

# Análisis de las fuerzas estocásticas que actúan sobre la población de partículas en la magnetosfera de Saturno

**M. en C. Elizabeth Martínez Gómez**

Tesis presentada para obtener el grado de  
Doctora en Ciencias (Física Espacial)



Departamento de Física Espacial  
Instituto de Geofísica  
Universidad Nacional Autónoma de México  
México  
Mayo 2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Dedicada a*

Mis padres, Elizabeth y Gerardo

Mi hermano, Gerardo (ReNo)

Mi abuelita, mis tíos y primos

Mis profesores y amigos

La memoria de los que ya no están conmigo

La memoria de mi fiel y amorosa mascota por muchos años, Beto

# Agradecimientos

Las siguientes líneas son para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que han estado a mi lado y han hecho de mí la persona y profesionalista que ahora soy.

El pilar de todo esto es mi familia, que, a través de sus sabios consejos me han ayudado a mejorar en todos los aspectos. Y también por aguantarme en los momentos más tensos donde perdía la cabeza.

A mis sinodales: Dr. Héctor Antonio Pérez de Tejada (asesor e investigador del Departamento de Física Espacial, IG-UNAM), Dr. Jorge Cantó Illa (investigador del Departamento de Astrofísica Teórica, IA-UNAM), Dr. Julio Herrera Velázquez (investigador del Departamento de Física de Plasmas y de Interacción de Radiación con Materia, ICN-UNAM), Dr. José Francisco Valdés Galicia (director e investigador del Departamento de Investigaciones Solares y Planetarias, IG-UNAM), Dra. Dolores Maravilla Meza (investigadora del Departamento de Investigaciones Solares y Planetarias, IG-UNAM), Dr. Jorge Pérez Peraza (investigador del Departamento de Investigaciones Solares y Planetarias, IG-UNAM) y al Dr. Héctor Javier Durand Manterola (investigador del Departamento de Física Espacial, IG-UNAM). Cada uno de ellos contribuyó en la mejora de este trabajo a través de sus magníficas ideas y sugerencias. De manera especial agradezco al Dr. José Franco López (director IA-UNAM) por ayudarme en los momentos cruciales cuando recurrí a él y al Dr. Héctor Durand Manterola por estar siempre revisando mi trabajo, por sus sugerencias y por comentar cada uno de los arbitrajes de los artículos.

A mis profesores y también amigos que me han enseñado tantas cosas desde lo académico hasta lo personal: Dr. Juan Manuel Lozano Mejía (investigador del Departamento de Física Teórica, IF-UNAM), Dr. Gerardo Vázquez Fonseca (inves-

tigador del Departamento de Estado Sólido, IF-UNAM), Dr. Luis Fernando Magaña Solís (investigador del Departamento de Estado Sólido, IF-UNAM), y al Fís. Juan Américo González Menéndez (profesor retirado de la Facultad de Ciencias, UNAM).

A mi grupo de amigos que siempre me están apoyando y aconsejando: Pilar Ovalle, Carlos Mendoza, Héctor Verdiguél, Fernando Camacho, Arturo Zúñiga, Oscar Mendoza "El Pollo", Tania Santiago, Vaneza Peña, Rosa Sánchez, Carlos Barragán, Alejandro Lugo, Armando Resendiz, Walter Galván, Elio Martínez, Fernando Guadalupe, Felipe Rivera, Marco Barragán, David Bucio, Norma Sánchez, Erick Sánchez, Orlando Baca, Pedro Cervera, Orlando Hernández, Germán Pérez, Carlos Avendaño, Edgar Dávila, Oscar de la Rosa, Miguel Rojo y Alex Whitmore.

A la Dra. Blanca Emma Mendoza Ortega (coordinadora del posgrado en Ciencias de la Tierra) por apoyarme durante este periodo, así como a Araceli Chamán y a Mónica Salgado (auxiliares de la coordinación) por ayudarme amablemente en todos los trámites. Finalmente agradezco a las autoridades del IG-UNAM por asignarme una pequeña oficina donde trabajar y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico brindado durante mis estudios doctorales.

Y por qué no?? Me agradezco el ser perseverante en todo lo que me propongo, por tener metas definidas y saber que puedo llegar a ellas...y esta tesis es prueba de ello.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Declaración</b>	<b>X</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Mecanismos de aceleración generales . . . . .	8
1.1.1. Aceleración adiabática y otras formas de aceleración no esto- cástica . . . . .	8
1.1.2. Aceleración estocástica y almacenamiento de energía magnética	9
1.1.3. Aceleración por choques . . . . .	11
1.1.4. Aceleración turbulenta y por ondas de plasma . . . . .	11
1.1.5. Mecanismos de aceleración de partículas en magnetósferas pla- netarias . . . . .	12
1.1.5.1. Posibles mecanismos de aceleración aplicados a la magnetósfera de Saturno . . . . .	15
<b>2. Población de partículas cargadas y neutras en la magnetósfera de Saturno</b>	<b>18</b>
2.1. Antecedentes: Resultados de la misión Voyager . . . . .	19
2.1.1. Características de la población de partículas . . . . .	21
2.1.1.1. Mediciones de plasma . . . . .	22
2.1.1.2. Partículas neutras . . . . .	25
2.2. Nuevas observaciones: Misión Cassini . . . . .	38

---

<b>3. Modelo de energización para partículas bajo la acción de campos de fuerza estocásticos</b>	<b>44</b>
3.1. Modelo de aceleración para la población de partículas cargadas . . . .	46
3.1.1. La ecuación de movimiento para una partícula cargada . . . .	46
3.1.1.1. La aceleración estocástica . . . . .	49
3.1.1.2. La aceleración de Lorentz . . . . .	52
3.1.1.3. La aceleración gravitacional . . . . .	53
3.1.1.4. ¿Un término colisional? . . . . .	53
3.1.2. La energía final y la velocidad final para la distribución de partículas cargadas . . . . .	54
3.2. Modelo de aceleración para la población de partículas neutras . . . .	57
3.2.1. La ecuación de movimiento para una partícula de polvo neutra	57
3.2.1.1. La aceleración gravitacional . . . . .	58
3.2.1.2. La aceleración gravitacional estocástica entre granos de polvo . . . . .	58
3.2.1.3. La aceleración debida a la fuerza de presión de radiación . . . . .	59
3.2.2. La energía final y la velocidad final para la distribución de partículas de polvo neutras . . . . .	59
<b>4. Aplicación del modelo a la población de partículas en la magnetósfera de Saturno</b>	<b>60</b>
4.1. Partículas cargadas (protones, iones pesados y granos de polvo) . . .	61
4.1.1. El campo eléctrico estocástico . . . . .	61
4.1.2. Características de la población de partículas . . . . .	76
4.1.2.1. Magnetósfera interna . . . . .	76
4.1.2.2. Magnetósfera externa . . . . .	79
4.1.2.3. Anillos . . . . .	80
4.2. Partículas neutras (granos de polvo) . . . . .	84
4.2.1. El campo gravitacional estocástico entre partículas de polvo .	84
4.2.2. Características de la población de granos de polvo . . . . .	85
4.2.2.1. Distribución de masas para los granos de polvo . . .	87

4.2.2.2. Distribución de las distancias entre granos de polvo . . . . .	88
<b>5. Resultados y Discusión</b>	<b>92</b>
5.1. Magnetósfera interna . . . . .	92
5.2. Magnetósfera externa . . . . .	107
5.3. Sistema de anillos . . . . .	122
5.3.1. Polvo cargado . . . . .	122
5.3.2. Polvo neutro . . . . .	122
<b>6. Conclusiones</b>	<b>130</b>
6.1. Partículas cargadas (Campo Eléctrico Estocástico) . . . . .	131
6.1.1. Magnetósfera interna . . . . .	131
6.1.2. Magnetósfera externa . . . . .	134
6.1.3. Sistema de anillos . . . . .	135
6.2. Partículas neutras (Campo Gravitacional Estocástico) . . . . .	136
6.2.1. Sistema de anillos . . . . .	136
<b>Bibliografía</b>	<b>139</b>
<b>Apéndice</b>	<b>161</b>
<b>A. Pruebas de hipótesis de bondad de ajuste</b>	<b>161</b>
A.0.2. Prueba $\chi^2$ . . . . .	162
A.0.3. Prueba de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	163
<b>B. Función de distribución logística</b>	<b>165</b>
B.0.4. Definición matemática. La función de densidad de probabili- dad y la función de distribución acumulada . . . . .	165
B.0.5. Propiedades . . . . .	166
B.0.6. Momentos . . . . .	167
B.0.6.1. Función generadora de momentos . . . . .	167
B.0.7. Generación de números aleatorios . . . . .	168



C. Método de Box-Müller para generar números aleatorios con distribución normal	170
---	-----

# Índice de figuras

2.1.	Esquema general de la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Pioneer y de los Voyager 1 y 2 [Krimigis, 1982]. . . . .	20
2.2.	Diagrama de los anillos y satélites internos de Saturno. El sistema de anillos y satélites ha sido escalado de acuerdo con el radio planetario ecuatorial. También se ilustra el radio al cual el movimiento orbital es sincrónico con la rotación planetaria y la localización de límite de Roche para partículas con densidad de $1 \text{ g cm}^{-3}$ . . . . .	36
4.1.	Vista ecuatorial de la trayectoria de las naves Voyager en su encuentro con Saturno. Sobre las trayectorias los puntos negros marcados como S indican los cruces por el frente de choque y los rectángulos negros marcados como M indican los cruces por la magnetopausa. La dirección hacia el Sol es positiva. . . . .	63
4.2.	Campo magnético residual obtenido para la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Voyager 1. . . . .	64
4.3.	Campo magnético residual obtenido para la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Voyager 2. . . . .	65
4.4.	Comparación entre las fluctuaciones temporales y las fluctuaciones espaciales obtenidas para las mediciones del Voyager 1 dentro de la magnetósfera de Saturno. . . . .	66
4.5.	Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera interna de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2. . . . .	67

4.6. Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera externa de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2 en su trayectoria de entrada. . . . .	68
4.7. Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera externa de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2 en su trayectoria de salida. . . . .	69
4.8. Histograma de frecuencias para la distribución del campo eléctrico en la componente “ $x$ ” y su curva de ajuste (función logística). . . . .	72
4.9. Distribución del campo eléctrico estocástico basado en las observaciones del Voyager 1 en su paso por la magnetósfera interna de Saturno. . . . .	74
4.10. Distribución del campo eléctrico estocástico basado en las observaciones del Voyager 2 en su paso por la magnetósfera externa de Saturno (trayectoria de salida). . . . .	75
4.11. El potencial superficial de equilibrio de un grano de polvo dieléctrico que se mueve en una órbita circular Kepleriana y no-perturbada en el plano ecuatorial de Saturno como función de la distancia al planeta. Se asume que $E_m = 500$ eV, $\delta_m = 1$ (línea continua) y $\delta_m = 2$ (línea punteada). Tomado de Horanyi [1996]. . . . .	83
4.12. Perfil del campo gravitacional estocástico para partículas localizadas en el anillo E. . . . .	89
5.1. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en el polo norte de Saturno. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1. . . . .	93
5.2. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y varias muestras de iones pesados localizados sobre el anillo C. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2. Obsérvese que no hay una marcada tendencia a ganar energía todo el tiempo. . . . .	94

- 5.3. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en el polo sur de Encelado. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1. . . . . 95
- 5.4. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en Dione. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2. . . . . 96
- 5.5. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados sobre el anillo E. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1. . . . . 97
- 5.6. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en Rea. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2. . . . . 98
- 5.7. Ganancia de energía cinética de los protones vs. la distancia al planeta en la magnetósfera interna. Se muestra la ganancia de energía estocástica, la ganancia de energía de la distribución y la ganancia de energía debida al efecto combinado de la distribución + corrotación. . 100
- 5.8. Perfil de la distribución de velocidades final para protones localizados en el anillo C y en el polo sur de Encelado. . . . . 102
- 5.9. Espectro de energía típico para iones en la magnetósfera de Saturno medido por el instrumento LECP a bordo del Voyager 2 a  $10 R_S$  [Krimigis, 1982]. . . . . 103
- 5.10. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en el polo norte de Saturno. Las partículas ganan  $\sim 1$  eV después de 1 segundo y el espectro de energía queda bien descrito por una función sigmoïdal asimétrica. . . . . 104

5.11. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en la vecindad de Encelado. Inicialmente las partículas tienen una energía de 0.02 MeV y después de 5 milisegundos el espectro de energía puede ser descrito por una función de ley de potencias con índice de -2.38 para  $E > 0.06$  MeV. . . . . 105

5.12. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en Rea. El espectro de energía queda bien descrito por dos funciones de distribución, esto es, para  $E < 10.8$  eV una función logística y para  $E > 11$  eV una función exponencial decreciente son las más adecuadas. . . . . 106

5.13. Histograma de frecuencias para la distribución de la componente “y” de la velocidad final asociada a los protones que provienen de la ionósfera de Saturno y de la superficie de Rea. . . . . 108

5.14. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada. . . . . 109

5.15. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada. . . . . 110

5.16. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y de nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) localizados en la atmósfera superior de Titán. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada. . . . . 111

5.17. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida. . . . . 112

5.18. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida. . . . . 113

5.19. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y de nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) localizados en la atmósfera superior de Titán. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida. . . . . 114

5.20. Ganancia de energía cinética de los protones vs. la distancia al planeta en la magnetósfera externa. Se muestra la ganancia de energía estocástica, la ganancia de energía de la distribución y la ganancia de energía debida al efecto combinado de la distribución + corrotación. . 116

5.21. Histograma de frecuencias para la distribución final de velocidades asociada a los protones localizados cerca de la órbita de Titán (trayectoria de salida). . . . . 117

5.22. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en  $10 R_S$  (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por una Gaussiana. . . . . 118

5.23. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en  $15 R_S$  (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por una función exponencial decreciente para  $E > 100 \text{ eV}$  . . . . . 119

- 5.24. Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en Titán (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por dos funciones Lorentzianas en  $E < 117 \text{ eV}$  y  $E > 122 \text{ eV}$ . . . . . 120
- 5.25. Ganancia estocástica de energía para los granos de polvo cargados en el anillo E a diferentes distancias. Resultados basados en las mediciones de campo magnético del Voyager 1 en su paso por la magnetósfera interna. . . . . 123
- 5.26. Ganancia estocástica de energía para los granos de polvo neutros en el sistema de anillos de Saturno. . . . . 124
- 5.27. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados sobre el anillo E. Las fluctuaciones del campo eléctrico tienen un perfil lineal. . . . . 127
- 5.28. Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en la magnetósfera externa durante la trayectoria de salida. Las fluctuaciones del campo eléctrico tienen un perfil uniforme. . . . . 128

# Índice de cuadros

1.1.	Características principales del plasma presente en las magnetósferas planetarias. . . . .	3
1.2.	Fuentes de iones y mecanismos de aceleración en las magnetósferas planetarias. . . . .	6
1.3.	Fuentes de energía para el transporte y la aceleración de partículas. . . . .	7
2.1.	Propiedades fundamentales de los satélites regulares de Saturno. Tomado de Morrison et al. [1986] y Sheppard [2007]. . . . .	30
2.2.	Propiedades fundamentales de los satélites irregulares de Saturno. Tomado de Sheppard [2007]. . . . .	31
2.3.	(continuación) Propiedades fundamentales de los satélites irregulares de Saturno. Tomado de Sheppard [2007]. . . . .	32
2.4.	Propiedades físicas del sistema de anillos de Saturno [Cuzzi, 1983; Cuzzi et al., 1984; Zebker et al., 1985; Esposito, 1986; Rosen, 1989; Murray and Dermott, 1999; Hartquist et al., 2003]. . . . .	34
2.5.	(continuación) Propiedades físicas del sistema de anillos de Saturno. . . . .	35
4.1.	Valores de $\alpha$ y $\beta$ obtenidos para el Voyager 1 y Voyager 2 en sus encuentros con la magnetósfera interna y externa de Saturno. . . . .	73
4.2.	Propiedades principales de la población de partículas en la magnetósfera interna de Saturno (1 amu = $1.66 \times 10^{-27}$ kg). . . . .	78
4.3.	Propiedades principales de la población de partículas en la magnetósfera externa de Saturno (1 amu = $1.66 \times 10^{-27}$ kg). . . . .	81



---

4.4. Propiedades derivadas de las partículas que constituyen a los anillos de Saturno. Se ha supuesto que en todos los anillos (excepto en el anillo E) las partículas están formadas por una mezcla de hielo-silicatos. . . . .	86
5.1. Energía cinética mínima (eV) que tienen los protones y los iones pesados en la magnetósfera de Saturno. . . . .	94

# Análisis de las fuerzas estocásticas que actúan sobre la población de partículas en la magnetósfera de Saturno

M. en C. Elizabeth Martínez Gómez

Presentada para obtener el grado de Doctora en Ciencias

(Física Espacial)

Mayo 2007

## Resumen

*Contexto:* El conocimiento actual sobre la magnetósfera de Saturno se basa principalmente en las mediciones de plasma, partículas energéticas, ondas y campo magnético; realizadas por tres misiones Pioneer 11, Voyager 1 y Voyager 2. El pasado 1 de julio de 2004 la nave Cassini entró exitosamente en órbita alrededor de Saturno y está proporcionando la cobertura casi global de la magnetósfera Kroniana.

Actualmente es aceptado que la magnetósfera de Saturno puede ser dividida en cuatro regiones de plasma con diferentes características físicas y químicas [Young et al., 2005]: (i) la externa que contiene plasma caliente dominado por protones ( $H^+$ ), (ii) una región llamada la plasmasfera externa que consiste de plasma altamente variable que corrota parcialmente y que contiene una mezcla de protones ( $H^+$ ), oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) e iones de productos de agua (por ejemplo, protones ( $H^+$ ), oxígeno molecular ionizado ( $O_2^+$ ,  $O_3^+$ )), (iii) la plasmasfera interna que es menos variable y con una rotación casi rígida que contiene principalmente oxígeno atómico

ionizado ( $O^+$ ) e iones de productos de agua, y (iv) una capa de plasma que consiste de oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) y de oxígeno molecular ionizado ( $O_2^+$ ) localizada directamente sobre los anillos A y B.

En la región interna se encuentra el sistema de anillos. El sistema de anillos de Saturno es el más masivo, extenso, brillante y diverso del Sistema Solar y por estas razones es el más estudiado. Tiene un diámetro que cubre una distancia radial desde  $\sim 1.11 R_S$  hasta  $\sim 8 R_S$  ( $1 R_S = 60\,268$  km), su espesor varía desde unos 5 metros hasta los  $10^7$  metros en el anillo E y la masa total es  $\sim 3 \times 10^{22}$  g., similar a la masa de Mimas. Las partículas que los constituyen son principalmente de hielo de agua y sus tamaños varían desde unas micras hasta varios metros de diámetro.

Las características más sobresalientes de la población de partículas energéticas en la región magnetosférica interna son: 1) los anillos y los satélites pequeños que allí se encuentran reducen la población de partículas cuyas energías son mayores a 0.5 MeV a valores del orden de  $10^3$  veces menor que de otra manera estarían presentes, 2) la salpicadura y degasamiento de la superficie de los satélites inyecta partículas al sistema y, mediante algún proceso físico, las partículas son aceleradas a energías del orden de decenas de keV, 3) la distribución radial de protones muy energéticos,  $E_P >$  decenas de MeV, exhibe tres picos asociados con los anillos y satélites, 4) una población de protones,  $E_P \sim 1$  MeV, yace fuera de la órbita de Encelado, 5) una población de protones  $E_P < 0.25$  MeV tiene aparentemente un origen asociado con Dione, Tetis, Encelado, el anillo E, Mimas y el anillo G, 6) una población de electrones de baja energía está asociada con los satélites.

La magnetósfera externa se distingue por la existencia de plasma térmico con una densidad de  $2 \times 10^{-2}$  a  $5 \times 10^{-1}$  iones  $\text{cm}^{-3}$  cerca del ecuador y a una temperatura  $\sim 10^6$  K. La fuente principal de este plasma es Titán y su densa atmósfera que -a través de procesos de fotoionización de neutros que escapan del satélite o de la interacción directa de la ionósfera del satélite con la magnetósfera- inyectan partículas a la región. Este plasma, en general, se mueve en la dirección de corrotación y a una velocidad cercana a la rotación rígida. La población de partículas energéticas consiste de electrones, de protones y de iones más pesados. Sus energías van de  $< 2$  MeV a  $10 R_S$  hasta  $< 1$  MeV cerca de la magnetopausa, pero los rayos cósmicos muy

---

energéticos tienen libre acceso a la magnetósfera externa. Como una consecuencia, el espectro de energía de los protones tiene dos componentes: una componente que sigue una ley de potencias  $E^{-\gamma}$  con  $\gamma \sim 7$  que llega a ser menor para energías abajo de 100 keV; y una componente de alta energía interplanetaria con  $\gamma \sim 2$ . La región de bajas energías del espectro de protones se parece a una distribución Maxwelliana con una cola de alta energía y puede ser ajustada por una distribución  $\kappa$  (kappa) [Krimigis et al., 1983]. En las mediciones del Voyager se encontró que además de protones, la región externa contiene carbono atómico ionizado ( $C^+$ ), nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ), nitrógeno molecular ionizado ( $N_2^+$ ) y oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ); sin embargo Cassini no los detectó en abundancias considerables.

Posibles explicaciones a la población de partículas de altas energías presentes en la magnetósfera de Saturno involucran la liberación de energía magnética -como consecuencia de la reconexión- que calienta a la componente iónica del plasma y entonces la acelera hasta alcanzar energías del orden de 2 MeV [Schardt et al., 1985]. Otra posibilidad es la magnetocola de Saturno en donde los cambios en la configuración inducidos por perturbaciones en el medio interplanetario pueden acelerar tanto a los iones como a los electrones hasta varios cientos de keV [Krimigis et al., 1981; 1982].

**Objetivo:** Los mecanismos de aceleración por ondas de choque, por ondas de plasma y por campos eléctricos unidireccionales son algunos de los que se aplican para explicar la energización de partículas en Astrofísica. Además de los anteriores, destaca el mecanismo estocástico que regularmente considera las interacciones onda-partícula y el proceso aleatorio se basa en resolver la ecuación de Fokker-Planck, o bien, en considerar a la aceleración como una difusión en el espacio de momentos a través de la aproximación cuasi-lineal. La ventaja de los mecanismos de aceleración estocástica es que generan espectros de energía descritos por una ley de potencias, pero además de requerir de mucho tiempo para alcanzar esas energías, se supone un perfil de ondas conocido. En esos modelos la estocasticidad es producida por el movimiento girotrópico de las partículas y, cuando el periodo de giro es mayor que el tiempo empleado para la aceleración, es necesario plantear una nueva formulación

---

basada en las fluctuaciones estocásticas de algún campo de fuerzas.

En este trabajo se propone y se desarrolla un modelo general de energización basado en la estocasticidad (o aleatoriedad) del campo de fuerzas que actúa sobre la población de partículas cargadas y neutras en una magnetósfera planetaria. El modelo considera que las fluctuaciones estocásticas del campo de fuerzas (eléctrico o gravitacional) tienden, en promedio, a incrementar la energía de las partículas. El carácter aleatorio de las fluctuaciones se simula a través de un método estadístico de Monte Carlo.

**Metodología:** Se resuelve la ecuación de movimiento para una población de partículas (cargadas o neutras) que incluye a la aceleración debida al campo de fuerzas estocástico (de origen electromagnético o gravitacional, según sea el caso), la aceleración gravitacional entre la partícula y el planeta, la aceleración de Lorentz que contiene al campo magnético local y al campo eléctrico corrotacional (en el caso de partículas cargadas) y la aceleración debida a la fuerza de presión de radiación (que ejerce el Sol sobre las partículas de polvo). Se consideran diferentes condiciones iniciales como la especie iónica, las propiedades específicas de las partículas de polvo en cada anillo y la distribución de velocidades de las partículas que a su vez depende de las fuentes de las cuales provienen (la ionósfera del planeta, el gas emitido por los satélites y el material de los anillos).

**Resultados:** Este modelo es aplicado a la magnetósfera (interna y externa) de Saturno así como al sistema de anillos. Se considera una muestra de protones ( $H^+$ ) y de iones pesados: metano ( $CH_4^+$ ), hidrógeno molecular ( $H_2^+$ ), agua ( $H_2O^+$ ), nitrógeno atómico ( $N^+$ ), nitrógeno molecular ( $N_2^+$ ), oxígeno atómico ( $O^+$ ) e hidróxido ( $OH^+$ ), situados inicialmente sobre el polo norte de Saturno, sobre el anillo C, en el polo sur de Encelado, en el polo norte de Dione, sobre el anillo E, en el polo norte de Rea, en diferentes posiciones de la región externa y en la atmósfera superior de Titán.

Los resultados en la magnetósfera interna muestran que la energía cinética de las partículas tiende a aumentar con el tiempo, alcanzando algunos eV en pocos segundos. La distribución final de velocidades mantiene su perfil Maxwelliano, a excepción

de los protones e iones pesados que provienen del anillo C y de los protones del polo sur de Encelado. Se distinguen diferentes regiones de energización en la magnetósfera interna: 1) región de baja energización (polo norte de Saturno, Encelado y Rea); 2) región de inestabilidad (Anillo C); 3) región de energización intermedia (Dione) y 4) región de alta energización (Anillo E).

En la magnetósfera externa no es posible distinguir entre distintas regiones de energización, por el contrario, la contribución a la ecuación de energía de la aceleración estocástica es mayor conforme las partículas se alejan del planeta.

Dentro del sistema de anillos se encuentran diferentes regiones de energización, dependiendo si los granos de polvo están cargados o neutros. Para los granos de polvo cargados se identifican dos regiones: en el borde externo del anillo E los granos de polvo tienden a perder energía y en el borde interno tienden a ganar más energía. Para los granos de polvo neutros se identifican tres regiones: a) Alta energización (División de Cassini y anillo A); b) Baja energización (anillo B y anillo E ) y c) energización intermedia (anillo C).

***Contribuciones de la tesis:*** Hasta el momento, los mecanismos de aceleración estocástica tradicionales requieren esencialmente de tres cosas: 1) de las interacciones elementales onda-partícula, 2) de la dispersión efectiva atribuida a esas interacciones, y 3) de un proceso aleatorio (tratamiento estadístico). Si las ondas que producen la aceleración de partículas son lo suficientemente aleatorias (esto es, ondas con fase aleatoria), entonces ocurre el proceso de difusión en el espacio de velocidades y el fenómeno es conocido como difusión cuasi-lineal. Este efecto es tratado como un operador de difusión en la ecuación de Fokker-Planck, la cual puede ser reemplazada por un conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas. Además, es necesario que la partícula complete un radio de giro (movimiento girotrópico) para que pueda resonar con la onda correspondiente y entonces ser acelerada o desacelerada. Por ejemplo, esta aproximación no puede explicar el rápido incremento de energía de los iones de oxígeno localizados en la ionósfera de Venus, pues los radios de giro (y los periodos) son muy grandes en comparación con el tiempo empleado para acelerarlos [Pérez de Tejada et al., 1995].

Este trabajo constituye una manera general y novedosa de estudiar el problema de energización de partículas en magnetósferas planetarias. En el modelo que se presenta, no se considera un espectro de onda en particular sino el espectro de fluctuaciones de campo (magnético o gravitacional) característico de la región en estudio. Además, no es necesario conocer los valores promedio para la velocidad, para la densidad y para la temperatura (que pueden obtenerse a partir de las mediciones o de los cálculos teóricos); en este modelo se requiere derivar la función de distribución de velocidades para las distintas poblaciones.

Este mecanismo puede ser considerado como un proceso de aceleración primario. Esto es, los protones -que son más susceptibles de ser acelerados- ganan energía como consecuencia de la acción del campo eléctrico estocástico. Estos protones serán capaces de transferir energía a las distintas poblaciones de iones presentes en la magnetósfera, que además, están ganando energía por el campo eléctrico estocástico de fondo. Finalmente se espera que el plasma se vaya energizando para alcanzar la energía observada por las naves.

Otra contribución importante es el haber identificado diferentes regiones de energización en la magnetósfera interna, pues hasta el momento no se había reportado en trabajos anteriores esta posibilidad.

Se ha propuesto la acción de un campo gravitacional estocástico para explicar la dinámica de los granos de polvo en los anillos. Esta es una idea novedosa que puede contribuir al estudio de la ionósfera que se observa sobre los anillos. Actualmente se piensa que son las colisiones entre granos de polvo las que forman esta estructura.

***Organización de la tesis:*** El trabajo que se presenta consta de seis Capítulos y de tres Apéndices.

En el *Capítulo 1* se describen los mecanismos de aceleración más comunes en Astrofísica y posteriormente los mecanismos que se aplican para el estudio de partículas energéticas en las magnetósferas planetarias, haciendo énfasis en los mecanismos de aceleración propuestos -hasta el momento- para la magnetósfera de Saturno.

En el *Capítulo 2* se resumen las propiedades más importantes observadas en la población de partículas cargadas y neutras en la magnetósfera de Saturno. Esta

descripción está basada en las mediciones realizadas hace más de dos décadas por el Voyager 1 y el Voyager 2, y en las recientes mediciones realizadas por la nave Cassini.

En el *Capítulo 3* se desarrolla el modelo general de aceleración estocástica para partículas cargadas y para partículas neutras.

En el *Capítulo 4* se aplica el modelo desarrollado al caso particular de la magnetósfera de Saturno. Para lo cual, se consideran dos regiones: interna y externa. Adicionalmente se incluye al sistema de anillos para explicar su dinámica.

En el *Capítulo 5* se discuten los resultados obtenidos, con el modelo de aceleración estocástica, en la magnetósfera interna y en la magnetósfera externa de Saturno. También para los granos de polvo en el sistema de anillos.

En el *Capítulo 6* se presentan las conclusiones generales del trabajo y en secciones separadas las correspondientes a cada región estudiada.

Los Apéndices explican en detalle aspectos importantes relacionados con la parte matemática y estadística del problema a resolver.



# Capítulo 1

## Introducción

La aceleración de partículas cargadas a energías supratérmicas ocurre en prácticamente cada plasma de interés astrofísico. Mucho de lo que se conoce sobre procesos de aceleración ha sido derivado a partir de los experimentos de laboratorio y de los estudios teóricos asociados a ellos. El estudio de estos procesos dentro de regiones accesibles como el Sistema Solar, particularmente el geoespacio, ofrece la oportunidad para entender algunos procesos de aceleración de partículas cargadas en detalle y así establecer conceptos que están sujetos a rigurosas observaciones experimentales.

Es difícil establecer una clasificación única de los mecanismos de aceleración de partículas. Por ejemplo, Jokipii [1979] cataloga a las aproximaciones básicas para estudiar el problema de aceleración en *determinísticas* (también conocida como aceleración secular o de ganancia sistemática donde los campos eléctricos son unidireccionales, por ejemplo la aceleración por ondas de choque o por campos eléctricos paralelos) y en *estocásticas* (donde las partículas ganan o pierden energía a través de la acción de campos eléctricos que no tienen una dirección preferencial como la aceleración por turbulencia, la aceleración de Fermi y sus descendientes). Independientemente de la clasificación que se dé es importante destacar que cada uno de estos procesos opera selectivamente sobre partículas específicas: las ondas pueden acelerar partículas cuando se cumple una condición de resonancia; los choques solamente pueden acelerar partículas a partir de determinado umbral llamado energía de inyección; los campos eléctricos en un plasma no-colisional pueden ocasionar aceleración “*runaway*” en una pequeña fracción o en toda la población de partículas,

por mencionar algunos.

En este capítulo se describen los mecanismos de aceleración más comunes en Astrofísica y posteriormente los mecanismos que se aplican para el estudio de partículas energéticas en las magnetósferas planetarias, haciendo énfasis en los mecanismos de aceleración propuestos -hasta el momento- para la magnetósfera de Saturno.

Las magnetósferas están pobladas con partículas cargadas como protones, electrones e iones pesados. Las especies dominantes detectadas en las magnetósferas planetarias se resumen en el Cuadro 1.1. Las partículas energéticas y los plasmas modifican las atmósferas superiores (llevando a la ionización, calentamiento y modificación química), la superficie de los satélites (removiendo material a través del proceso denominado “*sputtering*”) y los anillos (participando en el transporte de material y en los procesos de adquisición de carga eléctrica). Por ejemplo, en la magnetósfera de la Tierra se encuentran principalmente iones de oxígeno y protones; en la magnetósfera de Júpiter además de estos iones se detectan partículas de azufre originadas en su satélite Io; en la magnetósfera de Saturno se incluyen iones, producto del agua, provenientes de sus satélites y anillos, además de iones de nitrógeno cuya fuente principal es Titán [Young et al., 2005] y en la magnetósfera de Neptuno se han detectado iones de nitrógeno y protones. El perfil de las funciones de distribución de las energías de las partículas es cercano al de una Maxwelliana, o térmica, aunque en algunas magnetósferas existe una pronunciada cola de altas energías formada por partículas con energías que alcanzan varias centenas de MeV. Por esta razón a las magnetósferas planetarias se les considera como prodigiosos aceleradores de partículas; ver por ejemplo, Perkins [1968]; Schardt et al., [1985]; Eraker and Simpson [1986].

Las consideraciones básicas que deben hacerse en cualquier mecanismo de aceleración se enuncian a continuación:

- Las partículas cargadas son aceleradas solamente por campos eléctricos (los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las partículas) ya que la producida por otros campos puede no ser importante en la generación de las partículas

Cuadro 1.1: Características principales del plasma presente en las magnetósferas planetarias.

Planeta	Tamaño de la magnetósfera ( $R_p$ ) <sup>a</sup>	Composición iónica y fuente dominante <sup>b</sup>	Densidad máxima ( $cm^{-3}$ )	Agente que controla el movimiento del plasma <sup>c</sup>	Tiempo de residencia de las partículas energéticas <sup>d</sup>
<i>Mercurio</i>	1.4	H <sup>+</sup> (VS)	1	VS	?
<i>Tierra</i>	8-12	O <sup>+</sup> , H <sup>+</sup> , N <sup>+</sup> , He <sup>+</sup> (I)	1000-4000	VS (fuera) R (dentro)	días-horas
<i>Júpiter</i>	50-100	O <sup>n+</sup> , S <sup>n+</sup> , SO <sub>2</sub> <sup>+</sup> , Cl <sup>+</sup> (S)	>3000	R	10-100 días
<i>Saturno</i>	16-22	O <sup>+</sup> , H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> , H <sup>+</sup> (A, S)	~100	R	30 días-años
<i>Urano</i>	18	H <sup>+</sup> (ATM)	3	VS y R	1-30 días
<i>Neptuno</i>	23-26	N <sup>+</sup> , H <sup>+</sup> (S)	2	R y VS?	~ 1 día

<sup>a</sup>Se refiere al tamaño observado en el lado día y está medido en radios planetarios: Mercurio (2 440 km), Tierra (6 378km), Júpiter (71 900 km), Saturno (60 268 km), Urano (25 560 km), Neptuno (24 750 km).

<sup>b</sup>Las principales fuentes de partículas son: el viento solar (VS), la ionósfera de los planetas (I), los satélites (S), los anillos (A) y la atmósfera de los planetas (ATM). En el caso de los satélites se tiene que: Io (Júpiter); Encelado, Dione, Mimas, Titán (Saturno) y Tritón (Neptuno) son los que contribuyen mayormente a la población observada de partículas en sus respectivas magnetósferas.

<sup>c</sup>Los agentes que controlan el movimiento del plasma dentro de las magnetósferas planetarias pueden ser el viento solar (VS) y la rotación (R).

<sup>d</sup>Los tiempos de residencia se calculan de acuerdo con los procesos de pérdida (disociación) que operan en la región magnetosférica. Estos tiempos están tomados del trabajo de Blanc et al. [2002].

altamente energéticas observadas en las magnetósferas.

- Existen varios efectos que deben ser tomados en cuenta para relacionar la teoría con las observaciones. Estos son: las pérdidas por procesos de radiación o ionización; la emisión de partículas secundarias y mecanismos de preaceleración.
- Las fuentes potenciales de energía y de partículas más importantes que operan en la magnetósfera planetaria en estudio.

### *Fuentes de partículas y de energía*

Las magnetósferas planetarias inyectan átomos neutros rápidos, plasmas y partículas energéticas hacia el medio interplanetario. Éste a su vez -a través de la presión supersónica del viento solar, de campos magnéticos, etc.- ayuda a establecer la configuración magnetosférica que incluye al frente de choque, a la magnetopausa, a la magnetocola y aparentemente energiza eventos dinámicos como las subtormentas magnetosféricas (reconfiguraciones magnetosféricas globales que resultan de la conversión de la energía electromagnética en aceleración y calentamiento de partículas).

Las fuentes importantes de partículas energéticas que contribuyen en alguna medida a la población observada en una magnetósfera planetaria son las siguientes: a) el viento solar; b) las partículas solares energéticas; c) los rayos cósmicos; d) las partículas secundarias que se producen en las interacciones de los rayos cósmicos con la atmósfera planetaria, con los anillos y con los satélites; e) el gas ionizado que proviene de la ionósfera planetaria; f) el gas “salpicado” de los anillos y satélites por el bombardeo de partículas y fotones, y; g) el gas emitido por los volcanes o el degasado por los satélites.

Las fuentes potenciales y observadas de partículas así como los mecanismos de aceleración se resumen en el Cuadro 1.2 para todas las magnetósferas del Sistema Solar [Möbius, 1994]. Todas las poblaciones de partículas finalmente sufren difusión radial como resultado de la combinación de los procesos de transporte y de aceleración que determina las distribuciones en el anillo de corriente y en los cinturones de radiación de las magnetósferas internas. Solamente las partículas inyectadas por

CRAND (*Cosmic Ray Albedo Neutron Decay*) o por la componente anómala de los rayos cósmicos (ACR, *Anomalous Cosmic Rays*) son lo suficientemente energéticas desde el inicio que no necesitan procesos de aceleración adicionales. La fuente de CRAND parece ser consistente con la distribución de protones más energéticos en la magnetósfera de la Tierra [Hess, 1968], [Lavine and Vette, 1970] y Schardt and McDonald [1983] han mostrado que una producción CRAND en los anillos es compatible con la distribución de protones observada en la magnetósfera de Saturno. Los iones ACR han sido reportados en la magnetósfera de la Tierra [Grigorov et al., 1991]. Las fuentes restantes requieren de una aceleración inicial en la magnetósfera externa que se escala en  $E/Q$  (energía/carga) para explicar el espectro observado de energía. Para la mayoría de las magnetósferas este paso es inferido indirectamente a partir de la inhabilidad de la difusión radial pura para reproducir las observaciones. Solamente en la magnetósfera de la Tierra los pasos individuales han sido marcados con mediciones en todas las regiones clave.

También deben ser tomados en cuenta el campo eléctrico convectivo del viento solar ( $E_{CON}$ ) y el campo eléctrico de corrotación ( $E_{\omega R}$ ) debido a la rotación planetaria. En el Cuadro 1.3 los efectos de estos campos son considerados para todas las magnetósferas a través de las ecuaciones:

$$E_{\omega R} = B(R)\omega R \quad (1.1)$$

En la Ec. 1.1,  $B(R)$  es el campo magnético medido a una distancia  $R$  del planeta,  $\omega$  es la frecuencia angular de rotación del planeta,

$$E_{CON} = \alpha B_{SW}(r)v_{SW} \quad (1.2)$$

Donde  $B_{SW}$  es el campo magnético interplanetario local y  $v_{SW}$  es la velocidad del viento solar medida a la distancia  $r$  del planeta. El factor  $\alpha$  denota la eficiencia con la cual el campo magnético interplanetario (del viento solar) se acopla a la magnetósfera.

Adicionalmente se dan el potencial convectivo sobre el polo y la energía total almacenada por la corrotación. Mientras que en las magnetósferas de la Tierra y

Cuadro 1.2: Fuentes de iones y mecanismos de aceleración en las magnetósferas planetarias.

Fuente	Aceleración	Región	Planeta					
			M	T	J	S	U	N
<i>Ionósfera</i>	E    B	Aurora		X	I	I	I	I
	Reconexión	Magnetocola		X	I	I	X	I
	Difusión radial	Magnetósfera interna		X	X	X	X	X
<i>Viento Solar</i>	Reconexión	Magnetocola	X	X	I	I	X	I
	Difusión radial	Magnetósfera interna		X	X	X	X	X
<i>CRAND</i>	Difusión radial	Magnetósfera interna		X		X		
<i>ACR</i>	Difusión radial	Magnetósfera interna		X				
<i>Satélites</i>	Reconexión	Magnetocola			I	I		I
	Difusión radial	Magnetósfera interna			X	X		X
<i>Anillos</i>	Reconexión	Magnetocola				I		
	Difusión radial	Magnetósfera interna				X		

NOTA: “X” indica evidencia observacional directa tanto de la fuente como del mecanismo de aceleración de partículas; “I” indica inferencia.

Los planetas son: M (Mercurio), T (Tierra), J (Júpiter), S (Saturno), U (Urano) y N (Neptuno).

Cuadro 1.3: Fuentes de energía para el transporte y la aceleración de partículas.

Planeta	$B_{\text{sup}}$ (T)	Periodo (hr)	Viento solar		Rotación planetaria		$E_{\omega R} / E_{\text{CON}}$ magnetopausa
			$E_{\text{CON}}$ ( $\text{V m}^{-1}$ )	$U_{\text{max}}$ (KV)	$E_{\omega R}$ ( $\text{V m}^{-1}$ )	$W_{\text{max}}$ (keV)	
<i>Tierra</i>	$3.0 \times 10^{-5}$	24	$5.0 \times 10^{-4}$	9.6	$1.4 \times 10^{-4}$	$4.4 \times 10^{-4}$	0.3
<i>Mercurio</i>	$2.6 \times 10^{-7}$	1406	$1.3 \times 10^{-3}$	1.4	$3.4 \times 10^{-7}$	$4.1 \times 10^{-10}$	$2.6 \times 10^{-4}$
<i>Júpiter</i>	$9.6 \times 10^{-4}$	9.5	$9.6 \times 10^{-5}$	114.2	$4.2 \times 10^{-3}$	11	43.7
<i>Saturno</i>	$4.9 \times 10^{-5}$	10.1	$5.3 \times 10^{-5}$	23.7	$8.2 \times 10^{-4}$	1.4	15.6
<i>Urano</i>	$9.1 \times 10^{-6}$	17.1	$2.6 \times 10^{-5}$	3.7	$7.5 \times 10^{-5}$	$4.7 \times 10^{-2}$	2.9
<i>Neptuno</i>	$1.8 \times 10^{-5}$	16.3	$1.7 \times 10^{-5}$	3.3	$7.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-1}$	4.2
<i>Pulsar</i>	$1.0 \times 10^8$	$2.8 \times 10^{-5}$	0.0	0.0	$2.8 \times 10^8$	$v \rightarrow c$	sólo rotación

de Mercurio el campo eléctrico convectivo es el dominante, en las magnetósferas de Júpiter y de Saturno el campo eléctrico corrotacional es el más importante. En las magnetósferas de Urano y Neptuno ambas fuentes de energía parecen contribuir de manera significativa.

La importancia relativa de ambas fuentes de energía depende del coeficiente de acoplamiento,  $\alpha$ , entre el viento solar y la magnetósfera. En el Cuadro 1.3 se ha incluido la magnetósfera de un pulsar sólo por comparación, en la cual únicamente la rotación juega un papel en el transporte de partículas y en la energización (no hay un flujo externo importante como el viento solar). En principio, las partículas pueden ser aceleradas a lo largo del cilindro de luz<sup>1</sup> por lo que la ganancia de energía está determinada por efectos relativistas. En el Sistema Solar, la magnetósfera de Júpiter es lo más cercano a la magnetósfera de un pulsar.

<sup>1</sup>El “cilindro de luz” es un término comúnmente empleado en Astronomía y se refiere al cilindro cuyo eje es el eje de rotación de una estrella de neutrones (o de un pulsar) y cuyo radio es tal que la velocidad de un plasma que rota con esa estrella igualaría a la velocidad de la luz en la superficie del cilindro.

## 1.1. Mecanismos de aceleración generales

Los mecanismos de aceleración pueden ser clasificados en cuatro grandes categorías [Gallagher et al. 2005].

### 1.1.1. Aceleración adiabática y otras formas de aceleración no estocástica

El mecanismo más simple es la aceleración sistemática en un campo electrostático paralelo al campo magnético. Sin embargo, existe un argumento observacional en contra de este mecanismo: cuando las partículas cargadas tienen una caída de potencial todas ellas ganan la misma energía. Observacionalmente las partículas rápidas tienden a mostrar un espectro de energías que sigue una ley de potencias, y no un espectro cuasimonocromático que se esperaría de la aceleración electrostática.

Otro tipo de aceleración ocurre cuando los invariantes adiabáticos son conservados durante el movimiento en campos magnéticos no uniformes. Recuérdese, por ejemplo, que en la magnetósfera terrestre intermedia las partículas cargadas son movidas hacia regiones de campo magnético intenso -a través de campos eléctricos convectivos- conservando el *primer invariante adiabático*. Para partículas que derivan a lo largo de una línea de campo magnético y luego son transportadas hacia líneas de campo más cortas, su energía paralela se incrementa conservando el *segundo invariante adiabático*. Finalmente, si los cambios en agentes externos no ocurren más rápido que los periodos completos para los arrastres de las partículas que derivan alrededor de la Tierra, el *tercer invariante adiabático* tiende a conservarse.

La aceleración “centrífuga” [Cladis, 1986; Horwitz et al., 1994] es aquella en la cual la convección de líneas de campo magnético con direcciones variables “azota” las partículas hacia afuera a lo largo de las líneas de campo. Esta energización puede ser relevante para la aceleración de flujos en los eventos de subtormentas, como en la magnetósfera terrestre y, quizás, en magnetósferas que rotan rápidamente como la de Júpiter. Una característica de este tipo de aceleración es que la velocidad ganada tiende a ser constante para las diferentes especies iónicas.

