UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis Estocástico no Estándar y su Aplicación en Finanzas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER DELGADO VENCES

DIRECTOR DE TESIS: DR. MOGENS BLADT PETERSEN

MÉXICO, D. F. JUNIO 2007.

Análisis Estocástico no Estándar y su Aplicación en Finanzas.

FRANCISCO JAVIER DELGADO VENCES
Maestría en Ciencias Matemáticas.

Supervisor : MOGENS BLADT

20 de junio de 2007

Todo nos amenaza:
el tiempo, que en vivientes fragmentos divide
al que fui
del que seré,
como el machete a la culebra;
la conciencia, la transparencia traspasada,
la mirada ciega de mirarse mirar;
las palabras, guantes grises, polvo mental sobre la yerba,
el agua, la piel,
nuestros nombres, que entre tú y yo se levantan,
murallas de vacío que ninguna trompeta derrumba.
....
Más allá del amor, de Semillas para un himno.
OCTAVIO PAZ

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi tutor Mogens por su gran paciencia, por dedicarme tiempo en la preparación de este trabajo y por su apoyo en todas las dudas generadas a lo largo de este.

Agradezco a mis sinodales por sus valiosos comentarios, Juan por su valiosa aportación al momento de aclarar ciertos detalles. a Pablo por los comentarios, a Ana por sus correcciones, finalmente a Ramses que a últimas fechas se ha convertido en un gran amigo.

A todos mis amigos y compañeros de la maestría, que me han apoyado tanto académicamente como en otro tipo de aspectos, Sergio por esas charlas tan amenas que hemos tenido y que voy a extrañar, Lucy (cuando vas a decirme porque no usas tu verdadero nombre?), Fernando, Lizbeth, Isadora, al George amigo, Victor, los tres Migueles: Chong, el de Toluca y el de Merida; el Juanito que cuando iniciamos la maestría no nos tratábamos y que al final de ella he encontrado en el a un buen compañero; también a los que se han ido ya de la maestría y los que se nos quedaron en el camino.

A mi familia, por la paciencia tenida y la que necesitaran para lo que viene.

A Arelly por su inagotable paciencia, amor y compañía.

A Conacyt por haberme otorgado la beca para realizar mis estudios de posgrado la cual me permitió vivir estos dos años casi sin ningún sobresalto.

Finalmente, a la UNAM de la cual me siento orgulloso por toda la grandeza que de ella emana.

Índice general

Introducción

En 1966, Abraham Robinson publicó un libro sobre Análisis no Estándar, en el cual aparecieron por primera vez los fundamentos de lo que se convertiría años después, en un nuevo enfoque en las matemáticas, al establecer la teoría sobre los infinitesimales de una manera rigurosa.

Si bien, este fue el primer libro sobre el Análisis no Estándar, cabe mencionar que está basado en una serie de artículos del mismo Robinson. El primer artículo se publicó en *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam* en el año de 1961, en donde se usó por primera vez el término de Non-standard Analysis, debido a que involucra y fue, en parte, inspirado por los modelos no estándar de la Aritmética.

En este trabajo se pretende abordar el desarrollo del Análisis no Estándar (ANS) en el ámbito del análisis estocástico, así como dar su aplicación a las finanzas. En el primer capítulo, se tratan las cuestiones básicas del ANS, el uso de ultrafiltros para definir de una manera formal a ${}^*\mathbb{R}$, además del principio de transferencia, el cual es muy usado en el ANS.

En el capítulo 2, se aborda la medida de Loeb y la teoría de integración, que es el análogo de la medida de Lebesgue y la teoría de integración mediante el uso de la medida de Lebesgue. En este capítulo también se desarrollan los espacios de probabilidad hiperfinitos que son espacios de medida $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde Ω tiene ciertas propiedades particulares, pero $\mathcal{F}$ y P tendrán las mismas propiedades que su análogo estándar.

El análisis estocástico no estándar es discutido en el capítulo 3, se trata désde la definición de integral estocástica hasta solución de ecuaciones diferenciales estocásticas, siempre en el enfoque no estándar.

Los procesos con incrementos independientes y estacionarios o procesos de Lévy hiperfinitos son tratados en el capítulo 4, donde se prueba el teorema de representación de Lévy-Khintchine para este tipo de procesos, con lo cual sería sencillo probar la descomposición de Lévy-Itô, pero esto último no se hará.

Finalmente, en el capítulo 5 se presenta la aplicación a finanzas del ANS, mediante la modelación del precio de una opción europea aplicando el modelo de Cox-Ross-Rubinstein que es el análogo discreto del modelo de Black-Scholes. En la última sección se modela el precio de una opción americana, que al igual que en todo el trabajo se hace mediante el uso de ANS.

$\blacksquare$

Capítulo 1

Introducción al Análisis no Estándar.

En este capítulo se da una introducción al análisis no estándar, iniciando por la construcción de los hiperreales usando ultrafiltros, asimismo se prueban ciertas propiedades básicas que serán usadas en los capítulos posteriores. Para este capítulo se ha revisado principalmente [6], [5], [10], [15] y [18].

1.1. Números Infinitesimales.

Louis Agustin Cauchy $(1789 - 1857)$ es considerado como uno de los pioneros de la precisión característica de los matemáticos modernos, escribió:

My principal aim has been to reconcile rigour, which I have made a law to myself in my Cours d'analyse, *with the simplicity which the direct consideration of infinitely small quantities produces.*[1]

Su método consistió en considerar infinitesimales como variables que luego se anulan:

When the successive numerical values of a variable decrease indefinitely so as to be smaller than any given number, this variable becomes what is called **infinitesimal**, *or infinitely small quantity.... One says that a variable quantity becomes infinitely small when its value decreases numerically so as*

[1]La traducción al ingles se muestra en [18].

to converge to the limit zero

En la actualidad aún hay libros que contienen ideas tales como,
Una sucesión que satisface

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

es un infinitesimal, mientras que uno que satisface

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

se dice que es un número infinito.

Entonces surge la pregunta, ¿Podemos construir un sistema de números en el cual tales sucesiones representen números infinitos *grandes* y *pequeños* respectivamente?. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y para tratar de construir tal sistema, debemos considerar que necesitamos para poder hacerlo.

De acuerdo a Cauchy, la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

es un infinitesimal, así como

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

Pero así como estos representan números infinitamente pequeños, quizás se podría considerar al segundo como la mitad del tamaño del primero esto porque el último converge dos veces más rápido que el primero.

De manera similar, las sucesiones

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

y

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

representan magnitudes infinitas, y podemos argumentar igual que líneas arriba y decir que el segundo debería ser dos veces más grande que el primero, porque éste diverge a ∞ dos veces más rápido que el primero.

Por otro lado, las sucesiones

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

y

$$2, 2, 3, 4 \ldots$$

podrían representar el mismo número infinito.

Estas ideas son atractivas porque sugieren la posibilidad de usar números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes como medidas de tasas de convergencia. Pero en la construcción de los números reales, fuera de las sucesiones de Cauchy, todas las sucesiones convergentes a 0 son identificadas con el número 0, mientras que las sucesiones divergentes no juegan ningún papel. Esto muestra la necesidad de construir una relación de equivalencia diferente entre sucesiones que la usada en la construcción de Cantor de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$.

1.2. Filtros.

Sean $r = \langle r_1, r_2, r_3, \ldots\rangle$ y $s = \langle s_1, s_2, s_3, \ldots\rangle$ sucesiones de números reales. Diremos que r y s son *equivalentes* si coinciden o son iguales en un número "grande"de lugares, i.e., si su *conjunto de concordancia*

$$E_{rs} = \{n : r_n = s_n\}$$

es grande en algún sentido.

La definición anterior nos deja ver la necesidad de clarificar qué significa que un conjunto sea grande. Hay algunas propiedades que quisiéramos tener:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ debe ser grande, de tal manera que podamos asegurar que cada sucesión sea equivalente a sí misma.

- Una relación de equivalencia es transitiva, así que quisiéramos que si E_{rs} y E_{st} son grandes, entonces E_{rt} debe ser grande. Ahora, como $E_{rs} \cap E_{st} \subseteq E_{rt}$ entonces se tiene la siguiente condición :

  Si A y B son conjuntos grandes y $A \cap B \subseteq C$ entonces C es grande.

- El conjunto vacío $\emptyset$ es no grande, o de otra manera por el requerimiento anterior todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ serían grandes y entonces todas las sucesiones serían equivalentes.

No obstante el pedir que $A \cap B$ sea grande cuando A y B son grandes puede parecer muy restrictivo, hay situaciones naturales en las que las tres condiciones de arriba son cumplidas. Una de ellas es cuando el conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es grande si es cofinito, esto es, si su complemento $\mathbb{N} \setminus A$ es finito. Esto significaría que A contendría a ‶casi todos″ o a los ‶últimos miembros″ de $\mathbb{N}$. Aunque esta es una noción plausible de conjunto grande aún no es adecuado para nuestras necesidades.

El sistema de números que estamos construyendo, debe ser linealmente ordenado, una manera natural de hacerlo en términos de nuestro enfoque, es tomar las clases de equivalencia de sucesiones r *menores que* s, esto significa que el conjunto

$$L_{rs} = \{n : r_n < s_n\},$$

es grande. Sin embargo, al considerar las sucesiones

$$\begin{aligned} r &= \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle \\ s &= \langle 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots \rangle, \end{aligned}$$

tenemos que su conjunto de concordancia es vacío, con lo cual ellos determinan distintas clases de equivalencia, una de las cuales debería ser menor que la otra, pero L_{rs} (los números impares) es el complemento de L_{sr} (los números pares) entonces, ambas son infinitas y ninguna de ellas es cofinita. Así, aparentemente nuestra definición de conjuntos grandes necesita un requerimiento extra:

- para cualquier subconjunto A de $\mathbb{N}$, alguno de entre los conjuntos A y $\mathbb{N} \setminus A$ es grande.

Ambos requerimientos implican que A y $\mathbb{N} \setminus A$ no pueden ser grandes al mismo tiempo, o de lo contrario $A \cap (\mathbb{N} \setminus A) = \emptyset$ sería grande, lo cual no lo estamos permitiendo. Entonces *los conjuntos grandes son precisamente los complementos de los que no son grandes.*

Sea I un conjunto no vacío. El conjunto potencia de I es el conjunto

$$\mathcal{P}(I) = \{A : A \subseteq I\}$$

de todas los subconjuntos de I.

Un filtro sobre I es una colección no vacía $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ de subconjuntos de I que satisface los siguientes axiomas:

- Intersecciones : Si $A, B \in \mathcal{U}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$.
- Superconjuntos : Si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B \subseteq I$ entonces $B \in \mathcal{U}$.

Entonces para mostrar que $B \in \mathcal{U}$, es suficiente con mostrar que

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq B$$

para alguna n y algunas $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{U}$.

Un filtro contiene el conjunto vacío si y sólo si $\mathcal{U} = \mathcal{P}(I)$, y diremos que $\mathcal{U}$ es *propio* si $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Cada filtro contiene a I, y en efecto $\{I\}$ es el filtro mas pequeño sobre I.

Definición 1.2.1 *Un* **ultrafiltro** *es un filtro propio que satisface*

- *para todo $A \subseteq I$ alguno de estos se cumple $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$ donde $A^c = I \setminus A$, pero no los dos.*[2]

1.2.1. Ejemplos de Filtros.

1. $\mathcal{U}^i = \{A \subseteq I : i \in A\}$ es un ultrafiltro algunas veces llamado el *ultrafiltro principal generado por i*. Si I es finito, entonces cada ultrafiltro sobre I es de la forma $\mathcal{U}^i$ para alguna $i \in I$, y entonces es principal

2. $\mathcal{U}^{co} = \{A \subseteq I : I \setminus A\}$ es el *filtro cofinito o de Fréchet* sobre I y es propio si y sólo si I es infinito. $\mathcal{U}^{co}$ no es ultrafiltro.

3. si $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ es una colección de filtros sobre I que es linealmente ordenado por la inclusión de conjuntos, es decir, ($\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ o $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$ para todo $x, y \in X$), entonces

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{U}_x = \{A : \exists\ x \in X \text{ el cual hace que se satisfaga } \ A \in \mathcal{U}_x\}$$

[2]Esto por la definición de filtro propio, ya que si los dos están en $\mathcal{U}$ entonces de la definición de filtro se tendría que $A \cap A^c = \emptyset$ debería estar en $\mathcal{U}$ pero $\emptyset \notin \mathcal{U}$ por ser filtro propio.

es un filtro sobre I.

Teorema 1.2.1 *Sea I un subconjunto de $\mathbb{N}$ entonces existe un Ultrafiltro no principal sobre I.*

Prueba.- Sea $\mathcal{G}$ la familia de subconjuntos cofinitos de I, entonces $\mathcal{G}$ es un ultrafiltro. Ahora por el lema de Zorn[3] se tiene que este puede ser extendido a un filtro maximal $\mathcal{U}$ (con respecto a la inclusión dada por el orden definido antes). Ahora para ver $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tomando cualquier $A \subseteq I$ y supongamos que $A \notin \mathcal{U}$, entonces $G \cap (I \setminus A) \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{U}$ (ya que de otra manera $A \supseteq G$ para alguna $G \in \mathcal{U}$ y entonces tendríamos que $A \in \mathcal{U}$ por ser filtro). Entonces la familia

$$\mathcal{U}' = \{B : B \supseteq G \cap (I \setminus A) \quad \text{para alguna } G \in \mathcal{U}\}$$

es un filtro que extiende a $\mathcal{U}$, y como $\mathcal{U}$ es maximal, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ y $I \setminus A \in \mathcal{U}$. ■

1.2.2. Propiedades de los Filtros y Ultrafiltros.

A continuación se enumeran propiedades derivadas de los axiomas de los filtros, además de propiedades derivadas de la definición de ultrafiltro.

1. Los axiomas de los filtros son equivalentes al requerimiento

$$A \cap B \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{U}$$

2. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ satisface el axioma del superconjunto, entonces $\mathcal{U} \neq \emptyset \Leftrightarrow I \in \mathcal{U}$. Entonces $\{I\} \subseteq \mathcal{U}$ para todo filtro $\mathcal{U}$.

3. Un ultrafiltro satisface

$$\begin{aligned} A \cap B \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \;\; y \;\; B \in \mathcal{U}, \\ A \cup B \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow A \in \mathcal{U} \;\; o \;\; B \in \mathcal{U}, \\ A^c \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow A \notin \mathcal{U} \end{aligned}$$

4. Si un ultrafiltro contiene un conjunto finito, entonces este contiene un único elemento principal. Entonces un *ultrafiltro no principal* debe contener todos los conjuntos cofinitos.

[3]El cual puede ser consultado en el apéndice.

5. $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I si y sólo si es un filtro maximal propio sobre I, i.e., un filtro propio que no puede ser extendido a un filtro propio mas grande sobre I.

6. Una colección $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tiene la propiedad de la intersección finita (*pif*) si
$$B_1 \cap \cdots \cap B_n \neq \emptyset$$
para toda n y toda $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{H}$.
Entonces el filtro $\mathcal{U}^{\mathcal{H}}$ es propio si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene la *fip*.

Teorema 1.2.2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y supongamos que $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{U}$. Entonces uno de los conjuntos A_k está en $\mathcal{U}$. Si además son disjuntos dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces $A_i \in \mathcal{U}$ para exactamente un i.*

Prueba.- Si ninguna de los A_k está en $\mathcal{U}$, entonces $I \setminus A_k \in \mathcal{U}$ para cada k. Entonces $\cap_{k=1}^{n}(I \setminus A_k) \in \mathcal{U}$, de lo cual se obtiene que $I \setminus (\cup_{k=1}^{n} A_k) \in \mathcal{U}$, de donde se tiene una contradicción ya que $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{U}$ pero también su complemento, por lo tanto existe un A_k en $\mathcal{U}$.

Ahora, si $A_i \cap A_j = \emptyset$, no podemos tener que los dos A_i, A_j estén en $\mathcal{U}$ ya que por definición $\emptyset \notin \mathcal{U}$, de esta manera exactamente uno de los A_k está en $\mathcal{U}$. ■

Después de haber definido lo anterior demos una definición formal de una relación de equivalencia.

Definición 1.2.2 *Sea $\mathbf{a} = a(\cdot)$ y $\mathbf{b} = b(\cdot)$ sean sucesiones con valores en S donde S es cualquier subconjunto de R, entonces diremos que*

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \iff \{i : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U} \tag{1.1}$$

donde $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre S.

Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro no principal, entonces todos sus elementos son cofinitos, es decir, $\{i : a(i) \neq b(i)\}$ es finito.

Veamos con un ejemplo como es que el ultrafiltro soluciona la división entre 0.

Consideremos las sucesiones

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a(i) := \langle 1,0,1,0,\ldots\rangle \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &= b(i) := \langle 0,1,0,1,\ldots\rangle \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

y supongamos que $\mathbb{N}_{pares} \in \mathcal{U}$. Entonces su complemento $\mathbb{N}_{impares} \notin \mathcal{U}$, por tanto como

$$\{i \in \mathbb{N} : a(i) = 0\} = \{i \in \mathbb{N} : b(i) = 1\} = \mathbb{N}_{pares} \in \mathcal{U}$$

entonces $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} \equiv \mathbf{1}$, y $\mathbf{ab} = 0$, pero ahora uno de ellos es cero.

Mas aun, supongamos que $\mathbf{ab} \equiv 0$, entonces $\{i \in \mathbb{N} : a(i)b(i) = 0\} \in \mathcal{U}$. De lo cual podemos escribir $\{i \in \mathbb{N} : a(i)b(i) = 0\} = A \cup B$ con

$$\begin{aligned} A &:= \{i \in \mathbb{N} : a(i) = 0\} \\ B &:= \{i \in \mathbb{N} : b(i) = 0\}, \end{aligned}$$

por lo que podemos tomar $A^c = \mathbb{N} \setminus A$ y $B^c = \mathbb{N} \setminus B$. Entonces, si $A \in \mathcal{U}$ (por que $A \notin \mathcal{U}$ por ser ultrafiltro)

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}.$$

Si $A^c \in \mathcal{U}$, entonces $\mathbf{a} \not\equiv \mathbf{0}$. Pero si este es el caso entonces B^c no puede estar en $\mathcal{U}$, ya que si $B^c \in \mathcal{U}$ entonces, $A^c \cap B^c = \{i \in \mathbb{N} : a(i)b(i) \neq 0\} \in \mathcal{U}$, lo cual no puede ser pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro que contiene a su complemento: $A \cup B$. Entonces $B \in \mathcal{U}$ y $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$.

La ecuación 1.1 también nos genera una clase de equivalencia, la cual denotaremos como $\equiv$. Está clase de equivalencia corresponde a la sucesión $a(i)$, esto es, el conjunto de todas las sucesiones que son iguales a esta, en el sentido de 1.1.[4]

Definamos ahora una medida finitamente aditiva m sobre todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, que toma sólo los valores $\{0, 1\}$ (una medida discreta),

$$m(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad A \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{si} \quad A \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$

[4]En la siguiente sección esta clase de equivalencias tendrá un importante significado.

Entonces se tiene que

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad m(\{i : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}) = 1,$$

o en otras palabras, si $a(i) = b(i)$ para casi todo i, esto lo escribiremos como $a(i) = b(i)$ a.c. (almost certainly).

1.3. Los Hiperreales ${}^*\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ e introduzcamos la relación de equivalencia sobre sucesiones de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como

$$f \sim_{\equiv} g \ \Leftrightarrow \{\imath \in \mathbb{N} \ : \ f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}. \tag{1.2}$$

Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro libre, dos sucesiones que concuerdan sobre un mismo conjunto cofinito son identificadas con respecto a la relación introducida en (1.2).

Definamos el conjunto de los hiperreales ${}^*\mathbb{R}$ como

$${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$$

y para una sucesión $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ denotamos las clases de equivalencia $\mathbf{a}_{/\equiv}$ como $[\mathbf{a}]$.

Aunque el conjunto ${}^*\mathbb{R}$ depende de la elección del ultrafiltro $\mathcal{U}$, sus propiedades básicas no, por lo que no importando que ultrafiltro usemos, siempre tendremos las mismas propiedades.

Consideramos a ${}^*\mathbb{R}$ como una extensión de $\mathbb{R}$ al identificar $r \in \mathbb{R}$ con la sucesión constante $[(r, r, r, \ldots)] \in {}^*\mathbb{R}$, además esta inclusión $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ es propia pues $[(1, 2, 3, \ldots)] \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. A los objetos matemáticos sobre $\mathbb{R}$ les llamaremos *estándar*.

Funciones y relaciones sobre $\mathbb{R}$ pueden ser extendidas a ${}^*\mathbb{R}$ de manera puntual. Por ejemplo, si definimos $[\mathbf{a}] + [\mathbf{b}] = [\mathbf{a} + \mathbf{b}]$ entonces debemos verificar que está bien definido.

Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definimos $f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como

$$f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})(i) = f(a_1(i), \ldots, a_n(i)).$$

Entonces podemos enunciar un lema

Lema 1.3.1 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*, y tomando* $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}, \mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *con* $a_k \equiv b_k, k = 1, \ldots, n$*. entonces*

(i) $f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) \equiv f(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})$.

(ii) *Para casi todo* i *se tiene que*

$$(a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in S \Longleftrightarrow (b_1(i), \ldots, b_n(i)) \in S.$$

Prueba.-
a) Para cada k se tiene que $A_k = \{i : a_k(i) = b_k(i)\} \in \mathcal{U}$ por definición, y entonces se tiene que

$$\cap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{U}$$

por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Asi pues como

$$\cap_{k=1}^n A_k \subseteq \{i : f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})(i) = f(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})(i)\},$$

se tiene que

$$\{i : f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})(i) = f(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})(i)\} \in \mathcal{U},$$

de donde obtenemos que

$$f(\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}) \equiv f(\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})$$

b)
$\Rightarrow$) Como para casi todo i, se tiene que $(a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in S$, además como $\mathbf{a}_k \equiv \mathbf{b}_k$ para todo $k = 1, \ldots n$ entonces se tiene que $\{i : a_k(i) = b_k(i)\} \in \mathcal{U}$ de donde se tiene que $(b_1(i), \ldots, b_n(i)) \in S$ para casi todo i.
$\Leftarrow$) Se sigue por simetría. ■

Entonces la siguiente definición tiene sentido y las extensiones que se dan están bien definidas por lo anterior.

Definición 1.3.1 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $S \subseteq \mathbb{R}^n$*, entonces definimos a la función extendida* ${}^*f : {}^*\mathbb{R}^n \to {}^*\mathbb{R}$ *y al subconjunto extendido* ${}^*S \subseteq {}^*\mathbb{R}^n$ *como*

$${}^*f([a_1], \ldots, [a_n]) = [f(a_1, \ldots, a_n)]$$

y

$${}^*S = \{([a_1], \ldots, [a_n]) : (a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in S \text{ para casi todo } i\}$$

Un ejemplo de subconjunto extendido que puede ser interesante es ${}^*\mathbb{N}$, el cual es llamado el subconjunto de los naturales no estándar y es claro que el conjunto $\mathbb{N}$ es la primera parte del conjunto ${}^*\mathbb{N}$.

Así como las funciones y las relaciones sobre ${}^*\mathbb{R}$ podemos tener las extensiones ${}^*+, {}^*\cdot, {}^*<$ de $+, \cdot, <$ sobre $\mathbb{R}$, de tal manera que $({}^*\mathbb{R}, {}^*+, {}^*\cdot, {}^*<)$ sigue teniendo la estructura de un campo, esto se muestra en el teorema siguiente.

Nota.- Usaremos la misma notación que el campo sin extender, i.e., en lugar de usar ${}^*+, {}^*\cdot, {}^* <$ seguiremos usando $+, \cdot, <$ y cuando tengamos $x > 0$ para $x \in^* \mathbb{R}$ significara que $x \,{}^*\!> 0$ y de igual manera $x + y$ significara $x \,{}^*\!+ y$ cuando $x, y \in {}^*\mathbb{R}$.

Sea $\epsilon = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle = \langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$[5], entonces

$$[\mathbf{0} < \epsilon] = \{n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$$

Por tanto $[\mathbf{0}] < [\epsilon]$ en ${}^*\mathbb{R}$. Pero si r es cualquier real positivo, entonces el conjunto

$$[\epsilon < \mathbf{r}] = \{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\}$$

es cofinito, ya que ϵ converge a 0 en $\mathbb{R}$. Ahora, como $\mathcal{U}$ es no principal este contiene a todos los conjuntos cofinitos de donde se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < r\} \in \mathcal{U}$ y entonces $[\epsilon] < {}^*r$ en ${}^*\mathbb{R}$.

La prueba del siguiente teorema se encuentra en [18], pág. 25.

Teorema 1.3.1 $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ *es un campo ordenado, con cero la sucesión* $[0]$ *y unidad la sucesión* $[1]$. ■

Veamos que el conjunto ${}^*\mathbb{R}$ contiene los números infinitesimales y los números infinitos, para esto necesitamos antes algunas definiciones.

Definición 1.3.2 *Sea* $x \in {}^*\mathbb{R}$ *diremos que*

a) x *es un infinitesimal si* $|x| < \epsilon$ *para toda* $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$.

b) x *es finito si* $|x| < r$ *para alguna* $r \in \mathbb{R}^+$.

[5] Se usará indistintamente ya sea esta notación o esta otra: $\epsilon(i)$, para denotar una sucesión.

c) *x es infinito si $|x| > r$ para toda $r \in \mathbb{R}^+$.*

d) *Además diremos que $x \in {}^*\mathbb{R}$ y $y \in {}^*\mathbb{R}$ son infinitamente cercanos (lo denotaremos como $x \approx y$) si $x - y$ es un infinitesimal.*

Esta definición nos dice que un infinitesimal es un número tan cercano al 0 que cualquier otro número positivo lo domina (a su valor absoluto), además, un número será infinito si domina a cualquier otro (su valor absoluto) y un número será finito si este no es infinito.

Después de esta definición se tiene la siguiente proposición

Proposición 1.3.1 *Sean $\gamma, \delta, x, y, \alpha, \beta \in^* \mathbb{R}$, con γ, δ infinitesimales, x, y finitos y α, β infinitos, entonces*

(i) *Los siguientes son infinitesimales : $\gamma + \delta$, $\gamma\delta$, δx, α^{-1}.*

(ii) *Los siguientes son finitos : $\delta + x$, $x + y$, xy, y si $x \neq 0$ entonces x^{-1} también lo es.*

(iii) *Los siguiente son infinitos : δ^{-1} (si $\delta \neq 0$), $\alpha + \beta$ (si ambos son positivos o ambos negativos), $\alpha\beta$,*

Prueba.-
(i) sabemos que $|\gamma| < \epsilon_1$ y $|\delta| < \epsilon_1$ para todo $\epsilon_1 > 0$, entonces

$$|\gamma + \delta| \leq |\gamma| + |\delta| < 2\epsilon_1,$$

y tomando $\epsilon = 2\epsilon_1$ entonces $|\gamma + \delta| < \epsilon$.
Por otra parte, tenemos que

$$|\gamma\delta| = |\gamma| \cdot |\delta| < \epsilon_1^2 < \epsilon_1$$

. y

$$|\delta x| = |x| \cdot |\delta| < r\epsilon_1 < \epsilon \quad \text{tomando } \epsilon_1 < \frac{\epsilon}{r}$$

. Ahora, como α es infinito entonces tenemos que $|\alpha| > r$ para todo $r \in \mathbb{R}$, por lo cual nos queda

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{r}$$

para todo r, de donde al tomar $\epsilon = \frac{1}{r}$ nos queda que α es infinito.

(ii) tenemos que

$$|\delta + x| \leq |\delta| + |x| < \epsilon_1 + r < 2r = r_1 \quad \text{para alguna } r \in^* \mathbb{R}$$

y

$$|y+x| \leq |y|+|x| < r_1+r_2 < 2r_m = r \text{ para alguna } r_1, r_2 \in^* \mathbb{R} \text{ donde } r_m = \text{máx}\{r_1, r_2\}$$

con lo cual $\delta + x$ y $x + y$ es finito.
Por otra parte,

$$|xy| = |x| \cdot |y| < r_1 r_2 < r_m^2 = r \text{ para alguna } r_1, r_2 \in^* \mathbb{R} \text{ donde } r_m = \text{máx}\{r_1, r_2\}$$

y como $x \neq 0$ entonces $0 < |x| < r$ entonces existe un real r_1 tal que $0 < r_1$ tal que $r_1 < |x| < r$ por lo cual

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{r_1}$$

de donde se tiene que x^{-1} es finito.

(iii) Sabemos que x es infinito si $|x| > r$ para toda $r \in \mathbb{R}$. veamos que como $0 < |\delta| < r$ para todo $r \in \mathbb{R}$ entonces

$$\left|\frac{1}{\delta}\right| = \frac{1}{|\delta|} > \frac{1}{r}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ por lo cual se tiene que δ^{-1} es un infinito.
Si α, β son ambos positivos, entonces se tiene que $|\alpha| > r$ y $|\beta| > r$ para todo $r \in \mathbb{R}$

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| > r + r = 2r$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ de lo cual se tiene que $\alpha + \beta$ es infinito.[6]
Finalmente,

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| > r \cdot r = r^2$$

para todo $r \in \mathbb{R}$ de lo cual se tiene que $\alpha\beta$ es infinito.

■

[6] El caso en que ambos son negativos es análogo.

El siguiente teorema garantiza la existencia de un único elemento de $\mathbb{R}$ para cada elemento de ${}^*\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.2 *Sea* $x \in^* \mathbb{R}$ *finito, entonces* $\exists!\ r \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \approx r$.

Prueba.- Sea $A = \{a \in \mathbb{R} : a < x\}$. Definamos $r = r(x)$ como $r(x) = \sup\{a \in \mathbb{R} : a < x\}$, este supremo existe ya que x es finito, y entonces por definición existe alguna $r \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < r$. Así pues, tomando $\epsilon > 0$, entonces se tiene que $r - \epsilon$ no es una cota superior de A, entonces $r - \epsilon < x$, por otro lado, tomando $r + \epsilon$ se tiene que como r es el supremo de A entonces $r + \epsilon > x$, por lo que

$$-\epsilon < x - r < \epsilon$$

para toda $\epsilon > 0$ y entonces se tiene que $r \approx x$.

Finalmente, supongamos que $x = r_1 + \delta_1 = r_2 + \delta_2$ con δ_1, δ_2 infinitesimales, de la expresión anterior se tiene que $r_1 - r_2 = \delta_1 - \delta_2$, pero en el lado izquierdo se tiene que la diferencia es un número real, mientras que en el lado derecho la diferencia es un infinitesimal, entonces se tiene que $r_1 - r_2$ es real e infinitesimal, entonces $r_1 - r_2 = 0$. ■

Al elemento encontrado en el Teorema **1.3.2** tal que $x \approx r$ le llamaremos la *parte estándar* de x, y lo denotaremos como $r = st(x) = {}^o x$.

Además si x, y son finitos entonces se tiene que ${}^o(x + y) = {}^o x + {}^o y$ y ${}^o(xy) = {}^o x \cdot {}^o y$.

A continuación se tiene un teorema que garantiza las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de sucesiones.

Teorema 1.3.3 **(a)** *Sea* (s_n) *una sucesión de números reales y sea* $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$s_n \to a \ \ \textit{cuando} \ \ n \to \infty \iff {}^*s_K \approx a \ \ \textit{para todos los infinitos} \ \ K \in {}^*\mathbb{N}$$

(b) (s_n) *es convergente* $\iff$ ${}^*s_K \approx {}^*s_M$ *para todos los infinitos* $K, M \in {}^*\mathbb{N}$

Prueba.-
(a) Supongamos primero que $s_n \to a$ si $n \to \infty$ y fijemos $K = [k]$ como infinito. Tenemos que mostrar que $|{}^*s(K) - a| < \epsilon$ para todos los reales $\epsilon > 0$. Ahora, dada cualquier ϵ elijamos n_0 tal que para $n \geq n_0$ se tenga

que $|s(n) - a| < \epsilon$. Ahora $K > n_0$ y entonces $k(i) > n_0$ para casi todo i. De donde se tiene que $|s(k(i)) - a| < \epsilon$ para casi todo i, pero esto significa que $|{}^*s(K) - a| < \epsilon$. Supongamos, inversamente, que $s_n \nrightarrow a$. Esto significa que hay un $\epsilon > 0$ y una sucesión creciente $\mathbf{k} = k(i)$ tal que $|s(k(i)) - a| > \epsilon$ para toda i. Haciendo $K = [\mathbf{k}]$, se tiene que K es infinito ya que $k(i) \to \infty$ si $i \to \infty$, mas aun, $|{}^*s(K) - a| > \epsilon$, entonces ${}^*s(K) \not\approx a$.

(b) Esta parte del resultado es una simple aplicación del inciso (a). sabemos que $s_n \;\to\; a \iff {}^*s_K \approx a$ para todos los infinitos $K \in {}^*\mathbb{N}$ de lo cual tenemos que como

$$\begin{aligned} |{}^*S_K - {}^*S_M| &= |({}^*S_K - a) + (a{}^*S_M)| \\ &\leq |{}^*S_K - a| + |a{}^*S_M| \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_1 = 2\epsilon \end{aligned}$$

entonces se tiene la afirmación. ■

Escribiendo $\sum_{n=1}^{N} {}^*s_n$ para denotar ${}^*t_N$ donde $t_m = \sum_{n=1}^{m} s_k$ tenemos el siguiente corolario del teorema anterior.

Corolario 1.3.1 **(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = s \iff \sum_{n=1}^{N} s_n \approx s$ *para todos los infinitos* N.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty \iff \sum_{n=N}^{M} s_n \approx 0$ *para todos los infinitos* N, M.

■

1.4. El Principio de Transferencia para ${}^*\mathbb{R}$.

En esta sección abordaremos la manera general de construir la extensión no estándar ${}^*M$ para todo objeto matemático M el cual nos permitirá enunciar y probar el principio de transferencia mas general.

1.4.1. Universo no Estándar.

Sea S cualquier subconjunto, entonces definimos

$$\begin{aligned} V_0(S) &= S \\ V_{n+1}(S) &= V_n(S) \cup \mathcal{P}(V_n(S)), \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \\ V(S) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n(S) \end{aligned}$$

La estructura matemática $(V(S), \in)$ es llamada la *Superestructura sobre* S, donde $\in$ es la relación conjuntista usual.

Tomaremos como universo estándar la superestructura $V(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

Ahora bien, si $a, b \in V_n(\mathbb{R})$ entonces la pareja ordenada $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ esta en $V_{n+2}(\mathbb{R})$[7]. Además para cualesquiera conjuntos $A, B \in V_n(\mathbb{R})$ se tiene que el producto cartesiano $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \subseteq V_{n+1}(\mathbb{R})$ por lo que se tiene que $A \times B$ esta en $V_{n+2}(\mathbb{R})$, así como que una función de A a B pertenece a $V_{n+3}(\mathbb{R})$.

A continuación presentamos un simple ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 *Supongamos que* $X = X_0 = \{1, 2, 3\}$[8]*, Entonces*

$$X_1 = X_0 \cup \mathcal{P}(X_0) = \{1, 2, 3, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\{1, 2, 3\}\}$$

mientras que el X_2 *es demasiado grande para escribirlo y solo escribiremos los primeros elementos,*

$$\begin{aligned} X_2 = X_1 \cup \mathcal{P}(X_1) \;\; = \;\; & \{1, 2, 3, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \\ & \{1, 3\}\{1, 2, 3\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \{1, 2\}, \{1, \{1, 3\}, \{1, \{1, 2, 3\}, ...\}. \end{aligned}$$

■

De lo anterior es claro que todos los objetos estándar discutidos aquí están en $V(\mathbb{R})$ y que en cada caso solo es rutinario encontrar su nivel $V_n(\mathbb{R})$. Por ejemplo, se puede checar que la clase de equivalencias de las sucesiones de Cauchy de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (denotada por $\mathbf{H}$) pertenece a $V_9(\mathbb{R})$.

Axioma 1.4.1 Principio de Transferencia.

Sea $\phi(f_1, \ldots, f_k, S_1, \ldots, S_m, r_1, \ldots, r_n)$ *una afirmación que involucra las operaciones* $+, \times, <, 0, 1$*, las funciones* $f_1 \ldots, f_k$*, los conjuntos (o relaciones)* $S_1, \ldots, S_m$ *y los números reales* $r_1, \ldots, r_m$ *de tal manera que* ϕ *puede ser expresada usando sólo los conectores* $=, \in, y, o, no, \Rightarrow$ *y cantidades de la forma* $\forall x, \exists y, \ldots,$ *donde* x *y* y *son reales. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $\phi(f_1, \ldots, f_k, S_1, \ldots, S_m, r_1, \ldots, r_n)$ *se cumple en* $\mathbb{R}$

[7] Pues $\{a, b\} \in V_{n+1}$

[8] Este conjunto es muy chico sin embargo nos dará una buena idea del procedimiento.

(b) $\phi({}^*f_1, \ldots, {}^*f_k, {}^*S_1, \ldots, {}^*S_m, r_1, \ldots, r_n)$ *es cierta en* $^*\mathbb{R}$ *donde las variables* $x, y, \ldots$ *en las cantidades ahora están sobre* $^*\mathbb{R}$.

En cualquier particular construcción de $^*\mathbb{R}$ el principio de transferencia puede ser probado como un teorema, aunque en este caso lo postulamos como un axioma, sin demostración, una versión con una construcción general es dada en el apéndice de [6], págs. 207-215.

El uso de este principio nos permite establecer ciertas definiciones básicas.

Una sucesión real $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y entonces por el principio de transferencia se tiene que $^*s$ es una función $^*s : {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ denotada por $(s_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ cuya convergencia esta caracterizada por el siguiente resultado.

Proposición 1.4.1 *Supongamos que* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión real y* $a \in \mathbb{R}$, *entonces* $a = \text{lím}_{n\to\infty} s_n$ *si y sólo si* ${}^o s_H = a$ *para todos los infinitos* $H \in {}^*\mathbb{N}$.

Prueba.-
$\Rightarrow$) Supongamos que $s_n \to a$ si $n \to \infty$ y sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces existe un $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ con $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|s_n - a| < \epsilon$ se cumple en $\mathbb{R}$. Y por el principio de transferencia se tiene que $\forall n \geq N$ con $n \in^* \mathbb{N}$ se tiene que $|s_n - a| < \epsilon$ se cumple ahora en $^*\mathbb{R}$. Pero H es infinito entonces $H > N = N(\epsilon)$ por lo cual se tiene que $|s_H - a| < \epsilon$ se cumple para todos los infinitos H. Finalmente, como ϵ es arbitraria entonces se tiene que por definición $|s_H - a| \approx 0$, y entonces ${}^o s_H = a$.

$\Leftarrow$) Inversamente, si $s_H \approx a$ para todos los infinitos $H \in {}^*\mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ dado. Ahora, como $|s_H - a| < \epsilon$ se cumple para todos los infinitos H, la afirmación $\exists N \in {}^*\mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ con $n \in {}^*\mathbb{N}$ se tiene que $|s_n - a| < \epsilon$ se cumple en $^*\mathbb{R}$. y usando el principio de trasferencia se tiene que la afirmación $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ con $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|s_n - a| < \epsilon$ se cumple ahora en $\mathbb{R}$. De donde se tiene que hemos encontrado una $N = N(\epsilon)$ tal que $n > N$ implica $|s_n - a| < \epsilon$, i.e., $s_n \to a$ si $n \to \infty$. ■

Por otra parte, se tiene el siguiente resultado que nos garantiza cuando una función es continua.

Proposición 1.4.2 *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $a \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* ${}^*f(x) \approx {}^*f(a)$ *cuando* $x \approx a$.

Prueba.-
$\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en a y sea $x \approx a$. Hay que probar que

$|^*f(x) - {}^*f(a)| < \epsilon$ para cada $\epsilon > 0$ estándar. Ahora bien, para cada ϵ tomemos $\delta > 0$ tal que

$$|y - a| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(a)| < \epsilon \tag{1.3}$$

para toda $y \in \mathbb{R}$.

Aplicando el principio de transferencia a la expresión (1.3) con δ, ϵ fijos, se tiene entonces que también se cumple para $^*f$ (en lugar de f) y toda $y \in^* \mathbb{R}$. Tomando simplemente $x = y$ cuando $x \approx a$ tenemos que

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

lo cual implica $^*f(x) \approx {}^*f(a)$ cuando $x \approx a$.

$\Leftarrow$) Asumamos que $^*f(x) \approx {}^*f(a)$ cuando $x \approx a$ y tomemos cualquier real $\epsilon > 0$. Eligiendo cualquier infinitesimal $\delta > 0$, entonces se tiene que $|x - a| < \delta$ implica que $x \approx a$, así

$$\exists \delta \in^* \mathbb{R},\ \ \delta > 0,\ \ |x - a| < \delta \Longrightarrow |^*f(x) - {}^*f(a)| < \epsilon \ \ \forall x \in^* \mathbb{R}$$

es cierto en $^*\mathbb{R}$ y por el principio de transferencia es cierta también en $\mathbb{R}$ para f, lo cual demuestra la continuidad de f en a. ■

1.5. Conjuntos Internos y Funciones Internas.

Hasta ahora se ha dado la definición de números no estándar y se ha denotado a $^*\mathbb{R}$ como el conjunto de todos estos números. Pero así como se ha dado estas definiciones también se dado la extensión para una función f con valores en los reales definida sobre un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, estas definiciones son ejemplos muy particulares de objetos no estándar. En algún sentido, cualquier conjunto $X \subset {}^*\mathbb{R}$ puede ser considerado como un conjunto no estándar, no obstante, hay una definición mas precisa de conjuntos no estándar, la cual describiremos aquí.

Así como en la construcción de los hiperreales estos se obtuvieron como sucesión de reales, los conjuntos internos y funciones internas se obtendrán como sucesiones de conjuntos reales y funciones reales, esto se muestra en la siguiente definición.

Definición 1.5.1 *Sea* $\mathbf{S} = S(\cdot)$ *una sucesión de* $n-$*ada relaciones sobre* $\mathbb{R}$ *(i.e.,* $S(i) \subset \mathbb{R}^n$ *para toda* i*) y sea* $\mathbf{f} = f(\cdot)$ *una sucesión de funciones definidas sobre* $S(i)$ *de tal manera que para toda* i *se tenga que* $f(i) : S(i) \to \mathbb{R}$*.*

Entonces definimos $[\mathbf{S}] \subset {}^*\mathbb{R}^n$ *como*

$$([a_1], \ldots, [a_n]) \in [\mathbf{S}] \Longleftrightarrow (a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in S(i) \qquad a.c.$$

y $[\mathbf{f}] : [\mathbf{S}] \to {}^*\mathbb{R}$

$$[\mathbf{f}]([a_1], \ldots, [a_n]) = [f(\cdot)(a_1(i), \ldots, a_n(i))].$$

Relaciones y funciones de la forma $[\mathbf{S}]$ y $[\mathbf{f}]$ son llamados *internos* (o no estándar en el sentido estrecho de arriba) mientras que *externos* significara no internos.

Se puede dar una definición un poco mas exacta de internos utilizando la definición de superestructura dada antes, de la manera siguiente

Definición 1.5.2 *Sea* $V({}^*\mathbb{R})$*, una superestructura decimos que* $A \in V({}^*\mathbb{R})$ *es*

- Estándar *si* $A = {}^*B$ *para alguna* $B \in V(\mathbb{R})$

- Interno *si* $A \in^* B$ *para alguna* $B \in V(\mathbb{R})$

- Externo *en otro caso.*

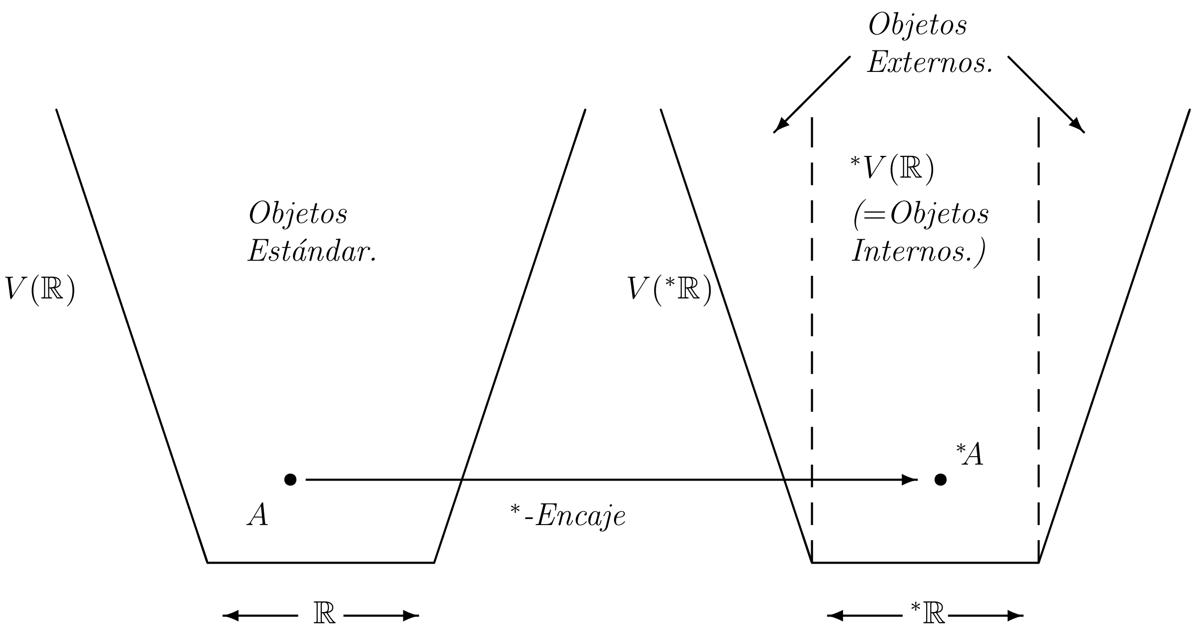

Figura 1.

