UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# DENDRITAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**M A T E M Á T I C O**

P R E S E N T A :

**RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ**

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA

2007

**FACULTAD DE CIENCIAS**

VNIVERSDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

**División de Estudios Profesionales**

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales**
**Facultad de Ciencias**
**P r e s e n t e .**

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**"Dendritas"**

realizado por **Hernández Gutiérrez Rodrigo Jesús,** con número de cuenta **40300327-7,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Matemáticas**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tutor(a) Propietario | Dr. | Alejandro Illanes Mejía | |
| *Propietario* | Dra. | Verónica Martínez de la Vega y Mansilla | |
| Propietario | Dr. | Jorge Marcos Martínez Montejano | |
| Suplente | M. en C. | José Guadalupe Anaya Ortega | |
| Suplente | Dr. | Fernando Orozco Zitli | |

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, D.F., a 2[illegible] de marzo de 2007.
**EL COORDINADOR DEL COMITÉ DE TITULACIÓN**
**DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

**M. EN C. AGUSTÍN ONTIVEROS PINEDA**

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

**Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.**

# Agradecimientos

Quiero agradecer a las personas que me han apoyado para llegar hasta este punto en mi vida, que es un paso más en mi desarrollo profesional en el mundo de las Matemáticas.

A mi papá y a mi mamá, que desde pequeño me han guiado en el camino correcto hacia el éxito, siempre motivandome a realizar el mejor esfuerzo en mi vida.

A mi hermano, Mauricio, que me ha mostrado que los abogados no tienen que ser malignos.

A mis abuelitos Luis, Pancito y Riquita, que me hubiera gustado que vieran este logro.

Al resto de mi familia por los apoyos (ej. libros que tienen la primera hoja rota) que me han brindado a lo largo de estos años.

A Alejandro Illanes que desde que lo conozco ha sido un ejemplo y motivación para mi desarrollo en el área de las Matemáticas.

A Vero, Alejandro Bravo, Malú, Toño Gomez, por ser mis maestros desde mis tiempos de olimpico.

A Omar Antolín, por ser un sujeto con demasiado poder matemático que siempre me inspiro.

A la Maestra Romana y al Ing. Villagomez, que me encaminaron al mundo de las Matemáticas.

Al Instituto de Matemáticas de la UNAM por brindarme la beca de lugar.

A todos mis maestros a lo largo de mi vida como estudiante y a toda la gente que de alguna forma ha contribuido con su granito de arena a formarme como ser humano.

Sean felices asi como lo soy o más.

# Índice general

# Índice de figuras

# Lista de Caracterizaciones

# Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico compacto conexo con más de un punto. Hay muchos ejemplos de continuos, desde el más simple que es el intervalo $[0, 1]$ hasta muchos subcontinuos del plano que no se pueden dibujar, pasando por supuesto por la circunferencia, el disco, los cuadrados, el toro, los cubos, los cubos de dimensiones mayores y el llamado "Cubo de Hilbert", el cual es un producto numerable de intervalos, y que contiene copias topológicas de cualquier otro continuo.

Si uno busca los continuos más sencillos, puede uno empezar uniendo arcos (los arcos son los continuos homeomorfos al intervalo $[0, 1]$), de uno en uno y pegándolos usando sus extremos. Con este método se pueden obtener todas las gráficas finitas. Las gáficas finitas que no tienen ciclos, se llaman *árboles* y, podríamos pensar que son los continuos más simples.

Hablando de complejidad, los siguientes continuos que se podrán construir, se podrían formar uniendo una cantidad numerable de arcos, teniendo cuidado de no formar cíclos y de obtener continuos con la propiedad de conexidad local. Los continuos con estas propiedades se llaman *dendritas* y como hemos dicho, se pueden considerar como los objetos más simples dentro de la categoría de los continuos.

No se vaya usted a confundir y caiga en la tentación de pensar que las dendritas son triviales. Ciertamente éstas tienen propiedades que las hacen ser relativamente sencillas. Por ejemplo, todas ellas pueden encajarse en el plano $\mathbb{C}$, de hecho todas ellas pueden encajarse en la *Dendrita Universal*, descrita en el capítulo 5. Sin embargo, como verá usted a lo largo de este trabajo, las dendritas satisfacen muchas propiedades topológicas de las cuales hay una buena cantidad que no son inmediatas ni evidentes.

Este trabajo nació de la idea de recopilar en una sola monografía a todas las caracterizaciones topológicas de las dendritas. ¡No lo conseguimos! Pero sí incluimos la mayoria de las caracterizaciones conocidas.

Esta tesis está basada en la excelente recopilación de caracterizaciones de las dendritas que hicieron los profesores Janusz J. Charatonik y Wlodzimierz J. Charatonik y que se publicó en *"Dendrites", Aportaciones Matemáticas Comunicaciones, Soc. Mat. Mex., vol. 22, pp. 227-253 (1998).* En ella, los autores además de enlistar todas las caracterizaciones conocidas en ese tiempo, ofrecieron referencias donde se podían consultar las demostraciones respectivas.

En nuestro trabajo nos dimos a la tarea de presentar, aproximadamente tres cuartas partes de estas caracterizaciones, con sus pruebas.

Nos hubiera gustado, poner las pruebas de manera que las entendiera cualquier persona que hubiera tomado un curso básico de topología general, de hecho ésta era nuestra primera idea, pronto descubrimos que hacer esto hubiera requerido por lo menos el doble de páginas y de tiempo. Como este último recurso (el tiempo) es limitado para un estudiante que quiere continuar sus estudios de posgrado, tuvimos que apoyarnos en algunos resultados ya conocidos, sin incluir su prueba.

De manera que esta tesis está dirigida a personas que hayan tomado un curso de topología general y que tengan un conocimiento general de la teoría de los continuos y los hiperespacios de éstos. Sin embargo, si usted está dispuesto a creer algunos hechos de los continuos y sus hiperespacios (los cuales son mencionados explícitamente en el trabajo), entonces podrá usted seguir este trabajo sin gran problema.

Si usted quiere profundizar en este tema, por supuesto que mi primera recomendación es terminar de leer el trabajo de los profesores Charatonik. También quiero mencionar aquí que, aunque las dendritas son bastante simples, todavía hay problemas sobre ellas que nadie ha podido resolver. Puede usted consultar algunos de ellos en el artículo panorámico [OP].

# Capítulo 1

# Preliminares

Primero aclaremos que, en este trabajo, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ incluye al 0. Dado un espacio topológico $X$, denotemos su topología por $\tau_X$. En este trabajo en vez de escribir "$U$ es abierto en la topología $\tau_X$", escribiremos $U \in \tau_X$. En particular escribiremos $\tau = \tau_X$ cuando no haya posibilidad de confusión. En un espacio $X$ con una topología dada, escribamos, para cada $U \subset X$, su cerradura en $X$ como $\overline{U}^X$ y su interior en $X$ como $U^o$. Cuando no haya posibilidad de confusión sólo escribamos $\overline{U}^X = \overline{U}$. Un espacio topológico $X$ es *localmente conexo* (*lc*) en un punto $p \in X$ si para todo $U \in \tau$ con $p \in U$, existe un conjunto conexo $V \in \tau$ tal que $p \in V \subset U$. En este trabajo, la frase "para casi todo" significará "para todos excepto un número finito". Abreviemos la frase "sin pérdida de generalidad" como *spg.* También adoptemos la convención de que para un espacio métrico $S$, $B_r(p)$ es la bola abierta con centro en $p \in S$ y radio $r$. Dado un espacio métrico $X$ para cada punto $p \in X$ y cualquier subconjunto $A \subset X$ con $A \neq \emptyset$ podemos definir la distancia de $p$ a $A$ como $d(p, A) = \text{ínf}\{d(p, x) : x \in A\}$.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. En algunas ocasiones relajaremos la condición de ser metrizable a sólo ser $T_1$ o $T_2$. Diremos que un espacio topológico $X$ es un *continuo* $T_1$ si es $T_1$, conexo y compacto y diremos que $X$ es un *continuo* $T_2$ si es $T_2$, conexo y compacto. Notemos que los continuos son, en particular, continuos $T_2$ y los continuos $T_2$ son, en particular, continuos $T_1$. Algunas de las propiedades que usaremos de los continuos se pueden demostrar sin necesidad de la métrica, como el lector notará al consultar las referencias que daremos, por lo que también serán válidas para continuos $T_1$ o $T_2$. Sin embargo, para este trabajo cuando usemos la palabra continuo sin ponerle $T_1$ o $T_2$, nos referiremos a los espacios métricos conexos y compactos.

Un espacio es *separable* si contiene un subconjunto denso y numerable, en particular los continuos son separables. Definimos, para un espacio métrico $X$ con métrica acotada $d$, el diámetro $diam_d : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ como $diam_d(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$, si $A \neq \emptyset$ y $diam(\emptyset) = 0$. Una vez más, cuando no haya confusión con la métrica d, escribiremos $diam = diam_d$. En particular, en los continuos recordemos que todas las métricas son acotadas, por la compacidad. Llamemos a cualquier conjunto homeomorfo a $I = [0, 1]$ un *arco* y a cualquier conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ una *circunferencia*. Un *encaje* de $X$ en $Y$ es una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos tal que $f$ es un homeomorfismo sobre su imagen. De esta manera, diremos que $X$ contiene circunferencias si existe un encaje de $\mathbb{S}^1$ en $X$.

Entonces diremos que una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene circunferencias. El objetivo de esta tesis será el de enumerar varias equivalencias a la definición de dendrita. Al principio las equivalencias parecerán muy simples; sin embargo, conforme avance el desarrollo de los temas, se llegará a equivalencias que cada vez requieren de resultados más avanzados y especializados en la teoría de los continuos e hiperespacios. Empezaremos en esta sección a conocer, la mayoría sin demostraciones, la teoría que sustenta a los continuos en general. Se dará referencia de donde encontrar las pruebas de los resultados que se presenten. La razón de la omisión es que están fuera del objetivo de este trabajo.

## 1.1. Espacios de Peano

Un *Espacio de Peano* es un espacio topológico lc en todos sus puntos. Adicionalmente, si se pide que sea continuo, se le llama *Continuo de Peano*. Para abreviar, escribamos lc en vez de Peano, fijándonos en que es distinto decir "X es lc en p" que "X es lc". Hay varias formas equivalentes de decir "$X$ es lc". Consideremos las siguientes definiciones.

*cik* $X$ *es conexo en pequeño* (en alemán, *"im kleinen"*) en $p \in X$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ con $p \in U$ existe un subconjunto conexo $V \subset X$ con $p \in V^o \subset V \subset U$.

*ulc* $X$ con métrica $d$ es *uniformemente localmente conexo* si y sólo si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, existe un subconjunto conexo $K \subset X$ con $x, y \in K$ y $diam(K) < \epsilon$.

*ulac* $X$ con métrica $d$ es *uniformemente localmente arcoconexo* si y sólo si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ y $x \neq y$, existe un arco entre $x$ y $y$, $\alpha \subset X$ con $diam(\alpha) < \epsilon$.

A un subconjunto $V \subset X$ tal que $x \in V^o$, en general, le llamaremos "vecindad" de $x$, y cuando $V = V^o$ será una "vecindad abierta". Con esto, un conjunto $V$ como el de la definición de cik se llamará "vecindad conexa" de $x$. Es claro que lc en $p$ implica cik en $p$, sin embargo el recíproco no es cierto [W, 27.15, p. 201], aún así, ser de Peano es lo mismo que ser cik en todos sus puntos [W, 27.16, p. 201]. Otra forma de decir que un espacio es de Peano es diciendo que las componentes conexas de los abiertos son abiertas [W, 27.9, p. 200].

Existen dos resultados muy importantes para los continuos de Peano. El primero nos dice que todos los abiertos conexos en los continuos métricos de Peano son arcoconexos (*ac*) ([W, 31.2 y 31.C.1, p. 219, 222]). Abreviemos *localmente arcoconexo* como *lac*. Con esto se puede probar que los Continuos de Peano son ulac (y por lo tanto ulc) [W, 31.4, p. 221]. En particular,como además sabemos que ser uac o ulac implica ser lc [W, 31.B, p. 222], obtenemos que para los continuos, lc, lac, ulc y ulac son equivalentes. El segundo es el famoso *Teorema de Hahn-Mazurkiewicz* que nos dice que $X$ es un continuo de Peano si y sólo si existe una función continua y suprayectiva $f : I \to X$, la prueba se puede consultar en [W, 31.5, p. 221] o [N2, 8.14, p. 126]. Esto históricamente tiene un significado muy importante, ya que lo que uno piensa intuitivamente que es una curva no se ajusta a ser una imagen continua de $I$. El lector debe estar familiarizado con la famosa "Curva de Peano" la cual básicamente nos da una manera de expresar a $I \times I$ como imagen continua de $I$. En [Ar, 2.3, p. 36] se da una construcción de una función que lleva continuamente a $I$ sobre un triángulo relleno, que claramente es homeomorfo a $I \times I$.

## 1.2. Hiperespacios

Dado un continuo $X$, definimos los hiperespacios de $X$ como:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\} \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\} \end{aligned}$$

Para considerar estos conjuntos como espacios topológicos bastará dotar de una topología a $2^X$ pues $C(X)$ ya tendrá la topología inducida. Cabe resaltar que se pueden definir otros hiperespacios de X pero van mas allá del propósito de este trabajo. Dado $U \subset X$, cualquiera, definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Gamma(U) &= \{A \in 2^X : A \subset U\} \\ \Lambda(U) &= \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Llamemos *Topología de Vietoris*, $\mathscr{V}(X)$, a la topología generada tomando como subbase a la familia que consta de todos los conjuntos de la forma $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U)$ cuando $U \in \tau$. Se puede demostrar [N2, 4.5, p. 54] que una base para la topología de Vietoris es la formada por los conjuntos:

$$\langle U_1, \dots U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y para cada } i \in \{1, \dots, n\}, A \cap U_i \neq \emptyset \right\},$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \tau$. La topología $\mathscr{V}(X)$ se puede definir mediante una métrica. Ésta es llamada la *Métrica de Hausdorff* y puede definirse, dada la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que genera a $\tau$, de dos formas, la primera como

$$H_d(A, B) = \text{máx} \{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$$

para $A, B \in 2^X$. La definición que más nos da la idea de lo que significa la cercanía en esta topología se verá a continuación. Para esto primero necesitamos definir, para $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, la *nube alrededor de $A \in 2^X$ con radio $\epsilon$*:

$$N_d(A, \epsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in X \text{ con } d(x, a) < \epsilon\}$$

Una vez definidas las nubes, se puede demostrar que la métrica de Hausdorff también se puede escribir así:

$$H_d(A, B) = \text{ínf} \{\epsilon > 0 : A \subset N_d(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N_d(A, \epsilon)\}$$

Dado que los hiperespacios $2^X$ y $C(X)$ resultan ser métricos, tenemos que, para ellos, ya está definida la noción de convergencia. Existe una forma alternativa de tratar la convergencia en $2^X$. Dada una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset 2^X$, definimos:

$$\begin{aligned} \text{lím inf } A_i &= \{x \in X : \text{ para todo } U \in \tau \text{ con } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ &\qquad \text{para casi todo } i \in \mathbb{N}\} \\ \text{lím sup } A_i &= \{x \in X : \text{ para todo } U \in \tau \text{ con } x \in U,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ &\qquad \text{para una infinidad de números } i \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

a estos conjuntos se les llama *límite inferior* y *límite superior*, respectivamente, de la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sucede que entonces $A = \lim A_i$ si y sólo si $\liminf A_i = A = \limsup A_i$ [N2, 4.11, p. 57]. Como claramente $\liminf A_i \subset \limsup A_i$, para probar la convergencia simplemente se tiene que demostrar que $\limsup A_i \subset A \subset \liminf A_i$. Dos propiedades de los límites que nos interesan son que conservan contenciones y abren uniones. Esto es, dado un continuo $X$ y dos sucesiones convergentes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in 2^X$, $\lim(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n$ y además, si $A_n \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim A_n \subset \lim B_n$ [Ill1, 2.13, p. 28].

Por medio de sucesiones [Ill1, Teorema 4.2, p. 66] o usando el lema de Alexander de subbases [N2, 4.13, p. 59] se puede demostrar que el hiperespacio $2^X$ es compacto, y como una sucesión de subcontinuos converge a un subcontinuo [N2, 4.18, p. 61], obtenemos que también $C(X)$ resulta compacto. También se puede probar en este punto que $2^X$ es conexo, sin embargo, se puede llegar a que además es ac. Para esto, consideramos las funciones de Whitney, que se verán en una sección más adelante.

## 1.3. Continuos

Parece un poco extraño empezar con la sección de hiperespacios antes que con la de continuos, sin embargo, la convergencia con la métrica de Hausdorff es escencial para poder entender mejor varios aspectos de esta sección. Primero, llamemos a un conjunto *no degenerado* si consta de más de un punto. El primer resultado que estamos obligados a conocer cuando hablamos de continuos es el siguiente:

> Dado un continuo $X$ y una sucesión de subcontinuos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}, A_{i+1} \subset A_i$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in C(X)$.

La prueba de esta afirmacón se puede encontrar en cualquier libro que hable de continuos como [N2, 1.8, p. 6] o [Ill1, Corolario 4.4, p. 69]. Notemos que, de hecho, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \lim A_n$, por lo que podemos pensar que éste es un corolario del hecho que $C(X)$ es compacto. Hay una generalización de este resultado, para continuos $T_2$, en los cuales como sabemos que el hiperespacio $C(X)$ no resulta ser métrico, no podemos usar sucesiones, sino redes.

Llamemos a un conjunto $\Lambda$ *dirigido* si existe una relación $\prec$ en $\Lambda$ que cumple las propiedades siguientes

- si $\lambda \in \Lambda, \lambda \prec \lambda$

- si $\lambda_1 \prec \lambda_2$ y $\lambda_2 \prec \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \prec \lambda_3$
- dadas $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe $\lambda_3 \in \Lambda$ con $\lambda_1 \prec \lambda_3$ y $\lambda_2 \prec \lambda_3$

Una vez dado un conjunto dirigido $\Lambda$ y un conjunto $X$, podemos definir una *red* como una función $R : \Lambda \to X$ y una *subred* de R, dado otro conjunto dirigido $M$, como la composición $R \circ \phi$, donde $\phi : M \to \Lambda$ es una función creciente y cofinal (i.e., para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ con $\lambda \prec \phi(\mu)$). Notemos que las sucesiones en particular son redes, sin embargo las redes en general son "más grandes". También, como sucede con las sucesiones, normalmente los elementos de las redes se identifican con sus imágenes $R(\lambda) = R_\lambda$. En [W, Capítulo 4] se puede encontrar más material relacionado con las redes. Una red de conjuntos $(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ se dice que está *dirigida por la inclusión* si, para $\lambda_1 \prec \lambda_2$, tenemos que $Y_{\lambda_2} \subset Y_{\lambda_1}$. Con esto ya podemos enunciar la siguiente afirmación que generaliza al enunciado anterior.

**Teorema 1.1** *Sean un continuo $T_2$, $X$, un conjunto dirigido $\Lambda$ y una red de subcontinuos $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dirigida por la inclusión, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in C(X)$.*

*Demostración.* Tenemos que probar que $A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es distinto del vacío, cerrado y conexo. Si $A = \emptyset$, entonces $\{X - A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta para X, por lo que existe una subcubierta finita $\{X - A_{\lambda_1}, \dots, X - A_{\lambda_n}\}$. Esto es equivalente a decir que $\bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \emptyset$. Por la tercera propiedad de las redes, aplicada $n-1$ veces, existe un $\lambda_{n+1} \in \Lambda$ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \prec \lambda_{n+1}$. Por lo tanto, como los subcontinuos están ordenados por la inclusión, $A_{\lambda_{n+1}} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \neq \emptyset$ y claramente es cerrado.

Supongamos que $A$ no es conexo, es decir, supongamos que podemos escribir $A = P \cup Q$, donde $P, Q \in 2^X$ son ajenos. Como $X$ es compacto y $T_2$, podemos encontrar $U, V \in \tau$, disjuntos, con $P \subset U$ y $Q \subset V$. Entonces notando que $\{X - A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta del compacto $X - (U \cup V)$, podemos encontrar una subcubierta finita $\{X - A_{\lambda_1}, \dots, X - A_{\lambda_n}\}$ tal que

$$X - (U \cup V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X - A_{\lambda_i}) = X - \bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$$

Aplicando de nuevo la tercera propiedad de las redes existe un $\lambda_{n+1} \in \Lambda$ tal que $A_{\lambda_{n+1}} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$. Por lo tanto tendríamos que $A_{\lambda_{n+1}} \subset U \cup V$ y por la conexidad de $A_{\lambda_{n+1}}$, podriamos poner, spg, que $A_{\lambda_{n+1}} \cap V = \emptyset$, lo cual nos dice que $A \cap V = \emptyset$, lo que implica que $A \cap Q = \emptyset$, una contradicción a la elección de $Q$. $\square$

Recordemos que la frontera de un conjunto $Y \subset X$ en $X$ se define como $bd_X(Y) = \overline{Y} \cap \overline{X - Y}$. La siguiente afirmación adquiere una gran importancia durante las demostraciones que se harán más adelante.

**Teorema de los Golpes en la Frontera (GF) 1.2** *Sean un continuo $X$, y cualquier $E \subsetneq X$ con $E \neq \emptyset$. Entonces, para cada componente $K$ de $E$, $\overline{K} \cap bd_X(E) \neq \emptyset$.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [N2, 5.6, p. 74]. Una aplicación de este teorema, que nos interesa en este momento, es la siguiente. Dado un espacio métrico $S$, un subcontinuo no degenerado $A$ se llama *Continuo de Convergencia* de S si existe una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$, con $\lim A_n = A$ y para cualquier $i \in \mathbb{N}, A \cap A_i = \emptyset$. Si definimos el conjunto

$$\mathcal{N}_X = \{x \in X : X \text{ no es cik en } x\}$$

entonces se puede demostrar, con ayuda del teorema GF (ver [N1, 5.12, p. 76]) que por cada $p \in \mathcal{N}_X$ se puede encontrar un continuo de convergencia $K$ con $p \in K \subset \mathcal{N}_X$. La pregunta natural que surge es si la existencia de continuos de convergencia nos puede decir algo de la conexidad local de $X$. La respuesta se encuentra en el siguiente teorema. Para una propiedad topológica P, decimos que un continuo tiene *hereditariamente* la propiedad P si cada uno de sus subcontinuos no degenerados posee la propiedad P.

**Teorema 1.3** *Un continuo es hereditariamente de Peano si y sólo si no tiene continuos de convergencia.*

La prueba de este teorema se puede encontrar en [N2, 10.4, p. 167].

Ahora, dado un espacio $X$ y un punto $p \in X$, podemos definir la *componente* de X en p, $C_X(p)$ y la *casicomponente* de $X$ en $p$, $Q_X(p)$ como:

$$\begin{aligned} C_X(p) &= \bigcup \{D \subset X : D \text{ es conexo y } p \in D\} \\ Q_X(p) &= \bigcap \{E \subset X : E \text{ es abierto y cerrado y } p \in E\} \end{aligned}$$

Es claro que en general $C_X(p) \subset Q_X(p)$ y además si X es $T_2$ y compacto [Ill1, Teorema 6.3, p. 87] o si es espacio de Peano (sus componentes son abiertas y cerradas), entonces se da la igualdad. Un ejemplo en el cual se muestra que no siempre se da la igualdad se puede ver en [Ill1, Ejemplo 6.2, p. 86].

Escribiremos, para cualquier espacio $Y$, $Y = P \mid Q$ para indicar que los subconjuntos $P, Q \subset Y$ son tales que $Y = P \cup Q$, $P \neq \emptyset \neq Q$ y $\overline{P} \cap Q = P \cap \overline{Q} = \emptyset$; se dirá que $P \mid Q$ es una *separación* de $Y$. Dado un continuo $X$, diremos que un subconjunto $S \subset X$ *separa* a $X$ si existen $P, Q \subset X$ con $X - S = P \mid Q$, llamaremos a $S$ un *separador* de $X$. En particular si $S$ consiste de un punto, a éste se le llama *punto de corte*. Si además tomamos puntos $p \in P$ y $q \in Q$ entonces diremos que $S$ *separa a $p$ y $q$ en $X$*. Un resultado que también es muy importante es el siguiente.

**Teorema 1.4** *Si $X$ es un continuo, $S$ es un conexo en $X$ y $X - S = P \mid Q$, entonces ambos $P \cup S$ y $Q \cup S$ son conexos.*

La prueba de este resultado se puede encontrar en [N2, 6.3, p. 88]. Otro resultado que también usaremos es que todos los continuos tienen al menos dos puntos que no son de corte, la demostración, para continuos $T_1$, se puede ver en [N2, 6.6, p. 89], para continuos $T_2$ en [W, 28.8, p. 205] y para continuos en [K, §47, iv, teorema 5, p. 177].

Un continuo $X$ se llama *descomponible* si existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ con $X = A \cup B$. Un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Una manera muy usada de construir continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles es por medio de intersecciones de continuos. Un continuo indescomponible se construye en [N2, 1.10, p. 7] y uno hereditariamente indescomponible, llamado *pseudoarco*, se construye en [N2, 1.23, p. 13] o [SS, 130, p. 147]. Dado $p \in X$ definimos la *composante* de $X$ en $p$ como

$$\kappa_X(p) = \{x \in X : \text{existe } A \in C(X) - \{X\} \text{ con } \{p, x\} \subset A\}$$

Las composantes siempre son densas en $X$ ([K, § 48, vi, teorema 2, p. 209]). Un continuo $X$ se llama *irreducible alrededor de $A \subset X$* si el único subcontinuo de $X$ que contiene a $A$ es $X$. Un continuo se llama *irreducible* si es irreducible alrededor de algún conjunto de dos puntos. Se puede contar el número de composantes de los continuos descomponibles ([N2, 11.13, p. 202]). Los continuos irreducibles y descomponibles tienen exactamente 3 composantes, una de las cuales es $X$, como por ejemplo $I$, que es descomponible e irreducible alrededor de sus dos extremos, tiene como composantes a $I$, $I - \{0\}$ e $I - \{1\}$. Los continuos no irreducibles tienen exactamente una composante, $X$, como por ejemplo, una circunferencia. Sucede que los continuos indescomponibles tienen una cantidad no numerable de composantes distintas ([N2, 11.15, p. 203]) y además estos continuos son irreducibles ([N2, 11.15.1, p. 203]).

## 1.4. Funciones de Whitney y Arcos Ordenados

Dado un continuo no degenerado $X$, una *función de Whitney* es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ que cumple las siguientes propiedades:

- si $p \in X,\ \mu(\{p\}) = 0$
- si $A \subsetneq B, \mu(A) \lneq \mu(B)$

También pediremos que $\mu(X) = 1$ ya que, si se tiene una función de Whitney $\mu$ y se define la función $\frac{\mu}{\mu(X)}$, se obtiene otra función de Whitney que vale 1 en $X$. Una función que cumple las propiedades anteriores intercambiando $2^X$ por $C(X)$ es una función de Whitney para $C(X)$. En algunos casos es muy claro, como en el arco o la circunferencia, que la longitud (definida apropiadamente en la circunferencia) es una función de Whitney para $C(X)$. Aun así, existen varias maneras ([Ill1, Capítulo 5]) de demostrar que todo hiperespacio de un continuo admite funciones de Whitney.

Dados $A, B \in C(X)$ con $A \subsetneq B$, un *arco ordenado* de $A$ a $B$ es una función continua $\alpha : I \to C(X)$ con $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$ y tal que si $t \lneq s$, entonces $\alpha(t) \subsetneq \alpha(s)$. La prueba de la existencia de arcos ordenados ([Ill1, Teorema 6.10, p. 90]) básicamente se hace usando funciones de Whitney, el teorema GF y el hecho de que los racionales diádicos (los que en su expresión como fracción reducida tienen denominador una potencia de dos) son densos en $\mathbb{R}$. Este resultado implica que ambos $2^X$ y $C(X)$ son arcoconexos ([Ill1, Corolarios 6.1 y 6.2, p. 92-93]).

## 1.5. Límites Inversos

Los límites inversos en general se definen dado un conjunto de espacios $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ indicados por un conjunto dirigido $\Lambda$ y funciones continuas $f_j^i : X_i \to X_j$ para $i, j \in \Lambda$ con $i \succ j$, que cumplen que para todo $i \in \Lambda, f_i^i = 1_{X_i}$ y que si $i \succ j \succ k$, entonces $f_k^i = f_k^j \circ f_j^i$.

Entonces, con estas funciones se define el *límite inverso* de los espacios $\{X_i\}_{i\in\Lambda}$ como el subespacio del producto topológico (con su topología inducida) dado por:

$$\varprojlim \{X_i, f_j^i\} = \left\{ (x_i)_{i\in\Lambda} \in \prod_{i\in\Lambda} X_i : f_j^i(x_i) = x_j \text{ para todos } i, j \in \Lambda \text{ con } i \succ j \right\}$$

En particular, como estamos hablando de espacios métricos, es conveniente suponer que $\Lambda = \mathbb{N}$. En este caso, como existe el sucesor de cada número, podemos llamar $f_i^{i+1} = f_i$ para simplificar la notación y además, con estas funciones es suficiente para escribir $f_j^i = f_{i-1} \circ \ldots \circ f_j$, cuando $i > j$. Llamaremos entonces a $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una *sucesión inversa*.

Seguramente el lector recuerda que una base para la topología producto es la formada por producto de abiertos donde casi todos los abiertos son el total. Los límites inversos, al ser subespacios de productos topológicos, también tienen a estos subconjuntos como base, sin embargo, como veremos en el siguiente resultado, es suficiente pedir que sólo uno de los abiertos sea distinto del total. Para simplificar la notación, definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, la *i-ésima proyección canónica* $p_i : X \to X_i$, que es la restricción de la proyección del producto topológico a $X$. Observemos que por definición de límite inverso, se tiene que $p_i = f_i \circ p_{i+i}$ y, en general, $p_i = {f_i}^m \circ p_m$, cuando $m > i$.

**Teorema 1.5** *Dada una sucesión inversa de espacios métricos* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *con su límite inverso* $X = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$*, los subconjuntos de la forma* ${p_n}^{-1}(U_n)$ *donde* $U_n \in \tau_{X_n}$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *son base de la topología de* $X$*.*

*Demostración.* Un abierto básico de la topología producto heredada a $X$ se puede escribir como

$$(U_1 \times \cdots \times U_m \times \prod_{i>m} X_i) \cap X = \bigcap_{i=1}^{m} {p_i}^{-1}(U_i)$$

Definiendo $U = \bigcap_{i=1}^{m} (f_i^m)^{-1}(U_i) \in \tau_{X_m}$ obtenemos que

$${p_m}^{-1}(U) = {p_m}^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{m} (f_i^m)^{-1}(U_i)\Big) = \bigcap_{i=1}^{m} p_m^{-1}((f_i^m)^{-1}(U_i))$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} (f_i^m \circ p_m)^{-1}(U_i) = \bigcap_{i=1}^{m} {p_i}^{-1}(U_i)$$

que nos dice que el elemento de la base que teníamos con la topología heredada de la topología producto es también de la forma que queremos. $\square$

Nos interesarán los límites inversos de continuos, usaremos los dos teoremas siguientes.

**Teorema 1.6** *Dada una sucesión inversa de continuos* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *, tenemos que su límite inverso es un continuo.*

*Demostración.* Consideremos, para $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos

$$Q_n = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para cada } i \leq n \right\}$$

Entonces $Q_n$ es homeomorfo a $\prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$ y los conjuntos $Q_i$ están dirigidos por la inclusión. Por lo tanto obtenemos, por el teorema 1.1, que $\lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ es un continuo. □

**Teorema 1.7** *Sea una sucesión inversa de continuos* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *con su límite inverso*

$$X = \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\}$$

*Dados dos compactos* $A, B \in 2^X, C = A \cap B$ *y las proyecciones canónicas* $p_i : X \to X_i$*, si definimos* $C_i = p_i(A) \cap p_i(B)$*, entonces*

$$C = \lim_{\leftarrow} \{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\}$$

*Demostración.* Sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in C$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in p_i(A) \cap p_i(B)$ por estar $x \in A$ y $x \in B$, respectivamente, además por estar $x \in X$, se tiene que dar que $f_i(x_{i+1}) = x_i$. Por lo tanto $x \in \lim_{\leftarrow} \{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\}$. Inversamente, si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \lim_{\leftarrow} \{C_i, f_i|_{C_{i+1}}\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in C_i \subset p_i(A)$. Consideramos los continuos no vacíos $K_i = p_i^{-1}(x_i) \cap A$, como $f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$, los conjuntos $K_i$ están dirigidos por la inclusión, de manera que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$, por el teorema 1.1. Tomemos un punto $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Entonces $y \in A$ y $p_i(y) = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pero $p_i(y) = y_i$, así que $x = y$, con lo cual obtenemos que $x \in A$. Análogamente, se puede demostrar que $x \in B$, lo cual nos dice que $x \in C$. □.

Como último resultado de esta sección de límites inversos, tenemos el *teorema de encaje de Anderson-Choquet*, el cual sólo enunciaremos en una versión específica.

**Teorema del Encaje de AC 1.8** *Sean un compacto* $S$ *con métrica* $d$*, una sucesión inversa de subcompactos no vacíos* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de* $S$ *y una sucesión inversa* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*, con cada funcion* $f_i$ *suprayectiva. Supongamos que además la sucesión está dirigida por la inclusión. Consideramos las siguientes dos afirmaciones:*

*(1) para todo $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $p \in X_k$,*

$$diam\left(\bigcup_{j \geq k} (f_k^j)^{-1}(p)\right) < \epsilon$$

*(2) para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, existe $\delta' > 0$ tal que, para cualquier $j \in \mathbb{N}$, con $j > i$ y cualesquiera $p, q \in X_j$ con $d(p,q) < \delta'$ se tiene que $d(f_i^j(p), f_i^j(q)) < \delta$*

*Si la afirmación (1) se cumple, se puede definir una función $h : \lim_{\leftarrow} \{X_i, f_i\} \to \overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} X_i}$ por la igualdad $h((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lim x_i$, además $h$ resulta continua y suprayectiva.*
*Si además se cumple la afirmación (2), la función $h$ es un homeomorfismo.*

Este resultado nos permitirá llegar más adelante a que todas las dendritas se pueden encajar en $\mathbb{R}^2$. La demostración de este teorema se encuentra en [N2, 2.10, p. 23]. Sin embargo, en esa referencia se demuestra una versión más general en la cual la sucesión de continuos no necesariamente está dirigida por la inclusión y el límite inverso resulta ser un espacio un poco más complicado. Sin embargo, para efectos de este trabajo, nos bastará la versión que está escrita arriba.

## 1.6. Teorema de Reducción de Brouwer

Una de los axiomas más conocidos, no sólo en la teoría de los conjuntos, sino en todas las matemáticas es el *Axioma de Elección* que nos dice que de una colección no vacía cualquiera de conjuntos no vacíos podemos escoger un elemento de cada conjunto y formar un conjunto con todos los elementos seleccionados. Este axioma, aunque parece muy inocente, es uno de los más polémicos ya que lleva a resultados que a veces contradicen a nuestra intuición. Uno de estos resultados, y más que resultado, una equivalencia de este axioma, es el *Lema de Zorn.*

**Lema de Zorn 1.9** *Si en un conjunto parcialmente ordenado y no vacío cada cadena ascendente tiene cota superior, entonces existe un elemento maximal.*

Existe una forma de saltarse este lema para los espacios segundo numerables. La razón para no usar el lema de Zorn es que no hay que suponer ese tan criticando axioma de elección y que además podemos obtener la misma conclusión sin necesidad de usarlo. Éste es el siguiente teorema.

**Teorema de Reducción de Brouwer 1.10** *Sea un espacio segundo numerable $Y$ y sea $\mathscr{K}$ una familia no vacía de cerrados de $Y$ tal que cada sucesión creciente, dirigida por la inclusión, de elementos de $\mathscr{K}$ tiene una cota superior. Entonces $\mathscr{K}$ tiene un elemento maximal.*

La demostración se puede ver en [MV, Teorema 4.8, p. 34]. Una versión más fuerte de este teorema se puede ver en [Why, 11.1, p.17], ésta permite cambiar "cota superior" por "cota inferior" y "elemento maximal" por "elemento minimal" en el caso en el que $Y$ es compacto.

# Capítulo 2

# Propiedades Básicas de las Dendritas

Recordemos que una dendrita es un continuo lc que no contiene circunferencias. En este capítulo conoceremos algunas de las propiedades y caracterizaciones básicas de las dendritas. Éstas inclusive se pueden deducir muy fácilmente al imaginar cómo es una dendrita. Para esto primero veamos cómo son las dendritas por medio de algunos ejemplos que el lector seguramente conocerá.

La dendrita más sencilla es el arco, sabemos que es lc y todos sus subcontinuos también son arcos, por lo que no puede contener circunferencias. En este punto es conveniente notar que podemos definir en un arco $A$ dos órdenes totales que correspondan al orden natural de $I$. Una vez que definamos cual de los órdenes vamos a usar, lo llamaremos $<_A$. Con esto, a un subarco del arco $A$ que tenga extremos $a, b$ lo podemos llamar $[a, b]_A$, y naturalmente los intervalos $[a, b)_A$, $(a, b]_A$ y $(a, b)_A$ representarán lo que esperamos que representen.

Recordemos a las *gráficas*, las cuales el lector seguramente conoce de cursos básicos, definidas como conjuntos de aristas y vértices que cumplen algunas propiedades de incidencia. Topológicamente podemos definir a una gráfica como una unión conexa y finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan en un número finito de puntos. Notemos que si quitamos la condición de que la intersección sea un número finito de puntos, podríamos obtener un continuo que claramente no es lo que queremos que sea una gráfica. Un ejemplo de esto es el subcontinuo de $\mathbb{R}^2$ definido como:

$$([0,1]\times\{0\})\cup\left\{(x,y)\in(0,1]\times\mathbb{R} : y = x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

Notemos que una gráfica es un continuo lc pero para ser una dendrita le

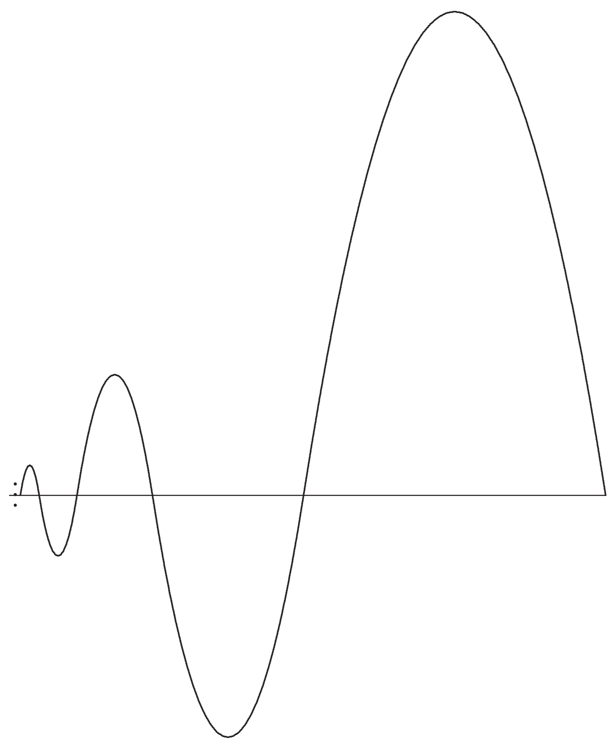

Figura 2.1: Unión de dos Arcos que no es una Gráfica

falta no contener circunferencias, ya que de hecho una circunferencia es una gráfica. Para esto recordemos a los *árboles* que precisamente son las gráficas que no contienen circunferencias (que no contienen ciclos en el lenguaje de teoría de gráficas). Una de las cosas que podemos preguntarnos es cómo es posible pegar dos arcos de tal forma que obtengamos un arbol. La respuesta es muy intuitiva pero se puede formalizar en el siguiente resultado.

**Lema 2.1** *Si $A$ y $B$ son arcos tales que $A\cap B$ es disconexo, entonces $A\cup B$ contiene alguna circunferencia.*

*Demostración.* Digamos spg que $A = I$. Por lo tanto $A \cap B$ es un cerrado disconexo de $I$. Entonces existe $p \in I - B$ que cumple que los conjuntos $C = [0,p]_I \cap B$ y $D = [p,1]_I \cap B$ son cerrados disjuntos y no vacíos. Sean $a = \sup C$ y $b = \text{ínf}\, D$, estos puntos cumplirán que $a, b \in B \cap I$ y $p \in (a,b)_I \subset I - B$. Notemos que $a <_B b$. Entonces como $[a,b]_I \cap [a,b]_B = \{a,b\}$, es claro que $[a,b]_I \cup [a,b]_B$ es homeomorfo a una circunferencia. $\square$

Más adelante veremos que, en realidad, las dendritas no son más que límites de árboles, por lo que podemos pensarlos como árboles infinitos y lc (si no pedimos lc, también podemos pensar en los dendroides que se estudiarán en una sección más adelante). Antes de empezar a trabajar con las dendritas, veamos algunos ejemplos de dendritas que no son árboles.

La primera es la dendrita que llamaremos $F_\omega$, que se define como $F_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ donde

$$Y_i = \left\{ \left( \frac{r}{i+1}, \frac{r}{(i+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2 : r \in I \right\}.$$

En esta dendrita el punto $(0,0)$ tiene una propiedad que es la que nos permite ver que $F_\omega$ no es un árbol. Ésta es que hay una cantidad numerable de arcos, precisamente los arcos $Y_i$, cuya intersección dos a dos es el conjunto que consiste únicamente del punto $(0,0)$.

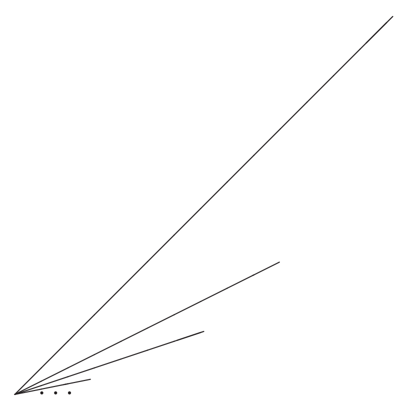

Figura 2.2: Dendrita $F_\omega$

Podríamos pensar que esta propiedad caracteriza a las dendritas, pero no es así, como se puede ver en la *Dendrita de Gehman*. Esta dendrita se construye por inducción usando árboles en $\mathbb{R}^2$. Primero se toma un punto y se toman dos segmentos hacia abajo. En el paso $n$, hay $2^{n-1}$ puntos que son extremos de los segmentos que se construyeron en el paso anterior, en la parte de abajo del árbol construido, y en cada uno de ésos se trazan dos segmentos hacia abajo. Todo esto cuidando que no se intersecten y que además los segmentos construidos en cada paso sean cada vez más pequeños. Después se toma la cerradura de la unión de todos los árboles contruidos. Se puede probar que los puntos que se añaden al final, al cerrar la unión, forman un Conjunto de Cantor (i.e., un conjunto compacto, sin puntos aislados y totalmente disconexo). La demostración de que la dendrita de Gehman en realidad es una dendrita se verá en un capítulo más adelante. Como podemos notar en la construcción, en cada paso lo que tenemos es un árbol, pero al final obtenemos algo que no es un árbol, pero ningún punto tiene la propiedad que tenía el $(0,0)$ en la dendrita $F_\omega$. Este concepto lo refinaremos más adelante cuando definamos el orden.

