



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Geometría a partir de D-branas

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS ( F Í S I C A )

P R E S E N T A:

**IGMAR CEDRELL ROSAS LÓPEZ**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTORAL:  
DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO  
DR. RODOLFO PATRICIO MARTÍNEZ Y ROMERO



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres

Georgina Florencia López Ríos  
Rolando Rosas Galicia

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Dr. Alberto Güijosa Hidalgo por haberme propuesto el proyecto para realizar esta tesis. Agradezco su apoyo e infinita paciencia para terminar mis estudios de maestría. Muchas gracias.

A mis sinodales, el Dr. José Antonio García, el Dr. Axel de la Macorra y la Dra. Myriam Mondragón. En especial al Dr. Hugo Morales por sus observaciones y recomendaciones.

A mis padres, Rolando Rosas Galicia y Georgina Florencia López Ríos, por todo su amor y ayuda. Han sido un gran ejemplo para mí.

A Citlali Pérez Campos, mi gran amiga y compañera.

A mis compañeros, Cristina Romero Cañizales, Anahí Flores Pérez, Manuel Cortés y Luis Federico Preisser (Pepelucho), por su compañía y amistad en estos años que llevamos estudiando física.

A todas mis amigas, que desde la preparatoria han estado conmigo a pesar de los problemas y la distancia, Nallely Pérez Barceló, Samantha, Nancy (La pelos), Nancy (La peque), Erika, Noemí, Aurora, Abigail, Viridiana.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca de nivel maestría que me otorgó para realización de mis estudios.

Al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM y a su personal por haberme facilitado las instalaciones y el ambiente propicio para llevar a cabo este trabajo.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.0.1. La teoría de cuerdas . . . . .	4
1.1. La cuerda bosónica . . . . .	9
1.2. D-branas y estado de borde bosónico . . . . .	16
1.2.1. Valores esperados usando el estado de borde . . . . .	24
1.2.2. Fondo de gravedad . . . . .	26
<b>2. Teoría de cuerdas enrolladas</b>	<b>27</b>
2.1. Espectro a partir del límite . . . . .	28
2.1.1. Espectro de cuerdas cerradas . . . . .	30
2.1.2. Espectro de cuerdas abiertas . . . . .	31
2.2. La acción de Gomis-Ooguri . . . . .	35
2.2.1. La acción de Gomis-Ooguri . . . . .	36
2.2.2. Cuerda cerrada . . . . .	38
2.2.3. D-branas longitudinales . . . . .	39
2.2.4. D-branas transversales . . . . .	41
<b>3. Geometría a partir de D-branas en WST</b>	<b>43</b>
3.1. D-branas longitudinales . . . . .	43
3.1.1. Estado de borde . . . . .	44
3.1.2. Normalización del estado de borde . . . . .	46
3.1.3. Valores esperados . . . . .	49
3.1.4. Descripción en el fondo de brana negra . . . . .	51
3.2. D-branas transversales . . . . .	55
3.2.1. Estado de borde . . . . .	56
3.2.2. Normalización del estado de borde . . . . .	57
3.2.3. Valores esperados . . . . .	61
3.3. Descripción en el fondo de gravedad . . . . .	63

<b>4. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>67</b>
<b>A.</b>	<b>71</b>
A.1. Normalización de los modos de cuerda . . . . .	71
A.2. Series de Fourier . . . . .	74
A.2.1. Deltas discretas . . . . .	75
A.3. Unidades . . . . .	75

# Resumen

En la teoría de cuerdas habitual se sabe que las D-branas pueden ser descritas desde dos puntos de vista distintos pero equivalentes: como superficies donde las cuerdas abiertas terminan (inmersas en un espacio-tiempo plano), o como branas negras (que son espacio-tiempos curvos análogos a agujeros negros extendidos). En el límite de bajas energías, esta equivalencia da origen a la célebre dualidad de Maldacena.

La teoría de cuerdas enrolladas (WST), también llamada teoría de cuerdas no relativistas, es un modelo simplificado de la teoría de cuerdas usual, que posee propiedades interesantes. En este trabajo exploramos la relación entre las dos descripciones alternativas de las D-branas en esta teoría. Concretamente, usamos la técnica del llamado estado de borde para obtener la primera corrección por encima de la métrica plana en presencia de una D-brana.

Compararemos el resultado obtenido con la primera corrección a la métrica de la brana negra correspondiente. En dicho fondo, existe una métrica no trivial, un campo de norma y no hay D-branas presentes. El acuerdo que obtenemos entre ambos resultados aporta evidencia a favor de la idea de que en la teoría de cuerdas enrolladas las D-branas tienen también dos descripciones equivalentes.

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los grandes sueños de la física contemporánea es el de poder describir mediante una sola teoría todos los fenómenos que observamos en la naturaleza, desde la estructura fundamental de la materia hasta el comportamiento del universo como un todo. En el camino hacia esta meta, se han logrado grandes avances con la formulación de dos teorías: el Modelo Estándar, que resume lo que sabemos sobre la estructura microscópica del universo, y la Relatividad General, que describe el comportamiento de la gravedad, el espacio y el tiempo a distancias macroscópicas. En la actualidad existen diferentes propuestas para combinar a ambas en una sola teoría que sea capaz de describir el universo a todas las escalas. La más prometedora de éstas, y de la cual estudiaremos algunos aspectos en los siguientes capítulos, es la teoría de cuerdas, que parece contener todos los ingredientes necesarios para describir de manera unificada a la naturaleza.

En nuestro entorno podemos encontrar diferentes tipos de materia, cada uno con propiedades muy variadas: cristales de gran dureza, materiales radioactivos, metales conductores, líquidos viscosos, gases inflamables. A pesar de esta aparente falta de unidad, a principios del siglo XX se logró demostrar que a partir de unas cuantas unidades fundamentales, los átomos, es posible reproducir toda la materia en nuestro mundo. Más tarde se encontró que cada átomo contiene un núcleo con carga eléctrica positiva rodeado por una nube de electrones con carga negativa. Posteriormente se descubrió que el núcleo de un átomo a su vez contiene dos clases de partículas, los neutrones, que son eléctricamente neutros, y los protones, que portan carga positiva. Así, se tenía la idea de que toda la materia estaba constituida de protones, neutrones y electrones. Sin embargo, conforme se logró entender con mayor profundidad la estructura microscópica de la materia, se encontró que protones, neutrones y otras partículas también poseían una estructura interna, y estaban formadas por partícu-



las más pequeñas llamadas quarks. La teoría moderna de las partículas elementales, el llamado Modelo Estándar, postula la existencia de un pequeño grupo de objetos básicos a partir de los cuales es posible formar toda la materia de la que está constituida nuestro mundo. En esta teoría tenemos seis diferentes tipos de quarks (arriba, abajo, extraño, encanto, fondo, cima) y seis tipos diferentes de partículas llamadas leptones (el electrón y sus dos parientes cercanos, el muón y el tauón, junto con tres partículas asociadas, respectivamente, a las que se les denomina neutrinos). Adicionalmente, por cada tipo de partícula existe una antipartícula, cuyas propiedades son iguales a las de la partícula pero que posee cargas de signo opuesto. Al interactuar y combinarse, las partículas elementales dan lugar a la materia que vemos a nuestro alrededor. Por ejemplo, un protón está formado por dos quarks arriba y un quark abajo, mientras que hacen falta dos quarks abajo y un quark arriba para obtener un neutrón. Así, lo que tenemos es que toda la materia que encontramos en nuestro entorno puede ser explicada como el resultado de la combinación de unos cuantos objetos fundamentales.

A nuestro alrededor podemos observar muchos tipos de fenómenos, la fricción entre dos objetos, la repulsión entre dos imanes, las explosiones, entre muchos otros. Todos estos fenómenos, que parecen totalmente diferentes entre sí, pueden ser entendidos en términos de cuatro interacciones fundamentales que se dan entre las partículas elementales. Éstas son la interacción gravitacional, la interacción electromagnética, la interacción fuerte y la interacción débil. La interacción gravitacional está descrita por la teoría de la relatividad de Einstein, la cual nos dice que las fuerzas gravitacionales son producto de la curvatura del espacio-tiempo. La interacción electromagnética, que se da entre las partículas que portan carga eléctrica, es la responsable de la mayoría de las fuerzas macroscópicas que observamos entre los objetos (fuerzas de fricción, la fuerza que ejerce una liga al estirarla, la fuerza que ejerce el pie en una pelota de fútbol), y es la que se encarga de mantener unidos a los átomos para formar moléculas y a los electrones y núcleos para formar átomos. Las otras interacciones, menos familiares en nuestra experiencia cotidiana, son la interacción fuerte o de color, que es la que se encarga de mantener unidos a los protones y neutrones que forman los núcleos, así como a los constituyentes del neutrón, el protón y otras muchas partículas; y la interacción débil, que juega un papel fundamental en algunos procesos radioactivos y la formación de elementos pesados. Curiosamente, el electromagnetismo y la fuerza débil han resultado ser solo manifestaciones de una sola fuerza básica, la llamada interacción electrodébil. El Modelo Estándar da una descripción detallada de esta fuerza junto con la interacción fuerte y las doce partículas materiales que las experimentan. Esta teoría ha sido muy exitosa y es capaz de explicar toda la materia que vemos a nuestro alrededor. Tiene, sin embargo, varias

limitaciones, una de las cuales es que no incluye a la gravedad, por lo cual se hace necesario extenderla para tener todas las interacciones dentro de un mismo marco.

El lenguaje que se usa actualmente para describir a las partículas y sus interacciones es el de la teoría de campos. Un campo es un objeto matemático que a cada punto en el espacio (y en cada instante del tiempo) le asigna un valor numérico (campo escalar), un vector (campo vectorial), o un objeto matemático más sofisticado. Un ejemplo muy común en la vida cotidiana es el campo de temperaturas, en el cual a cada punto en el espacio se le asigna el valor de la temperatura en dicho punto. Otro ejemplo es el del campo de velocidades de un fluido, que a cada punto del fluido le asigna el vector que corresponde a su velocidad. Así, los campos son sistemas que se extienden en todo el espacio y que poseen un cierto valor de fondo. En la concepción moderna, las partículas son las pequeñas fluctuaciones cuánticas del campo por encima de su valor de fondo. Para visualizar esto, conviene pensar en una analogía. Imaginemos un estanque de agua muy grande. El agua se encuentra en reposo mientras no la perturbemos, el nivel que se alcanza es lo que llamariamos el valor de fondo de nuestro campo. Ahora supongamos que perturbamos el estanque, tal vez lanzando una pequeña piedra. Después de que hemos lanzado la piedra comienzan a aparecer onditas en el agua. Estas onditas son las fluctuaciones en el estado original del agua. En la analogía entre nuestro campo y la superficie del agua, las onditas que se propagan a través del estanque representan a las partículas. Como ejemplo, podemos mencionar a los electrones, que son creados cuando el campo que los describe, el campo de Dirac, es perturbado. Asimismo, cuando se producen excitaciones por encima del valor de fondo del campo electromagnético se crean fotones, las partículas asociadas a este campo. Esto mismo sucede para cualquier otro campo de una determinada teoría, las excitaciones por encima de su valor de fondo se identifican como sus partículas asociadas. Las 4 interacciones fundamentales, que ya mencionamos antes, están descritas por campos y por lo tanto sus pequeñas excitaciones se interpretan como sus partículas asociadas. Estas hacen el papel de portadoras de las interacciones, lo cual quiere decir que la interacción entre las partículas materiales resulta del intercambio de estas partículas de fuerza. En el Modelo Estándar las partículas portadoras de las interacciones son el fotón y las partículas  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ , para las interacciones electrodébiles y 8 tipos de partículas llamados gluones para la interacción fuerte. En el caso del campo gravitacional, se cree que existe una partícula asociada, el gravitón, que describe las pequeñas excitaciones del espacio-tiempo. Es de esta manera como, a partir de los campos y sus excitaciones se formula la teoría moderna de las partículas elementales.

Como ya mencionamos, la limitación más evidente del Modelo Estándar es que no incluye la gravedad. Paradójicamente, la interacción gravitacional fue la primera

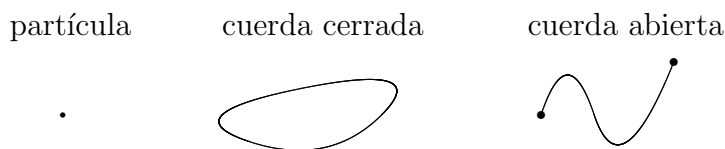


Figura 1.1: Partículas y cuerdas.

para la que se formuló una teoría que permitía hacer predicciones y explicar los fenómenos terrestres y celestes. En el siglo pasado, Albert Einstein formuló la teoría de la relatividad general, que se convirtió en la teoría moderna de la gravitación. Ésta teoría ha sido comprobada experimentalmente con éxito y puede dar cuenta de la mayoría de los fenómenos que ocurren a escalas macroscópicas en el universo. No obstante, aún no ha sido posible formular una teoría de la gravitación que sea compatible a nivel microscópico con la teoría de las partículas elementales. Por un lado, al tratar de aplicar los métodos usados en la teoría de partículas elementales a la relatividad general, se obtienen resultados absurdos, lo cual es inaceptable para una teoría física. Por otra parte, dado que la teoría de la gravitación describe la estructura del espacio-tiempo, para formular una versión microscópica de la teoría necesitamos entender como se comportan el espacio y el tiempo a estas escalas. Un obstáculo adicional, es la falta de datos experimentales: dado que en los experimentos que se realizan actualmente en los aceleradores de partículas la interacción gravitacional resulta despreciable en comparación con las demás interacciones, a la fecha no se ha obtenido información acerca del comportamiento microscópico de la gravedad. Sin embargo, existen situaciones físicas, tales como los agujeros negros o el Big Bang, en las que sabemos que la interacción gravitacional es lo suficientemente intensa para ser importante a nivel microscópico. La necesidad de describir este tipo de fenómenos y entender la naturaleza del espacio-tiempo a pequeñas escalas ha conducido a la búsqueda de una teoría que sea capaz de incluir a la relatividad general y la teoría de partículas elementales para dar una descripción unificada de la naturaleza.

### 1.0.1. La teoría de cuerdas

La teoría de cuerdas [4, 5] tiene como punto de partida la idea de que todo lo que conocemos en el universo está compuesto por pequeños objetos unidimensionales, a los cuales se les ha dado el nombre de “cuerdas” (veáse fig.1.1). Esta hipótesis es muy diferente a la que se hace al momento de formular una teoría de partículas, en donde los objetos fundamentales son puntuales. En este tipo de teorías, como es el

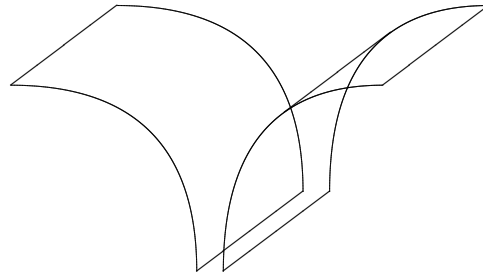


Figura 1.2: Brana negra

caso del Modelo Estándar, se hace necesario introducir varios tipos de partículas para describir los diferentes tipos de materia e interacciones que se observan en el mundo real. Por otro lado, un objeto unidimensional, como es el caso de la cuerda, puede vibrar en una infinidad de maneras. Cada modo de vibrar de una cuerda se puede identificar como un tipo diferente de partícula. Por ejemplo, una cuerda vibrando de cierta manera puede describir a una partícula como el electrón y la misma cuerda vibrando de otra forma puede identificarse como un fotón. La teoría de cuerdas tiene, a diferencia del Modelo Estándar, un único parámetro con dimensiones, la longitud de cuerdas,  $l_s$ , que está relacionado con el tamaño característico de las cuerdas. Tradicionalmente se pensó que la escala de energía a la que las cuerdas se podrían detectar directamente era tan grande como  $10^{18}$  GeV, pero hoy se considera, a través de los llamados modelos de mundo brana, que puede ser tan pequeña como  $10^3$  GeV, energías que podrían estar al alcance de la próxima generación de aceleradores de partículas.

La teoría de cuerdas intenta unificar todas las interacciones de la naturaleza, incluyendo a la gravedad. La forma en la que la gravedad se incorpora en la teoría de cuerdas es bastante sorprendente, ya que ésta aparece como una predicción y no es necesario incluirla a priori. En su versión más simple podemos plantear a la teoría de cuerdas en un espacio-tiempo plano. Cuando se obtienen los distintos estados de oscilación de la cuerda y se observan sus propiedades, aparecen aquellos que tienen exactamente las propiedades que se sabe debe poseer la partícula asociada con la gravedad, es decir, aquella que describe pequeñas perturbaciones del espacio-tiempo. Mucho más sorprendente todavía es que la teoría de cuerdas es capaz de reproducir la Relatividad General de Einstein (más pequeñas correcciones).

Así como las partículas son las pequeñas fluctuaciones de los campos de fondo, los infinitos modos de oscilación de las cuerdas describen las pequeñas fluctuaciones de

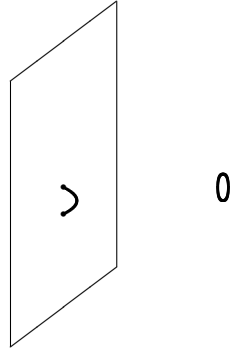


Figura 1.3: D-brana

un número infinito de campos por encima de su valor de fondo. Sin embargo, los campos también pueden tener fluctuaciones grandes. Además, dado que las ecuaciones que describen a los campos son no lineales, podemos encontrar soluciones localizadas que ya no describen pequeñas oscilaciones y que pueden sostenerse a sí mismas por efecto de la no linealidad. A este tipo especial de objetos se les llama solitones. En la teoría de cuerdas existen diferentes tipos de solitones, uno de ellos son las llamadas branas negras. Las branas negras son soluciones de la teoría de cuerdas que describen geometrías curvadas en algunas direcciones y constantes en otras (ver fig.1.2). Estas deben su nombre al hecho de que son soluciones análogas a agujeros negros en más dimensiones, con un horizonte y geometrías curvadas.

Otro tipo de objetos físicos que se encuentran en la teoría de cuerdas son las D-branas, que poseen cierta masa y carga. Para tener una idea concreta de como es una D-brana podemos pensar, por ejemplo, en una D-brana de dimensión dos, la cual se vería como un plano que se encuentra inmerso en el espacio-tiempo. Las D-branas son objetos dinámicos y sus excitaciones son descritas por cuerdas abiertas cuyos extremos están limitados a moverse sobre ellas. Como excitaciones, las cuerdas abiertas no pueden existir en forma independiente de la D-brana, sin embargo, éstas pueden cerrar sus extremos y escapar de la D-brana como cuerdas cerradas, o en sentido inverso, una cuerda cerrada puede abrirse sobre la D-brana para convertirse en una cuerda abierta. Este es el mecanismo que permite que la D-brana interactúe con sus alrededores. Una propiedad muy notable de las D-branas es que se ha encontrado que una colección de un número suficientemente grande de ellas también puede ser descrita en términos de un tipo especial de branas negras [11], ésto es, el mismo sistema puede ser descrito de dos maneras totalmente diferentes. Los cálculos

que se pueden realizar para las D-branas pueden ser reproducidos en el lado de las branas negras. En particular, las D-branas son capaces de reproducir la geometría curva de la brana negra.

Como mencionamos en el párrafo anterior, una colección de D-branas puede ser descrita en términos de objetos extendidos en un espacio-tiempo plano o por una brana negra. Una pregunta natural que surge al observar esta equivalencia es la de cómo este objeto extendido es capaz de reproducir la geometría curva de una brana negra a pesar de que al principio se encuentra en un espacio-tiempo plano de fondo. Como mencionamos, una D-brana tiene masa, así que intuitivamente y de acuerdo a la Relatividad General, su presencia debería provocar que el espacio tiempo se curve. El mecanismo por el cual la D-brana hace ésto es muy particular. Sabemos que la D-brana interactúa con sus alrededores mediante la absorción y la emisión de cuerdas cerradas. En particular, la D-brana puede emitir cuerdas cerradas que corresponden a los gravitones, i.e., los portadores de la interacción gravitacional. Cuando estos gravitones interactúan con una cuerda que viaja a través del espacio-tiempo hace que su propagación se altere tal y como si existiera una geometría curva. Este punto se podrá vislumbrar más claramente en los siguientes capítulos cuando realicemos cálculos explícitos en ambas descripciones y podamos comprobar cómo podemos reproducir la geometría a partir de una D-brana.

Tomando como punto de partida la existencia de dos descripciones alternativas de la física de las D-branas podemos preguntarnos qué le pasa a las dos descripciones cuando la longitud de cuerdas se hace muy pequeña, ésto es, cuando las energías a las que nos restringimos son tan bajas que sólo nos permiten explorar distancias mucho más grandes que la longitud de cuerdas. Intuitivamente, en este tipo de límite, una cuerda se vería como un punto, es decir, lo que tendríamos al final sería una teoría de partículas. Sin embargo, lo que pasa al tomar un límite de bajas energías para las D-branas es una historia bastante más interesante, como descubrió Maldacena en su famoso artículo [10]. En la descripción de las D-branas como hipersuperficies, que viven en un fondo en un principio plano, en el límite de bajas energías, la teoría de cuerdas definida en ellas se desacopla de lo que sucede fuera de ellas, obteniéndose al final una teoría de partículas que esta definida solamente en las D-branas. En la parte de la descripción alternativa, donde las D-branas vistas como un brana negra tenemos una situación totalmente diferente. La teoría cerca del horizonte es la que se desacopla de lo que sucede en la región asintóticamente plana, pero en el límite sigue siendo una teoría de cuerdas. Así, lo que obtenemos al final es una equivalencia que es realmente sorprendente entre una teoría de campos usual (partículas) y una teoría de cuerdas. Esta es la famosa correspondencia norma/gravedad o AdS/CFT [19, 18].

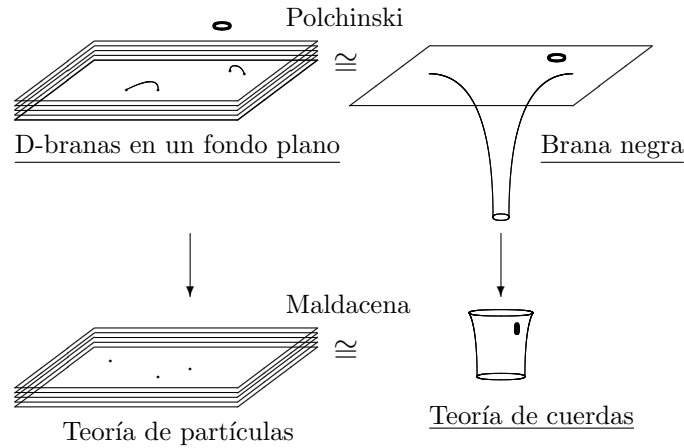


Figura 1.4: Deducción de la Dualidad de Maldacena.

