 \xrightarrow{1} s_2^*$  y  $s_2^* \xrightarrow{1} x_1$ , así que  $s_2^* \notin S_1$ . De nuevo tenemos que existe  $S_2 \in \mathbf{C}$ , tal que  $s_2^* \in S_2$  y para toda  $S$ , tal que  $S_2 \preceq_{D_1} S$ , con  $S \in \mathbf{C}$ ,  $s_2^* \in S$ . Podemos observar que  $S_1 \prec_{D_1} S_2$ , de lo contrario  $S_2 \preceq_{D_1} S_1$  (pues  $S_1, S_2 \in \mathbf{C}$ ) y como  $s_2^* \notin S_1$ , entonces existe  $x \in S_1$  tal que  $s_2^* \xrightarrow{1} x$  y  $x \xrightarrow{1} s_2^*$  pero por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva tendríamos que  $x_1 \xrightarrow{1} x$ , lo cual es imposible pues  $S_1$  es independiente. Así que  $S_1 \prec_{D_1} S_2$  y  $s_1^* \in S_2$ , por la elección de  $S_1$ . Como  $S_2$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  y  $s_1^* t \in A(D_2)$ , existe

$x_2 \in S_2$  tal que  $tx_2 \in A(D)$ . Obsérvese que  $x_2 \notin S^*$ , puesto que supusimos que no hay  $(t, S^*)$ -flecha (Fig. 1.17).

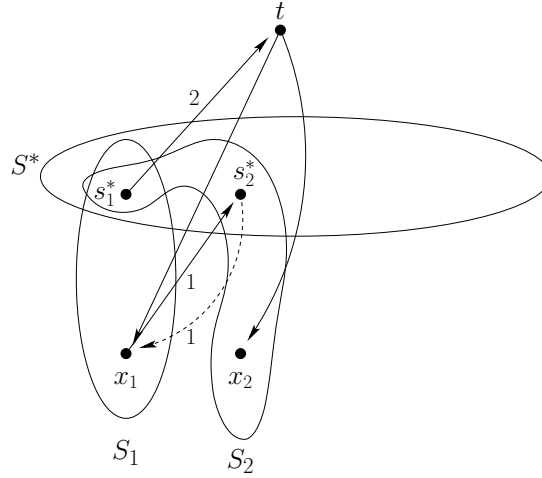


Figura 1.17. La flecha etiquetada con 2 está en  $D_2$ , la flecha continua etiquetada con 1 está en  $D_1$ , la flecha punteada con etiqueta 1 no está en  $D_1$  pero puede estar en  $D_2$  y las flechas restantes están en  $D$ .

Puesto que  $S_2 \preceq_{D_1} S^*$ , existe  $s_3^* \in S^*$  tal que  $x_2 \xrightarrow{1} s_3^*$  y  $s_3^* \xrightarrow{1} x_2$ . De nuevo, tenemos que existe  $S_3 \in \mathbf{C}$  tal que  $s_3^* \in S_3$  y para toda  $S$ , tal que  $S_3 \preceq_{D_1} S$ ,  $s_3^* \in S$ . Se puede probar de nuevo que  $S_2 \prec_{D_1} S_3$  análogamente a como se probó que  $S_1 \prec_{D_1} S_2$ , así que  $s_1^* \in S_3$ . Ya que  $S_3$  es seminúcleo módulo  $A(D_1)$  y  $s_1^*t \in A(D_2)$ , existe  $x_3 \in S_3$  tal que  $tx_3 \in A(D)$ . Obsérvese que  $x_3 \notin S^*$  (Fig. 1.18).

Supongamos que con este procedimiento obtuvimos  $s_i^*, S_i$  y  $x_i$ , tal que  $s_i^*, x_i \in S_i \in \mathbf{C}$  (Fig. 1.19).

Puesto que  $S_i \preceq_{D_1} S^*$ , existe  $s_{i+1}^* \in S^*$  tal que  $x_i \xrightarrow{1} s_{i+1}^*$  y  $s_{i+1}^* \xrightarrow{1} x_i$ . Entonces, análogamente que en los casos anteriores, existe  $S_{i+1} \in \mathbf{C}$  tal que  $s_{i+1}^* \in S_{i+1}$  y para toda  $S$ , tal que  $S_{i+1} \preceq_{D_1} S$ , se tiene que  $s_{i+1}^* \in S$ . Como  $S_{i+1}$  es seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , existe  $x_{i+1} \in S_{i+1}$  tal que  $tx_{i+1} \in A(D)$ .



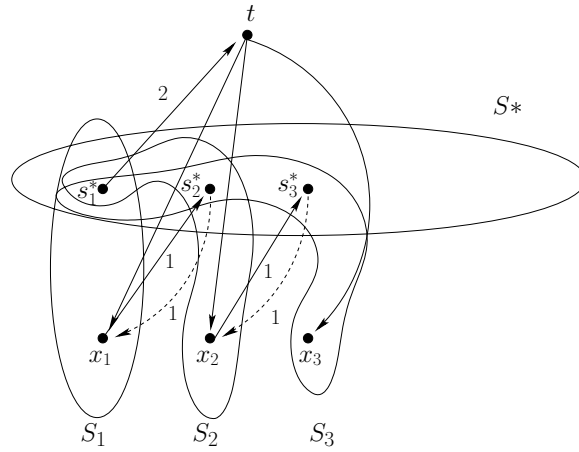


Figura 1.18.

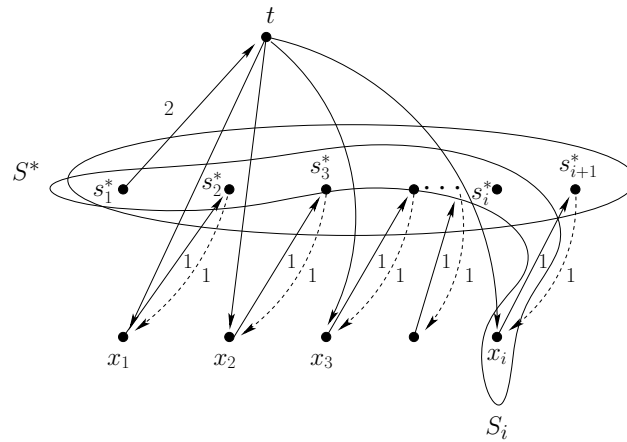


Figura 1.19.

Con este procedimiento obtenemos la siguiente digráfica  $H$ :

$$V(H) = \{t\} \cup \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cup \{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\},$$

$$\text{con } t \notin \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cup \{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\}$$

$$\text{y } \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cap \{s_1^*, s_2^*, s_3^*, \dots\} = \emptyset;$$

$$A(H) = \{s_1^*t\} \cup \{tx_i\} \cup \{x_i s_{i+1}^*\},$$

nótese que  $s_1^*t \in A(D_2)$  y  $x_i s_{i+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$  (Fig. 1.20).

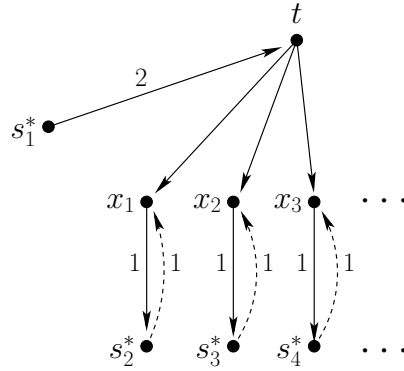


Figura 1.20.

Podemos observar lo siguiente:

- $x_i \notin S^*$ , para toda  $i$ .
- $S_i \prec S_j$ , con  $i < j$ , puesto que  $S_i \prec S_{i+1}$  y la relación es transitiva.
- $s_i^* \in S_j$ , con  $j \geq i$ , porque  $s_i^* \in S_i, S_i \prec S_j$  y se sigue de la elección de  $S_i$ .
- $x_i \notin S_j$ , para toda  $j > i$ , pues  $s_{i+1}^* \in S_j$ ,  $s_{i+1}^*$  y  $x_i$  son adyacentes y  $S_j$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .
- $x_i \neq x_j$ , con  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i < j$ , entonces  $x_i \notin S_j$  y  $x_j \in S_j$ , pues  $x_i \xrightarrow{1} s_{i+1}^*$  y  $s_{i+1}^* \in S_j$ , así que de lo contrario  $S_j$  no sería independiente (Fig. 1.21).

Llamamos la  $i$ -ésima rama de  $H$  en  $D$  a la subdígrafa de  $D$  inducida por el conjunto  $\{s_1^*, t, x_i, s_{i+1}^*\}$  y como la  $i$ -ésima subrama de  $H$  al conjunto de vértices  $\{x_i, s_{i+1}^*\}$ .

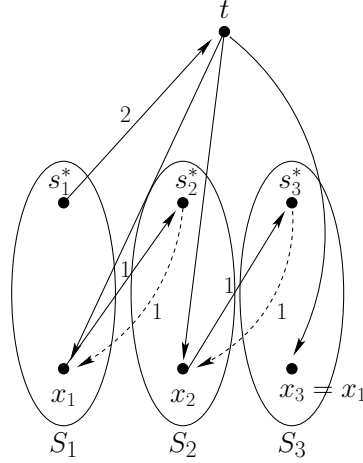


Figura 1.21.

Observemos la sucesión de vértices  $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , entonces por el Lema 1.10 existe una subsucesión infinita  $\mathcal{X} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots)$ , tal que  $x_{i_l} x_{i_m} \notin A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , con  $i_l < i_m$ . Así que se puede obtener una subdigráfica,  $H^*$ , de  $H$  que sólo contiene las  $i_j$ -ésimas ramas, tal que  $x_{i_j} \in \mathcal{X}$ .  $H^*$  satisface las afirmaciones anteriores y la siguiente:

- $x_i x_j \notin A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , con  $i < j$  (Fig. 1.22).

Veamos qué sucede con las 12 posibles flechas de la  $i$ -ésima rama de  $H^*$ . Ya tenemos las flechas:

- $s_1^* t$ , la cual sabemos que está en  $A(D_2)$ ,
- $t x_i$ , que no sabemos en principio si está en  $A(D_1)$  ó en  $A(D_2)$ ,
- $x_i s_{i+1}^*$ , que está en  $\text{Asim}(D_1)$ .

Sabemos que no están las flechas:

- $t s_1^*$ , porque no hay  $(t, S^*)$ -flechas,
- $t s_{i+1}^*$ , porque no hay  $(t, S^*)$ -flechas,

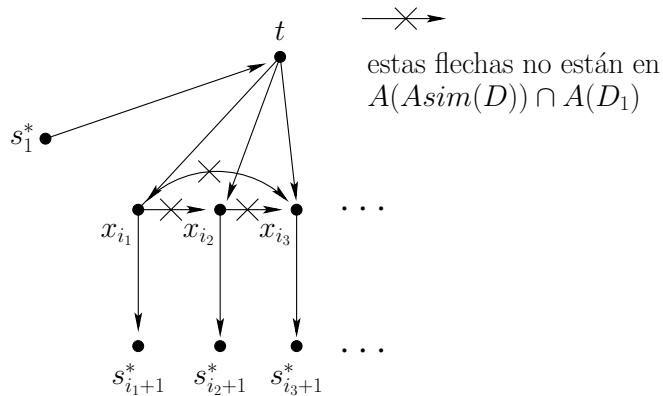


Figura 1.22.

- $s_1^*x_i$ , porque  $S_i$  es independiente,
- $x_i s_1^*$ , porque  $S_i$  es independiente,
- $s_1^*s_{i+1}^*$ , puesto que  $S^*$  es independiente,
- $s_{i+1}^*s_1^*$ , porque  $S^*$  es independiente.

Y además no sabemos si se encuentran las flechas:

- $x_i t$ ,
- $s_{i+1}^* x_i$ ,
- $s_{i+1}^* t$ .

(Fig. 1.23)

Así que tenemos los siguientes casos:

$$tx_i \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \end{cases}$$

$$x_i t \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \\ \notin A(D) \dots (3) \end{cases}$$

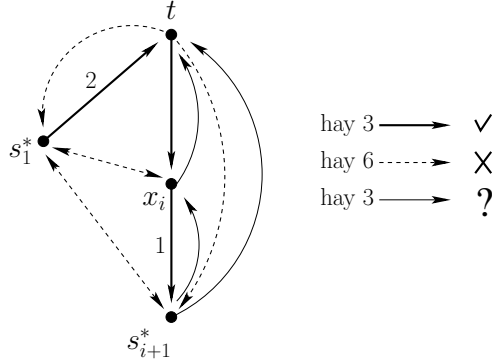


Figura 1.23. Las flechas gruesas son las flechas que sabemos que están en  $D$ , las flechas punteadas son las flechas que no están en  $D$  y las flechas restantes son aquellas que no sabemos si están en  $D$ .

$$s_{i+1}^* x_i \begin{cases} \in A(D_2) \dots (1) \\ \notin A(D) \dots (2) \end{cases}$$

$$s_{i+1}^* t \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \\ \notin A(D) \dots (3) \end{cases}$$

Por lo que hay que considerar 36 casos en total. De ahora en adelante etiquetaremos cada caso con una sucesión de números. El *Caso*  $(\alpha.\beta.\gamma.\delta)$  se referirá a tener el *Caso*  $\alpha$  para  $tx_i$  ( $\alpha \in \{1, 2\}$ ), el *Caso*  $\beta$  para  $x_it$  ( $\beta \in \{1, 2, 3\}$ ), el *Caso*  $\gamma$  para  $x_{i+1}^*x_i$  ( $\gamma \in \{1, 2\}$ ) y el *Caso*  $\delta$  para  $s_{i+1}^*t$  ( $\delta \in \{1, 2, 3\}$ ). Recordemos que no existen  $(t, S^*)$ -flechas en  $D$ .

Casos (1.1.1.1), (1.1.2.1), (2.2.1.1.), (2.2.2.1) y (2.3.1.1). Como tenemos que  $x_i s_{i+1}^*, s_{i+1}^* t \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva se tiene que  $x_it \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual contradice que  $tx_i \in A(D_1)$ .

Caso (1.1.1.2). Se obtiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{10}$ .

Caso (1.1.1.3). Se tiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_5$ .

Casos (1.1.2.2) y (1.1.2.3). Tenemos que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{13}$  ó  $A_3$ , respectivamente, lo cual es una contradicción pues  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre.

Casos (1.2.1.1), (1.2.1.2), (1.2.1.3), (1.2.2.1), (1.2.2.2), (1.2.2.3), (1.3.1.1), (1.3.1.2), (1.3.1.3), (1.3.2.1), (1.3.2.2), (1.3.2.3). En estos casos se tiene que  $tx_i, x_i s_{i+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces  $ts_{i+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$  lo cual es una contradicción puesto que no existen  $(t, S^*)$ -flechas.

Caso (2.1.1.1). De aquí tenemos que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_9$ .

Caso (2.1.1.2). Se tiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{10''}$ .

Caso (2.1.1.3). De este caso se tiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_6$ .

Caso (2.1.2.1). En este caso se puede observar que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_7$ , lo cual contradice que  $D$  sea  $\beta_{D_1}$ -libre.

Caso (2.1.2.2). Este caso no es posible pues  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  resulta ser isomorfa a  $A_{12}$ , lo cual contradice que  $D$  sea  $\beta_{D_1}$ -libre.

Caso (2.1.2.3). Tenemos que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_2$ , lo cual contradice que  $D$  sea  $\beta_{D_1}$ -libre.

Caso (2.2.1.2). De aquí tenemos que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{10'}$ .

Caso (2.2.1.3). Este caso se tiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_6$ .

Caso (2.2.2.2). Este caso nos da una contradicción pues  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{14}$  y  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre.

Caso (2.2.2.3). De nuevo obtenemos una contradicción, ya que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_2$ .

Caso (2.3.1.2). Se obtiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_8$ .

Caso (2.3.1.3). De aquí obtenemos que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_4$ .

Caso (2.3.2.2). Este caso es imposible pues  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_{11}$ .

Caso (2.3.2.3). Se tiene que  $D[s^*, t, x_i, s_{i+1}^*]$  es isomorfa a  $A_1$ , lo que contradice que  $D$  sea  $\beta_{D_1}$ -libre.

Así tenemos que cada rama de  $H^*$  induce en  $D$  una subdigráfica isomorfa a una  $A_i$ , para alguna  $i \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$  y ya que sólo hay ocho  $A_i$ 's y un número infinito de ramas, entonces existe  $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , tal que existe un número infinito de ramas de  $H^*$  que inducen en  $D$  una subdigráfica isomorfa a  $A_k$ . Sean  $R_{j_1}, R_{j_2}, \dots$  tales ramas. Ahora probaremos que  $\mathcal{H} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} R_{j_s}$  es una  $H(k, D_1)$ , es decir, veamos que cumple las seis propiedades que se piden en la definición de  $H(k, D_1)$ :

1.  $s_i^* s_j^* \notin A(D)$ , para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{N}$ , pues  $S^*$  es independiente y  $s_i^*, s_j^* \in S^*$ .
2.  $x_i^* s_j^* \notin A(D)$ , con  $i \geq j$ , ya que  $s_j^*, x_i \in S_i$  y  $S_i$  es independiente.
3.  $s_i^* x_j \notin A(D)$ , con  $i \leq j$ , ya que  $s_i^*, x_j \in S_j$  y  $S_j$  es independiente.
4.  $ts_i^* \notin A(D)$ , pues no hay  $(t, S^*)$ -flechas en  $D$ .
5.  $x_i x_j \notin \text{Asim}(D_1)$ , con  $i > j$ , de lo contrario tendríamos que  $x_i s_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$ , puesto que  $x_j s_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$  y  $D_1$  es asimétricamente transitiva, lo cual nos contradice que  $S_i$  sea independiente, ya que  $x_i, s_{j+1} \in S_i$  (Fig. 1.24).
6.  $s_i^* x_j \notin \text{Asim}(D_1)$ , con  $i > j$ . Caso (a)  $i = j + 1$ . Si suponemos que  $s_i^* x_j \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces  $x_j s_{j+1}^* \notin \text{Asim}(D_1)$  lo cual nos contradice que  $S_j^* \prec S_{j+1}^*$ . Caso (b)  $i > j + 1$ . Si se supone que  $s_i^* x_j \in \text{Asim}(D_1)$ , se tiene que  $s_i^* s_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$ , ya que  $x_j s_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$  y  $D_1$  es asimétricamente transitiva, esto contradice que  $S^*$  sea independiente, así que en cualquiera de los dos casos posibles no se puede tener que  $s_i^* x_j \in \text{Asim}(D_1)$  (Fig. 1.25).

Recordemos que según las hipótesis una subdigráfica  $H(k, D_1)$  tiene pseudodiagonal en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , así que analicemos cuáles de

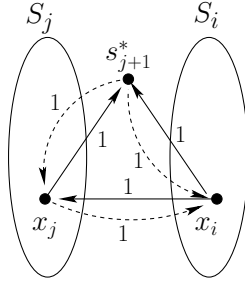


Figura 1.24. Las flechas continuas marcadas con 1 están en  $D_1$ , las flechas punteadas marcadas con 1 son las flechas prohibidas en  $D_1$ , es decir, tales flechas no están en  $D_1$ .

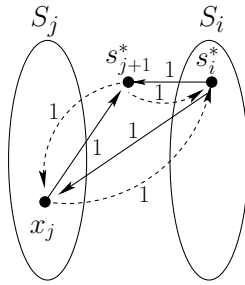


Figura 1.25.

las posibles flechas son pseudodiagonales de  $\mathcal{H}$  y si se encuentran en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ :

- $s_i^* s_j^*$  no son flechas en  $D$  pues  $S^*$  es independiente en  $D$ .
- $s_i^* x_j$ , con  $i \leq j$ , tampoco son flechas en  $D$  como se vio anteriormente en (3).
- $s_i^* x_j$ , con  $i > j$ , como se vio anteriormente en (6), no puede estar en  $\text{Asim}(D_1)$ .
- $s_i^* t$ , con  $i \neq 1$ , no es una pseudodiagonal de  $\mathcal{H}$  en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , pues de lo contrario tendríamos que  $D[\{s_1^*, t, x_{i-1}, s_i^*\}]$  es isomorfa a  $A_7$  ó a  $A_9$ . El primer caso no es posible debido a que



$D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre. Si sucede el segundo caso tenemos que  $\mathcal{H}$  es una subdigráfica  $H(9, D_1)$  de  $D$ .

- $ts_i^*$  no son flechas en  $D$ , ya que no hay  $(t, S^*)$ -flechas.
- $tx_i$  es flecha en  $\mathcal{H}$ , así que no es pseudodiagonal.
- $x_ix_j$ , con  $i < j$ , debido a la elección de  $H^*$ , no se encuentra en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ .
- $x_ix_j$ , con  $i > j$ . Si  $x_ix_j \in \text{Asim}(D_1)$ , como  $x_js_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces  $x_is_{j+1}^* \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual es una contradicción, pues  $s_{j+1}^*, x_i \in S_i$  y  $S_i$  es independiente, por lo tanto  $x_ix_j \notin \text{Asim}(D_1)$ .
- $x_is_j^*$ , con  $i < j$ . Si  $j = i + 1$ , entonces  $x_is_j^*$  es una flecha en  $\mathcal{H}$ . Sea  $j > i + 1$  y supongamos que  $x_is_j^* \in A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(4, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_1$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(5, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_3$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(6, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(8, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_{11}$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(9, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_7$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(10, D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_{13}$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(10', D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa al caso restante de  $A_2$ .
  - Si  $\mathcal{H} = H(10'', D_1)$ , entonces  $D[\{s_1^*, t, x_i, s_j^*\}]$  es isomorfa a  $A_{12}$ .

En cualquiera de los casos anteriores se tiene una contradicción pues  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre. Por lo tanto  $x_is_j^* \notin A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ .

- $x_is_j^*$ , con  $i = j$ , no es flecha en  $D$ , pues  $S_i$  es independiente.
- $x_is_j^*$ , con  $i > j$ , no es flecha en  $D$  como se vio anteriormente en (2).
- $x_it$ , como  $tx_i \in A(\mathcal{H})$  se tiene que  $x_it \notin \text{Asim}(D)$ , por lo tanto,  $x_it \notin A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ .

Así que  $\mathcal{H}$  es una subdígrafa  $H(k, D_1)$  de  $D$ , con  $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , que no tiene pseudodiagonales en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , lo cual contradice las hipótesis. Así que concluimos que existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ . Luego  $S^* \in \alpha_{D_1}$  y es una cota superior de  $\mathbf{C}$ . Por el Lema de Zorn concluimos que  $(\alpha_{D_1}, \preceq_{D_1})$  tiene un elemento maximal.

- iii) Si  $S \in \alpha_{D_1}$  es un elemento maximal pero no es núcleo de  $D$ , es decir,  $B_S = \{v \in V(D) \setminus S \mid \text{no existe una } (v, S)\text{-flecha en } D\} \neq \emptyset$  y  $S'$  es un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ , entonces  $T_S^{S'} \cup S' \in \alpha_{D_1}$  y  $S \prec_{D_1} T_S^{S'} \cup S'$  (Fig. 1.26).

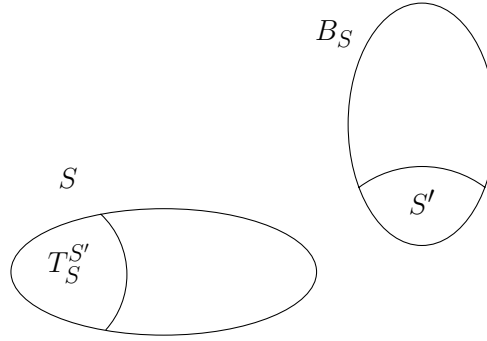


Figura 1.26.

Sean  $S \in \alpha_{D_1}$  un elemento maximal que no es núcleo de  $D$ , es decir,  $B_S \neq \emptyset$  y  $S'$  un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ .

- I)  $T_S^{S'} \cup S' \in \alpha_{D_1}$ . Recordemos que  $T_S^{S'} = \{v \in S \mid \text{no existe una } (v, S')\text{-flecha en } D_1, \text{ con } S' \text{ un seminúcleo módulo } A(D_1) \text{ de } B_S\}$ .
- a)  $T_S^{S'} \cup S'$  es independiente. Dado que  $T_S^{S'} \subseteq S$  y  $S$  es independiente tenemos que  $T_S^{S'}$  es independiente. Ya que  $S'$  es un seminúcleo de  $D[B_S]$  módulo  $A(D_1)$ , se sigue que  $S'$  es independiente, de modo que solamente necesitamos probar que no hay ninguna flecha de  $D$  entre  $T_S^{S'}$  y  $S'$ .
- a.1) No hay  $(T_S^{S'}, S')$ -flechas.

Supongamos que existe  $t \in T_S^{S'}$  y  $s' \in S'$ , tal que  $ts' \in A(D)$ . Si  $ts' \in A(D_1)$  contradice la definición de  $T_S^{S'}$ , entonces  $ts' \in A(D_2)$ . Tenemos  $t \in T_S^{S'} \subseteq S$  y  $S \in \alpha_{D_1}$ , entonces hay una  $(s', S)$ -flecha en  $D$  esto contradice que  $s' \in S' \subset B_S$  (Fig. 1.27).

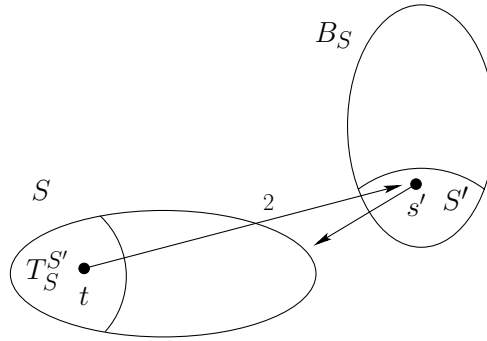


Figura 1.27.

- a.2) No hay  $(S', T_S^{S'})$ -flechas, ya que  $S' \subset B_S$  y  $B_S$  es el conjunto de vértices no absorbidos por  $S$ .
- b) Si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $z \in D - (T_S^{S'} \cup S')$ , entonces existe una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha en  $D$ .  
Sea  $tz$  una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $z \in D - (T_S^{S'} \cup S')$ .  
Así que hay varias posibles situaciones para  $t$  y  $z$ .

Para  $t$ :

a)  $t \in T_S^{S'}$  ó

b)  $t \in S'$

y para  $z$ :

a)  $z \in B_S \setminus S'$ ,

b)  $z \in D - (S \cup B_S)$  ó

c)  $z \in S \setminus T_S^{S'}$ .

Se tienen 6 casos a considerar. De nuevo observemos todos los casos como sucesiones de números:

Caso (a.a). Ya que  $tz \in A(D_2)$ , como  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , entonces existe una  $(z, S)$ -flecha, lo cual contradice la definición de  $B_S$ . Este caso es imposible.

Caso (a.b). Ya que  $t \in T_S^{S'} \subset S$  y  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$  se tiene que existe una  $(z, S)$ -flecha en  $D$ . De aquí se derivan dos casos: (1) existe una  $(z, T_S^{S'})$ -flecha ó (2) existe una  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha (Fig. 1.28).

