



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

PENETRACIÓN CAPILAR EN MICROCANALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

MÁXIMO PLIEGO DIAZ

DIRECTOR: DR. VICTOR MANUEL CASTAÑO MENESES

ASESOR: DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

MAYO 2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A

MÓNICA, RODRIGO Y FERNANDA

A MIS PADRES

ERNESTINA Y AARÓN

A MIS HERMANOS

DAVID, FRANCISCO, CÉSAR, LUISA Y ROBERTO

A TODOS MIS AMIGOS

PRESENTES, PASADOS Y FUTUROS

EN PARTICULAR A

ANGEL ESCUDERO CASTRO

A LA MEMORIA DE MI PANTEÓN PARTICULAR

EN ESPECIAL

A MI ABUELITA CARMEN,

A MI AMIGO DANIEL ALEJANDRO ESCALANTE GRIS

Y A MI PRIMO VÍCTOR SILVESTRE CASTILLO DIAZ

Agradecimientos

Esta tesis fue elaborada en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M., bajo la dirección de los Dres. **Víctor Manuel Castaño Meneses** y **Abraham Medina Ovando**, a quienes agradezco su apoyo para ver realizado este proyecto. En particular le agradezco a Abran su queridísima amistad.

Agradezco así mismo a los Dres. **Gerardo Ruíz Chavarria** (FC-UNAM), **Sergio Cuevas García** (CIE-UNAM), **Erick E. Luna Rojero** (IMP), **Catalina E. Stern Forgach** (FC-UNAM) y **Ana L. Rivera López** (CFATA-UNAM), por su valiosa crítica y comentarios al realizar la revisión de este trabajos.

Finalmente quiero agradecer al Instituto Tecnológico de Querétaro y a la Universidad Politécnica de Querétaro, el haberme permitido distraer tiempo de mis actividades laborales para poder llevar a cabo esta tesis.

“El científico esta en lo cierto cuando piensa que corrige los errores intelectuales y que anticipa la verdad; y sin embargo, para él la historia es periférica o está muerta... El humanista se halla plenamente justificado al hacer ver que la historia está sembrada de reliquias de teorías científicas que una vez se pensaron infalibles.”

Howard Mumford Jones, 1973.

Índice general

Nomenclatura y símbolos	4
Resumen	6
1. Introducción	8
2. Motivación física	12
3. Fundamentos de la mecánica de fluidos	17
3.1. Descripción de un fluido	17
3.2. Ecuaciones de movimiento	18
3.3. Condiciones a la frontera	19
4. Flujo de Poiseuille	22
4.1. Flujo entre placas paralelas (celda de Hele-Shaw)	23
4.2. Flujo en un tubo circular	24
4.3. Ecuación de Poiseuille para secciones transversales no circulares	27
4.3.1. Sección transversal elíptica	30
4.3.2. Sección transversal rectangular	31
4.3.3. Sección transversal triangular	32
5. Flujo capilar en microcanales	34
5.1. Flujo bajo presión inicial	35
5.2. Canales elípticos	37

5.3. Canales Rectangulares	45
5.4. Canales triangulares	47
5.5. El problema de la salida del líquido (bloqueo)	49
5.6. Conclusiones	54
6. Conclusiones generales	55
Apéndice A	57
A.1. Factor geométrico adimensional α para canales de sección transversal no circular [24]	57
A.1.1. Canal de sección transversal circular: $x^2 + y^2 = a^2$	59
A.1.2. Canal de sección transversal elíptica con $\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1$	59
A.1.3. Canal de sección transversal rectangular con: $-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b$.	60
A.1.4. Canal de sección transversal triangular equilátera de lado a	61
Apéndice B	62
B .1. Experimentos de penetración capilar en nanocanales	62

Nomenclatura y símbolos

a	radio del orificio de salida del fluido
C	compacidad
g	aceleración gravedad (magnitud)
\mathbf{g}	vector aceleración de la gravedad
\mathbf{j}	vector densidad de flujo másico
\mathbf{n}	vector normal
p	presión
Q	gasto
r, a	radio
R_i	radio de curvatura i
Re	número de Reynolds
v	velocidad del fluido (magnitud)
\mathbf{v}	velocidad del fluido (vector)
V	volumen
(x, y, z)	coordenadas cartesianas

Símbolos:

df	elemento diferencial de superficie (magnitud)
$d\mathbf{f}$	elemento diferencial vectorial de superficie
dV	elemento de volumen
dt	variación con respecto del tiempo
∇	operador nabra
δ_{ij}	delta de Kronecker

Griegos:

α	factor geométrico de corrección
μ	viscosidad dinámica
ρ	densidad
σ	tensión superficial

σ_{ij}	tensor de esfuerzo
Π_{ij}	tensor simétrico
Ω	sección transversal arbitraria

Subíndices:

i, j, k	componentes de vectores y tensores, según sea el caso
n	componente normal
τ	componente tangencial

Resumen

En esta tesis presentamos un estudio teórico de la penetración capilar de un líquido viscoso en micro y nanocanales rectos de forma arbitraria. Nuestra formulación desarrolla una solución general al flujo de Poiseuille, considerando un balance de las fuerzas de presión, superficial y viscosa, para canales rectos de sección transversal arbitraria. Esta solución general (que preserva la forma de la denominada ecuación de Washburn), depende de los parámetros geométricos α (conocido como el factor geométrico de corrección) y C (conocida como la compacidad). Los resultados aquí derivados se han aplicado, como forma de validación, a los experimentos de Kim ([14, 15], sección 5.5) y Han ([32], Apéndice B). El acuerdo resultante entre teoría y experimento es bueno e incluso da un criterio para ajustar la geometría óptima a un canal real. Además nuestro esquema abre la posibilidad de explicar, desde una perspectiva científica formal en el campo de la microfluidica, aspectos fenomenológicos no determinados aún, como lo son, por ejemplo, la problemática de los ángulos de mojado y el fenómeno de bloqueo del flujo.

Algunos de los resultados teóricos aquí obtenidos se han presentado ya en el **TERCER CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA**, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, FACULTAD DE INGENIERÍA. QUERÉTARO, QRO. 23 – 27 DE ABRIL, 2007. Bajo el título de "**Capillary penetration in nanochannels**", el cual será publicado en la **Revista "EUREKA"** de la UAQ, en su número de junio de 2007. Por otro lado, este formalismo y los resultados obtenidos en este trabajo, han sido ya enviados para su consideración, de ser publicados, en la Revista **Physical Chemistry Chemical Physics**.

El Capítulo 1, presentamos una breve discusión del tópico aquí estudiado el cual consiste en el análisis de la penetración capilar en canales de dimensiones micrométricas. En el Capítulo 2 damos brevemente algunos ejemplos relevantes de aplicaciones tecnológicas en las que el fenómeno de la penetración capilar a escala micrométrica es de gran utilidad. En el Capítulo 3 mostramos los fundamentos de la mecánica de fluidos necesarios para el análisis de nuestro problema. En el Capítulo 4 analizamos el flujo de Poiseuille para geometrías simples (celda de Hele-Shaw y tubos de sección transversal circular) y, posteriormente, presentamos un esquema generalizado que permite obtener soluciones analíticas para el flujo de Poiseuille en canales rectos de sección transversal arbitraria. Allí mismo son calculados los parámetros adimensionales

α y C . Estos parámetros son de utilidad para los estudios analíticos del flujo capilar realizado en el Capítulo 5. En dicho capítulo analizamos también el problema de la penetración capilar y realizamos algunas comparaciones entre nuestros resultados teóricos y los experimentos realizados por nuestro colega D. S. Kim de la Universidad Pohang de Ciencia y Tecnología en Corea. Tales comparaciones dan longitudes y tiempos de penetración muy similares, lo cual deja ver que el enfoque aquí utilizado para el estudio de flujos en microcanales de sección compleja, es correcto. También, en el Capítulo 5, estudiamos el problema del bloqueo (interrupción del flujo a la salida de los microcanales) el que ocurre, en esencia, porque la presión impuesta al flujo, denominada como p_{in} , no puede vencer a la presión capilar a la salida. Aunque en este caso la comparación entre teoría y experimento permite encontrar sólo un acuerdo del mismo orden de magnitud en las presiones, todo parece indicar que las diferencias son debidas a que en el caso teórico se tiene un mismo material, mientras que en las realizaciones experimentales se involucran diferentes materiales en la construcción de los microcanales y consecuentemente también diferentes propiedades de mojado. Todos los resultados derivados en el Capítulo 5 para el flujo con una presión impuesta, se aplican también al caso en el cual $p_{in} = 0$, lo que corresponde a la denominada penetración capilar espontánea. Este fenómeno *per se* también es de amplia aplicación industrial. Finalmente, en el Capítulo 6, damos las principales conclusiones de este trabajo y proponemos brevemente algunos estudios futuros.

Capítulo 1

Introducción

Las observaciones registradas de la penetración espontánea de líquidos en tubos finos bajo la acción de la gravedad se pueden remontar por lo menos a las épocas medievales; el fenómeno que desafiaba inicialmente su explicación se designó por el término en latín *capillus*, que significa pelo [1, 2]. En siglos posteriores se entendió claramente que la mayoría de los fenómenos capilares comparten la característica de ser algo que sucede siempre que dos materiales se sitúan de manera adyacente y no se les permite mezclarse. Se utiliza el término *superficie capilar* para describir la interfaz (o entrecara) que ocurre cuando uno de los materiales es un líquido y el otro un líquido o un gas. Para configuraciones físicas tales como los tubos capilares, las interfaces ocurren también entre éstos materiales y las paredes de los sólidos rígidos.

Thomas Young fue el primero (en 1805, [3]), que introdujo el concepto matemático de la curvatura media H de una superficie y quién demostró su importancia para la capilaridad relacionándola con el cambio de la presión a través de la superficie: $\nabla p = 2\sigma H$, con σ igual a la tensión de la superficie. Young también razonó que si el líquido descansa sobre una superficie de soporte W , entonces la superficie fluida S se encuentra con W a un ángulo que dependía solamente de los materiales y no del campo de la gravedad, la forma de la superficie, o la forma o el grueso de W ; véase la figura 1.1.

Young derivó con estos conceptos y de las leyes de la hidrostática la primera aproximación correcta para la altura de la subida en el centro de un tubo capilar circular de radio pequeño a inmerso verticalmente en un baño líquido grande:

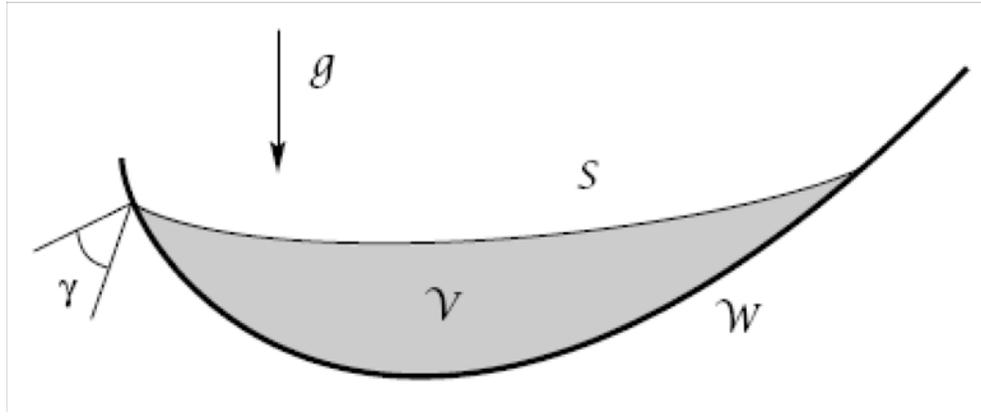


Figura 1-1: S interfase fluida, W superficie de soporte; γ es el ángulo existente entre las normales a las dos superficies. [3].

$$h_0 = \frac{2 \cos \gamma}{\kappa a}, \quad \kappa = \frac{\rho g}{\sigma} \quad (1.1)$$

aquí ρ es el cambio de densidad a través de la superficie libre, y g la magnitud de la aceleración gravitacional.

El fenómeno de la penetración capilar despertó un gran interés a finales del siglo diecinueve debido a que, mediante el filtrado en papel se podía separar el soluto del solvente en algunas soluciones, o que se podría explicar la permeabilidad de determinados fluidos en ciertos medios, como el agua o el aceite en la tierra o la impregnación de la lana u otros materiales con líquidos, o la determinación de la porosidad y verdadera densidad de los materiales porosos; además de que ofrecía un nuevo método para medir la tensión superficial o la viscosidad en los líquidos.

En la actualidad se considera que el fenómeno de la penetración de un líquido viscoso en un tubo capilar vertical es la base para entender los anteriores fenómenos [1, 4, 5, 6, 7], por lo cual, su estudio bajo diversas condiciones geométricas [8, 9, 10, 11], de temperatura [12], concentración [13] y de tamaño físico de los sistemas [14, 15, 16] es muy importante.

Los primeros estudios de la dinámica de la penetración capilar en cilindros de sección transversal circular y en medios porosos hechos de papel o arena fueron realizados a principios del siglo pasado por Bell y Cameron [4] en 1906, Lucas [5] en 1918 y Washburn [6] en 1921. Todos ellos realizaron estudios en capilares verticales y horizontales y encontraron que, para al-

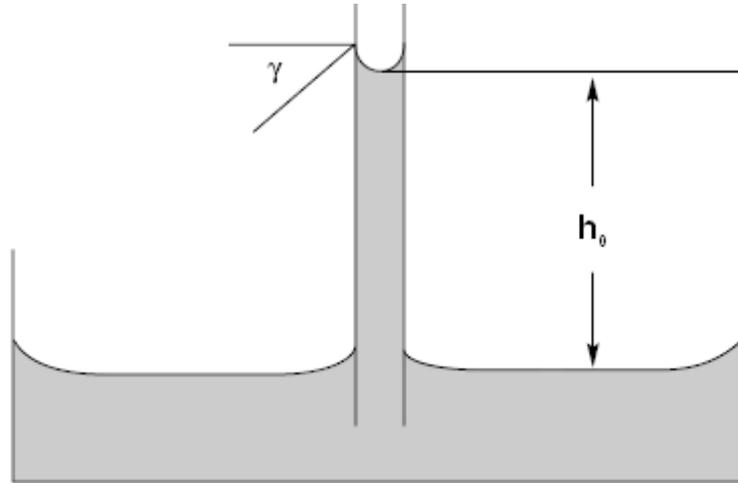


Figura 1-2: Configuración de un tubo capilar. Tomado de [3].

turas de penetración pequeñas en capilares verticales, o para cualquier longitud de penetración en los capilares horizontales, la posición del frente del líquido, l , se correlaciona con el tiempo transcurrido, t , de manera que

$$l \propto \sqrt{t}. \quad (1.2)$$

La constante de proporcionalidad es una función de la viscosidad dinámica del líquido, de la tensión superficial, del ángulo de contacto y de la forma geométrica y tamaño de la sección transversal del capilar.

En esta tesis presentamos un estudio teórico que generaliza este resultado para a) diferentes tipos de formas geométricas de secciones transversales de tubos o canales capilares y b) sistemas de dimensiones micro y nanométricas. Ambos aspectos son muy importantes en una nueva área de la mecánica de fluidos llamada la *microfluidica* porque cada vez más los aparatos y los procesos se miniaturizan llegando inclusive a tener flujos en la escala micro (10^{-6} m) y nano (10^{-9} m). Esta motivación física será discutida en el siguiente capítulo, pero lo que cabe que señalemos aquí es que los resultados que encontramos concuerdan muy bien con diferentes aspectos experimentales de los microflujos capilares en canales micrométricos de sección transversal no circular, los cuales fueron realizados por otros autores [14, 15, 16]. De hecho, los

resultados que no concuerdan con nuestras predicciones teóricas (ver capítulo 5, sección 5.5), pueden servir como motivación para explorar más cuidadosamente aspectos ambiguos de los resultados experimentales como la existencia de varios ángulos de contacto en microcanales con partes hechas de diferentes materiales.

La división de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 2 presentamos con más detalle el problema de la penetración capilar en microcanales. Después, en el capítulo 3 damos las ecuaciones de la mecánica de fluidos y sus condiciones a la frontera lo cual nos permitirá después formular correctamente el problema general del flujo en microcanales de sección transversal arbitraria. En el capítulo 4 estudiamos inicialmente el problema del flujo en canales rectos formados por placas paralelas muy cercanas y en tubos circulares para, más adelante, generalizar del problema a geometrías más complicadas. Una adimensionalización adecuada de las ecuaciones de flujo (ecuación de Poisson) nos lleva a que los flujos en canales de geometrías complejas son bien caracterizados con base en la compacidad C (definida como el cociente del cuadrado del perímetro del canal a su área transversal, es decir, $C = P^2/A$) y el factor de corrección geométrica α , el cual depende, finalmente, de C , es decir, de factores geométricos. En el capítulo 5 aplicamos los principales resultados del flujo de Poiseuille a microcanales de secciones transversales no circulares y obtenemos correlaciones analíticas que permiten, de un modo muy simple, el cálculo de los frentes de penetración capilar. En la parte final de dicho capítulo analizamos el problema del bloqueo a la salida de los microcapilares y encontramos las condiciones mecánicas bajo las cuales se producirá o no tal fenómeno ya sea para un canal rectangular o para canales rectos de forma arbitraria. Finalmente, en el capítulo 6 presentamos las principales conclusiones y posible trabajo futuro relacionado con el flujo capilar en microcanales.