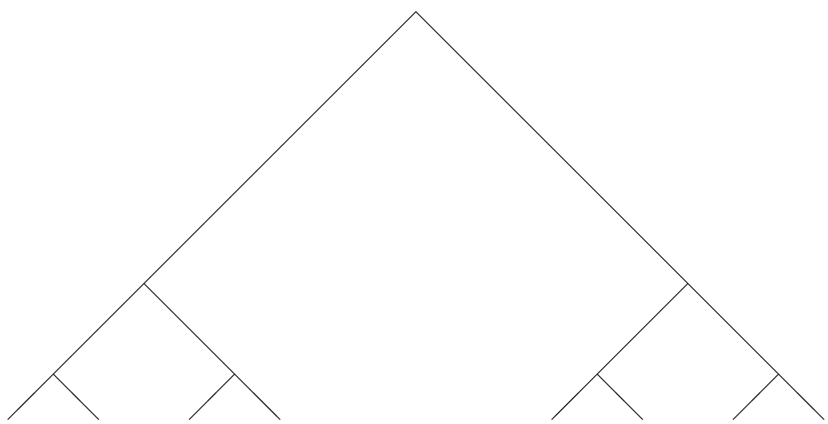

Figura 2.3: Dendrita de Gehman

Para la última dendrita de esta sección definamos los siguientes conjuntos, para cada $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, sea

$$H_i = \left\{ \left( \frac{k}{2^{i+1}}, r \right) : 0 \leq k \leq 2^{i+1}, k \in \mathbb{N}, k \text{ impar}, r \in \left[ 0, \frac{1}{i} \right] \right\}$$

y sea

$$H_0 = \{0,1\} \times [0,1].$$

Entonces el siguiente conjunto es una dendrita:

$$\mathcal{H} = \Big( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \Big) \cup ([0,1] \times \{0\}),$$

en la cual el conjunto $[0,1]\times\{0\}$ no es un continuo de convergencia de $\mathcal{H}$ a pesar de que su complemento es un abierto denso. La demostración de que es una dendrita también se verá en otro capítulo.

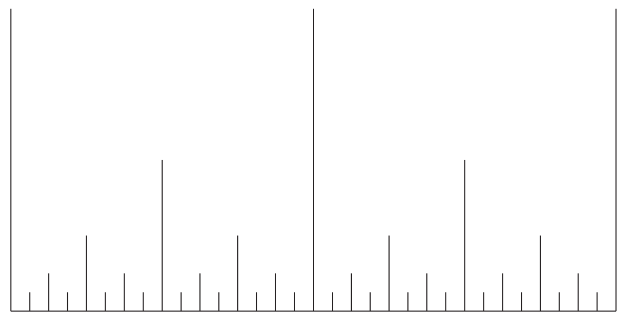

Figura 2.4: Dendrita $\mathcal{H}$

## 2.1. Puntos de Corte

Los puntos de corte juegan un papel muy importante en las dendritas ya que la posición (como veremos después) de éstos en un continuo nos dice si este continuo es una dendrita o no. Necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 2.2** *Sean un continuo $X$, un continuo de convergencia $K$ de $X$ y cualesquiera dos puntos $x, y \in K$. Si tomamos cualquier $L \subset K - \{x, y\}$, entonces $L$ no separa a los puntos $x$, $y$ en $X$.*

*Demostración.* Lo que debemos de ver es que $Q_{X-L}(x) = Q_{X-L}(y)$. Para esto tomemos la sucesión de subcontinuos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que define a $K$. Notemos que, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $K \cap K_n = \emptyset$, entonces $K_n \subset X - L$. Sea $U = \overline{U}^{X-L} \in \tau_{X-L}$ tal que $x \in U$. Entonces existe $V \in \tau_X$ tal que $(X - L) \cap V = U$. Por lo tanto existe un $N \geq 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $K_n \cap V \neq \emptyset$, esto implica que $K_n \cap U \neq \emptyset$. Pero como $K_n$ es un subcontinuo, se tiene que dar que $K_n \subset U$ ya que los únicos cerrados y abiertos contenidos en $K_n$ son él mismo y el vacío. Por lo tanto, por ser $U$ cerrado en $X - L$, $K - L = \lim K_n \cap (X - L) \subset \overline{U}^X \cap (X - L) \subset U$. Entonces $y \in U$, es decir, $y \in Q_{X-L}(x)$ y análogamente $x \in Q_{X-L}(y)$ por lo que tenemos la igualdad deseada. $\square$

Ya con este resultado estamos preparados para demostrar la primera equivalencia de dendritas.

**Teorema 2.3** *Un continuo $X$ es una dendrita si y sólo si cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ se pueden separar por un tercer punto $r \in X$.*

*Demostración.* Primero supongamos que $X$ es una dendrita y $p, q \in X$. Por ser $X$ lc, sabemos que existe un arco $\alpha \subset X$ que une a los puntos $p$ y $q$. Sea $r \in \alpha - \{p, q\}$ cualquiera y supongamos que $r$ no separa a $p$ y $q$. Como $X - \{r\}$ es lc, sus componentes y casicomponentes son iguales por lo que $C_{X-\{r\}}(p) = C_{X-\{r\}}(q)$. Entonces, como las componentes de abiertos de espacios lc son arcoconexas, existe un arco $\beta \in \ X - \{r\}$ que va de $p$ a $q$. Pero entonces tenemos dos arcos $\alpha$ y $\beta$ en $X$ que van de $p$ a $q$ y que además $\alpha \cap \beta$ es disconexo ya que $r \in \alpha - \beta$. Por lo tanto, por el lema 2.1, tenemos que $X$ contiene una circunferencia, contradicción. Entonces $r$ separa a $p$ y $q$.

Para probar el regreso, supongamos primero que $X$ contiene un continuo de convergencia $K$. Sean $p, q \in K$ con $p \neq q$ y $r \in X$ un punto que los separa. Claramente, si $r \in X - K$, entonces $r$ no puede separar a los dos puntos ya que por estar en un mismo conexo de $X - \{r\}$, estarían en una misma componente y por lo tanto en una misma casicomponente de $X - \{r\}$. Por lo tanto $r \in K$, pero esto contradice al lema 2.2. Esta contradicción nos dice que $X$ no contiene continuos de convergencia, y por el teorema 1.3, $X$ es lc. Ahora supongamos que $X$ contiene una circunferencia $C$. Dados $p, q \in C$ con $p \neq q$, si $r \in X$ es un punto que los separa, $r \in C$ ya que $C$ es un conexo que contiene a $p$ y $q$. Como $p$, $q$ y $r$ están en la circunferencia $C$, existe un arco $\gamma$ en $C$ tal que $p, q \in \gamma$ y $r \notin \gamma$. Entonces $p$ y $q$ no pueden ser separados en $X$ por $r$. Por lo tanto, $X$ no contiene circunferencias. Por lo tanto $X$ es una dendrita. $\square$

Aprovechamos la demostración anterior para enunciar el siguiente resultado.

**Teorema 2.4** *Todos los subcontinuos de las dendritas son dendritas.*

*Demostración.* Sean una dendrita $X$ y $Y \in C(X)$, claramente si $Y$ contuviera alguna circunferencia, $X$ también, por lo que $Y$ no contiene circunferencias. Como se vio en la demostración del teorema 2.3, $X$ no tiene continuos de convergencia, por lo que el teorema 1.3 nos dice que $Y$ es lc. Por lo tanto $Y$ es una dendrita. $\square$

Antes de continuar, veamos unos cuantos resultados para separadores que nos servirán más adelante. Éstos se resumen en el siguiente lema.

**Lema 2.5** *Sea $X$ un espacio métrico, conexo y separable. Entonces:*

*(a) Si $X$ no es degenerado, existe una colección no numerable de subconjuntos separadores cerrados de $X$, disjuntos dos a dos.*

*(b) Cada conjunto separador de $X$ contiene un conjunto separador cerrado.*

*(c) Si $\mathscr{C}$ es una colección no numerable de separadores cerrados de $X$, disjuntos dos a dos, existe un $C \in \mathscr{C}$ tal que si $X - C = U|V$, entonces $U \cap (\bigcup \mathscr{C}) \neq \emptyset \neq V \cap (\bigcup \mathscr{C})$.*

*(d) Un continuo de convergencia de $X$ no puede contener una colección no numerable de separadores cerrados de $X$ que sean disjuntos dos a dos.*

*(e) Dado un conjunto no numerable de puntos de corte $Y$, existen $x_1, x_2, x_3 \in Y$ distintos tales que $x_3$ separa a $x_1$ y $x_2$ en $X$.*

*(f) Si $Y$ es el conjunto de puntos de corte de $X$ y $Z$ es un conexo de $X$, entonces todos, excepto una cantidad numerable de los puntos de $Y \cap Z$ son puntos de corte de $Z$.*

*(g) Si $\mathscr{C}$ es una colección no numerable de puntos de corte de $X$, existen $p, q \in X$ tal que todos los elementos de alguna subfamilia no numerable de $\mathscr{C}$ separan a $p$ y $q$.*

*Demostración.*
(a) Fijemos un punto $p \in X$, como $X$ no es degenerado, podemos suponer spg que $\sup \{d(p,x) : x \in X\} = 1$. Con esto, la familia de conjuntos $\{x \in X : d(x,p) = \epsilon\}$, donde $\epsilon$ varía en $(0,1)$, es la colección buscada.
(b) Si $S$ es un separador, entonces $X - S = A|B$ para algunos $A, B \subset X$. Como los espacios métricos cumplen el axioma de separabilidad $T_5$ [SS, p. 34], existen $U, V \in \tau$ con $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto el conjunto $X - (U \cup V)$ es un separador cerrado contenido en $S$.
(c) Supongamos, por el contrario, que para cualquier $C \in \mathscr{C}$ se tiene que existen $U_C$ y $V_C$ tales que $X - C = U_C | V_C$ y $U_C \cap (\bigcup \mathscr{C}) = \emptyset$. Entonces tomemos dos $P, Q \in \mathscr{C}$ distintos, veamos que

$$X = (V_P \cup V_Q) \cup (U_P \cap U_Q)$$

Sea $x \in X - (V_P \cup V_Q)$. Entonces $x \in P \cup U_P$, si se tuviera que $x \in P$ entonces, como los elementos de $\mathscr{C}$ son disjuntos dos a dos, $x \in U_Q \cup V_Q$.

Pero por hipótesis $U_Q \cap P = \emptyset$, por lo cual $x \in V_Q$, contradicción. Por lo tanto $x \in U_P$ y análogamente se puede probar que $x \in U_Q$. Con esto es suficiente para demostrar la igualdad. Como claramente $(V_P \cup V_Q) \cap (U_P \cap U_Q) = \emptyset$ y $V_P \cup V_Q \neq \emptyset$, entonces la conexidad de $X$ nos dice que $U_P \cap U_Q = \emptyset$. Pero esto nos da un conjunto no numerable $\{U_C : C \in \mathscr{C}\}$ de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos, lo cual contradice la separabilidad de $X$. Esta contradicción completa la prueba de $(c)$.
(d) Si $K$ es un continuo de convergencia de $X$, y $\mathscr{C}$ fuera una familia no numerable de separadores cerrados de $X$ disjuntos dos a dos contenidos en $K$, por el inciso anterior tendríamos un $C \in \mathscr{C}$ tal que si $X - C = P|Q$, entonces existen $p \in P \cap (\bigcup \mathscr{C}) \subset K$ y $q \in Q \cap (\bigcup \mathscr{C}) \subset K$. Entonces tendríamos que un conjunto $C \subset K$ separa a $p \in K$ y $q \in K$ en $X$. Esto contradice al lema 2.2, por lo cual no pueden existir estos separadores.
(e) Los puntos son cerrados por lo que podemos aplicar el inciso (c) notando que $Y = \bigcup \mathscr{C}$ para encontrar esos puntos.
(f) Llamemos $W$ al conjunto de puntos de corte de $X$ que no son puntos de corte de $Z$ pero que sí están en $Z$. Entonces, si $W$ no fuera numerable, por el inciso (e) existirían $x, y, z \in W$ con $z$ separando a $x$ y $y$ en $X$ pero como los tres puntos están en Z, también los separaría en $Z$. Esto contradice a la definición de $W$, por lo que $W$ tiene cardinalidad a lo más numerable. Entonces el conjunto de puntos de $Y \cap Z$ que cortan a $Z$, que es $(Y \cap Z) - W$, son todos los de $Y \cap Z$ excepto una cantidad numerable, como queríamos.
(g) Sea $D \subset X$ numerable con $\overline{D} = X$ y démosle una numeración $D = \{x_0, x_1, \ldots\}$. Sea $\mathscr{C}(i,j) = \{x \in \mathscr{C} : x \text{ separa a } x_i \text{ de } x_j\}$. Claramente, por ser $D$ denso, $\mathscr{C} = \bigcup_{i \neq j} \mathscr{C}(i,j)$. Entonces, por ser $\mathscr{C}$ no numerable, podemos suponer spg que $\mathscr{C}(1,2)$ es no numerable. Entonces $p = x_1$ y $q = x_2$ son los que buscamos.

□

Para nuestra siguiente caracterización primero hay que aprender un nuevo concepto, el cual es el *orden de un punto* y además también varios resultados relacionados.

El orden de un punto se definirá como un elemento del conjunto $\mathbb{N} \cup \{\omega, \aleph_0, \mathfrak{c}\}$, donde $\aleph_0 = |\mathbb{N}|, \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ y $\omega$ es un símbolo formal el cual entenderemos por conveniencia, que $n < \omega < \aleph_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Regularmente $\omega$ denota al primer ordinal numerable [D, Capítulo 2], sin embargo, como se definen los cardinales por medio de los ordinales se tendría que $\aleph_0 = \omega$. Para efectos de orden de un punto, pensemos simplemente que $\omega$ es un símbolo y la desigualdad estricta de arriba también es sólo por conveniencia. Dado un espacio $X$ y $p \in X$, decimos que para un cardinal $\mathfrak{n} \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$:

$$\begin{array}{rl} ord_X(p) \leq \mathfrak{n}, & \text{si dado } U \in \tau \text{ con } p \in U \text{ existe } V \in \tau \text{ con } p \in V \subset U \\ & \text{y } |bd_X(V)| \leq \mathfrak{n}. \\ ord_X(p) = \mathfrak{n}, & \text{si } ord_X(p) \leq \mathfrak{n} \text{ y dado cualquier } \mathfrak{m} \lneq \mathfrak{n}, ord_X(p) \nleq \mathfrak{m}. \\ ord_X(p) = \omega, & \text{si dado } U \in \tau \text{ con } p \in U \text{ existe } V \in \tau \text{ con } p \in V \subset U \\ & \text{y } |bd_X(V)| \text{ es finita, pero } ord_X(p) \notin \mathbb{N}. \end{array}$$

Claramente el orden de un punto es un invariante topológico ya que los homeomorfismos conservan fronteras. A nosotros sólo nos interesarán los puntos de orden finito y $\omega$, ya que las dendritas resultarán tener puntos sólo de estos órdenes. Un ejemplo de espacio con todos sus puntos de orden $\mathfrak{c}$ es $\mathbb{R}^n$ para cada $n \geq 2$. Un espacio con un punto de orden $\aleph_0$ es el llamado abanico armónico que definiremos en el capítulo de dendroides.

Podemos clasificar a los puntos según su orden de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} E(X) & = & \{p \in X : ord_X(p) = 1\} \\ O(X) & = & \{p \in X : ord_X(p) = 2\} \\ R(X) & = & \{p \in X : ord_X(p) \geq 3\} \end{array}$$

A los puntos de orden 1 se les llama *puntos terminales*, a los de orden 2, *puntos ordinarios* y a los de orden mayor se les llama *puntos de ramificación*.

El concepto del orden de un punto se ve muy claro en el caso de las dendritas, esto lo veremos más adelante en una caracterización. Para un punto de orden $\omega$, para ejemplificar, es suficiente que pensemos en la dendrita $F_\omega$, y en su único punto de ramificación.

Dado un espacio $Y$ y un punto $p \in Y$, se dice que $p$ es *accesible (por arcos)* desde un conjunto $A \subset Y$ si existe un continuo (un arco) $K \subset Y$ con $p \in K \subset A \cup \{p\}$ y $K \neq \{p\}$.

**Lema 2.6** *Sea un espacio lac $X$ y $U \in \tau$. El conjunto de puntos de $bd_X(U)$, accesibles por arcos desde $U$ es denso en $bd_X(U)$.*

*Demostración.* Dado un punto $p \in bd_X(U)$, tomemos un $V \in \tau$ con $p \in V$. Entonces por ser $X$ lac, existe una vecindad abierta arcoconexa de $p$, $W \subset V$. Como $p \in bd_X(U)$, existe un punto $q \in W \cap U$. Tomemos entonces un arco $\alpha \subset W$ que vaya de $p$ a $q$ y fijemos el orden natural de ese arco en el que $q <_\alpha p$. Consideremos entonces el conjunto:

$$B = \alpha \cap bd_X(U)$$

Claramente $B$ es un cerrado y no vacío de $\alpha$ por lo que podemos tomar su mínimo con respecto al orden $<_\alpha$ y llamarlo $r$. Como $q \notin bd_X(U)$, $q <_\alpha r$ y por la definición de $r$, $[q, r)_\alpha \cap bd_X(U) = \emptyset$. Ya que $[q, r)_\alpha$ es conexo, no intersecta a $bd_X(U)$ y sí intersecta a $U$, tenemos que $[q, r)_\alpha \subset U$. Por lo tanto $[q, r]_\alpha$ es un arco, $r \in bd_x(U)$ y $[q, r]_\alpha \subset U \cup \{r\}$. Es decir, $r$ es accesible por arcos desde $U$. Entonces para cada abierto en $bd_X(U)$ podemos encontrar un punto accesible por arcos desde $U$ en este abierto, lo cual nos da el resultado deseado. $\square$

El lector podría estarse preguntando si no será acaso que el conjunto de puntos de $bd_X(U)$, accesibles desde $U$, es todo $bd_X(U)$ y no sólo un conjunto denso. Veamos un ejemplo en el cual este conjunto no es toda la frontera. El lector seguramente estará familiarizado con el siguiente continuo:

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in (0, 1] \times \mathbb{R} : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right\} \cup \Big(\{0\} \times [-1, 1]\Big)$$

el cual es llamado el *Continuo del Seno*. El *Círculo de Varsovia* es el continuo

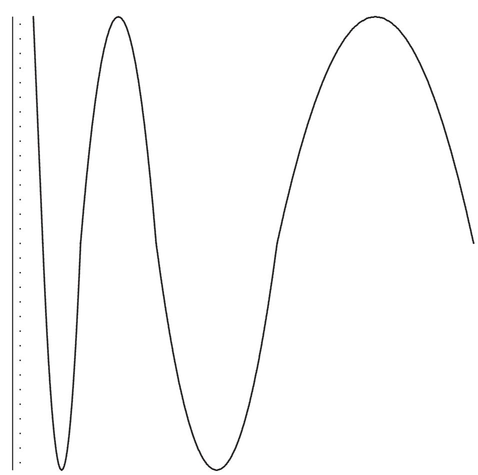

Figura 2.5: Continuo del Seno

$\mathcal{W}$ que resulta de unir en $\mathcal{S}$ el punto $(0, -1)$ con el $(1, \sin 1)$ con un arco que no toque a $\mathcal{S}$ más que en esos puntos. Es fácil ver que $\mathcal{W}$ separa al plano en dos regiones (abiertos conexos), una acotada y una no acotada. Digamos que $U$ es la que es acotada, entonces es fácil ver que $bd_{\mathbb{R}^2}(U) = \mathcal{W}$. Sin embargo, sucede que los puntos de $\{0\} \times (-1, 1]$ no son accesibles desde $U$, a pesar de que todos los demás de $bd_{\mathbb{R}^2}(U)$ lo son. En este ejemplo estamos pensando que $X$ es un disco, en el plano, que contiene a $\mathcal{W}$ en su interior.

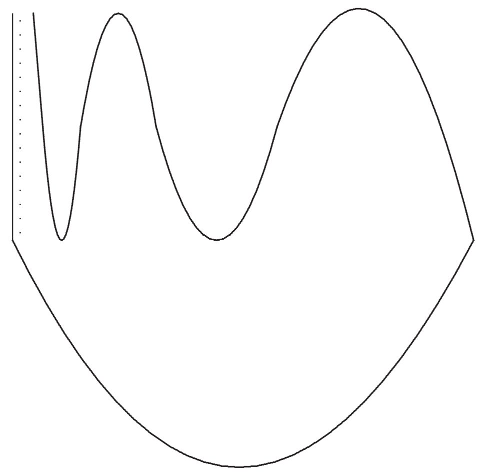

Figura 2.6: Círculo de Varsovia

Otro concepto relacionado con la conexidad, que nos ayudará en la próxima caracterización es el siguiente. Decimos que un espacio $X$ es *semilocalmente conexo* (*slc*) en $p \in X$ si para cada $U \in \tau$ con $p \in U$, existe una vecindad abierta de $p$, $V \subset U$ tal que $X - V$ tiene un número finito de componentes. Ahora veamos un resultado que se relaciona con esto.

**Lema 2.7** *Los continuos de Peano son slc en todos sus puntos.*

*Demostración.* Sean $X$ un continuo de Peano y un punto $p \in X$. Sea $V \in \tau$ con $p \in V$. Tomemos, para cada $x \in bd_X(V)$, un conexo $V_x \in \tau$ tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset X - \{p\}$. Por la compacidad de $bd_X(V)$, tenemos que podemos escoger una subcubierta finita $\{V_1, \ldots, V_n\}$ de la cubierta $\{V_x : x \in bd(V)\}$.

Entonces $X - (\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i})$ es un abierto que contiene a $p$, por lo cual podemos tomar la componente $W$ de este abierto, que tiene a $p$. Claramente $W \in \tau$, por ser $X$ lc, y además como es conexo y no intersecta a $bd_X(V)$, $W \subset V$.

Veamos ahora que $X - W$ tiene a lo más $n$ componentes. Para esto, tomemos cualquier componente $Z$ de $X - (\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i})$ distinta de $W$. Por el teorema de GF 1.2, podemos encontrar $y \in \overline{Z} \cap bd(\bigcup_{i=1}^n \overline{V_i}) \neq \emptyset$. Entonces $y \in \overline{V_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$, lo cual nos dice que $Z \cup \overline{V_j}$ es conexo y por lo tanto $Z$ está contenido en la componente de $X - W$ que contiene a $\overline{V_j}$. Por lo tanto $X - W$ tiene a lo más $n$ componentes, una por cada $V_i$. Entonces $W$ es la vecindad deseada para cumplir la definicion de slc. $\square$

Con esta idea veamos ahora que cuando el punto $p$ de la prueba anterior no es de corte, entonces no sólo se puede asegurar una cantidad finita, sino sólo una componente.

**Lema 2.8** *Sea $X$ un continuo de Peano y un punto que no sea de corte $p \in X$. Para cada vecindad de $p$, $U \in \tau$, existe un abierto y conexo $V \in \tau$ con $p \in V \subset U$ y $X - V$ conexo.*

*Demostración.* Como $X$ es slc, existe un $W \in \tau$ con $p \in W \subset U$ y $X - W$ con una cantidad finita de componentes. Llamemos a estas componentes $\{U_1, \ldots, U_n\}$ y escojamos, para cada componente, un punto $x_i \in U_i$. Como $p$ no es de corte y en los espacios de Peano los abiertos conexos son arcoconexos, entonces, para cada $i \neq 1$, hay un arco $\alpha_i \subset X - \{p\}$ que va de $x_i$ a $x_1$. Fijándonos en que el conjunto $Z = (X - W) \cup (\cup_{i=2}^{n} \alpha_i)$ es un subcontinuo de $X$, tomemos la componente $V$ de $X - Z$ que contiene a $p$. Como $X$ es lc, $V \in \tau$. Entonces, como $V$ es abierto y cerrado en $X - Z$, si definimos el conjunto $B = X - (Z \cup V)$, tendremos que $X - Z = V|B$, lo cual implica que $X - V = Z \cup B$ es conexo, por el teorema 1.4. Entonces $V$ es la vecindad buscada de $p$. $\square$

Ahora sí ya tenemos las herramientas para probar los siguientes resultados sobre dendritas.

**Teorema 2.9** *Para un continuo $X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) Los puntos de $X$ son de corte o terminales,*

*(3) Cualquier subcontinuo no degenerado de $X$ tiene una cantidad no numerable de puntos de corte de $X$.*

*Demostración.*
(1)⇒(2) Sean $X$ una dendrita y un punto $p \in X$ que no sea de corte. Supongamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que todas las vecindades abiertas de $p$ que tienen diámetro menor que $\epsilon$ tienen frontera con cardinalidad al menos 2. Por el lema 2.8, como $p$ no es de corte, podemos tomar una vecindad conexa

de $p$, $U \in \tau$ con $diam(U) < \epsilon$ tal que $X - U$ sea conexo. Como $bd_X(U)$ tiene al menos dos puntos, podemos encontrar dos abiertos $V$ y $W$ tales que $V \cap W = \emptyset$ y $V \cap bd_X(U) \neq \emptyset \neq W \cap bd_X(U)$. Como las dendritas son lc y métricas, también son lac, entonces podemos aplicar el lema 2.6, por lo que existen puntos $x \in bd_X(U) \cap V$ y $y \in bd_X(U) \cap W$ que son accesibles desde $U$. Usando el hecho de que $U$ es arcoconexo se puede construir un arco $\alpha \subset U \cup \{x, y\}$ que va de $x$ a $y$. Por otra parte, como $X - U$ es un cerrado conexo, $X - U$ es una dendrita por el teorema 2.4, por lo que existe un arco $\beta \in X - U$ que va de $x$ a $y$. Entonces $\alpha \cap \beta = \{x, y\}$, por lo que $\alpha \cup \beta$ es una circunferencia, contradicción. Con esto obtenemos que $ord_X(p) = 1$, es decir, $p$ es terminal.
(1)⇒(3) Sea un subcontinuo no degenerado $Y \in C(X)$. Si tomamos dos puntos $x, y \in Y$, entonces tenemos que existe un arco $\alpha \in Y$ que va de $x$ a $y$. Dado un punto $p \in \alpha - \{x, y\}$, todas las vecindades pequeñas de $p$ tienen al menos dos puntos de $\alpha$ en su frontera por lo que ningún punto de $\alpha - \{x, y\}$ es terminal, así que todos ellos son de corte de $X$. Como $|\alpha - \{x, y\}| = \mathfrak{c}$, ya encontramos los puntos deseados.
(2)⇒(1) Primero supongamos que existe un subcontinuo de convergencia $K \in C(X)$. Sea $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión de subcontinuos de la definición de que $K$ es un continuo de convergencia. Tomemos dos puntos $x, y \in K$ y tomemos $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < d(x, y)$. Entonces sabemos, por la convergencia de la sucesión de continuos, que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $H(K_n, K) < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto, para cada $n \geq N$, existe un punto $y_n \in K_n$ tal que $d(y, y_n) < \epsilon$. Si tuvieramos que $d(x, y_n) < \epsilon$ para algun $n \geq N$, $d(x, y) < 2\epsilon$ por la desigualdad del triángulo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $U \in \tau$ es tal que $x \in U$ y $diamU < \epsilon$, entonces, para cada $n \geq N$, como $K_n$ es un conexo que intersecta al $U$ en $x$ y a $X - U$ en $y_n$, concluimos que $bd_X(U) \cap K_n \neq \emptyset$. Entonces como los $K_n$ son disjuntos obtenemos una cantidad numerable de puntos en $bd_X(U)$, y como esto fue para un $\epsilon > 0$ arbitrario, tenemos que $x$ no es un punto terminal. Por lo tanto todos los puntos de $K$ son puntos de corte. Pero esto contradice el lema 2.5(d) por lo que $X$ no contiene continuos de convergencia y de esto, $X$ es lc. Si suponemos que $X$ contiene una circunferencia $S$, como ésta no contiene puntos terminales, todos sus puntos serían de corte. Entonces el lema 2.5(e) nos dice que podemos escoger tres puntos $p, q, r \in S$ tales que $r$ separa a $p$ y $q$ en $X$, lo cual no puede ocurrir ya que $p$ y $q$ se pueden conectar en $S$ sin pasar por $r$. Esto nos dice que $X$ no contiene circunferencias por lo que $X$ es una dendrita.
(3)⇒(1) Si hubiera un continuo de convergencia $K$ de $X$, la existencia de

sus puntos de corte contradiría al lema 2.5(d) de manera que $X$ no contiene continuos de convergencia y, en consecuencia, es lc. Si $X$ contuviera una circunferencia $S$, el lema 2.5(e) nos dice que podemos escoger tres puntos $p, q, r \in S$ tales que $r$ separa a $p$ y $q$ en $X$, lo cual no puede ocurrir ya que $p$ y $q$ se pueden conectar en $S$ sin pasar por $r$. Entonces $X$ no tiene continuos de convergencia ni circunferencias, es decir, $X$ es una dendrita. $\square$

Con la caracterización anterior podemos clasificar los puntos de una dendrita de acuerdo a su orden. Dado un continuo arcoconexo $X$ y un punto $p \in X$, digamos que $p$ es un *punto final* si $p$ es punto terminal de cada arco que lo contiene. En otras fuentes se le llama *punto terminal en el sentido clásico*, pero en este trabajo, para no tener que escribir tanto, llamémoslo así. Sucede que en las dendritas los conceptos de punto terminal y final coinciden.

**Teorema 2.10** *En una dendrita un punto es terminal si y sólo si es final.*

*Demostración.* Sean una dendrita $X$ y un punto $p \in X$. Si $p$ es terminal, supongamos que existe un arco $\alpha \subset X$ tal que $p \in \alpha$ y $p$ no es punto terminal de $\alpha$. Digamos que los puntos terminales de $\alpha$ son $a, b$ con $a <_\alpha b$. Entonces cualquier vecindad abierta de $p$, $U \in \tau$ tal que $a, b \notin U$, cumplirá, por conexidad, que $bd_X(U) \cap [a, p)_\alpha \neq \emptyset \neq bd_X(U) \cap (p, b]_\alpha$. Esto nos dice que el orden de $p$ no puede ser 1, contradicción, por lo que $p$ es final. Si $p$ es final, y suponemos que no es terminal, por el teorema 2.9 es de corte. Por lo tanto, existen $U$ y $V$ tales que $X - \{p\} = U|V$, como $bd_X(U) = \overline{U} - U = \{p\} = \overline{V} - V = bd_X(V)$, entonces por el lema 2.6, podemos encontrar arcos $\alpha \subset U \cup \{p\}, \beta \subset V \cup \{p\}$ que tengan como uno de sus extremos a $p$. Entonces $\alpha \cup \beta$ es un arco que tiene a $p$ como punto no terminal. Por lo tato $p$ no es final, contradicción. Entonces si $p$ es final, tiene que ser terminal. $\square$

Ahora veamos una propiedad muy importante en las dendritas.

**Teorema 2.11** *En las dendritas, la conexidad de sus subconjuntos es equivalente a la arcoconexidad.*

*Demostración.* Sea $X$ una dendrita. Sólo tenemos que ver que un subconjunto conexo $U$ de $X$ es arcoconexo. Como $\overline{U}$ es una dendrita, sabemos que es arcoconexa. Entonces si tomamos dos puntos $x, y \in U$ tendremos que hay un arco $\alpha \subset \overline{U}$ que los une. Si existiera un punto $z \in \alpha - \{x, y\}$ tal que $z \notin U$, entonces $z$ no es terminal ya que es un punto no terminal de un arco. Entonces debe ser punto de corte de $X$. Ahora notemos que $x$ y $y$ deben estar en distintas componentes de $X - \{z\}$, pues si suponemos que están en la misma, como las componentes de los abiertos son arcoconexas, habría un arco $\beta \in X - \{z\}$ que los une. Esto, combinado con el lema 2.1 nos daría que $X$ contiene una circunferencia, lo cual no es posible. Usando que las componentes son las casicomponentes en los espacios lc, obtenemos que $x$ y $y$ están en distintas casicomponentes de $X - \{z\}$ por lo que $z$ separa a $x$ y $y$. Pero esto es absurdo porque $x, y$ pertenecen al conexo $U$ contenido en $X - \{z\}$. Esto prueba que $\alpha \subset U$. Por tanto $U$ es arcoconexo. $\square$

El siguiente resultado es uno de los más impresionantes, ya que es uno de los más intuitivos, pero que, como veremos, usa herramientas que acabamos de desarrollar, y no son para nada triviales.

**Teorema 2.12** *Un continuo es una dendrita si y sólo si la intersección de cualesquiera dos de sus subconjuntos conexos es conexo.*

*Demostración.* Primero tomemos una dendrita $X$ y supongamos que hay dos conexos $A, B \subset X$ con $A \cap B$ disconexo. Tomemos entonces dos puntos $a, b \in A \cap B$ que estén en distintas componentes de $A \cap B$. Por el teorema 2.4 existen dos arcos que conectan a $a$ y $b$, $\alpha \subset A$ y $\beta \subset B$. Pero como tomamos los puntos en distintas componentes de $A \cap B$, $\alpha \neq \beta$ pero sí coinciden en sus extremos. Entonces podemos aplicar el lema 2.1 para decir que $X$ contiene una circunferencia, contradicción. Entonces $A \cap B$ es conexo.

Ahora supongamos que tenemos un continuo $X$ en el cual la intersección de cualesquiera dos conexos es conexa. Supongamos que $X$ tiene un continuo de convergencia $K$. Por el lema 2.5(a), $K$ tiene una colección no numerable, $\mathscr{C}$, de separadores cerrados de $K$ disjuntos dos a dos y por el lema 2.5(d), no todos desconectan a $X$. Entonces existe un $C \in \mathscr{C}$ tal que $X - C$ es conexo y $K - C$ es disconexo. Pero tenemos que $K - C = K \cap (X - C)$ debe de ser conexo ya que es la intersección de dos conexos. Por lo tanto no puede haber continuos de convergencia. Como además una circunferencia se puede escribir como unión de dos arcos que se intersectan en sus extremos, es claro que $X$ no puede tener circunferencias. Entonces $X$ es una dendrita. $\square$

Para nuestro siguiente resultado necesitamos una nueva definición. Dado un conjunto conexo $X$ y un punto $p \in X$, denotaremos a la cantidad de componentes de $X - \{p\}$ como $c(X, p)$.

**Lema 2.13** *Para cualquier continuo no degenerado $X$ y cualquier punto $p \in X$ tal que $ord_X(p)$ es finito, tenemos que $c(X, p) \leq ord_X(p)$.*

*Demostración.* Sea $n = ord_X(p)$ y supongamos que $X - \{p\}$ tiene al menos $n+1$ componentes $\{C_0, \ldots, C_n\}$. Por el teorema de GF, tenemos que $p \in \overline{C}_i$ para toda $i \in \{0, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, escojamos puntos $p_i \in C_i$ y sea

$$\epsilon = \text{mín}\,\{d(p, p_i) : i \in \{0, \ldots, n\}\} > 0$$

Ahora escojamos una vecindad de $p$, $U \in \tau$ tal que $diam(U) < \epsilon$. Entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$ obtenemos que $U \cap C_i \neq \emptyset \neq U \cap (X - C_i)$, y por la conexidad de $C_i$ se tiene que $bd_X(U) \cap C_i \neq \emptyset$. Entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, tenemos un punto en $bd_X(U)$, y estos puntos son diferentes, lo cual prueba que $|bd(U)| \geq n+1$. Como probamos que existe un $\epsilon > 0$ tal que cualquier vecindad de diametro menor que $\epsilon$ tiene al menos $n+1$ puntos en la frontera, tenemos que $ord_X(p) > n$. Esta contradicción nos dice que $c(X, p) \leq n$, que era lo que queríamos. $\square$

Con esto probaremos los últimos resultados de esta sección.

**Teorema 2.14** *Un continuo $X$ es una dendrita si y sólo si para cada punto $p \in X$ se tiene la igualdad $c(X, p) = ord_X(p)$ cuando alguno de los dos es finito.*

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es una dendrita. Por el lema 2.13 sólo nos falta saber que si $c(p, X)$ es finito, entonces se da $c(X, p) \geq ord_X(p)$. Supongamos que $n = c(p, X)$ y que $\{C_1, \ldots, C_n\}$ son las $n$ componentes de $X - \{p\}$. Por el teorema de GF sabemos que $p \in \overline{C}_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $C_i \cup \{p\}$ es un conexo pero además como es el complemento de un abierto (la unión de las demás componentes de $X - \{p\}$), es un subcontinuo, es decir, una subdendrita de $X$. Y como además $C_i$ es conexo, $p$ es un punto que no es de corte de $C_i \cup \{p\}$, por lo que $ord_{C_i \cup \{p\}}(p) = 1$.

Ahora dado un $\epsilon > 0$ cualquiera nos gustaría encontrar una vecindad de $p$, $U \in \tau$ con $diam(U) < \epsilon$ y $|bd(U)| \leq n$. Para esto usemos que para $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen vecindades de $p$, $V_i \in \tau_{C_i \cup \{p\}}$ con $|bd_{C_i \cup \{p\}}(V_i)| = 1$ y $diam(V_i) < \frac{1}{2}\epsilon$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ya que $V_i \in \tau_{C_i \cup \{p\}}$, existe un $W_i \in \tau$ tal que $V_i = W_i \cap (C_i \cup \{p\})$. Entonces, si definimos $U_i = V_i - \{p\} = W_i \cap C_i$, tenemos que $U_i \in \tau_{C_i}$. Veamos que $U = (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cup \{p\}$ funciona.

En primera, como $X$ es lc, sabemos que $C_i$ es abierto así que $\tau_{C_i} \subset \tau$ y claramente $diam(U) < \epsilon$. Entonces, para ver que $U \in \tau$, sólo falta ver que $p$ es punto interior de $U$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^n W_i$, entonces $W$ es una vecindad abierta en $X$ de $p$. Sea un punto $x \in W - \{p\}$, entonces existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in C_i$ por lo que $x \in U_i \subset U$. Entonces $p \in W \subset U$ que nos dice que $p$ es punto interior de $U$, o sea, $U \in \tau$.

Ahora sólo falta ver que $|bd_X(U)| \leq n$ para terminar. Para esto, tomemos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el punto $p_i \in bd_{C_i \cup \{p\}}(V_i)$ y veamos que $bd_X(U) \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$. Sea $x \in bd_X(U)$, entonces podemos suponer spg que $x \in C_1$ ya que $p \notin bd_X(U)$. Entonces, como $C_1 \cap (C_2 \cup \cdots \cup C_n \cup \{p\}) = \emptyset$, tenemos que $C_1 \cap (U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup \{p\}) = \emptyset$, así que $x \notin \overline{U_2 \cup \cdots \cup U_n \cup \{p\}}$ y como $x \in \overline{U}$, tenemos que $x \in \overline{U_1} \cap C_1 \subset \overline{V_1} \cap (C_1 \cup \{p\}) = \overline{V_1}^{C_1 \cup \{p\}}$. Ya que $x \neq p$ y $x \notin U_1$ se tiene que $x \notin V_1$. Por lo tanto $x \in bd_{C_1 \cup \{p\}}(V_1) = \{p_1\}$. Es decir, $x = p_1$, lo cual prueba la contención deseada.

Entonces $|bd(U)| \leq n$, que era lo único que faltaba para ver que $ord_X(p) \leq n$. Por lo tanto, tenemos que $ord_X(p) = n$, que era lo que queríamos.

Ahora, supongamos que para cada punto $p \in X$ la igualdad $c(X, p) = ord_X(p)$ se cumple cuando alguno de los dos es finito. Claramente esto nos dice que los puntos que no son terminales son de corte, por lo que $X$ es una dendrita. $\square$

Esta caracterización nos da una idea más intuitiva del orden de un punto en una dendrita. El lector puede observar que la dendrita de Gehman tiene una cantidad numerable de puntos de orden 3, que los de orden 1 son los que se agregan al tomar la cerradura de la unión en la construcción dada ya que son los que no son de corte y el resto son de orden 2. En la dendrita $\mathcal{H}$ de la figura 2.4, todos los puntos que no son terminales son de orden 2 excepto los del arco $[0, 1] \times \{0\}$ que tienen primera coordenada un racional diádico los cuales son de orden 3.

## 2.2. Dimensión y Elementos Cíclicos

Una de las primeras caracterizaciones que no involucran conceptos intuitivos es la que reemplaza a la propiedad de no contener circunferencias. Decimos que un continuo $X$ es *unicoherente* si cada vez que escribimos $X = A \cup B$ con $A, B \in C(X)$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Decimos que un continuo es *hereditariamente unicoherente* (*hu*) si cada uno de sus continuos es unicoherente. Claramente un continuo $X$ es hereditariamente unicoherente si y sólo si cada vez que tomemos dos subcontinuos $A, B \in C(X)$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. La caracterización que usa este último concepto es la siguiente.

**Teorema 2.15** *Un continuo de Peano es una dendrita si y sólo si es hu.*

*Demostración.* Si $X$ es una dendrita, entonces como la intersección de dos conexos es conexa (teorema 2.12), claramente es hu. Si $X$ es un continuo de Peano hu, no contiene circunferencias ya que las circunferencias no son unicoherentes. Para ver esto, consideremos los subcontinuos de $\mathbb{S}^1$:

$$\mathbb{S}^{1+} = \{x \in \mathbb{S}^1 : Re(x) \geq 0\}$$

$$\mathbb{S}^{1-} = \{x \in \mathbb{S}^1 : Re(x) \leq 0\}$$

que cumplen que $\mathbb{S}^{1+} \cup \mathbb{S}^{1-} = \mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^{1+} \cap \mathbb{S}^{1-} = \{-i, i\}$ que no es conexo. $\square$

Un espacio $X$ es *únicamente arcoconexo* si cada vez que tomamos dos puntos diferentes $a, b \in X$, existe un único arco que los une, el cual denotaremos por $ab \in C(X)$.

**Teorema 2.16** *Un continuo de Peano es una dendrita si y sólo si es únicamente arcoconexo.*

*Demostración.* Si tenemos una dendrita $X$, dados dos puntos distintos $x, y \in X$; sean dos arcos $\alpha, \beta \in C(X)$, que van de $x$ a $y$. Si $\alpha$ y $\beta$ fueran distintos, como comparten extremos, tendríamos que $\alpha \cap \beta$ sería disconexo, lo cual es una contradicción a que $X$ es hu, por lo cual $X$ es únicamente ac. Y si $X$ es un continuo de Peano únicamente ac, no puede tener circunferencias, por lo que es una dendrita. $\square$

Entonces, de ahora en adelante, cuando queramos escribir un arco en una dendrita, lo denotaremos como en la definición de únicamente arcoconexo. Ejemplos de continuos hu y únicamente ac que no sean lc son los dendroides no lc que estudiaremos más adelante.