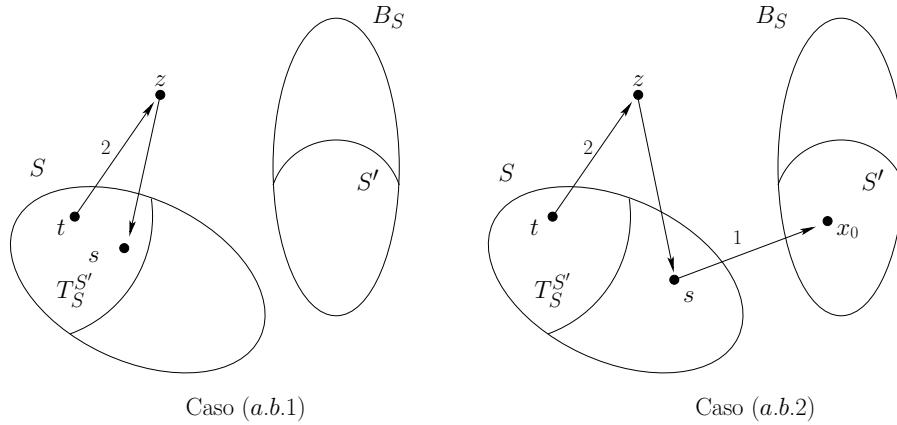


Figura 1.28.

a.b.1) En este caso ya tenemos una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha.

a.b.2) Sea  $zs$  la  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha. Sabemos por la definición de  $T_S^{S'}$  que existe  $x_0 \in S'$  tal que  $s \xrightarrow{1} x_0$  y además  $x_0 \dashrightarrow s$  (Fig. 1.28). Se obtiene así la trayectoria  $(t, z, s, x_0)$  (Fig. 1.29), de la cual podemos observar lo siguiente:

- ◊  $zt, zx_0 \notin A(D)$ , de lo contrario ya habríamos concluido, puesto que  $x_0, t \in T_S^{S'} \cup S'$  y así tendríamos una  $(z, T_S^{S'} \cup S'$

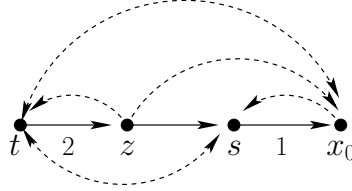


Figura 1.29. Las flechas continuas están en  $D$ , aquellas que están etiquetadas con  $i \in \{1, 2\}$  se encuentran en la subdigráfica  $D_i$  de  $D$  y las que no están etiquetadas pueden encontrarse en cualquiera de las dos subdigráficas. Las flechas punteadas no están en  $D$ .

$S'$ -flecha.

- ◇  $ts, st \notin A(D)$ , ya que  $S$  es independiente.
- ◇  $tx_0, x_0t \notin A(D)$ , pues  $T_S^{S'} \cup S'$  es independiente.

También sabemos que  $tz \in A(D_2)$  y  $sx_0 \in A(D_1)$ , pero  $x_0s \notin A(D)$ .

Ahora veamos qué sucede con las demás flechas:

Para  $zs$  puede suceder:

1.  $zs \in A(D_1)$  ó
2.  $zs \in A(D_2)$ .

Para  $sz$  puede suceder:

1.  $sz \in A(D_1)$ ,
2.  $sz \in A(D_2)$  ó
3.  $sz \notin A(D)$ .

Para  $x_0z$  puede suceder:

1.  $x_0z \in A(D_1)$ ,
2.  $x_0z \in A(D_2)$  ó
3.  $x_0z \notin A(D)$ .

Analizaremos todos estos 18 subcasos, nuevamente como sucesiones de números:

Subcaso (1.1.1):  $zs, sz, x_0z \in A(D_1)$ . Este caso es imposible, pues se tiene que  $sx_0, x_0z \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces por ser  $D_1$

asimétricamente transitiva  $sz \in Asim(D_1)$ , que contradice que  $zs \in A(D_1)$ .

Subcaso (1.1.2):  $zs, sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \in A(D_2)$ . Se tiene que  $D[z, s, x_0] \cong A_{13}$ , lo cual es una contradicción, pues  $A_{13} \in \beta_{D_1}$ .

Subcaso (1.1.3):  $zs, sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . Tenemos que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_3 \in \beta_{D_1}$ , por lo que este caso no se puede dar.

Subcasos (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3):  $zs \in Asim(D_1)$ . Como se tiene que  $sx_0 \in Asim(D_1)$ , entonces por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva  $zx_0 \in Asim(D_1)$ , lo cual no es cierto, por lo tanto no se tiene este caso.

Subcaso (2.1.1):  $zs \in A(D_2)$  y  $sz, x_0z \in A(D_1)$ . Este caso no es posible, debido a que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_7$ .

Subcaso (2.1.2):  $zs, x_0z \in A(D_2)$  y  $sz \in A(D_1)$ . Tenemos que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{12}$ , se obtiene así una contradicción.

Subcaso (2.1.3):  $zs \in A(D_2)$ ,  $sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . No se puede tener este caso puesto que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , obteniendo nuevamente una contradicción.

Subcaso (2.2.1):  $zs, sz \in A(D_2)$  y  $x_0z \in A(D_1)$ . En este caso se tiene que  $sx_0, x_0z \in Asim(D_1)$ , entonces  $sz \in Asim(D_1)$ , lo cual no sucede, por lo que este caso no es posible.

Subcaso (2.2.2):  $zs, sz, x_0z \in A(D_2)$ . Se tiene que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{14} \in \beta_{D_1}$ , por lo tanto no es posible este caso.

Subcaso (2.2.3):  $zs, sz \in A(D_2)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . De nuevo se tiene que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , así que este caso es imposible.

Subcaso (2.3.1):  $zs \in A(D_2)$ ,  $sz \notin A(D)$  y  $x_0z \in A(D_1)$ . Tenemos que  $sx_0, x_0z \in Asim(D_1)$ , entonces deberíamos tener que  $sz \in Asim(D_1)$ , lo cual no sucede.

Subcaso (2.3.2):  $zs, x_0z \in A(D_2)$  y  $sz \notin A(D)$ . En este caso se tiene que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{11} \in \beta_{D_1}$ , lo cual nos

lleva a una contradicción.

Subcaso (2.3.3):  $zs \in A(D_2)$  y  $sz, x_0z \notin A(D)$ . Tenemos que este caso no es posible, pues  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_1$ .

Así que no es posible tener una  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha y por lo tanto no se da el Caso (a.b);  $t \in T_S^{S'}$  y  $z \in D - (S \cup B_S)$ .

Continuemos con los casos que faltan:

Caso (a.c). Este caso no se puede dar, puesto que  $S$  es independiente (Fig. 1.30).

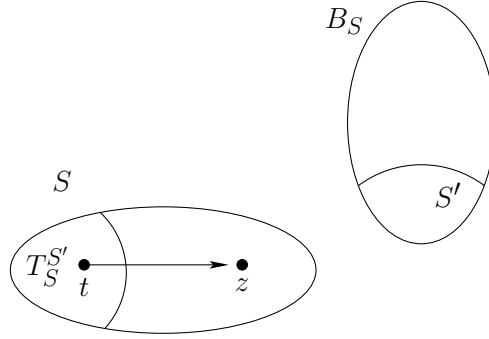


Figura 1.30.

Caso (b.a). Puesto que  $S'$  lo escogimos como un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $B_S$ , entonces existe una  $(z, S')$ -flecha y por consiguiente una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha (Fig. 1.31).

Caso (b.b). De nuevo tenemos que existe una  $(z, S)$ -flecha en  $D$ , pues  $z \notin B_S$ . Si es una  $(z, T_S^{S'})$ -flecha, entonces tenemos una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha. De otro modo tenemos que tal flecha es  $zs$ , con  $s \in S \setminus T_S^{S'}$  (Fig. 1.32).

En este otro caso la definición de  $T_S^{S'}$  implica que existe  $x_0 \in S'$  tal que  $sx_0 \in A(D_1)$  y  $x_0s \notin A(D)$ . De aquí tenemos dos posibles situaciones:

- i)  $t = x_0$ , entonces tenemos el triángulo  $(t, z, s)$  (Fig. 1.33), de donde sabemos lo siguiente:
  - ◊  $tz \in A(D_2)$  y  $zt \notin A(D)$ , esto último debido a que

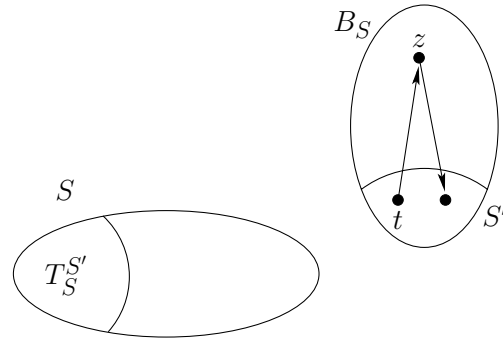


Figura 1.31.

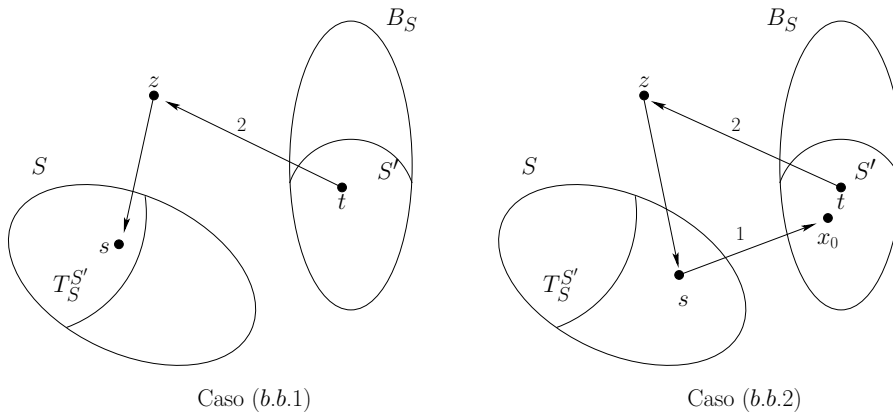


Figura 1.32. Caso (b.b).

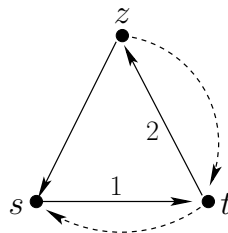


Figura 1.33. Las flechas continuas están en  $D$ , las flechas punteadas no.



supusimos que no hay  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flechas.

- ◊  $st \in A(D_1)$  y  $ts \notin A(D)$ , esto último por la definición de  $B_S$ .

Así que sólo faltaría ver qué sucede con la flecha  $zs$ . Supongamos que  $zs \in \text{Asim}(D)$ . Si  $zs \in A(D_1)$ , entonces tendríamos que  $zt \in \text{Asim}(D_1)$  (pues  $D_1$  es asimétricamente transitiva) lo cual no es cierto. Si  $zs \in A(D_2)$ , entonces  $D[\{t, z, s\}] \cong A_{11}$ . Así que tenemos que  $zs \in \text{Sim}(D)$ . Cuando  $zs$  está en  $A(D_2)$ ,  $D[\{t, z, s\}]$  es isomorfa a  $A_{12}$  ó a  $A_{14}$ , lo cual es una contradicción. Cuando  $zs \in A(D_1)$  y  $sz \in A(D_1)$ , entonces  $D[t, z, s] \cong A_{13}$ . Si no, tenemos  $zt \in \text{Asim}(D_1)$  ( $D_1$  es asimétricamente transitiva), lo cual no se tiene. Por lo tanto, no se puede tener tal triángulo.

- ii)  $t \neq x_0$ , tenemos así la trayectoria dirigida  $(t, z, s, x_0)$ , con las siguientes propiedades:

- ◊  $zt, zx_0 \notin A(D)$ , si no, ya se tendría una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha, ya que  $t, x_0 \in S'$ .
- ◊  $tx_0, x_0t \notin A(D)$ , pues  $S'$  es independiente.
- ◊  $ts \notin A(D)$ , por la definición de  $B_S$  y  $st \notin A(D)$ , pues si no, estaríamos en el Caso (i).
- ◊  $x_0s \notin A(D)$ , por la definición de  $B_S$ .
- ◊  $tz \in A(D_2)$  y  $sx_0 \in A(D_1)$ .

Obsérvese que esta trayectoria es la misma que aquella que se obtuvo en el Caso (a.b) (2), con las mismas propiedades y como ya se demostró nos lleva a una contradicción (Fig. 1.29).

Caso (b.c). Este caso es imposible debido a la definición de  $B_S$  (Fig. 1.34).

Así concluimos que si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $A(D_2)$ , entonces existe una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha, por lo tanto  $T_S^{S'} \cup S'$

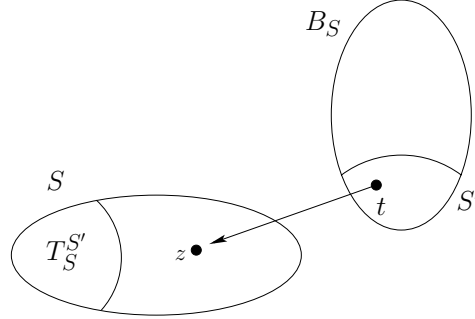


Figura 1.34.

es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

II)  $S \preceq_{D_1} T_S^{S'} \cup S'$ . Sea  $s \in S$ . Si  $s \in T_S^{S'}$ , entonces existe  $s' = s \in T_S^{S'} \cup S'$ . Si  $s \notin T_S^{S'}$ , entonces  $s \in S \setminus T_S^{S'}$  y la definición de  $T_S^{S'}$  implica que existe  $x \in S'$  tal que  $s \xrightarrow{1} x$  y dado que  $s \in S$ ,  $x \in S' \subseteq B_S$ , se sigue de la definición de  $B_S$ , que  $x \xrightarrow{1} s$ , por lo tanto  $sx \in \text{Asim}(D_1)$ .

III)  $T_S^{S'} \cup S' \neq S$ . La definición de  $S'$  implica  $S' \neq \emptyset$  y  $S' \cap S = \emptyset$  de aquí que existe  $n \in S'$  tal que  $n \notin S$ .

iv) Sean  $S_0 \in \alpha_{D_1}$  maximal,  $S \prec S_0$  y  $x \in S$ . Entonces sucede (a)  $x \in S_0$  ó (b) existe  $x_0 \in S_0$ , tal que  $x \xrightarrow{1} x_0$  pero  $x_0 \not\xrightarrow{1} x$ , es decir,  $x \in \Gamma^-(S_0)$ , por lo tanto, en cualquier caso se tiene que  $x \in S_0 \cup \Gamma^-(S_0)$ .

■

El siguiente teorema es una consecuencia directa de los Teoremas 1.9 y 1.11, y nos da condiciones para que una digráfica  $D$  sea núcleo perfecta.

**Teorema 1.12** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , tal que  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores en  $\text{Asim}(D_1)$ . Si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ ,  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre y toda  $H(k, D_1) \subset D$ , con  $k \in$

$\{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , tiene una pseudodiagonal en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Como cada subdígrafa inducida de  $D$  tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , en particular  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , por lo que  $\alpha_{D_1} \neq \emptyset$ . Así que por el Teorema 1.11  $D$  cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , entonces, por el Teorema 1.9,  $D$  tiene núcleo. Ahora veamos que cualquier subdígrafa inducida de  $D$  satisface las hipótesis del Teorema 1.11, para concluir que satisface la Propiedad  $P(\alpha_{H_1}, \leq)$  (obsérvese que ahora  $H_1$  es la subdígrafa de  $H$  que juega el papel de  $D_1$  en  $D$ ).

- Sea  $H_1 = D_{D_1}[V(H)]$ . Como  $D_1$  es asimétricamente transitiva,  $H_1$  es asimétricamente transitiva.
- $H$  es  $\beta_{H_1}$ -libre (con  $\beta_{H_1} = \beta_{D_1}$ ), donde las flechas etiquetadas con 1 están en  $H_1$ , las etiquetadas con 2 no están en  $H_1$  y las que no tienen etiquetas pueden estar o no en  $H_1$ . Podemos observar que si una flecha está en  $D_1$ , entonces está en  $H_1$ , por ser  $H_1$  subdígrafa inducida de  $D_1$ . Si una flecha no está en  $D_1$ , entonces no está en  $H_1$ . Así que como  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre, también es  $\beta_{H_1}$ -libre y por consiguiente  $H$  es  $\beta_{H_1}$ -libre.
- Como  $D_1$  es asimétricamente transitiva,  $H_1$  es asimétricamente transitiva, porque  $H_1$  es una subdígrafa inducida de  $D_1$ .
- $D_1$  no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas y como  $H_1 \subseteq D_1$ , no se tienen trayectorias infinitas exteriores asimétricas en  $H_1$ .
- Cada subdígrafa de  $H$  isomorfa a  $H(k, H_1)$  es una subdígrafa de  $D$  isomorfa a  $H(k, D_1)$ , así que por hipótesis tiene una pseudodiagonal en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(D_1)$ , por lo tanto también en  $A(\text{Asim}(H)) \cap A(H_1)$ .
- Toda subdígrafa inducida de  $H$  es subdígrafa inducida de  $D$ , así que tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ . Obsérvese que un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de una subdígrafa inducida de  $H$  también es seminúcleo módulo  $A(H_1)$ , pues si tenemos una flecha en  $A(D_2)$  (es decir, que

no está en  $D_1$ ), también la tenemos en  $H_2$  (es decir, que no está en  $H_1$ ) y si hay una flecha en  $H$ , esa flecha también está en  $D$  por ser  $H$  subdigráfica inducida de  $D$ . Por lo tanto  $\alpha_{H_1} \neq \emptyset$ .

Así que concluimos que cualquier subdigráfica inducida de  $D$  cumple la Propiedad  $P(\alpha_{H_1}, \leq)$  y por el Teorema 1.9 tiene un núcleo, es decir,  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

■

**Definición 1.13** Una digráfica  $D$  es **localmente finita** (resp. **exteriormente localmente finita**), si para cada vértice  $v \in V(D)$ , se tiene que  $\delta(v)$  (resp.  $\delta^+(v)$ ) es finito.

**Corolario 1.14** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ . Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores contenidas en  $\text{Asim}(D_1)$ ,  $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre, cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  y  $D$  es localmente finita (resp. exteriormente localmente finita), entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

**Demostración.** Si  $D$  es localmente finita (resp. exteriormente localmente finita), entonces no contiene ninguna  $H(k, D_1)$ , con  $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , pues  $t \in H(k, D_1)$  tiene grado (resp. exgrado) infinito. Así que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.12 y por lo tanto  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

■

El siguiente teorema es también una consecuencia directa del Teorema 1.12. Aunque el decidir si una digráfica evita una familia finita de digráficas relativamente pequeñas no sea muy fácil, es más fácil que trabajar con pseudodiagonales en digráficas infinitas. Por esta razón es que el Teorema 1:4 será una herramienta muy útil.

**Teorema 1.15** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ , tales que  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores contenidas en  $Asim(D_1)$  y  $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre. Entonces cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  si y sólo si  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

**Demostración.** Si  $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre, entonces  $H(k, D_1)$  no es subdigráfica de  $D$ , con  $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , por lo que se cumplen así las hipótesis del Teorema 1.12 y por consiguiente  $D$  es núcleo perfecta.

El recíproco es inmediato. ■

La importancia del Teorema 1.15 será apreciada cuando en el Capítulo 3 se vea entre sus consecuencias resultados conocidos e importantes, así como también nuevos resultados que generalizan los existentes.

Como se recordará, se definieron dos ordenes parciales,  $\preceq_{D_1}$  y  $\lesssim_{D_1}$ . Así como fue de utilidad el primer orden, el segundo lo será para dar otras condiciones suficientes para que una digráfica sea núcleo perfecta. Estas condiciones en particular nos dan una nueva familia de digráficas a evitar y como se verá al finalizar el presente capítulo son justas.

Denotemos por  $\beta'_{D_1} = \beta_{D_1} \cup \{A_{15}\} = \{A_1, A_2, A_3, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$  (véanse Figuras 1.1 y 1.5).

**Teorema 1.16** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ . Si  $D$  no contiene trayectorias infinitas exteriores contenidas en  $Asim(D_1)$ ,  $D$  es una digráfica  $\beta'_{D_1}$ -libre y cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ , entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta

**Demostración.** Nuevamente, previo a la demostración, daremos un esquema, el cual nos puede servir para orientarnos dentro de la demostración. Debido a que la demostración del Teorema 1.16 es análoga a la del Teorema

1.11, el esquema es similar al que se dio previamente a la demostración del Teorema 1.11.

Basta demostrar que se cumple (i)-(iii) de la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y que cada subdigráfica inducida tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , para usar el Teorema 1.9 y afirmar que  $D$  es núcleo perfecta. Así que hay que probar lo siguiente:

- i) Existe un orden parcial.
- ii) El conjunto parcialmente ordenado tiene elemento maximal. Para esto usamos el Lema de Zorn: tomamos una cadena  $C$  no vacía y demostraremos que tiene una cota superior  $S^*$ , es decir, probaremos que:
  - I)  $S^* \geq S$ , para toda  $S \in C$ . Para esto se utilizará la hipótesis de que no hay trayectorias infinitas exteriores asimétricas contenidas en  $D_1$ .
  - II)  $S^* \neq \emptyset$ .
  - III)  $S^* \in \alpha_{D_1}$ .
    - a)  $S^*$  es independiente.
    - b) Si existe una  $(S^*, t)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $t \in V(D) \setminus S^*$ , entonces existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ . Esto se probará gracias a que  $D$  es  $\beta'_{D_1}$ -libre.
- iii) Si  $S \in \alpha_{D_1}$  es un elemento maximal pero no es núcleo de  $D$ , entonces  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y  $T_S^{S'} \cup S' > S$ .
  - I)  $T_S^{S'} \cup S' \in \alpha_{D_1}$ .
    - a)  $T_S^{S'} \cup S'$  es independiente.
    - b) Si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', t)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $t \in V(D) \setminus T_S^{S'} \cup S'$ , entonces existe una  $(t, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha en  $D$ . Para esto usaremos que  $D$  es  $\beta'_{D_1}$ -libre.
  - II)  $T_S^{S'} \cup S' \geq S$ .
  - III)  $T_S^{S'} \cup S' \neq S$ .

Así que empecemos la prueba del Teorema 1.16:

- i) Por el Lema 1.7 sabemos que  $\alpha_{D_1}$  con el orden  $\lesssim_{D_1}$  es un conjunto parcialmente ordenado.
- ii) El conjunto parcialmente ordenado  $(\alpha_{D_1}, \lesssim_{D_1})$  tiene elemento maximal. Para esto probaremos que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \lesssim_{D_1})$  tiene cota superior y por el Lema de Zorn tiene un elemento maximal. Basta probarlo para cadenas no vacías, ya que la cadena vacía es acotada por cualquier elemento de  $\alpha_{D_1}$ .

Sea  $\mathbf{C}$  una cadena de  $\alpha_{D_1}$ . Por demostrar que existe  $S^* \in \alpha_{D_1}$  tal que para toda  $T \in \mathbf{C}$ ,  $T \lesssim_{D_1} S^*$ .

Definimos

$$S^* = \left\{ s \in \bigcup_{U \in \mathbf{C}} U \mid \text{existe } S \in \mathbf{C} \text{ tal que } s \in S \text{ y para toda } T \in \mathbf{C} \text{ con } S \lesssim_{D_1} T \text{ se tiene que } s \in T \right\}.$$

I)  $S \lesssim_{D_1} S^*$  para toda  $S \in \mathbf{C}$ .

Sea  $S \in \mathbf{C}$ . Probaremos que para cada  $s \in S$  existe un  $s^* \in S^*$ , tal que sucede (a)  $s = s^*$  ó (b)  $s \xrightarrow{1} s^*$  y  $s^*s \notin A(D)$ .

Sea  $s \in S$ . Si  $s \in S^*$  concluimos, pues se cumple (a).

Si no, por la definición de  $S^*$ , existe  $S_1 \in \mathbf{C}$  tal que  $S \lesssim_{D_1} S_1$  y  $s \notin S_1$ , entonces existe  $s_1 \in S_1$  tal que  $s \xrightarrow{1} s_1$  y  $s_1 \xrightarrow{1,2} s$  (Fig. 1.35).

Si  $s_1 \in S^*$ , concluimos. Si no, existe  $S_2 \in \mathbf{C}$  tal que  $S_1 \lesssim_{D_1} S_2$  y  $s_1 \notin S_2$ , entonces existe  $s_2 \in S_2$  tal que  $s_1 \xrightarrow{1} s_2$  y  $s_2 \xrightarrow{1,2} s_1$ . Por lo tanto tenemos que  $ss_2 \in \text{Asim}(D_1)$ , por ser  $D_1$  simétricamente transitiva y  $s_2s \notin D$  porque  $A_{15}$  no es subdigráfica inducida de  $D$ , así que si  $s_2 \in S^*$ , concluimos (Fig. 1.36).

Si no, existe  $S_3 \in \mathbf{C}$  tal que  $S_2 \lesssim_{D_1} S_3$  y  $s_2 \notin S_3$ , entonces existe  $s_3 \in S_3$  tal que  $s_2 \xrightarrow{1} s_3$  y  $s_3 \xrightarrow{1,2} s_2$ . Por lo tanto tenemos que  $ss_3 \in \text{Asim}(D_1)$  y  $s_3s \notin A(D)$ , por ser  $D_1$  simétricamente transitiva

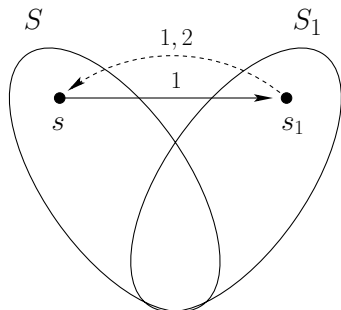


Figura 1.35. La flecha etiquetada con 1 está en  $D_1$  y la flecha punteada indica que no está ni en  $D_1$ , ni en  $D_2$ .

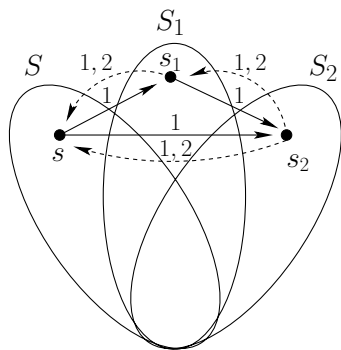


Figura 1.36.

y por no estar  $A_{15}$  como subdigráfica inducida de  $D$ , respectivamente. Si  $s_3 \in S^*$ , concluimos (Fig. 1.37). Así sucesivamente y de manera análoga al Teorema 1.11 tenemos que existe una  $i$  tal que  $s_i \in S^*$ , de lo contrario tendríamos una trayectoria infinita exterior asimétrica en  $D_1$ , (la prueba de que es una trayectoria es similar que en el Teorema 1.11) lo cual, por hipótesis, no puede ser.

II)  $S^* \neq \emptyset$ . La prueba se sigue igual que en el Teorema 1.11.

III)  $S^* \in \alpha_D$ .



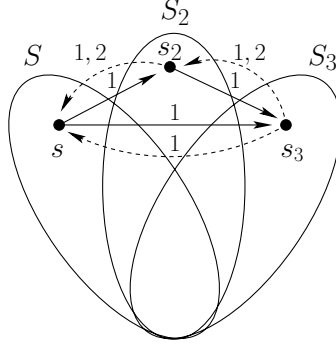


Figura 1.37.

a)  $S^*$  es independiente, la prueba se sigue igual que en el Teorema 1.11.

b) Si existe una  $(S^*, t)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $t \in D - S^*$ , entonces existe una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ .

Sea  $s_1^* t$ , con  $s_1^* \in S^*$  y  $t \in D \setminus S^*$ , una flecha en  $A(D_2)$ . Sabemos que existe  $S \in \mathbf{C}$  tal que  $s_1^* \in S$  y para toda  $S' \in \mathbf{C}$ , con  $S \lesssim_{D_1} S'$ ,  $s_1^* \in S'$ . Por lo tanto, tenemos que existe una flecha  $tx$ , con  $x \in S$ , por ser  $S$  un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  y como  $S \lesssim_{D_1} S^*$ , entonces sucede (a)  $x \in S^*$  ó (b) existe  $s_2^* \in S^*$ , tal que  $x \xrightarrow{1} s_2^*$  y  $s_2^* \xrightarrow{1,2} x$ . Si sucede (a) tenemos la  $(t, S^*)$ -flecha que buscamos. De lo contrario, si sucede (b) tenemos la trayectoria  $\{s_1^*, t, x, s_2^*\}$  (Fig. 1.38).

De esta trayectoria podemos afirmar lo siguiente (Fig. 1.39);

- $s_1^* t \in A(D_2)$  y  $x s_2^* \in A(D_1)$ .
- $t s_1^*, t s_2^* \notin A(D)$ , pues ya tendríamos una  $(t, S^*)$ -flecha.
- $s_1^* x, x s_1^*, s_1^* s_2^*, s_2^* s_1^* \notin A(D)$ , pues  $S^*$  y  $S$  son independientes.
- $s_2^* x \notin A(D)$ .

Así que sólo nos falta analizar las opciones para las flechas restantes:

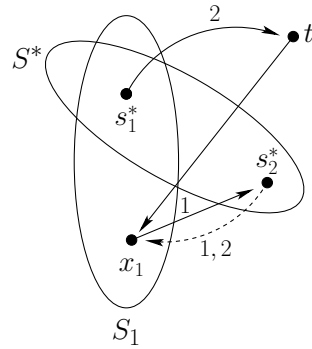


Figura 1.38.