Capítulo 2

Motivacion física

Los microaparatos tienden a comportarse de forma diferente a los objetos macroscópicos que manejamos en nuestra vida diaria. Las fuerzas volumétricas, por ejemplo, son por lo general muy pequeñas, y los efectos superficiales tienden a dominar el comportamiento de los sistemas pequeños. Las fuerzas electrostáticas y los efectos viscosos debidos al aire o al líquido de los alrededores se hacen cada vez más importantes cuando los aparatos se hacen más pequeños. En general, las propiedades (p) que son función del área de interacción (A) decrecen más lentamente que las propiedades que dependen del volumen (V), como se expresa por la *ley del cuadrado y el cubo* [17]

$$\frac{p_1(A)}{p_2(V)} \propto \frac{L^2}{L^3} \propto \frac{1}{L}, \quad (2.1)$$

donde L es la dimensión característica del microaparato; por ejemplo, si $L = 1 \mu\text{m}$, un orden típico de ésta magnitud es $10^6 \text{ m}^2/\text{m}^3$. Los efectos de tensión superficial son dominantes a estas escalas y sistemas como las microbombas y microválvulas se fabrican usando este principio [31, 33, 34, 35, 36, 37, 38]. En el moldeado por microinyección con un micromolde de inserción se desarrolla un flujo con estas características el cual es muy importante en las industrias de microsistemas debido a la producción económica y en masa de microcomponentes para las más diversas aplicaciones. Reportes recientes [14, 18, 17] indican que microproductos, tales como, microtelas, conectores de cinta de fibra óptica, cubiertas de microbombas, envases celulares, y otros más, se producen por tecnología de moldeado por microinyección.

A manera de ejemplo, en la Fig. 2.1 mostramos esquemáticamente el proceso de moldeo de microtelas ideado por Whitesides y sus colaboradores en la Universidad de Harvard [18]. En el esquema se observa cómo un molde de Polidimetilsiloxano (PDMS) es cortado y montado sobre un sustrato de Si/SiO₂. Después una gota de prepolímero (fluido newtoniano de baja viscosidad, es decir, un líquido similar al agua fluyendo) de poliuretano es puesta a la entrada de los microcanales de dimensiones $3 \times 1.5 \mu\text{m}$ la cual, por capilaridad (penetración espontánea), entra en los microcanales formando (después de la cura por calentamiento) microfibras de polímero.

En la Fig. 2.2 mostramos una variedad de microtelas visualizadas por medio de un microscopio electrónico. En tal figura es notable la variedad de formas lo cual es indicativo de la amplia variedad de microcanales que pueden ser empleados para obtener dichos materiales. Desde el punto de vista de la mecánica de fluidos, los flujos que dan origen a estas formas llenan bien a los microcanales y son muy eficientes ya que a dicha escala no se observan defectos.

Como se puede ver del proceso de fabricación de microtelas, el diseño de las microcavidades y de los microcorredores requiere de un buen conocimiento del flujo que los habrá de llenar. El problema típico es ilustrado en la Fig. 2.3, en donde ya sea una cierta cantidad de líquido, o un líquido proveniente de un gran recipiente (en cuyo caso habrá una presión inicial p_{in}) entra por capilaridad al canal de altura h y ancho w (ver figura 2.4) debido a la fuerza capilar \mathbf{F}_σ , la fuerza de fricción viscosa \mathbf{F}_μ limita (frena) el flujo y el problema es determinar el frente de avance, l , en función del tiempo transcurrido, t , para una amplia variedad de geometrías de canal.

Lo común en estos casos ha sido realizar estudios numéricos con software comercial [14, 15, 19] en donde no es claro el tipo de ecuaciones que se usan ni las condiciones de frontera, las cuales son muy importantes porque son ellas las que determinan, como veremos en esta tesis, las características principales del flujo.

Recientemente Kim et al [14, 15] propusieron, acelerar la inyección de los líquidos en los microcanales aprovechando la presión hidrostática de los depósitos de líquido que se conectan a los microcanales. Dichos experimentos [14, 15] y estudios recientes de otros autores [16] muestran que esto es posible si el nivel de llenado es suficientemente alto como para vencer a la presión capilar, originada por el goteo justo a la salida de los microcanales, y la cual puede llegar

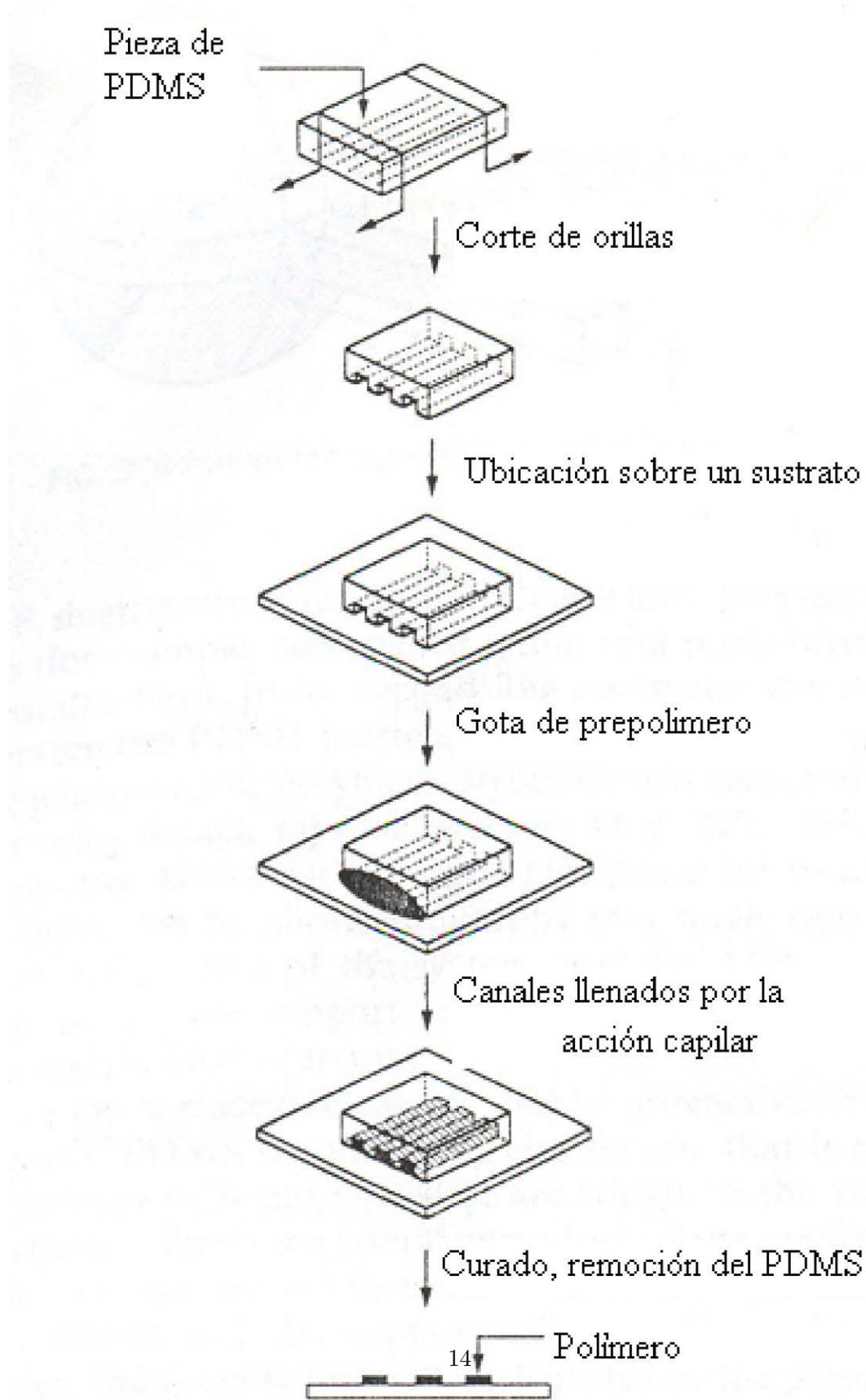


Figura 2-1: Etapas del moldeo por microinyección de prepolímeros para construir microtelas (ver Fig. 2.2). Tomado de [18].

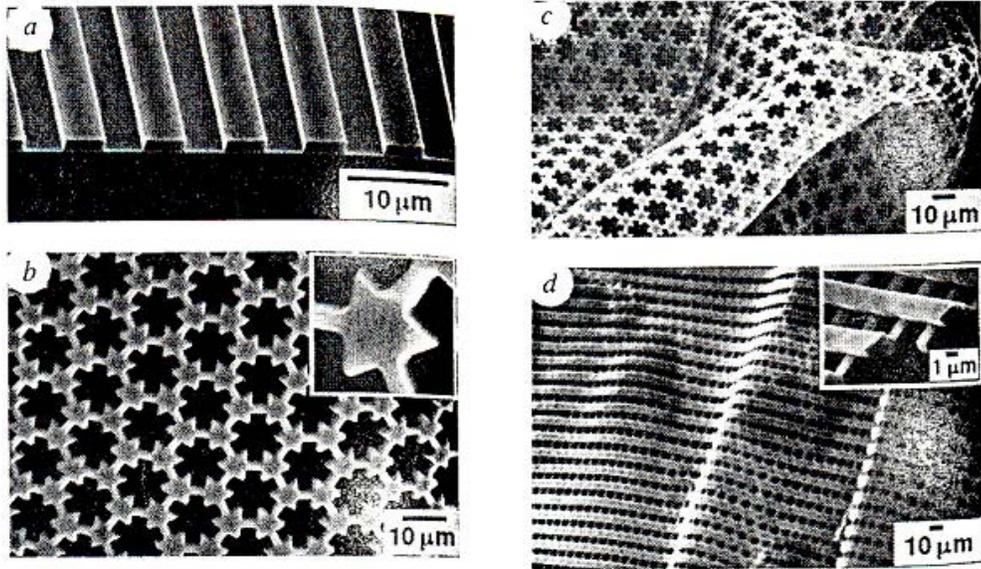


Figura 2-2: Microtelas de polímero hechas por moldeo por microinyección. Nótese la variedad de formas y de ángulos en estos materiales. Tomado de [18].

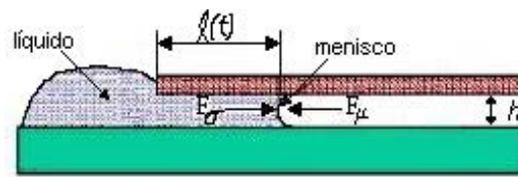


Figura 2-3: Esquema del mecanismo de penetración capilar, $l(t)$ es la longitud de penetración al tiempo t . El microcanal tiene altura h y la responsable de la penetración es la fuerza capilar F_σ , F_μ es la fuerza de fricción viscosa.

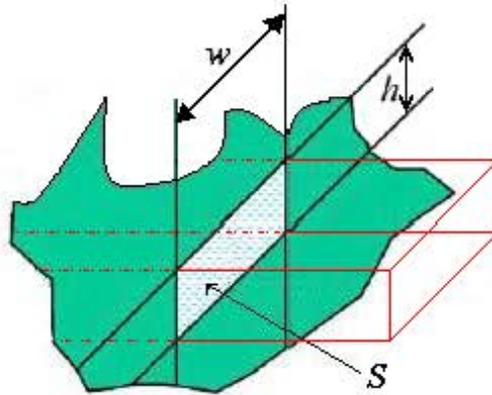


Figura 2-4: Sección transversal típica de un microcanal. En este caso el microcanal tiene altura h y ancho w y ambos tienen dimensiones de micras.

a ser muy alta y provocar el fenómeno de bloqueo, esto es, la interrupción del flujo hacia afuera de los microcanales. Los estudios numéricos de Kim et. al. [14, 15], efectuados en los estudios mencionados aquí, sólo permiten encontrar el resultado obvio de que, la presión de inyección debe de superar a la presión capilar. Sin embargo en dichos artículos no se hace ningún análisis de los aspectos geométricos o de la evolución del ángulo de contacto que lleva a resultados físicos generales inherentes a tales sistemas. Aspectos de este tipo son considerados en el presente trabajo, a partir de las ecuaciones de flujo unidimensional de Poiseuille para geometrías complejas y de las condiciones de frontera, a través de la presión capilar y que desarrollaremos formalmente en el capítulo 4.

Capítulo 3

Fundamentos de la mecánica de fluidos

3.1. Descripción de un fluido

El estudio de los fluidos (líquidos y gases) y los fenómenos que ocurren en ellos constituye la esencia de lo que se denomina mecánica de fluidos [20, 21, 22, 23, 24]. Los fenómenos ocurren a escala mucho mayor que la longitud de camino libre medio (distancia media entre colisiones moleculares [21]), por lo que un fluido se considera como un medio continuo. Esto nos indica que cualquier elemento de volumen pequeño de fluido es suficientemente grande para contener un número elevado de moléculas. En otras palabras, en esta tesis, cuando hablemos de volúmenes muy pequeños, con lo que comparamos dichos volúmenes, es contra volúmenes de paralelepípedos con lados mucho mayores que la longitud del camino libre medio entre moléculas. De la misma manera, cuando hablamos de las partículas o los puntos en un fluido, no nos referimos a una molécula en particular sino a sistemas muchas moléculas juntas.

Cuando describimos el estado de un fluido en movimiento, dicha descripción se realiza con funciones que dan la distribución de velocidades del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Lo anterior se debe a que todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas, al ser dadas dos cualesquiera de ellas junto con una ecuación de estado; de

aquí que, si se tienen cinco magnitudes determinadas, en este caso las tres componentes de la velocidad v , la presión p , y la densidad ρ , queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento.

En general, todas las magnitudes son funciones de las coordenadas espaciales x, y, z y del tiempo t ; a menos que se diga algo diferente, ésta es la manera como se van a manejar las magnitudes de aquí en adelante. También es necesario resaltar que la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ se refiere a la velocidad del fluido en un punto determinado por las coordenadas y a un instante de tiempo determinado; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas fijas del fluido; en el curso del tiempo, estas últimas se estarán moviendo en el espacio. Lo mismo hay que decir para p y ρ .

3.2. Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos son las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía. La ecuación que expresa la conservación de la materia se llama ecuación de continuidad. La densidad ρ del fluido y su campo de velocidades \mathbf{v} obedecen la relación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.1)$$

Para un flujo incompresible ($Ma^2 \ll 1$, donde $Ma = v/a$, es el *número adimensional de Mach* del flujo; el límite comúnmente aceptado es $Ma \leq 0.3$ [21]), la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación del movimiento de un fluido viscoso, newtoniano e incompresible, que expresa el principio de conservación del momento lineal es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (3.3)$$

en donde \mathbf{g} es el vector de aceleración de la gravedad, . En esta última ecuación μ es la viscosidad dinámica del fluido.

El cociente

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad (3.4)$$

se denomina viscosidad cinemática y a la ecuación vectorial (3.3) se le denomina la ecuación de Navier-Stokes.

La ecuación de conservación de la energía puede expresarse, para un fluido newtoniano e incompresible como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)T = -\kappa \nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right)^2, \quad (3.5)$$

en esta última ecuación T , κ y c_p , son la temperatura, la difusividad térmica y el calor específico a presión constante del fluido, respectivamente.

Cuando en un sistema dado el flujo es isotérmico ($T = cte.$) y la fricción viscosa no produce cambios significativos en la temperatura, la ecuación de conservación de energía se anula idénticamente y para la descripción del flujo sólo se requieren las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes. Si éste no es el caso, es necesario entonces resolver el sistema planteado por el conjunto de ecuaciones (3.2), (3.3) y (3.5).

3.3. Condiciones a la frontera

Las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes y de energía deben de satisfacer un conjunto de condiciones a la frontera para tener un problema bien formulado en términos de ecuaciones diferenciales parciales. Para la velocidad, debe de satisfacerse que

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

sobre una superficie sólida sin movimiento, a esta condición para la velocidad se le conoce como la condición de adherencia o no deslizamiento.

Cuando hay una superficie de separación entre dos zona de un fluido, debe haber igualdad de velocidades normales a través de esta superficie, de modo que no aparezcan huecos entre las zonas del fluido, así como continuidad en las velocidades tangenciales de cada una de las

zonas. También debe haber equilibrio mecánico en la interfase. Lo cual implica que los esfuerzos viscosos tangenciales a la superficie de separación deben ser iguales

$$\sigma'_{nj,1} = \sigma'_{nj,2}, \text{ con } n \text{ fija y } j \neq n,$$

así como el echo de que en dicha superficie, también debe satisfacerse la continuidad de los esfuerzos normales

$$-(\sigma'_{nn,1} - \sigma'_{nn,2}) - (p_1 - p_2) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.7)$$

donde p_i es la presión en el fluido $i = 1, 2$, $\sigma'_{nn,i}$ es la componente normal del esfuerzo viscoso en el fluido i , σ es la tensión superficial entre el fluido 1 y el 2 y R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura de la superficie de separación. La forma explícita de σ'_{ik} para un fluido newtoniano compresible es

$$\sigma'_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (3.8)$$

En caso de que el flujo ocurra también con diferentes temperaturas en cada uno de los fluidos adyacentes a la interfase de separación, las condiciones de frontera serán entonces, respectivamente, la de continuidad de la temperatura en cada zona fluida y la de continuidad de la componente normal del flujo de calor, *i.e.*,

$$T_1 = T_2, \quad (3.9)$$

donde T_i es la temperatura en la zona i y

$$(q_1)_n = (q_2)_n, \quad (3.10)$$

donde $(q_i)_n = -k(\partial T / \partial n)_i$ es la componente normal del flujo de calor en la zona i y k es la conductividad térmica. Esto debido a que no se puede almacenar calor en una superficie de espesor infinitesimal [22].

En los capítulos que siguen utilizaremos estas ecuaciones de flujo viscoso para describir la penetración capilar en micro canales, la base de esta descripción será el llamado flujo de Poiseuille en diversos tipos de canales.