Denotamos por ${}^*V(\mathbb{R})$ al conjunto de todos los objetos internos en $V({}^*\mathbb{R})$.

De lo anterior se tiene que la figura de arriba clarifica mejor la idea de los objetos internos, estándar y externos, no obstante daremos algunos ejemplos mas adelante. Antes necesitamos un par de resultados.

Proposición 1.5.1 *Cada elemento de un conjunto interno es interno. Además, El conjunto de todos los elementos internos en $V({}^*X)$ es el conjunto*

$$ {}^*V(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*X_n. $$

Prueba.-
Probemos la primera parte de la proposición. Sea g cualquier elemento de f con f interno, de lo que sabemos existe $h \in V(X)$ tal que $f \in {}^*h$. Pero entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h \in X_n$, de donde se sigue que $g \in {}^*f \in {}^*X_n$. Esto implica que $g \in {}^*X_n$, por la definición de superestructura y la trasferencia, de donde se concluye que cualquier elemento de un conjunto interno es interno.

Para la segunda parte, veamos que si $f \in {}^*V(X)$ entonces $f \in {}^*X_n$ para alguna $n > 0$ por lo cual es interno. Si g es interno, $g \in {}^*f$ para alguna $f \in V(X)$, de donde hay una m tal que

$$ g \in {}^*f \subseteq {}^*X_{m-1}, $$

y entonces g esta en ${}^*X_{m-1}$. ■

Ahora podemos caracterizar los elementos internos de una manera un poco mas simple.

Teorema 1.5.1 *Los conjuntos internos en $V({}^*X)$ son de la siguiente forma*

$$ g = [< g_\alpha >], \;\; \alpha \in \mathcal{A} $$

donde $\alpha \to g_\alpha$ es una función acotada $\mathcal{A} \to X_n$ para alguna $n \geq 0$.

Prueba.-
Si g es interno, hay un $f \in V(X)$ tal que $g \in {}^*f$. Como $f \in V(X)$ entonces existe n tal que $f \in X_n$, tal que $g \in {}^*f \in {}^*X_n$. Esto implica, de acuerdo a la proposición 1.5.1, que existe $g \in {}^*X_n$ tal que g es de la forma ζG para alguna

$$G = [< g_\alpha, \alpha \in \mathcal{A} >] \in \mathcal{U}\, im(X_n) \subset V(X)^{\mathcal{A}} / \equiv$$

por tanto

$$g \in {}^*X_n \iff \{\alpha \in \mathcal{A} \, : \, g_\alpha \in X_n\} \in \mathcal{U}$$

■

Ahora mostramos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.5.1 **(i)** *Supongamos que $\mathbb{R} \in X$, $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ y sea A el conjunto de los hiperreales. Este es interno si es de la forma $A = [< A_i >]$ con cada conjunto A_i, $i = 1, 2, \ldots$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. Esto nos dice que los elementos de A son hiperreales de la forma $x = [< x_i >]$ con $x_i \in A_i$ para $i = 1, 2 \ldots$.*

(ii) *Si f es un elemento estándar, entonces es de la forma $f = [< F >]$ con $F \in V(X)$.*

(iii) *Sea $\{f_i\}$ una sucesión de funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Mediante esta sucesión definimos otra sucesión interna de ${}^*\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$ por*

$$f = [< f_i >],\ x = [< x_i >] \implies f(x) = [< f_i(x_i) >].$$

Como una consecuencia del principio de transferencia se tiene el siguiente resultado cuya demostración se encuentra en el apéndice de [6].

Teorema 1.5.2 (Principio de Definición interna.)
Sea X y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos internos y sea $\varphi(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ cualquier afirmación sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y elementos $x \in X$ en el lenguaje de teoría de conjuntos (como lo expresado en el principio de transferencia). Entonces el conjunto

$$Y = \{x \in X : \varphi(x, A_1, A_2, \ldots, A_n) \quad \text{es cierta}\}$$

es interno.

■

Aqui se presenta un resultado sobre la cerradura de uniones e intersecciones de conjuntos internos.

Proposición 1.5.2 *Si X, Y son conjuntos internos, entonces los conjuntos $X \cup Y$, ${}^*\mathbb{R} \backslash X$ son internos. Además, uniones e intersecciones numerables de conjuntos internos son internos.*

Prueba.- Sea $X = [A]$ y $Y = [B]$; afirmación: $X \cup Y = [A(\cdot) \cup B(\cdot)]$.

Para probar esta afirmación, veamos que si $x = [a]$ entonces

$$\begin{aligned} x \in [A(\cdot) \cup B(\cdot)] &\iff a(i) \in A(i) \cup B(i) \quad \text{a.c.} \\ &\iff a(i) \in A(i) \;\text{ o }\; a(i) \in B(i) \quad \text{a.c.} \quad \text{por el Teo. 1.2.2} \\ &\iff x \in X \quad \text{o } x \in Y. \end{aligned}$$

Esta proposición se puede probar de igual manera usando el principio de transferencia, la afirmación a transferir sería

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \;\; \exists Z \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \;\; \text{tal que } x \in Z \iff x \in X \quad \text{o } x \in Y.$$

De esta manera, el resultado se sigue de manera directa.

Para el complemento, al igual que para la unión, se tiene de manera directa al usar el argumento del principio de la demostración. ■

Una importante propiedad de los conjuntos internos es que si se tiene que $N \in {}^*\mathbb{N}$ y $X \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ es un conjunto interno entonces se tiene que existe un único $M \in {}^*\mathbb{N}$ tal que se tiene una biyección interna $F : X \to \{1, 2, \ldots, M\}$.

Con esto en mente, podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 1.5.3 *Sea A un conjunto interno.*

(a) *A es* hiperfinito *si existe una biyección interna $F : A \to \{1, 2, \ldots, N\}$ para alguna $N \in {}^*\mathbb{N}$.*

(b) *Si A es hiperfinito, entonces $\#(A)$ es la única $M \in {}^*\mathbb{N}$ tal que A es internamente biyectiva con $\{1, 2, \ldots, M\}$.*

El número $\#A$ es llamada la cardinalidad interna de A.

Las siguientes propiedades de los conjuntos internos pueden ser de suma importancia.

Capítulo 2

Medidas de Loeb y Teoría de Integración.

En este capitulo daremos una introducción a la teoría de probabilidad hiperfinita, a la misma vez que presentaremos los hechos básicos de la teoría de la medida e integración. Al final del mismo se abordara el movimiento Browniano no estándar. Se ha revisado básicamente [1], [3], [5], [9], [10], [11] y [34].

2.1. Medidas de Loeb.

La teoría de la medida y teoría de la probabilidad fue estudiada de manera exhaustiva en el contexto del análisis no estándar. Se obtuvo que en general, las $^*-$extensiones de medidas $\sigma-$aditivas no son en general $\sigma-$aditivas en el universo extendido o superestructura $V(^*\mathbb{R})$.

Loeb dio un gran avance con la construcción que da en [29]. En este articulo, transforma una medida interna en una medida estándar $\sigma-$aditiva, y esto se volvió clave en el enfoque del análisis estocástico no estándar.

Sea X un conjunto interno en $V(^*\mathbb{R})$, $\mathcal{A}$ un álgebra interna de subconjuntos de X y ν una medida interna finitamente aditiva, diremos entonces que $(X, \mathcal{A}, \nu)$ es un espacio de medida interno. Es importante notar que ν toma valores en $(^*\mathbb{R})_+$, mientras que $\mathcal{A}$ sea interna significa que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones $^*-$finitas (de acuerdo al resultado 1.6.2 presentado en la página 25), es decir, si $m \in {^*\mathbb{N}}\backslash\mathbb{N}$ y (A_i) es una sucesión interna tal que $A_i \in \mathcal{A}$ para cada i, entonces $\cup_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{A}$. De igual manera con las intersecciones.

Sea ${}^o\nu$ el mapeo de la parte estándar de ν,

$$ {}^o\nu(A) = {}^o(\nu(A)), \ A \in \mathcal{A} $$

Presentamos un lema.

Lema 2.1.1 *Sea* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un sucesión de elementos de* $\mathcal{A}$*. Si* $A_0 \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, *entonces existe un* $m > 0$ *tal que*

$$A_0 \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

Prueba.-
Sea $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ la sucesión interna que extiende a $A_0, A_1, \ldots,$. El conjunto

$$\left\{ m \in {}^*\mathbb{N} : A_0 \subseteq \bigcup_{n=1}^{m} A_n \right\}$$

es interno y contiene cada $m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ entonces por el *overflow* se tiene que este contiene algún $m \in \mathbb{N}$, de donde se tiene que

$$A_0 \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$$

■

Presentamos enseguida el resultado dado por Loeb en [29](1975).

Teorema 2.1.1 *Sea* $(X, \mathcal{A}, \nu)$ *un espacio de medida interno. la medida* ${}^o\nu$ *tiene una extensión* $\sigma-$*aditiva única, denotada por* $L(\nu)$ *a la* $\sigma-$*álgebra* $\sigma(\mathcal{A})$ *generada por* $\mathcal{A}$*. Además si* ${}^o\nu(X) < \infty$ *entonces*

(i) *Para cada* $B \in \sigma(\mathcal{A})$ *y para cada* $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ *existen conjuntos* $C, D \in \mathcal{A}$ *tales que* $C \subset B \subset D$ *y* $L(\nu)(D) - \epsilon \leq L(\nu)(B) \leq L(\nu)(C) + \epsilon$.

(ii) *Para cada* $B \in \sigma(\mathcal{A})$ *existe* $A \in \mathcal{A}$ *tal que* $L(\nu)(A\Delta B) = 0$.

Prueba.-
La existencia es una implicación del teorema de extensión de Carathéodory, el cual también nos asegura que ν es única si ${}^o\nu(X) < \infty$. en el caso en que ${}^o\nu(X) = \infty$ Henson en [19] da un argumento mas refinado para establecer la

unicidad. probemos entonces *(i)*. Por construcción de $L(\nu)$ existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ con $A_n \subseteq A_{n+1}$ y tales que

$$B \subseteq \tilde{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

y $L(\nu)(\tilde{B}) < L(\nu)(B) + \epsilon$.

Ahora extendamos la sucesión interna $(A_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$. Y para cualquier $m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ claramente se tiene que $B \subseteq \tilde{B} \subseteq A_m$. Eligiendo m de tal manera que $\nu(A_m) \leq L(\nu)(B) + \epsilon$ entonces hagamos $D = A_m$. Además, fijemos $r = L(\nu)(B)$ y consideremos el conjunto $\{l \in {}^*\mathbb{N} : \nu(A_l) \leq r + \epsilon\}$, el cual es interno y contiene a $\mathbb{N}$ por lo que entonces también contiene algún $\omega \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. finalmente, notemos que $L(\nu)$ y B son externos y el numero r es interno.

Aplicando el mismo argumento a $X\backslash B$ se tiene que podemos encontrar el conjunto C.

Para probar *(ii)* se tiene que para cada n, tomando C_n y D_n elementos de $\mathcal{A}$ tales que $C_c \subset B \subset D_n$ y

$$L(\nu)(D_n) - \frac{1}{n} \leq L(\nu)(B) \leq L(\nu)(C_n) + \frac{1}{n}.$$

Asumiendo que (C_n) es creciente y (D_n) es decreciente. Ahora, extendiendo (C_n) y (D_n) a sucesiones internas decrecientes y crecientes respectivamente tales que $C_n \subset D_n$ para toda $n \in {}^*\mathbb{N}$. tomando $A = C_m$ para alguna $m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ se tiene que $A\backslash B = \emptyset$ y $B\backslash A = \emptyset$ entonces se tiene que

$$L(\nu)(A\Delta B) = L(\nu)(A\backslash B) + L(\nu)(B\backslash A) = L(\nu)(\emptyset) + L(\nu)(\emptyset) = 0$$

■

Ejemplo.- El espacio $2^{\mathbb{N}}$ de sucesiones infinitas de ceros y unos es el modelo estándar de lanzamiento de volados infinitos, su espacio de medida es el dado por $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}, \mu)$ definida de la siguiente manera, sobre cada factor $2 = \{0, 1\}$ iniciamos con la $\sigma-$álgebra de todos los subconjuntos y la medida de conteo dada por el peso de cada punto en el espacio. Entonces $\mathcal{B}$ es el usual producto de $\sigma-$álgebras y μ es la medida producto.

En este caso, la existencia de $\mathcal{B}$ y μ es trivial, en casos mas generales a menudo hay problemas para garantizar su existencia.

Comentario.- Aunque hemos usado el teorema de extensión de Caratheodory para obtener las medidas de Loeb, hay una construcción simple y elegante para obtener estas sin presuponer teoría de la medida. Esta es, dada una medida interna sobre un álgebra interna $\mathcal{A}$, definimos medidas interior y exterior P_{-} y P^{-} mediante

$$P_{-} = \sup\{{}^{o}P(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A\}$$

y

$$P^{-} = \text{ínf}\{{}^{o}P(B) : B \in \mathcal{A}, A \subset B\}$$

Entonces la $\sigma-$álgebra de Loeb $L(\mathcal{A})$ es la colección de todos los conjuntos A tales que $P_{-} = P^{-}$, y $L(P)(A)$ es el valor común. para los detalles sobre esta construcción puede consultarse Cutland (1983) [9] o Stroyan y Bayod (1985) [39].

2.2. Espacios de Probabilidad Hiperfinitos.

Bajo la luz de la definición 1.5.3 dada en la página 22, se define el sentido exacto en el cual el conjunto $\Omega = \{0,1\}^{\eta}$ es "finito "(del ejemplo dado en la sección anterior), digamos hiperfinito. entonces se tiene que la definición de

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

es el análogo exacto de la definición de medidas de conteo sobre espacios de probabilidad finitos.

Así, diremos que un espacio de probabilidad interno $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es *hiperfinito* si Ω es hiperfinito.

Ejemplo.- La *Línea de Tiempo Hiperfinita* será un importante ejemplo de espacio de probabilidad hiperfinito.

Elijamos alguna $\eta \in {}^{*}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $\Delta t = \eta^{-1}$ es un infinitesimal positivo. Haciendo

$$T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, , \ldots, \eta\Delta t = 1\}$$

donde T es hiperfinito. Notando que si $\eta = \omega!$ para alguna $\omega \in {}^{*}\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, entonces cada racional estándar m/n en $[0,1]$ pertenece a T; por lo que cada uno de ellos es de la forma $\lambda\Delta t$ para alguna $\lambda \leq \eta$. Además, como el mapeo de la parte estándar

$${}^{o} : T \to [0,1]$$

es sobre, entonces se tiene que un número irracional $r \in [0,1]$ no es elemento de T, pero dado cualquier irracional r existe un único elemento $t \in T$ tal que $t < r < t + \Delta t$.

Sea P la medida de conteo sobre T, i.e., para cualquier conjunto interno $A \subseteq T$ definamos

$$P(A) = \frac{\#A}{\#T}.$$

Como veremos $(T, \mathcal{A}, P)$, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra interna de todos los subconjuntos internos de T y el espacio de Loeb asociado $(T, L(\mathcal{A}), L(P))$ son las versiones del espacio de Lebesgue usual $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ donde $\mathcal{B}$ denota los subconjuntos Lebesgue medibles de $[0,1]$ y μ es la medida estándar de Lebesgue.

Las funciones y los procesos estocásticos son los objetos matemáticos que mas se estudiaran aquí, por tanto es necesario dar una definición formal.

Un *proceso estocástico* es una función

$$x : E \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

donde $(E, \mathcal{B}, \mu)$ es algún espacio de probabilidad. El espacio de valores en este caso es $\mathbb{R}$ pero bien podría ser algún espacio métrico separable adecuado.

Definición 2.2.1 *Un* proceso estocástico hiperfinito *es una función interna*

$$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$$

donde T es la línea de tiempo hiperfinita y $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es algún espacio de probabilidad hiperfinito.

Ahora bien, de la definición anterior buscamos obtener un proceso estándar x tomando la "parte estándar "de X. Inversamente, si fijamos el valor inicial para que sea externo, i.e., el proceso estándar $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ con respecto a $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$, surge la pregunta: ¿ es posible aproximar a este por un proceso hiperfinito $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$?. Los procesos son funciones de dos variables; entonces necesitamos aproximar objetos externos por objetos internos en cada componente. Esto nos lleva a la necesidad de la siguiente definición.

Definición 2.2.2 **(1)** *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$. F es llamado un* lifting *de f si F es interno y*

$$^oF(\omega) = f(\omega)$$

para casi todo $\omega \in \Omega$ con respecto a la medida de Loeb $L(P)$ sobre Ω.

(2) *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *y* $F : T \to {}^*\mathbb{R}$. F *es un* lifting *de* f *si* F *es interno y*

$$^oF(t) = f(^ot)$$

para casi todo $t \in T$ *con respecto a la medida de Loeb* $L(P)$ *sobre* T.

Con esta definición en mente podemos dar el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1 **(1)** *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad hiperfinito y* $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ *su espacio de Loeb asociado. Una función* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es Loeb medible si y sólo si* f *tiene un lifting* $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$.

(2) *Sea* $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ *un espacio de Lebesgue estándar y* $(T, L(\mathcal{A}), L(P))$ *su espacio de Loeb asociado a la linea de tiempo hiperfinita* T. *Una función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es Lebesgue medible si y sólo si* f *tiene un lifting* $F : T \to {}^*\mathbb{R}$.

Prueba.-
(1)
$\Longleftarrow$) Sea F un lifting de f. tomemos una vecindad estándar de $r \in \mathbb{R}$ mediante $N_{1/n}(r) = \{r' \in \mathbb{R} : |r - r'| < 1/n\}$. hay que probar que $f^{-1}(N_{1/n})(r)$ es Loeb medible.
Como F es lifting de f el conjunto

$$U = \{\omega \in \Omega : {}^oF(\omega) = f(\omega)\}$$

tiene medida 1 (bajo $L(P)$). Sea $\omega \in U$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f(\omega) \in N_{1/n}(r) \quad &\Leftrightarrow \quad |r - {}^oF(\omega)| < \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad {}^o|r - F(\omega)| < \frac{1}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad |r - F(\omega)| < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \text{ para alguna } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La primera de las equivalencias es por definición de lifting, mientras que la segunda es por la continuidad del valor absoluto. La tercera es la que no es trivial, y esta se obtiene al reemplazar la condición externa ${}^o|r - F(\omega)| < 1/n$ por la condición interna $|r - F(\omega)| < (1/n) - (1/m)$. Por lo que el conjunto $\{\omega \in \Omega : |r - F(\omega)| < (1/n) - (1/m)\} \in \mathcal{A}$ de donde se tiene que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : |r - F(\omega)| < (1/n) - (1/m)\} \in L(\mathcal{A})$$

así
$$U \bigcap f^{-1}(N_{1/n}(r)) \in L(\mathcal{A})$$
lo cual muestra que f es Loeb medible.
$\Longrightarrow$) Sean $N_1, N_2, \ldots$ una base abierta numerable para $\mathbb{R}$ y sea $U_n = f^{-1}(N_n) \in L(\mathcal{A})$. por el teorema 2.1.1 podemos encontrar conjuntos internos $A_{n,m}$ tales que $L(P)(U_n) \leq P(A_{n,m}) + 1/m$, con $A_{n,m} \subseteq A_{n,m+1} \subseteq U_n$. Se tiene además que
$$L(P)(U_n \backslash \bigcup_m A_{n,m}) = 0.$$
Entonces el conjunto $U = \Omega \backslash \cup_n (U_n \cup_m A_{n,m})$ tiene medida de Loeb 1.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathcal{G}_{n,m}$ como el conjunto interno de todos las funciones internas $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ tales que $F(A_{k,l}) \subseteq {}^*N_k$ para todos los $k \leq n$, $l \leq m$. Entonces, cada $\mathcal{G}_{n,m}$ es no vacío, por lo que al usar el principio de saturación sabemos que existe una función interna $F \in \cap \mathcal{G}_{n,m}$. Así, para cada $\omega \in U$ se tiene que
$$F(\omega) \in \bigcap \{{}^*N_n : f(\omega) \in N_n\}$$
y como $N_1, N_2, \ldots$ es una base abierta para $\mathbb{R}$, por lo que se concluye que ${}^oF(\omega) = f(\omega)$ para todo $\omega \in U$, de donde se tiene que F es un lifting de f. Para probar **(2)** necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Un conjunto $A \subseteq [0,1]$ es Lebesgue medible si y sólo si el conjunto $st^{-1}(A) = \{t \in T : {}^ot \in A\}$ es Loeb medible.*

Notemos que en este caso tenemos que $\mu(A) = L(P)(st^{-1}(A))$.
a partir de esto la prueba de la parte **(2)** es sencilla. dado $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definimos $f_1 : T \to \mathbb{R}$ como $f_1(t) = f({}^ot)$. Para todo abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es Lebesgue medible si y sólo si $f_1^{-1}(U)$ es Loeb medible. eligiendo un lifting F de f_1, entonces F también es lifting de f.

Prueba del lema.-
$\Longrightarrow$) Sea A un conjunto Lebesgue medible. Sin perdida de generalidad se tiene que podemos restringirnos al caso en que $A = [a,b)$ con a, b racionales. De acuerdo a la elección de Δt dada antes, se tiene que $a, b \in T$ y
$$st^{-1}(A) = \bigcup_m \bigcap_n \{t \in T : a - \frac{1}{n} \leq t \leq b - \frac{1}{n}\}.$$

Entonces $st^{-1}(A) \in L(\mathcal{A})$ y mas claramente $L(P)(st^{-1}(A)) = b - a$.
$\Longleftarrow$) En esta parte usaremos el hecho que si B es un subconjunto interno de T en ${}^*\mathbb{R}$ entonces $st(B)$ es un subconjunto cerrado, y por tanto compacto, de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Ahora, sea $A \subseteq [0,1]$ y asumamos que $st^{-1}(A) \in L(\mathcal{A})$. Hay que probar que A es Lebesgue medible. Dado $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ podemos, usando el teorema 2.1.1, dar un conjunto interno $B \subseteq st^{-1}(A)$ tal que $P(B) > L(P)(st^{-1}(A)) - \epsilon$. Tomando $C = st(B) \subseteq A$, entonces C es compacto en $[0,1]$ por tanto Lebesgue medible. Por la primera parte del lema tenemos que $st^{-1}(C) \in L(A)$ y

$$\mu(C) = L(P)(st^{-1}(C)) \geq {}^o(P(B)) \geq L(P)(st^{-1}(A)) - \epsilon.$$

Y usando un argumento análogo, para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ podemos encontrar un conjunto D, tal que $A \subseteq D$ y

$$\mu(D) \leq L(P)(st^{-1}(A)) + \epsilon.$$

Esto es suficiente para mostrar que A es Lebesgue medible y

$$\mu(A) = L(P)(st^{-1}(A)).$$

■

La teoría de integración es particularmente simple en un espacio de probabilidad hiperfinito.

Definición 2.2.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad hiperfinito con P la medida de conteo y $\mathcal{A}$ el álgebra de todos los conjuntos internos. Sea $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna. definimos la* Esperanza *$E(F)$ de F como*

$$E(F) = \int_\Omega F(\omega)\mathrm{d}P = \sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)\frac{1}{\#\Omega}.$$

Conviene hacer algunos comentarios acerca de esta definición. Primero, la suma hiperfinita existe por el principio de transferencia, por lo que, $E(F)$ es un numero hiperreal bien definido.

Hemos impuesto restricciones a la integración con respecto a la medida de conteo P. Podríamos asignar diferentes pesos a los puntos de Ω. Sea $(a_\omega)_{\omega\in\Omega}$ una sucesión interna tal que $\sum a_\omega = 1$. De una manera estándar esto define una probabilidad hiperfinita sobre Ω con esperanza dada por

$$E(F) = \sum_{\omega\in\Omega} F(\omega)a_\omega.$$

También podríamos haber desarrollado la teoría con respecto a una álgebra interna arbitraria $\mathcal{A}$, pero entonces tendríamos que siempre mencionar la $\mathcal{A}-$medibilidad igual como se hace en el análisis real estándar.

Seria importante relacionar la esperanza hiperfinita con la integral de Lebesgue estándar en $\mathbb{R}$. Para poder hacer esto, necesitamos antes la siguiente definición.

Definición 2.2.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ una espacio de probabilidad interno y $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna $\mathcal{A}-$medible. Se dice que F es $S-$ integrable si*

(i) *$E(|F|)$ es un hiperreal.*

(ii) *Si $A \in \mathcal{A}$ y $P(A) \approx 0$ entonces $\int_A |F(\omega)| \mathrm{d}P \approx 0$.*

El espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tiene un espacio de Loeb asociado $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ con una teoría de integración estándar con respecto a la $\sigma-$álgebra $L(\mathcal{A})$ y la medida $\sigma-$aditiva $L(P)$. Tenemos el siguiente inesperado resultado.

Teorema 2.2.2 *1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ una espacio de probabilidad hiperfinito y $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ su espacio de Loeb asociado. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es Loeb integrable si y sólo si f tiene un lifting $S-$integrable $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$. En este caso,*

$$E(F) \approx \int_\Omega f(\omega) \mathrm{d}L(P)(\omega)$$

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ una espacio de probabilidad hiperfinito y $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ su espacio de Loeb asociado. Sea $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna no negativa. Entonces F es $S-$integrable si y sólo si

(i) *${}^oF$ es Loeb medible.*

(ii) *${}^oE(f) = \int_\Omega {}^oF \mathrm{d}L(P)$*

3. Sea $([0,1], \mathcal{B}, \mu)$ el espacio de Lebesgue y $(T, \mathcal{A}, P)$ la línea de tiempo hiperfinita. Una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue integrable si y sólo si f tiene un lifting $S-$integrable $F : T \to {}^*\mathbb{R}$. En este caso

$$E(F) \approx \int_0^1 f(\omega) \mathrm{d}\mu(r)$$

Prueba.- Primero notemos que el inciso (2) es solo una variación de (1), lo cual no requiere una demostración. Además, la parte (3) se sigue de la prueba de (1) y del hecho que $st : T \to [0,1]$ es una medida isomorfa.

Entonces probemos el inciso (1). Si F es una función finita, esto es, $F : \Omega \to {}^*[-n,n]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces es fácil ver que

$$E(F) \approx \int_{\Omega} {}^{o}F(\omega)\mathrm{d}L(P)(\omega).$$

El caso en que F no es una función finita se sigue de la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1 *Una función $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es $S-$integrable si y sólo si existe una sucesión de funciones finitas $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$${}^{o}E(|F - F_n|) \to 0 \ \ si \ \ n \to \infty$$

con este argumento el resto de la prueba del teorema anterior es trivial.
Prueba de la proposición.-
$\Longrightarrow$)
Sea $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función $S-$integrable. Para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$ definamos una función $F_n : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ como

$$F_n(\omega) = \begin{cases} F(\omega) & \text{si} \quad |F(\omega)| < n \\ n & \text{si} \quad F(\omega) > n \\ -n & \text{si} \quad F(\omega) < -n \end{cases}$$

Entonces $F_n(\omega)$ es una función finita si $n \in \mathbb{N}$. Para $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ se tiene que

$$P(\{\omega \in \Omega : |F(\omega)| > m\}) \leq \frac{1}{mE[|F|]} \approx 0 \tag{2.1}$$

por la desigualdad de Chebyshev y por la $S-$integrabilidad de F. Así, para $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

$$E(|F - F_m|) \leq \int_{|F(\omega)|>m} |F(\omega)|\mathrm{d}P.$$

por la expresión (2.1), y finalmente usando otra vez la $S-$integrabilidad se tiene que la integral es ≈ 0.

$\Longleftarrow$)
Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones dada. Supongamos que $\sup_\omega |F_n| < n$.

de la aproximación $\lim_{n\to\infty} {}^oE(|F - F_n|) = 0$ de manera obvia se tiene que ${}^oE(|F|) < \infty$.

Verifiquemos que se satisface la condición 2.2.4(ii), para esto tomemos $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ arbitrario. Elijamos alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que ${}^oE(|F - F_n|) < \epsilon/2$. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $P(A) < \epsilon/2n$. Entonces

$$\int_A |F|\mathrm{d}P \leq \int_A |F_n|\mathrm{d}P + \int_A |F - F_n|\mathrm{d}P < \epsilon.$$

Entonces si $A \in \mathcal{A}$ y $P(A) \approx 0$ entonces $\int_A |F|\mathrm{d}P \approx 0$. ■

Daremos ahora una pequeña introducción al concepto de *esperanza condicional.*

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad hiperfinito, donde $\mathcal{A}$ es una álgebra interna de subconjuntos internos de Ω. Cualquier subálgebra interna $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ es generada por una partición hiperfinita $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_\eta\}$, donde $\eta \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, del conjunto Ω, esto se sigue usando el principio de transferencia para el caso finito. Entonces se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2.5 *Sea $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna y $\mathcal{B}$ una subálgebra de A generada por la partición interna de $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_\eta\}$, $\eta \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ de Ω. Definimos la* esperanza condicional $E(F|\mathcal{B})$[1] *como*

$$E(F|\mathcal{B})(\omega) = \frac{1}{P(\Omega_n)} \sum_{\omega' \in \Omega_n} F(\omega')P(\omega'),$$

$$\textit{para } \omega \in \Omega_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \eta$$

Notemos que, igual que en el caso estándar, la función $E(F|\mathcal{B}) : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ es $\mathcal{B}-$medible y que

$$E(E(F|\mathcal{B})) = E(F)$$

La siguiente proposición relaciona los conceptos hiperfinitos a los del conceptos estándar.

Proposición 2.2.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad hiperfinito y sea $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ una función $S-$integrable. para cualquier subálgebra interna $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ denotando a $E(F|\mathcal{A})$ como la esperanza condicional de F con respecto a $\mathcal{B}$ y a $E({}^oF|\mathcal{A})$ como la esperanza condicional estándar de ${}^oF$ con respecto a la subálgebra $L(\mathcal{B})$ de $L(\mathcal{A})$. Entonces $E(F|\mathcal{B})$ es $S-$integrable y*

$${}^oE(F|\mathcal{B}) = E^o(F|L(\mathcal{B})), \qquad L(P) - c.s.$$

[1] Algunas veces también lo denotaremos como $E_P(F|\mathcal{B})$.

Prueba.-
Notemos que para todo $A \in \mathcal{B}$, se tiene que por la $S-$integrabilidad y por el teorema 2.2.2(2) obtenemos

$$^o\!\!\int_A E(F|\mathcal{B})\mathrm{d}P = {^o\!\!\int_A} F\mathrm{d}P = \int_A {^oF}\mathrm{d}L(P) = \int_A E({^oF}|L(\mathcal{B}))\mathrm{d}L(P)$$

Tomando A tal que $P(A) \approx 0$ obtenemos la $S-$integrabilidad de $E(F|\mathcal{B})$.

Ahora, usando el teorema 2.1.1, para cualquier $B \in L(\mathcal{B})$ podemos dar un $A \in \mathcal{B}$ tal que $L(P)(A\Delta B) = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}
\int_B {^oE}(F|\mathcal{B})\mathrm{d}L(P) &= {^o\!\!\int_A} E(F|\mathcal{B})\mathrm{d}P \\
&= \int_A E({^oF}|L(\mathcal{B}))\mathrm{d}L(P) \\
&= \int_B E({^oF}|L(\mathcal{B}))\mathrm{d}L(P)
\end{aligned}$$

Esto por la $S-$integrabilidad de $E(F|\mathcal{B})$, el teorema 2.2.2(2) y el calculo hecho arriba. Finalmente, como ${^oE}(f|\mathcal{B})$ es $L(\mathcal{B})-$integrable se tiene la prueba de la proposición. ■

En ocasiones se tiene que el producto de medidas de Loeb no es la medida de Loeb del producto como en la definición de probabilidad estándar., sin embargo, Keisler [23] probo un teorema que resulta ser del tipo Fubini.

Teorema 2.2.3 *Sea Ω_1, Ω_2 espacios de probabilidad hiperfinitos, y $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función Loeb integrable, entonces*

(i) *$f(\omega_1, \cdot)$ es Loeb integrable para casi todo $\omega_1 \in \Omega_1$.*

)ii) *La función $g(\omega_1) = \int f(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}L(P_2)$ es Loeb integrable en Ω_1.*

(iii)

$$\int f(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}L(P_1 \otimes P_2) = \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}L(P_2) \right) \mathrm{d}L(P_1)$$

Prueba.-
Sea $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$.

Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos internos de $\Omega_1 \times \Omega_2$ tales que $A \subset B_n$ y ${}^oP_1 \otimes P_2(B_n) \downarrow 0$. Definamos $B = \cap B_n$. Como

$$P_1 \otimes P_2(B_n) = \int P_2(B_n(\omega_1))\mathrm{d}P_1(\omega_1),$$

entonces por el teorema 2.2.2 tenemos que

$$\begin{aligned} L(P_1 \otimes P_2)(B_n) &= {}^oP_1 \otimes P_2(B_n) \\ &= {}^o\!\!\int P_2(B_n(\omega_1))\mathrm{d}P_1(\omega_1) \\ &= \int {}^oP_2(B_n(\omega_1))\mathrm{d}P_1(\omega_1) \\ &= \int L(P_2)(B_n(\omega_1))\mathrm{d}P_1(\omega_1) \end{aligned}$$

y por el teorema de la convergencia monótona esto implica que $L(P_2)B(\omega_1)) = 0$ c.s. y como $A \subset B$, hemos probado que si $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ tiene medida $L(P_1 \otimes P_2)-$ cero, entonces para $L(P_1)-$c.s. ω_1, la sección $A(\omega_1) = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$ tiene $L(P_2)-$ medida cero.

Ahora elijamos un lifting F de f, y definamos $G(\omega_1) = \int F(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}P_2$. Es suficiente con mostrar que para todo ω_1 la función $F(\omega_1, \cdot)$ es un lifting $S-$integrable de $f(\omega_1, \cdot)$ y que G es un lifting $S-$integrable de g. Usando otra vez el teorema 2.2.2 se tiene de manera clara la primera dos partes del teorema.

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} \int f(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}L(P_1 \otimes P_2) &= {}^o\!\!\int F(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}(P_1 \otimes P_2) \\ &= {}^o\!\!\int G(\omega_1)\mathrm{d}P_1 \\ &= \int g(\omega_1)\mathrm{d}L(P_1) \\ &= \int \left(\int f(\omega_1, \omega_2)\mathrm{d}L(P_2) \right) \mathrm{d}L(P_1). \end{aligned}$$

Que $F(\omega, \cdot)$ es un lifting de $f(\omega, \cdot)$ para casi todo ω_1 se sigue de lo hecho arriba.

Para la $S-$integrabilidad vamos a usar la proposición 2.2.1, para esto definamos las truncaciones de F para cada $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(\omega_1,\omega_2) = \begin{cases} F(\omega_1,\omega_2) & \text{si} \quad |F(\omega_1,\omega_2)| < n \\ n & \text{si} \quad F(\omega_1,\omega_2) > n \\ -n & \text{si} \quad F(\omega_1,\omega_2) < -n \end{cases}$$

entonces

$$0 \leq \int \left({}^o\!\!\int |F - F_n| \mathrm{d}P_2 \right) \mathrm{d}L(P_1) \leq {}^o\!\!\int |F - F_n| \mathrm{d}(P_1 \otimes P_2) \to 0 \text{ si } \quad n \to \infty$$

implica que

$${}^o\!\!\int |F(\omega_1,\omega_2) - F_n(\omega_1,\omega_2)| \mathrm{d}P_2 \;\; \to \;\; 0 \text{ c.s.}$$

entonces $F(\omega_1,\cdot)$ es $S-$integrable para casi todo ω_1.
Como consecuencia de esto se tiene que

$${}^oG(\omega_1) = {}^o\!\!\int F(\omega_1,\omega_2) \mathrm{d}P_2 = \int f(\omega_1,\omega_2) \mathrm{d}L(P_2) = g(\omega_1),$$

por lo que G es un lifting de g. Si $G_n(\omega_1) = \int F_n(\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}P_2(\omega_2)$ entonces G_n es una función finita y

$$0 \leq {}^o\!\!\int |G - G_n| \mathrm{d}P_1 \leq {}^o\!\!\int\!\!\int |F - F_n| \mathrm{d}P_1 \mathrm{d}P_2 \;\; \to \;\; 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Y por la proposición 2.2.1 se tiene que G es $S-$integrable. ■

vamos a dar dos resultados que se usaran en posteriores capítulos.

Lema 2.2.2 *Si la medida de probabilidad hiperfinita P es absolutamente continua respecto a Q y su función de densidad es S-integrable, entonces $L(P)$ es absolutamente continua con respecto a $L(Q)$ con densidad dada por ${}^oF$.*

Prueba.-
Simplemente mediante cálculos directos tenemos que si $A \in \mathcal{A}$ entonces

$$\int_A {}^oF \mathrm{d}L(Q) = {}^O \left(\int_A F \mathrm{d}Q \right) = {}^o(P(A)) = L(P)(A)$$

y por continuidad se tiene que para toda $A \in \sigma(\mathcal{A})$ se cumple esto ultimo, entonces se tiene el resultado. ■

Ahora presentamos el ultimo resultado de esta sección.

Lema 2.2.3 **(a)** *Supongamos que* $F, G : \Omega \to {}^*\mathbb{R}^+$ *son variables aleatorias internas con* $F \approx G$ *,* $L(Q)$*-casi seguramente y supongamos además que* $E_Q(F) = 1 = E_Q(G)$*. Entonces si* G *es* S*-integrable implica que* F *también es* S*-integrable.*
(b) *Si* $E_Q(F^2)$ *es finito, entonces* F *es* S*-integrable.*

Prueba.-
(a) Tenemos que $E(^oF) = E(^oG) = {}^oE(G) = 1$ por hipótesis, por lo cual $E(^oF) = {}^oE(F)$, por lo que entonces F es S-integrable.

(b) $E_Q(|F|)$ es finito ya que $E_Q(F^2)$ es finito. Si $Q(A) \approx 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ entonces por la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\int_A |F| \mathrm{d}Q \leq \left(\int \mathbb{1}_A \mathrm{d}Q \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int F^2 \mathrm{d}Q \right)^{\frac{1}{2}} \approx 0$$

■

2.3. Movimiento Browniano.

Ahora construiremos el proceso estocástico mas conocido, además de ser uno de los que mas aplicaciones tiene en diversas campos del conocimiento. Se sabe que el movimiento Browniano se construye como un limite de caminatas aleatorias.

Anderson(1976) construyo un movimiento Browniano como una caminata aleatoria hiperfinita, años después Keisler [23] dio su versión de la construcción de Anderson, y esa es la que seguiremos en esta sección.

Antes de ver el tema principal de esta sección vamos a dar ciertas definiciones referentes a la independencia de variables aleatorias en el universo extendido.

Definición 2.3.1 *Una colección de variables aleatorias internas* $(X_i)_{i\in I}$*, con* I *un índice, sobre un espacio de probabilidad hiperfinita* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *es llamado* $^*-$independiente *si para cada subconjunto hiperfinito* $\{X_1, \ldots, X_m\}$*,* $m \in {}^*\mathbb{N}$ *y cada* $m-$*ada interna* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in {}^*\mathbb{R}^m$ *se tiene que*

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) < \alpha_1, \ldots, X_m(\omega) < \alpha_m\}) = \prod_{K=1}^{m} P(\{\omega \in \Omega : X_k(\omega) < \alpha_k\}) \tag{2.2}$$

La colección es entonces llamada $S-$independiente si para cada conjunto finito $\{X_1, \ldots, X_m\}$, $m \in \mathbb{N}$ y cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ la expresión (2.2) se sigue satisfaciendo pero ahora en lugar de tener $=$ se tendrá $\approx$.

Una vez mas, tenemos dos definiciones, la *-versión y la S-versión en el universo extendido, salvo que aquí la S-versión tiene un significado estándar.

Lema 2.3.1 *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una colección de variables aleatorias S-independientes sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces $({}^oX_i)_{i\in I}$ es independiente sobre el espacio de Loeb asociado $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$.*

Prueba.- Calculando tenemos

$$\begin{aligned}
&L(P)(\{\omega \in \Omega | {}^oX_{i_1}(\omega) < \alpha_1, \ldots, {}^oX_{i_m}(\omega) < \alpha_m\}) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} {}^oP\left(\left\{\omega \in \Omega | X_{i_1}(\omega) < \alpha_1 - \frac{1}{n}, \ldots, X_{i_m} < \alpha_m - \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} {}^o\left(\prod_{k=1}^{m} P\left(\left\{\omega \in \Omega | X_{i_k}(\omega) < \alpha_k - \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} {}^oP\left(\left\{\omega \in \Omega | X_{i_k}(\omega) < \alpha_k - \frac{1}{n}\right\}\right) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{m} L(P)(\{\omega \in \Omega | {}^oX_{i_k}(\omega) < \alpha_k\})
\end{aligned}$$

■

Ahora tenemos el resultado del limite central para la *-versión.

Teorema 2.3.1 *Sea $(X_n)_{n\in {}^*\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias $^*-$independientes sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con la misma distribución estándar F y con media 0 y varianza 1. Entonces para toda $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y toda $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ se tiene*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \ | \ \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \leq \alpha\right\}\right) \approx \Psi(\alpha)$$

donde

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

es la distribución estándar Gaussiana.

Prueba.-
Sea G la distribución de ${}^oX_n$ sobre el espacio de Loeb. Como F es estándar (en el sentido del análisis no estándar), entonces se puede ver que $G = {}^oF$ y que $F = {}^*G$. Además se tiene que $E({}^oX_n) = 0$ y que $E({}^oX_n^2) = 1$. Por tanto, por el teorema del limite central (versión estándar), dada una $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n_0$ entonces

$$\left| L(P)\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} {}^oX_k(\omega) \leq \alpha \right\}\right) - \psi(\alpha) \right| < \epsilon.$$

Esto significa que la colección $({}^oX_k)$ es independiente, entonces la suma $\sum_{k=1}^m {}^oX_k$ tiene una distribución G^m la cual es la $m-$esima convolución de G. Tomando $m > n_0$ tal que

$$|G^m(\sqrt{m}\alpha) - \psi(\alpha)| < \epsilon.$$

Ahora $F = G^*$, y aplicando el principio de transferencia se concluye que para todo $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$F^m(\sqrt{m}\alpha) \approx {}^*\psi(\alpha).$$

No obstante, F^m es la distribución de $\sum_{k=0}^m X_k$, por lo que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \leq \alpha \right\}\right) \approx \Psi(\alpha)$$

■

Diremos que un *movimiento Browniano* (denotado por B) es una función

$$B : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$$

donde T es la línea de tiempo hiperfinita, $T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, 1\}$ (como se vio antes), Ω es esencialmente nuestro modelo para lanzamiento de volados hiperfinito, descrito en la sección 2.1,, salvo que aquí el espacio $\{0, 1\}$ lo reemplazamos por $\{-1, 1\}$, por lo que $\Omega = \{-1, 1\}^T$.

Una *caminata aleatoria hiperfinita* es definida de manera explícita como

$$B(\omega, t) = \sum_{0}^{t} \omega(s)\sqrt{\Delta t}, \qquad \omega \in \Omega,$$

entonces entre tiempos t_0 y $t_0 + \Delta t$ la partícula se mueve una distancia Δt ya sea a la izquierda o a la derecha de manera independiente con una probabilidad $\frac{1}{2}$.

Notación.- Usaremos la siguiente convención: si $u \leq t$ entonces

$$\sum_{u}^{t} X(\omega, s) = X(\omega, u) + X(\omega, u + \Delta t) + \cdots + X(\omega, t - \Delta t), \tag{2.3}$$

es decir, $X(\omega, t)$ no esta incluido en la suma.

Ahora bien, el movimiento Browniano estándar (en el sentido del análisis estándar) es obtenido al hacer

$$b(\omega, {}^{o}t) = {}^{o}B(\omega, \tilde{t}\,), \tag{2.4}$$

donde $\tilde{t}$ es el punto inmediato a la derecha de t. b será un proceso estocástico de $\Omega \times [0, 1]$ a $\mathbb{R}$, donde Ω tiene una estructura de medida dada por la construcción de Loeb $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$, donde $\mathcal{A}$ es la álgebra interna de subconjuntos internos de Ω y P es la medida de conteo hiperfinita sobre $\mathcal{A}$.

Hay que probar que efectivamente b, como esta definido en la expresión (2.4), es un movimiento Browniano, para esto hay que verificar que

1. $b(\cdot, t)$ es una función medible de ω para todo $t \in [0, 1]$
2. Para $s < t$, $b(\omega, t) - b(\omega, s)$ tiene una distribución normal $N(0, t - s)$.
3. Si $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$ en $[0, 1]$, entonces $\{b(\omega, t_1) - b(\omega, s_1), \ldots, b(\omega, t_n) - b(\omega, s_n)\}$ es un conjunto de variables aleatorias independientes.