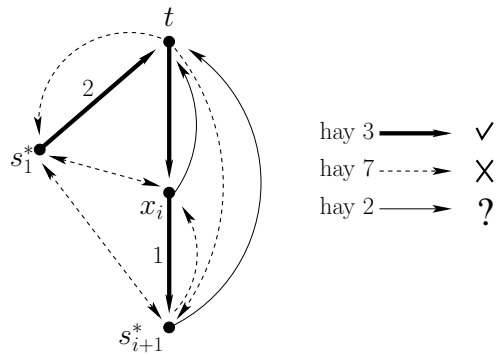


Figura 1.39. Las flechas gruesas son las flechas que sabemos que están en  $D$ , las flechas punteadas son las flechas que no están en  $D$  y las flechas restantes son aquellas que no sabemos si están en  $D$ .

$$tx \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \end{cases}$$

$$xt \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \\ \notin A(D) \dots (3) \end{cases}$$

$$s_2^*t \begin{cases} \in A(D_1) \dots (1) \\ \in A(D_2) \dots (2) \\ \notin A(D) \dots (3) \end{cases}$$

Analicemos los 18 casos de nuevo como sucesiones de números:

Casos (1.1.1), (1.2.1), (2.2.1) y (2.3.1). Esto no puede suceder pues tenemos que  $xs_2^*, s_2^*t \in \text{Asim}(D_1)$  y ya que  $D_1$  es asimétricamente transitiva se debería tener que  $xt \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual no sucede.

Caso (1.1.2). Se tiene que  $D[\{t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_{13}$ , lo cual es una contradicción.

Caso (1.1.3). Se tiene que  $D[\{s_1^*, t, x, s_2^*\}] \cong A_3$ , de nuevo se llega a una contradicción.

Casos (1.2.2), (1.2.3), (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3). Estos casos no se pueden tener, pues se tiene que  $tx, xs_2^* \in \text{Asim}(D_1)$ , lo que implica que  $ts_2^* \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual no sucede.

Caso (2.1.1). Se tiene que  $D[\{t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_{15}$ , lo cual es una contradicción.

Caso (2.1.2). Se tiene que  $D[\{t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_{12}$ , lo cual no puede suceder.

Caso (2.1.3). Se tiene que  $D[\{s_1^*, t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , lo cual nos da una contradicción.

Caso (2.2.2). Se tiene que  $D[\{t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_{14}$  y esto no puede suceder.

Caso (2.2.3). Se tiene que  $D[\{s_1^*t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , lo cual nos da una contradicción.

Caso (2.3.2). Se tiene que  $D[\{t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_{11}$ , que contradice el ser  $\beta'_{D_1}$ -libre.

Caso (2.3.3). Se tiene que  $D[\{s^*t, x, s_2^*\}]$  es isomorfa a  $A_1$ , lo que nos lleva a una contradicción.

Así que sí se tiene una  $(t, S^*)$ -flecha en  $D$ . Por lo tanto, por el Lema de Zorn  $\alpha_{D_1}$  tiene un elemento maximal  $S$  bajo el orden  $\lesssim_{D_1}$ .

- iii) Si  $S \in \alpha_{D_1}$  es maximal y no es núcleo, es decir,  $B_S \neq \emptyset$  y sea  $S'$  un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ , entonces  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y  $S \prec_{D_1} T_S^{S'}$  (Fig. 1.40).

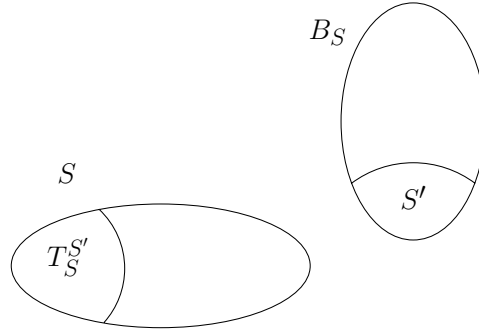


Figura 1.40.

Sea  $S \in \alpha_{D_1}$  un elemento maximal y supongamos que no es un núcleo de  $D$ , es decir,  $B_S = \{v \in D \setminus S \mid \text{no existe una } (v, S)\text{-flecha en } D\} \neq \emptyset$  y sea  $S'$  un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ .

- I)  $T_S^{S'} \cup S' \in \alpha_{D_1}$ . Recordemos que  $T_S^{S'} = \{v \in S \mid \text{no existe una } (v, S')\text{-flecha en } D_1\}$ .

a)  $T \cup S'$  es independiente. Dado que  $T_S^{S'} \subseteq S$  y  $S$  es independiente tenemos que  $T_S^{S'}$  es independiente. Como  $S'$  es un seminúcleo de  $D[B_S]$  módulo  $A(D_1)$  se sigue que  $S'$  es independiente, de modo que solamente necesitamos probar que no hay ninguna flecha de  $D$  entre  $T_S^{S'}$  y  $S'$ .

a.1) No hay  $(T_S^{S'}, S')$ -flechas.

Supongamos que existe  $t \in T_S^{S'}$  y  $s' \in S'$  tal que  $ts' \in A(D)$ . Si  $ts' \in A(D_1)$ , contradice la definición de  $T_S^{S'}$ . Luego  $ts' \in A(D_2)$ . Tenemos  $t \in T_S^{S'} \subseteq S$  y  $S \in \alpha_{D_1}$ , entonces hay una

$(s', S)$ -flecha en  $D$ , pues  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , esto contradice que  $s' \in S' \subset B_S$  (Fig. 1.41).

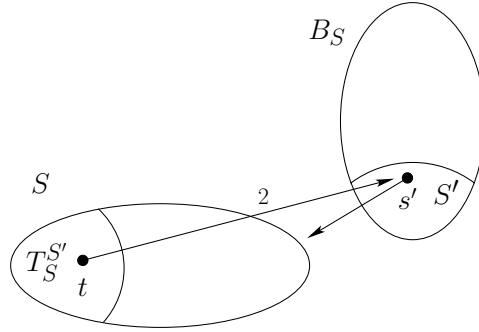


Figura 1.41.

- a.2) No hay  $(S', T_S^{S'})$ -flechas, ya que  $S' \subset B_S$  y  $B_S$  es el conjunto de vértices no absorbidos por  $S$ .
- b) Si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $A(D_2)$ , con  $z \in D \setminus T_S^{S'} \cup S'$ , entonces existe una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha.

Sea  $tz$  una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $D_2$ , con  $z \in D \setminus T_S^{S'} \cup S'$ . Veamos los posibles casos para cada vértice.

Para  $t$ :

- a)  $t \in T_S^{S'}$  ó  
 b)  $t \in S'$ ,

y para  $z$ :

- a)  $z \in B_S \setminus S'$  ó  
 b)  $z \in D \setminus (S \cup B_S)$  ó  
 c)  $z \in S \setminus T_S^{S'}$ .

Observemos los 6 casos como sucesiones:

Caso (a.a). Ya que  $tz \in A(D_2)$ , como  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , entonces existe una  $(z, S)$ -flecha, lo cual contradice la definición de  $B_S$ , por lo que este caso es imposible.

Caso (a.b). Ya que  $t \in T_S^{S'} \subset S$  y  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$  se tiene que existe una  $(z, S)$ -flecha en  $D$ . De

aquí se derivan dos casos: (1) existe una  $(z, T_S^{S'})$ -flecha ó (2) existe una  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha.

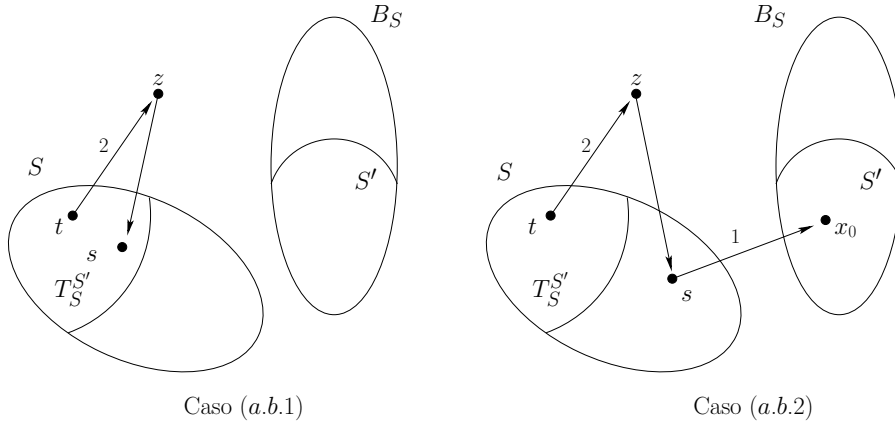


Figura 1.42.

a.b.1) En este caso ya tenemos una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha (Fig. 1.42).

a.b.2) Sea  $zs$  la  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha, sabemos por la definición de  $T_S^{S'}$  que existe  $x_0 \in S'$ , tal que  $s \xrightarrow{1} x_0$  y además  $x_0 \dashrightarrow s$  (Fig. 1.42). Se obtiene así la trayectoria  $(t, z, s, x_0)$  (Fig. 1.43), de la cual podemos observar lo siguiente:

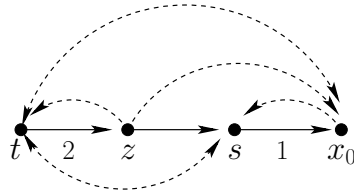


Figura 1.43. Las flechas continuas están en  $D_i$ , con  $i \in \{1, 2\}$ , y las que no están etiquetadas pueden encontrarse en cualquiera de las dos subdigráficas. Las flechas punteadas no están en  $D$ .

◊  $zt, zx_0 \notin A(D)$ , de lo contrario ya habríamos concluido, puesto que  $x_0, t \in T_S^{S'} \cup S'$ .

- ◊  $ts, st \notin A(D)$ , ya que  $S$  es independiente.
- ◊  $tx_0, x_0t \notin A(D)$ , pues  $T_S^{S'} \cup S'$  es independiente.

También sabemos que  $tz \in A(D_2)$  y  $sx_0 \in A(D_1)$ , pero  $x_0s \notin A(D)$ .

Ahora veamos qué sucede con las flechas restantes:

Para  $zs$  puede suceder:

1.  $zs \in A(D_1)$  ó
2.  $zs \in A(D_2)$ .

Para  $sz$  puede suceder:

1.  $sz \in A(D_1)$ ,
2.  $sz \in A(D_2)$  ó
3.  $sz \notin A(D)$ .

Para  $x_0z$  puede suceder:

1.  $x_0z \in A(D_1)$ ,
2.  $x_0z \in A(D_2)$  ó
3.  $x_0z \notin A(D)$ .

Analizaremos estos 18 subcasos, de nuevo, como sucesiones de números:

Subcaso (1.1.1):  $zs, sz, x_0z \in A(D_1)$ . Este caso es imposible, pues se tiene que  $sx_0, x_0z \in \text{Asim}(D_1)$  y por ser  $D_1$  asimétricamente transitiva,  $sz \in \text{Asim}(D_1)$ , lo que contradice que  $zs \in A(D_1)$ .

Subcaso (1.1.2):  $zs, sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \in A(D_2)$ . Se tiene que  $D[z, s, x_0] \cong A_{13}$ , lo cual es una contradicción, pues  $A_{13} \in \beta'_{D_1}$ .

Subcaso (1.1.3):  $zs, sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . Tenemos que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_3 \in \beta'_{D_1}$ , por lo que este caso no se puede dar.

Subcasos (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.3.1), (1,3,2), (1.3.3):  $zs \in \text{Asim}(D_1)$ . Como se tiene que  $sx_0 \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces por

ser  $D_1$  asimétricamente transitiva,  $zx_0 \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual no es cierto. Por lo tanto no se tiene este caso.

Subcaso (2.1.1):  $zs \in A(D_2)$  y  $sz, x_0z \in A(D_1)$ . Este caso no es posible, debido a que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{15}$ .

Subcaso (2.1.2):  $zs, x_0z \in A(D_2)$  y  $sz \in A(D_1)$ . Tenemos que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{12}$ , lo que es una contradicción.

Subcaso (2.1.3):  $zs \in A(D_2)$ ,  $sz \in A(D_1)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . No se puede tener este caso, puesto que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , lo que es una contradicción.

Subcaso (2.2.1):  $zs, sz \in A(D_2)$  y  $x_0z \in A(D_1)$ . En este caso se tiene que  $sx_0, x_0z \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces  $sz \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual no sucede. Por lo tanto este caso no es posible.

Subcaso (2.2.2):  $zs, sz, x_0z \in A(D_2)$ . Se tiene que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{14} \in \beta'_{D_1}$ , por lo tanto no se da este caso.

Subcaso (2.2.3):  $zs, sz \in A(D_2)$  y  $x_0z \notin A(D)$ . De nuevo se tiene que  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a un caso de  $A_2$ , así que este caso es imposible.

Subcaso (2.3.1):  $zs \in A(D_2)$ ,  $sz \notin A(D)$  y  $x_0z \in A(D_1)$ . Tenemos que  $sx_0, x_0z \in \text{Asim}(D_1)$ , entonces deberíamos tener que  $sz \in \text{Asim}(D_1)$ , lo cual no sucede.

Subcaso (2.3.2):  $zs, x_0z \in A(D_2)$  y  $sz \notin A(D)$ . En este caso se tiene que  $D[z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_{11} \in \beta'_{D_1}$ , lo cual nos lleva a una contradicción.

Subcaso (2.3.3):  $zs \in A(D_2)$  y  $sz, x_0z \notin A(D)$ . Tenemos que este caso no es posible, pues  $D[t, z, s, x_0]$  es isomorfa a  $A_1$ .

Así que no es posible tener una  $(z, S \setminus T_S^{S'})$ -flecha y por lo tanto no se da el Caso (a.b);  $t \in T_S^{S'}$  y  $z \in D - (S \cup B_S)$ .

Continuemos con los casos que faltan:

Caso (a.c). Este caso no se puede dar puesto que  $S$  es independiente (Fig. 1.44).

Caso (b.a). Puesto que  $S'$  lo escogimos como un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $B_S$ , entonces existe una  $(z, S')$ -flecha y por



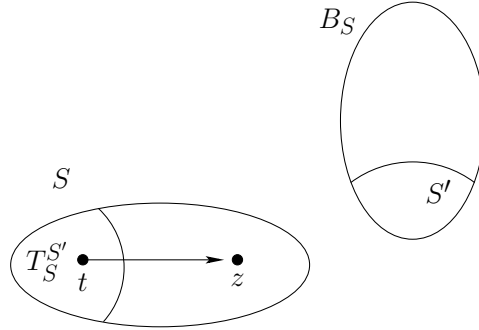


Figura 1.44.

consiguiente una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha (Fig. 1.45).

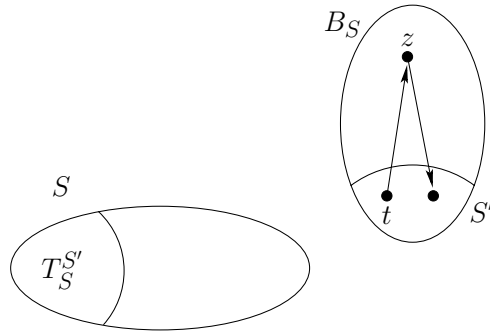


Figura 1.45.

Caso (b.b). De nuevo tenemos que existe una  $(z, S)$ -flecha en  $D$ , pues  $z \notin B_S$ . Si es una  $(z, T_S^{S'})$ -flecha, entonces tenemos una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha, de otro modo tenemos que tal flecha es  $zs$ , con  $s \in S \setminus T_S^{S'}$  (Fig. 1.46).

En este otro caso, la definición de  $T_S^{S'}$  implica que existe  $x_0 \in S'$  tal que  $sx_0 \in A(D_1)$  y  $x_0s \notin A(D)$ . De aquí tenemos dos posibles situaciones:

- i)  $t = x_0$ , por lo tanto tenemos el triángulo  $(t, z, s)$  (Fig. 1.47), de donde sabemos lo siguiente:

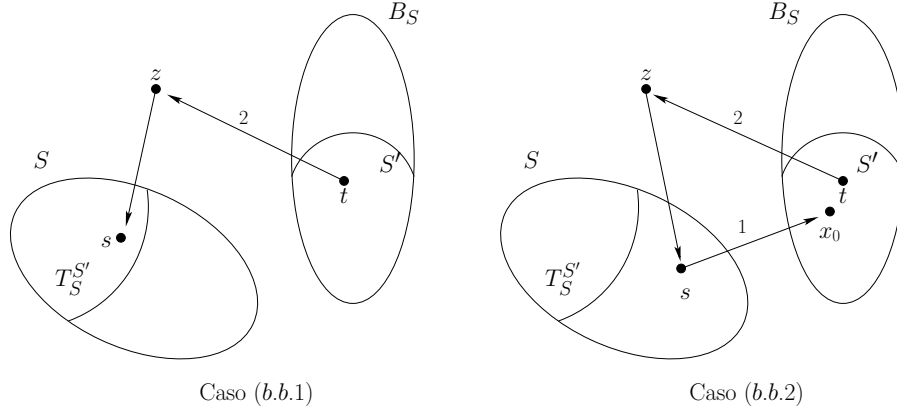


Figura 1.46.

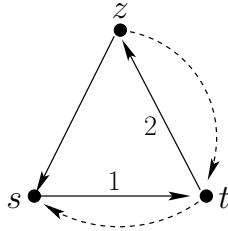


Figura 1.47.

- ◊  $tz \in A(D_2)$  y  $zt \notin A(D)$  de lo contrario tendríamos una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha.
- ◊  $st \in A(D_1)$  y  $ts \notin A(D)$ , esto último por la definición de  $B_S$ .

Así que sólo faltaría ver que sucede con la flecha  $zs$ . Supongamos que  $zs \in Asim(D)$ . Si  $zs \in A(D_1)$ , entonces tendríamos que  $zt \in Asim(D_1)$  (pues  $D_1$  es asimétricamente transitiva) lo cual no es cierto. Si  $zs \in A(D_2)$ , entonces  $D[\{t, z, s\}] \cong A_{11}$ . Así que  $zs \in Sim(D)$ . Si  $zs$  está en  $A(D_2)$ , entonces  $D[\{t, z, s\}]$  sería isomorfa a  $A_{12}$  ó a  $A_{14}$ , lo cual es una contradicción. Así que  $zs \in A(D_1)$ .

Si  $sz \in A(D_1)$ , entonces  $D[t, z, s] \cong A_{13}$ , si no, tenemos  $zt \in \text{Asim}(D_1)$  ( $D_1$  es asimétricamente transitiva), lo cual no se tiene. Por lo tanto no se puede tener tal triángulo.

ii)  $t \neq x_0$ , tenemos así la trayectoria dirigida  $(t, z, s, x_0)$ , con las siguientes propiedades:

- ◊  $zt, zx_0 \notin A(D)$ , si no ya se tendría una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha.
- ◊  $tx_0, x_0t \notin A(D)$ , pues  $S'$  es independiente.
- ◊  $ts \notin A(D)$ , por la definición de  $B_S$  y  $st \notin A(D)$ , si no, estaríamos en el Caso (i).
- ◊  $x_0s \notin A(D)$ , por la definición de  $B_S$ .
- ◊  $tz \in A(D_2)$  y  $sx_0 \in A(D_1)$ .

Obsérvese que esta trayectoria es la misma que aquella que se obtuvo en el Caso (a.b) (2) con las mismas propiedades y como ya se demostró anteriormente, lleva a una contradicción (Fig. 1.43).

Caso (b.c). Este caso es imposible debido a la definición de  $B_S$  (Fig. 1.48).

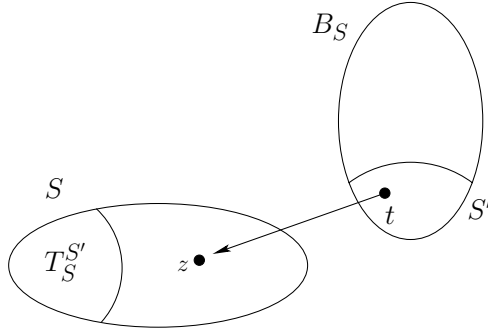


Figura 1.48.

Así concluimos que si existe una  $(T_S^{S'} \cup S', z)$ -flecha en  $D_2$ , entonces existe una  $(z, T_S^{S'} \cup S')$ -flecha.

Por lo tanto  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

- II)  $S \lesssim_{D_1} T_S^{S'} \cup S'$ . Sea  $s \in S$ , si  $s \in T_S^{S'}$ , entonces existe  $s' = s \in T_S^{S'} \cup S'$ . Si  $s \notin T_S^{S'}$ , entonces  $s \in S \setminus T_S^{S'}$  y la definición de  $T_S^{S'}$  implica que existe  $x \in S'$  tal que  $s \xrightarrow{1} x$ . Dado que  $s \in S$ ,  $x \in S' \subseteq B_S$ , se sigue de la definición de  $B_S$ , que  $x \xrightarrow{1} s$ , por lo tanto  $sx \in \text{Asim}(D_1)$ .
- III)  $T_S^{S'} \cup S' \neq S$ . La definición de  $S'$  implica  $S' \neq \emptyset$  y  $S' \cap S = \emptyset$ , de aquí que existe  $n \in S'$  tal que  $n \notin S$ .

Ahora demostraremos que cada subdigráfica inducida de  $D$  satisface las hipótesis del Teorema 1.16 para concluir que satisface (i)-(iii) de la Propiedad  $P(\alpha_{H_1}, \leq)$  (obsérvese que ahora  $H_1$  es la subdigráfica de  $H$  que juega el papel de  $D_1$  en  $D$ ).

- Sea  $H_1 = D_{D_1}[V(H)]$ . Como  $D_1$  es asimétricamente transitiva,  $H_1$  es asimétricamente transitiva.
- $H$  es  $\beta'_{H_1}$ -libre (con  $\beta'_{H_1} = \beta'_{D_1}$ ), donde las flechas etiquetadas con 1 están en  $H_1$ , las etiquetadas con 2 no están en  $H_1$  y las que no tienen etiquetas pueden estar o no en  $H_1$ . Así que como  $D$  es  $\beta'_{D_1}$ -libre,  $H$  es  $\beta'_{H_1}$ -libre.
- $H_1$  no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas, debido a que  $H_1 \subseteq D_1$ .
- Toda subdigráfica inducida de  $H$  es subdigráfica de  $D$ , por lo que tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , el cual es también seminúcleo módulo  $A(H_1)$ .

Así que concluimos que cualquier subdigráfica inducida de  $D$  cumple la Propiedad  $P(\alpha_{H_1}, \leq)$  y por el Teorema 1.9 tiene un núcleo, es decir,  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

■

**Observación 1.17** Una digráfica  $D$  que cumple con las condiciones del Teorema 1.16, cumple no sólo (i)-(iii) de la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , sino también (iv) si  $S_0 \in \alpha_{D_1}$  es maximal, entonces para cada  $S < S_0, S \subset S_0 \cup \Gamma^-(S_0)$ .

**Demostración.** Sean  $S_0 \in \alpha_{D_1}$  maximal y  $S < S_0$ . Si  $x \in S$ , entonces (a)  $x \in S_0$  ó (b) existe  $x_0 \in S_0$  tal que  $x \xrightarrow{1} x_0$  pero  $x_0 \not\xrightarrow{1} x$ , es decir,  $x \in \Gamma^-(S_0)$ . Por lo tanto, en cualquier caso se tiene que  $x \in S_0 \cup \Gamma^-(S_0)$ .

■

### 1.2.1. Análisis de las hipótesis

La hipótesis de que sea  $\beta'_{D_1}$ -libre del Teorema 1.16 es justa. Para demostrarlo se darán a continuación las siguientes digráficas  $B_i$ , con  $i \in \{1, 2, 3, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , que cumplen con:

1.  $B_i$  contiene a  $A_i \in \beta_{D_1}$  como subdigráfica inducida.
2.  $B_i$  no contiene a  $A_j \in \beta_{D_1}$ , con  $i \neq j$ , como subdigráfica inducida.
3.  $D_1$  es una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$  sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_i$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  no vacío.
5.  $B_i$  no tiene núcleo.

De aquí en adelante se escribirá seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , pero teniendo en cuenta que se trata de seminúcleo módulo  $A(D_1)$  *no vacío*.

Sean  $B_1$  la digráfica en la Figura 1.49 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_1$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_1$  marcadas con 1.

1.  $A_1 \subseteq^* B_1$ .  $B_1[\{d, c, a^-, a_1\}] \cong A_1$ .

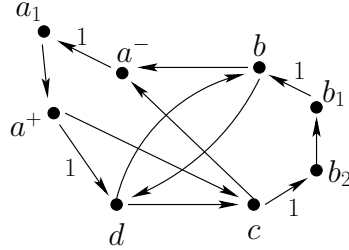


Figura 1.49.  $B_1$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_1$ , cuyas flechas son las de etiqueta 1.

2.  $A_j \not\subseteq^* B_1$ , con  $j \neq 1$ .
  - $A_2 \not\subseteq^* B_1$ . Ya que las únicas flechas asimétricas en  $D_1$  son  $a^- a_1$ ,  $a^+ d$ ,  $cb_2$  y  $b_1 b$  y a  $a^-$ ,  $a^+$ ,  $c$  y  $b_1$  no le llegan flechas simétricas.
  - $A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}, A_{12}, A_{13}, A_{15} \not\subseteq^* B_1$ . Puesto que no hay flechas simétricas de  $B_1$  en  $D_1$ , es decir, flechas simétricas del tipo  $1/j$ , con  $j \in \{1, 2\}$ .
  - $A_{11} \not\subseteq^* B_1$ . Pues es claro que no hay triángulos dirigidos asimétricos.
  - $A_{14} \not\subseteq^* B_1$ . Debido a que la única flecha simétrica es  $bd$ , pero no existe otro vértice que sea vecino a  $b$  y a  $d$ , a la vez.
3. Claramente  $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_1$  tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_1$  es núcleo imperfecta crítica. Esto debido a que  $B_1$  es la digráfica que se obtiene de la digráfica  $\vec{C}_4(1, 2, -2)$  (la cual es núcleo imperfecta crítica por el Teorema 0.32) al partir el vértice  $a$  en dos vértices,  $a^+$  y  $a^-$ , y unirlos por la trayectoria  $(a^+, a_1, a^-)$  de longitud 2 (Teorema 0.30) y reemplazar la flecha  $cb$  por la trayectoria  $(c, b_2, b_1, b)$  (Teorema 0.29). Así que cada subdigráfica inducida propia tiene un seminúcleo

módulo  $A(D_1)$ , puesto que tienen un núcleo y  $B_1$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , por ejemplo  $\{b_1\}$ .

A continuación daremos un contraejemplo para cada uno de los dos casos posibles de  $A_2$ ;  $A_{2.1}$  cuando la única flecha simétrica de  $A_2$  es del tipo 2/1 y  $A_{2.2}$  cuando dicha flecha es del tipo 2/2.

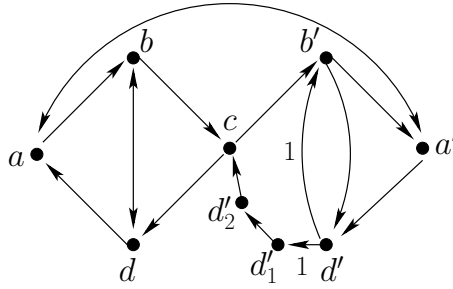


Figura 1.50.  $B_{2.1}$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{2.1}$  con flechas las de etiqueta 1.

Sean  $B_{2.1}$  la digráfica en la Figura 1.50 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{2.1}$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_{2.1}$  marcadas con 1.

1.  $A_{2.1} \subseteq^* B_{2.1}$ .  $B_{2.1}[\{c, b', d', d'_1\}] \cong A_{2.1}$ .
2.  $A_j \not\subseteq^* B_{2.1}$ , con  $j \neq 2$ .
  - $A_1 \not\subseteq^* B_{2.1}$ . La única flecha asimétrica que está en  $D_1$  es  $d'd'_1$ , la única flecha asimétrica que llega a  $d'$  es  $a' \xrightarrow{2} d'$  y la única flecha asimétrica en  $D_2$  que llega a  $a'$  es  $b' \xrightarrow{2} a'$ , pero  $b'$  y  $d'$  son adyacentes.
  - $A_3, A_5, A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* B_{2.1}$ . Pues no hay flechas simétricas del tipo 1/1.
  - $A_4 \not\subseteq^* B_{2.1}$ . La única flecha simétrica del tipo 1/2 es  $d'b'$ . La única flecha asimétrica en  $D_2$  que le llega a  $d'$  es  $a' \xrightarrow{2} d'$ . Y la única flecha asimétrica en  $D_2$  que le llega a  $a'$  es  $b' \xrightarrow{2} a'$ .