Otra aceleración no estocástica por campos eléctricos paralelos ocurrida en el



plasma ionosférico puede resultar de los efectos de los fotoelectrones. En este fenómeno, para limitar la corriente neta y mantener la cuasineutralidad en el transporte de plasma polar ionosférico ante la presencia de fotoelectrones que se mueven a mayores alturas, se genera un campo eléctrico hacia arriba para suprimir el flujo de fotoelectrones; consecuentemente los iones son acelerados en la misma dirección del campo eléctrico.

### 1.1.2. Aceleración estocástica y almacenamiento de energía magnética

Un proceso fundamental en los plasmas es el almacenamiento de energía en campos magnéticos y su subsecuente conversión a energía cinética de las partículas. La idea que se tiene es que la reconexión magnética juega un papel clave en este proceso que fue advertido primero por Giovanelli [1947] para explicar la aceleración de partículas en fulguraciones solares.

La reconexión magnética involucra una ruptura de la aproximación magnetohidrodinámica ideal del campo congelado en la cual las partículas cargadas que están conectadas por una línea de campo magnético en un instante de tiempo dado, debe permanecer conectada por una línea de campo por todo el tiempo. Este proceso induce campos eléctricos paralelos al campo magnético y entonces acelera a las partículas del plasma.

Consecuentemente se llega al concepto de aceleración estocástica (o aceleración de Fermi de segundo orden). La idea principal es que el campo eléctrico es aleatorio de alguna manera, y que, aunque las partículas ganan y pierden energía en cada interacción, en promedio las partículas ganan energía. El primero de estos mecanismos fue explorado en detalle por Fermi [1949] quien involucró colisiones de rayos cósmicos con nubes interestelares magnetizadas, en donde se ganaba o perdía energía dependiendo de si el “espejo magnético” se acercaba o alejaba.

La aceleración estocástica, por otro lado, se ha sabido que existe y está presente en la región “río abajo” de los choques, pero como este mecanismo trabaja en escalas temporales mucho mayores que las correspondientes al mecanismo de Fermi [1954] de primer orden, ha sido frecuentemente despreciado en estudios de aceleración

de partículas relativistas [véase por ejemplo Ostrowski and Schlickeiser, 1993]. Sin embargo, algunos autores han aplicado exitosamente este mecanismo al estudio de partículas energéticas en fulguraciones solares [por ejemplo Selkowitz and Blackman, 2004].

Los requisitos esenciales de un mecanismo de aceleración estocástica son: 1) interacciones elementales que causan que la energía de las partículas cambie debido al efecto betatrón [Swann, 1933], a la reflexión de las inhomogeneidades magnéticas [Fermi, 1949] o al amortiguamiento de transición [Shen, 1965]; 2) dispersión efectiva atribuida a las interacciones onda-partícula y, 3) un proceso aleatorio (tratamiento estadístico) basado en una aproximación de la ecuación de Fokker-Planck o en una aproximación cuasilineal que implica que la aceleración puede ser considerada como una difusión en el espacio de momentos. Este segundo mecanismo puede ser o no independiente de los cambios de energía.

En el mecanismo de aceleración estocástica no es necesariamente obvio que en promedio se gane energía (en lugar de perderla). En términos termodinámicos, la energía de las partículas debería tender hacia la energía promedio o hacia la temperatura efectiva de los movimientos turbulentos. Además, es necesario que la partícula complete un radio de giro (movimiento girotrópico) para que pueda resonar con la onda correspondiente y entonces ser acelerada o desacelerada [Chew et al., 1969]. Por ejemplo, esta aproximación no puede explicar el rápido incremento de energía de los iones de oxígeno localizados en la ionósfera de Venus, pues los radios de giro (y los periodos) son muy grandes en comparación con el tiempo empleado para acelerarlos [Pérez de Tejada et al., 1995]. Para esos casos, es necesario desarrollar una nueva formulación basada en las fluctuaciones estocásticas de algún campo de fuerzas, en lugar del movimiento estocástico de giro descrito por la partícula a través de las líneas de campo magnético.

En el presente trabajo se propone un mecanismo de aceleración en donde la estocasticidad recae en un campo de fuerzas cuya naturaleza puede ser o no electromagnética y la ecuación de movimiento a resolver incluye -entre otras- a la fuerza de este campo estocástico.

### 1.1.3. Aceleración por choques

La aceleración de partículas por ondas de choque puede ser observada en los frentes de choque planetarios y en los choques “viajeros” interplanetarios. Por ejemplo, puede ocurrir en el frente de choque terrestre, dentro del viento solar conducido por eyecciones de masa coronal, en fulguraciones solares, en remanentes de supernova (SNR, *Supernova Remnants*), en jets de Núcleos Activos de Galaxias (AGN, *Active Galactic Nuclei*), en choques relativistas asociados con estallidos de rayos  $\gamma$  y en el gas que se encuentra entre los cúmulos de galaxias.

Existen diferentes mecanismos físicos involucrados en la aceleración de partículas en los choques: la aceleración por arrastre (algunas veces llamada aceleración libre de dispersión) del campo eléctrico de inducción en el frente de choque; la aceleración por choque difusivo debido a las repetidas reflexiones en el frente de choque; la aceleración estocástica en la región de turbulencia localizada detrás del frente de choque y la aceleración por compresión difusiva que no ocurre exactamente en los choques sino cuando el plasma es gradualmente comprimido [Schatzmann, 1963; Jones, 1994; Jokipii et al., 2001].

### 1.1.4. Aceleración turbulenta y por ondas de plasma

Dentro de este contexto, la relación onda-partícula es expresada a través de las condiciones de resonancia que dependen de la frecuencia de la onda, de la velocidad de la partícula y del número de ondas posibles que interactúan con la partícula. Cuando las ondas son amortiguadas, su energía es transferida a las partículas y generalmente se espera que la energía de la onda se convierta en calor, esto es, que se distribuya entre las partículas térmicas. Sin embargo, si sólo una fracción de las partículas puede interactuar con las ondas, entonces la energía debe irse inicialmente en esa fracción. Estos mecanismos de aceleración por ondas son útiles para explicar la energización de los electrones en los anillos de radiación de Van Allen, para los estallidos de radio solares tipo III, entre otros.

Además de las condiciones de resonancia es necesario considerar las inestabilidades en el plasma que llevan también a la aceleración de las partículas. Estas inestabi-

lidades pueden ser clasificadas generalmente en cuatro categorías: 1) inestabilidades de flujo, 2) inestabilidades de Rayleigh-Taylor, 3) inestabilidades universales e, 4) inestabilidades cinéticas. Como ejemplos se citan la disrupción de la magnetocola terrestre -posiblemente ocasionada por inestabilidades- que lleva a la liberación impulsiva de energía en la forma de partículas aceleradas, la inestabilidad derivada de la compresión de la magnetofunda terrestre por el viento solar que calienta al plasma de la funda, entre otros.

En cuanto a la turbulencia hidromagnética ésta es regularmente tratada en la aproximación cuasilineal [por ejemplo Schlickeiser, 1989] de la cual se obtiene la ecuación de Fokker-Planck con un coeficiente de difusión cuya magnitud y forma depende del espectro de potencias y de otras características de la turbulencia magnética en el plasma. Generalmente, la ecuación resultante es bastante complicada y para resolverla se requieren de algunas simplificaciones [Park and Petrosian, 1996]. A este tipo de aceleración muchas veces se le llama aceleración estocástica.

### 1.1.5. Mecanismos de aceleración de partículas en magnetósferas planetarias

Uno de los principales problemas en la década de los años sesenta fue explicar de qué manera la energía del viento solar podía ser transferida al interior de la magnetósfera terrestre. Hoy se sabe que es el campo magnético interplanetario el que desempeña el papel más importante en dicha transferencia. En particular, Dungey [1950] propuso el siguiente mecanismo: Si el campo magnético interplanetario tiene una componente dirigida hacia el sur, éste puede conectarse con las líneas de alta latitud del campo dipolar de la Tierra, al frente de la magnetósfera. Una vez que esto sucede las líneas así unidas son arrastradas por el viento solar hacia la parte posterior, formando una estructura llamada cola magnética. Esta estructura ha sido detectada utilizando los instrumentos a bordo de los satélites artificiales.

Speiser [1965] amplió este concepto sugiriendo que las líneas de campo de la cola magnetosférica pueden reconectarse y regresar de nuevo a la configuración de líneas de campo dipolar interno que existía antes de la conexión. Esta aniquilación magnética provoca que el plasma fluya hacia una hoja neutra y así la energía magnética

liberada se va en calentar o en acelerar algunas partículas presentes en el plasma magnetosférico [Jardine and Allen, 1996]. Se ha sugerido que la aceleración de partículas en las hojas de corriente, ocurre de una manera explosiva en la magnetocola, causando perturbaciones magnéticas polares, conocidas también como subtormentas polares y la aparición de auroras [Perkins, 1968].

La reconexión magnética también ha sido propuesta para explicar el origen de las explosiones de electrones de altas energías ( $\sim 600$  keV) descubiertos en la magnetósfera de Mercurio [Eraker and Simpson, 1986]. Estos autores encontraron evidencia de la aceleración de partículas dentro de la magnetósfera de Mercurio durante la reconexión magnética ocurrida en la magnetocola y sugirieron que había una liberación rápida de energía magnética a través de las inestabilidades en el plasma. Además de estos mecanismos, se han propuesto otros para explicar la energización de partículas en magnetósferas planetarias, por ejemplo, las partículas que se mueven en espiral a lo largo de las líneas de campo magnético son aceleradas a través de interacciones resonantes con ondas de plasma [Abe and Nishida, 1986; Barbosa 1986]

Los mecanismos de aceleración pueden ser dependientes de la masa y de la energía de las partículas. Entre ellos se incluyen la difusión radial y del ángulo de paso, intercambio de carga y varios procesos que involucran la recirculación espacial de iones. La difusión se refiere a la extensión de una distribución de partículas de plasma tanto en el espacio de velocidades como en el de configuración a través de la acción de campos que fluctúan aleatoriamente. El intercambio de carga se refiere a un proceso en el cual una partícula neutra que se mueve a una velocidad  $v_n$  intercambia una carga con un ión que se mueve a la velocidad  $v_i$ , de allí que se modifica la distribución de energía en el plasma y proporciona una fuente de neutros que se mueven a la velocidad del plasma local. Este proceso en la Tierra sirve como un mecanismo de pérdida para los iones del anillo de corriente. En Júpiter este intercambio de carga resulta en un mecanismo de transporte importante. En Saturno los neutros liberados de los anillos y de los satélites también participan en este intercambio.

La recirculación es un mecanismo para acelerar iones hasta alcanzar altas energías. Una idea, que todavía no ha sido confirmada por las observaciones, fue propuesta por Nishida [1976] quien observó que los iones del viento solar (con energías

de algunos eV) podrían ser adiabáticamente acelerados hasta  $> 1$  keV mediante la difusión hacia adentro en Júpiter pero que esta aceleración adiabática podría no explicar la presencia de iones con energías  $> 1$  MeV en el resto de la magnetósfera.

Un proceso ligeramente distinto fue discutido por Barbosa et al. [1984] para la aceleración de iones pesados. Ellos se apoyaron en que el intercambio de carga cerca de la órbita de Io produce iones pesados que son lanzados en trayectorias balísticas. Estas partículas pueden sufrir un segundo intercambio de carga en la magnetósfera externa de Júpiter, donde la velocidad del flujo azimutal energizaría a los iones hasta alcanzar cientos de keV, finalmente la difusión adiabática hacia adentro los podría acelerar a energías de varios MeV.

Barbosa [1994] desarrolló un modelo en el cual combinó la aceleración estocástica y la difusión radial en una ecuación para iones energéticos que interactúan con ondas MHD en la magnetósfera externa de Júpiter. Sus resultados proporcionaron una explicación cuantitativa de la componente iónica de alta energía observada en la magnetósfera de Júpiter.

Summers y Chun-yu [2000] han examinado el mecanismo de aceleración transitorio de electrones mediante ondas magnetohidrodinámicas rápidas en la magnetósfera interna de la Tierra. Sus cálculos mostraron que las ondas rápidas cuyas frecuencias se encuentran en los rangos de  $7 - 22$  MHz a  $2 - 7$  MHz y con campos magnéticos observados de  $10 - 20$  nT pueden acelerar a los electrones hasta alcanzar energías del orden de MeV en pocas horas.

Otros mecanismos de aceleración incluyen la interacción de ondas de Alfvén con una inhomogeneidad del plasma en una dirección transversal al campo magnetostático [Mottez et al., 2004]. En ese estudio los autores mostraron que las ondas de Alfvén se propagan sobre gradientes de densidad muy marcados, y gracias a los efectos inerciales, conducen a la formación de un campo eléctrico paralelo al campo magnético. Este campo paralelo es capaz de acelerar electrones a energías por arriba de keV en una distancia de algunos cientos de longitudes de Debye, y que además induce la formación de haces de electrones.

Los incrementos significativos e intermitentes de flujos de electrones relativistas en la magnetósfera terrestre producen una gran variedad de fenómenos que afectan,

por ejemplo, a las comunicaciones. Durante una tormenta geomagnética, los flujos de electrones se incrementan por varios órdenes de magnitud y no es claro cómo se realiza la aceleración. El arrastre en la dirección amanecer/atardecer -paralelo o antiparalelo al campo eléctrico magnetosférico- puede acelerar partículas. Esta aceleración lleva a energías del orden de 100 keV. Sin embargo, es necesario que otro mecanismo actúe para que los electrones alcancen las energías medidas después de una tormenta geomagnética. Se han propuesto diversos mecanismos que se clasifican en dos clases [Kivelson, 2005]: a) las que describen cómo una población de partículas puede ser conducida hacia el interior de la magnetósfera y luego acelerada por la difusión hacia adentro a través de fluctuaciones de campos eléctricos o magnéticos de frecuencia ultrabaja (ULF, menor que la girofrecuencia de los iones); b) las que describen maneras en las cuales una población preexistente puede ser acelerada *in situ* por ondas de muy baja frecuencia (VLF, mayor que la girofrecuencia de los iones).

#### 1.1.5.1. Posibles mecanismos de aceleración aplicados a la magnetósfera de Saturno

Saturno es un planeta que dinámicamente se parece a Júpiter y la Tierra. Como Júpiter, está dominado por la rotación, así que es razonable buscar evidencia de intercambio como un mecanismo de transporte. La densidad del plasma en Saturno es generalmente menor que la de Júpiter, especialmente en la magnetósfera interna, lo cual implica que las tensiones inerciales unidas a la rotación son menos significativas. El campo magnético del lado día, por ejemplo, está ligeramente distorsionado por la rotación. De particular importancia es la variedad de fuentes de partículas y la presencia de los anillos conteniendo materia sólida que sirve como fuente y sumidero de partículas cargadas.

Posibles explicaciones de la población observada de partículas energéticas en la magnetósfera de Saturno implican la liberación de la energía magnética que calienta la componente iónica del plasma y después acelera a los electrones hasta alcanzar energías del orden de 2 MeV [Schardt et al., 1985]. Otra posibilidad es la magneto-cola de Saturno. En esta región, como en la Tierra y en Júpiter, los cambios en la

configuración de la cola inducida por perturbaciones interplanetarias pueden conducir a la aceleración de iones y de electrones a varios cientos de keV [Krimigis et al., 1981; 1982].

Debido a que Saturno es muy parecido a la Tierra, las respuestas a los fenómenos conducidos por el viento solar probablemente sean semejantes entre sí. No es claro que la reconexión en el lado día lleve a la formación de subtormentas, pero hay indicios de que es verdad. Hay algunos reportes sobre características aurorales en Júpiter [Gladstone et al., 2002], de firmas de reconexión a pequeña escala en Júpiter [Grodent, 2004; Grodent et al., 2004] y de la variabilidad auroral en Saturno [Grodent, 2004]. Algunas de estas características de la variabilidad podrían estar relacionadas con la reconexión de tubos de flujo. Si las subtormentas son significativas, los intervalos de tormentas podrían estar también controlados por la inusual reconexión en el lado día. Además sería posible pensar en que la aceleración está causada por ondas de muy baja frecuencia (VLF) como parece ser en el caso terrestre.

A diferencia de los mecanismos de aceleración estocástica tradicionales (ver Sección 1.1.2), en este trabajo se propone que la aceleración producida por un campo de fuerzas estocástico [Durand-Manterola, 2003] es capaz de energizar a la población de partículas en la magnetósfera interna [Martínez-Gómez et al., 2006] y externa de Saturno en unos cuantos segundos. Para explicar la dinámica de los granos de polvo neutro en los anillos de Saturno, se propone que la fuerza gravitacional estocástica entre granos de polvo es una de las responsables.

Este mecanismo de aceleración estocástica es una manera alternativa de estudiar el problema de energización de partículas (cargadas y neutras) en cualquier ambiente astrofísico. Las particularidades están en las fluctuaciones de campo magnético medidas en la región de interés y en las características de las fuentes de partículas. Es importante destacar que la ecuación fundamental en la que se basa el modelo es la ecuación de movimiento para una partícula, por lo que no es necesario plantear y resolver las ecuaciones magnetohidrodinámicas asociadas al sistema en estudio.

En este capítulo se revisaron los mecanismos de aceleración de partículas más



comunes en Astrofísica, entre ellos destacan la aceleración estocástica, la aceleración por ondas, la aceleración por choques, entre otros. Además se describieron las fuentes más importantes que contribuyen a la población observada de partículas en una magnetósfera planetaria. Finalmente se explicaron los posibles mecanismos de aceleración de partículas que actúan en el caso particular de la magnetósfera de Saturno. El siguiente capítulo tratará sobre las observaciones realizadas, por las naves Voyager y Cassini, de la población de partículas energéticas en la magnetósfera de Saturno.

## Capítulo 2

# Población de partículas cargadas y neutras en la magnetósfera de Saturno

Las primeras observaciones *in situ* del campo magnético y de la magnetósfera de Saturno fueron obtenidas por la nave Pioneer 11 en Septiembre de 1979. Las investigaciones revelaron que la magnetósfera es similar a la terrestre y a la Joviana, pero que tiene físicamente diferencias notables que van desde la simetría inusual del campo magnético de Saturno hasta las fuentes y sumideros de plasma y de partículas energéticas para la generación de ondas de radio kilométricas (SKR, *Saturn Kilometric Radiation*). Acuña et al. [1980] aproximaron este campo magnético interno por un dipolo de momento  $0.2 \text{ Gauss } R_S^3$  ( $1 R_S = 6.0268 \times 10^9 \text{ cm}$ ) que está confinado y distorsionado por la presión dinámica del viento solar, lo que genera una magnetocola extensa.

Además se observaron tres firmas<sup>1</sup> de la presencia de un frente de choque a través del instrumento de plasma y del magnetómetro cerca del meridiano día del planeta a una distancia de  $24 R_S$ ,  $23 R_S$  y  $19.9 R_S$ . La primera de estas firmas fue

---

<sup>1</sup>Las "firmas" (o huellas) en este contexto se refieren a los efectos producidos, por algún fenómeno físico, sobre las propiedades que describen al sistema en estudio. Estas firmas pueden verse reflejadas como un incremento o decremento en la temperatura (o densidad) del plasma, en la inversión de polaridad de algún componente del campo magnético, entre otros.

también identificada como una pequeña explosión de electrones con energías  $>0.04$  MeV. La magnetopausa fue observada por los mismos instrumentos en  $17.2 R_S$  y fue confirmada como la frontera efectiva para atrapar partículas energéticas externas.

El Pioneer 11 también proporcionó información sobre la población de iones energéticos en el intervalo de 100 eV hasta 8 keV a distancias de  $4 R_S$  a  $16 R_S$ , medidas desde Saturno, y a una distancia de  $1 R_S$  del plano ecuatorial [Frank et al., 1980]. Estos datos indicaron la presencia de una magnetósfera densa ( $> 1 \text{ cm}^{-3}$ ) y que corrota rígidamente a una distancia de  $10 R_S$ . La densidad máxima de iones ( $\sim 50 \text{ cm}^{-3}$ ) fue medida cerca de las órbitas de Tetis y de Dione, indicando que estaban rodeados por el toro de plasma.

Las siguientes observaciones de la magnetósfera fueron hechas por el Voyager 1 en Noviembre de 1980, por el Voyager 2 en Agosto de 1981 y por Cassini en Julio de 2004. Las diversas investigaciones científicas realizadas por cada nave contribuyen grandemente al entendimiento de la magnetósfera de Saturno o magnetósfera Kroniana.

En el presente Capítulo se describirán las propiedades más importantes observadas en la población de partículas cargadas y neutras en esta magnetósfera. Esta descripción está basada en las mediciones realizadas hace más de dos décadas por el Voyager 1 y el Voyager 2, y en las recientes mediciones realizadas por la nave Cassini.

## 2.1. Antecedentes: Resultados de la misión Voyager

Durante los encuentros de las naves Voyager con la magnetósfera de Saturno, el estado de la magnetósfera fue más quieto pero con variaciones temporales significativas [Krimigis et al., 1983]. Las trayectorias de estas naves no permitieron que el instrumento de plasma (PLS, *Plasma Spectrometer*) confirmara el comportamiento corrotante de la magnetósfera más allá de  $4 R_S$  [Bridge et al., 1982; Sittler et al., 1983; Richardson, 1986].

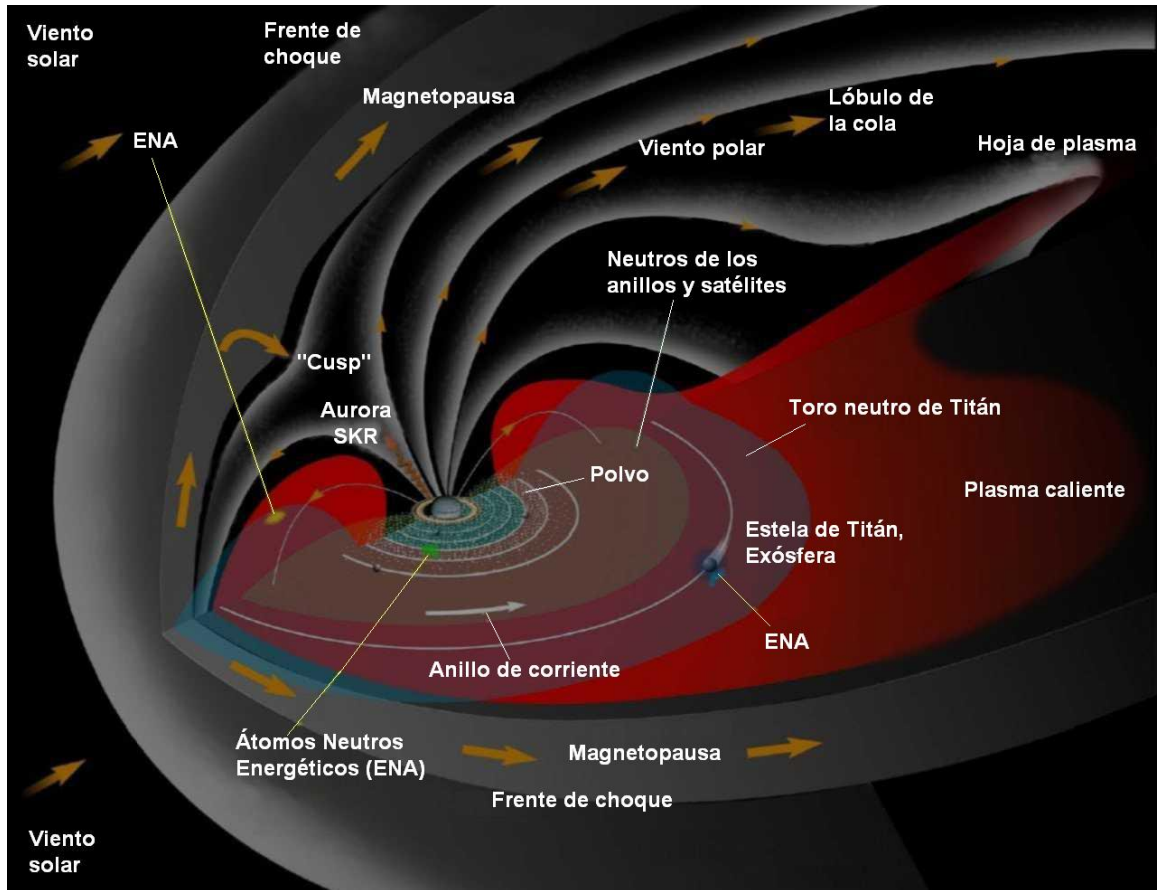


Figura 2.1: Esquema general de la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Pioneer y de los Voyager 1 y 2 [Krimigis, 1982].

Se identificaron cuatro regiones: la magnetósfera externa, la "ranura", la magnetósfera interna y los anillos. El esquema general de la configuración magnetosférica se muestra en la Figura 2.1.

La magnetósfera externa existe a partir de los  $7.5 R_S$  hasta  $17 R_S$  y se caracteriza por ser rica en oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) y en hidróxido ionizado ( $OH^+$ ). La "ranura" se ubica entre  $4 R_S$  y  $7.5 R_S$  y es una área que carece de partículas que constituyen a la magnetósfera, quizá por la presencia de los satélites Dione, Tetis, y Encelado. La magnetósfera interna está dentro de los  $4 R_S$  y contiene partículas de altas energías. La región de los anillos se extiende hasta  $10 R_S$  y está desprovista de partículas que constituyen a la magnetósfera (esto es un resultado del hecho de que cuando las partículas chocan contra los elementos de los anillos, éstos atrapan a las partículas y les impiden escapar).

### 2.1.1. Características de la población de partículas

En cuanto a la población de partículas energéticas se determinó que:

1. La magnetósfera interna de Saturno, así como la terrestre, se distingue por la presencia de una población estable de protones atrapados con energías superiores a varias decenas de MeV [Van Allen, 1984].
2. La existencia de los protones de alta energía en esta región se debe a que son los productos de decaimiento de los neutrones que se originan en las interacciones nucleares de los rayos cósmicos primarios, principalmente en el material de los anillos A y B [Fillius et al., 1980].
3. Los protones con energías en el intervalo  $0.028 \text{ MeV} < E_P < 0.5 \text{ MeV}$  fueron encontrados en abundancia en el interior de las órbitas de Encelado y de Mimas.
4. Los datos de plasma [Bridge et al. 1981, 1982] confirman la existencia de un toro de oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) a la distancia de las órbitas de Dione y Tetis, y también la presencia de helio atómico ionizado ( $He^+$ ) [McDonald et al. 1980] con energías superiores a 3 MeV y a distancias más allá de  $6 R_S$ .
5. Krimigis et al. [1982] encontraron protones ( $H^+$ ), hidrógeno molecular ionizado ( $H_2^+$ ,  $H_3^+$ ), helio atómico ionizado ( $He^+$ ), carbono atómico ionizado ( $C^+$ ) y oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ). La presencia de este tipo de iones moleculares sugiere una fuente ionosférica, pero el hecho de que también se encuentren abundancias relativas de helio atómico ionizado ( $He^+$ ), carbono atómico ionizado ( $C^+$ ) y oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) hace pensar que la fuente es el viento solar.
6. Los satélites interiores y los anillos de Saturno son esenciales para comprender la física de la magnetósfera en al menos tres maneras [Frank et al. 1980], como absorbedores de partículas energéticas [por ejemplo, Simpson et al., 1980; Roussos et al., 2005; Paranicas et al., 2005], como fuentes de partículas secundarias, y como fuentes de gas y polvo (neutro y parcialmente ionizado).

7. El perfil temporal de energía de los iones de baja energía es diferente al de las mediciones de iones de alta energía. Obviamente estos espectros de iones cambian dentro de la magnetósfera como una función de la distancia radial así como del tiempo local. La forma de estos espectros de energía puede ser descrita por una distribución Maxwelliana para las bajas energías y por una distribución de ley de potencias para energías  $> 10^3$  eV. Estas dos formas espectrales pueden combinarse en una distribución kappa. A partir de esos ajustes espectrales se encontró una temperatura característica de  $6 \times 10^8$  K (55 keV) [Krimigis, 1982].
8. Se encontraron dos componentes espectrales en la magnetósfera interna [Krimigis and Armstrong, 1982], una población de baja-energía ( $< 500$  keV) descrita por una ley de potencias con índice 2.5 y una parte de alta energía ( $> 16$  MeV) con un perfil similar al esperado del CRAND (*Cosmic Ray Neutron Albedo Decay*) [Fillius and McIlwain, 1980; Krimigis, 1981]. Esto es indicativo de la presencia de distintas fuentes de partículas que actúan en el sistema de Saturno: el viento solar, la ionósfera planetaria, Titán, la superficie y la atmósfera de los satélites de hielo y los anillos [Eviatar, 1984 ; Jurac, 2002; Krupp, 2005; Krimigis et al., 2005; Sittler et al., 2006].
9. La frontera entre la magnetósfera interna y externa no está muy marcada y cubre un intervalo de  $6 R_S$  a  $10 R_S$  [Schardt et al., 1984].
10. La población de partículas energéticas en la magnetósfera externa consiste principalmente de electrones, protones y algunos iones pesados con energías  $< 2$  MeV a  $10 R_S$  y  $< 1$  MeV cerca de la magnetopausa.
11. Los tiempos de residencia -promedio- para iones energéticos en la magnetósfera son  $\sim 10 - 100$  días. Hamilton et al. [1983] determinaron un límite de  $\sim 23$  días para moléculas ionizadas en la magnetósfera externa. Estos tiempos dependen de los estados cuánticos vibracionales y de los procesos de fotodisociación.

#### 2.1.1.1. Mediciones de plasma

Los resultados más sobresalientes en relación con las propiedades del plasma magnetosférico se resumen a continuación:

1. El sistema de Saturno es claramente el más diverso en términos de fuentes de plasma: adicionalmente al viento solar y a la ionósfera planetaria, las dos fuentes dominantes parecen estar localizadas en la vecindad del plano ecuatorial, una en la magnetósfera externa y relacionada con Titán, proporcionando principalmente protones ( $H^+$ ) y nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ), y la más importante (al menos para la componente “fría” del plasma) localizada en la magnetósfera interna y relacionada con la superficie de los satélites de hielo y de sus atmósferas delgadas.
2. La composición de iones térmicos en la magnetósfera se debe principalmente a la nube de gas neutro cuya densidad máxima se localiza cerca de la órbita de Encelado ( $10^4 \text{ cm}^{-3}$ ), por lo que el hidróxido ionizado ( $OH^+$ ) y el agua ionizada ( $H_2O^+$ ) podrían ser tan abundantes como el oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) en toda la magnetósfera [Ip, 2000].
3. Bridge et al. [1981, 1982] reportaron que el plasma magnetosférico se destaca porque existe un régimen altamente variable fuera de  $L = 15$ <sup>2</sup>, una hoja extendida de plasma entre  $L = 7$  y  $L = 15$  con un espesor medio  $> 4 R_S$  y un toro de plasma dentro de  $L = 7$  con un espesor medio de  $1 R_S$  (en  $L = 5$ ) y de  $0.2 R_S$  (en  $L = 2.88$ ).
4. Las mediciones electrónicas del Voyager muestran gradientes a gran escala en la temperatura electrónica con un incremento desde  $< 1 \text{ eV}$  en la magnetósfera interna hasta  $> 800 \text{ eV}$  en la magnetósfera externa. Este incremento en la temperatura del plasma -por cerca de tres órdenes de magnitud- provoca que el espesor de la hoja de plasma aumente con la distancia radial.
5. La reducción en la temperatura electrónica y la atenuación de los electrones supratérmicos fueron también observadas cerca de la órbita de Tetis, de Dione y posiblemente de Rea. Tales efectos indican la interacción entre los electrones

---

<sup>2</sup>El parámetro “L” es la distancia a la cual una línea de campo magnético corta al plano ecuatorial y está medida desde el centro de masa del planeta. Es una cantidad adimensional, pero se entiende que está referida a radios planetarios.

y las concentraciones localizadas de polvo, gas neutro, iones y/o ondas de plasma [Krimigis et al., 1981; 1982].

6. El hecho de que una componente iónica templada sea más notable en la magnetósfera externa indica que en la vecindad de la nube neutra de hidrógeno se forma una estructura compuesta por iones pesados [Lazarus and McNutt, 1983] siendo las fuentes de neutros pesados, Titán y el sistema de anillos principal [Eviatar et al. 1983]. Tanto el Pioneer como los Voyager detectaron este toro de iones pesados que se extiende desde unos  $10 R_S$  hacia adentro con una densidad pico  $\sim 50 \text{ cm}^{-3}$  cerca de las órbitas de los satélites de hielo.
7. Dentro de la magnetósfera externa, los Voyager encontraron varios incrementos en la densidad bien localizados. Estos incrementos aparentemente contienen iones pesados de 14 a 28 uma a temperaturas bajas y pueden ser identificados como una pluma de plasma originada en Titán. Esta pluma se enreda en Saturno, formando el toro de plasma de Titán (véase por ejemplo Scarf et al., 1984, y Schardt et al., 1984).
8. La influencia de las perturbaciones del viento solar sobre la magnetósfera se hace más evidente en las observaciones que realizó el Voyager 2. Por ejemplo, se detectó que los flujos de protones y de electrones eran más variables e intensos que los anteriormente observados [Vogt et al., 1982].
9. La magnetósfera está dominada por la corrotación (los plasmas y las partículas corrotan parcialmente con el planeta). Algunos estudios indican que existen plasmas que corrotan rígidamente al menos hasta  $10 R_S$  [Frank et al., 1980]. Más allá de esa distancia, las velocidades varían entre 30 y 80 % de la corrotación rígida.
10. También se ha observado que justamente después de las órbitas de Dione y de Rea la velocidad de flujo azimutal del plasma cae significativamente. Esto quizá se deba a que el plasma es transportado radialmente hacia adentro [Saur et al., 2004]. Este transporte hace girar al plasma algunas veces excediendo la corrotación rígida. En estado estacionario este movimiento hacia adentro sólo



es posible cuando el plasma es convertido a neutros o si el plasma es absorbido en algún lugar. De hecho Saur et al. [2004] determinan que el material sólo puede dejar la región como neutros.

### 2.1.1.2. Partículas neutras

La magnetósfera de Saturno, al igual que la de Júpiter, contiene numerosas fuentes de gas neutro. Este gas neutro puede ser ionizado y así contribuir a la población de partículas del plasma térmico y a la de los cinturones de radiación. En particular, la “salpicadura” provocada por partículas cargadas y por el bombardeo meteorítico del material de los anillos y de la superficie helada de sus satélites forma una extensa nube de moléculas de agua y de productos de la disociación del agua en la magnetósfera interna.

Titán actúa como una fuente de gases neutros y de iones para la magnetósfera externa. Tanto el hidrógeno neutro e ionizado como el toro de nitrógeno rodean a Saturno cerca de la órbita de Titán en  $\sim 20 R_S$ , y las plumas de iones pesados se extienden más allá de la órbita de Titán.

El esquema general del toro de plasma y neutro en Saturno está basado en una serie de observaciones hechas desde la Tierra de la emisión Ly- $\alpha$ , y en las observaciones realizadas por las misiones Pioneer y Voyager. Las nubes de hidrógeno y de nitrógeno neutros se encuentran en la magnetósfera externa, se extienden radialmente desde  $8 R_S$  hasta  $25 R_S$  y con un espesor aproximado de  $12 R_S$ . Se encontró que las densidades medias de las nubes de hidrógeno y de nitrógeno eran de  $20 \text{ cm}^{-3}$  y de  $6 \text{ cm}^{-3}$  respectivamente. Shemansky and Hall [1992] examinaron las observaciones del experimento UVS del Voyager y hallaron que la distribución angular de la nube de hidrógeno era asimétrica con una alta concentración cerca del lado crepuscular. La fuente de material para cada nube proviene de Titán.

Dentro de la magnetósfera interna las emisiones Ly- $\alpha$  proporcionaron evidencia de una atmósfera de hidrógeno asociada con los anillos de Saturno. Esta atmósfera está confinada radialmente entre  $2 R_S$  y  $3 R_S$  con un espesor de  $\sim 0.4 R_S$ . La densidad media de esta estructura es de  $\sim 400 \text{ cm}^{-3}$ . Adicionalmente se ha inferido la existencia de una nube de agua neutra cerca de los anillos y de los satélites de hielo,

basada en las observaciones del Pioneer y de los Voyager.

Existen otras posibles fuentes de neutros y de iones que pueden hacer la diferencia entre la densidad observada del toro interno y los resultados del modelo de los satélites de hielo desarrollada por Johnson et al. [1989], tales como una superficie activa sobre Encelado o partículas en el anillo E [Pospieszalska and Johnson, 1991] que se extiende desde los  $3 R_S$  hasta los  $8 R_S$  con una densidad pico cerca de la órbita de Encelado a  $4 R_S$  [Jurac et al. 2001].

A distancias radiales menores a  $4 R_S$ , la erosión micrometeorítica de los anillos principales puede ser una fuente significativa de moléculas y de iones de agua. Las densidades producidas por este proceso pueden resultar importantes (por ejemplo, Pospieszalska-Johnson [1991] encuentran un pico de aproximadamente  $4 \times 10^4 \text{ cm}^{-3}$  localizado alrededor de  $1.4 R_S$ ).

Pero más allá de  $2.3 R_S$  tanto la densidad de plasma como la densidad de neutros empieza a decrecer. En este punto la velocidad de la partícula del plasma que corrota con la magnetósfera es mayor que la velocidad de escape de una partícula neutra. Una vez que el ión es neutralizado escapa del sistema de Saturno reduciendo de esta manera la densidad de neutros en la región y, de aquí, que se reduzca la densidad iónica debido a que hay menos neutros para ionizar. Este proceso es eficiente para remover escombros de la región cercana a Saturno y puede ser el factor determinante en la localización de la frontera externa del anillo principal [Pospieszalska and Johnson, 1991].

### **Toro de plasma y gas de Titán**

El encuentro del Voyager 1 con Titán ocurrió el 12 de noviembre de 1980 alrededor de las 0540:20 SCET (1330 tiempo local en Saturno) a una distancia de 6969 kilómetros del centro del satélite, mientras que Titán estaba dentro del lado día de la magnetósfera externa de Saturno [Neubauer et al., 1984]. Esto dio la gran oportunidad de entender tanto las interacciones como la influencia de este satélite con la magnetósfera planetaria.

La distancia orbital de Titán ( $20.2 R_S$ ) es tal que el satélite se encuentra siempre dentro de la magnetocola de Saturno pero puede estar dentro o fuera del lado frontal

de la magnetósfera dependiendo de las condiciones del viento solar. Cuando Titán está fuera de la magnetósfera se espera que tenga una interacción con el viento solar similar al que tiene la Tierra (si está magnetizado), o como Venus (si no está magnetizado). En cambio cuando está dentro de la magnetósfera, la interacción podría ser similar al de los satélites galileanos con la magnetósfera Joviana corrotante.

Dado que todavía no hay indicios de que Titán tenga un campo magnético intrínseco apreciable ni una magnetósfera asociada, existe una interacción directa entre el plasma magnetosférico de Saturno y el sistema ionósfera-atmósfera de Titán.

A diferencia de los satélites de hielo, Titán posee una densa atmósfera compuesta principalmente por nitrógeno y metano, además de otros hidrocarburos. De aquí, que la población de partículas que interactúa con la atmósfera superior de Titán y con la ionósfera puede cambiar considerablemente en el transcurso de una órbita. Tales consideraciones son extremadamente importantes para entender la dinámica de la atmósfera de Titán y su relación con el medio circundante.

Ness et al. [1981] muestran que físicamente una interacción entre la atmósfera de Titán y el plasma conduce a una magnetósfera inducida con las líneas de campo enrollándose alrededor de la ionopausa. Eviatar et al. [1982] sugieren que la tasa de pérdida de iones en la magnetocola inducida es de  $10^{24} \text{ s}^{-1}$  y que además alrededor de  $3 \times 10^{27}$  átomos y moléculas de hidrógeno y aproximadamente  $3 \times 10^{26}$  átomos de nitrógeno escapan de Titán cada segundo. Estos átomos y moléculas de hidrógeno, así como de nitrógeno, escapan hacia la magnetósfera y forman el toro de Titán, una vasta nube de gas neutro que rodea a Saturno. El espectrómetro ultravioleta (UVS) del Voyager observó que la nube de hidrógeno atómico del toro de Titán se extiende radialmente desde los  $8 R_S$  hasta los  $25 R_S$  con una densidad promedio de  $10 \text{ cm}^{-3}$  a  $20 \text{ cm}^{-3}$  [Sandel et al., 1982].

Shemansky y Smith [1983] han sugerido que la atmósfera de Saturno es la fuente dominante de hidrógeno para el toro de Titán, pero Richardson y Eviatar [1988] han criticado esta idea basándose en el hecho de que una alta densidad de H en la región de Dione-Tetis-Rea sería incompatible con el plasma observado allí. La ionización de neutros en el toro de Titán es claramente una fuente importante de plasma para la magnetósfera, pero puede ser no dominante.

Los iones energéticos pueden impactar a la atmósfera de Titán de donde “salpicarán” átomos (o moléculas) neutros. Los neutros pueden ser lanzados de Titán como un resultado de las reacciones fotoquímicas. Estas reacciones pueden energizar a algunos de los neutros más allá de la velocidad de escape de Titán. Los neutros lanzados comenzarán a orbitar Saturno, produciendo un toro neutro. Los componentes principales de este toro son hidrógeno y nitrógeno.

Al analizar los datos del espectrómetro ultravioleta (UVS, *Ultraviolet Spectrometer*) abordo del Voyager, Shemansky and Hall [1992] encontraron que el toro de hidrógeno no tenía simetría axial, pero que mostraba una fuerte dependencia en el tiempo local. Esta dependencia fue demostrada por Ip [1996] como el resultado de las perturbaciones orbitales de los átomos de hidrógeno provocadas por la presión de radiación solar que actúa sobre el tiempo de ionización de esos neutros. La presión de radiación solar cambia la órbita circular inicial de un átomo de hidrógeno neutro en una órbita elíptica con un apogeo localizado en la dirección del amanecer. Este efecto resulta en una cavidad en la densidad en el lado amanecer de Saturno y en consecuencia, el toro de hidrógeno se extiende radialmente hacia adentro de la magnetósfera.

El toro de nitrógeno se forma de manera similar. La distribución de la densidad del toro de nitrógeno depende fuertemente de la tasa total de emisión, de la distribución inicial de velocidades de los neutros que fluyen hacia fuera y de la tasa de ionización del nitrógeno neutro. Los cálculos de Ip [1992] sugieren que la densidad pico cerca de la órbita de Titán puede estar entre  $10 \text{ cm}^{-3}$  y  $40 \text{ cm}^{-3}$  dependiendo de las condiciones iniciales. Este valor cae hasta  $0.1 \text{ cm}^{-3}$  en la región entre Tetis y Dione.

Los átomos y moléculas en el toro neutro de Titán pueden ser ionizados y recogidos por el campo magnético de Saturno. Este es justamente uno de los procesos que pueden producir un toro de plasma alrededor de Saturno. Otro proceso que contribuye al toro de plasma de Titán es el mismo satélite. Los neutros presentes en la atmósfera de Titán pueden ser ionizados por impacto con electrones magnetosféricos o bien por fotones solares. Los iones creados a altitudes bajas pueden fluir hacia la estela, mientras que los iones creados a altitudes elevadas son recogidos por el

plasma externo y por el campo magnético. Estos procesos conducen a la formación de la pluma de plasma de Titán que envuelve a Saturno. De hecho conforme Titán orbita alrededor de Saturno se puede encontrar con plasma de esta pluma.

### Los satélites de hielo

Algunos de los satélites de Saturno (Cuadro 2.1 hasta Cuadro 2.3) tienen importantes interacciones con la magnetósfera. Mimas, Encelado, Tetis, Dione y Rea son satélites de hielo cuyos radios apenas superan la mitad del radio de la Luna. Estos satélites están embebidos en la magnetósfera interna entre los  $3 R_S$  y los  $9 R_S$  por lo que constantemente están siendo bombardeados por iones energéticos, iones corrotantes, y radiación solar, lo que resulta en la inyección de considerables cantidades de productos neutros de la disociación del  $H_2O$  dentro de la magnetósfera.

A diferencia de Titán, estos satélites no tienen una atmósfera considerable. La superficie de estos satélites interactúa directamente con la magnetósfera de Saturno. El bombardeo de los satélites por los iones presentes en la magnetósfera “salpica” de neutros y dado que la superficie de estos satélites está formada básicamente por hielo de agua [Cruikshank et al. 1984], el material neutro salpicado debería ser principalmente agua. La mayoría de estos neutros tienen la suficiente energía para escapar de los campos gravitacionales de estos pequeños satélites, sin embargo, no tienen la suficiente energía para escapar del campo gravitacional de Saturno por lo que, en promedio, hacen varias órbitas alrededor del planeta antes de ser ionizados y recogidos por su campo magnético.

La subsiguiente ionización (vía fotones, impacto por electrones o intercambio de carga) y disociación de estos neutros provee las fuentes de plasma para la magnetósfera interna, además de que mantiene un toro de plasma de oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) observado tanto por el Pioneer como por los Voyager.

La presencia de una nube de agua neutra en la magnetósfera interna ha sido inferida a partir de las observaciones de partículas cargadas de bajas energías (LECP) del Voyager. Estas observaciones son consistentes con los intercambios de carga en una nube de agua que se extiende desde los  $3 R_S$  hasta los  $11 R_S$  con un espesor total de  $1.5 R_S$  y una densidad promedio de  $20 \text{ cm}^{-3}$ , más intercambios de carga en la

Cuadro 2.1: Propiedades fundamentales de los satélites regulares de Saturno. Tomado de Morrison et al. [1986] y Sheppard [2007].