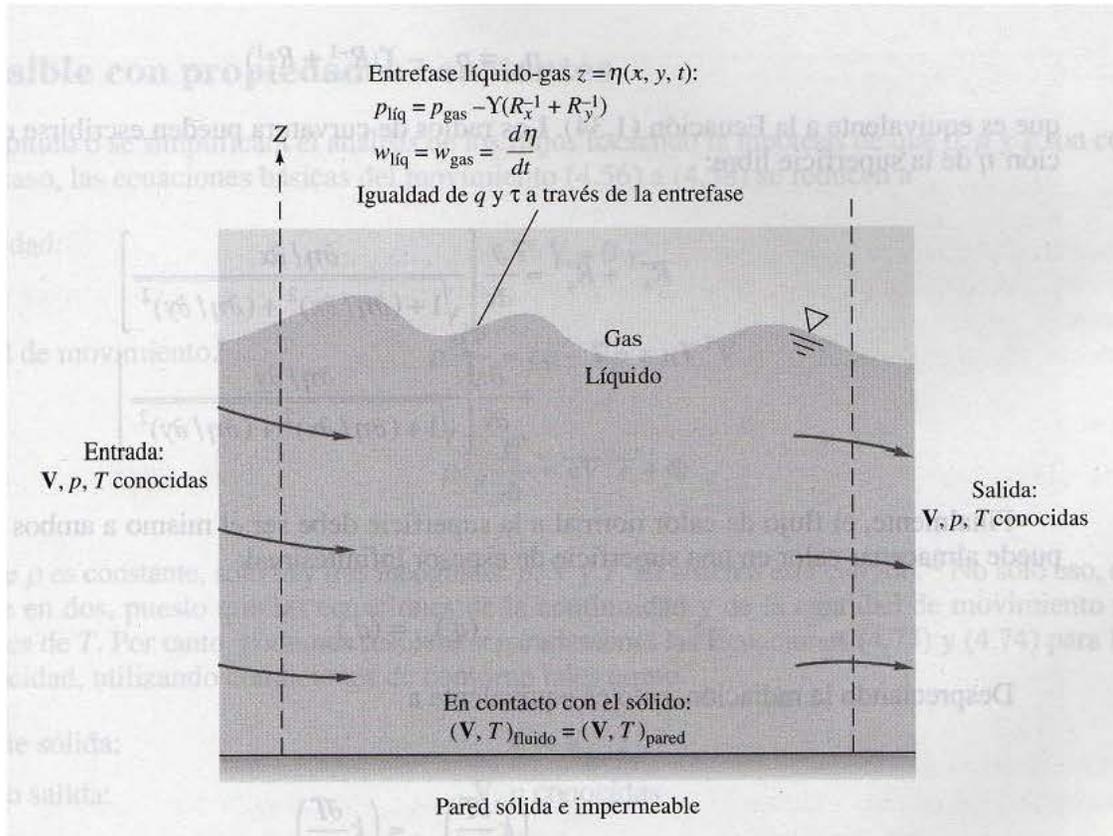


Figura 3-1: Condiciones de contorno típicas para el análisis del flujo de un fluido viscoso y conductor del calor.

Capítulo 4

Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille se desarrolla debido a la penetración inducida por un gradiente de presión de un fluido viscoso e incompresible, ya sea entre un par de placas paralelas con separación constante $2h$ entre ellas o en tubos rectos de cualquier sección transversal A [20, 21, 22, 23, 24]. Dichos flujos satisfacen la condición de adherencia sobre las paredes internas de los tubos y como veremos más adelante, pueden ser descritos de manera muy general en términos de factores geométricos relacionados con el flujo y con la forma del canal. Como un caso inicial consideremos el flujo entre placas paralelas.

El rápido desarrollo en el campo de los sistemas de *"laboratorio en un chip"* (lab-on-a-chip), durante la pasada década, ha puesto énfasis sobre los estudios de la dependencia de la forma física de los canales micro hidráulicos [14, 15, 18, 31, 32]. Tradicionalmente, los tubos capilares tenían secciones transversales circulares, pero actualmente los canales micro fabricados tienen una variedad de formas, que depende de la técnica de fabricación utilizada. Ejemplos de ello son: canales rectangulares obtenidos por el calentamiento realizado en obleas de polímero; canales semicirculares en superficies isotrópicamente grabadas al agua fuerte; canales triangulares grabados al agua fuerte por KOH, sobre cristales de silicio; canales de forma Gaussiana en películas de polímero por ablación láser; y canales elípticos en dispositivos estirados de polidimetilsiloxano (PDMS).

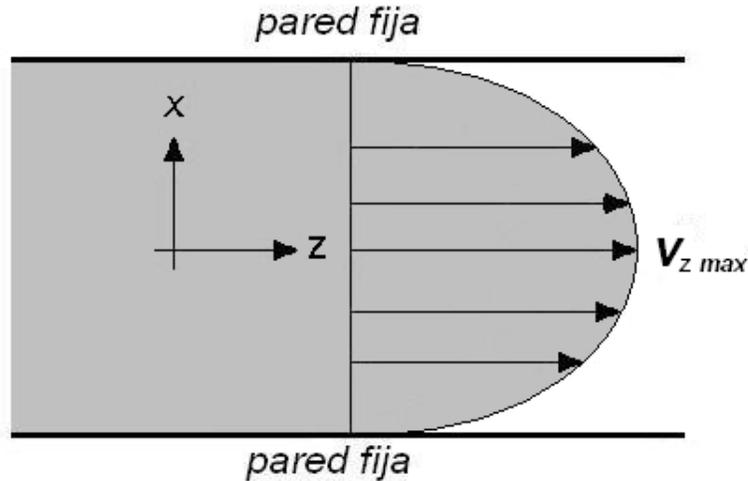


Figura 4-1: Flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas separadas una distancia muy pequeña $2h$, comparada con el largo l y el ancho w de las placas ($h \ll l$ y $h \ll w$). La velocidad máxima se alcanza en el centro del espacio entre las placas. El eje y está saliendo de forma normal al plano de la imagen.

4.1. Flujo entre placas paralelas (celda de Hele-Shaw)

Consideremos un flujo viscoso e incompresible entre dos placas paralelas a una distancia de $2h$ entre ellas [21, 22]. El flujo es bidimensional y cuasi infinito (es decir, el flujo es el mismo en cualquier punto a lo largo de la coordenada y y por ello $\partial/\partial y = 0$). Ver Fig. 4.1.

Supondremos que las placas son lo suficientemente anchas y largas para considerar que sólo existe un flujo axial, *i.e.*, $v_z \neq 0$, pero $v_y = v_x = 0$. Ambas placas se mantienen en reposo (lo cual quiere decir que su velocidad $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$), pero la presión varía en la dirección z . Así que de la ecuación de continuidad (3.2) en coordenadas rectangulares, obtenemos que

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ó} \quad v_z = v_z(x), \text{ únicamente.} \quad (4.1)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de Navier-Stokes (3.3), llegamos a que

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \right), \quad (4.2)$$

aquí hemos despreciado el efecto de la fuerza de gravedad, debido a que la separación entre las placas es lo suficientemente pequeña, para no observar variaciones significativas en el campo gravitacional, anulando así las fuerzas masicas [24]. Ya que $p = p(z)$, porque su gradiente induce el flujo, la ecuación (4.2) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\mu \left(\frac{d^2 v_z}{dx^2} \right) = \frac{dp}{dz} = cte. < 0, \quad (4.3)$$

la constante debe de ser negativa ya que al aumentar z , la distancia de penetración del fluido en el canal, la presión disminuye por las pérdidas viscosas. La solución de (4.3) es

$$v_z = \frac{x^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 x + C_2. \quad (4.4)$$

Las constantes las podemos obtener de la condición de no deslizamiento sobre las placas (en $x = \pm h, v_z = 0$); por ello $C_1 = 0$ y $C_2 = -[dp/dz](h/x)^2$. Así, la velocidad del flujo entre dos placas paralelas, debido a un gradiente de presión es

$$v_z = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right). \quad (4.5)$$

Nótese que el flujo de Poiseuille es parabólico con curvatura negativa. La velocidad máxima se da en el plano central del canal, para $x = 0$

$$v_{z \text{ máx}} = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (4.6)$$

4.2. Flujo en un tubo circular

Analicemos ahora el flujo estacionario de un fluido viscoso en tubo recto circular de radio a [23]. Para un flujo con simetría axial (Fig. 4.2) como éste, el cual se desarrolla a lo largo del eje de simetría z , tendemos que $v_z \neq 0$, mientras que $v_\theta = v_r = 0$. Por lo que la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, nos dirá ahora que

$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \acute{o} \quad v_z = v_z(r), \text{ únicamente,} \quad (4.7)$$

de donde al sustituir este resultado en las componentes r y z de la ecuación de Navier-Stokes para un flujo bidimensional (r, z) , obtenemos, respectivamente,

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (4.8)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \acute{o} \quad p = p(z), \text{ únicamente.} \quad (4.9)$$

y

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (4.10)$$

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} = \text{cte.} < 0, \quad (4.11)$$

donde al igual que para el flujo entre placas paralelas de la sección anterior, aquí también se desprecia el efecto de la fuerza de gravedad y se considera negativa la naturaleza del gradiente de presión, por los mismos argumentos que en la sección 4.1.

De las ecuaciones (4.9)-(4.11), encontramos que la presión es de la forma

$$p = C_1 z + C_2, \quad (4.12)$$

mientras, que la velocidad resulta ser

$$v_z = \frac{C_1 r^2}{4\mu} + C_3 \ln r + C_4. \quad (4.13)$$

En este caso las condiciones para la velocidad son

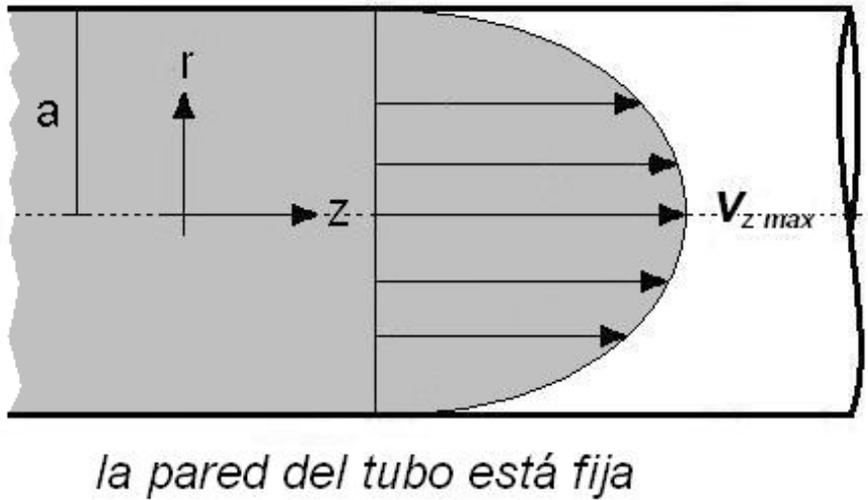


Figura 4-2: Flujo de Poiseuille en un tubo horizontal de radio a . Las flechas negras representan la magnitud de la velocidad del flujo.

$$v_z = 0 \text{ en } r = a, \quad (4.14)$$

$$v \text{ finita en } r < a. \quad (4.15)$$

Usando esto en las ecuaciones (4.12) y (4.13) encontramos que $C_1 = dp/dz$, $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = -C_1 a^2/4\mu$, esto nos proporciona la solución del flujo parabólico

$$v_z = \frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) = v_{z \text{ máx}} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (4.16)$$

donde la velocidad máxima $v_{\text{máx}}$ es en $r = 0$ y vale

$$v_{z, \text{máx}} = \frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (4.17)$$

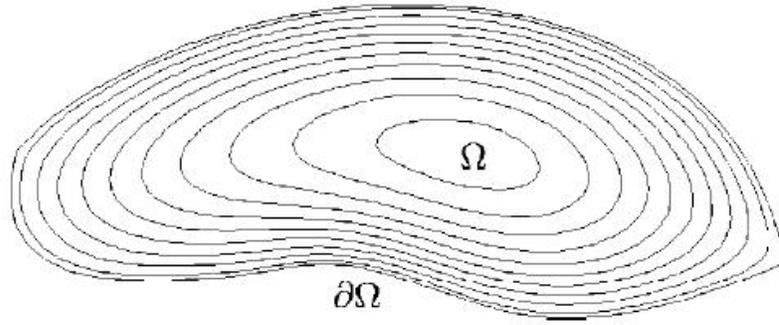


Figura 4-3: Sección transversal arbitraria Ω y la frontera $\partial\Omega$ de un tubo recto. En la frontera interior del tubo $\partial\Omega$ la velocidad se anula por la condición de adherencia.

4.3. Ecuación de Poiseuille para secciones transversales no circulares

En esta sección consideramos el flujo estacionario de un fluido viscoso a presión constante en canales rectos y rígidos, de sección transversal constante A . Líneas abajo mostramos que este flujo también puede ser caracterizado por la resistencia hidráulica, $R_{hid} = \Delta p/Q$, donde Δp es la caída de presión a lo largo del canal y Q es el gasto en el canal. En la Fig. 4.3 mostramos una forma de sección transversal arbitraria Ω en el plano xy para un canal recto con eje a lo largo del eje z .

Una unidad natural para la resistencia hidráulica que se encuentra mediante el análisis dimensional (R_{hid} tiene unidades de presión entre gasto, que en el SI son kg/m^4s), es $R_{hid}^* = \mu L/A^2$, donde μ es la viscosidad dinámica, L es la longitud del canal y $A = \int_{\Omega} dx dy$ es el área de la sección transversal. Normalmente, el flujo del fluido está sujeto a la condición de adherencia en las paredes $\partial\Omega$, por lo que la resistencia hidráulica real dependerá del perímetro así como del área de la sección transversal. Esta dependencia puede ser caracterizada, por lo tanto, por el factor geométrico de corrección sin dimensiones [26]

$$\alpha \equiv \frac{R_{hid}}{R_{hid}^*}. \quad (4.18)$$

Por otro lado, en las aplicaciones de *laboratorio en un chip*, donde se encuentran grandes cocientes de superficie a volumen, el problema del flujo de Poiseuille es comúnmente acompañado por otros fenómenos físicos o bioquímicos relacionados con el fluido cercano a las superficies. La lista de ejemplos incluye la química de superficies, la hibridación de DNA en blancos fijos, la catálisis, los fenómenos electrocinéticos interfaciales tales como la electroósmosis, la electroforésis, y los efectos electroviscosos, así como la difusión continua de la fuente a los bordes [26]. Aunque dichos fenómenos son de naturaleza muy diversa, ellos tienen por lo menos una cosa en común y es que son hasta cierto grado fenómenos de superficie y su intensidad y eficacia depende fuertemente del cociente superficie a volumen. Es común cuantificar este último cociente sin dimensiones, C , llamado compacidad, por

$$C = \frac{P^2}{A}, \quad (4.19)$$

donde $P \equiv \int_{\partial\Omega} \partial\ell$, es el perímetro de la frontera $\partial\Omega$ que confina al fluido.

El factor de compacidad C es un rasgo geométrico compuesto, obtenido en función del área y del perímetro de un objeto, el cual permite describir las propiedades geométricas de dicho objeto. Su valor será mínimo para un objeto circular. Aunque el valor del factor de compacidad es invariante a traslaciones, rotaciones y cambios de escala es, sin embargo, muy sensible al ruido en el contorno del objeto [40].

Recordemos de la definición misma del factor geométrico de corrección que, este tiene que ver con la cantidad de líquido que pasa por un tubo, y que dicha cantidad de líquido, entre otras muchas influencias, se encuentra determinada por la forma geométrica de la sección transversal del tubo; como se puede determinar a partir de la ecuación de Poiseuille (4.16), el gasto en tubos de sección transversal circular es proporcional a R^4 , lo que muestra la gran influencia que tiene una característica geométrica, como lo es el radio del tubo, en la cantidad de líquido que pasa por él [39]. Es por ello que nuestra intención es establecer una dependencia simple del factor de corrección geométrica α respecto de la compacidad C ; dando con ello una medida sin dimensiones unificada de las propiedades del flujo, así como de la fuerza y la eficacia de los fenómenos relacionados con la superficie en flujos laminares. Para este fin notamos que para los casos de flujo de Poiseuille entre placas paralelas o en un tubo, hay una invarianza de traslación a lo largo del eje z paralelo al eje del canal recto. Dicha invarianza se refleja en que el campo de

velocidades debe de ser de la forma $\mathbf{v} = v(x, y)\mathbf{e}_z$, donde \mathbf{e}_z es el vector unitario a lo largo del eje. Por lo tanto, la ecuación Navier-Stokes para un flujo desarrollado, estacionario, donde el gradiente de presión es $-(\Delta p/L)\mathbf{e}_z$, nos proporciona una ecuación de Poisson para la velocidad $v(x, y)$, de la forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v(x, y) = \frac{\Delta p}{\mu L}, \quad (4.20)$$

con la velocidad sujeta a la condición de no deslizamiento en la frontera $\partial\Omega$ y $\Delta p < 0$. Hemos considerado el flujo ya desarrollado debido al hecho de que para $Re \ll 1$, la longitud de desarrollo del flujo en el canal es muy corta.