Esta dualidad ha sido muy importante, ya que ha permitido entender aspectos de la teoría de cuerdas y la teoría de campos que no se pueden estudiar mediante los métodos convencionales. La ventaja es que cálculos que pueden ser muy complicados en el lado de la teoría de campos se pueden llegar a simplificar enormemente al hacerlos usando la teoría de cuerdas y viceversa. Por un lado, esta dualidad nos ha permitido explorar a mucho mayor profundidad la naturaleza última de las cuerdas utilizando el lenguaje de la teoría de partículas. Por otro lado, cálculos de cuerdas nos han acercado a entender algunos aspectos de teorías similares a la cromodinámica cuántica, lo cual es un problema abierto importante en el Modelo Estándar. En particular, avances recientes nos permiten incluso vislumbrar la posibilidad de que eventualmente se puedan formular predicciones experimentales acerca de lo que se denomina plasma de quarks y gluones, fluido que se cree existió en los primeros instantes del universo y que desde hace apenas unos años se ha logrado reproducir en algunos aceleradores de partículas.

La teoría de cuerdas contiene todos los ingredientes necesarios para poder construir una teoría unificada de la naturaleza y tiene una gran variedad de objetos que pueden ayudarnos a describir el universo en el que nos encontramos. No obstante, hasta el momento no hay evidencia experimental directa que nos permita saber si es correcta o no. A pesar de esto, la teoría de cuerdas sigue siendo el principal candidato para una teoría unificada de la naturaleza y se ha mantenido como un campo de investigación muy activo que ha producido una gran cantidad de ideas interesantes,

que incluso se han podido exportar a otras áreas de la física y podrían ayudar a entender mejor aspectos de teorías tales como el Modelo Estándar.

## 1.1. La cuerda bosónica

Una cuerda es un objeto unidimensional, cuya evolución se puede describir usando dos coordenadas auxiliares  $\sigma$  y  $\tau$  que parametrizan la trayectoria de la cuerda en el espacio-tiempo  $X^\mu(\tau, \sigma)$ . A la variedad bidimensional generada por los parámetros  $\sigma$  y  $\tau$  se le denomina hoja de mundo (ver figuras 1.5 y 1.6). La acción natural para la cuerda es, la llamada acción de Nambu-Goto

$$\begin{aligned} S_{NG}[X] &= \text{-tensión} \times (\text{área propia}) \\ &= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det[\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X)]}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

con  $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d-1$ , donde los índices  $a, b$  toman los valores  $(\tau, \sigma)$ ,  $G_{\mu\nu}(X)$  es la métrica del espacio-tiempo y la expresión

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (1.2)$$

es la métrica inducida en la hoja de mundo, con

$$-\det h_{ab} = (\partial_\tau X \cdot \partial_\sigma X)^2 - (\partial_\tau X)^2 (\partial_\sigma X)^2, \quad (1.3)$$

donde hemos usado la convención

$$\partial_a X \cdot \partial_b X \equiv G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (1.4)$$

En este punto es conveniente introducir algunas definiciones referentes a las diferentes maneras de escribir el parámetro fundamental en la teoría de cuerdas

$$T_F \equiv T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (\text{Tensión de cuerda fundamental}), \quad (1.5)$$

$$\alpha' \equiv (\text{Pendiente de Regge}), \quad (1.6)$$

$$l_s \equiv \sqrt{\alpha'} \quad (\text{Longitud de cuerdas}). \quad (1.7)$$

Como podemos observar  $S_{NG}$  (1.1) es una acción no polinomial. Afortunadamente podemos escribir una acción equivalente que es cuadrática en los campos, la llamada acción de Polyakov

$$S_p[X, g_{ab}] = -\frac{T_F}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (1.8)$$



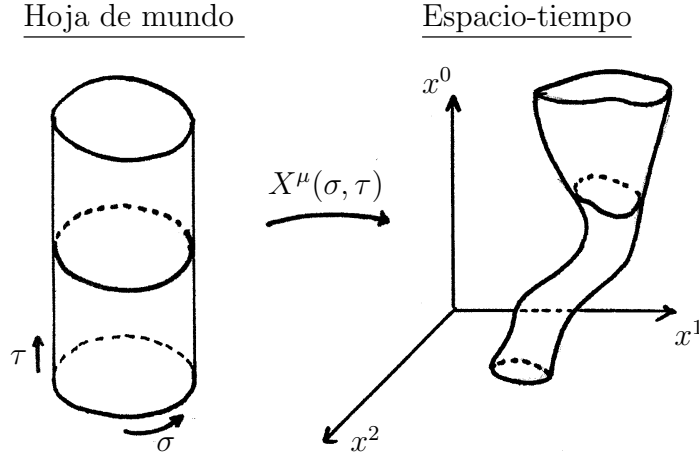


Figura 1.5: Hoja de mundo (cuerda cerrada).

donde la variable auxiliar  $g_{ab}(\sigma)$  es una métrica intrínseca en la hoja de mundo (con  $g \equiv \det g_{ab}$ ), cuya ecuación de movimiento es

$$T_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{a'b'} \partial_{a'} X^\mu \partial_{b'} X_\mu = 0, \quad (1.9)$$

con  $T_{ab}$  el tensor de energía momento en la hoja de mundo. Aquí es conveniente remarcar que la condición (1.9) es necesaria para que la acción (1.8) sea equivalente a la acción de Nambu-Goto (1.1). Este será un aspecto importante a tomar en cuenta a la hora de cuantizar la teoría, como veremos más adelante.

Usando las simetrías de la acción podemos además fijar la norma plana, de tal manera que

$$g_{ab} = \eta_{ab}. \quad (1.10)$$

Con ésto, la acción de Polyakov se puede escribir como

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \quad (1.11)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de esta acción son

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0, \quad (1.12)$$

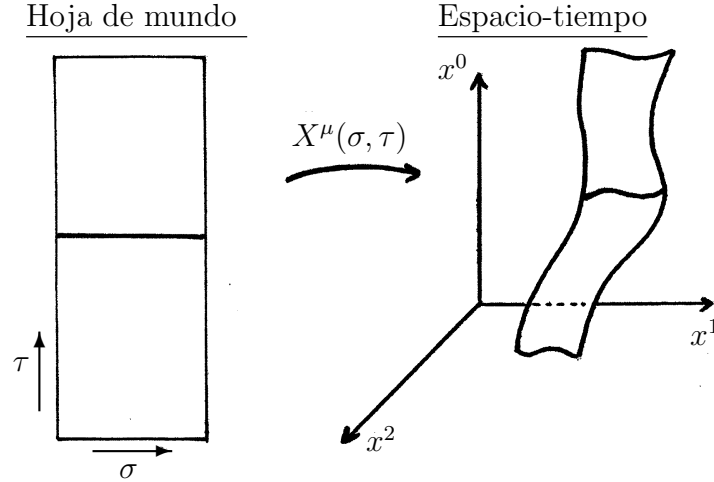


Figura 1.6: Hoja de mundo (cuerda abierta).

con las condiciones de frontera

$$\partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi, 2\pi} - \partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0} = 0, \quad (1.13)$$

donde fijamos por convención  $\sigma \in [0, \pi]$  para cuerdas abiertas y  $\sigma \in [0, 2\pi]$  para cuerdas cerradas. Existen dos formas de satisfacer esta condición de frontera. La primera es imponer la condición de periodicidad

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, 2\pi), \quad (1.14)$$

en cuyo caso obtenemos cuerdas cerradas. La otra forma de satisfacer la condición de frontera es pedir

$$\partial_\sigma X_\mu \delta X^\mu|_{0, \pi} = 0, \quad (1.15)$$

de donde obtenemos cuerdas abiertas. En este caso hay dos opciones que podemos tomar para cada dirección por separado

$$\partial_\sigma X^\mu|_{0, \pi} = 0 \quad \text{condiciones de frontera Neumann (extremo libre),} \quad (1.16)$$

$$\delta X^\mu|_{0, \pi} = 0 \quad \text{condiciones de frontera Dirichlet (extremo fijo).} \quad (1.17)$$

Para la cuerda cerrada, la solución más general que cumple con la ecuación de movimiento (1.12) y la condición de frontera (1.14) es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}) . \quad (1.18)$$

Para las coordenadas de la cuerda abierta que satisfacen condiciones de frontera Neumann (1.16) en ambos extremos, la solución es

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (1.19)$$

Por otra parte, para una cuerda abierta que cumple con condiciones de frontera Dirichlet (1.17) en ambos extremos, tenemos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{y_1^\mu(\pi - \sigma) + y_2^\mu \sigma}{\pi} - \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \sin n\sigma. \quad (1.20)$$

Cabe mencionar que también podemos tener condiciones de frontera mezcladas, i.e., condiciones Dirichlet para un extremo y Neumann para el otro o viceversa. La solución para este caso puede verse por ejemplo en [3].

Reescribiendo el tensor de energía momento en coordenadas del cono de luz

$$\sigma^+ \equiv \tau + \sigma, \quad \sigma^- \equiv \tau - \sigma, \quad (1.21)$$

obtenemos dos componentes independientes

$$T_{++} \equiv \partial_+ X \cdot \partial_+ X, \quad T_{--} \equiv \partial_- X \cdot \partial_- X. \quad (1.22)$$

Estas dos ecuaciones deben anularse por la condición (1.9). Desarrollando en modos de Fourier el tensor de energía momento para una cuerda cerrada tenemos

$$T_{++} \sim \sum_n L_n e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad T_{--} \sim \sum_n \tilde{L}_n e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (1.23)$$

donde  $L_n$  y  $\tilde{L}_n$  están dados por

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{-m} \cdot \alpha_{n+m} \quad ; \quad \tilde{L}_n = \frac{1}{2} \sum_m \tilde{\alpha}_{-m} \cdot \tilde{\alpha}_{n+m}. \quad (1.24)$$

Los modos  $L_n, \tilde{L}_n$  son los coeficientes de la expansión en modos de Fourier del tensor de energía-momento y se les da el nombre de generadores de Virasoro. Para la cuerda abierta  $L_n = \tilde{L}_n$ , por lo tanto solo tenemos un conjunto de generadores de Virasoro

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{-m} \cdot \alpha_{n+m}. \quad (1.25)$$

Para poder cuantizar la cuerda debemos imponer las siguientes relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\frac{1}{2\pi\alpha'}[\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu} , \quad (1.26)$$

$$[X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = [\dot{X}^\mu(\sigma, \tau), \dot{X}^\nu(\sigma', \tau)] = 0 , \quad (1.27)$$

lo que implica para los modos de Fourier de la cuerda

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad ; \quad [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} , \quad (1.28)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu] = 0 . \quad (1.29)$$

A partir de estas relaciones podemos reconocer a los operadores con  $n < 0$  como los operadores de creación y a los operadores con  $n > 0$  como operadores de aniquilación.

En cuanto a los operadores de Virasoro, conviene definirlos con el producto normal de operadores. Las relaciones de conmutación (1.28), (1.29) solo importan para  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$ , ya que son los únicos que contienen productos de modos que no conmutan. Lo que obtenemos es

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4}\hat{p}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad ; \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4}\hat{p}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n , \quad (1.30)$$

para las cuerdas cerradas, y

$$L_0 = \alpha'\hat{p}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n , \quad (1.31)$$

para las cuerdas abiertas. Las relaciones de conmutación que satisfacen los operadores de Virasoro son las siguientes

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{d}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n} . \quad (1.32)$$

Dado que los modos de oscilación con  $n > 0$  son los operadores de aniquilación y los modos con  $n < 0$  son los operadores de creación, el estado de vacío  $|0\rangle_\alpha|0\rangle_{\tilde{\alpha}}|p\rangle$  con momento  $p$  está definido por las condiciones

$$\alpha_n^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_{\tilde{\alpha}}|p\rangle = \tilde{\alpha}_n^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_{\tilde{\alpha}}|p\rangle = 0 \quad \forall n > 0 , \quad (1.33)$$

$$\hat{p}^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_{\tilde{\alpha}}|p\rangle = p^\mu|0\rangle_\alpha|0\rangle_{\tilde{\alpha}}|0\rangle , \quad (1.34)$$

y los estados físicos están caracterizados por cumplir las condiciones

$$L_m |\psi_{\text{fis}}\rangle = \tilde{L}_m |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0 \quad m > 0, \quad (1.35)$$

$$(L_0 - 1) |\psi_{\text{fis}}\rangle = (\tilde{L}_0 - 1) |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0. \quad (1.36)$$

El  $-1$  en la última ecuación aparece debido al problema de ordenamiento normal en  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$ . En el caso de la cuerda abierta solo tenemos la condición concerniente a  $L_0$ . Partiendo de las condiciones de estado físico que involucran a  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$  podemos obtener una expresión para el operador de masa (ésto es análogo a lo que sucede al cuantizar la partícula relativista de manera covariante). Para las cuerdas abiertas tenemos

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - 1 \right), \quad (1.37)$$

mientras que para la cuerda cerrada

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n) - 2 \right], \quad (1.38)$$

junto con la condición de empatamiento de niveles

$$(\tilde{L}_0 - L_0) |\psi_{\text{fis}}\rangle = 0. \quad (1.39)$$

En cálculos subsecuentes utilizaremos el formalismo en términos de coordenadas complejas, así que reescribiremos las ecuaciones y los resultados que hemos obtenido hasta ahora en estos términos. Las coordenadas complejas  $z$ ,  $\bar{z}$  están definidas como

$$z \equiv e^{i(\tau+\sigma)}, \quad \bar{z} \equiv e^{i(\tau-\sigma)}. \quad (1.40)$$

La acción de Polyakov es invariante ante este tipo de transformaciones, de tal manera que la física descrita por la acción en coordenadas complejas es la misma que la que describe la acción en términos de las coordenadas  $(\sigma, \tau)$ . Después de llevar a cabo una rotación de Wick ( $\tau \rightarrow -i\tau$ ) en las coordenadas de la hoja de mundo, la acción (1.8) toma la forma

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X, \quad (1.41)$$

donde

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (1.42)$$

Nótese que aquí hemos usado la convención usada en [4]

$$d^2z = 2id\tau d\sigma, \quad \delta^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\delta(\sigma)\delta(i\tau). \quad (1.43)$$

La ecuación de movimiento (1.12) en términos de las coordenadas complejas es

$$\partial\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) = 0, \quad (1.44)$$

y la condición de frontera (1.13) toma la forma

$$i \oint [(\bar{\partial}X \cdot \delta X)d\bar{z} - (\partial X \cdot \delta X)dz] = 0. \quad (1.45)$$

Las dos componentes (1.23) del tensor de energía momento se transforman en una componente analítica y una antianalítica

$$T(z) \equiv -\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu\partial X_\mu, \quad \tilde{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'}\bar{\partial}X^\mu\bar{\partial}X_\mu. \quad (1.46)$$

La solución más general para la ecuación de movimiento (1.44) se puede escribir como una expansión en serie de Laurent

$$X^\mu(z) = x^\mu - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu \ln z + \tilde{\alpha}_0^\mu \ln \bar{z}) + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left( \frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right). \quad (1.47)$$

Para las cuerdas cerradas, la condición de frontera (1.14) se traduce en

$$X^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu(e^{2i\pi}z, e^{-2i\pi}\bar{z}). \quad (1.48)$$

Usando la condición anterior la solución (1.47) se transforma en

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\frac{\alpha'}{2}p^\mu \ln |z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left( \frac{\alpha_n^\mu}{z^n} + \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^n} \right). \quad (1.49)$$

Para la cuerda abierta que cumple condiciones de frontera Neumann en ambos extremos la condición de frontera reescrita en términos de coordenadas complejas es

$$(\partial X^\mu - \bar{\partial}X^\mu)|_{z=\bar{z}} = 0 \quad \text{sobre el eje real.} \quad (1.50)$$

Así, la solución que se obtiene es

$$X^\mu(z, \bar{z}) = x^\mu - i\alpha'p^\mu \ln |z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}), \quad (1.51)$$

Por otra parte, para la cuerda que cumple condiciones de frontera Dirichlet en ambos extremos, tenemos

$$X^\mu|_{z=\bar{z}} = \begin{cases} y_1^\mu & \text{si } z > 0 \quad (\sigma = 0) \\ y_2^\mu & \text{si } z < 0 \quad (\sigma = \pi) \end{cases} , \quad (1.52)$$

la solución que se tiene es

$$X^\mu(z, \bar{z}) = y_1^\mu - \frac{i(y_2^\mu - y_1^\mu)}{2\pi} \ln \frac{z}{\bar{z}} - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu (z^{-n} - \bar{z}^{-n}) \quad (1.53)$$

En todas las expresiones anteriores, los desarrollos en serie de Fourier han pasado a ser desarrollos en serie de Laurent. Por supuesto, se siguen cumpliendo las relaciones de conmutación (1.28) y (1.29).

## 1.2. D-branas y estado de borde bosónico

Las D-branas son objetos extendidos que están caracterizados por el hecho de que las cuerdas abiertas pueden tener sus extremos anclados en ellas. En general son objetos dinámicos y no rígidos, cuya forma puede fluctuar y en las que pueden encontrarse campos internos. Las fluctuaciones de la D-brana son las cuerdas abiertas que se mueven sobre ellas.

La cuerda abierta con sus extremos en la D-brana satisface condiciones de frontera tipo Neumann a lo largo de las direcciones paralelas a la D-brana,

$$\partial_\sigma X^\alpha|_{\sigma=0} = 0 \quad \alpha = 0, 1, \dots, p , \quad (1.54)$$

y cumple condiciones de frontera tipo Dirichlet a lo largo de las direcciones transversales a la misma

$$X^i|_{\sigma=0} = X^i|_{\sigma=\pi} = y^i \quad i = p + 1, \dots, d - 1, \quad (1.55)$$

donde  $y^i$  son las coordenadas de la D-brana y  $d$  es la dimensión del espacio tiempo de Minkowski. Para el caso de la cuerda bosónica  $d = 26$ . Las condiciones anteriores nos indican que los extremos de la cuerda abierta deben estar anclados en la D-brana y son libres de moverse sobre ella. Si reescribimos las condiciones (1.54), (1.55) en términos de  $z, \bar{z}$  tenemos

$$(\partial - \bar{\partial})X^\alpha(z, \bar{z})|_{z=\bar{z}} = 0 \quad \alpha = 0, 1, \dots, p , \quad (1.56)$$

$$X^i(z, \bar{z})|_{z=\bar{z}} = y^i \quad i = p + 1, \dots, d - 1 . \quad (1.57)$$

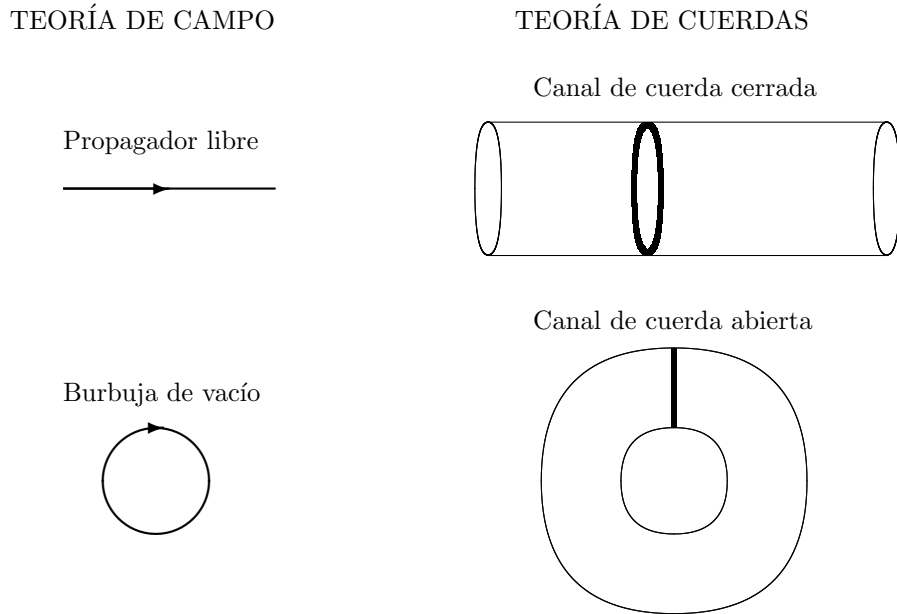


Figura 1.7: Hojas de mundo para los canales de cuerda cerrada y abierta y sus equivalentes en diagramas de Feynman.

La interacción entre dos D-branas paralelas está dada por la fluctuación de vacío de una cuerda abierta extendida entre ellas, i.e., una cuerda abierta que se mueve en un bucle. En la figura 1.8 la línea gruesa representa la cuerda abierta estirada entre las dos D-branas. La imagen de la hoja de mundo de la cuerda en el espacio-tiempo es un cilindro que se extiende entre las dos D-branas. En este diagrama (fig. 1.8) es fácil observar que intercambiando las variables  $\sigma$  y  $\tau$  la amplitud de cuerda a un lazo puede también ser vista como un diagrama a nivel árbol de una cuerda cerrada que se crea en una de las D-branas, se propaga en el espacio entre ellas y se aniquila en la segunda D-brana (ver figura 1.9). Estas dos descripciones equivalentes son llamadas respectivamente “canal de cuerda abierta” y “canal de cuerda cerrada”. Debe enfatizarse que el contenido físico de ambas descripciones es *a priori* completamente diferente. En el primer caso se describe la interacción entre dos D-branas como una amplitud de un lazo de cuerda abierta, que es un proceso cuántico de cuerdas abiertas, mientras en el segundo caso se describe una amplitud clásica de cuerdas cerradas (ver figura 1.7).

Para mostrar explícitamente como podemos pasar del canal de cuerda abierta al canal de cuerda cerrada, consideremos un diagrama de un lazo con una cuerda abierta circulando en él con sus extremos en dos D-branas paralelas con coordenadas dadas



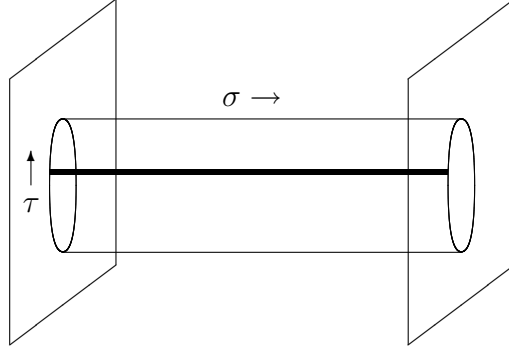


Figura 1.8: Canal de cuerda abierta.

por  $(y^{p+1}, \dots, y^{d-1})$  y  $(w^{p+1}, \dots, w^{d-1})$  respectivamente. La cuerda abierta satisface las condiciones de borde (1.54), en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \pi$ , a lo largo de las direcciones paralelas a la D-brana, mientras que a lo largo de las direcciones transversales satisface las siguientes condiciones:

$$X^i|_{\sigma=0} = y^i \quad , \quad X^i|_{\sigma=\pi} = w^i \quad . \quad (1.58)$$

donde tomamos  $\sigma$  y  $\tau$  en los intervalos  $\sigma \in [0, \pi]$  y  $\tau \in [0, T]$ .