Nombre	a (km) <sup>1</sup>	e <sup>2</sup>	i (°) <sup>3</sup>	Masa (kg)	Radio (km)	Año del descubrimiento
<i>Satélites regulares</i>						
<i>Inicio del anillo D</i>	66 000					
<i>Pan</i>	133 583	0.000	0.000	?	20	1981
<i>Daphnis</i>	136 500	0.000	0.000	?	7	2005
<i>Atlas</i>	137 670	0.000	0.000	?	32	1980
<i>Prometeo</i>	139 353	0.002	0.000	1.4 x 10 <sup>17</sup>	100	1980
<i>Pandora</i>	141 700	0.004	0.000	1.3 x 10 <sup>17</sup>	84	1980
<i>Epimeteo</i>	151 422	0.021	0.335	5.5 x 10 <sup>17</sup>	119	1980
<i>Jano</i>	151 472	0.007	0.165	2 x 10 <sup>18</sup>	178	1980
<i>Mimas</i>	185 520	0.021	1.566	3.7 x 10 <sup>19</sup>	397	1789
<i>Methone</i>	194 000	0.000	0.000	?	3	2004
<i>Pallene</i>	211 000	0.000	0.000	?	4	2004
<i>Encelado</i>	238 020	0.004	0.01	6.5 x 10 <sup>19</sup>	499	1789
<i>Tethys</i>	294 660	0.000	0.168	6.1 x 10 <sup>20</sup>	24	1980
<i>Telesto</i>	294 660	0.001	1.158	?	1060	1684
<i>Calypso</i>	294 660	0.001	1.473	?	19	1980
<i>Dione</i>	294 660	0.000	0.002	1.1 x 10 <sup>21</sup>	1118	1684
<i>Helene</i>	377 400	0.005	0.212	?	32	1980
<i>Polydeuces</i>	377 400	0.000	0.000	?	4	2004
<i>Final del anillo E</i>	480 000					
<i>Rea</i>	527 040	0.001	0.327	2.3 x 10 <sup>21</sup>	1528	1672
<i>Titán</i>	1 221 830	0.029	1.634	1.34 x 10 <sup>23</sup>	5150	1655
<i>Hyperion</i>	1 481 100	0.018	0.568	1.71 x 10 <sup>19</sup>	266	1848
<i>Iapeto</i>	3 561 300	0.028	7.570	1.6 x 10 <sup>21</sup>	1436	1671

<sup>1</sup>Se refiere al semieje mayor promedio de la órbita medido desde el centro del planeta.<sup>2</sup>Se refiere a la inclinación promedio de la órbita.<sup>3</sup>Se refiere a la excentricidad promedio de la órbita.

Cuadro 2.2: Propiedades fundamentales de los satélites irregulares de Saturno. Tomado de Sheppard [2007].

Nombre	a (km) <sup>1</sup>	e <sup>2</sup>	i (°) <sup>3</sup>	Masa (kg)	Radio (km)	Año del descubrimiento
<i>Satélites irregulares</i>						
<i>Kiviuq</i>	11 111 000	0.334	45.71	?	16	2000
<i>Ijiraq</i>	11 124 000	0.316	46.44	?	12	2000
<i>Phoebe</i>	12 952 000	0.164	174.8	3.98 x 10 <sup>17</sup>	240	1898
<i>Paaliaq</i>	15 200 000	0.364	45.13	?	22	2000
<i>Skathi</i>	15 541 000	0.270	152.6	?	8	2000
<i>Albiorix</i>	16 182 000	0.478	33.98	?	32	2000
<i>Bebhionn</i>	17 119 000	0.469	35.01	?	6	2004
<i>Erriapo</i>	17 343 000	0.474	34.62	?	10	2000
<i>Siarnaq</i>	17 531 000	0.295	45.56	?	40	2000
<i>Skoll</i>	17 665 000	0.464	161.2	?	6	2006
<i>Tarvos</i>	17 983 000	0.531	33.82	?	15	2000
<i>Hyrokkin</i>	18 437 000	0.333	151.4	?	8	2004
<i>Mundilfari</i>	18 685 000	0.210	167.3	?	7	2000
<i>Narvi</i>	19 007 000	0.431	145.8	?	7	2003
<i>Bergelmir</i>	19 338 000	0.142	158.5	?	6	2004
<i>Suttungr</i>	19 459 000	0.114	175.8	?	7	2000
<i>Hati</i>	19 856 000	0.372	165.8	?	6	2004
<i>Bestla</i>	20 129 000	0.521	145.2	?	7	2004
<i>Farbauti</i>	20 390 000	0.206	156.4	?	5	2004
<i>Thrymr</i>	20 474 000	0.470	176.0	?	7	2000
<i>Regir</i>	20 735 000	0.252	166.7	?	6	2004
<i>Kari</i>	22 118 000	0.478	156.3	?	7	2006
<i>Fenrir</i>	22 453 000	0.136	164.9	?	4	2004
<i>Surtur</i>	22 707 000	0.451	177.5	?	6	2006
<i>Ymir</i>	23 040 000	0.335	173.1	?	18	2000
<i>Loge</i>	23 065 000	0.187	167.9	?	6	2006
<i>Fornjot</i>	25 108 000	0.206	170.4	?	6	2004

<sup>1</sup>Se refiere al semieje mayor promedio de la órbita medido desde el centro del planeta.<sup>2</sup>Se refiere a la inclinación promedio de la órbita.<sup>3</sup>Se refiere a la excentricidad promedio de la órbita.

Cuadro 2.3: (continuación) Propiedades fundamentales de los satélites irregulares de Saturno. Tomado de Sheppard [2007].

Nombre	a (km) <sup>1</sup>	e <sup>2</sup>	i (°) <sup>3</sup>	Masa (kg)	Radio (km)	Año del descubrimiento
<i>Nuevos satélites irregulares por nombrar</i>						
<i>S/2004 S07</i>	19 800 000	0.580	165.1	?	6	2004
<i>S/2004 S12</i>	19 650 000	0.401	164.0	?	5	2004
<i>S/2004 S13</i>	18 450 000	0.273	167.4	?	6	2004
<i>S/2004 S17</i>	18 600 000	0.259	166.6	?	4	2004
<i>S/2006 S1</i>	18 981 135	0.130	154.2	?	6	2006
<i>S/2006 S3</i>	21 132 000	0.471	150.8	?	6	2006
<i>S/2006 S4</i>	18 105 000	0.374	172.7	?	6	2006
<i>S/2006 S6</i>	18 600 000	0.192	162.9	?	6	2006
<i>S/2007 S1</i>	17 960 000	0.108	49.90	?	7	2007

<sup>1</sup>Se refiere al semieje mayor promedio de la órbita medido desde el centro del planeta.

<sup>2</sup>Se refiere a la inclinación promedio de la órbita.

<sup>3</sup>Se refiere a la excentricidad promedio de la órbita.

nube de hidrógeno atómico (toro de Titán) de la magnetósfera externa. Estas mismas observaciones pueden ser explicadas si el hidrógeno molecular con una densidad de  $\sim 10 \text{ cm}^{-3}$  a  $20 \text{ cm}^{-3}$  está presente junto con el hidrógeno atómico en el toro de Titán.

Los resultados del modelo de Johnson et al. [1989] muestran que las densidades de la nube neutra de agua tiene un pico alrededor de la posición orbital de los satélites y que está confinada principalmente al plano orbital. Dada esta configuración, los satélites deberían interactuar con su respectivo toro neutro, reabsorbiendo algunos de los neutros.

Además esta nube neutra exhibe los siguientes efectos. Primero, es la fuente de iones pesados en el plano orbital de los satélites y, por lo tanto, se puede pensar que posee una ionósfera. Segundo, los iones rápidos de los cinturones de radiación pueden experimentar reacciones de intercambio de carga y convertirse en neutros rápidos que escapen de la magnetósfera.

Posteriormente la nube neutra es ionizada y disociada para mantener un toro de plasma interno de iones de oxígeno que fue observada tanto por el Pioneer 11 como por los Voyager. Como las densidades en el toro neutro, las densidades de los iones de agua exhiben un pico alrededor de las posiciones orbitales de los satélites.



Johnson et al. [1989] concluyeron de sus modelos que los iones que provienen de los satélites de hielo no son del todo tomados en cuenta para la densidad observada en las regiones internas de la magnetósfera. Ellos infieren que una fuente adicional de neutros es necesaria en la región para considerar esta diferencia, posiblemente la erosión de los anillos. En este sentido los resultados del modelo de Pospieszalska y Johnson [1991] indican que la erosión por micrometeoritos de los anillos principales puede incrementar la densidad de neutros en la región entre  $2.3 R_S < r < 4 R_S$  por dos órdenes de magnitud superior a la contribución de los satélites de hielo.

### Los anillos

El sistema de anillos de Saturno tiene un diámetro de 270 000 km (esto es, cubren una distancia radial que se extiende desde  $1.11 R_S$  hasta  $8 R_S$ ) y su espesor varía desde unos 5 metros hasta los  $10^7$  metros en el anillo E. La masa total es aproximadamente de  $3 \times 10^{22}$  g. similar a la masa de Mimas [Zebker and Tyler, 1984]. La estructura del sistema de anillos se resume en el Cuadro 2.4 y en el Cuadro 2.5.

Los anillos se clasifican en dos categorías, dependiendo de la profundidad óptica promedio. El llamado sistema clásico consiste de los anillos brillantes A y B (que están separados por la División de Cassini) y un anillo C más tenue que ocupan la región entre  $1.23 R_S$  y  $2.67 R_S$  en el plano ecuatorial de Saturno. El sistema clásico de anillos reside dentro o cerca del límite de Roche y tiene una profundidad óptica de  $0.1 < \tau < 2$ . Las partículas en esta región siguen órbitas casi circulares alrededor de Saturno; las órbitas están gobernadas por la fuerza gravitacional de Saturno y en menor grado por la fuerza gravitacional ejercida por los satélites y las partículas de los anillos, y por colisiones entre partículas. En contraste, los anillos G y E, que yacen fuera del límite de Roche, y el anillo D, son tenues (ya que la profundidad óptica es  $\tau \leq 10^{-4}$ ) y consisten principalmente de polvo. Para estos anillos, el campo gravitacional de Saturno, la presión de radiación solar y las fuerzas electromagnéticas determinan las órbitas [Burns et al., 1984; Horanyi et al., 1992]. El anillo F que se localiza cerca del límite de Roche, tiene propiedades intermedias a los anillos principales y a los anillos tenues. En la Figura 2.2 se muestra un diagrama de los anillos y de los satélites internos que se encuentran en esta región.

Cuadro 2.4: Propiedades físicas del sistema de anillos de Saturno [Cuzzi, 1983; Cuzzi et al., 1984; Zebker et al., 1985; Esposito, 1986; Rosen, 1989; Murray and Dermott, 1999; Hartquist et al., 2003].

Anillo	Radio orbital		Distancia al centro de saturno ( $R_S$ )	Excentricidad ( $10^3$ )	Espesor		Masa (kg)
	Interno ( $10^3$ km)	Externo ( $10^3$ km)			Interno (m)	Externo (m)	
<i>D</i>	66.9	74.658	1.109	-	-		?
<i>C</i>	74.658	91.975	1.2348	-	5	5	$1 \times 10^{17}$
<i>Titán</i> (“anillete”)	77.871	77.896	1.2908	$0.26 \pm 0.02$	-		?
<i>Maxwell</i> (“anillete”)	87.491	87.555	1.4502	$0.34 \pm 0.04$	-		?
<i>1.470 Rs</i> (“anillete”)	88.716	88.732	1.4705	?	-		?
<i>1.495 Rs</i> (“anillete”)	90.171	90.232	1.4946	?	-		?
<i>B</i>	91.975	117.507	1.5245	-	5-10	5-10	$3 \times 10^{19}$
<i>División de Cassini</i>	117.507	122.340	1.9477	-	20		$5 \times 10^{17}$
<i>Huygens</i> (“anillete”)	117.825	118.185	1.9530	$0.40 \pm 0.17$	-		?
<i>A</i>	122.340	136.780	2.0278	-	10-30	10-30	$6 \times 10^{18}$
<i>Brecha de Encke</i>	133.410	133.740	2.2113	?	-		?
<i>Brecha de Keeler</i>	136.510	136.550	2.2627	?	-		?
<i>F</i>	140.219		2.3242	$2.6 \pm 0.6$	-		$0.1-1 \times 10^{15}$
<i>G</i>	166.000	173.200	2.7515	-	$10^5$		?
<i>E</i>	180.000	480.000	2.9836	-	$10^7$		$7 \times 10^8$

Cuadro 2.5: (continuación) Propiedades físicas del sistema de anillos de Saturno.

Anillo	Tamaño típico de los granos	Densidad superficial (g cm <sup>-2</sup> )		Albedo	Profundidad óptica
		Radio	Teoría		
<i>D</i>	10-100 μm	?	?	?	~10 <sup>-5</sup> -10 <sup>-4</sup>
<i>C</i>	1-500 cm	3.2 ± 1.8 4.3 ± 2.5	1.5 1-5	0.2	0.05-0.2
<i>Titán</i> (“anillete”)	?	?	?	?	-
<i>Maxwell</i> (“anillete”)	?	?	?	?	-
<i>1.470 Rs</i> (“anillete”)	?	?	?	?	-
<i>1.495 Rs</i> (“anillete”)	?	?	?	?	-
<i>B</i>	1-500 cm	-	70 ± 4 99 ± 6	0.5	1-3
<i>División de Cassini</i>	1-750 cm	18.8 ± 0.5	16 ± 3	0.2	0.1-0.15
<i>Huygens</i> (“anillete”)				?	-
<i>A</i>	1-500 cm	34 ± 6 24.4 ± 7.2	40 ± 2.5 37 ± 2.0	0.5	0.4-2
<i>Brecha de Encke</i>	?	?	?	-	-
<i>Brecha de Keeler</i>	?	?	?	-	-
<i>F</i>		?	?	?	1
<i>G</i>	< 0.03 μm	-	-	?	10 <sup>-5</sup> -10 <sup>-4</sup>
<i>E</i>	1 μm	-	-	?	10 <sup>-7</sup> -10 <sup>-6</sup>

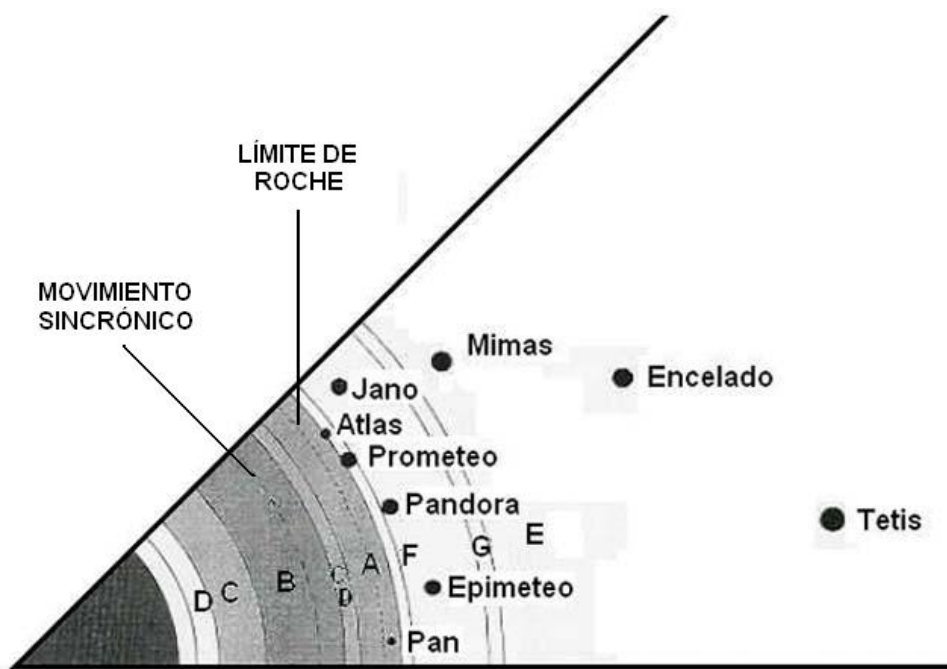


Figura 2.2: Diagrama de los anillos y satélites internos de Saturno. El sistema de anillos y satélites ha sido escalado de acuerdo con el radio planetario ecuatorial. También se ilustra el radio al cual el movimiento orbital es sincrónico con la rotación planetaria y la localización de límite de Roche para partículas con densidad de  $1 \text{ g cm}^{-3}$ .

Para longitudes de onda en el visible, la luz es dispersada intensamente por las partículas de los anillos y ésta muestra una polarización negativa a ángulos de fase pequeños. Ambas observaciones implican que las partículas tienen superficies ásperas (quizá esto se deba a impactos micrometeoríticos a gran velocidad). Los estudios teóricos generalmente suponen que las partículas de los anillos son lisas y esféricas. Weidenschilling et al. [1984] sugieren que, ya que los anillos se localizan dentro del límite de Roche, las partículas se están constantemente agregando, formando “cuerpos dinámicos efímeros” (DEB, *Dynamic Ephemeral Body*). Las observaciones sugieren que, al menos en el anillo A, las partículas tienen una densidad cercana a la del hielo sólido, esto es,  $0.9 \text{ g cm}^{-3}$  [Rosen et al., 1991], pero que se forman algunas agrupaciones de masa (“clumping”) como se manifiesta en las variaciones del brillo longitudinal en los anillos [Salo, 1992].

Aunque las partículas individuales que constituyen a los anillos no pueden ser vistas directamente, su distribución de tamaños puede ser deducida a partir del efecto de dispersión de las señales emitidas por las naves espaciales y por las estrellas cuando se propagan a través de los anillos.

Este análisis muestra un espectro ancho y continuo de los tamaños de las partículas, que van desde unos cuantos centímetros hasta varios metros notando además que los objetos grandes se encuentran en menor cantidad en comparación con los más pequeños. La mayoría de estas partículas tienen superficies heladas y se cree que contienen una cantidad significativa de agua. Este espectro es consistente con la distribución que podría esperarse como consecuencia de las colisiones frecuentes entre objetos inicialmente grandes.

En algunas partes de los anillos, donde las colisiones son posiblemente más frecuentes, los granos de polvo están presentes, pero tienen tiempos de residencia muy cortos debido a una variedad de mecanismos de pérdida. Las nubes de estos pequeños granos aparentemente adquieren cargas eléctricas, interactúan con el campo magnético, y se manifiestan en la forma de “spokes”<sup>3</sup> que se extienden radialmente.

---

<sup>3</sup>Los “spokes” son estructuras radiales descubiertas en el anillo B de Saturno por las imágenes del Voyager 2. Se cree que estas trazas están compuestas por finas partículas del tamaño del polvo. Aunque la carga electrostática podría crear rayos mediante la levitación de partículas de polvo por encima del anillo, la causa exacta de la formación de estos rayos no se conoce muy bien.

## 2.2. Nuevas observaciones: Misión Cassini

La nave Cassini cruzó dos veces el plano ecuatorial de Saturno justamente fuera del anillo F a  $2.5 R_S$ . El máximo acercamiento fue a  $1.3 R_S$  del centro del planeta y sobre los anillos. Wahlund et al. [2005] encontraron un toro de plasma denso ( $< 150 \text{ cm}^{-3}$ ) y frío ( $< 7 \text{ eV}$ ) detrás del anillo F. Este toro no corrota perfectamente con Saturno, lo cual sugiere que el plasma frío está electrodinámicamente acoplado a las partículas cargadas de los anillos.

Durante la órbita inicial de la nave Cassini alrededor de Saturno, se observó una magnetósfera dinámica compuesta principalmente por una mezcla compleja de productos de agua (atómico y molecular). Young et al. [2005] identificaron cuatro regiones distintas caracterizadas por las propiedades del plasma y por la composición iónica. Los protones son la especie dominante fuera de  $9 R_S$ , mientras que dentro de esta región el plasma tiene una mezcla de iones derivados del agua (como en un cometa) con  $\sim 3\%$  de nitrógeno atómico ionizado ( $\text{N}^+$ ). Sobre los anillos A y B se encontró una ionósfera en la cual los constituyentes principales son oxígeno atómico ionizado ( $\text{O}^+$ ) y oxígeno molecular ionizado ( $\text{O}_2^+$ ), que sugiere la posible existencia de una capa gaseosa de  $\text{O}_2^+$  similar a las atmósferas de Europa y Ganímedes.

Mucho de lo que se sabía sobre la magnetósfera de Saturno antes de la llegada de la nave Cassini en julio de 2004, fue obtenido a partir de las observaciones y mediciones del Pioneer 11, del Voyager 1 y 2, y también de los modelos basados en esos datos. Actualmente las mediciones del CAPS (*Cassini Plasma Spectrometer*) indican que la magnetósfera puede ser dividida en cuatro regiones con características físicas y químicas distintas: 1) la magnetósfera externa, o la de latitud alta, contiene plasma caliente tenue dominado por protones, 2) una región llamada plasmasfera externa formada por un plasma que es mezcla de protones ( $\text{H}^+$ ), oxígeno atómico ionizado ( $\text{O}^+$ ), y iones producto de agua (por ejemplo,  $\text{OH}^+$ ,  $\text{H}_2\text{O}^+$ ,  $\text{H}_3\text{O}^+$ ) que corrotan parcialmente, 3) la plasmasfera interna es menos variable y más cercana a la corrotación rígida formada por oxígeno atómico ionizado ( $\text{O}^+$ ) y iones producto de agua, 4) una capa de plasma localizada directamente sobre los anillos A y B formada por oxígeno atómico ionizado ( $\text{O}^+$ ) y oxígeno molecular ionizado ( $\text{O}_2^+$ ). Las fronteras que separan a estas cuatro regiones son distinguidas por cambios no solamente en

las propiedades del plasma sino también por la composición química.

En la trayectoria de entrada de la nave, la magnetósfera fue cruzada nueve veces entre  $34.6 R_S$  y  $30.6 R_S$ . Justo dentro de la magnetopausa, las densidades del plasma bajaron más allá de los límites de detección del IMS (*Ion Mass Spectrometer*). En particular, no fue detectada la presencia de nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) en la vecindad de la órbita de Titán ni en la trayectoria de entrada ni en la de salida, posiblemente porque la nave sólo se acercó al plano orbital del satélite. En  $14.4 R_S$  (trayectoria de entrada) y en  $13.6 R_S$  (trayectoria de salida), la nave Cassini cruzó una frontera delgada de  $\sim 0.2 R_S$  que se identificó por un incremento en la densidad (de  $\sim 3 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$  hasta  $3 \times 10^5 \text{ m}^{-3}$ ). Este aumento en la densidad permitieron a Young et al. [2005] establecer que el plasma corrota aproximadamente de manera rígida.

Cerca de  $\sim 9 R_S$  en la trayectoria de entrada y de  $\sim 7.6 R_S$  en la salida, la nave Cassini cruzó una segunda frontera y se desplazó hacia una región que fue identificada como la **plasmassera interna**. En esta región, el movimiento iónico está todavía organizado por la corrotación. Sin embargo, debido a que la energía iónica total es la suma de sus energías de corrotación y térmica, la distribución del plasma aparece encima de las curvas teóricas de velocidad de corrotación. Una segunda característica de la plasmassera interna es que los datos de electrones son ajustados por una distribución bi-Maxwelliana que lleva a la separación de las densidades y de las temperaturas en dos componentes. La componente más fría,  $\sim 3 - 30 \text{ eV}$ , aumenta en densidad y disminuye en temperatura con el decrecimiento en la distancia radial. La componente caliente,  $\sim 100 - 1000 \text{ eV}$ , exhibe un comportamiento contrario, disminuye en densidad y aumenta en temperatura con el decrecimiento de la distancia radial.

Dentro de  $\sim 10 R_S$ , y cerca de  $4.4 R_S$  las firmas temporales de iones y electrones sugieren que, en ocasiones, hay plasma que se está inyectando en la magnetósfera. Algunas de ellas están caracterizadas por la llegada inicial de iones de alta energía ( $\sim 10 \text{ keV}$ ) seguida de la llegada progresiva de iones menos energéticos y luego la aparición de electrones de baja energía seguida de electrones de alta energía. Unas estructuras similares se producen comúnmente en la Tierra [Mauk and Meng, 1983]

y han sido observadas también en Júpiter [Mauk et al., 1997], pero no habían sido reportadas previamente para Saturno. En la Tierra, las inyecciones de plasma son causadas por incrementos repentinos en la configuración global del campo eléctrico convectivo. Para planetas que rotan rápidamente como Júpiter y Saturno, estas inyecciones pueden ser explicadas como movimientos centrífugos de intercambio en los cuales el plasma denso y frío se mueve hacia fuera y es reemplazado por el más caliente y tenue que se mueve hacia adentro [Pontius et al., 1986]. En el marco corrotante, las derivas de curvatura y de arrastre causadas por el campo magnético dispersan iones y electrones hacia el este y hacia el oeste, respectivamente, a una razón proporcional a sus energías térmicas.

Conforme la nave Cassini se adentró en la magnetósfera, las concentraciones de oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) y de productos de agua con respecto a los protones ( $H^+$ ) permanecieron cerca de la unidad o por arriba desde  $\sim 8 R_S$  hasta  $\sim 5 R_S$ , incrementándose de nuevo entre  $\sim 3.4 R_S$  y  $\sim 3.9 R_S$ . Young et al. [2005] estimaron que tanto el nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) como el  $H_3O^+$  están presentes en abundancias de  $\sim 3\%$  hacia adentro. Los iones de  $N^+$ , que son de baja energía (20 a 100 eV), no pueden ser ionizados cerca de Titán y luego transportados hacia adentro porque estos iones serían calentados hasta alcanzar varios keV durante el proceso. Así es que ellos concluyen que el  $N^+$  observado dentro de  $8 R_S$  debe ser ionizado localmente y no cerca del satélite [Eviatar, 1984]. Esto podría resultar del nitrógeno neutro eyectado desde Titán que alcanza la magnetósfera interna antes de ser ionizado [Smith et al., 2004], o iones de Titán que son implantados o adheridos a la superficie de los satélites de hielo internos o a las partículas del anillo E y posteriormente “salpicados” [Delitsky and Lane, 2002]. Una posibilidad es que los iones de nitrógeno puedan ser indicativos de una pequeña abundancia de amoníaco en sus superficies, una idea que ha sido propuesta para explicar las características morfológicas de Encelado [Kargel and Pozlo, 1996].

La plasmasfera interna puede ser identificada con el anillo E (se extiende desde  $3 R_S$  hasta  $17 R_S$ ), el cual es una fuente rica en vapor de agua [Jurac et al., 2002]. Debido a que la población iónica tiene una energía promedio baja, es también una región donde las velocidades relativas entre el gas neutro (que se mueve a velocidades



Keplerianas) y las especies iónicas (moviéndose a velocidades de corrotación) son bajas, de tal manera que las reacciones químicas entre iones y moléculas se vuelve importante [Johnson et al., 1989]. La presencia de  $H_3O^+$  es un ejemplo interesante de estas reacciones<sup>4</sup> porque estos iones son creados en una atmósfera dominada por agua.

Entre las 03:37 y las 04:09 UT, la nave Cassini estaba en eclipse detrás de Saturno; sin embargo, los anillos estaban todavía iluminados del lado opuesto al plano del anillo sobre las líneas de campo magnético conjugadas a la nave. Durante este tiempo, se observó una capa de iones (efectivamente una ionósfera) sobre los anillos. Gurnett et al. [2005] estimaron que las densidades electrónicas fueron  $< 3 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ . Young et al. [2005] concluyeron que la nave se cargó negativamente en unos cuantos volts, lo que impidió que el ELS (*Electron Spectrometer*) midiera completamente la distribución de velocidades electrónicas. Bajo estas condiciones se atraerían, y en consecuencia, se acelerarían iones positivos, esto mejoraría la posibilidad de medir iones de hidrógeno atómico o molecular, lo cual, no es evidente.

Los conteos de electrones son menores sobre el anillo B, más altos sobre la División de Cassini, e intermedios sobre el anillo A; en otras palabras, varían inversamente con la profundidad óptica del anillo [Esposito et al., 1984]. Esta correlación inversa sugiere que los electrones pueden originarse de la fotoemisión de partículas magnéticamente conjugadas localizadas en la parte lejana de los anillos. La ionósfera de los anillos está conformada por iones cuya relación carga-masa es de 16 y 32 amu/e, es decir, por oxígeno atómico ionizado ( $O^+$ ) y oxígeno molecular ionizado ( $O_2^+$ ) respectivamente. Este hallazgo es consistente con la corrotación y con una temperatura de 0.75 eV para ambas especies.

La detección de oxígeno molecular ( $O_2^+$ ) como ión principal indica que existe una capa de gas de oxígeno molecular sobre los anillos. Aunque este ión puede originarse a través de procesos fotolíticos en el vapor de agua [Ip, 1995], la “atmósfera” de  $O_2$  sobre los anillos, al igual que las atmósferas de Europa y Ganímedes, es más bien el resultado de la descomposición inducida por la radiación sobre el hielo [Johnson et

---

<sup>4</sup>Una fuente es la reacción:  $H_2O^+ + H_2O \rightarrow H_3O^+ + OH$ , que además de producir el ión también contribuye al toro observado de OH.

al., 2003; 2004]. En la plasmasfera interna, el  $O_2$  puede ser producido a partir del hielo por plasma con energía mayor a algunos keV. Sin embargo, sobre los anillos, los flujos de plasma energético son despreciables, dejando que los fotones ultravioleta incidan sobre el hielo y produzcan  $O_2$  [Shi et al., 1995].

Por otro lado, la fotólisis del hielo en un ambiente aislado también produciría una atmósfera de hidrógeno molecular ionizado ( $H_2^+$ ) sobre los anillos. Sin embargo, la baja concentración de iones de hidrógeno indica que la superficie de las partículas de los anillos, junto con la atmósfera del anillo, debe ser tratada como un sistema completo. Por ejemplo, procesos tales como el intercambio de carga y la fotodisociación del agua o de moléculas de  $H_2$  puede liberar hidrógeno con la suficiente energía para removerlo de los anillos, dejando atrás una atmósfera rica en oxígeno.

Young et al. [2005] han observado características importantes en las distribuciones de plasma, en la dinámica y en la composición química de las partículas que habitan en la magnetósfera de Saturno, que hacen que los modelos actuales tengan que ser modificados para explicar en detalle la estructura y la dinámica de esta magnetósfera. Los datos tomados por la nave Cassini en su paso por la plasmasfera interna y su único cruce por los anillos internos indican que aunque la fuente de material en ambas regiones es principalmente hielo de agua, las propiedades del plasma dependen fuertemente de la química y transporte entre iones y moléculas. Entonces, la plasmasfera interna, es análoga a la coma de un cometa, y la atmósfera de los anillos es similar en composición a las atmósferas de Europa y Ganímedes.

Los descubrimientos recientes de la nave Cassini relacionadas con la temperatura de la superficie de Encelado (cerca del polo Sur) [Spencer et al., 2006] y de una pluma extendida de partículas de hielo de agua y polvo [Porco et al., 2006; Spahn et al., 2006] comienzan a resolver la pregunta sobre la fuente de material en la superficie, en el anillo E, y en el toro neutro de oxígeno atómico (O) y de hidróxido (OH) que están presentes en la magnetósfera interna de Saturno [Eviatar and Richardson, 1992; Shemansky et al., 1993]. Esta pluma afecta las propiedades del plasma magnetosférico, tales como la densidad de masa y los patrones de flujo.

En el presente Capítulo se resumieron las observaciones y mediciones más sobre-

salientes realizadas por las naves Voyager y Cassini dentro de la magnetósfera de Saturno. Esta magnetósfera tiene una dinámica muy compleja -especialmente en la región interna- debido básicamente a la presencia de numerosas fuentes de partículas. Las partículas más energéticas se encuentran en la región externa, pero probablemente éstas son producidas en la región interna y luego transportadas radialmente hacia afuera.

Tal y como se explicó en el Capítulo anterior, existen varios mecanismos para la energización de partículas en magnetósferas planetarias. Entre ellos, destaca el mecanismo estocástico que regularmente se basa en resolver la ecuación de Fokker-Planck, o bien, en considerar a la aceleración como una difusión en el espacio de momentos a través de la aproximación cuasi-lineal. En este trabajo se propone y se desarrolla un modelo general basado en la estocasticidad (o aleatoriedad) del campo de fuerzas que actúa sobre la población de partículas. Los fundamentos físicos y el desarrollo matemático del modelo propuesto se explican en el siguiente Capítulo.

# Capítulo 3

## Modelo de energización para partículas bajo la acción de campos de fuerza estocásticos

La aceleración de partículas altamente energéticas es un fenómeno universal que ocurre en una gran variedad de procesos astrofísicos que van desde las auroras terrestres, las magnetósferas planetarias, el choque terminal de la heliosfera, las fulguraciones estelares, las protoestrellas y sus jets, los radio pulsares, las estrellas enanas blancas en acreción, las estrellas binarias de neutrones, los hoyos negros y sus jets, los remanentes de supernova, los núcleos y jets activos de galaxias, hasta los cuasares más lejanos. La aceleración de partículas es un canal bastante común para la liberación de energía cinética a gran escala, de energía rotacional y de energía magnética.

Independientemente de la clasificación que se dé a los mecanismos de aceleración [ver por ejemplo Jokipii, 1979] es importante destacar que cada uno de ellos opera selectivamente sobre partículas específicas; por ejemplo, las ondas pueden acelerar partículas usualmente cuando se cumple una condición de resonancia, los choques solamente pueden acelerar partículas a partir de una energía umbral (llamada energía de inyección), los campos eléctricos en un plasma no-colisional pueden ocasionar aceleración *runaway*; ya sea en una pequeña fracción o en toda la población de partículas, entre otros.

En el presente Capítulo se aborda el problema de la energización (o aceleración) de las partículas que se encuentran dentro de las magnetósferas planetarias. Esto resulta interesante pues una de las mediciones más valiosas que brindan información sobre los procesos dinámicos y la configuración global magnetosférica, es la observación de la distribución de energías de las partículas. Para esto, se desarrolla por separado el modelo de aceleración de partículas cargadas y el modelo de aceleración de partículas neutras. Cada término de la ecuación de movimiento es descrito en diferentes secciones.

En general, para cualquier sistema físico se puede hablar de la estocasticidad de las fuerzas (internas y externas) que actúan sobre las partículas. De hecho se ha demostrado que en dicho sistema las partículas tienden a incrementar -preferentemente- su velocidad en lugar de disminuirla [Durand-Manterola, 2003]. Por lo que la población de partículas energéticas presentes en una magnetósfera planetaria pueda ser explicada en términos de la acción de este campo de fuerzas estocástico.

Para cuantificar la ganancia de energía por partícula se desarrolla un código numérico que consta básicamente de dos partes. En la primera parte se considera una muestra de partículas (iones o granos de polvo) y se definen sus propiedades como la especie química, el estado de carga, la posición inicial, la temperatura de la fuente de la cual provienen, la distribución de velocidades, la energía inicial; y las propiedades de la magnetósfera como la simetría, el tamaño y el carácter colisional del plasma. La segunda parte está dedicada al cálculo del campo estocástico (eléctrico o gravitacional), a la integración de la ecuación de movimiento -que incluye a la aceleración estocástica debida al campo (eléctrico o gravitacional) estocástico, a la aceleración de Lorentz (con el campo eléctrico corrotacional) y a la aceleración gravitacional-, la velocidad final, la posición final, el tiempo empleado y la energía final alcanzada por la muestra de partículas en la región de interés.

El algoritmo computacional trabaja como sigue: a partir de la muestra de partículas que componen a la magnetósfera planetaria (protones, electrones, iones y partículas neutras) se considera una muestra que inicialmente sigue una distribu-

ción de velocidades y una distribución de energía (parte uno). De la muestra se elige aleatoriamente una partícula que interactuará con el campo de fuerzas estocástico (parte dos). Después de una interacción se calculan los parámetros finales para esta partícula y estos valores serán las condiciones iniciales para la siguiente interacción. Una vez que la partícula ha sufrido el número de interacciones elegido, otra partícula es seleccionada aleatoriamente e inyectada a la magnetósfera simulada. Esta nueva partícula experimenta el mismo proceso descrito anteriormente. El proceso finaliza cuando todas las partículas han interactuado con el campo, el número de veces predeterminado.

### 3.1. Modelo de aceleración para la población de partículas cargadas

En las magnetósferas planetarias del Sistema Solar las partículas energéticas se originan de diferentes fuentes, tales como el viento solar, las partículas energéticas solares, los rayos cósmicos, las ionosferas planetarias, el gas emitido volcánicamente o degasado de los satélites, y el gas "salpicado" de los anillos y de la superficie de los satélites [Van Allen, 1986; Möbius, 1994]. Una vez que estas partículas neutras son ionizadas éstas pueden interactuar con el campo eléctrico estocástico mencionado anteriormente, o bien, con el campo gravitacional estocástico en el caso de que continúen en estado neutro.

#### 3.1.1. La ecuación de movimiento para una partícula cargada

Una partícula cargada con masa  $m$  y carga  $q$  que es inyectada hacia la magnetósfera obedece la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\mathbf{E}_{stoc} + \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}\right) - G\frac{M_P}{|\mathbf{r}^3}\hat{\mathbf{r}} \quad (3.1)$$

La Ec. (3.1) está escrita en unidades MKS y se considera un sistema de coordenadas inercial fijo al centro de masa del planeta. El vector posición de la partícula está denotado como  $\mathbf{r}$ . El primer término de la derecha en la Ec. (3.1) representa la

aceleración estocástica, el segundo término de la derecha en la Ec. (3.1) representa la aceleración de Lorentz, y el último término es la aceleración gravitacional. Para este trabajo se ha considerado que las constantes físicas fundamentales toman sus valores y significados usuales.

***Caso especial: Granos de polvo cargados***

Las partículas pequeñas, especialmente las cargadas, responden a otras fuerzas además de la gravitacional, en particular, a las fuerzas electromagnéticas. Las propiedades de los granos de polvo y su dinámica caen dentro de un régimen muy complejo entre la física nuclear, la física electromagnética, y la física gravitacional. La ecuación de movimiento que siguen las partículas de polvo cargadas está dada por la Ec. (3.1). Sin embargo, también debe agregarse un término debido a que la radiación del Sol ejerce una fuerza repulsiva,  $F_{pr}$ , sobre todos los cuerpos en el Sistema Solar conocida como *fuerza de radiación*. Esta fuerza está dada por:

$$\mathbf{F}_{pr} \approx \frac{Q_{pr} A}{c r_{helio}^2} \mathbf{J} \quad (3.2)$$

donde  $Q_{pr}$  es el coeficiente de presión de radiación (o bien, es la eficiencia de dispersión luminosa),  $A$  es la sección transversal de la partícula,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $r_{helio}$  es la distancia heliocéntrica medida en unidades astronómicas y  $\mathbf{J}$  es el vector de flujo de energía debido a la radiación solar. El coeficiente  $Q_{pr}$  toma en cuenta la absorción y la dispersión, y es igual a la unidad para una partícula absorbidora perfecta. Los efectos relativistas producidos por el corrimiento Doppler entre el marco de referencia del Sol y el de la partícula son generalmente pequeños y han sido omitidos en la Ec. (3.2). El parámetro  $\beta$  está definido como la razón entre la fuerza debida a la presión de radiación y la fuerza de gravedad del Sol:

$$\beta \equiv \frac{F_{rad}}{F_g} = 5,7 \times 10^{-5} \frac{Q_{pr}}{\rho_m R} \quad (3.3)$$

donde el radio de la partícula,  $R$ , está en cm y su densidad,  $\rho_m$ , en  $\text{g cm}^{-3}$ . Obsérvese que  $\beta$  es independiente de la distancia heliocéntrica y que la fuerza de radiación

solar es solamente importante para partículas micrométricas y submicrométricas. Las partículas extremadamente pequeñas no se verán fuertemente afectadas por la presión de radiación porque  $Q_{pr}$  decrece conforme el radio de la partícula cae (en el visible) del valor pico en el espectro solar [Burns et al. 1979].

Para calcular las cargas sobre un grano de polvo alrededor de un planeta, se deben caracterizar: el campo magnético del planeta, el plasma magnetosférico, los procesos físicos que generan las corrientes en el grano y las propiedades del material que forma al grano de polvo.

Se sabe que las partículas de los anillos planetarios orbitan cerca de los cuerpos masivos primarios, en ambientes caracterizados por altas densidades de partículas energéticas atrapadas en los intensos campos magnéticos. Los granos de polvo no cargados son impactados por electrones más frecuentemente que con iones porque las velocidades térmicas de los electrones son mayores. Los granos entonces adquieren la suficiente carga negativa para llevar a cabo un balance entre las tasas a las cuales acumulan electrones e iones adicionales a través de la atracción y repulsión electrostática.

Para parámetros típicos de los granos en los anillos planetarios, el equilibrio (o balance) es logrado en menos de un periodo orbital. Por ejemplo, en los anillos de Júpiter, los granos alcanzan el equilibrio a un potencial de  $\Phi \approx -10$  Volts . La carga que el grano puede acumular depende de su proximidad con otros granos además del ambiente de partículas cargadas; si otros granos están dentro de la longitud de Debye (la distancia característica detrás de la cual el campo eléctrico del grano está protegido por las partículas en el plasma que tienen carga opuesta), entonces contribuyen a la repulsión de electrones adicionales, y un potencial dado puede ser mantenido con menos carga por grano. El potencial electrostático de un grano de polvo no solo depende de las propiedades físicas del grano, sino también del plasma ambiente, tales como la densidad, la temperatura (energía), la distribución de velocidades de las partículas del plasma, la distancia entre granos, y el movimiento relativo entre las partículas del plasma y los granos de polvo [Kimura and Mann, 1998].

Otros mecanismos de carga, tales como las corrientes fotoelectrónicas, pueden



perturbar el valor de equilibrio de  $q$ . Las variaciones estocásticas en la carga de la partícula tienen efectos menores sobre los movimientos de la partícula; sin embargo, variaciones sistemáticas en la carga que son experimentadas por granos que se encuentran en órbitas muy excéntricas pueden afectar significativamente la trayectoria de las partículas.

Para un grano de polvo esférico con densidad uniforme,  $\rho_m$  ( $\text{g cm}^{-3}$ ), de radio  $a_\mu$  (micras), y un potencial electrostático de superficie  $\Phi$  (volts), la relación carga-masa del grano de polvo viene dada por [Howard et. al. 1999]:

$$\frac{q}{m} = \frac{10^6 \Phi}{4\pi \rho_m a_\mu^2} \frac{esu}{gr} = 26,56 \times 10^{-3} \frac{\Phi}{\rho_m a_\mu^2} \frac{C}{kg} \quad (3.4)$$

Para un planeta dado y un radio de equilibrio, la estabilidad depende de la razón  $\frac{q}{m}$ , convenientemente medida por el potencial electrostático  $\hat{\Phi} = \frac{\Phi}{a_\mu^2}$ , el cual se expresa como un número real. Ya que el potencial está determinado por el plasma ambiente,  $\hat{\Phi}$  depende solamente del radio del grano,  $a_\mu$ . Estrictamente hablando, los granos con  $a_\mu > 1$  están dominados por la fuerza de gravedad, mientras que los granos con  $a_\mu < 1$  están dominados por fuerzas electromagnéticas.

#### 3.1.1.1. La aceleración estocástica

El campo magnético dentro de una magnetósfera planetaria puede ser dividido en dos componentes:  $B_f$  es el campo magnético constante generado por el dinamo planetario (generalmente es muy intenso) y  $B_e$  son las fluctuaciones temporales del campo magnético (generalmente son estocásticas y poco intensas). La primera componente corresponde al campo magnético planetario y la segunda es generada por los cambios temporales en la interacción entre el viento solar y la magnetósfera y que por lo tanto incluye los cambios en el sistema de corrientes magnetosférico: el anillo de corriente formado por plasma atrapado alrededor del planeta, la corriente de la magnetopausa que confina a la magnetósfera a una cavidad en el viento solar (es una corriente que fluye sobre la superficie de dicha cavidad), las corrientes de la magnetocola, las contribuciones de la hoja de corriente y las corrientes alineadas al campo que fluyen a lo largo de las líneas que unen a la magnetósfera con la ionosfera.

A través de la Ley de Faraday estas fluctuaciones del campo magnético generan un campo eléctrico estocástico,  $E_{stoc}$ , que podrá interactuar con las partículas cargadas existentes en la magnetósfera.

Para simular el carácter estocástico del campo eléctrico,  $\Delta E$ , se emplea un método de Monte Carlo [Rubinstein, 1981].

#### *Métodos de Monte Carlo*

Los métodos de Monte Carlo son una clase de algoritmos computacionales ampliamente utilizados para simular el comportamiento de varios sistemas físicos y matemáticos, y también para otros cálculos. Se distinguen de otros métodos de simulación (tales como la dinámica molecular) por ser estocásticos, esto es, de alguna manera son no-determinísticos al emplear números aleatorios (o pseudoaleatorios). Debido a la repetición de algoritmos y el gran número de cálculos involucrados, Monte Carlo es un método que requiere de diversas técnicas de simulación computacionales.

Es así como estos métodos estadísticos dan solución a una gran variedad de problemas matemáticos (inclusive pueden ser de muchas variables) que no pueden ser fácilmente resueltos, por ejemplo, mediante el cálculo integral o por métodos numéricos.

La idea básica en cualquier método de Monte Carlo, o método estadístico, aplicado a un sistema arbitrario es seleccionar una muestra al azar a partir de las funciones de distribución de probabilidad conocidas como *pdf*,  $f(\Delta E)$ , o bien de las funciones de distribución acumulada conocidas como *cdf*,  $F(\Delta E)$ , que describen la evolución de dicho sistema.

Para esto necesita una manera rápida y efectiva de generar números aleatorios  $\xi$  uniformemente distribuidos sobre el intervalo  $[0, 1]$ <sup>1</sup>. Luego de que se ha escogido al

---

<sup>1</sup>Existen un gran número de métodos para generar números con distribución uniforme sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Las formas más comunes de generarlos son: utilizando tablas de números aleatorios (en la mayoría de los textos de estadística les llaman pseudoaleatorios); utilizando calculadoras que los generen mediante una función ya establecida en su memoria; los lenguajes de programación y las hojas electrónicas incluyen una función específica para generarlos; utilizando Generadores Congruenciales.