Por otro lado, de lo discutido en párrafos anteriores podemos establecer una relación entre Δp , $v(x, y)$ y α de la forma

$$\Delta p = R_{hid}Q = \alpha R_{hid}^*Q = \alpha R_{hid}^* \int_{\Omega} v(x, y) dx dy. \quad (4.21)$$

donde Q es el gasto. Despejando de aquí α y recordando la definición de R_{hid}^* encontramos de inmediato que

$$\alpha = \frac{A^2}{\left(\frac{\mu L}{\Delta p}\right) \int_{\Omega} v(x, y) dx dy}. \quad (4.22)$$

De esta última relación parece natural el construir una forma adimensional de A^2 y del gasto (denominador) tal que se simplifique ésta última forma de α . Tal desarrollo fue propuesto por Liñán *et al* [24] y lo exponemos en el **Apéndice A**. La forma simplificada de α es

$$\alpha = \frac{\left(\int_{\Sigma} d\xi d\eta\right)^2}{\int_{\Sigma} u d\xi d\eta}, \quad (4.23)$$

en donde la integral del numerador es el área adimensional de la sección transversal del conducto, elevada al cuadrado; mientras que la integral del denominador es el gasto adimensional. Como el campo de velocidades adimensional u depende evidentemente de la forma que tiene la sección transversal del canal, entonces resulta natural que tanto el gasto adimensional, como el área adimensional y el factor de corrección geométrica α dependan también de la forma y no del tamaño de la sección transversal del conducto. En lo que sigue más abajo presentamos

la relación que guardan el factor de corrección geométrica α y la compacidad C para varias geometrías, inclusive aquellas ya consideradas anteriormente (tubo circular y par de placas paralelas, secciones 4.2 y 4.3 respectivamente). Todo ello simplificará sobre manera el análisis del problema de la penetración capilar que trataremos en el capítulo siguiente.

4.3.1. Sección transversal elíptica

La familia de canales con secciones transversales elípticas tiene como solución de la ecuación de Poisson (4.20), para elipses centradas en el origen con semiejes mayor a y menor b (ver apéndice A, en donde se dan las soluciones adimensionales), para la velocidad

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{(ab)^2}{(a^2 + b^2)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (4.24)$$

Utilizando ahora la relación (4.23) podemos conseguir una expresión explícita para el factor de corrección geométrica

$$\alpha(\gamma) = 4\pi(\gamma + \gamma^{-1}), \quad (4.25)$$

donde $\gamma = a/b$. Mientras que para las elipses la compacidad es

$$C(\gamma) = \frac{16}{\pi} \gamma \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - (1 - \gamma^{-2}) \sin^2 \theta} \right)^2. \quad (4.26)$$

La relación entre α y C puede ahora ser obtenida despejando $\gamma(\alpha)$ de (4.25) y sustituyendo el resultado en (4.26) e invirtiendo la expresión para conseguir una forma aproximada para $\alpha(C)$. Tal proceso lleva a que

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{\pi} d\theta \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - (8\pi)^2 \cos \theta}} \right)^2. \quad (4.27)$$

Nótese que el mínimo valor de α es 8π , de lo contrario el argumento de la integral elíptica (4.27) se hará complejo. Finalmente, haciendo una expansión alrededor de $\alpha = 8\pi$ y luego invirtiendo la función $C(\alpha)$, obtendremos que

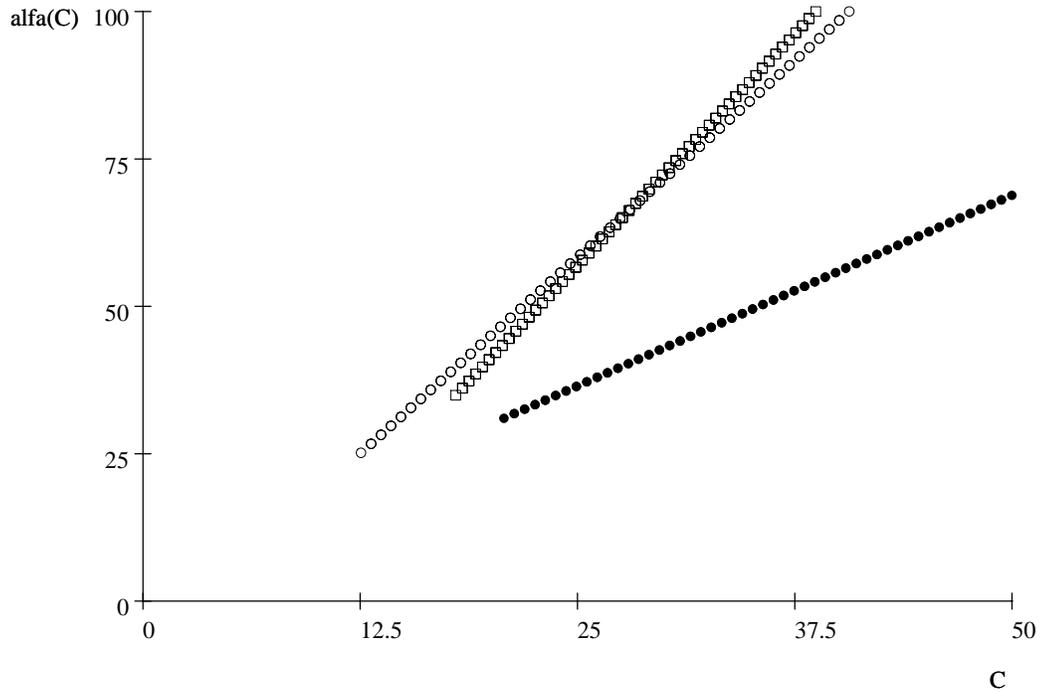


Figura 4-4: Gráfica de $\alpha(C)$ para las tres geometrías de canal aquí consideradas: a) elipses (\circ), b) rectángulos (\square) y c) triángulos (\bullet).

$$\alpha(C) = \frac{8}{3}C - \frac{8}{3}\pi + O\left([C - 4\pi]^2\right). \quad (4.28)$$

En la Fig. 4.4 graficamos la solución lineal aproximada (4.28) (símbolos \circ) para secciones elípticas y también mostramos las graficas aproximadas de $\alpha(C)$ para los casos de tubos de secciones transversales rectangulares (símbolos \square , ecuación (4.33)) y triangulares (símbolos \bullet , ecuación (4.35)). Estudios recientes en donde se grafican numéricamente las correlaciones entre α y C muestran que las aproximaciones lineales de $\alpha(C)$ son muy buenas [24].

4.3.2. Sección transversal rectangular

Para una sección transversal rectangular con el cociente de ancho a alto $\gamma = w/h$, tenemos que [Apéndice A]

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{\mu L} \frac{4h^2}{\pi^3} \times \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{\cosh(n\pi x/h)}{\cosh(n\pi w/h)} \right) \sin(n\pi y/h) \quad (4.29)$$

es la solución para la velocidad. Los ejes coordenados de este sistema se eligieron de forma que $-w/2 < x < w/2$ y $0 < y < h$. De la ecuación (4.23) se sigue ahora que

$$\alpha(\gamma) = \frac{\pi^3 \gamma^2}{8} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\gamma}{\pi n^4} - \frac{2}{\pi^2 n^5} \tanh(n\pi\gamma/2) \right)^{-1}, \quad (4.30)$$

y para la compacidad tenemos que

$$C(\gamma) = 8 + 4\gamma + \frac{4}{\gamma}. \quad (4.31)$$

Usando el hecho de que $\tanh(x) \approx 1$ para $x \gg 1$ podemos aproximar α en la forma

$$\alpha(\gamma) \simeq \frac{12\pi^5 \gamma^2}{\pi^5 \gamma^2 - 186\zeta(5)}, \quad \gamma \gg 1, \quad (4.32)$$

y substituyendo $\gamma(C)$ en esta expresión y expandiendola alrededor de $C(\gamma = 2) = 18$ obtendremos que

$$\alpha(C) \approx \frac{22}{7}C - \frac{65}{3} + O([C - 18]^2). \quad (4.33)$$

Para los dos coeficientes de Taylor hemos utilizado los primeros tres términos en la fracción continua.

En la Fig. 4.4 graficamos la ecuación lineal aproximada (4.33) (símbolos \square). Como ya mencionamos, los resultados de una solución numérica de elemento finito de la ecuación (4.20) se ajustan muy bien a los puntos de la teoría aproximada (ver, [26]).

4.3.3. Sección transversal triangular

Para secciones transversales en forma de triángulo equilátero de lados de longitud a mostramos en Apéndice A que $\alpha = 20\sqrt{3}$ y $C = 12\sqrt{3}$ y la velocidad es de la forma

$$v(x, y) = \frac{a^2 \Delta p \left(\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(3 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right)}{\mu L 2\sqrt{3}}. \quad (4.34)$$

En el caso general de un triángulo con las longitudes laterales a , b , y c haremos referencia a las soluciones numéricas de la ecuación (4.20). Para el escalamiento de triángulos rectángulos, de triángulos isósceles, y de triángulos escálenos agudos/obtusos los puntos se ajustan a una línea de tendencia de la forma

$$\alpha(C) = \frac{22}{17}C + \frac{40\sqrt{3}}{17}, \quad (4.35)$$

donde la pendiente se obtiene de un ajuste numérico y un subsecuente uso de los primeros tres términos en la fracción continuada de ese valor. Se ha encontrado [26] que los resultados para diversas clases de triángulos caen sobre la misma línea recta dada en la correlación lineal (4.35), es por ello claro que para los casos de triángulos no equiláteros usaremos dicha correlación.

En la Fig. 4.4 se muestran los puntos encontrados por medio de la correlación lineal (4.35) (símbolo de más abajo en la Fig. 4.4). Los puntos correspondientes a las gráficas de las secciones transversales rectangulares y elípticas allí mostrados, se obtuvieron de resolver mediante códigos de elemento finito la ecuación (4.20).

Los resultado obtenido en este capítulo se resumen en la siguiente tabla, donde podemos ver que el factor de compacidad crece a partir del valor mínimo, obtenido para los tubos de sección transversal circular.

tipo de sección transversal	compacidad	factor geométrico de corrección
circular $[x^2 + y^2 = a^2]$	$C = 4\pi$	$\alpha(C) = 2C = 8\pi$
elíptica $\left[\left(\frac{x^2}{a^2} \right) + \left(\frac{y^2}{b^2} \right) = 1 \right]^*$	$C(\gamma) = \frac{16}{\pi} \gamma \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - (1 - \gamma^{-2}) \sin^2 \theta} \right)^2$	$\alpha(C) = \frac{8}{3}C - \frac{8}{3}\pi + O([C - 4\pi]^2)$.
rectangular $[-a \leq w \leq a; -b \leq h \leq b]**$	$C(\gamma) = 8 + 4\gamma + \frac{4}{\gamma}$	$\alpha(C) \approx \frac{22}{7}C - \frac{65}{3} + O([C - 18]^2)$
triangular equilátera $[l_{123} = a]$	$C = 12\sqrt{3}$	$\alpha(C) = \frac{5}{3}C = 20\sqrt{3}$
triangular escalena $[a \neq b \neq c]***$	$C = \frac{2(a+b+c)^2}{a \sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)}}$	$\alpha(C) = \frac{22}{17}C + \frac{40\sqrt{3}}{17}$

* $\gamma = b/a$, con a el semieje mayor de la elipse.

** $\gamma = w/h$, con w el ancho y h lo alto del canal.

***donde hemos tomado al lado a como la base del triángulo.

Capítulo 5

Flujo capilar en microcanales

Ya hemos mencionado en los capítulos iniciales que la penetración capilar en microcanales puede darse de manera espontánea y/o bajo gradientes de presión. En este capítulo nuestra finalidad es construir un modelo válido para tubos o canales rígidos de sección transversal arbitraria. En tal caso, este flujo se puede modelar como un flujo de Poiseuille considerando un balance de fuerzas de presión, superficiales y viscosas. El modelo aquí desarrollado es una generalización para secciones transversales arbitrarias de los modelos empleados por Shalimov [25], Princen [8, 9] y de Gennes y su grupo [1, 11] en sus estudios de penetración capilar en canales circulares y de placas paralelas. Los resultados mostrados en este capítulo se obtienen al introducir los valores de los parámetros físicos correspondientes, a el flujo de trabajo (agua), utilizado por el grupo del profesor Kim [14, 15], en las soluciones analíticas a la ecuación general de movimiento del frente líquido (5.6), para las diferentes geometrías y tamaños, de secciones transversales utilizadas. Todos estos datos obtenidos de manera teórica por nosotros, nos servirán para mostrar la validez del modelo general que aquí desarrollamos, al contrastarse con los datos reportados por el grupo de trabajo del profesor Kim (particularmente aquellos que mostramos en la sección 5.5) y los del profesor Han [32] (**Apéndice B**). Particularmente este par de secciones muestran lo robusto del modelo que hemos desarrollado para describir la evolución dinámica de la penetración capilar en microcanales, abriendo con ello la posibilidad de revisar aspectos fenomenológicos no bien determinados por este formalismo, como por ejemplo la problemática de los ángulos de mojado, desde una perspectiva científica formal en el campo de la microfluidica y no puramente como eventualidades a considerar en los desarrollos tecnológicos.

5.1. Flujo bajo presión inicial

Hemos comentado en los capítulos iniciales que estamos interesados en describir la dinámica de la penetración capilar de líquidos viscosos en microcanales. En el Capítulo 2 mencionamos que comúnmente la penetración capilar en microcanales ocurre bajo presiones relativamente moderadas (del orden de kilo Pascales [14, 15]). Es conveniente, entonces, evaluar el número de Reynolds asociado con la velocidad a la entrada de los microcanales debida a tales presiones. Para ello aplicaremos la ecuación de Bernoulli, al flujo en el reservorio que alimenta de fluido a los microcanales (ver fig. 5.13), y que nos lleva directamente a encontrar que la velocidad a la entrada es del orden $U = \sqrt{2gH}$ donde g es la aceleración de la gravedad y H es el nivel de llenado de los recipientes de alimentación hacia los microcanales (las fuerzas debidas a la viscosidad y la aceleración del fluido son nulas cuando la velocidad del flujo es nula [24]). Bajo estas condiciones el número de Reynolds resulta ser

$$\text{Re} = \frac{aU}{\nu} = \frac{a\sqrt{2gH}}{\nu}. \quad (5.1)$$

Donde $\nu = \mu/\rho = 1.001 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$, para nuestro caso y a una distancia característica del canal, que tomaremos como la mitad del lado más grande del rectángulo que conforma la sección transversal del canal (hacemos la consideración de que esta distancia es el diametro de una sección transversal circular; aunque como se demostrará al final de este capítulo, dicho supuesto no es correcto). Para los canales de 100 micras de ancho, alimentados por recipientes llenados con agua a una altura $H = 30$ cm, encontramos que $\text{Re} = 118.93$, mientras que en los canales mas anchos, de 500 micras, el número de Reynolds resulta ser $\text{Re} = 594.63$. Los números de Reynolds calculado de esta manera está sobre determinado, pues como se puede ver del mecanismo experimental mostrado en la fig. 5.13, el flujo se encuentra totalmente desarrollado cuando llega a la entrada de los micro canales. Sin embargo este límite numérico, nos sirve para darnos cuenta de que los números de Reynolds para estos flujos son moderados y por lo tanto estos flujos son siempre laminares [21, 22], por lo que es correcto entonces suponer que los flujos que se desarrollan en los microcanales son del estilo de los de Poiseuille.

La ecuación de balance de fuerza para el flujo en un microcanal a lo largo de su eje de evolución, toma la forma escalar

$$Ap_{in} + f_{\sigma} - f_{\mu} = 0, \quad (5.2)$$

donde A es la sección transversal del tubo capilar rígido, p_{in} es la presión a la entrada, f_{σ} es la fuerza debida a la tensión superficial y f_{μ} es la fuerza viscosa friccional. La forma explícita de cada término es, respectivamente,

$$f_{\sigma} = P\sigma \cos \theta, \text{ y } f_{\mu} = \alpha\mu vl, \quad (5.3)$$

en donde P es el perímetro interno del capilar, θ es el ángulo de contacto, α es el término adimensional de resistencia hidráulica, v es la velocidad media del flujo y l es la posición del frente del líquido durante la penetración capilar. De forma explícita la ecuación de movimiento del frente líquido es

$$Ap_{in} + P\sigma \cos \theta - \alpha\mu l \frac{dl}{dt} = 0, \quad (5.4)$$

donde hemos usado que $v = dl/dt$. Como podemos ver la anterior ecuación es separable de tal manera que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l^2 \right) = \frac{Ap_{in} + P\sigma \cos \theta}{\alpha\mu} \quad (5.5)$$

De donde la solución a la ecuación diferencial no lineal (5.4) bajo la condición inicial $l = 0$ en $t = 0$, es

$$l = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{P^2 p_{in}}{C} + P\sigma \cos \theta \right)}{\alpha(C)\mu}} t. \quad (5.6)$$

Donde hemos introducido explícitamente a $\alpha(C)$ de $C(p)$ en la expresión de la solución. Analizaremos ahora el flujo de penetración capilar para canales representativos de diferentes sección transversal (tanto en forma como en tamaño), y para ello utilizaremos las expresiones explícitas de los parámetros $\alpha(C)$ y $C(p)$, que fueron ya encontradas en el capítulo 4, para llevar a cabo éste análisis.

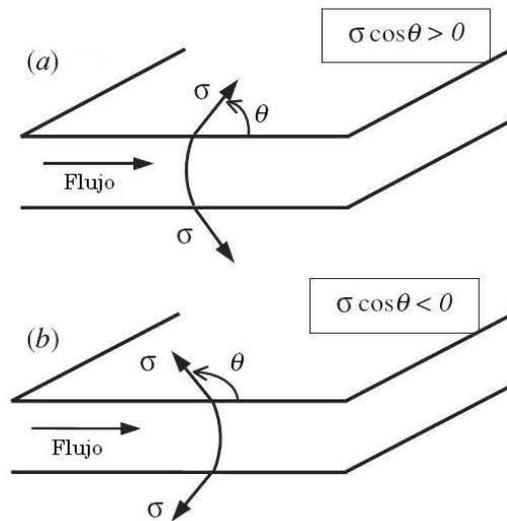


Figura 5-1: Canal de placas paralelas bajo (a) flujo capilar espontáneo en donde el ángulo de contacto $\theta < 90^\circ$. (b) Flujo bajo la presión inicial p_{in} en donde el ángulo de contacto es $\theta > 90^\circ$. σ es la tensión superficial.