Es fácil observar, de las figuras 1.8 y 1.9, que para pasar del canal de cuerda abierta al canal de cuerda cerrada debemos intercambiar  $\sigma$  con  $\tau$ , ésto es

$$(\sigma, \tau) \rightarrow (\tau, \sigma). \quad (1.59)$$

Finalmente, para que las variables  $\sigma$  y  $\tau$  varien en los intervalos  $\sigma \in [0, 2\pi]$  y  $\tau \in [0, \hat{T}]$  correspondientes a una cuerda cerrada propagándose entre las dos D-branas debemos llevar a cabo el siguiente reescalamiento

$$\sigma \rightarrow \frac{2\pi}{T}\sigma \quad \tau \rightarrow \frac{\hat{T}}{\pi}\tau \quad (1.60)$$

Después de hacer esta transformación, las condiciones de frontera (en  $\sigma = 0$ ) se convierten en condiciones iniciales (en  $\tau = 0$ ), que describen el llamado “estado de borde”  $|B_X\rangle$  en el cual una cuerda cerrada es emitida por la D-brana,

$$\partial_\tau X^\alpha|_{\tau=0}|B_X\rangle = 0 \quad \alpha = 0, \dots, p, \quad (1.61)$$

$$X^i|_{\tau=0}|B_X\rangle = y^i \quad i = p+1, \dots, d-1. \quad (1.62)$$

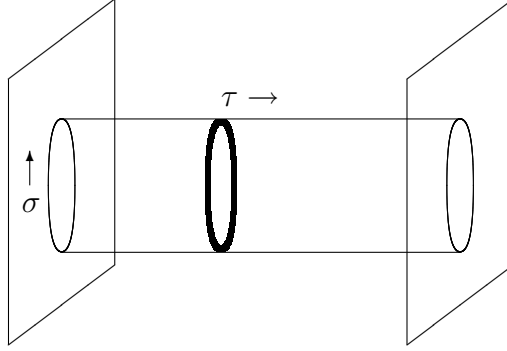


Figura 1.9: Canal de cuerda cerrada

Las condiciones (1.61), (1.62) también pueden ser escritas en términos de las coordenadas complejas  $z$ ,  $\bar{z}$  como

$$(z\partial + \bar{z}\bar{\partial})X^\alpha|_{z=\bar{z}^{-1}}|B_X\rangle = 0 \quad \alpha = 0, 1, \dots, p, \quad (1.63)$$

$$X^i|_{z=\bar{z}^{-1}}|B_X\rangle = y^i|B_X\rangle \quad i = p+1, \dots, d-1. \quad (1.64)$$

Expresando las condiciones iniciales (1.63), (1.64) para el estado de borde en términos de los modos de Laurent, se obtiene

$$(\alpha_n^\mu + S^\mu{}_\nu \tilde{\alpha}_{-n}^\nu)|B_X\rangle = 0 \quad \forall n \neq 0, \quad (1.65)$$

$$\hat{p}^\alpha|B_X\rangle = 0, \quad (\hat{x}^i - y^i)|B_X\rangle = 0, \quad (1.66)$$

con

$$S^{\mu\nu} \equiv (\eta^{\alpha\beta}, -\delta^{ij}). \quad (1.67)$$

El estado que satisface las condiciones anteriores es el siguiente

$$|B_X\rangle = N_p \delta^{(d-1-p)}(\hat{x}^i - y^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n} \alpha_{-n} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-n}} \right) |0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p=0\rangle, \quad (1.68)$$

donde  $N_p$  es una constante de normalización.

El estado de borde (1.68) describe únicamente los grados de libertad correspondientes a las coordenadas  $X^\mu$ . Al usar la cuantización covariante estamos tomando en cuenta más grados de libertad de los que realmente tenemos. Para eliminar la redundancia en la teoría, debemos introducir la contribución de los fantasmas  $b$ ,  $\tilde{b}$ ,

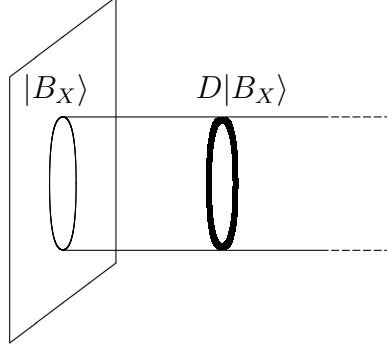


Figura 1.10: Cuerda cerrada emitida por una D-brana

$c, \tilde{c}$  (que resulta de fijar la norma plana  $g_{ab} = \eta_{ab}$  en la integral de trayectoria) para completar el estado de borde. De esta manera obtenemos el estado de borde completo

$$|B\rangle = |B_X\rangle |B_{fant}\rangle \quad (1.69)$$

Más tarde incluiremos la contribución explícita de los fantasmas para el estado de borde.

Las condiciones para el estado de borde conjugado pueden ser fácilmente obtenidas tomando el adjunto de las condiciones (1.65) y (1.66). Así obtenemos

$$\langle B_X | (\alpha_{-n}^\mu + S^\mu{}_\nu \tilde{\alpha}_n^\nu) = 0 \quad ; \quad \langle B_X | \hat{p}^\alpha = 0 \quad ; \quad \langle B_X | (\hat{x}^j - y^j) = 0 \quad , \quad (1.70)$$

que implican

$$\langle B_X | = \langle p = 0 | \langle 0 |_\alpha \langle 0 |_{\tilde{\alpha}} N_p \delta^{(d-1-p)}(\hat{x}^i - y^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n} \alpha_n S \cdot \tilde{\alpha}_n} \right) . \quad (1.71)$$

Siguiendo a DiVecchia y colaboradores[3], a continuación calcularemos la interacción entre dos D-branas paralelas, la primera situada en el origen y la segunda con coordenadas  $y^i$ , en el canal de cuerda abierta (fig. 1.8) y en el canal de cuerda cerrada (fig. 1.9). Comparando ambos resultados determinaremos el factor de normalización  $N_p$  que aparece en la expresión (1.68) para el estado de borde.

Empezaremos por calcular la interacción en el canal de cuerda cerrada. Por simplicidad llevaremos a cabo este cálculo considerando únicamente la parte del estado de borde correspondiente a las coordenadas y al final agregaremos la contribución de los fantasmas. Con esta simplificación la amplitud es la siguiente

$$F = \langle B_X | D | B_X \rangle , \quad (1.72)$$

donde  $D$  es el propagador de la cuerda bosónica libre

$$D = \frac{\alpha'}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} z^{L_0-1} \bar{z}^{\tilde{L}_0-1} , \quad (1.73)$$

con  $L_0$  y  $\tilde{L}_0$  los operadores de Virasoro para la cuerda cerrada dados por (1.30). Sustituyendo (1.68), (1.71) y (1.73) en la ecuación (1.72) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle B_X | D | B_X \rangle &= (N_p)^2 \frac{\alpha'}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} \langle 0 |_\alpha \langle 0 |_{\tilde{\alpha}} \langle p = 0 | \prod_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{n} \alpha_n \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_n} \right) \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}^i) \\ &\quad z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0} \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}^i - y^i) \prod_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{n} \alpha_{-n} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-n}} \right) |0\rangle_\alpha |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p = 0\rangle , \end{aligned} \quad (1.74)$$

donde  $|y|$  es la distancia entre las dos D-branas. El elemento de matriz en la expresión previa puede ser factorizado en dos partes conteniendo respectivamente a los modos cero y a los modos no cero. La contribución de los modos cero esta dada por

$$\begin{aligned} &\langle p = 0 | \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}_i) | z | \frac{\alpha'}{2} \hat{p}^2 \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}_i - y_i) | p = 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^{d-p-1} k_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} \int \frac{d^{d-p-1} k'_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} \langle p = 0 | e^{i k_\perp \cdot \hat{x}} | z | \frac{\alpha'}{2} \hat{p}^2 e^{i k'_\perp \cdot (\hat{x} - y)} | p = 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^{d-p-1} k_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} \int \frac{d^{d-p-1} k'_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} | z | \frac{\alpha'}{2} k_\perp^2 e^{-i k'_\perp \cdot y} \langle p_\perp = -k_\perp | p_\perp = k'_\perp \rangle \langle p_\perp = 0 | p_\perp = 0 \rangle \\ &= V_{p+1} \int \frac{d^{d-p-1} k_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} | z | \frac{\alpha'}{2} k_\perp^2 e^{i k_\perp \cdot y} , \end{aligned} \quad (1.75)$$

donde hemos usado la siguiente normalización para cada componente del momento

$$\langle k | k' \rangle = 2\pi \delta(k - k') , \quad (1.76)$$

con

$$(2\pi)^q \delta^q(0) \equiv V_q . \quad (1.77)$$

Llevando a cabo la integral gaussiana, (1.75) se transforma en

$$V_{p+1} e^{-y^2/(2\pi\alpha't)} (2\pi^2 t \alpha')^{\frac{d-1-p}{2}} , \quad |z| = e^{-\pi t} . \quad (1.78)$$

La contribución de los modos no cero está dada por

$${}_{\alpha}\langle 0|\tilde{\alpha}\langle 0| \prod_{m=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{m}\alpha_m \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_m} \right) z^N \bar{z}^{\tilde{N}} \prod_{n=1}^{\infty} \left( e^{-\frac{1}{n}\alpha_{-n} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-n}} \right) |0\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\tilde{\alpha}} \quad (1.79)$$

$$= {}_{\alpha}\langle 0|\tilde{\alpha}\langle 0| \prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{m}\alpha_m \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_m} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\alpha_{-n} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} |z|^{2n}} |0\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\tilde{\alpha}} , \quad (1.80)$$

donde

$$N \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad ; \quad \tilde{N} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n , \quad (1.81)$$

y hemos usado las siguientes relaciones:

$$z^N e^{\alpha_{-n} z^{-N}} = e^{\alpha_{-n} z^n} \quad \bar{z}^{\tilde{N}} e^{\alpha_{-n} \bar{z}^{-\tilde{N}}} = e^{\alpha_{-n} \bar{z}^{\tilde{n}}} \quad \forall n \neq 0 . \quad (1.82)$$

Evaluando las contracciones entre los osciladores en la ecuación (1.80) obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - |z|^{2n}} \right)^{d-2} , \quad (1.83)$$

donde hemos modificado el exponente  $d \rightarrow d - 2$  para incorporar la contribución de los fantasmas, que cancela la contribución de 2 de los campos  $X^{\mu}$  para terminar solo con los  $d - 2$  grados de libertad físicos.

Juntando los resultados (1.74), (1.78), (1.83) y llevando a cabo el siguiente cambio de variable

$$|z| = e^{-\pi t} \quad , \quad d^2 z = -2\pi e^{-2\pi t} dt d\phi , \quad (1.84)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \langle B_X | D | B_X \rangle &= (N_p)^2 V_{p+1} \frac{\alpha' \pi}{2} \int_0^{\infty} dt (2\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{d-p-1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi \alpha' t}} e^{2\pi t} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi t n}} \right)^{d-2} \\ &= (N_p)^2 V_{p+1} \frac{\alpha' \pi}{2} (2\pi^2 \alpha')^{-\frac{d-p-1}{2}} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{d-p-1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi \alpha' t}} [f_1(e^{-\pi t})]^{-24} \end{aligned} \quad (1.85)$$

donde hemos introducido la función

$$f_1(q) \equiv q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) . \quad (1.86)$$

A continuación procedemos a repetir el cálculo de la interacción entre las dos D-branas, ahora en el canal de cuerda abierta. La amplitud a un lazo está dada por

$$F = -\frac{1}{2} \text{Tr} \log [L_0 - 1] = \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \text{Tr} [e^{-2\pi(L_0-1)\tau}] , \quad (1.87)$$

donde

$$L_0 = \alpha' k_{\parallel}^2 + \frac{y_{\perp}^2}{(2\pi)^2 \alpha'} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n . \quad (1.88)$$

En esta ecuación  $y_{\perp}$  representa la separación entre las dos D-branas y  $k_{\parallel}$  el momento longitudinal. Calculando la traza sobre los estados obtenemos

$$\begin{aligned} F &= 2 \frac{V_{p+1}}{2} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{2\pi\tau} e^{-2\pi\tau\alpha'k_{\parallel}^2} e^{-\frac{y_{\perp}^2\tau}{2\pi\alpha'}} e^{2\pi\tau} \text{Tr} \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\tau\alpha_{-n}\cdot\alpha_n} \right) \\ &= V_{p+1} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} (8\pi^2\alpha'\tau)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y_{\perp}^2\tau}{2\pi\alpha'}} \text{Tr} \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\tau\alpha_{-n}\cdot\alpha_n} \right) , \end{aligned} \quad (1.89)$$

donde hemos llevado a cabo la integral gaussiana del momento longitudinal circulando en un bucle. Evaluando la traza sobre los osciladores,

$$\text{Tr} \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi\tau\alpha_{-n}\cdot\alpha_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi\tau n}} \right)^{d-2} , \quad (1.90)$$

donde también hemos modificado  $d \rightarrow d-2$  para tomar en cuenta la contribución de los fantasmas  $b$  y  $c$ . Finalmente, escribiendo  $F$  en términos de la función  $f_1$  definida en (1.86)

$$\begin{aligned} F &= V_{p+1} (8\pi^2\alpha')^{-\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y_{\perp}^2\tau}{2\pi\alpha'}} (f_1(e^{-\pi\tau}))^{-24} \\ &= V_{p+1} (8\pi^2\alpha')^{-\frac{p+1}{2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{12-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y_{\perp}^2\tau}{2\pi\alpha'}} (f_1(e^{-\frac{\pi}{\tau}}))^{-24} , \end{aligned} \quad (1.91)$$

donde hemos tomado  $d = 26$  y hemos usado las propiedades de transformación modular de la función  $f_1$

$$f_1(e^{-\frac{\pi}{t}}) = \sqrt{t} f_1(e^{-\pi t}) . \quad (1.92)$$

Para comparar los resultados (1.85) y (1.91) debemos llevar a cabo el cambio de variable  $t = \frac{1}{\tau}$ . Entonces

$$\langle B_X | D | B_X \rangle = (N_p)^2 V_{p+1} \frac{\alpha'\pi}{2} (2\pi^2\alpha')^{-\frac{d-p-1}{2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \tau^{12-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y_{\perp}^2\tau}{2\pi\alpha'}} [f_1(e^{-\frac{\pi}{\tau}})]^{-24} . \quad (1.93)$$

Comparando las dos ecuaciones podemos determinar la constante de normalización

$$N_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{d-6}{4}}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-2-p} . \quad (1.94)$$

Sustituyendo (1.94) en (1.68), el estado de borde queda determinado como

$$|B_X\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{d-6}{4}}} (2\pi\sqrt{\alpha'})^{\frac{d}{2}-2-p} \delta^{(d-1-p)}(\hat{x}^i - y^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\alpha_{-n} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-n}} \right) |0\rangle_{\alpha} |0\rangle_{\tilde{\alpha}} |p=0\rangle . \quad (1.95)$$

### 1.2.1. Valores esperados usando el estado de borde

El estado de borde que hemos encontrado en la sección anterior codifica la manera en que una cuerda cerrada puede ser emitida por una D-brana. Para obtener este resultado hemos calculado la energía de interacción entre dos D-branas en el canal de cuerda abierta y en el canal de cuerda cerrada. Dado que el estado de borde es una superposición coherente de estados de cuerda cerrada, podemos obtener información acerca de como la D-brana afecta sus alrededores. Esto se puede hacer en general calculando el siguiente valor esperado

$$\langle P_x | D | B_X \rangle, \quad (1.96)$$

donde  $\langle P_x |$  es el proyector del estado que nos interesa examinar, por ejemplo, un gravitón o el campo antisimétrico  $B_{\mu\nu}$ . Podemos empezar calculando la expresión general para los campos no masivos, usando (1.73) y (1.95)

$$J^{\mu\nu} \equiv \langle \tilde{0} | \langle 0 | \alpha_1^\mu \tilde{\alpha}_1^\nu D | B_X \rangle = -\frac{T_p}{2k_\perp^2} V_{p+1} S^{\mu\nu} . \quad (1.97)$$

En la ecuación anterior no hemos especificado la polarización del estado. La polarización de los diferentes campos la podemos escribir como

$$\delta\phi = \frac{1}{\sqrt{d-2}} (\eta^{\mu\nu} - k^\mu l^\nu - k^\nu l^\mu) J^{\mu\nu} = \frac{d-2p-4}{2\sqrt{2}(d-2)} \mu_p \frac{V_{p+1}}{k_\perp^2} \quad (1.98)$$

para el dilatón,

$$\delta h_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2} \left( J_{\mu\nu} + J_{\nu\mu} - \frac{\delta\phi}{\sqrt{d-2}} \eta_{\mu\nu} \right) \quad (1.99)$$

$$= \sqrt{2}\mu_p \frac{V_{p+1}}{k_{\perp}^2} \text{diag}(-A, A, \dots, B, \dots, B) , \quad (1.100)$$

para el gravitón, donde  $A$  y  $B$  están dadas por

$$A = -\frac{d-p-3}{2(d-2)} , \quad B = \frac{p+1}{2(d-2)} , \quad (1.101)$$

y

$$\delta B_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_{\mu\nu} - J_{\nu\mu}) \quad (1.102)$$

para el tensor antisimétrico. En la ecuación (1.99) hemos optado por restar la parte de la traza para pasar de la métrica en el marco de cuerdas a la métrica en el marco de Einstein. Expresando los campos anteriores en el espacio de configuración usando la transformada de Fourier y reescalando los campos para que estén normalizados canónicamente (ver A.1) de acuerdo a

$$\varphi = \sqrt{2}\kappa\phi \quad , \quad \tilde{h}_{\mu\nu} = 2\kappa h_{\mu\nu} \quad , \quad (1.103)$$

obtenemos el siguiente comportamiento a distancias grandes

$$\delta\varphi(r) = \frac{d-2p-4}{2\sqrt{2}(d-2)} \frac{Q_p}{r^{d-p-3}} \quad (1.104)$$

para el dilatón, y

$$\delta\tilde{h}_{\mu\nu}(r) = 2\frac{Q_p}{r^{d-p-3}} \text{diag}(-A, \dots, A, B, \dots, B) , \quad (1.105)$$

para el gravitón. Donde

$$Q_p = \mu_p \frac{\sqrt{2}\kappa}{(d-p-3)\Omega_{d-p-2}} \quad , \quad \mu_p \equiv \sqrt{2}T_p \quad (1.106)$$

con

$$\Omega_q \equiv \frac{2\pi^{\frac{q+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} . \quad (1.107)$$



### 1.2.2. Fondo de gravedad

Para la descripción en la que partimos de un fondo curvo, tenemos que la métrica está dada en el marco de Einstein por

$$ds^2 = [H(r)]^{2A} (\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta) + [H(r)]^{2B} (\delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (1.108)$$

b con  $A, B$  dadas por (1.101) y  $H(r)$  dada por

$$H(r) = 1 + \frac{Q_p}{r^{d-3-p}}, \quad (1.109)$$

donde hemos usado la definición (1.106) para  $Q_p$ .

Para el límite en el que  $r \rightarrow \infty$

$$[H(r)]^{2A} \approx 1 + 2A \frac{Q_p}{r^{d-p-3}}, \quad (1.110)$$

$$[H(r)]^{2B} \approx 1 + 2B \frac{Q_p}{r^{d-p-3}}. \quad (1.111)$$

De las ecuaciones anteriores podemos leer inmediatamente que la primera corrección a la métrica es

$$\delta h_{\mu\nu}(r) = 2 \frac{Q_p}{r^{d-p-3}} \text{diag}(-A, \dots, A, B, \dots, B), \quad (1.112)$$

que es exactamente el resultado (1.105) que se obtuvo al hacer el cálculo usando el formalismo de estado de borde.

# Capítulo 2

## Teoría de cuerdas enrolladas

Al estudiar el surgimiento de la no conmutatividad en la teoría de cuerdas [6] se logró descubrir la Teoría de Cuerdas Abiertas No Conmutativa [7, 17], conocida como NCOS, por sus siglas en inglés. La teoría NCOS se obtiene considerando una D-brana (o un arreglo de ellas) con un campo de norma  $B_{01}$  en un límite de bajas energías, donde el campo  $B_{01}$  se aproxima al valor crítico. Al momento de tomar el límite de la teoría NCOS, las cuerdas sobre la D-brana se desacoplan de las cuerdas cerradas fuera de ella. Es por esto que inicialmente se pensó que esta teoría solo contenía cuerdas abiertas, sin embargo, poco después se descubrió que NCOS era un caso particular de una teoría más general. Cuando la dirección en la que apunta el campo de norma se compactifica en un círculo de radio  $R$ , la teoría contiene cuerdas cerradas con enrollamiento estrictamente positivo [16]. A esta nueva teoría se le denominó Teoría de Cuerdas Enrolladas (WST por sus siglas en inglés) o Teoría de Cuerdas No Relativistas, debido a que, como veremos más adelante, contiene estados con espectros no relativistas. Más tarde, se descubrió que la Teoría de Cuerdas Enrolladas además de ser una teoría completa con cuerdas abiertas y cerradas también se puede definir sin la presencia de D-branas [1, 2].

Para obtener la teoría de cuerdas enrolladas comenzamos con una de las teorías de cuerdas convencionales, separamos una de las direcciones espaciales (tomaremos  $X^1$ ) compactificándola en un círculo de radio  $R$ , considerando el límite en el cual la constante de acoplamiento, la longitud de cuerdas y la métrica escalan como

$$g_s = \frac{G_s}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty, \quad l_s = L_s \sqrt{\delta} \rightarrow 0, \quad g_{\mu\nu} = (-1, 1, \delta, \delta, \dots), \quad \text{con } G_s, L_s, R \text{ constantes.} \quad (2.1)$$

El resultado es una teoría de cuerdas caracterizada por el hecho de que todos los objetos deben portar enrollamiento de cuerda fundamental a lo largo de la dirección

longitudinal. Los parámetros  $G_s$  y  $L_s$  son la constante de acoplamiento y la longitud de cuerdas de la nueva teoría. La teoría definida en ausencia de D-branas solo contiene cuerdas cerradas con enrollamiento positivo. Cuando hay D-branas presentes debemos tener un campo de norma  $B_{01}$  con un valor cercano al crítico para cumplir con el requisito de que  $w > 0$ .