El método a utilizar, en sí mismo, carece de importancia. La importancia radica en los núme-

generador de números aleatorios, se hace la transformación matemática de las funciones de densidad de probabilidad. En este paso, la transformación debe conservar la probabilidad de ambas distribuciones, esto es,  $f(\Delta E) = \xi$ . En otras palabras, esto significa que los números aleatorios ya generados con distribución uniforme son transformados en la distribución deseada. En este punto se busca la función de distribución de probabilidad que mejor se ajusta a los datos de campo eléctrico. La manera de hacerlo -estadísticamente correcto- es a través de una *prueba de hipótesis de bondad de ajuste* [Rohatgi, 2003] basada en cualquiera de los estadísticos (por ejemplo, Jarque-Bera, Anderson-Darling, Kolmogorov-Smirnov,  $\chi^2$ ) y considerando diferentes distribuciones hipotéticas (uniforme, exponencial, normal, logística, Weibull o una combinación de ellos). De esta manera se obtienen las funciones matemáticas que describen al campo eléctrico  $\Delta E$  en cada dirección espacial:  $f(\Delta E_x)$ ,  $f(\Delta E_y)$  y  $f(\Delta E_z)$ .

Los resultados de estas muestras deben estar ordenados en una manera apropiada para producir una distribución dada por  $\Delta E = f^{-1}(\xi)$ , pero la característica esencial de Monte Carlo es el uso de técnicas de muestreo aleatorio<sup>2</sup> (o quizás de otra álgebra que permita manipular los resultados). La regla de muestreo se elige entre las siguientes categorías: generador de números aleatorios (para una pdf uniforme),

---

ros que genera ya que éstos deben cumplir ciertas características para que sean válidos. Estas características son:

1. Uniformemente distribuidos.
2. Estadísticamente independientes.
3. Su media debe ser estadísticamente igual a  $\frac{1}{2}$ .
4. Su varianza debe ser estadísticamente igual a  $\frac{1}{12}$ .
5. Su periodo o ciclo de vida debe ser largo.
6. Deben ser generados a través de un método rápido y que no requiera de mucha capacidad de almacenamiento en una computadora.

<sup>2</sup>Los métodos de muestreo se clasifican en dos tipos: probabilísticos y no probabilísticos. En las muestras probabilísticas, cada miembro de la población tiene una probabilidad distinta de cero de ser escogida. Los métodos probabilísticos incluyen el muestreo aleatorio, el muestreo sistemático, el muestreo estratificado, y el muestreo por cúmulos. En el muestreo no probabilístico los miembros son seleccionados de la población de una manera no azarosa. Aquí se incluyen el muestreo conveniente, el muestreo de opinión, el muestreo de cuota, etc.

En cambio, cualquier método de Monte Carlo requiere de reglas de muestreo específicas para generar variables aleatorias a partir de una distribución dada. Por lo tanto es diferente de los métodos de muestreo enunciados en el párrafo anterior.

el muestreo a partir de las funciones analíticas (por ejemplo, maxwelliana, exponencial) y el muestreo a partir de las pdf tabuladas (por ejemplo, espectral y angular). En el segundo caso los números aleatorios pueden obtenerse directamente mediante la inversión directa de la función de distribución acumulada (cdf), por métodos de rechazo, transformaciones y otros [Hammersley and Handscomb, 1964; Rubinstein, 1981].

Por lo tanto, se obtienen las funciones que representan el comportamiento estocástico del campo eléctrico  $\Delta E_x(\xi_1)$ ,  $\Delta E_y(\xi_2)$  y  $\Delta E_z(\xi_3)$  donde  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$  son números aleatorios estadísticamente independientes en el intervalo  $[0, 1]$ .

### 3.1.1.2. La aceleración de Lorentz

En la Ec. (3.1) el segundo término de la derecha corresponde a la fuerza de Lorentz. La rotación del campo magnético de Saturno induce un campo eléctrico en la dirección radial: el campo eléctrico corrotacional,  $\mathbf{E}_c$ . Para una partícula neutra o un observador en la magnetósfera, el campo magnético se mueve con una velocidad de corrotación,  $\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\omega}_{rot} \times \mathbf{r}$ , donde  $\boldsymbol{\omega}_{rot}$  es la velocidad angular del planeta y  $\mathbf{r}$  es la distancia. Esto induce un campo eléctrico dado por:

$$\mathbf{E}_c = -\mathbf{v}_c \times \mathbf{B} = (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_{rot}) \times \mathbf{B} \quad (3.5)$$

En la Ec. (3.5)  $\mathbf{B}$  representa al campo magnético dipolar del planeta.

La fuerza magnética actúa sobre la distribución de partículas cargadas que están caracterizadas por una velocidad y energía iniciales. La velocidad inicial incluye a la velocidad de corrotación,  $\mathbf{v}_c$  y a la velocidad de la distribución,  $\mathbf{v}_d$ . Así se tiene que:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{c1} + \mathbf{v}_{d1} \quad (3.6)$$

En la Ec. (3.6) el subíndice 1 está referido al valor inicial y es aplicada a cada dirección espacial. Usando el método de Monte Carlo se selecciona, aleatoriamente, la velocidad de la partícula que sigue esa distribución en cada dirección espacial.

La energía cinética inicial de las partículas está dada por la expresión clásica,

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3.7)$$

Las Ecs. (3.6) y (3.7) se calculan inicialmente para cada partícula de la muestra.

### ***Caso especial: Granos de polvo cargados***

Las partículas de polvo no siguen una distribución de velocidades como en el caso de los iones. El movimiento orbital que describen alrededor del planeta está gobernado por las leyes de Kepler. Suponiendo que las órbitas descritas son casi circulares la velocidad inicial Kepleriana,  $v_{K1}$ , está dada por:

$$v_{K1} = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.8)$$

donde  $r$  es la distancia medida (sobre el plano orbital) desde el centro de masa del planeta hasta el centro de masa de la partícula de polvo y  $T$  es el periodo orbital obtenido a través de la tercera Ley de Kepler del movimiento planetario.

#### **3.1.1.3. La aceleración gravitacional**

Se calcula la interacción entre cada partícula y el planeta debido a la atracción gravitacional entre ellos. En el último término de la Ec. (3.1) se expresa la aceleración producida por esta fuerza donde  $G$  es la constante gravitacional y  $M_P$  es la masa del planeta.

#### **3.1.1.4. ¿Un término colisional?**

Es importante determinar la naturaleza colisional o no-colisional de la región magnetosférica en estudio. Para este propósito se simula una magnetósfera con simetría esférica de radio  $R_m$  (este radio dependerá de la región que se desee estudiar, esto es, magnetósfera interna, intermedia (si es el caso) y externa) y se analiza el camino libre medio ( $\lambda$ ) entre partículas. Se consideran los siguientes casos: a) colisiones entre iones y neutros, b) colisiones entre neutros, y c) colisiones entre iones. Recuérdese que el camino libre medio está dado por:  $\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{n(4\pi r^2)}$  donde  $n$  es

la densidad observada en la magnetósfera y  $\sigma$  es la sección eficaz de la interacción. Para el primer caso se emplea el radio iónico  $r$ , en el segundo caso se utiliza el radio atómico  $r$  y en el tercer caso se estima el parámetro de impacto  $b$ , dado por:  $b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 K} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$  donde  $Z$  es el número atómico,  $e$  es la carga fundamental,  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad en el vacío,  $K$  es la energía de la partícula y  $\theta$  es el ángulo de dispersión debido a las interacciones Coulombianas.

Si el valor del camino libre medio es mayor (o del orden de magnitud) que el radio de la magnetósfera simulada se concluye que el plasma dentro de esa región es no-colisional y por lo tanto no se incluye esa interacción en la ecuación de movimiento (3.1).

### 3.1.2. La energía final y la velocidad final para la distribución de partículas cargadas

En la Ec. (3.1) se está considerando la fuerza total que actúa sobre cada una de las partículas localizadas en la magnetósfera o en el sistema de anillos. De esta manera se emplea el Teorema de trabajo-energía para establecer lo siguiente:

$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z = \Delta K \quad (3.9)$$

En la Ec. (3.9) se calcula la ganancia (o pérdida) de energía cinética después de cada interacción con la fuerza total  $\mathbf{F}$  (estocástica, Lorentz, gravitacional y presión de radiación) para cada partícula en el espacio. Este incremento (o decremento) de energía se debe a la acción del campo de fuerzas estocástico, por lo que a  $\Delta K$  se le denomina *ganancia (o pérdida) de energía estocástica*.

El valor que se asigne al paso numérico en cada dirección (denotado por  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ ) debe asegurar que el error computacional sea menor en cada iteración y que la partícula interactúe suficientes veces con el campo de fuerzas estocástico. Para el caso de partículas cargadas (protones y iones pesados) se toma una fracción del radio de giro mínimo y para los granos de polvo cargados se considera una fracción de la distancia mínima entre partículas.

Por otro lado, es importante resaltar que cada dirección espacial contribuye a

esta ganancia (o pérdida) de energía estocástica. Partiendo de la expresión clásica para el cálculo de la energía cinética la demostración es como sigue:

$$\begin{aligned}
 \Delta K &= K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m [(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) - (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2)] \\
 &= \frac{1}{2}m [(v_{2x}^2 - v_{1x}^2) + (v_{2y}^2 - v_{1y}^2) + (v_{2z}^2 - v_{1z}^2)] \\
 &= \frac{1}{2}m [\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2] \\
 &= \Delta K_x + \Delta K_y + \Delta K_z
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

La energía cinética final para una partícula después de cada interacción con la fuerza total se obtiene mediante la expresión:

$$K_2 = K_1 + \Delta K - K_r \tag{3.11}$$

donde  $K_r$  es la pérdida de energía por radiación electromagnética debida a la aceleración de partículas cargadas. La emisión de radiación electromagnética es tipo libre-libre y se calcula como [Jackson, 1999]:

$$K_r = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \Delta t \tag{3.12}$$

donde  $q$  es la carga eléctrica de la partícula,  $\epsilon_0$  es la constante de permitividad en el vacío,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $a$  es la aceleración de la partícula y  $\Delta t$  es el tiempo que tarda la partícula en ser acelerada. Es importante mencionar que se considera la pérdida de energía por radiación en cada dirección espacial. El razonamiento de este hecho es similar a la Ec. (3.10).

La velocidad final alcanzada por una partícula se calcula simplemente a través de la energía cinética final, esto es:

$$v_2 = \pm \sqrt{\frac{2 K_2}{m}} \quad (3.13)$$

En la Ec. (3.13), el signo es asignado a través del algoritmo numérico tomando en cuenta la velocidad inicial, la magnitud de la fuerza total y la ganancia (o pérdida) de energía.

La posición final en la dirección radial alcanzada por una partícula después de cada interacción está dada por:

$$r_2 = r_1 + \Delta r \quad (3.14)$$

En la Ec. (3.14) la posición inicial es el lugar ocupado por la partícula al final de la interacción previa con el campo de fuerzas estocástico y  $\Delta r$  corresponde al paso numérico previamente determinado. La Ec. (3.14) se aplica en cada dirección espacial.

Las Ecs. (3.11), (3.13) y (3.14) son calculadas para una partícula dada después de cada interacción con la fuerza total. Es importante aclarar que estos valores finales se convierten en los valores iniciales para la siguiente interacción.

Una vez que la partícula seleccionada interacciona con el campo de fuerzas estocástico el número de veces predeterminado, otra partícula es inyectada a la magnetósfera o al sistema de anillos. Este proceso termina cuando la muestra de partículas es sometida al mismo número de interacciones. Finalmente para asegurar que las partículas permanecen dentro de la región magnetosférica (interna o externa) o dentro del anillo se establece la condición de corte correspondiente:

$$1 R_P < r < R_{INT}, \text{ magnetosfera interna} \quad (3.15)$$

$$r \geq R_{INT}, \text{ magnetosfera externa} \quad (3.16)$$

$$B_{INT} < r < B_{EXT}, \text{ anillo} \quad (3.17)$$

En las relaciones anteriores  $r$  es la posición final que alcanza la muestra de partículas, esto es,  $r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$  donde  $x_2, y_2, z_2$  se obtienen a partir de la



Ec. (3.14). En las magnetósferas planetarias la región interna empieza desde  $1 R_P$  ( $R_P$  es el radio planetario) y termina donde el campo magnético deja de tener la configuración dipolar ( $R_{INT}$ ); la frontera de la región externa se extiende hasta la magnetocola y las partículas de polvo en los anillos se encuentran confinadas a los bordes interno ( $B_{INT}$ ) y externo ( $B_{EXT}$ ) de los mismos. Cuando  $r$  toma un valor fuera de estos intervalos, la partícula es considerada como perdida.

## 3.2. Modelo de aceleración para la población de partículas neutras

La población de partículas neutras juega un papel importante en las magnetósferas planetarias como se mencionó en el Capítulo 2. Es de especial interés el estudio de la dinámica de las partículas de polvo que se encuentran en los anillos planetarios pues son una fuente potencial de partículas.

### 3.2.1. La ecuación de movimiento para una partícula de polvo neutra

En el caso de los granos de polvo neutros, la ecuación de movimiento (3.1) incluirá a la aceleración producida por la fuerza de atracción gravitacional entre el planeta y la partícula, la aceleración estocástica producida por la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas de polvo pertenecientes al mismo anillo y la fuerza de presión de radiación explicada anteriormente. Esto es:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = G \frac{M_P}{|\mathbf{r}^3|} \hat{\mathbf{r}} + G \frac{m_{stoc}}{|\mathbf{r}_{stoc}^3|} \hat{\mathbf{r}}_{stoc} - \frac{1}{m} \frac{Q_{pr} A}{c r_{helio}^2} \mathbf{J} \quad (3.18)$$

En el lado derecho de la Ec. (3.18), el primer término se refiere a la aceleración gravitacional producida por el planeta de masa  $M_P$ , el segundo término representa la aceleración gravitacional estocástica entre granos de polvo donde  $m_{stoc}$  es la masa del grano que produce esta aceleración sobre el grano de masa  $m$  y está separada a una distancia aleatoria  $r_{stoc}$ , el tercer término es la aceleración producida por la

fuerza de presión de radiación donde  $Q_{pr}$  es el coeficiente de presión de radiación,  $A$  es la sección transversal de la partícula,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $r_{helio}$  es la distancia heliocéntrica medida en unidades astronómicas y  $\mathbf{J}$  es el vector de flujo de energía debido a la radiación solar.

### 3.2.1.1. La aceleración gravitacional

Véase la Sección 3.1.1.3

### 3.2.1.2. La aceleración gravitacional estocástica entre granos de polvo

Se propone que la fuerza de atracción gravitacional entre partículas de polvo neutro en un anillo tiene carácter estocástico por lo que la aceleración producida también lo es. Para generar esta fuerza se requiere que una partícula proveniente de una distribución de masa aleatoria y una partícula de masa mínima localizadas en un anillo en particular y separadas por una distancia también aleatoria sean atraídas mutuamente. Tanto la distribución de masas como la de distancias se simulan a través de un método de Monte Carlo.

Suponiendo que los granos de polvo son esféricos y que no hay procesos de evaporación o colisiones que los puedan romper o deformar, la distribución de masas para un anillo se genera a partir de la expresión:

$$m_{stoc} = \rho_m V_{stoc} = \rho_m \left( \frac{4}{3} \pi a_{stoc}^3 \right) \quad (3.19)$$

En la Ec. (3.19) la densidad está dada por  $\rho_m$  ( $\text{kg m}^{-3}$ ) y el radio de la partícula es  $a_{stoc}$  (m). Las partículas en los anillos están caracterizadas por una distribución de tamaños y a eso se debe el carácter estocástico del radio y en consecuencia del volumen.

Dado que las partículas están en movimiento todo el tiempo resulta natural pensar que la distancia que separa a éstas de la partícula mínima es variable y aleatoria. Para obtener esta distribución se puede proceder de dos maneras: 1) a partir del análisis de datos observacionales (*in situ* o desde la Tierra); 2) suponer que la distribución es uniforme, esto es, va de un valor mínimo a un valor máximo. Para

el segundo caso será necesario hacer una serie de estimaciones basados en algunos parámetros como la masa de cada anillo, el espesor de cada anillo, la profundidad óptica, etcétera.

### **3.2.1.3. La aceleración debida a la fuerza de presión de radiación**

Véase Sección 3.1.1

### **3.2.2. La energía final y la velocidad final para la distribución de partículas de polvo neutras**

La energía cinética final se obtiene mediante la expresión:

$$K_2 = K_1 + \Delta K \quad (3.20)$$

La velocidad y la posición finales alcanzada por una partícula se calcula con la Ec. (3.13) y con la Ec. (3.14) respectivamente. Para los detalles refiérase a la Sección 3.1.2. En este caso, el paso numérico en cada dirección está dado por una fracción de la distancia aleatoria entre granos de polvo.

En este Capítulo se expuso y desarrolló el modelo de energización, que se basa en las fluctuaciones aleatorias de un campo de fuerzas, para las partículas que se encuentran en una magnetósfera planetaria. Dos aplicaciones interesantes se desarrollan en el siguiente Capítulo. Una se refiere al estudio de la población de partículas energéticas en la magnetósfera de Saturno y la otra es una propuesta para explicar parte de la dinámica de los granos de polvo en el sistema de anillos de Saturno.

## Capítulo 4

# Aplicación del modelo a la población de partículas en la magnetósfera de Saturno

Posibles explicaciones a la población observada de partículas energéticas en la magnetósfera de Saturno involucran la liberación de energía magnética que calienta a la componente iónica del plasma y entonces acelera a los electrones a energías del orden de 2 MeV [Schardt et al., 1985]. Otra posibilidad son los cambios en la configuración de la magnetocola inducidos por las perturbaciones en el medio interplanetario que pueden llevar a la aceleración tanto de iones como de electrones a varios cientos de keV [Krimigis et al., 1981; 1982].

Para explicar la componente caliente del plasma se aplica el modelo descrito en el Capítulo 3 a la magnetósfera (interna y externa) de Saturno. Un mecanismo de aceleración estocástico similar al propuesto en este trabajo fue desarrollado por Barbosa [1994] para dar una explicación cuantitativa y definitiva de la componente iónica de alta energía presente en la magnetósfera Joviana. En su trabajo derivó una ecuación que incluye a la difusión radial y a la aceleración estocástica de flujos de iones super Alfvénicos por la acción de ondas magnetohidrodinámicas en la magnetósfera externa Joviana. Para ello, supuso que en la magnetósfera Joviana se propagan cierto tipo de ondas que entran en resonancia con las partículas y esto se ve reflejado en el coeficiente de difusión en la ecuación de Fokker-Planck.

Este Capítulo se dedica a la aplicación del modelo expuesto previamente a la magnetósfera de Saturno. Recuérdese que el modelo se basa en las fluctuaciones aleatorias del campo de fuerzas. En el caso de la magnetósfera de Saturno se consideran las fluctuaciones magnéticas medidas dentro de la magnetósfera (para el modelo de partículas cargadas) y en las fluctuaciones gravitacionales inferidas para granos de polvo (para el modelo de partículas neutras). Las partículas interactúan con diferentes poblaciones, que van desde los protones hasta productos derivados del agua.

## **4.1. Partículas cargadas (protones, iones pesados y granos de polvo)**

La ecuación de movimiento que obedecen las partículas cargadas está dada por la Ec. (3.1). En el primer término se calcula la aceleración debida a la fuerza del campo eléctrico estocástico. En la siguiente sección se explica la obtención de este campo dentro de la magnetósfera de Saturno.

### **4.1.1. El campo eléctrico estocástico**

Para este trabajo se emplean los datos de campo magnético medidos por el magnetómetro triaxial a bordo de la nave Voyager 1 y Voyager 2 en el sistema de coordenadas SSO (*Saturn Solar Orbit*). Básicamente el sistema SSO es análogo al sistema coordinado utilizado para la Tierra, esto es, el GSE (*Geocentric Solar Ecliptic*) en donde la dirección “ $x$ ” parte del centro de masa instantáneo de Saturno y apunta positivamente hacia el Sol; “ $z$ ” es la normal al plano orbital de Saturno y apunta positivamente hacia arriba (se encuentra tomando el producto vectorial apropiado entre los vectores posición y velocidad del planeta); y “ $y$ ” completa este sistema ortogonal siendo positivo hacia el lado atardecer. Aún cuando el eje dipolar de Saturno está inclinado  $26.73^\circ$  con respecto al eje  $z$  del sistema SSO, el modelo en

su totalidad está desarrollado en un sistema de coordenadas rectangular cuyo eje  $z$  se encuentra en la misma dirección que el eje del dipolo.

La resolución temporal de los datos de campo magnético para ambas naves es de 1.92 segundos durante sus respectivos encuentros con Saturno. El Voyager 1 se movió dentro de la magnetósfera del 12 de Noviembre de 1980 a las 01:54 UT hasta el 14 de Noviembre de 1980 a las 21:40 UT, mientras que el Voyager 2 lo hizo desde el 25 de agosto de 1981 a las 07:01 UT hasta el 28 de agosto de 1981 a las 20:37 UT. Se está considerando el primer cruce de la entrada y el quinto cruce de salida por la magnetopausa como límites de la magnetósfera [Bridge et al., 1981; Ness et al., 1982]. La Figura 4.1 muestra las trayectorias seguidas por las naves en sus respectivos encuentros con la magnetósfera de Saturno.

Para su estudio la magnetósfera de Saturno se divide en dos regiones de acuerdo con la configuración del campo magnético, esto es, la región interna está caracterizada por un campo magnético que no es completamente dipolar pues las componentes multipolares no son despreciables (esto ocurre a distancias  $< 10 R_S$ ) y la región externa es aquella donde el campo es prácticamente dipolar ( $> 10 R_S$ ). En la magnetósfera externa se consideran las trayectorias de entrada y de salida por separado, esto es, para analizar posibles fluctuaciones debidas al cruce por la magnetocola.

El campo magnético observado por ambas naves tiene dos componentes: espacial y temporal. Si se asume que el campo magnético espacial de Saturno está bien representado por un dipolo de momento  $0.21 \pm 0.05 \text{ Gauss } R_S^3$ <sup>1</sup> ( $3.5025 \times 10^{18} \text{ T m}^3$ ,  $5.6916 \times 10^{18} \text{ T m}^3$ ) [Ness et al., 1981], se calcula el campo magnético residual,  $\mathbf{B}_R$ , en un punto particular de la trayectoria de las partículas (Figura 4.2 y Figura 4.3):

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_O - \mathbf{B}_D \quad (4.1)$$

Donde  $\mathbf{B}_O$  es el campo magnético observado y  $\mathbf{B}_D$  es el campo magnético dipolar. Para obtener el campo magnético dipolar se consideran las expresiones derivadas por Kivelson y Russell [1997] y para Saturno se estima el valor del momento dipolar

---

<sup>1</sup>Se considera que  $1 R_S = 6.0268 \times 10^9 \text{ cm}$  para tener unidades en el sistema CGS, esto es, Gauss  $\text{cm}^{-3}$ . En este trabajo se utiliza el sistema MKS, por lo que será necesario (además de que el radio debe estar en metros) multiplicar por un factor de  $10^{-4}$  para tener  $\text{T m}^3$ .

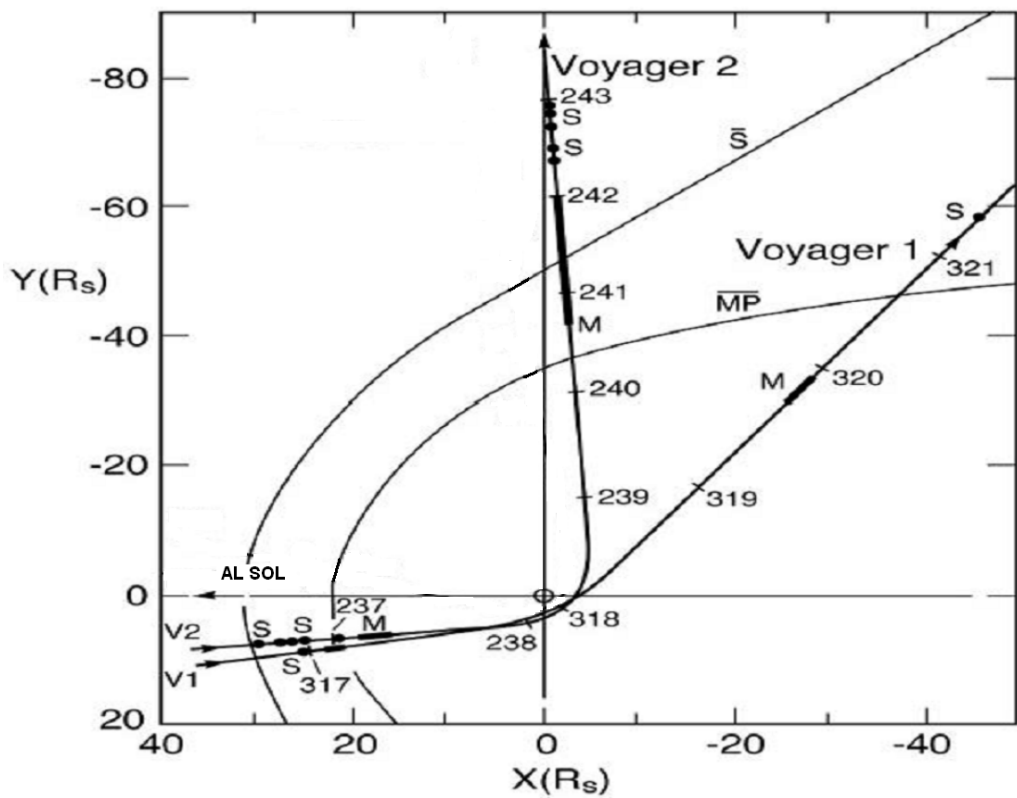


Figura 4.1: Vista ecuatorial de la trayectoria de las naves Voyager en su encuentro con Saturno. Sobre las trayectorias los puntos negros marcados como S indican los cruces por el frente de choque y los rectángulos negros marcados como M indican los cruces por la magnetopausa. La dirección hacia el Sol es positiva.

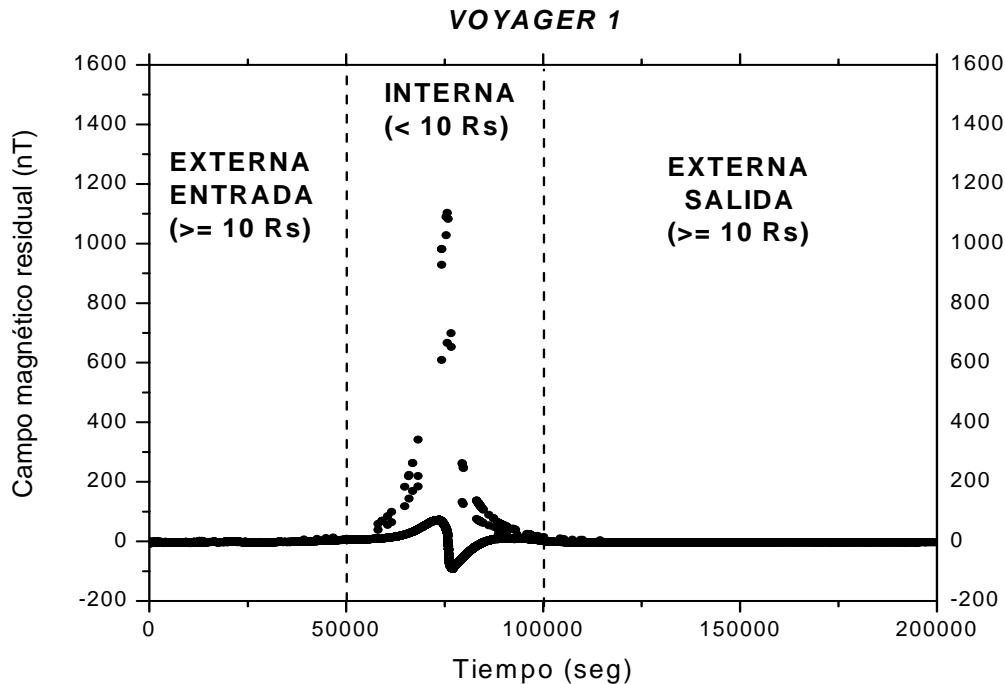


Figura 4.2: Campo magnético residual obtenido para la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Voyager 1.

como:  $M_S = 3.9625 \times 10^{18} \text{ T m}^3$  (Voyager 1) y  $M_S = 5.0657 \times 10^{18} \text{ T m}^3$  (Voyager 2).

En este estudio el campo magnético residual tiene solamente variaciones temporales pues éstas son mayores que las espaciales. En la Figura 4.4 se muestra una comparación entre las variaciones temporales y espaciales obtenidas para las mediciones del Voyager 1 dentro de la magnetósfera de Saturno (análogamente para el Voyager 2). Dentro del polígono se encuentran variaciones temporales hasta 4 órdenes de magnitud mayores que las variaciones espaciales.

Entonces las fluctuaciones del campo magnético,  $\Delta \mathbf{B}$ , son calculadas tomando en cuenta la diferencia entre puntos adyacentes de los residuales.

La Figura 4.5 ilustra las fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera interna de Saturno y las Figuras 4.6 y 4.7 en la magnetósfera externa (trayectoria de entrada y salida, respectivamente) basadas en las mediciones del Voyager 2. Análogamente sucede para las mediciones del Voyager 1. De las gráficas



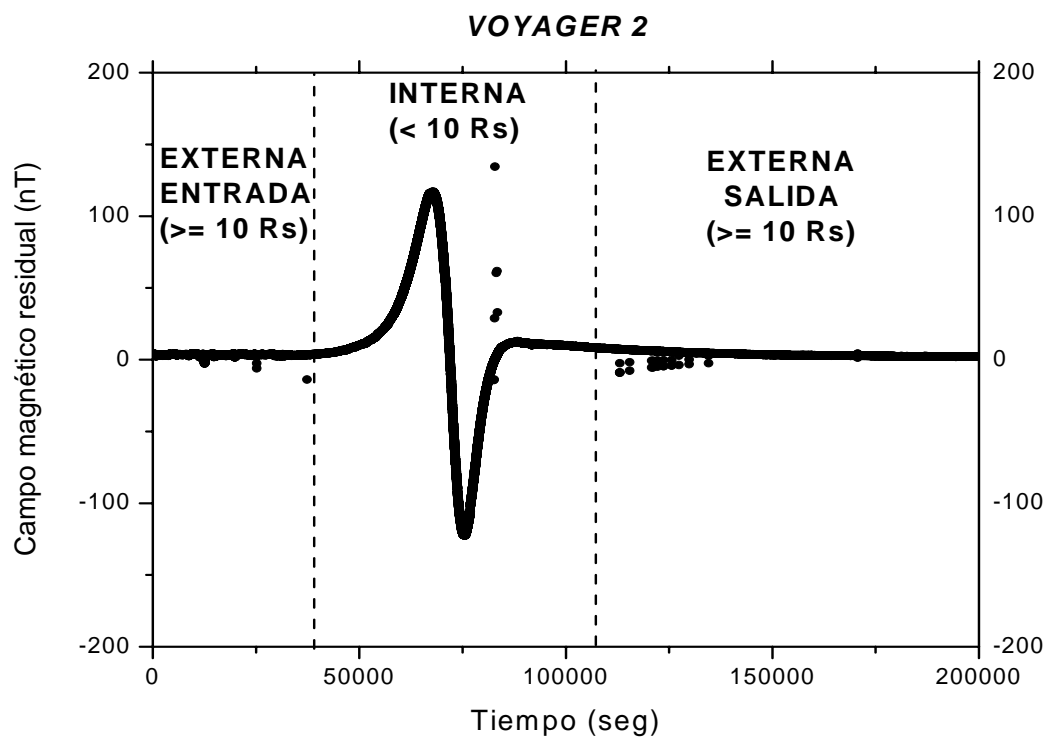


Figura 4.3: Campo magnético residual obtenido para la magnetósfera de Saturno basado en las observaciones del Voyager 2.

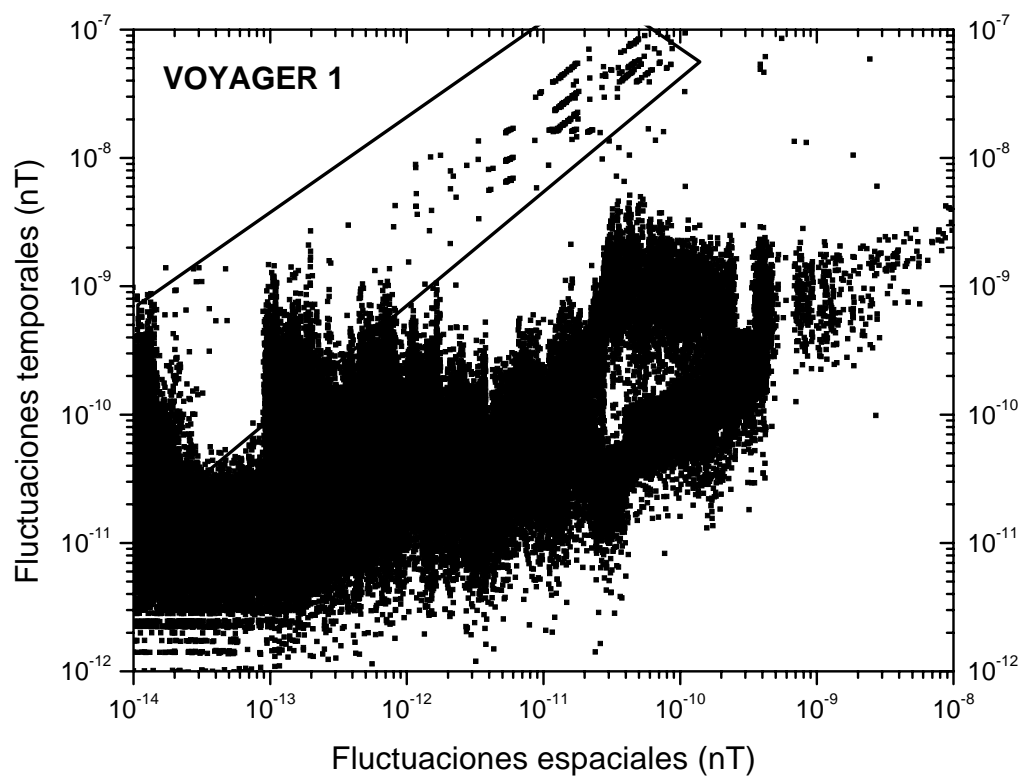


Figura 4.4: Comparación entre las fluctuaciones temporales y las fluctuaciones espaciales obtenidas para las mediciones del Voyager 1 dentro de la magnetósfera de Saturno.

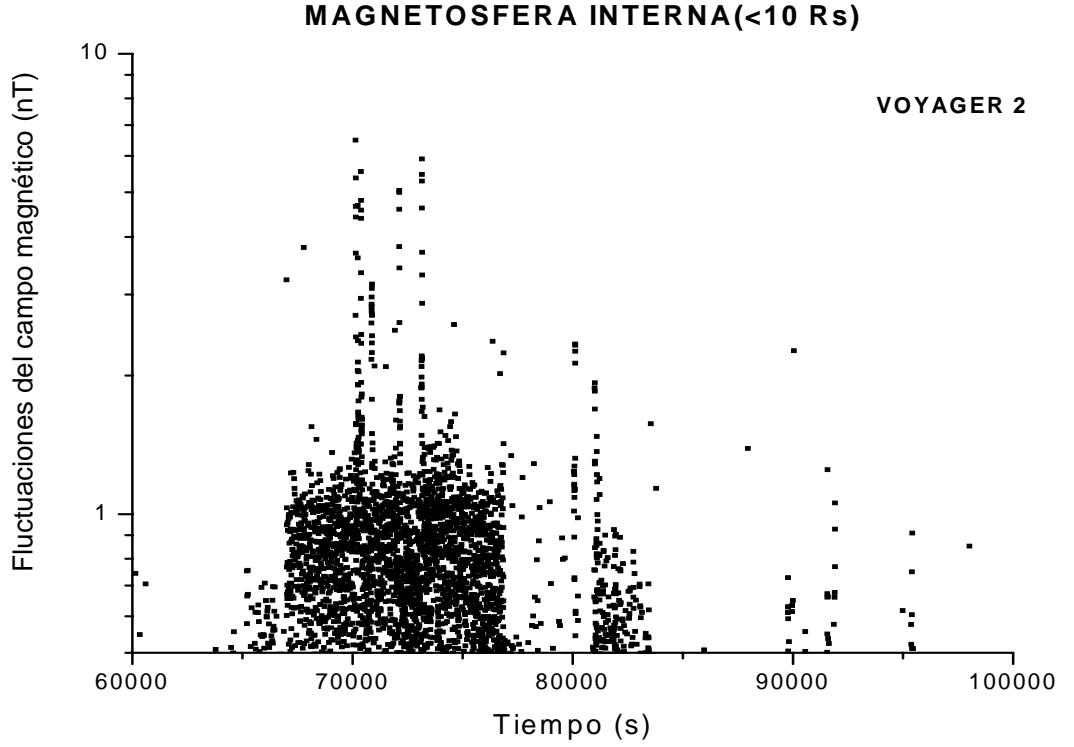


Figura 4.5: Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera interna de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2.

se observa que hay más fluctuaciones intensas en la magnetósfera externa (salida) que en la interna, pero no exceden los 10 nT.

De las ecuaciones de Maxwell se obtiene el campo eléctrico asociado en cada dirección espacial. Asumiendo cuasineutralidad, esto es,  $\rho = 0$  y que los cambios del campo magnético a través de la trayectoria de la nave son lo suficientemente pequeños ( $\Delta \approx \delta$ ), estas ecuaciones se resuelven para llegar a:

$$\Delta E_x = \frac{\frac{\Delta B_z}{\Delta t} \left( \frac{\Delta x_T}{\Delta y_T} + \frac{\Delta x_T \Delta y_T}{(\Delta z_T)^2} \right) + \frac{\Delta B_x}{\Delta t} \frac{\Delta y_T}{\Delta z_T}}{\frac{1}{\Delta x_T} + \Delta x_T \left( \frac{1}{(\Delta y_T)^2} + \frac{1}{(\Delta z_T)^2} \right)} \quad (4.2)$$

$$\Delta E_y = \Delta x_T \left( \frac{\Delta E_x}{\Delta y_T} - \frac{\Delta B_z}{\Delta t} \right) \quad (4.3)$$

$$\Delta E_z = \Delta x_T \left( \frac{\Delta E_x}{\Delta z_T} + \frac{\Delta B_y}{\Delta t} \right) \quad (4.4)$$

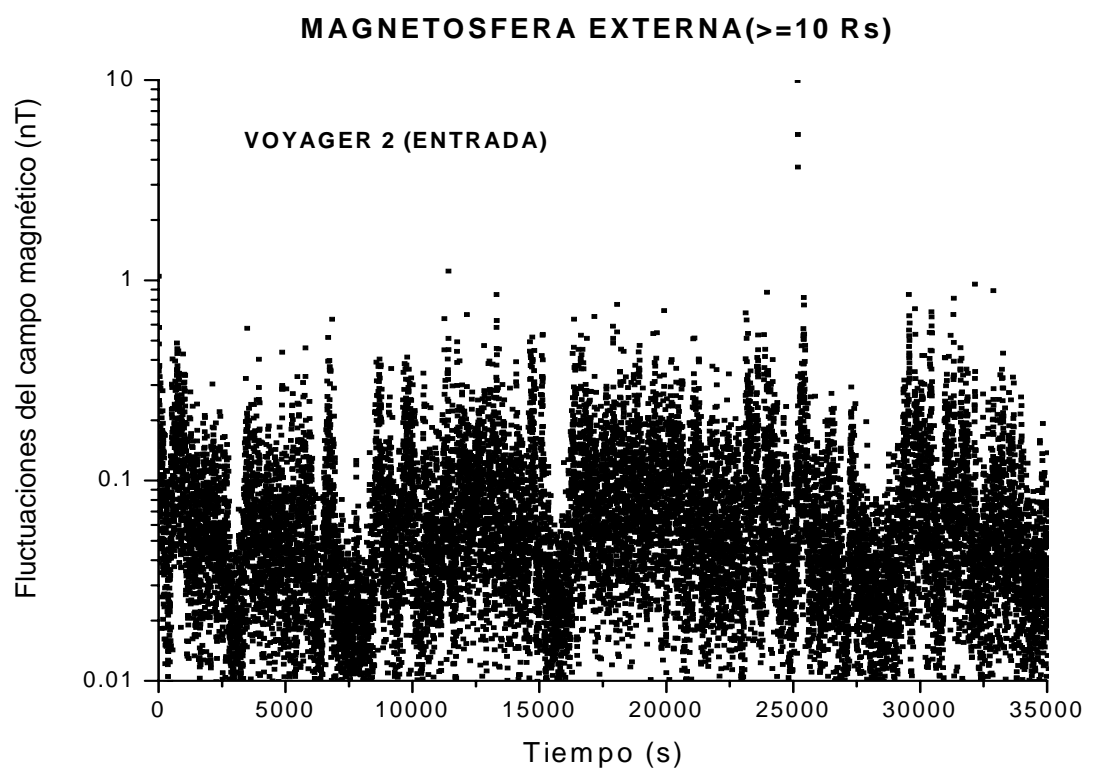


Figura 4.6: Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera externa de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2 en su trayectoria de entrada.

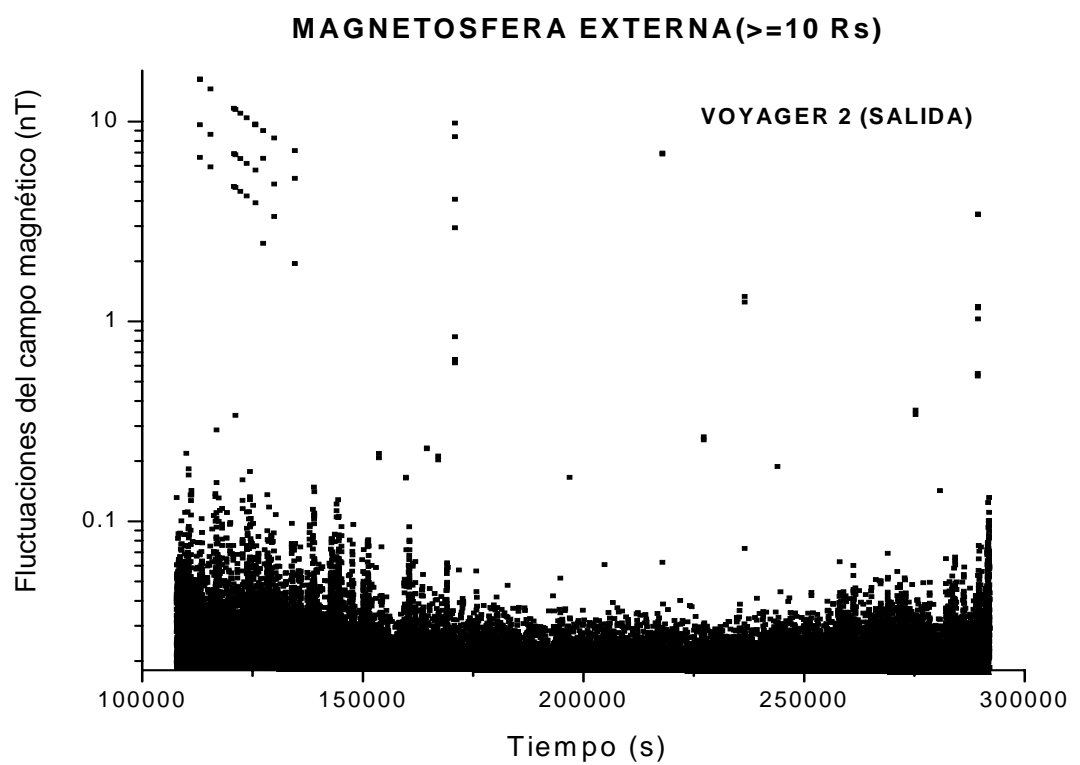


Figura 4.7: Fluctuaciones temporales del campo magnético en la magnetósfera externa de Saturno obtenidas mediante las mediciones del Voyager 2 en su trayectoria de salida.

En las Ecs. (4.2, 4.3 y 4.4) las diferencias entre residuales obtenidas a través de la Ec. (4.1) están representadas por  $\Delta B_x$ ,  $\Delta B_y$  y  $\Delta B_z$ . La diferencia, en cada dirección, entre posiciones adyacentes de la trayectoria de la nave está dada por  $\Delta x_T$ ,  $\Delta y_T$  y  $\Delta z_T$ . Nótese que hay singularidades cuando  $\Delta x_T = \Delta y_T = \Delta z_T = 0$ , en esos casos el valor del campo eléctrico no es considerado. Es importante señalar que estos casos no afectan la distribución temporal de los datos ya que están muestreadas con la misma resolución de 1.92 segundos.

De acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 3, el carácter estocástico del campo obtenido en las ecuaciones anteriores es simulado a través de un método de Monte Carlo:

1. Primero es necesario conocer la función de densidad de probabilidad (pdf) que mejor se ajusta a los resultados y para encontrarla se realizan pruebas de hipótesis de bondad de ajuste (Apéndice A) empleando el valor del estadístico Anderson-Darling al 95 % de significancia [Stephens, 1974]. Las funciones prueba corresponden a la distribución normal, exponencial, logística, lognormal, Weibull, uniforme y de valor extremo. La regla de decisión para esta prueba de hipótesis establece que un valor pequeño del estadístico elegido indica que la distribución prueba se ajusta bien a los datos. Para cada componente del campo eléctrico  $\Delta E$  se encuentra que la función logística [Balakrishnan, 1992] es la función de distribución de probabilidad más adecuada (Apéndice B), pero no necesariamente es la que mejor se ajusta. Como ejemplo se muestra la Figura 4.8 donde se grafica el histograma de frecuencias para la componente “ $x$ ” del campo eléctrico observado y su curva de ajuste (función logística). Se observa que esta función no es exactamente la que se ajusta a la distribución del campo eléctrico observado, pero es lo que indica el valor del estadístico de prueba.
2. El generador de números aleatorios que se utiliza en este trabajo es la función RANDOM definida como: RAN (NSEED) donde NSEED es la semilla que genera la secuencia de números aleatorios. Si se requiere tener una secuencia

distinta en cada iteración entonces el valor de la semilla debe variar, es decir, puede ser un número que dependa del reloj del sistema o bien de la fecha.