- $A_6, A_9, A_{10'}, A_{10''} \not\subseteq^* B_{2.1}$ . Puesto que en  $d'$  no incide otra flecha simétrica, además de  $b'd'$ .
  - $A_8 \not\subseteq^* B_{2.1}$ . La única flecha asimétrica en  $D_2$  que llega a  $d'$  es  $a' \xrightarrow{2} d'$  y la única asimétrica en  $D_2$  que sale de  $b'$  es  $b' \xrightarrow{2} a'$ .
  - $A_{11} \not\subseteq^* B_{2.1}$ . Se puede ver que no hay triángulos asimétricos en  $B_{2.1}$ .
  - $A_{12}, A_{14} \not\subseteq^* B_{2.1}$ . La única flecha asimétrica en  $D_1$  es  $d' \xrightarrow{1} d'_1$  y sale una única flecha asimétrica de  $B_{2.1}$  en  $D_2$  de  $d'_1, d'_1 \xrightarrow{2} d'_2$ , pero  $d'_2$  y  $d'$  no son adyacentes.
  - $A_{15} \not\subseteq^* B_{2.1}$ , ya que no hay dos flechas asimétricas en  $D_1$ .
3. De nuevo se ve que  $D_1$  es asiméricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_{2.1}$  tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_{2.1}$  es núcleo imperfecta crítica pues es obtenida de unir dos  $\vec{C}_4(1, 2, -2)$  por un vértice  $c$ , quitando las flechas  $ac, ca, a'c$  y  $ca'$  (Teorema 0.28) y añadir las flechas simétricas  $aa'$  y  $a'a$  y cambiar la flecha  $d'c$  por una trayectoria de longitud 3,  $(d', d'_1, d'_2)$ , (Teorema 0.29). Así se tiene que toda subdigráfica inducida de  $B_{2.1}$  tiene un núcleo, por consiguiente un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  pero ella no tiene núcleo, aunque sí tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ ,  $\{d'\}$ .

Sean  $B_{2.2}$  la digráfica en la Figura 1.51 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{2.2}$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_{2.2}$  marcadas con 1.

1.  $A_{2.2} \subseteq^* B_{2.2}$ .  $B_{2.2}[\{c_2, d, b, b_1\}] \cong A_{2.2}$ .
2.  $A_j \not\subseteq^* B_{2.2}$ , con  $j \neq 2$ .
  - $A_1, A_4, A_8, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}, A_{11} \not\subseteq^* B_{2.2}$ . No hay dos flechas asimétricas de  $B_{2.2}$  adyacentes en  $D_2$ .
  - $A_3, A_5, A_6, A_9, A_{12}, A_{13}, A_{15} \not\subseteq^* B_{2.2}$ . No hay flechas simétricas del tipo  $1/i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , en  $B_{2.2}$ .



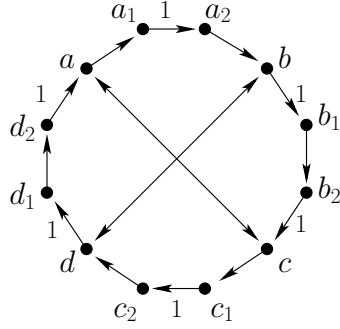


Figura 1.51.  $B_{2,2}$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{2,2}$  cuyas flechas son las de etiqueta 1.

- $A_{14} \not\subseteq^* B_{2,2}$ . Se puede ver que no hay triángulos inducidos en  $B_{2,2}$ .
3.  $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
  4. Cada subdigráfica inducida de  $B_{2,2}$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ . Ya que  $B_{2,2}$  se obtiene de cambiar todas las flechas asimétricas de  $\vec{C}_4(1, 2, -2)$  por trayectorias de longitud 3, es núcleo imperfecta crítica (Teorema 0.29). Así que todas sus subdigráficas inducidas propias tienen un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , puesto que tienen núcleo y ella misma no tiene núcleo, aunque si un tiene seminúcleo módulo  $A(D_1)$ ,  $\{a_1, b, b_2, c_1, d\}$ .

Sean  $B_3$  la digráfica en la Figura 1.52 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_3$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_3$  marcadas con 1.

1.  $A_3 \subseteq^* B_3$ .  $B_3[\{c, b', d', d'_1\}] \cong A_3$ .
2.  $A_j \not\subseteq^* B_3$ , con  $j \neq 3$ . Como  $B_3$  es la misma digráfica que  $A_{2,2}$ , solamente difieren en que la flecha  $b' \rightarrow d'$  está en  $D_1$  en  $B_3$  y en  $B_{2,2}$  no,

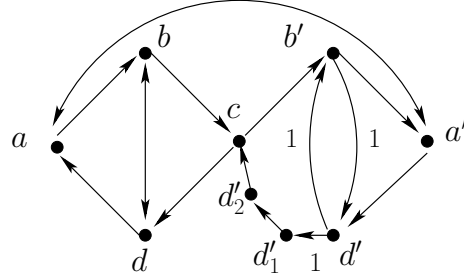


Figura 1.52.  $B_3$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_3$  cuyas flechas son las de etiqueta 1.

sólo se verificará que  $B_3$  no contenga a las digráficas  $A_k$  que usen una flecha del tipo 1/1 y a  $A_2$ .

- $A_2 \not\subseteq^* B_3$ . La única flecha asimétrica de  $B_3$  en  $D_1$  es  $d' \xrightarrow{1} d_1$ , pero en  $d'$  no inciden flechas simétricas del tipo  $2/i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .
- $A_5, A_{10} \not\subseteq^* B_3$ . No existen flechas simétricas adyacentes.
- $A_{13} \not\subseteq^* B_3$ . La única flecha asimétrica que sale de  $b'$  (resp.  $d'$ ) es  $b' \xrightarrow{2} a'$  (resp.  $d' \xrightarrow{1} d_1$ ), pero como  $d_1$  y  $b'$  no son adyacentes se tiene que  $A_{13}$  no es subdigráfica de  $B_3$ .

3.  $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_3$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ . Como ya se dijo  $B_3$  es isomorfa a  $B_{2,1}$ , que ya se vio que es núcleo imperfecta crítica y por consiguiente toda subdigráfica inducida tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  y  $\{d'\}$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $B_3$ .

Sean  $B_{11} \cong A_{11}$  y  $D_1$  subdigráfica inducida por la flecha en  $B_{11}$  marcada con 1. Claramente  $A_{11} \subseteq^* B_{11}$ . Es sumamente fácil comprobar que cumple con las propiedades requeridas.

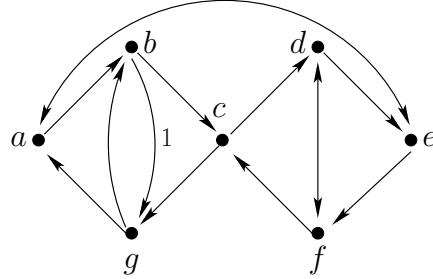


Figura 1.53.  $B_{12}$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $D_1$  cuyas flechas son las etiquetadas con 1.

Sean  $B_{12}$  la digráfica en la Figura 1.53 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{12}$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_{12}$  marcadas con 1.

1.  $A_{12} \subseteq^* B_{12}$ .  $B_{12}[\{b, c, g\}] \cong A_{12}$ .
2.  $A_j \not\subseteq^* B_{12}$ , con  $j \neq 12$ .
  - $A_1 \not\subseteq^* B_{12}$ . La única flecha asimétrica de  $B_{12}$  en  $D_1$  es  $bc$ . La única flecha asimétrica de  $B_{12}$  en  $D_2$  que llega a  $b$  (resp.  $a$ ) es  $a \xrightarrow{2} b$  (resp.  $g \xrightarrow{2} a$ ), pero  $g$  es adyacente a  $b$ .
  - $A_2 \not\subseteq^* B_{12}$ . La única flecha simétrica del tipo  $2/i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , que llega a  $b$  es  $gb$ , pero  $g$  y  $c$  son adyacentes.
  - $A_3, A_5, A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* B_{12}$ . No hay flechas simétricas del tipo  $1/1$ .
  - $A_4 \not\subseteq^* B_{12}$ . La única flecha simétrica del tipo  $1/2$  es  $bg$  y la única flecha asimétrica de  $B_{12}$  que llega a  $b$  es  $a \xrightarrow{2} b$ , pero  $a$  es adyacente a  $g$ .
  - $A_6, A_9, A_{10'}, A_{10''} \not\subseteq^* B_{12}$ . No hay flechas simétricas adyacentes.
  - $A_7 \not\subseteq^* B_{12}$ . Sólo hay una flecha asimétrica de  $B_{12}$  en  $D_1$ .
  - $A_8 \not\subseteq^* B_{12}$ . No hay dos flechas asimétricas de  $B_{12}$  en  $D_1$ , que lleguen a un mismo vértice.
  - $A_{11} \not\subseteq^* B_{12}$ . No hay triángulos asimétricos.

- $A_{14} \not\subseteq^* B_{12}$ . Las flechas asimétricas de  $B_{12}$  en  $D_2$  que salen de  $c$  son  $c \xrightarrow{2} d$  y  $c \xrightarrow{2} g$ , pero desde  $g$  y  $d$  no hay flechas simétricas del tipo  $2/2$  que lleguen a  $b$ .

3. Se puede ver fácilmente que  $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_{12}$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_{12}$  tiene a  $\{b\}$  como seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_{12}$  es núcleo imperfecta crítica pues  $B_{12} = \vec{C}_4(1, 2, -2) \ominus \vec{C}_4(1, 2, -2)$ , por lo tanto  $B_{12} - b$  es núcleo perfecta (Teorema 0.28).
5.  $B_{12}$  no tiene núcleo, puesto que  $B_{12}$  es núcleo imperfecta crítica.

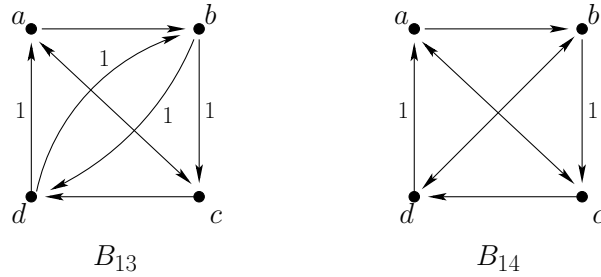


Figura 1.54.  $B_{13}$  y  $B_{14}$ . La subdigráfica  $D_1$  de  $B_{13}$  (resp.  $B_{14}$ ) es la subdigráfica generadora  $B_{13}$  (resp.  $B_{14}$ ), con flechas de etiqueta 1.

Sean  $B_{13}$  y  $B_{14}$  las digráficas que aparecen en la Figura 1.54 y como subdigráfica  $D_1$  de  $B_{13}$  (resp.  $B_{14}$ ) la subdigráfica generadora de  $B_{13}$  (resp.  $B_{14}$ ) que tiene por flechas a las flechas de  $B_{13}$  (resp.  $B_{14}$ ) marcadas con 1.

Se puede comprobar fácilmente que  $A_{13} \subseteq^* B_{13}$  y  $A_{14} \subseteq^* B_{14}$  y que  $B_{13}$  y  $B_{14}$  cumplen con las propiedades requeridas (véase el Teorema 0.32).

Sean  $B_{15}$  la digráfica en la Figura 1.55 y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{15}$  que tiene por flechas a las flechas de  $B_{15}$  marcadas con 1.

1.  $A_{15} \subseteq^* B_{15}$ .  $B_{15}[\{g, b, c, \}] \cong A_{15}$ .

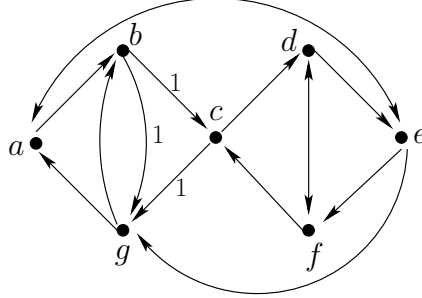


Figura 1.55.  $B_{15}$  y  $D_1$  la subdigráfica generadora de  $B_{15}$  con aquellas flechas etiquetadas con 1.

2.  $A_j \not\subseteq^* B_{15}$ , con  $j \neq 15$ .

- $A_1 \not\subseteq^* B_{15}$ . Las únicas dos flechas asimétricas de  $B_{15}$  en  $D_1$  son  $bc$  y  $cg$ . La única flecha asimétrica de  $B_{15}$  en  $D_2$  que llega a  $b$  (resp.  $c$ ) es  $a \xrightarrow{2} b$  (resp.  $f \xrightarrow{2} c$ ) y la única flecha asimétrica de  $B_{15}$  en  $D_2$  que llega a  $a$  (resp.  $f$ ) es  $g \xrightarrow{2} a$  (resp.  $e \xrightarrow{2} f$ ), pero  $g$  y  $c$  (resp.  $e$  y  $g$ ) son adyacentes.
- $A_2 \not\subseteq^* B_{15}$ . La única flecha simétrica del tipo  $2/i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , que llega a  $b$  es  $gb$ , pero  $g$  es adyacente a  $c$  y en  $c$  no inciden flechas simétricas.
- $A_3, A_5, A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* B_{15}$ , pues no hay flechas simétricas del tipo  $1/1$ .
- $A_4 \not\subseteq^* B_{15}$ . La única flecha simétrica del tipo  $1/2$  es  $bg$  y la única flecha asimétrica de  $B_{15}$  en  $D_2$  que llega a  $b$  es  $a \xrightarrow{2} b$ , pero  $a$  y  $g$  son adyacentes.
- $A_6, A_9, A_{10'}, A_{10''} \not\subseteq^* B_{15}$ . No existen dos flechas simétricas que sean adyacentes.
- $A_8 \not\subseteq^* B_{15}$ . La única flecha asimétrica de  $B_{15}$  que sale de  $g$  es  $g \xrightarrow{2} a$ , pero en  $a$  no llega otra flecha asimétrica.
- $A_{11}, A_{12}, A_{14} \not\subseteq^* B_{15}$ . La única flecha asimétrica de  $B_{15}$  en  $D_2$

que sale de  $c$  (resp.  $g$ ) es  $c \xrightarrow{2} d$  (resp.  $g \xrightarrow{2} a$ ), pero  $d$  (resp.  $a$ ) no es adyacente a  $b$  (resp.  $c$ ).

3.  $D_1$  es asimétricamente transitiva. Tenemos que  $b \xrightarrow{1} c$ ,  $c \not\xrightarrow{1} b$  y  $c \xrightarrow{1} g$ ,  $g \not\xrightarrow{1} c$ , entonces tenemos que  $b \xrightarrow{1} g$  y  $g \not\xrightarrow{1} b$  y son todas las flechas de  $D_1$ . Y claramente,  $D_1$  no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
4. Cada subdigráfica inducida de  $B_{15}$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_{15}$  tiene como seminúcleo módulo  $A(D_1)$  a  $\{b\}$ . Cualquier subdigráfica de  $B_{15}$  que contiene a  $b$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .  $B_{15} - b$  (resp.  $B_{15} - \{b, a\}$ ) tiene a  $\{a\}$  (resp.  $\{g\}$ ) como seminúcleo. Y  $B_{15} - \{g, b, a\}$  es claramente núcleo perfecta (véase el Teorema 0.32).
5.  $B_{15}$  no tiene núcleo. Por contradicción, supongamos que tiene núcleo  $N$ . Si  $c \in N$ , entonces  $N = \{a, c\}$  ó  $N = \{e, c\}$ . Si  $N = \{a, c\}$  (resp.  $N = \{e, c\}$ ), entonces  $f \notin N$  (resp.  $g \notin N$ ), pero no hay flecha de  $f$  (resp.  $g$ ) hacia  $N$ , por lo que  $c \notin N$ . Si  $a \in N$  (resp.  $e$ ), entonces se tiene que  $b, g \notin N$  (resp.  $d, f \notin N$ ), pero no hay flechas de  $b$  (resp.  $d$ ) hacia  $N$ , por lo tanto  $a, e \notin N$ . Supongamos ahora que  $g \in N$ , entonces  $b \notin N$ , pero de  $a$  no sale ninguna flecha hacia  $N$ , por lo tanto  $g \notin N$ , pero  $f \notin N$ . De otro modo  $e, d \notin N$  y no habría  $(e, N)$ -flechas, pero si  $g, f \notin N$ , entonces  $c$  no es absorbido por  $N$ , lo que contradice que  $N$  sea un núcleo de  $B_{15}$ .

En el Teorema 1.15, la hipótesis ser  $\Gamma_{D_1}$ -libre no se sabe si es justa o no. Se buscó sin éxito contraejemplos que nos pudieran mostrar que tal hipótesis es justa. Estos ejemplos claramente tienen que ser digráficas infinitas. Así que sería de mucha utilidad definir operaciones entre digráficas como las mencionadas en las Definiciones 0.17, 0.18 y 0.19, para digráficas infinitas, que preserven el ser núcleo imperfectas críticas (aunque cabe recordar que no se conocen digráficas infinitas núcleo imperfectas críticas) u operaciones que puedan tener una infinidad de factores. Esto podría ser una línea de investigación muy interesante dentro de la teoría de núcleos.

Lo que sí se puede decir es que la hipótesis de ser  $\beta_{D_1}$ -libre sí es justa y los contraejemplos que se tienen para el Teorema 1.16,  $B_1, B_{2,1}, B_{2,2}, B_3, B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}$ , sirven también para demostrarlo, con  $B_{15}$  como contraejemplo para  $A_7$ . Sólo faltaría mostrar que ninguna digráfica  $B_i$  contiene como subdigráfica inducida a  $A_j$ , con  $j \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''\}$ , lo cual se puede verificar de manera análoga a como se verificó para  $j \in \{1, 2, 3, 11, 12, 13, 14, 15\}$ , con  $j \neq i$  (obsérvese que  $A_{15} \subseteq^* A_7$ , así que si  $A_{15}$  no está inducida en  $B_i$ , tampoco lo está  $A_7$ ).

## Capítulo 2

# Sobre la estructura de *algunas* digráficas con o sin núcleo

En este capítulo daremos resultados sobre la estructura de digráficas núcleo imperfectas críticas, finitas o infinitas. Aunque cabe mencionar que hasta el momento no se conocen ejemplos de digráficas núcleo imperfectas críticas infinitas. También se dan condiciones suficientes para que una digráfica finita sea núcleo perfecta. El contenido de este capítulo generaliza los resultados obtenidos por Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [19].

### 2.1. Seminúcleos módulo $(R, A(D_1))$ y trayectorias dirigidas $(K, D_2)$ -normales

En esta sección introduciremos los conceptos de seminúcleo y seminúcleo fuerte de una digráfica módulo un conjunto de flechas y también un conjunto de vértices, de esta manera generalizamos el concepto de seminúcleo y seminúcleo fuerte de una digráfica módulo solamente un conjunto de vértices que fue dado por Galeana-Sánchez y Neumann-Lara, [19]. Usando estos



conceptos establecemos el Teorema 2.5, el cual es la herramienta principal usada en este capítulo. Recordemos nuevamente que  $D_2 = D - D_1$ .

**Notación 2.1** Si  $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$  es un ciclo dirigido, denotaremos (Fig. 2.1):

$$\mathcal{C}_{u_0}^0 = \{u_i \mid i \equiv 0 \pmod{2} \text{ con } i \neq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{u_0}^1 = \{u_i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\}$$

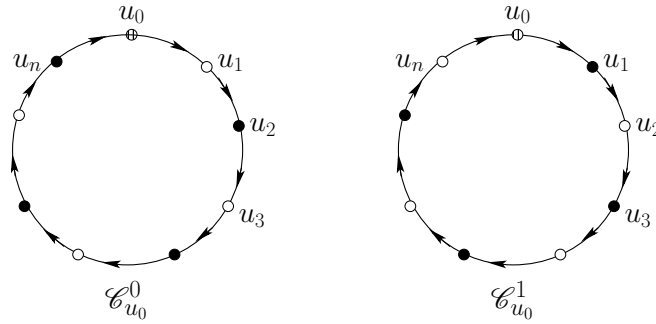


Figura 2.1. Los vértices en negro son los vértices de  $\mathcal{C}$  que están en  $\mathcal{C}_{u_0}^i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Para una trayectoria  $P = (u_0, u_1, \dots, u_n)$ , denotamos:

$$P^0 = \{u_i \mid i \equiv 0 \pmod{2}\} \quad \text{y} \quad P^1 = \{u_i \mid i \equiv 1 \pmod{2}\}.$$

**Definición 2.2** Sean  $D$  una digráfica,  $A \subseteq A(D)$ ,  $I, R \subset V(D)$  y consideremos las siguientes condiciones:

- i)  $I \cap R^c$  es un conjunto independiente.
- i')  $D$  no contiene  $(I \cap R^c, I)$ -flechas.
- ii) Si  $uv \in A(D) \setminus A$ ,  $u \in I \cap R^c$  y  $v \in I^c \cap R^c$ , entonces existe  $w \in I$  tal que  $vw \in A(D)$ .

Si se cumplen (i) e (ii) decimos que  $I$  es un **Seminúcleo de  $D$  módulo  $(R, A)$** . (Véase la Figura 2.2; la región sombreada de  $I$  es independiente). Si

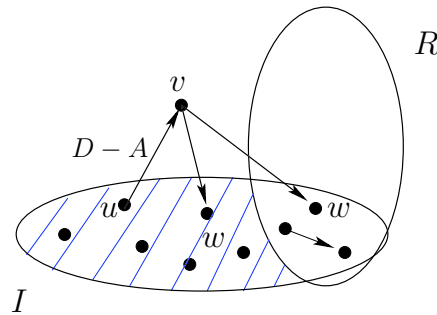


Figura 2.2. Seminúcleo módulo  $(R, A)$ .

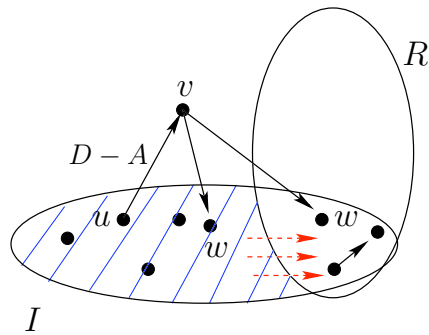


Figura 2.3. Seminúcleo fuerte módulo  $(R, A)$ .

se cumplen (i') e (ii) decimos que  $I$  es un **Seminúcleo fuerte de  $D$  módulo  $(R, A)$** . (Véase la Figura 2.3; la región sombreada de  $I$  es independiente y las flechas punteadas no están permitidas).

Nótese que ahora tenemos un seminúcleo módulo un conjunto de flechas, así como un conjunto de vértices. Si  $S$  es un seminúcleo módulo  $(R, A)$ , podríamos pensarlo casi como un seminúcleo módulo  $A$ , excepto que la independencia no se cumpliría precisamente por los vértices contenidos en  $R$  y las condiciones de absorción de un seminúcleo módulo  $A$  sólo se cumplen para las flechas que salen de  $S$  pero que no salen de  $R$ , dicho de otra manera,

la parte de  $S$  contenida en  $R$  es lo que *posiblemente echa a perder* que  $S$  sea un seminúcleo módulo  $A$ . Si  $S$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(R, A)$ , también es un seminúcleo módulo  $(R, A)$  que no tiene  $(I \cup R^c, R)$ -flechas.

**Definición 2.3** Sean  $D$  una digráfica,  $B$  una subdigráfica de  $D$  y  $K \subset V(D)$ . Una trayectoria dirigida  $T = (w_0, w_1, \dots, w_n)$  en  $D$  es  $(K, B)$ -normal si  $T$  satisface (Fig. 2.4):

i)  $V(T) \cap K = T^0$  ó  $V(T) \cap K = T^1$ .

ii) Si  $s < j < n, w_j \in K^c$  y  $w_s \in K$ , entonces  $w_j w_s \notin A(D)$ .

iii) Si  $w_j \in K$ , entonces  $w_j w_{j+1} \in A(\text{Asim}(D)) \cap A(B)$ .

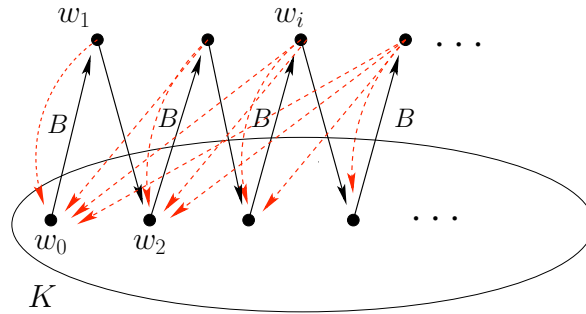


Figura 2.4. Trayectoria  $(K, B)$ -normal. Las flechas continuas son las flechas de la trayectoria  $T$ , de éstas las etiquetadas con  $B$  están en la subdigráfica  $B$  y las flechas punteadas son aquellas que no están en  $D$ .

**Observación 2.4** Cualquier trayectoria dirigida  $(K, B)$ -normal pasa por  $K$  y  $K^c$  alternadamente y toda flecha que empieza en  $K$  está en  $A(\text{Asim}(D)) \cap A(B)$ .

**Teorema 2.5** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1$  una subdigráfica de  $D$ . Si  $I_0, I, R \subset V(D)$  son tales que  $I_0 \subset I, I_0 \cap R = \emptyset$  y satisfacen que:

- a)  $I$  es un seminúcleo fuerte de  $D$  módulo  $(R, A(D_1))$ .
- b) Cada  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida e  $(I, D_2)$ -normal pasa por  $U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$ .

Entonces  $S = \{w \in I \mid \text{existe una } (I_0, w)\text{-trayectoria dirigida e } (I, D_2)\text{-normal que no pasa por } U\}$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y además  $I_0 \subset S \subset I \cap R^c$ .

### Demostración.

1.  $U \subset I^c \cap R^c$ . Por la definición de  $U$  se tiene que  $U \subset R^c$ , falta probar que  $U \subset I^c$ . Supongamos lo contrario, sea  $u \in U$  tal que  $u \in I$  (Fig. 2.5), entonces  $u \in \Gamma^-(I_0) \cap R^c \cap I$ . Así existe  $z \in I_0$  tal que  $uz \in A(D)$ . Como  $I_0 \subset R^c \cap I$ , entonces  $u, z \in R^c \cap I$ , lo cual contradice la hipótesis (a).

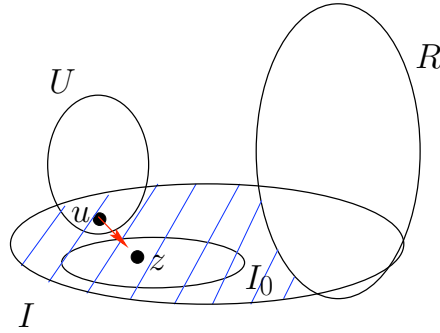


Figura 2.5. La parte sombreada,  $R^c \cap I$ , es independiente.

2.  $I_0$  es independiente, pues  $I_0 \subset R^c \cap I$  (por hipótesis (a)  $R^c \cap I$  es independiente).
3.  $I_0 \subset S$ . Para cada  $x \in I_0$  la trayectoria  $(x)$  es una  $(I_0, x)$ -trayectoria  $(I, D_2)$ -normal (por vacuidad) y no pasa por  $U$ , pues como  $I_0 \subset I$  y  $U \subset I^c$  (por (1)), se tiene que  $I_0 \cap U = \emptyset$ , así que  $x \notin U$ .

4.  $S \subset R^c$ . De lo contrario existe  $s \in S$  tal que  $s \in R$ , por lo tanto existe una  $(I_0, S)$ -trayectoria,  $T$ ,  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ . Pero a su vez  $T$  es una  $(I_0, R)$ -trayectoria,  $(I, D_2)$ -normal, por lo tanto, por la hipótesis (b), pasa por  $U$ , lo cual es una contradicción.
5.  $S \subset I \cap R^c$ . Por la definición de  $S$ ,  $S \subset I$  y por (4),  $S \subset R^c$ .
6.  $D$  no contiene  $(S, I)$ -flechas. Por (5),  $S \subset I \cap R^c$ . Por la hipótesis (a),  $D$  no contiene  $(I \cap R^c, I)$ -flechas. Por lo tanto  $D$  no contiene  $(S, I)$ -flechas (Fig. 2.6).