Pero por construcción se tiene que (1) es inmediato, por lo que sólo hay que verificar que se satisfacen (2) y (3), así

Teorema 2.3.2 *Sea B una caminata aleatoria hiperfinita sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y sea b su parte estándar. entonces b es un movimiento Browniano sobre $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$.*

Prueba.-

(1) se satisface por construcción. Se puede probar (2) de dos maneras dife-

rentes, una usando el teorema del limite central y la otra mediante la transformada de Fourier. Hagamos de la ultima manera.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \exp[i(b(\omega, {}^o t) - b(\omega, {}^o s))z]\mathrm{d}L(P) \\
&\quad = {}^o\!\!\int_\Omega \exp[i(B(\omega,t) - B(\omega,s))z]\mathrm{d}P \quad \text{por el teorema 2.2.2} \\
&\quad = {}^o\!\!\int_\Omega \exp\left[i\left(\sum_{k=s}^{t} \omega_k \sqrt{\Delta t}\right) z\right]\mathrm{d}P \\
&\quad = {}^o\!\!\int_\Omega \prod_{k=s}^{t} \exp(i\omega_k \sqrt{\Delta t} z)\mathrm{d}P \\
&\quad = {}^o\left(\prod_{k=s}^{t} \int_\Omega \exp(i\omega_k \sqrt{\Delta t} z)\mathrm{d}P\right) \quad \text{por la independencia.} \\
&\quad = {}^o\left(\prod_{k=s}^{t} \left[\frac{\exp(i\sqrt{\Delta t} z) + \exp(-i\sqrt{\Delta t} z)}{2}\right]\right) \quad \text{ya que } P(\omega_k = \pm 1) = \tfrac{1}{2}. \\
&\quad = {}^o\left(\left\{\left[1 - \frac{z^2}{2m} + O\left(\frac{z^4}{m^2}\right)\right]^m\right\}^{(t-s)}\right) \quad \text{donde } m = \Delta t^{-1}. \\
&\quad = \exp\left(-\frac{{}^o t - {}^o s}{2} z^2\right).
\end{aligned}
$$

Un comentario de la ultima igualdad es que si $m \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ entonces $1 + x/m)^m \approx e^x$, ya que al tomar la parte estándar, el termino $O\left(\frac{z^4}{m^2}\right)$ desaparece, con lo que nos queda la igualdad.
Finalmente, (3) se sigue del lema 2.3.1. ■

Veamos mas propiedades del Movimiento Browniano y las medidas de Loeb.

Primero si $\Delta B(s) = B(s + \Delta t) - B(s)$ entonces se tiene que al desarrollar obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta B(s) &= \sum_{0}^{s+\Delta t}\omega(s)\sqrt{\Delta t}-\sum_{0}^{s}\omega(s)\sqrt{\Delta t}\\ &= \sum_{s}^{s+\Delta t}\omega(s)\sqrt{\Delta t}\\ &= \omega(\Delta t)\sqrt{\Delta t},\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\Delta B^2(s)=\left[\omega(\Delta t)\sqrt{\Delta t}\right]^2$$

y como $\omega(s)$ toma solo los valores $-1,1$ entonces se tiene que

$$\Delta B^2(s)=\Delta t \tag{2.5}$$

De lo anterior y usando que $E(B(s)\Delta B(s))=0$ (porque $\Delta B(s)=\pm 1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ sin importar cual sea la esperanza de $B(s)$) se tiene que

$$\begin{aligned}E(B(t)^2) &= E\sum_{s=0}^{t}\{[B(s)-\Delta B(s)]^2-B(s)^2\}\\ &= \sum_{s=0}^{t}E[2B(s)\Delta B(s)+\Delta t]\\ &= \sum_{s=0}^{t}\Delta t=t\end{aligned}$$

De lo anterior calculemos $E(B(t)^4)$

$$\begin{aligned}
E(B(t)^4) &= E\sum_{s=0}^{t}\{[B(s)+\Delta B(s)]^4 - B(s)^4\} \\
&= \sum_{s=0}^{t} E[4B(s)^3\Delta B(s) + 6B(s)^2\Delta B(s)^2 + 4B(s)\Delta B(s)^3 + \Delta B(s)^4] \\
&= \sum_{s=0}^{t} E[6B(s)^2\Delta t + \Delta t^2] \\
&= \sum_{s=0}^{t}[6s\Delta t + \Delta t^2] \\
&= 3t(t-\Delta t) + t\Delta t = 3t^2 - 2t\Delta t \leq 3t^2.
\end{aligned}$$

aquí se ha usado el hecho que $\sum_{s=0}^{t} s\,\Delta t = \frac{t(t-\Delta t)}{2}$. De igual manera se puede mostrar que

$$E[(B(t)-B(s))^4] \leq 3(t-s)^2.$$

Ahora tenemos el siguiente resultado acerca de la S-continuidad del movimiento Browniano.

Teorema 2.3.3 *$B(\omega,\cdot)$ es S-continuo para casi todo $\omega \in \Omega$, es decir, existe un conjunto Ω' sobre el cual $B(\omega,s) \approx B(\omega,t)$ si $\omega \in \Omega'$ y $s \approx t$. Como consecuencia, $b(\omega,\cdot)$ es continuo para todo $\omega \in \Omega'$.*

Prueba.-

Definamos un conjunto "malo"$\Omega_{m,n}$ para cada pareja $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ como

$$\Omega_{m,n} = \left\{\omega \in \Omega | \exists i < n, \exists s \in T \cap \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \text{ tal que } \left|B(\omega,s) - B(\omega,\frac{i}{n})\right| \geq \frac{1}{m}\right\}$$

Notemos que las trayectorias $B(\omega,\cdot)$ son discontinuas si y sólo si $\omega \in \cup_m \cap_n \Omega_{m,n}$ y que es suficiente con probar que ${}^oP(\Omega_{m,n} \to 0$ si $n \to \infty$ para todo $m \in \mathbb{N}$. También veamos que

$$\begin{aligned}
P(\Omega_{m,n}) &\leq \sum_{i<n} P\left\{\omega \in \Omega | \exists s \in T \cap \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \text{ tal que } \left|B(\omega,s) - B(\omega,\frac{i}{n})\right| \geq \frac{1}{m}\right\} \\
&\leq 2\sum_{i<n} P\left\{\omega \in \Omega | \left|B(\omega,\frac{i+1}{n}) - B(\omega,\frac{i}{n})\right| \geq \frac{1}{m}\right\}
\end{aligned}$$

La justificación de la segunda desigualdad es obtenida mediante un argumento de reflexión, asumiendo que $|B(\omega,(i+1)/n)-B(\omega,i/n)|<1/m$, pero que existe una $s\in(i/n,(i+1)/n]$ tal que $B(\omega,s)-B(\omega,i/n)|>1/m$. Sea s_ω la mas chicas de tales s, y consideremos la reflexión de la trayectoria ω' definida como

$$\omega'(t)=\begin{cases}\omega(t) & \text{si} \quad t<s_\omega\\ -\omega(t) & \text{si} \quad s_\omega\le t\end{cases}$$

Entonces se tiene que $|B(\omega',(i+1)/t)-B(\omega',i/n)|\ge 1/m$ y como cada trayectoria reflejada corresponde a una trayectoria no reflejada entonces se tiene la segunda desigualdad.

Entonces teníamos que

$$\begin{aligned}
P(\Omega_{m,n}) &\le 2\sum_{i<n} P\left\{\omega\in\Omega|\left|B(\omega,\frac{i+1}{n})-B(\omega,\frac{i}{n})\right|\ge\frac{1}{m}\right\}\\
&\le 2m^4 E\left(\left|B\left(\omega,\frac{i+1}{n}\right)-B\left(\omega,\frac{i}{n}\right)\right|^4\right)\\
&\le 6m^4\sum_{i<n}\frac{1}{n^2}=\frac{6m^4}{n}\quad\to\quad 0\quad\text{cuando}\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Por lo que entonces $B(\omega,\cdot)$ es S-continuo para casi todo $\omega\in\Omega$. ■

2.3.1. Tiempos locales Brownianos.

La noción de tiempo local es importante en el estudio del movimiento Browniano. Formalmente se tiene que el tiempo local $l(t,x)$ esta dado por

$$l(t,x)=\int_o^t \delta(x-b(s))\mathrm{d}s,$$

donde $b(s)$ es un movimiento Browniano y δ es la función de Dirac. La idea es que $l(t,x)$ mida el numero de veces que la partícula Browniana visita el lugar x hasta el tiempo t.

Una manera heurística de precisar la idea es mostrar que existe un proceso continuo conjunto $l(t,x)$ tal que

$$l(t,s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^t I_{(-\infty,x]}(b(s))\mathrm{d}s, \tag{2.6}$$

para casi todo $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$, donde I_A es la función característica el conjunto A.

Pensando a b como la parte estándar de la camina aleatoria hiperfinita esto nos da un diferente y directo enfoque de tiempo local. Comencemos con la aproximación a cualquiera de las dos expresiones de $l(t, x)$ dadas arriba

$$(\Delta x)^{-1} \int_0^t I_{[x, x+\Delta x]}(b(s))\mathrm{d}s, \tag{2.7}$$

reemplazando la línea de tiempo $[0, \infty)$ por la discretización hiperfinita $T = \{0, \Delta t, \ldots, n\Delta t, \ldots\}$, con $n \in {}^*\mathbb{N}$ y el espacio $\mathbb{R}$ por $\Lambda = \{0, \pm\Delta x, \ldots, \pm n\Delta x, \ldots\}$, $n \in^* \mathbb{N}$, e introduciendo el proceso interno $L : T \times \Lambda \to {}^*\mathbb{R}$ como

$$L(t, x) = \sum_{s<t} I_{\{x\}}(B(s))(\Delta t)^{\frac{1}{2}}$$

Notemos que en la caminata aleatoria hiperfinita Δx y Δt son elegidas tal que $\Delta x = (\Delta t)^{1/2}$.

Perkins [35] mostró que L tiene una parte estándar, la cual es un tiempo local Browniano, ya que satisface la expresión (2.6). Además uso la representación hiperfinita en la segunda expresión para probar el siguiente teorema cuya prueba se encuentra en [35], página 815.

Teorema 2.3.4 *Si $m(t, x, \delta)$ denota la medida de Lebesgue del conjunto de puntos con distancia menor a $\delta/2$ de $\{s \leq t : b(s) = x\}$. entonces para casi todo $\omega \in \Omega$ y cada $t_0 > 0$ se tiene que*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \sup_{t \leq t_0, x \in \mathbb{R}} |m(t, x, \delta)\delta^{-\frac{1}{2}} - 2(2/\pi)^{\frac{1}{2}} l(t, x)| = 0$$

■

Este teorema es importante porque nos dice que la caracterización solo depende de $\{s : b(s) = x\}$, además, antes de él, solo se tenia para cada x de manera separada, en cambio aquí esta dado para todas las x.

Sea X un espacio de Hausdorff, y sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Una función $\nu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ se dice que es *regular* si para todo $C \in \mathcal{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \sup\{\nu(F) : F \subset C,\ F \in \mathcal{C} \text{ es cerrado}\} && (2.8)\\ &= \inf\{\nu(O) : C \subset O,\ O \in \mathcal{C} \text{ es abierto}\}. && (2.9) \end{aligned}$$

para finalizar este capítulo, tenemos la siguiente proposición que es debida a Anderson [3] (1982), y de donde obtendremos como corolario la versión no estándar del teorema de Lusin.

Proposición 2.3.1 *Sea X un espacio de Hausdorff. Sea $({}^*X, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad finitamente aditivo interno con $L(P)(Ns({}^*X)) = 1$.*[2] *Sea $\mathcal{C}$ la familia de subconjuntos de X, y sea $\nu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ una función conjuntista regular tal que*

$$\nu(\mathcal{C}) = L(P)({}^*C) \qquad \textit{para casi todo } C \in \mathcal{C} \tag{2.10}$$

entonces $\mu = st(L(P))$ es una extensión de ν.

Prueba.-
Sea $C \in \mathcal{C}$ y tomemos $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. elijamos $F, O \in \mathcal{C}$ cerrados y abiertos respectivamente tal que $F \subset C \subset O$ y

$$\nu(O) - \nu(F) < \epsilon, \tag{2.11}$$

lo cual lo podemos hacer por la regularidad de ν. Entonces tenemos de manera obvia que ${}^*F \subset {}^*C \subset {}^*O$ y por le caracterización no estándar de los conjuntos cerrados y abiertos tenemos que

$${}^*F \cap Ns({}^*X) \subset st^{-1}(F) \subset st^{-1}(C) \subset st^{-1}(O) \subset {}^*O$$

combinando las ecuaciones (2.10) y (2.11), y recordando que $L(P)(Ns({}^*X)) = 1$ tenemos

$$L(P)({}^*O) - L(P)({}^*F \cap N({}^*X)) < \epsilon,$$

y como ${}^*C \cap Ns({}^*X)$ y $st^{-1}(C)$ son ambos encerrados entre ${}^*F \cap Ns({}^*X)$ y ${}^*O$ entonces tenemos

$$L(P)(st^{-1}(C)\, \Delta\, {}^*C) = 0, \tag{2.12}$$

por lo que entonces

$$\mu(C) = L(P)(st^{-1}(C)) = L(P)({}^*C) = \nu(C)$$

[2] Recordar que $Ns({}^*E)$ es el conjunto de puntos *casi estándar* de ${}^*E$, donde $x \in {}^*E$ es casi estándar si y sólo si $x \in \mu(Y)$ para alguna $Y \in E$.

entonces $\mu = st(L(P))$ es una extensión de ν. ■

Además, diremos que una medida ν sobre X es una medida de *Radon* si esta es la completación de una medida de Borel y si para todo conjunto C que sea ν-medible se satisface

$$\begin{aligned} \nu(C) &= \sup\{\nu(K) \,:\, K \subset C,\ K \text{ es compacto}\} \\ &= \inf\{\nu(O) \,:\, C \subset O,\ O \text{ es abierto}\}. \end{aligned}$$

Corolario 2.3.1 *Sea $(X, \mathcal{C}, \nu)$ un espacio de probabilidad donde ν es una medida de Radon. Si $f : X \to Y$ es una función medible a un espacio de Radon con base numerable entonces ${}^o({}^*f(x)) = f({}^o x)$ para casi todo $x \in X$ con respecto a la medida $L({}^*\nu)$.*

Prueba.-
Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para Y con $U_1 = Y$. Si ${}^o({}^*f(x)) \neq f({}^o x)$, debemos tener que existe un x tal que

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(f \circ st)^{-1}(U_n) \,\Delta\, {}^*f^{-1}({}^*U_n)\},$$

y para encontrar una contradicción solo debemos mostrar que cada uno de los conjuntos en la expresión de arriba tiene medida cero. Para esto veamos que

$$(f \circ st)^{-1}(U_n) \,\Delta\, {}^*f^{-1}({}^*U_n) = st^{-1}(f^{-1}(U_n) \,\Delta\, {}^*(f^{-1}(U_n)) = 0$$

esto aplicando la expresión (2.12) con $P = {}^*\nu$ y $C = f^{-1}(U_n)$, de donde se tiene una contradicción y el corolario se sigue. ■

El teorema de Lusin-Anderson lo que nos dice es que ${}^*f$ es un lifting de f con respecto a todas las medidas estándar ${}^*\nu$.

Capítulo 3

Análisis Estocástico no Estándar.

La teoría de los procesos estocásticos con el uso del análisis no estándar es tratada en este capitulo, en el cual se da en buena medida la versión no estándar de los teorema ya existentes, esto hace necesario probar varios teoremas acerca de litinfgs. Se siguió principalmente los libros [1] y [24], además de [27] y [39].

3.1. La Integral de Itô Hiperfinita.

El principal problema de la integración estocástica es encontrar el significado que tendría integrales de la forma $\int x\mathrm{d}y$ donde x y y son procesos estocásticos. La primera idea que se nos viene a la mente es tratarlo como una integral de lebesgue-Stieljes,

$$Z_\omega(t) = \int_0^t x_\omega(s)\mathrm{d}y_\omega(s)$$

donde se toma a x_ω y y_ω como las funciones $x(\omega,\cdot)$ y $y(\omega,\cdot)$ respectivamente.

Así, uno pensaría en el candidato para la integral estocástica como el proceso $(\omega,t) \longmapsto Z_\omega(t)$, pero esta manera de pensar la integral nos llevaría a cosas sin mucho sentido, ya que el proceso $y(\omega,\cdot)$ debe ser de variación acotada y uno de los procesos mas usados, el movimiento Browniano, no tendría cabida con esta definición. de ahí, la necesidad de dar una diferente definición.

Itô [21] en su ya famoso articulo encontró una mejor manera de definir la integrales estocásticas de la forma $\int g\,\mathrm{d}b$ donde b es un movimiento Browniano y g es un adecuado proceso estocástico.

Definición 3.1.1 *Sean $X, Y : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ dos procesos estocásticos hiperfinitos. La* Integral Estocástica *de X con respecto a Y es el proceso $\int X\,\mathrm{d}Y$ definido como*

$$\left(\int X\mathrm{d}Y\right)(\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} X(\omega, s)\,\Delta Y(\omega, s) \tag{3.1}$$

Notación.- simplemente escribiremos $\int_0^t X\mathrm{d}Y$ para denotar a la variable aleatoria $(\int X\mathrm{d}Y)(\cdot, t)$.

La integral estocástica esta bien definida para todos los procesos hiperfinitos X y Y, aunque podrían presentarse propiedades extrañas y podría no tener parte estándar. Una tarea importante es tratar de agrupar los procesos X, Y para los cuales se tiene que la integral se comporta bien, esto lo haremos en la siguiente sección.

Ejemplo.- Sea Ω el conjunto de todos las funciones internas $\omega : T \longmapsto \{-1, 1\}$, y sea $\chi : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ la caminata aleatoria de Anderson $B(\omega, t) = \sum_0^t \omega(s)\sqrt{\Delta t}$. Sea $X(\omega, s) = \omega(s)$ y consideremos la integral estocástica $\int X\mathrm{d}\chi$. Entonces se tiene que

$$\int_0^t X\mathrm{d}\chi = \sum_0^t \omega(s)\omega(s)\sqrt{\Delta t} = \sum_0^t \sqrt{\Delta t} = \frac{t}{\Delta t},$$

el cual es infinito para todos los no infinitesimales t. Por lo que la integral de la función finita con respecto al "movimiento Browniano" χ es infinita. El problema por el que se obtuvo este resultado es que los incrementos de $\pm\sqrt{\Delta t}$ de un movimiento Browniano son mucho mas grande de lo que uno espera de una función finita y que conservar las trayectorias Brownianas finitas es un delicado balance entre las contribuciones negativas y positivas. El integrando afecta este balance haciendo que los incrementos sean todos positivos. Por lo que no podemos dejar integrandos que anticipen el comportamiento de χ si queremos que la integral sea finita.

Si $\omega \in \Omega$ y $t \in T$, definamos

$$\omega \upharpoonright t = (\omega(s) | s < t)$$

Donde Ω es el conjunto de todos las funciones internas $\omega : T \longmapsto \{-1, 1\}$. Un proceso hiperfinito $X : \Omega \times T \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ es *no anticipativo* si $X(\omega, t) = X(\omega', t)$ siempre que $\omega \upharpoonright t = \omega' \upharpoonright t$.

Proposición 3.1.1 *Sea λ la medida de probabilidad uniforme sobre T. Asumiendo que X es un proceso no anticipativo el cual es $S-$integrable con respecto a $P \times \lambda$. Entonces para todo t, la integral estocástica $\int_0^t X \mathrm{d}\chi$ es finita c.d.*

Prueba.- Usando álgebra,

$$\begin{aligned} E\left(\left[\int_0^t X \mathrm{d}\chi\right]^2\right) &= E\left(\left[\sum_0^t X\Delta\chi\right]^2\right) \\ &= E\left(\sum_0^t X(s)^2 \Delta\chi(s)^2\right) \\ &\quad +2\sum_{r<s} E[X(s)X(r)\Delta\chi(s)\Delta\chi(r)] \end{aligned}$$

y el ultimo termino es 0 ya que $\Delta\chi(s)$ es mas menos $\sqrt{\Delta}$ con probabilidad $1/2$, sin importar que valores tomen $X(s)$, $X(r)$ o $\Delta\chi(r)$. Además, $\Delta\chi(s)^2 = \Delta t$, por lo que

$$E\left(\left[\int_0^t X \mathrm{d}\chi\right]^2\right) = E\left(\sum_0^t X(s)^2 \Delta t\right) = \int_{\Omega\times[0,t]} X^2 \mathrm{d}(P \times \lambda) < \infty. \quad (3.2)$$

De donde se tiene el resultado. ■

Este resultado nos permite darnos una idea clara acerca de que podemos construir una teoría razonable de integración estocástica si nos restringimos a procesos no anticipativos.

Así, demos una descripción alternativa de los procesos no anticipativos, la cual es un poco intuitiva, pero tiene la particularidad que es mas fácil de generalizar. Para cada $t \in T$ sea $\mathcal{A}_t$ el álgebra interna sobre Ω generada por

$$[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega | \omega' \upharpoonright t = \omega \upharpoonright t\}.$$

El proceso X es no anticipativo si y sólo si $X(\cdot, t)$ es $\mathcal{A}_t-$medible para cada t. Llamamos a $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ una *filtración interna*.

Regresando a la teoría estándar de integración estocástica con respecto a la parte estándar b de χ. La noción estándar de no anticipativo se basa en la filtración $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, L(P))$ generada por la filtración $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$. Sea $\mathcal{N}$ la clase de subconjuntos nulos con respecto a $L(P)$, definimos para cada $t \in [0,1]$ a

$$\mathcal{B}_t = \sigma\left(\bigcup_{s\approx t} L(A_s) \cup \mathcal{N}\right) \tag{3.3}$$

Aquí, $\mathcal{B}_t$ clasifica los eventos que sólo dependen de lo que ocurrió hasta t incluyendo la *monad* de t, y los conjuntos nulos son anexados sólo por cuestiones técnicas.

Recordemos que un proceso estándar $x : \Omega \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ es *medible* si este es medible con respecto a la medida producto completada de la medida de Loeb sobre Ω y la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$. De igual manera, diremos que x es *adaptado* a la filtración $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, L(P))$ si este es medible y si $x(\cdot, t)$ es $\mathcal{B}_t-$medible para cada $t \in [0,1]$. Es claro que un proceso adaptado es la contraparte estándar de la noción no estándar de no anticipativo.

A raíz de la proposición anterior es natural pensar que integrales estocásticas $\int x\,\mathrm{d}b$ estarán bien definidos para todos los procesos adaptados x que sean cuadrado integrables con respecto a $L(P) \times m$, donde m es la medida de Lebesgue.

Definamos la integral cuando x es una función simple adaptada, esto significa que existe una partición $0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots t_k = 1$ tal que $x(\omega, s) = x(\omega, t_i)$ cuando $s \in [t_i, t_{i+1})$ y $x(\omega, t)$ es acotada y $\mathcal{B}_{t_i}-$medible para cada t_i. Entonces haciendo

$$\int_0^1 x(\omega, s)\,\mathrm{d}b(\omega, s) = \sum_{j=0}^{k-1} x(\omega, t_j)\,[b(\omega, t_{j+1}) - b(\omega, t_j)].$$

denotemos como $\Delta b(t_j) = b(t_{j+1}) - b(t_j)$, ahora Itô observo que

$$\begin{aligned}
E\left(\left[\int_0^1 x(\omega,s)\mathrm{d}b(\omega,s)\right]^2\right) &= E\left(\left[\sum_{j=0}^{k-1} x(t_j)\Delta b(t_j)\right]^2\right)\\
&= E\left(\sum_{j=0}^{k-1} x(t_j)^2\Delta b(t_j)^2\right) + 2\sum_{j<l} E[x(t_j)x(t_l)\Delta b(t_j)\Delta b(t_l)]\\
&= E\left(\sum_{j=0}^{k-1} x(t_j)^2\Delta t_j\right) + 0\\
&= E\left(\int_0^1 x(t)^2\mathrm{d}t\right),
\end{aligned}$$

es decir, que el mapeo $x \to \int_0^1 x\mathrm{d}b$ preserva la norma de $L^2(L(P)\times m)$ a $L^2(L(P))$.

Ahora como las funciones simples son densas en el conjunto de procesos adaptados en $L^2(L(P)\times m)$, podemos extender $x \to \int_0^1 x\mathrm{d}b$ a una isometría la cual seguiremos denotando por $\int_0^1 x\mathrm{d}b$. Sea $\mathbb{1}_{[0,t]}$ la función indicadora, la *integral estocástica* es el proceso

$$\left(\int x\mathrm{d}b\right)(\omega,t) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,t]}\,x\mathrm{d}b \tag{3.4}$$

Un hecho importante a subrayar es que como $\int_0^1 g\mathrm{d}b$ es un elemento de $L^2(L(P))$, la integral estocástica es determinada de manera única, salvo equivalencias.

Demos una definición que se asemeja a la dada en la página 37, aunque aquí se combinan las dos partes de la dada previamente.

Definición 3.1.2 *Sea $x : \Omega\times[0,1] \longmapsto \mathbb{R}$. un proceso hiperfinito $X : \Omega\times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ es un* lifting *(con respecto a $P\times\lambda$) si*

$$^oX(\omega,t) = x(\omega, {}^ot)$$

casi seguramente en $L(P\times\lambda)$.

Llamaremos a un proceso x adaptado casi seguramente si existe un proceso adaptado y tal que $x(\omega,s) = y(\omega,s)$ para casi todo (ω,s).

Ahora se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.1.1 *Un proceso estocástico* $x : \Omega \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ *es adaptado casi seguramente si y sólo si tiene un lifting no anticipativo.*

■

este teorema se probara mas adelante.

Ahora tenemos el lema de Itô, que resulta ser el resultado de mas importancia en el análisis estocástico. Lo enunciaremos en forma general y por el momento sólo se probara para el caso unidimensional, en siguientes secciones se abordara de nuevo de manera mas extensa.

Denotaremos como ∇ y Δ las derivadas espaciales y ∂_t las derivadas temporales.

Lema 3.1.1 (Itô) *Sea* $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$. *Si* b *es un movimiento Browniano* $n-$*dimensional, entonces*

$$\mathrm{d}\varphi(b(t)) = \nabla\varphi(b(t))\mathrm{d}b + (\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi)(b(t))\mathrm{d}t, \tag{3.5}$$

lo cual denota

$$\varphi(b(t)) - \varphi(b(0)) = \int_0^t \nabla\varphi(b(s))\mathrm{d}b(s) + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\varphi + \partial_t\varphi\right) b(s)\mathrm{d}s \tag{3.6}$$

Prueba.- Asumamos que $\varphi : \mathbb{R} \times [0,1] \longmapsto \mathbb{R}$ tiene primeras y segundas derivadas continuas, nos basta con probar que

$$\varphi(\chi_t, t) - \varphi(\chi_0, 0) \approx \int_0^t \nabla\varphi(\chi_s, s)\mathrm{d}\chi + \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta\varphi(\chi_s, s) + \partial_t\varphi(\chi_s, s)\right) \mathrm{d}s \tag{3.7}$$

ya que $\nabla\varphi(\chi_s, s)$ es un lifting de $\nabla\varphi(b_s, s)$.

Ahora, el lado izquierdo de la expresión (3.7) lo podemos reescribir como una suma hiperfinita de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\varphi(\chi_t, t) - \varphi(\chi_0, 0) \\
&\qquad = \sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s+\Delta t) - \varphi(\chi_s, s)] \\
&\qquad = \sum_{s=0}^{t} \nabla\varphi(\chi_s, s)\Delta\chi(s) \\
&\qquad\quad + \sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s) - \varphi(\chi_s, s) - \nabla\varphi(\chi_s, s)\Delta\chi(s)] \\
&\qquad\quad + \sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s+\Delta t) - \varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)]
\end{aligned}$$

Y por definición la primera suma es la integral estocástica hiperfinita. Para la suma de en medio se puede hacer lo siguiente, como

$$|\varphi(x) - \varphi(y) - \nabla\varphi(y)(x-y) - \frac{1}{2}\Delta\varphi(y)(x-y)^2| \leq C|x-y|^3$$

para una constante finita C, entonces el segundo termino se puede escribir, como

$$\sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s) - \varphi(\chi_s, s) - \nabla\varphi(\chi_s, s)\Delta\chi(s)] \approx \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{t} \Delta\varphi(\chi_s, s)\Delta\chi_s^2$$

Pero, $\Delta\chi_s^2 = \Delta t$ por la expresión (2.5) de la página 52, entonces la expresión anterior queda como

$$\sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s) - \varphi(\chi_s, s) - \nabla\varphi(\chi_s, s)\Delta\chi(s)] \approx \frac{1}{2}\int_0^t \Delta\varphi(\chi_s, s)\mathrm{d}s$$

Para el ultimo termino se tiene que al igual que se hizo con el termino de en medio, podemos acotarlo como

$$|\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s+\Delta t) - \varphi(\chi_{s+\Delta t}, s) - \partial_t\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)\Delta t| \leq C\Delta t^2$$

con lo que podemos reescribir el ultimo termino quedando como

$$\sum_{s=0}^{t} [\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s+\Delta t) - \varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)] \approx \sum_{s=0}^{t} \partial_t\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)\Delta t$$

de donde obtenemos que la ultima suma se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{t}[\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s+\Delta t) - \varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)] &\approx \int_0^t \partial_t\varphi(\chi_{s+\Delta t}, s)\mathrm{d}s \\ &\approx \int_0^t \partial_t\varphi(\chi_s, s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Lo cual prueba el lema. ■

Conviene hacer dos comentarios acerca de la prueba que se dio para probar el lema de Itô, uno es la ventaja de la definición de la integral estocástica. La segunda es la exacta relación que se tiene $\Delta\chi(t)k^2 = \Delta t$ con Δt un infinitesimal.

3.2. Teoría General de Integración Estocástica.

En la sección anterior se estudió los procesos estocásticos hiperfinitos de la forma $X : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$, donde $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio de probabilidad hiperfinito. Ahora seguiremos en el mismo tenor, sólo que dejaremos a T mas general.

Una *línea de tiempo hiperfinita* será un conjunto hiperfinito

$$T = \{t_o, t_1, \ldots, t_\xi\},$$

donde $0 = t_0, < t_1 < t_2 < \cdots < t_x i = 1$ y $t_{i+1} - t_i \approx 0$ para cada i. Además escribiremos $\Delta X(\omega, t_i) = X(\omega, t_{i+1}) - X(\omega, t_i)$ y usaremos la misma convención que la dada en la sección 2.3, es decir, si $s = t_i$ y $t = t_j$ entonces

$$\sum_{r=s}^{t} X(\omega, r) = X(\omega, t_i) + X(\omega, t_{i+1}) + \cdots + X(\omega, t_{j-1})$$

Esto es, el termino $X(\omega, t)$ no se incluye en la suma.

Dados dos procesos estocásticos $X, Y : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$, la integral estocástica se define como antes

$$\int_0^t X\mathrm{d}Y = \sum_{s=0}^{t} X(s)\Delta Y(s).$$

Nuestra idea es introducir el importante concepto de martingala, pero esto hace necesario definir lo que es una filtración.

Definición 3.2.1 *Sea T una línea de tiempo hiperfinita y $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad hiperfinito. Una* filtración interna *sobre Ω indexada por T, $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ es una sucesión interna creciente de álgebras internas sobre Ω.*

Al asumir que $\mathcal{A}$ es el conjunto potencia interno de Ω entonces todos los $\mathcal{A}_t$ son automáticamente sub$-$álgebras de $\mathcal{A}$.

Igual que en la sección anterior es necesario definir procesos no anticipativos para nuestra nueva línea de tiempo T con respecto a la filtración definida arriba.

Definición 3.2.2 *Un proceso interno $X : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ es* no anticipativo *con respecto a $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ si la función $\omega \longmapsto X(t, \omega)$ es $\mathcal{A}_t-$medible para todo $t \in T$.*

Con las definiciones anteriores es sencillo poder dar el concepto de martingala.

Definición 3.2.3 *Un proceso interno $M : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ es* martingala *con respecto a $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ si este es no anticipativo y para toda $s, t \in T$, $s < t$ y toda $A \in \mathcal{A}_s$ se tiene que*

$$E(\mathbb{1}_A(M_t - M_s)) = 0. \tag{3.8}$$

Como en el análisis estocástico estándar, si reemplazamos la igualdad (3.8) por la desigualdad $E(\mathbb{1}_A(M_t - M_s)) \geq 0$, entonces a M le llamamos *submartingala* y de igual manera al reemplazarla por $E(\mathbb{1}_A(M_t - M_s)) \leq 0$ le llamamos *supermartingala.*

Daremos otra forma de describir un proceso no anticipativo mediante la introducción de una relación de equivalencia. Para cada $t \in T$ definamos la relación $\sim_t$ sobre Ω como

$$\omega \sim_t \omega' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall A \in \mathcal{A}_t, \quad \omega \in A \Leftrightarrow \omega' \in A \tag{3.9}$$

Con esta relación es simple verificar que X es no anticipativo si y sólo si $X(\omega, t) = X(\omega', t)$ cuando $\omega \sim_t \omega$.

Además, si $[\omega]_t$ es la clase de equivalencia de ω, bajo esta relación de equivalencia, entonces un proceso no anticipativo M es una martingala si y sólo si

$$\sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t} \Delta M(\tilde{\omega}, t) P\{\tilde{\omega}\} = 0 \tag{3.10}$$

para todo $\omega \in \Omega$ y todo $t \in T$. Usando todo lo anterior es trivial ver que si X es no anticipativo y M es una martingala, entonces $\int X\mathrm{d}M$ es también una martingala.

Otra necesaria definición es la de variación cuadrática.

Definición 3.2.4 *Sea un proceso interno $X : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$. La variación cuadrática de X esta dada por el proceso $[X] : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$ definido como*

$$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} \Delta X(\omega, s)^2$$

Al aplicar esta definición a la caminata aleatoria de Anderson X definida en la sección 2.3, obtenemos

$$[\chi](\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} \Delta\chi(s)^2 = \sum_{s=0}^{t} \Delta t = t.$$

Veamos la siguiente identidad.

Lema 3.2.1 *Para todos los procesos hiperfinitos $X : \Omega \times T \longmapsto {}^*\mathbb{R}$, se tiene que*

$$[X](t) = X(t)^2 - X(0)^2 - 2\int_o^t X\mathrm{d}X.$$

Prueba.- Usando álgebra se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta[X](t_i) &= (X(t_{i+1}) - X(t_i)) \\
&= X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2X(t_i)(X(t_{i+1}) - X(t_i)) \\
&= X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} X\mathrm{d}X
\end{aligned}$$

y sumando sobre todas las $t_i < t$

$$\sum_{t_i<t} \Delta[X](t_i) = \sum_{t_i<t} \left[X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} X\mathrm{d}X \right]$$

de donde tenemos que por ser suma telescópica nos queda

$$[X](t) = X(t)^2 - X(0)^2 - 2\int_o^t X\mathrm{d}X.$$

■

Ahora bien, si aplicamos este resultado a una martingala M, se tiene que

$$[M](t) = M(t)^2 - M(0)^2 - 2\int_o^t M\mathrm{d}M. \tag{3.11}$$

y como $\int_o^t M\mathrm{d}M = \sum_{s=0}^t M(s)\Delta M(s)$ al tomar la esperanza obtenemos que

$$E\left(\int_o^t M\mathrm{d}M\right) = E\left(\sum_{s=0}^t M(s)\Delta M(s)\right) = \sum_{s=0}^t E\left(M(s)\Delta M(s)\right) = 0$$

por lo que se tiene que de

$$E([M](t)) = E(M(t)^2) - E(M(0)^2)$$

obtenemos la expresión

$$E(M(t)^2) = E(M_0^2 + [M](t)) \tag{3.12}$$

donde $M_0^2 = M(0)^2$. Esta ultima expresión nos permite ver la fuerte relación que existe entre las martingalas y los procesos que tienen variación cuadrática. Además, notemos que como $[M](t)$ es creciente entonces $E(M(t)^2)$ es también creciente.

Definición 3.2.5 *Una martingala hiperfinita M es llamada una λ^2-martingala si ${}^oE(M_t^2) < \infty$ para todo $t \in T$.*

Así, para ver si M es una λ^2-martingala es suficiente con probar que $E(M_1^2)$ es finita.

La ultima definición nos da una condición sobre el tamaño de M. A veces es conveniente detener el proceso antes de que este explote, es decir, podemos estudiar la martingala con sólo estudiar la λ^2-martingala al detenerla antes de que se haga muy grande.

Este ultimo comentario hace necesaria otra importante definición del análisis estocástico estándar: *tiempo de paro.*

Un *tiempo de paro* adaptado a la filtración $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}, P)$ es un mapeo $\tau : \Omega \to T$ tal que para todo $t \in T$, el conjunto $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\}$ esta en $\mathcal{A}_t$

Valdría hacer una buena observación, si τ es un tiempo de paro y M es una martingala, entonces el proceso parado M_τ definido como

$$M_\tau(\omega, t) = M(\omega, t \wedge \tau(\omega))$$

es también una martingala.

Se tiene ahora la definición de λ^2-martingala local.

Diremos que una martingala M es una λ^2-*martingala local* si existe una sucesión de tiempos de paro internos $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que cada M_{τ_n} es una λ^2-martingala y para casi todo $\omega \in \Omega$, $\tau_n(\omega) = 1$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. A la sucesión $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se le llama sucesión localizante de M.

En términos de la relación de equivalencia $\sim_t$ dada en la página 67, se tiene que si $\tau(\omega) = t$, entonces $\tau(\omega') = t$ para todo $\omega \sim_t \omega$.

Si fijamos $t \in T$, entonces M_t es finita casi dondequiera. Pero se presenta un problema ya que el conjunto de medida cero puede ser diferente cuando cambiamos de t, por lo que entonces es posible que no exista un ω tal que $M(\omega, t)$ sea finita para todo t. Y lo que se quiere saber es que $\max_{t\in T} M(\omega, t)$ es finito para casi todo ω. Para responder a esta pregunta vamos a probar un resultado muy fuerte, que es la desigualdad de Doob, antes vamos a ver mas propiedades de las trayectorias de M.

Definición 3.2.6 *Sea $f : T \to {}^*\mathbb{R}$ una función interna.*

- *Diremos que $r \in \mathbb{R}$ es el $S-$*limite por la derecha *de f en $t \in [0, 1]$ si para todo $\epsilon > 0$ estándar, existe un $\delta > 0$ estándar tal que si $s \in T$ y $t < {}^os < t + \delta$ entonces $|f(s) - r| < \epsilon$. Esto lo denotamos como $r = S - \lim_{s\downarrow t} f(s)$.*

- *Diremos que* $r \in \mathbb{R}$ *es el* $S-$limite por la izquiera *de* f *en* $t \in [0,1]$ *si para todo* $\epsilon > 0$ *estándar, existe un* $\delta > 0$ *estándar tal que si* $s \in T$ *y* $t - \delta < {}^{o}s < t$ *entonces* $|f(s) - r| < \epsilon$*. Esto lo denotamos como* $r = S - \lim_{s \uparrow t} f(s)$.

Recordemos que las álgebras $\mathcal{A}_t$ clasifican eventos que han ocurrido hasta el tiempo t. Así pues, generalicemos esto de la siguiente manera: Extendamos la relación de equivalencia $\sim_t$ dada en la página 67 como

$$\omega \sim_\tau \omega' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \sim_{\tau(\omega)} \omega' \tag{3.13}$$

donde τ es un tiempo de paro. Notemos que si $\omega \sim_{\tau(\omega)} \omega'$, entonces $\tau(\Omega) = \tau(\omega')$ y entonces $\sim_\tau$ si es una relación de equivalencia.

Definimos como $\mathcal{A}_\tau$ como el álgebra interna generada por las clases de equivalencia de $\sim_\tau$.

Asumiendo que tenemos una sucesión creciente de tiempos de paro internos $\{\tau_n\}_{n \leq \gamma}$, y que M_{τ_n} es una variable aleatoria $M_{\tau_n}(\omega) = M(\omega, \tau_n(\omega))$. No es difícil ver que el mapeo $(\omega, n) \longmapsto M_{\tau_m}(\omega)$ es una martingala con respecto a la filtración $(\Omega, \{A_{\tau_n}\}, P)$, y entonces por la expresión (3.12) de la página 69 se tiene que

$$E(M_{\tau_\gamma}^2) = E\left(M_0^2 + \sum_{n=0}^{\gamma-1}(M_{\tau_{n+1}} - M_{\tau_n})^2\right), \tag{3.14}$$

donde $\tau_0 \equiv 0$.

Tenemos el lema siguiente el cual nos ayudara a probar la desigualdad de Doob.

Lema 3.2.2 *Sea* $U, V : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$*, dos mapeos internos de* Ω *a* ${}^*\mathbb{R}$*. Asumamos que* $p, \alpha \in {}^*\mathbb{R}$ *son tales que* $p > \alpha$*,* $p > 1$*,* $\alpha > 0$ *y que para todos los* $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ *positivos*

$$\xi^\alpha P[U > \xi] \leq \int_{\{U > \xi\}} V^\alpha \mathrm{d}P \tag{3.15}$$

entonces

$$E(U^p) \leq \left(\frac{p}{p - \alpha}\right)^{\frac{p}{\alpha}} E(V^p). \tag{3.16}$$

Prueba.-
Sea μ la distribución de U, entonces se tiene que $\mu(A) = P[U \in A]$, entonces

$$\begin{aligned}
E(U^p) &= \int_0^\infty y^p \mathrm{d}\mu(y) \quad \text{reescribiendo a } y^p \text{ como una integral tenemos} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y p\xi^{p-1} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\mu(y) \quad \text{usando Fubini tenemos} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty p\xi^{p-1} \mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\xi \quad \text{pero esto no es mas que} \\
&= \int_0^\infty p\xi^{p-1} \mu[y > \xi] \mathrm{d}\xi \quad \text{o reescribiendo} \\
&= \int_0^\infty p\xi^{p-1} P[U > \xi] \mathrm{d}\xi \\
&\leq \int_0^\infty p\xi^{p-1-\alpha} \left(\int_{\{U>\xi\}} V^\alpha \mathrm{d}P \right) \mathrm{d}\xi \quad \text{aquí se usó (3.15),} \\
&= \int \left(\int_0^U p\xi^{p-1-\alpha} \mathrm{d}\xi \right) V^\alpha \mathrm{d}P \\
&= \int \frac{p}{p-\alpha} U^{p-\alpha} V^\alpha \mathrm{d}P \quad \text{y por la desigualdad de Hölder} \\
&\leq \frac{p}{p-\alpha} E(U^p)^{1-\frac{\alpha}{p}} E(V^p)^{\frac{\alpha}{p}}
\end{aligned}$$

de donde se tiene que al dividir por $E(U^p)^{1-\frac{\alpha}{p}}$ obtenemos

$$E[U^p]^{1-1+\frac{\alpha}{p}} \leq \frac{p}{p-\alpha} E(V^p)^{\frac{\alpha}{p}}$$

por lo que al elevar a la potencia $\frac{p}{\alpha}$ tenemos

$$E[U^p] \leq \left(\frac{p}{p-\alpha} \right)^{\frac{p}{\alpha}} E[V^p]$$

lo cual prueba el lema. ∎

Ahora enunciaremos y probaremos la desigualdad de Doob.

Teorema 3.2.1 La desigualdad de Doob
Si $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ *es una submartingala positiva entonces para todo* $p > 1$

y todo $t \in T$ se tiene que

$$\|\sup_{s\leq t} X_s\| \leq \frac{p}{p-1}\|X_t\|_p$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma de L^p.

Prueba.-
Usemos el lema anterior con $U = \sup_{s\leq t} X_s$, $V = X_t$ y $\alpha = 1$ se tendría el resultado de manera inmediata, por lo que sólo hay que probar que se satisface la condición 3.15.

Sea $\xi > 0$, y definamos un tiempo de paro τ como

$$\tau(\omega) = \text{ínf}\{s \in T : X(\omega, s) > \xi\} \wedge 2.$$

Como $t < 2$ entonces $\{\sup_{s\leq t} : X_s > \xi\} = \{\tau \leq t\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\xi P[\sup_{s\leq t} : X_s > \xi] &= \xi P[\tau \leq t] \\
&\leq \int_{\{\tau\leq t\}} X_\tau \mathrm{d}P \\
&= \int (X_{\tau\wedge t} - X_t)\mathrm{d}P + \int_{\{\tau\leq t\}} X_\tau \mathrm{d}P \\
&\text{pero } X \text{ es submartingala, entonces} \\
&\leq \int_{\{\tau\leq t\}} X_t \mathrm{d}P
\end{aligned}$$

Así, se tiene que se satisface la condición que faltaba, por lo que entonces se tiene la desigualdad de Doob.

■

Ahora presentamos la siguiente proposición acerca de la existencia de $S-$limites por la izquierda y la derecha.