Existe otro concepto que puede reemplazar a no contener circunferencias en la definición de dendrita. Para un continuo localmente conexo $X$ y un punto $p \in X$, llamaremos *elemento cíclico en $p$* al conjunto:

$$\mathfrak{C}_p = \begin{cases} \{p\}, & \text{si } p \text{ separa a } X, \\ \{x \in X : \text{ningún punto de } X \text{ separa a } p \text{ de } x\}, & \text{si } p \text{ no separa a } X. \end{cases}$$

Notemos entonces que la definición de elemento cíclico, depende de si el punto tomado es o no de corte. Como ejemplo ilustraremos lo que puede ocurrir. Consideremos el conjunto:

$$\mathscr{P}_0 = \mathbb{S}^1 \cup \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in [1, 2], Im(z) = 0\}$$

Es decir, $\mathscr{P}_0$ es la unión de la circunferencia unitaria con un arco que sólo la toca en un punto. Llamemos *paleta* a cualquier espacio homeomorfo a $\mathscr{P}_0$. Tomemos un punto $p \in \mathscr{P}_0$.

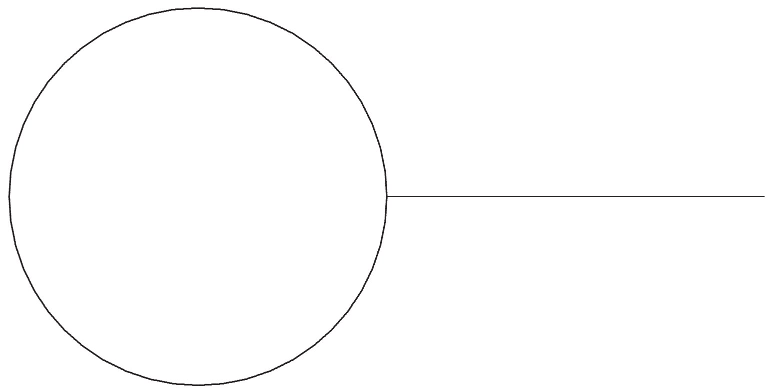

Figura 2.7: Paleta

Si $p \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in [1, 2], Im(z) = 0\}$, claramente $p$ es un punto de corte por lo que $\mathfrak{C}_p = \{p\}$. Y si $p \in \mathbb{S}^1 - \{1\}$, entonces $p$ no es un punto de corte y $\mathfrak{C}_p = \mathbb{S}^1$.

Esto nos lleva a nuestra siguiente caracterización.

**Teorema 2.17** *Un continuo de Peano es una dendrita si y sólo si todos sus elementos cíclicos son singuletes.*

*Demostración.* En una dendrita $X$, cualesquiera dos puntos se separan por algún tercer punto (por el teorema 2.3), por lo que para los puntos $p \in X$ que no son de corte, se cumple que

$$\{x \in X : \text{ningún punto de } X \text{ separa a } p \text{ de } x\} = \{p\}.$$

Por otra parte, sea $X$ un continuo de Peano, supongamos que todos los elementos cíclicos son singuletes pero que $\mathbb{S}^1 \subset X$. Por el lema 2.5(e) tenemos que si todos los puntos de $\mathbb{S}^1$ fueran de corte de $X$, existirían $x, y, z \in \mathbb{S}^1$ tales que $z$ separa a $x$ y $y$ en $X$, lo cual no es posible. Entonces existe un punto $p \in \mathbb{S}^1$ que no es de corte de $X$, pero esto implicaría que $\mathbb{S}^1 \subset \mathfrak{C}_p$ lo cual es una contradicción. Entonces $X$ no puede contener circunferencias y por lo tanto es una dendrita. $\square$

La siguiente definición que debemos ver es la de dimensión. Dado un espacio $X$, definimos, para cada $n \geq 0$:

$$\begin{array}{rcll} dim(X) & = & -1, & \text{si } X = \emptyset, \\ dim(X) & \leq & n, & \text{si para todo } U \in \tau \text{ existe } V \in \tau \text{ con } V \subset U \;\; \text{y} \\ & & & dim(bd(V)) \leq n-1, \\ dim(X) & = & n, & \text{si } dim(X) \leq n \;\; \text{y } dim(X) \nleq n-1, \\ dim(X) & = & \infty, & \text{si para todo } n \geq -1, dim(X) \nleq n. \end{array}$$

Como las fronteras se conservan bajo homeomorfismos, se puede probar, por inducción, que la dimensión es un invariante topológico [N3, 1.2, p. 6]. Los espacios de dimensión 0 son entonces los que tienen una base de abiertos-cerrados y los espacios de dimensión 1 tienen una base de abiertos con frontera de dimensión 0 por lo que se pueden separar por conjuntos de dimensión 0. Ejemplos de espacios de dimensión 0 son los compactos de Hausdorff totalmente disconexos, y ejemplos de espacios de dimensión $n$ son los conocidísimos espacios $\mathbb{R}^n$ con la topología Euclidiana [N3, 9.6, p. 49]. Un ejemplo de espacio de dimensión infinita es el *Cubo de Hilbert* $I^\infty$ [N3, 9.11, p. 50].

Algo importante que debemos de tomar en cuenta es que si $Y \subset X$, entonces, como para todo $Z \subset X$, $bd_Y(Z \cap Y) \subset bd_X(Z)$, se puede probar, inductivamente, que $dim(Y) \leq dim(X)$ [N3, 3.2, p. 15].

Más adelante mostraremos que las dendritas son de dimensión 1. Entonces restrinjámonos a pensar en dimensiones 0 y 1 que son las que nos servirán.

La siguiente caracterización que estudiaremos es un poco más complicada ya que reunirá los conceptos de elemento cíclico y dimensión.

Decimos que, en un continuo de Peano $X$, un subconjunto $U \subset X$ es *completamente arcoconexo*, (*cac*) si para cualesquiera dos puntos $x, y \in U$, y cada arco que va de $x$ a $y$, $\alpha \in C(X)$, se tiene que $\alpha \subset U$. Ahora vale la pena demostrar algunas propiedades de los continuos y sus subconjuntos cac que nos servirán en nuestra caracterización siguiente.

**Lema 2.18** *Dado un continuo de Peano $X$, se tiene:*

1. *Si $L \subset X$ es cac, entonces $L$ es lac.*

2. *Si $L_i \subset X$ es cac para cada $i \in J$, entonces $\bigcap_{i \in J} L_i$ es cac.*

3. *Si $L \subset X$ es no vacío, cac y cerrado, entonces para cada componente $R$, de $X - L$, se tiene que $|bd_X(R)| = 1$.*

*Demostración.*

1. Dado $p \in L$ y una vecindad del punto $p$ en $L$, que podemos escribir $U \cap L$ para alguna $U \in \tau$. Entonces por ser $X$ de Peano, existe un abierto arcoconexo, $V \in \tau$ con $p \in V \subset U$. Sea cualquier punto $x \in V \cap L$, y sea un arco $\alpha \subset V$ entre $p$ y $x$. Por ser $L$ cac, $\alpha \subset V \cap L$, lo cual prueba que $V \cap L$ es un abierto arcoconexo en $L$ que además cumple que $p \in V \cap L \subset U \cap L$. Esto nos da que $L$ es lac.

2. Para cada dos puntos $x, y \in \bigcap_{i \in J} L_i$ y un arco que los una $\alpha \subset X$, sabemos que para cada $i \in J$, $\alpha \subset L_i$. Entonces $\alpha \subset \bigcap_{i \in J} L_i$ y podemos concluir que la intersección es cac.

3. Sea $R$ una componente de $X - L$. Como $X$ es lc, $R$ es abierto y entonces $R$ es arcoconexo, si suponemos que existen dos puntos distintos $p, q \in bd_X(R)$, entonces por el lema 2.6, podemos encontrar dos puntos distintos, uno cerca de $p$ y otro cerca de $q$, en $bd_X(R)$ accesibles por arcos desde $R$. Podemos pensar spg que esos dos puntos son $p$ y $q$, usando que $R$ es arcoconexo se puede conseguir un arco $\alpha \subset R \cup \{p\} \cup \{q\}$ que conecta a $p$ con $q$. Sin embargo, como $bd_X(R) \subset L$, acabamos de mostrar que $L$ no es cac, contradicción. Entonces $|bd_X(R)| \leq 1$ y como $R$ es un abierto de $X$, tiene que darse la igualdad ya que la frontera no puede ser vacía.

$\square$

Antes de continuar, hay que ver un resultado sobre conexidad local que se relaciona con la frontera.

**Lema 2.19** *Dado un espacio de Peano $X$ y una familia de subconjuntos $\{A_t\}_{t \in J}$ de $X$, se tiene que*

$$bd_X\Big(\bigcup_{t \in J} A_t\Big) \subset \overline{\bigcup_{t \in J} bd_X(A_t)}$$

*Demostración.* Supongamos que existe un punto

$$p \in bd_X\Big(\bigcup_{t \in J} A_t\Big) - \overline{\bigcup_{t \in J} bd_X(A_t)}$$

Tomemos una vecindad conexa $E \in \tau$ con $p \in E \subset (X - \overline{\bigcup_{t\in J} bd_X(A_t)})$. Como $p \in bd_X(\bigcup_{t\in J} A_t)$, se tiene que

$$E \cap \Big(\bigcup_{t\in J} A_t\Big) \neq \emptyset \neq E - \Big(\bigcup_{t\in J} A_t\Big) = \bigcap_{t\in J}(E - A_t)$$

Entonces existe un $t_0 \in J$ tal que $E \cap A_{t_0} \neq \emptyset \neq E - A_{t_0}$. Esto porque la segunda condición siempre se cumple por la igualdad anterior, sólo hay que tomar algún $t_0$ para la primera.

Entonces, por la conexidad de $E$, tenemos que $E \cap bd_X(A_{t_0}) \neq \emptyset$. Esto implica que $E \cap (\bigcup_{t\in J} bd_X(A_t)) \neq \emptyset$. Esto contradice la elección de $E$ y termina la prueba de contención deseada. $\square$

Ahora veamos en que se relacionan la unicoherencia y ser cac en el siguiente resultado.

**Lema 2.20** *Sean un continuo de Peano unicoherente $X$ y un cerrado cac $L \in 2^X$. Entonces $L$ es unicoherente.*

*Demostración.* Como $X$ es arcoconexo, $L \in C(X)$ y por el lema 2.18(1), $L$ es lc. Sean subcontinuos $A, B \in C(L)$ con $L = A \cup B$. Denotemos por $\{M_i : i \in J\}$ al conjunto de componentes de $X - L$. Notemos que para cada $i \in J$ se da $bd_X(M_i) \subset L$ ya que $M_i \in \tau$, además $bd_X(M_i) \subset A$ o $bd_X(M_i) \subset B$, por el lema 2.18(3). Sean

$$\begin{aligned} M &= \bigcup\{M_i : i \in J \text{ y } bd_X(M_i) \subset A\} \text{ y} \\ N &= \bigcup\{M_i : i \in J \text{ y } bd_X(M_i) \cap A = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Claramente $M, N \in \tau$. Por el lema 2.19 y el hecho de que las fronteras de los conjuntos $M_i$ están en alguno de los dos cerrados $A$ o $B$, nos fijamos que $bd_X(M) \subset A$ y $bd_X(N) \subset B$, por lo que $M \cup A$ y $N \cup B$ son subcontinuos. Como $X = (M \cup A) \cup (N \cup B)$, por la unicoherencia de $X$ el siguiente conjunto es conexo:

$$(M \cup A) \cap (N \cup B) = A \cap B,$$

que era lo que queríamos. $\square$

Nos gustaría aplicar el lema 2.20 a los elementos cíclicos, para esto primero se debe de probar que son cac y cerrados.

**Lema 2.21** *En un continuo de Peano, los elementos cíclicos son cac y cerrados.*

*Demostración.* Tomemos un continuo de Peano $X$ y un punto $p \in X$. Si $\mathfrak{C}_p = \{p\}$, no hay nada que hacer. Así que supongamos que $\mathfrak{C}_p \neq \{p\}$. Sea $x \in \mathfrak{C}_p - \{p\}$. Notemos que $p$ no es punto de corte. Entonces $p$ no separa a $X$. Como el total es un cerrado cac que contiene a $p$ y $x$, podemos definir al conjunto $L$ como la interseccion de todos los cerrados cac que contienen a $p$ y $x$. Claramente por el lema 2.18, $L$ también es un conjunto cac. Entonces será suficiente probar que $L = \mathfrak{C}_p$.
($\subset$) Sea un punto $a \in X - \mathfrak{C}_p$, esto significa que existe un punto de corte $b \in X$ con $X - \{b\} = A|B$, $a \in A$ y $p \in B$. Claramente $x \in B \cup \{b\}$ ya que $x$ no se separa de $p$ por ningún punto. Tomemos tres puntos distintos $a' \in A$, $c, d \in B \cup \{b\}$. Supongamos que existe un arco $\alpha$ que va de $c$ a $d$ y que además pasa por $a'$. Entonces $[c, a']_\alpha$ es un conjunto conexo que intersecta a $B$ en $c$ y a $A$ en $a'$, por lo cual $b \in [c, a')_\alpha$. También tenemos que $[a', d]_\alpha$ es un conjunto conexo que intersecta a $B$ en $d$ y a $A$ en $a'$, por lo que $b \in (a', d]_\alpha$. Pero $\alpha = [c, a']_\alpha \cup [a', d]_\alpha$ y $a', b \in [c, a']_\alpha \cap [a', d]_\alpha$, una contradicción a que $\alpha$ es un arco ya que $a' \neq b$. Entonces cualquier arco entre dos puntos de $B \cup \{b\}$ se queda contenido en $B \cup \{b\}$, con lo que demostramos que $B \cup \{b\}$ es un conjunto cerrado y cac, que contiene a $p$ y $x$ pero no contiene a $a'$, lo cual quiere decir que $a \in X - L$.
($\supset$) Sea un punto $a \in X - L$, y fijémonos en la componente $M$ de $X - L$ que contiene a $a$. Por el lema 2.18(3) sabemos que existe un $b \in X$ con $bd_X(M) = \{b\}$. Entonces $b$ es un punto que separa a cualquier punto de $M$ de los de $X - \overline{M}$. Como $a \in M$, $L \subset X - M$ y $b \neq p$ ya que $b$ es un punto de corte y $p$ no lo es, tenemos que $p \in L - \overline{M}$. Entonces $b$ separa a $a \in M$ de $p \in L$, por lo que $a \in X - \mathfrak{C}_p$.

Estas dos contenciones prueban lo que queríamos. $\square$

Ahora veamos un resultado que une el concepto de dimensión con la unicoherencia.

**Lema 2.22** *Un continuo de Peano unicoherente que no se puede separar por conjuntos de un punto, no se puede separar por conjuntos de dimensión cero.*

*Demostración.* Sean $X$ un continuo de Peano y $E$ un subconjunto que lo separe. Por el lema 2.5(b), spg podemos escoger a $E$ cerrado. Entonces supongamos que $X - E = A'|B'$, y tomemos dos puntos $a \in A'$ y $b \in B'$. Claramente la componente de $A'$ que contiene al punto $a$, que llamaremos $A$, es abierta y $bd_X(A) \subset E$. Entonces podemos escribir $X - bd_X(A) = A|C$, donde $C = X - \overline{A} \in \tau$ que además cumple que $b \in C$. Tomemos la componente $B$ de $X - \overline{A}$ que contiene a $b$, $B \subset C$. Por ser $B$ una componente del abierto $X-\overline{A}$ en un espacio de Peano, tenemos que $bd_X(B) \subset bd_X(X-\overline{A}) = bd_X(\overline{A}) \subset bd_X(A)$([K, §49, III, theorem 3, p. 238]). Notemos que por esto, $(A \cup B) \cap bd_X(B) = \emptyset$, así que $bd_X(B)$ es también un conjunto de corte cerrado, veamos que es conexo.

Notemos que $B$ es conexo y $\overline{B} = B \cup bd_X(B)$ por lo que $B$ es una componente de $X - bd_X(B)$. Tomemos el conjunto de componentes de $X - bd_X(B)$ que son distintas de $B$ y denotémoslo por $\{M_i : i \in J\}$. Como los conjuntos $M_i$ son abiertos, para cada $i \in J$ tendremos que $\emptyset \neq bd_X(M_i) \subset bd_X(bd_X(B)) \subset bd_X(B) \subset bd_X(A) \subset \overline{A}$ por lo que podemos afirmar que

$$\overline{A} \cup (\bigcup_{i \in J} M_i) = X - B$$

es un continuo. Por la unicoherencia de $X$, tenemos que $\overline{B} \cap (X-B) = bd_X(B)$ es conexo. Esto prueba que $bd_X(B) \in C(X)$.

Como $bd_X(B) \subset bd_X(A) \subset E$, hemos probado que cada conjunto de corte $E$ contiene un subcontinuo de corte $K \in C(X)$. Por hipótesis, $K$ es no degenerado. Entonces

$$dim(E) \geq dim(K) \geq 1$$

que era lo que queríamos probar. $\square$

Ahora, con esta teoría desarrollada, ya podemos encontrar una caracterización más de las dendritas.

**Teorema 2.23** *Un continuo de Peano es una dendrita no degenerada si y sólo si es unicoherente y de dimensión* 1*.*

*Demostración.* Ya sabemos que las dendritas no degeneradas son continuos de Peano unicoherentes. Recordemos que el teorema 2.3 nos dice que cualesquiera dos puntos en una dendrita se pueden separar por un punto, que en particular es un conjunto de dimensión 0. Como $X$ es compacto, por [N3, 8.4, p. 39] obtenemos que $dim(X) = 1$.

Ahora tomemos un continuo de Peano $X$, unicoherente y de dimensión 1 y supongamos que no es una dendrita. Por el teorema 2.17 $X$ tiene un elemento cíclico $C$ que no es un singulete. Por el lema 2.21 tenemos que $C$ es cac y cerrado. Entonces por el lema 2.20 tenemos que $C$ es unicoherente. Como existe un punto $p \in C$ tal que $C = \mathfrak{C}_p$, sabemos que $p$ no es de corte de $X$, ya que si lo fuera, $\mathfrak{C}_p = \{p\}$. Notemos que si $p$ separara a dos puntos $q, r \in C$ en $C$, como no los puede separar en $X$ y además las componentes de $X - \{p\}$ son abiertas, existe un arco $\alpha \subset X - \{p\}$ de $q$ a $r$. Pero además, como $C$ es cac, $\alpha \subset C - \{p\}$ lo cual no es posible ya que cualquier arco de $q$ a $r$ contenido en $C$ debe de pasar por el punto que separa a $q$ de $r$ en $C$, es decir, por $p$. Entonces $p$ no separa a ningun par de puntos de $C$ en $C$. Si tuvieramos que un punto $x \in C$ separara a $p$ de un punto $y \in C$ en $C$, como no los puede separar en $X$, y las componentes de $X - \{x\}$ son abiertas, habría un arco $\beta \subset X - \{x\}$ que une a $p$ y $y$. Pero entonces también se tendría que dar que $\beta \subset C$ y por un argumento similar al anterior, esto es una contradicción. Esto demuestra que cualquier punto de $C - \{x\}$ está en la misma componente de $C - \{x\}$ que $p$, es decir, $C - \{x\}$ es conexo. Es decir, $C$ no se separa ninguno de sus puntos. Entonces podemos aplicar el lema 2.22 para obtener que $C$ no se separa por subconjuntos de dimensión 0. Entonces

$$dim(X) \geq dim(C) \geq 2$$

lo cual es una contradicción. Entonces $X$ tiene que ser una dendrita, que era lo que queríamos. $\square$

Sólo falta mencionar que no se puede quitar ninguna de las condiciones en la caracterización anterior. Una circunferencia es de Peano, y de dimensión 1 pero no unicoherente. Los dendroides que se definirán más adelante son de dimensión 1 [N3, 19.40, p. 123] y unicoherentes pero en general no son lc. Finalmente $I^2$ es de Peano y unicoherente [N4, p. 19] pero no es de dimensión 1 [N3, 9.5, p. 49].

## 2.3. El Hiperespacio de los Arcos

La primera caracterización de las dendritas que involucra los hiperespacios en los continuos de Peano tiene que ver con darnos cuenta que el hiperespacio

$$\mathscr{A}(X) = \{\alpha \in C(X) : \alpha \text{ es un arco}\} \cup F_1(X)$$

donde $F_1(X) = \{\{p\} : p \in X\}$, es compacto si y sólo si $X$ es una dendrita (teorema 2.24). Desde este punto en adelante usaremos sin acalarar que las dendritas son únicamente arcoconexas (teorema 2.16). También usaremos que los subconjuntos conexos de las dendritas son cac, ya que los subcontinuos de las dendritas son dendritas (teo 2.4) y únicamente arcoconexas. Por último, digamos que una dendrita homeomorfa a la letra $T$ es un triodo (Figura 2.8).

**Teorema 2.24** *En un continuo de Peano $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

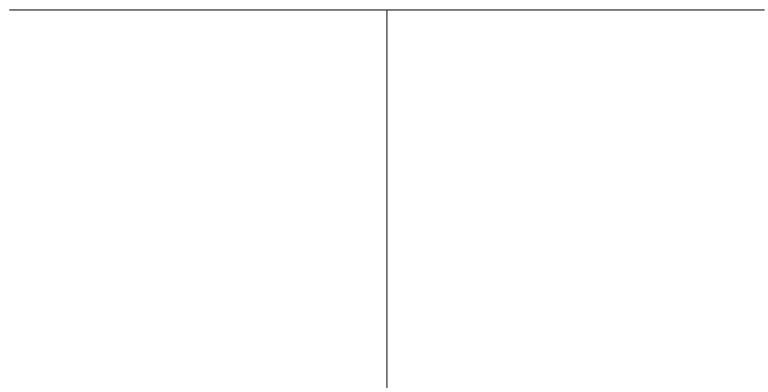

Figura 2.8: Triodo

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) $\mathscr{A}(X)$ es compacto,*

*(3) cualquier sucesión de arcos $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{A}(X)$, ordenada crecientemente por la inclusión, está contenida en un arco,*

*(4) para cada función continua inyectiva $f : [0,1) \to X$ se tiene que $\overline{f([0,1))} \in \mathscr{A}(X)$.*

*Demostración.*
(1) $\Rightarrow$ (2) Tomemos una sucesión $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{A}(X)$, como sabemos que $C(X)$ es compacto, tiene una subsucesión convergente. Entonces, supongamos spg que $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge, sea $\alpha = \lim \alpha_i$, si tuviéramos que $\alpha$ es un punto, ya acabamos, por lo que supongamos que esto no es así. Entonces tomemos puntos $p, q \in \alpha$ que no son de corte de $\alpha$ (el comentario que se encuentra después del teorema 1.4 nos dice por qué estos puntos existen) y tomemos el arco que los une $pq \subset \alpha$. Supongamos que hay un punto $r \in \alpha - pq$, y tomemos el punto $s \in pq$ tal que $rs \cap pq = \{s\}$. Por ser $p, q$ puntos que no son de corte de $\alpha$, son terminales y por lo tanto finales, entonces, $s \neq p, q$.

Ahora tomemos conexos disjuntos dos a dos $U_p, U_q, U_r \in \tau$ tales que

$$p \in U_p \subset \overline{U_p} \subset X - rq$$

$$q \in U_q \subset \overline{U_q} \subset X - (pr \cup \overline{U_p})$$

$$r \in U_r \subset \overline{U_r} \subset X - (pq \cup \overline{U_p} \cup \overline{U_q})$$

Entonces por la convergencia de la sucesión existe un $n \in \mathbb{N}$ y puntos $x_n$, $y_n$ y $z_n$ tales que $x_n \in U_p \cap \alpha_n$, $y_n \in U_q \cap \alpha_n$ y $z_n \in U_r \cap \alpha_n$.

Entonces por la conexidad de las vecindades elegidas existen puntos $a \in ps \cap U_p$, $b \in sq \cap U_q$ y $c \in sr \cap U_r$ tales que $ps \cap x_n a = \{a\}$, $sq \cap y_n b = \{b\}$ y $sr \cap z_n c = \{c\}$. Por lo tanto, tendremos que el triodo $as \cup sb \cup sc$ está contenido en $\alpha_n$, lo cual es una contradicción. Entonces $\alpha = pq$, que era lo que queríamos.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{A}(X)$ ordenada crecientemente por la inclusión. Primero probemos que $\lim \alpha_n = \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_n}$.

Sea $x \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n}$, y una vecindad abierta de $x$, $U \in \tau$. Entonces existe un punto $y \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n) \cap U$, y podemos pensar spg que $y \in \alpha_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $k \geq j$ obtenemos que $y \in \alpha_k$, de donde $U \cap \alpha_k \neq \emptyset$. Esto significa que $x \in \liminf \alpha_i$.

Ahora tomemos $x \in X - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n}$ y una vecindad abierta de $x$, $U \in \tau$ tal que $U \subset X - \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n}$. Entonces tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$, $U \cap \alpha_i = \emptyset$. Esto significa que $x \in X - \limsup \alpha_i$.

Por lo tanto la igualdad que queríamos se da. Como $\mathscr{A}(X)$ es compacto, $\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_n}$ es un arco que contiene a todos los arcos $\alpha_n$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Para cada $r \in (0,1)$ tenemos que $f|_{[0,r]}$ es una función continua inyectiva de un continuo en un espacio $T_2$, es decir, un encaje. Notemos que $f([0,r_1]) \subset f([0,r_2])$ cuando $r_1 \leq r_2$, lo cual nos dice que si llamamos a los arcos

$$\alpha_r = f\left(\left[0, 1 - \frac{1}{r+2}\right]\right)$$

entonces $(\alpha_r)_{r\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de arcos ordenada por la inclusión. Por lo tanto, existe un arco $\alpha \in \mathscr{A}(X)$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\alpha_i \subset \alpha$. Por lo tanto, como $\overline{f([0,1))} = \overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i} = \lim \alpha_i$ es un continuo no degenerado contenido en el arco $\alpha$, debe de ser homeomorfo a un arco.

(4) $\Rightarrow$ (1) Si suponemos que $X$ contiene una circunferencia, nos fijamos en la función continua $f : I \to \mathbb{S}^1 \subset X$ definida como $f(r) = e^{2\pi ri}$. Entonces por hipótesis debería de darse que $\mathbb{S}^1 = f(I) = \overline{f([0,1))}$ es un arco lo cual es una contradicción. Entonces $X$ no contiene circunferencias por lo que es una dendrita.

□

Cabe mencionar que si quitamos la condición de ser lc, las condiciones no son equivalentes a ser dendritas. Se puede demostrar [MV, teorema 4.19, p. 35] que los dendroides cumplen la condición (3) (y por lo tanto (4)). Además es fácil demostrar que el abanico armónico definido en la sección 6.2 (figura 6.2) cumple (2) pero no es lc.

## 2.4. Propiedades de los Conjuntos $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$

A continuación describiremos algunas de las propiedades de los puntos de una dendrita de acuerdo a su orden. Cabe resaltar que éstas no son caracterizaciones de las dendritas. Sin embargo, queda fuera del objetivo de este trabajo mostrar ejemplos que muestren esto. Como referencia, el lector puede consultar [Ch, 1.6].

**Teorema 2.25** *En una dendrita $X$, $|R(X)| \leq \aleph_0$.*

*Demostración.* Suponiendo que no, como los puntos de $R(X)$ son de corte, por el lema 2.5(g), existen dos puntos $a, b \in X$ y un conjunto no numerable $B$ de puntos de $X$ que los separan en $X$, donde claramente $B \subset ab$. Ya sabemos que para cada $p \in B$, $X - \{p\}$ tiene al menos 3 componentes, y como $ab - \{p\}$ tiene sólo dos componentes, una de las componentes de $X - \{p\}$, digamos, $W_p$, cumple $W_p \cap ab = \emptyset$.

Demostremos que si tomamos dos puntos distintos $p, q \in B$, $W_p \cap W_q = \emptyset$. Como las componentes de $X - \{q\}$ son abiertas, la unión de todas ellas excepto $W_q$ debe de ser abierta, es decir, el complemento de esta unión, $W_q \cup \{q\}$ es cerrado. Por el teorema de GF 1.2, $q \in \overline{W_q}$, de manera que $W_q \cup \{q\} = \overline{W_q}$. Como $\overline{W}_q \cap ab = \{q\}$, $\overline{W}_q \cup ab$ es una dendrita, y por ser hu, $\overline{W}_p \cap (\overline{W}_q \cup ab)$ también es una dendrita. Notemos que $\overline{W}_p \cap (\overline{W}_q \cup ab) = (\overline{W}_p \cap \overline{W}_q) \cup \{p\}$, y como $p \notin \overline{W}_q$, claramente $p \notin \overline{W}_p \cap \overline{W}_q$. Pero esto dice que $p$ está separado de $\overline{W}_p \cap \overline{W}_q$, lo cual sería una contradicción a la conexidad de $\overline{W}_p \cap (\overline{W}_q \cup ab)$ a menos que $\overline{W}_p \cap \overline{W}_q = \emptyset$.

Entonces $\{W_p\}_{p \in B}$ es una cantidad no numerable de abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos, lo cual es una contradicción pues $X$ es separable. Entonces $|R(X)| \leq \aleph_0$ que era lo que queríamos. □

**Teorema 2.26** *Si $X$ es una dendrita, $\overline{O(X)} = X$.*

*Demostración.* Dado $U \in \tau - \{\emptyset\}$, sabemos que podemos tomar un conexo $V \in \tau - \{\emptyset\}$ tal que $V \subset U$. Ahora si nos fijamos en dos puntos $p, q \in V$, como todos los conexos en las dendritas son arcoconexos (teorema 2.11) $pq \subset V$. Como $R(X) \cap (pq - \{p, q\})$ es a lo más numerable y además los puntos de $pq - \{p, q\}$ no son finales y por lo tanto no son terminales, debe haber al menos un punto ordinario en $pq \cap V$ (de hecho una cantidad no numerable) y por lo tanto $U \cap O(X) \neq \emptyset$. $\square$

**Teorema 2.27** *En una dendrita $X$, $dim(E(X)) = 0$.*

*Demostración.* Sean un punto $p \in E(X)$. Sabemos que una vecindad abierta de $p$ en $E(X)$ se puede ver como $U \cap E(X)$ para algún $U \in \tau$. Entonces tomemos una vecindad $U \cap E(X)$ de $p$, tal que $U \in \tau$ y un punto $x \in X - \{p\}$ cualquiera. Como $p \in E(X)$, podemos tomar un $V \in \tau$ tal que $p \in V \subset U$, $x \in X - V$ y $bd_X(V) = \{y\}$ para algún $y \in X$. Claramente como $y$ separa a $p$ de $x$, $y$ es un punto de corte, es decir, $y \notin E(X)$. Por lo tanto $V \cap E(X) = \overline{V} \cap E(X)$, así que $V \cap E(X)$ es abierto y cerrado en $E(X)$, lo cual nos dice que hemos encontrado una base local en $p$ de abiertos-cerrados en $E(X)$, que es lo que queríamos. $\square$

Ahora el último resultado de esta sección que nos da una equivalencia entre el comportamiento de los puntos de ramificación y el de los terminales.

**Teorema 2.28** *En una dendrita $X$ se tiene que $E(X)$ es denso si y sólo si $R(X)$ es denso.*

*Demostración.* Primero supongamos que $E(X)$ es denso. Sea cualquier $U \in \tau - \{\emptyset\}$ y tomemos un conexo $V \in \tau - \{\emptyset\}$ contenido en $U$, y dos puntos cualesquiera $p, q \in V$. Claramente $pq \subset V$, escojamos un punto cualquiera $r \in pq - \{p, q\}$ y un conexo $W \in \tau$ tal que $r \in W \subset V - \{p, q\}$. Entonces por hipótesis hay un $x \in W \cap E(X)$, que no puede estar en $W \cap pq$ ya que los puntos de $pq - \{p, q\}$ no son finales y por lo tanto no son terminales. Como $x \in W - pq$, por la conexidad de $W$, existe un $y \in pq \cap W$ tal que $xy \subset W$, y $xy \cap pq = \{y\}$. Con la ayuda de los tres arcos $xy$, $py$ y $qy$, obtenemos que $ord_X(y) \geq 3$, es decir $y \in R(X)$. Entonces $U \cap R(X) \neq \emptyset$ que es lo que queríamos.

Ahora supongamos que $R(X)$ es denso. Sea $x \notin E(X)$, veamos que existe una sucesión de puntos de $E(X)$ que convergen a $x$, lo cual será suficiente para probar que $E(X)$ es denso.

Tomemos otro punto cualquiera $y \in X$, y tomemos un punto $z \in xy - \{x, y\}$. Ahora tomemos una vecindad conexa de $z$, $U_z \in \tau$ tal que $z \in U_z \subset X - \{x, y\}$. Por hipótesis debe existir un punto $w \in R(X)$ en $U_z$, si suponemos que $w \in U_z - xy$, entonces, por la conexidad de $U_z$, sabemos que tiene que existir un punto $q \in U_z \cap xy$ tal que $xy \cap qw = \{q\}$. En este caso $q \in R(X) \cap xy - \{x, y\}$, por lo que podemos suponer spg desde el principio que $w \in xy - \{x, y\}$.

Usando este procedimiento inductivamente, podemos encontrar una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de $(xy - \{x, y\}) \cap R(X)$ tal que $\lim x_i = x$ y que además para todo $i \in \mathbb{N}$, tengamos $x <_{xy} x_{i+1} <_{xy} x_i <_{xy} y$. Esto se puede lograr tomando en el paso $n + 1$, el arco $x_i x$ y aplicar el argumento del parrafo anterior a $y = x_i$ y así obtener $w = x_{i+1}$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $X - \{x_i\}$ tiene al menos 3 componentes, y $xy - \{x_i\}$ tiene sólo 2, existe otra componente más $\beta_i$, de $X - \{x_i\}$, disjunta del arco $xy$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos tomar un punto $y_i \in \beta_i$ y considerar el arco $x_i y_i \subset \beta_i \cup \{x_i\}$. Recordemos que $x_i \in \overline{\beta_i}$ por el teorema GF 1.2, así que $\overline{\beta_i} = \beta_i \cup \{x_i\}$ es una dendrita.

Gracias al teorema 2.24(3), podemos aplicar el teorema de reducción de Brouwer a la familia

$$F_i = \{\beta \in C(X) : \beta \text{ es un arco y } x_i y_i \subset \beta \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$$

Con esto, encontramos un elemento maximal $\alpha_i \in F_i$. Podemos tomar entonces spg el extremo $z_i$ de $\alpha_i$, tal que $x_i <_{\alpha_i} y_i \leq_{\alpha_i} z_i$. Claramente $z_i$ es un punto final, por lo que es un punto terminal.

Podemos suponer spg que la sucesión $(x_i z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge. Nos gustaría que $\lim x_i z_i = \{x\}$ porque así ya tendríamos la sucesión $(z_i)_{i \subset \mathbb{N}}$ de puntos de $E(X)$ que converge a $x$. Sea $A = \lim x_i z_i$.

Como $x = \lim x_i \in \lim x_i z_i$, supongamos que $|A| \neq 1$. Como $X$ no contiene continuos de convergencia, debe haber una subsucesion de $\{x_i z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $A$ intersecte a todos los elementos de esta subsucesión. Para no reetiquetar, supongamos que $A \cap x_i z_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces podemos tomar dos puntos $p \in A \cap x_j z_j$ y $q \in A \cap x_k z_k$ para algunos $j, k \in \mathbb{N}$ con $k = j + 1$. Entonces $x_j \in px \subset A$ y $x_k \in qx \subset A$, lo cual implica que $x_k x_j \subset A$. Tomemos un punto $r \in x_{j+1} x_j - \{x_{j+1}, x_j\}$ y una vecindad conexa de $r$, $V \in \tau$, tal que $V \cap (xx_{j+1} \cup x_j y) = \emptyset$. Por la convergencia de $(x_i z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, y como $r \in A$, existe un $s \in \mathbb{N}$ y un punto $w \in V \cap x_s z_s$. Entonces tomamos el punto $z \in xy$ tal que $wz \cap xy = \{z\}$ (podría ser que $w = z$). Como $V$ es una vecindad conexa, tenemos que $z \in wr \subset V$. Entonces $z \in x_s w$ ya que $x_s \in xy$ y cualquier arco de $w$ a algún punto de $xy$ debe de pasar por $z$. Por construcción $x_s z_s \cap xy = \{x_s\}$ con lo que obtenemos $z = x_s$. Entonces $x_s \in V$ lo cual contradice la elección de $V$. Por lo tanto $|A| = 1$ que era lo que nos faltaba. $\square$

# Capítulo 3

# Convergencia 0-regular

Ahora nos corresponde conocer una noción que en realidad se relaciona más con la teoría de homología, sin embargo, en un caso específico es otra forma más de conexidad local. Una discusión de cómo se originó esta noción se puede encontrar en [N1, p. 520].

En un continuo $X$, diremos que una sucesión de subcontinuos $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ converge *0-regularmente* a $A \in C(X)$ si converge con la métrica de Hausdorff y además para cada $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si tomamos cualquier $i \geq N$ y dos puntos $x, y \in A_i$, con $d(x,y) < \delta$, entonces existe un conexo $Z_i \subset A_i$ tal que $x, y \in Z_i$ y $diam(Z_i) < \epsilon$. Escribiremos $A = limpeanA_i$, usando la misma notación que en [Maz].

El primer resultado nos muestra una restricción para la convergencia 0-regular.

**Lema 3.1** *En un espacio métrico, si una sucesión de subcontinuos converge,* 0*-regularmente, su límite es un subcontinuo lc.*

*Demostración.* Supongamos que, en un espacio métrico $X$, tenemos una sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ y un $A \in C(X)$ tal que $A = limpeanA_i$. Probemos que $A$ es ulc, para esto, tomemos un $\epsilon > 0$ cualquiera. Tomamos $\delta > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ que cumplen la definición de convergencia 0-regular para $\frac{\epsilon}{2}$.

Sean $x, y \in A$ con $d(x,y) < \delta$, por [Ill1, 4.4, p. 70] podemos tomar dos sucesiones de puntos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i, y_i \in A_i$, $x = \lim x_i$, $y = \lim y_i$.

Podemos tomar, por la convergencia con la métrica de Hasussdoff, un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $d(x, x_n) < \frac{1}{2}(\delta - d(x,y))$ y $d(y, y_n) < \frac{1}{2}(\delta - d(x,y))$. Entonces, si $n \geq N_2$, por la desigualdad del triángulo, $d(x_n, y_n) < \delta$.

Para $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, sabemos que podemos encontrar un conexo, $K_n \in C(X)$ con $x_n, y_n \in K \subset A_n$ y $diam(K_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces la sucesión $(K_n)_{n=k}^{\infty}$ de $C(X)$ tiene una subsucesión convergente, digamos, spg que $K = \lim K_n$.

Por [Ill1, 4.4, p. 70], $x, y \in K$ y también sabemos que $K \in C(A)$, sólo faltaría ver que $diam(K) < \epsilon$. Tomemos primero dos puntos cualesquiera $p, q \in K$, veamos que $d(p,q) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Dada $r > 0$, por la convergencia tenemos que existe un $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_3$, $H_d(K_n, K) \leq r$. Sabemos que si $n \geq N_3$, existen puntos $p_n, q_n \in K_n$ tales que $d(p, p_n) < r$ y $d(q, q_n) < r$, y como además $d(p_n, q_n) \leq diam(K_n) < \frac{\epsilon}{2}$, por la desigualdad del triángulo, $d(p,q) < \frac{\epsilon}{2} + 2r$. Como esto lo hicimos para cualquier $r > 0$, obtenemos que $d(p,q) \leq \frac{\epsilon}{2}$, y como esto lo hicimos para cualesquiera dos puntos de $K$, obtenemos $diam(K) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Esto completa la prueba de que $K$ es ulc y por lo tanto lc, que era lo que queríamos. □

Tomamos el hiperespacio de los subcontinuos lc de un continuo $X$,

$$L(X) = \{Y \in C(X) : Y \text{ es lc}\}$$

Sabemos, por el lema anterior, que una sucesión en $L(X)$ que converja 0-regularmente lo hará a un elemento en $L(X)$. Podemos darle a $L(X)$ una topología definiendo, para un conjunto $P \subset L(X)$, el conjunto $cl(P)$ como todos los puntos (subcontinuos) a los que converge 0-regularmente una sucesión contenida en $P$. Definamos que un subconjunto $P \subset L(X)$ es cerrado si y sólo si $P = cl(P)$. Es facil probar que esta definición de $cl(P)$ cumple las condiciones $(a), (c), (d)$ de [W, 3.7, p. 25], por lo cual estos cerrados generan una topología que llamaremos $\mathscr{L}(X)$, la topología inducida en $L(X)$ por la convergencia 0-regular. Si el lector desea conocer la prueba de que ésta es efectivamente una topología, puede consultar [Whi].

Con esto, podemos continuar con la siguiente caracterización de las dendritas.

**Teorema 3.2** *Para un continuo $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) la convergencia en $C(X)$ con la métrica de Hausdorff coincide con la 0-regular,*

*(3) $X \in L(X)$ y $L(X)$ es compacto con la topología $\mathscr{L}(X)$.*

*Demostración.*
(1)⇒(2) Sean $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$, $A = limA_i$ y un $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces como $X$ es ulac, existe un $\delta > 0$ tal que si tomamos $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$, existe un continuo $K \in C(X)$ tal que $x, y \in K$ y $diam(K) < \epsilon$. Si además tenemos que $x, y \in A_i$, por ser $X$ hu, tenemos que $K_i = A_i \cap K$ es un continuo con diámetro menor a $\epsilon$. Entonces tomando $N = 0$, y el $\delta$ que ya tenemos, los conjuntos $K_i$ son los conexos que cumplen con la definición de que $A = limpeanA_i$. Entonces la convergencia con la métrica de Hausdorff implica la 0-regular y es claro que la 0-regular implica la de Hausdorff.
(2)⇒(3) Sabemos que para cada $Y \in C(X)$, $Y = \lim Y$ como sucesión constante, por lo que por hipótesis $Y = limpeanY$. Esto junto con el lema 3.1 nos dice que $C(X) = L(X)$ como espacios topológicos, por lo que en particular $X \in L(X)$. Como además $C(X)$ es compacto con la métrica de Hausdorff, $L(X)$ es compacto con la topología $\mathscr{L}(X)$.
(3)⇒(1) Sólo falta mostrar que $X$ no tiene circunferencias. Para esto veamos que hay una sucesión de subcontinuos de $\mathbb{S}^1$ que converge con la métrica de Hausdorff pero no 0-regularmente. Para esto consideremos la sucesión de arcos $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dados por:

$$S_n = \mathbb{S}^1 - B_{\frac{1}{n+1}}(1).$$

Notemos que $\lim S_n = \mathbb{S}^1$. Veamos que no converge 0-regularmente, para esto tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}d(1, -1)$. Ahora tomemos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{S}^n$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(1, x_n) = \frac{1}{n+1} = d(1, y_n)$ y que cumplan que $Re(x_n) > 0$, $Re(y_n) < 0$, es decir, estamos tomando los dos extremos de los arcos $S_n$. Claramente $1 = \lim x_n = \lim y_n$ y $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Ahora sólo notemos que como un arco es irreducible alrededor de sus extremos, cualquier continuo $K_n \in C(S_n)$ con $x_n, y_n \in K_n$ tiene que tener al punto $-1$. De hecho $K_n = S_n$ y entonces no es posible conseguir que $diamK_n < \epsilon$. Por lo tanto la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge 0-regularmente. Entonces $X$ no contiene circunferencias, lo cual prueba que $X$ es una dendrita.