5.2. Canales elípticos

Para comparar directamente con algunas realizaciones experimentales de microcanales, suponemos que un líquido puede entrar a un microcanal espontáneamente o bajo una presión p_{in} . Tal líquido, como ya mencionamos anteriormente, tiene viscosidad dinámica μ , densidad ρ y tensión superficial σ . El ángulo de contacto entre el líquido y sólido es θ . El ángulo de contacto puede ser mayor o menor que 90° . En general, si el líquido penetra espontáneamente al capilar el ángulo de contacto es menor que 90° ya que en este caso la componente horizontal de la presión capilar, $p_c = \sigma \cos \theta / h$, es la responsable de la entrada del líquido (ver Fig. 5.1 (a)). En cambio, si hay una presión adicional a la presión capilar, es decir, p_{in} , entonces el ángulo puede ser mayor que 90° y en tal caso la presión capilar es negativa, $p_c = \sigma \cos \theta / h < 0$ (ver Fig. 5.1 (b)). En la Fig. 5.2 (a) mostramos el frente de penetración capilar en un capilar cilíndrico circular bajo flujo espontáneo $\theta < 90^\circ$ y en la Fig. 5.2 (b) mostramos el flujo capilar bajo la presión inicial p_{in} .

Los casos de penetración capilar espontánea y penetración capilar bajo la presión inicial

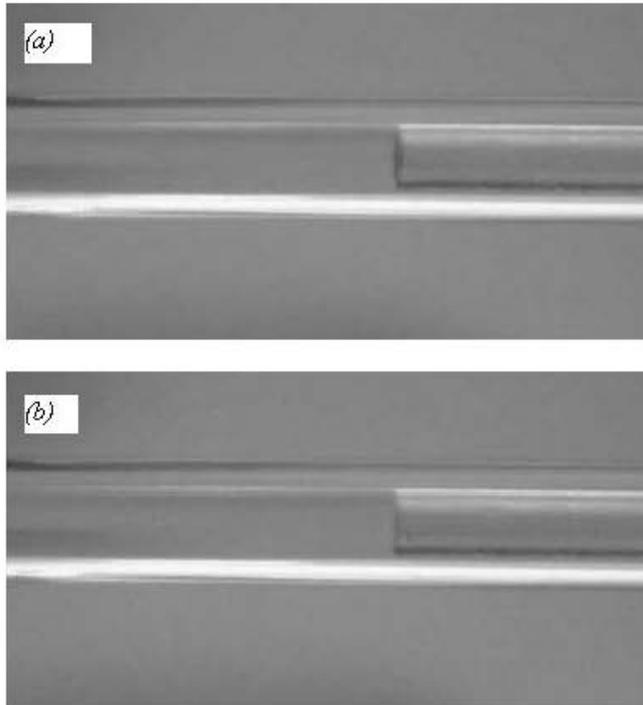


Figura 5-2: Frente de penetración capilar en un capilar cilíndrico circular bajo (a) flujo espontáneo $\theta < 90^\circ$ y (b) flujo capilar bajo la presión p_{in} en cuyo caso $\theta > 90^\circ$. θ es el ángulo de contacto entre el sólido y el líquido.

son considerados aquí durante el análisis del flujo capilar en canales de diferentes secciones transversales. Comencemos por los canales cilíndricos circulares. En este caso los términos C y $\alpha(C)$ que aparecen en la ecuación (5.6) se deben de sustituir con las expresiones $C = P^2/A = (2\pi a)^2 / (\pi a^2) = 4\pi$ y $\alpha(C) = 8\pi$ las cuales se obtienen de la ecuación (4.28), para **secciones transversales circulares**. Esto lleva a que para el caso de dichas secciones

$$l = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{P^2 p_{in} + 4\pi P \sigma \cos \theta}{\mu}} t. \quad (5.7)$$

Para el caso más general de **elipses** de semiejes mayor a y menor b , encontramos que la evolución del frente de penetración capilar esta dado por

$$l = \sqrt{\frac{3(P^2 p_{in} + CP\sigma \cos \theta)}{4(C^2 - C\pi)\mu}} t. \quad (5.8)$$

donde hemos usado la ecuación (4.28) válida para elipses. Nótese que es inmediato recuperar la ecuación (5.7) de la ecuación (5.8) haciendo $C = 4\pi$ (compacidad de una circunferencia).

Para propósitos de comparación consideraremos en los siguientes cálculos condiciones similares a las usadas en los experimentos [14, 15], es decir, capilares de vidrio rectaangulares de $w = 40 \mu\text{m}$ de grueso y anchos: i) $h_1 = 100 \mu\text{m}$, ii) $h_2 = 200 \mu\text{m}$, iii) $h_3 = 300 \mu\text{m}$, iv) $h_4 = 400 \mu\text{m}$ y v) $h_5 = 500 \mu\text{m}$. Los correspondientes valores del perímetro ($P = 2(w + h)$), área ($A = w \times h$), y compacidad ($C = P^2/A$), se indican en la siguiente tabla:

Ancho, h	Perímetro, P	Área, A	Compacidad, C
100 μm	280 μm	4000 μm^2	19.60
200 μm	480 μm	8000 μm^2	28.80
300 μm	680 μm	12000 μm^2	38.53
400 μm	880 μm	16000 μm^2	48.40
500 μm	1080 μm	20000 μm^2	58.32

Tabla 5.1. Valores del perímetro (P), el área (A) y el parámetro de compacidad (C), para canales rectangulares de ancho (h), variable y grosor constante $w = 40 \mu\text{m}$.

De aquí vemos que es posible generar otras secciones transversales, p. ej., circulares, elípticas y triangulares, preservando los mismos perímetros o áreas que los de los canales de dicha tabla.

Para ejemplificar esto, asumamos ahora que construimos secciones circulares de la *misma* área que la de los canales de la tabla anterior. Recordemos que si este es el caso, la compacidad para secciones transversales circulares siempre es la misma, $C = 4\pi = 12.56$, por lo cual obtendremos canales circulares de la misma área que los canales rectangulares pero con diferente perímetros pues $P = \sqrt{C \times A} = 2\sqrt{\pi \times A}$. Esto se resume en la siguiente tabla

Área, A	Perímetro, P	Radio, a	C (para secciones circulares)
4000 μm^2	224.20 μm	35.68 μm	4π
8000 μm^2	317.07 μm	50.46 μm	4π
12000 μm^2	388.33 μm	61.80 μm	4π
16000 μm^2	448.40 μm	71.36 μm	4π
20000 μm^2	501.32 μm	79.78 μm	4π

Tabla 5.2. Valores del área (A), el perímetro (P), el radio (r) y el parámetro de compacidad (C), para canales circulares, cuyas áreas de sección transversal, son iguales a las de los microcapilares utilizados por Kim et al [14, 15], (tabla 5.1.).

Como podemos ver los perímetros de los canales con secciones transversales circulares, serán siempre menores a aquellos de sección transversal rectangular, que tengan secciones transversales de igual área. Las secciones transversales de los canales de esta tabla son mostradas en la Fig. 5.3.

Para construir (en canales circulares equivalentes) las gráficas de la longitud de la penetración capilar, l , como función del tiempo, t , a partir de la ecuación (5.7) usaremos las condiciones de los experimentos de Kim et al [14, 15] ya comentados. Para ellos, la presión inicial fue $p_{in} = 2943$ Pa, y se uso agua como fluido de trabajo a temperatura ambiente $T_{amb} = 15.6$ °C. Bajo estas condiciones se tuvo que la tensión superficial $\sigma = 0.07362$ N/m, la viscosidad dinámica $\mu = 0.00114$ N s/m², la densidad $\rho = 999$ Kg/m³ y el ángulo de contacto medido bajo esta presión tuvo un valor de $\theta = 90.7^\circ$, por lo que $\cos \theta = -1.2203 \times 10^{-2}$. En dichos experimentos [14, 15], cuando no hubo presión inicial el ángulo de contacto medido fue de $\theta = 89.3^\circ$ y consecuentemente $\cos \theta = 5.2360 \times 10^{-3}$. En la Fig. 5.4 mostramos los frentes de penetración

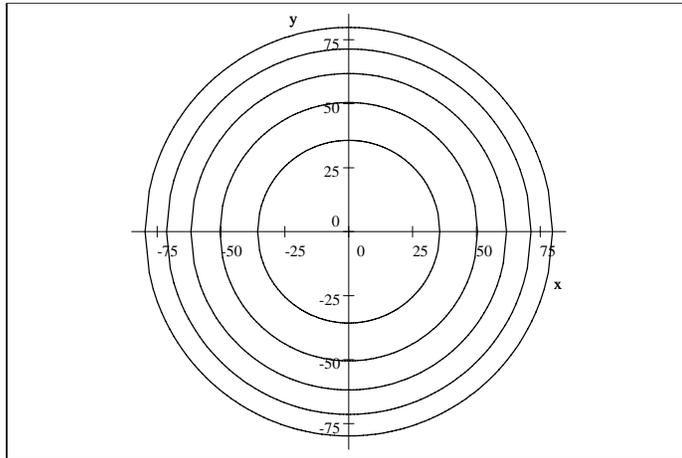


Figura 5-3: Secciones transversales circulares de los microcanales correspondientes a los valores de área, perímetro y radio de la tabla anterior. La unidades son en micras.

capilar que hemos obtenido utilizando estos datos, junto con una presión inicial $p_{in} = 2943$ Pa, en la ecuación (5.7). Debemos mencionar que los datos aquí especificados, para el agua como fluido de trabajo, serán los que utilizaremos para todos los resultados que se obtienen, y grafican, en el resto del capítulo.

En la Fig. 5.5 damos las gráficas de l vs t para los mismos cilindros circulares y los mismos parámetros ya mencionados, pero ahora bajo penetración espontánea, es decir, cuando el líquido entra sólo por capilaridad y sin una presión inicial de entrada ($p_{in} = 0$). De dichas gráficas notamos que la penetración capilar es mucho mas lenta que en el caso asistido por una presión inicial de la Fig. 5.4.

Kim et al [14, 15] no presentan gráficas de la longitud de penetración como función del tiempo. Sin embargo los tiempos de penetración, que bajo la acción de la presión p_{in} , hemos obtenido en las gráficas mostradas arriba, son casi los mismos que los obtenidos por Kim et al en sus experimentos (de 1 a 6s).

Continuando con la generación de otras secciones transversales, en la Fig. 5.6 mostramos dos elipses: una con área igual a la del canal rectangular más pequeño ($4000 \mu\text{m}^2$) de Kim et al [14, 15] y la otra con área igual al del canal más grande ($20000 \mu\text{m}^2$).

En la tabla de abajo damos los valores para el área, la compacidad, los semiejes mayor y

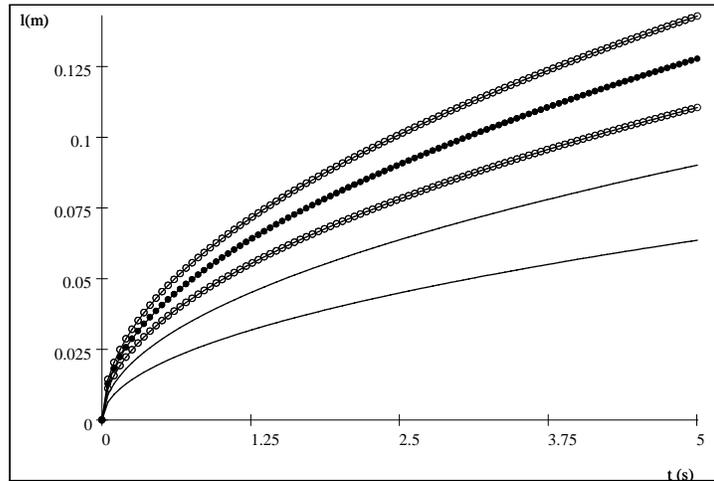


Figura 5-4: Gráficas de l vs t , obtenidos al utilizar la ecuación (5.7), en canales circulares equivalentes a los canales rectangulares usados por Kim et al [14, 15]. La presión inicial utilizada fue $p_{in} = 2943$ Pa y se usó agua como fluido de trabajo. La curva continua corresponde al cilindro de menor radio, $a = 35.68 \mu\text{m}$, mientras que las superiores van aumentando progresivamente su radio, de tal manera que la más extrema corresponde al mayor radio que es $a = 79,78 \mu\text{m}$.

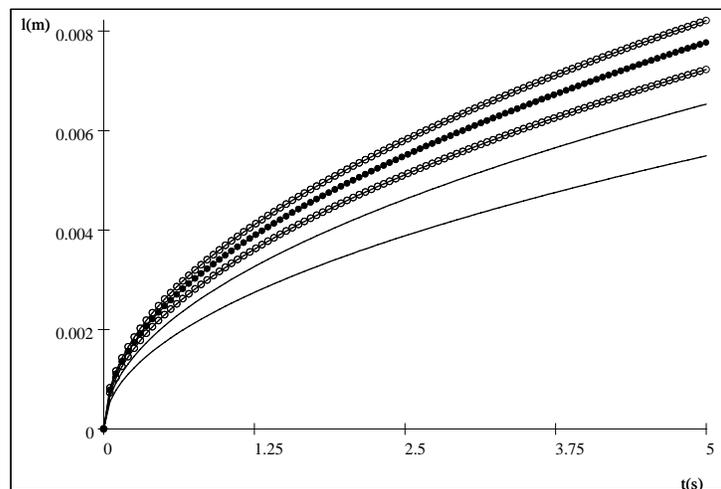


Figura 5-5: Gráfica de la penetración capilar espontánea l , en cilindros de sección transversal circular, como función del tiempo t , ecuación (5.7), a diferencia con la figura 5.4, consiste aquí en que $p_{in} = 0$. Nuevamente, la curva continua corresponde al cilindro de menor radio, $a = 35.68 \mu\text{m}$, mientras que las superiores van aumentando progresivamente su radio, de tal manera que la más extrema corresponde a la de mayor radio $a = 79,78 \mu\text{m}$.

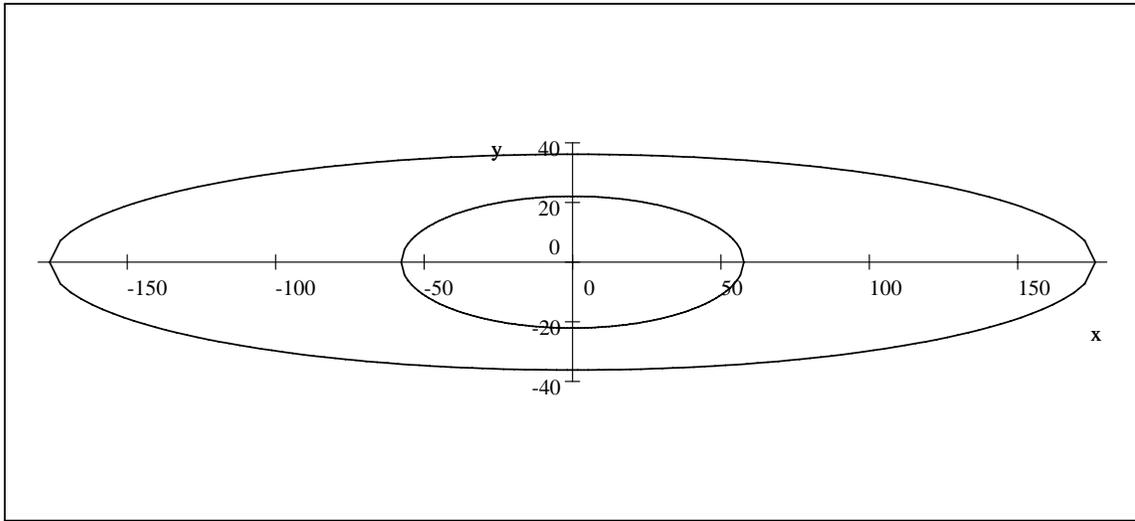


Figura 5-6: Canales elípticos de áreas $A = 4000 \mu\text{m}^2$ (elipse pequeña) y $A = 20000 \mu\text{m}^2$ (elipse grande).

menor (a , b) y el perímetro de tales elipses. Estos datos junto con los parámetros de los líquidos a las condiciones experimentales ya establecidas arriba, nos permitirán obtener las gráficas para la evolución de las longitudes de penetración en dichas elipses.

A	C	$a(\mu\text{m})$	$b(\mu\text{m})$	$P(\mu\text{m})$
$4000 \mu\text{m}^2$	19.60	63.00	20.21	280
$20000 \mu\text{m}^2$	58.32	257.64	24.71	1080

Tabla 5.3. Valores del área (A), el parámetro de compacidad (C), el semieje mayor (a), el semieje menor (b) y el perímetro (P), para canales elípticos, cuyas áreas y perímetros de sus secciones transversales, son iguales a las de los microcapilares ($h = 100 \mu\text{m}$ y $h = 500 \mu\text{m}$), utilizados por Kim et al [14, 15], (tabla 5.1).

En la Fig. 5.7 graficamos en base a la ecuación (5.8) las longitudes de penetración para los canales elípticos de la Fig. 5.6. Una comparación directa entre los datos de las Figs. 5.4 y 5.7 (para las secciones de igual área), permite encontrar que el flujo en los canales circulares es aproximadamente un 13% más rápido que en los correspondientes canales elípticos, esto a pesar de que, por construcción, los canales elípticos tiene mayor perímetro que los correspondientes canales circulares.