Aunque hemos dicho que en la teoría de cuerdas enrolladas se debe cumplir que  $w > 0$ , existen excepciones a esta regla. Las cuerdas con  $w = 0$  pueden sobrevivir el límite (2.1) solamente si portan momento transversal nulo y tienen número de oscilador cero, el gravitón se encuentra dentro de estos estados excepcionales. Éstos pueden ser ignorados como estados asintóticos ya que forman un conjunto de medida cero, sin embargo, actúan como mediadores de las interacciones de larga distancia de tipo newtoniano. El reescalamiento de la métrica hace que la velocidad de la luz en la parte transversal se vuelva infinita, de tal manera que la interacciones se transmiten de manera instantánea. Por ende, la Teoría de Cuerdas Enrolladas contiene lo que podríamos llamar “gravitones newtonianos”.

En las siguientes secciones obtendremos el espectro de la teoría de cuerdas enrolladas. Veremos como es necesario imponer la condición de enrollamiento positivo y obtendremos los espectros de tipo relativista. Para obtener el espectro tomaremos dos enfoques, el primero es llevar a cabo los cálculos en la teoría madre y luego tomar el límite (2.1). El segundo enfoque [2] es tomar primero el límite (2.1) para obtener una nueva acción que defina la Teoría de Cuerdas Enrolladas sin hacer referencia al límite. Ambas perspectivas resultan útiles y se pueden usar para realizar cálculos.

## 2.1. Espectro a partir del límite

Para obtener el espectro de la teoría de cuerdas enrolladas tomando como punto de partida a la teoría madre, comenzamos con la acción de Polyakov con un campo antisimétrico  $B_{01}$  de fondo

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{d^2z}{2\pi l_s^2} (g_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \\ &= \int \frac{d^2z}{2\pi l_s^2} [(g_{ab} - B\epsilon_{ab}) \partial X^a \bar{\partial} X^b + g_{ij} \partial X^i \bar{\partial} X^j], \end{aligned} \quad (2.2)$$

con  $a, b = 0, 1$ ;  $i, j = 2, \dots, d - 1$ . Separando los dos sectores de la acción (2.2) y usando (2.1)

$$S_{\parallel} = \frac{1}{2\pi l_s^2} \int d^2z [-\partial X^0 \bar{\partial} X^0 + \partial X^1 \bar{\partial} X^1 + B(\partial X^0 \bar{\partial} X^1 - \partial X^1 \bar{\partial} X^0)] , \quad (2.3)$$

$$S_{\perp} = \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z \partial X^i \bar{\partial} X^i . \quad (2.4)$$

La ecuación de movimiento que se obtiene al variar la acción (2.2) es

$$\partial \bar{\partial} X^\mu = 0 , \quad (2.5)$$

y las condiciones de frontera para los diferentes tipos de cuerdas son:

- Cuerdas cerradas (periodicidad)

$$X^0(e^{2i\pi} z, e^{-2i\pi} \bar{z}) = X^0(z, \bar{z}) , \quad (2.6)$$

$$X^1(e^{2i\pi} z, e^{-2i\pi} \bar{z}) = X^1(z, \bar{z}) + 2\pi w R , \quad (2.7)$$

$$X^i(e^{2i\pi} z, e^{-2i\pi} \bar{z}) = X^i(z, \bar{z}) , \quad i = 2, \dots, d - 1 . \quad (2.8)$$

donde la coordenada  $X^1$  se encuentra compactificada en un círculo de radio  $R$  y  $w$  es el enrollamiento de la cuerda.

- Cuerdas abiertas

$$\delta X^0 [(\partial - \bar{\partial})X^0 + B(\partial + \bar{\partial})X^1] \Big|_{z=\bar{z}} = 0 , \quad (2.9)$$

$$\delta X^1 [(\partial - \bar{\partial})X^1 + B(\partial + \bar{\partial})X^0] \Big|_{z=\bar{z}} = 0 , \quad (2.10)$$

$$\delta X^i [(\partial - \bar{\partial})X^i] \Big|_{z=\bar{z}} = 0 , \quad i = 2, \dots, d - 1 . \quad (2.11)$$

De la acción (2.3) también determinamos los momentos canónicos conjugados

$$\Pi_0 \equiv i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^0} = \frac{i}{2\pi l_s^2} [-z \partial X^0 - \bar{z} \bar{\partial} X^0 - Bz \partial X^1 + B\bar{z} \bar{\partial} X^1] , \quad (2.12)$$

$$\Pi_1 \equiv i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^1} = \frac{i}{2\pi l_s^2} [z \partial X^1 + \bar{z} \bar{\partial} X^1 + Bz \partial X^0 - B\bar{z} \bar{\partial} X^0] . \quad (2.13)$$

El tensor de energía momento tiene la forma usual

$$T^{\parallel}(z) = -\frac{1}{l_s^2} : -\partial X^0 \partial X^0 + \partial X^1 \partial X^1 : , \quad (2.14)$$

$$\tilde{T}^{\parallel}(\bar{z}) = -\frac{1}{l_s^2} : -\bar{\partial} X^0 \bar{\partial} X^0 + \bar{\partial} X^1 \bar{\partial} X^1 : , \quad (2.15)$$

$$T^{\perp}(z) = -\frac{1}{L_s^2} : \partial X^i \partial X^i : , \quad (2.16)$$

$$\tilde{T}^{\perp}(\bar{z}) = -\frac{1}{L_s^2} : \bar{\partial} X^i \bar{\partial} X^i : . \quad (2.17)$$

### 2.1.1. Espectro de cuerdas cerradas

Usando la ecuación de movimiento (2.5) y las condiciones de frontera (2.6), (2.7), (2.8), tenemos que la expansión en modos de Laurent para una cuerda cerrada está dada por

$$X^0 = x^0 - \frac{i l_s^2}{2} \left( p^0 - \frac{BwR}{l_s^2} \right) \log |z|^2 + \frac{i l_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_m^0 z^{-m} + \tilde{\alpha}_m^0 \bar{z}^{-m}) , \quad (2.18)$$

$$X^1 = x^1 - \frac{i l_s^2}{2} \left( p^1 - \frac{wR}{l_s^2} \right) \log |z|^2 + iwR \log \bar{z} \\ + \frac{i l_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_m^1 z^{-m} + \tilde{\alpha}_m^1 \bar{z}^{-m}) , \quad (2.19)$$

$$X^i = x^i - \frac{i L_s^2}{2} p^i \log |z|^2 + \frac{i L_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_m^j z^{-m} + \tilde{\alpha}_m^j \bar{z}^{-m}) . \quad (2.20)$$

Para el modo cero del tensor de energía momento

$$L_0^{\parallel} = -\frac{l_s^2}{4} \left( p^0 - \frac{BwR}{l_s^2} \right)^2 + \frac{l_s^2}{4} \left( p^1 + \frac{wR}{l_s^2} \right)^2 + N_{\parallel} , \quad (2.21)$$

$$\tilde{L}_0^{\parallel} = -\frac{l_s^2}{4} \left( p^0 - \frac{BwR}{l_s^2} \right)^2 + \frac{l_s^2}{4} \left( p^1 - \frac{wR}{l_s^2} \right)^2 + \tilde{N}_{\parallel} , \quad (2.22)$$

$$L_0^{\perp} = \frac{L_s^2}{4} p_{\perp}^2 + N_{\perp} , \quad (2.23)$$

$$\tilde{L}_0^{\perp} = \frac{L_s^2}{4} p_{\perp}^2 + \tilde{N}_{\perp} . \quad (2.24)$$

Usando la condición de empataamiento de niveles  $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$  se tiene

$$wRp^1 + N_{||} + N_{\perp} - \tilde{N}_{||} - \tilde{N}_{\perp} = 0 , \quad (2.25)$$

y con la condición de estado físico, obtenemos que

$$p_0 = -\frac{BwR}{l_s^2} + \sqrt{(p^1)^2 + \frac{1}{l_s^2} \left( 2p^1wR + \frac{w^2R^2}{l_s^2} + L_s^2 p_{\perp}^2 + 4N \right)} . \quad (2.26)$$

En el límite consideraremos

$$B \equiv 1 + \mu\delta , \quad (2.27)$$

donde  $\mu$  es, por el momento, un parámetro arbitrario. Para que la energía de la cuerda permanezca finita en el límite (2.1) cuando  $\delta \rightarrow 0$ , es necesario que el enrollamiento sea estrictamente positivo, de tal manera que

$$p_0 = \frac{\mu w R}{L_s^2} + \frac{L_s^2}{2wR} p_{\perp}^2 + \frac{N + \tilde{N}}{wR} . \quad (2.28)$$

En la expresión anterior podemos ver claramente la aparición del espectro de tipo no relativista, que es de donde la teoría toma uno de sus nombres. Para el caso en el que  $w = 0$

$$p_0 = \sqrt{(p^1)^2 + \frac{1}{l_s^2} \left[ L_s^2 p_{\perp}^2 + 2(N + \tilde{N}) \right]} , \quad (2.29)$$

para que en el límite (2.1) los estados con  $w = 0$  tengan energía finita se tiene que cumplir la condición

$$p_{\perp}^2 = N = \tilde{N} = 0 . \quad (2.30)$$

Esto quiere decir que las cuerdas con  $w = 0$  solo están presentes en el nivel de oscilador  $N = \tilde{N} = 0$ . Dentro de estos estados se encuentran los gravitones, cuya naturaleza es no relativista, ya que la interacción debido a ellos se transmite de manera instantánea.

### 2.1.2. Espectro de cuerdas abiertas

Partiendo de las condiciones de las condiciones de frontera para la cuerda abierta (2.9), (2.10), (2.11), podemos imponer dos tipos de condiciones para las coordenadas  $X^1, X^2$ . El primer tipo de condiciones son los correspondientes a una D-brana longitudinal, esto es, el extremo de la cuerda se puede mover a lo largo de la coordenada la coordenada  $X^1$ . Para el segundo tipo de condiciones obtenemos una D-brana transversal, donde los extremos de la cuerda están fijos en la dirección  $X^1$ .

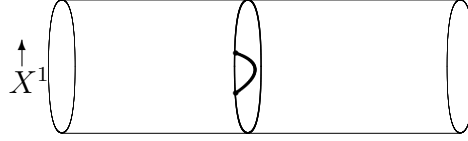


Figura 2.1: D-brana longitudinal

### D-brana longitudinal

Las condiciones de frontera para una D-brana longitudinal son

$$[(\partial - \bar{\partial})X^0 + B(\partial + \bar{\partial})X^1] |_{z=\bar{z}} = 0, \quad (2.31)$$

$$[(\partial - \bar{\partial})X^1 + B(\partial + \bar{\partial})X^0] |_{z=\bar{z}} = 0, \quad (2.32)$$

$$(\partial - \bar{\partial})X^i |_{z=\bar{z}} = 0 \quad i = 2, \dots, p, \quad (2.33)$$

$$\delta X^i |_{z=\bar{z}} = 0 \quad i = p + 1, \dots, d - 1. \quad (2.34)$$

Nótese que las condiciones anteriores no fijan el valor de  $X^1$  en los extremos de la cuerda.

Para simplificar los cálculos es conveniente expresar las condiciones de frontera en términos de las coordenadas del cono de luz

$$X^+ \equiv +X^0 + X^1, \quad X^- \equiv -X^0 + X^1. \quad (2.35)$$

Al hacer este cambio de coordenadas (2.31) y (2.32) se transforman en

$$[(\partial - \bar{\partial})X^+ + B(\partial + \bar{\partial})X^+] |_{z=\bar{z}} = 0, \quad (2.36)$$

$$[(\bar{\partial} - \partial)X^- + B(\partial + \bar{\partial})X^-] |_{z=\bar{z}} = 0, \quad (2.37)$$

de donde obtenemos los desarrollos en modos

$$X^+ = x^+ - \frac{2il_s^2 p_-}{1+B} \log z - \frac{2il_s^2 p_-}{1-B} \log \bar{z} + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^+}{m} \left[ z^{-m} + \frac{1+B}{1-B} \bar{z}^{-m} \right], \quad (2.38)$$

$$X^- = x^- - \frac{2il_s^2 p_+}{1-B} \log z - \frac{2il_s^2 p_+}{1+B} \log \bar{z} + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^-}{m} \left[ z^{-m} + \frac{1-B}{1+B} \bar{z}^{-m} \right]. \quad (2.39)$$

En términos de las coordenadas del cono de luz tenemos para los modos de Virasoro

$$L_m^{\parallel} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+1} T^{\parallel}(z) = -\frac{1}{2\pi il_s^2} \oint dz z^{m+1} : \partial X^- \partial X^+ : . \quad (2.40)$$

Usando la expresión anterior y los desarrollos en modos tenemos

$$L_0^{\parallel} = \frac{4}{1-B^2} p_+ p_- + N_{\parallel}, \quad (2.41)$$

y para la parte transversal

$$L_0^{\perp} = L_s^2 p_{\perp}^2 + N_{\perp}. \quad (2.42)$$

Imponiendo la condición de estado físico  $L_0 = 0$ , obtenemos

$$\frac{4l_s^2}{1-B^2} p_+ p_- + L_s^2 p_{\perp}^2 + N_{\parallel} + N_{\perp} = 0. \quad (2.43)$$

Expresando la expresión anterior en términos de  $p_0$  y  $p_1$  obtenemos el espectro para la cuerda abierta longitudinal

$$p_0 = \sqrt{p_1^2 + \frac{1-B^2}{l_s^2} (L_s^2 p_{\perp}^2 + N_{\parallel} + N_{\perp})}. \quad (2.44)$$

Tomando el límite (2.1) con  $B = 1 + \mu\delta$

$$p_0 = \sqrt{p_1^2 + 2\mu p_{\perp}^2 + \frac{2\mu}{L_s^2} (N_{\parallel} + N_{\perp})}. \quad (2.45)$$



Hay que enfatizar que el espectro anterior es de tipo relativista aún en el límite (2.1), esto muestra que no todas las cuerdas en la teoría son no relativistas, por ésta razón el nombre de “teoría de cuerdas no relativistas” resulta un tanto engañoso. Notemos además que para la D-brana longitudinal no hay ninguna condición sobre el enrollamiento de la cuerda, justamente porque los extremos de la cuerda se pueden mover libremente por la coordenada  $X^1$ . Este hecho jugará un papel importante más adelante, ya que una cuerda cerrada que sea absorbida o emitida por una D-brana longitudinal podrá tener cualquier enrollamiento.

### D-brana transversal

A continuación vamos a obtener el espectro de las cuerdas en una D-brana transversal, es decir, que no está extendida en la dirección 1. La D-brana transversal está descrita por las condiciones de frontera siguientes

$$(\partial - \bar{\partial})X^0|_{z=\bar{z}} = 0 \quad , \quad \delta X^1|_{z=\bar{z}} = 0 \quad , \quad (2.46)$$

$$(\partial - \bar{\partial})X^i|_{z=\bar{z}} = 0 \quad i = 2, \dots, p+1 \quad , \quad (2.47)$$

$$\delta X^i|_{z=\bar{z}} = 0 \quad i = p+2, \dots, d-1 \quad . \quad (2.48)$$

Las soluciones a la ecuación de movimiento junto con las condiciones de frontera para una D-brana en el origen son

$$X^0(z, \bar{z}) = x^0 - il_s^2 \left( p^0 - \frac{wRB}{l_s^2} \right) \log |z|^2 + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^0}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \quad , \quad (2.49)$$

$$X^1(z, \bar{z}) = x^1 - iwR \log \frac{z}{\bar{z}} + \frac{il_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^0}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \quad , \quad (2.50)$$

$$X^i = x^i - iL_s^2 p^i \log |z|^2 + \frac{iL_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^i}{m} (z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \quad , \quad i = 2, \dots, p+1 \quad , \quad (2.51)$$

$$X^i = \frac{iL_s}{\sqrt{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^i}{m} (z^{-m} - \bar{z}^{-m}) \quad , \quad i = p+2, \dots, d-1 \quad . \quad (2.52)$$

De las expresiones (2.15), (2.17) para el tensor de energía momento tenemos que

$$L_0 = -l_s^2 p_0^2 - 2p_0 wRB - \frac{w^2 R^2 B^2}{l_s^2} + \frac{w^2 R^2}{l_s^2} + L_s^2 p_1^2 + N \quad . \quad (2.53)$$

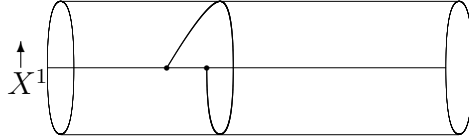


Figura 2.2: D-brana transversal

Usando la condición de estado físico

$$p_0 = -\frac{wRB}{l_s^2} + \sqrt{\frac{w^2 R^2}{l_s^4} + \frac{L_s^2}{l_s^2} p_\perp^2 + \frac{N_\parallel + N_\perp}{l_s^2}}. \quad (2.54)$$

Este espectro es muy parecido al que se obtiene para las cuerdas cerradas y de la misma manera para que  $p_0$  sea finito en el límite (2.1) es necesario imponer la condición de que el enrollamiento sea estrictamente positivo. Imponiendo dicha condición tenemos que

$$p_0 = \frac{\mu w R}{L_s^2} + \frac{L_s^2}{2wR} p_\perp^2 + \frac{N_\parallel + N_\perp}{2wR}. \quad (2.55)$$

En este caso, nuevamente hemos obtenido un espectro de tipo no relativista.

## 2.2. La teoría de cuerdas enrolladas a partir de una nueva acción

Como ya dijimos antes, podemos encontrar una acción para definir la teoría de cuerdas enrolladas sin hacer referencia a ningún límite. Esto se logra tomando el límite (2.1) al nivel de la acción en la teoría madre. Una vez que obtenemos la acción que define la teoría de cuerdas enrolladas, ésta define una teoría de cuerdas completa. Entonces, para hacer cualquier cálculo en la Teoría de Cuerdas Enrolladas partimos de esta nueva acción, con la ventaja de que no hay necesidad de tomar ningún límite. Gomis y Ooguri encontraron en [2] una manera adecuada de tomar el límite (2.1) y obtener una acción finita para la teoría de cuerdas enrolladas, esta nueva acción codifica la física de la teoría y como veremos simplifica los cálculos.

### 2.2.1. La acción de Gomis-Ooguri

A continuación presentaremos el procedimiento usado por Gomis y Ooguri en [2] para encontrar una acción para la teoría de cuerdas enrolladas. Si reescribimos la parte longitudinal de la acción (2.3) en términos de las variables del cono de luz (2.35)

$$\begin{aligned} S_{||} &= \int \frac{d^2 z}{4\pi l_s^2} [(\partial X^+ \bar{\partial} X^- + \partial X^- \bar{\partial} X^+) - B(\partial X^+ \bar{\partial} X^- - \partial X^- \bar{\partial} X^+)] \\ &= \int \frac{d^2 z}{4\pi \delta} [(\partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \partial \tilde{\gamma} \bar{\partial} \gamma) - B(\partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} - \partial \tilde{\gamma} \bar{\partial} \gamma)], \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde hemos definido

$$X^+ \equiv L_s \gamma, \quad X^- \equiv L_s \tilde{\gamma}. \quad (2.57)$$

Como podemos observar, la parte longitudinal de la acción diverge cuando  $\delta \rightarrow 0$ . El procedimiento para implementar el límite (2.1) de manera adecuada consiste en introducir campos auxiliares  $\beta, \tilde{\beta}$  (multiplicadores de Lagrange), de tal forma de que tengamos una acción que antes de tomar el límite es equivalente a la acción original y que cuando  $\delta \rightarrow 0$  no es divergente. Introduciendo multiplicadores de Lagrange  $\beta, \tilde{\beta}$  podemos reescribir la acción (2.56) como

$$S_{||} = \int \frac{d^2 z}{2\pi} \left[ \beta \bar{\partial} \gamma + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} - \frac{2\delta}{1+B} \beta \tilde{\beta} + \frac{1-B}{2\delta} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} \right]. \quad (2.58)$$

La acción escrita en términos de los multiplicadores de Lagrange es equivalente a la acción original. Si obtenemos las ecuaciones de Lagrange para  $\beta$  y  $\tilde{\beta}$

$$\tilde{\beta} = \frac{1+B}{2\delta} \bar{\partial} \gamma, \quad (2.59)$$

$$\beta = \frac{1+B}{2\delta} \partial \tilde{\gamma}. \quad (2.60)$$

Sustituyendo (2.59), (2.60) en (2.58) recuperamos la acción (2.56). Este procedimiento para recuperar la acción original es algo heurístico. Para una explicación más amplia véase [2, 15]. Tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ , con  $B = 1 - \mu\delta$ , obtenemos

$$S_{GO} \equiv \int \frac{d^2 z}{2\pi} \left( \beta \bar{\partial} \gamma + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} + \frac{\mu}{2} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} \right) + \int \frac{d^2 z}{2\pi L_s^2} \partial X^i \bar{\partial} X_i. \quad (2.61)$$

$\mu$  es arbitrario para el caso de cuerdas cerradas o cuerdas abiertas en una D-brana transversal. Pero en el caso de una D-brana longitudinal,  $\mu = \frac{K^2}{2\nu^2 G_s^2}$ , con  $K$  el número de D-branas y  $\nu$  la densidad de cuerdas fundamentales en las D-branas [14].

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen variando la acción (2.61) son

$$\bar{\partial}\gamma = 0 \quad , \quad \partial\tilde{\gamma} = 0 \quad , \quad (2.62)$$

$$\bar{\partial}\beta = 0 \quad , \quad \partial\tilde{\beta} = 0 \quad , \quad (2.63)$$

$$\partial\bar{\partial}X^i = 0 \quad . \quad (2.64)$$

Las condiciones de frontera son

$$\gamma(e^{2i\pi}z) - \gamma(z) = \frac{2\pi w R}{L_s} \quad . \quad (2.65)$$

$$\tilde{\gamma}(e^{-2i\pi}\bar{z}) - \tilde{\gamma}(\bar{z}) = \frac{2\pi w R}{L_s} \quad . \quad (2.66)$$

$$X^i(e^{2i\pi}z, e^{-2i\pi}\bar{z}) = X^i(z, \bar{z}) \quad , \quad (2.67)$$

$$\beta(e^{2i\pi}z) = \beta(z) \quad , \quad (2.68)$$

$$\tilde{\beta}(e^{-2i\pi}\bar{z}) = \tilde{\beta}(\bar{z}) \quad , \quad (2.69)$$

para cuerdas cerradas, y

$$\delta\gamma\left(\beta - \frac{\mu}{2}\bar{\partial}\tilde{\gamma}\right) + \delta\tilde{\gamma}\left(-\tilde{\beta} + \frac{\mu}{2}\partial\gamma\right) = 0 \quad , \quad \text{en } z = \bar{z} \quad , \quad (2.70)$$

$$[\delta X^i(\partial - \bar{\partial})X^i]_{|z=\bar{z}} = 0 \quad , \quad (2.71)$$

para cuerdas abiertas.