□

## 3.1. La Operación $C^*$

Ahora, usaremos la convergencia 0-regular aplicada a un nuevo concepto. Para esto, dado un continuo $X$ notemos que si $A \in C(X)$, entonces $C(A) \subset C(X)$ y además $C(A)$ es un continuo; es decir, $C(A) \in C(C(X))$. Con esta idea surge la *función* $C^*$. Para un continuo $X$ definimos la función

$$C^* : C(X) \to C(C(X))$$

como $C^*(A) = C(A)$, es decir, a cada subcontinuo de $X$ le asignamos su hiperespacio de subcontinuos. Diremos además que $X$ es $C^*$*-suave* si la función $C^*$ definida para $X$ es continua.

En general $C^*$ no es continua, como vemos en el siguiente resultado.

**Lema 3.3** *La circunferencia no es $C^*$-suave.*

*Demostración.* Nos fijamos, para $n \in \mathbb{N}$, en el arco $S_n = \mathbb{S}^1 - B_{\frac{1}{n+1}}(1)$, claramente se cumple que $\mathbb{S}^1 = \lim S_n$, probemos que $C(\mathbb{S}^1) \neq \lim C(S_n)$. Más especificamente, veamos que, llamando al arco $\overline{B_1(1)} = K$, entonces tenemos que $K \in C(\mathbb{S}^1) - \lim C(S_n)$. Recordemos que, como la sucesión $C(S_n)$ está ordenada por la inclusión, como en la prueba de (2) $\Rightarrow$ (3) del lema 2.24, $\lim C(S_n) = \overline{\bigcup C(S_n)}$.

Primero, sabemos que $K \notin \bigcup C(S_n)$ porque todos los elementos de los $C(S_n)$ son arcos que no contienen a $1 \in K$. Por lo tanto será suficiente con ver que $K$ es un punto exterior de $\bigcup C(S_n)$. Afirmamos que $B_{\frac{1}{2}}(K) \subset C(\mathbb{S}^1) - \bigcup C(S_n)$.

Claramente $\mathbb{S}^1 \notin B_{\frac{1}{2}}(K)$ ya que $-1 \notin N(K, \frac{1}{2})$ y los singuletes tampoco están en $B_{\frac{1}{2}}(K)$ porque su distancia de Hausdorff a $K$ es mayor a $\frac{1}{2} diam(K) = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$. Ahora consideremos un arco $A \in B_{\frac{1}{2}}(K)$ y supongamos que $1 \notin A^o$. Como $-1 \notin N(K, \frac{1}{2})$, entonces $-1 \notin A$ lo cual nos dice que $A$ está contenido en alguna de las dos regiones $Re(x) \geq 0$ o $Re(x) \leq 0$. Esto nos dice que $H(A, K) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ lo cual contradice la elección de $A$. Por lo tanto $1 \in A^o$, es decir, para todo $i \in \mathbb{N}$, $A \notin C(A_n)$, que era lo que queríamos. □

A pesar de que en general la función $C^*$ no es continua, sí podemos asegurar una parte de su continuidad. Para hacer esto, veamos que podemos dividir la continuidad en dos conceptos cuando la función a considerar tiene rango el hiperespacio de cerrados de algún espacio. Decimos que una función

$f : X \to 2^Y$ es *semicontinua superiormente* (*scs*) en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$ se tiene que $f(x) \subset N(f(x_0), \epsilon)$. Análogamente decimos que $f : X \to 2^Y$ es *semicontinua inferiormente* (*sci*) en $x_0 \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $d(x, x_0) < \delta$ se tiene que $f(x_0) \subset N(f(x), \epsilon)$. Diremos que $f$ es *scs* si es scs en todos sus puntos y lo correspondiente con *sci*. También es claro que ser sci y scs implica la continuidad, por la segunda definición que dimos de la métrica de Haussdorff en el capítulo 1 (p. 12). También existe otra definición de los dos tipos de semicontinuidades, cuando el rango de la función a considerar es $\mathbb{R}$, como se puede consultar en [D, 10.2, p. 84]. Sin embargo, en este trabajo cuando hablemos de las semicontinuidades, hablaremos de las que definimos cuando el rango es un hiperespacio de cerrados de algún espacio.

Probemos primero una equivalencia a ser scs.

**Lema 3.4** *Una función $f : X \to 2^Y$ es scs en $x \in X$ si y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ con $x = \lim x_n$, se tiene que* $\limsup f(x_n) \subset f(x)$.

*Demostración.*
($\Rightarrow$) Sea $p \in \limsup f(x_n)$, y tomemos un $\epsilon > 0$ cualquiera. Entonces sabemos que existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $Y$, y una subsucesión de ésta, $(y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, que cumple $y_{n_m} \in f(x_{n_m}) \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}(p)$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Tomamos el $\delta > 0$ que nos asegura la definición de scs para $\frac{\epsilon}{2}$, lo cual nos dice que $f(x_n) \subset N(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ para toda $n \geq N_1$ para algún $N_1 \in \mathbb{N}$ . Entonces existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2$, entonces $n_m \geq N_1$. Por lo tanto, para $m = N_2$, existe un $z \in f(x)$ tal que $d(z, y_{n_m}) < \frac{\epsilon}{2}$ y además como $d(y_{n_m}, p) < \frac{\epsilon}{2}$, usando la desigualdad del triángulo, se tiene que $d(z, p) < \epsilon$, es decir, $p \in N(f(x), \epsilon)$. Como esto era para toda $\epsilon > 0$, concluimos que $p \in f(x)$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $f$ no es scs en $x$, entonces tenemos que existe un $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x = \lim x_n$ pero que existe una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que existen puntos $y_{n_m} \in f(x_{n_m}) - N(f(x), \epsilon)$. Supongamos, spg, que $(y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge y $y = \lim y_{n_m}$. Entonces $y \in \limsup f(x_n) - N(f(x), \epsilon)$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Ahora, probaremos que a pesar que la función $C^*$ no siempre es continua, pero que siempre cumple la semicontinuidad superior.

**Lema 3.5** *Para cualquier continuo $X$, la función $C^*$ es scs.*

*Demostración.* Si $C^*$ no fuera scs en $A \in C(X)$, existiría un $\epsilon > 0$ y una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ que contiene una subsucesión $(A_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $H(A_{n_m}, A) \leq \frac{1}{m}$ pero $C(A_{n_m}) \nsubseteq N(C(A), \epsilon)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces tomemos $B_{n_m} \in C(A_{n_m}) - N(C(A), \epsilon)$ y supongamos, spg, que la sucesión $(B_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge y $B = \lim B_{n_m}$. Como $B_{n_m} \subset A_{n_m}$ para toda $m \in \mathbb{N}$, $B \subset A$ ([Ill1, 2.13, p. 28]). Esto nos dice que $H(B, B_{n_m}) \geq \epsilon$ para toda $m \in \mathbb{N}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $C^*$ es scs. $\square$

Entonces en general podemos asegurar solamente la mitad de la continuidad de la función $C^*$. Se ha encontrado que hay continuos no lc que son $C^*$-suaves, como se pueden consultar en [N1, 15.14, p. 526]. En particular, nuestro objetivo es probar que los continuos lc que son $C^*$-suaves son precisamente las dendritas. Para esto usaremos el siguiente resultado para unir la convergencia 0-regular con la $C^*$-suavidad.

Primero recordemos un hecho que se menciona en [Why, §8, p.13]. Decimos que, dado un espacio $X$ y dos puntos distintos $a, b \in X$, la sucesión finita $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset X$ es una *$\epsilon$-cadena* si $x_0 = a$, $x_n = b$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $d(x_{n-1}, x_n) < \epsilon$. Se dice que $Y \subset X$ es *bien encadenado* si para cualesquiera dos puntos de $Y$ y cualquier $\epsilon > 0$ hay una $\epsilon$-cadena entre esos puntos. El resultado que usaremos es que los conexos son bien encadenados [Why, §8, 8.2, p. 14].

**Lema 3.6** *En un continuo $X$, dada una sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $Y = limpeanY_n$ se tiene que $C(Y) = \lim C(Y_n)$.*

*Demostración.* Por el lema 3.5, sólo falta probar que $C(Y) \subset \liminf C(Y_n)$. Para esto sean $A \in C(Y)$ y $\epsilon > 0$. Tomemos $\delta > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ como en la definición de convergencia 0-regular para $\frac{\epsilon}{2}$, también tomemos $N_2$ como en la definición de la convergencia, con la métrica de Hausdorff, para $\frac{\delta}{3}$, y sea $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Por la compacidad de $A$, podemos encontrar un conjunto finito $W = \{w_1, \ldots, w_n\} \subset A$ tal que $H(A, W) \leq \frac{\delta}{3}$. Por la conexidad de $A$, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, sea $K_i = \{z_i^1, \ldots, z_i^{r_i}\}$ una $\frac{\delta}{3}$-cadena, con $z_i^1 = w_i$ y $z_i^{r_i} = w_{i+1}$. Entonces el conjunto $K = \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i$ es un conjunto finito que podemos escribir como $K = \{a_1, \ldots, a_m\}$ de tal manera que $d(a_i, a_{i+1}) < \frac{\delta}{3}$ para cada $1 \leq i < m$. Notemos que, como $W \subset K \subset A$, $H(K, A) < \frac{\delta}{3}$.

Por la definición de convergencia con la métrica de Hausdorff, como $K \subset A \subset Y$, para cada $n \geq N$ y $s \in \{1, \ldots, m\}$, podemos encontrar un punto $p_s^n \in Y_n$ con $d(p_s^n, a_s) < \frac{\delta}{3}$. Con esto y la desigualdad del triángulo obtenemos que para $s \in \{1, \ldots, m-1\}$, $d(p_s^n, p_{s+1}^n) < \delta$. Por lo tanto, por la elección de $\delta$, para cada $s \in \{1, \ldots, m-1\}$ podemos tomar un continuo $K_s^n \subset Y_n$ con $diam K_s^n < \frac{\epsilon}{2}$ y $p_s^n, p_{s+1}^n \in K_s^n$. Entonces si demostramos que $K^n = \bigcup_{s=1}^{m-1} K_s^n \in C(Y_n)$ cumple que $H(K^n, A) < \epsilon$, ya será suficiente para probar la contención que queríamos.

Primero tomemos $a \in A$, sabemos que existe un $r \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d(a_r, a) < \frac{\delta}{3} \leq \frac{\epsilon}{3}$, con lo que $d(p_r^n, a) < \epsilon$ por la desigualdad del triángulo. Entonces $a \in N(K^n, \epsilon)$ lo cual nos da una de las contenciones de nubes. Ahora, si $a \in K^n$, existe un $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $d(a, p_s^n) \leq \frac{\epsilon}{2}$, con lo cual, como además $d(a_s, p_n^s) < \frac{\delta}{3} \leq \frac{\epsilon}{3}$, $d(a, a_s) < \epsilon$. Por lo tanto $a \in N(A, \epsilon)$ que es la contención que nos faltaba. □

Con todo lo que hemos hecho, la prueba del resultado principal de esta sección es muy fácil de probar.

**Teorema 3.7** *Un continuo de Peano $X$ es una dendrita si y sólo si es $C^*$-suave.*

*Demostración.* Si $X$ es una dendrita, tomemos una sucesión $A_n \in C(X)$ con $A = \lim A_n$, el teorema 3.2 y el lema 3.6 nos dicen que $\lim C(A_n) = C(A)$, lo cual nos da la continuidad de $C^*$.

Ahora, si suponemos que $\mathbb{S}^1 \subset X$ y que $C^*$ es continua, entonces $C^*|_{C(\mathbb{S}^1)}$ será una función continua. Esto nos da que $\mathbb{S}^1$ es $C^*$-suave, lo que contradice al lema 3.3. Entonces $X$ es una dendrita. □

# Capítulo 4

# Unicoherencia

En este capítulo nos adentraremos en un concepto que se estudió desde el capítulo 2, la unicoherencia. Ya se definió qué significa ser unicoherente y hereditariamente unicoherente, hu, ahora veamos unas cuantas definiciones de otros tipos de unicoherencia.

Un continuo $X$ es *fuertemente unicoherente* (*fu*), si es unicoherente y para cualesquiera dos $H, K \in C(X) - \{X\}$ con $X = H \cup K$, se tiene que ambos $H$ y $K$ son unicoherentes.

Un continuo $X$ es *débilmente hereditariamente unicoherente*(*dhu*), si para cualesquiera dos $H, K \in C(X)$ con $H^o \neq \emptyset \neq K^o$, se tiene que $H \cap K$ es conexo.

Claramente ser hu implica ser fu, y ser dhu implica ser unicoherente; sin embargo, no es claro qué relación se puede obtener entre ser fu y ser dhu con sólo leer las definiciónes. Un concepto que puede simplificar la relación entre estos dos tipos de unicoherencia es la unicoherencia en un subcontinuo. Decimos que un continuo $X$ es *unicoherente en* $Y \in C(X)$ si para cualesquiera dos $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B \cap Y$ es conexo, esto lo escribiremos como $X : un(Y)$.

Con este nuevo concepto podemos encontrar las relaciones que queremos con los siguientes dos resultados.

**Lema 4.1** *Un continuo $X$ es fu si y sólo si $X : un(Y)$ para todo $Y \in C(X)$.*

*Demostración.* Primero supongamos que $X$ es fu y tomemos $Y \in C(X)$ y dos subcontinuos $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Supongamos entonces que $A \cap B \cap Y \neq \emptyset$, lo cual en particular implica que $B \cap Y \neq \emptyset$, que nos dice que $B \cup Y$ es un subcontinuo. Como $X = A \cup (B \cup Y)$, notamos que si

$B \cup Y$ es propio entonces $B \cap Y$ es un subcontinuo por ser $X$ fu y si $X = B \cup Y$ también pasa lo mismo porque $X$ es unicoherente. Con esto podemos escribir $X = [A \cup (B \cap Y)] \cup B$, es decir, como unión de dos continuos. En los casos en que $X = A \cup (B \cap Y)$ o que $A \cup (B \cap Y)$ es propio, por ser $X$ fu, $A \cap B \cap Y$ es conexo, lo cual nos dice que $X : un(Y)$.

Ahora supongamos que $X$ es unicoherente en todos sus subcontinuos pero que no es fu, es decir, que existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$ y supongamos spg que $A$ no es unicoherente. Entonces existen $H, K \in C(A) - \{A\}$ con $A = H \cup K$ y $H \cap K$ disconexo. Como $A \cap B \neq \emptyset$, podemos suponer, spg, que $B \cap H \neq \emptyset$. Como $X = (B \cup H) \cup K$ usaremos la unicoherencia de $X$ en $H$. Como

$$(B \cup H) \cap K \cap H = (B \cap K \cap H) \cup (K \cap H) = H \cap K$$

no es conexo y $K$ es un subcontinuo propio, entonces el otro debe de ser el total, es decir, $X = B \cup H$. Si tuvieramos que $K \cap B = \emptyset$, con la igualdad anterior obtendríamos que $K \subset H$ lo cual no es posible porque $K \cup H = A$ y $H \neq A$. Por lo tanto, análogamente podemos obtener que $X = B \cup K$. Estas dos igualdades nos dicen que $X - B \subset H \cap K$. Como sabemos que $X = B \cup H$ y $X : un(K)$, $B \cap H \cap K$ es conexo y no vacío. Pero como $H \cap K$ no lo es, y las componentes de $H \cap K \cap B$ están contenidas en las componentes de $H \cap K$, solo una de las componentes de $H \cap K$, digamos $C$, cumple $B \cap C = \emptyset$, ya que si $B$ intersectara al menos a dos componentes de $H \cap K$, entonces al menos habrían dos componentes de $H \cap K \cap B$. Entonces $C \subset X - B \subset H \cap K$ nos dice que $C$ también es una componente de $X - B$. Entonces por el teorema de GF 1.2, $\overline{C} \cap bd_X(B) \neq \emptyset$, lo cual implica que $C \cap B \neq \emptyset$ ya que ambos $B$ y $C$ son cerrados. Esta contradicción nos dice que $X$ tiene que ser fu. $\square$

**Lema 4.2** *Un continuo $X$ es dhu si y sólo si $X : un(Y)$ para todo $Y \in C(X)$ tal que $Y^o \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Primero supongamos que $X$ es dhu y sean $Y, A, B \in C(X)$ con $Y^o \neq \emptyset$, $A \neq X \neq B$ y $X = A \cup B$. Primero notemos que como $X - A \subset B^o$ y $X - B \subset A^o$, obtenemos que $A^o \neq \emptyset \neq B^o$. Esto nos dice, por ser $X$ dhu, que $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son conexos. Sabemos que $Y^o \neq \emptyset$ y que $Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$, veamos que alguno de los dos uniendos tienen interior (en $X$) no vacío. Si $Y^o \subset A$, entonces $Y^o \subset A \cap Y$ por lo que $(A \cap Y)^o \neq \emptyset$ y si $Y^o \cap (X - A) \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \neq Y^o \cap (B - A) = Y^o \cap (X - A) \subset (Y \cap B)^o$, es decir, alguno de los dos tiene interior distinto del vacío. Si usamos de nuevo que $X$ es dhu obtenemos que $Y \cap A \cap B$ es conexo, con lo que concluimos que $X : un(Y)$.

Ahora supongamos que $X$ es unicoherente en todos sus subcontinuos con interior no vacío pero que tenemos que existen $H, K \in C(X)$ con $H^o \neq \emptyset$ y $H \cap K$ disconexo, y probemos que $K^o = \emptyset$. Consideremos dos casos.

El primero es que $X - H = M|N$ para algunos abiertos $M \neq \emptyset \neq N$. Entonces $M \cup H$ y $N \cup H$ son subcontinuos por el teorema 1.4 y podemos escribir $X = (M \cup H) \cup (N \cup H)$. Ya que $(M \cup H) \cap (N \cup H) \cap K = K \cap H$ es disconexo, obtenemos la negación de $X : un(K)$ por lo que $K^o = \emptyset$.

Pero si $X - H$ es conexo, como además $K \not\subseteq H$, tenemos que $\overline{X - H} \cup K$ es un subcontinuo. Notemos que $X = H \cup [\overline{X - H} \cup K]$ y que $K \cap H \cap [\overline{X - H} \cup K] = K \cap H$ es disconexo. Si probamos que $\overline{X - H} \cup K$ es un subcontinuo propio, entonces tendremos la negación de que $X : un(K)$, esto es lo que queremos para concluir que $K^o = \emptyset$.

Entonces supongamos que $\overline{X - H} \cup K = X$. Como $X : un(H)$, obtenemos que $H \cap K \cap \overline{X - H} = bd_X(H) \cap K$ es conexo. Notemos que nuestra suposición nos dice que $H^o \subset H - \overline{X - H} \subset K$ lo cual implica que $\overline{H^o} \subset K$ y entonces

$$H \cap K = (\overline{H^o} \cup bd_X(H)) \cap K = (\overline{H^o} \cap K) \cup (bd_X(H) \cap K) = \overline{H^o} \cup (bd_X(H) \cap K)$$

Si probamos que cada componente de $\overline{H^o}$ intersecta a $bd_X(H) \cap K$, llegaremos a que $H \cap K$ es conexo, lo cual sería una contradicción. El teorema de GF nos dice que si $C$ es una componente de $\overline{H^o}$, $\emptyset \neq bd_X(\overline{H^o}) \cap C$ y como $bd_X(\overline{H^o}) \subset bd_X(H) \cap K$, entonces $C \cap (bd_X(H) \cap K) \neq \emptyset$. Con esta contradicción llegamos a que $\overline{X - H} \cup K$ es un subcontinuo propio, que era lo que queríamos. $\square$

Notemos que estos últimos dos lemas nos dicen que fu implica dhu. Mencionemos algunos ejemplos que nos dicen que las implicaciones en sentido contrario no funcionan en general.

Para encontrar un continuo que sea unicoherente pero no dhu pensemos en $I^2$, que ya dijimos anteriormente que $I^2$ es unicoherente, ver, por ejemplo, [N4, p. 19]. Sin embargo, $I^2$ no puede ser dhu pues se pueden encontrar facilmente dos subcontinuos $H, K \in C(I^2)$ tales que $H^o \neq \emptyset \neq K^o$ y $H \cap K$ es disconexo, como por ejemplo $H = ([0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$ y $K = ([\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1])$.

Para los siguientes dos contraejemplos, recordemos que dado un espacio métrico $S$ y una compactación $S^*$ de él, a $S^* - S$ se le llama el *residuo* bajo esa compactación. En particular consideraremos la siguiente compactación del rayo $[0, 1)$ que deja residuo $\mathbb{S}^1$, que llamaremos $\mathcal{R}$. La podemos definir analíticamente de la siguiente forma:

$$\mathcal{R} = \mathbb{S}^1 \cup \{(1 - 1/t)e^{ti} : t \in [2, \infty)\}$$

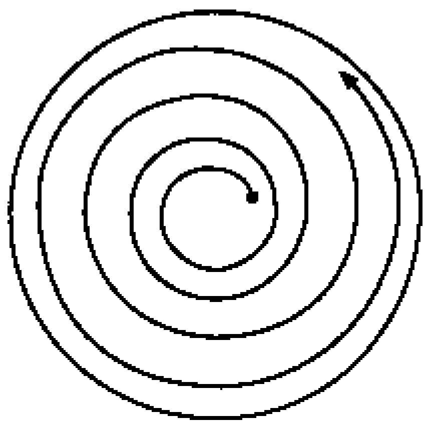

Figura 4.1: Compactación del Rayo con Residuo $\mathbb{S}^1$

Entonces veremos que $\mathcal{R}$ es fu pero no es hu. La razón por la cual no es hu es porque el subcontinuo $\mathbb{S}^1$ no es unicoherente. Todos los subcontinuos de $\mathcal{R}$ son de uno de los siguientes tres tipos: (1) subcontinuos del rayo (que son arcos), (2) subcontinuos de la circunferencia, (3) subcontinuos del tipo $[r, 1) \cup \mathbb{S}^1$ donde $r \in [0, 1)$, que es homeomorfo al total. Esto ocurre porque si un subcontinuo tuviera dos puntos $p \in \mathbb{S}^1$ y $q \in [0, 1)$, tiene que tener a todos los puntos consecutivos del arco (i.e., los puntos $x \in [0, 1)$ con $x \geq q$) para que no queden separados $p$ y $q$, pero $\overline{[q, 1)} = [q, 1) \cup \mathbb{S}^1$, lo que nos da el resultado deseado. Entonces si escribimos $\mathcal{R} = A \cup B$ con $A, B \in C(\mathcal{R}) - \mathcal{R}$, tenemos que alguno de los dos $A, B$ tiene que ser del tipo (3) y el otro del tipo (1). Esto porque estos dos tipos de continuos son los únicos subcontinuos con interior no vacío ($A^o \supset A - B \neq \emptyset$, analogamente con $B$) cuya union puede dar el total. Ya que la intersección de un continuo de tipo (3) y uno de tipo (1) es uno de tipo (1) y, además, la intersección de dos continuos de tipo (1) es vacío, un singulete o uno del tipo (1), se sigue que los continuos del tipo (3) y los del tipo (1) son unicoherentes. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es fu.

Para conocer un ejemplo de un continuo dhu que no sea fu se puede consultar [Mac]. Este ejemplo usa continuos indescomponibles por lo que presentarlo aquí se saldría de los objetivos del trabajo.

Antes de continuar con el siguiente concepto probemos que la unicoherencia en un continuo es una propiedad aditiva en el sentido del siguiente resultado.

**Lema 4.3** *Sean $X$ un continuo, y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $Y_i \in C(X)$. Si para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$ se tiene que, $Y_i \cap (\bigcup_{j<i} Y_j) \neq \emptyset$ y $X : un(Y_i)$, entonces $X : un(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i)$.*

*Demostración.* Es suficiente demostrar el caso con $n = 2$ ya que el resultado general se sigue por inducción. Entonces, sean $Y, Z \in C(X)$ tales que $Y \cap Z \neq \emptyset$, $X : un(Y)$, $X : un(Z)$ pero que no se da $X : un(Y \cup Z)$. Notemos que la condición $Y \cap Z \neq \emptyset$ nos sirve para decir que $Y \cup Z \in C(X)$ y poder hablar de unicoherencia en $Y \cup Z$. Entonces, por nuestra suposición, deben existir $A, B \in C(X) - \{X\}$ con $X = A \cup B$ y $A \cap B \cap (Y \cup Z)$ disconexo. Pero como

$$A \cap B \cap (Y \cup Z) = (A \cap B \cap Y) \cup (A \cap B \cap Z)$$

es decir, es la unión de dos conexos, tiene que darse que $A \cap B \cap Y \neq \emptyset \neq A \cap B \cap Z$ y $A \cap B \cap Y \cap Z = \emptyset$.

Como $Y \cap Z \neq \emptyset$ y $X = A \cup B$, entonces spg podemos suponer que $A \cap Y \cap Z \neq \emptyset$. Como $A \cap B \cap Z \neq \emptyset$, en particular $B \cap Z \neq \emptyset$, y $B \cup Z$ es un continuo. Notemos que $X = A \cup (B \cup Z)$, por la unicoherencia de $X$ en $Y$, y el hecho de que

$$A \cap (B \cup Z) \cap Y = (A \cap B \cap Y) \cup (A \cap Z \cap Y)$$

i.e., es la unión de dos cerrados no vacíos que no se intersectan y por lo tanto disconexo, tiene que darse que $B \cup Z = X$. Entonces, intersectando con $Y$ se tiene que

$$Y = (B \cap Y) \cup (Z \cap Y) = (B \cap Y) \cup [(Z \cup Y) \cap X] = (B \cap Y) \cup [(Z \cup Y) \cap (A \cup B)]$$

$$= (B \cap Y) \cup (Z \cap Y \cap A) \cup (Z \cap Y \cap B) = (Z \cap Y \cap A) \cup (B \cap Y)$$

Esto es imposible ya que estamos escribiendo a $Y$ como unión de dos cerrados no vacíos y ajenos, lo cual contradice su conexidad. Esta contradicción nos dice que por lo tanto $X : un(Y \cup Z)$. $\square$

## 4.1. Aposindesis

Ahora relacionaremos los conceptos que ya tenemos de unicoherencia con uno nuevo. Un continuo $X$ es *aposindético* en $p \in X$ *con respecto a* $q \in X - \{p\}$ si existe $K \in C(X)$ con $p \in K^o \subset K \subset X - \{q\}$. Un continuo es *aposindético en un punto* $p \in X$ si es aposindético en $p$ con respecto a todos los puntos de $X - \{p\}$. Finalmente, un continuo es aposindético si es aposindético en todos sus puntos.

Notemos que el siguiente resultado nos da la relación entre la aposindesis y la conexidad local.

**Lema 4.4** *Si un continuo $X$ es lc en $p \in X$, entonces es aposindetico en $p$.*

*Demostración.* Sea $q \in X - \{p\}$ y tomemos un $U \in \tau$ tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset X - \{q\}$. Entonces podemos encontrar un conexo $V \in \tau$ con $p \in V \subset U$ lo cual además nos dice que $p \in V \subset \overline{V} \subset X - \{q\}$. Entonces $\overline{V}$ es el continuo que nos dice que $X$ es aposindético en $p$ con respecto a $q$. $\square$

Un ejemplo de un continuo que es aposindético pero no lc. Consideremos la suspensión sobre el Conjunto de Cantor. Recordemos que el Conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ se puede pensar como los puntos de $I$ tales que tienen expansión en base 3 en la que no aparece el dígito 2 y los consideramos como elementos del eje real. La suspensión se define formalmente en [N1, 0.39, p. 19] pero nosotros podemos pensarla como la unión de todos los segmentos convexos, en $\mathbb{C}$, que van de $\frac{1}{2} + i$ a los puntos de $\boldsymbol{C}$, y también se unen todos los segmentos convexos en $\mathbb{C}$ que van de $\frac{1}{2} - i$ a los puntos de $\boldsymbol{C}$.

Entonces llamemos a $\boldsymbol{S(C)}$ a la suspensión sobre el conjunto de Cantor, pensada como arriba. Claramente $\boldsymbol{S(C)}$ no es lc en $\boldsymbol{C}$ ya que la única forma de tener un continuo que contenga dos puntos de $\boldsymbol{C}$ es tomando el arco entre ellos que pasa por $\frac{1}{2} + i$ o por $\frac{1}{2} - i$, y esto no se puede en vecindades suficientemente chicas. Sin embargo, $\boldsymbol{S(C)}$ es aposindético. El único caso que no es claro es que sea aposindético en un punto $p \in \boldsymbol{C}$ con respecto a $\frac{1}{2} + i$ (o $\frac{1}{2} - i$). Para esto sólo hay que fijarnos que podemos quitar una bola $B_r(\frac{1}{2} + i)$ con un $r < d(x, \frac{1}{2} + i)$ y con esto el conjunto que obtenemos es un subcontinuo de $\boldsymbol{C}$ que contiene a $p$ en su interior, esto gracias a que no se está quitando el punto $\frac{1}{2} - i$ (o $\frac{1}{2} + i$).

Sin embargo, veamos que la aposindesis sí es equivalente a ser cik, en presencia de una de las formas de unicoherencia.

**Lema 4.5** *Si un continuo $X$ es aposindético en $p \in X$ y además $X$ es dhu, entonces $X$ es cik en $p$.*

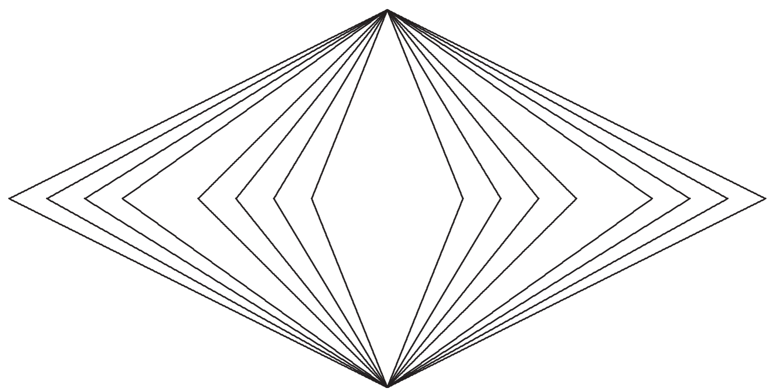

Figura 4.2: Suspensión sobre el Conjunto de Cantor

*Demostración.* Tomemos un $U \in \tau$ con $p \in U$ y para cada $y \in X - U$ un subcontinuo $V_y \in C(X)$ con $p \in V_y^o \subset V_y \subset X - \{y\}$. Entonces tenemos que la familia $\{X - V_y : y \in X - U\}$ es una cubierta abierta de $X - U$, por lo que existe una subcubierta finita $\{X - V_1, \ldots, X - V_n\}$, o lo que es lo mismo

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i^o \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset U$$

Entonces, como $V_i^o \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $V_1 \cap V_2$ es conexo y $p \in (V_1 \cup V_2)^o$, así que aplicando que $X$ es dhu, $(V_1 \cap V_2) \cap V_3$ es conexo. Podemos continuar, suponiendo que $p \in (\cap_{i=1}^{j} V_i)^o$ y $\cap_{i=i}^{j} V_i$ es conexo, entonces $(\cap_{i=1}^{j} V_i) \cap V_{j+1}$ es conexo. Por lo tanto, por un argumento inductivo, $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es conexo. Esto nos da que $X$ es cik en $p$. $\square$

Con todo lo que sabemos ahora ya podemos caracterizar a las dendritas con aposindesis y unicoherencia.

**Teorema 4.6** *Para un continuo $X$ son equivalentes:*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) $X$ es aposindetico y hu,*

*(3) $X$ es aposindetico y fu,*

*(4) $X$ es aposindetico y dhu.*

*Demostración.*
(1)⇒(2) Por el lema 4.4 las dendritas son aposindéticas y ya sabíamos que son hu por el teorema 2.15.

(2)⇒(3) Es claro de las definiciones de hu y fu.

(3)⇒(4) Por los lemas 4.1 y 4.2.

(4)⇒(1) Por el lema 4.5 sabemos que $X$ es cik y por lo tanto lc. Supongamos que $\mathbb{S}^1 \subset X$. Consideremos los puntos $-i, i \in \mathbb{S}^1$, por la conexidad local existen $U, V \in \tau$ tales que $U$ y $V$ son conexos,

$$i \in U \subset \overline{U} \subset X - \mathbb{S}^{1-} \text{ y}$$

$$-i \in V \subset \overline{V} \subset X - (\mathbb{S}^{1+} \cup \overline{U}).$$

Con esto $A = \mathbb{S}^{1+} \cup \overline{U}$ y $B = \mathbb{S}^{1-} \cup \overline{V}$ son dos subcontinuos de $X$ con interior distinto del vacío tales que $A \cap B = \{1, -1\}$ que es disconexo, una contradicción. Entonces $X$ no contiene circunferencias, es decir, $X$ es una dendrita.

□

## 4.2. La Propiedad S

En esta sección reemplazaremos la aposindesis por una nueva propiedad de conexidad local. Se dice que un espacio métrico $X$ tiene la *propiedad S* si dado $\epsilon > 0$, existen subconjuntos conexos $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset X$, con $diam(A_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. En [N2, 8.4, p. 120] se puede ver la prueba de que la propiedad S es equivalente a la conexidad local para espacios métricos compactos. Sin embargo, sin la compacidad ni siquiera es una propiedad topológica ya que por ejemplo, $\mathbb{R}$ no la tiene pero $(0, 1)$ sí la tiene, a pesar de que son espacios homeomorfos. Nuestra siguiente caracterización usa la idea de la propiedad S haciéndola más fuerte con ayuda de la unicoherencia.

**Teorema 4.7** *Para un continuo $X$ son equivalentes:*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) para cualesquiera $p \in X$ y $U \in \tau$ con $p \in U$, existe un conjunto conexo $V \in \tau$ tal que $p \in V \subset U$ y $X : un(\overline{V})$,*

*(3) para todo $\epsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y subcontinuos $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, $diam(Y_i) < \epsilon$ y $X : un(Y_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

*Demostración.*
(1)⇒(2) Es claro por la conexidad local y el hecho de que $X : un(Y)$ para todo $Y \in C(X)$ ($X$ es fu porque es hu por el teorema 2.15).
(2)⇒(3) Para cada punto $p \in X$ tomamos un $U_p \in \tau$ con $p \in U_p$ y $diam(U_p) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces por hipótesis podemos encontrar, para cada $p \in X$, un conexo $V_p \in \tau$ tal que $p \in V_p \subset U_p$ y $X : un(\overline{V_p})$. Claramente $diam(\overline{V_p}) < \epsilon$ por lo que tomando una subcubierta finita de la familia $\{V_p : p \in X\}$ obtenemos el resultado deseado.
(3)⇒(1) Claramente $X$ tiene la propiedad $S$ por lo que es lc y por lo tanto aposindético. Entonces, por el teorema 4.6, si probamos que $X$ es fu, tendremos que $X$ es una dendrita. Supongamos por el contrario que existe un $K \in C(X)$ tal que no se da que $X : un(K)$ (ver lema 4.1). Esto significa que existen $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$ y $K \cap A \cap B$ es disconexo, y como esta intersección es cerrada, tenemos que $K \cap A \cap B = P|Q$ para dos $P, Q \in 2^X$. Entonces tomemos $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$3\epsilon_1 = d(P, Q) > 0$$

Sean $N_1 = N(P, \frac{\epsilon_1}{2})$, $N_2 = N(Q, \frac{\epsilon_1}{2})$ y $C = N_1 \cup N_2$. Si existe un punto $x \in N_1 \cap N_2$ entonces existen $p \in P$ y $q \in Q$ con $d(x, p) < \frac{\epsilon_1}{2}$ y $d(x, q) < \frac{\epsilon_1}{2}$, por lo que $d(p, q) < \epsilon_1$, lo cual contradice la elección de $\epsilon_1$. Entonces $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Como $K$ es un conexo que intersecta a ambos conjuntos $N_1$ y $N_2$, se tiene que dar que $K - C \neq \emptyset$. Notemos que además $(K - C) \cap (A \cap B) \subset (P \cup Q) - C = \emptyset$. Entonces, definimos

$$\epsilon_2 = d(K - C, A \cap B) > 0$$

Y sea $\epsilon = \text{mín}\,\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$.

Entonces tomamos, por hipótesis, una cubierta $\{Y_1, \ldots, Y_m\} \subset C(X)$ con $diam(Y_i) < \epsilon$ y $X : un(Y_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Podemos suponer spg que existe $n \leq m$ tal que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $K \cap Y_i \neq \emptyset$ y si $i \in \{n+1, \ldots, m\}$, $K \cap Y_i = \emptyset$. Entonces sea $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i \in C(X)$. Veamos que podemos numerarlos para que cumplan las hipótesis del lema 4.3. Esto lo hacemos por inducción. Tomamos $Y_1$ arbitrariamente, y tomamos $Y_j$, con $j > 1$, que intersecte a $Y_1$, éste siempre existe ya que si no $Y_1$ y la unión de los demás $Y_i$ separarían a $Y$, podemos suponer que $j = 2$. Seguimos con este proceso, suponiendo que ya escogimos $Y_1, \ldots, Y_r$, debe existir algún $Y_s$ que intersecte a $\bigcup_{i=1}^{r} Y_i$, ya que, de otra forma, $\bigcup_{i=1}^{r} Y_i$ y la unión de los demás serían dos cerrados que separarían a $Y$ y spg podemos suponer que $s = r+1$.

Por lo tanto aplicando el lema 4.3, $X : un(Y)$. Probemos a continuación dos afirmaciones:

(i) Si $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $Y_i \cap (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow Y_i \cap (K - C) = \emptyset$

(ii) Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces se cumplen las siguientes implicaciones $Y_i \cap N_1 \neq \emptyset \Rightarrow Y_i \cap N_2 = \emptyset$ y $Y_i \cap N_2 \neq \emptyset \Rightarrow Y_i \cap N_1 = \emptyset$

Para probar (i), sólo hay que darnos cuenta que, si $x \in Y_i \cap A \cap B$ y existe $y \in Y_i \cap (K - C)$, se tiene que $d(x, y) \geq d(A \cap B, K - C) = \epsilon_2 \geq \epsilon$, lo cual nos dice que $diam(Y_i) \geq \epsilon$, una contradicción.

Para probar (ii), suponemos que $Y_i \cap N_1 \neq \emptyset \neq Y_i \cap N_2$. Entonces existen $p \in P$, $q \in Q$, $y, z \in Y_i$ con $d(y, p) < \frac{\epsilon_1}{2}$ y $d(z, q) < \frac{\epsilon_1}{2}$. Como también existe un $w \in Y_i \cap K$ que cumple $d(y, w) < \epsilon \leq \epsilon_1$ y $d(z, w) < \epsilon \leq \epsilon_1$, podemos usar la desigualdad del triángulo para ver que

$$d(p, q) < d(p, y) + d(y, w) + d(w, z) + d(z, q) < 3\epsilon_1,$$

lo cual nos dice que $d(P, Q) < 3\epsilon_1$, una contradicción a la elección de $\epsilon_1$.

Entonces como ya tenemos (i) y (ii) probados, obtenemos que los $Y_i$ intersectan a $N_1$ o a $N_2$ pero a lo más uno de ellos, y como $\emptyset \neq Q \subset A \cap B \cap K \cap N_2$, tenemos la siguiente separación:

$$A \cap B \cap Y = \Big[A \cap B \cap \Big(\bigcup \{Y_i : Y_i \cap N_1 \neq \emptyset\}\Big)\Big] \Big| \Big[A \cap B \cap \Big(\bigcup \{Y_i : Y_i \cap N_1 = \emptyset\}\Big)\Big]$$

lo cual contradice que $X : un(Y)$. Por lo tanto $X$ es unicoherente en todos sus subcontinuos, o sea $X$ es fu que era lo que faltaba.

$\square$

# Capítulo 5

# La Dendrita Universal

El propósito principal de este capítulo es construir una dendrita en la cual se puedan encontrar copias homeomorfas de cualquier dendrita. Diremos que, para una familia de espacios $\mathfrak{M}$, un espacio $X \in \mathfrak{M}$ es *universal* para $\mathfrak{M}$ si para cualquier $Y \in \mathfrak{M}$ tenemos que existe un encaje de $Y$ en $X$. Ejemplos de espacios universales son la *curva de Sierpiński* que es universal para los continuos de dimensión 1 que se pueden encajar en el plano [N2, 1.11, p. 9], o el cubo de Hilbert, que es universal para todos los espacios métricos separables [W, 23.1, p. 166]. Así, el espacio que nosotros buscamos es universal para la familia de dendritas y se llama *dendrita universal*.

## 5.1. Árboles

Primero debemos de comprender que las dendritas son en realidad límites de árboles, como ya habíamos mencionado anteriormente. Para hacer esto primero tenemos que ver el teorema 5.2. Dada una dendrita $X$ y una subdendrita $Y \in C(X)$, llamaremos a $r : X \to Y$ la *retracción natural sobre* $Y$ si cumple $r(X) = Y$ y para todo $x \in X$, $r(x)$ es el primer punto en $Y$, en cualquier arco que va de $x$ a algún punto de $Y$. Esta función está bien definida porque las dendritas son únicamente ac y además es continua como veremos a continuación. Como notación, a la *identidad* en un espacio $S$, llamémosla $1_S : S \to S$. Con esta notación, notemos que $r|_Y = 1_Y$.

**Lema 5.1** *En una dendrita $X$, para cualquier $Y \in C(X)$, la función $r : X \to Y$ tal que $r(x)$ es el primer punto en el arco de $x$ a cualquier punto de $Y$, que esta en $Y$, está bien definida y es continua.*

*Demostración.* Que la función esta bien definida se sigue inmediatamente del hecho de que las dendritas son únicamente arcoconexas (teorema 2.16). Sea $x \in X$, veamos que $r$ es continua en $X$, para esto tomemos un $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Si $x \notin Y$, podemos tomar un $V \in \tau$ tal que $x \in V$, $V$ sea conexo y $U \cap V = \emptyset$. Veamos que $r(V) = \{r(x)\}$, para esto notamos que existe un $w \in V$ tal que $xr(x) \cap xy = xw$ por lo que $yr(x) = yw \cup wr(x)$. Notemos que si hubiera un punto $z \in Y \cap wx$, entonces tendríamos dos arcos distintos de $z$ a $r(x)$, uno contenido en $Y$ y otro que contiene al arco $wr(x)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $yr(x) \cap Y = \{r(x)\}$ lo que significa que $r(x) = r(y)$. Esto prueba la continuidad en este caso.