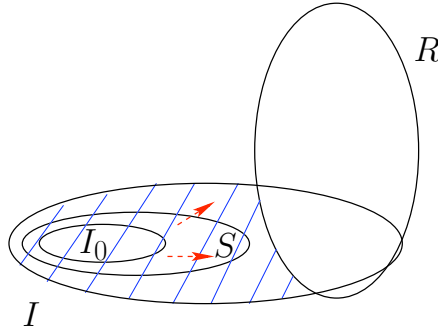


Figura 2.6. Las flechas punteadas están prohibidas.

7.  $S$  es independiente. Por (5),  $S \subset I$  y por (6) no hay  $(S, S)$ -flechas (Fig. 2.6).
8.  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ . Supongamos lo contrario, así que como  $S$  es independiente (por (7)) existe  $s \in S$  y  $w \in D - S$ , tal que  $sw \in A(D_2)$  y  $D$  no contiene  $(w, S)$ -flechas (Fig. 2.7).

Por la definición de  $S$ , existe una  $(I_0, s)$ -trayectoria,  $T$ ,  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ . Sea  $T = (w_0, w_1, \dots, w_n = s)$ , con  $w_0 \in I_0$ . La extendemos al camino  $T' = (w_0, w_1, \dots, w_n, w)$  (Fig. 2.8).

Obsérvese que  $l(T)$  es par y  $T^0 \subset I$ .

8.1.  $w \in I^c$ . Obsérvese que  $w \notin I \cap R^c$ , pues  $s \in I \cap R^c$  e  $I \cap R^c$  es independiente. Si  $w \in I$ , entonces  $w \in I \cap R$  y como  $S \subset I \cap R^c$  se

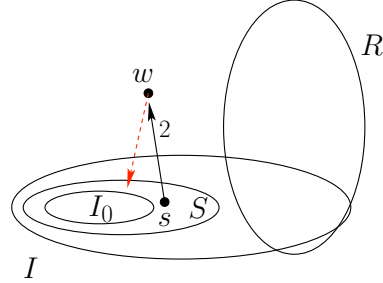


Figura 2.7. La flecha  $sw \in A(D_2)$  y no hay  $(w, S)$ -flechas.

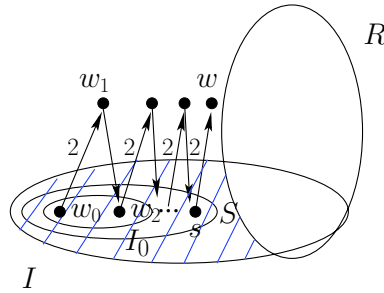


Figura 2.8. Las flechas son de la trayectoria  $T$ . La parte sombreada es independiente.

tendría una  $(I \cap R^c, I)$ -flecha lo que contradice que  $I$  sea un seminúcleo fuerte de  $D$  módulo  $(R, A(D_1))$  (Fig. 2.9). 8.2.  $T'$  es una trayectoria. Por contradicción, supongamos que  $w = w_i$ , para alguna  $i < n$  impar ( $i$  no puede ser par debido a que no hay  $(I \cap R^c, I \cap R^c)$ -flechas), entonces tenemos la flecha  $ww_{i+1} \in A(D)$ . Nótese que  $(w_0, T, w_{i+1})$  es una  $(I_0, w_{i+1})$ -trayectoria  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ , pues  $T$  era  $(I, D_2)$ -normal y no pasa por  $U$ , así que  $w_{i+1} \in S$ . Por lo tanto tenemos una  $(w, S)$ -flecha en  $D$ , lo que es una contradicción con el hecho de que no hay  $(w, S)$ -flechas en  $D$  (Fig. 2.10).

8.3.  $T'$  es  $(I, D_2)$ -normal. Por (8.1),  $w \in I^c$  y por la elección de  $w$ ,

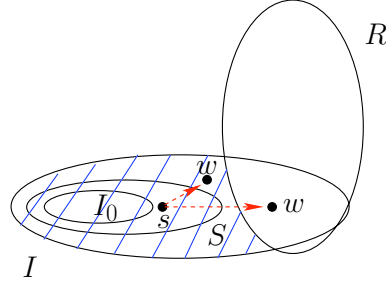


Figura 2.9.  $w \notin I$  pues las flechas punteadas no están en  $D$ .

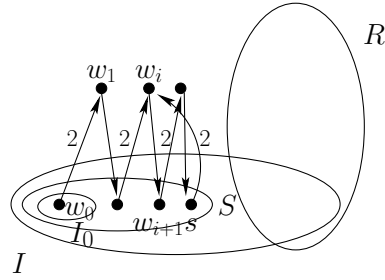


Figura 2.10. Si  $T'$  no es trayectoria, existe una  $(w, S)$ -flecha.

$w_n w \in A(D_2) \cap \text{Asim}(D)$ .

8.4.  $w \notin R$ . Si  $w \in R$ , entonces  $T'$  es una  $(I_0, R)$ -trayectoria,  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ , pues  $T$  no lo hacia y  $w \notin R^c \cap U$ , lo que contradice la hipótesis (b)

8.5.  $w \in I^c \cap R^c$ , por (8.1) y (8.4).

8.6. Existe  $z \in I$  tal que  $wz \in A(D)$ . Como  $s \in S \subset I \cap R^c$  (por (5)) y  $w \in I^c \cap R^c$  (por (8.5)), se sigue de la hipótesis de que  $I$  es un seminúcleo fuerte de  $D$  módulo  $(R, A(D_1))$  (Fig. 2.11).

8.7.  $T'' = (w_0, w_1, \dots, w_n, w, z)$  es una trayectoria  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ .

a)  $T''$  es trayectoria. De lo contrario,  $z = w_i$ , con  $0 \leq i \leq n$ ,  $i$  no

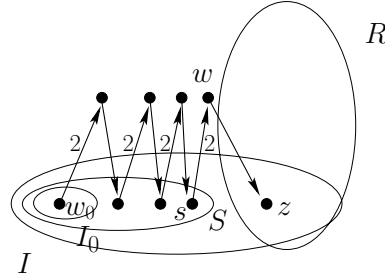


Figura 2.11.

puede ser impar pues  $z \in S$  y  $T^0 \subset I$ . Nótese que  $w_i$  está en  $S$ , ya que  $(w_0, T, w_i)$  es una  $(I_0, w_i)$ -trayectoria,  $(I, D_2)$ -normal, que no pasa por  $U$ , pues  $T$  es  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ . Por lo tanto se tiene una  $(w, S)$ -flecha en  $D$ , que contradice la elección de  $w$  (Fig. 2.12).

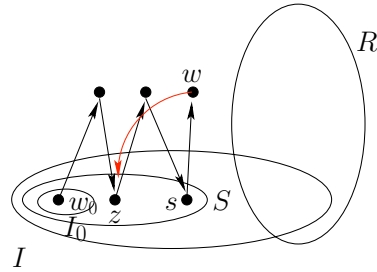


Figura 2.12. La flecha  $wz$  está prohibida puesto que no existen  $(w, S)$ -flechas.

- b)  $T''$  es  $(I, D_2)$ -normal. Ya que  $T'$  es  $(I, D_2)$ -normal,  $w \notin I$  y  $z \in I$ .
- c)  $T''$  no pasa por  $U$ , debido a que  $T'$  no pasa por  $U$  y que  $z \notin U \subset I^c$ .

Así que  $z \in S$  y  $wz \in A(D)$ , lo que contradice que no existen  $(w, S)$ -flechas. Por lo tanto  $S$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $D$ .

■



Los Teoremas 2.6 y 2.8 son variaciones útiles del Teorema 2.5.

**Teorema 2.6** Sean  $D$  una digráfica y  $D_1 \subset D$ . Supóngase que  $I_0, I, R \subset V(D)$ , tales que  $\emptyset \neq I_0 \subset I$ ,  $I_0 \cap R = \emptyset$  y que satisfacen las siguientes condiciones:

- i)  $I$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(R, A(D_1))$  de  $D$ .
- ii)  $D$  no contiene seminúcleos módulo  $A(D_1)$ ,  $S$ , tal que  $I_0 \subset S \subset I \cap R^c$ .

Entonces existe una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida, directa e  $(I, D_2)$ -normal,  $T = (t_0, \dots, t_n)$ , que no pasa por  $U = \Gamma^-(I_0) \cap R^c$ , la cual satisface las siguientes propiedades:

- a)  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales.
- b)  $l(T)$  es par si y sólo si  $t_n \in I$ .

**Demostración.** Por (ii), se sigue del Teorema 2.5 que existe una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida e  $(I, D_2)$ -normal, que no pasa por  $U$ .

Tomemos una de tales trayectorias que tenga longitud mínima,  $T = (t_0, \dots, t_n)$ .

1.  $T^0 \subset I$ . Ya que  $t_0 \in I_0 \subset I$  y  $T$  es  $(I, D_2)$ -normal.
2.  $V(T) \cap R = \{t_n\}$ . De lo contrario, si existe  $t_i$ , con  $i < n$  y  $t_i \in R$ , entonces  $T' = (t_0, T, t_i)$  es una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida e  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$  y  $l(T') < l(T)$ , que contradice la minimalidad de  $T$ . Por lo tanto  $T$  es directa.
3.  $t_{2i} \in I \cap R^c$  y  $t_{2j+1} \in I^c \cap R^c$ , con  $0 \leq 2i < n$  y  $0 \leq 2j + 1 < n$ . Se sigue inmediato de (1) y (2).
4.  $T^0 \setminus \{t_n\} \subset I \cap R^c$ , por (3).
5.  $T$  no tiene  $(T^0 \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales, ya que  $I$  es un seminúcleo fuerte de  $D$  módulo  $(R, A(D_1))$ .

6.  $T$  no tiene  $(T^1 \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales. De lo contrario existe  $t_{2i+1}$  y  $t_{2j}$ , con  $0 < 2i + 1 < n$  y  $0 \leq 2j \leq n$ , tal que  $t_{2i+1}t_{2j} \in A(D)$ .

Caso 1)  $2i + 1 < 2j$ , entonces  $(t_0, T, t_{2i+1}) \cup (t_{2i+1}t_{2j}) \cup (t_{2j}, T, t_n)$  es una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida e  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$ , con longitud menor que la de  $T$ , de nuevo se contradice la minimalidad de  $T$ .

Caso 2)  $2i + 1 > 2j$ , esto no sucede debido a la definición de trayectoria  $(I, D_2)$ -normal.

7.  $l(T)$  es par si y sólo si  $t_n \in I$ .  $l(T)$  es par si y sólo si  $n$  es par y esto sucede si y sólo si  $t_n \in T^0 \subset I$ , por (1).

Así que  $T$  es una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida, directa e  $(I, D_2)$ -normal que no pasa por  $U$  y que cumple:

- a)  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales (por (5) y (6)).
- b)  $l(T)$  es par si y sólo si  $t_n \in I$  (por (7)).

■

**Definición 2.7** Diremos que una digráfica  $D$  es **núcleo perfecta módulo**  $A(D_1)$ , con  $D_1 \subset D$ , si toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  distinto del vacío.

**Teorema 2.8** Sea  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y supongamos que toda cadena de  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior. Si  $I_0, I, R \subset V(D)$ , tales que  $\emptyset \neq I_0 \subset I$ ,  $I_0 \cap R = \emptyset$  satisfacen que:

- i)  $I$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(R, A(D_1))$  de  $D$ .
- ii)  $D$  no tiene núcleo.
- iii)  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Entonces existe una  $(I_0, R)$ -trayectoria dirigida, directa e  $(I, D_2)$ -normal,  $T$ , que no pasa por  $\Gamma^-(I_0) \cap R^c$  y satisface (a) y (b) del Teorema 2.6.

**Demostración.** Supongamos que el Teorema 2.8 es falso, entonces (por el Teorema 2.6)  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ ,  $S \neq \emptyset$ , tal que  $I_0 \subset S \subset I \cap R^c$ . Por la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ -(ii),  $(\alpha_{D_1}, \leq_{D_1})$  tiene elemento maximal.

Caso 1)  $S$  es un elemento maximal de  $(\alpha_{D_1}, \leq_{D_1})$ . Como  $S$  no es núcleo de  $D$ , pues  $D$  no tiene núcleo (por hipótesis (ii)), entonces  $B_S \neq \emptyset$ . Como

$$I_0 \subset S,$$

entonces

$$B_S \subset V(D) \setminus S \subset V(D) \setminus I_0,$$

por lo tanto  $D[B_S]$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$  (por hipótesis (iii)). Sea  $S'$  un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D[B_S]$ , entonces, por la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ -(iii),  $T_S^{S'} \cup S'$  es un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$  de  $D$  y  $T \cup S' > S$ , lo que contradice que  $S$  es maximal.

Caso 2)  $S$  no es un elemento maximal de  $(\alpha_{D_1}, \leq_{D_1})$ . Por la Proposición 0.36 existe  $S^* \in \alpha_{D_1}$ , un elemento maximal tal que  $S^* > S$ . Por (ii),  $S^*$  no es núcleo, por lo tanto  $B_{S^*} \neq \emptyset$ .

Como  $S \subset S^* \cup \Gamma^-(S^*)$  por la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ -(iv), entonces  $I_0 \subset S^* \cup \Gamma^-(S^*)$ . Por la definición de  $B_{S^*}$ , tenemos que

$$B_{S^*} \subset V(D) \setminus S^* \text{ y}$$

$$B_{S^*} \cap \Gamma^-(S^*) = \emptyset,$$

entonces

$$B_{S^*} \subset V(D) \setminus \Gamma^-(S^*),$$

así que

$$B_{S^*} \subset V(D) \setminus (S^* \cup \Gamma^-(S^*)),$$

por lo tanto

$$B_{S^*} \subset V(D) \setminus I_0.$$

Así que por la hipótesis (iii)  $D[B_{S^*}]$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ ,  $S'$ . Y por la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ -*(iii)*,

$$T_{S^*} \cup S' \in \alpha_{D_1}, \text{ con } T_{S^*} \cup S' > S^*,$$

lo que contradice que  $S^*$  es maximal.

■

## 2.2. Estructura de ciertas digráficas sin núcleo

En esta sección aplicaremos los resultados de la Sección 2.1 para conocer la estructura de ciertas digráficas sin núcleo que cumplen la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ . Tales propiedades estructurales de estas digráficas aseguran la existencia de ciclos de longitud impar o trayectorias  $(K, B)$ -normales, que no contienen pseudodiagonales especiales y hasta en algunos casos los ciclos evitan pasar por cierto conjunto de vértices. Estos resultados serán aplicados en la Sección 2.3 para dar propiedades estructurales de las digráficas núcleo imperfectas críticas que también cumplan la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ .

**Teorema 2.9** *Sean  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ ,  $u, v \in V(D)$  y  $N_u$  núcleo de  $D - u$ . Supongamos que toda cadena de  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y que se satisface lo siguiente:*

- i)  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .*
- ii)  $D - w$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , para cada  $w \in \Gamma^+(v)$ .*
- iii)  $D$  no tiene núcleo.*

*Entonces existe una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida y  $(N_u, D_2)$ -normal,  $T$ , sin  $(V(T) \setminus \{u\}, T^i)$ -pseudodiagonales (donde  $i$  es el residuo de  $l(T) + 1$  módulo 2).*

**Demostración.** Sean  $I = N_u$ ,  $R = \{u\}$  e

$$I_0 = \begin{cases} \{v\} & \text{si } v \in N_u, \\ \Gamma^+(v) \cap N_u & \text{si } v \notin N_u. \end{cases}$$

1.  $\emptyset \neq I_0 \subset I = N_u$ . Por la definición de  $I_0$ ,  $I_0 \subset N_u$ . Si  $v \in N_u$ , entonces  $I_0 = \{v\} \neq \emptyset$ ; si  $v \notin N_u$ , entonces existe  $w \in N_u$ , tal que  $w \in \Gamma^+(v)$ , por lo tanto  $\Gamma^+(v) \cap N_u \neq \emptyset$ .
2.  $I_0 \cap R = I_0 \cap \{u\} = \emptyset$ , pues  $u \notin N_u$ .
3.  $I$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(\{u\}, A(D_1))$  de  $D$ .
  - 3.1.  $D$  no contiene  $(I \cap R^c, I)$ -flechas. Como  $I \cap R^c = N_u \cap \{u\}^c = N_u$  y  $N_u$  es un núcleo en  $D - u$ , por lo tanto  $N_u$  es independiente. Entonces no existen  $(N_u, N_u)$ -flechas en  $D$ , por lo tanto no existen  $(I \cap R^c, I)$ -flechas en  $D$ .
  - 3.2. Si  $xy \in A(D_2)$ ,  $x \in I \cap R^c$  e  $y \in I^c \cap R^c$ , entonces existe  $w \in I$  tal que  $yw \in A(D)$ . Como  $y \in I^c \cap R^c = N_u^c \cap \{u\}^c = V(D - u) \setminus N_u$  y  $N_u$  es un núcleo de  $D - u$ , entonces existe  $w \in N_u = I$  tal que  $yw \in A(D)$ .
4.  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
  - 4.1. Si  $I_0 = \{v\}$ , por (i),  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
  - 4.2. Si  $I_0 = \Gamma^+(v) \cap N_u$ , sea  $w \in N_u \cap \Gamma^+(v)$ , por (ii),  $D - w$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ . Como

$$D \setminus I_0 = D \setminus (\Gamma^+(v) \cap N_u) \subset D - w,$$

entonces  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Luego (por el Teorema 2.8) existe una  $(I_0, u)$ -trayectoria dirigida, directa y  $(N_u, D_2)$ -normal,  $T = (t_0, \dots, t_n = u)$ , que no pasa por  $\Gamma^-(I_0) \cap R^c$  y satisface que:

- a)  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^0)$ -pseudodiagonales.
- b)  $l(T)$  es par si y sólo si  $u \in I$ .

Como  $u \notin N_u$ , entonces  $l(T)$  es impar (por (b)).

Caso 1)  $I_0 = \{v\}$ , entonces  $T$  es una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida, directa y  $(N_u, D_2)$ -normal que satisface que no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^0)$ -pseudodiagonales. Obsérvese que en este caso  $i = 0$ , pues  $l(T) + 1$  es par.

Caso 2)  $I_0 = \Gamma^+(v) \cap N_u$ . Denotemos por  $T' = (v, t_0) \cup T$ . Obsérvese que  $T'$  está bien definida, pues  $w_0 \in I_0 \subset \Gamma^+(v)$ . Como  $l(T)$  es impar, entonces  $l(T')$  es par. Por lo tanto  $l(T') + 1$  es impar, por lo que  $i = 1$ . Podemos ver que  $T'^1 = \{t_i \mid i \text{ es par}\} = T^0$  y como  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^0)$ -pseudodiagonales, entonces  $T'$  no tiene  $(V(T') \setminus \{u, v\}, T'^1)$ -pseudodiagonales. Si  $T'$  no tiene  $(v, T'^1)$ -pseudodiagonales, entonces  $T'$  es la trayectoria buscada. Si no, existe  $i = 2k$  tal que  $vt_i \in A(D)$ , tomemos  $i_0 = \max\{i \mid vt_i \in A(D)\}$ , claramente  $T'' = (v, t_{i_0}) \cup (t_{i_0}, T', u)$  satisface todas las propiedades que cumple  $T'$  y no tiene  $(V(T'') \setminus \{u\}, T''^1)$ -pseudodiagonales.

■

**Corolario 2.10** Sean  $D$  una digráfica que cumple con la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $f = uv \in A(D)$ . Supóngase que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior,  $D$  no tiene núcleo y que satisface:

- i)  $D - u$  tiene núcleo.
- ii)  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
- iii)  $D - w$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , para cada  $w \in \Gamma^+(v)$ .

Entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$  y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales (en particular  $\mathcal{C}_u^0$  es independiente).

**Demostración.** Sea  $N_u$  un núcleo de  $D - u$ , entonces (por el Teorema 2.9) existe una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida y  $(N_u, D_2)$ -normal,  $T$ , sin  $(V(T) \setminus$

$\{u\}, T^i$ -pseudodiagonales, con  $i$  el residuo de  $l(T) + 1$  módulo 2.

Sea  $T = (v, v_1, \dots, v_n, u)$  y sea  $\mathcal{C} = T \cup f$ .  $\mathcal{C}$  es un ciclo dirigido que pasa por  $f$ .

1.  $v \notin N_u$ . Si  $v \in N_u$ , como  $f = uv \in A(D)$ , entonces  $N_u$  es núcleo de  $D$ , lo que contradice las hipótesis (Fig. 2.13).

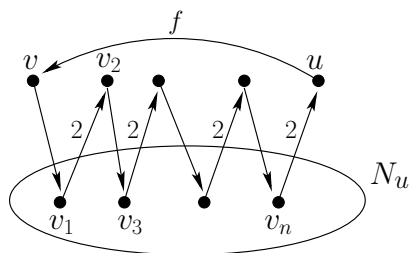


Figura 2.13.

2.  $l(T)$  es par, pues  $T$  es  $(N_u, D_2)$ -normal que empieza y termina en  $N_u^c$ .
3.  $\mathcal{C}_u^0 \subset N_u$ . Obsérvese que  $\mathcal{C}_u^0 = \{v_1, \dots, v_{2k+1} = v_n\} = T^1$  y por (1),  $v_1 \in N_u$  y como  $T$  es  $(N_u, D_2)$ -normal,  $\mathcal{C}_u^0 \subset N_u$ .
4.  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, ya que  $T$  es  $(N_u, D_2)$ -normal y  $\mathcal{C}_u^0 \subset N_u$ .
5.  $l(\mathcal{C})$  es impar, por la afirmación (2).
6.  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales. Sabemos que  $i = 1$ , pues  $l(T)$  es par, entonces  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^1)$ -pseudodiagonales, por lo tanto  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}) \setminus \{u\}, \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales. Falta probar que  $\mathcal{C}$  no tiene  $(u, \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales. Supongamos por contradicción que existe una  $(u, \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonal. Sea  $uv_{2i+1} \in A(D)$ , por (2),  $v_{2i+1} \in N_u$ , por lo tanto existe una  $(u, N_u)$ -flecha en  $D$  lo cual implica que  $N_u$  es un núcleo de  $D$ , lo cual contradice las hipótesis.

■

**Teorema 2.11** *Sea  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $\emptyset \neq A \subset F_u^+$  e  $I_0 = \{z \in V(D) \mid uz \in A\}$  satisfacen:*

- i)  $D - A$  tiene un núcleo, pero  $D - A'$  no, para cada  $A' \subsetneq A$ .*
- ii)  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .*

*Entonces existe  $f \in A$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(I_0) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.*

**Demostración.** Sea  $I$  núcleo de  $D - A$  y  $R = \{u\}$ .

1.  $D$  no tiene núcleo, por (i).
2.  $I_0 \neq \emptyset$ , ya que  $A \neq \emptyset$ .
3.  $u \in I$ . Si  $u \notin I$ , entonces  $I$  es independiente en  $D$  y como es absorbente en  $D - A$ , entonces  $I$  es un núcleo de  $D$ , pues absorbe a  $u$  en  $D$ , lo que contradice a (1).
4.  $I_0 \subset I$ . Si  $I_0 \not\subset I$ , sean  $I'_0 = I_0 \cap I$  y  $A' = \{uz \in A(D) \mid z \in I_0\}$ . Observemos que  $A' \subsetneq A$ , entonces  $I$  es independiente en  $D - A'$ . Como es absorbente en  $D - A$ , entonces  $I$  es un núcleo de  $D - A'$  y esto es una contradicción con la hipótesis (i).
5.  $I_0 \cap \{u\} = \emptyset$ , pues no hay lazos en  $D$ .
6.  $I$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(\{u\}, D_1)$  de  $D$ .
  - 6.1.  $I$  no contiene  $(I \cap \{u\}^c, I)$ -flechas en  $D$ . Como  $I$  es un núcleo en  $D - A$  no hay  $(I, I)$ -flechas en  $D - A$ , por lo que todas las posibles flechas de  $D$  con ambos extremos en  $I$  salen de  $u$ , así que  $I$  no tiene  $(I \cap \{u\}^c, I)$ -flechas en  $D$ .



6.2 Si  $xy \in A(D_2)$ , con  $x \in I \cap \{u^c\}$  e  $y \in I^c \cap \{u\}^c$ , entonces existe  $z \in I$  tal que  $yz \in A(D)$ . Como  $y \in I^c \cap \{u\}^c \subset I^c$  e  $I$  es un núcleo de  $D - A$ , existe  $z \in I$ , tal que  $yz \in A(D) \setminus A \subset A(D)$ .

Entonces (por el Teorema 2.8) existe una  $(I_0, u)$ -trayectoria dirigida, directa e  $(I, D_2)$ -normal,  $T$ , que no pasa por  $\Gamma^-(I_0) \cap \{u\}^c$  y que satisface:

- a)  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^0)$ -pseudodiagonales.
- b)  $l(T)$  es par si y sólo si  $u \in I$ .

Sea  $T = (z = w_0, w_1, \dots, w_n = u)$ , con  $z \in I_0$ , entonces  $f = uz \in A$ . Sea  $\mathcal{C} = T \cup f$ . Como  $u \in I$  (por (2)), entonces  $l(T)$  es par y como  $T$  es  $(I, D_2)$ -normal, se tiene que  $T^0 \subset I$  y  $l(\mathcal{C}) = l(T) + 1$  es impar.

$$T^0 = \{w_0, \dots, w_n\} \text{ con } n \text{ par,}$$

$$T^0 \setminus \{u\} = \mathcal{C}_u^1 \text{ por lo tanto } T^0 = \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\},$$

así que  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal. Como  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{u\}, T^0)$ -pseudodiagonales, entonces  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}) \setminus \{u\}, \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales. Si  $\mathcal{C}$  no tiene  $(\{u\}, \mathcal{C}_u^1)$ -pseudodiagonales, entonces es el ciclo buscado. Si no, sea  $j = \max\{i \mid uw_i \in A(D) \text{ con } i \text{ par}\}$ , entonces  $\mathcal{C}' = (u, w_j) \cup (w_j, \mathcal{C}, u)$  es, claramente, el ciclo con las propiedades requeridas. ■

**Corolario 2.12** Sean  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $f = uv \in A(D)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior,  $D$  no tiene núcleo,  $D - f$  tiene núcleo y  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que contiene a  $f$ , que no intersecta a  $\Gamma^-(I_0) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Sea  $\{f\} = A \subset F_u^+$ , entonces  $I_0 = \{v\}$  y obsérvese que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.11:

- i)  $D - f$  tiene núcleo, pero  $D$  no tiene núcleo.
- ii)  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Así que existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(I_0) \setminus \{u\} = \Gamma^-(v) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

■

**Corolario 2.13** Sean  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $f = uv \in A(D)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior,  $D$  no tiene núcleo y  $D - f$  es núcleo perfecta, entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que contiene a  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(v) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Sea  $\{f\} = A \subset F_u^+$ , entonces  $I_0 = \{v\}$ .

- i)  $D - A = D - f$  tiene núcleo, pues  $D - f$  es núcleo perfecta, pero  $D$  no tiene núcleo.
- ii)  $D - v$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , pues  $D - v$  es núcleo perfecta ya que  $D - v \subseteq^* D - f$ .

Así que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.11, por lo tanto existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(I_0) \setminus \{u\} = \Gamma^-(v) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

■

**Corolario 2.14** Sean  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $u \in V(D)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior,  $D$  no tiene núcleo,  $D - u$  es núcleo perfecta y  $D - w$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , para cada  $w \in \Gamma^+(u)$ , entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Obsérvese que  $\{u\}$  es un seminúcleo de  $D - F_u^+$ , pero no es un núcleo de  $D - F_u^+$ , pues de lo contrario sería un núcleo de  $D$ , lo que contradice las hipótesis.

Así que  $B_u = \{v \in V((D - F_u^+) \setminus \{u\}) \mid \text{no existe una } (v, u)\text{-flecha en } D - F_u^+\} \neq \emptyset$ . Como  $u \notin B_u$ , entonces  $(D - F_u^+)[B_u] \subseteq^* D - u$ . Por lo tanto  $D[B_u]$  tiene un núcleo,  $S'$ . Entonces  $\{u\} \cup S'$  es un núcleo de  $D - F_u^+$  (Fig. 2.14).