3. La regla de muestreo que se utiliza en este trabajo es el método de transformación inversa. Para que este método sea aplicable es necesario que la variable aleatoria  $\Delta E$  y su función de distribución acumulada  $F(\Delta E)$  sean uno-a-uno. De esta manera es posible obtener una muestra a partir de  $\xi = F(\Delta E)$  y así calcular la función inversa  $\Delta E(\xi) = F^{-1}(\xi)$ . Obsérvese que  $\xi$  está uniformemente distribuida en el intervalo  $[0, 1]$  y que la función inversa se encuentra analíticamente.

Entonces el campo eléctrico estocástico está dado por la expresión (Apéndice B):

$$\Delta E(\xi) = \alpha + \beta \log_e \left( \frac{\xi}{1 - \xi} \right) \quad (4.5)$$

En la Ec. (4.5),  $\alpha$  es la media y  $\beta = \sqrt{\frac{\sigma^2}{3,29}}$  donde  $\sigma^2$  es la varianza de la serie de datos que corresponden a  $\Delta E$ . En el Cuadro 4.1 se muestran los valores de estos parámetros obtenidos para cada una de las naves en sus encuentros con la magnetósfera interna y externa de Saturno.

Aplicando la Ec. (4.5) y los valores del Cuadro 4.1 se obtienen las distribuciones del campo eléctrico estocástico que son diferentes para cada región de la magnetósfera (el campo eléctrico es más intenso en la magnetósfera interna que en la externa). Como ejemplos se muestran la Figura 4.9 donde se consideran las mediciones hechas en la magnetósfera interna por el Voyager 1 y la Figura 4.10 para el caso del Voyager 2 en su trayectoria de salida por la magnetósfera externa.

Al aplicar la Ec. (4.5) se está considerando que la distribución del campo eléctrico estocástico es el mismo para todas las latitudes y tiempos locales en las dos regiones magnetosféricas. De los datos de campo magnético no es posible determinar una dependencia latitudinal y/o en tiempos locales para el espectro de fluctuaciones que da origen al campo eléctrico estocástico.

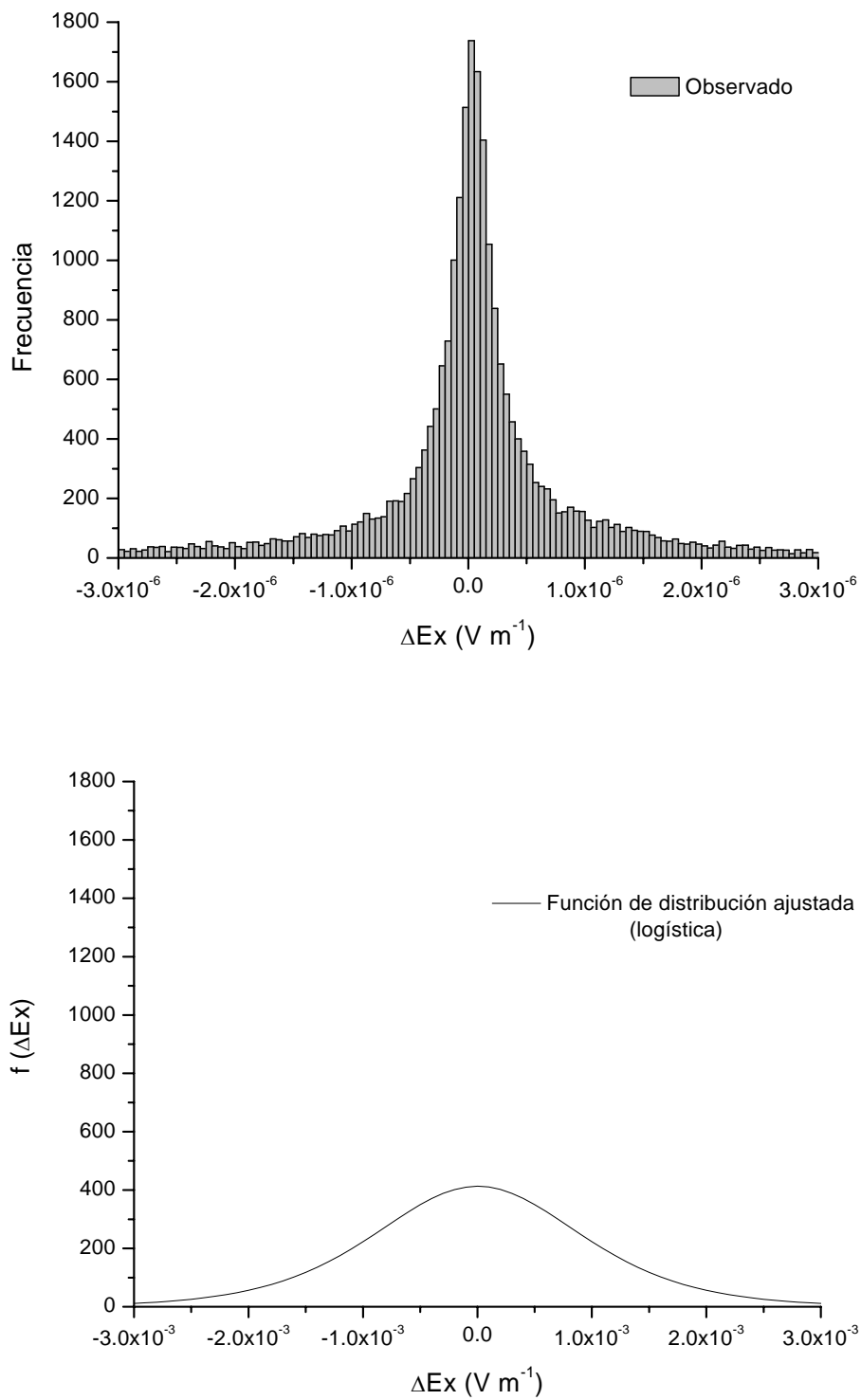


Figura 4.8: Histograma de frecuencias para la distribución del campo eléctrico en la componente “x” y su curva de ajuste (función logística).



Cuadro 4.1: Valores de  $\alpha$  y  $\beta$  obtenidos para el Voyager 1 y Voyager 2 en sus encuentros con la magnetósfera interna y externa de Saturno.

Componente del campo eléctrico $\Delta E$ ( $V m^{-1}$ )	<b>Magnetosfera interna</b>			
	<i>VOYAGER 1</i>		<i>VOYAGER 2</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\Delta E_x$	$6.35 \times 10^{-7}$	$6.05 \times 10^{-4}$	$1.05 \times 10^{-7}$	$4.26 \times 10^{-5}$
$\Delta E_y$	$2.31 \times 10^{-6}$	$4.22 \times 10^{-4}$	$-1.27 \times 10^{-8}$	$1.45 \times 10^{-6}$
$\Delta E_z$	$-6.84 \times 10^{-5}$	$3.81 \times 10^{-3}$	$-2.03 \times 10^{-6}$	$1.24 \times 10^{-3}$

Componente del campo eléctrico $\Delta E$ ( $V m^{-1}$ )	<b>Magnetosfera externa (entrada)</b>			
	<i>VOYAGER 1</i>		<i>VOYAGER 2</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\Delta E_x$	$-4.39 \times 10^{-8}$	$2.37 \times 10^{-6}$	$-6.89 \times 10^{-9}$	$1.46 \times 10^{-7}$
$\Delta E_y$	$2.93 \times 10^{-9}$	$2.39 \times 10^{-7}$	$-2.64 \times 10^{-11}$	$1.26 \times 10^{-8}$
$\Delta E_z$	$1.04 \times 10^{-6}$	$7.27 \times 10^{-5}$	$3.46 \times 10^{-6}$	$6.22 \times 10^{-5}$

Componente del campo eléctrico $\Delta E$ ( $V m^{-1}$ )	<b>Magnetosfera externa (salida)</b>			
	<i>VOYAGER 1</i>		<i>VOYAGER 2</i>	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$\Delta E_x$	$2.70 \times 10^{-7}$	$3.81 \times 10^{-5}$	$5.13 \times 10^{-8}$	$3.65 \times 10^{-6}$
$\Delta E_y$	$2.93 \times 10^{-7}$	$4.96 \times 10^{-5}$	$1.86 \times 10^{-8}$	$1.20 \times 10^{-6}$
$\Delta E_z$	$-8.79 \times 10^{-7}$	$1.08 \times 10^{-4}$	$6.74 \times 10^{-8}$	$4.42 \times 10^{-6}$

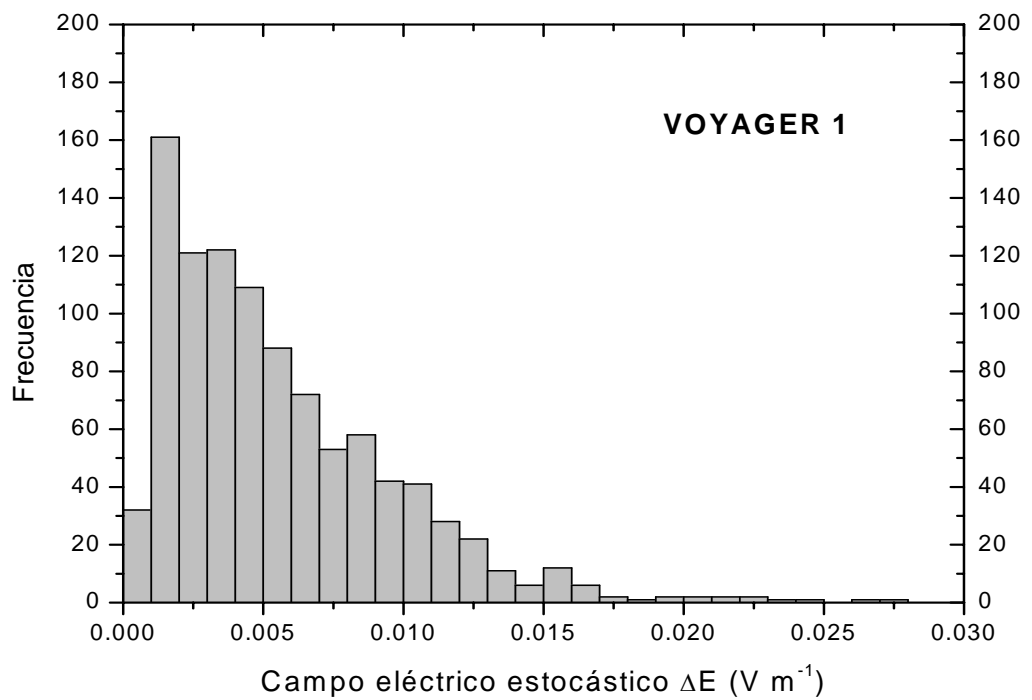


Figura 4.9: Distribución del campo eléctrico estocástico basado en las observaciones del Voyager 1 en su paso por la magnetósfera interna de Saturno.

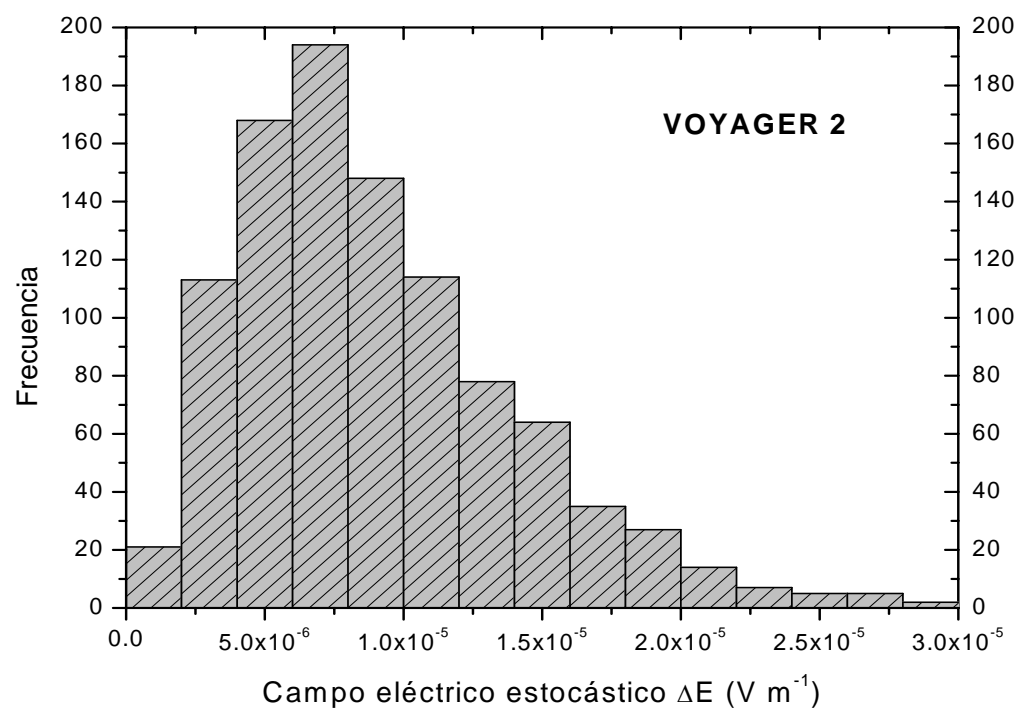


Figura 4.10: Distribución del campo eléctrico estocástico basado en las observaciones del Voyager 2 en su paso por la magnetósfera externa de Saturno (trayectoria de salida).

**4.1.2. Características de la población de partículas**

En esta sección se hablará de las propiedades de la población de partículas que se encuentra en cada región. En el Capítulo 3 se mencionó que en las dos regiones magnetosféricas las partículas están caracterizadas por una determinada distribución de velocidades. Si las partículas provienen de las atmósferas planetarias o de las ionósferas se puede asumir que la distribución de velocidades sigue un perfil Maxwelliano. Pero, si las partículas se originan en la superficie de los satélites de hielo la distribución puede ser más exótica (por ejemplo, una bi-Maxwelliana, Lorentziana o Kappa). Sin pérdida de generalidad, en este trabajo se considera que en cada dirección espacial la velocidad está dada por una distribución Maxwelliana.

Se aplica nuevamente Monte Carlo para seleccionar aleatoriamente una partícula que provenga de la distribución Maxwelliana. Para este caso en particular se hace una implementación del método de Box-Müller [1958] a partir del cual se llega a la siguiente expresión (Apéndice C):

$$v_{M1}(\chi_1, \chi_2) = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \cos(2\pi\chi_1) \sqrt{-2\log(\chi_2)} \tag{4.6}$$

Donde  $\chi_1$  y  $\chi_2$  son números aleatorios y estadísticamente independientes en el intervalo  $[0, 1]$ ,  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura de la fuente, y  $m$  es la masa de la partícula.

**4.1.2.1. Magnetósfera interna**

Las principales fuentes de plasma y de partículas neutras en la magnetósfera interna son los cinco satélites (Mimas, Encelado, Tetis, Dione y Rea) localizados entre  $3 R_S$  y  $9 R_S$  los anillos localizados entre  $1.09 R_S$  y  $8 R_S$  y la ionósfera de Saturno.

Los satélites de hielo están siendo continuamente bombardeados por partículas energéticas, por el plasma corrotante y por la radiación solar que provocan la “salpicadura” de cantidades significativas de agua de sus superficies formando una nube en el plano ecuatorial compuesta por productos de la disociación del agua [Johnson et al., 1989; Richardson, 1998]. La posterior ionización de estos neutros provee el

#### 4.1. Partículas cargadas (protones, iones pesados y granos de polvo) 77

plasma observado entre  $4 R_S$  y  $8 R_S$  que tiene una densidad de pocos  $\text{cm}^{-3}$ , una temperatura de algunas decenas de eV y aproximadamente el 20% son iones ligeros y el restante son iones pesados [Richardson, 1986]. Las partículas de los anillos están compuestas predominantemente por hielo de agua. La “salpicadura” por impactos con partículas cargadas y por bombardeo meteorítico inyecta material a la magnetósfera interna.

Aunque los satélites y los anillos actúan como fuentes de partículas también pueden absorberlas. De hecho al revisar los datos de partículas cargadas de los Voyager se observan claramente firmas de absorción en la vecindad de un satélite [Simpson et al., 1980; Santos-Costa et al, 2003].

Para propósitos computacionales y de acuerdo con las mediciones más recientes realizadas por la nave Cassini en la magnetósfera de Saturno [Young et al., 2005] se consideran distintas muestras de partículas que provienen de las fuentes más importantes (Cuadro 4.2). En la primera columna está indicada la fuente de partículas, la posición inicial de la cual parten está señalada en la segunda columna (para evitar absorción en la región de los anillos las partículas están localizadas encima del plano que los contiene en la dirección “z” ; mientras que en la dirección “x” en el centro del anillo) , en la tercera columna están las especies iónicas dominantes, en la cuarta columna la masa, en la quinta la temperatura de la fuente y en la última están las velocidades de corrotación<sup>2</sup>. Las velocidades de corrotación están basadas en el modelo de Eviatar and Richardson [1986] y varían como:  $1 R_S < r < 6.49 R_S$  ( $C = 1$ );  $6.5 R_S < r < 7.59 R_S$  ( $C = \frac{1}{2}$ );  $7.6 R_S < r < 8.9 R_S$  ( $C = 1$ ) y  $9 R_S < r < 10 R_S$  ( $C = \frac{1}{3}$ ).

Al analizar el camino libre medio: 1) entre iones ( $10^{10} \text{ m} < \lambda < 10^{17} \text{ m}$ ); 2) entre neutros ( $\lambda \sim 10^9 \text{ m}$ ) y 3) entre iones y neutros ( $6.3 \times 10^8 \text{ m} < \lambda < 10^{13} \text{ m}$ ) y compa-

---

<sup>2</sup>Cuando el plasma se mueve alrededor de un cuerpo planetario que rota a una velocidad angular dada, se dice que el plasma corrota con el cuerpo planetario. Esto es, tanto el plasma como el cuerpo planetario rotan con la misma velocidad angular. En Física Espacial es común referirse a este concepto como *velocidad de corrotación*.

Hay ocasiones en las que el plasma no rota con la misma velocidad angular del cuerpo planetario, aún en estas situaciones el término de velocidad de corrotación se sigue empleando. Para tales efectos, se dice que el plasma corrota a una cierta fracción de la velocidad de corrotación rígida. En otras palabras, esto significa que el plasma rota con una velocidad que corresponde a una fracción de la velocidad angular que tendría a esa distancia.

#### 4.1. Partículas cargadas (protones, iones pesados y granos de polvo) 78

Cuadro 4.2: Propiedades principales de la población de partículas en la magnetósfera interna de Saturno ( $1 \text{ amu} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ).

<b>Fuente</b>	<b>r<sup>1</sup> (Rs)</b>	<b>Especie iónica</b>	<b>m (amu)</b>	<b>T (K)</b>	<b>v<sub>c</sub><sup>8</sup> (km s<sup>-1</sup>)</b>
<i>Ionosfera de Saturno</i>	1.2 (polo norte)	H <sup>+</sup> H <sub>2</sub> <sup>+</sup>	1.01 2.02	400-800 <sup>2</sup>	0
<i>Anillo C</i>	1.348 (centro)	H <sup>+</sup> H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> N <sup>+</sup> O <sup>+</sup> OH <sup>+</sup>	1.01 18.02 14.01 15.99 17.01	93 <sup>3</sup>	13.64
<i>Encelado</i>	3.949 (polo sur)	H <sup>+</sup> , H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> OH <sup>+</sup>	Igual a lo anterior	85 <sup>4</sup>	38.98
<i>Dione</i>	6.5	H <sup>+</sup> , H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> N <sup>+</sup> , O <sup>+</sup> OH <sup>+</sup>	Igual a lo anterior	87.15 <sup>5</sup>	32.08
<i>Anillo E</i>	7.6 (centro)	H <sup>+</sup> , H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> O <sup>+</sup> , OH <sup>+</sup>	Igual a lo anterior	89.09 <sup>6</sup>	75.03
<i>Rea</i>	9.5	H <sup>+</sup> , H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> O <sup>+</sup> , OH <sup>+</sup>	Igual a lo anterior	76.15 <sup>7</sup>	31.26

<sup>1</sup>Se calculan con:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; donde  $x$  es la distancia orbital medida desde el centro de masa de Saturno hasta la partícula,  $z$  es la distancia perpendicular al plano orbital y  $y$  completa este sistema de coordenadas ortogonal.

<sup>2</sup>Atreya et al. [1986].

<sup>3</sup>La temperatura de brillo ha sido determinada por Murphy [1973]. Recientemente Cassini ha observado una asimetría en la temperatura entre el lado que da al Sol y el que no [Spilker et al., 2006].

<sup>4</sup>Spencer et al. [2006].

<sup>5</sup>Soderblom and Johnson [1982].

<sup>6</sup>Corresponde a la temperatura efectiva considerando que el anillo E está compuesto principalmente por partículas de hielo con un albedo de 0.05

<sup>7</sup>Es la temperatura de la superficie que da la cara al Sol [Murdin, 2001].

<sup>8</sup>Se obtienen a partir de:  $v_C = C (\omega_{rot} r)$  donde  $\omega_{rot} = 1.638 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ ;  $r$  es la distancia radial a la que se encuentra la partícula y  $C$  es una constante que se refiere a la fracción de la velocidad angular rígida [Eviatar and Richardson, 1986].

arlo con el tamaño de la magnetósfera interna simulada ( $10 R_S = 6.03 \times 10^8$  m) se concluye que el plasma es no-colisional.

### 4.1.2.2. Magnetósfera externa

La magnetósfera externa de Saturno está llena de plasma térmico con una densidad de  $2 \times 10^{-2}$  iones  $\text{cm}^{-3}$  hasta  $5 \times 10^{-1}$  iones  $\text{cm}^{-3}$  cerca del ecuador. Tal plasma no existe en la magnetósfera externa terrestre básicamente porque Titán es una fuente continua de plasma y por los continuos reajustes de la magnetósfera externa con las fluctuaciones del viento solar (quizá ambos sean responsables del calentamiento del plasma y de la producción de una cola de partículas supratérmicas).

La población de partículas energéticas consiste de electrones, de protones y de iones más pesados. Sus energías van de  $< 2$  MeV a  $10 R_S$  hasta  $< 1$  MeV cerca de la magnetopausa, pero los rayos cósmicos muy energéticos tienen libre acceso a la magnetósfera externa.

La interacción de Titán con la magnetósfera de Saturno [Sittler et al., 2005] resultará en la inyección energética de átomos de nitrógeno neutro hacia la magnetósfera debido a la disociación del nitrógeno molecular ( $\text{N}_2$ ) por electrones, iones y fotones UV. Esta inyección de átomos formará un toro de nitrógeno alrededor de Saturno con una densidad media de  $\sim 4 \text{ cm}^{-3}$ . Estos átomos son ionizados por fotoionización, por impactos con electrones y por reacciones de intercambio de carga produciendo un toro de  $\text{N}^+$  de iones supratérmicos con energías de 1 eV hasta 4 eV centrado en la posición orbital de Titán. Además de esto, Titán posee una densa atmósfera formada principalmente por metano ( $\text{CH}_4$ ) y nitrógeno molecular ( $\text{N}_2$ ) que constantemente está escapando del satélite. Este flujo de plasma (“pluma de Titán”) tiende a permanecer en el plano ecuatorial y emerger al medio interplanetario.

En analogía con los anillos de la magnetósfera interna, la presencia de un anillo gaseoso en la magnetósfera externa también puede ser fuente o sumidero de partículas. Este anillo se localiza a distancias de  $14 R_S$  y  $19 R_S$  y fue predicha por Lazarus et al. [1983] basándose en el análisis de las mediciones de la densidad iónica por las naves Pioneer 11, Voyager 1 y Voyager 2. La estructura anular localizada a  $14 R_S$  fue detectada por Vasundhara et al. [1984] en las observaciones de ocultación de la

estrella SAO158913 el 12 de Mayo de 1984.

En el estudio de la región externa se propone que una población de protones proviene inicialmente de Rea (también es válido suponer que se originan en el anillo E pues Cassini ha detectado que éste se extiende más allá de  $10 R_S$ ). Posteriormente esta población es seguida en su paso por la magnetósfera externa. En cuanto a la población de iones pesados, se considera que éstos provienen principalmente de la atmósfera superior de Titán (Cuadro 4.3). En la primera columna está indicada la fuente de partículas, la posición inicial de la cual parten está señalada en la segunda columna (para evitar absorción por el anillo E las partículas están localizadas sobre el plano del anillo), en la tercera columna están las especies iónicas dominantes, en la cuarta columna la masa, en la quinta la temperatura calculada en cada posición de interés y en la última están las velocidades de corrotación. Las velocidades de corrotación están basadas en el modelo de Eviatar and Richardson [1986] y varían como:  $r \geq 10 R_S$  ( $C = \frac{3}{4}$ ).

Al analizar el camino libre medio: 1) entre iones ( $10^{10} \text{ m} < \lambda < 10^{20} \text{ m}$ ); 2) entre neutros ( $9.6 \times 10^8 \text{ m} < \lambda < 10^{15} \text{ m}$ ) y 3) entre iones y neutros ( $10^{13} \text{ m} < \lambda < 10^{15} \text{ m}$ ) y compararlo con el tamaño de la magnetósfera externa simulada ( $10 R_S < r < 23 R_S$ ), esto es, ( $6.03 \times 10^8 \text{ m} < r < 1.21 \times 10^9 \text{ m}$ ) se concluye que el plasma es no-colisional.

#### 4.1.2.3. Anillos

Se aplica el modelo de aceleración estocástica descrito en el Capítulo 3 para investigar los efectos que un campo eléctrico estocástico tiene sobre la población de granos de polvo cargado que se encuentra en los anillos de Saturno.

Para determinar la carga de un grano de polvo es necesario conocer el potencial superficial de equilibrio,  $\Phi$ . En promedio, este potencial se calcula que será típicamente de  $+6 < \Phi < +10$  Volts [De Pater and Lissauer, 2001] con ciertas variaciones en los casos particulares, que dependerán del material que forma al grano de polvo. Generalmente la composición del plasma, la densidad y la temperatura exhiben variaciones espaciales y temporales que afectan los procesos de adquisición de carga<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Por ejemplo, en todas las magnetósferas planetarias los granos de polvo capturarán solamente una cantidad modesta de carga y las fuerzas electromagnéticas resultantes que actúan sobre partí-



Cuadro 4.3: Propiedades principales de la población de partículas en la magnetósfera externa de Saturno (1 amu = 1.66x10<sup>-27</sup> kg).

Fuente	r <sup>1</sup> (Rs)	Especie iónica	m (amu)	T <sup>2</sup> (K)	v <sub>c</sub> <sup>4</sup> (km s <sup>-1</sup> )
<i>Rea</i>	10	H <sup>+</sup>	1.01	76.15	75.15
	11			60 000	81.44
	12			97 000	88.85
	13			128 000	96.25
	14			152 000	103.65
	15			166 000	111.06
	16			180 000	118.46
	17			194 000	125.87
	18			211 000	133.27
	19			216 000	140.67
<i>Titán</i>	20.27	CH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	16.04	149 <sup>3</sup>	150.11
		H <sup>+</sup>	1.01		
		N <sup>+</sup>	14.01		
		N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	28.02		

<sup>1</sup>Se calculan con:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  ; donde  $x$  es la distancia orbital medida desde el centro de masa de Saturno hasta la partícula,  $z$  es la distancia perpendicular al plano orbital y  $y$  completa este sistema de coordenadas ortogonal.

<sup>2</sup>La temperatura en cada posición se estima a partir de la expresión:  $T = \frac{m \pi v_{M2}^2}{8 k_B}$  , donde  $v_{M2}$  es la velocidad promedio de la distribución final que debe mantener su perfil Maxwelliano para que la expresión sea válida y  $k_B = 1.38062 \times 10^{-23}$  J K<sup>-1</sup>.

<sup>3</sup>Corresponde a la temperatura de la atmósfera superior [Yelle et al., 2006].

<sup>4</sup>Se obtienen a partir de:  $v_C = C (\omega_{rot} r)$  donde  $\omega_{rot} = 1.638 \times 10^{-4}$  rad s<sup>-1</sup> ;  $r$  es la distancia radial a la que se encuentra la partícula y  $C$  es una constante que se refiere a la fracción de la velocidad angular rígida [Eviatar and Richardson, 1986].

Los mecanismos mediante los cuales un grano de polvo puede adquirir carga eléctrica son: 1) emisión de fotoelectrones debida a la absorción de radiación solar ultravioleta; 2) captura de fotones y/o iones del viento solar; 3) emisión electrónica secundaria en donde los granos son bombardeados por electrones o iones de altas energías. Horanyi [1996] en su modelo de carga supone que el grano de polvo se mueve en una órbita Kepleriana no-perturbada y que los coeficientes de emisión electrónica secundaria son:  $E_m = 500 \text{ eV}$  y  $\delta_m = 1, 2$ . En la región que va desde  $1 R_S$  hasta  $3 R_S$  (Figura 4.11) se observa que el potencial superficial de equilibrio es nulo para ambas curvas, por lo tanto los granos de polvo localizados en los anillos D, C, B, División de Cassini, A, F y G no tendrán carga neta en su superficie. Mientras que en la región del anillo E, Horanyi distingue varias regiones de potencial: a)  $\Phi = -5 \text{ V}$  en  $3.5 R_S$ ; b)  $-10 \text{ V} < \Phi < -5 \text{ V}$  en  $6 R_S$ , y c)  $1 \text{ V} < \Phi < 3 \text{ V}$  en  $10 R_S$ .

Graps and Grün [2002] investigaron el comportamiento de la adquisición de carga en los granos submicrométricos localizados en la magnetósfera de Saturno y encontraron que el potencial varía entre  $\sim -2 \text{ V}$  en  $3.5 R_S$ , luego disminuye a  $\sim -5 \text{ V}$  en  $6 R_S$  y de nuevo se incrementa a  $\sim -1.5 \text{ V}$  en  $10 R_S$ . En este trabajo se considera que el anillo E es el sitio donde los granos de polvo pueden mantener por más tiempo su carga y dentro de él se identifican tres regiones principales de potencial electrostático:

1. Anillo E1 ( $3.5 R_S$ ):  $q = -2.22 \times 10^{-16} \text{ C}$  con  $\Phi = -2 \text{ Volts}$ . Se toma el valor máximo obtenido en el modelo de Graps and Grün [2002] porque así se asegura que no habrá ruptura electrostática.
2. Anillo E2 ( $6.5 R_S$ ):  $q = -4.45 \times 10^{-16} \text{ C}$  con  $\Phi = -4 \text{ Volts}$  y  $q = -1.11 \times 10^{-15} \text{ C}$  con  $\Phi = -10 \text{ Volts}$ . Se toma el valor mínimo y máximo obtenido en el modelo de Horanyi [1996]. Ver Figura 4.11.
3. Anillo E3: ( $8 R_S$ ):  $q = -2.22 \times 10^{-16} \text{ C}$  con  $\Phi = -2 \text{ Volts}$  y  $q = 3.34 \times 10^{-16} \text{ C}$  con  $\Phi = 3 \text{ Volts}$ . Se toma el valor mínimo y máximo obtenido en el modelo de

---

culas con tamaños del orden de centímetros o mayores son despreciables comparadas con la fuerza de gravedad. Sin embargo, hacia la parte final de la distribución de masas (unas cuantas micras) la fuerza de Lorentz puede llegar a ser la perturbación más importante y resultar en una desviación significativa de las órbitas Keplerianas.

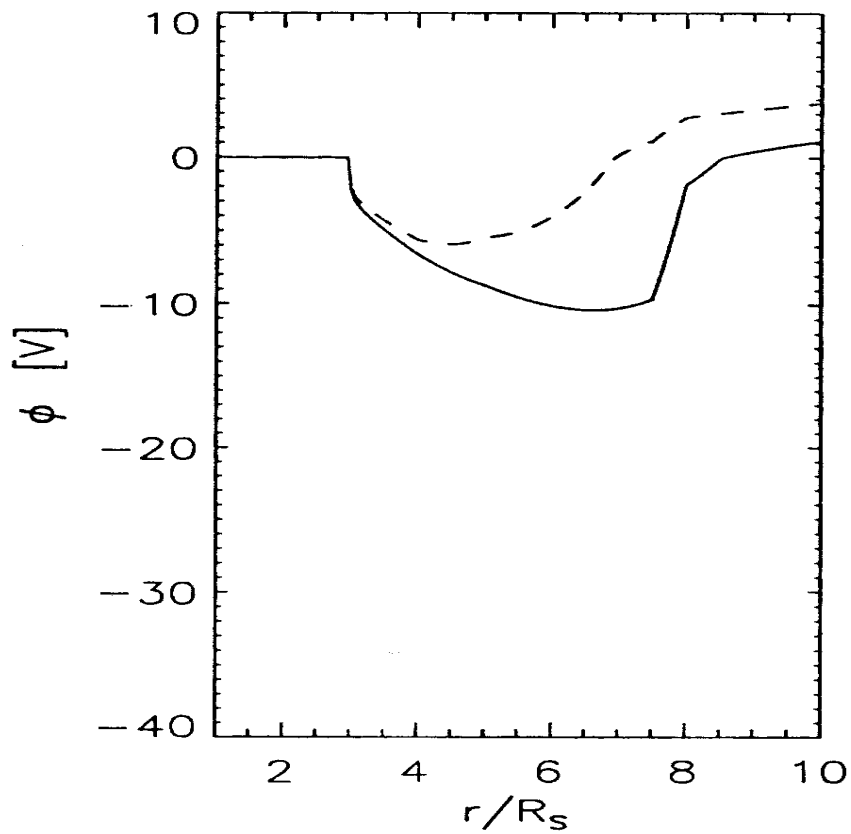


Figura 4.11: El potencial superficial de equilibrio de un grano de polvo dieléctrico que se mueve en una órbita circular Kepleriana y no-perturbada en el plano ecuatorial de Saturno como función de la distancia al planeta. Se asume que  $E_m = 500$  eV,  $\delta_m = 1$  (línea continua) y  $\delta_m = 2$  (línea punteada). Tomado de Horanyi [1996].

Horanyi [1996]. Ver Figura 4.11.

El camino libre medio entre colisiones de los granos de polvo cargado con: 1) polvo cargado ( $\lambda > 10^{20}$  m) y 2) iones ( $\lambda \sim 10^{13}$  m) indica que el anillo E es una región no colisional.

## 4.2. Partículas neutras (granos de polvo)

Como ya se mencionó previamente un campo de fuerzas estocástico tiende -en promedio- a acelerar partículas. Hasta el momento el campo eléctrico es quien tiene ese comportamiento y no actúa sobre las partículas neutras. Las partículas neutras juegan un papel importante en la dinámica de la magnetósfera de Saturno y por esta razón resulta interesante investigar el efecto que provoca la acción de un campo estocástico cuya naturaleza no es electromagnética.

Es así como se propone que la fuerza gravitacional entre partículas tenga carácter estocástico y por lo tanto es de esperarse que sea capaz de energizar a las partículas. El sistema físico que se elige para este propósito son los anillos de Saturno pues es una configuración estable y que al mismo tiempo está inyectando material hacia la magnetósfera interna. Se ha argumentado que el material inyectado se debe a los impactos por agentes externos sobre los granos de polvo o sobre la superficie de los satélites embebidos en ellos, pero quizás también la dinámica interna de este sistema sea la responsable. En la Figura 2.2 se muestra un diagrama de los anillos y de los satélites internos que se encuentran en esta región.

### 4.2.1. El campo gravitacional estocástico entre partículas de polvo

En el Capítulo 3 se mencionó que para generar este campo se requieren básicamente dos cosas: una distribución de masas característica de cada anillo y una distribución de la distancia que separa a una partícula de otra. Cabe destacar que no se han reportado ni las masas ni las distancias entre granos, así que partiendo de los datos observacionales (Cuadro 2.4 y Cuadro 2.5), se derivan los parámetros

necesarios para generar estas distribuciones.

#### 4.2.2. Características de la población de granos de polvo

Las partículas de los anillos de Saturno han mostrado estar compuestas por hielo de agua [Lebofsky et al., 1970; Clark, 1980]. El descubrimiento de un enrojecimiento entre 0.3 y 0.8  $\mu\text{m}$  indicó la presencia de material adicional distinto al hielo [Lebofsky and Fegley, 1976]. Las imágenes de color obtenidas por el Voyager claramente mostraron que el anillo C y la División de Cassini son menos rojizos que los anillos A y B. Las investigaciones recientes de las imágenes del Voyager sugieren que el color de los anillos varía cualitativamente sobre una escala radial de algunos cientos de kilómetros [Estrada and Cuzzi, 1996]. De hecho reportan que ese color rojizo quedaría bien modelado por una pequeña cantidad de material absorbente como el “tholin”<sup>4</sup>.

La composición de los anillos ha sido estudiada en detalle y se confirma que no son partículas de hielo de agua puras sino que están formadas por una mezcla de “sal y pimienta” junto con hielo de agua [Poulet and Cuzzi, 2002], pero conforme los anillos están más lejos del planeta las partículas tienden a estar compuestas por hielo de agua más puro [Sicardy, 2005].

En el Cuadro 2.4 se menciona la distancia a la que se encuentran los anillos de Saturno, y de allí los granos de polvo; mientras que en el Cuadro 2.5 se dan los tamaños típicos de estas partículas. Tomando en cuenta la masa total de cada anillo, el tamaño de los granos y su composición es posible estimar la masa, la densidad volumétrica, el número esperado de partículas y la distancia entre granos de polvo. Estos resultados se muestran en el Cuadro 4.4.

El camino libre medio entre colisiones de los granos de polvo neutro con: 1) polvo neutro ( $10^2 \text{ m} < \lambda < 10^{13} \text{ m}$ ) y 2) iones ( $10^1 \text{ m} < \lambda < 10^{12} \text{ m}$ ) indica que el sistema de anillos es colisional excepto en la región del anillo E. Estas colisiones frecuentes entre partículas de los anillos pueden llegar a romper, agregar, deformar y erosionar a los granos de polvo que traería como consecuencia una variación continua de la densidad y de la distribución de sus tamaños. Por otro lado, los satélites de hielo en

---

<sup>4</sup>Los “tholines” son partículas orgánicas sólidas muy pequeñas que se forman en la alta atmósfera de Titán por la ionización del metano y del nitrógeno. Este término fue creado por Carl Sagan.

Cuadro 4.4: Propiedades derivadas de las partículas que constituyen a los anillos de Saturno. Se ha supuesto que en todos los anillos (excepto en el anillo E) las partículas están formadas por una mezcla de hielo-silicatos.

Anillo	Masa (kg)			Densidad (m <sup>-3</sup> )		
	Mín.	Prom.	Máy.	Mín.	Prom.	Máy.
<i>D</i>	$6.03 \times 10^{-12}$	$1.00 \times 10^{-9}$	$6.03 \times 10^{-9}$	?		
<i>C</i>	$6.03 \times 10^{-3}$	$1.13 \times 10^5$	$8.98 \times 10^5$	$2.43 \times 10^{-5}$	$1.94 \times 10^{-4}$	$3.62 \times 10^3$
<i>B</i>	$6.03 \times 10^{-3}$	$9.48 \times 10^4$	$7.54 \times 10^5$	$3.16 \times 10^{-4}$	$2.51 \times 10^{-3}$	$3.95 \times 10^4$
<i>División de Cassini</i>	$6.03 \times 10^{-3}$	$3.19 \times 10^5$	$2.54 \times 10^6$	$1.12 \times 10^{-7}$	$8.94 \times 10^{-7}$	47.35
<i>A</i>	$6.03 \times 10^{-3}$	$1.06 \times 10^6$	$8.47 \times 10^6$	$1.19 \times 10^{-7}$	$9.51 \times 10^{-7}$	167.38
<i>F</i>	$6.03 \times 10^{-3}$	0.75	6.03	?		
<i>G</i>	$3.85 \times 10^{-21}$	$3.08 \times 10^{-20}$	$1.04 \times 10^{-19}$	?		
<i>E</i>	$3.85 \times 10^{-18}$	$3.85 \times 10^{-15}$	$2.64 \times 10^{-14}$	0.004	0.03	27.46

Anillo	Número esperado de granos			Distancia entre granos de polvo (m)		
	Mín.	Prom.	Máy.	Mín.	Prom.	Máy.
<i>D</i>	?			?		
<i>C</i>	$1.11 \times 10^{12}$	$8.86 \times 10^{12}$	$1.66 \times 10^{20}$	0.06	17.28	29.72
<i>B</i>	$3.98 \times 10^{13}$	$3.16 \times 10^{14}$	$4.97 \times 10^{21}$	0.03	7.36	12.65
<i>División de Cassini</i>	$1.96 \times 10^{11}$	$1.57 \times 10^{12}$	$8.29 \times 10^{19}$	0.23	103.79	178.55
<i>A</i>	$7.08 \times 10^{11}$	$5.65 \times 10^{12}$	$9.95 \times 10^{20}$	0.16	101.70	175.03
<i>F</i>	$8.29 \times 10^{13}$	$6.63 \times 10^{14}$	$8.29 \times 10^{31}$	?		
<i>G</i>	?			?		
<i>E</i>	$2.65 \times 10^{22}$	$1.82 \times 10^{23}$	$1.82 \times 10^{26}$	0.33	3.31	6.29

esta región suministran continuamente de material polvoso a los anillos. Los procesos descritos anteriormente conducen a la conservación de masa de cada anillo, por lo que no es necesario considerar a las colisiones en la ecuación de movimiento.

#### 4.2.2.1. Distribución de masas para los granos de polvo

En el capítulo anterior se explicó que el campo gravitacional estocástico se genera a partir de una distribución de masa y de una distribución de distancias entre granos de polvo. Cada anillo tendrá su propia distribución de acuerdo con las propiedades del Cuadro 4.4.

Para obtener la distribución de masas característica en cada anillo se utiliza la Ec. (3.17). Obsérvese que depende de la distribución de tamaños dada por  $a_{stoc}$ . Las partículas en el sistema principal de anillos de Saturno están mejor caracterizadas que las partículas de otros anillos planetarios. Como ya se mencionó el sistema de anillos es altamente colisional por lo que los procesos de fragmentación y acreción llevan a distribuciones que siguen una ley de potencias para el número de partículas contra el tamaño. Este tipo de distribuciones se observan sobre un intervalo amplio de radios en el cinturón de asteroides y en la mayoría de los anillos planetarios para los cuales se tiene información disponible sobre los tamaños. La distribución tiene la forma:

$$N(a) = N_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-\zeta} \quad (a_{min} < a < a_{max}) \quad (4.7)$$

donde  $N(a) da$  es el número de partículas con radios entre  $a$  y  $a + da$  y  $N_0$  y  $a_0$  son constantes de normalización. La distribución está caracterizada por los valores del índice  $\zeta$  y por los valores de los radios mínimo,  $a_{min}$ , y máximo,  $a_{max}$ . Los valores del índice reportados hasta el momento son:

- Anillo C:  $\zeta = 3.1$  [Nicholson and French, 1998]
- Anillo B:  $\zeta = 2.75$  [Nicholson and French, 1998]
- Anillo A:  $\zeta = 2.75$  [Nicholson and French, 1998]

De la Ec. (4.7) se puede conocer el valor de  $a$  y de allí emplear la Ec. (3.17) para generar la distribución de masas. Sin embargo, los valores de las constantes de

normalización no se conocen y además sólo se generan masas muy grandes (o muy pequeñas) que están en desacuerdo con los valores reportados en el Cuadro 4.4. Así que una manera más efectiva de generar la distribución de los tamaños es asumir una distribución uniforme y a ésta aplicarle el método de la transformación inversa para generar números aleatorios que cubran el intervalo de tamaños deseado. Esto es:

$$a_{stoc} = a(\xi) = a_{min} + (a_{max} - a_{min}) \xi \quad (4.8)$$

donde  $\xi$  es un número aleatorio en el intervalo  $[0, 1]$ . Por lo tanto la distribución de masas queda expresada como:

$$m_{stoc} = \rho_m \left\{ \frac{4}{3} \pi [a_{min} + (a_{max} - a_{min}) \xi]^3 \right\} \quad (4.9)$$

Generalmente es válido (y aceptable) suponer que la densidad del material que forma a los granos de polvo es  $\rho_m = 1000 \text{ kg m}^{-3}$  (hielo). En este trabajo se considera que los granos de los anillos C, B, División de Cassini y A están formados por una mezcla del 75% de hielo de agua y el 25% de silicatos por lo que la densidad es  $\rho_m = 1440 \text{ kg m}^{-3}$ . Para los granos del anillo E se asume que están formados únicamente por hielo de agua por lo que la densidad es  $\rho_m = 920 \text{ kg m}^{-3}$  [Christiansen and Hamblin, 1995].

#### 4.2.2.2. Distribución de las distancias entre granos de polvo

Dado que no existen datos observacionales relacionados con la distancia que separa a un grano de otro dentro de un mismo anillo, no es posible realizar un ajuste a través de alguna función conocida. Entonces se asume que la distribución más adecuada para este caso es una distribución uniforme que está limitada a la distancia mínima ( $r_{min}$ ) y máxima ( $r_{max}$ ) reportada en el Cuadro 4.4. Así se llega:

$$r_{stoc} = r(\eta) = r_{min} + (r_{max} - r_{min}) \eta \quad (4.10)$$

donde  $\eta$  es un número aleatorio en el intervalo  $[0, 1]$ .



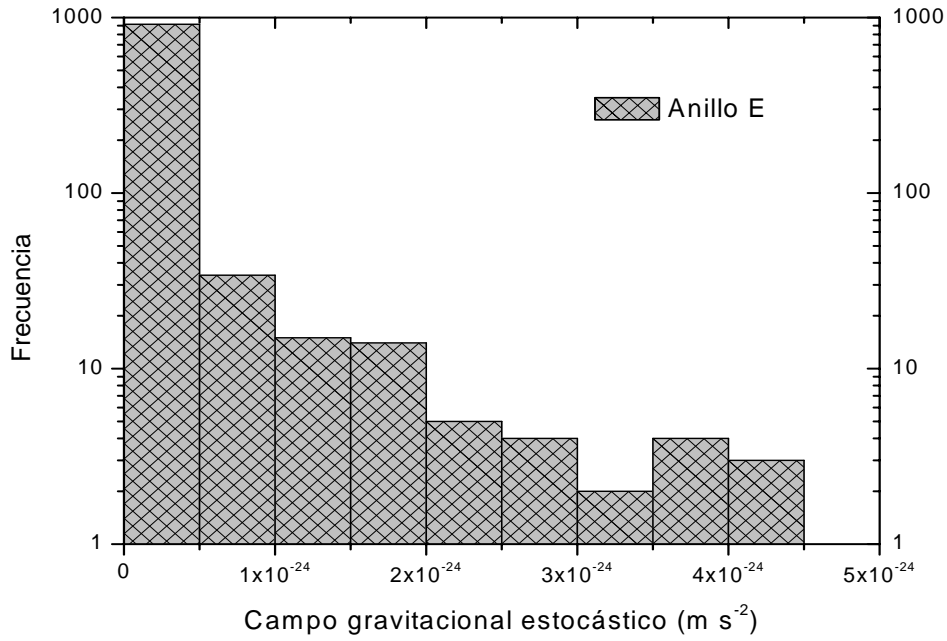


Figura 4.12: Perfil del campo gravitacional estocástico para partículas localizadas en el anillo E.