El tensor de energía-momento toma la forma

$$T^{\parallel}(z) = - : \beta \partial \gamma : \quad , \quad (2.72)$$

$$\tilde{T}^{\parallel}(\bar{z}) = - : \tilde{\beta} \bar{\partial} \tilde{\gamma} : \quad , \quad (2.73)$$

y los momentos canónicos conjugados a  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  son

$$\Pi_{\gamma} \equiv i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} = L_s \Pi_+ = \frac{i}{2\pi} \left( z\beta + \frac{\mu}{2} \bar{z} \bar{\partial} \tilde{\gamma} \right) \quad , \quad (2.74)$$

$$\Pi_{\tilde{\gamma}} \equiv i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{\gamma}}} = L_s \Pi_- = \frac{i}{2\pi} \left( \bar{z} \tilde{\beta} + \frac{\mu}{2} z \partial \gamma \right) \quad , \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

donde hemos usado las definiciones

$$\Pi_+ \equiv \frac{1}{2} (+\Pi_0 + \Pi_1) \quad (2.77)$$

$$\Pi_- \equiv \frac{1}{2} (-\Pi_0 + \Pi_1) \quad . \quad (2.78)$$

cuyo modo cero es

$$p_+ \equiv \frac{1}{2}(+p_0 + p_1) , \quad (2.79)$$

$$p_- \equiv \frac{1}{2}(-p_0 + p_1) . \quad (2.80)$$

### 2.2.2. Cuerda cerrada

Para una cuerda cerrada el desarrollo en modos que se obtiene es

$$\gamma(z) = +i \frac{wR}{L_s} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n z^{-n} \quad (2.81)$$

$$\tilde{\gamma}(\bar{z}) = -i \frac{wR}{L_s} \ln \bar{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_n \bar{z}^{-n} \quad (2.82)$$

$$\beta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n z^{-n-1} \quad (2.83)$$

$$\tilde{\beta}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\beta}_n \bar{z}^{-n-1} \quad (2.84)$$

$$(2.85)$$

La relaciones de conmutación que satisfacen los operadores son

$$[\gamma_n, \beta_m] = \delta_{m+n}, \quad [\tilde{\gamma}_n, \tilde{\beta}_m] = \delta_{m+n} \quad (2.86)$$

Haciendo la descomposición en modos de Laurent de (2.72) y (2.73) los modos de Virasoro son

$$L_n^{\parallel} = -i \left( \frac{wR}{L_s} \right) \beta_n + \sum_m m : \beta_{n-m} \gamma_m : , \quad (2.87)$$

$$L_n^{\parallel} = +i \left( \frac{wR}{L_s} \right) \tilde{\beta}_n + \sum_m m : \tilde{\beta}_{n-m} \tilde{\gamma}_m : , \quad (2.88)$$

donde en particular

$$L_0^{\parallel} = -i \beta_0 \left( \frac{wR}{L_s} \right) + N_{\parallel} , \quad (2.89)$$

$$\tilde{L}_0^{\parallel} = +i \tilde{\beta}_0 \left( \frac{wR}{L_s} \right) + \tilde{N}_{\parallel} . \quad (2.90)$$

Dado que  $L_0^\perp$  y  $\tilde{L}_0^\perp$  tienen la forma usual tenemos que

$$L_0 = -i\frac{wR}{L_s}\beta_0 + \sum_{n>0} n(\beta_{-n}\gamma_n - \gamma_{-n}\beta_n) + \frac{L_s^2 p_\perp^2}{4} + \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i, \quad (2.91)$$

$$\tilde{L}_0 = i\frac{wR}{L_s}\tilde{\beta}_0 + \sum_{n>0} n(\tilde{\beta}_{-n}\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{-n}\tilde{\beta}_n) + \frac{L_s^2 \tilde{p}_\perp^2}{4} + \sum_{n>0} \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i. \quad (2.92)$$

Usando las expresiones anteriores podemos encontrar que

$$L_s p_+ = \frac{L_s}{2}(+p_0 + p_1) = i\beta_0 + \frac{\mu}{2} \left( \frac{wR}{L_s} \right), \quad (2.93)$$

$$L_s p_- = \frac{L_s}{2}(-p_0 + p_1) = i\tilde{\beta}_0 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{wR}{L_s} \right). \quad (2.94)$$

$$(2.95)$$

Entonces

$$p_0 = \frac{i(\beta_0 - \tilde{\beta}_0)}{L_s} + \mu \left( \frac{wR}{L_s^2} \right), \quad (2.96)$$

$$p_1 = i\frac{\beta_0 + \tilde{\beta}_0}{L_s}. \quad (2.97)$$

De la condición de empataamiento de niveles  $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$  obtenemos

$$N - \tilde{N} = nw, \quad (2.98)$$

que se obtiene de que  $p_1 \equiv \frac{n}{R}$ , debido a que la coordenada  $X^1$  está compactificada en un círculo. Usando el resultado anterior y la condición de estado físico  $L_0 + \tilde{L}_0 = 0$  tenemos

$$p_0 = \mu \frac{wR}{L_s^2} + \frac{L_s^2 p_\perp^2}{2wR} + \frac{N + \tilde{N}}{wR} \quad (2.99)$$

Como era de esperarse, el espectro que encontramos para la cuerda es el mismo que obtuvimos en (2.99) al tomar el límite enrollado (2.1) del espectro en la teoría de cuerdas habitual.

### 2.2.3. D-branas longitudinales

Para una D-brana longitudinal las condiciones de frontera (2.70) son

$$\left( \beta - \frac{\mu}{2} \bar{\partial} \tilde{\gamma} \right) \Big|_{z=\bar{z}} = 0, \quad \left( \tilde{\beta} - \frac{\mu}{2} \partial \gamma \right) \Big|_{z=\bar{z}} = 0. \quad (2.100)$$

Para el caso de la D-brana longitudinal, como se encontró en [14], el valor de  $\mu$  no es arbitrario, sino que debe tomar el valor  $\mu = \frac{K^2}{2\nu^2 G_s^2}$ . Así que, usando las condiciones (2.100), los desarrollos en modos son

$$\beta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n z^{-n-1} \Rightarrow \tilde{\gamma}(\bar{z}) = \frac{2}{\mu} \beta_0 \ln \bar{z} + \tilde{\gamma}_0 - \frac{2}{\mu} \sum_{n \neq 0} \frac{\beta_n}{n} \bar{z}^{-n} \quad (2.101)$$

$$\tilde{\beta}(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\beta}_n \bar{z}^{-n-1} \Rightarrow \gamma(z) = \frac{2}{\mu} \tilde{\beta}_0 \ln z + \gamma_0 - \frac{2}{\mu} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\beta}_n}{n} z^{-n} . \quad (2.102)$$

$$(2.103)$$

En este caso tenemos que el tensor de energía momento toma la forma

$$T^{\parallel}(z) = \frac{2}{\mu} : \beta(z) \tilde{\beta}(\bar{z}) : , \quad (2.104)$$

$$L_n^{\parallel} = \frac{2}{\mu} \sum_l : \beta_l \tilde{\beta}_{n-l} : . \quad (2.105)$$

Los conmutadores diferentes de cero son

$$[\gamma_0, \beta_0] = [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\beta}_0] = 1, \quad [\tilde{\beta}_n, \beta_m] = \frac{\mu}{2} n \delta_{n+m} , \quad (2.106)$$

$$p_+ = \frac{1}{2}(p_0 + p_1) = \frac{i\beta_0}{L_s}, \quad p_- = \frac{1}{2}(-p_0 + p_1) = \frac{i\tilde{\beta}_0}{L_s} , \quad (2.107)$$

$$L_0 = \frac{2}{\mu} L_s^2 p_+ p_- + \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \tilde{\beta}_{-n} + \tilde{\beta}_n \beta_{-n}) + L_s^2 p_{\perp}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \cdot \alpha_n^i \quad (2.108)$$

Usando la condición de estado físico el espectro que se obtiene es

$$p_0 = \sqrt{p_1^2 + 2\mu p_{\perp}^2 + \frac{2\mu}{L_s^2} (N_{\perp} + N_{\parallel})} , \quad (2.109)$$

que es el mismo que ya habíamos obtenido en (2.45).

### 2.2.4. D-branas transversales

Para la D-brana transversal la condición de frontera (2.70) nos permite imponer la condición

$$(\delta\gamma + \delta\tilde{\gamma})|_{z=\bar{z}} = 0, \quad (\beta + \tilde{\beta})|_{z=\bar{z}} = 0 \quad (2.110)$$

o de manera equivalente

$$(\gamma + \tilde{\gamma})|_{z=\bar{z}} = \text{constante}, \quad (\beta + \tilde{\beta})|_{z=\bar{z}} = 0. \quad (2.111)$$

La condición para  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  en (2.111) es simplemente otra manera de escribir  $X^1 = \text{constante}$ . Consideraremos ahora el caso de una cuerda que se encuentra estirada entre dos D-branas, una en  $X^1 = 0$  y la otra en  $X^1 = y^1$ . Al obtener las soluciones debemos tomar en cuenta que la cuerda abierta es orientada, de tal manera que obtendremos distintos sectores de cuerda abierta, dependiendo de la D-brana en la que la cuerda tenga su extremo inicial y final. Por supuesto, las soluciones deben seguir satisfaciendo la condición de enrollamiento positivo. Para la cuerda abierta que comienza en la D-brana en  $X^1 = 0$  y termina en la D-brana en  $X^1 = y^1$  con enrollamiento  $w$

$$\frac{L_s}{2}(\gamma + \tilde{\gamma})|_{z=\bar{z}} = \begin{cases} 0 & z > 0 \\ y^1 + 2\pi R w & z < 0 \end{cases}, \quad (\beta + \tilde{\beta})|_{z=\bar{z}} = 0. \quad (2.112)$$

Esto implica

$$\gamma(z) = -\frac{i}{\pi L_s}(y^1 + 2\pi R w) \log z + \sum_n \gamma_n z^{-n}, \quad (2.113)$$

$$\tilde{\gamma}(\bar{z}) = \frac{i}{\pi L_s}(y^1 + 2\pi R w) \log \bar{z} - \sum_n \gamma_n \bar{z}^{-n}, \quad (2.114)$$

$$\beta(z) = \sum_n \beta_n z^{-n-1}, \quad \tilde{\beta}(\bar{z}) = -\sum_n \beta_n \bar{z}^{-n-1}. \quad (2.115)$$

Igual que en [14] definimos el enrollamiento fraccional  $w' = w + \frac{y^1}{2\pi R}$ . Entonces

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{i}{L_s}\beta_0 - \mu \frac{w'R}{L_s^2} \\ L_0^{\parallel} &= -i\beta_0 \left( \frac{2w'R}{L_s} \right) + N_{\parallel} \end{aligned} \right\} \rightarrow p_0 = \mu \frac{w'R}{L_s^2} + \frac{L_s^2 p_{\perp}^2}{2w'R} + \frac{N_{\parallel} + N_{\perp}}{2w'R} \quad (2.116)$$

Nótese que en particular debemos tener  $w' > 0$  ( $w \geq 0$ ). Dado que  $\mu$  es arbitrario podemos elegir en particular  $\mu = 0$ , entonces

$$L_0^{\parallel} = -p_0 2w'R + N_{\parallel}, \quad (2.117)$$

$$L_0^{\perp} = L_s^2 p_i p^i + \frac{y^2}{(2\pi)^2 L_s^2} + N_{\perp}. \quad (2.118)$$



Para el otro sector, en el que la cuerda abierta comienza en la D-brana en  $X^1 = y^1$  y termina en la D-brana en  $X^1 = 0$  tenemos

$$\frac{L_s}{2}(\gamma + \tilde{\gamma})|_{z=\bar{z}} = \begin{cases} 2\pi R w' & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} , \quad (2.119)$$

$$\gamma(z) = \frac{2\pi R w'}{L_s} + i \frac{2w'R}{L_s} \log z + \sum_n \gamma z^{-n} , \quad (2.120)$$

$$\tilde{\gamma}(\bar{z}) = \frac{2\pi R w'}{L_s} - i \frac{2w'R}{L_s} \log \bar{z} - \sum_n \gamma \bar{z}^{-n} , \quad (2.121)$$

donde ahora la condición de enrollamiento positivo significa  $w' < 0$ . En este caso el signo cambia de tal forma que

$$L_0^{\parallel} = 2p_0 w' R + N_{\parallel} , \quad (2.122)$$

con

$$L_0 = -2p_0 w' R + L_s^2 p_i p^i + \frac{y^2}{(2\pi)^2 L_s^2} + \sum_{n>0} (\beta_{-n} \gamma_n + \gamma_{-n} \beta_n) + \sum_{n>0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i , \quad [\gamma_n, \beta_{-n}] = 1 , \quad (2.123)$$

$$L_0^{\parallel} = -i\beta_0 \left( \frac{2wR}{L_s} \right) + N_{\parallel} , \quad p_0 = i \frac{\beta_0}{L_s} - \mu \left( \frac{wR}{L_s^2} \right) , \quad p_1 = 0 .$$

# Capítulo 3

## Geometría a partir de D-branas en la Teoría de Cuerdas Enrolladas

Como ya hemos afirmado, las D-branas son objetos físicos de la teoría de cuerdas cuya dinámica esta descrita por las cuerdas abiertas cuyos extremos están limitados a moverse sobre de ellas. Dado que las D-branas son objetos masivos, pueden deformar la geometría del espacio-tiempo. En este capítulo calcularemos la deformación que provocan las D-branas de la teoría de cuerdas enrolladas a primer orden, es decir, determinaremos la manera como se comporta la métrica lejos de la D-brana en cuestión. El cálculo lo llevaremos a cabo para el caso de D-branas longitudinales y transversales. Para realizar el cálculo obtendremos el estado de borde correspondiente a cada caso, para después calcular el traslape de una cuerda emitida por la D-brana con los estados correspondientes al gravitón. Una vez que obtengamos la corrección a la métrica compararemos el resultado con el que proviene del fondo de brana negra correspondiente.

### 3.1. D-branas longitudinales

En esta sección calculamos la corrección en la métrica inducida por una D-brana longitudinal, en la cual los extremos de las cuerdas abiertas se pueden mover a lo largo de la coordenada  $X^1$ , y la comparamos con el resultado que se obtiene en la descripción en términos del fondo de brana negra. Para calcular la corrección inducida por la D-brana partiremos de Gomis-Ooguri (2.61) como nuestra acción fundamental y usaremos la técnica de estado de borde, análoga a la que se uso en la sección 1.2. Para la corrección del lado de la teoría en términos de una brana negra

calculamos la corrección a primer orden en la acción  $S_{GO}$  debida a la presencia del fondo cuando tomamos el límite de la teoría de cuerdas enrolladas, imponiendo para ello varias condiciones de consistencia.

### 3.1.1. Estado de borde

Para obtener el estado de borde para una D-brana longitudinal usaremos el formalismo en coordenadas complejas. Como hicimos al obtener el estado de borde bosónico (sec.1.2), haremos una transformación que intercambia  $\sigma$  y  $\tau$  en la hoja de mundo para pasar del canal de cuerda abierta al canal de cuerda cerrada. Partimos de las condiciones de frontera (2.100) para una D-brana longitudinal junto con las condiciones de frontera usuales para las coordenadas  $X^i$ ,

$$(\partial - \bar{\partial})X^i|_{z=\bar{z}} = 0 \quad i = 2, \dots, p, \quad (3.1)$$

$$X^i|_{z=\bar{z}} = y^i \quad i = p + 1, \dots, d - 1, \quad (3.2)$$

donde  $y^i$  son las coordenadas de la brana y  $d$  es la dimensión del espacio-tiempo de Minkowski (para el caso de la cuerda bosónica  $d = 26$ ). Usando el procedimiento descrito en la sección (1.2) con las condiciones de frontera mencionadas, tenemos que el estado de borde debe cumplir

$$\left(\frac{\mu}{2}z\partial\gamma + \bar{z}\tilde{\beta}\right)\Big|_{z=\bar{z}-1}|B_X\rangle = 0, \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\mu}{2}\bar{z}\bar{\partial}\tilde{\gamma} + z\beta\right)\Big|_{z=\bar{z}-1}|B_X\rangle = 0, \quad (3.4)$$

$$(z\partial + \bar{z}\bar{\partial})X^i|_{z=\bar{z}-1}|B_X\rangle = 0 \quad i = 2, \dots, p, \quad (3.5)$$

$$X^i|_{z=\bar{z}-1}|B_X\rangle = y^i \quad i = p + 1, \dots, d - 1. \quad (3.6)$$

Expresando las condiciones de frontera en términos de la expansión en modos para la cuerda cerrada encontrada en la sección 2.2.2 obtenemos

$$\left(\frac{\mu}{2}n\gamma_n - \tilde{\beta}_{-n}\right)|B_X\rangle = 0 \quad \forall n \neq 0, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\mu}{2}n\tilde{\gamma}_n - \beta_{-n}\right)|B_X\rangle = 0 \quad \forall n \neq 0, \quad (3.8)$$

$$\left(i\frac{\mu w R}{2L_s} + \tilde{\beta}_0\right)|B_X\rangle = 0, \quad (3.9)$$

$$\left(i\frac{\mu w R}{2L_s} - \beta_0\right)|B_X\rangle = 0, \quad (3.10)$$

$$(\alpha_n^i + S^i_j \tilde{\alpha}_{-n}^j)|B_X\rangle = 0 \quad \forall n \neq 0, \quad (3.11)$$

$$\hat{p}^i|B_X\rangle = 0 \quad i = 2, \dots, p, \quad (3.12)$$

$$(\hat{x}^i - y^i)|B_X\rangle = 0 \quad i = p+1, \dots, d-1, \quad (3.13)$$

donde  $y^i$  indica la posición de la D-brana y hemos introducido la matriz diagonal  $S^{ij}$  de  $(d-2) \times (d-2)$  definida como

$$S^{ij} \equiv \begin{cases} \delta^{ij} & \text{si } i, j = 2, \dots, p \\ -\delta^{ij} & \text{si } i, j = p+1, \dots, d-1 \end{cases}. \quad (3.14)$$

Para escribir el estado de borde completo, además tenemos que tomar en cuenta que en presencia de la D-brana longitudinal, el enrollamiento de las cuerdas cerradas no se conserva debido a que éstas se pueden abrir y desenrollarse. Por lo tanto, la D-brana es capaz de emitir cuerdas cerradas con cualquier enrollamiento y el estado de borde más general contiene una suma sobre todos los posibles enrollamientos. El estado que cumple todas las condiciones anteriormente mencionadas es el siguiente

$$|B_X\rangle = N_p \sum_{w=-\infty}^{\infty} \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}^i - y^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n}\alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu}\beta_{-n}\tilde{\beta}_{-n} + \frac{\mu n}{2}\gamma_{-n}\tilde{\gamma}_{-n}} \right) |0, w, p=0\rangle, \quad (3.15)$$

con  $N_p$  una constante de normalización que determinaremos más adelante. Es necesario remarcar que, tal como se hizo en el caso del estado de borde bosónico en la sección 1.2, hemos omitido por simplicidad la contribución por parte de los fantasmas. El estado de borde completo es

$$|B\rangle = |B_X\rangle |B_{\text{fant}}\rangle, \quad (3.16)$$

donde  $|B_{\text{fant}}\rangle$  corresponde a la contribución de los fantasmas.

### 3.1.2. Normalización del estado de borde

Para determinar completamente el estado de borde (3.15) emplearemos el mismo procedimiento usado para el estado de borde bosónico. Calcularemos la energía libre para dos D-branas paralelas, primero en el canal de cuerda cerrada y después en el canal de cuerda abierta. Haciendo la comparación entre ambos resultados determinaremos la constante  $N_p$  para D-brana longitudinal.

La energía libre para dos D-branas paralelas, una con coordenadas en el origen y la otra con coordenadas  $y^i$ , en el canal de cuerda cerrada está dada por la siguiente expresión

$$F = \langle B_X | D | B_X \rangle, \quad (3.17)$$

donde  $D$  es el propagador de cuerda cerrada libre

$$D = \frac{L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} z^{L_0-1} \bar{z}^{\tilde{L}_0-1} = \frac{L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0}. \quad (3.18)$$

con  $L_0, \tilde{L}_0$  dados por las expresiones (2.91) y (2.92)

Llevando a cabo los cálculos por partes tenemos que

$$\begin{aligned} D | B_X \rangle &= \frac{N_p L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0} | B_X \rangle \\ &= \frac{N_p L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} z^{L_0} \bar{z}^{\tilde{L}_0} \sum_{w=-\infty}^{\infty} N_p \delta^{d-p-1}(\hat{x}_i - y_i) \\ &\quad \left( \prod_{n=1} \left( e^{-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}} \right) | 0, w, p=0 \rangle \right) \\ &= \frac{N_p L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} \int \frac{d^{d-p-1} k_{\perp}}{(2\pi)^{d-p-1}} | z |^{\frac{L_s^2}{2} k_{\perp}^2} e^{-ik_{\perp} \cdot y} \sum_{w=-\infty}^{\infty} | z |^{\frac{\mu w^2 R^2}{L_s^2}} \\ &\quad \left( \prod_{n=1} \left( e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0, w, p_{||}, p_{\perp} = k_{\perp} \rangle \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Así, la energía libre calculada usando el estado de borde es

$$\begin{aligned}
F &= \langle B_X | D | B_X \rangle \\
&= \frac{N_p^2 L_s^2}{8\pi} \langle 0, w', p = 0 | \sum_{w'=-\infty}^{\infty} \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n} \alpha_n S \cdot \tilde{\alpha}_n + \frac{2}{n\mu} \beta_n \tilde{\beta}_n + \frac{n\mu}{2} \gamma_n \tilde{\gamma}_n} \right) \\
&\quad \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} z^{L_0-1} \bar{z}^{\tilde{L}_0-1} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \delta^{(d-p-1)}(\hat{x}^i - y^i) \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n}} \right. \\
&\quad \left. e^{\frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}} \right) |0, w, p = 0 \rangle \\
&= \sum_w \frac{N_p^2 L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^4} (2\pi)^{p+1} R \delta^p(0) \int \frac{d^{d-p-1} k_{\perp}}{(2\pi)^{d-p-1}} |z|^{\frac{L_s^2}{2} k_{\perp}^2} \\
&\quad e^{ik_{\perp} \cdot y} |z|^{\mu \frac{w^2 R^2}{L_s^2}} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - |z|^{2n}} \right)^{d-2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para el resultado anterior hay que aclarar que el  $-2$  en el último exponente se debe a la contribución de los fantasmas anula la contribución de 2 de las  $X^i$  (el resultado sin tomar en cuenta esta contribución daría simplemente  $d$ ).