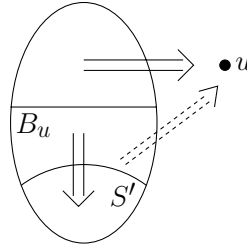


Figura 2.14.

Elegimos  $N_u$  de entre todos los núcleos de  $D - F_u^+$  que contienen a  $u$ , tal que  $|A(D[N_u]) \cap F_u^+|$  toma el mínimo valor posible. Sea  $A = F_u^+ \cap A(D[N_u])$ .

1.  $A \neq \emptyset$ . Si  $F_u^+ \cap A(D[N_u]) = \emptyset$ , entonces  $\Gamma^+(u) \cap N_u = \emptyset$  y como  $N_u$  es un núcleo de  $D - F_u^+$ , entonces absorbe a todo  $V(D - F_u^+) \setminus N_u = V(D) \setminus N_u$  y  $N_u$  es independiente en  $D - F_u^+$ . Como no hay ninguna flecha de  $F_u^+$  en  $D[N_u]$ , entonces  $N_u$  también es independiente en  $D$ , por lo tanto  $N_u$  sería un núcleo de  $D$ , lo que contradice las hipótesis.
2.  $A \subset F_u^+$ , por la definición de  $A$ .
3.  $D - A$  tiene un núcleo.  $N_u$  es un núcleo de  $D - A$ : absorbe a todos los vértices de  $(D - A) - N_u$ , pues  $D - F_u^+ \subset D - A$  y  $N_u$  es un núcleo de  $D - F_u^+$ .  $N_u$  es independiente en  $D - A$ , porque las posibles flechas de  $D[N_u]$  en  $D - A$  son las de  $F_u^+ \setminus A$ , pero esas flechas precisamente no están en  $D[N_u]$ .

4.  $D - A'$  no tiene núcleo, con  $A' \subsetneq A$ . Si  $D - A'$  tiene un núcleo,  $N$ , entonces como absorbe en  $D - A'$ , también absorbe en  $D$  y como  $D$  no tiene núcleo, tenemos que  $N$  no es independiente en  $D$ , pero sí lo es en  $D - A'$ , entonces  $u \in N$ .

Se puede observar que  $F_u^+ \cap A(D[N]) = A'$  (ya que  $A' \subset F_u^+$  y las flechas en  $D$  de  $N$  son las de  $A'$ ) lo que contradice la elección de  $N_u$ , pues  $|A'| \lesssim |A|$ .

5.  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , con  $I_0 = \{z \in V(D) \mid uz \in A\}$ . Sea  $w \in I_0 \subset \Gamma^+(u)$  (por (3),  $I_0 \neq \emptyset$ ), entonces  $D - I_0 \subset D - w$ . Y como  $D - w$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , por lo tanto  $D - I_0$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

De esta manera tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.11, por lo tanto existe  $f = uv \in A$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar que pasa por  $f$  (en particular por  $u$ ), que no interseca a  $\Gamma^-(I_0) \setminus \{u\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

■

**Teorema 2.15** *Sea  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \lesssim)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \lesssim)$  tiene cota superior y  $\emptyset \neq A \subset F_u^-$  cumple las siguientes propiedades:*

- i)  $D - A$  tiene núcleo.
- ii)  $D - A'$  no tiene núcleo, con  $A' \subsetneq A$ .
- iii)  $D - u$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Entonces existe  $f = wu \in A$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_w^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(u) \setminus \{w\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_w^1 \cup \{w\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Sean  $I$  un núcleo de  $D - A$ ,  $I_0 = \{u\}$  y  $R = \{z \in V(D) \mid zu \in A\}$ .

1.  $I_0 \cup R \subset I$ . Si no, existe  $f = xy \in A$  tal que  $x$  ó  $y \notin I$ , entonces para  $A' = A \setminus \{f\}$  se tendría que  $D - A'$  tiene a  $I$  como núcleo, lo que contradice (ii).
2.  $R \cap I_0 = \emptyset$ , pues no hay lazos.
3.  $I$  es un seminúcleo fuerte módulo  $(R, A(D_1))$  de  $D$ .
  - 3.1.  $I$  no contiene  $(I \cap R^c, I)$ -flechas en  $D$ .  $I$  es independiente en  $D - A$  y las únicas posibles  $(I \cap R^c, I)$ -flechas en  $D$  son las  $(R, \{u\})$ -flechas, que son precisamente las flechas de  $A$ .
  - 3.2. Si  $xy \in A(D_2)$ , con  $x \in I \cap R^c$  e  $y \in I^c \cap R^c$ , entonces existe  $w \in I$ , tal que  $yw \in A(D)$ . Como  $y \in I^c \cap R^c \subset I^c$  e  $I$  es un núcleo de  $D - A$ , entonces existe  $w \in I$ , tal que  $yw \in A(D) \setminus A \subset A(D)$ .
4.  $D$  no tiene núcleo, por (ii).
5.  $D - u$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , por (iii).

Por el Teorema 2.8 existe una  $(u, R)$ -trayectoria dirigida, directa e  $(I, D_2)$ -normal,  $T = (u = t_0, \dots, t_n)$ , que no pasa por  $\Gamma^-(u) \cap R^c$  y satisface que:

- a)  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales.
- b)  $l(T)$  es par si y sólo si  $t_n \in I$ .

Como  $w = t_n \in R$ , entonces existe la flecha  $f = wu$  y como  $T$  es directa  $t_i \notin R$ , para  $0 \leq i < n$ .

Sea  $\mathcal{C} = T \cup f$ .  $\mathcal{C}$  no pasa por  $\Gamma^-(u) \cap R^c$  y como  $T$  es directa,  $\mathcal{C}$  no pasa por  $\Gamma^-(u) \setminus \{w\}$ . Sabemos que  $w \in R \subset I$  (por (1)), por lo tanto  $l(T)$  es par y así  $l(\mathcal{C})$  es impar. Sea

$$\mathcal{C}_w^1 = \{t_0, t_2, \dots, t_{n-2}\} = T^0 \setminus \{w\}.$$

Como  $n$  es par y  $t_n \in I$ , se tiene que  $T^0 \subset I$ , por lo que  $\mathcal{C}_w^1 \subset I$ . Por lo tanto  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_w^1, D_2)$ -normal.

Como  $T$  no tiene  $(V(T) \setminus \{t_n\}, T^0)$ -pseudodiagonales, entonces  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}) \setminus \{w\}, \mathcal{C}_w^1 \cup \{w\})$ -pseudodiagonales. Falta probar que  $\mathcal{C}$  no tiene  $(w, \mathcal{C}_w^1 \cup \{w\})$ -pseudodiagonales, es decir,  $(w, \mathcal{C}_w^1)$ -pseudodiagonales. Ya que  $I$  es independiente en  $D - A$  y como  $w \in I$  y  $\mathcal{C}_w^1 \subset I$ , la única posible  $(w, \mathcal{C}_w^1)$ -pseudodiagonal en  $A$  es  $wu$ , que es una flecha de  $\mathcal{C}$ .

■

**Corolario 2.16** Sean  $D$  una digráfica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $u \in V(D)$ . Si toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior,  $D$  no tiene núcleo y  $D - u$  es núcleo perfecta, entonces existe  $f = vu \in A(D)$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_v^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(u) \setminus \{v\}$  y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_v^1 \cup \{v\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Si  $N$  es un núcleo de  $D - u$ , obsérvese que no hay  $(u, N)$ -flechas en  $D$ , pues  $D$  no tiene núcleo y que existe al menos una  $(N, u)$ -flecha en  $D$ , de otro modo  $N \cup \{u\}$  sería núcleo de  $D$ .

Sean  $N'_u$ , tal que  $N'_u$  es un núcleo de  $D - u$  y  $|N'_u \cap \Gamma^-(u)|$  toma el valor mínimo posible,  $N_u = N'_u \cup \{u\}$  y  $A = \{vu \mid v \in N'_u \cap \Gamma^-(u)\}$ .

1.  $A \neq \emptyset$ , pues, como se menciona anteriormente, al menos existe una  $(N'_u, u)$ -flecha en  $D$  para que  $N'_u \cup \{u\}$  no resulte un núcleo de  $D$ .
2.  $A \subset F_u^-$ , por la definición de  $A$ .
3.  $D - A$  tiene un núcleo, claramente  $N_u$  es un núcleo de  $D - A$ .
4.  $D - A'$  no tiene núcleo, con  $A' \subsetneq A$ , por la elección de  $N'_u$ .
5.  $D - u$  es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , pues por hipótesis es núcleo perfecta.

Así que por el Teorema 2.15 existen  $f = vu \in A$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_v^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(u) \setminus \{v\}$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_v^1 \cup \{v\})$ -pseudodiagonales.

■

### 2.3. Estructura de *algunas* digráficas núcleo imperfectas críticas

Los resultados de esta sección son consecuencia de aquellos de la Sección 2.2 y nos permiten dar información sobre la estructura de las digráficas núcleo imperfectas críticas que cumplen la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ . Así podemos asegurar, en ciertas digráficas núcleo imperfectas críticas, la existencia de al menos un número de ciertos ciclos dirigidos impares sin unas pseudodiagonales especiales.

**Teorema 2.17** *Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y supongamos que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior, entonces existe una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida y  $(T^i, D_2)$ -normal,  $T = (u = t_0, \dots, t_n)$ , que no tiene  $(V(T), T^i)$ -pseudodiagonales, para cualesquiera  $u, v \in V(D)$  ( $i$  es el residuo de  $l(T) + 1 \pmod{2}$ ).*

**Demostración.** Como  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces se tiene que:

- $D - u$  tiene un núcleo  $N_u$ .
- $D - v$  es núcleo perfecta, en particular es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
- $D - w$  es núcleo perfecta, para toda  $w \in \Gamma^+(v) \subset V(D)$ , en particular es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
- $D$  no tiene núcleo.

Entonces, por el Teorema 2.9, existe una  $(v, u)$ -trayectoria dirigida y  $(N_u, D_2)$ -normal,  $T = (v = w_0, \dots, w_n = u)$ , sin  $(V(T) \setminus \{u\}, T^i)$ -pseudodiagonales, con  $i$  el residuo de  $l(T) + 1 \pmod{2}$ .

1.  $N_u \cap T = T^i$ .

Caso a)  $l(T)$  es par, entonces  $i = 1$ . Ya que  $T$  es  $(N_u, D_2)$ -normal y  $u \notin N_u$ , se tiene que  $v \notin N_u$ . Entonces  $T^1 \subset N_u$ , por lo tanto  $T^1 \subset N_u \cap T$ .

$T \cap N_u \subset T^1$ . Si no, existe  $w_{2k} \in T^0$  tal que  $w_{2k} \in T \cap N_u$ . Pero como  $w_{2k}w_{2k+1} \in A(D)$  y  $w_{2k+1} \in N_u$ , se contradice la independencia de  $N_u$ .

Caso b)  $l(T)$  es impar, entonces  $i = 0$ . Ya que  $T$  es  $(N_u, D_2)$ -normal y  $u \notin N_u$ , se tiene que  $v \in N_u$ . Así que  $T^0 \subset N_u$ , por lo tanto  $T^0 \subset N_u \cap T$  y análogamente como en el Caso (a), se prueba que  $T \cap N_u \subset T^0$ .

2. No hay  $(u, T^i)$ -pseudodiagonales.

Por (1), se tiene que  $T^i \subset N_u$ . Si existe una  $(u, T^i)$ -trayectoria, se tendría una  $(u, N_u)$ -flecha, así que  $N_u$  sería un núcleo de  $D$ , lo que contradice las hipótesis.

■

El siguiente corolario generaliza, para las digráficas infinitas, el resultado de Duchet [7] que dice que toda digráfica núcleo imperfecta crítica finita es fuertemente conexa:

**Corolario 2.18** *Una digráfica  $D$  núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior, es fuertemente conexa.*

**Teorema 2.19** *Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $f = uv \in A(D)$ . Entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$  y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales.*

**Demostración.** Como  $D$  es núcleo imperfecta crítica, se tiene que:

- $D$  no tiene núcleo.



- $D - u$  es núcleo perfecta, entonces tiene un núcleo,  $N_u$ .
- $D - v$  es núcleo perfecta, en particular es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .
- $D - w$  es núcleo perfecta, para toda  $w \in \Gamma^+(v)$ , en particular es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Entonces, por el Corolario 2.10, existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$  y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales.

■

**Corolario 2.20** *Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $u \in V(D)$ . Entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $u$  y que no tiene ni  $(V(\mathcal{C}), C_u^0)$ -pseudodiagonales, ni  $(u, \mathcal{C})$ -pseudodiagonales.*

**Demostración.** Sea  $u \in V(D)$ , por el Corolario 2.18, existe  $f = uv$  para algún  $v \in V(D)$ . Por el Teorema 2.19 existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , por lo tanto por  $u$ , y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), C_u^0)$ -pseudodiagonales.

Si  $\mathcal{C} = (v = w_0, w_1, \dots, w_n = u, v)$  tiene  $(u, \mathcal{C}_u^1)$ -pseudodiagonales,  $\mathcal{C}$  es el ciclo buscado. Si no, obsérvese que  $\mathcal{C}_u^1 = \{w_0, w_2, \dots, w_{n-1}\}$

Supongamos que existe una  $(u, \mathcal{C}_u^1)$ -pseudodiagonal. Sea

$$j = \text{máx}\{i \mid uw_{2i} \in A(D)\},$$

entonces

$$\mathcal{C}' = (u, w_j) \cup (w_j, \mathcal{C}, u)$$

es el ciclo requerido.

■

**Teorema 2.21** Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $u \in V(D)$ . Entonces existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

**Demostración.** Como  $D$  es núcleo imperfecta crítica, entonces:

- $D$  no tiene núcleo.
- $D - u$  es núcleo perfecta.
- $D - w$  es núcleo perfecta, para toda  $w \in \Gamma^+(u)$ , en particular es núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ .

Entonces (por el Corolario 2.14) existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales.

■

**Teorema 2.22** Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $u \in V(D)$ , entonces para algún  $f = vu \in A(D)$  existe un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_v^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_v^1 \cup \{v\})$ -pseudodiagonales y que no interseca a  $\Gamma^-(u) \setminus \{v\}$ .

**Demostración.** Ya que  $D$  es núcleo imperfecta crítica, tenemos que:

- $D$  no tiene núcleo.
- $D - u$  es núcleo perfecta.

Así que tenemos que se cumplen las hipótesis del Corolario 2.16, por lo tanto existe  $f = vu \in A(D)$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_v^1, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f$ , que no interseca a  $\Gamma^-(u) \setminus \{v\}$  y que no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_v^1 \cup \{v\})$ -pseudodiagonales.

■

**Definición 2.23** Sean  $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_{2m}, u_0)$  un ciclo dirigido y  $H$  subdigráficas de una digráfica  $D$ .  $\mathcal{C}$  es **débilmente  $H$ -alternado**, si  $\mathcal{C}$  es de longitud  $2m + 1$  y tiene  $m$  flechas en  $H$  que aparecen alternadamente en  $\mathcal{C}$ , es decir, existe una flecha  $f = u_i u_{i+1} \in A(H)$ , tal que  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_{i+1}^0, H)$ -normal.

**Definición 2.24** Un **polo** de un ciclo  $\mathcal{C}$  es el vértice final de una pseudo-diagonal de  $\mathcal{C}$ .

**Afirmación 2.25** Si  $\mathcal{C} = (u = u_0, u_1, \dots, u_n)$  es  $(\mathcal{C}_u^i, D_2)$ -normal,  $i \in \{1, 0\}$ , y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ - ó  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales, entonces  $\mathcal{C}$  es débilmente  $D_2$ -alternado y no tiene 2 polos consecutivos.

**Demostración.** Si  $i = 0$ , entonces  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, por lo tanto es débilmente  $D_2$ -alternado. Si  $i = 1$ , entonces  $\mathcal{C}$  es  $(\mathcal{C}_{u_n}^0, D_2)$ -normal, por lo tanto es débilmente  $D_2$ -alternado.

Como  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ - ó  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales no hay 2 polos consecutivos.

■

**Teorema 2.26** Sean  $D$  una digráfica núcleo imperfecta crítica que no es un ciclo dirigido de longitud impar y  $u \in V(D)$ . Si  $D$  cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior, entonces existen  $f' \in F_u^-$  y  $f'' \in F_u^+$ , tal que cada una de ellas pertenece al menos a 2 ciclos dirigidos, distintos, débilmente  $D_2$ -alternados y que no tienen 2 polos consecutivos.

**Demostración.** Para  $u \in V(D)$ , por el Teorema 2.22, existe  $f' = wu$  tal que existe  $\mathcal{C} = (w = w_0, u = w_1, w_2, \dots, w_n, w_0)$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_w^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_w^1 \cup \{w\})$ -pseudodiagonales. Por la

Afirmación 2.25  $\mathcal{C}$  es débilmente  $D_2$ -alternado y no tiene 2 polos consecutivos.

Ahora, por el Teorema 2.19, para la flecha  $f' = wu$  existe  $\tilde{\mathcal{C}} = (w = \tilde{w}_0, u = \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m, \tilde{w}_0)$  un ciclo dirigido,  $(\tilde{\mathcal{C}}_w^0, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\tilde{\mathcal{C}}), \tilde{\mathcal{C}}_w^0)$ -pseudodiagonales. Por la Afirmación 2.25  $\tilde{\mathcal{C}}$  es débilmente  $D_2$ -alternado y no tiene 2 polos consecutivos.

Si  $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$ , entonces  $D[\mathcal{C}] = \mathcal{C}$ , el cual no tiene núcleo (pues  $\mathcal{C}$  tiene longitud impar). Por lo tanto  $\mathcal{C} = D$ , lo que contradice las hipótesis.

Por el Teorema 2.21, existe  $\hat{\mathcal{C}} = (u = \hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_l, \hat{u}_0)$  un ciclo dirigido,  $(\hat{\mathcal{C}}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\hat{\mathcal{C}}), \hat{\mathcal{C}}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales. Así que  $\hat{\mathcal{C}}$  es débilmente  $D_2$ -alternado y sin polos consecutivos.

Y de nuevo, por el Teorema 2.19, para la flecha  $f'' = u\hat{u}_1$ , existe  $\mathcal{C}' = (u = u'_0, \hat{u}_1 = u'_1, \dots, u'_k, u'_0)$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}'_u, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}'), \mathcal{C}'_u)$ -pseudodiagonales, así que es débilmente  $D_2$ -alternado y sin polos consecutivos.

Se prueba que  $\hat{\mathcal{C}} \neq \mathcal{C}'$ , análogamente a como se probó que  $\mathcal{C} \neq \tilde{\mathcal{C}}$ .

■

**Corolario 2.27** *Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica que no es un ciclo dirigido de longitud impar que cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , tal que toda cadena en  $(\alpha_{D_1}, \leq)$  tiene cota superior y  $u \in V(D)$ , entonces  $u$  pertenece al menos a  $\Delta_D(u) + 1$  ciclos dirigidos débilmente  $D_2$ -alternados y que no tienen 2 polos consecutivos ( $\Delta_D(u) = \max\{|\Gamma^-(u)|, |\Gamma^+(u)|\}$ ).*

### Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $\Delta_D(u) = |\Gamma^+(u)|$ . Sea  $\Gamma^+(u) = \{w_1, \dots, w_n\}$  y denotemos  $f_i = uw_i$ . Por el Teorema 2.26, sea  $f_j = uw_j \in F^+(u)$ , tal que existen  $\mathcal{C}_0$  y  $\mathcal{C}_1$  dos ciclos dirigidos, distintos, que pasan por  $f_j$ , débilmente  $D_2$ -alternados y sin polos consecutivos.

Por el Teorema 2.19, existe  $\mathcal{C}_i$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_i^0, D_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_i^0)$ -pseudodiagonales, por lo tanto débil-

mente  $D_2$ -alternante (por la Afirmación 2.25), que pasa por  $f_i = uw_i$ , con  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ . Obsérvese que  $\mathcal{C}_i \neq \mathcal{C}_j$ , con  $i \neq j$ , pues  $uw_i \in \mathcal{C}_i$  y  $uw_j \in \mathcal{C}_j$ .

Análogamente se sigue la prueba si  $\Delta_D(u) = |\Gamma^-(u)|$ .

■

## 2.4. Digráficas núcleo perfectas

En esta sección estudiaremos algunas condiciones suficientes para que una digráfica finita, tal que ella y todas sus subdigráficas inducidas satisfacen la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , sea núcleo perfecta. El hecho de sólo considerar digráficas finitas en esta sección es debido a que las demostraciones se hacen por contradicción y al suponer que la digráfica no es núcleo perfecta queremos asegurar que contiene una subdigráfica inducida núcleo perfecta crítica. Y como ya se ha mencionado previamente, hasta el momento sólo podemos asegurar que existen digráficas núcleo imperfectas críticas finitas.

**Definición 2.28** *Decimos que  $D$  satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , si  $D$  satisface la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y para cada  $F \subseteq^* D$ ,  $F$  satisface la Propiedad  $P(\alpha_{D_1[V(F)]}, \leq)$ . Nótese que los conjuntos independientes de  $F$  también son conjuntos independientes de  $D$ , así que el orden está bien definido en  $\alpha_{D_1[V(F)]}$ .*

**Teorema 2.29** *Sean  $D$  una digráfica finita que satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $T \subset V(D)$ , tal que  $D - T$  es núcleo perfecta. Además supongamos que para toda  $u \in T$  se satisface (a) ó (b):*

- a) *Cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar y que pasa por  $u$  tiene al menos una  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonal.*
- b) *Cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal, de longitud impar y que pasa por  $u$  tiene al menos una  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonal.*

Entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Si  $D$  no es núcleo perfecta, entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida  $H$  núcleo imperfecta crítica, tal  $H$  existe pues  $D$  es finita. Ya que  $D - T$  es núcleo perfecta, se tiene que  $H \not\subseteq D - T$ , por lo tanto  $V(H) \cap T \neq \emptyset$ .

Sea  $u \in V(H) \cap T$ . Como  $D$  cumple hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , se tiene que  $H$  satisface la Propiedad  $P(\alpha_{D_1[H]}, \leq)$ . Por el Corolario 2.18,  $H$  es fuertemente conexa, así que existe  $f = uv$  y por los Teoremas 2.19 y 2.21, existe en  $H$   $\mathcal{C}_1$  un ciclo dirigido,  $((\mathcal{C}_1)_u^0, D'_2)$ -normal (con  $D'_2 = H - D_1$ ), de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_1)_u^0)$ -pseudodiagonales y  $\mathcal{C}_2$  un ciclo dirigido,  $((\mathcal{C}_2)_u^1, D'_2)$ -normal, de longitud impar y sin  $(V(\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_2)_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales. Obsérvese que  $D'_2 = H - D_1 \subset D - D_1 = D_2$ , así que  $\mathcal{C}_1$  (resp.  $\mathcal{C}_2$ ) es  $((\mathcal{C}_1)_u^0, D_2)$ -normal (resp.  $((\mathcal{C}_2)_u^1, D_2)$ -normal). Así que se contradice (a) y (b) a la vez. ■

**Teorema 2.30** Sean  $D$  una digráfica finita que satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $A \subset A(D)$ . Supongamos que cada  $f = uv \in A$  satisface que:

- i) Cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal, de longitud impar y que pasa por  $f$  tiene alguna  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonal.

Entonces  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , tal que  $A(H) \cap A = \emptyset$ , es núcleo perfecta.

**Demostración.** Supongamos por contradicción que  $D$  no es núcleo perfecta, entonces existe  $H \subseteq^* D$ , tal que  $H$  es núcleo imperfecta crítica. Como  $D$  satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , se tiene que  $H$  cumple la Propiedad  $P(\alpha_{D_1[H]}, \leq)$ .

Como  $H$  es núcleo imperfecta crítica, entonces  $A(H) \cap A \neq \emptyset$ . Sea  $f = uv \in A(H) \cap A$ , entonces (por el Teorema 2.19) existe  $\mathcal{C}$  un ciclo

dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D'_2)$ -normal (de nuevo con  $D'_2 = H - D_1$  y por lo tanto  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal), de longitud impar, que pasa por  $f$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonales, lo que contradice (i).

El recíproco se sigue directamente de la definición de digráfica núcleo perfecta. ■

**Notación 2.31** Sea  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido de longitud impar y  $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{w \in V(\mathcal{C}) \mid \text{existe una } (V(\mathcal{C}), w)\text{-pseudodiagonal en } \mathcal{C}\}$  el conjunto de polos de  $\mathcal{C}$ . Definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{C}^{(1)} = \bigcup_{v \in \mathcal{P}(\mathcal{C})} \mathcal{C}_v^1,$$

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{P}(\mathcal{C}) \cup \bigcup_{u \in \mathcal{P}(\mathcal{C})} \mathcal{C}_u^0$$

$\mathcal{C}^{(1)}$  (resp.  $\mathcal{C}^{(0)}$ ) son los vértices de  $\mathcal{C}$  que están a distancia impar (resp. par) de un polo de  $\mathcal{C}$ .

**Corolario 2.32** Sean  $D$  una digráfica finita que satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $T \subset V(D)$ , tal que  $D - T$  es núcleo perfecta. Si cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado, tal que  $V(\mathcal{C}) \cap T \neq \emptyset$ , satisface que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Supongamos por contradicción que  $D$  no es núcleo perfecta, entonces (por el Teorema 2.29) existe  $u \in T$ , tal que no se cumple ni (a), ni (b).

Como no se cumple (b), existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^1, D_2)$ -normal y de longitud impar, así que es débilmente  $D_2$ -alternado, que pasa por  $u$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales. Como pasa por  $u$ , se tiene que  $V(\mathcal{C} \cap T) \neq \emptyset$ , por lo tanto  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$ .

Ya que  $\mathcal{C}$  no tiene  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^1 \cup \{u\})$ -pseudodiagonales, se tiene que  $u_0, u_1, u_3, \dots, u_{2n-1} \notin \mathcal{P}(\mathcal{C})$ . Por lo tanto  $u_0 \in \mathcal{C}_{u_i}^0$ , con  $u_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ , pero

$$u_0 \in \mathcal{C}_{u_i}^0 \Leftrightarrow i \text{ es impar.}$$

$u_i$  no es polo si  $i$  es impar, así que  $u_0 \notin \mathcal{C}_{u_i}^0$ , para cada  $u_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ . Por lo tanto  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}^{(0)}$ , lo cual contradice las hipótesis.

■

**Corolario 2.33** *Sean  $D$  una digráfica finita que cumple hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $A \subset A(D)$ . Supongamos que cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado, tal que  $A(\mathcal{C}) \cap A \neq \emptyset$ , satisface  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(1)}$ . Entonces  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , tal que  $A(H) \cap A = \emptyset$ , es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Sean  $f = uv \in A$  y  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_u^0, D_2)$ -normal y de longitud impar, por lo tanto débilmente  $D_2$ -alternado, que pasa por  $f$ , entonces  $V(\mathcal{C}) \cap A \neq \emptyset$ . Por hipótesis,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(1)}$ , por lo tanto  $u_0 \in \mathcal{C}_{u_i}^1$ , para alguna  $u_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ . Pero  $u \in \mathcal{C}_{u_i}^1$  sólo cuando  $i$  es par, así que existe  $i = 2k$ , tal que  $u_i$  es polo. Luego  $\mathcal{C}$  tiene una  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_u^0)$ -pseudodiagonal, por lo tanto (por el Teorema 2.30),  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , tal que  $A(H) \cap A = \emptyset$ , es núcleo perfecta.

■

## 2.5. Aplicaciones

Los resultados de esta última sección del Capítulo 2 son consecuencia de los resultados de las dos secciones anteriores. Se dan condiciones en la estructura de digráficas finitas que satisfacen hereditariamente  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  para que sean núcleo perfectas. Dichas condiciones involucran ciclos débilmente  $D_2$ -alternados que no intersectan ciertos conjuntos de vértices o flechas o que cuentan con algunas pseudodiagonales.