Si $x \in Y$ significa que $x = r(x)$, tomemos $V \in \tau$ tal que $x \in V \subset U$ y $V$ es conexo. Entonces para cualquier $y \in V$, $r(y) \in yr(x) = yx \subset V \subset U$. Esto prueba la continuidad en este caso. □

Ahora veamos el teorema que nos dice que toda dendrita se puede ver como el límite de árboles. Recordemos que, para un compacto métrico $Y$ y cualquier espacio topológico $X$ podemos definir la métrica del supremo en el espacio de funciones de $X$ a $Y$. Ésta se define, para dos funciones $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, como

$$d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

**Teorema 5.2** *Para una dendrita no degenerada $X$, existe una sucesión de árboles $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ y una sucesión de puntos $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $X$ tales que:*

($\cdot$) *para cada $i \in \mathbb{N}$, $Y_i \subset Y_{i+1}$,*

($\cdot\cdot$) $\lim Y_i = X$,

($\cdot\cdot\cdot$) *$Y_0 = \{p_0\}$ y para cada $i > 0$, $\overline{Y_{i+1} - Y_i}$ es un arco donde uno de sus extremos es $p_i$, y tal que $\overline{Y_{i+1} - Y_i} \cap Y_i = \{p_i\}$,*

($\cdot\cdot\cdot\cdot$) *para cada $i \in \mathbb{N}$, si $r_i : X \to Y_i$ es la retracción natural sobre $Y_i$, entonces $\lim r_i = 1_X$, uniformemente.*

*Demostración.* Si $X$ es un árbol, elegimos un vértice $p_0$ de $X$. Elegimos una arista $Y_1$, que tenga a $p_0$. Sea $p_1$ el otro extremo de $Y_1$. Ahora elegimos una arista $Y_2$ de $X$ tal que $Y_2 \cap Y_1 \neq \emptyset$ y $Y_2 \neq Y_1$ (suponiendo que $X \neq Y_1$). Elegimos $p_2$ el otro extremo de $Y_2$ que no esta en $Y_1$. Seguimos este proceso y como $X$ es un árbol, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X = Y_k$ (y $k$ es mínima). Para poder encontrar los árboles que cumplan lo que queremos, tenemos que definir $Y_k$ de otra manera. Sabemos que $Y_{k-1} \neq X$ y que $Y_{k-1} \cup \alpha_{k-1} = X$, por lo que tomamos una sucesión $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \alpha_{k-1}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $p_{k-1} <_{\alpha_{k-1}} w_i <_{\alpha_{k-1}} w_{i+1}$ y $\lim w_i$ sea el extremo de $\alpha_{i+1}$ distinto de $p_{k-1}$. Con esto, definimos $p_{k+i} = w_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $Y_{k+i} = Y_{k-1} \cup p_{k-1}p_{k+i}$, con esto ya tenemos definidos todos los árboles y además cumplen las condiciones $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot\cdot)$. Claramente, también se cumplen $(\cdot\cdot)$ y $(\cdot\cdot\cdot\cdot)$ ya que a partir del paso $k$ nos estamos tomando cada vez arcos mas chicos. Por lo tanto, en el caso en el que $X$ es un árbol, el teorema está demostrado.

Supongamos entonces que $X$ no es un árbol. Sea $D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de $X$. Vamos a definir los árboles $Y_i$ por inducción, empezando con $p_0 = x_0$ y $Y_0 = \{p_0\}$.

Supongamos que tenemos definidos los árboles $Y_0, Y_1, \ldots Y_k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, que además cumplen las condiciones $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot\cdot)$. Notemos que, como $X$ no es un árbol, $X \neq Y_k$

Entonces $m_k = \min\{j : x_j \notin Y_k\}$ existe, por lo que tomamos el arco $\alpha_k = x_{m_k}r_k(x_{m_k})$ que cumplirá que $\alpha_k \cap Y_k = \{r_k(x_{m_k})\}$. Entonces definimos $Y_{k+1} = Y_k \cup \alpha_k$ y $p_k = r_k(x_{m_k})$, con lo cual $Y_{k+1}$ será un árbol que cumplirá las condiciones $(\cdot)$ y $(\cdot\cdot\cdot)$. Con esto termina la inducción.

Ahora tenemos que probar las condiciones $(\cdot\cdot)$ y $(\cdot\cdot\cdot\cdot)$. Para la primera sólo hay que notar que el conjunto $\{x_0, x_1, \ldots\}$ es denso en $X$ por lo que $X = \overline{\{x_i : i \in \mathbb{N}\}} \subset \lim Y_i$.

Para $(\cdot\cdot\cdot\cdot)$, usaremos la convergencia de los árboles y el hecho de que las dendritas son ulac. Tomamos $\epsilon > 0$ y un $\delta$ como en la definición de ulac para este $\epsilon$. Usando entonces la convergencia en $(\cdot\cdot)$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $H_d(X, Y_n) < \delta$. Entonces para cada $x \in X$, como existe un $y_n \in Y_n$ tal que $d(x, y_n) < \delta$, obtenemos que $diam(xy_n) < \epsilon$. Ya que $r_n(x) \in xy_n$, tenemos que $d(x, r_n(x)) < \epsilon$. Entonces $d(1_X, r_n) < \epsilon$, que es la convergencia uniforme deseada. $\square$

Con este último resultado, podemos probar ahora otra caracterización de las dendritas. Llamamos a una función continua $f : X \to Y$ una *$\epsilon$-función* si cumple que para todo $y \in f(X)$, $diam f^{-1}(y) < \epsilon$. Decimos que, dada una familia de espacios $\mathfrak{M}$, un espacio $X$ es *tipo* $\mathfrak{M}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $Y_\epsilon \in \mathfrak{M}$ y una función continua y suprayectiva $f_\epsilon : X \to Y_\epsilon$ que sea una $\epsilon$-función.

**Teorema 5.3** *Un continuo de Peano es tipo árbol si y sólo si es una den-*

*drita.*

*Demostración.* Primero veremos que una dendrita $X$ es tipo árbol, usamos la sucesión de árboles $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ del teorema 5.2, junto con las funciones $r_i : X \to Y_i$ y el hecho de que la sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la identidad. Dado un $\epsilon > 0$, sabemos que existe algún $j \in \mathbb{N}$ tal que $d(r_i, 1_X) < \frac{\epsilon}{2}$. Dada $x \in X$, $d(r_i(x), x) < \frac{\epsilon}{2}$, dadas $u, v \in r^{-1}(x)$,

$$d(u, v) \leq d(u, x) + d(x, v) = d(u, r_i(u)) + d(v, r_i(v)) < \epsilon.$$

Por tanto, $diam(r_j^{-1}(x)) < \epsilon$ para cualquier $x \in X$.

Ahora supongamos que $X$ es un continuo de Peano tipo árbol y supongamos que $\mathbb{S}^1 \subset X$, como los subcontinuos de los árboles son árboles, tenemos que $\mathbb{S}^1$ tambien es tipo árbol. Por lo tanto, si probamos que $\mathbb{S}^1$ no es tipo árbol, obtendremos una contradicción que nos dice que $X$ tampoco es tipo árbol.

Supongamos que $\mathbb{S}^1$ tiene la métrica usual, como subconjunto del plano. Es fácil ver que, aunque parece que la definición del tipo árbol depende de la métrica, se tiene que esta definición es topológica.

Supongamos que $f : \mathbb{S}^1 \to T$ es una $\frac{1}{2}$-función sobre un árbol $T$. Sabemos que $f(i) \neq f(-i)$ ya que $d(i, -i) > \frac{1}{2}$. Si llamamos $K = f(\mathbb{S}^{1+}) \cap f(\mathbb{S}^{1-})$, entonces por la unicoherencia hereditaria de los árboles, $K$ es conexo, como $f(i), f(-i) \in K$, $K$ es un subárbol no degenerado. Tomemos, en el arco $\mathbb{S}^{1+}$, el orden tal que $i <_{\mathbb{S}^{1+}} -i$. Sabemos que existen puntos $a, b \in \mathbb{S}^{1+}$ tales que $d(i, a) = \frac{1}{2}$, $d(-i, b) = \frac{1}{2}$. Si tomamos un punto $x \in \mathbb{S}^{1+} - ([i, a]_{\mathbb{S}^{1+}} \cup [b, -i]_{\mathbb{S}^{1+}})$ entonces $f(x) \notin K$ porque $d(x, \mathbb{S}^{1-}) > \frac{1}{2}$ y $f$ es una $\frac{1}{2}$-función.

Sea $r$ el último punto en el arco $[i, a]_{\mathbb{S}^{1+}}$ tal que $f(r) \in K$ y $s$ el primer punto en el arco $[b, -i]_{\mathbb{S}^{1+}}$ tal que $f(s) \in K$. Vamos a ver que $f(r) = f(s)$, para esto llamemos $m = f(r)$. Si $m \in E(T)$, entonces también es punto terminal de $K$ y como $T$ es no degenerado, podemos tomar $U \in \tau_T$ tal que $m \in U \subset K$. Pero entonces $f^{-1}(U) \cap (r, b)_{\mathbb{S}^{1+}} \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Entonces $m$ es punto de corte de $T$. Sabemos que $T - \{m\}$ tiene una cantidad finita de componentes, si todas tuvieran puntos de $K$, $m$ sería un punto interior de $K$ y una vez más podemos tomar $U \in \tau_T$ tal que $m \in U \subset K$, lo cual de nuevo nos dice que $f^{-1}(U) \cap (r, b)_{\mathbb{S}^{1+}} \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Entonces podemos escribir $T - \{m\} = A|B$ tal que $A$ es la unión de las componentes de $T - \{m\}$ que intersectan a $K$ y $B$ es el resto.

Fijándonos en que $f([r, s)_{\mathbb{S}^{1+}})$ es un conexo, si hubiera un punto $p \in A \cap f([r, s)_{\mathbb{S}^{1+}})$, el arco $pm \subset f([r, s)_{\mathbb{S}^{1+}})$ tendría puntos de $K$ distintos de

$m$, lo cual no es posible. Entonces $f([r,s)_{\mathbb{S}^1+}) \subset B \cup \{m\}$ y como $B \cup \{m\}$ es un cerrado,

$$f(s) \in (B \cup \{m\}) \cap f(K) \subset \{m\}$$

Entonces $f(s) = m$ que es lo que queríamos demostrar. Si tuvieramos que $d(a,b) \leq \frac{1}{2}$, por la desigualdad del triángulo tendríamos que

$$d(i,-i) \leq d(i,a) + d(a,b) + d(b,-i) \leq \frac{3}{2}$$

lo cual es una contradicción. Entonces

$$d(r,s) \geq d(a,b) > \frac{1}{2}$$

lo cual es una contradicción a que $f$ es $\frac{1}{2}$-función. Esto demuestra que $\mathbb{S}^1$ no es tipo árbol que era lo único que faltaba para nuestra caracterización. □

Sólo falta mencionar que no se puede quitar, en el teorema 5.3, la condición de conexidad local. Por ejemplo, todos los dendroides, en general son tipo árbol como se prueba en [Co], pero hay dendroides que no son lc.

## 5.2. Límites Inversos y Funciones Monótonas

Ahora continuaremos con los límites inversos, éstos nos ayudarán a construir la dendrita universal, y también nos permitirán probar otra caracterización de las dendritas. Diremos que una función continua $f : X \to Y$ es *monótona* si para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexa. Empecemos probando una de las propiedades más importantes de la funciones monótonas.

**Lema 5.4** *Si $f : X \to Y$ es una función monótona y suprayectiva con $X$ compacto y $Y$ métrico, entonces para cualquier $E \subset Y$ conexo, $f^{-1}(E)$ es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que existe un subconjunto conexo $E$ de $Y$ tal que $f^{-1}(E) = A|B$, y sean $A' = f(A)$, $B' = f(B)$. Entonces $E = A' \cup B'$, por la conexidad de $E$ podemos suponer, spg, que existe un $r \in \overline{A'} \cap B'$. Entonces existen $q \in B$ con $f(q) = r$ y una sucesión $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $A'$ con $\lim r_i = r$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $a_i \in A$ tal que $f(a_i) = r_i$. Podemos suponer, por la compacidad de $X$, que $\lim a_i = a$ para alguna $a \in X$. Por la continuidad de $f$, $f(a) = \lim f(a_i) = \lim r_i = r$. Por lo tanto, $a \in \overline{A} \cap f^{-1}(r)$. Entonces tenemos que $f^{-1}(r) \cap B \neq \emptyset \neq f^{-1}(r) \cap \overline{A}$ y además $f^{-1}(r) \subset A \cup B$, así que $f^{-1}(r) = (f^{-1}(r) \cap A)|(f^{-1}(r) \cap B)$, lo cual nos da una separación de $f^{-1}(r)$, una contradicción. Entonces $f^{-1}(E)$ es conexo que es lo que queríamos. $\square$

Antes de comenzar con los límites inversos probemos una caracterización de las dendritas. Una función es *hereditariamente monótona* si su restricción a cada subcontinuo es monótona

**Teorema 5.5** *Un continuo de Peano $X$ es una dendrita si y sólo si cualquier función monótona y suprayectiva con dominio en $X$ es hereditariamente monótona*

*Demostración.* Si $X$ es dendrita y $f : X \to Y$ es una función monótona y suprayectiva, y $K \in C(X)$, entonces $f|_K : K \to Y$ cumplirá, para todo $p \in Y$, que $f|_K^{-1}(p) = K \cap f^{-1}(y)$, el cual es un conexo porque $X$ es hu.

Ahora, para probar el regreso, supongamos que $X$ cumple la segunda parte. Mostraremos que $X$ es hu. Sean $A, B \in C(X)$, y supongamos que podemos tomar $p \in A \cap B$ y definamos la relación de equivalencia $\sim$ en $X$ como:

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = y \text{ ó } x, y \in B.$$

Esta relación de equivalencia nos define un espacio cociente $X/\!\sim$ y una proyección canónica $\phi : X \to X/\!\sim$ , que claramente es monótona ya que si $\overline{x} \in X/\!\sim$,

$$\phi^{-1}(\overline{x}) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si} \quad x \notin B, \\ B, & \text{si} \quad x \in B. \end{cases}$$

Entonces, por hipótesis, $\phi$ debe ser hereditariamente monótona ya que es suprayectiva por lo cual el conjunto

$$\phi|_A^{-1}(\phi(p)) = A \cap B$$

debe de ser conexo. Esto prueba que $X$ es hu que era lo único que faltaba para concluir que $X$ es dendrita. $\square$

Cabe mencionar que esta propiedad por sí misma no caracteriza a las dendritas, ya que si observamos la prueba, lo que estamos probando es que un continuo es hu si y sólo si cualquier función monótona y suprayectiva definida en él es hereditariamente monótona. Como veremos más adelante, los dendroides son hu y no necesariamente lc.

Ahora empezaremos a probar los resultados que nos servirán para calcular límites inversos de dendritas.

**Lema 5.6** *Si* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es un sistema inverso de continuos de Peano con las funciones* $f_i$ *monótonas y suprayectivas, entonces su límite inverso es un continuo de Peano.*

*Demostración.* Sea $X$ el límite inverso de la sucesión. Para cada $i \in \mathbb{N}$, denotemos la $i$-ésima proyección canónica por $p_i : X \to X_i$. El primer paso es demostrar que cada $p_i$ es suprayectiva. Tomemos un $x_i \in X_i$, como $f_i$ es suprayectiva, existe un $x_{i+1} \in X_{i+1}$ tal que $f_i(x_{i+1}) = x_i$, y siguiendo este proceso por inducción, para cada $j \geq i$, se puede encontrar $x_j \in X_j$ tal que $f_i^j(x_j) = x_i$. Como además ya conocemos las imágenes $f_j^i(x_i)$, para cada $j < i$, el punto $x \in X$, tal que su $j$-ésima coordenada es $x_j$, si $j \geq i$ y $f_j^i(x_i)$, si $j < i$, es tal que $p_i(x) = x_i$. El siguiente paso es demostrar que las proyecciones son monótonas, para esto tomamos un $i \in \mathbb{N}$ y un $x_i \in X_i$, entonces definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$K_j = \begin{cases} (f_i^j)^{-1}(x_i) & \text{si } j > i \\ \{x_i\} & \text{si } j = i \\ \{f_j^i(x_i)\} & \text{si } j < i \end{cases}.$$

Notemos que cada $K_j$ es un continuo ya que, para $j \leq i$, $K_i$ es un punto y para $j > i$, las funciones $f_j$ son monótonas. Entonces tenemos la siguiente igualdad de manera inmediata:

$$p_i^{-1}(x_i) = \varprojlim\{K_j, f_j|_{K_j}\}$$

Usando el teorema 1.6, tenemos que $p_i^{-1}(x_i)$ es un continuo, por lo que $p_i$ es monótona.

Estamos listos para demostrar que $X$ es lc, tomemos un $x \in X$ y $U \in \tau_X$, por el teorema 1.5 tenemos que podemos tomar, para algún $i \in \mathbb{N}$, un $U_i \in \tau_{X_i}$ tal que $x \in p_i{}^{-1}(U_i) \subset U$. Entonces por la conexidad local de $X_i$, existe un conexo $V_i \in \tau_{X_i}$ tal que $x_i \in V_i \subset U_i$. Entonces $x \in p_i{}^{-1}(V_i) \subset p_i{}^{-1}(U_i) \subset U$, y $p_i^{-1}(V_i)$, por el lema 5.4, es conexo, por lo cual hemos encontrado la vecindad que necesitamos. Esto demuestra que $X$ es lc en $x$, que era lo que queríamos. $\square$

Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 5.7** *Si* $\{X_i, f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es un sistema inverso de dendritas con las funciones* $f_i$ *monótonas y suprayectivas, entonces su límite inverso* $X$ *es una dendrita.*

*Demostración.* Claramente el lema 5.4 nos dice que $X$ es lc, por lo que sólo nos falta demostrar, por ejemplo, que es hu. Sean $A, B \in C(X)$, definiendo $C = A \cap B$ aplicamos los teoremas 1.7 y 1.6 nos dicen que $C$ es un continuo ya que cada $C_i$ es un continuo por ser cada $X_i$ hu. Con esto tenemos que $X$ es una dendrita. $\square$

Como último resultado de esta sección relacionemos los límites inversos con los árboles que forman la dendrita.

**Teorema 5.8** *Sea $X$ una dendrita y tomemos los árboles $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ del teorema 5.2, con, para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i : Y_{i+1} \to Y_i$ la retracción natural. Entonces la función $h : \lim_{\leftarrow} \{Y_i, g_i\} \to X$ definida por $h((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \lim x_i$ es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Vamos a usar el teorema del encaje de Anderson-Choquet 1.8. Sólo verificaremos la condición (1) para obtener que $h$ está bien definida y es continua y suprayectiva. Después, de otra forma, veremos que $h$ es inyectiva.

Sea $\epsilon > 0$, por la convergencia uniforme de las $r_i$ (definidas en el teorema 5.2), sabemos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que si $j > k$, $d(r_j, 1_Y) < \epsilon$. Entonces si $x \in \left(g_k^j\right)^{-1}(p)$, para algún $p \in Y_k$, obtenemos que $d(p, x) = d(x, g_k^j(x)) = d(x, r_k(x)) < \epsilon$, ya que $g_i \circ r_{i+1} = r_i$ (esto es porque al hacer la retracción natural de $X$ a $X_{i+1}$ y después de $X_{i+1}$ a $X_i$ es lo mismo que hacerla directamente de $X$ a $X_i$). Por lo tanto se cumple la condición (1) y $h$ es una función continua y suprayectiva.

Ahora, para probar la inyectividad supongamos que hay dos sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $x_i, y_i \in Y_i$ y tales que $\lim x_i = x = \lim y_i$ pero que existe un $k \in \mathbb{N}$ con $x_k \neq y_k$. Como además $Y_0 = \{p_0\}$ entonces $x_0 = y_0 = p_0$.

Definimos, para $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i$ como el arco que va de $x_0$ a $x_i$ (o $\alpha_i = \{x_0\}$ si $x = x_0$), obtenemos que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \subset Y_i$ y además $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$ pues el hecho de que $r_i(x_{i+1}) = x_i$ implica que para ir de $x_{i+1}$ a $y_i$ se tiene que entrar por $x_i$, así que $x_i \in \alpha_{i+1}$. Con esto, $\lim \alpha_i$ será un arco que va de $x_1 = p_0$ a $\lim x_i = x$ y que pasa por $x_k$ (o el punto $\{x_0\}$) por el teorema 2.24(3). Análogamente podemos construir un arco que vaya de $x_1 = p_0$ a $\lim y_i = x$ y que pasa por $y_k$. Entonces como las dendritas son únicamente arcoconexas, tenemos que los arcos construidos son iguales al arco $x_0x$ (o ambos son el punto $\{x_0\}$).

En el arco $x_0x = \alpha$ fijemos el orden $<_\alpha$ en el cual $x_0 <_\alpha x$ y supongamos, spg, que $y_k <_\alpha x_k$ (con esta suposición ya estamos en el caso en el que $\alpha$ no es un punto). Notemos que por ser $X$ hu, $Y_k \cap \alpha = x_0z \supset x_0x_k$. Si se diera el caso en el que $x = x_k$, entonces para todo $r \geq k$, $y_r \in x_0x = x_0x_k \subset Y_k \cap x_0x_k$ y por lo tanto $g_k^r(y_r) = y_k$, así que $y_r = y_k \neq x$ lo cual contradice la convergencia de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al punto $x$. Entonces, podemos suponer que $x \neq x_k$. Así que por la convergencia de la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $y_m \in X - x_0x_k$. Entonces $y_k = g_k^m(y_m)$ pero sin embargo $x_k \in Y_k$ y $x_k \in y_ky_m - \{y_k\}$ lo cual no puede pasar ya que $g_k^m(y_m)$ es el primer punto en cualquier arco de $y_m$ a un punto de $Y_k$, es decir, obtenemos una contradicción. Esto prueba la inyectividad que era lo último que nos faltaba. $\square$

## 5.3. Las Dendritas Universales

Ahora es tiempo de construir las dendritas universales y probar su universalidad. A reserva de probar la existencia de las dendritas universales, empezamos poniéndoles nombres.

**5.9** *$D_n$ denotará a la dendrita que es universal para la clase de dendritas con puntos de ramificación de orden a lo más $n$. Claramente, $D_\omega$ será universal para la familia de todas las dendritas.*

La dendrita $D_n$ tendrá la propiedad de que todos sus puntos de ramificación tendrán orden $n$ y además para cualquier arco $\alpha \subset D_n$ se tendrá que $\overline{\alpha \cap R(D_n)} = \alpha$.

Dado un punto $c \in \mathbb{C}$ y un segmento convexo en $\mathbb{C}$, $l$ con $c \in l$, llamaremos una *$n$-estrella centrada en $c$, sobre $l$, de tamaño $N > 0$* a un conjunto de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} B_j$ donde cada $B_j$ es un arco convexo con uno de sus extremos $c$, que forma un ángulo de $\pi/2j$ con el segmento $l$, tal que $diam(B_{j+1})/diam(B_j) = 1/(j+1)$ y $diam(\bigcup_{j=1}^{n} B_j) < N$. Claramente una $\omega$-estrella es homeomorfa a la dendrita $F_\omega$. Sin embargo, nos interesa que las $n$-estrellas tengan las propiedades que mencionamos para que así se puedan "pegar" apropiadamente.

**5.10** *Construcción de $D_n$.*

Tomaremos a $n \in \mathbb{N} \cup \omega - \{0, 1, 2\}$. La construcción se hará por inducción, definiremos, en cada paso, una dendrita $D_n^k \subset \mathbb{C}$ para $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $D_n^0$ como una n-estrella con centro en $0 \in \mathbb{C}$ sobre el eje real, con tamaño 1.

Supongamos ahora que ya tenemos construida la dendrita $D_n^k \subset \mathbb{C}$ tal que todos sus puntos de ramificación son de orden $n$, para alguna $k \in \mathbb{N}$,

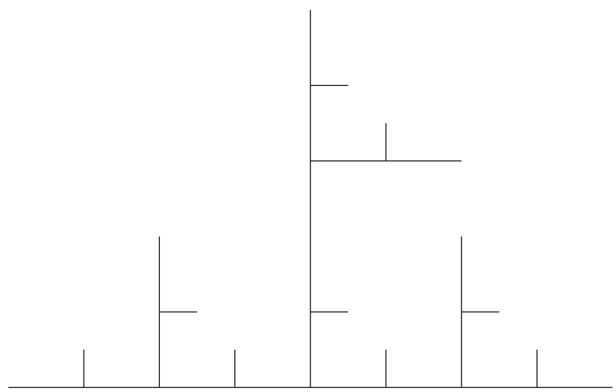

Figura 5.1: Paso 3 en la Construcción de $D_3$

y que podemos escribirla como $D_n^k = \bigcup_{j \in J_k} R_{k,n}^j$ ($J_k \subset \mathbb{N}$, que es finito si $n \neq \omega$) donde cada $R_{k,n}^j$ es un arco convexo tal que únicamente sus extremos tienen orden distinto de 2 en $D_n^k$ y con la propiedad de que cada conjunto de la forma $R_{k,n}^j - R(D_n^k)$ es abierto en $D_n^k$. Todo este enunciado será nuestra hipótesis de inducción.

Sea $p_{k,n}^j$ el punto medio del arco $R_{k,n}^j$, tomemos el conjunto de todos estos puntos, $P_{k,n} = \{p_{k,n}^j : j \in J_k\}$. Notemos que, por la condición de separación que pedimos como hipótesis, para todo $j \in J_k$ tenemos que $p_{k,n}^j \notin \overline{P_{k,n} - p_{k,n}^j}$, es decir, que $P_{k,n}$ no tiene puntos de acumulación en él mismo. Entonces, para cada $j \in J_k$, construyamos una $(n-2)$-estrella (si $n = \omega$, tomamos una $\omega$-estrella), que llamaremos $N_{k,n}^j$, con centro en $p_{k,n}^j$, sobre $R_{k,n}^j$ con tamaño

$$\text{mín}\left\{\frac{1}{2^{j+k}}, \frac{1-a_k}{2} d\Big(p_{k,n}^j, P_{k,n} - \{p_{k,n}^j\}\Big), \frac{1}{2} d\Big(p_{k,n}^j, \bigcup_{l \in J_k - \{j\}} R_{k,n}^l\Big)\right\}$$

donde

$$a_k = e^{-2^{-k}} < 1$$

Si suponemos que existe un punto $x \in N_{k,n}^j \cap N_{k,n}^i$, para algunas $i, j \in J_k$, con $i \neq j$, tendríamos, por la desigualdad del triángulo y el hecho que $\frac{1-a_k}{2} < \frac{1}{2}$, que

$$d(p_{k,n}^j, p_{k,n}^i) < d(x, p_{k,n}^j) + d(x, p_{k,n}^i) < \frac{1}{2}\Big(d\Big(p_{k,n}^j, P_{k,n} - \{p_{k,n}^j\}\Big) + d\Big(p_{k,n}^i, P_{k,n} - \{p_{k,n}^i\}\Big)\Big)$$

$$< \max \left\{ d\Big(p^j_{k,n}, P_{k,n} - \{p^j_{k,n}\}\Big), d\Big(p^i_{k,n}, P_{k,n} - \{p^i_{k,n}\}\Big) \right\}$$

lo cual es una contradicción, por lo que las $(n-2)$-estrellas definidas son disjuntas dos a dos. Con esto, como cada $(n-2)$-estrella que definimos solamente toca a $D^k_n$ en un punto, podemos definir la dendrita $D^{k+1}_n = D^k_n \cup (\bigcup_{j\in J_k} N^j_{k,n})$. Ahora hay que ver que cumple la hipótesis inductiva para $k+1$

En primera, claramente $D^{k+1}_n \subset \mathbb{C}$. Es claro que todos sus puntos de ramificación son de orden $n$ porque los únicos puntos de ramificación que aumentamos son los $p^j_{k,n}$ que tienen orden 2 en $D^k_n$ y ahora con las $(n-2)$-estrellas que pusimos sobre ellos, tienen orden $n$ en $D^{k+1}_n$, todo esto por el teorema 2.14. Los segmentos convexos $R^j_{k+1,n}$ serán de dos tipos, los primeros serán las dos mitades de los segmentos $R^j_{k,n}$ que fueron "divididos" en dos partes cuando pusimos las $(n-2)$-estrellas en el paso inductivo; los segundos son los segmentos convexos de la definición de cada uno de las $(n-2)$-estrellas que pusimos. Claramente cada uno de estos segmentos nos da un conjunto abierto cuando le quitamos los puntos de $R(D^{k+1}_n)$. Entonces se cumplen las condiciones de la hipótesis para $k+1$, lo que nos dice que podemos hacer la construcción.

Definimos las retracciones naturales $f_{i,n} : D^{i+1}_n \to D^i_n$ para $i \in \mathbb{N}$ y como claramente son monótonas y suprayectivas, del teorema 5.7 obtenemos que

$$D_n = \varprojlim \{D^i_n, f_{i,n}\}$$

es una dendrita.

□

**5.11** $D_n \subset \mathbb{C}$.

Ahora quisiéramos ver que las dendritas $D_n$ se pueden encajar en el plano. Para esto, hay que usar el teorema del encaje de Anderson-Choquet 1.8. Entonces hay que ver que se cumplen las condiciones (1) y (2) de la hipótesis de este teorema.

(1) Sea $\epsilon > 0$, tomemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\epsilon}{2}$, un punto $p \in D^k_n$ y algún $x \in (f^j_{k,n})^{-1}(p)$ para alguna $j > k$. Entonces, para todo $j > k$, $f^j_{r,n}(x) = f_{r,n}(f^j_{r+1,n})$ y además $f_{r,n}$ es una $(2^{-r})$-función ya que en el paso

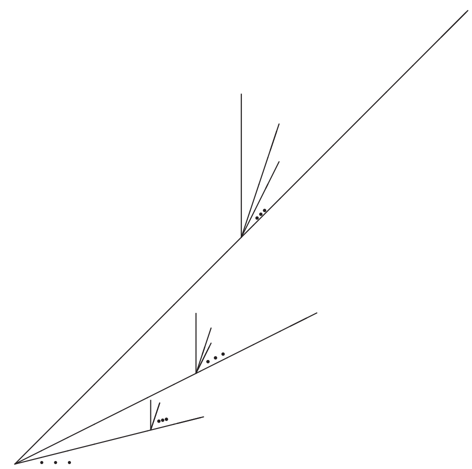

Figura 5.2: Paso 2 en la Construcción de $D_\omega$

$r$ de la construcción las estrellas tienen tamaño menor a $2^{-r}$. Por lo tanto usando este hecho y la desigualdad del triángulo,

$$
\begin{aligned}
|x-p| = |f^j_{k,n}(x) - x| &< |f^j_{k,n}(x) - f^j_{k+1,n}(x)| + \ldots + |f^j_{j-1,n}(x) - x| \\
&< \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Con esto, es claro que $diam[\bigcup_{j\geq k} {f^j_{k,n}}^{-1}(p)] < \epsilon$.

Antes de probar la condición (2), tomemos dos puntos $a, b \in D^{k+1}_n$ y sean $a' = f_{k,n}(a)$ y $b' = f_{k,n}(b)$. Si se tuviera el caso en el que $a \in N^j_{k,n}$ y $b \in N^i_{k,n}$ para algunos $i, j \in J_k$, entonces, por construcción, $a' = p^j_{k,n}$ y $b' = p^i_{k,n}$ y por nuestra construcción

$$
\begin{array}{lclcl}
|a-a'| & < & \frac{1-a_k}{2} d(p^j_{k,n}, P_{k,n} - \{p^j_{k,n}\}) & < & \frac{1-a_k}{2}|a'-b'| \\
|b-b'| & < & \frac{1-a_k}{2} d(p^i_{k,n}, P_{k,n} - \{p^i_{k,n}\}) & < & \frac{1-a_k}{2}|a'-b'|
\end{array}
$$

y además si se da alguno de $a = a'$ o $b = b'$ (éste es el caso que faltaba), claramente se dan ambas igualdades. Entonces usando la desigualdad del triángulo:

$$|a'-b'| \leq |a'-a| + |a-b| + |b-b'| < (1-a_k)|a'-b'| + |a-b|$$

lo cual nos dice que $|f_{k,n}(a) - f_{k,n}(b)| < \frac{1}{a_k}|a-b|$.

(2) Dadas $i \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, sea $\delta' = \epsilon^{-2}\delta$. Sean $j > i$ y $a, b \in X$ cualesquiera, usando la observación anterior e inducción obtenemos que

$$|f^j_{i,n}(a) - f^j_{i,n}(b)| < |a-b| \prod_{k=i}^{j} \frac{1}{a_k} < |a-b| \prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_k} = |a-b| \prod_{k\in\mathbb{N}} e^{2^{-n}}$$

$$= |a-b| e^{\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}} = |a-b|e^2$$

con lo cual obtenemos lo que queríamos.

Por lo tanto se cumplen las condiciones del teorema de Anderson Choqet por lo que concluimos que $D_n = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_n^k} \subset \mathbb{C}$. $\square$

Ahora, antes de probar la universalidad de las $D_n$, necesitamos conocer un concepto nuevo. Dados dos conjuntos parcialente ordenados $E$, $F$ decimos que $f : E \to F$ es un *isomorfismo de orden* si es una biyección que preserva el orden. Recordemos que a todo conjunto ordenado $E$, se le puede asignar una topología llamada la *topología del orden* la cual tiene como subbásicos a los conjuntos de la forma $\{x \in E : x < y\}$ y $\{x \in E : x > y\}$ para cada $y \in E$. Esto nos lleva al primer resultado.

**Lema 5.12** *Si para dos conjuntos ordenados existe un isomorfismo de orden entre ellos, entonces son homeomorfos con las topologías del orden correspondientes.*

*Demostración.* Sean $E, F$ conjuntos ordenados con la topología inducida por sus respectivos órdenes y $f : E \to F$ un isomorfismo de orden entre ellos. Si tomamos $e \in E$ fijo tenemos que

$$\begin{aligned} f(\{x \in E : x < e\}) &= \{y \in F : y < f(e)\} \\ f(\{x \in E : x > e\}) &= \{y \in F : y > f(e)\} \end{aligned}$$

Es decir, $f$ manda subbásicos en subbásicos, por lo cual $f$ es abierta. Análogamente $f^{-1}$ es abierta por lo cual $f$ es un homeomorfismo. $\square$

Ahora, recordamos el conjunto de los racionales diádicos, que llamaremos $\mathbb{D}$. Notemos que $\mathbb{D} \cap (0,1)$ tiene la topología del orden inducida por la topología euclidiana de $I$. Entonces cualquier conjunto que sea isomorfo, como espacio ordenado a $\mathbb{D} \cap (0,1)$ será homeomorfo también a él.

**Lema 5.13** *Todos los conjuntos $D \subset I$ que son densos numerables de $I$ que además no contienen a su supremo ni a su ínfimo, son isomorfos como espacios ordenados y por lo tanto homeomorfos a $\mathbb{D} \cap (0,1)$.*

*Demostración.* Lo que haremos será encontrar un isomorfismo de orden entre $D$ y $\mathbb{D} \cap (0,1)$. Para esto, primero numeremos a $D$, $D = \{x_0, x_1, \ldots\}$ y construyamos por inducción una función $f : D \to \mathbb{D} \cap (0,1)$. El primer paso es definir $f(x_0) = 1/2$. Sabemos que existen $c_1^1, c_2^1 \in \mathbb{N}$ tales que son los primeros naturales que cumplen que $x_{c_1^1} < x_0 < x_{c_2^1}$, y por ser los primeros uno de los dos es $x_1$. Entonces el paso dos es hacer $f(x_{c_1^1}) = 1/4$ y $f(x_{c_2^1}) = 3/4$ y claramente en este paso ya se habrán usado al menos los primeros 2 elementos de $D$, en la numeración que dimos. Inductivamente, en el paso $n$ ya tendremos definido $f$ para $2^n - 1$ elementos de $D$, al menos habremos usado $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ y el rango serán los racionales diádicos que en su expresión reducida tendrán denominador una potencia $2^k$ con $0 < k < n+1$. Con esto, en el paso $n+1$, encontramos los primeros $2^n$ números naturales $\{c_k^n : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ tales que $c_k^n$ esté en el interior del $k$-ésimo intervalo que se forma al tomar la partición de $I$ formada por $0, 1$ y los elementos de $D$ para los cuales ya tenemos definida la función. Claramente podemos definir a $f$ en $\{c_k^n : k \in \{1, \ldots, 2^n\}\}$ tomando como valores a los racionales diádicos en $I$ que en su expresión reducida tienen denominador $2^{k+1}$ de tal forma que preserven el orden. Y además como escogimos los primeros elementos de $D$ que cumplieran la condición descrita, podemos asegurar que en este paso hemos usado $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Entonces por inducción podemos definir la función que claramente es un isomorfismo de orden. Es suprayectiva porque en el paso $n$-ésimo nos aseguramos que está definida para todos los racionales diádicos de $(0,1)$ que tienen denominador $2^k$, en su expresión reducida, con $0 < k < n+1$ y está definida en todo $D$ porque claramente en el paso $n$ usamos al menos los primeros $n$ elementos de la numeración que dimos. Entonces son isomorfos por orden y por lo tanto homeomorfos. □

Este resultado además nos dice que cualesquiera dos conjuntos que cumplan las hipótesis del subconjunto $D$ serán isomorfos por orden y por lo tanto homeomorfos. Sólo hay que mencionar un resultado más que nos servirá en la prueba de la universalidad.

**Lema 5.14** *Si $D$ y $E$ son conjuntos densos de $I$ tales que existe un isomorfismo de orden $f : D \to E$, entonces existe un homeomorfismo $F : I \to I$ tal que $F|_D = f$.*

*Demostración.* Si $x \in I$, podemos definir $F(x)$ de la siguiente forma. Tomamos cualquier sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $D$ con $x = \lim x_i$ y que cumpla que $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converja. Esto siempre se puede conseguir porque $I$ es compacto. Definimos $F(x) = \lim f(x_i)$. Primero, para ver que $F$ está bien definida, supongamos que existen dos sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $D$ tales que $\lim x_i = x = \lim y_i$ pero que $\lim f(x_i) = a < b = \lim f(y_i)$. Tomemos un $c \in (a,b) \cap E$, entonces existe un $N > 0$ tal que si $n \geq N$, entonces $f(x_n) < c < f(y_n)$. Como $f$ preserva el orden, $x_n < f^{-1}(c) < y_n$ por lo que tiene que darse que $x = f^{-1}(c)$ ya que ambas sucesiones convergen al mismo punto. Por lo tanto, $x \in D$ y como $f$ es continua, obtenemos que $a = b = f(x)$ lo cual es absurdo. De manera que $\lim f(x_i) = \lim f(y_i)$. Además con esta definición, como las sucesiones constantes convergen, $F|_D = f$.

Para ver la suprayectividad, tomamos un $y \in I$ y una sucesión $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $E$ tal que $y = \lim y_i$. Sea, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i = f^{-1}(y_i)$ y por la compacidad de $I$ podemos suponer que existe un $x \in I$ tal que $x = \lim x_i$. Entonces $F(x) = \lim f(x_i) = \lim y_i = y$. Si probamos que $F$ respeta el orden, tendremos que también es inyectiva, como $I$ tiene la topología dada por el orden, obetendremos que $F$ es un homeomorfismo. Entonces sean $x, y \in I$ tales que $x < y$, y tomemos $z_1, z_2 \in D$ tales que $x < z_1 < z_2 < y$. Tomemos dos sucesiones $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $D$ tales que $\lim x_i = x$ y $\lim y_i = y$ y las sucesiones $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ y $(f(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ sean convergentes. Entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $x_n < z_1 < z_2 < y_n$. Como $f$ preserva el orden, $f(x_n) \leq f(z_1) < f(z_2) \leq f(y_n)$, por lo que $F(x) = \lim f(x_n) \leq f(z_1) < f(z_2) \leq \lim f(y_n) = F(y)$. Entonces $F$ también preserva el orden y con esto tenemos que $F$ es un isomorfismo de orden, y entonces $F$ es un homeomorfismo. $\square$

Estos resultados son suficientes para probar la universalidad.

**5.15** *Universalidad de $D_n$.*

Ahora nos gustaría ver que en realidad la dendrita $D_n$ es universal para la familia de dendritas que tienen sus puntos de ramificación de orden a lo más $n$. Como ya comentamos, esto nos dirá que $D_\omega$ es universal para la familia de todas las dendritas. La notación que usaremos será la de la construcción de la dendrita universal 5.10 y del teorema 5.2.

Sea $X$ una dendrita con todos sus puntos de orden menor o igual a $n$. Vamos a usar inducción para definir una función creciente $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y un encaje $h_i : Y_i \to D_n^{p(i)}$. Recordemos que $P_n^k$ es el conjunto de centros de estrellas en $D_n^{k+1}$ que no son centros de estrellas en $D_n^k$ y notemos que $R(D_n) = \{0\} \cup (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_n^k)$ ya que los puntos de $D_n - \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_n^k$ son puntos que no son de corte y por lo tanto de $E(D_n)$. Notemos que, por construcción, todos los puntos de ramificación de $D_n$ son de orden $n$ y que además para cualquier arco $\alpha \subset D_n$, $\overline{\alpha \cap R(D_n)} = \alpha$, dos propiedades que mencionamos al inicio de esta sección y que ahora usaremos.

Para $i = 0$, tomemos $p(0) = 1$, $h(p_0) \in P_n^1$ arbitrario. Ahora supongamos que tenemos ya definida $h_i$ y $p$ para $i \leq k$. También supongamos que $h_i(p_k) \in (\bigcup_{r>i} P_n^r) \cap D_n^{p(i)}$, para $i \leq k$.

Llamemos $A_{k+1} = \overline{Y_{k+1} - Y_k} - \{p_k, q_k\}$, que es el arco que se le agrega a $Y_k$ para formar a $Y_{k+1}$, sin sus extremos. Como $|R(X)| \leq \aleph_0$, entonces $R(X) \cap A_{k+1}$ es un conjunto finito o numerable. En cualquier caso, podemos agregarle puntos a $R(X) \cap A_{k+1}$ para formar un conjunto $E_{k+1} \supset R(X) \cap A_{k+1}$ tal que $|E_{k+1}| = \aleph_0$ y $\overline{E_{k+1}} = A_{k+1}$. Notemos que existe un número, que llamaremos $p(k+1)$ con $p(k+1) > p(k)$ y que cumple que $h_k(p_k) \in P_n^{p(k+1)}$, definimos la función $p$ en $k+1$ precisamente como $p(k+1)$.

Construyamos un arco $A'_{k+1} \subset D_n^{p(k+1)}$ tal que $A'_{k+1} \cap D_n^{p(k)} = \{h_k(p_k)\}$ y que sea un subarco de la estrella que se construye sobre $h_k(p_k)$. Observemos que como los puntos de $R(D_n)$ tienen orden exactamente $n$ y los de $R(Y)$ tienen orden a lo más $n$, en cada paso se puede construir ese arco.