Finalmente el campo gravitacional estocástico se calcula a partir de:

$$g_{stoc} = \frac{G m_{stoc}}{r_{stoc}^2} \quad (4.11)$$

El perfil típico del campo gravitacional estocástico se muestra en la Figura 4.12 para el caso particular de partículas localizadas en el anillo E. Un perfil similar se obtiene para el resto de los anillos.

## Determinación del paso numérico espacial

En el Capítulo 3 se explicó que el paso numérico espacial, dado por  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ , es una fracción del radio de giro mínimo (o radio de Larmor) para las partículas cargadas (iones) o una fracción de la distancia mínima entre granos para las partículas de polvo cargadas. El caso especial es para los granos de polvo neutros donde se considera una fracción de la distancia aleatoria entre partículas.

**Partículas cargadas (iones)**

El radio de giro está dado por la expresión:

$$r_g = \frac{m v_{\perp}}{|q| B} \quad (4.12)$$

En la Ec. (4.11),  $m$  es la masa de partícula,  $v_{\perp}$  es la velocidad total (corrotación + distribución) perpendicular al campo magnético,  $q$  es la carga eléctrica y  $B$  es la magnitud del campo magnético medida desde el planeta hasta donde se encuentra la partícula. De acuerdo con la Ec. (4.11) el campo magnético más intenso determinará al radio de giro más pequeño. El campo magnético más intenso se mide en el polo de Saturno ( $\sim 3.6 \times 10^{-5}$  T) y el radio de giro para los distintos tipos de partículas se encuentra en el intervalo,  $1.68 \text{ m} < r_g < 2.4 \text{ m}$ . Se considera la fracción  $\frac{1}{1000}$  de metro como paso numérico espacial.

**Granos de polvo cargados**

El paso numérico se determina a partir de la distancia mínima calculada entre los granos de polvo en cada anillo. De los valores mostrados en el Cuadro 4.6, es claro que la distancia mínima entre partículas está en el intervalo,  $0.03 \text{ m} < d_{\min} < 0.33 \text{ m}$ . Entonces, la fracción que se considera es  $\frac{1}{1000}$  de metro como paso numérico espacial.

**Granos de polvo neutros**

El paso numérico en cada dirección espacial se obtiene de las expresiones:

$$\Delta x = r_{stoc} \cos(\theta_{stoc}) \cos(\delta_{stoc}) \quad (4.13)$$

$$\Delta y = r_{stoc} \sin(\theta_{stoc}) \cos(\delta_{stoc}) \quad (4.14)$$

$$\Delta z = r_{stoc} \sin(\delta_{stoc}) \quad (4.15)$$

En las Ecs. (4.12), (4.13) y (4.14), los ángulos  $\theta$  y  $\delta$  tienen carácter aleatorio. Para generarlos se utiliza la distribución uniforme:

$$\theta_{stoc} = \theta(\varsigma_1) = \theta_{min} + (\theta_{max} - \theta_{min}) \varsigma_1 \quad (4.16)$$

$$\delta_{stoc} = \delta(\varsigma_2) = \delta_{min} + (\delta_{max} - \delta_{min}) \varsigma_2 \quad (4.17)$$

donde  $0 < \theta < 2\pi$ ,  $-\pi < \delta < \pi$ ,  $\varsigma_1$  y  $\varsigma_2$  son números aleatorios en el intervalo  $[0, 1]$ .

Finalmente para asegurar que el grano de polvo interactuará varias veces con el campo gravitacional estocástico, se toma la fracción  $\frac{1}{100}$  de metro en las Ecs. (4.12), (4.13) y (4.14).

Se ha aplicado el modelo de aceleración estocástica desarrollado en el Capítulo 3 a la población de partículas cargadas y neutras presente en la magnetósfera de Saturno. En el siguiente Capítulo se discuten los resultados obtenidos para la magnetósfera interna, para la magnetósfera externa y para el sistema de anillos.

# Capítulo 5

## Resultados y Discusión

En este capítulo se discuten los resultados obtenidos al aplicar el modelo de aceleración (o energización) estocástica a la magnetósfera de Saturno desarrollado en el Capítulo 3. La magnetósfera ha sido dividida para su estudio en dos regiones: *interna* y *externa*. Este modelo también es aplicado al sistema de anillos de Saturno compuesto por granos de polvo (cargados y neutros) para estudiar los efectos que provoca la acción de un campo de fuerzas estocástico de origen no electromagnético.

### 5.1. Magnetósfera interna

Aplicando la Ec. (4.5) con los valores mostrados en el Cuadro 4.1 se obtiene el campo eléctrico estocástico que interactúa con una muestra particular de iones (Figura 4.8 y 4.9). De acuerdo con Young et al. [2005] se asume que la magnetósfera interna de Saturno está compuesta principalmente por protones ( $H^+$ ) y iones pesados como el agua ( $H_2O^+$ ), hidrógeno molecular ( $H_2^+$ ), nitrógeno atómico ( $N^+$ ), nitrógeno molecular ( $N_2^+$ ), oxígeno atómico ( $O^+$ ) e hidróxido ( $OH^+$ ). Se reportan los resultados basados en las mediciones de campo magnético del Voyager 1 y Voyager 2 en sus respectivos encuentros con la magnetósfera interna de Saturno.

Las partículas están inicialmente caracterizadas por una distribución de velocidades Maxwelliana adecuada y por la distribución de energía cinética correspondiente. La muestra de partículas está localizada en diferentes posiciones que corresponden a las fuentes más importantes dentro de la magnetósfera interna (Cuadro 4.2).

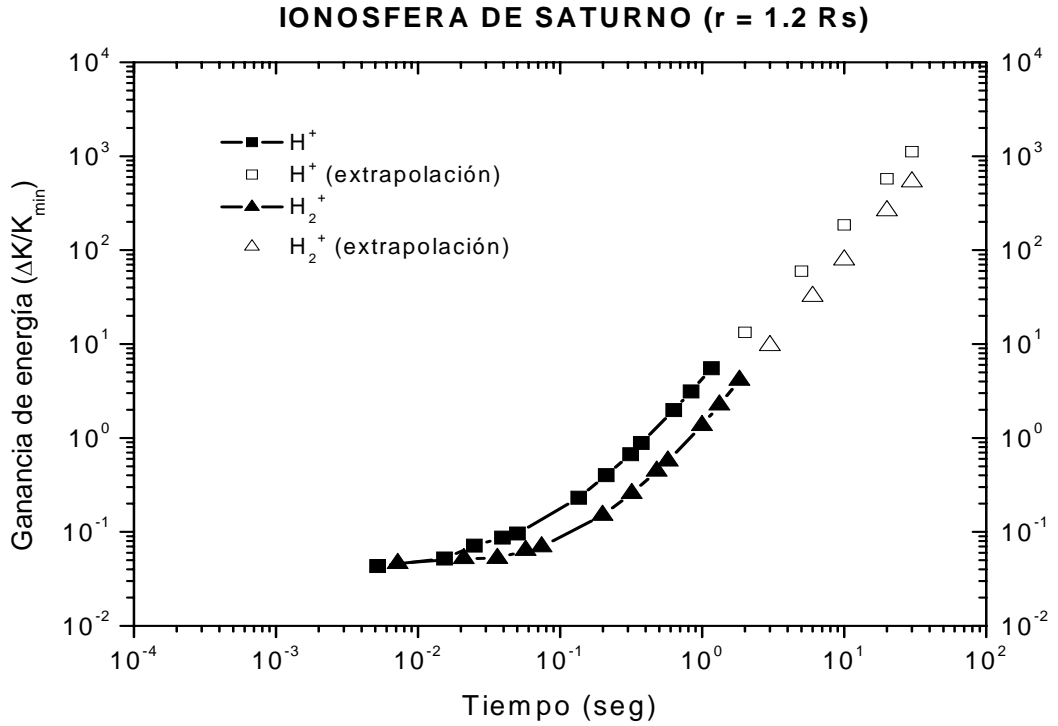


Figura 5.1: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en el polo norte de Saturno. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1.

Después de que la muestra de partículas interactúa con el campo eléctrico estocástico, tienden en promedio a ganar energía cinética después de algunos segundos, como se puede ver en la Figura 5.1 hasta la Figura 5.6. La ganancia de energía cinética,  $G$ , se calcula con la expresión:

$$G = \frac{\Delta K}{K_{\min}} = \frac{K_2 - K_1}{K_{\min}} \quad (5.1)$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  se obtienen de las Ecs. (3.7) y (3.11) respectivamente, y  $K_{\min}$  se refiere a la energía cinética mínima que tiene cada ión dentro de la magnetósfera (Cuadro 5.1).

Se observa que los protones tienden a ganar más energía que los iones pesados como el agua ( $H_2O^+$ ), hidrógeno molecular ( $H_2^+$ ), nitrógeno atómico ( $N^+$ ), nitró-

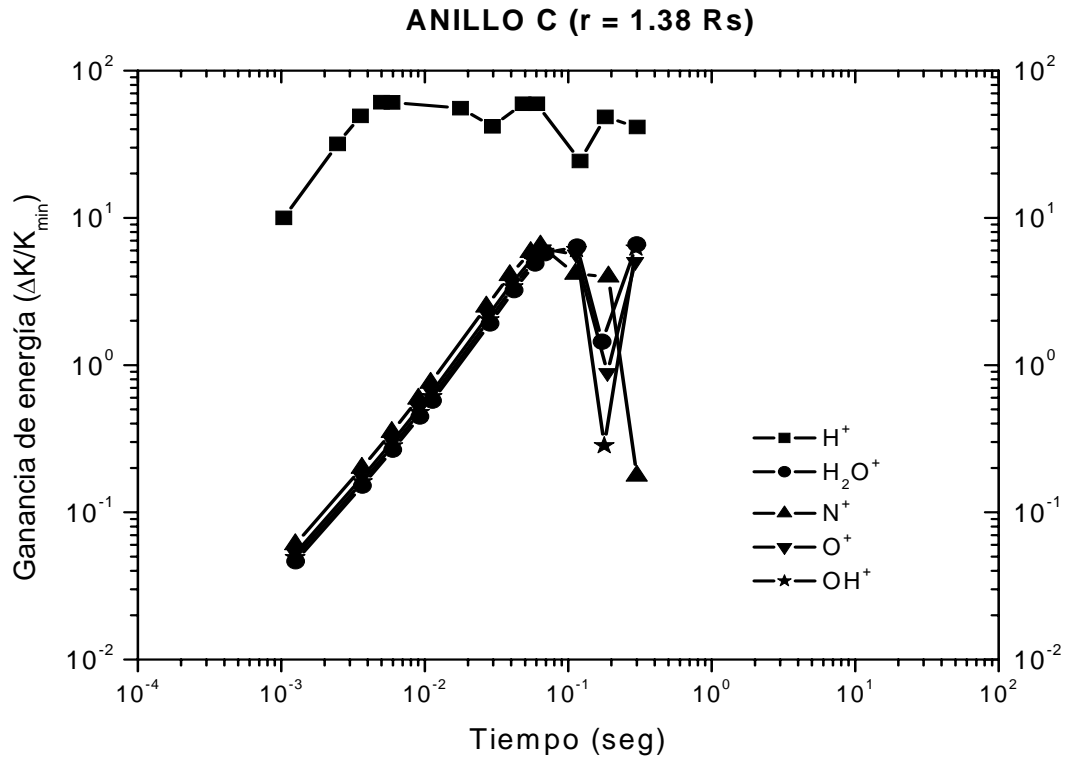


Figura 5.2: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y varias muestras de iones pesados localizados sobre el anillo C. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2. Obsérvese que no hay una marcada tendencia a ganar energía todo el tiempo.

Cuadro 5.1: Energía cinética mínima (eV) que tienen los protones y los iones pesados en la magnetósfera de Saturno.

Especie iónica	Energía cinética mínima (eV)
$H^+$	0.1049
$H_2^+$	0.1039
$H_2O^+$	17.4192
$N^+$	13.5533
$O^+$	15.4794
$OH^+$	16.4574

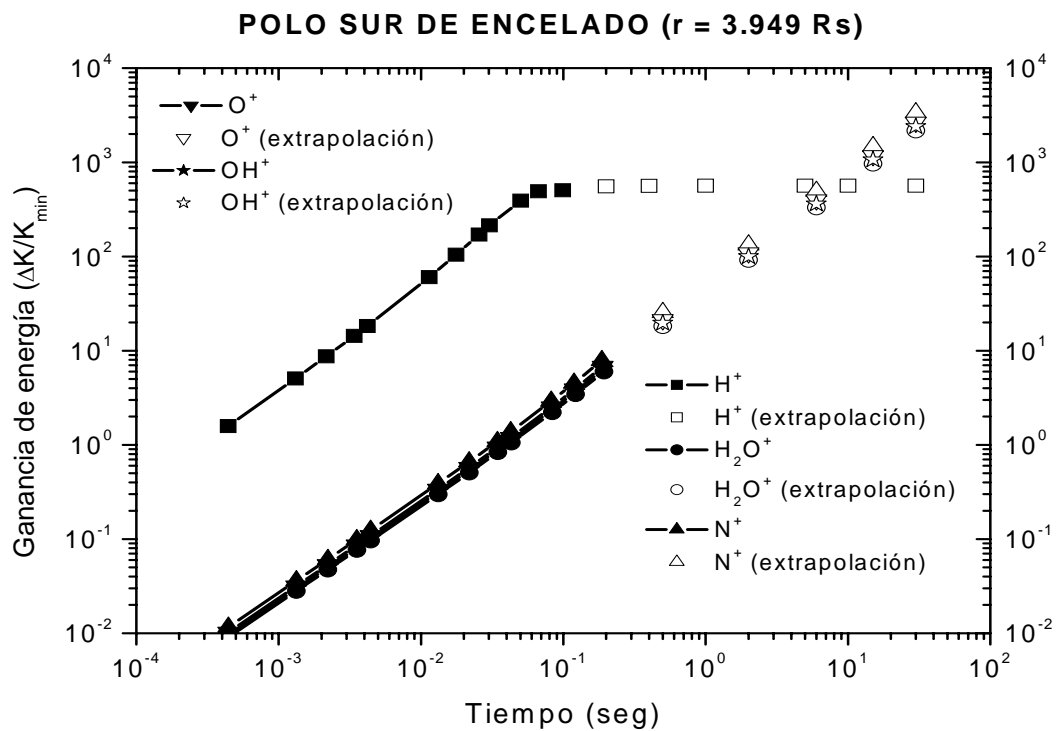


Figura 5.3: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en el polo sur de Encelado. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1.

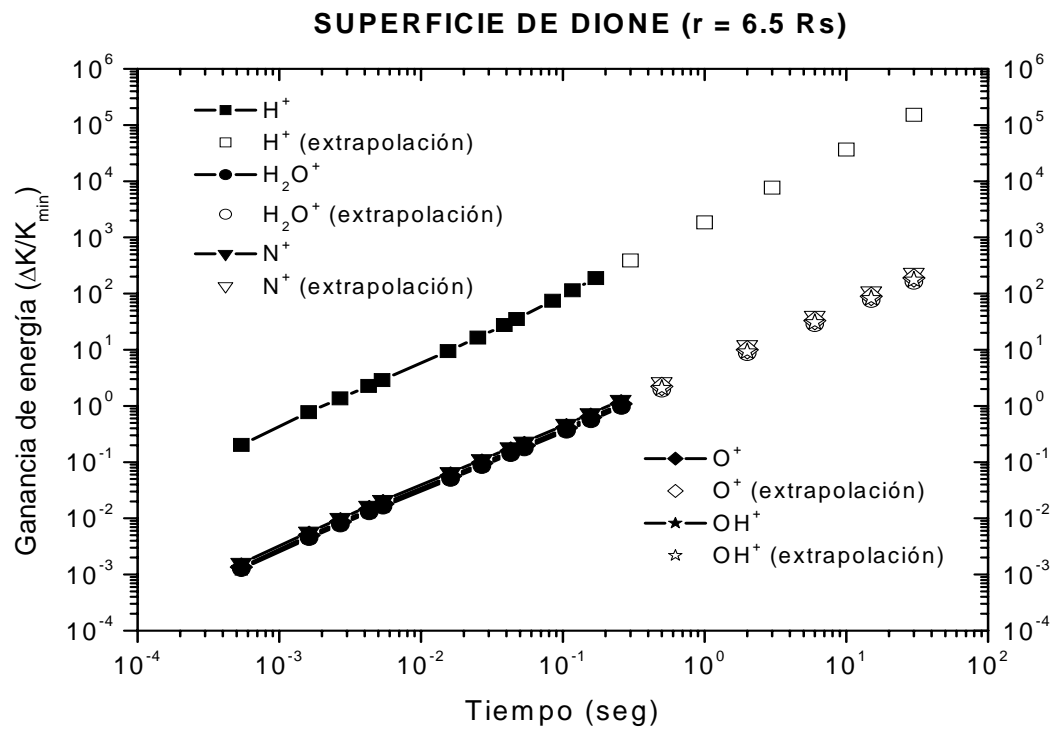


Figura 5.4: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en Dione. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2.



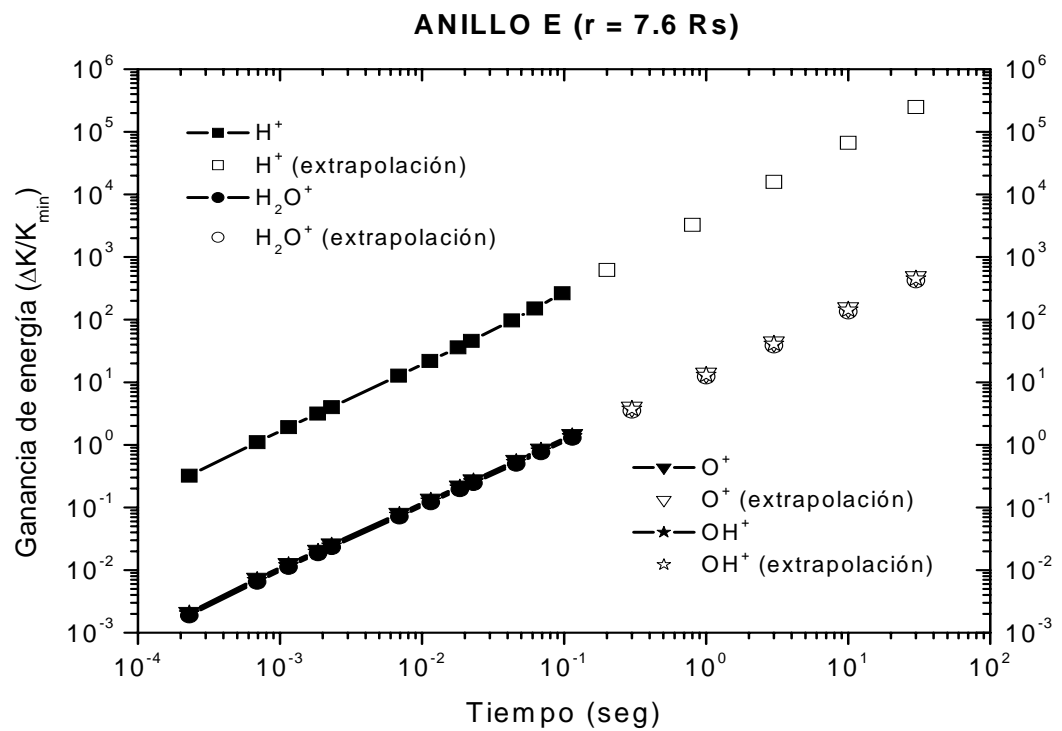


Figura 5.5: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados sobre el anillo E. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 1.

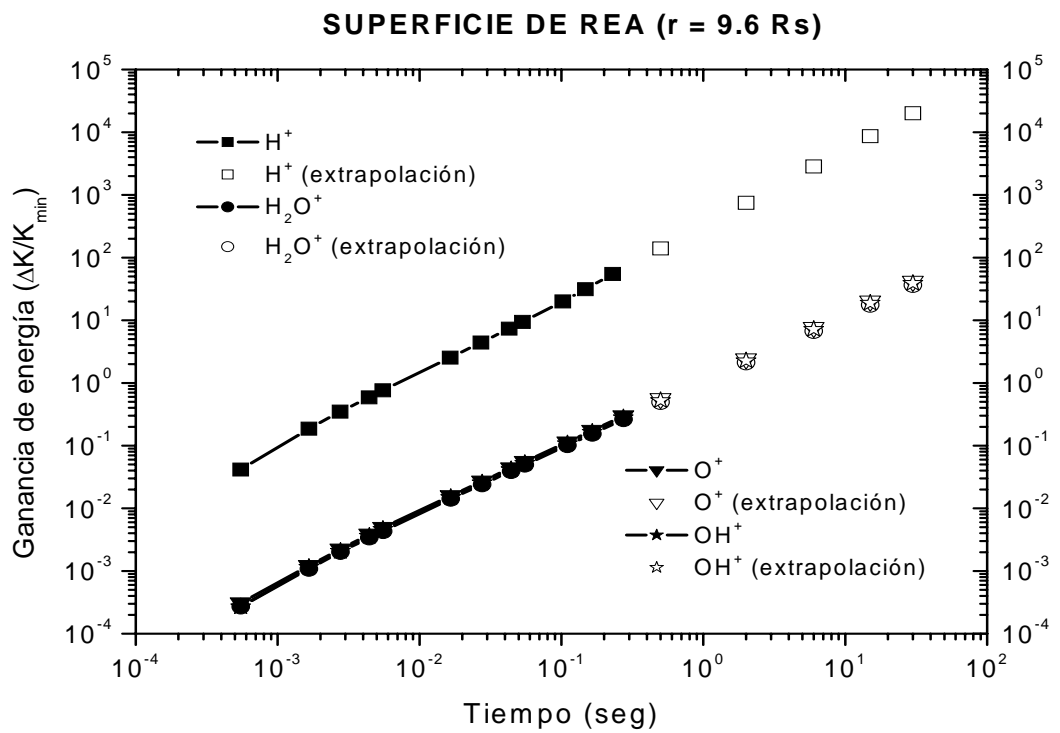


Figura 5.6: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados en Rea. Resultados basados en mediciones del campo magnético realizados por el Voyager 2.

geno molecular ( $\text{N}_2^+$ ), oxígeno atómico ( $\text{O}^+$ ) e hidróxido ( $\text{OH}^+$ ). Adicionalmente, las partículas localizadas en la frontera externa (por ejemplo, Rea) ganan más energía que las partículas localizadas cerca del planeta (polo norte de Saturno) pero ganan menos que las localizadas en la parte intermedia (Dione, Anillo E). De esta manera se identifican diferentes regiones de energización en la magnetósfera interna: 1) región de baja energización (polo norte de Saturno, Encelado y Rea); 2) región de inestabilidad (Anillo C); 3) región de energización intermedia (Dione); y 4) región de alta energización (Anillo E).

Una posible explicación a este efecto está en términos de la energía de corrotación disponible en cada región. Después de realizar la diferencia entre la energía cinética final y la energía cinética inicial (esto es, el incremento de energía por el mecanismo estocástico) aparecen tres términos en la ecuación de la energía [Martínez-Gómez et al., 2007a]:

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m [v_2^2 - v_1^2] = \frac{1}{2}m [(v_{D2} + v_{C2})^2 - (v_{M1} + v_{C1})^2] \\ &= \frac{1}{2}m (v_{D2}^2 - v_{M1}^2) + \frac{1}{2}m (v_{C2}^2 - v_{C1}^2) + \frac{1}{2}m (2v_{D2}v_{C2} - 2v_{M1}v_{C1})\end{aligned}\quad (5.2)$$

El primer término en la Ec. (5.2) está relacionado con la energía de la distribución donde  $v_{D2}$  es la velocidad de la distribución final y  $v_{M1}$  es la velocidad de la distribución Maxwelliana inicial; el segundo término es debido a la energía de corrotación donde  $v_{C2}$  es la velocidad de corrotación final y  $v_{C1}$  es la velocidad de corrotación inicial y el tercer término es una mezcla de ambos tipos de energía: distribución y corrotacional. Este último término es ligeramente mayor en la órbita de Encelado que en el anillo E (Figura 5.7). En estas regiones, el mecanismo de aceleración estocástica es más efectivo. Por el contrario, cerca del planeta ( $< 3 R_S$ ) el mecanismo es poco eficiente. En la Figura (5.7) se ha elegido a los protones pues son la población que se energiza más rápido en comparación con los iones pesados.

En las Figuras 5.1 hasta 5.6 (excepto para el anillo C) se muestran algunos valores derivados de una extrapolación basada en el ajuste de las curvas de ganancia mediante la “mejor” función matemática. Para encontrar la función que “mejor” se

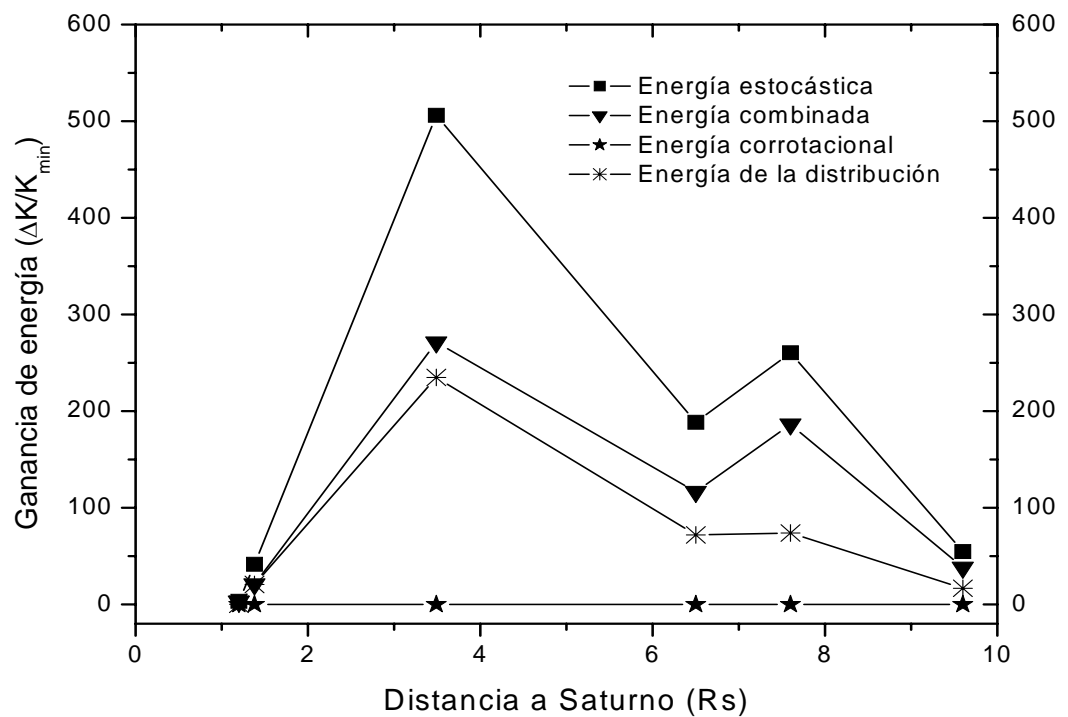


Figura 5.7: Ganancia de energía cinética de los protones vs. la distancia al planeta en la magnetósfera interna. Se muestra la ganancia de energía estocástica, la ganancia de energía de la distribución y la ganancia de energía debida al efecto combinado de la distribución + corrotación.

ajusta a los datos se hace una *prueba de hipótesis de bondad de ajuste* al 95% de nivel de confianza. Por ejemplo, después de 30 segundos, los protones que vienen de la ionosfera de Saturno (Figura 5.1) pueden alcanzar una energía  $10^3$  veces mayor que el valor mínimo inicial (0.105 eV), en contraste, si los protones vienen de Dione (Figura 5.4) superan en promedio  $10^5$  veces ese valor inicial. Para el caso más lejano de la región interna, Rea (Figura 5.6), se tiene que los protones son  $\sim 10^4$  veces más energéticos en comparación con la energía mínima.

En todos los casos examinados se encuentra que una *función de ley de potencias* es la que mejor se ajusta a las curvas de ganancia. Sin embargo, en la Figura 5.2 se observa que los protones y los iones localizados sobre el anillo C muestran una tendencia diferente, esta es una región en donde las partículas pueden -en promedio- ganar y perder energía. Esto contrasta con lo mostrado en las otras gráficas en donde el efecto neto de cada partícula individual -que gana y pierde energía durante la interacción con el campo estocástico- se manifiesta como una tendencia a siempre ganar energía con el tiempo. En la órbita de Encelado, los protones están descritos por una *función Logística*.

Para los resultados obtenidos directamente de la simulación numérica se observa que la distribución de velocidades Maxwelliana mantiene su perfil después del proceso de aceleración, excepto para las partículas que provienen del anillo C y para los protones localizados en la órbita de Encelado. En estos casos la distribución final de velocidades sufre alteraciones en su perfil, para el anillo C no es posible establecer una forma definida, mientras que para Encelado el perfil es Gaussiano (Figura 5.8). El ajuste a las distribuciones finales se demuestra a través de una prueba de bondad de ajuste y se considera el estadístico Jarque-Bera con el 95% de nivel de confianza.

A bajas energías el espectro de iones observado por las naves Voyager queda bien descrito por una distribución Maxwelliana y a altas energías por una ley de potencias [Krimigis et al., 1981, 1982]. En esos espectros (Figura 5.9), la amplia variedad de energías para electrones, protones y iones pesados pueden indicar la acción de otros mecanismos de aceleración. En este modelo una muestra de protones, por ejemplo, interactúa con un campo eléctrico estocástico ganando en promedio energía con el tiempo, e incluso, más que los iones pesados. Estos protones serán capaces de

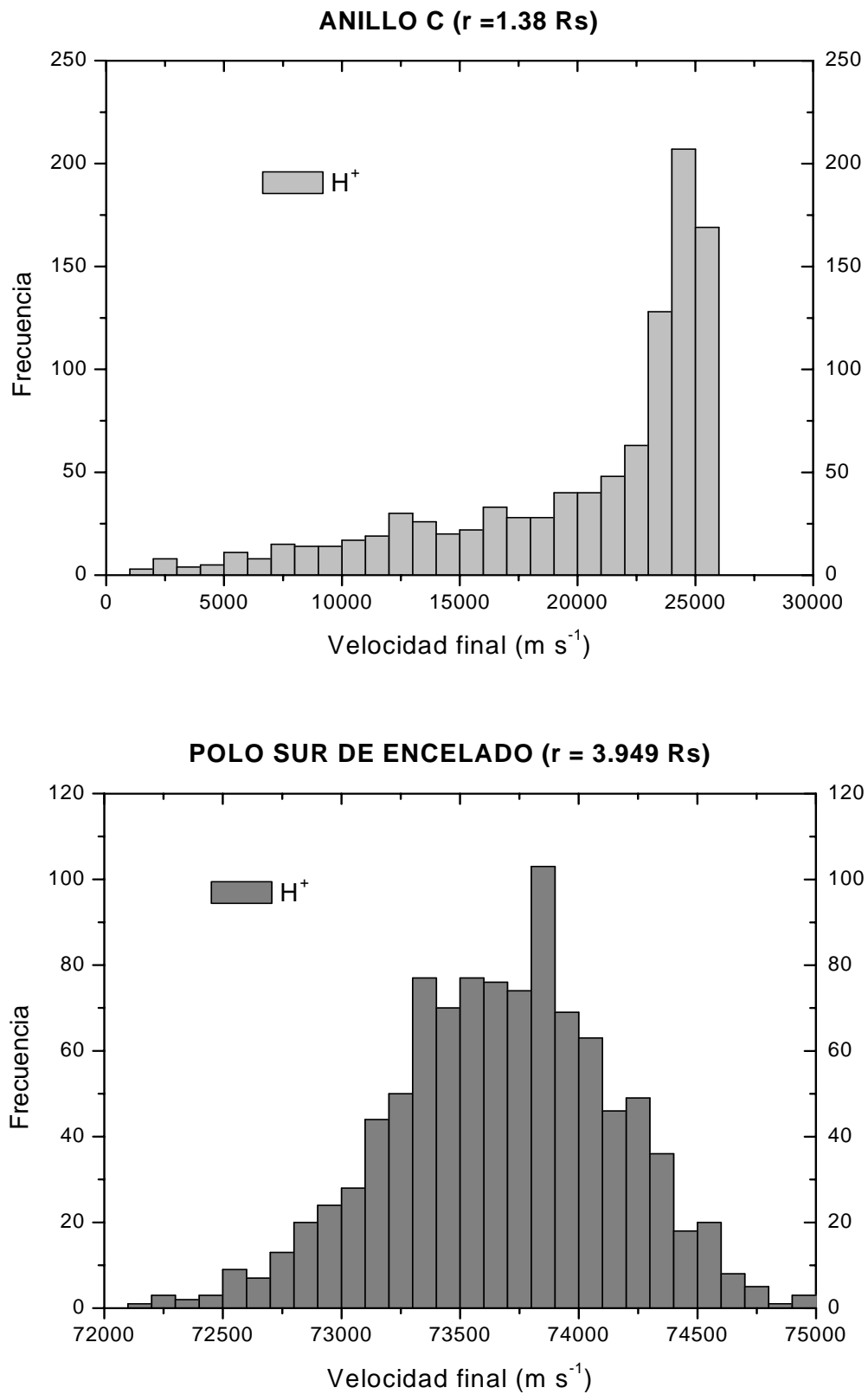


Figura 5.8: Perfil de la distribución de velocidades final para protones localizados en el anillo C y en el polo sur de Encelado.

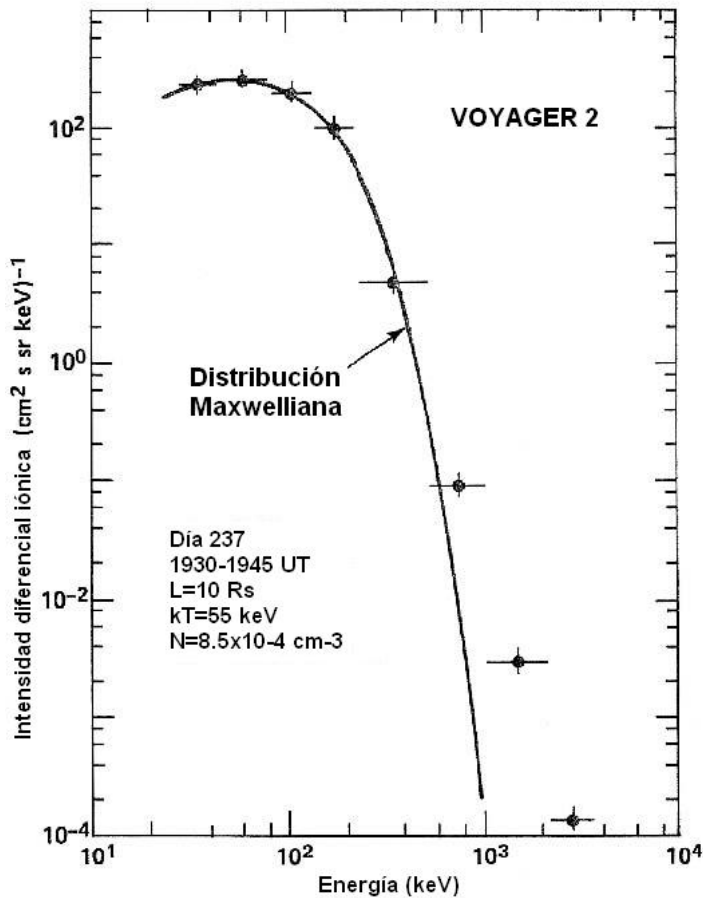


Figura 5.9: Espectro de energía típico para iones en la magnetósfera de Saturno medido por el instrumento LECP a bordo del Voyager 2 a  $10 R_S$  [Krimigis, 1982].

transferir energía a las distintas poblaciones de iones presentes en la magnetósfera, que además, están ganando energía por el campo eléctrico estocástico de fondo. Eventualmente se espera que el plasma se vaya energizando para alcanzar la energía observada por las naves.

Las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 muestran el espectro de la energía final alcanzada por una muestra de protones localizados en el polo norte de Saturno, en la órbita de Encelado (en donde las partículas han sido previamente aceleradas) y en Rea.

En el primer caso para partículas con energías en el intervalo  $0.4 \text{ eV} < E < 1.2 \text{ eV}$ , el espectro sigue una función *sigmoidal asimétrica*, en el segundo caso la parte de altas energías en el espectro ( $50 \text{ keV} < E < 150 \text{ keV}$ ) está descrita por una *ley de potencias* (índice espectral = -2.38) y para el tercer caso se encuentran dos distribuciones diferentes: *logística* ( $E < 10.8 \text{ eV}$ ) y una *exponencial decreciente* ( $E > 11 \text{ eV}$ ).

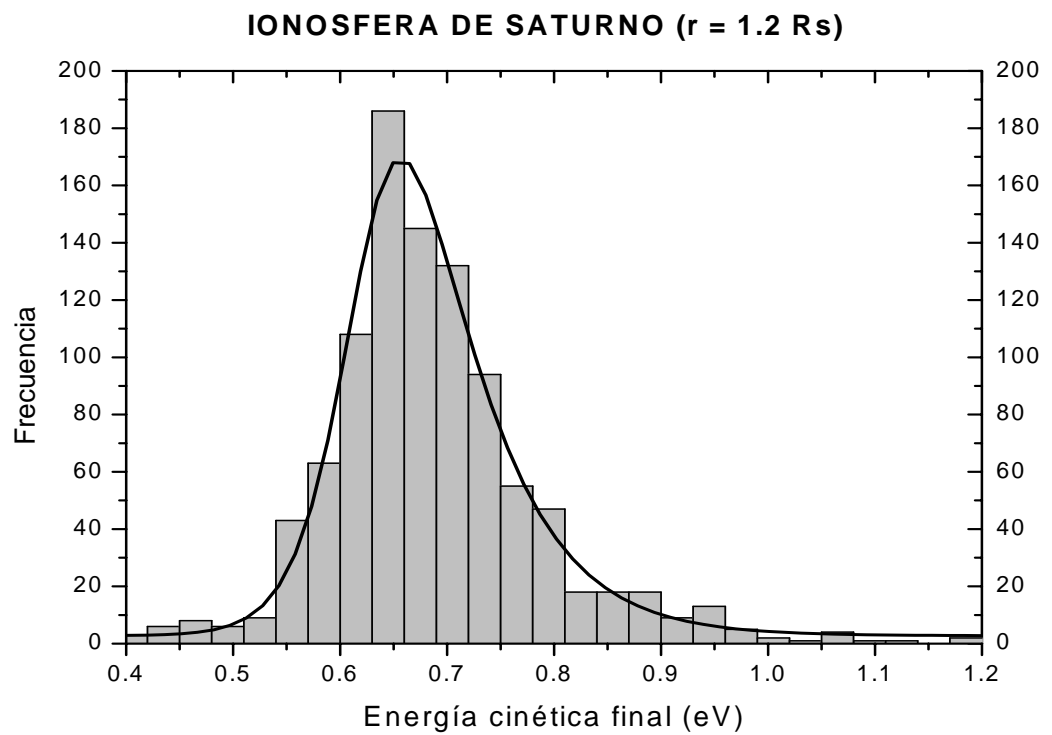


Figura 5.10: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en el polo norte de Saturno. Las partículas ganan  $\sim 1$  eV después de 1 segundo y el espectro de energía queda bien descrito por una función sigmoideal asimétrica.



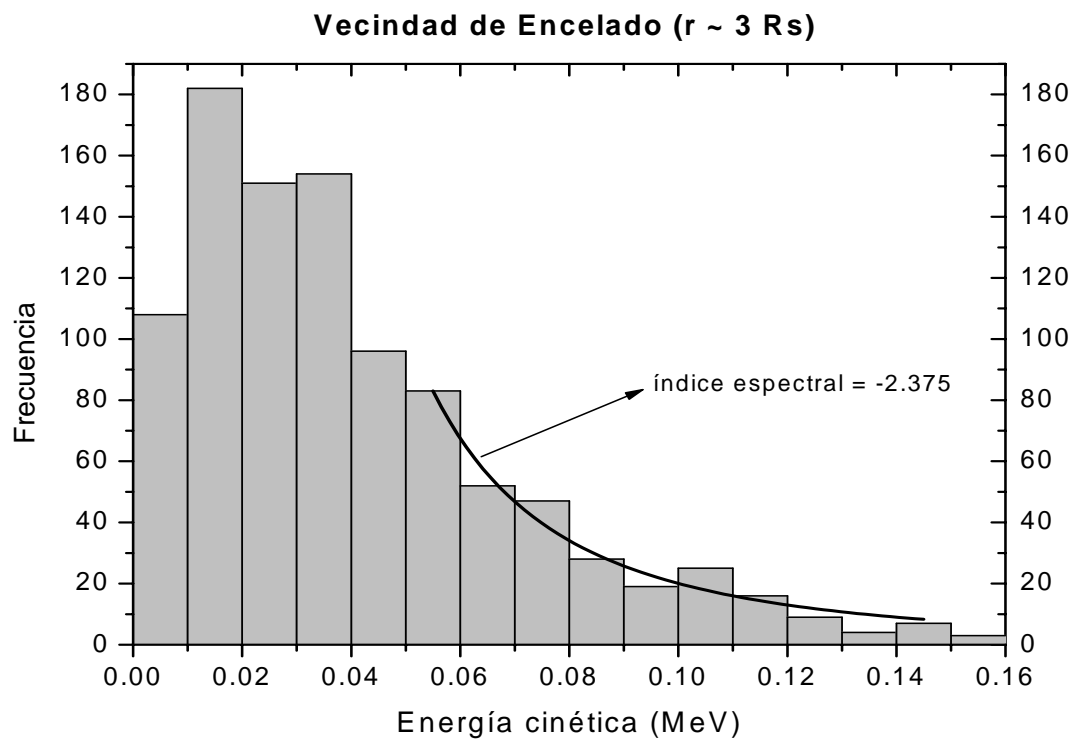


Figura 5.11: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en la vecindad de Encelado. Inicialmente las partículas tienen una energía de 0.02 MeV y después de 5 milisegundos el espectro de energía puede ser descrito por una función de ley de potencias con índice de  $-2.38$  para  $E > 0.06$  MeV.

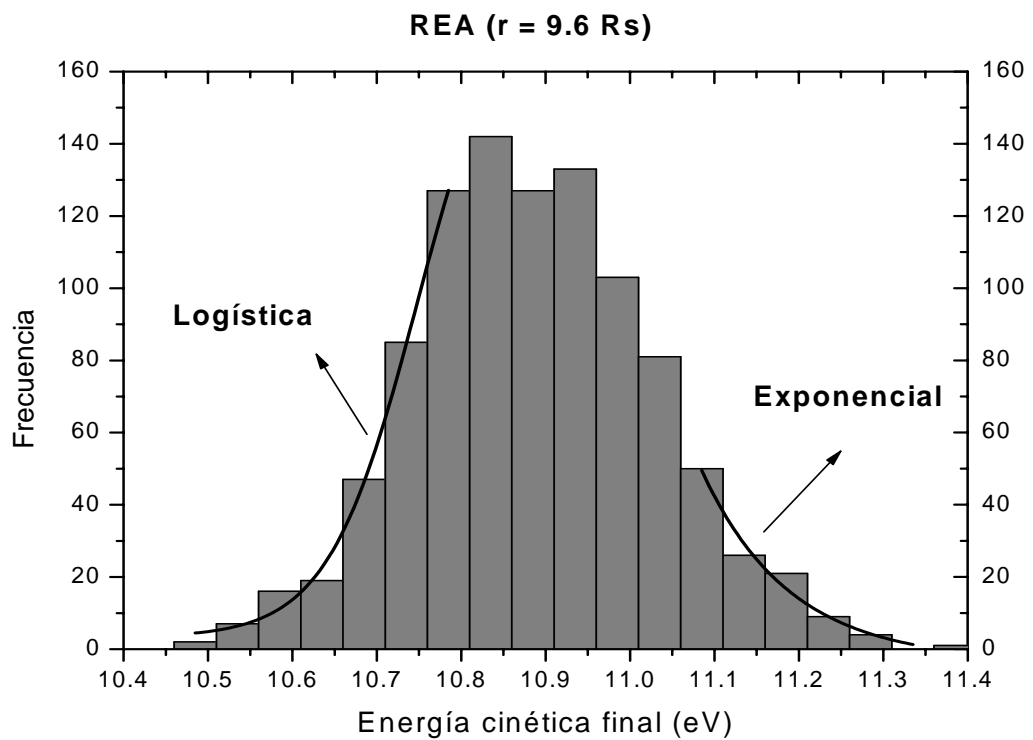


Figura 5.12: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en Rea. El espectro de energía queda bien descrito por dos funciones de distribución, esto es, para  $E < 10.8$  eV una función logística y para  $E > 11$  eV una función exponencial decreciente son las más adecuadas.

Estos resultados no contradicen al hecho de que la distribución final de velocidades conserve su perfil Maxwelliano (y de allí que la distribución de energías también lo mantenga). Lo que sucede es que las pruebas estadísticas de bondad de ajuste establecen una comparación entre la distribución Maxwelliana y cualquier otra función de distribución. Y, por otro lado, el valor del estadístico indica que la distribución Maxwelliana es la “mejor” entre todas las consideradas como función prueba, pero no necesariamente es la que se ajusta.