**Observación 2.34 ([19])** *Sean  $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$  un ciclo dirigido de longitud impar en  $D$  y  $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \{u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$  el conjunto de los polos de  $\mathcal{C}$ , con  $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq 2n$ . Entonces:*



1.  $V(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{(0)}$  si y sólo si:
  - i.1) existe  $j$ , con  $1 \leq j \leq k$ , tal que  $i_{j+1} = i_j + 1$  ó
  - i.2) existen  $j, l$ , con  $1 \leq j < l \leq k$ , tal que la  $(u_j, u_{j+1})$ -trayectoria y la  $(u_l, u_{l+1})$ -trayectoria, ambas dirigidas, están contenidas en  $\mathcal{C}$  y tienen longitud impar (La adición es tomada módulo  $k$ ).
2.  $V(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{(1)}$  si y sólo si (i.2).

### Demostración.

1. Supongamos que  $V(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{(0)}$ . Si hay dos polos consecutivos se tiene que se cumple (i.1).

Supongamos entonces que no hay dos polos consecutivos. Podemos suponer que  $u_0$  es polo, así que  $i_1 \geq 1$  y supongamos también que la  $(u_0, u_{i_1})$ -trayectoria dirigida es de longitud impar. Como  $\mathcal{C}$  tiene longitud impar no puede estar dividida en arcos pares. Ahora supongamos por contradicción que las  $(u_j, u_{j+1})$ -trayectorias son de longitud par, con  $i_j \neq 0$ .

$u_1 \notin \mathcal{C}_{u_0}^0$  y como  $u_0 \in \mathcal{C}_{u_j}^0$ , para cada  $u_j \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) - \{u_0\}$ , entonces  $u_1 \notin \mathcal{C}_{u_j}^0$ , para cada  $u_j \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ . Lo que contradice que  $\mathcal{C}^{(0)} = V(\mathcal{C})$  (Fig. 2.15).

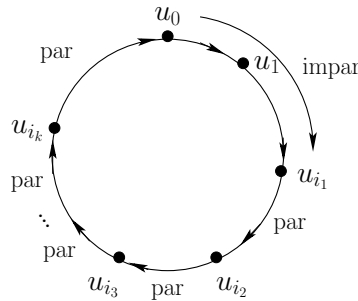


Figura 2.15.

Supongamos que se cumple (i.1). Sin pérdida de generalidad, sean  $u_0, u_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ , entonces  $u_{2k} \in \mathcal{C}_{u_0}^0$ , con  $0 < 2k \leq 2n$ , y  $u_{2k+1} \in \mathcal{C}_{u_1}^0$ , con  $1 < 2k + 1 \leq 2n - 1$ .

Supongamos que se cumple (i.2). Sean  $P_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{i_1})$  y  $P_2 = (u_{i_j}, u_{i_{j+1}})$  dos trayectorias dirigidas, contenidas en  $\mathcal{C}$  y de longitud impar. Supongamos que  $u_l \in (u_{i_1}, \mathcal{C}, u_0)$ :

si  $l = 2k$ , entonces  $u_l \in \mathcal{C}_{u_0}^0$ ,

si  $l = 2k + 1$ , entonces  $u_l \in \mathcal{C}_{u_{i_1}}^0$ .

Análogamente si  $u_l \in (u_{i_{j+1}}, \mathcal{C}, u_{i_j})$ .

- Supóngase que  $V(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{(1)}$ , podemos suponer que  $u_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$  y que la  $(u_0, u_{i_1})$ -trayectoria,  $P$ , es de longitud impar. Supongamos ahora por contradicción que las  $(u_{i_j}, u_{i_{j+1}})$ -trayectorias son de longitud par,  $j \neq 0$  (Fig. 2.16).

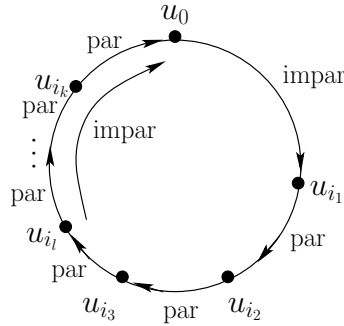


Figura 2.16.

$u_0 \notin \mathcal{C}_{u_{i_1}}^1 \cup \mathcal{C}_{u_0}^1$ , pues supusimos que  $P = (u_0, \dots, u_{i_1})$  es de longitud impar y el ciclo es de longitud impar. Entonces existe  $u_{i_l} \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ , tal que  $u_0 \in \mathcal{C}_{u_{i_l}}^1$ . Así la  $(u_{i_l}, u_0)$ -trayectoria es de longitud impar, lo que contradice que todas las  $(u_{i_j}, u_{i_{j+1}})$ -trayectorias son de longitud par, con  $j \neq 0$ .

Supongamos que se cumple (i.2). Sean  $P_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{i_1})$  y  $P_2 = (u_{i_j}, u_{i_{j+1}})$  dos trayectorias dirigidas, contenidas en  $\mathcal{C}$  y de longitud

impar. Supongamos que  $u_l \in (u_{i_1}, \mathcal{C}, u_0)$ :  
 si  $l = 2k + 1$ , entonces  $u_l \in \mathcal{C}_{u_0}^0$ ,  
 si  $l = 2k$ , entonces  $u_l \in \mathcal{C}_{u_{i_1}}^0$ .  
 Análogamente si  $u_l \in (u_{i_{j+1}}, \mathcal{C}, u_{i_j})$ .

■

**Proposición 2.35** Sean  $D$  una digráfica finita que satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$  y  $T \subset V(D)$ . Si  $D - T$  es núcleo perfecta y para cada ciclo dirigido débilmente  $D_2$ -alternado en  $D$ ,  $\mathcal{C} = (u_0, u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$ , tal que  $V(\mathcal{C}) \cap T \neq \emptyset$ , existe  $i$  tal que  $u_i, u_{i+1} \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Tenemos que existe  $i$ , tal que  $u_i, u_{i+1} \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ , entonces, por la Observación 2.34, se tiene que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{(0)}$ . Por lo tanto (por el Corolario 2.32)  $D$  es núcleo perfecta.

■

Esta proposición implica el siguiente resultado obtenido por Duchet [7]:

**Teorema 2.36** Si cada ciclo,  $C = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_0)$ , dirigido de longitud impar en  $D$  tiene dos pseudodiagonales de la forma  $u_k u_{k+2}$  y  $u_{k+1} u_{k+3}$ , entonces  $D$  tiene núcleo.

**Proposición 2.37**  $D$  es una digráfica finita que satisface hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ .  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si  $D - V_{o.a}(D)$  es núcleo perfecta, donde  $V_{o.a}(D)$  denota el conjunto de vértices de  $D$  que no pertenecen a un ciclo dirigido, débilmente  $D_2$ -alternado.

**Demostración.** Si  $D$  es núcleo perfecta, se tiene que  $D - V_{o.a}$  lo es también, por la definición de núcleo perfecta.

Supongamos que  $D - V_{o.a}$  es núcleo perfecta, entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 2.29, por lo tanto  $D$  es núcleo perfecta.

■

**Proposición 2.38** *Sea  $D$  digráfica finita que cumple hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ . Si cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado, con al menos una flecha  $uv \in \text{Asim}(D)$ , tiene una pseudodiagonal  $f_c$ , tal que para ciclo,  $\gamma$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado que contiene a  $f_c$ , satisface que  $V(\gamma) = \gamma^{(1)}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Supongamos por contradicción que  $D$  no es núcleo perfecta. Luego existe  $H \subseteq^* D$ , tal que  $H$  es núcleo imperfecta crítica.

Sea  $f_0 = xy \in H$ , entonces (por el Teorema 2.19) existe  $\mathcal{C}$  un ciclo dirigido,  $(\mathcal{C}_x^0, D_2)$ -normal, de longitud impar, que pasa por  $f_0$  y sin  $(V(\mathcal{C}), \mathcal{C}_x^0)$ -pseudodiagonales, por lo tanto  $\mathcal{C}$  no es simétrico.

Y por hipótesis,  $\mathcal{C}$  tiene una pseudodiagonal,  $f_c = uv$ , en  $D$  y también en  $H$ , puesto que  $H$  es una subdigráfica inducida de  $D$ , tal que cada ciclo,  $\gamma = (u = u_0, v = u_1, \dots, u_{2n}, u_0)$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado, que pasa por  $f_c$ , satisface que  $V(\gamma) = \gamma^{(1)}$ .

Por la Observación 2.34, existen  $i < j < k < l$ , tal que  $u_i$  y  $u_j$  son polos consecutivos en  $\gamma$ , al igual que  $u_k$  y  $u_l$ . Y la  $(u_i, u_j)$ -trayectoria y la  $(u_k, u_l)$ -trayectoria son de longitud impar.

Sea  $P$  la  $(u_i, u_j)$ -trayectoria y supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $u_0 \notin P$  (de lo contrario tomamos a  $P$  como la  $(u_k, u_l)$ -trayectoria). Si  $i$  es par, entonces el polo  $u_0 \in \gamma_{u_0}^0$ . De lo contrario  $j$  es par y se tendría que el polo  $u_j \in \gamma_{u_0}^0$ . Así que todo ciclo,  $\gamma$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado que pasa por  $f_c$  tiene  $(V(\gamma), \gamma_u^0)$ -pseudodiagonales, lo que no puede suceder debido al Teorema 2.19.

■

**Proposición 2.39** *Denotemos por  $F_{o.a}(D)$  el conjunto de flechas de  $D$  que no están contenidas en ningún ciclo dirigido, débilmente  $D_2$ -alternado. Sea  $D$  una digráfica finita que cumple hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ ,*

entonces:

$D$  es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , tal que  $A(H) \cap F_{o,a}(D) = \emptyset$ , es núcleo perfecta.

**Demostración.** Sea  $A = F_{o,a}$ , entonces para cada ciclo,  $\mathcal{C}$ , dirigido débilmente  $D_2$ -alternado se tiene que  $A(\mathcal{C}) \cap A = \emptyset$ . Así que se cumple, por vacuidad, las hipótesis del Corolario 2.33. Por lo tanto  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si cada subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , tal que  $A(H) \cap F_{o,a} = \emptyset$ , es núcleo perfecta.

■

**Proposición 2.40** *Sea  $D$  una digráfica finita que cumple hereditariamente la Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , sin ciclos dirigidos inducidos de longitud impar y sea  $T \subset V(D)$ . Supongamos que cada  $u \in T$  pertenece a lo más a  $\Delta_D(u)$  ciclos dirigidos débilmente  $D_2$ -alternados. Entonces  $D$  es núcleo perfecta si y sólo si  $D - T$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Supongamos que  $D$  no es núcleo perfecta, entonces existe  $H \subseteq^* D$ , tal que  $H$  es núcleo imperfecta crítica.  $H$  no es un ciclo de longitud impar, puesto que no hay ciclos de longitud impar inducidos.

$V(H) \cap T \neq \emptyset$ , de lo contrario  $H \subset D - T$ , lo que contradice la hipótesis de que  $D - T$  es núcleo perfecta. Sea  $u \in V(H) \cap T$ , entonces, por el Corolario 2.27,  $u$  pertenece al menos a  $\Delta_D(u) + 1$  ciclos dirigidos débilmente  $D_2$ -alternados, lo que contradice las hipótesis.

El recíproco es obvio.

■

## Capítulo 3

# Consecuencias y más aplicaciones

El tipo de resultados obtenidos en este capítulo son de gran importancia debido a que se dan condiciones para que una digráfica, no sólo finita, sino también infinita, sea núcleo perfecta. Estos resultados son novedosos dentro de la teoría de núcleos pues en la literatura actual existen muy pocos resultados para digráficas infinitas. En la primera sección se muestran, como consecuencias de los Teoremas 1.12 y 1.16, dos importantes teoremas que fueron la motivación principal de este trabajo. Como se comentó en el Capítulo 1, el Teorema 1.15 se utilizará para concluir la mayoría de los resultados de este capítulo. Especialmente para decidir cuándo uniones de dos digráficas, de ciertas familias ya conocidas, es núcleo perfecta.

### 3.1. Dos consecuencias importantes

Los dos siguientes teoremas fueron la motivación principal de los resultados del Capítulo 1, en particular del Teorema 1.12 y del Teorema 1.16. Estos teoremas proporcionan condiciones para que una digráfica sea núcleo perfecta, en términos de seminúcleos módulo  $F$ , como las del Teorema 3.1

en términos de seminúcleos. Estos teoremas tienen condiciones similares a las del Teorema 3.2, sin embargo este último sólo aplica a digráficas finitas. De esta manera se generalizan estos dos importantes resultados.

**Teorema 3.1 (V. Neumann-Lara, [33])** *Sea  $D$  una digráfica. Cada subdigráfica inducida tiene un seminúcleo no vacío si y sólo si es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Si  $D_1 = \text{Sim}(D)$ , claramente, es asimétricamente transitiva y no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre (resp.  $\beta'_{D_1}$ ) pues en toda  $A_k \in \Gamma_{D_1}$  (resp.  $A_k \in \beta'_{D_1}$ ) hay una flecha en  $\text{Asim}(D_1)$ . Y toda subdigráfica inducida tiene un seminúcleo, por lo tanto, tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

El recíproco es inmediato. ■

**Teorema 3.2 (H. Galeana-Sánchez, [15])** *Sean  $D$  una digráfica finita y  $D_1$  una subdigráfica asimétricamente transitiva de  $D$ . Si  $D$  es una digráfica  $\beta_{D_1}$ -libre y cada subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ , entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D$  es finita, no contiene ninguna  $H(k, D_1)$ , para  $k = 4, 5, 6, 8, 9, 10, 10', 10''$ , así que cumple con todas las hipótesis del Teorema 1.12. Aunque también se puede observar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.16, ya que al ser  $\beta_{D_1}$ -libre, también es  $\beta'_{D_1}$ -libre. Así que  $D$  es núcleo perfecta. ■

### 3.2. Unión de familias de digráficas conocidas

Existen familias de digráficas que se sabe son núcleo perfectas, como las digráficas pretransitivas derecha e izquierda [8], transitivas [24], simétricas

[2] y además se conoce que uniones de dos digráficas de cierta familia resulta también ser núcleo perfecta ([22], [39]). Ayudados por el Teorema 1.15, daremos condiciones para asegurar si la unión de dos digráficas de ciertas familias es núcleo perfecta. Daremos a continuación algunos resultados y definiciones que nos serán de utilidad.

**Definición 3.3** *Una digráfica  $D$  es llamada **pretransitiva derecha** (resp. **pretransitiva izquierda**), si  $uv, vw \in A(D)$  implica que  $uw$  ó  $wv \in A(D)$  (resp.  $uw$  ó  $vu \in A(D)$ ).*

**Lema 3.4** *Si  $D$  es una digráfica pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda, entonces  $D$  es asimétricamente transitiva.*

**Demostración.** Sean  $xy, yz \in Asim(D)$ , entonces por ser  $D$  pretransitiva derecha (resp. pretransitiva izquierda)  $xz \in A(D)$  ya que  $zy \notin A(D)$  (resp.  $yx \notin A(D)$ ). Si  $zx \in A(D)$  como  $xy \in A(D)$  (resp.  $yz \in A(D)$ ), entonces se tiene que  $yx$  ó  $zy \in A(D)$  (resp.  $zy$  ó  $yx \in A(D)$ ), lo cual contradice las hipótesis. Por lo tanto  $xz \in Asim(D)$ .

■

**Observación 3.5** *Si la digráfica  $D$  es transitiva, entonces es pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha). Si  $u, v, w \in V(D)$  tales que  $uv, vw \in A(D)$ , entonces, por ser  $D$  transitiva,  $uw \in A(D)$ . Y por el Lema 3.4 es también asimétricamente transitiva. También obsérvese que toda digráfica simétrica es también asimétricamente transitiva.*

**Lema 3.6** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen 2 subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$ , con  $D_2$  asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas, entonces para toda subdigráfica inducida  $H$  de  $D$ , existe un vértice  $v \in V(H)$  tal que toda flecha  $vz \in A(H) \cap A(D_2)$  es simétrica.*



**Demostración.** Supongamos lo contrario, es decir, que existe una subdigráfica inducida  $H$  de  $D$  tal que para todo  $v \in V(H)$ , existe una flecha  $vz \in A(H) \cap A(D_2)$ , tal que  $vz \in \mathcal{H} = A(H) \cap A(D_2) \cap A(\text{Asim}(D))$ . Sea  $v_0 \in V(H)$ , entonces existe  $v_1 \in V(H)$  tal que  $v_0v_1 \in \mathcal{H}$ . Luego existe  $v_2 \in V(H)$ , tal que  $v_1v_2 \in \mathcal{H}$ . Así que existe  $v_3 \in V(H)$  tal que  $v_2v_3 \in \mathcal{H}$ . Y así sucesivamente. Obtenemos así una sucesión infinita  $(v_0, v_1, v_2, v_3, \dots)$ . Esta sucesión es una trayectoria, de lo contrario, existiría  $v_j$  tal que  $v_{j+1} = v_i$ , con  $i < j$ .  $i \neq j - 1$ , pues  $v_jv_{j+1} \in \text{Asim}(D)$ , así que  $i < j - 1$ . Entonces tenemos que  $v_jv_i, v_iv_{i+1} \in \mathcal{H} \subset \text{Asim}(D_2)$  y por ser  $D_2$  asimétricamente transitiva  $v_jv_{i+1} \in \text{Asim}(D_2)$ . Así que de manera análoga podemos demostrar que  $v_jv_k \in \text{Asim}(D_2)$ , con  $k > i$ , en particular,  $v_jv_{j-1} \in \text{Asim}(D_2)$ , lo cual es una contradicción, pues  $v_{j-1}v_j \in \text{Asim}(D)$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $v_i = v_0$ . Demostraremos que  $v_0v_l \in \text{Asim}(D_2)$  para toda  $l > 0$ . Sabemos que  $v_0v_1 \in \text{Asim}(D_2)$ , por la elección de  $v_1$ . Ahora supongamos, como hipótesis de inducción, que  $v_0v_l \in \text{Asim}(D_2)$ . Tenemos que  $v_lv_{l+1} \in \text{Asim}(D_2)$ , entonces, ya que  $D_2$  es asimétricamente transitiva,  $v_0v_{l+1} \in \text{Asim}(D_2)$ , lo cual es una contradicción, por lo tanto  $v_lv_0 \notin A(D_2)$ . Análogamente se tiene que  $v_iv_j \in \text{Asim}(D_2)$ , para toda  $i, j$ , con  $i < j$ .

Así que  $D_2$  contiene una trayectoria,  $(v_0, v_1, v_2, v_3 \dots)$ , la cual es exterior e infinita por construcción, también es asimétrica pues sus flechas están contenidas en  $\mathcal{H}$  lo cual contradice las hipótesis. Por lo tanto existe  $v \in V(H)$  tal que toda  $vz \in A(H) \cap A(D_2)$  es simétrica. ■

Ahora con ayuda del Lema 3.6 y la Observación 3.5, podemos decir cuando la unión entre digráficas asimétricamente transitivas, pretransitivas izquierdas, pretransitivas derechas, transitivas y simétricas son núcleo perfectas, esto como consecuencia de los Teoremas 1.15 y 1.16. De nuevo, para ayuda del lector, se dan dos esquemas (Figuras 3.1 y 3.2), en donde se puede apreciar las implicaciones entre los corolarios.

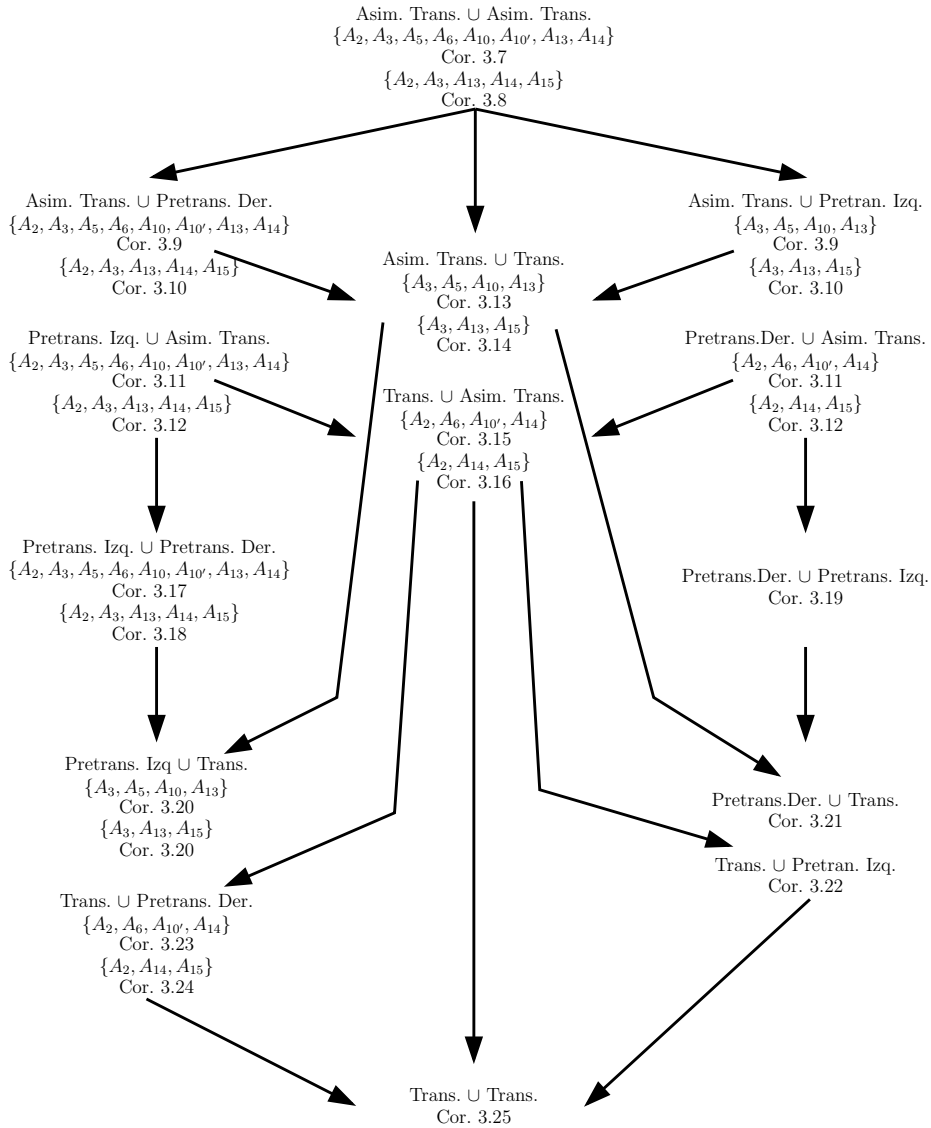


Figura 3.1. Esquema 1

El Esquema 3.1 incluye todas las posibles uniones entre digráficas asimétricamente transitivas, pretransitivas izquierdas, pretransitivas derechas y transitivas, considerando que en una misma unión se puede tomar a cualquiera de las dos digráficas como la subdigráfica  $D_1$ .

**Corolario 3.7** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_i$  es una digráfica asimétricamente transitiva sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Hay que verificar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15:

- $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas por hipótesis.
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre, pues es  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre y  $A_1, A_4, A_7, A_8, A_9, A_{10''}, A_{11}, A_{12} \notin^* D$  por ser  $D_2$  asimétricamente transitiva.
- Por el Lema 3.6, ya que  $D_2$  no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas, para toda subdigráfica inducida  $H$ , existe un vértice  $v$ , tal que toda flecha en  $D_2$  que sale de  $v$  es simétrica. Luego  $v$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $H$ .

■

**Corolario 3.8** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_i$  es una digráfica asimétricamente transitiva sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Hay que verificar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15:

- $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas por hipótesis.
- $D$  es  $\beta'_{D_1}$ -libre, pues es  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre y  $A_1, A_{11}, A_{12} \notin^* D$  por ser  $D_2$  asimétricamente transitiva.
- Por el Lema 3.6, ya que  $D_2$  no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas, toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

■

**Corolario 3.9** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha),  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_3, A_5, A_{10}, A_{13}\}$ -libre (resp.  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre), entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha) es también asimétricamente transitiva y por el Corolario 3.7 basta probar que es  $\{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre lo cual se tiene pues  $D_2$  es pretransitiva izquierda, (resp. es  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre por hipótesis).

■

**Corolario 3.10** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha),  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_3, A_{13}, A_{15}\}$ -libre (resp.  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre), entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha) es también asimétricamente transitiva y por el Corolario 3.8 basta probar que es  $\{A_2, A_{14}\}$ -libre lo cual se tiene pues  $D_2$  es pretransitiva izquierda (resp. es  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre por hipótesis).

■

**Corolario 3.11** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha),  $D_2$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre (resp.  $\{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre), entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Si  $D_1$  es pretransitiva izquierda, entonces es también asimétricamente transitiva, y por el Corolario 3.7 se tiene que  $D$  es núcleo perfecta.

Si  $D_1$  es pretransitiva derecha, es también asimétricamente transitiva, y por el Corolario 3.7, basta probar que es  $\{A_3, A_5, A_{10}, A_{13}\}$ -libre, lo cual se tiene debido a que  $D_1$  es pretransitiva derecha.

■

**Corolario 3.12** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha),  $D_2$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre (resp.  $\{A_2, A_{14}, A_{15}\}$ -libre), entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Si  $D_1$  es pretransitiva izquierda, es también asimétricamente transitiva, y por el Corolario 3.8 se tiene que  $D$  es núcleo perfecta.

Si  $D_1$  es pretransitiva derecha, es también asimétricamente transitiva, y por el Corolario 3.8, basta probar que es  $\{A_3, A_{13}\}$ -libre, lo cual se tiene debido a que  $D_1$  es pretransitiva derecha.

■

**Corolario 3.13** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_2$  es una digráfica transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_3, A_5, A_{10}, A_{13}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es transitiva, es pretransitiva izquierda, entonces aplicamos el Corolario 3.9.

■

**Corolario 3.14** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_2$  es una digráfica transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_3, A_{13}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es transitiva, es pretransitiva izquierda y aplicamos el Corolario 3.10.

■

**Corolario 3.15** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Se obtiene como consecuencia del Corolario 3.11.

■

**Corolario 3.16** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica asimétricamente transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_{14}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Se obtiene como consecuencia del Corolario 3.12.

■

**Corolario 3.17** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es pretransitiva derecha, también es asimétricamente transitiva, así que aplicamos el Corolario 3.11 y se obtiene lo que se desea.

■

**Corolario 3.18** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Como  $D_2$  es pretransitiva derecha, también es asimétricamente transitiva, así que se aplica el Corolario 3.12.

■

**Corolario 3.19 (Galeana-Sánchez, Rojas-Monroy [22])** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva izquierda y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Ya que  $D_2$  es pretransitiva izquierda, entonces es asimétricamente transitiva, así que podemos aplicar el Corolario 3.11. Por lo que hay que probar que es  $\{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre y esto sucede ya que  $D_2$  es pretransitiva izquierda. ■

**Corolario 3.20** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda,  $D_2$  es una digráfica transitiva,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_3, A_5, A_{10}, A_{13}\}$  ó  $\{A_3, A_{13}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Tenemos que  $D_1$  es asimétricamente transitiva, por lo que aplicamos el Corolario 3.13 ó 3.14. ■

**Corolario 3.21** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_2$  es una digráfica transitiva y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Tenemos que  $D_2$  es pretransitiva izquierda, por lo que aplicamos el Corolario 3.19. ■



**Corolario 3.22** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva izquierda y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Se tiene que  $D_1$  y  $D_2$  son pretransitivas derecha e izquierda, respectivamente, así que el corolario se obtiene como consecuencia del Corolario 3.19.

■

**Corolario 3.23** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Tenemos que  $D_2$  es pretransitiva derecha, así que también es asimétricamente transitiva, por lo que aplicamos el Corolario 3.15.

■

**Corolario 3.24** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $D$  es  $\{A_2, A_{14}, A_{15}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Tenemos que  $D_2$  es pretransitiva derecha, así que también es asimétricamente transitiva, por lo que aplicamos el Corolario 3.16.

■

**Corolario 3.25 (Sands, Sauer, Woodrow, 82)** *Sea  $D$  una digráfica; si existen 2 subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$  tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), con  $D_i$  transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i = 1, 2$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Ya que  $D_1$  y  $D_2$  son transitivas, se tiene que son pretransitiva derecha y pretransitiva izquierda, respectivamente, así que el corolario se obtiene como consecuencia del Corolario 3.21 ó 3.22.