Quisieramos ahora definir $h_{k+1} : Y_{k+1} \to D_n^{k+1}$ tal que $h_{k+1}|_{Y_k} = h_k$, $h_{k+1}|_{A_{k+1}}$ sea una función sobre $A'_{k+1}$ y que $h_{k+1}(q_k)$ sea el otro extremo de $A'_{k+1}$. De paso, también lograremos que $h_{k+1}(R(X) \cap A_{k+1}) \subset A'_{k+1} \cap R(D_n)$ para que así $h_{k+1}(p_{k+1}) \in A'_{k+1} \cap R(D_n)$ y así se cumplan todas las condiciones de la hipótesis de inducción para $k+1$.

Entonces definamos $t_{k+1} : E_{k+1} \cup \{p_k, q_k\} \to A_{k+1} \cap R(D_n)$ un isomorfismo de orden (podemos hacerlo por el lema 5.13) con $t_{k+1}(p_k) = h_k(p_k)$ y $t_{k+1}(p_k)$ el otro extremo de $A'_{k+1}$. Por el lema 5.14 podemos extender $t_{k+1}$ a un homeomorfismo y definir así $h_k$ como esta extensión en $\overline{Y_{k+1} - Y_k}$. Entonces con esto tenemos el encaje que queríamos, lo cual completa la inducción.

Tenemos las dos sucesiones inversas $\{D_n^{p(i)}, f_{p(i),n}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{Y_i, g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y, para cada $i \in \mathbb{N}$, una función continua inyectiva $h_i : Y_i \to D_n^{p(i)}$ que conmuta, es decir, que $f_{p(i)}^{p(i+1)} \circ h_i = h_{i+1} \circ g_i$. Entonces la función $h : X \to D_n$ definida como $h(x) = (h_i(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es un encaje por [M, 2.1.47, p.88]. Esto nos dice que $D_n$ es universal para la familia de dendritas que tienen sus puntos de orden menor o igual que $n$. $\square$

# Capítulo 6

# Arco-estructuras y Dendroides

Los dendroides son la generalización natural de las dendritas, a pesar de que su definición no lo indique a primera vista, cuando no se pide la conexidad local. Una de las características de éstos es que también son únicamente arcoconexos, por lo cual se puede definir una "arco-estructura". Empecemos estudiando estas estructuras en general y después las estudiaremos en los dendroides. Los conceptos que se manejan en las arco-estructuras se derivan de las propiedades que estudiaremos en los dendroides.

## 6.1. Arco-estructuras

Dado un continuo arcoconexo $X$, a una función continua $A : X \times X \to \mathscr{A}(X)$ que cumpla las siguientes tres propiedades se le llamará *arco-estructura* para $X$.

(1) Para todo $x \in X$, $A(x,x) = \{x\}$,

(2) Para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, $A(x,y) = A(y,x)$ es un arco con extremos $x$ y $y$,

(3) Para cualesquiera $x, y, z \in X$, $A(x,z) \subset A(x,y) \cup A(y,z)$ y además se da la igualdad si y sólo si $y \in A(x,z)$.

Claramente, en las dendritas existe una única arco-estructura $A$ dada por $A(x,y) = xy$. Siguiendo esta misma idea, es claro que los continuos únicamente ac, como el círculo de Varsovia, tienen una única arco-estructura. Notemos que, en $\mathbb{C}$, si definimos $A(p,q)$ como al único segmento convexo en

$\mathbb{C}$ que une a $p$ y $q$, entonces $A$ no satisface la condición (3). Sin embargo, en $\mathbb{C}$ podemos definir una arco-estructura, que llamaremos $A_{\mathbb{C}}$, de la siguiente manera. Primero, llamemos un *rayo desde el* 0 a cualquier conjunto de la forma $\{rx : r \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}\}$ donde $x \in \mathbb{C}$ es fijo. Definimos $A_{\mathbb{C}}(x, 0)$ como el segmento convexo que va del origen al punto $x$; si tenemos dos puntos $x, y$ tales que no estén en el mismo rayo desde el 0, definimos $A_{\mathbb{C}}(x, y) = A_{\mathbb{C}}(x, 0) \cup A_{\mathbb{C}}(0, y)$; y para todo $x \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^{+}$, definimos $A_{\mathbb{C}}(x, rx)$ como el segmento convexo entre $x$ y $rx$. Claramente podríamos definir otras arco-estructuras en $\mathbb{C}$ si cambiamos el papel del origen por cualquier otro punto. Esto nos dice que las arco-estructuras no son únicas. Otra arco-estructura, que podemos definir en $\mathbb{S}^1$, escogiendo primero un punto fijo $p$, y el orden $\leq$, que sea en sentido de las manecillas del reloj desde $p$, tal que $p$ sea el mínimo, y después definiendo, cuando $x \leq y$, $A_{\mathbb{S}^1}(x, y) = \{z \in \mathbb{S}^1 : x \leq z \leq y\}$.

Uno de los primeros conceptos en los que pensaremos será en el que se llama *suavidad*. Un continuo $X$ con una arco-estructura $A$ es $A$-*suave* en $p \in X$, si la función $A_p : X \to \mathscr{A}(X)$ definida por $A_p(x) = A(x, p)$ es continua. Normalmente la suavidad en un punto $p \in X$ se piensa en el sentido de que si una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $X$ converge a un punto $x \in X$, entonces la sucesión de arcos $(A(p, x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ converge al arco $A(p, x)$ (con la métrica de Hausdorff).

El círculo de Varsovia (figura 2.6) no es suave en ningún punto. Por ejemplo, si tomamos el punto $p = (0, 1)$, y una sucesión $(x_i)_{n \in \mathbb{N}}$, que converja a $p$ y no tenga elementos en el arco que va del punto $p$ al $(0, -1)$, obtenemos que $\lim px_i = \mathcal{W} \neq \{p\} = A(p, p)$. Algo similar pasa para el resto de los puntos, $p$.

En el caso de la arco-estructura que dimos en $\mathbb{C}$, notemos que si tomamos un $z \in \mathbb{S}^1$ y una sucesión $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{S}^1 - \{z\}$ con $z = \lim z_i$, $\lim A_{\mathbb{C}}(z_i, z) = A_{\mathbb{C}}(0, z) \neq \{z\} = A_{\mathbb{C}}(z, z)$. Análogamente se puede ver que $\mathbb{C}$ no es $A_{\mathbb{C}}$-suave en ningún punto $z \neq 0$. Sin embargo, claramente sí es $A_{\mathbb{C}}$-suave en el origen.

Notemos que $\mathbb{S}^1$ no es $A_{\mathbb{S}^1}$-suave en ningún punto. Fijemos $p = 1$. Tomemos un punto $q$ distinto de $p$, pensemos, spg, que $q = -1$. Tomemos una sucesión de puntos $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{S}^{1+} - \{p\}$ que converjan a $p$ y todos sean distintos a $p$. Como para todo $i \in \mathbb{N}$, $q \leq p_i$ y $p \leq q$, obtenemos $\lim A_{\mathbb{S}^1}(q, p_i) = \mathbb{S}^{1+} \neq \mathbb{S}^{1-} = A_{\mathbb{S}^1}(q, p)$, por lo que $\mathbb{S}^1$ no es $A_{\mathbb{S}^1}$-suave en ningún punto distinto de $p$. Claramente pasa algo similar en $p$ por lo cual no hay suavidad en ningún punto.

Un concepto que es más intuitivo que la suavidad, y que posiblemente el lector lo conoce en $\mathbb{R}^n$, es el de la convexidad. Decimos que, en un continuo

$X$ con una arco-estructura $A$, el subconjunto $Y$ de $X$ es *$A$-convexo* si para cualesquiera $x, y \in Y$ se tiene que $A(x, y) \subset Y$. Notemos que la unión de dos conjuntos $A$-convexos que se intersectan es $A$-convexo, gracias a la propiedad (3) de las arco-estructuras. Recordemos que esto no ocurre con el concepto de convexidad que se tiene naturalmente en $\mathbb{R}^n$, sin embargo agregar la propiedad 3 de las arco-estructuras asegura que sí. También podemos hablar de este concepto de una manera local como se hace con la compacidad y la conexidad.

Cuando hablemos de la $A$-convexidad de un espacio únicamente arcoconexo, como la arco-estructura $A$ es única, sólo diremos *convexo*.

Dado un subconjunto $Y \subset X$ y un punto $p \in Y$, llamaremos a $V_Y^A(p) = \{x \in Y : A(x, p) \subset Y\}$ la *componente $A$-convexa* de $Y$ en $p$, que es $A$-convexa por la propiedad (3) de las arco-estructuras y además es el mayor conjunto $A$-convexo contenido en $Y$, que contiene al punto $p$, esto es claro por su definición. Notemos que gracias a la propiedad (3) de las arco-estructuras, si $q \in V_Y^A(p)$ entonces $V_Y^A(p) = V_Y^A(q)$, por lo cual la componente $A$-convexa no depende del punto tomado. Por la observación de que la unión de dos conjuntos $A$-convexos que se intersectan es $A$-convexa, es claro que las componentes $A$-convexas de un conjunto $Y$ son ajenas e inducen una partición de $Y$. Es decir, las componentes $A$-convexas de un conjunto se comportan de manera similar a las componentes conexas y a las arcocomponentes, y cada una de ellas está contenida en una arcocomponente. Además, cabe señalar que las arcocomponentes y las componentes $A$-convexas coinciden cuando el espacio $X$ es únicamente ac.

Se dice que un continuo $X$ con una arco-estructura $A$ es *localmente $A$-convexo* en $M \subset X$ si para todo $U \in \tau$ con $M \subset U$ existe un $Z \subset X$ que sea $A$-convexo y que cumpla $M \subset Z^o \subset Z \subset \overline{Z} \subset U$. Diremos que $X$ es *localmente $A$-convexo en $p \in X$* si es localmente $A$-convexo en $\{p\}$, y en realidad éste será el sentido en el que usaremos este concepto.

Notemos que los únicos conjuntos $A_{\mathbb{C}}$-convexos son de dos tipos. Los primeros son los subconjuntos convexos del plano que están contenidos en algún rayo que parte desde el 0. Los otros son los conjuntos $V$ que cumplen la condición "si $x \in V$, entonces todo el segmento convexo que va de $x$ a 0 está en $V$". De aquí se puede ver que $\mathbb{C}$ es localmente $A_{\mathbb{C}}$-convexo únicamente en el 0, ya que los rayos desde el 0 tienen interior vacío.

Es claro que el círculo de Varsovia es localmente convexo únicamente en los puntos en los que es lc.

Ahora relacionemos la suavidad y la convexidad local. En general se sabe que éstos son conceptos equivalentes, pero para nuestros propósitos sólo necesitamos una implicación.

**Lema 6.1** *Si $X$ es un continuo con una arco-estructura $A$ con la cual $X$ es $A$-suave en $p \in X$, entonces $X$ es localmente $A$-convexo en $p$.*

*Demostración.* Dado $U \in \tau$ con $p \in U$, tomemos $V \in \tau$ con $p \in V \subset \overline{V} \subset U$. Sea $Z = V_V^A(p)$, supongamos que $Z$ no es abierto. Sean un punto $x \in Z$ que no sea interior, y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - Z$ con $\text{lím}\, x_n = x$. Por la $A$-suavidad, $\text{lím}\, A(p, x_n) = A(p, x)$, pero por la elección de la sucesión, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $z_n \in A(p, x_n) \cap (X - V)$. Podemos suponer que $z = \text{lím}\, z_n$ para algún $z \in X$. Entonces $z \in A(x, p) \cap (X - V)$, una contradicción. Esto prueba la $A$-convexidad local en $p$. $\square$

Necesitamos un resultado más. Para un continuo $X$ con una arco-estructura $A$ y un punto $p \in X$ tenemos la relación de orden $\leq_p$ que se define como $x \leq_p y$ si y sólo si $A(p, x) \subset A(p, y)$.

**Lema 6.2** *Sean $X$ un continuo con una arco-estructura $A$ y un punto $p \in X$. Entonces $X$ es $A$-suave en $p$ si y sólo si la relación $\leq_p$ es cerrada (en $X \times X$).*

*Demostración.* Primero, supongamos la $A$-suavidad en $p$. Tomemos una sucesión $((x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en $X \times X$ con las propiedades de que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq_p y_n$, $\text{lím}\, x_n = x$ y $\text{lím}\, y_n = y$. Entonces tenemos que $A(p, x) = \text{lím}\, A(p, x_n) \subset \text{lím}\, A(p, y_n) = A(p, y)$, es decir, $x \leq_p y$, lo cual nos dice que $\leq_p$ es cerrada.

Ahora, supongamos que la relación $\leq_p$ es cerrada. Tomemos un punto $x \in X$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ con $\text{lím}\, x_n = x$, demostraremos que $\text{lím}\, A(p, x_n) = A(p, x)$.

Sea $y \in \text{lím sup}\, A(p, x_n)$, entonces usando la definición de lím sup para vecindades abiertas alrededor de $y$ de radios que converjan a 0, podemos encontrar una sucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con $y_{n_k} \in A(p, x_{n_k})$ y $\text{lím}\, y_{n_k} = y$. Por la tercera propiedad de las arcoestructuras, $y_{n_k} \leq_p x_{n_k}$ para $k \in \mathbb{N}$, y como $\leq_p$ cerrada, $y \leq_p x$, i.e., $y \in A(p, x)$. Entonces hemos probado que $\text{lím sup}\, A(p, x_n) \subset A(p, x)$.

Ahora veamos que $x$ y $p$ están en la misma componente (y por lo tanto casicomponente) de $\text{lím sup}\, A(p, x_n)$, supongamos que esto no ocurre y que podemos escribir $\text{lím sup}\, A(p, x_n) = P|Q$ con $p \in P$ y $x \in Q$. Tomemos $P', Q' \in \tau$ tales que $P \subset P'$, $Q \subset Q'$ y $P' \cap Q' = \emptyset$. Entonces como

$\lim x_n = x \in Q'$ podemos suponer, spg, que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está totalmente contenida en $Q'$. Como los arcos son conexos, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un punto $z_n \in A(p, x_n) \cap (X - (P' \cup Q'))$. Como $X - (P' \cup Q')$ es cerrado (y por lo tanto compacto), podemos suponer, spg, que $z = \lim z_n$ para alguna $z \in \limsup A(p, x_n) \cap (X - (P' \cup Q'))$ lo cual es una contradicción. Entonces, existe una componente de $\limsup A(p, x_n)$ que contiene a $p$ y $x$, y además como ya vimos que $\limsup A(p, x_n) \subset A(p, x)$, esta componente debe de estar contenida en $A(p, x)$. Como $A(p, x)$ es un arco, esto implica que $\limsup A(p, x_n) = A(p, x)$

Ahora supongamos que existe un punto $y \in \limsup A(p, x_n) - \liminf A(p, x_n)$. En particular, como $y \notin \liminf A(p, x_n)$, sabemos que existe un $U \in \tau$ con $y \in U$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $A(p, x_{n_k}) \cap U = \emptyset$. Sabemos que $\limsup A(p, x_{n_k}) \subset \limsup A(p, x_n) = A(p, x)$, entonces, por un argumento similar al del párrafo anterior, se puede demostrar que $\limsup A(p, x_{n_k}) = A(p, x)$. Esto prueba que $y \in \limsup A(p, x_{n_k})$, sin embargo, como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A(p, x_{n_k}) \subset X - U$, obtenemos que $\limsup A(p, x_{n_k}) \subset X - U$ lo cual contradice el hecho de que $y \notin U$. Por lo tanto $\limsup A(p, x_n) - \liminf A(p, x_n) = \emptyset$ lo cual nos dice finalmente que $\lim A(p, x_n) = A(p, x)$. $\square$

El último concepto a estudiar antes de empezar con las caracterizaciones de dendritas es una función que es la generalización (en un sentido) de la funcion $T$ de Jones. Dado un continuo $X$ con una arco-estructura $A$, definimos la función $T_A : X \to 2^X$ como

$$\begin{aligned} T_A(x) \;&=\; \{y \in X : \text{ para cada } Y \in C(X),\ A\text{-convexo, con } y \in Y^o, \\ &\quad\ \text{se tiene que } x \in Y\} \end{aligned}$$

Para probar que esta función está bien definida se tiene que probar que su imagen cae en los cerrados de $X$, pero esto no es importante para el desarrollo de nuestro trabajo. Notemos que siempre se tiene que $x \in T_A(x)$. En particular, cuando $X$ es únicamente ac, y todos sus continuos son arcoconexos, podremos escribir $T$ solamente, y ésta coincidirá con la función de Jones, y no habrá problema al escribirla así. Si el lector desea conocer la función $T$ de Jones puede consultar [M, capítulo 3].

Por ejemplo, en el caso del círculo de Varsovia, veremos que para cualquier punto $x \in \mathcal{W}$, $T(x) = ab$, donde $a = (0, 1)$ y $b = (0, -1)$. Esto es cierto porque, cualquier abierto suficientemente pequeño alrededor de un punto del arco $ab$ tocará puntos del rayo que tiende al arco $ab$, por lo que el único continuo $A$-convexo que tiene puntos de $ab$ interiores es todo $\mathcal{W}$.

En el caso de la estructura $A_{\mathbb{S}^1}$, tenemos en general que, si $q \in \mathbb{S}^1$, $T_{A_{\mathbb{S}^1}}(q) = \{p, q\}$, donde está incluido el caso en el cual $p = q$.

Ahora, ya con todos estos conceptos, probemos unas caracterizaciones de las dendritas, que se relacionan con ellos.

**Teorema 6.3** *Para un continuo $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) existe una arco-estructura $A$ y para cada arcoestructura $A'$ de $X$, $T_{A'}(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$,*

*(3) existe una arco-estructura $A$ y $X$ es $A$-suave en cada punto,*

*(4) existe una arco-estructura $A$ y $X$ es localmente $A$-convexo en cada punto.*

*Demostración.*
(1) $\Rightarrow$ (2) La arco-estructura que existe es la única que ya conocemos. Dados $x \in X$, $y \in X - \{x\}$ se puede encontrar un conexo $U \in \tau$ con $y \in U \subset \overline{U} \subset X - \{x\}$. Entonces $\overline{U}$ es un continuo convexo con $y$ en su interior y que no toca a $x$, de aquí que $y \notin T(x)$. Es decir, $T(x) = \{x\}$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Dado $p \in X$, veamos que $\leq_p$ es cerrada, por el lema 6.2 tendremos que $X$ es $A$-suave en $p$. Sean $x, y \in X$ tales que $x \not\leq_p y$. Como $y \notin T_A(x)$, existe un $K \in C(X)$ que es $A$-convexo tal que $y \in K^o \subset K \subset X - \{x\}$. Entonces $K \cup A(p, y) \in C(X)$ también será $A$-convexo.

Ahora probemos que

$$(x, y) \in [X - (K \cup A(p, y))] \times K^o \subset (X \times X) - \leq_p$$

lo cual nos dirá que $(x, y)$ está en el exterior de $\leq_p$, por lo que $\leq_p$ será cerrada. Es claro que $(x, y)$ está en este conjunto, sólo falta probar la contención de los conjuntos.

Sea $(u, v) \in [X - (K \cup A(p, y))] \times K^o$. Nos fijamos que $A(v, p) \subset A(v, y) \cup A(y, p) \subset K \cup A(y, p)$ por la $A$-convexidad de $K$. Entonces, si ocurriera que $u \leq_p v$, tendríamos que $u \in K \cup A(p, y)$, lo cual es una contradicción, así que $(u, v) \notin \leq_p$. Esto era lo único que faltaba demostrar.
(3) $\Rightarrow$ (4) Es claro por el lema 6.1 aplicado en cada punto de $X$.
(4) $\Rightarrow$ (1) Vamos a probar que cualesquiera dos puntos se pueden separar por un tercero, esto será suficiente para probar que $X$ es una dendrita, por

el teorema 2.3. Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$ y $z \in A(x, y)$. Claramente, $x$ y $y$ estarán en componentes $A$-convexas distintas de $X - \{z\}$. Veamos que las componentes $A$-convexas de $X - \{z\}$ son abiertas. Tomemos una de éstas, llamémosle $C$ y tomemos un $r \in C$. Por hipótesis sabemos que existe un conjunto $A$-conexo $V_r$ tal que $r \in V_r^o \subset V_r \subset \overline{V_r} \subset X - \{z\}$ y además por ser la componente $A$-convexa, $V_r \subset C$. Entonces en particular $r \in V_r^o \subset C$, esto nos dice que $C$ es abierta. Entonces las componentes $A$-convexas de $x$ y $y$ son abiertas, y cerradas, porque cada una es el complemento la unión de las demás, que también son abiertas. Entonces $x$ y $y$ están en casicomponentes distintas de $X - \{z\}$ y por lo tanto $z$ separa a esos dos puntos, esto era lo que queríamos.

$\square$

El siguiente concepto que nos corresponde conocer es el de las métricas radialmente $A$-convexas. En un espacio $X$ con una arco-estructura $A$, decimos que una métrica $d$ (que genera la topología de $X$) es *radialmente $A$-convexa* en $p \in X$ si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $y \in A(p, x)$ se tiene que $d(p, x) = d(p, y) + d(x, y)$.

Por ejemplo, en $\mathbb{C}$, con la arco-estructura $A_{\mathbb{C}}$, la métrica euclidiana es radialmente $A_{\mathbb{C}}$-convexa en 0.

En el caso del círculo de Varsovia, pensemos en el punto $(0,1)$ y en una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que converja a $(0,1)$, que no esté contenida en el arco que va de $(0,1)$ a $(0,-1)$ y que además sea estrictamente creciente con el orden natural del rayo. Supongamos que hay una métrica radialmente convexa $d$ en $(0,1) \in \mathcal{W}$. Notemos que por ser radialmente convexa, $d((0,1), x_i) \geq d((0,1), x_0) > 0$, y por la continuidad de la métrica, $d((0,1),(0,1)) \geq d((0,1), x_0) > 0$ lo cual es una contradicción. Entonces $\mathcal{W}$ no tiene una métrica radialmente convexa en $(0,1)$. Ahora escojamos un punto $r \in \mathcal{W}$, distinto del $(0,1)$, y veamos que tampoco hay una métrica radialmente convexa en $r$. Para esto tomemos dos puntos distintos $p$ y $q$ que estén en el arco que va de $(0,1)$ a $r$ y también en el arco que va de $(0,1)$ a $(0,-1)$ y supongamos que $d$ es una métrica radialmente convexa en $r$. Tomemos dos sucesiones $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que converjan a $p$ y $q$, respectivamente, y que además sean crecientes en el orden natural del rayo. Notemos que, por la convergencia de las sucesiones, para todo $i$ podemos tomar $j, k \in \mathbb{N}$ con $i < j < k$ tales que $d(r, p_i) < d(r, q_j) < d(r, p_k)$. Por la continuidad de la métrica, $d(r, p) \leq d(r, q) \leq d(r, p)$, por lo que $d(r, p) = d(r, q)$ lo cual es una contradicción. Entonces el circulo de Varsovia no acepta métricas radialmente convexas en ningún punto.

Sin embargo, como veremos a continuación, las dendritas poseen una métrica que además es radialmente convexa en todos sus puntos. La construcción que presentamos se basa en darle una métrica radialmente convexa a la dendrita universal $D_\omega$. Esto lo haremos aprovechando que $D_\omega \subset \mathbb{C}$ y que la construimos uniendo arcos convexos cada vez más pequeños. Al lector tal vez le resulte conocida esta idea ya que es similar a la que se usa para definir la longitud de una curva rectificable en el plano.

**6.4** *Métrica radialmente convexa en una dendrita $X$.*

Recordemos que el teorema 5.2 nos dice que podemos pensar que existe una sucesión de árboles $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tales que $X_{i+1}$ se obtiene de $X_i$ agregándole un arco, $X_0$ es un conjunto de un punto y $X = \lim X_i$. Por la construcción de la dendrita universal 5.10 supongamos, spg, que para cada $i \in \mathbb{N}$, $Y_i = \overline{X_{i+1} - X_i}$ es un arco convexo en $\mathbb{C}$ y además $diam(Y_i) \leq \frac{1}{2^i}$.

Sean $x, y \in X$ distintos, como sabemos que todos los puntos de $xy - \{x, y\}$ son de corte y los puntos de $\overline{\bigcup X_i} - \bigcup X_i$ no son de corte, $xy - \{x, y\} \subset \bigcup X_i = \bigcup Y_i$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $Z_i(x, y) = xy \cap Y_i$ que es un arco convexo (o un punto o el vacío). Entonces definimos

$$d(x, y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(Z_i(x, y))$$

la cual sí converge ya que $diam(Z_i(x, y)) \leq diam(Y_i) \leq \frac{1}{2^i}$. Para demostrar que $d$ es una métrica, sólo nos falta comprobar la desigualdad del triángulo porque las demás propiedades se cumplen trivialmente.

Para hacer esto, primero probaremos que para cualesquiera 3 puntos $x, y, z$ con $z \in xy$, se tiene que $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$ lo cual también nos dará la convexidad radial desde cualquier punto. Para esto notemos que, por ser únicamente arcoconexas las dendritas, (o por la tercera propiedad de las arco-estructuras) se tiene que $Z_i(x, y) = Z_i(x, z) \cup Z_i(y, z)$ y además $Z_i(x, z) \cap Z_i(y, z) \subset \{z\}$ (podría ser vacío). Como además $Z_i(x, y)$ es un arco convexo (o un punto o el vacío), es claro que $diam(Z_i(x, y)) = diam(Z_i(x, z)) + diam(Z_i(y, z))$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, sumando, obtenemos lo que queríamos.

Para el caso general de la desigualdad del triángulo nos fijamos que existe un punto $p \in xy \cap xz \cap yz$ ($p$ es el primer punto de $xy$ que se encuentra cuando se camina desde $z$). Por lo que probamos previamente,

$$d(x,z) = d(z,p) + d(p,x) \leq d(z,p) + d(p,x) + 2d(p,y) = d(x,y) + d(y,z)$$

Entonces $d$ es una métrica radialmente convexa. Sin embargo, aún no sabemos que esta métrica genere la topología original de $X$. Llamemos $\tau$ a la topología de $\mathbb{C}$ restringida a $X$ y $\tau'$ la topología generada por la métrica $d$. Veamos ahora que $\tau = \tau'$.

($\tau \subset \tau'$) Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$ y un punto $x \in X$ tal que $\lim d(x, x_n) = 0$. Si tuvieramos que $|x - y| \leq d(x,y)$, para cualesquiera $x, y \in X$, sabríamos que $\lim |x - x_i| = 0$, que es lo que necesitamos.

Entonces probemos que $|x - y| \leq d(x,y)$, para cualesquiera $x, y \in X$. Notemos que si $i \neq j$, $Z_i(x,y) \cap Z_j(x,y)$ es a lo más un punto, y ese punto sería un extremo de ambos arcos. Además, por ser $X$ hu, $\bigcup_{k\leq i} Z_k(x,y)$ es un arco y, de hecho una poligonal, para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $Z_i(x,y)$ es no degenerado, a los extremos de este arco los podemos llamar $x_i$ y $y_i$, donde digamos, $x_i \leq_x y_i \leq_x y$. Entonces por la desigualdad del triángulo, el hecho de que los arcos definidos son convexos e inducción obtenemos

$$|x - y| \leq |x - x_i| + \sum_{k\leq i} diam(Z_k(x,y)) + |y - y_i|$$

Como esto ocurre para toda $i \in \mathbb{N}$ y además sabemos que si $i < j$, $\bigcup_{k\leq i} Z_k(x,y) \subset \bigcup_{k\leq j} Z_k(x,y)$, entonces $\lim x_i = x$ y $\lim y_i = y$. Entonces tomando el límite en la desigualdad anterior cuando $i \to \infty$, obtenemos

$$|x - y| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} diam(Z_k(x,y)) = d(x,y)$$

que era lo que queríamos.

($\tau' \subset \tau$) Sea una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $\lim |x_i - x| = 0$. Por la suavidad de $X$, tenemos que $\lim x_i x = \{x\}$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m+1}{2^m} < \epsilon$. Podemos entonces tomar un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $x_n x \subset B_{\frac{1}{2^{m-1}}}(x)$. Sean $n \geq N$, $i \in \mathbb{N}$, como $Z_i(x, x_n) \subset x_n x \subset B_{\frac{1}{2^{m-1}}}(x)$, tenemos que $diam(Z_i(x, x_n)) < \frac{1}{2^m}$, usemos esta desigualdad para $i < m$. También usemos que para $i \geq m$, $diam(Z_i(x, x_n)) < \frac{1}{2^i}$. Entonces

$$d(x_n, x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(Z_i(x, x_n)) = \sum_{i<m} diam(Z_i(x, x_n)) + \sum_{i\geq m} diam(Z_i(x, x_n))$$

$$< \frac{m-1}{2^m} + \sum_{i \geq m} \frac{1}{2^i} = \frac{m+1}{2^m} < \epsilon$$

Esto prueba que $\lim d(x, x_n) = 0$, que nos da la contención que nos faltaba.

Entonces la métrica $d$ cumple todas las propiedades que propusimos.

$\square$

Ahora, usando esta métrica podemos caracterizar a las dendritas. Notemos que si $d$ es una métrica convexa en $p$, para un continuo $X$, el conjunto $N(p, \epsilon) = \{x \in X : d(x, p) \leq \epsilon\}$ es un continuo convexo porque para cualquier punto $x \in N(p, \epsilon)$ y $y \in xp$, $d(p, y) \leq \epsilon$ (por lo que $y \in N(p, \epsilon)$).

Dados dos espacios parcialmente ordenados $X$ y $Y$, con los respectivos órdenes $\leq_1$ y $\leq_2$, a una función $f : X \to Y$ que cumpla que $x \leq_1 y$ implica que $f(x) \leq_2 f(y)$, le llamaremos $\leq_1^2$-función. También podemos decir que $f$ *preserva el orden*. Si además se cumple que $Y \subset X$, $\leq_2 = \leq_1|_{Y \times Y}$ y $f^2 = f$, a $f$ le llamaremos $\leq_1$-*retracción*. Ahora con esta terminología y la métrica radialmente convexa podemos dar la caracterización siguiente.

**Teorema 6.5** *Para un continuo no degenerado $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) existe una arco-estructura $A$ y para cada $p \in X$, existe una métrica radialmente $A$-convexa en $p$,*

*(3) existe una arco-estructura $A$ y para cada arco $A(p, x)$ existe una $\leq_p$-retracción suprayectiva $r : X \to A(p, x)$,*

*(4) existe una arco-estructura $A$ y para cada $p \in X$ existe una $\leq_p^0$-función (donde $\leq_0$ es el orden natural del arco $I$) $f : X \to I$ con $f(p) = 0$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Es claro por 6.4.

(2) $\Rightarrow$ (1) Veamos que $X$ es localmente $A$-convexo en cada punto, con esto y el teorema 6.3(4) obtendremos el resultado deseado. Para hacer esto sean

$p \in X$ y $U \in \tau$ con $p \in U$, sea $d$ la métrica $A$-convexa en $p$. Entonces notemos que existe $\epsilon > 0$ con $p \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(p) \subset N(p, \frac{\epsilon}{2}) \subset B_\epsilon(p)$. Esto nos da la $A$-convexidad local ya que $N(p, \frac{\epsilon}{2})$ es un continuo $A$-convexo que tiene en su interior a $p$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sea $d$ la métrica convexa definida en 6.4 y supongamos que $d(p,x) = 1$. Como $N(p,1)$ es una subdendrita, podemos encontrar la retracción natural $R : X \to N(p,1)$ que claramente preserva el orden $\leq_p$. Sea $g : I \to px$ la parametrización del arco $px$ tal que $g(t)$ es el único punto en el arco $px$ que está a distancia $t$ de $p$, claramente $g$ también preserva el orden y es continua. Notemos también que la función $d(p, \_) : X \to \mathbb{R}^+$ definida como $d(p, \_)(x) = d(p,x)$ es continua y preserva el orden ya que $d$ es convexa desde $p$. Entonces podemos definir $r : X \to px$ como $r(y) = g(d(p, R(y)))$ que como es composición de funciones continuas que preservan el orden, también será continua y preservará el orden. Además, por la definición de $g$, $r|_{px} = 1_{px}$, por lo que $r^2 = r$ y por lo tanto $r$ es la $\leq_p$-retracción buscada.

(3) $\Rightarrow$ (4) Escojamos $x \in X - \{p\}$ arbitrariamente y definamos $g : A(p,x) \to I$ una parametrización biyectiva con $g(p) = 0$ y $g(x) = 1$. Tomamos $r : X \to A(x,p)$ la $\leq_p$-retracción de la hipótesis. Entonces $f : X \to I$ definida por $f = g \circ r$ claramente es una $\leq_p$-función sobre $I$, donde $I$ tiene el orden natural de los reales, y $f(p) = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Probemos que para todo punto $x \in X$, $T_A(x) = \{x\}$ y con esto el teorema 6.3 nos dirá que $X$ es una dendrita. Sea $y \in X - \{x\}$ y $f : X \to I$ una $\leq_y$-función con $f(y) = 0$. Entonces llamemos $r = f(x) > 0$, como $f$ es una función continua, $f^{-1}([0, \frac{r}{2}])$ es un cerrado y $f^{-1}([0, \frac{r}{2}))$ es un abierto que cumplen:

$$y \in f^{-1}([0, \frac{r}{2})) \subset f^{-1}([0, \frac{r}{2}]) \subset X - \{x\}$$

Entonces si demostramos que $f^{-1}([0, \frac{r}{2}])$ es $A$-convexo, acabaremos. Para esto, tomamos $a, b \in f^{-1}([0, \frac{r}{2}])$, y $c \in A(a,b)$. Entonces como $c \in A(a,y) \cup A(y,b)$, spg digamos que $c \leq_y a$, de donde $f(c) \leq f(a) \leq \frac{r}{2}$, i.e., $f(c) \in [0, \frac{r}{2}]$. Esto nos da la contención $A(a,b) \subset f^{-1}([0, \frac{r}{2}])$ que era lo que faltaba para la convexidad y por lo tanto para $T_A(x) = \{x\}$.

$\square$

## 6.2. Dendroides

Ahora ya es buen momento de conocer a los dendroides. Un *dendroide* es un continuo hu y ac. De esta definición se pueden obtener resultados inmediatamente como son el hecho de que los dendroides son únicamente ac, que los subcontinuos de los dendroides son dendroides y además cac (definido en 2.2, antes del lema 2.18). Sucede que la retracción natural como la definimos con las dendritas se puede definir aunque no necesariamente resulta continua. En otras palabras, siempre que tengamos, en un dendroide $X$, un punto $p \in X$ y un subdendroide $Y \in C(X)$, podemos hablar del primer punto en $Y$ "moviéndonos" o "caminando" de $p$ a $Y$. Probemos un resultado que nos servirá más adelante y que no requiere más que nuestra primera observación.

**Lema 6.6** *En un dendroide $X$, si $U \subset X$ es un conjunto arcoconexo, entonces $\overline{U}$ se puede expresar como el límite de dendroides contenidos en $U$.*

*Demostración.* Sea $n \in \mathbb{N}$, como claramente $\overline{U}$ es compacto, podemos encontrar $n$ puntos $x_1, \ldots, x_{m_n}$ en $U$ con $U \subset \bigcup_{i=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n+1}}(x_i)$. Como $U$ es cac, y los dendroides son únicamente arcoconexos, la gráfica $G_n$ generada por los puntos $x_1, \ldots, x_{m_n}$ (es decir, el mínimo subcontinuo que contiene a estos puntos) cumple $G_n \subset U$ y $d(G_n, \overline{U}) \leq \frac{1}{n+1}$. Entonces los conjuntos $G_n$ son dendroides (son subcontinuos de $X$) que cumplen $\lim G_n = \overline{U}$, que era lo que buscábamos. $\square$

Ahora demos la caracterización más simple de las dendritas dentro de los dendroides.

**Teorema 6.7** *Para un continuo $X$ es equivalente ser un dendrita y ser un dendroide lc.*

*Demostración.* Ya sabemos que una dendrita es ac porque es lc y también ya sabemos que es hu. Entonces una dendrita es un dendroide. Como las circunferencias no son unicoherentes, los dendroides no contienen circunferencias. Entonces los dendroides lc son dendritas. $\square$

Ya dijimos que los dendroides tienen una arcoestructura única por ser únicamente ac. Entonces por el teorema 6.3(3) sabemos que los dendroides suaves en cada punto son dendritas. Sin embargo, podemos mejorar esta caracterización con un concepto más débil que la suavidad. Definamos, para un dendroide $X$ y un punto $p \in X$,

$$\mathscr{A}_p(X) = \{px \in C(X) : x \in X\}$$

es decir, el hiperespacio de arcos con punto terminal $p$. Diremos que $X$ es *debilmente suave* en $p \in X$ si el hiperespacio $\mathscr{A}_p(X)$ es compacto. La suavidad en $p$ implica la suavidad débil en $p$, como veremos a continuación. Con estas definiciones ya podemos formular nuestra siguiente caracterización.

**Teorema 6.8** *Para un dendroide $X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) $X$ es suave en todos sus puntos,*

*(3) $X$ es débilmente suave en todos sus puntos.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Es el teorema 6.3(3).

(2) $\Rightarrow$ (3) Por ser $X$ compacto, si tomamos una sucesión $(px_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con $x = \lim x_{i_k}$. Entonces, por la suavidad, $\lim px_{i_k} = px$ lo cual nos da la compacidad de $\mathscr{A}_p(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $Y$ es un continuo de convergencia de $X$, entonces existe una sucesión $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $Y = \lim Y_i$ y $Y \cap Y_i = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Además como $Y$ es no degenerado, podemos tomar dos puntos $p, q \in Y$ y por lo tanto dos sucesiones $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que cumplan $p_i, q_i \in Y_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y además $p = \lim p_i$, $q = \lim q_i$ ([Ill1, 4.4, p.70]). Por la arcoconexidad de $Y_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $p_iq_i \subset Y_i$, lo cual implica $p_iq_i \cap pq = \emptyset$. Tomemos un $r \in pq - \{p, q\}$ fijo, por ser $X$ únicamente ac, para todo $i \in \mathbb{N}$, existirán $s_i \in p_iq_i$ y $t_i \in pq$ tales que $s_it_i \cap p_iq_i = \{s_i\}$ y $s_it_i \cap pq = \{t_i\}$, es decir, $s_it_i$ es el único arco que une a $p_iq_i$ con $pq$. Dada $i \in \mathbb{N}$, en el caso que $t_i \in rq$, entonces $r \in pt_i \subset ps_i \subset pp_i$ y en el caso en que $t_i \in pr$, análogamente $r \in qq_i$. Como se cumplirá para alguno de los dos para una infinidad de índices $i$, supongamos, spg, que $r \in qq_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces ahora tomemos un $r' \in rq - \{r, q\}$. Como estamos suponiendo que $X$ es débilmente suave en todos sus puntos, el hiperespacio $\mathscr{A}_{r'}(X)$ es compacto. Así que podemos suponer que la sucesión $(r'q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converje a un arco de la forma $r'z$, para alguna $z \in X$. Fijándonos en el arco $q_iq$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y tomando el orden $q_i \leq_{q_iq} q$, obtenemos que $q_i \leq_{q_iq} r \leq_{q_iq} r' \leq_{q_iq} q$ lo cual

nos dice que $r \in r'q_i$ y por lo tanto $rq \subset \lim r'q_i = r'z$. Así que $r'p, r'q \subset r'z$, esto es imposible pues $r'q \cap r'q = \{r\}$. Entonces $X$ no contiene continuos de convergencia por lo que es lc y por lo tanto una dendrita.

$\square$

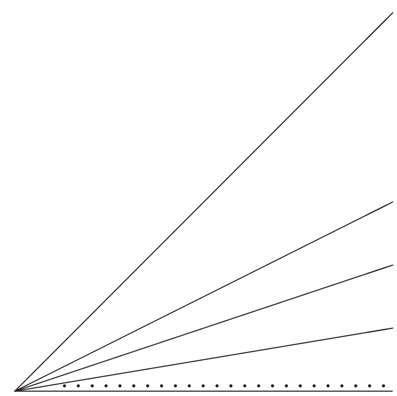

Figura 6.1: Abanico Armónico

El ejemplo clásico de un dendroide no lc es el *abanico armónico*, el cual está definido como $F_{\aleph_0} = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i}$ donde

$$Y_i = \left\{ \left( r, \frac{r}{i+1} \right) \in \mathbb{R}^2 : r \in I \right\}$$

y además

$$Y_0 = \lim Y_i = \left\{ \left( r, 0 \right) \in \mathbb{R}^2 : r \in I \right\}$$

Notemos que $F_{\aleph_0}$ es suave (y débilmente suave) en todos sus puntos menos en los de $Y_0 - \{(0,0)\}$. Tal vez el lector esté interesado en ver un dendroide que sea débilmente suave en un punto pero no suave en él, para verificar que realmente son conceptos distintos. Un ejemplo que sirve es el siguiente (figura 6.2).