Proposición 3.2.1 *Si M es una λ^2-martingala local, entonces casi todos los M tienen $S-$limites por la derecha y $S-$limites por la izquierda para cada $t \in [0,1]$*

Prueba.- Probemos esta proposición por contradicción. Sin perdida de generalidad asumamos que M es una λ^2-martingala.
Como sabemos que M es finita casi dondequiera, entonces la conclusión de la proposición puede fallar si M "oscila"mucho, es decir, si el conjunto

$$\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} \{\omega|\text{las trayectorias } M(\omega,\cdot) \text{ cruzan [a,b] un numero infinito de veces.}$$

tiene probabilidad positiva. Y ya que sólo existen una cantidad numerable de parejas racionales, esto implica que podemos encontrar $a, b \in \mathbb{Q}$, con $a < b$, tales que M cruza $[a, b]$ una cantidad infinita de veces con probabilidad positiva. Ahora, definamos una sucesión de tiempos de paro $\{\tau_n\}$ de la manera siguiente, sea $\tau_0 = 0$ y para cualquier k impar como

$$\tau_k(\omega) = \text{ínf}\{t > \tau_{k-1}(\omega)|X(\omega,t) \leq a\} \wedge 1,$$

y para k par como

$$\tau_k(\omega) = \text{ínf}\{t > \tau_{k-1}(\omega)|X(\omega,t) \geq b\} \wedge 1.$$

Entonces la sucesión $\{\tau_n\}$ es estrictamente creciente hasta que crezca y sólo sea una sucesión de unos, es decir, si γ es el numero de elementos de la línea de tiempo, entonces τ_γ es idénticamente 1.

Ahora usando la expresión (3.14) de la página 71 tenemos que

$$E(M(1)^2) = E(M_{\tau_\gamma}^2) = E\left(M_0^2 + \sum_{n=0}^{\gamma-1}(M_{\tau_{n+1}} - M_{\tau_n})^2\right)$$

Ahora por hipótesis el lado izquierdo de la ecuación anterior es finita, pero la suma del lado derecho debe ser infinito sobre un conjunto de medida positiva. Pero esto es una contradicción, por lo que el resultado se sigue. ■

Damos en seguida una definición que relaciona los procesos hiperfinitos con sólo un $S-$limite lateral con procesos estándar.

Definición 3.2.7 *Sea $X : \Omega\times T \to {}^*\mathbb{R}$ un proceso hiperfinito con $S-$limites por la derecha e izquierda casi dondequiera. El proceso estándar ${}^oX^+ : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definido como*

$${}^oX^+(\omega,t) = S - \lim_{s\downarrow t} X(\omega,s)$$

es llamado la parte derecha estándar de X. *Mientras que al proceso estándar* ${}^oX^- : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *definido como*

$$ {}^oX^-(\omega, t) = S - \lim_{s \uparrow t} X(\omega, s)$$

es llamado la parte izquierda estándar de X.

3.3. Integración de Martingalas

Se ha visto que si χ es la caminata aleatoria de Anderson y si λ es la medida de conteo normalizada sobre T, Entonces la integral $\int X d\chi$ se comporta bien si X es no anticipativa y es $S-$cuadrado integrable con respecto a $P \times \lambda$. Ahora, si M es una λ^2-martingala, tomemos a ν_M como una medida interna sobre $\Omega \times T$ definida como

$$\nu_M\{(\omega, t)\} = \Delta M(\omega, t)^2 P(\{\omega\}).$$

Entonces podemos observar que $\nu_M(\Omega \times T) = E([M](1))$ es finita y que $\nu_\chi = P \times \lambda$ para la caminata de Anderson χ.

Definamos dos tipos de integrandos como

Definición 3.3.1 *Sea M una λ^2-martingala. Diremos que un proceso hiperfinito X pertenece a la clase $SL^2(M)$ si es no anticipativo y es $S-$ cuadrado integrable con respecto a ν_M.*
Si M es una L^2-martingala local, entonces X pertenece a $SL(M)$ si es no anticipativo y esta en $SL^2(M_{\tau_n})$ para toda τ_n en una sucesión localizante para M.

En esta clase se define ya no con respecto a la medida producto $P \times \lambda$ sino a la medida construida a partir de una martingala y la razón de usar esta se muestra en la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.1 *Si M es una λ^2-martingala y $X \in SL^2(M)$ entonces $\int X dM$ es una λ^2-martingala. Asimismo, si M es una λ^2-martingala local y $X \in SL(M)$ entonces $\int X dM$ es una λ^2-martingala local.*

Prueba.-

Probemos la primera parte de la proposición. Asumamos que M es una λ^2-martingala y que $X \in SL^2(M)$. Sabemos que $\int X\mathrm{d}M$ es una martingala, entonces apliquemos la expresión (3.12) a esta martingala, con lo que obtenemos

$$E\left(\left(\int_0^1 X\mathrm{d}M\right)^2\right) = E\left(\left[\int_0^1 X\mathrm{d}M\right]\right) = E\left(\sum_0^1 X^2\Delta M^2\right) = \int X^2\mathrm{d}\nu_M$$

que es finita por hipótesis.
La segunda parte es una consecuencia de lo anterior. ■

Esta proposición nos da cierta certidumbre acerca de que la construcción que hemos hecho de la integración estocástica es razonable.

En virtud de la ecuación (3.11) de la página 69, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.2 *Si M es una martingala entonces*

$$E(M_t^2) = E(M_0^2) + E([M]_t)$$

Prueba.-
Sabemos que el proceso $Y = \int_0^t M\mathrm{d}M$ es una martingala por la proposición anterior pues es claro que $M \in SL^2(M)$. Entonces $E(Y_t) = E(Y_0) = 0$, y

$$\begin{aligned} E(M_t^2) &= E(M_0^2) + 2E\left(\int_0^t M_s\mathrm{d}M_s\right) + E([M]_t) \\ &= E(M_0^2) + E([M]_t) \end{aligned}$$

lo cual prueba la proposición. ■

Ahora, presentamos un resultado que se usará en el capítulo 5, el cual nos remite a la definición de λ^2-martingala dada antes.

Proposición 3.3.3 *Lo siguiente es equivalente:*

(i) *M es una λ^2-martingala.*

(ii) *$E(M_0^2) + E([M]_t)$ es finito para toda t finita.*

(iii) $E(\max_{s\leq t} M_s^2)$ *es finito para toda t finita.*

Prueba.-
veamos que (i) y (ii) son equivalentes por la proposición 3.3.2. Y al usar la desigualdad de Doob con $X = |M|$ y $p = 2$ tenemos que

$$E(\max_{s\leq t} M_s^2) \leq 4E(M_t^2) < \infty$$

por lo cual (i) es equivalente a (iii) ■

Diremos que un proceso estocástico es $S-$continuo si casi todas sus trayectorias lo son. Así, vamos a ver una caracterización de la $S-$continuidad de martingalas, pero antes necesitamos dos lemas.

Lema 3.3.1 *Existen constantes $C, K \in \mathbb{R}_+$ tal que para todas las martingalas hiperfinitas $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ con $M(0) = 0$ se tiene*

$$C\,E(\max_{s\leq t} M(s)^4) \leq E([M](t)^2) \leq K\,E(\max_{s\leq t} M(s)^4) \tag{3.17}$$

Prueba.- Usando la desigualdad de Doob y manipulación algebraica obtenemos

$$\begin{aligned}
E(\max_{s\leq t} M(s)^4) &\leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 E(M(t)^4) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\sum_{s=0}^{t}\{(M(s)+\Delta M(s))^4 - M(s)^4\}\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\sum_{s=0}^{t}\{4M(s)^3\Delta M(s) + 6M(s)^2\Delta M(s)^2\}\right) \\
&\quad + E\left(\sum_{s=0}^{t}\{4M(s)\Delta M(s)^3 + \Delta M(s)^4\}\right),
\end{aligned}$$

ahora usando que $E(M(s)^3\Delta M(s)) = 0$ y que $|\Delta M(s)| \leq 2\max_{r\leq t}|M(r)|$

tenemos que

$$\begin{aligned}
E(\max_{s\le t} M(s)^4) &\le \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\Big(6\max_{s\le t} M(s)^2[M](t) + 8\max_{s\le t} M(s)^2[M](t) \\
&\quad +4\max_{s\le t} M(s)^2[M](t)\Big) \\
&= 18\left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\max_{s\le t} M(s)^2[M](t)\right) \quad \text{usando Hölder} \\
&\le 18\left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left(\max_{s\le t} M(s)^4\right)^{1/2} E\left([M](t)^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

y dividiendo entre $E(\max_{s\le t} M(s)^4)^{1/2}$ obtenemos

$$E(\max_{s\le t} M(s)^4)^{1/2} \le 18\left(\frac{4}{3}\right)^4 E([M](t)^2)^{1/2}$$

de donde obtenemos la primera parte de (3.17).
Para la segunda desigualdad usemos el lema 3.2.1 de la página 68 y la desigualdad de Hölder y veamos que

$$\begin{aligned}
E([M](t)^2) &= E\left(\left(M_t^2 - 2\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2\right) \\
&= E\left(M_t^4 - 4M_t^2\int_0^t M\mathrm{d}M + 4\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2\right)
\end{aligned}$$

y al reemplazar M_t^4 por $\max_{s\le t} M_s^4$ y por Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
&\le E(\max_{s\le t} M_s^4) + 4E(\max_{s\le t} M_s^4)^{1/2} E\left(\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2\right)^{1/2} \\
&\quad +4E\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2,
\end{aligned}$$

además, ya que $\int M \mathrm{d}M$ es una martingala se tiene

$$\begin{aligned}
E\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2 &= E\left(\left[\int_0^t M\mathrm{d}M\right](t)\right) \\
&= E\left(\sum_0^t M^2 \Delta M^2\right) \\
&\leq E\left(\max_{s\leq t} M(s)^2 [M](t)\right) \\
&\quad \text{y por Hölder obtenemos} \\
&\leq E(\max_{s\leq t} M(s)^4)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

por lo que volviendo a la expresión de antes tenemos que

$$\begin{aligned}
E([M](t)^2) &\leq E(\max_{s\leq t} M_s^4) + 4E(\max_{s\leq t} M_s^4)^{1/2} E\left(\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2\right)^{1/2} \\
&\quad +4E\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2 \\
&\leq E(\max_{s\leq t} M_s^4) + 4E(\max_{s\leq t} M_s^4)^{1/2} E\left(\left(\int_0^t M\mathrm{d}M\right)^2\right)^{1/2} \\
&\leq +4E(\max_{s\leq t} M(s)^4)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2}
\end{aligned}$$

Ahora en la primera parte del lema ya hemos probado que $E(\max_{s\leq t} M_s^4) \leq \frac{1}{C} E([M](t)^2)$ de ahí que podemos escribir

$$E(\max_{s\leq t} M_s^4)^{1/2} \leq \frac{1}{C^{1/2}} E([M](t)^2)^{1/2}$$

por lo que al usarlo en la ultima desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} E([M](t)^2) &\leq \frac{1}{C^{1/2}} E\left(\max_{s\leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} \\ &+ \frac{4}{C^{1/2}} E\left(\max_{s\leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} \\ &+ 4E\left(\max_{s\leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{C^{1/2}} + \frac{4}{C^{1/2}} + 4\right) E\left(\max_{s\leq t} M_s^4\right)^{1/2} E([M](t)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

y al dividir por $E([M](t)^2)^{1/2}$ se obtiene la otra desigualdad, con lo cual se prueba el lema. ■

Si asumimos que buscamos detener un proceso antes de que este explote, entonces una manera natural de intentarlo es usando un tiempo de paro como

$$\tau_K = \min\{t \in T : |M(t)| \geq K\}$$

para todo $K \in \mathbb{R}_+$, pero ya que el ultimo incremento después de τ_K puede ser muy grande podríamos detener la martingala demasiado tarde. Digamos que M tiene incrementos infinitesimales si $\Delta M(\omega, t) \approx 0$ para todo ω y t, si este es el caso claramente se tiene que ${}^o|M_{\tau_K}| \leq K$. por lo que nos gustaría que las martingalas con las que trabajamos tuvieran esta propiedad, o al menos si ellas no las tienen que si existiera otro proceso casi idéntico a M que si la tuviera, así el siguiente lema es sobre este asunto.

Lema 3.3.2 *Sea M una λ^2-martingala tal que el conjunto*

$$\{\omega \in \Omega : \exists t \in T \ \textit{tal que} \ {}^o\Delta M(\omega, t) \neq 0\}$$

tiene Loeb medida cero. Entonces existe una λ^2-martingala $\tilde{M}$ con incrementos infinitesimales tal que sobre un conjunto de Loeb medida 1

$$\tilde{M}(t) \approx M(t) \quad y \quad [\tilde{M}](t) \approx [M](t)$$

Prueba.-

Definamos $\Omega_n = \{\omega : \exists\, t \text{ tal que } |\Delta M(\omega, t)| \geq (1/n)\}$ para cada $n \in {}^*\mathbb{N}$. Como el conjunto interno $A = \{n \in {}^*\mathbb{N} : P(\Omega_n) \leq (1/n)\}$ contiene a $\mathbb{N}$, este debe tener un elemento infinito η. Para cada $\omega \in \Omega_n$, sea t_ω el primer t tal que $|\Delta M(\omega,t) \geq 1/\eta$ y tomemos $t_\omega = 1$ para el caso en que $\omega \notin \Omega_\eta$.

Si $\sim_t$ son las relaciones de equivalencia dadas en (3.9), sea $[\omega]_t$ las clases de particiones bajo $\sim_t$. Introduzcamos

$$[\omega]_t^+ = \{\tilde{\omega} \in [\omega]_t \ : \ t_{\tilde{\omega}} \leq t\},$$

y notemos que si $t > t_{\tilde{\omega}}$ para alguna $\tilde{\omega} \in [\omega]_t$ entonces $[\omega]_t^+ = [\omega]_t$.

Primero modificaremos la martingala M mediante cortar los incrementos que son mas grandes que $1/\eta$, esto lo haremos definiendo un proceso interno K como $K(0) = M(0)$ y

$$\Delta K(\omega,t) = \begin{cases} \Delta M(\omega,t) & \text{si} \quad t < t_\omega \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t_\omega \end{cases}$$

ahora, este proceso no necesariamente es una martingala, pero si le sumamos el proceso definido como $N(0) = 0$ y

$$\Delta N(\omega,t)P([\omega]_t) = \int_{[\omega]_t^+} \Delta M(t)\mathrm{d}P,$$

entonces el proceso $\bar{M} = K + N$ si es una martingala.
Ahora veamos que la suma $\sum_0^1 |\Delta N(\omega,t)|$ es un infinitesimal casi dondequiera. Sea el conjunto $\Sigma \subset \Omega \times \Omega \times T$ que consiste de la tripleta $(\omega, \tilde{\omega}, t)$ tal que $t = t_{\tilde{\omega}} < 1$ y $\omega \sim_t \omega$, además tenemos que,

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_0^1 |\Delta N(\omega,t)|\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t=0}^1 \left| \sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t^+} \frac{\Delta M(\tilde{\omega},t)P(\{\tilde{\omega}\})}{P([\omega]_t)} \right| P(\{\omega\}) \\
&\leq \sum_{(\omega,\tilde{\omega},t)\in\Sigma} \frac{|\Delta M(\tilde{\omega},t)|P(\{\tilde{\omega}\})}{P([\omega]_t)} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\tilde{\omega}\in\Omega_n}\sum_{\omega\in[\omega]_{t_{\tilde{\omega}}}} \frac{|\Delta M(\tilde{\omega},t_{\tilde{\omega}})|P(\{\tilde{\omega}\})}{P([\omega]_{t_{\tilde{\omega}}})} P(\{\omega\}) \\
&= \int_{\Omega_\eta} |\Delta M(\tilde{\omega},t_{\tilde{\omega}})|\mathrm{d}P \leq 2\int_{\Omega_\eta} \max_{s\leq 1} |M(s)|\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

y como $P(\omega_\eta) = 0$ y $\max_{s\leq 1} |M(s)|$ es $S-$integrable entonces

$$E\left(\sum_0^1 |\Delta N(\omega, t)|\right) \approx 0$$

por lo cual se tiene la afirmación.

Ahora, sobre el subconjunto $\Omega \backslash \Omega_\eta$ se tiene que $\sum |\Delta N(s)|$ es un infinitesimal por lo cual $\bar{M}(t) \approx M(t)$ para todo t, pero se tiene aun mas, ya que

$$[\bar{M}]_t - [M]_t = \sum_{s=0}^{t} (2M(s) + \Delta N(s))\Delta N(s),$$

el cual es un infinitesimal para todo t y casi todo ω.

Ya que $\bar{M}$ es una λ^2-martingala entonces este es un buen candidato para $\tilde{M}$. Sin embargo, se presenta un pequeño inconveniente: $\bar{M}$ necesita no tener incrementos infinitesimales ya que ΔN puede no ser infinitesimal. No obstante, la solución es sencilla. Sea γ el elemento infinito del conjunto

$$\left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \ : \ P\left\{ \omega \ : \ \sum_{s=0}^{1} |\Delta N(\omega, s)| > \frac{1}{n} \right\} < \frac{1}{n} \right\},$$

y definamos el tiempo de paro $\tau : \Omega \to T$ como

$$\tau(\omega) = \min\left\{ t \in T \ : \ \Delta N(\omega, t) > \frac{1}{\gamma} \right\} \wedge 1.$$

Este tiempo de paro esta bien definido porque $\Delta N(\omega, t)$ sólo depende de las clases de equivalencias $[\omega]_t$. usando que $\tau = 1$ casi dondequiera es trivial verificar que el proceso parado $\tilde{M} = \bar{M}_\tau$ satisface el lema. ∎

Ahora enunciaremos y probaremos el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.3.1 *Una λ^2-martingala local es $S-$continua si y sólo si su variación cuadrática lo es.*

Prueba.- Sin perdida de generalidad podemos restringirnos al caso en que M es una λ^2-martingala. Entonces por el lema 3.3.2 es suficiente con considerar el subcaso en que M tiene incrementos infinitesimales, y usando el tiempo de paro definido como sigue

$$\tau_n(\omega) = \text{mín}\{\ t \in T \ :\ |M(\omega,t)| \geq n \text{ o } [M](\omega,t) \geq n\}$$

se tiene que podemos asumir que M y $[M]$ son $S-$acotados.

$\Longleftarrow)$
Asumamos que $[M]$ es $S-$continuo. Definamos para cada pareja $(m,n) \in {}^*\mathbb{N}^2$ un subconjunto $A_{m,n}$ de Ω como

$$A_{m,n} = \left\{ \omega \in \Omega \ :\ \exists i \in {}^*\mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{\frac{\bar{i}}{n} \leq s \leq \frac{\overline{i+1}}{n}} \left(M(s) - M\left(\frac{\bar{i}}{n}\right)\right)^4 \geq \frac{1}{m} \right\}$$

donde $\bar{i}$, $\overline{i+1}$ denota el elemento mas chico en T que es mayor o igual a i o $i+1$ respectivamente.

Para probar que M es $S-$ continuo, debemos mostrar que $A = \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\in\mathbb{N}}$ $A_{m,n}$ tiene medida, lo cual es equivalente a probar que $P(A_{m,\gamma} \approx 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, y $\gamma \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, o sea

$$0 \ \leq \ P(A_{m,\gamma}) \leq \sum_{i<\gamma} P \left\{ \omega \ :\ \sup_{\frac{\bar{i}}{\gamma} \leq s \leq \frac{\overline{i+1}}{\gamma}} \left(M(s) - M\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^4 \geq \frac{1}{m} \right\}$$

Al usar el teorema de Chebycheb se tiene

$$\leq \ m \sum_{i<\gamma} E \left(\sup_{\frac{\bar{i}}{\gamma} \leq s \leq \frac{\overline{i+1}}{\gamma}} \left(M(s) - M\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^4 \right)$$

Al usar el lema 3.3.1 a la martingala $M(s) - M(\bar{i}/\gamma)$ se tiene que

$$\leq \ \frac{m}{C} \sum_{i<\gamma} E \left([M]\left(\frac{\overline{i+1}}{\gamma}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2,$$

y al tener esta ultima desigualdad se tiene que como la variación cuadrática es $S-$continua y además finita, la ultima esperanza es un infinitesimal, de donde se tiene que $P(A_{m,\gamma}$ también lo es, entonces M es $S-$continua.

$\Longrightarrow)$
Asumamos que M es $S-$continua. Definamos el subconjunto de la misma

manera que arriba,

$$B_{m,n} = \left\{ \omega \in \Omega \ : \ \exists i \in {}^*\mathbb{N} \text{ tal que } \left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{n}}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{n}\right)\right)^2 \geq \frac{1}{m} \right\}$$

y de igual manera que se hizo arriba, es suficiente con probar que $P(B_{m,\gamma} \approx 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

Para este fin, tomemos $\gamma \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ fijo, y sea N la restricción de M sobre la línea de tiempo $S = \{(\bar{i}/\gamma \ : \ i \leq \gamma)\}$. Ahora, para poder detener M antes de $[N]$ se haga muy grande, asumiremos que $[N]$ es $S-$acotada, esto haciendo uso del hecho que M tiene incrementos infinitesimales. Usando el lema 3.3.1 y la desigualdad de Doob, se tiene

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ P(B_{m,\gamma}) \leq \sum_{i<\gamma} P\left\{ \omega \ : \ \left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2 > \frac{1}{m} \right\} \\
&\leq \ m \sum_{i<\gamma} E\left(\left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2 \right) \\
&\leq \ mK \sum_{i<\gamma} E\left(\max_{\frac{\bar{i}}{\gamma} \leq s \leq \overline{\frac{i+1}{\gamma}}} \left(M(s) - M\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^4 \right) \\
&\leq \ mK \left(\frac{4}{3}\right)^4 \sum_{i<\gamma} E\left(\left(M\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - M\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^4 \right) \\
&\leq \ mK \left(\frac{4}{3}\right)^4 E\left\{ \max_{i<\gamma} \left(\left(M\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - M\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2 \right) [N](1) \right\}
\end{aligned}$$

pero $[N]$ es $S-$acotada y M es $S-$continua entonces la ultima esperanza es un infinitesimal, con lo cual $P(B_{m,\gamma})$ es un infinitesimal también, lo cual completa el teorema. ■

Como una aplicación de este teorema se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2 *Si M es una λ^2-martingala local $S-$continua y $X \in SL(M)$ entonces $\int X \mathrm{d}M$ es tambien $S-$continua.*

Prueba.- Para mostrar este resultado otra vez nos basta con sólo probarlo cuando M es una λ^2 martingala y $X \in SL(M)$. Asumamos que X es acotada por un real n. Como M es $S-$continua entonces por el teorema 3.3.1 sabemos que la variación cuadrática $[M]$ es $S-$continua y como además

$$\begin{aligned}\left[\int X\mathrm{d}M\right](t)-\left[\int X\mathrm{d}M\right](s) &= \sum_{s}^{t} X^2\Delta M^2 \leq n^2\sum_{s}^{t}\Delta M^2\\ &= n^2\left([M](t)-[M](s)\right),\end{aligned}$$

esto implica que $[\int X\mathrm{d}M]$ es $S-$continua. Usando otra vez el teorema 3.3.1 tenemos la $S-$continuidad de $\int X\mathrm{d}M$.

Para extenderlo a cualquier $X \in SL^2(M)$, hagámoslo como se hace en teoría de la medida. Como X es $S-$cuadrado integrable, entonces existe una sucesión $\{X_n\}$ de funciones $S-$acotadas tales que

$$^o\int (X-X_n)^2\mathrm{d}\nu_M \quad \to 0.$$

Y usando la desigualdad de Doob tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\left(^o\max_{s\leq 1}\left(\int_0^s X\mathrm{d}M-\int_0^s X_n\mathrm{d}M\right)^2\right)\\ &\leq 4^o\left(\left(\int_0^1 (X-X_n)\mathrm{d}M\right)^2\right)\\ &= 4\,^o\!\!\int (X-X_n)^2\mathrm{d}\nu_M \quad \to \ 0\end{aligned}$$

Ahora sabemos, de la teoría de la medida estándar que existe una subsucesión

$$\left\{^o\max_{s\leq 1}\left(\int_0^s X\mathrm{d}M-\int_0^s X_{n_k}\mathrm{d}M\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

que converge a cero casi dondequiera. Finalmente, como cada $\int X_{n_k}\mathrm{d}M$ es $S-$continua, entonces el limite uniforme $\int X\mathrm{d}M$ también es $S-$continua, con lo que se demuestra el teorema. ■

En la ultima demostración, es de notarse que la $S-$integrabilidad de X^2 juega un papel importante en esta, ya que no es suficiente asumir que $\int X^2\mathrm{d}\nu_M$ es finita porque necesitamos aproximarnos a X mediante funciones

$S-$acotadas X_n. Mas aun, se puede dar un ejemplo el cual muestre que la conclusión del teorema no se cumple bajo esta condición mas débil.

Como ocurre en muchos casos, nuestra aplicación usará procesos continuos, de tal manera que los dos teoremas anteriores se convertirán en herramientas muy usadas.

3.4. Teoremas de Lifting.

En sección se darán ciertos teoremas de lifting, que en algunas ocasiones no son mas que la extensión de los dados en la sección 2.2, y que nos dan una aproximación interna de objetos externos, y que por tanto, son una herramienta técnica importante en el campo del análisis estocástico no estándar. Mas aun, los teoremas de lifting dan una caracterización de ciertas clases de procesos.

Recordando el teorema 2.2.1 de la sección 2.2, sabemos que una función f de un espacio de probabilidad hiperfinito Ω a $\mathbb{R}$ es Loeb medible si y sólo si tiene un lifting $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$, ademas el teorema dice que una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible si y sólo si tiene un lifting $F : T \to {}^*\mathbb{R}$.

En el caso de un proceso estocástico, sabemos que es una función de dos variables de la forma

$$x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

lo cual hace necesario combinar las dos definiciones de lifting dadas arriba para poder asegurar la existencia de algún proceso hiperfinito que satisfaga ciertas condiciones y que sea de la forma

$$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}.$$

Recordemos que una filtración estocástica es denotada por $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, Q)$ donde $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}$ es una sucesión creciente de familias de $\sigma-$álgebras sobre Ω y Q es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}_1$. Sea $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ una filtración interna, tal como se definió en la página 67, la *filtración estocástica generada* por $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ consiste de Ω, la medida de Loeb $L(P)$ y las $\sigma-$álgebras

$$\mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup_{s\approx t} L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}\right) \tag{3.18}$$

donde $\mathcal{N}$ consiste de los conjuntos nulos en $L(\mathcal{A})$.

Una filtración estocástica $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, Q)$ satisface las condiciones usuales si cada $\mathcal{B}_t$ contiene todos los conjuntos nulos de $\mathcal{B}_1$, y que para toda $t \in [0,1)$

$$\mathcal{B}_t = \bigcap_{t<s} \mathcal{B}_s \tag{3.19}$$

El siguiente lema garantiza que todas las filtraciones generadas internamente satisfacen estas condiciones.

Lema 3.4.1 *Sea* $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, L(P))$ *una filtración estocástica generada por* $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$. *Entonces para toda* $t \in [0,1]$

$$\mathcal{B}_t = \bigcup_{s\approx t} \sigma\left(L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}\right) \tag{3.20}$$

Prueba.-
Tenemos que

$$\bigcup_{s\approx t} \sigma\left(L(\mathcal{A}) \cup \mathcal{N}\right) \subset \mathcal{B}_t \subset \sigma\left(\bigcup_{s\approx t} L(\mathcal{A}) \cup \mathcal{N}\right)$$

por lo que sólo tenemos que probar que

$$\bigcup_{s\approx t} \sigma\left(L(\mathcal{A}) \cup \mathcal{N}\right)$$

es una $\sigma-$álgebra.
Para probar esto último, tomemos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos de $\cup_{s\approx t}\sigma(L(\mathcal{A}) \cup \mathcal{N})$, y asumamos que $A_n \in \sigma(L(\mathcal{A}_{s_n}) \cup \mathcal{N})$.
Ahora, la familia de conjuntos $S_n = [s_n, s_n + 1/n] \cap T$ es numerable y tiene la propiedad de la intersección finita, entonces por el teorema de la saturación se tiene que $\cap_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \emptyset$. De esta manera, si $\tilde{s} \in \cap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ entonces $\tilde{s} \approx t$ y entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma\left(L(\mathcal{A}_{\tilde{s}}) \cup \mathcal{N}\right) \subset \sigma\left(\bigcup_{s\approx t} L(\mathcal{A}_s) \cup \mathcal{N}\right)$$

lo cual muestra que nuestra familia es cerrada bajo uniones numerables, y como además es claro que tiene las otras propiedades de una $\sigma-$álgebra, entonces se tiene la afirmación del lema. ■

Del lema anterior y de la expresión (3.18) se tiene la siguiente afirmación.

Corolario 3.4.1 *Una filtración estocástica generada por una filtración interna satisface las condiciones usuales.*

■

Diremos que un *rectángulo medible* es un subconjunto de $\Omega \times [0,1]$ de la forma $B \times [s,t]$ donde B es Loeb medible. Además, un subconjunto es *medible* si este esta en la $\sigma-$álgebra generada por los rectángulos medibles.

Definición 3.4.1 *Sea* $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, Q)$ *una filtración estocástica.*

- *Un conjunto* $A \subset \Omega \times [0,1]$ *se dice que es* adaptado *con respecto a* $\{\mathcal{B}_t\}$ *si* A *es medible y cada sección* $A_t = \{\omega \ : \ (\omega,t) \in A\}$ *es* $\mathcal{B}_t-$*medible.*
- *Un* rectángulo predecible *con respecto a* $\{\mathcal{B}_t\}$ *es un conjunto de la forma* $B_s \times (s,t]$ *donde* $B_s \in \mathcal{B}_s$, *o* $B_0 \times [0,t]$ *donde* $B_0 \in \mathcal{B}_0$.
- *Un conjunto se dice que es* predecible *si este esta en la* $\sigma-$*álgebra generada por los rectángulos predecibles.*

Con esta definición es sencillo dar otra acerca de procesos adaptados: Un proceso $X : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es *adaptado* si este es medible con respecto a la $\sigma-$álgebra de conjuntos adaptados.

Sea μ una medida sobre $\Omega \times [0,1]$ definida sobre una extensión de conjuntos medibles. Un conjunto A es *adaptado casi seguramente* con respecto a μ si existe un conjunto adaptado B tal que $\mu(A\Delta B) = 0$, además diremos que un proceso es *adaptado casi seguramente* si este es igual casi dondequiera a un proceso adaptado. De igual manera usamos estas definiciones para procesos y conjuntos predecibles y medibles.

Estaremos interesados principalmente en el caso en que μ es definido a partir de una medida interna ν sobre $\Omega \times T$ como

$$\mu = L(\nu) \circ (id \times st)^{-1}$$

donde con id denotamos a la función identidad sobre Ω.

Aquí lo que se busca es el si hacemos $\nu = \nu_M$ donde ν_M es la medida derivada de una martingala M como en (3.3.1). De manera particular, si

$\nu = P \times \lambda$, donde λ es la medida uniforme sobre T, i.e., $\lambda = t_{i+1} - t_i$, entonces μ es la completación de la medida producto $L(P)$ con la medida de Lebesgue y este caso ya se discutió en la sección 3.1.

Notación: Escribiremos

$$St = id \times st : \Omega \times T \to \Omega \times [0,1]. \tag{3.21}$$

Además, de ahora en adelante $(\omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$ será una filtración interna que genera a $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, L(P))$, ν una medida interna definida sobre todos los subconjuntos internos de $\Omega \times T$ y $\mu = L(\nu) \circ St^{-1}$, también asumiremos que $\nu(\Omega \times T) < \infty$.

La medida ν se dice que es *absolutamente continua* con respecto a P si $L(P)(C) = 0$ implica que $L(\nu)(C) \times T) = 0$ y que $\mu(\Omega \times \{0\}) = 0$.

Veamos el siguiente resultado.

Lema 3.4.2 *Sea ν absolutamente continua con respecto a P. Si $B \subset \Omega \times [0,1]$ es predecible casi seguramente, entonces existe un conjunto no anticipativo $A \subset \Omega \times T$ tal que $L(\nu)(A \Delta St^{-1}(B)) = 0$.*

Prueba.-
Consideremos el caso en que B es un rectángulo predecible. Asumamos primero que B es de la forma $B_s \times (s,t]$ por el lema 3.4.1 podemos encontrar un $\tilde{s} \in T$ tal que $\tilde{s} \approx s$ y un $A_{\tilde{s}} \in \mathcal{A}_s$ tal que $L(P)(B_s \Delta A_{\tilde{s}}) = 0$. Ahora bien, como ν es absolutamente continua con respecto a P entonces tenemos

$$\mu(B_s \times (s,t]) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} L(\nu)\left(A_{\tilde{s}} \times \left(s + \frac{1}{n}, t + \frac{1}{m}\right]\right)$$

entonces podemos encontrar $m, n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tales que $s + 1/n \geq \tilde{s}$ y

$$\mu(B_s \times (s,t]) = {}^o\nu\left(A_{\tilde{s}} \times \left(s + \frac{1}{n}, t + \frac{1}{m}\right]\right)$$

por lo que podemos tomar al conjunto A como

$$A = A_{\tilde{s}} \times \left(s + \frac{1}{n}, t + \frac{1}{m}\right]$$

■

En el otro sentido tenemos el siguiente lema.

Lema 3.4.3 *Sea $B \subset \Omega \times [0,1]$ y asumamos que existe un conjunto no anticipativo $A \subset \Omega \times T$ tal que $L(\nu)(A \Delta St^{-1}(B)) = 0$. Entonces B es adaptado casi seguramente.*

Prueba.- Sea ν_A la medida interna dada por

$$\nu_A(C) = \nu(A \cap C),$$

Tomemos $\mu_A = L(\nu_A) \circ St^{-1}$. Sea g la derivada de Radon-Nikodym dada por

$$g = \frac{\partial \mu_A}{\partial \mu},$$

y definamos el conjunto C como

$$C = \{(\omega, t) \ : \ g(\omega, t) = 1\}.$$

Como $L(\nu)(A \Delta St^{-1}(B)) = 0$, haciendo

$$g(\omega, t) = \begin{cases} 1 & \text{c.d.} \quad \text{sobre} \quad B \\ 0 & \text{c.d.} \quad \text{fuera de} \quad B \end{cases}$$

entonces $\mu(B \Delta C) = 0$ y sólo hay que encontrar una versión adaptada de g. Definamos funciones internas $F, F_A : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ de la forma

$$F(\omega, t) = \sum \{\nu(\omega, s) \ : \ s \leq t\}, \quad F_A(\omega, t) = \sum \{\nu_A(\omega, s) \ : \ s \leq t\}$$

Y las partes estándar derechas $f = {}^oF^+$ y $f_A {}^oF_A^+$ son medibles porque ellos son procesos continuos por la derecha y crecientes, además de que también son $\mathcal{B}_t-$adaptados pero

$$g(\omega, t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f_A(\omega, t) - f_A(\omega, t-h)}{f(\omega, t) - f(\omega, t-h)}$$

así, hemos encontrado una versión adaptada de g y el lema esta probado. ■

La siguiente definición generaliza la dada en 3.1.2,

Definición 3.4.2 *Sea $x : \Omega \times [0,1] \to \infty$ un proceso estocástico. Un* lifting *de x con respecto a ν es un proceso interno $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ tal que*

$${}^oX(\omega, t) = x(\omega, {}^ot) \quad L(\nu) - \textit{casi dondequiera}$$

claro que esta definición de lifting generaliza de tal manera que ahora el proceso puede tomar valores sobre cualquier espacio de Hausdorff.

Usando el teorema 2.2.1, los resultados dados arriba se pueden reescribir de la siguiente manera

Proposición 3.4.1 *Asumamos que ν es absolutamente continuo con respecto a P, y sea $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un proceso estocástico.*

(i) *Si x es predecible casi seguramente, entonces x tiene un lifting no anticipativo.*

(ii) *Si x tiene un lifting no anticipativo, entonces x es adaptado casi seguramente.*

(iii) *x es medible casi seguramente si y sólo si este tiene un lifting.*

Lema 3.4.4 *Sea m la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$ y P la medida de probabilidad sobre Ω. Tomemos $\mu = P \times m$. Un proceso $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es predecible casi seguramente con respecto a μ si y sólo si este es adaptado casi seguramente.*

Prueba.- Para probar esto es suficiente con mostrar que si x es adaptado y acotado, entonces x es predecible casi seguramente. Para esto, primero que nada observemos que si un proceso es adaptado y continuo entonces este es predecible casi seguramente. Entonces tomando

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} -\frac{6}{\epsilon^3}x(x-\epsilon) & \text{para} \qquad 0 < x < \epsilon \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

como una aproximación a la función delta, entonces vemos que

$$x_\epsilon(t) = (x * \delta_\epsilon)(t) = \int_0^1 x(t-s)\delta_\epsilon(s)\mathrm{d}s$$

es predecible casi seguramente. Además, como x_ϵ converge a x en $\mu-$norma cuando $\epsilon \to 0$, entonces el proceso original x también es un proceso predecible casi seguramente. ■

3.4.1. Lifting Uniformes

Iniciemos con una definición debida a Keisler(1984), [24].

Definición 3.4.3 *Sea E, F espacios de Hausdorff y $x : \Omega \times E \to F$ un proceso estocástico. Un proceso interno $X : \Omega \times {}^*E \to {}^*F$ es un* lifting uniforme *de x si existe un conjunto Ω' de medida 1 tal que*

$$^oX(\omega, m) = x(\omega, {}^om)$$

para todos los $\omega \in \Omega'$ y todos los $m \in E$ casi estándar.

En muchas aplicaciones, se tiene que $E = [0, 1]$ y $F = \mathbb{R}^n$, aunque estos son ejemplos que aparecen en ecuaciones diferenciales estocásticas y teoría del control estocástico por ahora seguiremos trabajando con los casos mas generales.

Keisler, además probó el siguiente resultado.

Proposición 3.4.2 *Supongamos que E y F son espacios métricos separables. Un proceso estocástico $x : \Omega \times E \to F$ es continuo si y sólo si tiene un lifting uniforme.*

Prueba.-
$\Longleftarrow)$

Sea Ω' el conjunto dado en la definición 3.4.3.

Asumamos que X es un lifting uniforme de x, y fijemos $m \in E$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ y $\omega \in \Omega'$. Si $y = x(\omega, m)$ y $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, entonces el conjunto interno

$$\{\delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \ : \ d(y, X(\omega, m')) < \epsilon \ \text{ cuando } \ d(m, m') < \delta\}$$

contiene a todos los infinitesimales positivos, y entonces contiene un no infinitesimal δ_0. por lo que $d(m, m') \leq \delta_0$ implica que

$$d(x(\omega, m), x(\omega, m')) \leq \epsilon$$

entonces $x(\omega, \cdot)$ es continua en m.

$\Longrightarrow)$

Para el inverso, la idea es la siguiente: si $C(E,F)$ el conjunto de las funciones continuas de E a F. Definiríamos $\hat{x} : \Omega \to C(E,F)$ mediante $\hat{x}(\omega) = x(\omega, \cdot)$.

Así, al usar el teorema 2.2.1 de la página 38 para variables aleatorias podríamos elegir un lifting $\hat{X}$ de $\hat{x}$ y definamos $X : \Omega \times {}^*E \to {}^*F$ como

$$X(\omega, m) = \hat{X}(\omega)(m),$$

entonces X seria un lifting uniforme de x y tendríamos la prueba.

Entonces iniciemos fijando un subconjunto denso numerable E_0 de E, y sea $\mathcal{B}(E)$ la familia

$$\mathcal{B}(E) = \{B(e, \frac{1}{n}) \ : \ e \in E_o, \ n \in \mathbb{N}\}$$

donde $B(e, \frac{1}{n})$ son las bolas cerradas $\{m \in E : d(e,m) \leq 1/n\}$. De igual manera, definamos como $\mathcal{B}(F)$ una familia en F. Ahora, si $B_1 \in \mathcal{B}(E)$, $B_2 \in \mathcal{B}(F)$, definamos

$$O_{B_1,B_2} = \{f \in C(E,F) \ : \ f(B_1) \subset B_2\}$$

lo cual define una topología τ sobre $C(E,F)$ al tomar sus conjuntos abiertos sean uniones arbitrarias de intersecciones finitas de la forma

$$O_{B_1^{(1)},B_2^{(1)}} \cap \cdots \cap O_{B_1^{(m)},B_2^{(m)}} \tag{3.22}$$

ya que sólo existe una cantidad numerable de conjuntos de la forma (3.22), esta topología es del segundo tipo, y este es un Hausdorff.

Definamos $\hat{x} : \Omega \to C(E,F)$ como

$$\hat{x}(\omega) = x(\omega, \cdot).$$

Debemos mostrar que este es medible con respecto a la topología τ. Como sólo hay una cantidad numerable de básicos de la forma (3.22), es suficiente con mostrar que cada conjunto $\hat{x}^{-1}(O_{B_1,B_2})$ es medible. Hagamos esto: Sea $\tilde{Q}$ un subconjunto denso numerable de B_1, como B_2 es cerrado entonces

$$\hat{x}^{-1}(O_{B_1,B_2}) = \{\omega \ : \ \hat{x}(\omega)(q) \in B_2 \ \ \text{Para todo}\ q \in \tilde{Q}\} = \bigcap_{q \in \tilde{Q}} \{\omega \ : \ x(\omega, q) \in B_2\}$$

es medible porque x es un proceso estocástico.

El paso siguiente es elegir un lifting $\hat{X}$ de $\hat{x}$, esto haciendo uso del teorema 2.2.1, entonces definamos $X(\omega, m) = \hat{X}(\omega)(m)$. Sea Ω' el conjunto de medida uno tal que $\hat{x}(\omega) = {}^o\hat{X}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega'$. Por lo que sólo nos resta probar que si $\omega \in \Omega'$, entonces $x(\omega, {}^om) = {}^oX(\omega, m)$ para todo los m casi estándar. Esta última afirmación probemosla por contradicción.

Supongamos que no es cierta, esto implicaría que $d(x(\omega, {}^om), {}^oX(\omega, m))$ no es infinitesimal, lo cual quiere decir que existe un elemento $B_2 \in \mathcal{B}(F)$ tal que $x(\omega, {}^om)$ esta en el interior de B_2, pero que además ${}^oX(\omega, m)) \notin {}^*B_2$. Ahora, por la continuidad de $x(\omega, \cdot)$ hay un conjunto $B_1 \in \mathcal{B}(E)$ con m en si interior tal que $x(\omega, m') \in B_2$ para todo $m' \in B_1$. De esto se concluye que $\hat{x}(\omega) \in O_{B_1,B_2}$ mientras que claramente $\hat{X}(\omega) \notin {}^*O_{B_1,B_2}$, lo cual contradice la hipótesis ${}^o\hat{X}(\omega) = \hat{x}(\omega)$. De donde se tiene la afirmación y se prueba el teorema. ■

Un caso especial de la ultima proposición es cuando el proceso $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es continuo si y sólo si tiene un lifting uniforme $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$. Otro caso donde se usa mucho este resultado es cuando consideramos una función de la forma

$$f : [0,1] \times C([0,1], \mathbb{R}^n) \; \to \; \mathbb{R}^m,$$

la cual es medible en la primera entrada y continua en la segunda. Si λ es la medida de conteo normalizada sobre T, la proposición anterior nos asegura la existencia de un lifting uniforme de la forma

$$F : T \times {}^*C([0,1], \mathbb{R}^n) \; \to \; {}^*\mathbb{R}^m,$$

notemos que en este caso, el conjunto $C(E, F)$ (el de la prueba de la proposición) seria

$$C(E, F) = C(C([0,1], \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^m)$$

Una pregunta natural es cuando es posible combinar dos resultados de lifting ya establecidos para crear uno nuevo, por ejemplo, es tentador conjeturar que un proceso es continuo y adaptado si y sólo si este tiene un lifting uniforme no anticipativo. En algunos casos es posible hacer esta afirmación, pero hay que refinar un poco la afirmación. para esto es necesario dar una definición mas.

Diremos que un proceso interno $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ es un *lifting esencialmente uniforme* de $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ si existe un infinitesimal $\delta \in T$ tal que el conjunto

$$\{\omega \ : \ \forall\, t > \delta \ \text{ se tiene que } {}^oX(\omega,t) = x(\omega, {}^ot)\}$$

tiene medida de Loeb uno. Esto quiere decir que la uniformidad de el lifting puede romperse sobre un segmento infinitesimal inicial. Aplicando la proposición 3.4.2 se tiene que x tiene un lifting esencialmente uniforme si y sólo si este es continuo.

Con esto en mente Keisler(1984) [24] fue quien probó primero el siguiente teorema, aunque él lo hizo en una forma no tan general de la presentada aquí, que se debe a Osswald [34].

Teorema 3.4.1 *Un proceso* $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *es continuo y adaptado si y sólo si tiene un lifting esencialmente uniforme no anticipativo.*

Prueba.-
$\Longleftarrow)$
Si x tiene un lifting no anticipativo esencialmente uniforme X entonces x es continuo, por lo que sólo falta verificar que es adaptado. para esto tomemos $t \in [0,1]$ y $\tilde{t} \in T$ tal que $t = {}^o\tilde{t}$. entonces se tiene que ${}^oX(\tilde{t}) = x(t)$ casi dondequiera y ya que $X(\tilde{t})$ es $\mathcal{A}_{\tilde{t}}$-medible entonces $x(t)$ tiene que ser $\mathcal{B}_t$-medible.

$\Longrightarrow)$
Antes de iniciar la prueba de esta parte del teorema, primero introduzcamos cierta clase de equivalencia.
Definamos la relación de equivalencia interna $\sim_s$ sobre Ω y para cada $s \in T$ mediante

$$\omega \ \sim_s \ \omega' \quad \text{ si y sólo si } \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_s \quad \text{ se tiene } \quad \omega \in A \leftrightarrow \omega' \in A. \tag{3.23}$$

Si $t \in [0,1]$, sea $\equiv_t$ una relación de equivalencia externa dada por $\omega \equiv_t \omega'$ si $\omega \sim_s \omega'$ para todas las ${}^os \leq t$. La σ-álgebra $\mathcal{C}_t$ consiste de todos los conjuntos Loeb medibles C los cuales son cerrados bajo $\equiv_t$. Usando el lema 3.4.1 de la página 87 y su corolario no es difícil ver que $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{B}_t$, pero que para cada $B \in \mathcal{B}_t$ existe un $C \in \mathcal{C}_t$ tal que $B\Delta C$ tiene medida de Loeb cero. De esto se sigue que para cada proceso x, $\mathcal{B}_t$-adaptado continuo existe un proceso y, el cual es a su vez $\mathcal{C}_t$-adaptado y continuo, tal que $x(\omega,\cdot) = y(\omega,\cdot)$ para casi todo ω.