Usando la normalización (1.76) para cada componente del momento junto con las definiciones (1.77) y (1.86), el cambio de variables (1.84) e integrando

$$\begin{aligned}
F &= 2 \sum_w \frac{N_p^2 L_s^2}{8} \int_0^{\infty} dt (2\pi)(2\pi R) V_p e^{-\pi\mu \left(\frac{wR}{L_s}\right)^2 t} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2 t}} \\
&\quad \left( \frac{2}{L_s^2 t} \right)^{\frac{d-p-1}{2}} (2\pi)^{1-p-d} [f_1(e^{-\pi t})]^{2-d} (e^{2\pi t})^{\frac{26-d}{24}},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde hemos tomado en cuenta que para  $d$  arbitraria

$$e^{2\pi t} \prod_{l=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi l t}} \right)^{d-2} = f_1(e^{-\pi t})^{2-d} (e^{2\pi t})^{\frac{26-d}{24}}. \tag{3.22}$$

Finalmente, usando la identidad de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 A + 2n\pi A s} = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{\pi A s^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi A^{-1} m^2 - 2i\pi m s} \tag{3.23}$$

y haciendo el cambio de variable  $t \rightarrow t = \frac{1}{\tau}$  obtenemos

$$F = N_p^2 V_p L_s^{-d+p+4} \mu^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{1+p-d}{2}} \pi^{3+p-d} \int_0^\infty d\tau \tau^{-\frac{p+2}{2}} e^{-\frac{y^2 \tau}{2\pi L_s^2}} \sum_w e^{-\frac{\pi}{\mu} \left(\frac{w L_s}{R}\right)^2 \tau} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-d} \left(e^{\frac{2\pi}{\tau}}\right)^{\frac{26-d}{24}}. \quad (3.24)$$

A continuación procedemos a llevar a cabo el cálculo para el canal de cuerda abierta. La expresión para la energía libre que da una cuerda abierta haciendo un bucle entre dos arreglos de D-branas paralelas se expresa en términos de una traza sobre los estados.

$$\begin{aligned} F &= -(2K^2) \frac{1}{2} \text{Tr} \log[L_0 - 1] = \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \text{Tr} [e^{-2\pi(L_0-1)\tau}] \\ &= (2K^2) \int_0^\infty \frac{d^{p-1}k}{(2\pi)^{p-1}} \int \frac{dp_0}{2\pi} \sum_n \frac{1}{2\pi R} \langle k, p_1 = \frac{n}{R}, p_0 | e^{2\pi\tau} e^{\frac{\pi}{\mu} p_0^2 L_s^2 \tau} e^{-\frac{\pi n^2 L_s^2}{\mu R^2} \tau} \\ &\quad e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} e^{-2\pi L_s^2 k^2 \tau} | k, p_1 = \frac{n}{R}, p_0 \rangle \text{Tr} \left( \prod_{n=1}^\infty e^{-2\pi\tau \left(\frac{2}{\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_n + \frac{2}{\mu} \tilde{\beta}_{-n} \beta_n + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i\right)} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

En la expresión anterior  $K$  es el número de D-branas presentes. Así, el factor  $(2K^2)$  proviene de que las cuerdas abiertas tienen 2 orientaciones y pueden tener sus extremos en cualquiera de las  $K$  D-branas. Evaluando las integrales y la traza obtenemos

$$F = \frac{K^2 V_p}{(2\pi)^p} \mu^{1/2} L_s^{-p} 2^{\frac{1-p}{2}} \int_0^\infty d\tau \tau^{-\frac{p+2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} \sum_n e^{-\frac{\pi}{\mu} \left(\frac{n L_s}{R}\right)^2 \tau} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-d}, \quad (3.26)$$

donde hemos usado el siguiente resultado

$$\text{Tr} \left( \prod_{n=1}^\infty e^{-2\pi\tau \left(\frac{2}{\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_n + \frac{2}{\mu} \tilde{\beta}_{-n} \beta_n + \alpha_{-n}^i \alpha_n^i\right)} \right) = \prod_{n=1}^\infty \left( \frac{1}{1 - e^{-2\pi\tau n}} \right)^{d-2}. \quad (3.27)$$

Podemos observar que (3.24) tiene exactamente la misma forma que (3.26) excepto por términos constantes, de tal manera que fácilmente podemos hacer la comparación. Igualando ambas expresiones y despejando  $N_p$  tenemos que para el estado de borde longitudinal

$$N_p = 2^{\frac{4-d}{4}} (2\pi)^{\frac{d-2p-3}{2}} \frac{K^2}{\nu G_s} L_s^{\frac{d-2p-4}{2}}. \quad (3.28)$$

Con esto queda determinado completamente el estado de borde (3.15).

### 3.1.3. Valores esperados

Hemos visto en la sección 1.2 que usando el estado de borde podemos calcular el valor esperado de los campos debido a la presencia de una D-brana. Ahora vamos a usar el estado de borde (3.15) para la D-brana longitudinal para calcular la primera corrección a la métrica. Los valores esperados que resultan ser diferentes de cero para los estados correspondientes al gravitón son

$$\langle 0 | \alpha_1^i \tilde{\alpha}_1^j | B_X \rangle, \quad \langle 0 | \beta_1 \tilde{\beta}_1 D | B_X \rangle, \quad \langle 0 | \gamma_1 \tilde{\gamma}_1 D | B_X \rangle \quad (3.29)$$

Usando las condiciones de frontera (3.7), (3.8) y las relaciones de conmutación (2.86) tenemos que

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \beta_1 \tilde{\beta}_1 \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= -\frac{\mu}{2} |z|^2 \langle 0 | \beta_1 \gamma_{-1} \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{\mu}{2} |z|^2 . \end{aligned} \quad (3.30)$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \gamma_1 \tilde{\gamma}_1 \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{2}{\mu} |z|^2 \langle 0 | \gamma_1 \beta_{-1} \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= \frac{2}{\mu} |z|^2 , \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \tilde{\alpha}_1^i \alpha_1^j \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= -S_k^i \langle 0 | \tilde{\alpha}_1^i \tilde{\alpha}_{-1}^k \left( \prod_{n=1}^{\infty} e^{(-\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \frac{2}{n\mu} \beta_{-n} \tilde{\beta}_{-n} + \frac{n\mu}{2} \gamma_{-n} \tilde{\gamma}_{-n}) |z|^{2n}} \right) | 0 \rangle \\ &= -S^{ij} |z|^2 . \end{aligned} \quad (3.32)$$



Lo único que resta calcular es

$$\begin{aligned} & \langle k, w | \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} \int \frac{d^{d-p-1} k'_\perp}{(2\pi)^{d-p-1}} |z|^{\frac{L_s^2}{2} k'_\perp{}^2} e^{-ik'_\perp \cdot y_\perp} \sum_{w'=0}^{\infty} |z|^{\frac{\mu w'^2 R^2}{L_s^2}} |w', p_\parallel = 0, p_\perp = k'_\perp \rangle \\ &= (2\pi)^{p+1} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} |z|^{\frac{L_s^2}{2} k_\perp^2 + \frac{\mu w^2 R^2}{L_s^2}} e^{-ik_\perp \cdot y_\perp} \delta^p(k_\parallel) . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Usando el cambio de variables (1.84) podemos hacer fácilmente la integral gaussiana en (3.33)

$$\int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} |z|^{\frac{L_s^2}{2} k_\perp^2 + \frac{\mu w^2 R^2}{L_s^2}} = 4\pi^2 \int_0^\infty dt e^{-\pi t \left( \frac{L_s^2}{2} k_\perp^2 + \frac{\mu w^2 R^2}{L_s^2} \right)} = \left( \frac{8\pi}{L_s^2} \right) \frac{1}{k_\perp^2 + \frac{2\mu w^2 R^2}{L_s^4}} . \quad (3.34)$$

Juntando los resultados anteriores tenemos que el comportamiento a grandes distancias de los campos es

$$\langle 0, w, k | \alpha_1^i \tilde{\alpha}_1^j D | B_X \rangle = -S^{ij} N_p e^{-ik_\perp \cdot y} \delta^p(k_\parallel) (2\pi)^{p+1} \frac{1}{k_\perp^2 + \frac{2\mu w^2 R^2}{L_s^4}} , \quad (3.35)$$

$$\langle 0, w, k | \gamma_1 \tilde{\gamma}_1 D | B_X \rangle = \frac{2}{\mu} N_p e^{-ik_\perp \cdot y} \delta^p(k_\parallel) (2\pi)^{p+1} \frac{1}{k_\perp^2 + \frac{2\mu w^2 R^2}{L_s^4}} , \quad (3.36)$$

$$\langle 0, w, k | \beta_1 \tilde{\beta}_1 D | B_X \rangle = \frac{\mu}{2} N_p e^{-ik_\perp \cdot y} \delta^p(k_\parallel) (2\pi)^{p+1} \frac{1}{k_\perp^2 + \frac{2\mu w^2 R^2}{L_s^4}} . \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

Para el caso de los gravitones, que llevan la información acerca de la métrica, debemos restringirnos al caso en el que  $w = 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos restringirnos al caso en el que las cuerdas cerradas son emitidas por una brana localizada en  $y = 0$ . Haciendo una transformada de Fourier para encontrar la dependencia espacial de los campos

$$\alpha_1^i \alpha_1^j \rightarrow -S^{ij} N_p \frac{1}{(d-3-p) r_\perp^{d-3-p} \Omega_{d-2-p}} , \quad (3.39)$$

$$\gamma_1 \tilde{\gamma}_1 \rightarrow \frac{2}{\mu} N_p \frac{1}{(d-3-p) r_\perp^{d-3-p} \Omega_{d-2-p}} , \quad (3.40)$$

$$\beta_1 \tilde{\beta}_1 \rightarrow \frac{\mu}{2} N_p \frac{1}{(d-3-p) r_\perp^{d-3-p} \Omega_{d-2-p}} , \quad (3.41)$$

donde por definición

$$\Omega_q \equiv \frac{2\pi^{\frac{q+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \quad (3.42)$$

es el volumen de una esfera unitaria  $q$ -dimensional. Expresando  $N_p$  en términos de

$$\kappa \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(2\pi)^{\frac{d-3}{2}}G_sL_s^{\frac{d-2}{2}}, \quad (3.43)$$

$$T_{D_p,\nu} = \frac{K^2}{2\nu(2\pi)^pG_s^2L_s^{p+1}}, \quad (3.44)$$

obtenemos

$$N_p = 2^{\frac{2-d}{4}} \frac{R_D^{d-3-p}(d-3-p)\Omega_{d-2-p}}{\kappa} \quad (3.45)$$

Es muy importante hacer la observación en este momento de que los valores esperados para la métrica que obtuvimos en (3.39), (3.40), (3.41) están normalizados canónicamente, porque el propagador así lo estaba. Para comparar este resultado con aquel que obtendremos en la teoría en términos del fondo de gravedad, donde examinaremos un término que corrige la acción de la cuerda, debemos reescalar usando el mapeo estado  $\leftrightarrow$  operador, como se explica en el apéndice (A.1). De esta manera, para las componentes de la métrica que figuran directamente en la acción de la cuerda tenemos

$$(h_{\gamma\tilde{\gamma}})^{BS} \equiv -\kappa(h_{\gamma\tilde{\gamma}}^{can})^{BS} \equiv -\frac{2^{\frac{6-d}{4}}}{\mu} \left(\frac{R_D}{r_\perp}\right)^{d-3-p}, \quad (3.46)$$

$$(h_{\beta\tilde{\beta}})^{BS} \equiv -\kappa(h_{\beta\tilde{\beta}}^{can})^{BS} \equiv -2^{\frac{-2-d}{4}}\mu \left(\frac{R_D}{r_\perp}\right)^{d-3-p}, \quad (3.47)$$

$$(h_{ij})^{BS} \equiv 2\kappa(h_{ij}^{can})^{BS} \equiv -2^{\frac{6-d}{4}} \left(\frac{R_D}{r_\perp}\right)^{d-3-p}. \quad (3.48)$$

Hemos definido cada componente de la métrica que se obtiene usando el estado de borde como el valor esperado de los campos correspondientes al gravitón.

### 3.1.4. Descripción en el fondo de brana negra

A continuación estudiaremos la descripción de la D-brana en términos del fondo de brana negra. Recordemos que en esta descripción las únicas excitaciones son

las cuerdas cerradas que se propagan en un fondo curvo. El fondo de brana negra correspondiente a una D-brana longitudinal con un campo antisimétrico  $B_{01}$  es [14]

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{l_s^2} &= \frac{1}{L_s^2} H^{\frac{1}{2}} \frac{K^2}{G_s^2 \nu^2} \frac{r^{d-3-p}}{R_D^{d-3-p}} (-dX_0^2 + dX_1^2) + \frac{1}{L_s^2} H^{-\frac{1}{2}} (dX_2^2 + \dots + dX_p^2) \\ &+ \frac{1}{L_s^2} H^{\frac{1}{2}} (dX_{p+1}^2 + \dots + dX_{d-1}^2) , \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\frac{B_{01}}{l_s^2} = \frac{1}{G_s^2 L_s^2} \frac{K^2}{\nu^2} \frac{r^{d-3-p}}{R_D^{d-3-p}} , \quad (3.50)$$

$$H = 1 + \left( \frac{R_D}{r} \right)^{d-3-p} , \quad (3.51)$$

$$r^2 = X_{p+1}^2 + \dots + X_{d-1}^2 , \quad (3.52)$$

$$R_D^{d-3-p} = \frac{1}{(d-3-p)} \frac{K^2 (2\pi)^{d-3-p} L_s^{d-3-p}}{\nu \Omega_{d-2-p}} . \quad (3.53)$$

Dado que en el cálculo que hicimos usando el estado de borde los componentes de la métrica figuran directamente en la acción de la cuerda, la forma más directa para comparar la corrección a orden más bajo en la descripción de la brana negra es observar la forma de la acción en este fondo lejos del horizonte de la D-brana. Para llevar a cabo esto reproduciremos la acción  $S_{GO}$  (2.61) más una pequeña corrección. Usando este procedimiento podremos reconocer a los operadores de vértice del gravitón en la parte adicional de la acción y a sus coeficientes, que como veremos corresponden a las componentes de la métrica que nos interesan.

Lejos del horizonte de la D-brana, ésto es, en la región donde  $r \gg R_D$  definimos un parámetro pequeño

$$\delta' \equiv \left( \frac{R_D}{r} \right)^{d-3-p} . \quad (3.54)$$

La acción que describe a la cuerda en el fondo con la métrica (3.49) y el campo antisimétrico  $B_{01}$  (3.50) es

$$S = \frac{1}{2\pi l_s^2} \int d^2z (g_{ab} \partial X^a \bar{\partial} X^b - B_{ab} \partial X^a \bar{\partial} X^b + g_{ij} \partial X^i \partial X^j) . \quad (3.55)$$

En la teoría de cuerdas enrolladas estándar los campos están relacionados con un parámetro  $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{g_{ab}}{l_s^2} = \frac{1}{L_s^2} \delta^{-1} \eta_{ab} , \quad \frac{g_{ij}}{l_s^2} = \frac{1}{L_s^2} \delta_{ij} , \quad \frac{B_{01}}{l_s^2} = \frac{1}{L_s^2} (\delta^{-1} - \mu) , \quad (3.56)$$

con

$$\mu \equiv \frac{K^2}{2\nu^2 G_s^2} . \quad (3.57)$$

Para garantizar que la acción que obtendremos al tomar el límite cuando  $\delta' \rightarrow 0$  reproducirá la acción (2.61) más una pequeña corrección de orden  $\delta$

$$S_{\text{aquí}} = S_{\text{GO}} + O(\delta) , \quad (3.58)$$

debemos identificar (3.49) y (3.50) con la forma de los campos en (3.56) más una corrección de orden  $\delta$

$$L_s^2 \frac{B_{01}}{l_s^2} = 2\mu \left( \frac{r}{R_D} \right)^{d-3-p} \equiv \delta^{-1} - \mu + O(\delta) , \quad (3.59)$$

$$L_s^2 \frac{g_{ab}}{l_s^2} = 2\mu H^{\frac{1}{2}} \left( \frac{r}{R_D} \right)^{d-3-p} \eta_{ab} \equiv (\delta^{-1} + O(\delta)) \eta_{ab} . \quad (3.60)$$

Nótese que no es *a priori* obvio que estas dos condiciones puedan ser satisfechas simultáneamente. No obstante podemos observar que de ellas se obtiene

$$\frac{2\mu}{\delta'} = \frac{1}{\delta} - \mu + a\delta , \quad (3.61)$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2}\delta' - \frac{1}{8}\delta'^2 \right) \frac{2\mu}{\delta'} = \frac{1}{\delta} + b\delta , \quad (3.62)$$

con  $a$  y  $b$  parámetros ajustables. Hasta este momento  $a$  y  $b$  son parámetros arbitrarios que hemos introducido a mano. Sin embargo, para que las condiciones (3.59) y (3.60) se satisfagan es necesario que  $a$  y  $b$  estén relacionados de una manera específica. De (3.61), cuando  $\delta \rightarrow 0$ , a orden dominante

$$\frac{2\mu}{\delta'} \approx \frac{1}{\delta} - \mu \quad \leftrightarrow \quad \delta' \approx 2\mu\delta + 2\mu^2\delta^2 , \quad (3.63)$$

o viceversa

$$\frac{1}{\delta} \approx \frac{2\mu}{\delta'} + \mu \quad \leftrightarrow \quad \delta \approx \frac{\delta'}{2\mu} - \frac{\delta'^2}{4\mu} , \quad (3.64)$$

entonces

$$\delta' \approx 2\mu\delta . \quad (3.65)$$

Por otra parte, restando (3.62) de (3.61)

$$(a - b)\delta = \frac{1}{4}\mu\delta' . \quad (3.66)$$

Por lo tanto, de hacer la identificación de (3.65) y (3.66) obtenemos

$$a - b = \frac{1}{2}\mu^2 . \quad (3.67)$$

Entonces la corrección a  $\frac{g_{ij}}{l_s^2}$  a orden  $O(\delta)$  queda determinada unívocamente como

$$\frac{g_{ij}}{l_s^2} \approx \frac{1}{L_s^2} \left( 1 - S_{ij} \frac{1}{2} \delta' \right) \approx \frac{1}{L_s^2} (1 - \mu \delta S_{ij}) , \quad (3.68)$$

donde  $S_{ij}$  está dada por (3.14).

La parte longitudinal de la acción se lee como

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi l_s^2} (g_{ab} \partial X^a \bar{\partial} X^b - B_{ab} \partial X^a \partial X^b) \\ &= \int \frac{d^2 z}{2\pi L_s^2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \delta' - \frac{1}{8} \delta'^2 \right) \frac{2\mu}{\delta'} \eta_{ab} \partial X^a \bar{\partial} X^b - \frac{2\mu}{\delta'} \epsilon_{ab} \partial X^a \bar{\partial} X^b \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

mientras que usando (3.68) para la parte transversal

$$S_{\perp} \approx \int \frac{d^2 z}{2\pi L_s^2} (\eta_{ij} - \mu \delta S_{ij}) \partial X^i \bar{\partial} X^j = \int \frac{d^2 z}{2\pi L_s^2} \partial X^i \bar{\partial} X^i + \delta \int \frac{d^2 z}{2\pi L_s^2} (-\mu S_{ij}) \partial X^i \bar{\partial} X^j . \quad (3.70)$$

La acción  $S_{\perp}$  cuando  $\delta \rightarrow 0$  es de la forma (3.58) de donde podemos fácilmente leer la corrección a la métrica para la parte transversal. Expresando  $S_{\parallel}$  en términos de las variables  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  definidas en (2.57)

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi} \left[ \frac{1}{2\delta} (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} + \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\delta} - \mu \right) (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} - \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b\delta}{2} (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} + \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) - \frac{a\delta}{2} (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} - \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) \right] . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange  $\beta, \tilde{\beta}$  podemos reescribir  $S_{\parallel}$  como

$$\begin{aligned} S_{\parallel} &= \int \frac{d^2 z}{2\pi} \left[ \frac{\mu}{2} \partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} + \beta \bar{\partial}\gamma + \tilde{\beta} \partial\tilde{\gamma} - \frac{1}{\left( \frac{1}{\delta} - \frac{\mu}{2} \beta \tilde{\beta} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b\delta}{2} (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} + \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) - \frac{a\delta}{2} (\partial\gamma \bar{\partial}\tilde{\gamma} - \partial\tilde{\gamma} \bar{\partial}\gamma) \right] . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Así, obtenemos finalmente cuando  $\delta \rightarrow 0$  (a primer orden)

$$S_{\parallel} = \int \frac{d^2z}{2\pi} \left[ \beta \bar{\partial} \gamma + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} + \frac{\mu}{2} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} \delta (b-a) \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} \delta (b+a) \partial \tilde{\gamma} \bar{\partial} \gamma - \delta \beta \tilde{\beta} \right]. \quad (3.73)$$

La expresión que hemos encontrado es de la forma (3.58). El valor de  $a-b$  fue fijado en (3.67), sin embargo, el valor de  $a+b$  sigue siendo arbitrario. Una elección adecuada para hacer la comparación con el resultado del estado de borde, donde  $\partial \tilde{\gamma} = \bar{\partial} \gamma = 0$  por las ecuaciones de movimiento, es

$$a + b \equiv 0. \quad (3.74)$$

Con esto y sustituyendo el valor de  $a-b$  obtenemos finalmente

$$S_{\parallel} = \int \frac{d^2z}{2\pi} \left[ \beta \bar{\partial} \gamma + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} + \frac{\mu}{2} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} - \frac{1}{4} \delta \mu^2 \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} - \delta \beta \tilde{\beta} \right]. \quad (3.75)$$

Del resultado anterior junto con  $S_{\perp}$ , encontramos entonces que los coeficientes relativos de

$$\partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma}, \quad \beta \tilde{\beta}, \quad \partial X^i \bar{\partial} X^i \quad (3.76)$$

son a primer orden en  $\delta$

$$h_{\beta \tilde{\beta}} \equiv -\frac{1}{8} \mu \left( \frac{R_D}{r} \right)^{d-3-p}, \quad (3.77)$$

$$h_{\gamma \tilde{\gamma}} \equiv -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{R_D}{r} \right)^{d-3-p}, \quad (3.78)$$

$$h_{ij} \equiv -\frac{1}{2} S^{ij} \left( \frac{R_D}{r} \right)^{d-3-p}. \quad (3.79)$$

Sustituyendo  $d = 10$  en (3.46), (3.47), (3.48) y (3.77), (3.78), (3.79) tenemos perfecto acuerdo entre ambos conjuntos de resultados.