Primero definamos $A_n = \{-\frac{1}{2^n}\} \times [0,1]$, $B_n = \{-\frac{1}{2^n}\} \times [1 - \frac{1}{2^n}, 1]$ para $n \in \mathbb{N}$, con esto sean $X_1 = ([-1,0] \times \{1\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ y $Y_1 = ([-1,0] \times \{1\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)$. Definamos $X_2$ ($Y_2$) como la reflexión de $X_1$ ($Y_1$) en el origen. Entonces definimos el dendroide $X = X_1 \cup X_2 \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Claramente $X$ no es suave en el $(0,0)$ pero sucede que $\mathscr{A}_{(0,0)}(X)$ es homeomorfo a $Y_1 \cup Y_2 \cup$

$(\{0\} \times [-1,1])$. Describiremos el homeomorfismo $f : \mathscr{A}_{(0,0)}(X) \to Y$. Para definirlo, tenemos que saber a dónde mandar el arco $\alpha_p$, que va del $(0,0)$ al punto $p \in X$. Primero definamos $f$ para $p \in X_1$ y si $p \in X_2$, $f(\alpha_{-p}) =$

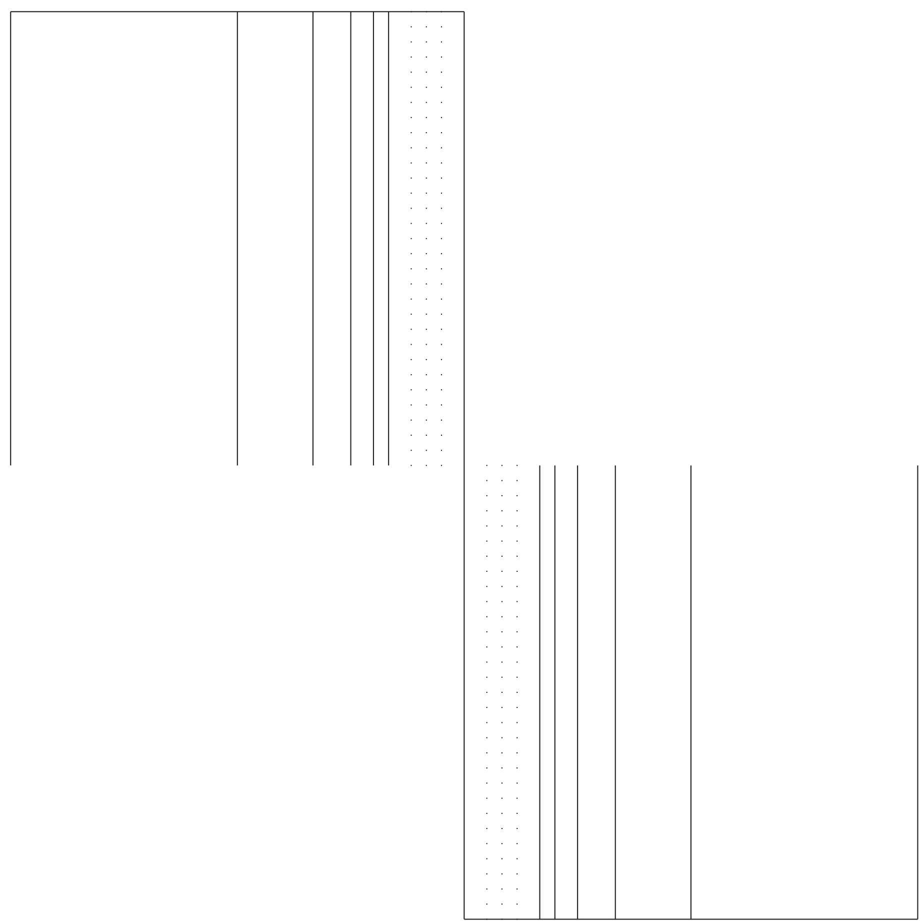

Figura 6.2: Dendroide no Suave pero sí Débilmente Suave

$-f(\alpha_p)$. Si $p \in X_1 - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, como $Y \subset X$, $f(\alpha_p) = p$ y si $p \in A_i$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_p)$ es el punto en $B_i$ que divide al segmento $B_i$ en la misma razón en la que $p$ divide a $A_i$. Para ver que $f$ es un homeomorfismo, se tendría que, por ejemplo, ver que las imágenes de las sucesiones que convergen a un punto convergen a la imagen de ese punto. El único caso que no es inmediato es el siguiente, (y el caso simétrico). Tomamos una sucesión $(\alpha_{p_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $p_i \in A_i$, es claro que $\lim \alpha_{p_i} = \{0\} \times [0,1]$, y si nos fijamos en las imágenes es claro que $\lim f(\alpha_{p_i}) = (0,1)$ que es el extremo de $\{0\} \times [0,1]$ distinto del origen. Por lo tanto $X$ es débilmente suave en $(0,0)$ pero no es suave en ninguno de sus puntos.

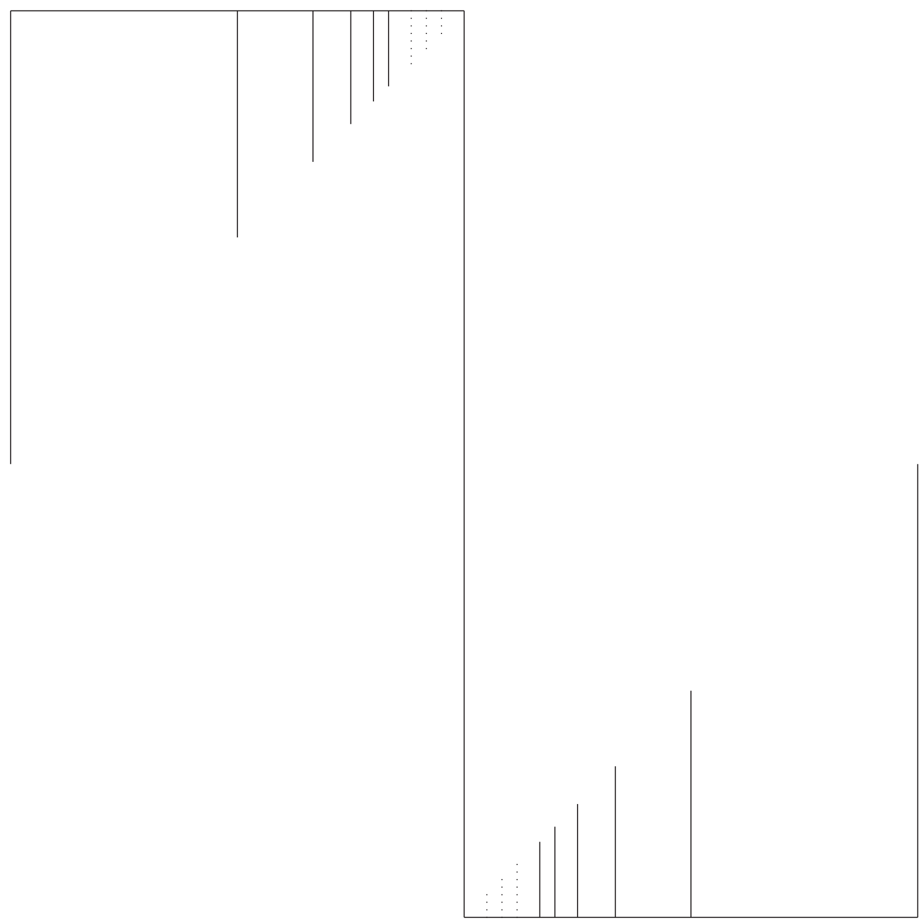

Figura 6.3: $\mathscr{A}_{(0,0)}(X)$ cuando $X$ es el Dendroide de la Figura 6.2

Ahora continuemos con una caracterización de las dendritas que relaciona la conexidad y la arcoconexidad de los dendroides. Notemos que las dendritas no son los únicos continuos en los cuales la conexidad y la arcoconexidad de sus subconjuntos coinciden, ya que tenemos el ejemplo de $\mathbb{S}^1$. Sin embargo, ocurre que dentro de los dendroides este hecho sí es una caracterización.

**Teorema 6.9** *Para un dendroide $X$ las siguiéntes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) los conjuntos conexos son arcoconexos,*

*(3) para cada punto $p \in X$ las arcocomponentes de $X - \{p\}$ son abiertas.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Es el teorema 2.11.

(1) $\Rightarrow$ (3) Es claro por el teorema 2.11 y el hecho de que las componentes de los abiertos en espacios lc son abiertas.

(2) ó (3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $X$ tiene un continuo de convergencia. Haremos una construcción que contradirá a las partes (2) y (3). Tomemos una sucesión $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $K = \lim K_i$ el continuo de convergencia con la sucesión que lo define. Tomemos dos puntos distintos $p, q \in K$ y dos sucesiones $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $X$ con $\lim p_i = p$, $\lim q_i = q$ y que cumplan, para toda $i \in \mathbb{N}$, $p_i \in K_i$ y $q_i \in K_i$ ([Ill1, 4.4, p. 70]). Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_iq_i \subset K_i$ y $pq \subset K$. Como los dendroides son únicamente ac, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un primer punto $r_i \in pq$ que está en el arco que conecta $pq$ con $p_iq_i$ (ya que son disjuntos). Claramente la sucesión $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $pq$ tendrá un punto de acumulación, supongamos, spg, que $r = \lim r_i$. Supongamos, spg, que $r \neq q$ y fijemos un punto $t \in rq - \{r\}$. Entonces podemos suponer, también spg, que $r_i \in pt - \{t\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Llamemos entonces $\alpha_i$ al arco que une $K_i$ y $pq$. Notemos que $r_i \in \alpha_i$. Entonces consideremos los conjuntos.

$$A = (pt - \{t\}) \cup \Big[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (K_i \cup \alpha_i)\Big]$$

$$B = qt - \{t\}$$

que se encuentran contenidos en arcocomponentes distintas de $X - \{t\}$, por ser $X$ únicamente ac. Sin embargo, cualquier abierto alrededor de $q$ intersecta a $A$ ya que $\lim q_i = q$ y $q_i \in A$, para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces la arcocomponente de $B$ no es abierta, lo cual contradice a (3). Además $A \cup B$ es conexo porque $B \subset \overline{A}$, pero no es arcoconexo, lo cual contradice a (2). $\square$

Lo siguiente que podemos observar es que, en los dendroides, no todos los puntos finales son terminales. Por ejemplo, en el abanico armónico, el punto $(1,0)$ claramente es final pero no es terminal. Diremos que en un dendroide $X$, un punto $x \in X$ es *orilla* si existe una sucesión de subdendroides $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tal que $\lim X_n = X$ pero $x \notin X_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Llamemos $\mathscr{S}(X)$ al conjunto de puntos orilla del dendroide $X$. Notemos que, en el abanico armónico, $Y_0 - \{(0,0)\} \subset \mathscr{S}(F_{\aleph_0})$ (con la notación de la definición). De hecho mencionaremos dos hechos muy importantes acerca de los puntos orilla.

**Lema 6.10** *Para cualquier dendroide $X$, $E(X) \subset \mathscr{S}(X)$.*

*Demostración.* Sean $x \in E(X)$, $n \in \mathbb{N}$ y $U_n \in \tau$ tales que $x \in U_n$, $bd_X(U_n) = \{p_n\}$, para alguna $p_n \in X$ y $diam(U_n) < \frac{1}{n+1}$. Podemos escribir $X - \{p_n\} = U_n|V_n$ por lo que $X - U_n$ es un subcontinuo (por el teorema 1.4) tal que $x \notin X - U_n$. Además $\lim(X - U_n) = X$ con lo cual $x \in \mathscr{S}(X)$. $\square$

Como dijimos en el ejemplo del abanico armónico, no siempre se da la igualdad de los conjuntos del enunciado del lema 6.10. Por eso a los puntos de $\mathscr{S}(X) - E(X)$ se les llama *orilla impropios*. Otra cosa que podemos asegurar de los puntos orilla es que no son de corte.

**Lema 6.11** *En un dendroide $X$, si $x \in \mathscr{S}(X)$ entonces $x$ no es de corte.*

*Demostración.* Supongamos que $X - \{x\} = A|B$ y además que tenemos una sucesión $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $\lim X_i = X$ y $x \notin X_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como cada $X_i$ es conexo, spg podemos pensar que $X_i \subset A$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\lim X_i \subset A \cup \{x\} \subsetneq X$ (pues $B$ es abierto) lo cual contradice la elección de la sucesión $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces $X - \{x\}$ es conexo. $\square$

Existe una propiedad más que nos ayudará a la caracterización de las dendritas. Se dice que un continuo $X$ tiene la *propiedad de Kelley* si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ con $d(a,b) < \delta$, y todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe un $B \in C(X)$ con $b \in B$ y $H_d(A,B) < \epsilon$. Primero notemos que los continuos lc cumplen esta propiedad.

**Lema 6.12** *Los continuos lc tienen la propiedad de Kelley.*

*Demostración.* Usemos que los continuos lc son ulc. Tomemos el $\delta > 0$ que sirva para la definición de ulc para $\epsilon > 0$. Ahora sean $x, y \in X$ con $d(x,y) \leq \delta$ y un $A \in C(X)$ con $x \in A$. Por la elección de $\delta$, existe un $K \in C(X)$ tal que $x, y \in K$ y $diam(K) < \epsilon$. Entonces $H_d(A, A \cup K) < \epsilon$, por lo que $A \cup K$ es el continuo buscado. □

Sin embargo, la clase de continuos con la propiedad de Kelley es mayor a la de los lc. Por ejemplo, el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley. Sin embargo, si le agregamos al abanico armónico el arco $[1,2]\times\{0\}$, el dendroide que obtenemos ya no tiene la propiedad de Kelley.

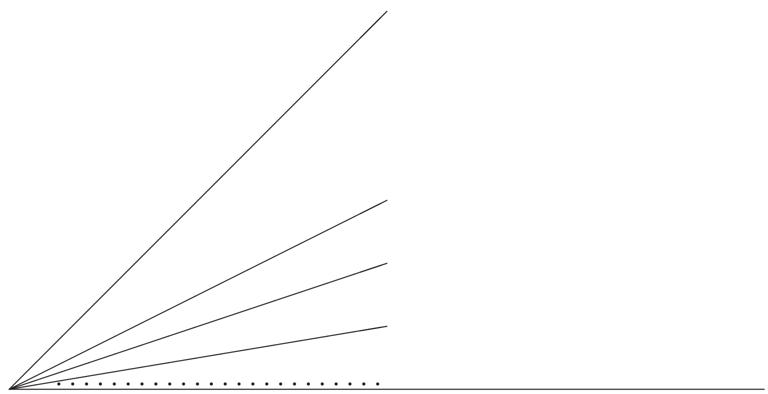

Figura 6.4: Dendroide que no tiene la Propiedad de Kelley

Ahora consideremos el siguiente resultado que nos ayudará en nuestra caracterización.

**Lema 6.13** *Si $X$ es un dendroide con la propiedad de Kelley y $p \in X$, entonces para cualquier arcocomponente $U$ de $X-\{p\}$ se cumple $U^o = U$ o $U^o = \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos que existen $v \in U^o$ y $u \in U - U^o$, con esto $uv \in U$. Sabemos entonces que existe un $r > 0$ tal que $B_r(v) \subset U$, con esto, tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}\min\{d(u,v), r, d(p,uv)\} > 0$. Para cada $\delta > 0$ sabemos que existe un $w_\delta \notin U$ tal que $d(u,w_\delta) < \delta$, entonces tomemos un $K_\delta \in C(X)$ cualquiera tal que $w_\delta \in K_\delta$. Veamos que $H_d(K_\delta, uv) > \epsilon$, tenemos dos casos.

Si $p \notin K_\delta$, como $w_\delta \in K_\delta$, $K_\delta$ está contenida en una arcocomponente de $X-\{p\}$ distinta a $U$, por lo que $K_\delta \cap B_r(v) = \emptyset$ y $H_d(K_\delta, uv) \geq r > \epsilon$.

Si $p \in K_\delta$, entonces $H_d(K_\delta, uv) > \epsilon$.

Esto contradice la propiedad de Kelley por lo que alguno de los puntos $u, v$ no existe, es decir $U^o$ es todo $U$ o el vacío. □

Con esto ya podemos dar caracterizaciones de las dendritas dentro de los dendroides en términos de las propiedades que hemos estudiado. Primero notemos que el sólo pedir la propiedad de Kelley o el pedir que no se tengan puntos orilla impropios no es suficiente para saber que es una dendrita.

Por ejemplo, ya mencionamos que el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley, notemos que podemos encontrar un subdendroide de $F_{\aleph_0}$ que es homeomorfo a $F_{\aleph_0} \cup (\{0\} \times [1,2])$ el cual ya vimos que, no tiene la propiedad de Kelley y además $F_{\aleph_0}$ tiene puntos orilla impropios. En el caso de los puntos orilla, el dendroide que se obtiene de unirle a $F_{\aleph_0}$ su reflexión en el origen, trasladada una unidad a la derecha en el eje $X$, no tiene puntos orilla impropios y no es una dendrita, notemos que contiene un subdendroide (presisamente $F_{\aleph_0}$) que tiene puntos orilla impropios.

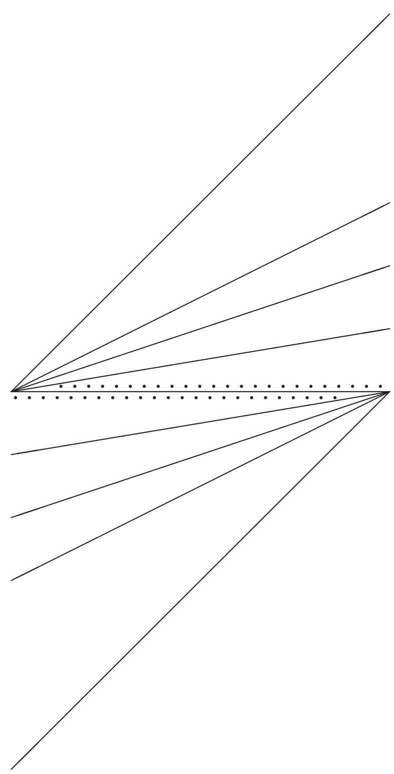

Figura 6.5: Dendroide no lc sin Puntos Orilla Impropios

Ahora veremos que si pedimos las dos propiedades juntas, o que se cumpla alguna de las dos en forma hereditaria obtenemos condiciones suficientes para asegurar que el dendroide en cuestión es dendrita. Sólo faltará probar la caracterización para la propiedad de Kelley hereditariamente lo cual haremos más adelante. Diremos que un dendroide $X$ es *puro* si ningún subdendroide de $X$ tiene puntos orilla impropios.

**Teorema 6.14** *Para un dendroide $X$ es equivalente*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) $X$ tiene la propiedad de Kelley y no tiene puntos orilla impropios,*

*(3) $X$ es puro.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2) Por el lema 6.12 las dendritas tienen la propiedad de Kelley y por el lema 6.11 los puntos orilla no son de corte, por lo que deben de ser terminales por el teorema 2.9(2).

(1) $\Rightarrow$ (3) Es claro por lo anterior y el hecho de que los subcontinuos de dendritas son dendritas.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $p \in X$ y $U$ una arcocomponente de $X - \{p\}$. De acuerdo con el teorema 6.9(3), tenemos que demostrar que $U \in \tau$. Supongamos, por el contrario, que $U \notin \tau$. Por el lema 6.13, tenemos que $U^o = \emptyset$. Sea $x \in U$, el conjunto $xp - \{p\}$ está contenido en $U$, tomamos un $y \in xp - \{p, x\} \subset U$ (ya que nos interesa que $y$ no sea un punto final) que cumplirá que $y \in X - E(X)$.

Ahora, spg, pensemos que $d(p, y) = 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n$ la componente de $X - B_{\frac{1}{n+1}}(y)$ que contiene a $p$. Como las componentes de los cerrados son cerradas, $C_n$ es un dendroide con $y \notin C_n$. Demostremos ahora que $\lim C_n = X$.

Como $C_{n+1} \supset C_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim C_i = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i}$ y sólo hay que ver que $X \subset \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i}$.

Si $z \in X - U$, como todos los puntos de $zp - \{p\}$ se pueden conectar a $z$ sin pasar por $p$, $zp \cap U = \emptyset$, así que $y \notin zp$, por lo que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{m+1}}(y) \cap zp = \emptyset$. Por lo tanto $z \in C_m$ lo cual nos dice $z \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i}$.

Si $z \in U$, como $U^o = \emptyset$, podemos tomar una sucesión $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $X - U$ con $\lim z_n = z$. Y ya sabemos por el caso anterior que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $z_m \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i}$ por lo que $z \in \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i}$.

Hemos demostrado que $X = \lim C_n$. Por lo tanto $y \in \mathscr{S}(X) - E(X)$ lo cual es una contradicción. Entonces $U \in \tau$ y por el teorema 6.9(3), $X$ es una dendrita.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $p \in X$ y supongamos que existe una arcocomponente $\alpha$ de $X - \{p\}$ que no es abierta. Consideremos dos casos para las arcocomponentes restantes de $X - \{p\}$.

El primer caso es cuando existe una de ellas, $\beta$, tal que $\overline{\beta} \cap \alpha \neq \emptyset$. Tomamos un $x \in \overline{\beta} \cap \alpha$ y notamos que $px - \{p\} \subset \overline{\beta} \cap \alpha$ (pues $\overline{\beta}$ es un dendroide que contiene a $p$ y a $x$). Entonces tomando $y \in px - \{p, x\}$ tenemos que $y \in \overline{\beta} - E(\overline{\beta})$ porque no es final de $\overline{\beta}$. Como además $\alpha \cap \beta = \emptyset$, tiene que darse que $y \in \overline{\beta} - \beta$, el lema 6.6 nos dice que $y \in \mathscr{S}(\overline{\beta}) - E(\overline{\beta})$. Esto es una contradicción al hecho de que $X$ es puro.

El segundo caso es en el que para toda arcocomponente $\beta$, de $X - \{p\}$, diferente de $\alpha$, se da que $\overline{\beta} \cap \alpha = \emptyset$. En este caso sea

$$B = \bigcup\{\beta : \beta \text{ es una arcocomponente de } X - \{p\}, \beta \neq \alpha\}$$

Como $\alpha$ no es abierta en $X$ y $X = B \cup \alpha \cup \{p\}$, podemos tomar $x \in \overline{B} \cap \alpha \subset (\overline{B} - B) \cap (X - \{p\}) \cap \alpha$. Como $p \in \overline{\beta}$, para cada arcocomponente de $X - \{p\}$ con $\beta \neq \alpha$, tenemos que $\overline{B}$ es conexo de manera que $px \subset \overline{\beta}$. De modo que $px - \{p\} \subset \overline{B} - B$. Tomemos $y \in px - \{x, p\}$ y una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $y_n \in \beta_n$ ($\beta_n \neq \alpha$), para cada $n \in \mathbb{N}$ ([Ill1, 4.4, p.70]) y $\lim y_n = y$. Claramente no puede haber una infinidad de componentes $\beta_n$ iguales pues en ese caso $y \in \overline{\beta_n} \cap \alpha$ lo cual sería una contradicción. Entonces, spg, podemos suponer que $\beta_n \neq \beta_m$ si $n \neq m$. Ahora definimos $M_n = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{\beta_i}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, que es un cerrado y arcoconexo ($p \in \overline{\beta_i}$, para toda $i \in \mathbb{N}$) disjunto con $\alpha$. Es decir, $M_n$ es un subdendroide y como además $M_{n+1} \supset M_n$, $M = \overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i} = \lim M_i$ es un dendroide. Además $y \in M - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, por lo que $y \in \mathscr{S}(M)$. Además claramente $p \in M$ por lo que $py \in M$. Sea $z \in py - \{p, y\}$ entonces $z \in ((\alpha - \{p\}) \cup M) - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, de manera que $z \in \mathscr{S}(M) - E(M)$ ya que es un punto que no es final de $M$. Esto también contradice nuestra suposición.

En conclusión, cada arcocomponente de $X - \{p\}$ debe de ser abierta y por el teorema 6.9(3), $X$ es una dendrita. $\square$

Vamos a definir un tipo especial de continuo y despues veremos que éstos tienen un subcontinuo que no tiene la propiedad de Kelley (cuando el espacio ambiente es un dendroide), lo cual nos ayudará para ver que las dendritas no pueden tener una copia de éste. Diremos que un continuo $S$ es un *pseudopeine* si existe un $A \in C(S)$, dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$, puntos $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$ y arcos $a_nb_n$ uniendo $a_n$ y $b_n$ tales que:

1. $S = A \cup (\bigcup\{a_nb_n : n \in \mathbb{N}\})$,
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_nb_n \cap A = \{b_n\}$,
3. Los arcos $a_nb_n$ son disjuntos dos a dos,
4. $A^* = \lim a_ib_i \subset A$,
5. $a \neq b$.

El ejemplo más simple de pseudopeine es el peine. Lo podemos definir en $\mathbb{R}^2$ como el conjunto:

$$C_0 = \Big([0,1] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times [0,1]\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n+1}\} \times [0,1]\Big).$$

Donde $A = ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1])$, $a_n = (\frac{1}{n+1}, 1)$ y $b_n = (\frac{1}{n+1}, 0)$.

Figura 6.6: Peine $C_0$.

La forma en la que relacionaremos los pseudopeines con las dendritas está resumido en el siguiente resultado que no probaremos.

**Lema 6.15** *Los continuos hereditariamente ac y no lc contienen pseudopeines.*

*Demostración.* Ver [Ill2, teorema 2]. $\square$

Justo este resultado nos sirve para la caracterización siguiente. Básicamente la idea es encontrar un subdendroide de un pseudopeine que no tenga la propiedad de Kelley. Por ejemplo, en el abanico armónico es facil encontrar un subdendroide, homeomorfo al de la figura 6.4, que no tiene la propiedad de Kelley.

**Teorema 6.16** *Un dendroide $X$ tiene la propiedad de Kelley hereditariamente si y sólo si es una dendrita.*

*Demostración.* Como todos los subcontinuos de las dendritas son lc (por ser dendritas) es claro que una dendrita tiene la propiedad de Kelley hereditariamente por el lema 6.12. Ahora supongamos que $X$ es un dendroide que tiene la propiedad de Kelley hereditariamente pero que no es lc. Por el teorema 6.15, tenemos que existe un pseudopeine $S \in C(X)$. Usemos la notación de la definición de pseudopeine. Sean $c, d \in ab$ tales que, tomando el orden del arco $ab$ en el que $b <_{ab} a$, $b < d < c < a$, y una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $S$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in a_n b_n$ y $\lim c_n = c$. Entonces $Z = A \cup (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} c_i b_i)$ es un subcontinuo ya que $\limsup c_i b_i \subset A_0 \subset A$.

Por hipótesis, $Z$ tiene la propiedad de Kelley, por lo que podemos encontrar dos sucesiones $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(Z)$ con $c_n \in E_n \cap F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $\lim E_n = ac$ y $\lim F_n = dc$. Escojamos un $\delta > 0$ tal que $B_{2\delta}(b) \cap ac = \emptyset$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $H(E_n, ac) < \delta$, y además $d(b_n, b) < \delta$. Entonces, si para algún $n \geq N$, $b_n \in E_n$, existiría un $t \in ac$ con $d(t, b_n) < \delta$, con lo cual tendríamos que $d(t, b) < 2\delta$ lo cual es una contradicción. Observemos que $c_n b_n - \{b_n\}$ es una de las arcocomponentes de $Z - \{b_n\}$ ya que $c_n b_n \cap [A \cup (\bigcup_{i\neq n} c_i b_i)] = \{b_n\}$ y $Z$ es únicamente arcoconexo. Por lo tanto, para todo $n \geq N$, $b_n \notin E_n$, como $c_n \in E_n$ y $b_n \notin E_n$, obtenemos que $E_n \subset c_n b_n$. Análogamente se prueba que existe un $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N'$, $F_n \subset c_n b_n$, y supongamos, spg, que $N = N'$.

Sabemos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_{2\epsilon}(a) \cap cd = B_{2\epsilon}(d) \cap ca = \emptyset$, tomemos $m \geq N$ tal que $H(E_m, ac) < \epsilon$ y $H(F_m, cd) < \epsilon$ y además $d(a_m, a) < \epsilon$. Como $E_m, F_m \in C(c_m b_m)$ y $c_n \in E_m \cap F_m$, sólo se pueden dar dos posibilidades.

($E_m \subset F_m$) En este caso, como exíste un $p \in E_m$ con $d(a, p) < \epsilon$ y ya que $p \in F_m$, existe un punto $q \in cd$ tal que $d(p, q) < \epsilon$ lo cual nos dice que $d(a, q) < 2\epsilon$ lo cual es una contradicción.

$(F_m \subset E_m)$ En este caso exíste un $p' \in F_m$ con $d(d, p') < \epsilon$, como $p' \in E_m$, existe un punto $q' \in ac$ tal que $d(p', q') < \epsilon$ lo cual nos dice que $d(d, q') < 2\epsilon$ lo cual es una contradicción.

Esta contradicción implica que $X$ es lc, es decir, que es una dendrita, que era lo que queríamos. $\square$

Cabe mencionar que existen continuos que tienen la propiedad de Kelley hereditaria y que no son dendroides, como ejemplo podemos mencionar a la circunferencia.

# Capítulo 7

# Funciones Especiales

En este capítulo daremos caracterizaciones de las dendritas en términos de retracciones.

## 7.1. Retractos

Las retracciones son funciones que son muy estudiadas en topología. De hecho, ya hemos hablado de la retracción natural a un continuo cuando hablamos de dendritas. En esta sección veremos que, precisamente las dendritas, son los únicos continuos tales que todos sus subcontinuos son retractos de ciertos tipos especiales.

En un espacio $X$, un conjunto $A \subset X$ se llama *retracto* si existe una función continua $f : X \to A$ tal que $f|_A = 1_A$, la cual se llama *retracción* sobre $A$. Si además la función $f$ es monótona, se llama *retracto monótono*.

En un espacio $X$, un conjunto $A \subset X$ se le llama *retracto por deformación* si existe una función continua $F : X \times I \to X$ tal que, para todo $x \in X$, $F(x, 0) = x$ y $F|_{X\times\{1\}}$ es una retracción sobre $A$. Además, si pedimos que para cualesquiera $t \in I$ y $x \in A$, $f(x, t) = x$ decimos que es un *retracto fuerte por deformación* .

Empecemos con dos resultados. El primero dice que las funciones monótonas preservan la unicoherencia y el segundo habla de los continuos que se pueden retraer a sus subcontinuos.

**Lema 7.1** *Si un continuo $X$ es unicoherente, $Y$ es un continuo y $f : X \to Y$ es una función continua monótona suprayectiva, entonces $Y$ es un continuo unicoherente.*

*Demostración.* Sean $A, B \in C(Y)$ tales que $Y = A \cup B$. Como $f$ es continua y monótona, el lema 5.4 nos dice que $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in C(X)$. Además sabemos que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, por la unicoherencia de $X$, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$ es un conexo. Como la imagen continua de un conexo es conexa, y $f$ es suprayectiva, $f(f^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$ es conexo. Esto termina la prueba de la unicoherencia de $Y$. $\square$

**Lema 7.2** *Si $X$ es un continuo tal que todos sus subcontinuos son retractos por deformación de $X$, entonces para cualquier $Y \in C(X)$, $Y$ también tiene todos sus continuos como retractos por deformación de $Y$.*

*Demostración.* Sean $Y \in C(X)$ y $Z \in C(Y)$, sabemos que existen funciones

$$f : X \times I \to X \text{ y}$$

$$g : X \times I \to X$$

tales que $f$ es continua, $f(x, 0) = x$, $f|_{X\times\{1\}}$ es una retracción sobre $Y$, $g$ es continua, $g(x, 0) = x$ y $g|_{X\times\{1\}}$ es una retracción sobre $Z$. Definimos $h : X \times X$, como $h(x, t) = g(f(x, t), t)$, tenemos que $h(x, 0) = g(f(x, 0), 0) = f(x, 0) = x$, $h(x, 1) \in Z$ para todo $x \in X$ y además si $z \in Z \subset Y$, $h(z, 1) = g(f(z, 1), 1) = g(z, 1) = z$ lo cual nos dice que $h$ es la retracción por deformación buscada. $\square$

En un pseudopeine $S$, con la notación de la definición dada antes del lema 6.15, dado $\epsilon \in (0, d(a, b))$, diremos que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *$\epsilon$-sucesión* si para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in a_nb_n$ y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $d(c_n, a) < \epsilon$. Ahora probemos un resultado acerca de los pseudopeines que tienen a todos sus subcontinuos como sus retractos.

**Lema 7.3** *En un pseudopeine $X$, con la notación de la definición dada antes del lema 6.15, supongamos que todo $Y \in C(X)$ es un retracto de $X$ y sea $\epsilon > 0$, con $\epsilon < d(a, b)$. Cada vez que tomemos una $t$-sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t < \epsilon$, y un $s \in (t, \epsilon)$, existen dos sucesiones $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

*(a)* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una $s$-sucesión.*

*(b) Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $d_n \in a_nb_n$.

*(c) Existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$, entonces $a_n \leq c_n < d_n < e_n < b_n$ y $d(a, d_n) \geq \epsilon$.*

*Demostración.* Usemos la misma notación que en la definición de pseudopeine. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $d(c_n, a) < t$ y $d(b_n, b) < \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon)$. Para $n < N$, escogemos $d_n \in c_n b_n$ arbitrariamente. Sea $n \geq N$, si ocurriera que $d(a, b_n) < \epsilon$, tendríamos que

$$d(a,b) \leq d(a,b_n) + d(b,b_n) < \epsilon + \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon) = \frac{1}{3}d(a,b) + \frac{2}{3}\epsilon < d(a,b)$$

lo cual es una contradicción. Concluimos que $d(a, b_n) \geq \epsilon$. De manera que podemos escoger un punto $d_n \in c_n b_n$ como el primer punto caminando de $c_n$ a $b_n$ con $d(a, d_n) = \epsilon$.

Claramente, si definimos $Y = A \cup (\bigcup\{b_n d_n : n \in \mathbb{N}\})$, $Y$ es un subdendroide de $X$ por lo que, por hipótesis, existe una retracción suprayectiva, $r : X \to Y$. Tomemos un $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon)$ y $\delta$ funciona para la continuidad uniforme de $r$ para el número positivo $\frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon)$. Tomemos $K \geq N$ tal que si $n \geq K$, $H(a_n b_n, A^*) < \delta$.

Para $n \geq K$, definimos $e_n = r(c_n)$ y para el resto elegimos $e_n \in b_n d_n$ arbitrariamente. Nos gustaría ver que, si $n \geq K$, se cumple que $e_n \in b_n d_n - \{b_n\}$, para esto probaremos que, para cada $n \geq K$, tenemos que $r(c_n d_n) \subset d_n b_n - \{b_n\}$.

Sean $n \geq K$ y $x \in c_n d_n$, como $H(a_n b_n, A^*) < \delta$, existe un $y \in A^* \subset Y$ tal que $d(x,y) < \delta$, por lo que $d(r(x), y) = d(r(x), r(y)) < \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon)$. Pero por la elección de $d_n$, $d(x, a) < \epsilon$ por lo que la desigualdad del triángulo nos dice que

$$d(a, r(x)) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(y, r(x)) < \epsilon + \delta + \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon) <$$

$$\frac{2}{3}(d(a,b) - \epsilon) + \epsilon = \frac{2}{3}d(a,b) + \frac{1}{3}\epsilon$$

Como $d(b, b_n) < \frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon)$, si tuviéramos que $r(x) = b_n$, entonces

$$d(a,b) \leq d(b, r(x)) + d(r(x), a) = d(b, b_n) + d(r(x), a) <$$

$$\frac{1}{3}(d(a,b) - \epsilon) + \frac{2}{3}d(a,b) + \frac{1}{3}\epsilon = d(a,b)$$

lo cual es una clara contradicción. Hemos demostrado que $b_n \notin r(c_n d_n)$. Observemos que $d_n d_n - \{b_n\}$ es una de las arcocomponentes de $Y - \{b_n\}$ ya que $d_n b_n \cap [A \cup (\bigcup_{i \neq n} d_i b_i)] = \{b_n\}$ y $Y$ es únicamente arcoconexo. Como $r(d_n) = d_n$, tenemos que $r(c_n d_n) \subset b_n d_n - \{b_n\}$.

Entonces $e_n \in b_n d_n - \{b_n\}$, veremos que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $s$-sucesión. Supongamos que no y que existe una subsucesión $(e_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ con $d(a, e_{n_i}) \geq s$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces, spg, supongamos que $c = \lim c_{n_i}$, por la continuidad de $r$, $\lim e_{n_i} = r(c) = c$ ya que $c \in A \subset Y$. Con esto obtenemos que $d(a, c) \geq s > t$. Sin embargo, como $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $t$-sucesión, sabemos que, si $n \geq N$, $d(c_n, a) < t$ y con ésto, por convergencia de la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenemos que $d(c, a) \leq t$. Por lo tanto obtuvimos una contradicción con lo que podemos concluir la condición $(c)$, que es la condición que nos faltaba. $\square$

Ahora estamos listos para probar el siguiente resultado.

**Lema 7.4** *En un pseudopeine $X$, no todos sus subcontinuos son retractos por deformación de $X$.*

*Demostración.* Usemos la misma notación que en la definición de pseudopeine. Supongamos que $F : X \times I \to X$ es una retracción por deformación sobre $A$ y que todos los subcontinuos de $X$ son retractos de $X$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2}d(a, b)$. Sea $r > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, $p, q \in I$, tales que $\max\{d(x, y), |p - q|\} \leq r$, se tenga que $d(F(x, p), F(y, q)) < \epsilon$, es decir, aplicamos la continuidad uniforme de $F$ usando la métrica del máximo. Sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $2rL > 1$. A continuación mostraremos que el lema 7.3 se puede aplicar sucesivamente para encontrar sucesiones

$$(c_n^0)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (c_n^L)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (d_n^L)_{n\in\mathbb{N}}$$

tales que

1. $c_n^0 = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
2. para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$, $(c_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una $\frac{\epsilon(i+1)}{2(L+1)}$-sucesión,
3. para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $d_n^i \in a_n b_n$,
4. existe un $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq M_0$, $a_n \leq c_n^0 < d_n^1 < c_n^1 < \cdots < d_n^L < c_n^L < b_n$,
5. si $n \geq M_0$, entonces para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$, $d(d_n^i, a_0) \geq \epsilon$.

Veamos cómo estas sucesiones se pueden construir inductivamente. El primer paso es escoger $(c_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$ como en (1) y notemos que, trivialmente, ésta es una $\frac{\epsilon}{2(L+1)}$-sucesión, ya que $\lim a_n = a$. Ahora supongamos que tenemos definidas las sucesiones $(c_n^0)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (c_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (d_n^{k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (si $k = 0$ sólo tenemos a $(c_n^0)_{n\in\mathbb{N}}$) para alguń $k$ con $0 \leq k < L$. Entonces podemos aplicar el lema 7.3 con $\epsilon$, $t = \frac{\epsilon(k+1)}{2(L+1)}$ y $s = \frac{\epsilon(k+2)}{2(L+1)}$. Por hipótesis de inducción, la sucesión $(c_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ es una $t$-sucesión. Así que podemos encontrar una $s$-sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplen las propiedades $(b)$, $(c)$ y $(d)$ del lema 7.3. Entonces hagamos, para toda $n \in \mathbb{N}$, $e_n = c_n^{k+1}$ y $d_n^{k+1} = d_n$. Entonces las sucesiones que construimos cumplen las propiedades que queremos, lo único que podríamos dudar es la existencia de $M_0$ en las condiciones (4) y (5). Sin embargo, como sólo hicimos el paso inductivo una cantidad finita de veces, en cada paso la condición $(c)$ del lema 7.3 nos da un entero positivo $M$, que depende de qué paso estemos haciendo. Basta con tomar $M_0$ como el máximo de estos enteros positivos y se cumplirán las condiciones que faltan.

Sea entonces $n^* \geq M_0$ tal que $d(a, a_{n^*}) < r$ y además para todo $i \in \{0, 1, \ldots, L\}$, $d(a, c_{n^*}^i) < \frac{\epsilon(i+1)}{2(L+1)}$. Como $F(a_{n^*}, 0) = a_{n^*}$ y $F(a_{n^*}, 1) \in A$, como el único arco que va de $a_{n^*}$ a $A$ es $a_{n^*}b_{n^*}$, debe existir un $s_1 \in I$ tal que $F(a_{n^*}, s_1) = d_{n^*}^1$, el cual es un punto en el arco $a_{n^*}b_{n^*}$. Análogamente debe existir un $t_1 \in [s_1, 1]$ tal que $F(a_{n^*}, s_1) = c_{n^*}^1$. Usando este procedimiento, por inducción podemos encontrar números

$$0 \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \ldots \leq s_L \leq t_L \leq 1$$

tales que $F(a_{n^*}, s_i) = d_{n^*}^i$ y $F(a_{n^*}, t_i) = c_{n^*}^i$, para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$. Como $d(a, d_{n^*}^i) \geq \epsilon$ y $d(a, c_{n^*}^i) < \frac{\epsilon}{2}$, obtenemos que $d(c_{n^*}^i, d_{n^*}^i) > \frac{\epsilon}{2}$ por la desigualdad del triángulo. Por la elección de $r$, $t_i - s_i \geq r$ y análogamente, $d(c_{n^*}^{i-1}, d_{n^*}^i) > \frac{\epsilon}{2}$ por lo que $s_i - t_{i-1} \geq r$ para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$. Entonces tenemos las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} s_1 & \geq & r \\ t_1 - s_1 & \geq & r \\ \cdots & & \\ t_L - s_L & \geq & r \end{array}$$

Sumando estas desigualdades obtenemos $1 \geq t_L \geq 2Lr$ lo cual es una contradicción con la elección de $L$. Entonces $A$ no es un retracto por deformación de $X$. $\square$

Con esto ya podemos escribir otra caracterización de dendritas que habla de retractos.

**Teorema 7.5** *Para un continuo $X$ las siguientes condiciones son equivalentes*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) para todo $Y \in C(X)$, $Y$ es retracto monótono de $X$,*

*(3) para todo $Y \in C(X)$, $Y$ es retracto por deformación de $X$,*

*(4) para todo $Y \in C(X)$, $Y$ es retracto fuerte por deformación de $X$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2), (3) y (4) Sea $r : X \to Y$ la retracción natural sobre $Y$ y $d$ una métrica radialmente convexa para $X$. Definimos $f : X \times I \to X$, para cada $(x, t) \in X \times I$, diciendo que $f(x, t)$ es el único punto en el arco $xr(x)$ tal que $d(f(x, t), r(x)) = (1 - t)d(r(x), x)$. Primero notemos que $f(x, 0)$ está a la misma distancia de $r(x)$ que $x$ por lo que son el mismo punto, es decir, $f(x, 0) = x$. Si $x \in Y$, $x = r(x)$ y por lo tanto, para toda $t \in I$, $f(x, t) = r(x) = x$. Además para todo $x \in X$, $f(x, 1) = r(x)$, por lo que, si probamos que $f$ es continua, lo cual haremos más tarde, también la función $f$ será una retracción fuerte por deformación y además $f|_{X\times\{1\}} = r$, que es monótona ya que para cualquier $y \in Y$, $r^{-1}(y)$ es la unión de $\{y\}$ con las arcocomponentes de $X - \{y\}$ que no intersectan a $Y$ (esta unión es un conexo por el teorema 1.4).

Para mostrar que $f$ es continua, sea $((x_i, t_i))_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X \times I$ tal que $\lim x_i = x$ y $\lim t_i = t$. Como $d$ y $r$ son continuas, $\lim r(x_i) = r(x)$ y por lo tanto $\lim d(r(x_i), x_i) = d(r(x), x)$. Llamemos $z \in X$ a algún punto de acumulación de $(f(x_i, t_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces por lo anterior $d(z, r(x)) = (1-t)d(r(x), x)$. Pero además la suavidad nos dice que $z \in \lim x_i r(x_i) = xr(x)$. Como la métrica es radialmente convexa, el punto de $xr(x)$ que cumple la igualdad $d(z, r(z)) = (1 - t)d(r(x), x)$ es único así que $z = f(x, t)$. Entonces como cualquier punto de acumulación cumple esto y $X$ es compacto, $\lim f(x_i, t_i) = f(x, t)$. Por lo tanto $f$ es continua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Primero probemos que $X$ es hu. Para esto, recordemos que por el lema 7.1, es suficiente ver que $X$ es unicoherente ya que todos los subcontinuos de $X$, por ser retractos monótonos serán unicoherentes. Entonces supongamos que existen $A, B \in C(X)$ con $X = A \cup B$ y $A \cap B$ disconexo. Sea $f : X \to A$ una retracción monótona sobre $A$ y tomemos $x \in f(B) - B$, este punto existe ya que, si $f(B) \subset B$, $f(B)$ sería un conjunto conexo con $f(B) \subset A \cap B \subset f(B)$ lo cual es una contradicción. Entonces $f^{-1}(x) \in C(X)$ y como $x \in A$, $x \in f^{-1}(x)$. Pero también, por definición, existe un $y \in B$ tal que $f(y) = x$, como $f(y) \neq y$, tenemos que $y \notin A$. Entonces $x \in f^{-1}(x) \cap (A - B)$ y $y \in f^{-1}(x) \cap (B - A)$. Ya que $A - B$ y $B - A$ son conjuntos separados, la conexidad de $f^{-1}(x)$ implica que existe un punto $z \in A \cap B \cap f^{-1}(x)$, pero $z \in A$ nos dice que $f(z) = z$ lo cual no es posible porque $z \neq x$. Esto prueba la unicoherencia de $X$.