■

Ahora presentamos el Esquema 3.2, éste incluye todas las posibles uniones entre una digráfica simétrica y una digráfica asiméricamente transitiva, transitivas, pretransitiva izquierda o pretransitiva derecha. Considerando que en una misma unión se puede tomar a la digráfica simétrica como la subdigráfica  $D_1$  ó la  $D_2$ .

**Corolario 3.26** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica asiméricamente transitiva,  $D_2$  es una digráfica simétrica y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Ya que una digráfica simétrica es asiméricamente transitiva (Obs. 3.5), podemos aplicar el Corolario 3.7 ó 3.8. Por lo tanto, hay que verificar que  $D$  sea  $\{A_2, A_3, A_5, A_6, A_{10}, A_{10'}, A_{13}, A_{14}\}$  ó  $\{A_2, A_3, A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$ -libre, lo cual sucede por ser  $D_2$  simétrica.

■

**Corolario 3.27** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica simétrica,  $D_2$  es una digráfica asiméricamente transitiva y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

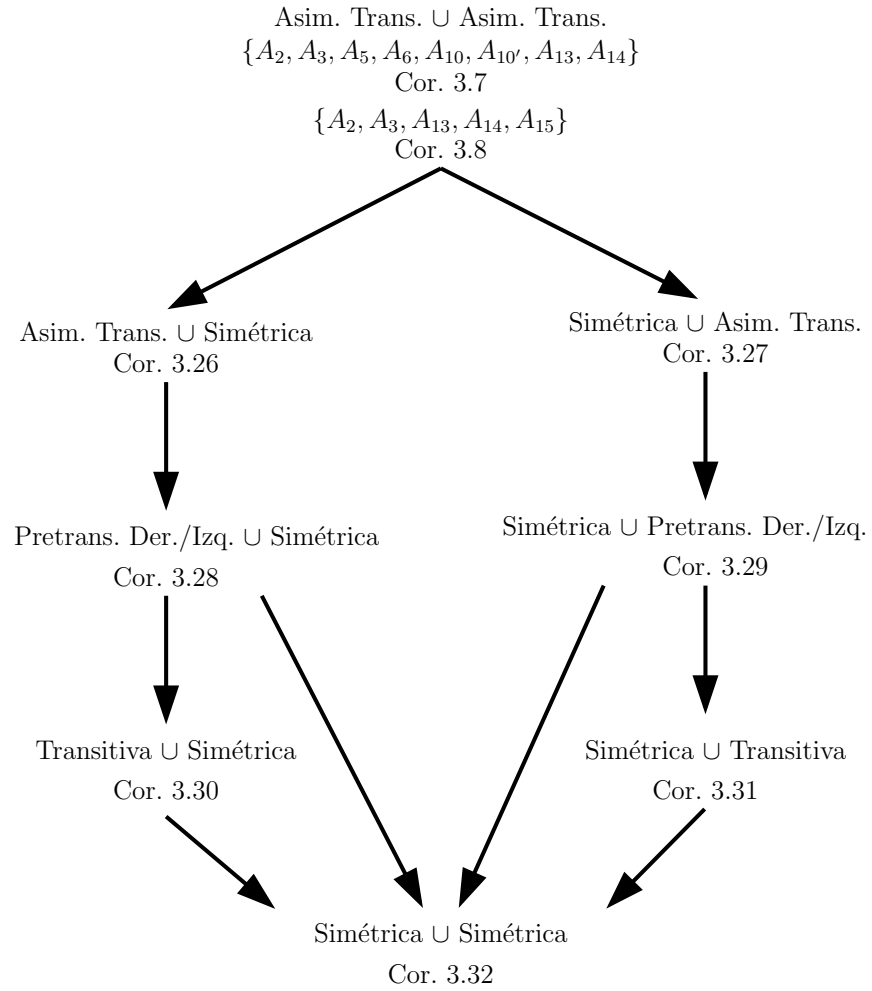


Figura 3.2.

**Demostración.** De nuevo podemos aplicar el Corolario 3.7 ó 3.8, ya que  $D_1$  es también asimétricamente transitiva. ■

**Corolario 3.28** Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$

y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha),  $D_2$  es una digráfica simétrica y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Como la digráfica  $D_1$  es pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha), entonces es asimétricamente transitiva, por lo que se puede aplicar el Corolario 3.26.

■

**Corolario 3.29** Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica simétrica,  $D_2$  es una digráfica pretransitiva izquierda (resp. pretransitiva derecha) y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una consecuencia directa del Corolario 3.27.

■

**Corolario 3.30** Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es una digráfica transitiva,  $D_2$  es una digráfica simétrica y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Puesto que una digráfica transitiva es pretransitiva derecha o pretransitiva izquierda, este corolario es consecuencia directa del Corolario 3.28.

■

**Corolario 3.31** Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde  $D_1$  es

una digráfica simétrica,  $D_2$  es una digráfica transitiva y  $D_i$  no contiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Es una consecuencia del Corolario 3.29. ■

**Corolario 3.32** *Toda digráfica simétrica es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Cualquier digráfica simétrica es la unión de dos digráficas simétricas, ajenas en flechas, así que por el Corolario 3.28 ó 3.29 es núcleo perfecta. ■

Si  $D$  es la unión de dos digráficas pretransitivas derechas o dos pretransitivas izquierdas, entonces  $D$  no necesariamente es núcleo perfecta, como mostraron Galeana-Sánchez y Rojas-Monroy, [22] con los siguientes contraejemplos, (Fig. 3.3):

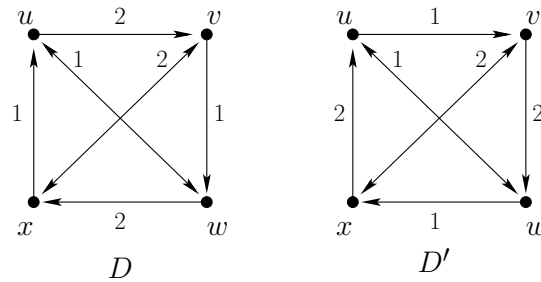


Figura 3.3.

1.  $V(D_1) = V(D_2) = \{u, v, w, x\}$ ,  $A(D_1) = \{xu, uw, wu, vw\}$ ,  $A(D_2) = \{uv, xv, vx, wx\}$  y  $D = D_1 \cap D_2$

2.  $V(D'_1) = V(D'_2) = \{u, v, w, x\}$ ,  $A(D'_1) = \{uv, uw, wu, wx\}$ ,  $A(D'_2) = \{xu, xv, vx, vw\}$  y  $D' = D'_1 \cap D'_2$ .

En los siguientes corolarios se dan condiciones suficientes para decir cuándo la unión de dos digráficas pretransitivas izquierdas o dos pretransitivas derechas resulta ser una digráfica núcleo perfecta.

**Corolario 3.33** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), con  $D_1$  una digráfica asimétrica,  $D_i$  es una digráfica pretransitiva izquierda sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Para demostrarlo vamos a probar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- $D_1$  es asimétricamente transitiva, por el Lema 3.4 y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre:
  - $A_3, A_5, A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* D$ , debido a que  $D_1$  es asimétrica.
  - $A_1, A_2, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10'}, A_{10''}, A_{11}, A_{12}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , pues como  $w \xrightarrow{2} x$  y  $x \xrightarrow{2} y$ , se tiene que  $w \xrightarrow{2} y$  ó  $x \xrightarrow{2} w$  (Fig. 3.4).
- Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , debido al Lema 3.6.

■

**Corolario 3.34** *Sea  $D$  una digráfica finita. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde cada triángulo dirigido es simétrico,  $D$  es  $\{A_3\}$ -libre y  $D_i$  es una digráfica pretransitiva izquierda sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

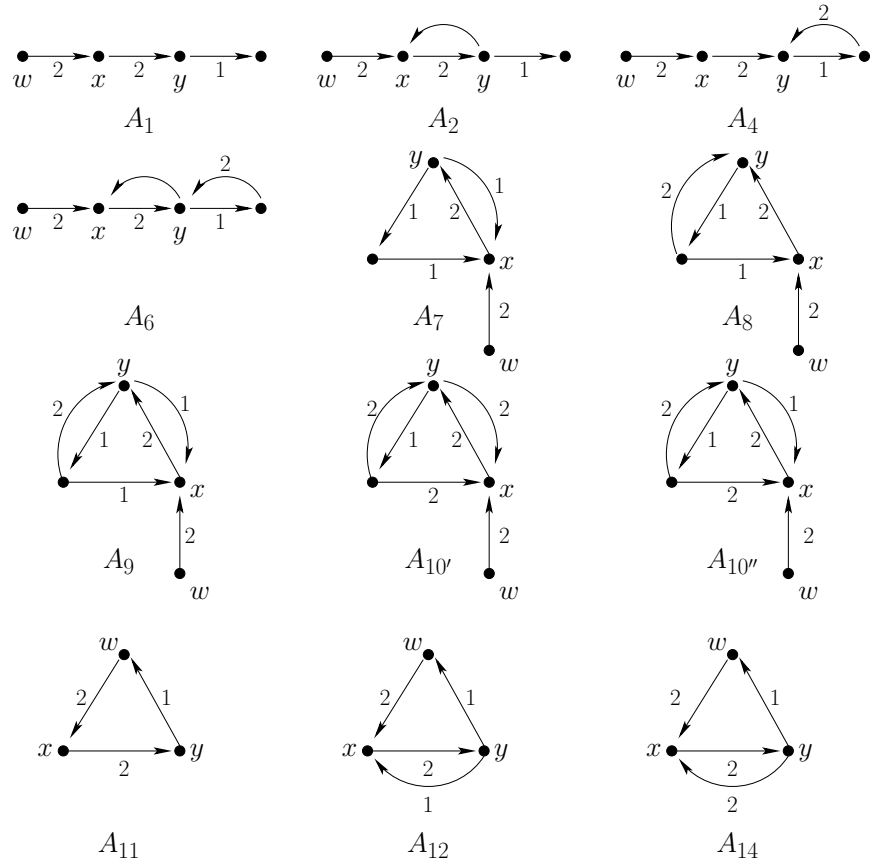


Figura 3.4.

**Demostración.** Para demostrarlo vamos a probar que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2, puesto que  $D$  es finita.

- $D_1$  es asimétricamente transitiva (Lema 3.4).
- $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre:
  - $A_1, A_2, A_7, A_{11}, A_{12}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , por el mismo razonamiento que en el corolario anterior.
  - $A_3 \not\subseteq^* D$ , por hipótesis.

- $A_{13} \not\subseteq^* D$ , pues todos los triángulos son simétricos.
- Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  (Lema 3.6).

■

**Corolario 3.35** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde cada triángulo dirigido es simétrico,  $D$  es  $\{A_3, A_5\}$ -libre y  $D_i$  es una digráfica pretransitiva izquierda sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Nuevamente probaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- $D_1$  es asimétricamente transitiva (Lema 3.4), sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre:
  - $A_1, A_2, A_4, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10'}, A_{10''}, A_{11}, A_{12}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , por el mismo argumento que en el Corolario 3.34.
  - $A_3, A_5 \not\subseteq^* D$ , por hipótesis.
  - $A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* D$ , debido a que los triángulos son simétricos.
- De nuevo, por el Lema 3.6 se tiene que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ .

■

**Corolario 3.36** *Sea  $D$  una digráfica finita. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde cada triángulo dirigido es simétrico,  $D$  es  $\{A_2\}$ -libre y  $D_i$  es una digráfica pretransitiva derecha,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*



**Demostración.** Ya que  $D$  es finita, vamos a probar que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.

- Por Lema 3.4,  $D_1$  es asimétricamente transitiva.
- $D$  es  $\beta_{D_1}$ -libre:
  - $A_1, A_3 \not\subseteq^* D$ , pues como  $w \xrightarrow{2} x$  y  $x \xrightarrow{2} y$  se tiene que  $w \xrightarrow{2} y$  ó  $y \xrightarrow{2} x$  (Fig. 3.4).
  - $A_2 \not\subseteq^* D$ , por hipótesis.
  - $A_7, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , ya que no contienen triángulos simétricos.
- Existe un vértice  $v \in H$ , con  $H \subseteq^* D$ , tal que para toda flecha  $vz \in A(H) \cap A(D_2)$  es simétrica, así que  $\{v\}$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  de  $H$ .

■

**Corolario 3.37** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), donde cada triángulo dirigido es simétrico,  $D$  es  $\{A_2, A_5, A_6\}$ -libre y  $D_i$  es una digráfica pretransitiva derecha sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Probaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- Por Lema 3.4,  $D_1$  es asimétricamente transitiva y por hipótesis no tiene trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre:
  - $A_1, A_3, A_4 \not\subseteq^* D$ , debido a que  $w \xrightarrow{2} x$  y  $x \xrightarrow{2} y$  implica que  $w \xrightarrow{2} y$  ó  $y \xrightarrow{2} x$  (Fig. 3.4).
  - $A_2, A_5, A_6 \not\subseteq^* D$ , por hipótesis.

- $A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , ya que los triángulos deben ser simétricos.
- Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , por el Lema 3.6.

■

**Corolario 3.38** *Sea  $D$  una digráfica. Si existen dos subdigráficas de  $D$ ,  $D_1$  y  $D_2$ , tales que  $D = D_1 \cup D_2$  ( $A(D_1) \cap A(D_2) = \emptyset$ ), con  $D \setminus \{A_2, A_6, A_{10'}, A_{14}\}$ -libre y  $D_i$  es una digráfica pretransitiva derecha sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i \in \{1, 2\}$ , entonces  $D$  es núcleo perfecta.*

**Demostración.** Veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- Por Lema 3.4,  $D_1$  es asimétricamente transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre:
  - $A_1, A_3, A_4, A_7, A_8, A_9, A_{10''}, A_{11}, A_{12} \not\subseteq^* D$ , pues ya que  $w \xrightarrow{2} x$  y  $x \xrightarrow{2} y$ , se tiene que  $w \xrightarrow{2} y$  ó  $y \xrightarrow{2} x$  (Fig. 3.4).
  - $A_2, A_6, A_{10'}, A_{14} \not\subseteq^* D$ , por hipótesis.
  - $A_5 \not\subseteq^* D$ , debido a que  $x \xrightarrow{1} y$  e  $y \xrightarrow{1} z$  implica que  $x \xrightarrow{1} z$  ó  $z \xrightarrow{1} y$ , lo cual no se tiene (Fig. 3.5).

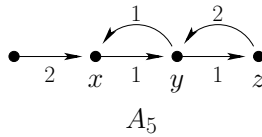


Figura 3.5.

- $A_{10} \not\subseteq^* D$ , como  $x \xrightarrow{1} y$  e  $y \xrightarrow{1} z$ , se tiene que  $x \xrightarrow{1} z$  ó  $z \xrightarrow{1} y$  (Fig. 3.6).

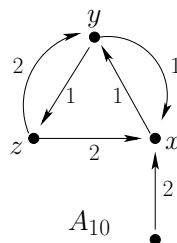


Figura 3.6.

- $A_{13} \notin^* D$ , como  $x \xrightarrow{1} y$  e  $y \xrightarrow{1} w$ , entonces  $x \xrightarrow{1} w$  ó  $w \xrightarrow{1} y$  (Fig. 3.4).
- Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene un seminúcleo módulo  $A(D_1)$ , véase Lema 3.6.

■

### 3.3. Condiciones sobre $Asim(D)$ para que $D$ sea núcleo perfecta

En esta última sección, daremos condiciones sobre la parte asimétrica de una digráfica  $D$  para asegurar que la digráfica sea núcleo perfecta, usando como herramienta el Teorema 1.15. Estos resultados generalizan aquellos obtenidos por Galeana-Sánchez en [15].

**Corolario 3.39** Sean  $D$  una digráfica y  $H$  una subdigráfica de  $D$  tales que  $Asim(D) \subset H$ . Si  $H = D_1 \cup D'_2$  con  $D_1$  y  $D'_2$  transitivas sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas y  $D$  es  $\{A_2, A_6, A_7, A_9, A_{10'}, A_{10''}, A_{12}, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Probaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- $D_1$  es asimétricamente transitiva, por la Observación 3.5 y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- Toda subdigráfica inducida  $F$  de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ . Sea  $F \subseteq^* D$  y sea  $H' = H[V(F)]$ . Por el Lema 3.6 existe un vértice  $v \in H' \subset F$  tal que toda flecha  $vz \in A(H') \cap A(D'_2)$  es simétrica y cada flecha  $vz \in A(F) \setminus A(H')$  es simétrica, pues  $Asim(F) \in H$ . Por lo tanto  $\{v\}$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  no vacío de  $F$ .
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre. Basta ver que es  $\{A_1, A_3, A_4, A_5, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{13}\}$ -libre.  $A_1, A_4, A_8, A_{11} \not\subseteq^* D$ , pues  $D'_2$  es transitiva.  $A_3, A_5, A_{10}, A_{13} \not\subseteq^* D$ , puesto que  $D_1$  es transitiva.

■

**Corolario 3.40** Sean  $D$  una digráfica y  $H$  la subdigráfica de  $D$  tal que  $Asim(D) = H$ . Si  $H = D_1 \cup D'_2$ , con  $D_i$  transitiva y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas,  $i = 1, 2$ . Si  $D$  es  $\{A_2, A_{14}\}$ -libre, entonces  $D$  es núcleo perfecta.

**Demostración.** Por demostrar que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.15.

- $D_1$  es asimétricamente transitiva, por la Observación 3.5, y sin trayectorias infinitas exteriores asimétricas.
- Toda subdigráfica inducida  $F$  de  $D$  tiene un seminúcleo no vacío módulo  $A(D_1)$ . Sea  $F \subseteq^* D$  y sea  $H' = H[V(F)]$ , por el Lema 3.6 existe un vértice  $v \in H' \subset F$  tal que toda flecha  $vz \in A(H') \cap A(D'_2)$  es simétrica y cada flecha  $vz \in A(F) \setminus A(H')$  es simétrica, pues  $Asim(F) \in H$ . Por lo tanto  $\{v\}$  es un seminúcleo módulo  $A(D_1)$  no vacío de  $F$ .
- $D$  es  $\Gamma_{D_1}$ -libre. Hay que probar que es  $\{A_1, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}, A_{11}, A_{12}, A_{13}\}$ -libre.  $A_1, A_4, A_8, A_{11} \not\subseteq^* D$ , pues  $D'_2$  es transitiva.  $A_3, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{10'}, A_{10''}, A_{12}, A_{13} \not\subseteq^* D$ , pues tienen una flecha de  $D_1$  en  $Sim(D)$ .

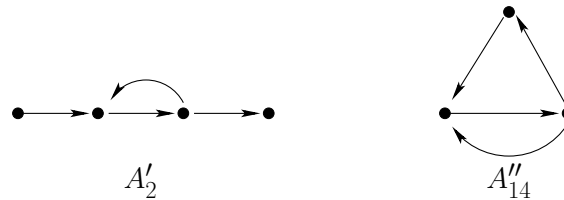


Figura 3.7.

**Corolario 3.41** Sea  $D$  una digráfica  $\{A'_2, A''_{14}\}$ -libre (Fig. 3.7). Si  $Asim(D)$  es una digráfica bipartita, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

**Demostración.** Sea  $(V_1, V_2)$  una bipartición de  $Asim(D)$ . Definamos las digráficas  $D_1$  y  $D'_2$ , como las subdigráficas de  $D$ , tales que

$$V(D_i) = V(D), \text{ con } i = 1, 2;$$

$$A(D_1) = \{xy \mid x \in V_1, y \in V_2, xy \in Asim(D)\}$$

$$\text{y } A(D_2) = \{xy \mid x \in V_2, y \in V_1, xy \in Asim(D)\}.$$

Se puede observar que  $Asim(D) = D_1 \cup D'_2$  y cada  $D_i$  es transitiva. Por hipótesis tenemos que es  $\{A_2, A_{14}\}$ -libre, así que se sigue del Corolario 3.40 que  $D$  es núcleo perfecta.

# Bibliografía

- [1] C. Berge, *A combinatorial problem in logic*. Discrete Mathematics, 17 (1977), 23-26.
- [2] C. Berge, *Nouvelles extensions du noyau d'un graphe et ses applications en théorie des jeux*. Publ. Econométriques, Vol. 6 (1973).
- [3] C. Berge, *Graphs*. North-Holland, Amsterdam, New York (1985).
- [4] C. Berge, P. Duchet, *Problème Séminaire MSH*, Paris, Jan. (1983).
- [5] E. Boros, V. Gurvich, *Perfect graphs are kernel solvable*. Discrete Math., 159 (1996), 35-55.
- [6] V. Chvátal, *On the computational complexity of finding a kernel*. Report No. CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal (1973).
- [7] P. Duchet, *Représentation; noyaux en théorie des graphes et hypergraphes*. Thèse, Univ. Paris VI (1979).
- [8] P. Duchet, *Graphes noyau-parfaits*. Ann. Discrete Math., 9 (1980), 93-101.
- [9] P. Duchet, *A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect*. J. Graph Theory II , (1) (1987), 81-85.
- [10] P. Duchet, H. Meyniel, *A note on kernel-critical graphs*. Discrete Math., 33 (1981), 103-105.

- 
- [11] W. Fernández de la Vega, *Kernels in random graphs*. Discrete Math., 82 (1990), 213-217.
- [12] A. S. Fraenkel, *Planar kernel and Grundy with  $d \leq 3$ ,  $d^+ \leq 2$ ,  $d^- \leq 2$  are NP-complete*. Discrete Appl. Math., 3 (1981), 257-262.
- [13] A. S. Fraenkel, *Combinatorial game theory foundations applied to digraph kernels*. Electron J. Combin., 4 (1997), 17.
- [14] H. Galeana-Sánchez, *A counterexample to a conjecture of Meyniel on kernel perfect graphs*. Discrete Math., 41 (1982), 105-107.
- [15] H. Galeana-Sánchez, *Semikernels modulo  $F$  and kernels in digraphs*. Discrete Math., 218 (2000), 61-71.
- [16] H. Galeana-Sánchez, M. Guevara, *A sufficient condition for an infinite digraph to be kernel-perfect*. Aceptado en Discrete Math. en marzo, 2007.
- [17] H. Galeana-Sánchez, M. Guevara, *Some sufficient conditions for the existence of kernels in infinite digraphs*. Enviado en febrero, 2006.
- [18] H. Galeana-Sánchez, M. Guevara, *Some results on the structure of kernel-perfect and critical kernel imperfect digraphs*. Enviado en Mayo, 2006.
- [19] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernels and semikernels of digraphs*. Discrete Math., 48 (1984), 67-76.
- [20] H. Galeana-Sánchez, V. Neumann-Lara, *On kernel-perfect critical digraphs*. Discrete Math., 59 (1986), 257-256.
- [21] H. Galeana-Sánchez and V. Neumann-Lara, *Extending kernel perfect digraphs to kernel perfect critical digraphs*. Discrete Math., 94 (1991), 181-187.
- [22] H. Galeana-Sánchez, R. Rojas-Monroy, *Kernels in pretransitive digraphs*. Discrete Math., 275 (2004), 129-136.

- 
- [23] H. Jacob, *Étude théorique du Noyau d'un graphe*, Thèse Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (1979).
- [24] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Reprinted from Chelsea Publishing Company (1950).
- [25] M. Kwasnik, *On  $(k,l)$ -kernels of exclusive disjunction, Cartesian sum and normal point product of two directed graphs*. Manuscript.
- [26] M. Kwasnik, *The generalization of Richardson's theorem*. Manuscript.
- [27] J. M. Le Bars, *Counterexample of the 0-1 law for fragments of existential second-order logic; an overview*. Bull. Symbolic Logic, 9 (2000), 67-82.
- [28] J. M. Le Bars, *The 0-1 law fails for frame satisfiability of propositional modal logic*, in: Proceedings of the 17th Symposium on Logic in Computer Science, (2002), 225-234.
- [29] J. van Leeuwen, *Having a Grundy numbering is NP-complete*. Report 207, Computer Science Department, Pennsylvania State University, University Park, PA (1976).
- [30] D. Marcu, *On the existence of a kernel in a strong connected digraph*. Bul. Inst. Politehn. Iasi Sect. I 25 (2) (1979), 35-37.
- [31] D. Marcu, *Some remarks concerning the kernels of a strong connected digraph*. An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.), 26 (2) (1980), 417-418.
- [32] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton (1944).
- [33] V. Neumann-Lara, *Seminúcleos de una digráfica*. An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México, II (1971).
- [34] M. Richardson, *On weakly ordered systems*. Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 113-116.



- 
- [35] M. Richardson, *Extensions theorems for solutions of irreflexive relations*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 649-651.
- [36] M. Richardson, *Solutions of irreflexive relations*. Ann. Math., 58 (2) (1953), 573-580.
- [37] B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales*. Volume 2: Applications et problèmes spécifiques. Dunod, Paris (1970).
- [38] S. Rudeanu, *Notes sur l'existence et l'unicité du noyau d'un graphe*. Reveu Française Rech. Operat., 33 (1964) 20-26.
- [39] B. Sands, N. Sauer and R. Woodrow, *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 33 (1982), 271-275.
- [40] I. Tomescu, *Almost all digraphs have a kernel*. Random Graphs '87 Eds. M. Karonski, J. Jaworski and A. Rucinski. John Wiley and Sons Ltd., (1990), 325-340.

# Índice alfabético

- $B_S$ , 14
- $F^+, F^-$ , 2
- $H(k, D_1)$ , 18
- $P^i$ , 78
- $T_S^{S'}$ , 14
- $\Gamma_{D_1}$ , 12
- $\alpha_{D_1}$ , 14
- $\beta_{D_1}$ , 12
- $\lesssim_{D_1}$ , 16
- $\mathcal{H}$ -libre, 2
- $\mathcal{C}_{u_0}^i$ , 78
- $\mathcal{C}^{(i)}$ , 108
- $\preceq_{D_1}$ , 14
  
- Absorbente, 7
  
- Cadena, 10
- Camino, 3
  - cerrado, 3
  - dirigido, 4
  - longitud de un, 3
- Ciclo, 3
  - débilmente  $H$ -alternado, 104
  - dirigido, 4
- Conjunto parcialmente ordenado, 9
- Cota superior, 10
  
- Digráfica, 1
  - asimétrica, simétrica, 3
  - asimétricamente transitiva, 3
  - bipartita, 4
  - débilmente conexa, 4
  - exteriormente localmente finita, 49
  - finita, infinita, 1
  - fuertemente conexa, 4
  - localmente finita, 49
  - núcleo imperfecta crítica, 9
  - núcleo perfecta, 8
  - núcleo perfecta módulo  $A(D_1)$ , 87
  - orden de una, 1
  - parte asimétrica, parte simétrica de una, 3
  - pretransitiva derecha, izquierda, 117
  - subdigráfica
    - generadora, 2
    - subdigráfica inducida por flechas, por vértices, 2
  - transitiva, 3
  
- Elemento maximal, 10

- Exgrado,  $\delta^+$ , 2
- Exvecindad,  $\Gamma^+$ , 2
- Flecha, 1
- adyacente, 1
  - asimétrica, simétrica, 2
  - extremo de una, 1
- Grado,  $\delta$ , 2
- Independiente, 7
- Ingrado,  $\delta^-$ , 2
- Invecindad,  $\Gamma^-$ , 2
- Núcleo, 7
- Operaciones
- $D(f/P_n)$ , 5
  - $D - v$ ,  $D - A$ , 4
  - $D_1 \odot D_2$ , 5
  - $s(D)$ , 6
- Polo, 104
- Propiedad  $P(\alpha_{D_1}, \leq)$ , 14
- hereditariamente, 106
- Pseudodiagonal, 3
- Seminúcleo, 7
- Seminúcleo fuerte módulo  $(R, A)$ , 78
- Seminúcleo módulo  $(R, A)$ , 78
- Seminúcleo módulo  $F$ , 8
- Trayectoria, 3
- $(K, B)$ -normal, 80
  - dirigida, 4
- directa, 4
- infinita exterior, 4
- Vértice, 1
- Zorn, Lema de, 10

Instituto de Matemáticas,  
Universidad Nacional Autónoma de México.  
Área de la investigación científica,  
Circuito Exterior,  
Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510,  
México D.F., México

[guevara@matem.unam.mx](mailto:guevara@matem.unam.mx)

Apoyado por Instituto de Matemáticas, UNAM, PAEP-UNAM, DGEP-UNAM y CONACyT