Ahora regresemos a la prueba de la segunda parte del teorema.

Asumamos que x es continuo y adaptado. Sea y un proceso continuo y $\mathcal{C}_t$-adaptado tal que $y(\omega,\cdot) = x(\omega,\cdot)$ casi dondequiera, también tomemos a Y como el lifting uniforme de y. Buscaremos modificar Y de tal manera que sea un lifting no anticipativo esencialmente uniforme de y, con lo cual lo será de x.

Sea Ω' el conjunto de medida uno tal que Y es un lifting de y en ω'. elijamos una sucesión interna creciente de conjuntos $\{\Omega_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n \subset \Omega'$ y

$$P(\Omega_n) > 1 - \frac{1}{n}.$$

Tomemos $\tilde{\Omega} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$. y para cada clase de equivalencia $\mathcal{P}$ de la relación $\sim_s$ en3.23, elijamos un representante $\omega_s \in \mathcal{P}$. Podemos elegir a ω_s de tal manera que este pertenezca a la mas chica de las Ω_n la cual intersecta a $\mathcal{P}$. Ahora, a cada elemento de $\omega \in \Omega$ y a cada $s \in T$ podemos asociarle un representante ω_s, y como ω_s fue elegido de tal manera que esta en la mas chica Ω_n, entonces el representante ω_s siempre esta en $\tilde{\Omega}$ cuando ω también lo esta. Esto implica que

$$^oY(\omega, s) = y(\omega, {}^os) \quad \text{y} \quad {}^oY(\omega_s, s) = y(\omega_s, {}^os) \tag{3.24}$$

siempre que $\omega \in \tilde{\Omega}$, esto ya que Y es un lifting de y sobre $\tilde{\Omega}$.
Así, nuestro candidato al lifting buscado es

$$X(\omega, s) = Y(\omega_s, s)$$

que es claro es no anticipativo, por lo que sólo falta verificar que es esencialmente uniforme.

Supongamos que $\omega \in \tilde{\Omega}$, $s \in T$ y que ${}^os > 0$. Por construcción se tiene que $\omega \sim_s \omega_s$, por lo que $\omega \equiv_r \omega_s$ para todo $r \in [0,1]$, $r < {}^os$. Y como además, y es $\mathcal{C}_t$-adaptado entonces $y(\omega, r) = y(\omega_s, r)$, por lo que al tomar limite cuando $r \to {}^os$ se tiene

$$y(\omega, {}^os) = y(\omega_s, {}^os) \tag{3.25}$$

Por lo que al combinar las ecuaciones (3.24) y (3.25), se tiene que

$$^oX(\omega, s) = {}^oY(\omega_s, s) = y(\omega_s, {}^os) = y(\omega, {}^os) \tag{3.26}$$

Lo cual muestra que X es un lifting uniforme de y sobre el intervalo semiabierto $(0,1]$. Para extender la expresión (3.26) a infinitesimales s suficientemente grandes hagamos lo siguiente: Sea el conjunto interno

$$\left\{ n \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \forall \omega \in \Omega_n, \ \forall t \geq \frac{1}{n} \text{ se tiene } |X(\omega,t) - Y(\omega,t)| < \frac{1}{n} \right\}$$

contiene a $\mathbb{N}$ y por tanto tiene un elemento infinito γ. Finalmente, Y es un lifting uniforme de y, por lo que X debe ser un lifting uniforme de y sobre $T \cap [1/\gamma, 1]$, pero esta es la definición de lifting esencialmente uniforme. ■

3.5. Teoremas de Representación.

En esta sección discutiremos las relaciones existentes entre las integrales estocásticas estándar y las hiperfinitas. Se encontraran condiciones bajo las cuales podemos encontrar integrales estándar al reducirla de las integrales estocásticas hiperfinitas. Además, trataremos de ver si existe algún uso para las integrales estocásticas hiperfinitas que no pueden ser reducidas a una integral estocástica estándar.

Sea M una λ^2-martingala con respecto a una filtración interna $(\Omega, \{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}, P)$. No es difícil verificar que la parte estándar ${}^oM^+$ de M es una martingala L^2 con respecto a la filtración estocástica generada $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}, L(P))$. Aquí valdría hacer el comentario de que la parte estándar de una λ^2-martingala local no siempre es una martingala local L^2, esto fue mostrado por Lindstrøm en [27] con un ejemplo.

Esto hace necesario restringir un poco nuestra clase de martingalas que vamos a considerar para eliminar estos casos.

Definición 3.5.1 *Una martingala interna M $\Omega \times T \to^* \mathbb{R}$ es llamada una SL^2-martingala si $M_t \in SL^2(\Omega, \mathcal{A}_1, P)$ para todo $t \in T$.*

De igual manera podemos definir esto ultimo para una SL^2-martingala local.

Necesitamos otra definición.

Definición 3.5.2 *Un proceso interno $X : \Omega \times T \to^* \mathbb{R}$ es S-continuo por la derecha en 0 si ${}^oX(0) = {}^oX(0)^+$.*

Notemos que si M es una SL^2-martingala que es S-continuo por la derecha en 0, entonces ν_M es absolutamente continuo con respecto a P.

Enseguida enunciamos y probamos dos resultados acerca de SL^2-martingalas.

Proposición 3.5.1 *Una martingala interna M es una SL^2-martingala si y sólo si $M_0^2 + [M](1)$ es $S-$integrable.*

Prueba.-
Como en cualquier caso se tiene que M es una λ^2-martingala entonces es suficiente con probar el resultado para estos procesos.

Recordemos del capitulo anterior que si $f : \Omega \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ es interna y no negativa entonces ${}^o\int f\mathrm{d}P \geq \int {}^o f \mathrm{d}L(P)$ y la igualdad se da si y sólo si f es S-integrable.

Además, tenemos la expresión (3.12) de la página 69

$$E(M(t)^2) = E(M_0^2 + [M](t))$$

Buscamos probar un resultado equivalente para la parte estándar de M. Para esto, primero definamos una sucesión de tiempos de paro $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\tau_n(\omega) = \text{mín}\{s \in T \ : \ |M(\omega, s) \geq n\}.$$

Ahora como

$$E\left(\left(\int_0^t M_{\tau_n} \mathrm{d}M_{\tau_n}\right)^2\right) \leq n^2 E([M](t)) < \infty,$$

entonces $\int M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}$ es una λ^2-martingala, y entonces $\int_0^t M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}$ es S-integrable para todo t.
Por la caracterización de la S-integrabilidad de arriba se tiene

$$E\left({}^O\!\!\int_0^t M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}\right) = {}^oE\left(\int_0^t M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}\right) = 0.$$

Y como

$${}^oM_{\tau_n}(0)^2 + {}^o[M_{\tau_n}](t) = {}^oM_{\tau_n}(t)^2 - 2\int_0^t M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n} \qquad \text{c.d.}$$

obtenemos que

$$E({}^{o}M_{\tau_n}(0)^2 + {}^{o}[M_{\tau_n}](t)) = E({}^{o}M_{\tau_n}(t)^2). \tag{3.27}$$

Además, ${}^{o}[M_{\tau_n}](t) \to {}^{o}[M](t)$ y ${}^{o}M_{\tau_n}(t) \to {}^{o}M(t)$ casi dondequiera cuando $n \to \infty$. La sucesión $\{{}^{o}[M_{\tau_n}](t)\}$ es acotada por ${}^{o}[M](t)$ la cual es integrable ya que

$$E({}^{o}[M](t)) \leq {}^{o}E([M](t)) < \infty.$$

También, ${}^{o}(M_{\tau_n}(t)) \leq {}^{o}\max_{s\leq t} M_s^2$, y usando la desigualdad de Doob tenemos

$$E({}^{o}\max_{s\leq t} M_s^2) \leq {}^{o}E(\max_{s\leq t} M_s^2) \leq 4{}^{o}E(M_t^2) < \infty,$$

de donde se tiene que ${}^{o}\max_{s\leq t} M_s^2$ es integrable. Aplicando el teorema de convergencia de Lebesgue a ambos lados de la ecuación 3.27 obtenemos

$$E({}^{o}M(0)^2 + {}^{o}[M](t)) = E({}^{o}M(t)^2). \tag{3.28}$$

Combinando las ecuaciones (3.27) y (3.28) tenemos

$${}^{o}E(M_0^2 + [M](t)) = E({}^{o}M_0^2 + [M](t)) \qquad \text{si y sólo si} \qquad {}^{o}E(M_t^2) = E({}^{o}M_t^2)$$

Así, el resultado anterior se sigue de esta ultima propiedad. ■

La siguiente proposición muestra que la clase de SL^2-martingalas es cerrada bajo integración estocástica.

Proposición 3.5.2 *Si M es una SL^2-martingala y $X \in SL^2(M)$, entonces $\int X\mathrm{d}M$ es una SL^2-martingala.*

Prueba.-
Hagamos la demostración en dos pasos, primero cuando X es S-acotada y luego el caso general, en que $X \in SL^2(M)$.
Si X es S-acotada entonces esto significa que $|X| \leq n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos

$$0 < \left[\int X\mathrm{d}M\right](1) = \sum_0^1 X^2 \Delta M^2 \leq n^2[M](1)$$

y por la proposición anterior se tiene que como $\int X\mathrm{d}M$ es acotada entonces es una SL^2-martingala.

Ahora consideremos el caso general, $X \in SL^2(M)$. Existe una sucesión de elementos de $SL^2(M)$, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que son S-acotados y que satisfacen que

$$^{o}\!\!\int_{\Omega\times T} |X^2 - X_n^2| \mathrm{d}\nu_M \ \to 0.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ {}^{o}E\left(\left[\int X\mathrm{d}M\right](1) - \left[\int X_n\mathrm{d}M\right](1)\right) \\ &= \ {}^{o}E\left(\sum_0^1 X^2\Delta M^2 - \sum_0^1 X_n^2\Delta M^2\right) \\ &= \ {}^{o}\!\!\int_{\Omega\times T}(X^2 - X_n^2)\mathrm{d}\nu_M \qquad \to \ 0 \end{aligned}$$

Y como cada $[\int X_n\mathrm{d}M](1)$ es S-integrable entonces también lo es $[\int X\mathrm{d}M](1)$ y usando la proposición anterior para $\int X\mathrm{d}M$ se tiene la prueba de la proposición. ■

Tenemos el siguiente lema que nos permitirá probar un teorema de representación.

Lema 3.5.1 *Sea M una SL^2-martingala S-continua en 0, y sea ${}^{o}M^+$ su parte estándar. Entonces $\nu_{{}^{o}M^+}$ es la restricción de $L(\nu_M) \circ St^{(-1)}$ sobre los conjuntos predecibles.*[1]

Prueba.-
Con probar que $\nu_{{}^{o}M^+}$ y $L(\nu_M) \circ St^{-1}$ son equivalentes en rectángulos predecibles es suficiente. Sea $B \in \mathcal{B}_s$ entonces

$$\nu_{{}^{o}M^+}(B \times (s,t]) = E(1\!\!1_B({}^{o}M^+(t) - {}^{o}M^+(s))^2).$$

Sea A un conjunto interno tal que $L(P)(A\Delta B) = 0$ y $A \in \mathcal{A}_{\tilde{s}}$ para alguna

[1]La definición de St esta dada en la expresión 3.21 de la página 89

$\tilde{s} \approx s$, este conjunto A existe por el lema 3.20. Ahora bien tenemos

$$\begin{aligned}
L(\nu_M) \circ St^{-1}(B \times (s,t]) &= L(\nu_M) \circ St^{-1}(A \times (s,t]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} {}^o\nu_M \left(A \times \left(s + \frac{1}{n}, t + \frac{1}{m} \right] \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} {}^oE \left(\mathbb{1}_A \left([M] \left(t + \frac{1}{m} \right) - [M] \left(s + \frac{1}{n} \right) \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} {}^oE \left(\mathbb{1}_A \left(M \left(t + \frac{1}{m} \right) - M \left(s + \frac{1}{n} \right) \right)^2 \right) \\
&= E(\mathbb{1}_B({}^oM^+(t) - {}^oM^+(s))^2)
\end{aligned}$$

Donde la S-integrabilidad de $[M]$ se ha usado para cambiar de B a A, y la S-integrabilidad de M^2 para poder tomar la parte estándar dentro de la esperanza.

Sólo resta observar que como M es S-continua por la derecha en 0, entonces

$$L(\nu_M) \circ St^{-1}(B \times \{0\}) = 0$$

por lo que la prueba del lema se completa. ■

Aunque ya se dio suficiente teoría acerca de liftings, necesitamos una definición precisa con la cual trabajaremos, esta es dada ahora.

Definición 3.5.3 *Sea M una SL^2-martingala, y sea $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un proceso predecible en $L^2(\nu_{{}^oM^+})$. Un 2-lifting de x con respecto a M es un proceso no anticipativo $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ en $SL^2(M)$ tal que*

$${}^oX(\omega, t) = x(\omega, {}^ot)$$

para $L(\nu_M)$-c.d..

Tenemos el siguiente resultado

Lema 3.5.2 *Sea M una SL^2-martingala y sea $x \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$. Si X y Y son 2-liftings de x, entonces existe un conjunto Ω' de medida Loeb uno tal que para toda $\omega \in \Omega'$ y toda $t \in T$ se tiene*

$${}^o\!\left(\int X \mathrm{d}M \right)(\omega, t) = {}^o\!\left(\int Y \mathrm{d}M \right)(\omega, t).$$

Prueba.-
Mediante cálculos directos y usando la desigualdad de Doob tenemos

$$
\begin{aligned}
0 \leq E\left(\max_{t\in T}\left(\int_0^t X\mathrm{d}M - \int_0^t Y\mathrm{d}M\right)^2\right) &\leq 4E\left(\left(\int_0^1 (X-Y)\mathrm{d}M\right)^2\right)\\
&= 4E\left(\left[\int (X-Y)\mathrm{d}M\right](1)\right)\\
&= 4\int_{\Omega\times T}(X-Y)\mathrm{d}\nu_M \ \approx\ 0
\end{aligned}
$$

ya que $X-Y$ esta el $SL^2(\nu_M)$ y es un infinitesimal casi dondequiera. por lo que se tiene la afirmación del lema. ∎
Probemos un teorema de representación.

Teorema 3.5.1 *Sea M una SL^2-martingala que es S-continua por la derecha en 0, y asumamos que $x \in SL^2(\nu_{^\circ M^+})$. Entonces x tiene un 2-lifting X y además*

$$\int x\mathrm{d}^oM^+ = {}^o\!\left(\int X\mathrm{d}M\right)^+ \tag{3.29}$$

Prueba.-
Primero veamos la existencia. Por la proposición 3.4.1, x tiene un lifting no anticipativo X. Debemos mostrar que podemos elegir un X en $SL^2(\nu_M)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, definamos x_n como la truncación de x, i.e., $x_n = (x\wedge n)\vee(-n)$. Si X_n es la correspondiente truncación de X, entonces se tiene que X_n es un lifting no anticipativo de x_n. De 3.5.3 obtenemos

$$^o\!\int X_n^2\mathrm{d}\nu_M = \int {}^oX_n^2\mathrm{d}L(\nu_M) = \int x_n^2\mathrm{d}\nu_{^\circ M^+}.$$

Ahora, como $\int x_n^2\mathrm{d}\nu_{^\circ M^+} \ \rightarrow\ \int x^2\mathrm{d}\nu_{^\circ M^+}$ podemos encontrar una $\eta\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tal que

$$^o\!\int X_\eta^2\mathrm{d}\nu_M = \int x^2\mathrm{d}\nu_{^\circ M^+}$$

y por la proposición 2.2.1 de la página 42 se sigue que $X_\eta\in SL^2(\nu_M)$ y entonces este es un 2-lifting de x.

Sólo resta probar la igualdad (3.29) y para probar esta, primero consideremos x como un proceso simple de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i \times (s_i, t_i]}$$

donde $B_i \in \mathcal{B}_{s_i}$. Para cada i elijamos un $\hat{s}_i \approx s_i$ tal que ${}^oM(\hat{s}_i) = {}^oM^+(s_i)$ casi dondequiera, y tal que existe un $A_i \in \mathcal{A}_{\hat{s}_i}$ con $L(P)(A_i \Delta B_i) = 0$. Tomemos $\hat{t}_i \approx t_i$ tal que ${}^oM(\hat{t}_i) = {}^oM^+(t_i)$ casi dondequiera. Haciendo

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i \times (\hat{s}_i, \hat{t}_i]}$$

tenemos que X es un 2-lifting de x, y para este caso la ecuación (3.29) se satisface.

Para el caso general, sólo es necesario probar que el mapeo $x \longmapsto {}^o(\int X\mathrm{d}M)(1)$ es una isometría de $L^2(\Omega \times [0,1], \nu_{{}^oM^+})$ en $L^2(\Omega, L(P))$. Pero ya habíamos visto que por el lema 3.5.1

$$\begin{aligned} \int x^2 \mathrm{d}\nu_{{}^oM^+} &= {}^o\!\!\int X^2 \mathrm{d}\nu_M \\ &= {}^oE\left(\left(\int X\mathrm{d}M\right)^2 (1)\right) \\ &\quad \text{Y por la proposición 3.5.2 nos queda} \\ &= E\left({}^o\!\left(\int X\mathrm{d}M\right)^2 (1)\right) \end{aligned}$$

Con lo cual se prueba el teorema. ■

3.5.1. Variación Cuadrática y Lema de Itô.

Así como se ha visto que la variación cuadrática de una martingala interna es una herramienta muy usada, seria interesante ver que sucede con la noción estándar.

Sea $N : \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una martingala L^2. Si $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1\}$ es una partición de $[0,1]$, sea $\delta(\pi) = \text{máx}_{0\leq i<n}(t_{i+1} - t_i)$ sea su malla. Dada una sucesión $\{\pi_n\} = \{0 = t_o^m < t_1^m < \cdots < t_{n_m}^m = 1\}$ tal que $\delta(\pi_m) \rightarrow 0$ es natural definir la variación cuadrática $[N]$ de N como

$$[N](t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{n_m-1} \left(N(t_{i+1}^m \wedge t) - N(t_i^m \wedge t)\right)^2$$

donde tomamos los imites en el sentido de L^1.

Aquí podemos hacernos dos preguntas, una los limites existen y son independientes de la elección de la sucesión $\{\pi_m\}$ y la segunda seria si la igualdad

$$[{}^oM^+] = {}^o[M]^+ \tag{3.30}$$

se satisface para todas las SL^2-martingalas . Mientras que para la primera pregunta la respuesta es si, para la segunda no es asi.

Metivier y Pellaumail [30] además de Meyer [31] dan las razones de porque es afirmativa la primera respuesta en tanto que un ejemplo en la que no se satisface la igualdad (3.30) lo muestra Hoover y Perkins [20].
De acuerdo a esto ultimo a nosotros nos gustaría que la igualdad (3.30) se cumpliese siempre, y para lograrlo necesitamos introducir una subclase de SL^2-martingalas.

Definición 3.5.4 *Una función interna $f :\rightarrow {}^*\mathbb{R}$ se dice que es* bien portada *si para cada $t \in [0,1]$ hay una $\tilde{t} \in T$, $\tilde{t} \approx t$ tal que para toda $s \approx \tilde{t}$, $s \leq \tilde{t}$,*

$$f(s) \approx f(\tilde{t}),$$

y para toda $s \approx \tilde{t}$, $s > \tilde{t}$,

$$f(s) \approx f(\tilde{t}^+),$$

donde $\tilde{t}^+$ denota el sucesor de $\tilde{t}$ en T. Un Proceso es bien portado *si todas sus trayectorias lo son.*

Lo que esta definición nos quiere decir es que un proceso bien portado sera aquel que precisamente salta a lo mas una vez por monada.

Con esta subclase de procesos se podrá probar que $[{}^oM^+] = {}^o[M]^+$, con M una martingala. Antes necesitamos un lema.

Lema 3.5.3 *Sea* $M : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ *una* SL^2*-martingala bien portada. Si* S *es una sublinea de* T *y* M^S *es la restricción de* M *a* S*, entonces*

$$[M](s) \approx [M^S](s) \qquad c.d. \tag{3.31}$$

para toda $s \in S$.

Prueba.-
Sea $\tau_n(\omega) = \text{ínf}\{t \in T \ : \ M(\omega,t) \geq n\}$. Como $M_{\tau_n} \in SL^2(M_{\tau_n})$, y para casi todo ω tenemos que $\tau_n(\omega) = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, es suficiente con probar el lema para $M \in SL^2(M)$.
Sabemos por el lema 3.2.1 de la página 68 que

$$[M](t) = M(t)^2 - M(0)^2 - 2\int_o^t M\mathrm{d}M, \tag{3.32}$$

y

$$[M^S](t) = M^S(t)^2 - M^S(0)^2 - 2\int_o^t M^S\mathrm{d}M^S. \tag{3.33}$$

Además, notemos que $\int_0^t M^S\mathrm{d}M^S = \int_0^t \tilde{M}^S\mathrm{d}M^S$ donde $\tilde{M}^S : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ esta definido al tomar $\tilde{M}^S(\omega,t)$ igual a $M^S(\omega,t)$ para el mas grande s que este en S, pero que sea mas chico que t. Como M es bien portado entonces M^S y $\tilde{M}^S$ son 2-lifting de sus respectivas partes estándar izquierdas ${}^oM^-$ y M y por tanto

$$\int_0^t M\mathrm{d}M \approx \int_0^t \tilde{M}^S\mathrm{d}M = \int_0^t M^S\mathrm{d}M^S \qquad \text{c.d.} \tag{3.34}$$

por el lema 3.5.2. Introduciendo esto en (3.32) y (3.33) tenemos que

$$\begin{aligned} [M](t) &= M(t)^2 - M(0)^2 - 2\int_o^t M\mathrm{d}M \\ &\approx M^S(t)^2 - M^S(0)^2 - 2\int_o^t M^S\mathrm{d}M^S \quad \text{c.d.} \\ &= [M^S](t) \end{aligned}$$

por lo que tenemos el lema. ■

Así, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.5.3 *Si M es una SL^2-martingala bien portada que es S-continua en 0, entonces $[{}^oM^+]$ existe y es igual a ${}^o[M]^+$, mas aun*

$$[{}^oM^+](t) = {}^oM^+(t)^2 - {}^oM^+(0)^2 - 2\int_0^t {}^oM^- \mathrm{d}{}^oM^+ \tag{3.35}$$

Prueba.-
Fijemos $t \in [0,1]$ y elijamos $\tilde{t} \in T$, tal que $\tilde{t} \approx t$ y suficientemente grande tal que ${}^oM(\tilde{t}) = {}^oM^+(t)$ casi dondequiera. Sea una sucesión $\{\pi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de particiones del $[0,1]$ con malla tomando valores que se van a 0. Construyamos una sucesión $\{\tilde{\pi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de particiones internas de T tomando para cada t_i^m una $\tilde{t}_i^m \in T$, tal que $\tilde{t}_i^m \approx t_i^m$ tal que ${}^oM(\tilde{t}_i^m) = {}^oM^+(t_i^m)$. Extendamos, además, $\{\tilde{\pi}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a una sucesión interna $\{\tilde{\pi}_m\}_{m\in{}^*\mathbb{N}}$. Para cada $m \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ tenemos que por el lema anterior

$$E\left(\left|[M](\tilde{t}) - \sum_{i=0}^{n_m-1}(\, M(\tilde{t}_{i+1}^m \wedge \tilde{t}) - M(\tilde{t}_i^m \wedge \tilde{t})\,)^2\right|\right) \approx 0$$

por lo que se tiene la primera parte de la proposición.

Para probar la igualdad (3.35), hagamos lo siguiente; definamos el tiempo de paro $\tau_n(\omega) = \text{mín}\{t \in T \,:\, M(t,\omega) \geq n\}$ y hagamos $\sigma_n = {}^o\tau_n$. Entonces $M_{\tau_n} \in SL^2(M_{\tau_n})$ es un 2-lifting de ${}^oM^-_{\sigma_n}$ y entonces

$$\int {}^oM^-_{\sigma_n}\mathrm{d}{}^oM^+ = {}^O\!\left(\int M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}\right)^+,$$

y al combinar esto con la expresión

$$[M_{\tau_n}](\tilde{t}) = M^2_{\tau_n}(\tilde{t}) - M^2_{\tau_n}(0) - 2\int_0^{\tilde{t}} M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}$$

tenemos que si tomamos limites cuando $n \to \infty$ nos queda

$$\begin{aligned}
[{}^oM^+](t) &= \lim_{n\to\infty}[M_{\tau_n}](\tilde{t}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(M^2_{\tau_n}(\tilde{t}) - M^2_{\tau_n}(0) - 2\int_0^{\tilde{t}} M_{\tau_n}\mathrm{d}M_{\tau_n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(M^2_{\tau_n}(\tilde{t}) - M^2_{\tau_n}(0) - 2\int_0^{\tilde{t}} {}^oM^-_{\sigma_n}\mathrm{d}{}^oM^+\right) \\
&= {}^oM^+(t)^2 - {}^oM^+(0)^2 - 2\int_0^t {}^oM^-\mathrm{d}{}^oM^+
\end{aligned}$$

■

Conviene hacer un par de comentarios acerca de como interpretar a la integral estocástica en (3.35), como ${}^oM^-$ no necesariamente pertenece a la clase $L^2(\nu_{{}^oM^+})$ la integral no es cubierta por la definición dada en el inicio de la sección, pero la solución es simple: tomando $\int {}^oM^- \mathrm{d}{}^oM^- = \lim_{n\to\infty} \int {}^oM^-_{\sigma_n} \mathrm{d}{}^oM^+$ donde $\{\sigma_n\}$ es la sucesión de tiempos de paro crecientes a 1 tales que ${}^oM^-_{\sigma_n} \in L^2(\nu_{{}^oM^+})$ para cada n.

Otro comentario valioso es que si M no es bien portado este tendría saltos dentro de las monadas las cuales serían contadas por $[M]$ pero no serían tomadas en cuenta por $[{}^oM^+]$. no obstante la restricción a procesos bien portados, que la proposición sea útil se debe a que si X es un proceso interno con S-limites por la derecha e izquierda, entonces hay una sublinea S tal que la restricción X^S de X es bien portada, por lo que entonces siempre podemos asumir que nuestros procesos son bien portados.

Ahora enunciemos y probemos una generalización del lema de Itô.

Teorema 3.5.2 *Sea $N : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la parte estándar de una SL^2-martingala S-continua M. Si $\varphi : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en la primera variable y C^1 en la segunda variable entonces*

$$\begin{aligned} \varphi(N_t, t) - \varphi(N_0, 0) &= \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(N_s, s)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(N_s, s)\mathrm{d}N_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(N_s, s)\mathrm{d}[N](s) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Prueba.-

Mediante cálculos directos tenemos

$$
\begin{aligned}
&\varphi(N_t,t)-\varphi(N_0,0)\\
&\quad = \sum_{s=0}^{t}\{\varphi(M_{s+\Delta t},s+\Delta t)-\varphi(M_s,s)\}\\
&\quad = \sum_{s=0}^{t}\{\varphi(M_{s+\Delta t},s+\Delta t)-\varphi(M_{s+\Delta t},s)+\varphi(M_{s+\Delta t},s)-\varphi(M_s,s)\}\\
&\quad \approx \sum_{s=0}^{t}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(M_{s+\Delta t},s)\Delta t + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_s,s)\Delta M_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(M_s,s)\Delta M_s^2\right\}\\
&\quad \approx \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial t}(M_s,s)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_s,s)\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(M_s,s)\mathrm{d}[M](s)
\end{aligned}
$$

La ultima igualdad es debida al hecho que $[N] = {}^{o}[M]^{+}$ ■

Existe un teorema mas general que el probado antes, este es debido a Lindstom y puede consultarse en [27], pág. 287, teorema 22.

3.6. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

En esta sección hablaremos acerca de un tópico el cual es una extensión de la teoría desarrollada previamente.

Iniciaremos discutiendo la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas de la forma

$$
x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s,x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s,x(\omega,s))\mathrm{d}b(\omega,s) \tag{3.37}
$$

donde b es un movimiento Browniano n-dimensional sobre un adecuado espacio de Loeb Ω y f, g son funciones de la forma

$$
f : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad g : [0,1]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n
$$

donde $\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n$ es el espacio de las matrices de $n\times n$ reales.

Para lo cual, primero que nada, explicaremos que significa la ecuación (3.37). Además, nos restringiremos a procesos univaluados, ya que el caso multidimensional es una extensión trivial del problema en dimensión uno. Sin embargo, para ecuaciones diferenciales estocásticas la situación es diferente: aquí sobre dimensión mayor a uno es mas complicado y en algunas ocasiones la teoría que nos permitió solucionar una ecuación diferencial estocástica no puede extenderse al caso general.

Sea $T = \{0, 1/\eta, 2/\eta, \ldots, 1\}$ la línea de tiempo hiperfinita. Como en nuestro espacio muestral usaremos $\Omega = \{1, -1\}^{T\times\{1,2,\ldots,H\}}$, el espacio de todas las funciones internas de $T \times \{1, 2, \ldots, H\}$ a $\{-1, 1\}$ para alguna $H \in {}^*\mathbb{N}$, $H \geq n$. Si $\omega \in \Omega$ algunas veces podremos escribir $\omega_i(t) = \omega(t, i)$.

Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica para $\mathbb{R}^n$ y definamos un proceso tipo caminata de Anderson de dimensión n como

$$\chi(\omega, t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{t} \frac{\omega_i(s)}{\sqrt{\eta}} e_i \tag{3.38}$$

Notemos que con esta definición χ consiste de n caminatas aleatorias independientes $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ yendo hacia direcciones ortogonales. Igual que en dimensión uno la parte estándar de χ es un movimiento Browniano, sólo que en este caso es de n-dimensional, con respecto a la medida de Loeb $L(P)$ de la medida de conteo normalizada P.

Al igual que en la sección 3.1, definimos una filtración interna $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in T}$ en términos de las clases de equivalencia

$$[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega \;:\; \forall\, s < t\, \forall\, i \leq H(\omega_i(s) = \omega_i'(s))\ \}$$

y la filtración estándar $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in[0,1]}$ es generada de $\{\mathcal{A}_t\}$ de la forma usual.

Para toda $i, j \leq n$ definamos X_{ij} un proceso no anticipativo en $SL^2(P \times \lambda)$, donde λ es la medida de conteo normalizada sobre T, El proceso $X(\omega, t) = (X_{ij}(\omega, t))_{i,j\leq n}$ que toma valores en ${}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$ se dice que esta en $SL^2(\chi)$ y la integral estocástica definida por

$$\left(\int X \mathrm{d}\chi\right)(\omega, t) = \sum_{i=0}^{t} X(\omega, s) \cdot \Delta\chi(\omega, s) \tag{3.39}$$

donde $\cdot$ es el producto matricial.

Notemos que $\int X\mathrm{d}\chi$ es un proceso ${}^*\mathbb{R}^n$-valuado; el i-ésimo componente esta dado por

$$\left(\int X\mathrm{d}\chi\right)_i(\omega,t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\int X_{ij}\mathrm{d}\chi_j\right)(\omega,t) \tag{3.40}$$

Esto último nos da una definición de $\int X\mathrm{d}\chi$ en términos de la integral de dimensión uno, y la correspondiente formula es usada para definir integrales estocásticas estándar de procesos multidimensionales. A raíz de esta reducción todos los teoremas de liftings y representaciones que se hicieron para el caso unidimensional los usaremos aquí.

Definición 3.6.1 *Sea* $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]},P)$ *un espacio de probabilidad filtrado y* b *un movimiento Browniano* $\mathcal{F}_t$*-adaptado. Una* solución x de (3.37) con respecto a $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$ *es un proceso adaptado* $x:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ *tal que* $f(s,x(\omega,s))$ *esta en* $L^1(\Omega\times[0,1])$ *y* $g(s,x(\omega,s))$ *esta en* $L^2(\Omega\times[0,1])$*, tales que para todo* $t\in[0,1]$ *la ecuación (3.37) se cumple casi seguramente.*

En los teoremas de existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales generalmente se clasifica estos teorema como ‟débil″, ‟fuerte″ y ‟estricto″. nosotros usaremos la siguiente.

soluciones débiles. Para toda $f\in F$ y $g\in G$, donde F,G son cierta clase de funciones, existe un espacio filtrado $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$ que depende de f y g tal que (3.37) tiene una solución x con respecto a $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$.

Soluciones fuertes. Existe un $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$, tal que para todo $f\in F$ y $g\in G$ la ecuación (3.37) tiene una solución x con respecto a $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$.

Soluciones Estrictas. Sea $\Omega=C([0,1])$, P una medida de Wiener, y $\mathcal{F}_t$ una σ-álgebra generada por $C([o,t])$. Sea b la función coordenada $B(\omega,t)=\omega(t)$. Para toda $f\in F$ y $g\in G$ la ecuación (3.37) tiene una solución x con respecto a $(\Omega,\{\mathcal{F}_t\},P,b)$.

Notemos que si una ecuación tiene una solución estricta entonces esta también tiene una solución con respecto a cualquier otro movimiento Browniano.

Lo que haremos será encontrar soluciones estrictas que estarán en espacios de Loeb hiperfinitos.

Proposición 3.6.1 *Sean*

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

funciones medibles. Supongamos que hay un movimiento Browniano b adaptado a $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$ tal que para todas las condiciones iniciales $\mathcal{B}_0$-medibles $x_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$, la ecuación

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, x(\omega,s))\mathrm{d}b(\omega,s)$$

tiene una solución. Entonces la ecuación tiene una solución para cada movimiento Browniano adaptado a $\{\mathcal{B}_s\}$ y cada condición inicial $\mathcal{B}_0$-medible.

Esto fue presentado por Keisler en [24], para la prueba consultese esta referencia.

La proposición anterior es valiosa en el sentido de que si uno tiene espacios de Loeb de la forma $\Omega = \{1,-1\}^{T\times\{1,2,\ldots,H\}}$, entonces estos espacios son extremadamente regulares en el sentido de que si podemos obtener una solución débil sobre tales espacios entonces automáticamente obtenemos soluciones fuertes.

Veamos el siguiente resultado.

Proposición 3.6.2 *Sea un movimiento Browniano b adaptado a $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$, y asumamos que*

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, x(\omega,s))\mathrm{d}b(\omega,s)$$

son funciones medibles acotadas las cuales son continuas en la segunda variable. Sea x_0 una condición inicial $\mathcal{B}_0$-medible. Entonces la ecuación

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s, x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, x(\omega,s))\mathrm{d}b(\omega,s) \tag{3.41}$$

tiene una solución.

Prueba.-
Elijamos $\tilde{0} \approx 0$ tal que x_0 tiene un lifting $\mathcal{A}_{\tilde{0}}$-medible X_0. Por la proposición 3.4.2, podemos encontrar liftings $F : T \times {}^*\mathbb{R}^n \to {}^*\mathbb{R}^n$ y $G : T \times {}^*\mathbb{R}^n \to {}^*\mathbb{R}^n \otimes {}^*\mathbb{R}^n$ de f y g respectivamente, los cuales son S-acotados y uniformes en la segunda variable. Entonces, Existe un conjunto $T' \subset T$ de medida Loeb uno tal que ${}^oF(t,y) = f({}^ot, {}^oy)$ y ${}^oG(t,y) = g({}^ot, {}^oy)$ cuando $t \in T'$ y y es casi estándar.

Considerando la ecuación en diferencias hiperfinita

$$X(\omega,t) = X_0(\omega) + \sum_{s=\tilde{0}}^{t} F(s, X(\omega,s))\Delta t + \sum_{s=\tilde{0}}^{t} G(s, X(\omega,s))\Delta_\chi(\omega,s), \quad (3.42)$$

donde χ es la caminata aleatoria de Anderson, esta ecuación obviamente tiene una única solución no anticipativa X definida inductivamente para toda $t \geq \tilde{0}$. [2] Extendiendo X para todos los $t \in T$ como $X(\omega,t) = 0$ para todos los $t < \tilde{0}$.

Sea x la parte es estándar de ${}^oX^+$ de X; vamos a mostrar que x es una solución de la ecuación original (3.41) en el caso en que $b = {}^o\chi^+$. Para esto es suficiente con mostrar que $F(s, X(\omega,s))$ es un lifting de $f(s, x(\omega,s))$ y que $G(s, X(\omega,s))$ es un lifting de $g(s, x(\omega,s))$, para $t \geq \tilde{0}$ entonces

$$\begin{aligned} x({}^ot) &\approx X(t) \\ &= X_0 + \sum_{s=\tilde{0}}^{t} F(s, X(\omega,s))\Delta t + \sum_{s=\tilde{0}}^{t} G(s, X(s))\Delta\chi(s) \\ &\approx x_0 + \int_0^{{}^ot} f(s, x(s))\mathrm{d}s + \int_0^{{}^ot} g(s, x(s))\mathrm{d}b, \end{aligned}$$

lo cual prueba la proposición para $b = {}^o\chi^+$. El caso general se sigue de la proposición 3.6.1.

Para probar que $F(s, X(\omega,s))$ y $G(s, X(\omega,s))$ son liftings de $f(s, x(\omega,s))$ y $g(s, x(\omega,s))$ respectivamente, notemos que como F y G son S-acotadas entonces existe un conjunto $\Omega' \subset \Omega$ de medida uno tal que $X(\omega,s)$ es casi

[2] Recordemos que nuestra suma $\sum_{s=\tilde{0}}^{t}$ es realmente la suma $\sum_{s=\tilde{0}}^{t-\Delta t}$ por la convención hecha con la expresión (2.3) en la página 50.

estándar para todo s cuando $\omega \in \Omega'$. Entonces si $(\omega, s) \in \Omega' \times T'$ se tiene que

$$^oF(s, X(\omega, s)) = f(^os, x(\omega, ^os)), \qquad ^oG(s, X(\omega, s)) = g(^os, x(\omega, ^os)) \tag{3.43}$$

y como $\Omega' \times T'$ tiene medida uno entonces efectivamente $F(s, X(\omega, s))$ y $G(s, X(\omega, s))$ son liftings de $f(s, x(\omega, s))$ y $g(s, x(\omega, s))$, lo cual prueba la proposición. ■

Esta última proposición es una pequeña muestra del enfoque hiperfinito de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Hasta ahora, lo que hemos hecho es elegir apropiados liftings F, G de f, g, para volver la ecuación (3.6.1) en una ecuación en diferencias hiperfinitas de la forma (3.42), para entonces obtener la solución de (3.6.1) como la parte estándar de (3.42). Pero, aquí puede haber un problema: tenemos que encontrar los liftings F, G y entonces tenemos que verificar que efectivamente son los liftings de f, g, y si f, g no son continuos puede resultar difícil de verificar esta afirmación. Sin embargo, si f, g son continuos en el espacio variable, probar que F, G son liftings de f, g no será difícil de probar, lo cual lo haremos mas adelante.

Antes vamos a necesitar una desigualdad debida a Krylov y cuya prueba se encuentra en [25], teorema 2.2.2.

Teorema 3.6.1 *Sea $x : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ un proceso de la forma*

$$x(\omega, t) = x_o + \int_0^t f(\omega, s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(\omega, s)\mathrm{d}b(\omega, s)$$

donde b es un movimiento Browniano adaptado a la filtración $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, P)$,

$$f \;:\; \Omega \times [0, 1] \;\to\; \mathbb{R}^n \qquad g \;:\; \Omega \times [0, 1] \;\to\; \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

son procesos adaptados y acotados; y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Para $d \in \mathbb{R}_+$, sea

$$\tau_d(\omega) = \inf\{t \in [0, 1] \;:\; |x(\omega, t)| \geq d\} \wedge 1.$$

Dados $d, K \in \mathbb{R}_+$ existe una constante $N = N(n, d, K)$ [3] *tal que para toda funciones f y g adaptadas y acotadas por K, y todas las funciones $h \in$*

[3] Notemos que esta constante depende de la dimensión del espacio y de la elección de d y K.

$L^{n+1}([0,1]\times\mathbb{R})$ *se tiene que*

$$E\left(\int_0^{\tau_d}(\det g(\omega,t))^{\frac{2}{n+1}}\ |h(t,x(\omega,t))|\,\mathrm{d}t\right)\le N\|h\|_{n+1}$$

■

Notemos que este resultado esta dado en el sentido estándar del análisis estocástico, por lo que necesitamos establecer el análogo hiperfinito.

Para esto necesitamos antes ciertas definiciones. Si $J\in{}^*\mathbb{R}_+$, una función $h\ :\ {}^*([0,1]\times\mathbb{R}^n\ \rightarrow\ {}^*\mathbb{R}^m$ se dice que es J-*Lipschitz* si esta es interna, acotada por J y satisface

$$\|h(t,x)-h(s,y)\|\le J\|(t,x)-(s,y)\|$$

para todo $(t,x),(s,y)\in\ {}^*([0,1]\times\mathbb{R}^n$.
Si χ es la caminata aleatoria de Anderson en ${}^*\mathbb{R}^n$, y $U\ :\ \Omega\times T\ \rightarrow\ {}^*(\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n)$ es un proceso no anticipativo tal que $U(\omega,t)$ es una matriz unitaria para todo (ω,t), entonces la parte estándar de

$$\chi'=\int U\mathrm{d}\chi$$

es un movimiento Browniano. Denotaremos por $\mathcal{U}(\chi)$ las clases de todas estas χ'.
Podemos ahora dar el resultado que buscábamos.

Proposición 3.6.3 *Sea* $\chi\ :\ \Omega\times T\ \rightarrow\ {}^*\mathbb{R}^n$ *una caminata aleatoria de Anderson. Para toda* $n\in\mathbb{N}$, $D,K\in\mathbb{R}_+$ *existen constantes* $N=N(n,D,K)\in\mathbb{R}_+$ *y* $J\in\ {}^*\mathbb{N}\ \backslash\mathbb{N}$ *tales que si* $X\ :\ \Omega\times T\ \rightarrow\ {}^*\mathbb{R}^n$ *es de la forma*

$$X(\omega,t)=X_0(\omega)+\int_0^t F(s,X(\omega,s))\mathrm{d}s+\int_0^t G(s,X(\omega,s))\mathrm{d}\chi'(\omega,s)\quad(3.44)$$

donde

$$F\ :\ {}^*([0,1]\times\mathbb{R}^n)\ \rightarrow\ {}^*\mathbb{R}^n\qquad G\ :\ {}^*([0,1]\times\mathbb{R}^n)\ \rightarrow\ {}^*(\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n)$$

son J-*Lipschitz y acotadas por* $K, X_0\in\ {}^*\mathbb{R}^n$, *y* $chi'\in\mathcal{U}(\chi)$, *entonces*

$${}^oE\left(\int_0^{\sigma_D}(\det G(s,X(\omega,s)))^{\frac{2}{n+1}}\ |H(s,X(\omega,s))|\ \mathrm{d}t\right)\ \le\ N^o\|H\|_{n+1}\quad(3.45)$$

Para toda función J-Lipschitz $H : {}^*([0,1] \times \mathbb{R}^n) \to {}^*\mathbb{R}$ y donde

$$\sigma_D = \text{ínf}\{t \in T \ : \ |X(\omega,t)| \geq D\} \wedge 1.$$

Prueba.-
Primero, observemos que podemos tomar J independiente de $(n, D, K) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Si podemos encontrar un adecuado $J(n, D, K)$ para cada tripleta, entonces por la saturación existe un $J \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ mas pequeño que todos los demás, y por tanto este J funciona para cualquier elección de n, D y K.

Entonces consideremos el caso en que $J \in \mathbb{N}$, entonces F y G son S-continuas y podemos definir funciones f y g como

$$f({}^ot, {}^ox) = {}^oF(t,x) \qquad g({}^ot, {}^ox) = {}^oG(t,x)$$

si x es la parte estándar de X, entonces

$$x(\omega,t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, x(\omega,s))\mathrm{d}b'(\omega,s) \tag{3.46}$$

donde $x_0 = {}^oX_0$ y $b' = {}^o\chi'^+$, ya que si X_0 no es casi estándar, entonces $\sigma_D = 0$ y no tendríamos nada que probar.

Aplicando el teorema 5.2 a x con $d = D + 1$ tenemos

$$E\left(\int_0^{\tau_d} (\det\ g(s, x(s,\omega)))^{\frac{2}{n+1}}\ |h(s, x(s,\omega))|\mathrm{d}s\right) \leq N(n,d,K)\|h\|_{n+1} \tag{3.47}$$

esto porque todas las funciones J-Lipschitz son S-continuas y S-acotadas, por lo que se sigue de (3.47) que para todas las funciones H que son J-Lipschitz

$$E\left(\int_0^{\tau_D} (\det\ G(s, X(s,\omega)))^{\frac{2}{n+1}}\ |H(s, X(s,\omega))|\mathrm{d}s\right) \leq N(n, D{+}1, K)\|H\|_{n+1} + \frac{1}{J}, \tag{3.48}$$

donde $1/J$ es sumado para eliminar el caso en que se tiene igualdad en (3.47).