Ahora veamos que $X$ es cik en todos sus puntos. Supongamos que esto no ocurre. Sea $p \in X$ tal que $X$ no es cik en $p$, entonces existe un $W \in \tau$ con $p \in W$ tal que si $C_1$, es la componente de $W$ que tiene a $p$, se cumple que $p \in C_1 - C_1^o$. Sea $U \in \tau$ tal que $p \in U \subset \overline{U} \subset W$ y sea $C$ la componente de $\overline{U}$ que tiene a $p$. Como $C \subset C_1$, tenemos que $p \in C - C^o$. Consideremos una retracción $r : X \to C$. Sea $V = f^{-1}(U \cap C) \cap U$, entonces $V \in \tau$ y $p \in V$. Tomemos $x \in V - C$, esto se puede porque si $V \subset C$, entonces $p \in V \subset C$ lo cual es una contradicción. Sea $K = f^{-1}(f(x))$, entonces $K \in C(X)$ y se cumple que $x \in K$. Además, como $X$ es hu, $C \cap K$ es un conexo y como además $C$ es componente de $\overline{U}$, es un conexo máximo contenido en $\overline{U} \cap K$, es decir, una de las componentes de $\overline{U} \cap K$. Notemos que $f(x) \in C \cap K$ por lo cual $C \cap K \neq \emptyset$. Entonces, usando el teorema de GF, para el continuo $K$, el hecho de que $K \cap C = \{f(x)\}$ (ya que $r|_C = 1_C$) y el hecho de que $bd_K(\overline{U} \cap K) \subset bd_X U$, obtenemos que

$$\emptyset \neq C \cap K \cap bd_K(\overline{U} \cap K) \subset \{f(x)\} \cap bd_X U$$

lo cual implica que $f(x) \subset bd_X(U)$. Pero como $x \in V$, $f(x) \in U$ y entonces $U \cap bd_X(U) \neq \emptyset$, esto es imposible pues $U$ es abierto. Esta contradicción nos dice que $X$ es cik en todos sus puntos y por lo tanto lc.

Por lo tanto $X$ es una dendrita.

(4) $\Rightarrow$ (3) Es claro de la definición.

(3) $\Rightarrow$ (1) Primero veamos que $X$ es hereditariamente arcoconexo. Como las retracciones conservan la conexidad por arcos, es suficiente ver que $X$ es ac.

Sean $p, q \in X$, sabemos que existe una función continua $f : X \times I \to X$ con $f(x, 0) = x$ para todo $x \in X$ y $f(X \times \{1\}) = \{p\}$. Entonces $f(\{q\} \times I)$ es un subcontinuo de Peano que contiene a $\{p, q\}$. Entonces, si $p \neq q$, existe un arco $\alpha \in C(X)$ tal que $\alpha \subset f(\{q\} \times I) \subset X$ que va de $p$ a $q$, lo cual nos da la arcoconexidad.

Ahora veamos que $X$ es hu. Demostremos primero que $X$ es unicoherente. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $X = A \cup B$, tomemos $p, q \in A \cap B$, con $p \neq q$, sabemos que lo podemos hacer ya que si $A \cap B$ tuviera menos de dos puntos tendríamos que $A \cap B$ es conexo y no nos interesa ese caso. Por lo que acabamos de ver existen arcos $\alpha, \beta \in C(X)$ que van de $p$ a $q$ con $\alpha \subset A$ y $\beta \subset B$. Si $\alpha = \beta$, ya tenemos que $p$ y $q$ se pueden conectar por un arco en $A \cap B$. Si $\alpha \neq \beta$, por el lema 2.1, existe $\mathbb{S}^1 \subset X$, donde $\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a una circunferencia. Por el lema 7.2, todos los subcontinuos de $\mathbb{S}^1$ son retractos por deformación de $\mathbb{S}^1$. Como en particular los puntos son subcontinuos de $\mathbb{S}^1$ tendríamos que $\mathbb{S}^1$ es contraible, esto es una contradicción. Entonces $A \cap B$ es arcoconexo. Ahora sólo notemos que es suficiente probar esto. Por el lema 7.2, cualquier subcontinuo $Y \in C(X)$ también tendrá, al igual que $X$, todos sus subcontinuos como retractos por deformación. Entonces se puede usar un argumento igual al anterior para probar que $Y$ es unicoherente. Entonces $X$ es hu.

Por lo tanto $X$ es un dendroide, si suponemos que $X$ no es de Peano, el teorema 6.15 nos dice que $X$ contiene un pseudopeine $Y$. Pero el lema 7.4 nos dice que $Y$ no tiene a todos sus continuos como retractos por deformación. Esto contradice al lema 7.2 con lo que concluimos que $X$ es lc y por lo tanto una dendrita.

□

## 7.2. Selecciones

Dado un continuo $X$ y uno de sus hiperespacios $H(X)$ (puede ser $2^X$, $C(X)$ o algunos otros que no hemos mencionado en este trabajo), una *selección* para $H(X)$ es una función continua $f : H(X) \to X$ tal que para todo $K \in H(X)$, se tiene que $f(K) \in K$. En particular se sabe que las selecciones para hiperespacios distintos a $C(X)$ sólo existen para $I$ como se puede consultar en [Ill1, Corolario 10.4, p. 143]. Entonces las únicas selecciones que vale la pena estudiar con más detalle son las selecciones para $C(X)$. Nuestro primer resultado es que no existen selecciones para la circunferencia.

**Lema 7.6** *No existe una seleccion para el hiperespacio de subcontinuos de la circunferencia.*

*Demostración.* En [Ill1, ejemplo 3.2, p. 31] podemos encontrar la discusión de un modelo para $C(\mathbb{S}^1)$. Éste nos dice que si pensamos en $\mathbb{C}$ y consideramos, la función $f : C(\mathbb{S}^1) \to \overline{B_1(0)}$ definida por $f(\{p\}) = p$, $f(\mathbb{S}^1) = 0$ y, si $A$ es un arco con extremos $a, b$, $f(A)$ es un punto a distancia $1 - \frac{\ell(A)}{2\pi}$ del centro y es tal que el rayo que parte del 0 y pasa por $f(A)$ pasa por el punto medio de $A$, $\overline{0f(A)}$ y $\overline{ab}$ son perpendiculares, donde $\ell(A)$ es el ángulo que abarca el arco $A$. Entonces la función es un homeomorfismo y, claramente, con este modelo, si $g : C(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{S}^1$ es una selección para la circunferencia, entonces $g \circ f^{-1} : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{S}^1$ es una retracción del disco unitario sobre la circunferencia, lo cual contradice a [W, 34.5, p. 236]. Entonces no existe una selección para $\mathbb{S}^1$ que era lo que queríamos. $\square$

Con ayuda de este resultado se puede demostrar que los dendroides son los únicos continuos que pueden tener selecciones para su hiperespacio de subcontinuos, como se muestra en [Ill1, teorema 10.10, p. 145]. Sin embargo, a nosotros sólo nos interesa nuestra siguiente caracterización, con lo cual es suficiente conocer el resultado anterior.

**Teorema 7.7** *Para un continuo lc $X$, existe una selección para $C(X)$ si y sólo si $X$ es una dendrita.*

*Demostración.* Si $X$ es un continuo lc que acepta una selección para $X$, entonces existe $f : C(X) \to X$ tal que $f(Y) \in Y$ para cada $Y \in C(X)$. Supongamos que $X$ contiene un subcontinuo $\mathbb{S}^1$ el cual es homeomorfo a la circunferencia. Notemos que $f(C(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{S}^1$, ya que $f$ es una selección, por lo que $f|_{C(\mathbb{S}^1)}$ sería una selección para $\mathbb{S}^1$, lo cual contradiría al lema 7.6. Entonces $X$ es una dendrita.

Si $X$ es una dendrita, vamos a definir una función $f : C(X) \to X$ que será una selección. Sea un punto $p \in X$ fijo. Para cada $Y \in C(X)$ sabemos que podemos definir la retracción natural $r_Y : X \to Y$, entonces definimos $f(Y) = r_Y(p)$. Veamos que $f$ es continua en cada elemento $Y^* \in C(X)$, para esto sea $\epsilon > 0$ y sea $x = f(Y^*)$. Podemos considerar dos casos.

<u>Caso 1. $p \notin Y^*$</u>. Entonces $x \neq p$, por lo que podemos escoger un conexo $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset X - \{p\}$ y $diam(U) < \epsilon$. Como $px \cap Y^* = \{x\}$, $px - U \subset X - Y^*$, por lo cual podemos escoger, para cada $y \in Y^*$ una

vecindad conexa $V_y \in \tau$ tal que $y \in V_y$ y $diam(V_y) < \text{mín}\{\epsilon, d(y, px - U)\}$. Por la compacidad de $Y^*$, podemos tomar una subcubierta finita de $Y^*$ con estos abiertos de tal manera que $< V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} >$ es una vecindad básica, con la topología de Vietoris, de $Y^*$ y podemos pedir, spg, que $V_{y_1} = U$.

Sea $Y \in < V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} > \cap C(X)$, tomemos un $w \in Y \cap U$. Claramente $f(Y) \in pw \subset px \cup U$. Como $f(Y) \in Y \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ y para todo $i > 1$, $V_{y_i} \cap (px - U) \neq \emptyset$, forzosamente $f(Y) \in U$. Por lo tanto $d(f(Y), f(Y^*)) < \epsilon$, con lo que obtenemos la continuidad en este caso.

Caso 2. $p \in Y^*$. Entonces $p = x$. Recordamos que las dendritas son ulac, así existe un $\delta > 0$ que cumple la definición para el número $\epsilon$, que ya habíamos tomado. Para cada $y \in Y^*$, tomemos una vecindad conexa $V_y \in \tau$ de $y$ tal que $diam(V_y) < \delta$. Por la compacidad de $Y^*$, podemos encontrar una subcubierta finita de $Y^*$ usando de estos abiertos. Notemos que

$$< V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} >$$

es una vecindad básica, con la topología de Vietoris de $Y^*$. Tomemos $Y \in < V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} >$ y $w \in Y \cap V_{y_1}$, entonces $diam(pw) < \epsilon$ y como claramente $r_Y(p) \in pw$, se tendrá que $d(f(Y), f(Y^*)) < \epsilon$. Esto nos da la continuidad en este caso.

Por lo tanto, la función definida es una selección para $C(X)$. □

## 7.3. Subcontinuo Mínimo

Normalmente no podemos hablar en general de un subcontinuo menor que contenga a un cerrado. Por ejemplo, dados dos puntos en $\mathbb{C}$, cualquier arco entre ellos dos es un subcontinuo mínimo que los contiene, sin embargo, no es único. Sucede que para los continuos hu sí existe este mínimo. Primero veamos que existen los subcontinuos mínimos.

**Lema 7.8** *Dado un continuo $X$, para cualquier $A \in 2^X$ existe un $B \in C(X)$ tal que $A \subset B$ y si $C \in C(X)$ tal que $A \subset C \subset B$, entonces $C = B$.*

*Demostración.* Usemos el teorema de reducción de Brouwer pero para elementos mínimos. Sea $(M_i)_{i \in I}$ una familia totalmente ordenada por la inclusión tal que $A \subset M_i$ para todo $i \in I$. Sabemos, por el teorema 1.1, que $\bigcap_{i \in I} M_i \supset A$ es un continuo por lo que podemos aplicar el teorema de reducción de Brouwer y obtener el resultado deseado. □

Ahora usemos la unicoherencia hereditaria para definir una función de subcontinuo menor.

**Lema 7.9** *Un continuo $X$ es hu si y sólo si para todo $A \in 2^X$, $A^* = \bigcap\{M \in C(X) : A \subset M\} \in C(X)$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es hu. Como existen los subcontinuos mínimos supongamos que dado $A \in 2^X$ tenemos un subcontinuo mínimo $N$ que contiene a $A$. Sea $N' \in C(X)$ tal que $A \subset N'$. Por la unicoherencia hereditaria, $A \subset N \cap N' \in C(X)$, lo cual implica que $N = N' \cap N$. Entonces $N \subset N'$. De manera que $N = \bigcap\{M \in C(X) : A \subset M\}$, que era lo que queríamos.

Ahora supongamos que, para cualquier $Y \in 2^X$, $Y^* \in C(X)$, sean $A, B \in C(X)$, veamos que $A \cap B$ es conexo. Supongamos que $A \cap B \neq \emptyset$. Por hipótesis $(A \cap B)^* \in C(X)$, como $A$ y $B$ son subcontinuos que contienen a $A \cap B$, por definición, $(A \cap B)^* \subset A \cap B$. Pero por definición, se da la otra contencion por lo que se da la igualdad, i.e., $A \cap B \in C(X)$. □

Para $X$ hu, si definimos $M : 2^X \to C(X)$ como

$$M(A) = A^* = \bigcap\{M \in C(X) : A \subset M\},$$

nos podemos preguntar cuándo esta función es continua. La siguiente caracterización nos da la respuesta.

**Teorema 7.10** *En un continuo hu $X$, la función $M$ es continua si y sólo si $X$ es una dendrita.*

*Demostración.* Primero supongamos que $X$ es una dendrita. Sea $\epsilon > 0$. Para cada punto $y \in Y$, elegimos un subconjunto abierto y conexo $V_y$ de $X$ tal que $y \in V_y$ y $diam\overline{V_y} < \epsilon$. Por la compacidad de $Y$ podemos tomar una subcubierta finita $\{V_1, \ldots, V_m\}$ de $\{V_y : y \in Y\}$. Aseguramos que si $Z \in < V_1, \ldots, V_m >$, entonces $H(M(Z), M(Y)) < \epsilon$. Esto implicaría la continuidad de $M$ en $Y$. Sea pues $Z \in < V_1, \ldots, V_m >$. Entonces

$$Z \subset \bigcup_{i=i}^{m} V_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} \overline{V_i}\right) \cup Y^*.$$

Como esta última unión es un continuo, obtenemos que $M(Z) \subset (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{V_i}) \cup Y^* \subset N(Y^*, \epsilon) = N(M(Y), \epsilon)$. Similarmente,

$$Y \subset \bigcup_{i=i}^{m} V_i \subset \left(\bigcup_{i=i}^{m} V_i\right) \cup Z^*$$

así que $M(Y) \subset N(M(Z), \epsilon)$. Por lo tanto, $H(M(Y), M(Z)) < \epsilon$. Hemos probado que $M$ es continua.

Ahora supongamos que $X$ cumple que la función $M$ es continua, sólo falta probar la conexidad local para saber que $X$ es dendrita. Sean $x \in X$ y $U \in \tau$ con $x \in U$. Entonces, en particular, $\{x\} \in < U > \cap C(X)$, por lo cual existe una vecindad básica con la topología de Vietoris, $< V_1, \ldots, V_n > \in \tau_{2^X}$ con $\{x\} \in < V_1, \ldots, V_n >$ y que satisface que que satisface que $< V_1, \ldots, V_n > \subset < U >$ y $M(< V_1, \ldots, V_n >) \subset < U >$. Esto implica que $x \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset U$. Definimos $W = \{M(\{x, y\}) : y \in V_1 \cap \cdots \cap V_n\}$, $W$ es un conexo ya es la unión de los arcos $xy = M(\{x, y\})$ para cada $y \in V_1 \cap \cdots \cap V_n$ $(y \neq x)$ y por lo tanto, todos los puntos de $W$ están conectados a $x$. La elección de la vecindad $< V_1, \ldots, V_n >$ por otra parte nos dice que $x \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subset W^o \subset W \subset U$. Esto prueba que $X$ es cik en $x$ y por lo tanto lc. $\square$

## 7.4. Continuos Hereditariamente Indescomponibles

La propiedad de los continuos hereditariamente indescomponibles que nos interesa es que sus hiperespacios de continuos son únicamente arcoconexos. Por medio de esta propiedad, podemos caracterizar a los continuos lc que se pueden encajar en un $C(X)$ cuando $X$ es hereditariamente indescomponible. Para hacer esto, necesitamos un resultado previo.

**Lema 7.11** *En un continuo $X$, si $\mathscr{A} \in C(C(X))$, entonces $\bigcup \mathscr{A} \in C(X)$.*

*Demostración.* Para probar que $\bigcup \mathscr{A}$ es cerrado, tomemos $x \in \overline{\bigcup \mathscr{A}}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $y \in \bigcup \mathscr{A}$ tal que $d(x, y) \leq \frac{1}{n+1}$ por lo que podemos encontrar un $A_n \in \mathscr{A}$ con $y \in A_n$. Por lo tanto, la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathscr{A}$ será tal que $\lim d(x, A_n) = 0$. Entonces, como existe una subsucesión $(A_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un elemento de $\mathscr{A}$, por ser $\mathscr{A}$ compacto, $x \in \lim A_{n_k}$. Por tanto, $x \in \bigcup \mathscr{A}$.

Supongamos que $\bigcup \mathscr{A} = B|C$ y sean $K, L \in \tau$ tales que $B \subset K$, $C \subset L$ y $K \cap L = \emptyset$. Entonces $\bigcup \mathscr{A} \subset K \cup L$, como cada elemento de $\mathscr{A}$ es conexo, cada elemento de $\mathscr{A}$ está contenido en uno de $H$ o $K$, por lo cual $\mathscr{A} \subset < H > \cup < K >$, además hay elementos de $\mathscr{A}$ en cada uno de $H$ y $K$, $\mathscr{A} \cap < H > \neq \emptyset \neq \mathscr{A} \cap < K >$ y como $H \cap K = \emptyset$, también tenemos $\mathscr{A} \cap < H > \cap < K > = \emptyset$. Esto nos da una separación de $\mathscr{A}$ que es conexo, esto es una contradicción. Entonces $\bigcup \mathscr{A}$ es un continuo. $\square$

Dado un continuo $X$, llamaremos $A \in C(X)$ un *subcontinuo terminal* de $X$ si para cualquier $B \in C(X)$ se cumple $B \subset A$, $A \subset B$ o $A \cap B = \emptyset$. Notemos que un continuo es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos son terminales. Con esto probemos un hecho muy importante de los continuos terminales.

**Lema 7.12** *Si $X$ es un continuo, $A$ es un subcontinuo terminal de $X$ y $B, C \in C(X)$ son tales que $B \subset A$ y $C \nsubseteq A$, entonces cualquier arco que conecte a $B$ y $C$ en $C(X)$ pasa por $A$.*

*Demostración.* Sea $\alpha : I \to C(X)$ una función continua e inyectiva tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$. Como $A$ es un continuo, $C(A)$ es un subcontinuo de $C(X)$. Como $B \in C(A)$, podemos tomar $t^* = \max\{t \in I : \alpha(t) \in C(A)\} \geq 0$ y como $C \notin C(A)$, $t^* < 1$. Sea $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente en el intervalo $(t^*, 1)$ tal que $\lim t_n = t^*$. Por la continuidad de $\alpha$ y el lema 7.11, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\bigcup \alpha([t^*, t_i]) = K_i \in C(X)$. Como para todo $i \in \mathbb{N}$, $\alpha(t^*) \subset A$, $\alpha(t_i) \nsubseteq A$ y $A$ es terminal, $K_i \supset A$. Entonces $\alpha(t^*) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \supset A$, pero también sabemos que se da la otra contención, por la elección de $t^*$. Entonces $\alpha(t^*) = A$, que era lo que queríamos. $\square$

Ahora ya podemos enunciar la caracterización a la que queríamos llegar.

**Teorema 7.13** *Dados, una dendrita $X$ y un continuo hereditariamente indescomponible $Y$ cualquiera, $X$ se puede encajar en $C(Y)$. Además, si $X$ es un continuo lc que se puede encajar en $C(Y)$, para algún continuo hereditariamente indescomponible $Y$, entonces $X$ es una dendrita.*

*Demostración.* Primero probemos que, si $Y$ es hereditariamente indescomponible, hay una copia de la dendrita universal en $C(Y)$. Esto implica que cualquier dendrita también se puede encajar en $C(Y)$. Primero, probemos que si $Z$ es indescomponible ($Z$ no degenerado), podemos encontrar una copia de la dendrita $F_\omega$ en $C(Z)$ tal que el punto de orden $\omega$ sea precisamente $Z$ y cada arco $Y_i$ (con la notación de la definición de $F_\omega$ al principio de la sección 2) sea un arco ordenado. Recordemos que, como $Z$ es indescomponible, hay una cantidad no numerable de composantes y además todas son densas en $Z$ ([K, § 48, vi, teorema 2, p. 209]). Entonces sean $p \in Z$ y una sucesión $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de puntos en $Z$ tal que $\lim p_i = p$ y cualesquiera dos de las composantes $\kappa_Z(p_i)$ sean distintas. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_i \subset C(Z)$ un arco ordenado de $\{p_i\}$ a $Z$. Por la elección de los puntos y la definición de las composantes, ningún subcontinuo propio de $Z$ puede tener a dos elementos distintos de la sucesión por lo que $\alpha_i \cap \alpha_j = \{Z\}$ para todo $i \neq j$. Ahora tomamos una función de Whitney $\mu : C(Z) \to I$ tal que $\mu(Z) = 1$ y definimos, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\beta_i = \left\{ Y \in \alpha_i : \mu(Y) \geq 1 - \frac{1}{i+1} \right\}$$

Claramente $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \beta_i$ es homeomorfo a $F_\omega$ que era lo que queríamos. Ahora notemos que con esto podemos hacer la construcción de la dendrita universal como en 5.10. Notemos que lo único que necesitamos es poder construir un $F_\omega$ en cada punto medio de los arcos libres maximales que ya se han construido, en cada paso, pero esto precisamente se podrá hacer ya que cada punto medio es un subcontinuo de $Z$ no degenerado, por lo cual podemos aplicar el argumento de las composantes una vez más.

Ahora supongamos que $X$ es un continuo lc que se puede encajar en $C(Y)$, para algún continuo hereditariamente indescomponible $Y$, podemos suponer que $X \subset C(Y)$. Veamos que $C(Y)$ es únicamente ac con lo cual $X$ también lo será y por la conexidad local de $X$ tendrá que ser una dendrita. Sea $\alpha : I \to C(Y)$ una función continua e inyectiva con $\alpha(0) = A$ y $\alpha(0) = B$, como todos los continuos en $Y$ son terminales sólo tenemos que considerar dos posibles casos.

Caso 1. $A \subset B$. Sea $\beta$ un arco ordenado de $A$ a $B$. Sea $W \in \beta$, por el lema 7.12, $W \in \alpha(I)$. Entonces $\beta \subset \alpha(I)$ y como los arcos $\beta$ y $\alpha(I)$ coinciden en sus extremos, tienen que ser iguales.

De pasada, hemos demostrado que los arcos ordenados en $C(X)$, que unen dos puntos, son únicos.

Caso 2. $A \cap B = \emptyset$. Sea $R \in C(Z)$ tal que la intersección de los únicos arcos ordenados de $A$ a $Z$ y de $B$ a $Z$ sea el arco ordenado de $R$ a $Z$. Sean $AR$ y $BR$ los arcos ordenados que van de $A$ a $R$ y de $B$ a $R$, respectivamente. De nuevo, por el lema 7.12, cada $W \in AR - \{R\}$ cumple $W \in \alpha(I)$ y análogamente, lo mismo ocurre para cada $W \in BR - \{R\}$. Y por la compacidad de $\alpha(I)$, $R \in \alpha(I)$. Entonces, de nuevo, los arcos $AR \cup BR$ y $\alpha(I)$ son iguales, por tener los mismos puntos extremos.

Entonces, en cualquier caso, el arco $\alpha$ es único y por lo tanto $C(Z)$ es únicamente arcoconexo. Por lo tanto, $X$ es dendrita. $\square$

Notemos que en la segunda parte del teorema 7.13 no es posible quitar la condición de la conexidad local ya que el abanico armónico se puede encajar en $C(Y)$, cuando $Y$ es hereditariamente indescomponible, haciendo algo parecido a lo que hicimos para encajar a la dendrita $F_\omega$.

## 7.5. Teorema del Punto Fijo

Uno de los problemas más importantes en topología es determinar cuándo un espacio topológico tiene la famosa propiedad del punto fijo. Decimos que $X$ tiene *la propiedad del punto fijo* si para toda función continua $f : X \to X$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. A nosotros nos interesa mostrar que las dendritas tienen la propiedad del punto fijo.

Sin embargo, para las dendritas podemos generalizar este concepto. Diremos que $f : X \to 2^X$ *tiene la propiedad del punto fijo* si existe un punto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$. Análogamente definimos propiedad del punto fijo para funciones $f : X \to C(X)$. Primero demostremos que, en este sentido, los árboles tienen la propiedad del punto fijo, esto nos servirá para hacer lo propio con las dendritas. Empecemos con un resultado previo.

**Lema 7.14** *Si $f : I \to 2^I$ es una función continua tal que existe un punto $p \in I - \{1\}$ tal que $(p, 1] \cap f(p) \neq \emptyset$, entonces existe un $q \geq p$ tal que $q \in f(q)$.*

*Demostración.* Supongamos que, para todo $q \in [p, 1)$, se tiene que $q \notin f(q)$ y sea $K = \{x \in [p, 1) : [x, 1] \cap f(x) \neq \emptyset\}$, veamos que $K$ es abierto y cerrado en $[p, 1)$.

Sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $K$ tal que $\lim x_i = x \in [p, 1)$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, podemos encontrar un $y_i \in [x_i, 1] \cap f(x_i)$, spg podemos suponer que $y = \lim y_i$, para alguna $y \in I$, por la continuidad de $f$, $\lim f(x_i) = f(x)$ y como $y_i \in f(x_i)$, tenemos que $y \in f(x)$. Claramente $y \in [x, 1]$. Entonces $x \in K$. Hemos mostrado que $K$ es cerrado en $[p, 1)$.

Sean $x \in K$ y $\epsilon = d(f(x), x)$ que sabemos que es mayor que cero porque estamos suponiendo que $x \notin f(x)$. Por la continuidad de $f$, existe un $\delta > 0$ que sirve para el número $\frac{\epsilon}{2}$ y el punto $x$ , sea $\alpha = \min\{\delta, \frac{\epsilon}{2}\}$. Si tomamos un $y \in [p, 1) \cap (x - \alpha, x + \alpha)$, entonces $H(f(y), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Notemos que $x + \epsilon \in f(x)$ por lo que debe existir un $z \in f(y)$ tal que $d(z, x + \epsilon) < \frac{\epsilon}{2}$. Como además tenemos que $d(x + \epsilon, x + \frac{\epsilon}{2}) = \frac{\epsilon}{2}$ y $x + \frac{\epsilon}{2} < x + \epsilon$, entonces $z > x + \frac{\epsilon}{2}$. Esto nos dice que $y < z$ y por lo tanto, $f(y) \cap [y, 1] \neq \emptyset$ que es lo que queríamos. Por lo tanto $y \in K$ que demuestra que $K$ es abierto.

Por lo tanto $K$ es abierto y cerrado y además distinto del vacío ya que $p \in K$, por lo cual $K = [p, 1)$. Por continuidad de $f$, tomando para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [1 - \frac{1}{n+1}, 1] \cap f(1 - \frac{1}{n+1})$, $\lim p_n = 1$ por lo que $1 \in f(1)$. Entonces en cualquiera de los casos tenemos lo que queremos. $\square$

Antes de probar algo similar al lema 7.14 para los árboles veamos cómo asociar a una función entre continuos una entre sus hiperespacios. Dada una función continua $f : X \to Y$, donde $X$ y $Y$ son continuos, definimos la función asociada, $f^* : 2^X \to 2^Y$ como $f^*(A) = f(A)$ (la imagen de $A$ bajo $f$), que también es continua [N4, lemma 6.4, p. 68].

**Lema 7.15** *Si $X$ es un árbol y $f : X \to 2^X$ es una función continua, entonces $f$ tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Probémoslo por inducción en el número de puntos terminales de $X$, recordemos que los árboles tienen una cantidad finita de puntos terminales. La base de inducción, es decir, cuando el árbol es un arco, es clara ya que si $0 \notin f(0)$ se pueda aplicar el lema 7.14 y obtendremos un punto fijo. Ahora supongamos que la conclusión del lema es cierta para árboles con a lo más $n$ puntos terminales ($n \geq 2$) y sea $T$ un árbol con $n + 1$ puntos terminales. Sea $f : T \to 2^T$ una función continua.

Sean $p \in T$ un punto terminal y $q$ un punto de ramificación tales que $T = R \cup pq$ donde $R$ es un árbol con $n$ puntos terminales. Consideramos $r : T \to R$ la retracción natural y la función asociada $r^* : 2^T \to 2^R$ que también es continua. Entonces, por la hipótesis de inducción, la función $(r^* \circ f)|_R : R \to 2^R$ tiene un punto fijo. Entonces sea $y \in R$ tal que $y \in r^*(f(y))$, así que $y = r(z)$, para alguna $z \in f(y)$. Si $y \neq q$, como $r^{-1}(y) = y$, tendríamos que $y = z \in f(y)$, entonces supongamos que $y = q$.

En particular, estamos suponiendo que $q \notin f(q)$, como $q \in r^*(f(q))$, $f(q) \cap pq \neq \emptyset$. Sea $d$ una métrica radialmente convexa para $R$ tal que $\sup\{d(q, x) : x \in R\} = \frac{1}{2}$ y sea $\alpha : [\frac{1}{2}, 1] \to qp$ un homeomorfismo tal que $\alpha(\frac{1}{2}) = q$ y $\alpha(1) = p$. Entonces definamos una función continua $g : T \to I$ de la siguiente manera, si $x \in R$, $g(x) = \frac{1}{2} - d(x, q)$ y si $x \in pq$, $g(x) = \alpha^{-1}(x)$. Notemos que $\frac{1}{2} - d(q, q) = \frac{1}{2}$ por lo que $g$ está bien definida y es continua. Ahora consideramos $g^* : 2^T \to 2^I$ la función asociada que también es continua. Entonces definimos la función $h : I \to 2^I$ como

$$h(x) = \begin{cases} g^*(f(q)), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ g^*(f(\alpha(x))), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Como $\alpha(\frac{1}{2}) = q$, $h$ es continua. Como existe un punto $x \in f(q) \cap pq$, tenemos que $g(x) \in g(f(q)) \cap g(pq) = h(\frac{1}{2}) \cap \alpha^{-1}(pq) \subset h(\frac{1}{2}) \cap [\frac{1}{2}, 1]$. De manera que $h(\frac{1}{2}) \cap [\frac{1}{2}, 1] \neq \emptyset$. Entonces, el lema 7.14, nos dice que hay un $s \geq \frac{1}{2}$ tal que $s \in h(s)$. Sea $z = \alpha(s) \in pq$, notemos que si $z = q$, entonces $s = \frac{1}{2}$ lo cual implicaría que $\frac{1}{2} \in h(q) = g(f(q))$ y como $f(q) \subset R$, $q \in f(q)$, pero estamos en el caso $q \notin f(q)$, por lo que $z \neq q$. Entonces tenemos que

$$s \in h(s) = g(f(\alpha(s))) = g([f(\alpha(s)) \cap pq] \cup [f(\alpha(s)) \cap R]) =$$

$$g(f(\alpha(s)) \cap pq) \cup g(f(\alpha(s)) \cap R)$$

pero como $g(f(\alpha(s)) \cap R) \subset [0, \frac{1}{2}]$, obtenemos que $s \in g^*(f(\alpha(s)) \cap pq)$. Como $g|_{pq} = \alpha^{-1}$,

$$z = \alpha(s) \in \alpha(g(f(\alpha(s)) \cap pq)) = f(\alpha(s)) \cap pq \subset f(z)$$

que era lo que queríamos. □

Diremos que un espacio $S$ es un *extensor absoluto* si, para todo espacio normal $X$, cualquier subconjunto cerrado $A \subset X$ y cualquier función continua $f : A \to S$, existe una función continua $F : X \to K$, tal que $F|_A = f$, a la cual llamaremos *extensión* de $f$. El teorema de extensión de Tietze [W, 15.8, p. 103] nos dice que un arco es un extensor absoluto. El siguiente resultado nos dice que $I^2$ es un extensor absoluto.

**Lema 7.16** *Si $K_1$ y $K_2$ son extensores absolutos entonces $K_1 \times K_2$ también lo es.*

*Demostración.* Sean un espacio normal $X$, $A \in 2^X$ y una función continua $f : A \to K_1 \times K_2$. Sabemos que podemos ver a $f$ como el producto cartesiano $f = f_1 \times f_2$, de dos funciones continuas $f_1 : A \to K_1$ y $f_2 : A \to K_2$. Entonces cada una de estas funciones la podemos extender, es decir, existen funciones continuas $F_1 : X \to K_1$ y $F_2 : X \to K_2$ tales que $F_1|_A = f_1$ y $F_2|_A = f_2$. Entonces claramente la función $F : X \to K_1 \times K_2$ definida por $F = F_1 \times F_2$ es una función continua tal que $F|_A = f$. Por lo tanto $F$ es la función que buscamos. □

Ahora sí con estas herramientas, podemos probar nuestra caracterización de esta sección.

**Teorema 7.17** *Para un continuo lc $X$ son equivalentes:*

*(1) $X$ es una dendrita,*

*(2) cada función continua $f : X \to 2^X$ tiene un punto fijo,*

*(3) cada función continua $f : X \to C(X)$ tiene un punto fijo,*

*(4) cada función scs $f : X \to C(X)$ tiene un punto fijo.*

*Demostración.*
(1) $\Rightarrow$ (2) Sabemos, por el teorema 5.2, que existe una sucesión de árboles $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ con $\lim Y_i = X$, y que satisface que las retracciones naturales $r_i : X \to Y_i$ convergen uniformemente a la identidad en $X$. Claramente las funciones asociadas $r_i^* : 2^X \to 2^Y$ son continuas, para cada $i \in \mathbb{N}$, y convergen uniformemente a la identidad en $2^X$.

Sea $f : X \to 2^X$ una función continua. Por el lema 7.15, para cada $i \in \mathbb{N}$, la función $(r_i^* \circ f)|_{Y_i} : Y_i \to Y_i$ tiene un punto fijo. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $p_i \in Y_i$ tal que $p_i \in r_i^*(f_i(p_i))$ y supongamos, spg, que $p = \lim p_i$. Por la convergencia uniforme, existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq N_1$, entonces para todo $x \in X$, $H((r_i^* \circ f)(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Por la continuidad de $f$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $d(x, y) < \delta$, entonces $H(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq N_2$, entonces $d(p_i, p) < \delta$. Tomando entonces $N = \max\{N_1, N_2\}$, si $i \geq N$,

$$H((r_i^* \circ f)(p_i), f(p)) \leq H((r_i^* \circ f)(p_i), f(p_i)) + H(f(p_i), f(p)) < \epsilon$$

Entonces $p \in \lim(r_i^* \circ f)(p_i) = f(p)$, que era lo que queríamos.

(1) $\Rightarrow$ (4) Tomemos una función scs $f : X \to C(X)$. Fijemos $p \in X$, para cada $x \in X$, definimos el conjunto $m(x) = \{y \in X : x \leq_p y\}$ que es un cerrado porque es el complemento de la componente de $X - \{x\}$ que contiene a $p$, cuando $p \neq x$, y $m(p) = X$. Además, si $p \neq x$, dada $y \in m(x)$, el arco $xy$ estará contenido en $m(x)$. De manera que $m(z)$ es conexo. Por tanto, $m(x)$ es un subcontinuo de $X$ para cada $x \in X$. Definamos

$$P = \{x \in X : m(x) \cap f(x) \neq \emptyset\}$$

Como $m(p) = X$, $p \in P$ por lo cual $P$ no es vacío. Recordemos que $\leq_p$ es un orden parcial en $X$, mostraremos que $P$ tiene elementos máximos con este orden. Recordemos que $x \leq_p y$ si y sólo si $px \subset py$ por lo que el orden $\leq_p$ induce un orden en $\mathscr{A}_p$ que es la inclusión de conjuntos. Notemos que encontrar un máximo con el orden $\leq_p$ en $P$ es lo mismo que encontrar un máximo en $P' = \{xp \in \mathscr{A}_p : x \in P\}$ con la inclusión. Sea $C$ un conjunto totalmente ordenado en $P'$, que podemos escribir como

$$C = \{px \in \mathscr{A}_p : x \in C^*\}$$

donde $C^*$ es un conjunto totalmente ordenado en $P$ con el orden $\leq_p$. Sea $Y = \overline{\bigcup_{x \in C^*} px}$. Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, cubrimos a $Y$ con un número finito de bolas de radio $\frac{1}{n+1}$, podemos encontrar un $y_n \in C^*$ tal que $H(Y, py_n) < \frac{1}{n}$. Entonces, hemos encontrado una sucesión $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ contenida en $C*$ tal que $\overline{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} py_i} = \lim py_i = Y$. Por el teorema 2.24(3), si suponemos, spg, que $y = \lim y_i$, entonces $Y = py$. Ocurre además que para todo $x \in C^*$, $x \leq_p y$. Entonces, si tomamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $z_i \in m(y_i) \cap f(y_i)$, y suponemos spg $z = \lim z_j$, por el lema 3.4, $z \in \limsup f(y_i) \subset f(y)$. Como además para todo $x \in C$, $m(x) \subset m(y)$, obtenemos que $z \in m(y) \cap f(y)$, por lo cual $y \in P$, y con esto, $py$ es un máximo en $P'$, que corresponde a que $y$ es máximon en $P$, que es lo que queríamos.

Entonces sea $x^* \in P$ un máximo con el orden $\leq_p$ para $P$ y supongamos que $x^* \notin f(x^*)$. Por la conexidad de $f(x^*)$, tenemos que $f(x^*) \subset m(x^*) - \{x^*\}$, ya que $x^*$ separa a $m(x^*)$ del resto de $X$. Sea un $w \in f(x^*)$ y una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $x^*w$ con $\lim x_i = x$ y que sea estrictamente decreciente con el orden $\leq_p$. Como además $X - f(x^*)$ es abierto, podemos suponer, spg, que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ está contenida en $X - f(x^*)$. Definiendo $U = m(x_0) - \{x_0\}$, se cumple que $f(x^*) \subset U \in \tau$. Pero como $m(x_n) \supset m(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x^*$ es máximo en $P$, se tiene que dar que $m(x_n) \cap f(x_n) = \emptyset$ por lo que $f(x_n) \subset X - U$. Como $X - U$ es cerrado, $\limsup f(x_n) \subset X - U$ lo cual nos dice que $\limsup f(x_n) \cap f(x^*) = \emptyset$. Esto contradice al lema 3.4 por lo cual $x^* \in f(x^*)$, que es lo que nos faltaba.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es claro porque una función continua $f : X \to C(X)$ también se puede ver como una función $f : X \to 2^X$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Es claro porque las funciones continuas en particular son scs.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos, por el contrario, que $\mathbb{S}^1 \subset X$, sea $f : \overline{B_1(0)} \to C(\mathbb{S}^1)$ el inverso del homeomorfismo que definimos en la prueba del lema 7.6. Sea $g : \mathbb{S}^1 \to \overline{B_1(0)}$ la rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, la cual no tiene puntos fijos. El lema 7.16 y el teorema de extensión de Tietze nos dicen que $I^2 = \overline{B_1(0)}$ es un

extensor absoluto. Por lo tanto existe una función continua $G : X \to \overline{B_1(0)}$ que extiende a $g$. Entonces $f \circ G : X \to C(\mathbb{S}^1) \subset C(X)$ es una función continua, veamos que no tiene puntos fijos. Si $x \in X$ fuera un punto fijo, como la imagen de $f \circ G$ cae en $C(\mathbb{S}^1)$, tenemos que $x \in \mathbb{S}^1$ y $x \in (f \circ g)(x)$ lo cual contradice el hecho que $g$ no tiene puntos fijos. Esta contradicción nos dice que $X$ no contiene circunferencias, es decir, $X$ es una dendrita.

$\square$

Notemos que hay continuos no lc que cumplen las condiciones del teorema 7.17, como por ejemplo, los continuos tipo arco cumplen la condición (2) y por lo tanto la (4). En [N2, 12.56, p. 265] viene una idea de como probar la condición (2) para continuos tipo arco, la cual es muy parecida al lema 7.14. En [Wa] se prueba además que todos los dendroides cumplen la condición (3).

# Bibliografía


[Ar] M. A. Armstrong, *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1983).

[D] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. (1966).

[Ch] J.J. Charatonik y W.J.Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas Comunicaciones, Soc. Mat. Mex., vol. 22, pp. 227-253 (1998).

[Co] H. Cook, *Tree-likeness of Dendroids and $\lambda$-dendroids*, Fund. Math., vol. 68, pp. 19-22 (1970).

[Ill1] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas 28, Soc. Mat. Mex. (2004).

[Ill2] A. Illanes, *Characterizing Dendrites by Deformation Retracts*, Topology Proceedings, vol. 21, pp. 129-141 (1996).

[K] K. Kuratowski, *Topology, Volume II*, Academic Press (1968).

[MV] V. Martínez-de-la-Vega, *El Espacio de Continuos con la Topología Producto*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM (1998).

[M] S. Macías, *Topics on Continua*, Chapman & Hall/CRC (2005).

[Mac] T. Maćkowiak, *Some Kinds of Unicoherence*, Commentationes Math. vol. 20, pp. 405-408 (1978).

[Maz] S. Mazurkiewicz, *Sur l'Espace des Continus Péaniens*, Fund. Math., vol. 24, pp. 118-134 (1935).

[N1] S.B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, Marcel Dekker (1978).

[N2] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: an introduction*, Marcel Dekker (1992).

[N3] S.B. Nadler, Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas 18, Soc. Mat. Mex. (2002).

[N4] S.B. Nadler, Jr., *The Fixed Point Property for Continua*, Aportaciones Matemáticas 30, Soc. Mat. Mex. (2005).

[OP] V. Martinez-de-la-Vega y J.M.Martinez-Montejano, *Open Problems on Dendroids*, Open Problems in Topology II, Chapter 35, Elsevier Science (2007).

[SS] L.A. Steen y J.A. Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc (1995).

[Wa] L.E. Ward, Jr., *Characterization of the Fixed Point Property for a Class of Set-valued Mappings*, Fund. Math., vol. 50, pp. 157-164 (1961).

[Whi] P.A. White, *r-Regular Convergent Spaces*, Amer. J. Math., vol. 66, pp.69-96 (1944).

[Why] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, AMS Coloquium Publications, vol. 28, AMS (1971).

[W] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications (1998).

# Índice alfabético