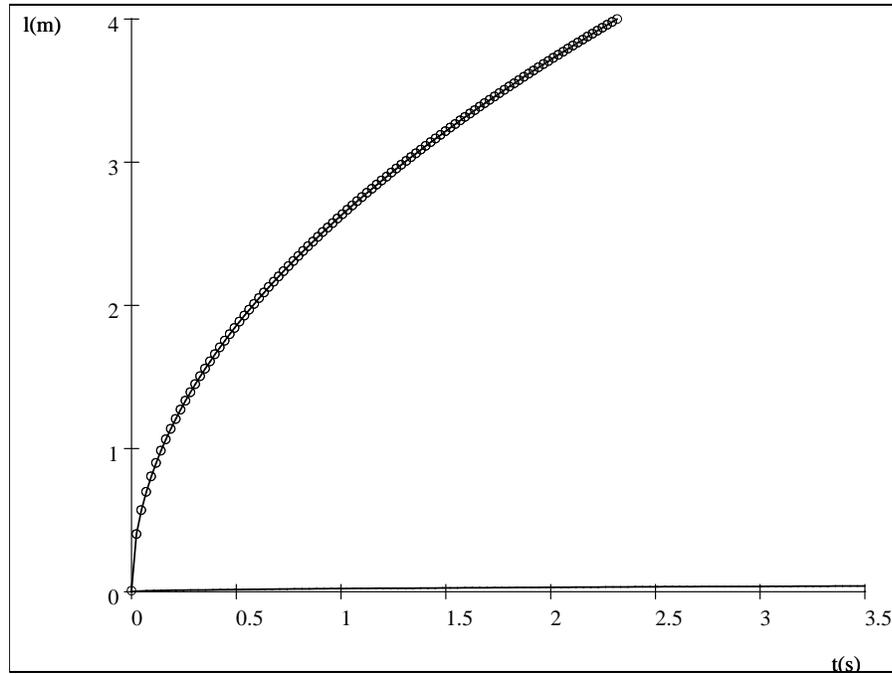


Figura 5-7: Gráficas de la evolución de $l(t)$ en cilindros de sección transversal elíptica (mostrados en la Fig. 5.6), obtenidas mediante la ecuación (5.8). La presión inicial en este caso es $p_{in} = 2,94$ kPa. La curva continua corresponde al canal elíptico con menor área en su sección transversal, $A = 4000 \mu\text{m}^2$, mientras que la curva formada de \circ corresponde a la del canal de área de sección transversal elíptica de $A = 20000 \mu\text{m}^2$.

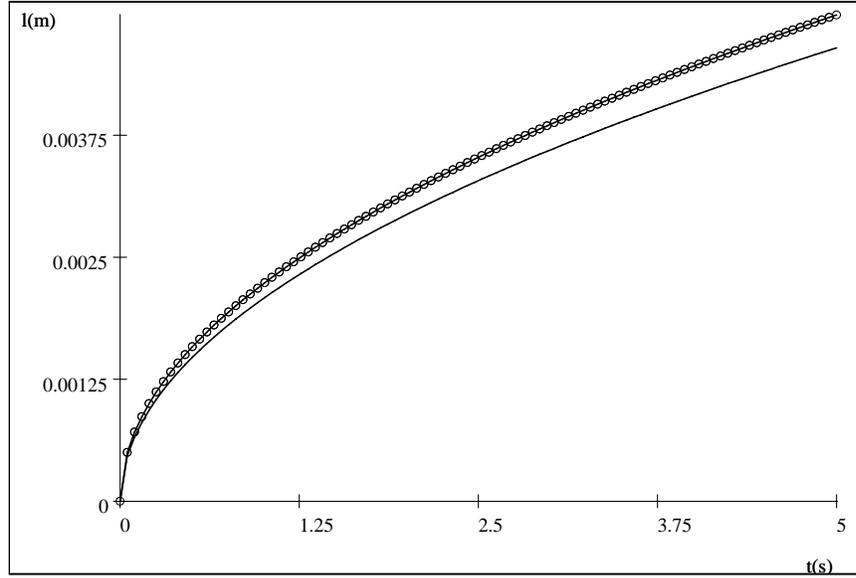


Figura 5-8: Gráfica de la penetración capilar espontánea ($p_{in} = 0$) en los cilindros elípticos, cuyas áreas de su sección transversal se muestran en la Fig. 5.6. Nuevamente los datos se obtienen mediante la ecuación (5.8). La curva continua corresponde al canal elíptico con menor área en su sección transversal, $A = 4000 \mu\text{m}^2$, mientras que la curva formada de \circ corresponde a un canal de sección transversal elíptica $A = 20000 \mu\text{m}^2$.

En el caso de penetración espontánea (ecuación (5.8), con $p_{in} = 0$), en los capilares elípticos (Fig. 5.8), la penetración es más rápida que en los correspondientes canales circulares.

5.3. Canales Rectangulares

Ahora consideramos microcanales de sección transversal rectangular de altura h y grosor w con $w \geq h$, la razón de aspecto es $\gamma = w/h \geq 1$. Para canales de este tipo, $P = 2(h + w)$, $A = hw$, mientras que la compacidad C y el factor geométrico de corrección α están dados por las ecuaciones (4.31) y (4.33) (ver tabla 5.1), respectivamente. En este caso la ecuación para la longitud de penetración en función del tiempo (5.6), tendrá la forma

$$l = \sqrt{\frac{42 (P^2 p_{in} + PC \sigma \cos \theta)}{(66C^2 - 455C) \mu}} t. \quad (5.9)$$

Nuevamente, es directo graficar con esta correlación los frentes de penetración capilares $l(t)$.

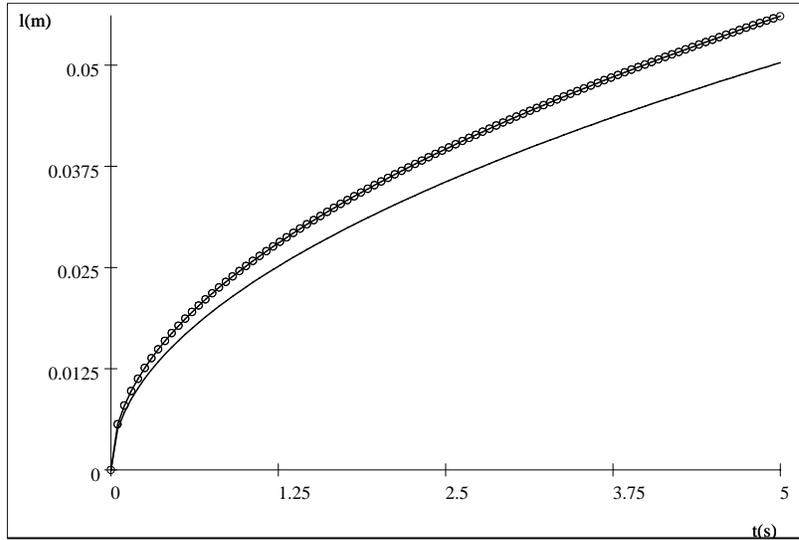


Figura 5-9: Gráficas del frentes de penetración capilar $l(t)$, bajo la presión $p_{in} = 2,94$ kPa, en capilares de sección transversal rectangular, obtenidas mediante la ecuación (5.9). La curva inferior continua, corresponde al canal de menor área, $a = 4000 \mu\text{m}^2$, y perímetro, $P = 280 \mu\text{m}$, y la curva superior, señalada con \circ , corresponde al canal de sección transversal rectangular de mayor área, $a = 4000 \mu\text{m}^2$, y perímetro $P = 1080 \mu\text{m}$.

En la Fig. 5.9 mostramos las gráficas para los canales de menor ($P = 280 \mu\text{m}$, $A = 4000 \mu\text{m}^2$ y $C = 19.60$) y mayor ($P = 1080 \mu\text{m}$, $A = 20000 \mu\text{m}^2$ y $C = 58.32$), área, bajo la influencia de una presión inicial $p_{in} = 2.94$ kPa.

La comparación entre las curvas (que se corresponden en cuanto al tamaño de las áreas de sus secciones transversales), de las Figs. 5.4 y 5.9, muestra que la dinámica del llenado capilar es sustancialmente diferente entre los canales circulares (o elípticos) y los rectangulares con iguales dimensiones. Los canales rectangulares oponen siempre mayor resistencia que los canales circulares. También podemos ver que el llenado se realiza más lentamente cuando se cambia el tamaño (área y/o perímetro) de los canales, . De hecho, para el canal de mayor área en su sección transversal, el flujo capilar en el canal circular es casi tres veces más rápido que en el canal rectangular mientras que para los canales de áreas de sección transversal más chica (ya sean circulares o rectangulares) la velocidad del flujo casi es la misma. Es conveniente insistir en que los órdenes de magnitud de los tiempos de llenado entre los experimentos realizados por Kim et al [14, 15], y la teoría que aquí hemos presentado y usamos para generar las soluciones

a la ecuación (5.6), son iguales. Y los resultados, para los casos de penetración espontánea, son muy similares .

5.4. Canales triangulares

Siguiendo el análisis de otras geometrías consideremos como último caso microcanales con sección transversal triangular. Para secciones en forma de triángulos equiláteros el factor geométrico de corrección es $\alpha = 20\sqrt{3} = 34.641$ y el factor de compacidad $C = 12\sqrt{3} = 20.785$, además $P = 3a$ y $A = \sqrt{3}a^2/4$. En este caso la ecuación para la longitud de avance es de la forma

$$l = \sqrt{\frac{P^2 p_{in} + 12\sqrt{3}P\sigma \cos \theta}{360\mu}} t. \quad (5.10)$$

Las relaciones anteriores también llevan a determinar inmediatamente que el perímetro del canal triangular, de igual área que el canal rectangular menor ($A = 4000 \mu\text{m}^2$), es $P = 288.34 \mu\text{m}$ ($a = 96.11 \mu\text{m}$). Mientras que el perímetro del canal triangular mayor, de igual área que el rectángulo de mayor área ($A = 20000 \mu\text{m}^2$), es $P = 644.73 \mu\text{m}$ ($a = 214.91 \mu\text{m}$). Es posible entonces a partir de la Fig. 5.10 ver que los frentes de avance en los canales de sección transversal triangular equilátera son más lentos que los respectivos flujos en los canales circulares. No obstante, el flujo en estos sistemas es más rápido que en los canales rectangulares de igual área.

La conclusión inmediata, que puede obtenerse de la observación directa de las gráficas 5.4 a 5.10, es que los canales rectangulares son los de flujo capilar más lento mientras que los canales de sección transversal circular son los más rápidos. De hecho los sistemas con esquinas son en general más lentos que los sistemas con perímetros más suaves. Todos estos resultados también son validos para los casos de penetración capilar espontánea. Éstos resultados los mostramos en de manera explícita en las figuras 5.11 y 5.12, donde hemos graficado la evolución del frente del fluido $l(t)$, para canales de igual área, fig. 5.11, y de igual perímetro, fig. 5.12, pero de diferente forma geométrica, en sus correspondientes secciones transversales.

Las dos secciones finales de este capítulo (pues consideramos tambien como parte de este, el anexo B de está tesis, el cual hemos dejado a parte para no viciar el análisis de escala

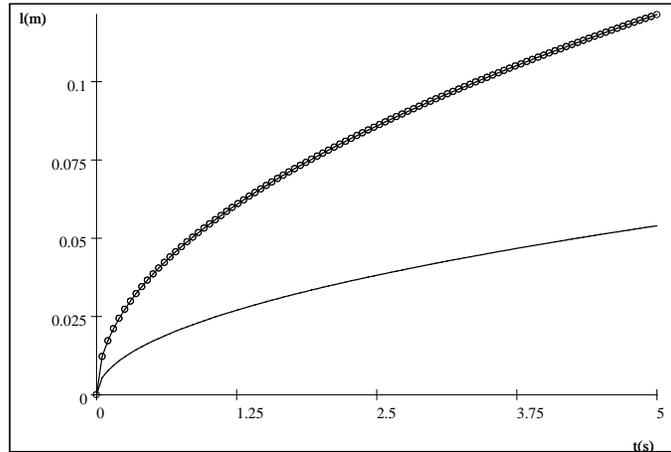


Figura 5-10: Gráficas del frente de avance $l(t)$, en microcanales de secciones transversales en forma de triángulos equiláteros, bajo la presión $p_{in} = 2,94$ kPa, obtenidas mediante la ecuación (5.10). La línea continua corresponde a un canal cuya sección transversal tiene un áreas de $4000 \mu\text{m}^2$, mientras que la línea trazada con símbolos o, corresponde a un canal de área igual a $20000 \mu\text{m}^2$, en su sección transversal.

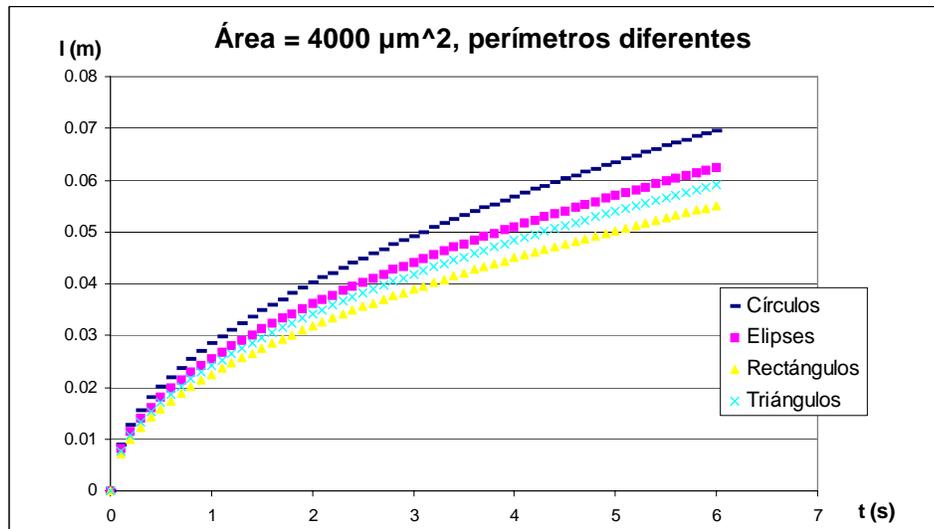


Figura 5-11: Gráficas comparativa del frente de avance $l(t)$, en microcanales de secciones transversales de formas geométricas distintas, de igual tamaño de área, $A = 4000 \mu\text{m}^2$, pero de distinta logitud perimetral, bajo la presión $p_{in} = 2,94$ kPa (obtenidas mediante las ecuaciones (5.7), (5.8), (5.9) y (5.10)).

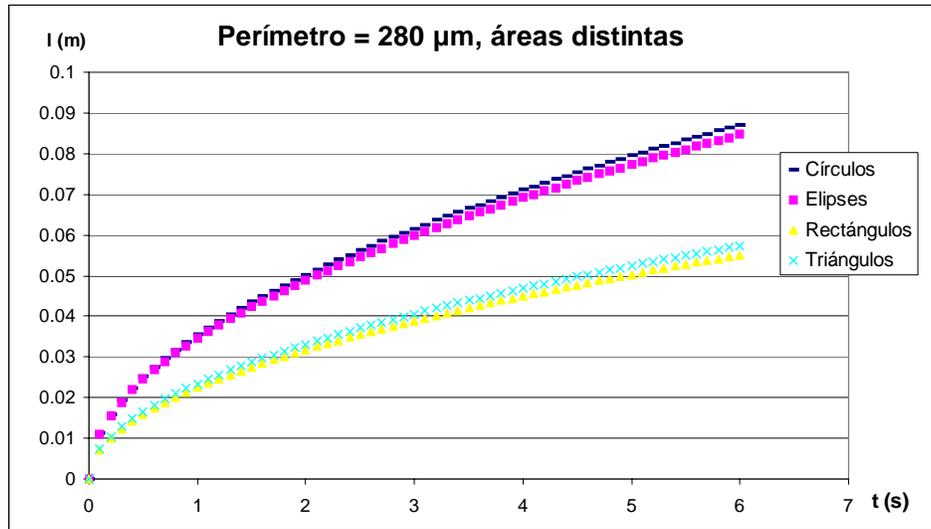


Figura 5-12: Gráficas comparativa del frente de avance $l(t)$, en microcanales de secciones transversales de formas geométricas distintas, de igual longitud perimetral, $P = 280 \mu\text{m}$, pero de tamaño de área diferente, bajo la presión $p_{in} = 2,94 \text{ kPa}$ (obtenidas mediante las ecuaciones (5.7), (5.8), (5.9) y (5.10)).

desarrollado hasta aquí), donde presentamos soluciones formales al problema del bloque en los microcapilares y de la penetración capilar en nanocanales, muestran la fortaleza y rigor teórico del formalismo aquí desarrollado, abriendo la posibilidad de encontrar respuestas precisas a las inconsistencias encontradas, entre los resultados experimentales obtenidos por los grupos de investigación asiáticos [14, 15, ?], y los desarrollados teóricamente por nosotros en ésta tesis.