Consideremos el conjunto A definido como el conjunto de las $J \in {}^*\mathbb{N}$ tal que (3.48) se satisface para todas las funciones F, G, H que son S-lipschitz y para toda $X_0 \in {}^*\mathbb{R}^d$, y toda $\chi' \in \mathcal{U}(\chi)$.
Como $\mathbb{N} \subset A$ entonces A contiene un infinito J, por lo que entonces se tiene

que $1/J$ es un infinitesimal y se tiene la proposición ■

Ahora bien, para usar la proposición anterior debemos saber como encontrar funciones J-Lipschitz. Sea $h : {}^*\mathbb{R}^m \to {}^*\mathbb{R}^k$ una función interna, S-acotada. Si $x \in \mathbb{R}^m$, sea $[x]^J$ sea la caja centrada en x y con tamaño de lado $1/\sqrt{J}$, si $J \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tenemos que la función h^J definida como

$$h^J(x) = \frac{1}{m([x]^J)} \int_{[x]^J} h(x) \mathrm{d}m(x),$$

donde m es la medida de Lebesgue, es J-Lipschitz.

Otro hecho importante a recalcar es que la proposición, nos dice que necesitamos llevar la cuenta de los puntos en los que ${}^o\det(G(s, X(\omega, s)) = 0$, porque la cota no nos dice nada a este respecto. Aunque el siguiente resultado nos da luz acerca de estos.

Lema 3.6.1 *Sea $a : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ una función medible y acotada que toma valores no negativos y simétricos. Entonces a^J es un lifting J-Lipschitz de a que también toma valores no negativos y simétricos. Más aun, para cada $M \in \mathbb{R}_+$ existe un $m \in \mathbb{R}_+$ tal que si $\det {}^*a(s, y) \geq M$ para todo $(s, y) \in [(t, x)]^J$ entonces $\det a^J(t, x) \geq m$.*

Prueba.-
Por el teorema de Anderson-Lusin 2.3.1 en la página 57, sabemos que ${}^*a$ es un lifting de a, y entonces $a^J = {}^*a^J$ es un lifting de a que es J-Lipschitz, por lo cual se prueba la primera parte del lema.

Para probar la última parte del lema, definamos

$$l(B) = \text{ínf}\{ \langle Bx, x \rangle \ : \ \|x\| = 1\}$$

para toda matriz B de $n \times n$ no negativa y simétrica. Notemos, además que

$$l(B + C) \geq l(B) + l(C). \tag{3.49}$$

Ahora, como $\det B$ es el producto de los eigenvalores de B y $l(B)$ es el mas pequeño de ellos se tiene

$$l(B)^n \leq \det\ B \leq \|B\|^{n-1} l(B). \tag{3.50}$$

Volviendo a la función a, de (3.50) tenemos que si det $^*a(s,y) \geq M$ para toda $(s,y) \in [(t,x)]^J$, entonces

$$l(^*a(s,y)) \geq \frac{M}{\|a\|^{n-1}}$$

para esas mismas (s,y), y usando la subaditividad (3.49) obtenemos que

$$l(a^J(t,x)) \geq \frac{M}{\|a\|^{n-1}}$$

y finalmente, usando (3.50) de nuevo obtenemos

$$\det(a^J(t,x)) \geq \left(\frac{M}{\|a\|^{n-1}}\right)^n$$

por lo que al elegir m como el lado derecho de la desigualdad queda probado el lema. ■

Ahora, vamos a probar que la solución a la ecuación diferencial estocástica (3.37) existen, aun en el caso en que f y g no son continua en el espacio variable, siempre que el determinante de g sea acotado por abajo.[4] Una solución *débil* de este tipo fue primero obtenida por Krylov [25] mientras que una solución fuerte fue dada por Keisler [24].

Teorema 3.6.2 *Sea*

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \qquad g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$$

funciones medibles y acotadas, y sumamos que existe un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que $|\det\ g(t,y)| > \epsilon$ para toda $(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$. Para toda variable aleatoria x_0 $\mathcal{B}_0$-medible y para todo movimiento Browniano b adaptado a $(\Omega, \{\mathcal{B}_t\}, L(P))$ la ecuación

$$x(\omega,t) = x_0(\omega) + \int_0^t f(s,x(\omega,s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s,x(\omega,s))\mathrm{d}b(\omega,s) \qquad (3.51)$$

tiene una solución.

■

[4]Donde acotado por abajo significa que existe una $m \in \mathbb{R}_+$ tal que $\det g \geq m$

Capítulo 4

Procesos de Lévy Hiperfinitos.

Los procesos de Lévy son esencialmente procesos estocásticos con incrementos independientes y estacionarios, ellos tienen como casos particulares procesos como el movimiento Browniano y el proceso Poisson y Poisson compuesto, de ahí que su estudio sea tan importante en la teoría de la probabilidad.

En este capítulo abordaremos este tipo de procesos desde el enfoque no estándar usando mucha de la teoría desarrollada a lo largo de los capítulos anteriores. Se ha seguido los artículos [28] y [38], además del libro [2].

4.1. Introducción a Procesos de Lévy Hiperfinitos.

Sea $T = \{k\Delta t \,:\, k \in {}^*\mathbb{N}_0\}$ donde Δt es infinitesimal y ${}^*\mathbb{N}_0 = {}^*\mathbb{N} \cup \{0\}$. consideraremos procesos internos de la forma $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}^d$ donde $d \in \mathbb{N}$ es finito, y $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Además, escribiremos $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ para denotar los incrementos de X al tiempo $t \in T$. El espacio de Loeb de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ será denotado por $(\Omega, L(\mathcal{F}), L(P))$ como antes.

Nuestras caminatas aleatorias hiperfinitas serán especificadas por un conjunto $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_H\}$ de elementos en ${}^*\mathbb{R}^d$ y un conjunto de numeros positivos $\{p_a\}_{a\in A}$ tales que $\sum_{a\in A} p_a = 1$; llamaremos a A el conjunto de incrementos de X y a $\{p_a\}_{a\in A}$ las probabilidades de transición.

De esta manera tenemos la siguiente definición.

Definición 4.1.1 *Una caminata aleatoria hiperfinita con incrementos A y probabilidades de transición $\{p_a\}_{a\in A}$ es un proceso interno $L : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}^d$ tales que*

(i) $L(0) = 0$.

(ii) *Los incrementos $\Delta L(0), \Delta L(\Delta t), \ldots, \Delta L(t)$ son *-independientes.*

(iii) *para toda $a \in A$ y todo $t \in T$ se tiene que*

$$P(\Delta L(\omega, t) = a) = p_a.$$

Diremos, además, que $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ será la filtración generada por L.

Existen varios ejemplos de procesos de Lévy, a continuación mostramos algunos que serán de vital importancia en este trabajo.

Ejemplo 1.-

a) Sea α cualquier número, tomando A como $A = \{\alpha\Delta t\}$ y $p_{\alpha\Delta t} = 1$, entonces tenemos que

$$1 = p_{\alpha\Delta t} = P(\Delta L(\omega, t) = \alpha\Delta t)$$

para toda $a \in A$ y todo $t \in T$, por lo cual se tiene que $L(\omega, t) = \alpha t$.

b) Sea $A = \{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\}$ y $p_{-\sqrt{\Delta t}} = p_{\sqrt{\Delta t}} = 1/2$. Entonces L es la caminata aleatoria hiperfinita o el proceso de Anderson, esto por lo visto en el capítulo 2.

c) Sea $\nu \in \mathbb{R}$ y $A = \{0, 1\}$ y tomando a $p_0 = 1 - \nu\Delta t$, $p_1 = \nu\Delta t$ entonces Loeb mostró en [29], ejemplo 5 de la página 119 que L es un proceso Poisson (que ahora se conoce como proceso Poisson de Loeb).

Introduzcamos ahora el vector $\mu_L \in {}^*\mathbb{R}^d$ definido como

$$\mu_L := \frac{1}{\Delta t} E[\Delta L(0)] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{a\in A} a p_a \tag{4.1}$$

además, tenemos que para todo $s \in T$

$$\begin{aligned} E(\Delta L(s)) &= \sum_{a\in A} \Delta L(s) P(\Delta L(s) = a) \\ &= \sum_{a\in A} a p_a \\ &= E(\Delta L(0)) \end{aligned}$$

en vista de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
E[\text{Ł}(t)] &= E\left(\sum_{s<t} \Delta L(s)\right) = \sum_{s<t} E(\Delta L(s)) \\
&= \sum_{s<t} E(\Delta L(0)) \frac{\Delta t}{\Delta t} = \frac{E(\Delta L(0))}{\Delta t} \sum_{s<t} \Delta t \\
&= \frac{t}{\Delta t} E(\Delta L(0)) = t\mu_L
\end{aligned}$$

Notemos, también, que el proceso definido como $M_L(t) = L(t) - t\mu_L$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ generada por L. Definamos el numero no negativo $\sigma_L \in {}^*\mathbb{R}^d$ dado por

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{\Delta t} E\left(|\Delta L(0)|^2\right) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{a\in A} |a|^2 p_a \tag{4.2}$$

de donde tenemos el siguiente lema.

Lema 4.1.1 *para todo $t \in T$ se tiene*

$$E\left(|L(t)|^2\right) \; = \; t\sigma_L^2 + |\mu_L|^2 t(t - \Delta t)$$

Prueba.-
Primero establezcamos un hecho preliminar, para todo $s \in T$ tal que $s < t$ se tiene que

$$\begin{aligned}
E(|\Delta L(s)|^2) &= \sum_{a\in A} |\Delta L(s)|^2 P(\Delta L(s) = a) \\
&= \sum_{a\in A} a^2 \, p_a \\
&= E(|\Delta L(0)|^2)
\end{aligned}$$

por lo que entonces como $\Delta L(s)$ y $\Delta L(t)$ son independientes para $s \neq t$, tenemos

$$
\begin{aligned}
E\left(|L(t)|^2\right) &= E\left[\left(\sum_{r<t}\Delta L(r)\right)\left(\sum_{s<t}\Delta L(s)\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{s<t}|\Delta L(s)|^2\right) + E\left[\sum_{s<t,r<t,r\neq s}\Delta L(r)\Delta L(s)\right] \\
&= \sum_{s<t} E\left(|\Delta L(s)|^2\right) + \sum_{s<t,r<t,r\neq s} E\left[\Delta L(r)\Delta L(s)\right] \\
&= \sum_{s<t} E\left(|\Delta L(0)|^2\right)\frac{\Delta t}{\Delta t} + \sum_{s<t,r<t,r\neq s} E[\Delta L(r)]\cdot E[\Delta L(s)] \\
&= \frac{E\left(|\Delta L(0)|^2\right)}{\Delta t}\sum_{s<t}\Delta t + \sum_{s<t,r<t,r\neq s}|\mu_L|^2\Delta t^2 \\
&= t\sigma_L^2 \ + \ |\mu_L|^2 \sum_{s<t,r<t,r\neq s}\Delta t^2
\end{aligned}
$$

ahora, veamos que la segunda suma nos queda como

$$
\begin{aligned}
\sum_{s<t,r<t,r\neq s}\Delta t^2 &= \sum_{r<t}\Delta t\left(\sum_{s<r}\Delta t + \sum_{r<s}\Delta t\right) \\
&= \sum_{r<t}\Delta t\left(\sum_{s<t}[\Delta t] \ - \Delta t\right) \\
&= t(t-\Delta t)
\end{aligned}
$$

por lo que entonces nos queda

$$
E\left(|L(t)|^2\right) = t\sigma_L^2 \ + \ |\mu_L|^2 t(t-\Delta t)
$$

con lo que se prueba el lema. ■

Tenemos la siguiente definición la cual resultará muy importante mas adelante.

Definición 4.1.2 *Sea L una caminata aleatoria hiperfinita. Diremos que L es un* proceso de Lévy hiperfinito *si el conjunto*

$$
\{\omega \ : \ L(\omega,t) \ \ \textit{es finito para casi todo} \ \ t\in T \ \ \textit{finito}\}
$$

tiene medida de Loeb 1.

A primera instancia parece un poco forzada la definición, pues no se ve claro como verificar la condición pedida para que una caminata aleatoria sea un proceso de Lévy hiperfinito, no obstante encontraremos maneras en las que es sencillo checarlo, esto usando una descripción que daremos en términos del conjunto A y de p_a.

Para lograr esto ultimo necesitamos un poco de teoría previa.

4.1.1. Procesos de Lévy hiperfinitos con incrementos finitos.

Comenzaremos esta sección con un lema, no sin antes recordar que $q \lessapprox p$ significa que $q < p - \epsilon$ para todo infinitesimal ϵ.

Lema 4.1.2 *Asumiendo que* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *es un espacio de medida interno tal que* $P(\Omega)$ *es finito y sea* $F : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ *sea una función interna* $\mathcal{A}$*-medible. Si* $\int |F|^p \mathrm{d}P$ *es finita para alguna* $p \in {}^*\mathbb{R}_+$*. Entonces* $|F|^q$ *es* S*-integrable para toda* $q \in {}^*\mathbb{R}_+$*, tal que* $q \lessapprox p$*.*

Prueba.-
como $p > q$ y $\int |F|^p \mathrm{d}P$ es finita, entonces $\int |F|^q \mathrm{d}P$ también debe ser finita. Entonces solo resta probar que si $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) \approx 0$ implica que $\int_A |F|^q \mathrm{d}P \approx 0$, usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned} \int_A |F|^q \mathrm{d}P &= \int \mathbb{1}_A |F|^q \mathrm{d}P \\ &\leq \left(\int In_A^{\frac{p}{p-q}} \mathrm{d}P\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int |F|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{q}{p}} \\ &= P(A)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int |F|^p \mathrm{d}P\right)^{\frac{q}{p}}, \end{aligned}$$

y como $q \lessapprox p$ entonces se tiene que $\epsilon < p - q$ para todo infinitesimal ϵ, de donde se tiene que $p - q$ no es infinitesimal, por lo que

$$P(A)^{\frac{p-q}{p}} \approx 0,$$

de donde se tiene que

$$\int_A |F|^q \mathrm{d} \approx 0,$$

lo cual prueba el lema. ■

Notemos que este resultado solo aplica para procesos con incrementos infinitos, esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.3 *Una caminata aleatoria hiperfinita tiene* incrementos finitos *si todas las $a \in A$ son finitas. Observemos además, que como A es interna entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a| \leq N$ para toda $a \in A$.*

Vamos a dar enseguida el análogo no estándar del teorema presentado por Applebaum en [4], teorema 2.4.7 página 101.

Teorema 4.1.1 *Sea L un proceso de Lévy hiperfinito con incrementos finitos. Entonces $|L_t|^p$ es S-integrable para cualquier $p \in {}^*\mathbb{R}_+$ finito y cualquier $t \in T$ finito.*

Prueba.-
Si $L \equiv 0$ no hay nada que probar. Así, asumamos que $L \neq 0$. Definimos un tiempo de paro como

$$\tau_k = \min\{t \in T : |L_t| \geq k\}$$

y $\tau_k = {}^*\infty$ si el evento $|L_t| \geq k$ no sucede. Ahora, este tiempo de paro no toma el valor ${}^*\infty$ casi seguramente (bajo la medida P) para cualquier $K \in {}^*\mathbb{R}_+$. Además, notemos que si K es infinito entonces claramente $\tau_K > 1$ casi dondequiera, en particular

$$P(\{\tau_K > 1\}) > \frac{1}{2}$$

se cumple para todos los K infinitos. Ahora, por la propiedad del *underflow* del capítulo 1 esto debe cumplirse para una K finita suficientemente grande, tomemos esta K fija y sea

$$\alpha = E(e^{-\tau_K})$$

y observemos que bajo la elección de K se tiene que $\alpha \lnapprox 1$.

Y definamos una sucesión de tiempos de paro $\{\sigma_n\}$ como $\sigma_1 = \tau_K$ y

$$\sigma_n = \min\{t \in T \ : \ t > \sigma_{n-1} \ \text{ y } \ |L_t - L_{\sigma_{n-1}}| \geq K\}$$

Observemos que los incrementos $\sigma_n - \sigma_{n-a}$ son independientes y tienen la misma distribución que τ_K. Entonces

$$E(e^{\sigma_n}) = E(e^{-\tau_K})^n = \alpha^n$$

y como K es el mayor de los incrementos de L tenemos que

$$\begin{aligned} |L_{\sigma_k} - L_{\sigma_{k-1}}| &= |L_{\sigma_k} - L_{\sigma_1} + L_{\sigma_1} - L_{\sigma_{k-1}}| \\ &\leq |L_{\sigma_k} - L_{\sigma_1}| + |L_{\sigma_1} - L_{\sigma_{k-1}}| \\ &< K + K = 2K \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$P(|L_t| \geq 2nK) \leq P(\sigma_n < t) \leq \frac{E(e^{-\sigma_n})}{e^{-t}} \leq e^t \alpha^n$$

ahora eligiendo $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tan pequeño que $\alpha e^{2K\epsilon} \lnapprox 1$ tenemos que para t finitos

$$\begin{aligned} E(e^{|L_t|}) &= \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} \int_{\{2(n-1)K \leq |L_t| < 2nK\}} e^{\epsilon |L_t|} \mathrm{d}P \\ &\leq \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} e^{\epsilon 2nK} \int_{\{2(n-1)K \leq |L_t| < 2nK\}} \mathrm{d}P \\ &\leq \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} e^{\epsilon 2nK} \int_{\{2(n-1)K \leq |L_t|\}} \mathrm{d}P \\ &\leq \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} e^{\epsilon 2nK} e^t \alpha^{n-1} \\ &= e^t \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} e^{\epsilon 2(n-1)K} e^{\epsilon 2K} e^t \alpha^{n-1} \\ &= e^t e^{\epsilon 2K} \sum_{n \in {}^*\mathbb{N}} (\alpha e^{\epsilon 2K})^{n-1} < \infty \end{aligned}$$

y como $e^{|L_t|} > |L_t|^p$ cuando $|L_t|$ es grande se sigue que $E(|L_t|)$ es finito para todo $p \in {}^*\mathbb{R}_+$, finalmente al aplicar el lema anterior se tiene la S-integrabilidad, con lo que se prueba el teorema. ■

Ahora bien, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.1 *Sea L una caminata aleatoria hiperfinita con incrementos finitos. Entonces L es un proceso de Lévy hiperfinito si y sólo si μ_L y σ_L*[1] *son finitos.*

Prueba.-
$\Longleftarrow$) Si L es un proceso de Lévy hiperfinito, entonces por el lema 4.1.1 tenemos que

$$E\left(|L(t)|^2\right) \;=\; t\sigma_L^2 + |\mu_L|^2 t(t - \Delta t)$$

y como el teorema nos garantiza que $E\left(|L(t)|^2\right)$ es finita para todo t finito entonces μ_L y σ_L son finitas.

$\Longrightarrow$) si μ_L y σ_L son finitas entonces $E\left(|L(t)|^2\right)$ es finita para todo t finito. De donde se tiene que la martingala $M_L(t) = L(T) - \mu_L(t)$ es λ^2-integrable[2] por lo cual usando que esta tiene la propiedad de que casi todas sus trayectorias son finitas para toda t finita[3] y como $L(t) = \mu_L(t) + M_L(t)$ donde μ_L es finita entonces se tiene que L es finita para casi todo t finito, de donde se tiene que es un proceso de Lévy hiperfinito. ■

Esta es una caracterización de los procesos de Lévy, mas adelante se dará otra caracterización de en que casos una caminata aleatoria hiperfinita es un proceso de Lévy hiperfinito.

mostramos ahora otro corolario que por todo lo visto acerca de las SL^2-martingalas será muy útil para proporcionarnos propiedades acerca de las trayectorias de los procesos de Lévy hiperfinitos.

Corolario 4.1.2 *Un proceso de Lévy hiperfinito L con incrementos finitos puedes ser descompuesto como*

$$L(t) = \; t\mu_L + M_L(t)$$

donde μ_L es finito y M_L es una martingala tal que $|M_L(t)|^p$ es S-integrable para todos los t finitos y $p \in {}^*\mathbb{R}_+$. En particular, M_L es una SL^2-martingala.

■

[1] Dadas en la ecuaciones (4.1) y (4.2).
[2] Recordar la definición del capítulo 3, definición 3.2.5 de la página 69.
[3] Esto es conclusión de la proposición 3.3.3 del capitulo 3.

Una vez hecha la teoría para procesos de Lévy hiperfinitos con incrementos finitos una buena idea sería tratar de aproximar cualquier proceso de Lévy mediante ellos, así pues, esto es lo que haremos ahora.

Primero introduzcamos cierta notación, escribiremos

$$q_k = \frac{1}{\Delta t} \sum_{|a|>k} p_a$$

para cualquier positivo $k \in {}^*\mathbb{R}$. Probemos el siguiente lema.

Lema 4.1.3 *Sea L es un proceso de Lévy hiperfinito. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} {}^o q_k = 0 \; [4]$$

Prueba.-
Hagamos la prueba por contradicción. Si no se cumple entonces existe un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tal que $q_k > \epsilon$ para todo $k \in^* \mathbb{R}_+$. Por la propiedad del *overflow* se tiene que existe un infinito K tal que $q_K > \epsilon$. Usando la definición de q_k y recordando que los incrementos de L son *-independientes, podemos calcular la probabilidad de que L haga un salto mas grande que k en norma antes del tiempo $t + \Delta t$ como

$$\mu \left[\bigcup_{s\leq t} \{ \, |\Delta L_s| > k \, \} \right] = (q_k \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}},$$

pero en otro sentido tenemos que para $t \in T$ infinitesimal se tiene que

$${}^o(q_k\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \leq {}^o(1 - \epsilon\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-\epsilon t} < 1$$

y como

$$\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N \to e^{-x} \qquad \text{si} \qquad N \to \infty$$

se cumple localmente uniforme para toda $x \in \mathbb{R}$, esto implica que

$$(1 - \epsilon\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \approx e^{-\epsilon t} \lnapprox 1$$

entonces con una probabilidad no infinitesimal L tiene un salto de infinito antes del tiempo t, lo cual es una contradicción, pues todas las trayectorias

[4]En el sentido que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $q_k < \epsilon$ si $k \geq N$.

de L son finitas para $t \in T$ finitas, de donde se tiene la conclusión. ■

Ahora, definamos los procesos "truncados" de un proceso de Lévy mediante

$$L^{>k}(\omega,t) = \sum\{\Delta L(\omega,s) \ : \ s < t \quad \text{y} \quad |\Delta L(\omega,s)| > k\}$$

y

$$L^{\leq k}(\omega,t) = \sum\{\Delta L(\omega,s) \ : \ s < t \quad \text{y} \quad |\Delta L(\omega,s)| \leq k\},$$

entonces tenemos la siguiente afirmación.

Lema 4.1.4 *Sea L un proceso de Lévy hiperfinito. Para $k \in {}^*\mathbb{R}$ finito suficientemente grande, los procesos $L^{>k}$ y $L^{\leq k}$ son procesos de Lévy hiperfinitos.*

Prueba.-
Los procesos definidos arriba son caminatas aleatorias, entonces solo tenemos que probar que sus trayectorias son finitas en tiempos finitos casi seguramente. Pero observemos además que como $L = L^{>k} + L^{\leq k}$ entonces podemos escribir $L - L^{>k} = L^{\leq k}$ y como la suma de dos procesos de Lévy es a su vez otro proceso de Lévy entonces solo tenemos que probar que $L^{>k}$ es un proceso de Lévy para k suficientemente grande. Para lo cual, hagamos lo siguiente, elijamos k finita pero suficientemente grande tal que $\alpha := q_k$ sea finita.

Primero, probaremos que para toda $m > k$ el proceso

$$L^{(k,m]}(\omega,t) = \sum\{\Delta L(\omega,s) \ : \ s < t \quad \text{y} \quad k < |\Delta L(\omega,s)| \leq m\}$$

es un proceso de Lévy hiperfinito. Pero como $L^{(k,m]}$ tiene incrementos finitos entonces solo puede llegar a infinito si tiene un numero infinito de saltos. Mas como la probabilidad de que L tenga un salta mayor que k en cualquier tiempo es $q_k\Delta t = \alpha\Delta t$, de donde se tiene que la probabilidad de que $L^{(k,m]}$ tenga un numero infinito de saltos en un tiempo finito es 0 ya que la probabilidad de que L tenga exactamente $n \in \mathbb{N}$ saltos de tamaño mas grande que k antes de t esta dado por

$$\binom{t/\delta t}{n}(1-\alpha\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}-n}(\alpha\Delta t)^n \approx \left(\frac{t}{\Delta t}\right)^n \frac{1}{n!}e^{-\alpha t}(\alpha\Delta t)^n \approx e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!}$$

y sumando sobre todas las $n \in \mathbb{N}$ se tiene que la probabilidad de Loeb de que $L^{(k,m]}$ haga solo un numero finito de saltos antes de t es 1.

Regresando al proceso $L^{>k}$, veamos que si este no es un proceso de Lévy hiperfinito, entonces debe haber un t finito tal que

$$p := P_L(L^{>k}(s) \quad \text{es infinito para algún} \quad s \leq t)$$

es no infinitesimal, entonces

$$P[\omega \ : \ L^{(k,m]}(\omega, s) = L^{>k}(\omega, s) \ \text{ para todo } \quad s \leq t] = (1 - q_m \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \approx e^{-q_m t}$$

que de acuerdo con el lema anterior podemos tomar $e^{-q_m t}$ tan cercano a 1 como queramos al elegir a m suficientemente grande pero finito. En particular, podemos tomar $1 - e^{-q_m t} < p$. Pero entonces, $L^{>k}$ es igual casi seguramente al proceso finito $L^{(k,m]}$ sobre un conjunto de medida mayor que $1 - p$, lo cual es una contradicción. ■

Este lema se satisface para cualquier k no infinitesimal, sin embargo para k infinitesimales en general no es así, esto se muestra mas adelante.

De la ultima parte de la demostración del lema anterior se tiene la prueba del siguiente corolario.

Corolario 4.1.3 *Sea L una caminata aleatoria hiperfinita. Si $L^{\leq m}$ es un proceso de Lévy hiperfinito para m finito, pero suficientemente grande y si además ${}^o q_m \to 0$ entonces L es un proceso de Lévy hiperfinito.*

Prueba.-
como se mostró en la prueba del lema anterior, la afirmación ${}^o q_n \to \infty$ si $n \to \infty$ es suficiente para mostrar que $L^{>k}$ es un proceso de Lévy. Pero por hipótesis también lo es $L^{\leq m}$, y como además tenemos que $L = L^{<k} + L^{\leq m}$ y usando que la suma de dos procesos de Lévy es a su vez proceso de Lévy, entonces se tiene el corolario. ■

Ahora podemos dar el resultado que nos garantiza que para cada proceso de Lévy hiperfinito existe un proceso de Lévy hiperfinito pero esté con incrementos finitos tal que podemos acercarnos tanto como queramos en probabilidad.

Proposición 4.1.1 *Sea L un proceso de Lévy hiperfinito. Para cada $t \in T$ y cada $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ existe un proceso de Lévy hiperfinito $\hat{L}$ con incrementos finitos tal que*

$$P\Big(\{\omega \ : \ L(\omega, s) = \hat{L}(\omega, s) \quad \textit{para toda} \quad s \leq t\}\Big) > 1 - \epsilon.$$

Prueba.-
Sabemos que para $k \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande, pero finita, el proceso $L^{\leq k}$ es un proceso de Lévy hiperfinito con incrementos finitos. Entonces

$$P\Big(\{\omega \ : \ L(\omega,s)=\hat{L}(\omega,s) \ \ \text{para toda} \quad s\leq t\}\Big)=(1-q_k\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}\approx e^{-q_k t}$$

que de acuerdo a la prueba del lema anterior se tiene que $e^{-q_k t} \to 0$ si $k\to\infty$, y si tomamos k suficientemente grande y hacemos $\hat{L}=L^{\leq k}$ obtenemos la proposición. ■

Esta proposición nos resulta útil ya que podemos estudiar las propiedades de las trayectorias de cualquier proceso de Lévy hiperfinito usando estas aproximaciones.

Hasta ahora sabemos que si L es un proceso de Lévy hiperfinito, entonces para k finita, pero suficientemente grande

$$q_k=\frac{1}{\Delta t}\sum_{|a|>k}p_a$$

es finita. Ahora, definamos una medida interna sobre todos los subconjuntos B de ${}^*\mathbb{R}^d$ mediante

$$\hat{\nu}(B)=\frac{1}{\Delta t}\sum_{a\in B}p_a$$

y notemos que B es una generalización de q_k que además es muy natural tomar. Podemos decir algunas cosas de $\hat{\nu}$, una es la siguiente.

Proposición 4.1.2 *Sea L un proceso de Lévy hiperfinito y supongamos que B es un subconjunto interno de ${}^*\mathbb{R}^d$ el cual no contiene elementos infinitamente chicos. Entonces $\hat{\nu}(B)$ es finita.*

Prueba.-
Primero observemos que por el lema 4.1.3 es suficiente con mostrar que B es acotado por arriba por un k real. Mas aun, por el lema 4.1.4 podemos asumir que el proceso dado por

$$L^{\leq k}(\omega,t)=\sum\{\Delta L(\omega,s) \ : \ s<t \ \ \text{y} \quad |\Delta L(\omega,s)|\leq k\}$$

es un proceso de Lévy hiperfinito. Y como $L^{\leq k}$ tiene incrementos finitos tenemos que

$$\sigma^2_{L^{\leq k}} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{|a|\leq k} |a|^2 p_a$$

es finito por el corolario 4.1.1. Además, como B es interno y no contiene ningún elemento que sea infinitesimal, entonces existe un numero real positivo ϵ tal que $\epsilon < |a|$ para todo $a \in B$. Por lo que se tiene que

$$\epsilon^2 \hat{\nu}(B) = \epsilon^2 \frac{\sum_{a\in B} p_a}{\Delta t} < \frac{\sum_{a\in B} |a|^2 p_a}{\Delta t} \leq \sigma^2_{L^{\leq k}},$$

y como ϵ no es infinitesimal y $\sigma_{L^{\leq k}}$ es finito entonces se tiene que

$$\hat{\nu}(B) < \frac{\sigma^2_{L^{\leq k}}}{\epsilon^2}.$$

■

4.2. El Operador de Lévy-Khintchine no Estándar.

En esta sección daremos la versión no estándar de la formula de Lévy-Khintchine (aunque aqui estará dada en forma de operador), que en el caso estándar nos sirve para escribir la función característica un proceso de Lévy como la suma de las funciones características de un drift mas un movimiento Browniano mas un procesos Poisson compuesto de saltos acotados y un procesos Poisson compuesto de saltos no acotados.

Igual que antes usaremos la línea del tiempo T definida desde el capítulo 2, es decir, tendremos que para alguna $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ escribiremos

$$\Delta t = \frac{1}{N}.$$

Dada una medida de probabilidad interna δ sobre ${}^*\mathbb{R}^d$, definimos el operador sobre el espacio de funciones internas ${}^*\mathcal{C}^2_b(\mathbb{R};\mathbb{C})$ de ${}^*\mathbb{R}^d$ en ${}^*\mathbb{C}$ con derivadas continuas y acotadas de orden ≤ 2 como

$$L\phi(x) = \int_{{}^*\mathbb{R}^d} \frac{\phi(x+y) - \phi(x)}{\Delta t}\delta(\mathrm{d}y), \qquad \phi \in^* \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R};\mathbb{C}). \tag{4.3}$$

Llamamos a L el generador asociado a δ.

Diremos que tripleta $(\gamma, \mathbb{A}\ , \nu)$ es de Lévy si $\gamma \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{A}$ es una matriz estándar simétrica positiva definida de dimensión $d \times d$ y ν es una medida de Borel estándar sobre $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ que satisface

$$\int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(\mathrm{d}y) \ < \infty$$

se pueden tener condiciones equivalentes, para esto puede consultarse [37], comentario 8.4. Hagamos la convención de que $\nu(0) = 0$, por lo cual ν estará definida ahora sobre todo $\mathbb{R}^d$.

Notemos que para $\phi \in {}^*\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}\ )$ y $x \in {}^*\mathbb{R}$ fija, la función

$$y \longmapsto \left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)$$

es ${}^*\nu$-integrable, con integral finita sobre ${}^*\mathbb{R}^d$ si ϕ tiene derivadas de orden $0, 1, 3$ que son S-acotadas. Más aun, para $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}\ )$ y $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene que como

$$\begin{aligned} \frac{|\phi(x+y) - \phi(x)(1+|y|^2) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}|}{1+|y|^2} &= \frac{|\phi(x+y) - \phi(x)|y|^2 + \frac{1}{2}\langle y, \mathbb{H}\ \phi(\lambda_{x,y})y\rangle|}{1+|y|^2} \\ &\leq C\frac{|y|^2}{1+|y|^2} \end{aligned}$$

para alguna $\lambda_{x,y}$ entre x y $x+y$ y alguna constante C y donde $\mathbb{H}$ denota $[\partial_{i,j}]_{1\leq i,j<d}$ entonces se tiene que la función

$$y \longmapsto {}^{o}\!\left({}^*\phi(x+y) - {}^*\phi(x) - \frac{\langle y, \nabla{}^*\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)$$

es ν-integrable.

Ahora tenemos la primera parte del teorema principal de esta sección.

Teorema 4.2.1 *Sea $(\gamma, \mathbb{A}\ , \nu)$ sea una tripleta de Lévy, con $\mathbb{A}\ = [a_{i,j}]_{1\leq i,j<d}$. Entonces existe una medida interna de probabilidad δ sobre ${}^*\mathbb{R}^d$ tal que el generador asociado L satisface*

$$\begin{aligned} L\phi(x) \ &\approx \ \langle \gamma, \nabla\phi(x)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j<d} a_{i,j}\partial_{i,j}\phi(x) \\ &+ \int_{{}^*\mathbb{R}^d}\left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right){}^*\nu(\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{4.4}$$

para cada $\phi \in {}^*\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *con derivadas de orden* $0,1,2$, S*-acotadas y* S*-continuas y* $x \in {}^*\mathbb{R}$. *Más aun, ambos lados de (4.4) son acotados.*

Prueba.-
Iniciemos definiendo $\overline{\mathbb{A}}$ como $\mathbb{A}$ mas una perturbación infinitesimal mediante

$$\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A} + i\mathbb{I}$$

donde i es un infinitesimal y $\mathbb{I}$ es la matriz identidad. de esto tenemos que $\overline{\mathbb{A}}$ es simétrica, positiva definida y $\overline{\mathbb{A}} \approx \mathbb{A}$.

Tomemos $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}^d$ fija tal que

$$\epsilon \approx 0 \qquad \text{y} \qquad \epsilon\sqrt{N} \approx \infty.\text{ [5]} \tag{4.5}$$

Definamos para $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos internos dados por

$$C_n = \left\{ r \in {}^*\mathbb{R} \ : \ 2\epsilon < r < \frac{1}{n}, \ \text{y} \ \ \frac{1}{r^2}\int_{|y|\geq r} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,{}^*\nu(\mathrm{d}y) \ < \infty \right\},$$

y notemos que cada $C_n \neq \emptyset$ de acuerdo a la hipótesis de ν, entonces ellos forman una sucesión decreciente de conjuntos internos no vacíos y por tanto por el principio de la saturación podemos encontrar algún $\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, tal que ξ satisface

$$0 \approx \xi > 2\epsilon \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt{\Delta t}}{\xi^2}\int_{|y|\geq r} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,{}^*\nu(\mathrm{d}y) \ < 1. \tag{4.6}$$

Ahora bien, definamos

$$J_\xi = \int_{|y|\geq \xi} \frac{y}{1+|y|^2}\,{}^*\nu(\mathrm{d}y) \ \in {}^*\mathbb{R}^d.$$

[5] por ejemplo podemos tomar $\epsilon = N^{-\frac{1}{3}}$ con $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

y notemos que

$$\begin{aligned} |J_\xi| &= \left| \int_{|y|\geq\xi} \frac{y}{1+|y|^2} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \right| \\ &\leq \int_{|y|\geq\xi} \left| \frac{y}{1+|y|^2} \right| {}^*\nu(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{|y|\geq\xi} \frac{|y|}{1+|y|^2} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \\ &\leq \frac{1}{\xi} \int_{|y|\geq\xi} \frac{|y|^2}{1+|y|^2} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \\ &< \xi\sqrt{N}, \end{aligned}$$

usando la hipótesis sobre ν y las propiedades que nos da la ecuación (4.6). En particular, tenemos que

$$\sqrt{\Delta t}|J_\xi| \approx 0. \tag{4.7}$$

Ahora, definamos α como

$$\alpha = \Delta t(\gamma - J_\xi) \ \in {}^*\mathbb{R}^d. \tag{4.8}$$

Y por (4.7) tenemos que

$$\sqrt{N}\alpha \approx 0. \tag{4.9}$$

Si denotamos por $\mathcal{N}$ la densidad Gaussiana

$$\mathcal{N}[a;\sigma] = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\langle y-a, \sigma^{-1}(y-a)\rangle\right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}\,(\det\sigma)^{\frac{1}{2}}}$$

donde $a \in {}^*\mathbb{R}^d$ y σ es una matriz de $d \times d$ simétrica positiva definida, que es la matriz de varianzas y covarianzas.

Así, de (4.5) y (4.9) obtenemos

$$\varrho := \sqrt{N}\alpha - \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} y\mathcal{N}[\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,](y)\mathrm{d}y \ \approx 0, \tag{4.10}$$

y

$$\vartheta := 1 - \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} \mathcal{N}[\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,](y)\mathrm{d}y \ \approx 0. \tag{4.11}$$

Ahora bien, definamos

$$\kappa := \frac{\sqrt{\Delta t}}{1-\vartheta}\varrho \in {}^*\mathbb{R}^d \tag{4.12}$$

entonces (4.11) y (4.12) implican

$$\sqrt{N}\kappa = \frac{\sqrt{N\Delta t}}{1-\vartheta}\varrho = \frac{\varrho}{1-\vartheta} \approx 0 \tag{4.13}$$

Ahora tenemos las siguientes desigualdades que se obtienen de (4.5), (4.6) y (4.13)

$$|\kappa| < \epsilon < 2\epsilon < \xi \approx 0. \tag{4.14}$$

Ahora, definamos una medida η como la suma de medidas sobre ${}^*\mathbb{R}^d$ con soportes disjuntos mediante

$$\eta(\mathrm{d}y) = \mathcal{N}[\alpha+\kappa;\Delta t\overline{\mathbb{A}}\,](y)\mathbb{1}_{|y-\kappa|\leq\epsilon}(y)\mathrm{d}y \;+\; \Delta t\mathbb{1}_{|y|\geq\xi}(y)^*\nu(\mathrm{d}y), \tag{4.15}$$

donde $\mathbb{1}$ denota la función indicadora y $\mathcal{N}$ es la densidad Gaussiana.

Entonces

$$\delta(\mathrm{d}y) := \frac{\eta(\mathrm{d}y)}{\eta({}^*\mathbb{R}^d)} \tag{4.16}$$

es la normalización de η que de igual manera esta definida sobre soportes disjuntos.

Sea $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ una función integrable y si $Y \sim \mathcal{N}(\alpha+\kappa, \Delta t\overline{\mathbb{A}}\,)$ haciendo un cambio de variable, como

$$Y' = \frac{Y-\kappa}{\sqrt{\Delta t}}$$

entonces

$$E[Y'] = \frac{E(Y-\kappa)}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{\alpha+\kappa-\kappa}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta t}} = \alpha\sqrt{N}$$

y

$$\mathrm{Var(Y')} = \frac{\mathrm{Var(Y)}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{\Delta\mathrm{t}\overline{\mathbb{A}}}{\Delta\mathrm{t}} = \overline{\mathbb{A}}$$

entonces

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\alpha\sqrt{N}, \overline{\mathbb{A}}\,\right)$$

entonces tenemos que

$$\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} f(y)\mathcal{N}(\alpha+\kappa;\Delta t\overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y = \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} f(\sqrt{\delta t}y+\kappa)\mathbb{N}(\sqrt{N}\alpha;\overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y,$$

o bien, lo podemos reescribir como

$$\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} f(y)\eta(\mathrm{d}y) = \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} f(\sqrt{\delta t}y+\kappa)\mathbb{N}(\sqrt{N}\alpha;\overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y, \tag{4.17}$$

Ahora tenemos la siguiente afirmación.

Afirmación 1: $\eta({}^*\mathbb{R}^d)\approx 1$. Para probar esta afirmación escribamos

$$\eta({}^*\mathbb{R}^d) = \int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} f(y)\eta(\mathrm{d}y) + \Delta t\int_{\xi\leq|y|\leq 1} {}^*\nu(\mathrm{d}y) + \Delta t\int_{|y|\geq 1} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \tag{4.18}$$

y usando (4.17) tenemos que la primera integral se puede reescribir como

$$\int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} \mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha;\overline{\mathbb{A}})(y)\mathrm{d}y$$

el cual es ≈ 1 por (4.10) y (4.11).

Ahora si $\xi\leq|y|\leq 1$ entonces tenemos que $\xi^2\leq|y|^2$ y $|y|^2\leq 1$ de donde tenemos que $|y|^2+1\leq 2$ entonces $(|y|^2+1)^{-1}\geq(1/2)$ por lo cual

$$\frac{\xi^2}{2}\leq\frac{|y|^2}{1+|y|^2} \qquad \text{si} \qquad \xi\leq|y|\leq 1,$$

y aplicando esto ultimo a la segunda integral de (4.18) tenemos que

$$\Delta t\int_{\xi\leq|y|\leq 1} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \leq \frac{2\Delta t}{\xi^2}\int_{\xi\leq|y|\leq 1}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}{}^*\nu(\mathrm{d}y)$$

la cual es ≈ 0 por (4.7).

Sobre el otro intervalo, tenemos que como $1\leq|y|$ entonces $1\leq|y|^2$ por lo que $1\leq 2|y|^2-|y|^2$ de donde $1+|y|^2\leq 2|y|^2$ y finalmente tenemos

$$1\leq\frac{2|y|^2}{1+|y|^2}$$

y si aplicamos esto a la tercera integral de (4.18) tenemos

$$\Delta t \int_{|y|\geq 1} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \leq 2\Delta t \int_{|y|\geq 1} \frac{2|y|^2}{1+|y|^2} {}^*\nu(\mathrm{d}y) \approx 0$$

por la hipótesis sobre ν, por lo cual se tiene la afirmación.

ahora mostremos otra afirmación.

Afirmación 2: $\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} y_i y_j \,\eta(\mathrm{d}y) \approx a_{i,j}$ donde $1 \leq i,j \leq d$
por (4.17) tenemos que

$$a_{i,j} = \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} (y_i + \sqrt{N}\kappa_i)(y_j + \sqrt{N}\kappa_j)\mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y$$

la cual al usar las expresiones (4.5), (4.9) y (4.13) tenemos que

$$a_{i,j} \approx \int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} y_i y_j \mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y$$

y como $\overline{\mathbb{A}}$ es positiva semidefinida y simétrica, junto con el hecho que $\sqrt{N}\kappa \approx 0$ y usando de nuevo (4.17) tenemos que

$$a_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} y_i y_j \,\eta(\mathrm{d}y)$$

lo cual es la afirmación.