## 3.2. D-branas transversales

Al igual que hicimos en el caso de la D-brana longitudinal, determinaremos ahora el estado de borde correspondiente a una D-brana transversal. Usando el formalismo

de estado de borde obtendremos la corrección a primer orden en la métrica debida a la presencia de la D-brana . Por otra parte, para la teoría en el fondo de gravedad llevaremos a cabo el procedimiento correspondiente para obtener la acción en el límite de la teoría de cuerdas enrolladas. Ésto nos dara la corrección a primer orden a la acción de la teoría de cuerdas enrolladas . Una vez hecho ésto compraremos los resultados en ambas descripciones de la teoría.

### 3.2.1. Estado de borde

En esta sección calcularemos el estado de borde para la D-brana transversal. Primero obtendremos las condiciones que debe cumplir el estado de borde para después calcular su normalización a partir de la energía libre en los canales de cuerda abierta y cuerda cerrada.

Para la D-brana transversal tenemos las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \frac{L_s}{2}(\gamma + \tilde{\gamma}) \Big|_{z=\bar{z}} &= y^1 \\ (\beta + \tilde{\beta}) \Big|_{z=\bar{z}} &= 0 , \end{aligned} \quad (3.80)$$

que se traducen en las condiciones de frontera para el estado de borde

$$\frac{L_s}{2}(\gamma + \tilde{\gamma}) \Big|_{z=\bar{z}^{-1}} |B_X\rangle = y^1 |B_X\rangle , \quad (3.81)$$

$$\left( z\beta(z) - \bar{z}\tilde{\beta}(\bar{z}) \right) \Big|_{z=\bar{z}^{-1}} |B_X\rangle = 0 . \quad (3.82)$$

En términos de las expansiones en modos para la cuerda transversal obtenidas en la sección (2.2.4),

$$w|B_X\rangle = 0 , \quad (3.83)$$

$$\frac{L_s}{2}(\gamma_0 + \tilde{\gamma}_0)|B_X\rangle = y^1|B_X\rangle$$

$$\Leftrightarrow (\hat{x} - 2\pi mR)|B_X\rangle = \frac{y^1}{L_s}|B_X\rangle \quad m \in \mathbb{Z} , \quad (3.84)$$

$$(\gamma_n + \tilde{\gamma}_{-n})|B_X\rangle = 0 \quad n \neq 0 , \quad (3.85)$$

$$(\beta_n - \tilde{\beta}_{-n})|B_X\rangle = 0 , \quad (3.86)$$

$$(\beta_0 - \tilde{\beta}_0)|B_X\rangle = 0 . \quad (3.87)$$

La condición (3.84) es consecuencia de que  $X^1$  está compactificada en un círculo. Escribiendo la condición para el modo cero en términos de  $p_0$  y el enrollamiento  $w$

$$\left( p_0 - \frac{\mu w R}{L_s^2} \right) |B_X\rangle = 0 \quad (3.88)$$

Esta condición implica que la D-brana solo puede emitir cuerdas abiertas con enrollamiento cero y energía cero.

Para las coordenadas  $X^i$  las condiciones de frontera son las usuales

$$(z\partial + \bar{z}\bar{\partial})X^i|_{z=\bar{z}=1}|B_X\rangle = 0 \quad i = 2, \dots, p, \quad (3.89)$$

$$X^i|_{z=\bar{z}=1}|B_X\rangle = y_i|B_X\rangle \quad ; \quad i = p+1, \dots, d-1. \quad (3.90)$$

En términos de la expansión en modos

$$(\alpha_n^i + S_j^i \tilde{\alpha}_{-n}^j)|B_X\rangle = 0 \quad ; \quad n \neq 0, \quad (3.91)$$

$$\hat{p}^\alpha|B_X\rangle = 0, \quad (3.92)$$

$$(\hat{x}^i - y^i)|B_X\rangle = 0, \quad (3.93)$$

donde hemos introducido la matriz de  $(d-2) \times (d-2)$ .

$$S^{ij} \equiv \begin{cases} \delta^{ij} & \text{si } i, j = 2, \dots, p+1 \\ -\delta^{ij} & \text{si } i, j = p+2, \dots, d \end{cases}. \quad (3.94)$$

Usando estas condiciones, el estado de borde que se determina es

$$|B_X\rangle = N_p \sum_m \delta(\hat{x} - 2\pi m R) \delta^{d-p-2}(\hat{x}^i - y^i) \prod_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{1}{n}\alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n})} |0, w=0, p=0\rangle. \quad (3.95)$$

### 3.2.2. Normalización del estado de borde

La constante de normalización  $N_p$  para el estado de borde se obtiene nuevamente igualando la energía libre obtenida en el canal de cuerda cerrada con la obtenida en el canal de cuerda abierta.

En el canal de cuerda cerrada

$$F = \langle B_X | D | B_X \rangle \quad (3.96)$$



con  $D$  dado por la expresión (1.73). Expandiendo la delta en (3.95) y usando series de Fourier podemos reescribir el estado de borde como

$$|B_X\rangle = \frac{N_p}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^{d-p-2}k_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} e^{-ik_\perp \cdot y_\perp - i\frac{n}{R}y^1} \prod_{l=1}^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{1}{l} \alpha_{-l} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-l} + \beta_{-l} \tilde{\gamma}_{-l} + \tilde{\beta}_{-l} \gamma_{-l} \right) \right] |0, w = 0, p_1 = \frac{n}{R}, p_\alpha = 0, p_\perp = k_\perp\rangle \quad (3.97)$$

Aplicando el propagador  $D$  sobre el estado de borde

$$D|B_X\rangle = \frac{N_p}{2\pi R} \sum_n \int \frac{d^{d-p-2}k_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} \frac{L_s^2}{8\pi} \int \frac{d^2z}{|z|^4} |z|^{\frac{L_s^2 k_\perp^2}{2}} e^{-ik_\perp \cdot y_\perp - i\frac{n}{R}y^1} \prod_{l=1}^{\infty} \exp \left[ - \left( \frac{1}{l} \alpha_{-l} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-l} + \beta_{-l} \tilde{\gamma}_{-l} + \tilde{\beta}_{-l} \gamma_{-l} \right) |z|^{2l} \right] |0, w = 0, p_1 = \frac{n}{R}, p_\alpha = 0, p_\perp = k_\perp\rangle \quad (3.98)$$

Separando la contribución de los modos cero en la expresión de  $\langle B_X | D | B_X \rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{N_p}{2\pi R} \right)^2 \frac{L_s^2}{8\pi} \sum_{n',n} \int \frac{d^{d-p-2}k'_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} \int \frac{d^{d-p-2}k_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} \langle w' = 0, p'_1 = \frac{n'}{R}, p'_\alpha = 0, p'_\perp = k'_\perp | \\ & \int \frac{d^2z}{|z|^4} |z|^{\frac{L_s^2 k_\perp^2}{2}} e^{-ik_\perp \cdot y_\perp - i\frac{n}{R}y^1} |w' = 0, p'_1 = \frac{n'}{R}, p'_\alpha = 0, p'_\perp = k'_\perp \rangle \\ & = \left( \frac{N_p}{2\pi R} \right)^2 \frac{L_s^2}{8\pi} (2\pi)^{p+2} R \delta^{p+1}(0) \sum_{n',n} \int \frac{d^{d-p-2}k_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} \int_{|z|\leq 1} \frac{d^2z}{|z|^4} |z|^{\frac{L_s^2 k_\perp^2}{2}} e^{-ik_\perp \cdot y_\perp - i\frac{n}{R}y^1} \\ & = \left( \frac{N_p}{2\pi R} \right)^2 \frac{L_s^2}{8\pi} 2\pi R V_{p+1} \sum_{n',n} \int \frac{d^{d-p-2}k_\perp}{(2\pi)^{d-p-2}} (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\pi t \left( \frac{L_s^2 k_\perp^2}{2} - 2 \right) - ik_\perp \cdot y_\perp - i\frac{n}{R}y^1} \\ & = N_p^2 \frac{L_s^2}{8\pi} V_{p+1} (2\pi)^2 \sum_m \delta(y^1 - 2\pi m R) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2\pi t} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2 t}} \left( \frac{2}{t L_s^2} \right)^{\frac{d-p-2}{2}} (2\pi)^{2+p-d} . \end{aligned} \quad (3.99)$$

Para la parte de los osciladores, el resultado es el mismo que se encontró para la

D-brana longitudinal

$$\begin{aligned}
& \prod_{l',l=1}^{\infty} \langle 0 | \exp \left[ - \left( \frac{1}{l'} \alpha_{l'} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{l'} + \beta_{l'} \tilde{\gamma}_{l'} + \tilde{\beta}_{l'} \gamma_{l'} \right) \right] \\
& \quad \exp \left[ - \left( \frac{1}{l} \alpha_{-l} \cdot S \cdot \tilde{\alpha}_{-l} + \beta_{-l} \tilde{\gamma}_{-l} + \tilde{\beta}_{-l} \gamma_{-l} \right) |z|^{2l} \right] |0\rangle \\
&= \left[ \prod_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (|z|^{2l})^n \right]^{d-2} = \left[ \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |z|^{2l}} \right]^{d-2} \\
&= \left[ \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-2\pi l t}} \right]^{d-2} . \tag{3.100}
\end{aligned}$$

Usando la definición (1.86) para  $f_1$  y la relacion (3.22) obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle B_X | D | B_X \rangle &= N_p^2 L_s^{4+p-d} V_{p+1} 2^{\frac{d-p-6}{2}} (2\pi)^{3+p-d} \sum_m \delta(y^1 - 2\pi m R) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} dt t^{\frac{2+p-d}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2 t}} f_1(e^{-\pi t})^{2-d} (e^{2\pi t})^{\frac{26-d}{24}} \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo el cambio de variables  $t \rightarrow \tau = \frac{1}{t}$  y usando la propiedad (1.92) de  $f_1$  encontramos

$$\begin{aligned}
\langle B_X | D | B_X \rangle &= N_p^2 L_s^{4+p-d} V_{p+1} 2^{\frac{d-p-6}{2}} (2\pi)^{3+p-d} \sum_m \delta(y^1 - 2\pi m R) \\
& \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^{-\frac{p+4}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} f_1(e^{-\pi \tau})^{2-d} (e^{\frac{2\pi}{\tau}})^{\frac{26-d}{24}} . \tag{3.102}
\end{aligned}$$

Dado que las cuerdas abiertas transversales con dos D-branas presentes se dividen en dos sectores, calcularemos la energía libre de cada uno de los sectores y los sumaremos para obtener la energía libre total. Para el sector donde las cuerdas abiertas comienzan en la D-brana en el origen, la energía libre es

$$Z_1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \log(L_0 - 1) = \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{2\tau} \text{Tr} [e^{-2\pi(L_0-1)\tau}] , \tag{3.103}$$

donde  $L_0$  está dado por (2.117) y (2.118)

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \sum_{w \geq 0} \int \frac{dk^0 d^p k_i}{(2\pi)^{p+1}} \langle k^0, k_i, w | e^{-2\pi\tau \left[ -p_0 2w' R + L_s^2 p_i p^i + \frac{y^2}{(2\pi)^2 L_s^2} - 1 \right]} | k^0, k_i, w \rangle \\
&= \int_0^\infty \frac{d\tau}{2\tau} \sum_{w \geq 0} \int \frac{dk^0 d^p k_i}{(2\pi)^{p+1}} V_{p+1} e^{-2\pi\tau \left[ -k_0 2R \left( w + \frac{y^1}{2\pi R} \right) + L_s^2 k_i k^i + \frac{y^2}{(2\pi)^2 L_s^2} - 1 \right]} \\
&\quad \prod_{n=1}^\infty (1 - e^{-2\pi\tau})^{2-d}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Así, salvo una rotación de Wick  $k_0 \rightarrow -ik_0$ , tenemos

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} e^{2\pi\tau 2R \left( w + \frac{y^1}{2\pi R} \right) k_0} = \delta \left( 2\pi\tau 2R \left( w + \frac{y^1}{2\pi R} \right) \right) = \frac{1}{2\tau} \delta(y_1 = 2\pi R w) . \tag{3.105}$$

De tal modo que

$$\begin{aligned}
Z_1 &= V_{p+1} \sum_{w \geq 0} \delta(y_1 + 2\pi R w) \int \frac{d\tau}{2\tau} \frac{1}{2\tau} \int \frac{d^p k_i}{(2\pi)^p} e^{-2\pi\tau L_s^2 k_i^2} e^{-\frac{\tau y^2}{2\pi L_s^2}} e^{2\pi\tau} \prod_{n=1}^\infty (1 - e^{-2\pi\tau})^{2-d} \\
&= V_{p+1} \sum_{w \geq 0} \delta(y_1 + 2\pi R w) \\
&\quad \int \frac{d\tau}{2\tau} \frac{1}{2\tau} (2\pi)^{-p} \left( \frac{1}{2L_s^2 \tau} \right)^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{\tau y^2}{2\pi L_s^2}} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-d} (e^{2\pi\tau})^{\frac{26-d}{24}} \\
&= L_s^{-p} V_{p+1} 2^{-\frac{p+4}{2}} (2\pi)^{-p} \sum_{w \geq 0} \delta(y_1 + 2\pi R w) \\
&\quad \int d\tau \tau^{-\frac{p+4}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-d} (e^{2\pi\tau})^{\frac{26-d}{24}} .
\end{aligned}$$

De manera similar, para el sector donde las cuerdas abiertas terminan en la D-brana en el origen

$$\begin{aligned}
Z_2 &= L_s^{-p} V_{p+1} 2^{-\frac{p+4}{2}} (2\pi)^{-p} \sum_{w < 0} \delta(y_1 + 2\pi R w) \\
&\quad \int d\tau \tau^{-\frac{p+4}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-D} (e^{2\pi\tau})^{\frac{26-D}{24}} .
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Así, para un arreglo de K D-branas transversales, una encima de la otra,

$$Z_1^K + Z_2^K = K^2 L_s^{-p} V_{p+1} 2^{-\frac{p+4}{2}} (2\pi)^{-p} \sum_w \delta(y_1 + 2\pi R w) \int d\tau \tau^{-\frac{p+4}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\pi L_s^2} \tau} [f_1(e^{-\pi\tau})]^{2-D} (e^{2\pi\tau})^{\frac{26-D}{24}}. \quad (3.107)$$

Entonces, igualando  $Z_1^K + Z_2^K$  con  $\langle B_0 | D | B_X \rangle$ , podemos determinar

$$K^2 L_s^{-p} V_{p+1} 2^{-\frac{p+4}{2}} (2\pi)^{-p} = N_p^2 L_s^{4+p-D} V_{p+1} 2^{\frac{D-p-6}{2}} (2\pi)^{3+p-D} \quad (3.108)$$

i.e.,

$$N_p^2 = K^2 L_s^{D-2p-4} 2^{\frac{2-D}{2}} (2\pi)^{D-2p-3} \quad (3.109)$$

o

$$\begin{aligned} N_p &= K L_s^{\frac{D-2p-4}{2}} 2^{\frac{2-D}{4}} (2\pi)^{\frac{D-2p-3}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} 2^{1-\frac{D}{4}} K T_{Dp}^\perp \kappa \end{aligned} \quad (3.110)$$

con

$$T_{Dp}^\perp = \frac{1}{(2\pi)^p G_s L_s^{p+1}}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{\frac{D-3}{2}} G_s L_s^{\frac{D-2}{2}}. \quad (3.111)$$

De este modo hemos determinado completamente el estado de borde (3.97) para la D-brana transversal.

### 3.2.3. Valores esperados

Aplicando las condiciones de frontera tenemos para los valores esperados  $\langle P_X | D | B_X \rangle$  en la parte de los modos no cero

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \gamma_1 \beta_1 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n}\right) |z|^{2n}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0, w, k | \gamma_1 \beta_{-1} | z |^2 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n}\right) |z|^{2n}} | 0 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.112)$$

entonces

$$\langle 0, w, k | \gamma_1 \beta_1 D | B_X \rangle = 0. \quad (3.113)$$

De la misma manera tenemos

$$\langle 0, w, k | \tilde{\gamma}_1 \tilde{\beta}_1 D | B_X \rangle = 0 . \quad (3.114)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \gamma_1 \tilde{\beta}_1 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n}\right) |z|^{2n}} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\gamma_1, \beta_{-1}] |z|^2 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n}\right) |z|^{2n}} | 0 \rangle \\ &= |z|^2 , \end{aligned} \quad (3.115)$$

análogamente,

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \tilde{\gamma}_1 \beta_1 \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{n} \alpha_{-n} S \cdot \tilde{\alpha}_{-n} + \beta_{-n} \tilde{\gamma}_{-n} + \tilde{\beta}_{-n} \gamma_{-n}\right) |z|^{2n}} | 0 \rangle \\ &= |z|^2 . \end{aligned} \quad (3.116)$$

Como obtuvimos el mismo resultado en (3.115) y (3.116), ahora solo necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \langle 0, w = 0, k_1 = \frac{m}{R}, k_\alpha, k_\perp | \gamma_1 \tilde{\beta}_1 D | B_0 \rangle &= \langle 0, w = 0, k_1 = \frac{m}{R}, k_\alpha, k_\perp | \tilde{\gamma}_1 \beta_1 D | B_0 \rangle \\ &= \frac{N_p L_s^2}{8\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{d^2 z}{|z|^2} |z|^{\frac{L_s^2}{2} k_\perp^2} (2\pi)^{p+1} \delta^{(p+1)}(k_\alpha) . \end{aligned} \quad (3.117)$$

Haciendo el cambio de variable  $t \rightarrow \tau = \frac{1}{t}$

$$\langle 0, w = 0, k_1 = \frac{m}{R}, k_\alpha, k_\perp | \gamma_1 \tilde{\beta}_1 D | B_0 \rangle = -N_p (2\pi)^{p+1} \delta^{p+1}(k_\alpha) \frac{1}{k_\perp^2} . \quad (3.118)$$

Tomando la transformada de Fourier, obtenemos

$$-N_p \sum_n \delta(x - 2\pi n R) \frac{1}{(d-p-4) r_\perp^{d-p-4} \Omega_{d-p-3}} . \quad (3.119)$$

De la misma manera

$$\langle 0, w = 0, k_1 = \frac{m}{R}, k_\alpha, k_\perp | \alpha_1^i \tilde{\alpha}_1^j D | B_0 \rangle , \quad (3.120)$$

tenemos

$$-N_p S^{ij} \sum_n \delta(x - 2\pi n R) \frac{1}{(d-p-4)r_\perp^{d-p-4} \Omega_{d-p-3}}. \quad (3.121)$$

Considerando el valor para  $N_p = K L_s^{\frac{d-2p-4}{2}} 2^{\frac{2-d}{4}} (2\pi)^{\frac{d-2p-3}{2}}$  y  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} (2\pi)^{\frac{d-3}{2}} G_s L_s^{\frac{d-2}{2}}$ , concluimos que

$$\begin{aligned} (h_{\gamma\tilde{\beta}})^B &= (h_{\tilde{\gamma}\beta})^B = -\kappa (h_{\tilde{\gamma}\beta}^{can})^B \\ &= 2^{-\frac{d}{4}} (2\pi)^{d-3-p} K G_s L_s^{d-p-3} \sum_n \delta(x - 2\pi n R) \frac{1}{(d-p-4)r_\perp^{d-p-4} \Omega_{d-3-p}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} (h_{ij})^B &= 2\kappa (h_{ij}^{can})^B \\ &= -2^{1-\frac{d}{4}} S^{ij} (2\pi)^{d-3-p} K G_s L_s^{d-p-3} \sum_n \delta(x - 2\pi n R) \frac{1}{(d-p-4)r_\perp^{d-p-4} \Omega_{d-3-p}} \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 3.3. Descripción en el fondo de gravedad

El fondo de gravedad para el caso de la D-brana transversal es de acuerdo a GÜijosa

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{l_s^2} &= \frac{1}{L_s^2} \left[ -\frac{1}{\delta} H^{-\frac{1}{2}} dt^2 + \frac{1}{\delta} H^{\frac{1}{2}} dx^2 + H^{-\frac{1}{2}} (dx_2^2 + \dots + dx_{p+1}^2) \right. \\ &\quad \left. + H^{\frac{1}{2}} (dx_{p+2}^2 + \dots + dx_d^2) \right] \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\frac{B_{01}}{l_s^2} = \frac{1}{L_s^2} \left( \frac{1}{\delta} - \mu \right) \quad (3.125)$$

$$H = 1 + \delta' \quad (3.126)$$

$$\delta' \equiv \left( \frac{R_D}{r_\perp} \right)^{d-3-p} n_p \delta \left( \frac{x}{r_\perp} \right) \quad (3.127)$$

$$n_p = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{d-4-p}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{d-2-p}{2} \right)} \quad (3.128)$$

$$R_D^{d-3-p} = (2\sqrt{\pi})^{d-5-p} \Gamma \left( \frac{d-3-p}{2} \right) G_s K L_s^{d-3-p} \quad (3.129)$$

$$(3.130)$$

$$H^{\frac{1}{2}} = (1 + \delta')^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta' - \frac{1}{8}\delta'^2 \quad (3.131)$$

$$H^{-\frac{1}{2}} = (1 + \delta')^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\delta' - \frac{3}{8}\delta'^2 . \quad (3.132)$$

En la definición de la teoría hemos introducido el parámetro  $\delta$  que es el que define el límite de la teoría de cuerdas enrolladas. En este caso hay que notar que este parámetro  $\delta$  es independiente de  $\delta'$  definido en (3.127). Como veremos, en el límite cuando nos encontramos lejos del horizonte de la D-brana  $\delta$  no aparece en las expresiones, de tal manera que todo nos queda en términos de  $\delta'$ .