5.5. El problema de la salida del líquido (bloqueo)

Analizaremos ahora el problema del bloqueo del flujo a través de microcanales. Se ha observado en los experimentos de Kim et al [14, 15] que en los canales muy pequeños puede haber bloqueo del flujo, es decir, que la fuerza debida a la presión inicial, p_{in} , no puede vencer a las fuerzas de tensión superficial y viscosa, por lo que el flujo se detiene antes de alcanzar la salida de dichos canales. En esta sección daremos una explicación de este fenómeno. Lo que sigue es un análisis justo en el instante de la salida del líquido del capilar. Diversos estudios realizados desde la segunda mitad del siglo XIX por Tate [27] y Rayleigh [28] y más recientemente aquellos

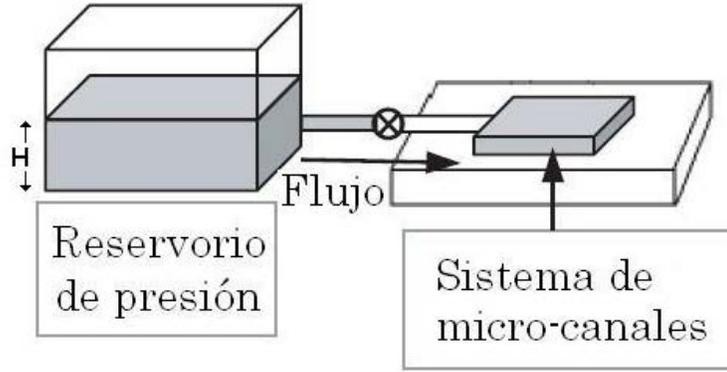


Figura 5-13: Esquema del sistema de inyección de fluido en los microcanales. H es el nivel de llenado.

de Clanet y Lasheras [29] y Ambravaneswaran et al. [30] validan las hipótesis que se supondrán, principalmente aquellas relacionadas con la forma del menisco.

Consideremos la Fig. 5.11, ahí vemos que el nivel de llenado del recipiente es H y que tal recipiente inmediatamente se conecta a los microcanales con sección transversal rectangular. Esto implica que sobre dicho flujo siempre hay una presión p_{in} de magnitud $p_{in} = \rho g H$. Independientemente de la longitud de los microcanales, cuando el flujo llega a la salida, la superficie libre del líquido gradualmente cambiará su ángulo de contacto y sus radios de curvatura hasta el caso límite en el que $\theta = 180^\circ$, $R_1 = w/2$ y $R_2 = h/2$, donde recordamos que R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura, como se observa en la Fig. 5.10. Esto debe ser así porque el líquido se resiste a desprenderse de la salida oponiendo una presión capilar cada vez mayor hasta llegar al valor

$$p_c = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 2\sigma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (5.11)$$

la cual va en la dirección opuesta al flujo.

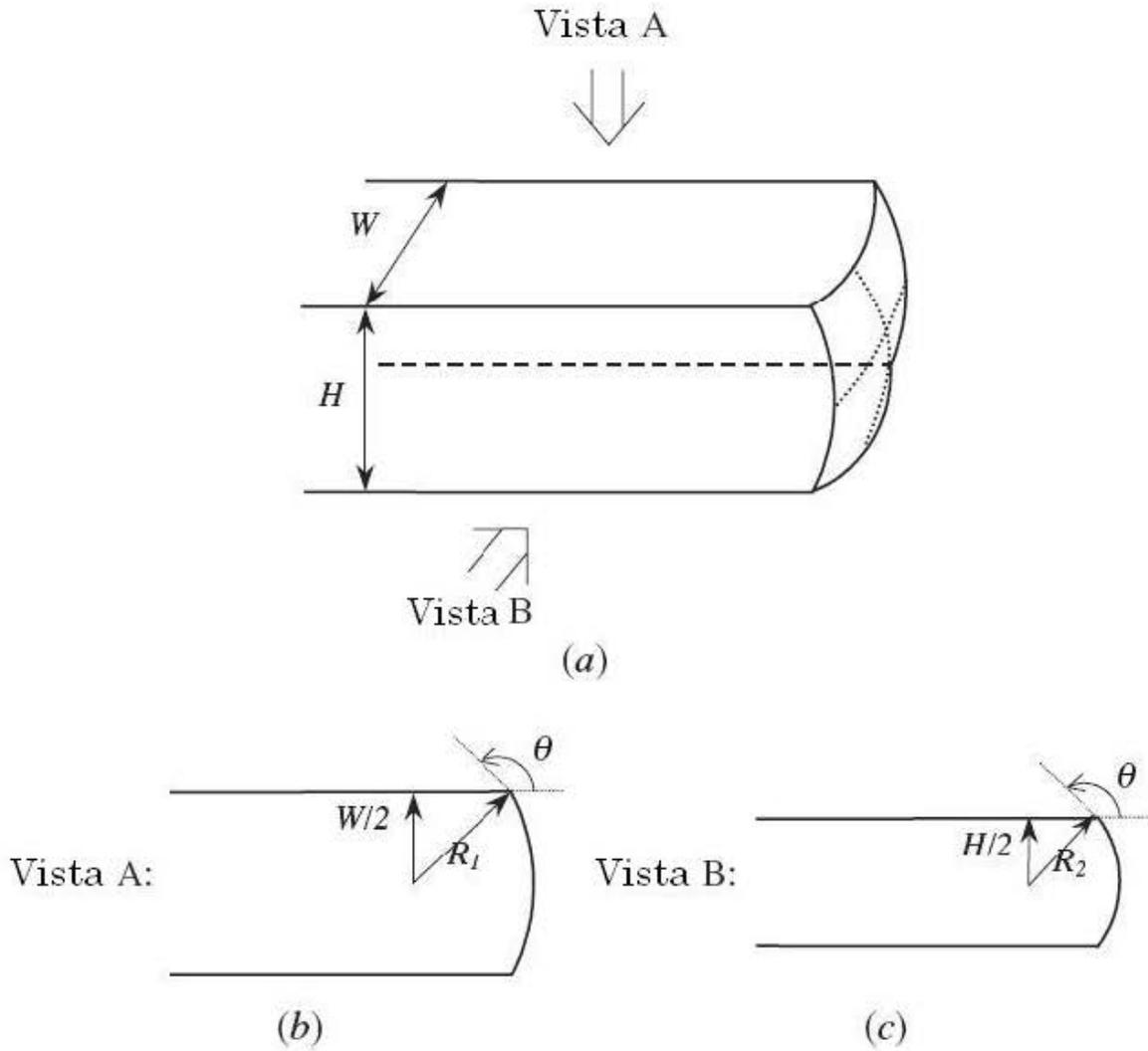


Figura 5-14: (a) Esquema de la salida del líquido de los microcanales. (b) Vista superior del microcanal rectangular, el líquido al salir es empujado por la presión p_{in} y forzado a cambiar su ángulo de contacto, θ , hasta hacerse igual a 180° ; en el límite el radio de curvatura se hace $R_1 = w/2$ (donde w es el ancho del canal). (c) Lo mismo ocurre en la vista lateral, en cuyo caso $R_2 = h/2$ (aquí h es lo alto del canal).

Justo en ese instante la presión que empuja al líquido hacia afuera es

$$p_a + p_{in} = p_a + \rho g H, \quad (5.12)$$

donde hemos considerado el hecho de que todo el sistema está a la presión ambiente p_a . Por otro lado, la presión que frena al flujo justo en la orilla es la presión del menisco p_c más la presión atmosférica, es decir

$$p_a + 2\sigma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (5.13)$$

Si hay flujo hacia afuera del microcanal esta última presión debe de ser vencida y entonces

$$p_a + \rho g H \geq p_a + 2\sigma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (5.14)$$

Es obvio que el bloqueo ocurre exactamente en el caso

$$p_a + \rho g H = p_a + 2\sigma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (5.15)$$

de aquí encontramos que la altura mínima para que ocurra el bloque es

$$H = \frac{2\sigma}{\rho g} \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right). \quad (5.16)$$

Introduciendo los datos de los experimentos de Kim et al [14, 15], donde $h/2 = 20 \times 10^{-6}$ m, $w/2 = 50 \times 10^{-6}$ m, $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ y $\sigma = 0.073 \text{ N/m}$, encontramos que

$$H = 0.52 \text{ m} = 52 \text{ cm}, \quad (5.17)$$

la cual difiere de la altura que Kim et al [14, 15] encontraron como el nivel de llenado ($H = 20$ cm) para el bloqueo en los microcanales de $100 \mu\text{m}$ de ancho. Más adelante discutiremos sobre lo que en nuestra opinión origina esta diferencia. Si no hubiéramos introducido $p_{in} = \rho g H$ en la ecuación (5.12), encontraríamos que la presión para el bloqueo deberá ser

$$p_{in} = 2\sigma \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{w} \right), \quad (5.18)$$

la cual nuevamente con los datos de Kim et al [14, 15] nos da el valor

$$p_{in} = 5110 \text{ Pa} = 5,11 \text{ kPa}, \quad (5.19)$$

que difiere del valor de 1.96 kPa que dichos autores reportaron para el bloqueo.

Otra forma de obtener valores para el bloqueo en canales de sección transversal arbitraria se obtiene usando la ecuación (5.4). En tal caso, el bloqueo ocurrirá cuando

$$p_{in}A = P\sigma. \quad (5.20)$$

En este caso, para el capilar más pequeño de los experimentos de Kim et al [14, 15] ($P = 280 \times 10^{-6} \text{ m}$ $A = 4000 \times 10^{-12} \text{ m}^2$) encontramos que la presión de bloqueo es igual a

$$p_{in} = 5.11 \text{ kPa}, \quad (5.21)$$

que es el mismo valor que el encontrado especificando los radios de curvatura en los canales rectangulares. Si la presión p_{in} es conocida ($p_{in} = 1960 \text{ Pa}$) y no fuera conocido el perímetro crítico para el bloqueo, éste, de la ecuación (5.21) resulta ser

$$P = 107,4 \text{ } \mu\text{m}, \quad (5.22)$$

es decir, que si $h = 40 \text{ } \mu\text{m}$ entonces $w = 13.7 \text{ } \mu\text{m}$.

Lo primero que debemos de notar es que si bien, los ordenes de magnitud en los resultados de la presión crítica o de la altura de llenado crítica, obtenidos de forma teórica, son iguales a los de los resultados experimentales, los valores numéricos precisos no coinciden. En nuestra opinión, es posible que tales diferencias se den porque en los experimentos en los cuales nos estamos basando los materiales de los microcanales y los sustratos son diferentes. Los microcanales fueron hechos de un material fotoresistente denominado SU-8 (Microchem Corp) y fueron montados sobre un sustrato de silicón. Tales condiciones implican, necesariamente, diferentes condiciones de mojabilidad (ángulos de contacto) para cada una de las superficies y esto en resumen puede desestabilizar más rápidamente, en los experimentos, a los meniscos y romper (a menores valores de la presión p_{in} o menores alturas, H) el bloqueo.

La coincidencia entre los valores de las presiones dados en (5.19) y (5.21) es notable y puede considerarse también una prueba más de que tal método es correcto.

5.6. Conclusiones

A través del uso de una ecuación de movimiento simple hemos analizado la penetración capilar en microcanales con diversas secciones transversales. Nuestros cálculos demuestran que la penetración capilar es modulada realmente por la competencia que se establece entre la fricción y la fuerza capilar y ambas dependen críticamente de la sección transversal. A través de nuestros estudios podemos concluir que en términos del diseño mecánico las geometrías más eficientes son aquellas donde las secciones transversales son circulares y elípticas, *i.e.*, las formas donde están ausentes las esquinas. Por otro lado, en la última sección discutimos el problema del bloqueo del flujo a la salida de los microcanales y dimos formas analíticas para predecir tal fenómeno. Las diferencias entre los resultados teóricos y los experimentales es posible que sean debidas a las diferentes condiciones de mojabilidad de los materiales de los microcanales y del sustrato. Un trabajo en esta dirección y en donde llegan a una condición de bloqueo similar a la ecuación (5.18) se encuentra en [31].

Capítulo 6

Conclusiones generales

Las principales conclusiones de este trabajo son que la penetración capilar en microcanales rectos puede ser estudiada analíticamente por medio de los modelos generalizados de flujo unidimensional. Tales flujos de Poiseuille generalizados obedecen a la ecuación de Poisson y los dos parámetros más importantes, es decir, la compacidad C y el factor de corrección geométrica α pueden ser determinados explícitamente para secciones transversales muy complejas. De hecho, encontramos que hay una relación lineal entre α y C para las diferentes formas de canales aquí estudiadas. Esta forma simplificó mucho los cálculos subsecuentes, es decir, el cálculo del frente de penetración capilar es directo y los resultados, ya sea en términos de las distancias o de los tiempos de penetración capilar son del mismo orden que los que se encuentran en los experimentos. Por ejemplo, en los microcanales rectangulares de Kim et al [14, 15] los tiempos y las distancias de penetración son del mismo orden que las encontradas teóricamente. No obstante, los valores de la presión de bloqueo o del tamaño del canal encontrados en los experimentos son ligeramente menores que los predichos en la teoría. Estas diferencias muy posiblemente son debidas a las diferentes condiciones de mojado en el sustrato y en el cuerpo de los microcanales. En este caso los diferentes valores de los ángulos de contacto desestabilizan más rápidamente a las gotas de lo que se predice en los modelos. Otras posibles diferencias que podrían surgir en trabajos más completos en los que se analice la penetración capilar en microcanales con diferentes secciones transversales son las relacionadas con los valores de $l(t)$, sobre todo en los canales angulados. Estudios de penetración capilar en sistemas macro (del orden de milímetros) dejan ver que los modelos generalizados en los que se usa el perímetro como un parámetro

importante llegan a tener errores del orden del 6% en esta cantidad [11]. Aunque esto no es algo determinante, se debe de tomar en cuenta para propósitos de diseño y comparación.

Muy recientemente, se ha observado experimentalmente que la ley de penetración capilar $l(t) \propto \sqrt{t}$ describe correctamente la penetración capilar espontánea en nanocanales de sección transversal rectangular [32], aunque en dicho trabajo se usó el concepto de radio hidráulico (radio equivalente al de un canal circular que ofrece la misma resistencia viscosa) y éste difiere del concepto aquí empleado en relación con el factor de corrección geométrica, α . Estas diferencias, motivaron la aplicación de nuestro modelo teórico a nanocanales rígidos de sección transversal compleja. El acuerdo resultante entre teoría y experimento es muy bueno e incluso da un criterio para ajustar la geometría óptima a un canal real y con ello nos motiva a realizar experimentos de validación a dicha escala para estimar las posibles defensas que nuestro modelo arroja en sistemas de esta escala. Finalmente, el estudio aquí presentado puede ser extendido o completado a sistemas más realistas y acordes a las condiciones experimentales como la posible existencia de gradientes de temperatura [12] o de concentración de diferentes sustancias [13] ya que parece no ser difícil extender el modelo generalizado (aquí desarrollado), de la penetración capilar a dichos casos. Estudios en esta dirección están en progreso.

Apéndice A

A. 1. Factor geométrico adimensional α para canales de sección transversal no circular [24]

La ecuación que determina el movimiento estacionario de un flujo totalmente desarrollado en un conducto recto, de contorno $\partial\Omega(x, y) = 0$ y con eje de desplazamiento en z , es

$$0 = -\frac{\Delta p}{L} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right), \quad (\text{A.1})$$

que debemos resolver bajo las condiciones de no deslizamiento en la frontera: $v_z = 0$ para $\partial\Omega(x, y) = 0$.

Con el fin de proponer una solución general a esta ecuación, tomemos el tamaño característico de la sección transversal y designémoslo por D , admitiendo que su forma queda definida por un cierto número de parámetros adimensionales ε_i , que serán las relaciones entre las distintas longitudes que caracterizan a dicha sección transversal y D .

Utilizando las variables adimensionales: $\xi = x/D$; $\eta = y/D$ y $v = v_z/v_{zc}$, donde v_{zc} es una velocidad característica a determinar, de modo que se minimice el número de parámetros. Sustituyendo estas variables en (A.1) se tiene que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -1, \quad (\text{A.2})$$

donde $v_{zc} = (D^2/\mu) [\Delta p/L]$. La ecuación (A.2), se integra bajo la condición $v = 0$ en $\Sigma(\xi, \eta, \varepsilon_i) = 0$, donde Σ es la ecuación adimensional del contorno y ε_i son los parámetros que definen su forma.