Ahora probaremos (4.4). Sin perdida de generalidad asumamos que $\phi \in {}^*\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Entonces escribamos

$$\begin{aligned}
\eta({}^*\mathbb{R}^d)L\phi(x) &= \frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d} (\phi(x+y)-\phi(x))\,\eta(\mathrm{d}y) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d} (\phi(x+y)-\phi(x)-\langle y,\nabla\phi(x)\rangle + \langle y,\nabla\phi(x)\rangle)\,\eta(\mathrm{d}y) \\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d} (\phi(x+y)-\phi(x)-\langle y,\nabla\phi(x)\rangle)\,\eta(\mathrm{d}y) + \frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\langle y,\nabla\phi(x)\rangle\eta(\mathrm{d}y),
\end{aligned}$$

ahora existe $\lambda_{x,y}$ algún numero elegido en el intervalo x a $x+y$ tal que

$$\phi(x+y)-\phi(x)-\langle y,\nabla\phi(x)\rangle = \frac{1}{2}\langle y, \mathbb{H}\,\phi(\lambda_{x,y})y\rangle$$

donde $\mathbb{H}\,\phi$ es la matriz Hessiana $[\partial_{i,j}]_{1\leq i,j\leq d}$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\eta({}^*\mathbb{R}^d)L\phi(x) &= \frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\langle y,\mathbb{H}\,\phi(\lambda_{x,y})y\rangle\eta(\mathrm{d}y)+\frac{1}{\Delta t}\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\langle y,\nabla\phi(x)\rangle\eta(\mathrm{d}y)\\ &= I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}\frac{1}{2}\langle y,\mathbb{H}\,\phi(\lambda_{x,y})y\rangle\eta(\mathrm{d}y)\\ I_2 &= \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\geq\epsilon}\left(\phi(x+y)-\phi(x)-\frac{\langle y,\nabla\,\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\eta(\mathrm{d}y)\\ I_3 &= \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{|y-\kappa|\geq\epsilon}\frac{\langle y,\nabla\,\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\eta(\mathrm{d}y)+\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}\langle y,\nabla\,\phi(x)\rangle\eta(\mathrm{d}y)\right).\end{aligned}$$

Ahora veamos que para $|y-\kappa|\leq\epsilon$, $H_{x,y}:=\mathbb{H}\,\phi(\lambda_{x,y})-\mathbb{H}\,\phi(x)\approx 0$ entonces podemos reescribir a I_1 como

$$I_1=\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}\frac{1}{2}\langle y,\mathbb{H}\,\phi(x)\rangle\,\eta(\mathrm{d}y)+\frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}\frac{1}{2}\langle y,H_{x,y}y\rangle\,\eta(\mathrm{d}y)$$

pero entonces existen $h_{i,j}\approx 0$, con $1\leq i,j\leq d$ tales que

$$I_1=\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d}\frac{\partial_{i,j}\phi(x)}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}y_iy_j\,\eta(\mathrm{d}y)+\sum_{1\leq i,j\leq d}\frac{h_{ij}}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon}y_iy_j\,\eta(\mathrm{d}y)$$

y usando la afirmación 2 tenemos que

$$I_1\approx\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d}a_{i,j}\,\partial_{i,j}\phi(x). \tag{4.19}$$

Para I_2, por la definición de η tenemos que

$$I_2=\int_{|y|\geq\xi}\left(\phi(x+y)-\phi(x)-\frac{\langle y,\nabla\,\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\,{}^*\nu(\mathrm{d}y),$$

por lo cual se tiene

$$I_2\approx\int_{{}^*\mathbb{R}^d}\left(\phi(x+y)-\phi(x)-\frac{\langle y,\nabla\,\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\,{}^*\nu(\mathrm{d}y). \tag{4.20}$$

Y para I_3 se tiene que esta integral tiene la forma $\langle\beta, \nabla\phi(x)\rangle$ para alguna β definido como

$$\beta := \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\geq\epsilon} \frac{y}{1+|y|^2}\eta(\mathrm{d}y) + \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} y\eta(\mathrm{d}y).$$

Ahora, el primer término de β es simplemente J_ξ definida antes. Para el segundo termino, veamos que la i-ésima entrada es igual a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\leq\epsilon} y_i\eta(\mathrm{d}y) \\
= \quad & \frac{1}{\Delta t}\int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} (\sqrt{\Delta t}y_i + \kappa_i)\,\mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y \quad \text{ por (4.17)} \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} y_i\,\mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y + \frac{\kappa_i}{\Delta t}\int_{|y|\leq\epsilon\sqrt{N}} \mathcal{N}(\sqrt{N}\alpha; \overline{\mathbb{A}}\,)(y)\mathrm{d}y \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}(\sqrt{N}\alpha_i - \varrho) + \frac{\kappa_i}{\Delta t}(1-\vartheta) \quad \text{ por (4.10) y (4.11)}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\beta = J_\xi + N\alpha - \frac{\varrho}{\sqrt{\Delta t}} + \frac{\kappa}{\Delta t}(1-\vartheta)$$

y usando que $\kappa = (\sqrt{\Delta t}\varrho)/(1-\vartheta)$ se tiene que $\kappa(1-\vartheta)/\Delta t = \varrho/\sqrt{\Delta t}$ por lo cual se tiene que

$$\beta = J_\xi + N\alpha = J_\xi + \frac{\alpha}{\Delta t} = \gamma$$

entonces tenemos que

$$I_3 = \langle\gamma, \nabla\phi(x)\rangle. \tag{4.21}$$

Finalmente si tomamos las expresiones (4.19), (4.20) y (4.21) junto con la afirmación 1 tenemos la prueba del teorema. ■

Ahora presentamos el inverso del teorema anterior después de lo cual no será difícil probar el teorema para procesos de Lévy hiperfinitos.

Teorema 4.2.2 *Sea δ una medida de probabilidad interna sobre ${}^*\mathbb{R}^{\,d}$ tal que para alguna $\xi \approx 0$ se tiene que los siguiente son finitos*

(a)

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{|y|\geq \xi}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,\delta(\mathrm{d}y)$$

(b)

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{|y|\leq \xi} y_i y_j\,\delta(\mathrm{d}y) \qquad 1\leq i,j\leq d$$

(c)

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{|y|\geq \xi}\frac{y}{1+|y|^2}\,\delta(\mathrm{d}y)+\int_{|y|\leq \xi} y\,\delta(\mathrm{d}y)\right)$$

Entonces existe una tripleta de Lévy $(\gamma, \mathbb{A}, \nu)$ *para la cual se cumple lo siguiente para el generador* L *asociado con* δ *y* $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} L\phi(x) \;\; &\approx \;\; \langle \gamma, \nabla\phi(x)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq d} a_{i,j}\partial_{i,j}\phi(x) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d}\left(\phi(x+y)-\phi(x)-\frac{\langle y, \nabla\,\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\,\nu(\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Prueba.-
Primero definamos

$$\gamma := {}^{o}\!\left(\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{|y|\geq \xi}\frac{y}{1+|y|^2}\,\delta(\mathrm{d}y)+\int_{|y|\leq \xi} y\,\delta(\mathrm{d}y)\right)\right),$$

también definamos $\mathbb{A} := [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq d}$ donde

$$a_{i,j} = {}^{o}\!\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{|y|\leq \xi} y_i y_j\,\delta(\mathrm{d}y)\right)$$

y para todo subconjunto de Borel, $S \subset \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$\nu(S) := \upsilon_L(S\setminus\{0\}), \quad \text{donde} \quad \upsilon(\mathrm{d}y) = \mathbb{1}_{|y|\geq\xi}(y)\,\frac{1}{\Delta t}\,\delta(\mathrm{d}y).$$

Entonces de la condición **(a)** y la definición de ν se sigue que esta es una medida de Borel sobre $\mathbb{R}^d$ que satisface

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|y|^2}{1+|y|^2}\,\nu(\mathrm{d}y) < \infty$$

y que $\nu(\{0\}) = 0$.

En tanto que por **(c)** se tiene que $\gamma \in \mathbb{R}^d$, la condición **(b)** muestra que $\mathbb{A}$ es una matriz estándar de dimensión $d \times d$, además de que se tiene que es positiva semidefinida y simétrica. De todo esto se tiene que $(\gamma, \mathbb{A}, \nu)$ define una tripleta de Lévy.

Sea L el generador asociado con δ y sea $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ y $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces usando una prueba similar a la dada para probar el teorema 4.2.1 se tiene que podemos escribir a $L\phi(x)$ como

$$L\phi(x) = I_1 + I_2 + I_3$$

donde al igual que antes

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\le\epsilon} \frac{1}{2}\langle y, \mathbb{H}\,\phi(\lambda_{x,y})y\rangle \delta(\mathrm{d}y) \\
I_2 &= \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\ge\epsilon} \left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\delta(\mathrm{d}y) \\
I_3 &= \frac{1}{\Delta t}\left(\int_{|y-\kappa|\ge\epsilon} \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\delta(\mathrm{d}y) + \int_{|y-\kappa|\le\epsilon}\langle y, \nabla\phi(x)\rangle\delta(\mathrm{d}y)\right).
\end{aligned}$$

donde $\lambda_{x,y}$ esta dada justo como antes. los mismos cálculos hechos antes no sirven para mostrar que

$$I_1 \approx \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j}\partial_{i,j}\phi(x)$$

y en otro sentido las hipótesis sobre ϕ nos permiten igualmente tener

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y) \\
\approx\ & \frac{1}{\Delta t}\int_{|y-\kappa|\ge\epsilon}\left(\phi(x+y) - \phi(x) - \frac{\langle y, \nabla\phi(x)\rangle}{1+|y|^2}\right)\delta(\mathrm{d}y) = I_2.
\end{aligned}$$

Para finalizar, de la definición de γ tenemos

$$I_3 \approx \langle \gamma, \nabla\phi(x)\rangle$$

de donde se tiene el teorema. ■

Notemos que la δ en el teorema 4.2.1 correspondiente a una tripleta de Lévy dada no es única, pero además dada una medida interna de probabilidad δ correspondiente a una tripleta de Lévy, como en el mismo teorema 4.2.1, la prueba de este teorema muestra que para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ la función $L\phi : {}^*\mathbb{R}^d \to {}^*\mathbb{R}$ es S-acotada y tiene una parte continua estándar. Si, en adición, $\mathbb{H}\phi$ es uniformemente continua entonces (4.4) se cumple para toda $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Además, si definimos un semigrupo $\{S_t\}_{t\in T}$ mediante $S_t := S_{\Delta t}^{tN}$, donde

$$S_{\delta t}\phi(x) := {}^{O}\!\!\int_{{}^*\mathbb{R}^d} {}^*\phi(x+y)\delta(\mathrm{d}y), \qquad \phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$$

entonces L es la versión no estándar de un generador infinitesimal del semigrupo S_t.

Sea una medida interna de probabilidad δ que satisface (4.4), para toda tripleta de Lévy $(\gamma, \mathbb{A}, \nu)$. Sea el espacio $\Omega := \{{}^*\mathbb{R}^d)^T$ bajo la medida producto $\mu := \delta^T$, notemos que el espacio no es hiperfinito, pero la línea de tiempo T si lo es. denotaremos las trayectorias en Ω como $\omega = \{\omega_t\}_{t\in T}$.

Definición 4.2.1 *Sea $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}^d$ un proceso interno dado por la suma hiperfinita de incrementos hiperreales, es decir,*

$$X_t(\omega) := \sum_{s<t} \omega_s \tag{4.23}$$

y por default diremos que $X_0 \equiv 0$.

Así, tenemos el siguiente teorema

Teorema 4.2.3 *Sea $t \in T$ finito y $u \in \mathbb{R}^d$, entonces*

$$\begin{aligned} E\left[e^{i\langle u, X_t\rangle}\right] \approx \exp\Bigg[t\Bigg(& i\langle\gamma, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \mathbb{A}\, u\rangle \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle u, y\rangle}{1+|y|^2}\right] \nu(\mathrm{d}y)\Bigg)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.24}$$

Prueba.-
Para probar el teorema primero usemos el teorema 4.2.1 en

$$\phi(y) = e^{i\langle u,y\rangle} \qquad \text{y} \qquad x = 0,$$

así,

$$\begin{aligned}
E\left[e^{i\langle u,X_t\rangle}\right] &= E\left[\prod_{s<t} e^{i\langle u,\omega_s\rangle}\right] \\
&= \left(\int_{^*\mathbb{R}^{\,d}} e^{i\langle u,y\rangle}\,\delta(\mathrm{d}y)\right)^{tN} \\
&= (1 + L\phi(0)\Delta t)^{tN}
\end{aligned}$$

y si ζ es un infinitesimal tenemos que

$$\begin{aligned}
&= \Bigg(1 + \frac{1}{N}\Bigg[\zeta + \langle\gamma, \nabla\phi(0)\rangle + \frac{1}{2}\sum_{1\le k,j\le d} a_{k,j}\partial_{k,j}\phi(0) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}}\left(\phi(y) - \phi(0) - \frac{\langle y, \nabla\phi(0)\rangle}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\Bigg]\Bigg)^{tN}
\end{aligned}$$

y usando que $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = iu$ y $\partial_{k,j}\phi(0) = -u_k u_j$ nos queda

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{N}\left[\zeta + i\langle\gamma, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \mathbb{A}\, u\rangle + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle u,y\rangle}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\right]\right)^{tN} \\
&= \left(1 + \frac{1}{tN}\,t\left[\zeta + i\langle\gamma, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \mathbb{A}\, u\rangle + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle u,y\rangle}{1+|y|^2}\right)\nu(\mathrm{d}y)\right]\right)^{tN} \\
&= \exp\Bigg[t\zeta + t\Bigg(i\langle\gamma, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \mathbb{A}\, u\rangle \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle u,y\rangle}{1+|y|^2}\right]\nu(\mathrm{d}y)\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

y como ζ es un infinitesimal entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
E\left[e^{i\langle u,X_t\rangle}\right] &\approx \exp\Bigg[t\Bigg(i\langle\gamma, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, \mathbb{A}\, u\rangle \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\langle u,y\rangle} - 1 - \frac{i\langle u,y\rangle}{1+|y|^2}\right]\nu(\mathrm{d}y)\Bigg)\Bigg],
\end{aligned}$$

con lo cual nos queda el resultado. ■

a continuación daremos una aproximación al espacio muestral Ω,

$$\Omega_{\tau,n} := ([-n,n]^d)^{T\cap[0,\tau)} \times ({}^*\mathbb{R}^d)^{T\cap[\tau,\infty)} \subset \Omega, \qquad \tau \in T,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Con esta definición, tenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.1 *Sea $\tau \in T$ finito, entonces $\mu_L(\cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{\tau,n}) = 1$.*

Prueba.-
la condición $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|y|^2}{1+|y|^2}\nu(\mathrm{d}y) < \infty$ implica que

$$\int_{|y|\geq n} \nu(\mathrm{d}y) \ \rightarrow\ 0 \qquad \text{cuando } n \rightarrow \infty,\ n \in \mathbb{N}$$

para $n \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mu_L(\Omega_{\tau,n}) &\geq \left(1 - \int_{|y|\geq n} \delta(\mathrm{d}y)\right)^{\tau N} \\
&= \left(1 - \Delta t \int_{|y|\geq n} \nu(\mathrm{d}y)\right)^{\tau N} \\
&\approx \exp\left(-\tau \int_{|y|\geq n} \nu(\mathrm{d}y)\right)
\end{aligned}$$

Entonces $\mu_L(\Omega_{\tau,n}) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene la conclusión del lema. ■

A continuación tenemos otro lema.

Lema 4.2.2 *Sea $\tau \in T$ finito, $n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{Z}$. Entonces para cada $1 \leq i \leq d$ existe algún $C_{i,p} \in {}^*\mathbb{R}$ tal que $0 < C_{i,p} < \infty$ y*

$$E_{\Omega_{\tau,n}}\left[e^{p(X_\tau)_i}\right] \leq C_{i,p}^{\tau}$$

Prueba.-
Aplicando el teorema 4.2.1 a alguna función no negativa $\phi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ tal que $\phi(y) = e^{p\,y_i}$ sobre $[-n,n]^d$. Entonces

$$\begin{aligned}
E_{\Omega_{\tau,n}}\left[e^{p(X_\tau)_i}\right] &= \left(\int_{[-n,n]^d} e^{p\,y_i}\delta(\mathrm{d}y)\right)^{\tau N} \\
&\leq \left(\int_{{}^*\mathbb{R}^d} \phi(y)\delta(\mathrm{d}y)\right)^{\tau N} \\
&= (1 + L\phi(0)\Delta t)^{\tau N}
\end{aligned}$$

Por lo que si tomamos

$$C_{i,p} := (1 + L\phi(0)\Delta t)^N$$

entonces se tiene que

$$0 < C_{i,p} \approx e^{L\phi(0)} < \infty$$

por el teorema 4.2.1. ■

Corolario 4.2.1 *Para cada $t \in T$, X_t es finito casi seguramente con respecto a la medida de Loeb μ_L.*

Prueba.-
Por el Lema anterior, para $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq d$ tenemos las dos siguientes propiedades

$$E_{\Omega_{t,n}}\left[e^{(X_t)_i}\right] < \infty \ , \qquad E_{\Omega_{t,n}}\left[e^{-(X_t)_i}\right] < \infty$$

entonces $(X_t)_i$ debe ser finito casi seguramente sobre $\Omega_{t,n}$. Entonces se tiene que

$$\mu_L(\cup_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{\tau,n}) = 1$$

por el lema 4.2.1, con lo cual se tiene el corolario. ■

Otro corolario.

Corolario 4.2.2 *Sea $t \approx 0$ con $t \in T$. Entonces*

$$\mu_L(X_t \ \approx \ 0) = 1.$$

Prueba.-
Usemos el lema 4.2.2 se tiene que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq i \leq d$,

$$E_{\Omega_{t,n}}\left[e^{p(X_t)_i}\right] \leq C_{i,p}^t \approx 1$$

y esto se cumple para toda $p \in \mathbb{Z}$, por lo cual tenemos que $(X_t)_i \approx 0$ casi seguramente sobre $\Omega_{t,n}$ y usando otra vez el lema 4.2.1 tenemos la conclusión del corolario. ■

Definamos ahora la parte estándar de X.

Definición 4.2.2 *Para cada* $t \in [0,\infty)$ *fijemos* $\bar{t} := \text{mín}\{s \in T \,:\, s \geq t\}$ *y definamos a*

$$x : \Omega \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{\,d}$$

como

$$x_t(\omega) := {}^{o}X_{\bar{t}}(\omega) \tag{4.26}$$

Ahora bien, por el corolario 4.2.1, x_t es finito casi seguramente con respecto a μ_L para todo $t \in [0,\infty)$, entonces x es un proceso estocástico estándar bajo μ_L. Mas aun, por el corolario 4.2.2 se tiene que para cada $r \in \mathbb{R}^+$ y $s,t \in T$ finitos con $t \approx 0$ tenemos que

$$\mu_L\left(|X_{s+t} - X_s| > r\right) = \mu_L(|X_t| > r) = 0$$

de donde tenemos que para $s,t \in [0,\infty)$

$$\mu_L\left(|X_{s+t} - X_s| > r\right) \;\rightarrow\; 0 \quad \text{cuando} \quad t \;\rightarrow\; 0,$$

pero esta ultima expresión nos dice que x es estocásticamente continua.

Asimismo, por la construcción de X se tiene que x es homogénea en el tiempo, tiene incrementos independientes y $x_0 = 0$.

Así pues, x es un proceso de Lévy en distribución.

Ahora bien, para cada $u \in \mathbb{R}^d$ fija se tiene que la función $y \longmapsto e^{i\langle u,y\rangle}$ es una función S-acotada sobre ${}^*\mathbb{R}^d$, por lo cual del lema 4.2.2 y del corolario 4.2.1 se tiene que para cada $t \in [0\infty)$ y $p \in \mathbb{N}$

$$\exp(i\,\langle u, X_{\bar{t}}\rangle) \quad \text{es un } SL^p\text{-lifting de} \quad \exp(i\,\langle u, x_t\rangle)$$

de lo cual en particular tenemos que

$$E_\mu\left[\exp(i\,\langle u, X_{\bar{t}}\rangle)\right] \;\approx\; E_{\mu_L}\left[\exp(i\,\langle u, x_t\rangle)\right], \qquad u \in \mathbb{R}^d,\;\; t \in [0,\infty),$$

y usando el teorema 4.2.3 tenemos que x es un proceso de Lévy que corresponde a la tripleta $(\gamma, \mathcal{A}\,, \nu)$. Y como cada proceso de Lévy estándar es determinado de manera única, en distribución, por una tripleta de Lévy entonces podemos dar la siguiente proposición que resume todo lo anterior.

Proposición 4.2.1 *Sea* $\bar{x} : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ *un proceso de Lévy en distribución, entonces este es igual en distribución a* x*, el cual es el proceso estocástico obtenido de las sumas hiperfinitas en la definición 4.2.1 y de la definición 4.2.2 para la tripleta de Lévy de* $\bar{x}$*.*

■

Capítulo 5

Aplicación a Finanzas.

Después de haber desarrollado mucha de la teoría referente al análisis estocástico no estándar, en este capitulo presentamos la aplicación de ella en finanzas, particularmente al calculo de precios de opciones mediante el desarrollo de la formula de Black-Scholes no estándar ya sea para opciones europeas o Americanas. Se ha revisado [8] y [5].

5.1. Opciones Europeas.

En esta sección abordaremos de cerca el problema de determinar el precio de una opción europea, esto a través del uso del modelo que seria la versión no estándar del modelo de Black-Scholes. Esto genera la necesidad de desarrollar toda la teoría básica, partiendo del modelo de Cox, Ross y Rubinstein dada en 1977 en [8] hasta llegar al modelo continuo que es justamente el presentado por Black y Scholes, todo esto lo haremos desde el enfoque no estándar por supuesto.

Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y r, σ reales positivos. Para $t = k\Delta t \in T$ definamos S^0 como

$$S^0(\omega, t) = S_0^0(1 + \ r\Delta t)^k = S_0^0 R^k \tag{5.1}$$

donde S_0^0 es una constante real positiva y $R = 1 + \ r\Delta t$, denota la tasa constante de retorno sobre un bono libre de riesgo, con r como la tasa de interés durante los periodos infinitesimales de tamaño Δt. Definamos ahora, S^1 como

$$S^1(\omega, t) = S_0^1 \prod_{s<t}(1 + \omega^*(s)\sqrt{\Delta t}), \tag{5.2}$$

donde, al igual que antes, S_0^1 es una contante real positiva y $\{\omega^*(s) : s \in T\}$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas *-independientes con

$$P(\omega^*(s) = \sigma + \mu\sqrt{\Delta t}) = P(\omega^*(s) = -\sigma + \mu\sqrt{\Delta t}) = \frac{1}{2},$$

notemos que se ha escrito $\omega^*(s) = \sigma\omega(s) + \mu\sqrt{\Delta t}$ con $\{\omega(s) : s \in T\}$ variables aleatorias bernoulli *-independientes.

Vamos a probar que (5.1) y (5.2) son infinitamente cercanos al modelo de Black-Scholes, para ello necesitamos varios lemas.

Lema 5.1.1 *(a) Sea $(\omega, t) \in \Omega \times T$ fijo. Si $B(\omega, t)$ es un hiperreal finito entonces para cualesquiera constantes α, β se tiene que*

$$\prod_{s<t}(1 + \alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t) \approx \exp\left(\alpha\beta(\omega, t) + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{2}\right)t\right).$$

(b) Para cualquier constante α y β y cualquier $m \in \mathbb{N}$

$$E_P\left(\left(\prod_{s<t}(1 + \alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t)\right)^m\right)$$

es finita para toda $t \in T$.

Prueba.-
(a)
Observemos que si $|x| \leq 2/3$ entonces tenemos que

$$\left|\log(1 + x) - \log(x - \frac{x^2}{2}\right| \leq |x|^3$$

por lo que

$$\log\left(\prod_{s<t}(1 + \alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t)\right) = \sum_{s<t}\log(1 + \alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t)$$
$$= \sum_{s<t}\left(\alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t - \frac{1}{2}(\alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t)^2 + \epsilon_s\right),$$

donde

$$\epsilon_s \leq |\alpha\Delta B(\omega, s) + \beta\Delta t|^3 \leq (\delta t)^{\frac{3}{2}}(|\alpha| + |\beta|)^3$$

por definición de B. Ahora, la suma final es

$$\begin{aligned}
&\sum_{s<t}\left(\alpha\Delta B(\omega,s)+\left(\beta-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\Delta t-\alpha\beta\Delta B(\omega,s)\Delta t-\frac{1}{2}\beta^2(\Delta t)^2+\epsilon_s\right)\\
&= \alpha\beta(\omega,t)+\left(\beta-\frac{1}{2}\alpha^2\right)t-\sum_{s<t}\alpha\beta\Delta B(\omega,s)\Delta t-\frac{1}{2}\sum_{s<t}\beta^2(\Delta t)^2+\sum_{s<t}\epsilon_s\\
&\approx \alpha\beta(\omega,t)+\left(\beta-\frac{1}{2}\alpha^2\right)t
\end{aligned}$$

esto porque cada una de las últimas sumas tienen a lo mas $N = T/\Delta t$ términos, por lo que entonces son infinitesimales. Ahora, por hipótesis cada lado de la expresión

$$\log\left(\prod_{s<t}(1+\alpha\Delta B(\omega,s)+\beta\Delta t)\right)\approx\alpha\beta(\omega,t)+\left(\beta-\frac{1}{2}\alpha^2\right)t$$

es finito, y la función exponencial es S-continuo, por lo que entonces tenemos

$$\prod_{s<t}(1+\alpha\Delta B(\omega,s)+\beta\Delta t)\approx\exp\left(\alpha\beta(\omega,t)+\left(\beta-\frac{\alpha^2}{2}\right)t\right).$$

que prueba el inciso (a).

(b)
Sabemos que si m es finito y usando que $\Delta B(\cdot,s)^2=\Delta t$ entonces

$$(1+\alpha\Delta B(\cdot,s)+\beta\Delta t)^m = 1+\alpha'\Delta B(\cdot,s)+\beta'\Delta t,$$

por lo que es suficiente con probar (b) para $m = 1$. Los términos $1 + \alpha\Delta B(\cdot,s) + \beta\Delta t$ son independientes y cada uno de ellos tiene esperanza $1+\beta\Delta t$, por lo que haciendo $t = J\Delta t$

$$\begin{aligned}
E_P\left(1+\alpha\Delta B(\omega,s)+\beta\Delta t\right) &= (1+\beta\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}\\
&= (1+\beta\Delta t)^J\\
&\approx \exp(\beta t)
\end{aligned}$$

■

Ahora apliquemos el lema anterior al proceso S^1 definido en (5.2), entonces para casi todo ω (con respecto a $L(P)$) se tiene que

$$S^1(\omega,t)\approx S_0^1\exp\left(\sigma B(\omega,t)\ +\ \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) \tag{5.3}$$

porque B es $L(P)$-c.s. finito para todo t. Pero, además como $S^1(\omega, t)$ es finita entonces está es $SL^p(P)$ para p finita.

Ahora tenemos otro resultado.

Lema 5.1.2

$$S^0(\omega, t) \approx S^0_0 \exp(rt) \tag{5.4}$$

para todo $t \in T$ y $\omega \in \Omega$

Prueba.-
tomando $t = k\Delta t$ obtenemos

$$\exp(rt) \approx \left((1 + r\Delta t)^{\frac{1}{r\Delta t}}\right)^{rk\Delta t} = R^k$$

esto usando la expresión $e \approx (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ con el infinitesimal $\alpha = r\Delta t$. ■

En la figura 1 presentada en la siguiente página, de donde podemos ver varias cosas, una de ellas es que la ecuación (5.2) define a S^1 de la misma manera que esta dado en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein en [8] en la página 236, donde ahora los paramétros son $u = (1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t)$ y $d = (1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t)$ que siguen representando los cambios de S^1 hacia arriba o hacia abajo en los intervalos de tiempo $\Delta t = T/N$.

La otra cosa que habría que enfatizar es que las expresiones (3.46) y (5.4) vienen siendo las versiones hiperfinitas de los procesos de precios desarrollados por Black-Scholes. Además, podemos recuperar la formula de Black-Scholes estándar sobre el espacio de Loeb $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ simplemente con aplicar el mapeo de la *parte estándar* dado en el capítulo 1.

La idea es como sigue, definiendo procesos continuos $s^0, s^1 : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ como

$$s^0(\omega, {}^o t) = (S^0(\omega, t)) \qquad s^1(\omega, {}^o t) = (S^1(\omega, t))$$

entonces por las expresiones (5.4) y (5.3) y usando la S-continuidad se tiene que para todo $t \in [0, T]$ y $L(P)$ casi seguramente para $\omega \in \Omega$ tenemos

$$s^0(\omega, t) = s^0_0 \exp(rt) \tag{5.5}$$

y

$$s^1(\omega, t) = s^1_0 \exp\left(\sigma b(\omega, t) \; + \; \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right) \tag{5.6}$$

Ahora, podemos resumir todo lo anterior en forma de un resultado

Teorema 5.1.1 *El modelo de precios binomial hiperfinito sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *dado por* (S^0, S^1) *definido por la ecuación (5.1) y (5.2) es un* SL^2*-lifting* S*-continuo del modelo de Black-Scholes sobre* $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ *dado por* (s^0, s^1) *definidos por las expresiones (5.5) y (5.6).*

■

Los métodos no estándar son muy útiles en el desarrollo del modelo Black-Scholes, ya que podemos explotar algunos aspectos de la combinatoria del modelo discreto al llevarlos a tiempo continuo dentro del modelo de Black-Scholes sobre el espacio de medida de Loeb.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ el espacio de probabilidad hiperfinito con $\Omega = \{-1, 1\}^T$ donde T es la línea de tiempo hiperfinita. Sea, además, (S^0, S^1) el modelo binomial hiperfinito dado por(5.1) y (5.2). Podemos asumir sin perdida de generalidad que $S_0^1 = 1$. Definamos para este tipo de procesos de precios hiperfinitos la función $C :\rightarrow {}^*\mathbb{R}$ como

$$C(\omega) = (S^1(\omega, T) - K)^+ \tag{5.7}$$

la cual representa una opción call tipo Europeo sobre el stock S^1, con fecha de ejercicio T y precio de ejercicio K. Queremos determinar el precio $\Pi(C)$. Primero usemos el argumento usado por Cox-Ross-Rubinstein, hagamos $R = 1 + r\Delta t, \quad u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t, \quad d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \mu\Delta t$ y

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \left\{\frac{\mu - r}{\sigma}\right\}\sqrt{\Delta t}\right).$$

Entonces por el principio de transferencia podemos extender la formula del precio de una opción binomial estándar obteniendo

$$\Pi(C) = S_0^1\Phi(A; N, \frac{up}{R}) - KR^{-N}\Phi(A; N, p), \tag{5.8}$$

donde $A \in {}^*\mathbb{N}$ satisface

$$A - 1 \leq \frac{\log\left(\frac{K}{S_0^1 d^N}\right)}{\log(\frac{u}{d})} < A, \tag{5.9}$$

y donde con Φ estamos denotando la función de distribución binomial hiperfinita complementaria, esto es,

$$\Phi(A; N, p) = \sum_{j=A}^{N} \binom{N}{j} p^j \, (1 - p)^{N-j}.$$

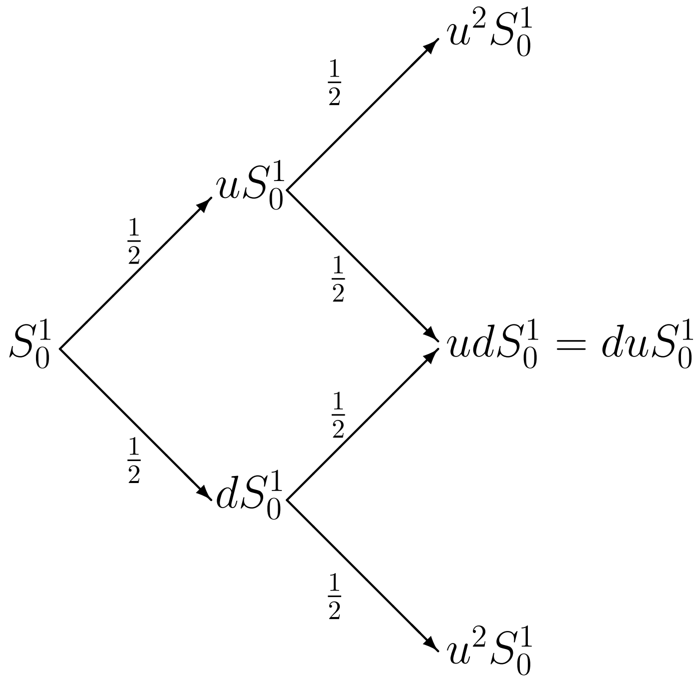

Figura 1: Árbol de una opción Europea.

Lo siguiente que necesitamos es encontrar una opción call tipo Europeo C interno y S-integrable el cual sea un lifting de c. Para esto, veamos que C definido como en (5.8) es un lifting S-integrable de $c(\omega) = (S_T^1(\omega) - K)^t$ y solo restaría probar que el precio $\prod(C)$ dado por (5.9) esta infinitamente cercano al precio que nos da la formula de Black-Scholes estándar de c.

Veamos primero dos hechos que usaremos mas adelante, uno es que se tiene la siguiente expresión

$$\prod_{s<t}(1 + \sigma\Delta B(\omega, s) + \mu\delta t) \approx \exp\left(\sigma B(\omega, t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \tag{5.10}$$

donde $B(\omega, t)$ es finito de acuerdo a la expresión (5.3). Por otra parte, si $\epsilon \approx 0$, M es infinito, con ϵM finito, entonces

$$\log(1+\epsilon)^M \approx M\epsilon \qquad \text{y} \qquad \exp(\epsilon M) \approx (1+\epsilon)^M. \tag{5.11}$$

Con esto, podemos dar la siguiente proposición.

Proposición 5.1.1

$$\frac{Np+1-A}{\sqrt{Np(1-p)}} \approx \frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T \;+\; \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

■

Para poder probar este resultado es necesario dos lemas, así pues tenemos el primero de ellos.

Lema 5.1.3

$$\sqrt{N}\log u \approx \sigma\sqrt{T}, \qquad \sqrt{N}\log d \approx -\sigma\sqrt{T}.$$

Prueba.-

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}\log u &= \log(1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t)^{\sqrt{N}} \\
&\approx \sqrt{N}(\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t) \\
&\approx \sqrt{N}\sigma\sqrt{\Delta t} \qquad \text{y como } T = N\Delta t \text{ entonces} \\
&= \sigma\sqrt{T}
\end{aligned}$$

y tenemos la primera expresión. Para la segunda nos queda

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}\log d &= \log(1-\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t)^{\sqrt{N}} \\
&\approx \sqrt{N}(-\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t) \\
&\approx -\sqrt{N}\sigma\sqrt{\Delta t} \qquad \text{igual que antes, como } T = N\Delta t \text{ entonces} \\
&= -\sigma\sqrt{T}
\end{aligned}$$

■

El segundo lema es presentado enseguida.

Lema 5.1.4

$$u^{Np}\, d^{N(1-p)} \approx \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right).$$

Prueba.-
Sea J la función parte entera definida en ${}^*\mathbb{R}$, y la denotamos como $J = [Np]$, y sea $M = N - J$, entonces

$$u^{Np}\, d^{N(1-p)} \approx u^J\, d^M.$$

Ahora, sea B definido como $B = \sum_{t<T} \Delta B_t$ donde

$$\Delta B(t) = \begin{cases} \sqrt{\Delta t} & \text{para } J \text{ valores de } t; \\ \\ -\sqrt{\Delta t} & \text{para } M \text{ valores de } t; \end{cases}$$

esto es, B representa una trayectoria Browniana con J saltos hacia arriba y M saltos hacia abajo sobre T. Entonces por definición de p tenemos

$$\begin{aligned} B &= (J-M)\sqrt{\Delta t} \approx (Np - N(1-p))\sqrt{\Delta t} \\ &= N(2p-1)\sqrt{\Delta t} = N\left(-\frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right)\sqrt{\Delta t} = -\frac{\mu - r}{\sigma}T, \end{aligned}$$

la cual es finita, entonces al aplicar (5.10) obtenemos

$$\begin{aligned} u^J d^M &\approx \exp\left(\sigma B + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\ &\approx \exp\left((r-\mu)T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\ &= \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \end{aligned}$$

lo cual prueba el lema. ■

Presentamos ahora la prueba de la proposición anterior.

Prueba de la proposición 5.1.1.-

Por definición de A tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{Np+1-A}{\sqrt{N}} &\approx \frac{Np\log\left(\frac{u}{d}\right)-\log\left(\frac{K}{S_0^1 d^N}\right)}{\sqrt{N}\log\left(\frac{u}{d}\right)} \\
&= \frac{\log(u^{Np}d^{-Np})+\log d^N+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sqrt{N}(\log u-\log d)} \\
&= \frac{\log(u^{Np}d^{N(1-p)})+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sqrt{N}\log u-\sqrt{N}\log d}
\end{aligned}$$

y al usar los lemas anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{\log\left(\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right)+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}-(-\sigma\sqrt{T})} \\
&= \frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Así, hemos establecido que

$$\frac{Np+1-A}{\sqrt{N}} \approx \frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}$$

pero además se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \approx 2$$

por lo que entonces tenemos

$$\frac{Np+1-A}{\sqrt{Np(1-p)}} \approx \frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

de donde hemos probado la proposición. ■

Ahora tomemos $p' = \frac{pu}{R}$, pero como $u \approx 1 \approx p$ entonces $p' \approx p \approx 1/2$. También tenemos otro lema que es otra aproximación al igual que esta ultima.

Lema 5.1.5

$$N(2p'-1)\sqrt{\Delta t} \approx \frac{\sigma^2+r-\mu}{\sigma}T$$

Prueba.-
De la prueba del lema 5.1.4 se tiene que

$$N(2p-1)\sqrt{\Delta t} = \frac{r-\mu}{\sigma}T$$

Por otro lado también tenemos

$$\begin{aligned}
N(2p'-1)\sqrt{\Delta t} - N(2p-1)\sqrt{\Delta t} &= N\sqrt{\Delta t}2p\left(\frac{u}{R}-1\right) \\
&= 2pN\sqrt{\Delta t}\left(\frac{1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t}{1+r\Delta t}-1\right) \\
&= 2pN\sqrt{\Delta t}\left(\frac{1+\sigma\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t-1-r\Delta t}{1+r\Delta t}\right) \\
&= 2pN\sqrt{\Delta t}\left(\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}+(\mu-r)\Delta t}{1+r\Delta t}\right) \\
&= 2p\left(\frac{N\sqrt{\Delta t}\sigma\sqrt{\Delta t}+N\sqrt{\Delta t}(\mu-r)\Delta t}{1+r\Delta t}\right) \\
&= 2p\left(\frac{\sigma T+(\mu-r)T\sqrt{\Delta t}}{1+r\Delta t}\right) \\
&\approx \sigma T,
\end{aligned}$$

Esto ultimo por la definición de $p =$,

$$p = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right).$$

Finalmente tenemos

$$N(2p'-1)\sqrt{\Delta t} \approx (r-\mu)\frac{T}{\sigma}+\sigma T = \left(\frac{\sigma^2+r-\mu}{\sigma}\right)T$$

lo cual prueba el lema. ■

Probemos ahora otro lema con argumentos parecidos a los usados en la prueba del lema 5.1.4.

Lema 5.1.6

$$u^{Np}d^{N(1-p')} \approx \exp\left(\frac{r+\sigma^2}{2}T\right)$$

Prueba.-
Sea $J = [Np']$ la función parte entera y definamos $M = N - J$ entonces tenemos que

$$U^{Np}d^{N(1-p')} \ \approx \ u^J d^M$$

Ahora sea, $B = \sum_{t<T} \Delta B_t$ donde

$$\Delta B(t) = \begin{cases} \sqrt{\Delta t} & \text{para } J \text{ valores de } t; \\ \\ -\sqrt{\Delta t} & \text{para } M \text{ valores de } t; \end{cases}$$

donde al igual que antes B representa las trayectorias de un movimiento Browniano con J saltos hacia arriba y M saltos hacia abajo sobre T. Entonces

$$\begin{aligned} B &= (J-M)\sqrt{\Delta t} \approx (Np' - N(1-P'))\sqrt{\Delta t} \\ &= N(2p'-1)\sqrt{\Delta t} \\ & \quad \text{y usando el lema anterior tenemos} \\ &\approx \frac{\sigma^2 + r - \mu}{\sigma}T \end{aligned}$$

la cual es finita. y aplicando (5.10) obtenemos

$$\begin{aligned} u^J d^M &\approx \exp\left(\sigma B + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\ &\approx \exp\left((\sigma^2 + r - \mu)T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \\ &= \exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \end{aligned}$$

lo cual prueba el lema. ■

Con el anterior lema podemos entonces dar al análogo de la proposición 5.1.1 pero ahora para p'.

Proposición 5.1.2

$$\frac{Np' + 1 - A}{\sqrt{Np'(1-p')}} \approx \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \; + \; \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

Prueba.- Por definición de A tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{Np' + 1 - A}{\sqrt{N}} &\approx \frac{Np' \log\left(\frac{u}{d}\right) - \log\left(\frac{K}{S_0^1 d^N}\right)}{\sqrt{N}\log\left(\frac{u}{d}\right)} \\
&= \frac{\log(u^{Np'} d^{-Np'}) + \log d^N + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sqrt{N}(\log u - \log d)} \\
&= \frac{\log(u^{Np'} d^{N(1-p')}) + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sqrt{N}\log u - \sqrt{N}\log d}
\end{aligned}$$

y al usar el lema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
&\approx \frac{\log\left(\exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\right) + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T} - (-\sigma\sqrt{T})} \\
&= \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Así, hemos establecido que

$$\frac{Np' + 1 - A}{\sqrt{N}} \approx \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{2\sigma\sqrt{T}}$$

pero además se tiene que como $p \approx 1/2$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{p'(1-p')}} \approx 2,$$

por lo que finalmente tenemos

$$\frac{Np' + 1 - A}{\sqrt{Np'(1-p')}} \approx \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

■

Con todo lo anterior, podemos ya mostrar que cada termino en (5.8) es infinitamente cercano a su correspondiente termino del modelo de Blasck-Scholes. Hagamos esto, tomemos una sucesión interna de variables aleatorias *-independientes distribuidas Bernoulli $(X_j)_{j\in {}^*\mathbb{N}}$ tal que $P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = p$. Si definimos otra sucesión de variables aleatorias internas $(Y_j)_{j\in {}^*\mathbb{N}}$ como

$$Y_j = \frac{X_j - p}{\sqrt{p(1-p)}},$$

entonces Y_j satisface la condición del teorema del limite central dado en el capitulo 2, teorema 2.3.1. Ahora además observemos que por la definición de Y_j tenemos que

$$Y_j\sqrt{p(1-p)} + p = X_j$$

Por lo que tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N} X_j < A \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N}\left(Y_j\sqrt{p(1-p)} + p\right) < A \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} Y_j\sqrt{p(1-p)} + Np < A \\
& \quad \text{y como } A \in {}^*\mathbb{N} \text{ entonces} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} Y_j\sqrt{p(1-p)} \leq A - 1 - Np \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} Y_j \leq \frac{A - 1 - Np}{\sqrt{p(1-p)}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} Y_j \leq \frac{A - 1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}
\end{aligned}$$

y usando la definición de Φ tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(A;N,p) &= 1-P\left(\left\{\omega\in\Omega\ :\sum_{j=1}^{N}X_j(\omega)<A\right\}\right)\\
&= 1-P\left(\left\{\omega\in\Omega\ :\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}Y_j(\omega)\leq\frac{A-1-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right\}\right)\\
&\approx\ {}^{*}\psi\left(\frac{A-1-Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)\\
&\approx\ {}^{*}\psi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

usando primero el teorema 2.3.1 y en la ultima igualdad la proposición 5.1.1. De manera semejante podemos escribir lo mismo si definimos $(Z_j)_{j\in{}^*\mathbb{N}}$ como

$$Z_j=\frac{X_j-p'}{\sqrt{p'(1-p')}},$$

donde las X_j tienen la misma definición que la de antes salvo que ahora el parámetro es p', es decir, son Bernoulli tales que $P(X_1=1)=1-P(X_1=0)=p'$. por lo que se tienen las mismas propiedades y podemos simplemente escribir

$$\Phi(A;N,p')\approx\ {}^{*}\psi\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})T+\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

salvo que ahora se usa la proposición 5.1.2 para concluir esto.

Ahora, es claro que $R^{-N}\approx\ {}^{*}\exp(-rT)$ por lo que entonces hemos obtenido el precio de Black-Scholes como la parte estándar de $\Pi(C)$,

$$^{o}(\Pi(C))=S_0^1\psi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\psi\left(\frac{\log\left(\frac{S_0^1}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{5.12}$$

En base a lo expuesto en las ultimas páginas, escribamos todo esto como un resultado.

Teorema 5.1.2 *Sea $c(\omega) = (s^1(\omega, T) - K)^+$. Entonces $c(\omega)$ representa una opción europea call sobre el stock en el modelo de Black-Scholes definido sobre el espacio de Loeb $(\Omega, L(A), L(P))$, es decir, con un proceso de precios dado por (5.6) con precio de ejercicio K y fecha de expiración o ejercicio T. Entonces se cumple lo siguiente:*

(i) *$C(\omega) = (S^1(\omega, T) - K)^+$ es un lifting de $c(\omega)$.*

(ii) *El precio de la opción $\Pi(C)$ de C esta dado por la formula (5.8).*

(iii) *$\pi(c) = {}^o(\Pi(C))$ coincide con la formula de Black-Scholes (5.12).*

■

Sea el espacio de probabilidad hiperfinito $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y sea $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in T}$ la filtración natural generada por conjuntos de la forma $[\omega]_t = \{\omega' \in \Omega : \omega' \upharpoonright t = \omega \upharpoonright t\}$. Seguiremos usando el caso particular, pero sin perdida de generalidad, en que $S_0^0 = 1$ y consideremos el proceso de precios interno $Z = \frac{S^1}{S_0}$ dado por

$$\begin{aligned} Z(\omega, t) &= S_0^1 \prod_{s<t} \left(\frac{1 + \omega^*(s)\sqrt{\Delta t}}{1 + r\Delta t} \right) \qquad (5.13) \\ &\approx S_0^1 \exp\left(\sigma B(\omega, t) + \left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right) \end{aligned}$$

Queremos encontrar una nueva medida Q, la cual buscamos que bajo Z sea una $\mathcal{A}_t$-martingala. Ahora,

$$\Delta Z(\omega, t) = Z(\omega, t + \Delta t) - Z(\omega, t) = Z(\omega, t) \left(\frac{1 + \sigma \Delta B(\omega, t) + \mu \Delta t}{1 + r\Delta t} - 1 \right)$$

y como $Z(\omega, t)$ es $\mathcal{A}_t$-medible, entonces necesitamos que Q satisfaga

$$E_Q(1 + \sigma \Delta B(\omega t) + \mu \Delta t \mid \mathcal{A}_t) = 1 + r\Delta t. \qquad (5.14)$$

y si escribimos $x = Q(\omega(t) = 1 | \mathcal{A}_t)$ entonces $1 - x = Q(\omega(t) = -1 | \mathcal{A}_t)$ entonces (5.14) se reescribe como

$$x(1 + \sigma \Delta B(\omega t) + \mu \Delta t) + (1 - x)(1 - \sigma \Delta B(\omega t) + \mu \Delta t) = 1 + r\Delta t, \quad (5.15)$$

es decir, $xu+(1-x)d = 1+r\Delta t$ el cual es llamado la condición de neutralidad. Solucionando la ecuación (5.15) se tiene que

$$x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) = p.$$

Entonces, la única medida Q que bajo Z es una martingala esta dada por

$$Q(\{\omega\}) = \prod_{t<T} \frac{1}{2}\left(1 - \omega(t)\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}\right). \tag{5.16}$$

Pero, además podemos dar la densidad de Q relativa a P mediante la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \frac{Q(\{\omega\})}{P(\{\omega\})} &= \prod_{t<T}\left(1 - \omega(t)\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}\right) \qquad (5.17) \\ &\approx \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)B(\omega, t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right), \end{aligned}$$

donde la primera identidad se cumple para todo $\omega \in \Omega$ y la relación final se cumple $L(P)$-casi seguramente por el lema 5.1.1 con $\alpha = -(\mu - r)/\sigma$ y $\beta = 0$. Usando el lema 2.2.3 **(b)** [1] se tiene que esta densidad es S-integrable, por lo que $L(Q)$ es absolutamente continua con respecto a $L(P)$ por el lema 2.2.2 y por tanto podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}L(P)} = {}^{o}\!\left(\frac{Q}{P}\right).$$

Notemos que el proceso

$$B'(\omega, t) = B(\omega, t) + \frac{\mu - r}{\sigma}t \tag{5.18}$$

satisface

$$\Delta B'(\omega, t) = \begin{cases} \sqrt{\Delta t} + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\Delta t\right) & \text{con probabilidad } p, \\ -\sqrt{\Delta t} + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\Delta t\right) & \text{con probabilidad } 1 - p. \end{cases}$$

[1] En la página 47 en la sección 2.2.