La componente de la velocidad final en la dirección “y”, muestra una *característica bimodal* para partículas localizadas en el polo norte. Esta estructura puede ser explicada en términos de los estudios realizados por Durand-Manterola [2003]. El autor establece que la probabilidad para ganar energía es siempre mayor que la probabilidad para perder energía. Entonces, durante el proceso de aceleración, las partículas con momento lineal inicial menor (polo norte) están siendo bombeadas del centro de la distribución hacia velocidades altas como resultado de su propia aceleración, en contraste, las partículas con momento lineal inicial mayor (Rea) no muestran tal característica bimodal (Figura 5.13).

## 5.2. Magnetósfera externa

Esta región está poblada principalmente por protones y algunos iones pesados cerca de la órbita de Titán. En el presente análisis se estudia la población de protones que proviene de la magnetósfera interna y se le da un posterior seguimiento a lo largo de la magnetósfera externa. Por otra parte, Titán y su densa atmósfera contribuyen con iones pesados como metano ( $\text{CH}_4^+$ ), nitrógeno atómico ( $\text{N}^+$ ) y nitrógeno molecular ( $\text{N}_2^+$ ). Ver Cuadro 4.3.

Para su estudio se consideran las trayectorias de entrada y salida para cada nave por separado. Esto se hace con el objeto de investigar el efecto que tienen las fluctuaciones del campo magnético en la magnetocola (salida) y su correspondiente campo eléctrico estocástico sobre la población de partículas.

En la Figura (4.9) se muestra el perfil característico del campo eléctrico estocástico en la magnetósfera externa. En ese caso, en particular, está referido a la

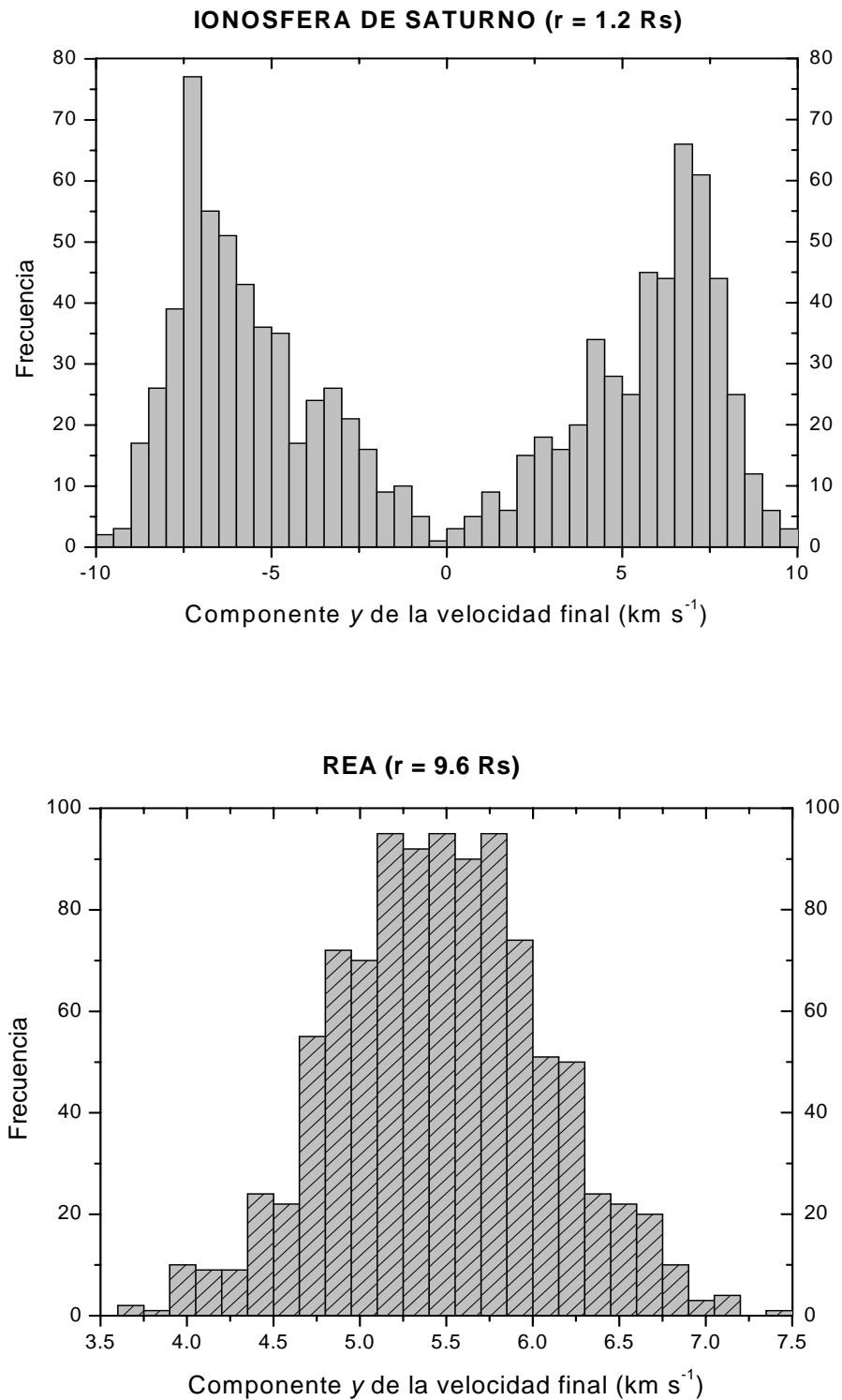


Figura 5.13: Histograma de frecuencias para la distribución de la componente “y” de la velocidad final asociada a los protones que provienen de la ionósfera de Saturno y de la superficie de Rea.

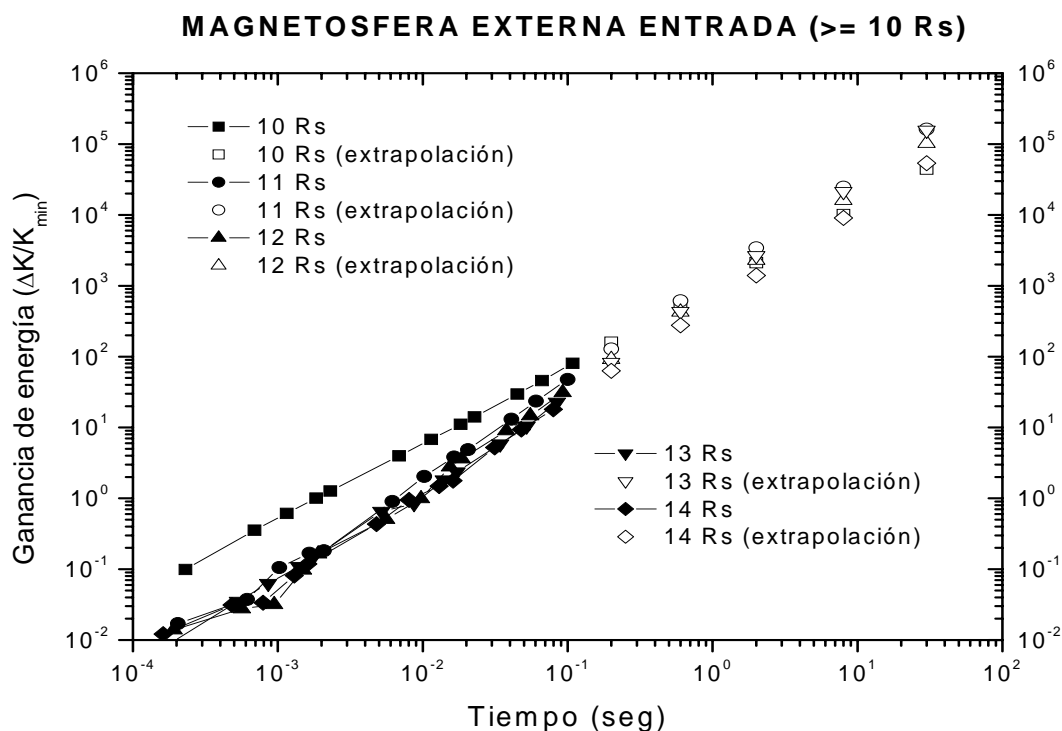


Figura 5.14: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada.

trayectoria de salida del Voyager 2.

Las gráficas que se presentan están basadas en los resultados obtenidos para la trayectoria de entrada del Voyager 1 y para la trayectoria de salida del Voyager 2. Resultados similares se obtienen para el resto de los casos.

Después de que la muestra de partículas interactúa con el campo eléctrico estocástico, en promedio tienden a ganar energía cinética después de algunos segundos, como se puede ver en las Figuras 5.14 hasta 5.19. Las ganancias de energía cinética obtenidas para los protones y los iones de nitrógeno ( $N^+$ ) se calculan de acuerdo a la Ec. (5.1), utilizando los valores del Cuadro 5.1. En este caso, los iones pesados como el metano ( $CH_4^+$ ) y el nitrógeno molecular ( $N_2^+$ ) sólo se encuentran en la región externa, de allí que en la Ec. (5.1) se utilice el valor de la energía cinética mínima que tienen esos iones en Titán. Por esta razón no están graficados en la Figura 5.16

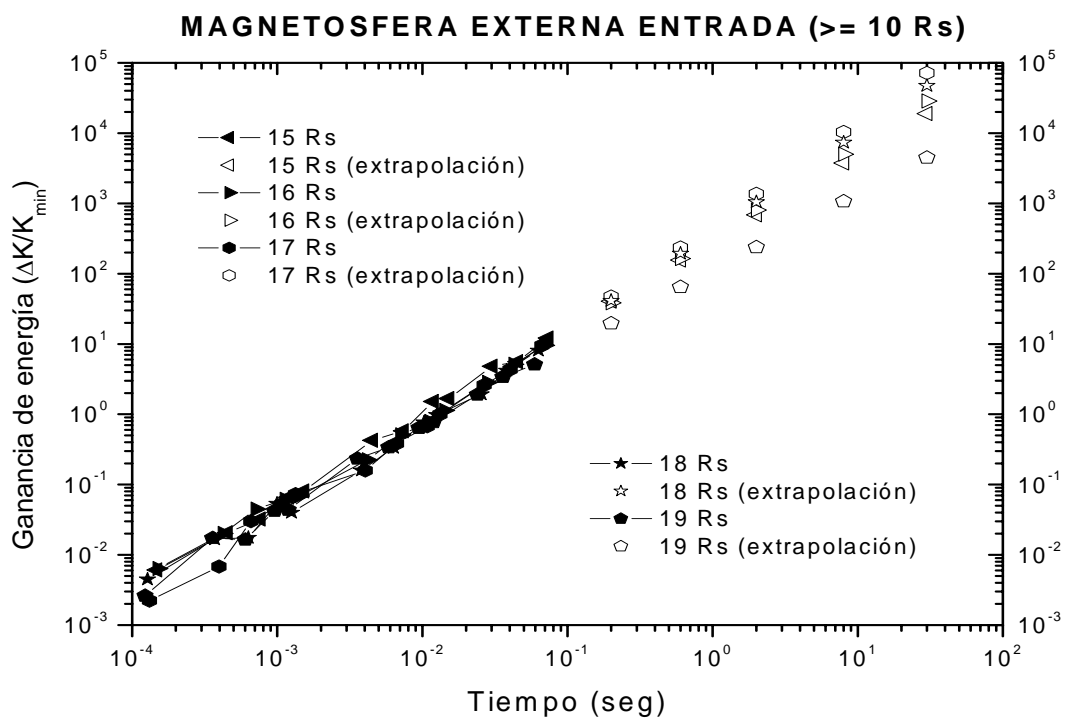


Figura 5.15: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada.

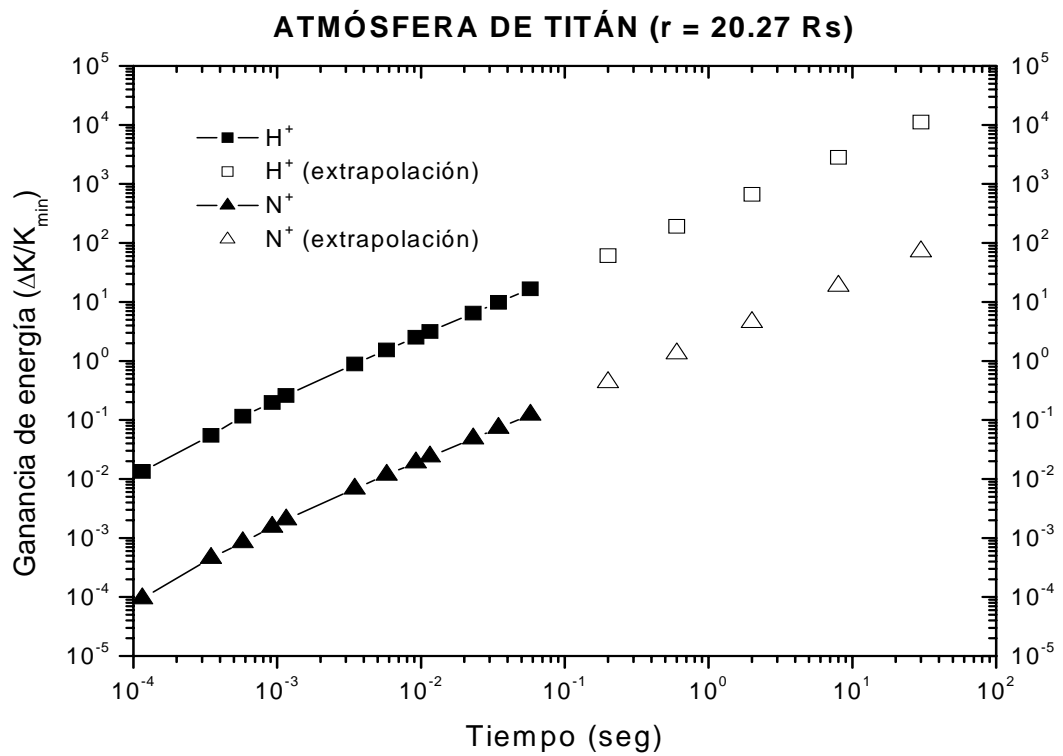


Figura 5.16: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y de nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) localizados en la atmósfera superior de Titán. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 1 en la trayectoria de entrada.

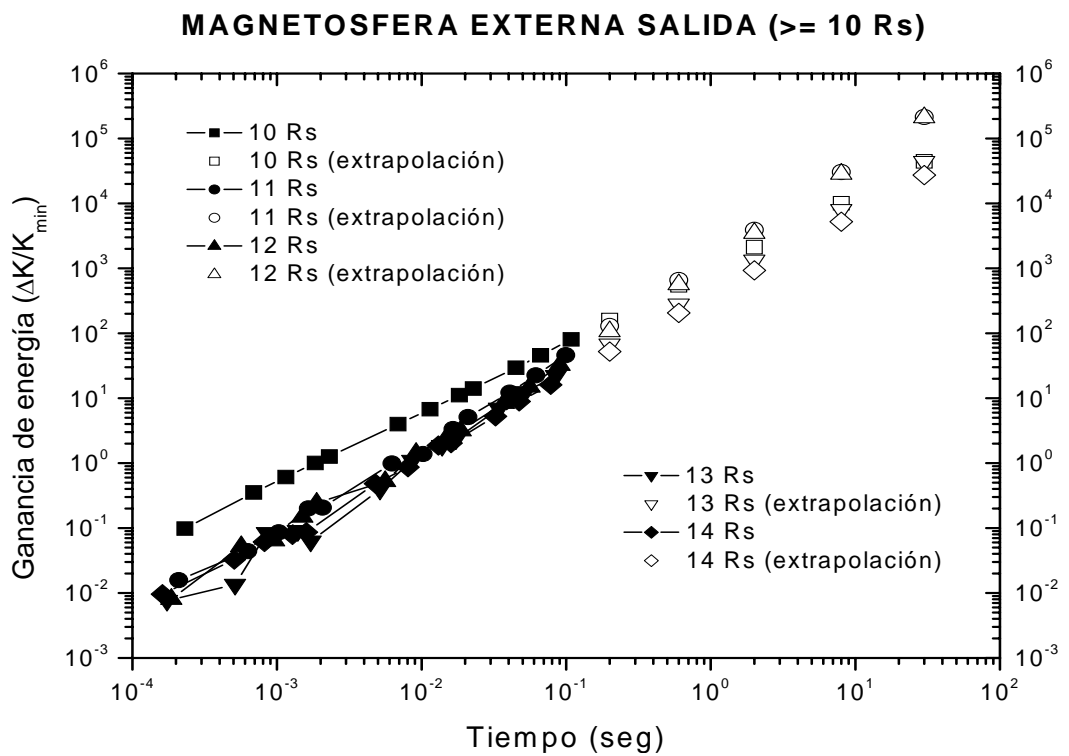


Figura 5.17: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida.



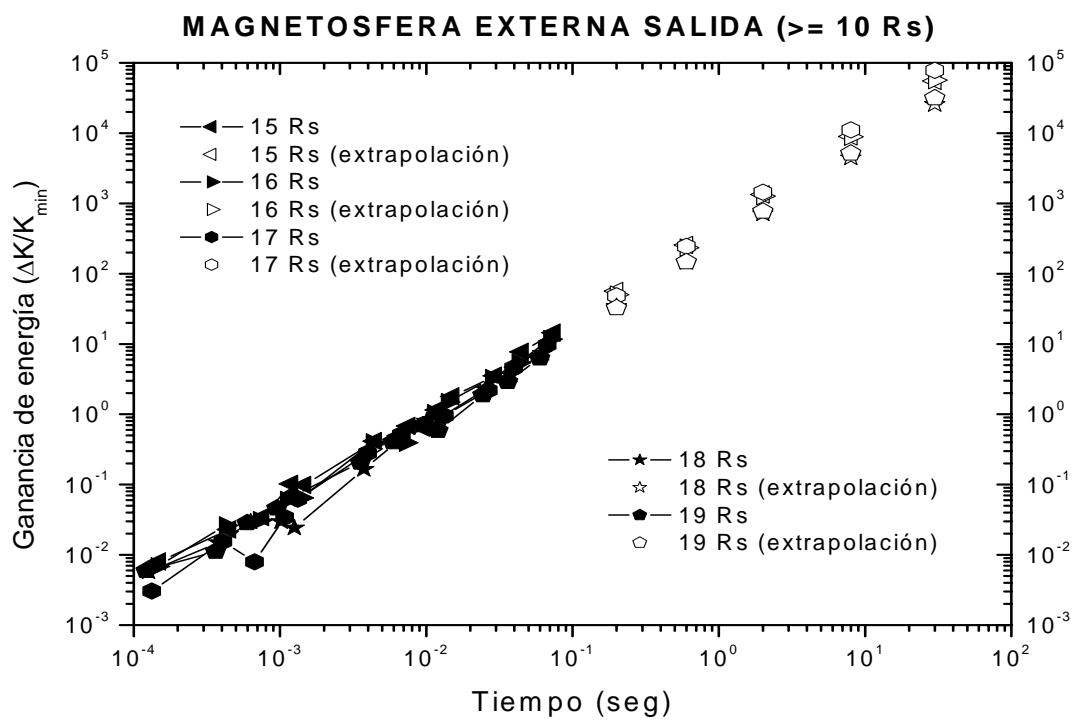


Figura 5.18: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida.

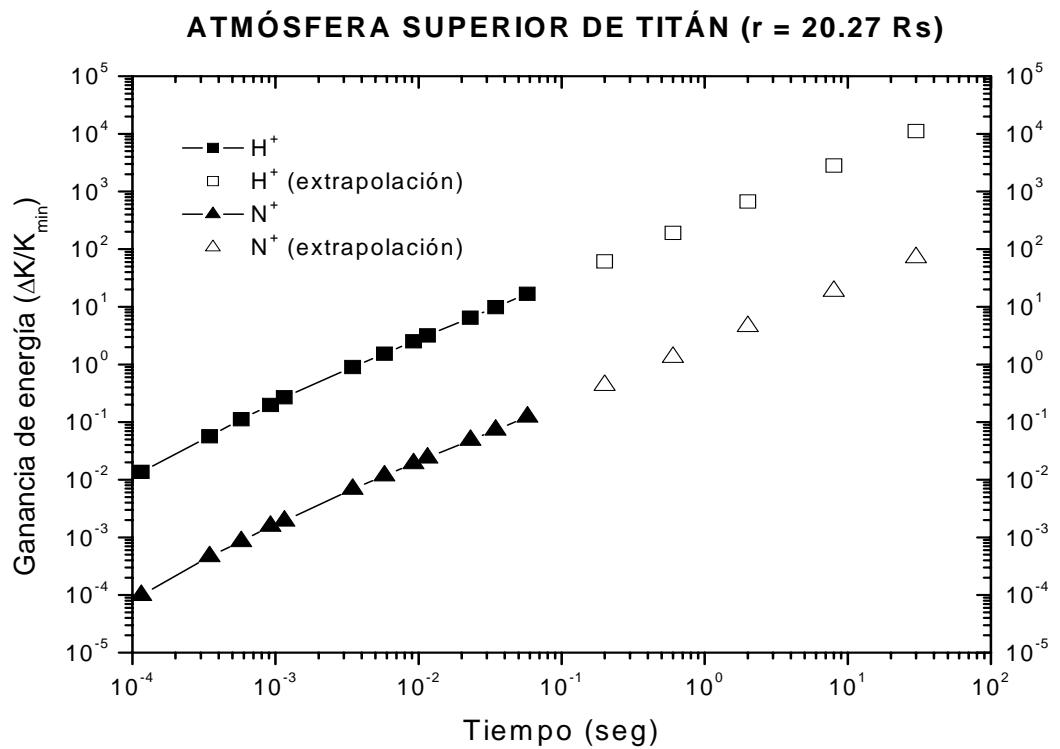


Figura 5.19: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y de nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) localizados en la atmósfera superior de Titán. Resultados basados en las mediciones de campo magnético realizados por el Voyager 2 en la trayectoria de salida.

y 5.19.

Además de los valores obtenidos directamente de la simulación numérica se muestran los correspondientes a una extrapolación hasta 30 segundos. En analogía con lo realizado para el caso de la magnetósfera interna, se efectúan *pruebas de hipótesis de bondad de ajuste* al 95 % de significancia. En todos los casos es posible establecer que la función de *ley de potencias* es la que mejor se ajusta a las curvas de ganancia mostradas anteriormente. No obstante, es importante aclarar que en algunas regiones de la magnetósfera externa cabe la posibilidad de ajustar otra función, por ejemplo una logística, sin embargo desde el punto de vista físico esto último no es plausible ya que -sin la acción del campo estocástico- desde el inicio se reporta una ganancia (o pérdida).

Se considera que inicialmente los protones vienen de Rea y son inyectados en el borde de la magnetósfera externa ( $10 R_S$ ). Después de 0.1 segundos de interactuar con el campo eléctrico estocástico (Figura 4.9), los protones superan en  $\sim 100$  veces el valor de su energía mínima. Estos protones son inyectados a  $11 R_S$  donde después de 0.1 segundos superan en  $\sim 50$  veces el valor de su energía mínima. Se inyectan continuamente en varias posiciones y finalmente en  $19 R_S$  -después de 0.1 segundos- los protones sólo alcanzan  $\sim 5$  veces el valor de su energía mínima. Entonces, en promedio, los protones van ganando menos energía conforme se alejan del planeta (Figura 5.20).

En el caso de Titán es evidente que los protones están siendo más acelerados que el ión pesado. Esto es, los protones en este lugar son más energéticos que los protones localizados en el polo norte por un factor de  $\sim 10^4$ , en cambio, el nitrógeno atómico ionizado ( $N^+$ ) es  $\sim 10^2$  veces más energético que los que se encuentran en el anillo C.

En la Figura 5.20 se ilustra que la ganancia debida al mecanismo estocástico (Ec. 5.1) es mayor con la distancia y en cambio la ganancia combinada de los dos efectos (distribución + corrotación) contribuye cada vez menos a la ganancia estocástica. De la Figura 5.20 también es claro que en la magnetósfera externa no es posible distinguir entre diferentes regiones de energización como en la magnetósfera interna.

Para los resultados obtenidos directamente de la simulación numérica se observa

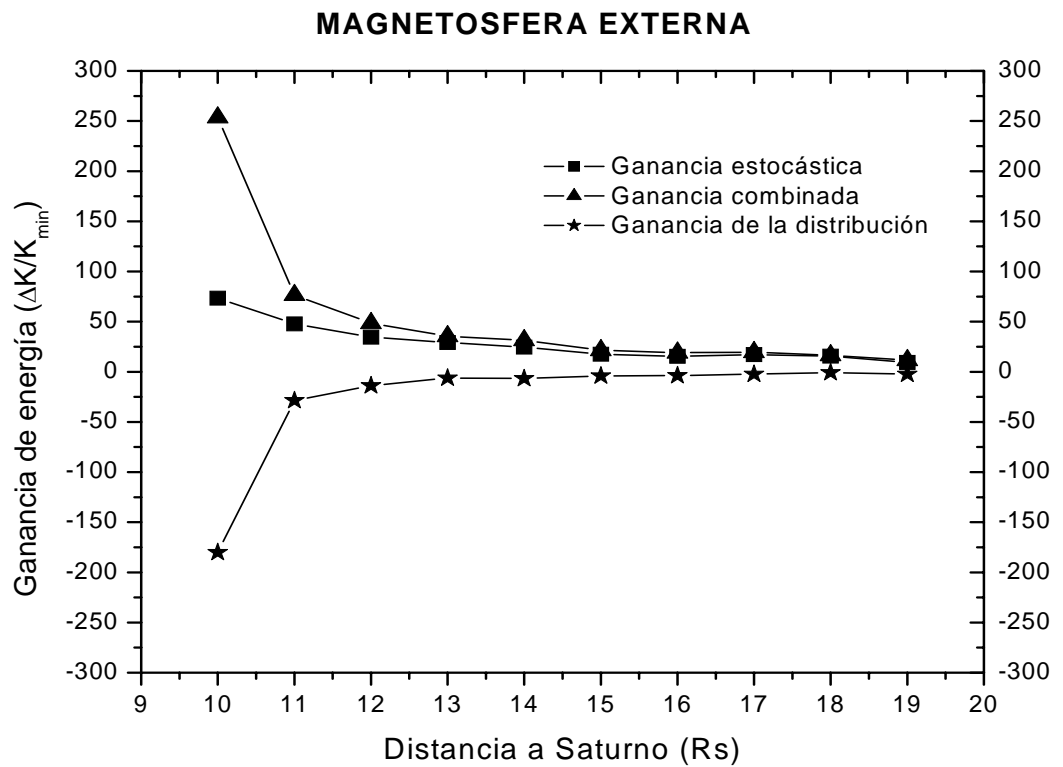


Figura 5.20: Ganancia de energía cinética de los protones vs. la distancia al planeta en la magnetósfera externa. Se muestra la ganancia de energía estocástica, la ganancia de energía de la distribución y la ganancia de energía debida al efecto combinado de la distribución + corrotación.

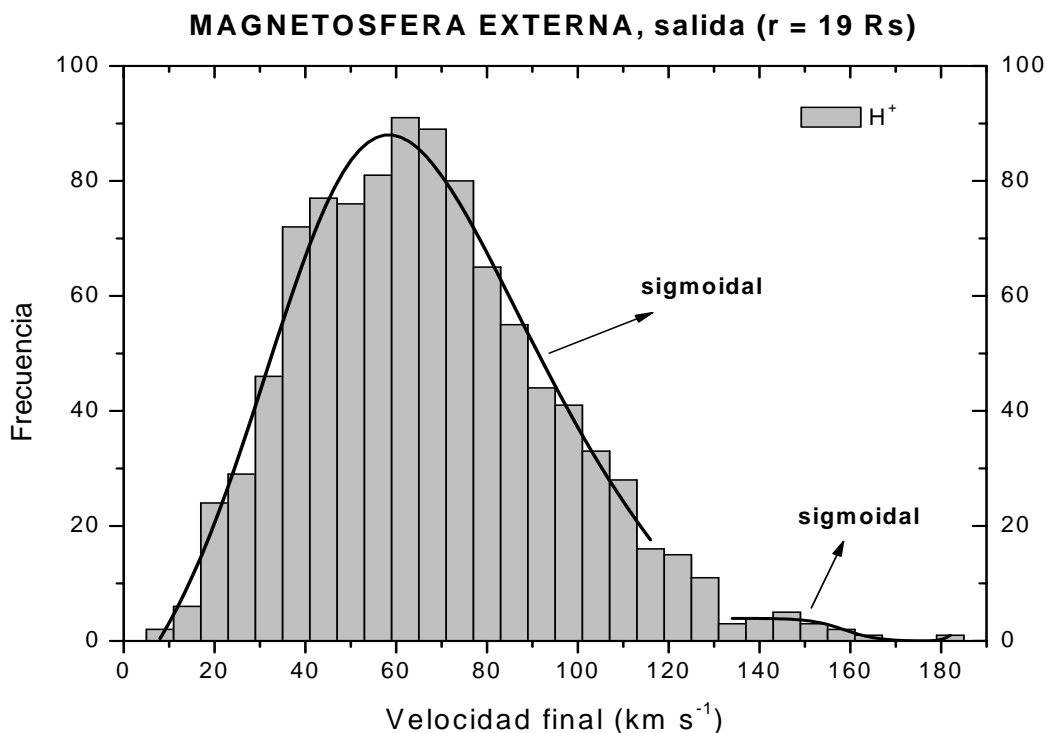


Figura 5.21: Histograma de frecuencias para la distribución final de velocidades asociada a los protones localizados cerca de la órbita de Titán (trayectoria de salida).

que la distribución de velocidades Maxwelliana mantiene su perfil después del proceso de aceleración. Sin embargo, para la trayectorias de entrada y salida esto no es del todo cierto. Por ejemplo, en la Figura 5.21 se muestra la distribución final de velocidades para protones localizados cerca de la órbita de Titán ( $19 R_S$ ) en donde después de  $5 \times 10^7$  interacciones, o bien, 0.06 segundos se comienza a desarrollar una cola y el ajuste correspondiente a la distribución y a la cola.

En todos los casos estudiados, el ajuste a las distribuciones finales se demuestra a través de una prueba de bondad de ajuste y se considera el estadístico Jarque-Bera con el 95 % de nivel de confianza.

El espectro de energías para los protones localizados a  $10 R_S$  (Figura 5.22),  $15 R_S$  (Figura 5.23) y en Titán (Figura 5.24) muestra que en el primer caso para partículas con energías en el intervalo  $36.5 \text{ eV} < E < 40 \text{ eV}$ , el espectro sigue una función Gaussiana, en el segundo caso el espectro ( $E > 100 \text{ eV}$ ) está descrito por una fun-

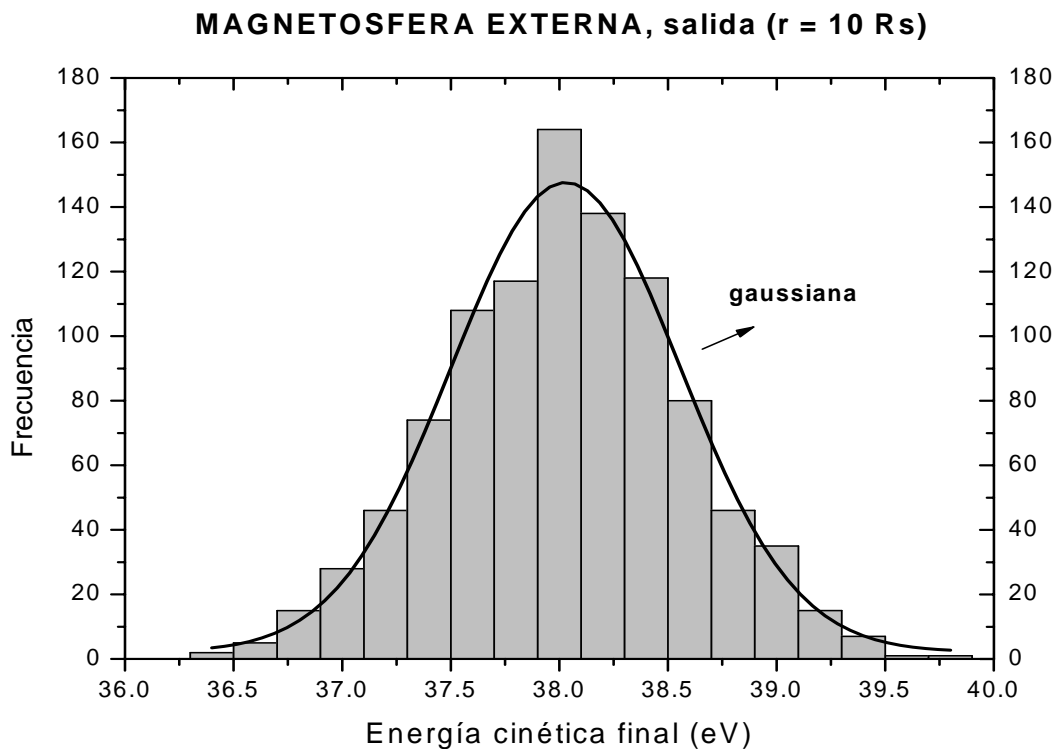


Figura 5.22: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en  $10 R_S$  (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por una Gaussiana.

ción exponencial decreciente y para el tercer caso se encuentran dos distribuciones Lorentzianas en ( $E < 117 \text{ eV}$ ) y ( $E > 122 \text{ eV}$ ). Lo anterior no contradice al hecho de que la distribución final de velocidades sea Maxwelliana (ver explicación en Sección 5.1).

### Invariantes adiabáticos

En campos que varían lentamente, el concepto de invariantes adiabáticos proporciona una herramienta útil para describir los movimientos periódicos de las partículas. Los invariantes adiabáticos requieren que los cambios temporales (y espaciales) de una configuración sean lentos en comparación con el periodo asociado con el invariante. La relación  $\omega_g > \omega_b > \omega_d$  (donde  $\omega_g$  es la girofrecuencia,  $\omega_b$  es la frecuen-

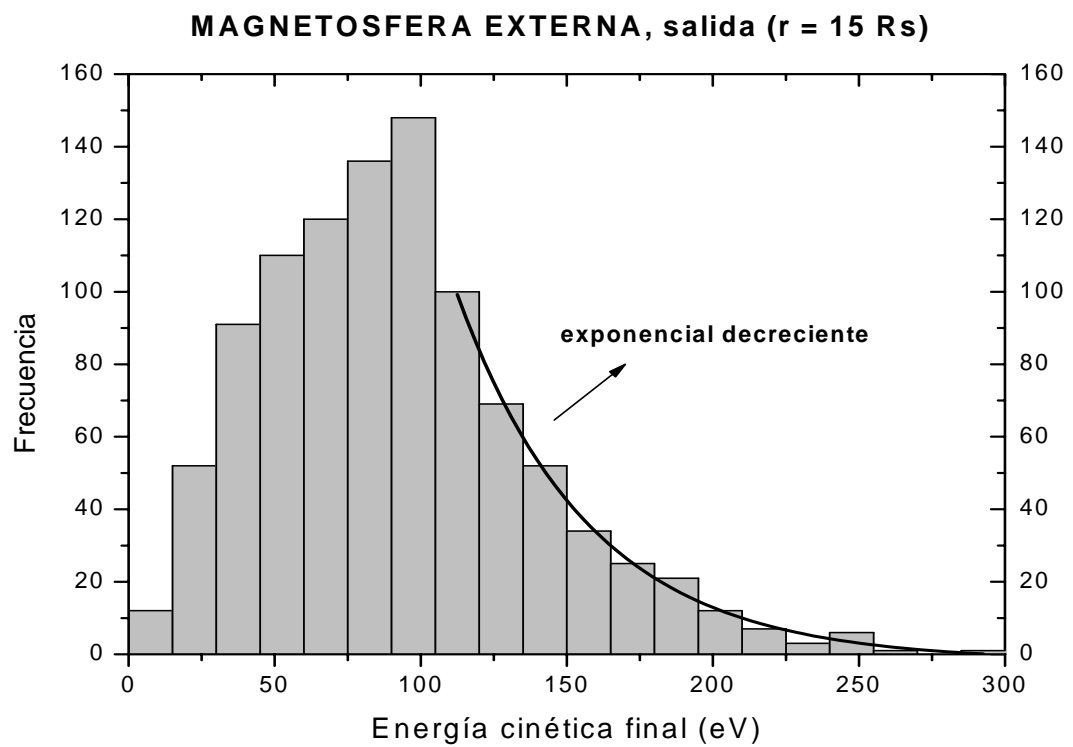


Figura 5.23: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en  $15 R_S$  (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por una función exponencial decreciente para  $E > 100$  eV .

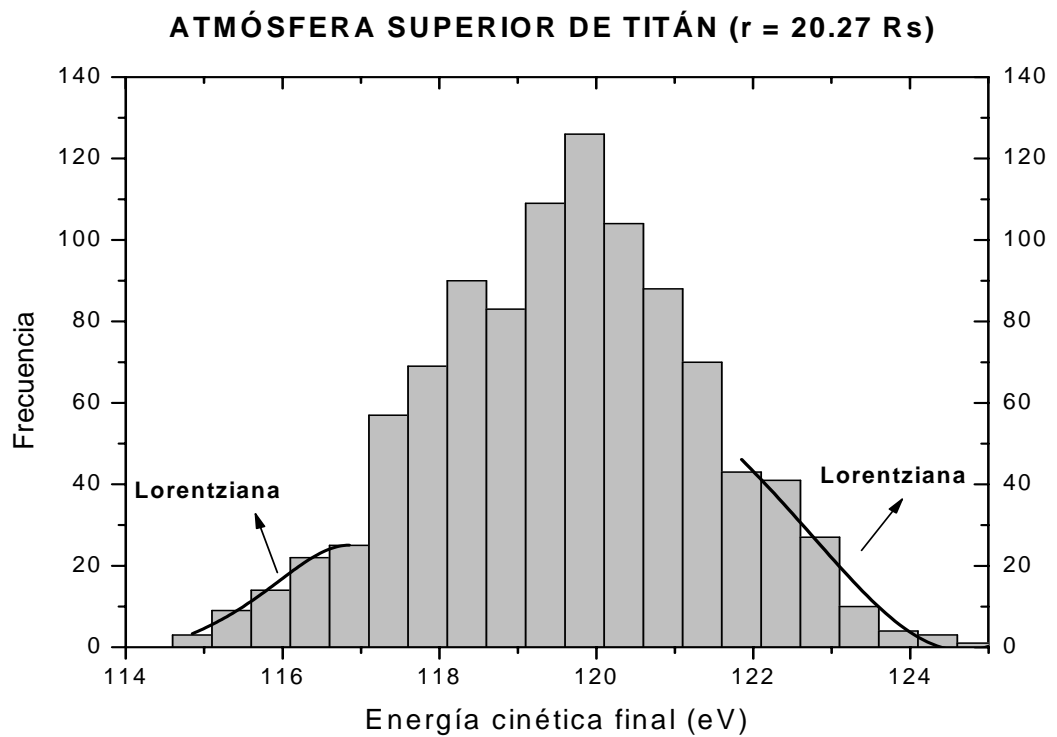


Figura 5.24: Histograma de frecuencias para la energía cinética final alcanzada por una muestra de protones después de  $5 \times 10^7$  interacciones y su función de ajuste en Titán (trayectoria de salida). El espectro de energía queda bien descrito por dos funciones Lorentzianas en  $E < 117 \text{ eV}$  y  $E > 122 \text{ eV}$ .



cia del movimiento entre los puntos espejo y  $\omega_d$  es la frecuencia del movimiento de arrastre) establece una jerarquía: cambios en la configuración con  $\tau \approx \frac{1}{\omega_d}$  destruirán el tercer invariante mientras que los primeros dos se conservan; cambios del orden de  $\tau \approx \frac{1}{\omega_b}$  destruirán al segundo y tercer invariantes adiabáticos, dejando que el primero se conserve. Si los cambios ocurren en una escala de un giroperiodo, todos los invariantes serán destruidos. Por ejemplo, las partículas en los anillos de radiación permanecen atrapados porque los tres invariantes adiabáticos son conservados, sin embargo si las ondas causan que los invariantes sean violados, las partículas se difundirán en el espacio posiblemente alejándose o acercándose del planeta.

Es importante señalar que el primer invariante adiabático involucra solamente valores locales, mientras que los otros requieren del conocimiento de las propiedades del campo magnético en un gran volumen del espacio, además de las propiedades de las partículas y del campo en la posición donde se encuentra la nave.

En una magnetósfera, no se espera que el campo magnético varíe lentamente dada la variedad de fenómenos que allí ocurren (por ejemplo, ondas de distinta frecuencia, la deformación repentina de la configuración de campo magnético, la turbulencia del plasma, entre otros). La Figura 4.4 muestra que las variaciones temporales son al menos del mismo orden de magnitud que las fluctuaciones espaciales [Martínez-Gómez et al., 2007b]. Esto significa que el campo magnético varía rápidamente y como una consecuencia los invariantes adiabáticos no pueden ser conservados. El primer invariante, el momento magnético, no puede ser constante en un giroradio debido al cambio rápido en el campo magnético en comparación con la girofrecuencia de la partícula. El segundo invariante depende del promedio de la velocidad paralela y no necesariamente debe tener el mismo valor en cada paso aleatorio. Más aún, no se conserva bajo la acción de fuerzas adicionales como las fuerzas de pérdida de radiación. El tercer invariante, por otro lado, no puede conservarse ya que las partículas están siendo transportadas hacia el planeta, ganando energía.

De la discusión anterior, no se espera que los invariantes adiabáticos puedan conservarse en el modelo de aceleración estocástica presentado.

## 5.3. Sistema de anillos

Se estudian los efectos que provoca la acción de un campo eléctrico estocástico y un campo gravitacional estocástico sobre las partículas de polvo cargadas y neutras, respectivamente. Las ganancias de energía cinética reportadas en ambos casos se calculan a través de la Ec. (5.1) usando el valor de la energía mínima que puede tener un grano de polvo en cada anillo.

### 5.3.1. Polvo cargado

Los granos de polvo cargado interactúan con el campo eléctrico estocástico correspondiente a la magnetósfera interna (Figura 4.8). Como ya se explicó en el Capítulo 4, sólo se analiza el caso de polvo cargado en el anillo E que ha sido dividido en tres regiones. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.25 donde la energía mínima es de  $1.38 \times 10^9$  eV.

Debido a la forma de las curvas de ganancia no es posible reportar los valores de extrapolación (durante los primeros segundos los granos ganan energía, luego se estabilizan y enseguida vuelven a ganar). Obsérvese que los granos de polvo localizados en el borde externo del anillo tienden a perder energía, en contraste con los que se encuentran en el borde interno y en la parte media. Más aún, los granos que están en el borde interno tienden a ganar más energía ( $\sim 10^{-4}$ ) en 0.25 segundos.

El campo eléctrico estocástico es capaz de energizar a los granos de polvo cargados pero es lento en comparación con lo descrito para los iones.

### 5.3.2. Polvo neutro

Los granos de polvo neutro interactúan con el campo gravitacional estocástico correspondiente a cada anillo (por ejemplo, véase la Figura 4.12). Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.26 donde las energías mínimas son:  $8.59 \times 10^{24}$  eV (anillo C),  $6.83 \times 10^{24}$  eV (anillo B),  $6 \times 10^{24}$  eV (División de Cassini),  $5.52 \times 10^{24}$  eV (anillo A) y  $1.38 \times 10^9$  eV (anillo E).

También se muestran los valores de la extrapolación correspondientes hasta  $\sim 16$

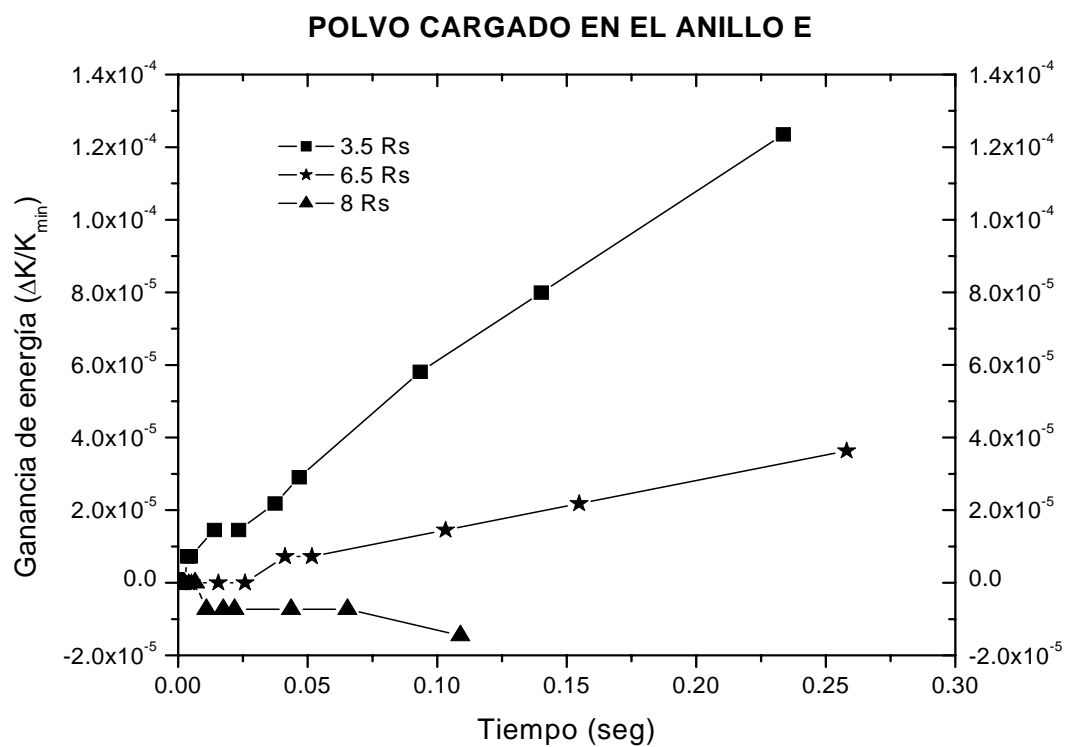


Figura 5.25: Ganancia estocástica de energía para los granos de polvo cargados en el anillo E a diferentes distancias. Resultados basados en las mediciones de campo magnético del Voyager 1 en su paso por la magnetósfera interna.