El gasto Q a través del tubo es entonces

$$Q = \int_{\Sigma} v_z dx dy = \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \int_{\Sigma} v d\xi d\eta = \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \Gamma(\varepsilon_i), \quad (\text{A.3})$$

donde la integral

$$\Gamma(\varepsilon_i) \equiv \int_{\Sigma} v d\xi d\eta \quad (\text{A.4})$$

depende de la forma del conducto pero no de su tamaño. De aquí que

$$Q = \frac{D^4}{\mu} \frac{\Delta p}{L} \Gamma(\varepsilon_i) \quad (\text{A.5})$$

o bien, la caída de presión será

$$\Delta p = \frac{\mu L Q}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}. \quad (\text{A.6})$$

Usando ésto último en la definición de R_{hid} dada en el Capítulo 4, encontramos que

$$R_{hid} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{\mu L}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}, \quad (\text{A.7})$$

y consecuentemente

$$\alpha \equiv \frac{R_{hid}}{R_{hid}^*} = \frac{\frac{\mu L}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}}{\frac{\mu L}{A^2}} = \frac{A^2}{D^4 \Gamma(\varepsilon_i)}, \quad (\text{A.8})$$

Considerando la adimensionalización propuesta al inicio del Apéndice para las coordenadas espaciales, vemos que

$$\frac{A^2}{D^4} \equiv \left(\int_{\Sigma} d\xi d\eta \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

y finalmente

$$\alpha = \frac{\left(\int_{\Sigma} d\xi d\eta\right)^2}{\Gamma(\varepsilon_i)} = \frac{\left(\int_{\Sigma} d\xi d\eta\right)^2}{\int_{\Sigma} v d\xi d\eta}. \quad (\text{A.10})$$

Aplicemos este formalismo a algunos casos particulares:

A.1.1. Canal de sección transversal circular: $x^2 + y^2 = a^2$

En este caso podemos tomar a $D = a$, donde a es el radio del tubo, y buscar una solución de la forma $v = v(\zeta)$, donde $\zeta = r/a = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. En este caso la ecuación (A.2) se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = -\zeta \quad (\text{A.11})$$

con $v(1) = 0$ y $v(0) < \infty$. De aquí obtenemos que las soluciones para v , Γ , Q y α en este caso son

$$v = \frac{1}{4}(1 - \zeta^2); \quad (\text{A.12})$$

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1 - \zeta^2) \zeta d\zeta = \frac{\pi}{8}; \quad (\text{A.13})$$

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\mu L}, \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha = \frac{\pi^2}{8} = 8\pi. \quad (\text{A.15})$$

A. 1.2. Canal de sección transversal elíptica con $\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1$

Tomando ahora $D = a$, $\xi = x/a$, $\eta = y/a$ y $\varepsilon = b/a \leq 1$, obtenemos que las soluciones para v , Γ , Q y α son

$$v = \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon^2)} \left[1 - \xi^2 - \left(\frac{\eta}{\varepsilon} \right)^2 \right]; \quad (\text{A.16})$$

$$\Gamma = \frac{\pi\varepsilon^3}{4(1+\varepsilon^2)}; \quad (\text{A.17})$$

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{4\mu L} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha = \frac{\pi^2\varepsilon^2}{\frac{\pi\varepsilon^3}{4(1+\varepsilon^2)}} = 4\pi \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (7.1)$$

o en términos de $\gamma = a/b = 1/(b/a) = 1/\varepsilon$

$$\alpha = 4\pi \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (\text{A.20})$$

A. 1.3. Canal de sección transversal rectangular con: $-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$

Tomando a $D = a$, $\xi = x/a$, $\eta = y/a$ y $\varepsilon = b/a \leq 1$, obtenemos que las soluciones para v , Γ , Q y α son de la forma

$$v = \frac{16}{\pi^3} \times \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi\xi/2)}{\cosh(n\pi\varepsilon/2)} \right] \times \frac{\cos(n\pi\eta/2)}{n^3}, \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma = \frac{4\varepsilon}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left[\frac{1}{2}(2n+1)\pi\varepsilon\right]}{(2n+1)^5} \right\}, \quad (\text{A.22})$$

$$Q = \frac{\Delta p 4ba^3}{3\mu L} \left[1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(n\pi\varepsilon/2)}{n^5} \right], \quad (\text{A.23})$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\frac{4\varepsilon}{3} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh\left[\frac{\pi\varepsilon}{2}(2n+1)\right]}{(2n+1)^5} \right\}}, \quad (\text{A.24})$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se obtiene que $\Gamma \rightarrow 4\varepsilon^3/3$ y $\alpha = 3/4\varepsilon = 3\gamma/4$, ó $\gamma = \frac{4}{3}\alpha$.

A. 1.4. Canal de sección transversal triangular equilatera de lado a

Naturalmente, ahora $D = a$, $\xi = x/a$, $\eta = y/a$; entonces las soluciones para v , Γ , Q y α

$$v = \frac{\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3\xi^2 - \eta^2)}{2\sqrt{3}}, \quad (\text{A.25})$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{320}, \quad (\text{A.26})$$

$$Q = \frac{\Delta p a^4 \sqrt{3}}{320 \mu L}, \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{\sqrt{3}}{320}} = 20\sqrt{3}. \quad (\text{A.28})$$

Los anteriores resultados indican que muchos otros casos pueden resolverse analíticamente. Ver, por ejemplo las referencias [22], [24], [20], [41] y [42].

Apéndice B

B.1. Experimentos de penetración capilar en nanocanales

Los resultados mostrados en ésta sección conforman el artículo "Capillary penetration in nanochannels", expuesto en el TERCER CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO, FACULTAD DE INGENIERÍA. QUERÉTARO, QRO. 23 – 27 DE ABRIL, 2007. Y será publicado en la revista . EUREKA en su número de junio de 2007. La selección de los artículos para su presentación y posterior divulgación fue realizada mediante refereo de un jurado de especialistas validado por la IEEE.

Recientemente Han et al. [32], estudiaron la cinética de la penetración capilar de diversos líquidos que llenan nanocanales, ver figura B.1. Aunque la sección transversal es compleja, ellos supusieron que dichos nanocanales tenían secciones transversales rectangulares de ancho $w = 50$ nanómetros. Utilizaron agua como fluidos de trabajo. En este caso la posición del menisco líquido móvil, l , fue observada como proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, lo que está de acuerdo, en lo general, con la cinética clásica de Washburn [6]): la velocidad del menisco disminuyó tanto con la dimensión del canal como con el cociente entre la tensión superficial y la viscosidad. En dichos experimentos, sin embargo, la razón de llenado fue mayor de la que su modelo predice.

Sin embargo, y como una forma de apreciar las bondades de nuestro modelo de penetración capilar, hemos utilizado los datos obtenidos por Han et al [32], y encontrado los siguientes resultados al aproximar la sección transversal de sus nanocanales mediante elipses, en lugar de

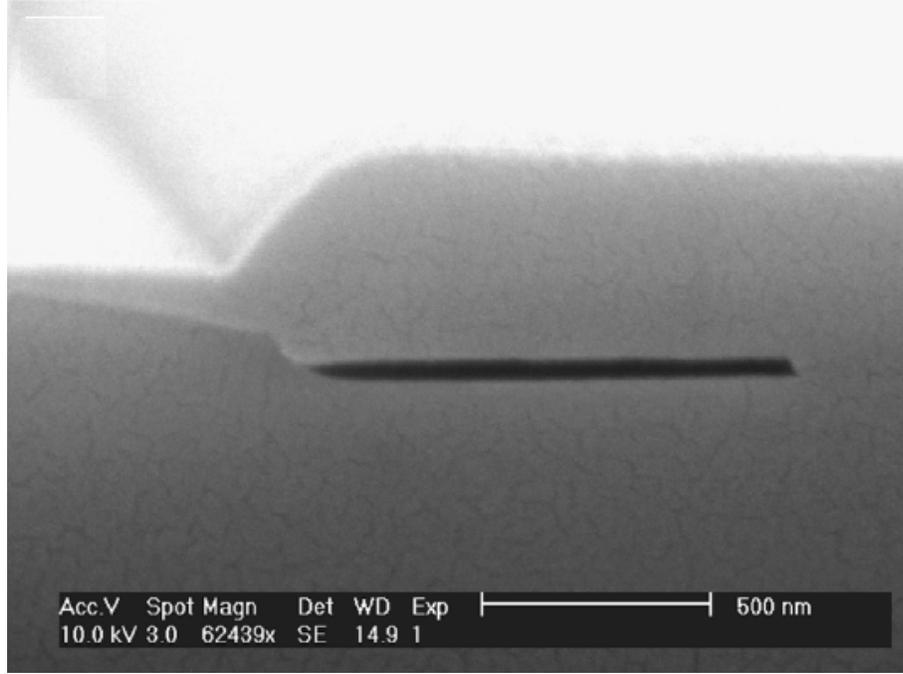


Figura B-1: Imágen de microscópio electrónico de exploración (SEM) de las sección transversal de un nanocanal, tomada de Han et al [32]. La zona negra y delgada de enmedio mide 900 nanómetros de largo y 50 nanómetros de ancho.

rectángulos como lo hicieron dichos autores. En particular para el canal mostrado en la figura B1, tomaremos que el semieje mayor $a = w/2 = 900 \times 10^{-9}/2 \text{ m} = 4.5 \times 10^{-7} \text{ m}$, mientras que el semieje menor $b = h/2 = 50 \times 10^{-9}/2 \text{ m} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ m}$.

De donde obtenemos para el perímetro P y para el área A , que

$$P = \pi \left(1,5 [a + b] - \sqrt{ab} \right) = 1.9052 \times 10^{-6} \text{ m y } A = \pi ab = 3.5343 \times 10^{-14} \text{ m}^2, \quad (\text{B.1})$$

así que

$$C = \frac{P^2}{A} = 102.70. \quad (\text{B.2})$$

La sustitución de este valor y de los valores para la tensión superficial $\sigma = 0.0720 \text{ N/m}$,

la viscosidad dinámica $\mu = 1$ centipoise y el ángulo de contacto $\theta = 68^\circ$ dados en Han et al [32], en la ecuación (5.6) (con $p_{in} = 0$ ya que no hay presión inicial), nos llevan a que el frente de penetración capilar avanza como

$$l = 6,2913 \times 10^{-4} t^{0,5}. \quad (\text{B.3})$$

En la figura B.2, mostramos las gráficas correspondientes a los datos medidos por Han et al [32], su modelo teórico y el modelo aquí desarrollado. Como puede verse de dicha figura, el acuerdo entre nuestra aproximación por un canal elíptico de similares dimensiones que el nanocanal real, es mucho mejor que aquel que se obtiene mediante la suposición de un nanocanal rectangular. El acuerdo de nuestro modelo con los datos experimentales no es del todo exacto ya que en realidad, como se observa en la figura B.2, el nanocanal tiene zonas muy agudas en sus extremos y esto, es bien sabido ([22]), frena un poco al flujo, es decir, a la longitud de penetración. Otra razón para la ligera desviación de los datos respecto a nuestro modelo es la posible contaminación de las superficies, durante su nanofabricación. Todo ello contribuye a que las consideraciones que hemos hecho sobre los ángulos de mojado se vean afectadas y dejan abierta la temática de estudio experimental de lo que podemos denominar “ángulo contacto efectivo”.

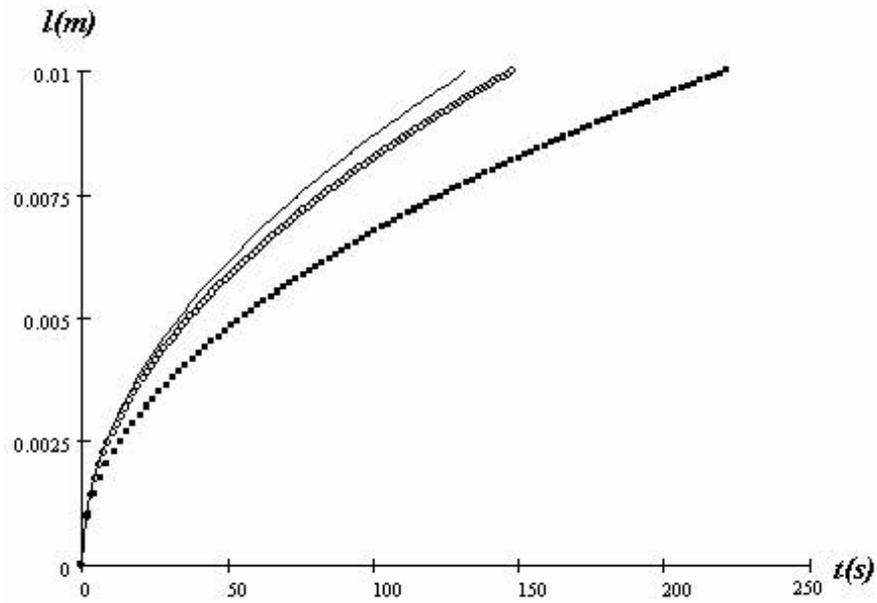


Figura B-2: Gráfica de la penetración capilar: \circ datos experimentales (tomado de Han et. al. [32]); \blacksquare aproximación del nanocanal a través de un rectángulo de ancho $w = 900$ nanómetros y grosor $h = 50$ nanómetros; la línea punteada es nuestra aproximación utilizando la ecuación (B.3).

Bibliografía

- [1] P. G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Capillarity and wetting phenomena, Springer Verlag, New York (2004).
- [2] Cyril Isenberg, The science of soap films and soap bubbles, Dover, New York (1992).
- [3] R. Finn, Capillary Surface Interfaces, Notices of the AMS, **46-7**, (1999) 770.
- [4] J. M. Bell, F. K. Cameron, The flow of liquids through capillary spaces, J. Phys. Chem. **10** (1906) 658.
- [5] G. R. Richard Lucas, Physik. Zeitschr. (1918) 15.
- [6] E. W. Washburn, Physical Review **17**, 3 (1921) 273.
- [7] Stanley Middleman, Modeling axisymmetric flows: dynamics of films, jets, and drops, Academic Press, San Diego (1995).
- [8] H. M. Princen, Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders I. Capillary rise between two cylinders, J. Colloid Interface Sci. **30** (1969) 69.
- [9] H. M. Princen, Capillary phenomena in assemblies of parallel cylinders II. Capillary rise in systems with more than two cylinders, J. Colloid Interface Sci. **30** (1969) 359.
- [10] R. Lenormand and C. Zarcone, Role of roughness and edges during imbibition in square capillaries, SPE paper No. 13264 (1984) 1.
- [11] J. Bico, D. Quéré, Rise of liquids and bubbles in angular capillary tubes, J. Colloid Interf. Sci. **247** (2002) 162.

- [12] A. Medina, A. Pineda, C. Treviño, Imbibition driven by a temperature gradient, *Jour. Physical Society Japan* **72** (2003) 979.
- [13] V. M. Starov, Surfactant solutions and porous substrates: spreading and imbibition, *Adv. Colloid Interf. Sci.* **111** (2004) 3.
- [14] D. S. Kim, K-Ch. Lee, T. H. Kwon, S. S. Lee, Micro-channel filling flow considering surface tension effect, *J. Micromech. Microeng.* **12** (2002) 236.
- [15] D. S. Kim, K-Ch. Lee, T. H. Kwon, S. S. Lee, Reporte Interno, Dept. of Mechanical Engineering, Pohang University of Science and Technology, (2002).
- [16] L-J. Yang, T-J Yao, Y-Ch. Tai, The marching velocity of the capillary meniscus in a microchannel, *J. Micromech. Microeng.* **14** (2004) 220.
- [17] G. Karniadakis, A. Bestok, N. Aluru, *Microflows and nanoflows*, Springer, New York (2005).
- [18] E. Kim, Y. Xia, G. M. Whitesides, Polymer microstructures by moulding in capillaries, *Nature* **376** (1995) 581.
- [19] O. Kemmann, L. Weber, *Tech. Paper Ann. Tech. Meet. Conf.– SPEI*, **1**, (2000) 576-80.
- [20] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluids Mechanics*, Pergamon, New York (1959).
- [21] F. M. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1994).
- [22] F. M. White, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, Singapore (1991).
- [23] D. J. Achelson, *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press Oxford, London (1990).
- [24] A. Linán Martínez, F. J. Higuera et al., *Mecánica de Fluidos (primera parte)*, Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid España (2003).
- [25] V. P. Shalimov, Flujo de líquido en capilares bajo microgravedad (traducción del ruso por el Prof. Pedro Tamayo de la ESIME-Azcapotzalco) 143-150.
- [26] N. A. Mortensen, F. Okkels, H. Bruss, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 057301.

- [27] T. Tate, On the magnitude of a drop of liquid formed under different circumstances, *Phil Mag.* **27** (1864) 176.
- [28] Lord Rayleigh, Investigations in capillarity: the size of drops.- The liberation of gas from supersaturated solution.- Colliding jets.- The tension of contaminated water-surfaces, *Phil Mag.* **48** (1899) 321.
- [29] C. Clanet, J. Lasheras, Transition from dripping to jetting, *J. Fluid Mech.* **383** (1999) 307.
- [30] B. Ambravaneswaran et al, Dripping-jetting transitions in a dripping faucet, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 034501.
- [31] K. B.Lee, L. Lin, Surface micromachined glass and polysilicon microchannels using MUMPs for BioMEMS applications, *Sensors and Actuators A* **111** (2004) 44.
- [32] A. Han, G. Mondin, N. G. Hegelbach, N. F. de Rooij, U. Staufer, Filling kinetics of liquids in nanochannels as narrow as 27 nm by capillary force, *J. Colloid Interf. Sci.* **293** (2006) 151.
- [33] K. Takahashii, K. Seio, M. Sekine, O. Hino, M. Esashi, A photochemical/chemical direct method of synthesizing high-performance deoxyribonucleic acid chips for rapid and parallel gene analysis, *Sens. Actuators B* **38** (2002) 67–76.
- [34] R.-L. Chien, J.W. Parce, Multiport flow-control system for lab-on-a-chip microfluidic devices, *Fresenius J. Anal. Chem.* **371** (2) (2001) 106–111.
- [35] M. Lee, M. Wong, Y. Zohar, Design, Fabrication and characterization of an integrated micro heat pipe, in: *Proceeding of the Fifteenth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Las Vegas, Nevada, USA, January 20–24, 2002, pp. 85–88.
- [36] M.J. DeBar, D. Liepmann, Fabrication and performance testing of a steady thermocapillary pump with no moving parts, in: *Proceeding of the Fifteenth IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, Las Vegas, Nevada, USA, January 20–24, 2002, pp. 109–112.
- [37] L. Lin, A.P. Pisano, Silicon-processed microneedles, *IEEE J. Microelectro-Mech. Systems* **8** (1) (1999) 78–84.

- [38] D. Bhusari, H.A. Reed, M. Wedlake, A.M. Padovani, S.A.B. Allen, P.A. Kohl, Fabrication of air-channel structures for microfluidic, microelectromechanical, and micro-electronic applications, *IEEE J. Microelectro-Mech. Systems* **10** (3) (2001) 400–408.
- [39] S. Frish y A. Timoreva, *Curso de Física General*, Mir, Moscú (1973).
- [40] J. A. Sossa Azuela, *Rasgos Descriptores para el reconocimiento de Objetos*, IPN, México (2006).
- [41] R. K. Shah, A correlation for laminar hydrodynamic, entry length solution for circular and non circular ducts, *J. Fluids Eng.*, **100** (1978), 177-179.
- [42] R. K. Shah and A. L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, New York (1978).