Ahora bien, bajo P se tiene que B' no es una caminata aleatoria hiperfinita o un proceso de Anderson, pero si lo es con un drift infinitesimal $((\mu - r)/\sigma)\Delta t$. No obstante, no es difícil ver que bajo Q se tiene que B' *si* es una caminata aleatoria hiperfinita. Por lo que al tomar su parte estándar, o mas formalmente, al aplicar el mapeo estándar al proceso B' tenemos que para todo $\omega \in \Omega$ y $t \in T$

$$b'(\omega, {}^o t) = {}^o B(\omega, t) = b(\omega, {}^o t) + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) {}^o t \tag{5.19}$$

por lo que al usar el teorema 2.3.2 tenemos que $b'(\omega, {}^o t)$ es un movimiento Browniano con respecto a $L(Q)$. De aquí que $b'\cdot, {}^o t)$ se distribuye normal con media cero y covarianza dada por $\sum_{s<t} E(\Delta B_s')^2$, Ahora de (5.18) tenemos que

$$\Delta B'(\cdot, s) = \Delta B(\cdot, s) + \frac{\mu - r}{\sigma}\Delta t$$

de donde se tiene que para $s < t$ y haciendo $\alpha = (\mu - r)/\sigma$ tenemos

$$\begin{aligned}
E_Q(\Delta B'(\cdot, s)^2) &= E_P((\Delta t + 2\alpha\Delta B(\cdot, s)\Delta t + \alpha^2(\Delta t)^2)(1 - \Delta B(\cdot, s)\alpha)) \\
&= E_P(\Delta t + 2\alpha\Delta B(\cdot, s)\Delta t + \alpha^2(\Delta t)^2 - \alpha\Delta B(\cdot, s)\Delta t \\
&\quad -2\alpha^2(\Delta B(\cdot, s))^2\Delta t - \alpha^3\Delta B(\cdot, s)(\Delta t)^3) \\
&\text{Y recordando que } E(\Delta B) = 0 \text{ y que } \Delta B = \Delta t \\
&= \Delta t + \alpha^2(\Delta t)^2 - 2\alpha^2(\Delta t)^2 \\
&= \Delta t - \alpha^2(\Delta t)^2 \\
&= \Delta t(1 - \alpha^2\Delta t)
\end{aligned}$$

Entonces $b'(cdot, t)$ tiene varianza ${}^o t$ como lo queríamos. Por lo que entonces bajo la medida de Loeb $L(Q)$, el precio descontado z definido para $(\omega, t) \in \Omega \times T$ por

$$z(\omega, {}^o t) = {}^o Z(\omega, t) = S_0^1 \exp\left(\sigma b(\omega, {}^o t) + \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) {}^o t\right) \tag{5.20}$$

en por tanto un movimiento Browniano geométrico, y por tanto una martingala.

Ahora tenemos el siguiente teorema del cual ya se han probado varias cosas.

Teorema 5.1.3 *Sea z el proceso de precios del bien subyacente definido por 5.20) sobre el espacio de Loeb $(\Omega, L(\mathcal{A}), L(P))$ y sea Z el lifting S-integrable de z definido por (5.13) entonces*

(I) *Existe una única medida equivalente de martingala Q sobre el espacio hiperfinito $(\Omega, \mathcal{A})$ para el proceso Z.*

(II) *La medida de Loeb $L(Q)$ es absolutamente continua con respecto a $L(P)$.*

(III) *Sea $c(\omega) = (s^1(\omega, T - K)^+$ una opción call Europea con fecha de expiración T y precio de ejercicio K y sea C su lifting $C(\omega) = (S^1(\omega, T - K)^+$ entonces el precio $\Pi(C) = E_Q(R^{-N}C)$ de C esta dado por la formula (5.8) .*

(IV) *El precio Black-Scholes $\pi(c)$ de la opción c satisface $\pi(c) = E_{L(Q)}(ce^{-rT})$.*

Prueba.-
Como se decía antes de enunciar el teorema (I) y (II) ya han sido probados, por lo que solo resta probar (III) y (IV). Así pues, veamos que en el modelo hiperfinito Q es la única medida equivalente de martingala para Z, entonces por el principio de transferencia se tiene que $\Pi(C)$ esta dado por

$$\begin{aligned}
E_Q(R^{-N}C) &= E_Q((S(\omega,T) - R^{-N}K)^+) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \left(\frac{S^1(\omega,T)}{R^N}\right) 1\!\!1_{\{S^(\omega,T)>K\}}(\omega)Q(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \left[S_0^1 \prod_{t<T} \left(\frac{1+\sigma\omega(t)\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t}{1+r\Delta t} \right) - R^{-N}K \right] \\
&\quad \times 1\!\!1_{\{S_0^1 \prod_{t<T}(1+\sigma\omega(t)\sqrt{\Delta t}+\mu\Delta t)>K\}}(\omega) \prod_{t<T} \frac{1}{2} \left(1 - \sigma\omega(t)\frac{\mu - r}{\sigma}\sqrt{\Delta t} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (S_0^1 R^{-N} u^j d^{N-j} - R^{-N}K)\, p^j (1-p)^{N-j} 1\!\!1_{S_0^1 u^j d^{N-j}>K}(j) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} S_0^1 \frac{1}{R^{N-j}\, R^j} (up)^j (d(1-p))^{N-j} 1\!\!1_{S_0^1 u^j d^{N-j}>K}(j) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} R^{-N} K p^j (1-p)^{N-j} 1\!\!1_{S_0^1 u^j d^{N-j}>K}(j)
\end{aligned}$$

y recordando la ecuación (5.9) podemos tomar esta A, por lo que

$$\begin{aligned} E_Q(R^{-N}C) &= S_0^1 \sum_{j\geq A} \binom{N}{j} \left(\frac{pu}{R}\right)^j \left(\frac{d(1-p)}{R}\right)^{N-j} - R^{-N}K \sum_{j\geq A} \binom{N}{j} p^j\,(1-p)^{N-j} \\ &= S_0^1 \sum_{j\geq A} \binom{N}{j} \left(\frac{pu}{R}\right)^j \left(1-\frac{pu}{R}\right)^{N-j} - R^{-N}K \sum_{j\geq A} \binom{N}{j} p^j\,(1-p)^{N-j} \end{aligned}$$

en el ultimo paso se ha usado el hecho dado por la ecuación (5.15). Por lo que finalmente tenemos

$$E_Q(R^{-N}C) = S_0^1 \Phi\left(A; N, \frac{p\,u}{R}\right) - R^{-N}K\,\Phi(A; N, p), \qquad (5.21)$$

así, queda probado (III). Resta probar (IV), para lo cual observemos que

$$\begin{aligned} \pi(c) &= {}^o(\Pi(C)) = {}^oE_Q(R^{-N}C) \\ &= {}^oE_P\left(\frac{Q}{P}R^{-N}C\right) \end{aligned}$$

usemos el teorema 2.2.2 y que $R^{-N} \approx \exp(-rT)$, junto con la definición de Q/P.

$$\begin{aligned} &= E_{L(P)}\left({}^o\left(\frac{Q}{P}\right)\exp(-rT)^oC\right) \\ &= E_{L(P)}\left(\frac{\mathrm{d}L(Q)}{\mathrm{d}L(P)}\exp(-rT)c\right) \\ &= E_{L(Q)}(c\exp(-rT)). \end{aligned}$$

por lo que la prueba del teorema se completa. ■

5.2. Opciones americanas.

Sea $b : \Omega \times [0, T]$ [2]$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ un movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad filtrado, $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{B})$ donde $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_u\}_{u\in[0,T]}$ es la filtración generada por b. El modelo de Black-Scholes asume que el precio de una opción $s = (s^0, s^1) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ para algún tiempo finito $T > 0$, que comprende un bono libre de riesgo s^0 y un valor riesgoso s^1 tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_u^0 &= s_u^0 r\mathrm{d}u, \quad s_0^0 = 1 \\ \mathrm{d}s_u^1 &= s_u^1(\mu\mathrm{d}u + \mathrm{d}b_u), \quad s_0^1 > 0. \end{aligned}$$

[2]Para algún $T > 0$ estándar.

donde $u \in [0,T]$, $r, \sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$, por lo cual

$$\begin{aligned} s_u^0 &= e^{ru} \\ s_u^1 &= s_0^1 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) u + \sigma b_u \right\}. \end{aligned}$$

y al hacer uso del teorema de Girsanov de cambio de medida

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(\omega) = \exp\left\{ -\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) b(\omega, T) - -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T \right\}$$

nos deja la medida libre de riesgo $Q \sim P$ la cual es la única medida que hace que el proceso de precio descontado $\frac{s^1}{s^0}$ sea Q-martingala.

Escribiendo $w_u = b_u + \frac{\mu - r}{\sigma} u$ se tiene que w es un Q- movimiento Browniano y el proceso del precio s^1 es reescrito como

$$s_u^1 = s_0^1 \exp\left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) u + \sigma w_u \right\}.^3$$

Una *opción Americana put* sobre una acción con fecha de expiración T y precio de ejercicio K tiene un proceso de retorno $y_u = (K - s_u^1)^+$ al tiempo $u \in [0,T]$. Sea $\tilde{y} = y/s^0$ el proceso de retorno descontado.

A continuación se dan algunas de las propiedades básicas de las opciones Americanas y que pueden consultarse en [22], [26] o [32], estas son

1. El *valor descontado* $\tilde{u}$ de la opción esta dado al tiempo $u \in [0,T]$ por

$$\tilde{v} = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{u,T}} E[\tilde{y}_\tau | \mathcal{B}_u]$$

   Donde $\mathcal{T}_{a,b} = \mathcal{T}_{a,b}^{\mathbb{B}}$ denota el conjunto de todos los $\mathbb{B}$ -tiempos de paro τ tales que $a \leq \tau \leq b$. El proceso $\tilde{v}$ es la mas chica $\mathbb{B}$ -supermartingala que domina a $\tilde{y}$.

2. Un tiempo de paro $\tau \in \mathcal{T}_{u,T}$ es *óptimo* si el supremo es obtenido usando τ, i.e., si $\tilde{v}_u = E[\tilde{y} | \mathcal{B}_u]$. En el modelo de Black-Scholes hay un único tiempo de paro óptimo sobre $[u,T]$, definido por

$$\tau_u^* = \inf\{\eta \in [u,T] \ : \tilde{v}_\eta = \tilde{y}_\eta\}$$

   y el proceso parado $(\tilde{v}_{u \wedge \tau_u^*})_{u \in [0,T]}$ es una martingala.

[3] A partir de ahora usaremos la medida Q y w, además de que E será la esperanza con respecto a Q.

3. Como Karatzas observó en [22] la propiedad de representación predecible de martingalas Brownianas implica que el proceso $\tilde{v}$ tiene trayectorias continuas Q-casi seguramente.

4. Sea $v = s^0\tilde{v}$ el *valor del proceso* para la opción, y como el modelo es markoviano podemos escribir $v_u = p(u, s_u^1)$ donde para $x > 0$

$$p(u,x) = \sup_{\tau\in\mathbb{T}_{\ 0,T-u}} E\left[e^{-r\tau}\left(K - x\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma w_\tau\right\}\right)^+\right].$$

La función auxiliar p es decreciente en u y decreciente y convexa en x. Para cada $u \in [0,T]$, El *precio critico* o *la frontera de para óptima* es definida como

$$s^c(u) = \sup\{x > 0 : p(u,x) = K - x\}$$

5. La función s^c es C^∞, no decreciente y $\lim_{u\to T} s^c(u) = K$.

6. Escribamos $\tau^* = \tau_0^*$ sobre el conjunto $\{\tau^* < T\}$, $\tau^* = \inf\{u \in [0,T] : s_u^1 \leq s^c(u)\}$, si $s_0^1 > s^c(0)$, entonces el soporte de τ^* es todo el intervalo $[0,T]$.

Resulta importante saber si la unicidad del tiempo de paro óptimo depende de la filtración usada, esto es cierto y ahora mostramos el porque de esta afirmación.

Supongamos que $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_u\}_{u\in[0,T]}$ es una filtración grande bajo la cual w es aun un Q-movimiento Browniano. Podemos definir $\tilde{v}^{\mathbb{F}}$, $u^{\mathbb{F}}$, $\mathcal{T}_{a,b}^{\mathbb{F}}$ y $p^{\mathbb{F}}$ igual que como antes, salvo que ahora es usando la filtración $\mathbb{F}$ y no $\mathbb{B}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathbb{F}$ obtenemos

$$p(u,x) \leq p^{\mathbb{F}}(u,x)$$

y como el ultimo es el supremo sobre un conjunto grande de tiempos de paro. Entonces $v_u = p(u, s_u^1) \leq p^{\mathbb{F}}(u, s_u^1) = v_u^{\mathbb{F}}$, por lo cual, $\tilde{v}_u \leq \tilde{v}_u^{\mathbb{F}}$. Inversamente, cualquier $L^2(\mathbb{B})$-supermartingala x puede ser representada en la forma

$$x_u = x_0 + \int_0^u \theta_\eta \mathrm{d}w_\eta \ - \ a_u$$

para un único proceso creciente $\mathbb{B}$-predecible a y un único proceso cuadrado integrable $\mathbb{B}$-predecible θ. La integral estocástica es una $\mathbb{F}$-martingala y a es también $\mathbb{F}$-predecible, por lo tanto x es de igual manera una $\mathbb{F}$-supermartingala. En particular, $\tilde{v}$ es una $\mathbb{F}$-supermartingala que domina a $\tilde{y}$ de donde se sigue que $\tilde{v}_u^{\mathbb{F}} \leq \tilde{v}_u$, entonces $\tilde{v}^{\mathbb{F}}$ es una versión de $\tilde{v}$. De todo esto se tiene que el tiempo de paro obtenido para las filtraciones $\mathbb{B}$ y $\mathbb{F}$ coincide, por lo tanto la unicidad del tiempo de paro τ^* es independiente de la filtración.

Opciones Americanas con el Modelo C-R-R.

Como es sabido, el modelo de Black-Scholes tiene una contraparte discreta dada por el modelo de Cox-Ross-Rubinstein. De aquí que sea mas eficiente técnicamente trabajar con este modelo para después extenderlo al modelo continuo, en particular con las opciones Americanas.

Fijemos unas constantes positivas T, r, σ y $\mu \in \mathbb{R}$ justo como antes. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\Delta_n = \frac{T}{n}$ y definamos la n-ésima línea de tiempo $\mathbb{T}_n = \{0, \Delta_n, 2\Delta_n, \ldots, T\}$. Además, sea $\Omega_n = (\Omega_n, \mathcal{A}^n, P_n, \mathbb{A}^n, S^n, Q^n)$ una familia definida como sigue. $\Omega_n = \{-1, 1\}^{\mathbb{T}_n \setminus \{T\}}$, $\mathcal{A}^n = \mathcal{P}\Omega_n$, $\mathcal{P}_n$ es la medida de conteo y $\mathbb{A}^n = \{\mathcal{A}_t^n\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ es la filtración generada por la caminata aleatoria

$$\begin{aligned} B^n(\omega, 0) &= 0 \\ B^n(\omega, t + \Delta_n) &= B^n(\omega, t) + w(t)\sqrt{\Delta_n}, \end{aligned}$$

para $t < T$ en $\mathbb{T}_n$. el mercado S^n es definido mediante

$$\begin{aligned} S_t^{0,n} &= (1 + r\Delta_n)^{\frac{t}{\Delta_n}} \\ S_t^{1,n} &= S_0^1 \prod_{\eta < t} (1 + \sigma \Delta B_\eta^n + \mu \Delta_n), \end{aligned}$$

donde $\Delta X_t^n = X_{t+\Delta_n}^n - X_t^n$ para $t \in \mathbb{T}$ y sumas y productos son tomados sobre $\mathbb{T}_n$. La medida $Q_n \sim P_n$ es la única medida de probabilidad que hace que el proceso $S^{1,n}/S^{0,n}$ sea una martingala. Bajo Q_n, el proceso

$$W_t^n = B_t^n + \left(\mu - \frac{r}{\sigma}\right) t$$

es una martingala y entonces podemos escribir

$$S_t^{1,n} = S_0^1 \prod_{\eta < t} (1 + \sigma \Delta W_\eta^n + r\Delta_n)$$

Denotemos por Y^n la función de pago de la opción Americana con precio de ejercicio K y fecha de expiración T en el modelo Ω_n. Entonces $Y_t^n = (K - S_t^{1,n})^+$ y el pago descontado es

$$\tilde{Y}^n = \frac{Y^n}{S^{0,n}}.$$

En tanto que el valor descontado $\tilde{V}^n$ de la opción Americana put esta dada por el desarrollo de Snell discreto, el cual es definido por las formulas de recursión backward

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}_T^n & = & \tilde{Y}_T^n \\ \tilde{V}_t^n & = & \max(\tilde{Y}_t^n, E_n[\tilde{V}_{t+\Delta_n}^n])^4 \end{array}$$

$t \in \mathbb{T}_n$, $t < T$. Y también podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}_t^n & = & \sup\limits_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}^n} E_n[\tilde{Y}_\tau | \mathcal{A}_t^n] \\ & = & E_n[\tilde{Y}_{\tau_{n,t}^*} | \mathcal{A}_t^n] \end{array}$$

Donde $\mathcal{T}_{a,b}^n$ denota el conjunto de todas los $\mathbb{A}$-tiempos de paro τ tales que $a \leq \tau \leq b$ y donde

$$\tau_{n,t}^* = \inf\{\tau \in \mathbb{T}_n \cap [t, T] : \tilde{V}_\eta^n = \tilde{Y}_\eta^n\}$$

es el primer tiempo de paro óptimo. Sea $\tau_n^* = \tau_{n,0}^*$. Sea $V^n = S^{0,n\tilde{V}^n}$ el proceso del precio del bien. Como el modelo es Markoviano, podemos escribir $V_t^n = P^n(t, S_t^{1,n})$ donde la función auxiliar $P^n(t,x)$ esta dada por

$$\begin{array}{rcl} P^n(T,x) & = & (K-x)^+ \\ P^n(t,x) & = & \max\left\{(K-x)^+, \dfrac{1}{1+r\Delta_n} E_n(P^n(t+\Delta_n), x(1+\sigma\Delta W_0^n + r\Delta_n)\right\} \end{array}$$

para $t < T$ en $\mathbb{T}_n$, y también por la expresión

$$P^n(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-\tau}^n} E_n\left[\frac{1}{S_\tau^{0,n}}\left(K - \prod_{\eta < t}(1+\sigma\Delta W_\eta^n + r\Delta_n)\right)^+\right].$$

Ahora, la función $(t,z) \longmapsto P^n(t,z)$ es no creciente en t, no creciente y convexa en z, y domina a $(K-z)^+$.

No es difícil verificar que

$$\begin{aligned} P^n(T-\Delta_n, K) &= \frac{K}{1+r\Delta_n} E_n[(1-(1+\sigma\Delta W_0^n + r\Delta_n))^+] \\ &= \frac{K}{1+r\Delta_n}(\sigma\sqrt{\Delta_n} - \mu\Delta_n) Q_n\{\omega(0) = -1\} \end{aligned}$$

la cual es positiva para n grande, ya que $\sqrt{\Delta_n}$ domina a Δ_n. Además, como $t \longmapsto P^n(t,K)$ es no creciente, entonces tenemos que $P^n(t,K) > 0$ para toda $t < T$ en $\mathbb{T}_n$, por lo cual se tiene la existencia de S_n^c.

Llamamos a esta función no decreciente $t \longmapsto S_n^c(t)$ el *precio critico* o *la frontera de paro óptima*. El tiempo de paro

$$\tau_n' = \text{ínf}\{t \in \mathbb{T}_n : S_t^{1,n} \leq S_n^c(t)\} \wedge T$$

pertenece a $\mathcal{T}_{0,T}^n$ y claramente es mayor que τ_n^* sobre el conjunto $\{\tau_n' < T\}$.

Sea $Y_t = (K - S_t^1)^+$ el precio de retorno de una opción Americana put interna. Escribiendo $\tilde{Y} = \frac{Y}{S^0}$ para el proceso descontado, tal que $\tilde{Y}$ es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting S-continuo de la función de recompensa $\tilde{y}$ definida para el modelo de Black-Scholes. Sea $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_u\}_{u\in[0,T]}$ su filtración generada, i.e., para cada $u \in [0,T]$

$$\mathcal{F}_u = \sigma\left(\bigcup_{t\approx u} L(\mathcal{A}_t))\right) \cup \mathcal{N},$$

donde $\mathcal{N}$ es la colección de todos los $L(\bar{Q})$-conjuntos nulos. Si $\mathbb{B}$ es la filtración generada por w es claro que $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ y si w es un $(Q, \mathbb{F})$-movimiento Browniano ya que $Q = L(\bar{Q})$. Entonces la invarianza de los tiempos de paro óptimos bajo cambios en la filtración se aplica aquí.

Tenemos un lema.

Lema 5.2.1 *El mapeo $\tau : \bar{\Omega} \to [0,T]$ es un $\mathbb{F}$-tiempo de paro si y sólo si $\tau = {}^o\rho$ para un $\mathbb{A}$-tiempo de paro $\rho : \bar{\Omega} \to \mathbb{T}$.*

■

Como s^1 es un proceso $\mathbb{F}$-adaptado continuo, con $s_0^1(\omega) = s_0^1$ para todo ω, el $SL^2(\bar{Q})$-lifting S^1, S-continuo satisface que para Q-casi todo $\omega \in \Omega$ se tiene

$$\forall t \in \mathbb{T} \quad s^1(\omega, {}^o t) = {}^o S^1(\omega, t).$$

Entonces si un $\mathbb{A}$-tiempo de paro ρ es lifting de un $\mathbb{F}$-tiempo de paro τ acotado, se sigue que S^1_ρ es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting de s^1_τ y similarmente para los precios de retorno $\tilde{Y}$ y $\tilde{y}$.

Ahora, como $\mathbb{B} \subset \mathbb{F}$ podemos aplicar el Lema 5.2.1 al tiempo de paro óptimo τ^* obtenido del modelo de Black-Sholes. Y como τ^* es acotado por T, podemos obtener un $\mathbb{A}$-tiempo de paro ρ como un $SL^2(\bar{Q})$-lifting de τ^*, tal que ρ tome valores casi seguramente en $\mathbb{T} \subset {}^*[0,T]$ por lo cual $\rho \in \mathcal{T}_{0,T}$.

Proposición 5.2.1 *Cualquier tiempo de paro óptimo interno ρ en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein hiperfinito es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting de un único tiempo de paro óptimo τ^* para el modelo de Black-Scholes.*

Prueba.-
El tiempo de paro óptimo interno ρ es acotado y entonces es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting de un $\mathbb{F}$-tiempo de paro $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$ tal que $\tau = {}^o\rho$ Q-c.s.. Y como el tiempo de paro τ^* definido al inicio de esta sección es también óptimo en el conjunto de $\mathbb{F}$-tiempos de paro, es decir, es óptimo en la familia $\mathcal{T}^{\mathbb{F}}_{0,T}$,

$$E[\tilde{Y}_{\tau^*}] \geq E[\tilde{Y}_\tau].$$

Por otro lado, el $\mathbb{B}$-tiempo de paro τ^* tiene un lifting $\hat{\rho} \in \mathcal{T}^N_{0,T}$ dado por el lema anterior. Y como $\tilde{Y}$ es un $SL^2(Q)$-lifting de $\tilde{y}$ entonces $\tilde{Y}_{\hat{\rho}}$ es lifting de $\tilde{y}_{\tau^*}$, y además ρ es óptimo en $\mathcal{T}^N_{0,T}$ por hipótesis, se sigue que

$$E[\tilde{y}_\tau] = {}^o\bar{E}[\tilde{Y}_\rho] \geq {}^o\bar{E}[\tilde{Y}_{\hat{\rho}}] = E[\tilde{y}_{\tau^*}],$$

usando el comentario dado después de la prueba del Lema 5.2.1. Entonces, τ es óptimo para el modelo de Black-Scholes. Y como el tiempo óptimo es único en el modelo de Black-Scholes se sigue que $\tau = \tau^*$ c.s. y entonces ρ es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting de τ^*. ■

El proceso de precio s^1 es de Markov, por tanto la descripción de el sobre el intervalo $[u,T]$ depende solo del valor inicial s^1_u y no del pasado del proceso. Por homogeneidad, las propiedades del tiempo 0 son las mismas que al periodo que inicia en u. Entonces hay solo un único tiempo de paro $\tau^*_u \in \mathcal{T}_{u,T}$ el cual optimiza

$$\tilde{v}_u = ess \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{u,T}} E[\tilde{y}_\tau | \mathcal{F}_u] = E[\tilde{y}_{\tau^*_u} | \mathcal{F}_u]$$

Argumentos similares se aplican para el proceso interno S^1.

Extendiendo la función P y S^c a $^*[0,T]$ obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2.1 *La función $P : {}^*[0,T] \times {}^*\mathbb{R}^{>0} \to {}^*\mathbb{R}$ es S-continua y su parte estándar es la función $p : [0,T] \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ definido para el modelo de Black-Scholes, i.e., ${}^oP(t,z) = p({}^ot, {}^oz)$ para todo $t \in {}^*[0,T]$ y todo z finito en ${}^*\mathbb{R}^{>0}$.*

Prueba.-
Supongamos que $u = {}^ot$ y $x = {}^oz$ para t, z como se ha indicado antes. Tenemos que probar que $P(t,z) \approx p(u,x)$. El tiempo de paro óptimo τ_u^* tiene un lifting $\hat{\rho} \in \mathcal{T}^N_{0,T-t_0}$ para algún $t_0 \in \mathbb{T}$ con $t_0 \approx u$. Truncando $\hat{\rho}$ en $T - t$ [5] tenemos un tiempo de paro $\rho \in \mathcal{T}^N_{T-t}$ para el cual

$$\bar{E}\left[\frac{1}{S^0_\rho}\left(K - z\prod_{\eta<\rho}(1+\sigma\Delta W_\eta + r\Delta)\right)^+\right] \approx \bar{E}\left[\frac{1}{S^0_{\hat{\rho}}}\left(K - z\prod_{\eta<\hat{\rho}}(1+\sigma\Delta W_\eta + r\Delta)\right)^+\right],$$

y como S^1 es SL^2 y por el comentario hecho después del Lema 5.2.1 se sigue que

$$\begin{aligned}
{}^oP(t,z) &\geq {}^o\bar{E}\left[\frac{1}{S^0_\rho}\left(K - z\prod_{\eta<\rho}(1+\sigma\Delta W_\eta + r\Delta)\right)^+\right] \\
&= E\left[\left(K - x\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_u^* + \sigma w_{\tau_u^*}\right)\right)^+\right] \\
&= p(u,x).
\end{aligned}$$

Entonces ${}^oP(t,z) \geq p(u,x)$ cuando $t \approx u$ y $z \approx x$.

[5] De ser necesario.

El tiempo de paro interno ρ_t^* tiene a su vez su parte estándar que es un $\mathbb{F}$-tiempo de paro $\tau_u \in \mathcal{T}_{0,T-u}$. Tenemos entonces con t y z como antes

$$\begin{aligned}
{}^oP(t,z) &= {}^o\bar{E}\left[\frac{1}{S^0_{\rho_t^*}}\left(K - z\prod_{\eta<\rho_t^*}(1+\sigma\Delta W_\eta + r\Delta)\right)^+\right] \\
&= E\left[e^{-r\tau_u}\left(K - \exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_u\sigma w_{\tau_u}\right)\right)^+\right] \\
&\leq p(u,x)
\end{aligned}$$

con lo cual se prueba el teorema. ■

Tenemos un lema.

Lema 5.2.2 *El desarrollo de Snell del precio de retorno descontado hiperfinito $\tilde{Y}$ es un $SL^2(\bar{Q})$-lifting $\mathbb{A}$-adaptado, S-continuo del desarrollo de Snell del precio de retorno descontado $\tilde{y}$ para el precio de Black-Scholes.*

Prueba.-
Notemos que

$$S_t^0\tilde{V} = V_t = P(t,s_t^1) \approx p(u,s_u^1) = v_u = s_u^0\tilde{v}_u$$

cuando $u = {}^ot$ y $s_u^1 = {}^oS_t^1$. Y como la función es uniformemente acotada por K, tenemos que

$$\max_{t\in\mathbb{T}}|V_t| \leq K,$$

entonces $\hat{V} \in SL^2(\bar{Q})$. ■
Con este lema podemos probar un resultado similar al Teorema 5.2.1 para los precios críticos en los modelos de Black-Scholes y Cox-Ross-Rubinstein hiperfinito.

Teorema 5.2.2 *La función de precio crítico S^c definida en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein es S-continua y su parte estándar es la función de precio crítico s^c del modelo de Black-Scholes.*

Prueba.-
Sea $t \in \mathbb{T}$ y $z = S^c(t)$, entonces $P(t,x) = K - x$ para toda $x \leq z$, y por

el Teorema 5.2.1 se tiene que $p({}^ot,\xi) = K - \xi$ para toda $\xi \leq {}^oz$, y por la definición de s^c tenemos $s^c(t) \geq {}^oz = {}^oS^c(t)$.

Para probar la otra desigualdad, fijemos $t \in \mathbb{T}$ y sea $u = {}^ot$. Recordando que el soporte de τ^* es todo $[0,T]$, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$A_m = \left\{\tau^* \in \left(u - \frac{1}{m}, u - \frac{1}{2m}\right)\right\}$$

es no nulo. Por lo que los siguientes subconjuntos de Ω tienen Q-medida diferente de cero:

$$\begin{aligned} B &= \{\tau^* = {}^o\tau^*N\} \\ C &= \{\forall t \in \mathbb{T} \,:\, {}^oS^1_t = s^1_{{}^ot}\} \\ D &= \{s^1_{\tau^*} = s^c(\tau^*)\}. \end{aligned}$$

por tanto si elegimos $\omega_m \in A_m \cap B \cap C \cap D$ y tomando $t_m = \tau'_N(\omega_m)$ tal que

$$t - \frac{1}{m} < t_m < t - \frac{1}{2m}.$$

De lo cual

$$\begin{aligned} S^c(t_m) &\geq S^1_{t_m} && \text{por definición de } \tau'_N, \\ &\approx s^1_{{}^ot_m} \\ &= s^1_{\tau^*(\omega_m)} && \text{porque } \omega_m \in B, \\ &= s^c(\tau^*(\omega_m)) && \text{porque } \omega_m \in D. \end{aligned}$$

Entonces s^c asegura que $S^c(t_m) \geq {}^*s^c(t_m) - \frac{1}{m}$ para cada m finito. Esta es una relación interna y por el *overflow* esto se cumple para algún infinito M con $t \approx t_M < t$. Y como S^c es no decreciente tenemos

$$S^c(t) \geq {}^oS^c(t_M) \geq {}^{o*}s^c(t_M) = s^c({}^ot)$$

por la continuidad de s^c, con lo que se completa la prueba. ■

Convergencia.

Con todo lo expuesto antes, solo resta verificar la convergencia en el modelo de Black-Scholes.

Primero consideremos las funciones deterministas P_n y S^c_n.

Teorema 5.2.3 *1. $P_n \to p$ uniformemente sobre compactos.*

2. $S_n^c \to s^c$ uniformemente sobre $[0,T]$.

Prueba.-
1. La caracterización no estándar de la convergencia uniforme sobre compactos es tal que, para cada N infinito, $P_N(t,z) \approx p({}^o t, {}^o z)$ para todo $t \in {}^*[0,T]$ y z finito, pero esto es precisamente lo que se mostró en el Teorema 5.2.1, con lo que se tiene esta parte del teorema.

2. Esto se sigue de igual manera que en el anterior pero ahora con respecto al Teorema 5.2.2. ■

Sea $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias cada una de ellas definida sobre Ω_n, $n \in \mathbb{N}$ y ψ una variable aleatoria sobre Ω. Asumamos que ψ es $\mathbb{B}$-medible. Podemos considerar Ψ_n y ψ como funciones de las trayectorias B^n y b respectivamente, por lo cual escribiremos $\Psi_n(B^n)$ y $\psi(b)$.

Identificamos Ω_n con el espacio de trayectorias $\mathcal{C}_n$ de $B^n(\omega,\cdot)$, $\omega \in \Omega_n$ con puntos que unidos poligonales y Ω con $\mathcal{C} = \{f \in C[0,T] : f(0) = 0\}$ bajo la medida de Wiener. Entonces un proceso será una *Q-discretización adaptada* si es una sucesión de funciones medibles $d_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_n$ que satisface las siguiente condiciones:

(i) d_n es adaptado, i.e., para cada $t \in \mathbb{T}$, $d_n(\cdot)(t)$ es $\mathcal{A}_t$-medible.

(ii) d_n preserva medidas, i.e., para cada $X \in \mathcal{C}_n$

$$Q(d^{-1}(X)) = Q_n(\{X\})$$

(iii) $d_n(b) \to b$ en Q-probabilidad, i.e., $\forall \epsilon > 0$ se tiene que

$$Q(|d_n(b) - b| < \epsilon) \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty \text{ [6]}$$

Tenemos la siguiente definición.

Definición 5.2.1 Ψ_n *es D^2-convergente a ψ si cualquiera de las siguientes condiciones se cumplen:*

[6] Donde $|\cdot|$ denota la norma del supremo en $\mathcal{C}$.

(a) $(\Psi_n(B^n), B^n) \to (\psi(b), b)$ *débilmente y* $E_n(\Psi_n^2) \to E(\psi^2)$.

(b) Ψ_N *es un* $SL^2(Q_N)$*-lifting de* ψ *para todos los infinitos* N.

(c) $\Psi_n(d_n(b)) \to \psi(b)$ *en* $L^2(Q)$*-norma, donde* (d_n) *es una* Q*-discretización adaptada.*

Usando lo visto antes, tenemos el siguiente resultado

Teorema 5.2.4 *Sea* (τ_n) *una sucesión de tiempos de paro óptimos en los modelos de Cox-Ross-Rubinstein* Ω_n. *Entonces* (τ_n) D^2*-converge al único tiempo de paro óptimo* τ^* *para el modelo de Black-Scholes.*

Prueba.-
Sea N cualquier infinito, entonces ρ_N es óptimo en el N-ésimo modelo de Cox-Ross-Rubinstein y por la Proposición 5.2.1 esté es un $SL^2(Q_N)$-lifting de τ^*. ■

Volviendo al desarrollo de Snell podemos considerar $\tilde{V}^n$ y $\tilde{v}$ como variables aleatorias con valores en $C[0,T]$, entonces tenemos

Teorema 5.2.5 $(\tilde{V}^n)$ D^2*-converge a* $\tilde{v}$[7]

Prueba.-
Del Lema 5.2.2 sabemos que para cualquier infinito N, $\tilde{V}^N$ es un lifting uniforme de $\tilde{v}$, esto es, para Q_N-c.s. $\omega \in \Omega_N$,

$$\tilde{V}^N(\cdot, B^N(\omega)) \approx \tilde{v}(\cdot, {}^oB^N(\omega)),$$

Entonces es claro que $\tilde{V}^N(B^N)$ es un $SL^2(Q_N)$, de hecho como la función P_N es por definición uniformemente acotada por K, un argumento similar sirve para el desarrollo de Snell interno, es decir, para el $\max_{t\in\mathbb{T}} |\tilde{V}^N(t,\cdot)| \leq K$. Lo cual completa la prueba. ■

[7] como una variable aleatoria que toma valores en $C[0,T]$.

Lema de Zorn.

Antes de dar el Lema de Zorn, necesitamos dar una definición previa.

Definición 5.2.2 *Sea S un conjunto de elementos. Supongamos que existe una relación binaria definida para cualesquiera dos par de elementos de S, a, b, la cual expresaremos simbólicamente por $a \prec b$ y tiene las siguientes propiedades,*

- *Si $a \prec b$ y $b \prec c$ entonces $a \prec c$.*
- *Si $a \in S$ entonces $a \prec a$.*
- *Si $a \prec b$ y $b \prec a$ entonces $a = b$.*

Entonces diremos que S es parcialmente *ordenado por la relación $\prec$.*

Si S es parcialmente ordenado y además para cada par de elementos en S, a, b se tiene que sólo una de las dos siguientes condiciones sucede: $a \prec b$ o $b \prec a$, entonces se dice que S es *t*otalmente ordenado.

Por otra parte, si S es un conjunto parcialmente ordenado y S_1 es es un subconjunto de S, entonces diremos que un elemento $m \in S$ es una cota superior de S_1 si $a \prec m$ para toda $a \in S_1$. Además diremos que un elemento $m \in S$ es un *elemento maximal* si $a \in S$ y $m \prec a$ implican que $m = a$.

Así, tenemos el Lema de Zorn el cual es el equivalente del Axioma de Elección de la teoría de la medida sólo que el Lema de Zorn lo es en la teoría de los conjuntos.

Lema 5.2.3 (Zorn.)
Sea S un conjunto parcialmente ordenado no vacío con la propiedad que cada subconjunto completamente ordenado de S tiene una cota superior en S. Entonces S contiene al menos un elemento maximal.

■

Conclusiones

Si bien no es tan sencillo construir los hiperreales, es decir la extensión de los reales, una vez construida se obtiene un conjunto que además de que sigue siendo campo contiene a los reales, esto es importante pues nos permite trabajar en ${}^*\mathbb{R}$ casi como se trabaja con los reales al tener todas las propiedades de un campo sobre ${}^*\mathbb{R}$.

Con la construcción hecha se tiene que se formaliza ciertas cuestiones que antes de ésta no son muy claras, existen diversos ejemplos, aunque aquí solo se discutieron los del calculo estocástico como es el de la regla de multiplicación que se usa en la integral de itô, en la cual se tiene que $\mathrm{d}w\mathrm{d}t = \mathrm{d}t\mathrm{d}w = \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0$ y $\mathrm{d}w\mathrm{d}w = \mathrm{d}t$ y uno se pregunta ¿eso porque es cierto o como se puede justificar?, pues la formalización se da con el Análisis no Estándar, ya que se puede obtener mediante una simple manipulación algebraica todo lo anterior.

Ahora bien, al desarrollar la teoría del Análisis Estocástico no Estándar se pudo tener los mismos resultados importantes que en su versión estándar, lo cual nos lleva a pensar en que una vez que se ha construido todas las cuestiones básicas del Análisis no Estándar podemos trabajar con este enfoque sin ningún problema al seguir teniendo todos las definiciones y resultados que nos son familiares del Análisis Estocástico Estándar.

El desarrollo del teorema de Lévy-Khintchine y su respectiva demostración ha sido un poco mas sencilla que la versión estándar, ello ha sido producto de las propiedades adicionales que se tienen en los hiperreales las cuales permiten probar un poco mas rápido los lemas que se usan en la prueba de éste importante teorema. ■

Bibliografía

[1] Albeverio S.,Fenstad J.E., Hoegh-Krohn R. and Lindstrom T., (1996). *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press.

[2] Albeverio S., Fan, R. and Herzberg FS., (2007) *Hyperfinite Dirichlet Forms and Stochastic Processes.* Springer, Berlin/Heidelberg/New York, Por aparecer.

[3] Anderson, R.M., (1982). "Star-finite representations of measure spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.* **271**.

[4] Applebaum D., (2005) *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[5] Arkeryd L.O., Cutland N.J., Ward Henson C., Editors, (1997). *Nonstandard Analysis Theory and Applications.* NATO ASI series, Series C: Mathematical and Physical Sciences. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

[6] Capiński M., Cutland N., (1995). *Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics.* World Scientific, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences.

[7] Cont R. and Tankov P., (2004) *Financial Modelling With Jump Processes.* Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series, UK.

[8] Cox J., Ross S. and Rubinstein M., (1979) "Option Pricing: A Simplified Approach ". *Journal of financial Mathematics*, **7**, 229-263.

[9] Cutland N., (1983). "Infinitesimal methods in measure theory ". *Bull. London Math. Soc.* **15.**

[10] Cutland N., editor., (1988). *Nonstandard Analysis and Its Aplications* London Mathematical Society, Student Texts 10.

[11] Cutland N., (2000). *Loeb Measures in Practice: Recent Advances.* Springer, Lecture Notes in Mathematics.

[12] Cutland N., Kopp E. and Willinger W., (1991). "A nonstandar Approach to Option Pricing". *Mathematical Finance*, Vol. **1**, 1-38.

[13] Cutland N., Kopp E. and Willinger W., (1993). "From Discrete to Continuous Financial Models: New Convergence Results for Option pricing". *Mathematical Finance*, Vol. **3**, 101-123.

[14] Cutland N., Kopp E. and Willinger W., (1995). "From Discrete to Continuous Stochastic Calculus". *Stochastics*, **25**, 173-192.

[15] Diener F. and Diener M., editors. (1995). *Nonstandard Analysis in Practice.* Springer, Universitext.

[16] Dempster M. and Pliska S., editors (1998). *Mathematics of Derivative Securities.*, Cambridge University Press, England.

[17] Folland Gerald B. (1984). *Real analysis: Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[18] Goldbladt R. (1998). *Lectures on the Hyperrreals, An introduction to Nonstandard Analysis.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

[19] Henson C.W. (1979). "Unbounded Loeb Measures." *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74**.

[20] Hoover D.N. and Perkins E. (1983). "Nonstandard construction of the stochastic integral and applications to stochastic differential equations I." *Trans. Amer. Math. Soc.* **275**.

[21] Ito, K. (1944) "Stochastic Integral." *Proc. Imp. Acad.* (tokio), **20.**

[22] Karatzas, I. (1989) "Optimization Problems in the Theory of Continuous Trading,". *Siam, J. Control and Optimization* **27**, 1221-1259.

[23] Keisler H.J. (1977) "Hyperfinite model theory". en *Logic Coloqium (1976)* (editado por Gandy, R.O. Hyland L.M.E.), North Holland Publ., Amsterdam.

[24] Keisler H. J. (1984) *An Infinitesimal Approach to Stochastic Analysis.* Memoirs of the American Mathematical Society.

[25] Krylov N.V. (1974) *Controlled diffusion processes.* Appl. Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York.

[26] Lamberton, D. (1993) "Convergence of the Critical Price in the Approximation of Americans Options, ." *Mathematical Finance* **3**, 178-190

[27] Lindstrøm, T. (1980) "Hyperfinite Stochastic Integration II: Comparison to standard theory." *Math. Scand.* **46**.

[28] Lindtrøm, T. (2004). "Hyperfinite Lévy Processes." *Stochastics and Stochastics Reports.*, **76**, No. 6, 517-548.

[29] Loeb, P.A., (1975). "Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory". *Trans. Amer. Math. Soc.* **211**, 113-122.

[30] Metivier M. and Pellaumail J. (1980) *Stochastic Integration.* Academic Press, New York.

[31] Meyer P.A. (1976) "Un cours sur les intégrales stochastiques ". In *Sém. Probab. X*, Lecture Notes in Math. **511,** Springer-Verlag, Berlin and New York.

[32] Myneni, R. (1992) "The Pricing of the American Option ", *Ann. of Appl. Probability* **2**, 1-23.

[33] Oksendal, B. (2003) *Stochastic Differential Equations, An introduction with applications.* Springer, Universitext.

[34] Osswald H. (1985), *Introduction to nonstandard measure theory* I-II. Lecture notes. 1984 – 1985. University of München.

[35] Perkins E., (1981). "A global intrinsic characterization of Brownian local time". *Annals of Probability* **9**, V.**9**, 800-817.

[36] Rubio J.E., (1994). *Optimization and Nonstandard Analysis.* Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker Inc.

[37] Sato Ken-Iti. (1999) *Levy Processes and infinitely divisible distributions.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[38] Siu-Ah Ng., "A nonstandard Lévy-Khintchine formula and Lévy processes". , Por aparecer en *Acta Mathematica Sinica.*

[39] Stroyan K.S. and Bayod J. (1985). *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis.* North-Holland Publ., Amsterdam.

[40] Taylor A. E. and Lay D.C. (1986). *Introduction to Funcional Analysis.* Wiley.