La acción que resulta de insertar la métrica y  $B_{01}$  en la acción de Polyakov es

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z & \left[ \delta^{-1} (-H^{-\frac{1}{2}} \partial X^0 \bar{\partial} X^0 + H^{\frac{1}{2}} \partial X^1 \bar{\partial} X^1) \right. \\ & - (\delta^{-1} - \mu) (\partial X^0 \bar{\partial} X^0 - \partial X^1 \bar{\partial} X^0) \\ & + H^{-\frac{1}{2}} (\partial X^2 \bar{\partial} X^2 + \dots + \partial X^{p+1} \bar{\partial} X^{p+2}) \\ & \left. + H^{\frac{1}{2}} (\partial X^{p+2} \bar{\partial} X^{p+2} + \dots + \partial X^{d-1} \bar{\partial} X^{d-1}) \right] . \quad (3.133) \end{aligned}$$

En el límite lejos del horizonte de la D-brana, esto es, cuando  $\delta' \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} S \approx \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z & \left[ \frac{\mu}{2} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \frac{1}{2} (2\delta^{-1} - \mu) \partial \tilde{\gamma} \bar{\partial} \gamma + \frac{\delta'}{4} \delta^{-1} (\partial \gamma \bar{\partial} \gamma + \partial \tilde{\gamma} \bar{\partial} \tilde{\gamma}) \right. \\ & + \left( 1 - \frac{1}{2} \delta' \right) (\partial X^2 \bar{\partial} X^2 + \dots + \partial X^{p+1} \bar{\partial} X^{p+1}) \\ & \left. + \left( 1 + \frac{1}{2} \delta' \right) (\partial X^{p+2} \bar{\partial} X^{p+2} + \dots + \partial X^{d-1} \bar{\partial} X^{d-1}) \right] . \quad (3.134) \end{aligned}$$

En la acción anterior podemos observar que la parte de las  $X^i$  toma la forma deseada (acción de Gomis-Ooguri más corrección de orden  $\delta'$ ). Como  $\delta$  es el parámetro de la teoría de cuerdas enrolladas, podemos en particular considerar cuando  $\delta \rightarrow 0$ , para lo cual debemos introducir multiplicadores de Lagrange  $\beta, \tilde{\beta}$ . La acción equivalente a  $S$  para la parte de las  $\gamma$ 's es entonces la siguiente

$$\begin{aligned} S_{\parallel} = \int \frac{d^2z}{2\pi} & \left[ \frac{\lambda}{2} \partial \gamma \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} - \frac{1}{\delta^{-1} - \frac{\lambda}{2}} \beta \tilde{\beta} + \frac{\delta' \delta^{-1}}{4 (\delta^{-1} - \frac{\lambda}{2})} (\beta \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \partial \gamma) \right. \\ & \left. - \frac{\delta'^2}{16} \left( \delta^{-1} + \frac{\lambda}{2} \right) \right] . \quad (3.135) \end{aligned}$$

Como resultado de llevar a cabo este procedimiento, la acción en términos de  $\beta$ ,  $\tilde{\beta}$  no diverge cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Tomando el límite y conservando los primeros términos a orden  $\delta'$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 S = S_{GO} &+ \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z \left( \frac{\delta'}{4} \beta \bar{\partial} \tilde{\gamma} + \frac{\delta'}{4} \tilde{\beta} \partial \gamma \right) \\
 &+ \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z \left( -\frac{1}{2} \delta' \right) (\partial X^2 \bar{\partial} X^2 + \dots + \partial X^{p+1} \bar{\partial} X^{p+1}) \\
 &+ \frac{1}{2\pi L_s^2} \int d^2z \left( \frac{1}{2} \delta' \right) (\partial X^{p+2} \bar{\partial} X^{p+2} + \dots + \partial X^{d-1} \bar{\partial} X^{d-1}) \Big],
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

que es la acción de Gomis-Ooguri más una corrección de orden  $\delta'$ .

Los coeficientes que dan la corrección a la métrica son

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \beta \bar{\partial} \tilde{\gamma} \\ \tilde{\beta} \partial \gamma \end{array} \right\} &\rightarrow h_{\gamma\tilde{\beta}} = h_{\tilde{\gamma}\beta} = \frac{1}{4} \left( \frac{R_D}{r_\perp} \right)^{d-3-p} n_p \delta \left( \frac{x}{r_\perp} \right) \\
 &= \frac{KG_s}{2(d-4-p)} \frac{(2\pi)^{d-3-p} L_s^{d-3-p}}{r_\perp^{d-4-p} \Omega_{d-3-p}} \sum_m \delta(x - 2\pi m R),
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

$$\partial X^i \bar{\partial} X^j \rightarrow h_{ij} = -\frac{KG_s S^{ij}}{(d-4-p)} \frac{(2\pi)^{d-3-p} L_s^{d-3-p}}{r_\perp^{d-4-p} \Omega_{d-3-p}} \sum_m \delta(x - 2\pi m R), \tag{3.138}$$

donde  $S^{ij}$  es la matriz definida en (3.94).

Ya que hemos obtenido la corrección a la métrica en este marco, podemos hacer la comparación con la que se obtiene a partir de la D-brana transversal. Podemos ver que sustituyendo  $d = 10$  en (3.122), (3.123) y (3.137), (3.138) los resultados que se obtienen son los mismos. Así, este resultado verifica que las 2 descripciones son equivalentes.



# Capítulo 4

## Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos verificado explícitamente como podemos obtener la primera corrección a la métrica, por encima del fondo plano, debida a la presencia de una D-brana en la teoría de cuerdas enrolladas. El cálculo lo llevamos a cabo usando el formalismo de estado de borde, que nos permite determinar el estado inicial en que una cuerda cerrada es emitida por una D-brana. Así, se obtuvo el estado de borde para los dos diferentes tipos de D-branas presentes en la teoría, las D-branas longitudinales y las D-branas transversales. La cuerda emitida por la D-brana contiene una superposición de una infinidad de estados de cuerda cerrada. Al aislar la parte correspondiente al gravitón en la cuerda emitida, se obtiene la primera corrección a la métrica por encima del fondo plano debida a la presencia de la D-brana. Por otra parte, tomando como base la descripción de la teoría de cuerdas enrolladas en términos del fondo curvo y el campo de norma  $B_{\mu\nu}$  asociados a una brana negra, desarrollamos un método, análogo al usado en [2], para obtener la acción que define la teoría en términos de la acción correspondiente a un fondo plano más una pequeña corrección, todo esto en el límite lejos del horizonte de la brana negra. Usando la corrección a la acción, obtuvimos la métrica por encima del fondo plano para la región asintóticamente plana. Este resultado lo comparamos con la métrica que se determinó a partir de la teoría en términos de D-branas obteniéndose un acuerdo perfecto.

Como hemos mencionado anteriormente en este trabajo, la teoría de cuerdas enrolladas se descubrió en un esfuerzo por entender la aparición de la no conmutatividad en la teoría de cuerdas. En los primeros estudios que se hicieron se encontraron límites de bajas energías en los que la dinámica de una teoría de cuerdas se podía describir por una teoría de norma que presentaba no conmutatividad entre dos coordenadas espaciales [6]. En la búsqueda de una teoría que exhibiera no conmutatividad entre

las coordenada temporal y espaciales se encontró la teoría de cuerdas enrolladas [7]. Esta teoría, a diferencia de lo que se había encontrado anteriormente, no se podía reducir a bajas energías a una teoría de campo en un espacio no conmutativo.

Se han estudiado diferentes aspectos de la teoría de cuerdas enrolladas. Lo que se encontró en un principio fue un subsector de la teoría, al que se le llamó teoría de cuerdas abiertas no conmutativas (NCOS) [7], que era una teoría de cuerdas definida sobre una D-brana en  $p+1$  dimensiones, en la cual no había cuerdas cerradas presentes. Al compactificar la dirección en la que apunta el campo de norma asociado al límite se demostró que la teoría que resultaba contenía también cuerdas cerradas con un enrollamiento estrictamente positivo en la dirección compacta [16]. Posteriormente se mostró que el límite mediante el cual se obtenía la teoría de cuerdas se podía definir incluso en ausencia de D-branas [1, 2] y se logró encontrar una acción que definía la teoría sin hacer referencia a ningún límite [2]. De esta manera, lo que se obtuvo finalmente es lo que se conoce como la teoría de cuerdas enrolladas, que es una teoría definida en 10 dimensiones. También se pudo mostrar que la teoría de cuerdas enrolladas contiene estados de cuerda excepcionales con enrollamiento cero. En particular se encontró que la teoría contenía un gravitón que se encarga de mediar las interacciones de larga distancia, pero que es newtoniano en el sentido de que se propaga instantáneamente y es despreciable como estado asintótico [14], por lo cual se pensaba que en la teoría de cuerdas enrolladas no estaba presente la gravedad convencional.

Con los cálculos que hemos llevado a cabo, en primer lugar, confirmamos que la gravedad está presente en la teoría de cuerdas enrolladas en un sentido más amplio de lo que se pensaba. A pesar de no contener gravitones en la manera usual, i.e., como estados asintóticos, la teoría también incluye estados (obtenidos como soluciones a las ecuaciones de movimiento) donde el espacio-tiempo es curvo y puede entonces sostener fluctuaciones que se transmiten a velocidad finita.

En segundo lugar, al mostrar como es posible reproducir la métrica del espacio-tiempo debido a un fondo de brana negra a partir de la descripción en presencia de D-branas aportamos evidencia a favor del punto de vista de que la relación que existe entre las dos descripciones de la teoría no es análoga a la que se presenta en la dualidad de Maldacena, como se pensó anteriormente [17], sino que es aquella que se presenta entre un bonche de D-branas y un fondo de brana negra, análogo a lo que plantea Polchinski [11]. La primera de estas perspectivas se podría adoptar en el caso en el que la teoría sobre las D-branas se desacoplara de aquella en el espacio-tiempo que la rodea. Esto es lo que se pensó que sucedía para la llamada teoría NCOS, que solo contenía cuerdas abiertas y que por lo tanto no interactuaba con el espacio-tiempo circundante cuyas excitaciones son las cuerdas cerradas. Sin embargo, como

sabemos ahora, la teoría NCOS es un subsector de la teoría de cuerdas enrolladas, en la cual, la teoría sobre las D-branas sigue estando acoplada a la teoría en el espacio-tiempo circundante y es muy importante para describir su dinámica, como se puede corroborar con el cálculo que se realizó en este trabajo.

En el presente trabajo, al momento de hacer los cálculos, nos hemos restringido al caso en el que tenemos enrollamiento cero ( $w = 0$ ). No obstante, este no es un requisito del formalismo y este puede ser también usado para calcular los valores esperados de otros campos además de la métrica [3]. Este cálculo podría ser comparado con resultados anteriores [8] que se han obtenido usando el formalismo en términos de amplitudes de dispersión entre cuerdas y D-branas.

Otra dirección en la que se podría ser interesante continuar el trabajo que hemos realizado es en lo que se llama la teoría de membranas enrolladas. Esta teoría es un límite de la teoría M, análogo al de la teoría de cuerdas enrolladas. Desde que aparecieron los primeros resultados en teoría de cuerdas enrolladas se analizaron sus correspondientes teorías de membranas, obteniéndose algunos resultados análogos, tal como la acción equivalente a la de Gomis-Ooguri para una membrana [15]. En este sentido sería interesante saber si existe un formalismo análogo al estado de borde para teorías de membranas y si puede ser utilizado para obtener correcciones a lo que serían los campos en estas teorías.

# Apéndice A

## A.1. Normalización de los modos de cuerda

Para poder comparar la métrica que se obtiene de la teoría de cuerdas en un fondo plano en presencia de un arreglo de D-branas con la métrica en la teoría en términos de un fondo curvo es necesario determinar la normalización de los operadores de vértice de los estados. A continuación veremos como a partir de la normalización de los operadores de cuerda podemos determinar la normalización del operador para el gravitón. Una vez que conocemos la normalización del operador de vértice del gravitón podemos comparar la acción que se obtiene con este vértice normalizado con la acción que se obtiene en la teoría dual con un fondo curvo.

Para comenzar, ejemplificamos este procedimiento usando el operador estándar del gravitón

$$\mathcal{V}_n = g_c \mathcal{N} \left( i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \right)^2 \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} \epsilon_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

con  $g_c \mathcal{N} = \frac{\kappa}{2\pi}$ . Como sabemos, insertar un operador de vértice del gravitón equivale, a primer orden, a tener una acción de Polyakov en un fondo curvo

$$\begin{aligned} -S_P[X] &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\eta_{\mu\nu} + 4\pi g_c \mathcal{N} e^{ik \cdot X} \epsilon_{\mu\nu}) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}^{can}(X)) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde hemos identificado  $h_{\mu\nu}^{can} = e^{ik \cdot X} \epsilon_{\mu\nu}$ . La constante de normalización que aparece en el operador de vértice (A.1) del gravitón está fijada por la normalización de los modos  $\alpha_m^\mu$

$$\alpha_m^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z). \quad (\text{A.3})$$

de tal manera que para cada derivada parcial en el operador de vértice aparece un factor de  $i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}$ .

Por otra parte, de la acción con un fondo  $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)$ , donde  $h_{\mu\nu}$  es la primera corrección por encima de la métrica plana

$$-S_P^G[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X)) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \quad (\text{A.4})$$

Haciendo la comparación entre (A.4) y (A.2) podemos concluir que

$$h_{\mu\nu} = 2\kappa h_{\mu\nu}^{\text{can}}. \quad (\text{A.5})$$

De esta manera obtenemos la relación entre la métrica en un fondo curvo y la métrica canónicamente normalizada.

Seguiremos ahora un procedimiento análogo para la teoría de cuerdas enrolladas con un D-brana longitudinal. Tenemos que

$$\beta_n = + \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \beta(z), \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{\beta}_n = - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{-n} \tilde{\beta}(\bar{z}), \quad (\text{A.7})$$

$$i \frac{wR}{L_s} = + \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial \gamma(z), \quad (\text{A.8})$$

$$-i \frac{wR}{L_s} = - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{\partial} \gamma(\bar{z}), \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_n = -\frac{1}{n} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial \gamma(z) \quad n \neq 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{\gamma}_n = +\frac{1}{n} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{-n} \bar{\partial} \tilde{\gamma}(\bar{z}) \quad n \neq 0. \quad (\text{A.11})$$

Usando el mapeo estado-operador podemos identificar el operador que corresponde al estado de vacío, ésto es

$$\beta_{n \geq 0} |1\rangle \leftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z \beta(z) |1\rangle = 0. \quad (\text{A.12})$$

De modo similar

$$w |1\rangle = 0 = \gamma_{n > 0} |1\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, el operador que corresponde al estado de vacío con la normalización canónica es

$$|0, 0\rangle \leftrightarrow g_c \mathcal{N} \cdot 1. \quad (\text{A.14})$$

Una vez hecho esto podemos identificar a los operadores que corresponden a los estados que se obtienen al actuar con los operadores de creación

$$\beta_{-n}|0, 0\rangle \leftrightarrow g_c \mathcal{N} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-n} \left[ \beta(0) + z\partial\beta(0) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1}\beta(0) + \dots \right]. \quad (\text{A.15})$$

Por lo tanto

$$\beta_{-n} \simeq \frac{1}{(n-1)!} \partial^{n-1}\beta(0), \quad (\text{A.16})$$

y análogamente

$$\tilde{\beta}_{-n} \simeq \frac{1}{(n-1)!} \bar{\partial}^{n-1}\tilde{\beta}(0). \quad (\text{A.17})$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento para los operadores  $\gamma_{-n}$  y  $\tilde{\gamma}_{-n}$  tenemos

$$\gamma_{-n} \simeq \frac{1}{n!} \partial^n \gamma(0), \quad (\text{A.18})$$

$$\tilde{\gamma}_{-n} \simeq \frac{1}{n!} \bar{\partial}^n \tilde{\gamma}(0). \quad (\text{A.19})$$

Con esto, podemos identificar el operador de vértice correspondiente a los estados que nos interesan

$$\beta_{-1}\tilde{\beta}_{-1}|0, 0\rangle \leftrightarrow \mathcal{V}_b = g_c \mathcal{N} \int d^2z \beta\tilde{\beta}, \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma_{-1}\tilde{\gamma}_{-1}|0, 0\rangle \leftrightarrow \mathcal{V}_g = g_c \mathcal{N} \int d^2z \partial\gamma\bar{\partial}\tilde{\gamma}. \quad (\text{A.21})$$

Una vez más el insertar éstos operadores de vértice en la acción corresponde a tener términos adicionales en la acción

$$-S_{\text{GO}} = -S_{\text{GO}}^{\text{std}} - \frac{\kappa}{2\pi} \int d^2z \left( g_{\text{can}}(X) \partial\gamma\bar{\partial}\tilde{\gamma} + b_{\text{can}}(X) \beta\tilde{\beta} \right). \quad (\text{A.22})$$

Comparando con los términos que se tienen en la acción con un fondo

$$-S_{\text{GO}}^{\text{fondo}} = -S_{\text{GO}}^{\text{std}} - \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left( g(X) \partial\gamma\bar{\partial}\tilde{\gamma} + b(X) \beta\tilde{\beta} \right), \quad (\text{A.23})$$

obtenemos

$$-\frac{1}{2\pi}g(X) = \frac{\kappa}{2\pi}g_{\text{can}}(X) \quad \Rightarrow \quad g(X) = -\kappa g_{\text{can}}(X) \quad (\text{A.24})$$

$$-\frac{1}{2\pi}b(X) = \frac{\kappa}{2\pi}b_{\text{can}}(X) \quad \Rightarrow \quad b(X) = -\kappa b_{\text{can}}(X) . \quad (\text{A.25})$$

Las ecuaciones anteriores, nos permiten comparar directamente, leyendo el coeficiente de los términos en la acción, los resultados obtenidos al calcular valores de expectación. Por completez, notese que

$$|0, 0, k_0, k_1\rangle = \exp[iL_s(k_+\gamma_0 + k_-\tilde{\gamma}_0)]|0, 0; 0\rangle \leftrightarrow g_c\mathcal{N} : e^{iL_s[k_+\gamma(0)+k_-\tilde{\gamma}(0)]} : \quad (\text{A.26})$$

Concluimos que para  $w = 0$

$$\begin{aligned} p_+|0, 0; k_0, k_1\rangle &= \frac{i\beta_0}{L_s}|0, 0; k_0, k_1\rangle = k_+|0, 0; k_0, k_1\rangle \\ &\leftrightarrow \frac{i}{L_s} \oint \frac{dz}{2\pi i} \beta(z) : e^{iL_s k_+ \gamma(0) + \dots} : g_c\mathcal{N} \\ &= k_+ g_c\mathcal{N} : e^{iL_s[k_+\gamma(0)+k_-\tilde{\gamma}(0)]} : \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Un procedimiento análogo se usa para obtener la normalización en el caso de una D-brana transversal.

## A.2. Series de Fourier

Para una función periódica con periodo  $2\pi R$  podemos obtener la serie de Fourier

$$f(x) = \sum_n f_n e^{-i\frac{n}{R}x} \quad (\text{A.28})$$

donde

$$f_n = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\pi R}^{\pi R} dx f(x) e^{i\frac{n}{R}x} \quad (\text{A.29})$$

En el caso en el que estamos interesados

$$f(x) = \sum_m \delta(x - 2\pi m R) \quad (\text{A.30})$$

donde la suma sobre  $m$  garantiza que  $f(x)$  es periódica. Ésto implica

$$f_n = \frac{1}{2\pi R}. \quad (\text{A.31})$$

Entonces

$$\sum_m \delta(x - 2\pi mR) = \frac{1}{2\pi R} \sum_n e^{-i\frac{n}{R}x} \quad (\text{A.32})$$

### A.2.1. Deltas discretas

$$\begin{aligned} \sum_m \delta(\hat{x} - 2\pi mR - y^i) |p=0\rangle &= \frac{1}{2\pi R} \sum_n e^{-i\frac{n}{R}(\hat{x}-y^1)} |p=0\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_n \int_{-\pi R}^{\pi R} dx e^{-i\frac{n}{R}(\hat{x}-y^1)} |x\rangle \langle x|p=0\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_n \sum_m \int_{-\pi R}^{\pi R} dx e^{-i\frac{n}{R}(x-y^1)} \langle p = \frac{m}{R} | x \rangle |p = \frac{m}{R}\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi R)^2} \sum_n \sum_m \int_{-\pi R}^{\pi R} dx e^{-i\frac{x}{R}(n-m)} e^{i\frac{n}{R}y^1} |p = \frac{m}{R}\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_n \sum_m \delta_{nm} e^{i\frac{n}{R}y^1} |p = \frac{m}{R}\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi R} \sum_n e^{i\frac{n}{R}y^1} |p = \frac{n}{R}\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

## A.3. Unidades

El sistema de unidades que que usamos en este trabajo son aquellas en las que las constantes fundamentales se igualan a la unidad.

$$\hbar = c = 1 . \quad (\text{A.34})$$

Si adoptamos la convención en la que  $M$ ,  $L$ ,  $T$  representan unidades de masa, distancia y tiempo. Dado que  $[c] = L/T$ , la condición  $c=1$  implica que

$$L = T . \quad (\text{A.35})$$

Así,  $[\hbar] = ML^2/T = ML$ . Entonces, si  $\hbar = 1$  obtenemos

$$M = \frac{1}{L} = \frac{1}{T} . \quad (\text{A.36})$$



# Bibliografía

- [1] U. H. Danielsson, A. Güijosa and M. Kruczenski, “IIA/B, wound and wrapped,” JHEP **0010**, 020 (2000), [hep-th/0009182](#).
- [2] J. Gomis and H. Ooguri, “Non-relativistic closed string theory,” [hep-th/0009181](#).
- [3] P. Di Vecchia and A. Liccardo, “D branes in string theory I,” [hep-th/9912161](#).
- [4] J. Polchinski, *String Theory*, Cambridge University Press (1998), Vol. 1.
- [5] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, “Superstring Theory,” Cambridge University Press, 1987.
- [6] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” JHEP **9909**, 032 (1999), [hep-th/9908142](#).
- [7] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, “Strings in background electric field, space/time non-commutativity and a new noncritical string theory,” JHEP **0006**, 021 (2000), [hep-th/0005040](#).
- [8] F. Kristiansson and P. Rajan, “Wound string scattering in NCOS theory,” [hep-th/0011054](#).
- [9] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi and S. A. Yost, “Open Strings In Background Gauge Fields,” Nucl. Phys. B **280**, 599 (1987).
- [10] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [[arXiv:hep-th/9711200](#)].
- [11] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724 [[arXiv:hep-th/9510017](#)].

- [12] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” Nucl. Phys. B **360** (1991) 197.
- [13] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, ‘NEW CONNECTIONS BETWEEN STRING THEORIES,’ Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 2073.
- [14] U. H. Danielsson, A. Guijosa and M. Kruczenski, “Newtonian gravitons and D-brane collective coordinates in wound string theory,” JHEP **0103** (2001) 041 [arXiv:hep-th/0012183].
- [15] J. A. Garcia, A. Guijosa and J. D. Vergara, “A membrane action for OM theory,” Nucl. Phys. B **630** (2002) 178 [arXiv:hep-th/0201140].
- [16] I. R. Klebanov and J. M. Maldacena, “1+1 dimensional NCOS and its U(N) gauge theory dual,” Int. J. Mod. Phys. A **16** (2001) 922 [Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000) 283] [arXiv:hep-th/0006085].
- [17] R. Gopakumar, J. M. Maldacena, S. Minwalla and A. Strominger, “S-duality and noncommutative gauge theory,” JHEP **0006** (2000) 036 [arXiv:hep-th/0005048].
- [18] I. R. Klebanov, “TASI lectures: Introduction to the AdS/CFT correspondence,” arXiv:hep-th/0009139.
- [19] J. de Boer, “Introduction to the AdS/CFT correspondence,” *Prepared for 10th International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions (SUSY02), Hamburg, Germany, 17-23 Jun 2002*