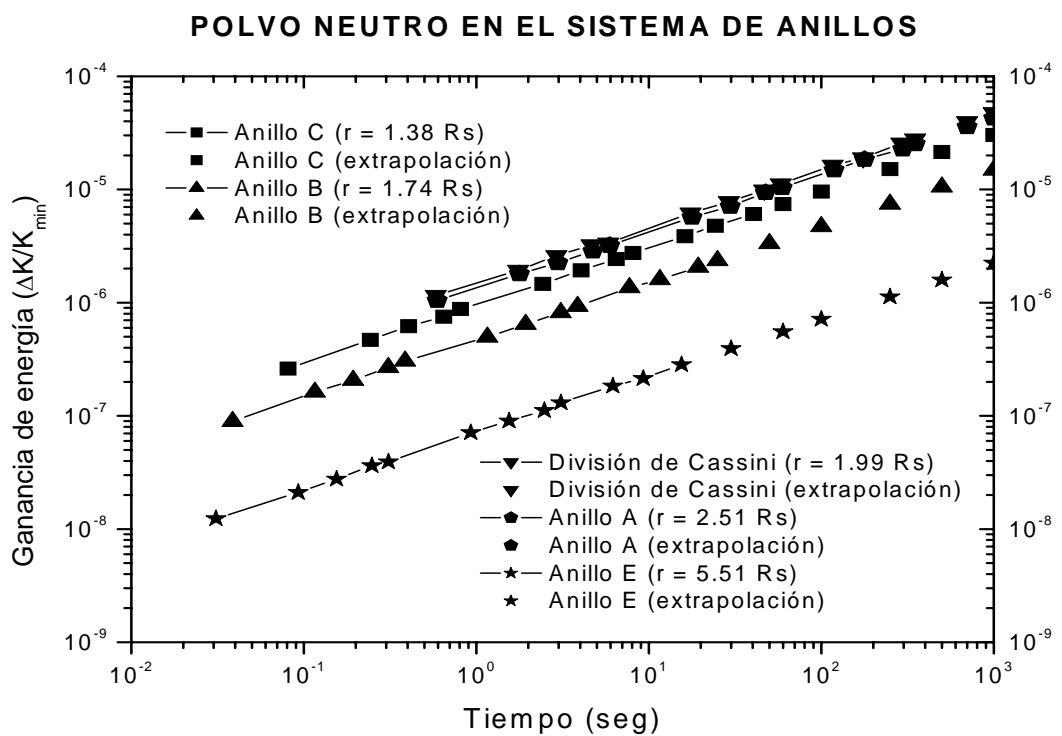


Figura 5.26: Ganancia estocástica de energía para los granos de polvo neutros en el sistema de anillos de Saturno.

minutos. De manera general se observa que los granos de polvo tienden a ganar energía con el tiempo. Inclusive, esta ganancia es debida únicamente a la acción del campo gravitacional estocástico (ver Ec. 5.1). Se identifican tres regiones de energización dentro del sistema de anillos.

1. Alta energización: Los granos de polvo más grandes (División de Cassini y anillo A) tardan más tiempo en responder a la acción del campo gravitacional estocástico, sin embargo, luego de 15 minutos adquieren una energía que es  $\sim 10^{-4}$  veces mayor que su energía mínima.
2. Baja energización: Los granos de polvo del anillo B y del anillo E son los que más rápido responden a la acción del campo gravitacional estocástico, pero también son lo que menos se energizan (después de 15 minutos apenas superan a su energía mínima en  $\sim 10^{-5}$ ).
3. energización intermedia: En el anillo C los granos de polvo responden más rápido y a la vez alcanzan -aproximadamente- la misma energía que los granos del anillo A y los de la División de Cassini.

Tanto los granos de polvo neutro como cargado no pueden ganar (o perder) energía por siempre. La razón a la cual se incrementa el valor de su energía depende de la energía total (cinética y potencial) disponible en cada anillo, esto es,

$$E_T = K + U = \frac{1}{2}M_R v_K^2 + \frac{G_S M_R}{r} \quad (5.3)$$

En la Ec. (5.3) la masa del anillo es  $M_R$ , la velocidad Kepleriana  $v_K$  se calcula en la Ec. (3.8), la masa de Saturno es  $M_S = 5.68 \times 10^{26}$  kg y la distancia al planeta es  $r$ . Los valores de la masa del anillo y de la distancia al planeta se encuentran en el Cuadro 4.4.

La energía total disponible en cada anillo es:

- $\sim 4.27 \times 10^{45}$  eV (anillo C)
- $\sim 1.02 \times 10^{47}$  eV (anillo B)

- $\sim 1.48 \times 10^{45}$  eV (División de Cassini)
- $\sim 1.64 \times 10^{46}$  eV (anillo A)
- $\sim 7.49 \times 10^{35}$  eV (anillo E)

### Efectos del perfil de campo eléctrico sobre la aceleración de las partículas cargadas

Finalmente para estudiar los efectos que produce el campo eléctrico sobre la aceleración y la distribución final de velocidades de las partículas cargadas, se proponen dos perfiles hipotéticos para las fluctuaciones: **uniforme** (las intensidades -altas y bajas- ocurren sin preferencia alguna) y **lineal** (las intensidades altas son las más favorables).

El campo eléctrico estocástico lineal hace que las partículas cargadas (protones, iones pesados y granos de polvo) alcancen energías muy altas (incluso del orden de MeV) en muy poco tiempo. Este hecho también se ve reflejado en la distribución final de velocidades que tiene un desplazamiento hacia valores mayores y en la no formación de colas supraterrales. Como ejemplo véase la Figura 5.27 donde las curvas de ganancia son obtenidas para una muestra de protones ( $H^+$ ) y para una muestra de iones pesados como el agua ( $H_2O^+$ ) localizadas sobre el anillo E.

Cuando actúa un campo eléctrico estocástico uniforme, las partículas alcanzan energías menores a las obtenidas en el caso logístico y además se observa que la estructura de cola en la distribución final de velocidades puede aparecer o no. En la Figura 5.28 se muestran las curvas de ganancia obtenidas para los protones ( $H^+$ ) localizados en diferentes posiciones de la magnetósfera externa durante la trayectoria de salida.

Todos los resultados están basados en los datos de campo magnético medidos por las naves Voyager con una resolución temporal (o tiempo de muestreo promedio) de 1.92 segundos. Los más sobresalientes, luego de aplicar el modelo de aceleración estocástica a la población de partículas en la magnetósfera de Saturno, son: 1) Las

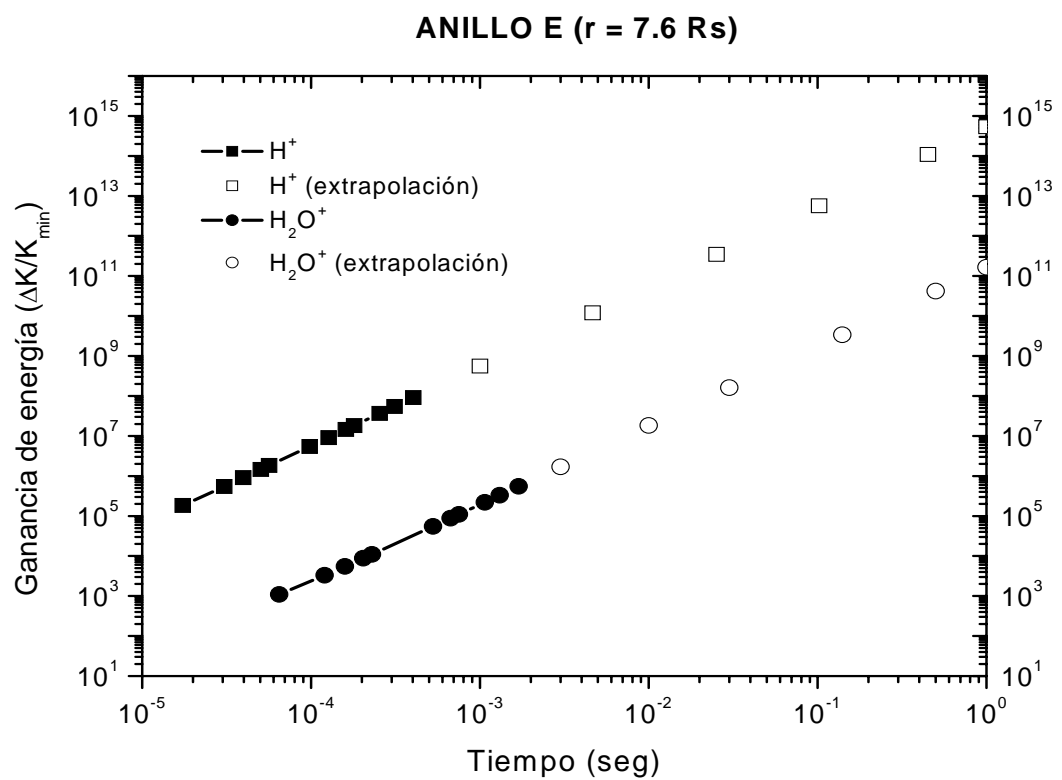


Figura 5.27: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones y una de iones pesados localizados sobre el anillo E. Las fluctuaciones del campo eléctrico tienen un perfil lineal.

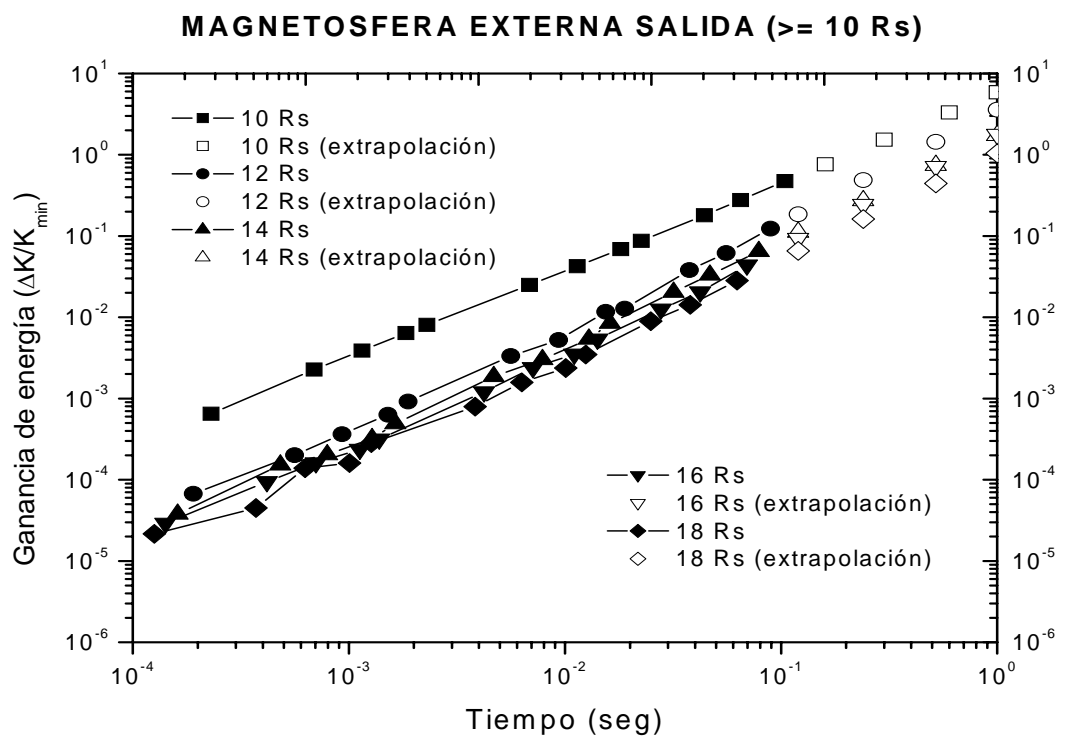


Figura 5.28: Ganancia estocástica de energía promediada sobre toda la distribución vs. el tiempo para una muestra de protones localizados en la magnetósfera externa durante la trayectoria de salida. Las fluctuaciones del campo eléctrico tienen un perfil uniforme.



partículas en promedio tienden a ganar energía, 2) El mecanismo es más eficiente para partículas con energías inicialmente bajas, 3) En la magnetósfera interna se identifican diferentes regiones de energización, 4) En la magnetósfera externa no se encuentran diferencias notables en la energización de partículas, 5) El mecanismo acelera en pocos segundos, 6) El perfil de velocidades se mantiene en casi todos los casos estudiados, 7) En el caso de granos de polvo, el mecanismo es lento.

Al considerar un tiempo de muestreo distinto (por ejemplo, 31 segundos) con el propósito de estudiar los posibles efectos de este campo eléctrico estocástico sobre la energización de las partículas, se encuentra: a) el mismo perfil de campo eléctrico en cada dirección espacial, esto es, las fluctuaciones siguen una distribución logística; b) las partículas tienden a aumentar el valor inicial de su energía cinética; c) la cantidad de partículas de altas energías disminuye ya que hay menos fluctuaciones capaces de acelerarlas; d) la distribución final de velocidades preserva el perfil Maxwelliano y, e) no hay iones supratérmicos.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo para explicar la energización de partículas en las magnetósferas planetarias. En particular, se ha estudiado en detalle la magnetósfera de Saturno para lo cual se han considerado distintas poblaciones de iones: metano ( $\text{CH}_4^+$ ), hidrógeno molecular ( $\text{H}_2^+$ ), agua ( $\text{H}_2\text{O}^+$ ), nitrógeno atómico ( $\text{N}^+$ ), nitrógeno molecular ( $\text{N}_2^+$ ), oxígeno atómico ( $\text{O}^+$ ) e hidróxido ( $\text{OH}^+$ ), de protones y de granos de polvo (formados por hielo de agua y por una mezcla de hielo-silicatos) localizados tanto en la región interna (incluyendo al sistema de anillos) como en la externa. En los granos de polvo se analizó también el caso neutro.

Básicamente el modelo considera que la acción de un campo de fuerzas estocástico (eléctrico o gravitacional) es uno de los responsables de la energización de las partículas en la magnetósfera. El campo eléctrico estocástico es obtenido a través de la aplicación de las ecuaciones de Maxwell a las fluctuaciones del campo magnético observadas por las naves espaciales, mientras que el campo gravitacional estocástico es calculado con la Ley de la Gravitación Universal de Newton aplicada a la distribución de masas de los granos de polvo en cada anillo.

La magnetósfera (interna y externa) de Saturno es simulada tomando en cuenta su simetría y el comportamiento no-colisional del plasma. Sin pérdida de generalidad, las partículas están caracterizadas inicialmente por una distribución de velocidades Maxwelliana -excepto los granos de polvo que siguen velocidades Keplerianas- y su correspondiente distribución de energía.

En el presente Capítulo se resumen los efectos producidos por la acción del campo

de fuerzas estocástico (eléctrico o gravitacional) sobre una muestra de partículas en la magnetósfera de Saturno. Los resultados obtenidos están basados en el único cruce que realizaron las naves Voyager por la magnetósfera.

En general, la magnetósfera interna es más dinámica que la magnetósfera externa. Esto se debe, quizá, a la presencia de numerosas fuentes de partículas que alteran la velocidad de corrotación del plasma, ya que la intensidad de las fluctuaciones del campo magnético es menor en la región interna.

Dentro del sistema de anillos, el mecanismo estocástico hace que los granos de polvo sean energizados a una tasa tal, que les permite permanecer por más tiempo en la región antes de alcanzar la energía de escape. Este mecanismo es un buen candidato para explicar la presencia de la ionósfera sobre los anillos sin considerar a las colisiones entre partículas.

## 6.1. Partículas cargadas (Campo Eléctrico Estocástico)

La población de partículas cargadas (iones y granos de polvo) es energizada, de manera distinta, en la magnetósfera de Saturno. A continuación se enuncian los resultados más sobresalientes para cada región.

### 6.1.1. Magnetósfera interna

1. Las partículas experimentan -en promedio- una ganancia de energía con el tiempo. Ya que las pérdidas de energía por radiación electromagnética, calculadas con la Ec. (3.12), son pequeñas ( $< 10^{-27}$  eV) cuando se le compara con la ganancia de energía total, este efecto es debido meramente al mecanismo estocástico. Esto es mostrado a través de un incremento en la temperatura del plasma (calentamiento estocástico) y en un incremento en la velocidad media (aceleración estocástica).

2. En general, y según las pruebas de inferencia estadística, la distribución inicial de velocidades con perfil Maxwelliano mantiene su forma después de que la muestra de partículas ha interactuado con el campo eléctrico estocástico. Las excepciones son la distribución de velocidades para los protones y para los iones pesados localizados cerca del anillo C y la distribución de velocidades para los protones que vienen de Encelado; en estos casos las distribuciones se vuelven inestables.
3. La característica bimodal observada en la componente “y” de la velocidad final depende del valor del momento lineal inicial (va desde  $6.85 \times 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$  hasta  $2.25 \times 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}$ ) adquirida por la muestra de partículas. Esto es, para partículas localizadas cerca del planeta el momento lineal es menor que para las partículas localizadas lejos y, comparándolo con el impulso dado por el campo eléctrico ( $5.55 \times 10^{-21} \text{ kg m s}^{-1}$ ), la probabilidad de ser acelerado es mayor <sup>1</sup>.
4. La efectividad del mecanismo depende fuertemente de los tres términos que aparecen en la ecuación para la energía resultante. El primer término está relacionado con la energía de la distribución, el segundo término es debido a la energía corrotacional y el tercer término es una combinación de las energías de la distribución y corrotacional. Este último término es altamente variable en la magnetósfera interna.
5. Como una consecuencia de lo descrito en el punto anterior se pueden distin-

---

<sup>1</sup>La probabilidad de ganancia ( $P_G$ ) y la probabilidad de pérdida ( $P_P$ ) de energía para una partícula que está sometida a la acción de un campo de fuerzas estocástico, se calculan a partir de las expresiones [Durand-Manterola, 2003]:

$$P_G = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{I}{2P_0} \right)$$

$$P_P = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{I}{2P_0} \right)$$

donde  $I$  es el impulso dado por el campo de fuerzas en cada interacción y  $P_0$  es el momento lineal de la partícula antes de cada interacción. Estas ecuaciones son válidas cuando la desigualdad  $0 \leq \frac{I}{2P_0} \leq 1$  se mantiene. Cuando  $\frac{I}{2P_0} > 1$  se tiene que  $P_G = 1$  y  $P_P = 0$ . Las ecuaciones anteriores muestran que la probabilidad de ganancia es siempre mayor que la probabilidad de pérdida, excepto en el caso donde  $\frac{I}{2P_0} = 0$  ( $P_G = P_P = 0.5$ ).

guir diferentes regiones de energización en la magnetósfera interna: 1) región de baja energización (polo norte de Saturno, Encelado y Rea); 2) región de inestabilidad (Anillo C); 3) región de energización intermedia (Dione); y 4) región de alta energización (Anillo E).

6. Se encuentran diferentes tipos de espectros de energía: para partículas con energías en el intervalo  $0.4 \text{ eV} < E < 1.2 \text{ eV}$ , el espectro sigue una función sigmoideal asimétrica, para energías ( $50 \text{ keV} < E < 150 \text{ keV}$ ) el espectro está descrito por una ley de potencias (índice espectral = -2.38), para energías ( $E < 10.8 \text{ eV}$ ) se tiene una logística y una exponencial decreciente para energías ( $E > 11 \text{ eV}$ ). Es importante mencionar que estos resultados no contradicen lo expuesto en el punto 2. En ese caso, las pruebas estadísticas comparan una distribución Maxwelliana con cualquier otra distribución. Bajo esas condiciones, los resultados de las pruebas indican que el mejor ajuste corresponde al de una distribución Maxwelliana y eso no significa que sea la que realmente se ajusta. Lo anterior se ve reflejado en los diferentes tipos de espectros de energía encontrados y que no corresponden al de una distribución de velocidades Maxwelliana.
7. El mecanismo puede reforzar la acción de otros procesos de aceleración que se estén llevando a cabo dentro de la magnetósfera. Cuando se considera una población de protones previamente energizada cerca de la órbita de Encelado, el mecanismo estocástico aumenta su energía en pocos milisegundos.
8. Este mecanismo es efectivo para producir partículas energéticas ya que el tiempo de permanencia de éstas en la magnetósfera de Saturno se estima entre 10 y 100 días, lo que permite que las partículas vayan ganando energía -en muy pocos segundos- por medio del mecanismo estocástico antes de escapar de la región.
9. A través de este mecanismo es posible producir partículas supratérmicas -o suprimirlas- mediante la aplicación de un campo eléctrico estocástico con perfil adecuado.

10. Al modificar el tiempo de muestreo en las mediciones del campo magnético, el perfil del campo eléctrico sigue siendo descrito por una función de distribución logística pero la cantidad de partículas de altas energías disminuye considerablemente.

### 6.1.2. Magnetósfera externa

1. Esta región es dividida en: *trayectoria de entrada* y *trayectoria de salida*. En general, la trayectoria de salida para el Voyager 2 está ligeramente más perturbada que la de entrada. Esto hace que las distribuciones de velocidades finales tiendan a desarrollar colas.
2. En promedio, las partículas experimentan una ganancia de energía con el tiempo pero conforme se alejan del planeta esta tendencia disminuye. Esto significa que las partículas que inicialmente son más energéticas, ganarán menos energía por la acción del campo eléctrico estocástico.
3. En analogía con lo anterior, es evidente un aumento en la temperatura y en la velocidad media de la distribución.
4. En la mayoría de los casos estudiados y, de acuerdo con los resultados de las pruebas estadísticas, la distribución inicial de velocidades con perfil Maxwelliano mantiene su forma después de que la muestra de partículas ha interactuado con el campo eléctrico estocástico. Las excepciones son la distribución de velocidades para los protones y para los iones pesados localizados en la cercanía de Titán. En estos casos comienza a aparecer una cola en la distribución.
5. El último término de la ecuación de la energía (combinación de las energías de la distribución y corrotacional) contribuye menos a la ganancia estocástica conforme la partícula se aleja del planeta. En cada posición dentro de la magnetósfera externa, la muestra de partículas es más energética y el mecanismo estocástico es menos favorable.
6. Como una consecuencia de lo descrito en el punto anterior no se pueden distinguir diferentes regiones de energización.

7. Se encuentran diferentes tipos de espectros de energía: para partículas con energías en el intervalo  $36.5 \text{ eV} < E < 40 \text{ eV}$  el espectro sigue una función Gaussiana, para energías ( $E < 100 \text{ eV}$ ) el espectro está descrito por una función exponencial decreciente, para energías ( $E < 117 \text{ eV}$ ) y ( $E > 122 \text{ eV}$ ) se encuentran dos distribuciones Lorentzianas. Lo anterior no contradice lo expuesto en el punto 4, pues las pruebas estadísticas comparan una distribución Maxwelliana con cualquier otra distribución. No necesariamente tiene que ser la que realmente se ajusta ya que esto se ve reflejado en los diferentes tipos de espectros de energía encontrados y que no corresponden al de una distribución de velocidades Maxwelliana.
8. Es posible reducir la generación de partículas supraterrmales mediante la aplicación de un campo eléctrico estocástico con perfil adecuado.
9. Al modificar el tiempo de muestreo en las mediciones del campo magnético, el perfil del campo eléctrico sigue siendo descrito por una función de distribución logística pero la cantidad de partículas de altas energías disminuye considerablemente y la posibilidad de formación de colas supraterrmales es nula.

### 6.1.3. Sistema de anillos

1. Sólo se puede pensar en los granos de polvo localizados en el anillo E. En los demás anillos pueden existir partículas cargadas pero probablemente sean cargadas y descargadas constantemente.
2. Se identifican básicamente dos regiones: en el borde externo del anillo los granos de polvo tienden a perder energía y en el borde interno tienden a ganar más energía en algunos segundos.
3. El campo eléctrico estocástico es capaz de energizar a los granos de polvo del anillo E sujeto a la energía disponible que hay en él.
4. Es un mecanismo lento en comparación con la energización de iones y podría ser considerado un mecanismo por el cual las partículas de polvo eventualmente escapan del anillo.

## 6.2. Partículas neutras (Campo Gravitacional Estocástico)

Se considera la población de granos de polvo neutro presente en cada uno de los anillos de Saturno. Por esta razón, la única fuerza estocástica que actúa entre los granos de polvo es la gravitacional.

### 6.2.1. Sistema de anillos

1. De manera general se observa que los granos de polvo tienden a ganar energía con el tiempo a expensas únicamente del campo gravitacional estocástico.
2. Se identifican tres regiones de energización dentro del sistema de anillos: a) Alta energización (División de Cassini y anillo A); b) Baja energización (anillo B y anillo E), y c) energización intermedia (anillo C).
3. Es un mecanismo lento en comparación con lo descrito para los iones, sin embargo es un buen candidato para ser un mecanismo de pérdida de partículas. Si escapan rápidamente entonces la estructura de los anillos no sería tan estable como lo indican las observaciones.

El modelo de aceleración estocástica presentado en este trabajo tiene ventajas conceptuales y metodológicas.

- *Conceptuales:* Tal y como se mencionó en el Capítulo 1, los requisitos principales para que un mecanismo de aceleración estocástica esté actuando sobre la población de partículas son: 1) interacciones elementales que causan un cambio en la energía de la partícula, 2) dispersión efectiva atribuida a las interacciones onda-partícula, y 3) un proceso aleatorio (tratamiento estadístico). Si las ondas que producen la aceleración de partículas son lo suficientemente aleatorias (esto es, ondas con fase aleatoria), entonces ocurre el proceso de



difusión en el espacio de velocidades y el fenómeno es conocido como difusión cuasi-lineal. Este efecto es tratado como un operador de difusión en la ecuación de Fokker-Planck, la cual puede ser reemplazada por un conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas. En el modelo presentado no se considera un espectro de onda en particular sino el espectro de fluctuaciones de campo (magnético o gravitacional) característico de la región en estudio. Además no es necesario conocer los valores promedio para la velocidad, para la densidad y para la temperatura, que pueden obtenerse a partir de las mediciones o calculados teóricamente; en este modelo se requiere la función de distribución de velocidades para las distintas poblaciones.

- *Metodológicas*: El método estadístico utilizado en este trabajo -a través de una simulación Monte Carlo- es ventajoso en comparación con los métodos numéricos convencionales que pueden volverse muy complicados conforme el número de ecuaciones e incógnitas aumenta. En un método de Monte Carlo basta con conocer las funciones de distribución de probabilidad que mejor describen al sistema que se está estudiando sin importar el número de variables involucradas. De esta manera, se resuelve la misma ecuación de movimiento para cada partícula en lugar de un conjunto de “ $n$ ” ecuaciones.

Este mecanismo puede ser considerado como un proceso de aceleración primario donde los protones -que son más susceptibles de ser acelerados- ganan energía como consecuencia de la acción del campo eléctrico estocástico. Estos protones serán capaces de transferir energía a las distintas poblaciones de iones presentes en la magnetósfera, que además, están ganando energía por el campo eléctrico estocástico de fondo. Eventualmente se espera que el plasma se vaya energizando para alcanzar la energía observada por las naves. De acuerdo con los resultados obtenidos, la magnetósfera interna es más dinámica que la magnetósfera externa, por lo que los efectos descritos anteriormente se presentan principalmente en esta región.

Si además de la acción del campo eléctrico estocástico se considera al campo gravitacional estocástico, el posible efecto de la combinación de ambos resultaría en fenómenos de inestabilidad en el plasma que podrían conducir a la energización de

partículas dentro de la magnetósfera.

Los resultados mostrados en este trabajo pueden ser probados o validados tomando en cuenta las mediciones hechas por el instrumento de plasma a bordo de Cassini. En ese sentido, se espera que la densidad observada de iones/neutros muestren un máximo en su distribución en los lugares donde el mecanismo estocástico es menos efectivo ( $\sim 1.3 R_S$ ,  $\sim 6.5 R_S$  y  $\sim 9.6 R_S$ ) ya que las partículas no han alcanzado la energía suficiente para abandonar la región y, por lo tanto, pueden permanecer en el mismo lugar por más tiempo. Además de la densidad, la temperatura del plasma podría mostrar un valor mínimo debido a la baja energización. Por el contrario, en los lugares donde el mecanismo estocástico es más eficiente ( $\sim 3.5 R_S$  y  $\sim 7.6 R_S$ ), se espera que la densidad de iones/neutros sea mínima y la temperatura del plasma sea elevada.

Por otro lado, en este modelo no se tiene un fenómeno de resonancia evidente porque: a) Las fluctuaciones del campo magnético son el resultado de la superposición de un gran número de ondas con diferentes frecuencias, b) Cuando la nave cruza una magnetosfera planetaria, se están propagando muchas ondas en la región; entonces, la nave mide diversos modos de propagación en el mismo instante, c) La partícula A está en resonancia con la onda de frecuencia A, mientras que la partícula B está en resonancia con la onda de frecuencia B. De aquí, que en esta situación, el fenómeno de resonancia no sea evidente (en otras palabras, es “invisible” dada la variedad de resonancias que tienen lugar).

# Bibliografía

[Abe and Nishida, 1986]

Abe, T. and A. Nishida (1986), *Anomalous outward diffusion and associated heating of Iogenic ions in the Jovian magnetosphere*, J. Geophys. Res. **91**, 10003.

[Acuña and Ness, 1980]

Acuña, M. and N. F. Ness (1980), *The magnetic field of Saturn - Pioneer 11 observations*, Science **207**, 444.

[Atreya et al., 1986]

Atreya, S. K., J. H. White Jr., T. M. Donahue et. al. (1986), *Theory, measurements, and models of the upper atmosphere and ionosphere of Saturn*, in **Saturn**, edited by T. Gehrels and M. S. Matthews, 239.

[Balakrishnan, 1992]

Balakrishnan, N., **Handbook of the Logistic Distribution** (Marcel Dekker, New York, 1992).

[Barbosa et al., 1984]

Barbosa, D. D., A. Eviatar and G. L. Siscoe (1984), *On the acceleration of energetic ions in Jupiter's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **89**, 3789.

[Barbosa, 1986]

Barbosa, D. D. (1986), *Medium-energy electrons and heavy ions in Jupiter's magnetosphere-Effects of lower hybrid*

- wave-particle interactions*, J. Geophys. Res. **91**, 5605.
- [Barbosa, 1994] Barbosa, D. D. (1994), *Stochastic acceleration of energetic ions in Jupiter's magnetosphere*, J. Geophys. Res., **99**(A7), 13509.
- [Berkson, 1950] Berkson, J. (1950), *Are there two regressions?*, J. Am. Stat. Assoc. **45**, 164.
- [Blanc et al., 2002] Blanc, M., S. Bolton, J. Bradley et al. (2002), *Magnetospheric and Plasma Science with Cassini-Huygens*, Space Science Reviews **104**(1), 253.
- [Box and Müller, 1958] Box, G. E. P and M. E. Müller (1958), *A note on the generation of random normal deviates*, Annals Math. Stat. **29**, 610.
- [Bridge et al., 1981] Bridge, H. S., J. W. Belcher, A. J. Lazarus et al. (1981), *Plasma observations near Saturn: Initial results from Voyager 1*, Science **212**(10), 217.
- [Bridge et al., 1982] Bridge, H. S., F. Bagenal, J. W. Belcher et al. (1982), *Plasma observations near Saturn: Initial results from Voyager 2*, Science **215**, 563.
- [Burns et al., 1979] Burns, J., P. L. Lamy and S. Soter (1979), *Radiation forces on small particles in the solar system*, Icarus **40**, 1.
- [Burns et al., 1984] Burns, J. A., M. R. Showalter and G. E. Morfill (1984), *The ethereal rings of Jupiter and*

- Saturn*, in **Planetary Rings**, (eds. R. Greenberg and A. Brahic), University of Arizona Press, 200.
- [Chew et al., 1969] Chew, G. F., M. L. Goldberger and F. E. Low (1969), *An Integral Equation for Scattering Amplitudes*, Phys. Rev. Lett. **22**(5), 208.
- [Christiansen and Hamblin, 1995] Christiansen E. H., and W. K Hamblin, **Exploring the planets** (Prentice Hall, USA, 1995).
- [Cladis, 1986] Cladis, J. B. (1986), *Parallel acceleration and transport of ions from polar ionosphere to plasma sheet*, Geophys. Res. Lett. **13**, 893.
- [Clark, 1980] Clark, R. N. (1980), *Ganymede, Europa, Callisto, and Saturn's rings - Compositional analysis from reflectance spectroscopy*, Icarus **44**, 388.
- [Cruikshank et al., 1984] Cruikshank, D. P., J. Veverka and L. A. Lebofsky (1984), *Satellites of Saturn: Optical Properties*, in **Saturn**, eds. T. Gehrels and M. S. Matthews, University of Arizona Press, 640.
- [Cuzzi, 1983] Cuzzi, J. N. (1983), *Planetary ring systems*, Rev. Geophys. and Space Phys. **21**, 173.
- [Cuzzi et. al., 1984] Cuzzi, J. N., J. J. Lissauer and L. W. Esposito (1984), *Saturn's rings-Structure, dynamics, and particle properties*, in **Planetary Rings** (eds. R. Greenberg and A. Brahic), University of Arizona Press, 463.

- [Delitsky and Lane, 2002] Delitsky, M. L. and A. L. Lane (2002), *Saturn's inner satellites: Ice chemistry and magnetosphere effects*, J. Geophys. Res.(Planets), **107**(E11), 3, CiteID 5093, doi:10.1029/2002JE001855.
- [De Pater and Lissauer, 2001] De Pater, I. and J. L. Lissauer (2001), **Planetary Sciences**, Cambridge University Press, UK, (Chapter 11).
- [Dungey, 1950] Dungey, J. W. (1950), *The motion of magnetic fields*, Mon. Notices Roy. Astron. Soc. **113**, 679.
- [Durand-Manterola, 2003] Durand-Manterola, H. (2003), *Acceleration of particles in a random force field*, in **IX Meeting of the Dynamic Fluids Division Proceedings**, Sociedad Mexicana de Física, México D.F., México, 17-19 November 2003.
- [Eraker and Simpson, 1986] Eraker, J. H., and J. A. Simpson (1986), *Acceleration of charged particles in Mercury's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **91**, 9973.
- [Esposito et al., 1984] Esposito, L. W., J. N. Cuzzi, J. B. Holberg et al. (1984), *Saturn's Rings: structure, dynamics and particle properties*, in **Saturn**, edited by T. Gehrels and M.S. Matthews, 463
- [Esposito, 1986] Esposito, L. W. (1986), *Structure and evolution of Saturn's rings*, Icarus **67**, 345.
- [Estrada and Cuzzi, 2002] Estrada, P. R. and J. N. Cuzzi (1996), *Voyager Observations of the Color of Saturn's Rings*, Icarus **122**, 251.

- [Eviatar et al., 1982] Eviatar, A., G. L. Siscoe, J. D. Scudder et. al. (1982), *The plumes of Titan*, J. Geophys. Res. **87**, 8091.
- [Eviatar, 1983] Eviatar, A., R. L. McNutt Jr., G. L. Siscoe et. al. (1983), *Heavy ions in the outer Kronian magnetosphere*, J. Geophys. Res. **88**, 823.
- [Eviatar, 1984] Eviatar, A. (1984), *Plasma in Saturn's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **89**, 3821.
- [Eviatar and Richardson, 1986] Eviatar, A. and J. D. Richardson (1986), *Corotation of the Kronian magnetosphere*, J. Geophys. Res. **91**, 3299.
- [Eviatar and Richardson, 1992] Eviatar, A. and J. D. Richardson (1992), *Thermal plasma in the inner kronian magnetosphere*, Ann. Geophys. **10**, 511.
- [Fermi, 1949] Fermi, E. (1949), *On the origin of the cosmic radiation*, Phys. Rev. **75**(8), 1169.
- [Fermi, 1954] Fermi, E. (1954), *Galactic Magnetic Fields and the Origin of Cosmic Radiation*, ApJ. **119**, 1.
- [Fillius et al., 1980] Fillius, W., W. H. Ip and C. E. McIlwain (1980), *Trapped radiation belts of Saturn: First look*, Science **207**, 425.
- [Frank, 1980] Frank, L. A., B. G. Burek, K. L. Ackerson et. al. (1980), *Plasmas in Saturn's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **85**, 5695.
- [Gallagher et al., 2005] Gallagher, D. L., J. L. Horwitz, J. D. Perez et. al. (2005), *Introduction to Particle Accele-*

- ration in the Cosmos*, in **Particle Acceleration in Astrophysical Plasmas**, Geophysical Monograph Series **156**, 1.
- [Giovanelli, 1947] Giovanelli, R. G. (1947), *Magnetic and electric phenomena in the Sun's atmosphere associated with sunspots*, Mon. Notices Roy. Astron. Soc. **107**, 338.
- [Gladstone et al., 2002] Gladstone, G. R., J. H. Waite, D. Grodent et. al. (2002), *A pulsating auroral X-ray hot spot on Jupiter*, Nature **415**(6875), 1000.
- [Graps and Grün, 2002] Graps, A. L. and E. Grün (2002), *Charging Processes for Dust Particles in Saturn's Magnetosphere*, in Dust in the solar system and other planetary systems, COSPAR Colloquia Series 15, (eds. S. F. Green, I. P. Williams, J. A. M. McDonnell, and N. McBride), 168.
- [Grigorov et al., 1991] Grigorov, N. L., M. A. Kondrat'eva, M. I. Parnasiuk et. al. (1991), *Evidence for trapped anomalous cosmic ray oxygen ions in the inner magnetosphere*, Geophys. Res. Lett. **18**, 1959.
- [Grodent et al., 2004] Grodent, D., J. C. Gerard, J. T. Clarke et. al. (2004), *A possible auroral signature of a magnetotail reconnection process on Jupiter*, J. Geophys. Res. **109**, A05201, 10.1029/2003JA010341.
- [Grodent, 2004] Grodent, D. (2004), *Auroral processes at Earth, Jupiter and Saturn*, in: Eos Trans. AGU 85(17), Joint Assembly Suppl., Abstract SM12A-04.



- [Gurnett et al., 2005] Gurnett, D. A., W. S. Kurth, G. B. Hospodarsky et. al. (2005), *Radio and Plasma Wave Observations at Saturn from Cassini's Approach and First Orbit*, *Science* **307**,1255.
- [Hamilton et al., 1983] Hamilton, D. C., D. C. Brown, G. Gloeckler et. al. (1983), *Energetic Atomic and Molecular Ions in Saturn's magnetosphere*, *J. Geophys. Res.* **88**(A11), 8905.
- [Hammersley and Handscomb, 1964] Hammersley, J. M. and D. C. Handscomb, **Monte Carlo Methods** (Monographs on Applied Probability and Statistics, edited by M. S. Bartlett and D. R. Cox, London Chapman and Hall, USA, 1964).
- [Hartquist et al., 2003] Hartquist, T. W., O. Havnes and G. E. Morfill (2003), *The effects of charged dust in Saturn's rings*, *Astron. and Geophys.* **44**, 26.
- [Hess, 1968] Hess, W. N. (1968), The radiation belt and magnetosphere, in **Introduction to Space Science**, edited by W. N. Hess and G. D. Mead (New York, Gordon and Breach).
- [Horanyi et al., 1992] Horanyi, M., J. A. Burns and D. P. Hamilton (1992), *The dynamics of Saturn's E ring particles*, *Icarus* **97**, 248.
- [Horanyi, 1996] Horanyi, M. (1996), *Charged dust dynamics in the Solar System*, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 383.
- [Horwitz et al., 1994] Horwitz, J. L., C. W. Ho, H. D. Scarbro et. al. (1994), *Centrifugal acceleration of the polar wind*, *J. Geophys. Res.* **99**, 5051.

- [Howard et al., 1999] Howard, J. E., M. Horányi and G. R. Stewart (1999), *Global dynamics of charged dust particles in Planetary Magnetospheres*, Phys. Rev. Lett. **83** (20), 3993.
- [Ip, 1992] Ip, W.-H. (1992), *The Nitrogen Tori of Titan and Triton*, Adv. Space Res. **12**(8), 73.
- [Ip, 1995] Ip, W. H. (1995), *The exospheric systems of Saturn's rings*, Icarus **115**, 295.
- [Ip, 1996] Ip, W.-H. (1996), *The Asymmetric Distribution of Titan's Atomic Hydrogen Cloud as a Function of Local Time*, ApJ. **457**, 922.
- [Ip, 2000] Ip, W.H. (2000), *Thermal plasma composition in Saturn's magnetosphere*, Planetary and Space Science **48**, 775.
- [Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999), **Classical Electrodynamics** (John Wiley & Sons, USA).
- [Jardine and Allen, 1996] Jardine, M. and H. R. Allen (1996), *Particle Acceleration and Magnetic Annihilation in Current Sheets, Magnetic Reconnection in the Solar Atmosphere*, ASP Conference Series, Vol. 111, R. D. Bentley and J. T. Mariska (eds.), 300.
- [Johnson et al., 1989] Johnson, R. E., M. K. Pospieszalska, E. C. Sittler et. al. (1989), *The neutral cloud and heavy ion inner torus at Saturn*, Icarus **77**, 311.
- [Johnson et al., 2003] Johnson, R. E., T. I. Quickenden, P. D. Cooper et. al. (2003), *The Production of Oxi-*

- dants in *Europa's Surface*, *Astrobiology* **3**, 823.
- [Jokipii, 1979] Jokipii, J. R. (1979), *Introductory lecture*, in **AIP Conference Proceedings 56: Particle acceleration mechanisms in Astrophysics**, edited by J. Arons, M. Claire and C. McKee, 1.
- [Jokipii et al., 2001] Jokipii, J. R., J. Kota and J. Giacalone (2001), *Compressive-Diffusive Acceleration of Energetic Charged Particles*, Proceedings of the 27th International Cosmic Ray Conference, 7-15 August, 2001, Hamburg, Germany. Under the auspices of the International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), 3581.
- [Jones, 1994] Jones, F. C. (1994), *A theoretical review of diffusive shock acceleration*, *Astrophys. J. Suppl. Series* **90**(2), 561.
- [Jurac et al., 2001] Jurac, S., R. E. Johnson, J. D. Richardson et. al. (2001), *Satellite sputtering in Saturn's magnetosphere*, *Planetary and Space Science* **49**(3-4), 319.
- [Jurac et al., 2002] Jurac, S., M. A. McGrath, R. E. Johnson et. al. (2002), *Search for a missing water source*, *Geophys. Res. Lett.* **29**(24), 25-1, CiteID 2172, doi: 10.1029/2002GL015855.
- [Kargel and Pozlo, 1996] Kargel, J. S. and S. Pozlo (1996), *The Volcanic and Tectonic History of Enceladus*, *Icarus* **119**, 385.

- [Kimura and Mann, 1998] Kimura, H. and I. Mann (1998), *The Electric Charging of Interstellar Dust in the Solar System and Consequences for its Dynamics*, *ApJ.* **499**, 454.
- [Kivelson and Russell, 1997] Kivelson, M. G. and C. T. Russell, **Introduction to Space Physics** (Cambridge University Press, USA, 1997).
- [Kivelson, 2005] Kivelson, M. G. (2005), *Transport and acceleration of plasma in the magnetospheres of Earth and Jupiter and expectations for Saturn*, *Adv. Space Res.* **36**, 2077.
- [Kleinbaum, 2005] Kleinbaum, D. G. and M. Klein, **Logistic regression** (Springer Verlag, USA, 2005).
- [Krimigis et al., 1981] Krimigis, S. M., T. P. Armstrong, W. I. Axford et. al. (1981), *Low-Energy charged particles in Saturn's magnetosphere: Results from Voyager 1*, *Science* **212**(10), 225.
- [Krimigis et al., 1982] Krimigis, S. M., T. P. Armstrong, W. I. Axford et. al. (1982), *Low-Energy hot plasma and particles in Saturn's magnetosphere*, *Science* **215**(29), 571.
- [Krimigis and Armstrong, 1982] Krimigis, S. M. and T. P. Armstrong (1982), *Two-component proton spectra in the inner Saturnian magnetosphere*, *Geophys. Res. Lett.* **9**, 1143.
- [Krimigis, 1982] Krimigis, S. M. (1982), *A post-Voyager view of Saturn's environment*, *Johns Hopkins APL Technical Digest*, Vol. 3, 180.

- [Krimigis et al., 1983] Krimigis, S. M., J. F. Carbary, E. P. Keath et. al. (1983), *General characteristics of hot plasma and energetic particles in the Saturnian magnetosphere-Results from the Voyager spacecraft*, J. Geophys. Res. **88**, 8871.
- [Krimigis et al., 2005] Krimigis, S. M., D. G. Mitchell, D. C. Hamilton et. al. (2005), *Dynamics of Saturn's Magnetosphere from MIMI During Cassini's Orbital Insertion*, Sci. **307**, 1270.
- [Krupp, 2005] Krupp, N. (2005), *Energetic Particles in the Magnetosphere of Saturn and a Comparison with Jupiter*, Space Sci. Rev. **116**, 345.
- [Lavine and Vette, 1970] Lavine, J. P. and J. I. Vette (1970), *Models of the trapped radiation environment*, Vol. 6: **High energy protons** (NASA-SP 3024).
- [Lazarus et al., 1983] Lazarus, A. J., T. Hasegawa, T. and F. Baggenal (1983), *Long-lived particulate or gaseous structure in Saturn's outer magnetosphere*, Nature **302**, 230.
- [Lazarus and McNutt, 1983] Lazarus, A. J. and R. L. McNutt Jr.(1983), *Low energy plasma ion observations in Saturn's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **88**, 8831.
- [Lebofsky et al., 1970] Lebofsky, L. A., T. V. Johnson, and T. B. McCord (1970), *Saturn's rings: Spectral reflectivity and compositional implications*, Icarus **13**, 226.
- [Lebofsky and Fegley, 1976] Lebofsky, L. A., M. B. Fegley Jr. (1976), *Laboratory reflection spectra for the determination*

- of chemical composition of ice bodies*, *Icarus* **28**, 379.
- [Martínez-Gómez et al., 2006] Martínez-Gómez, E., H. J. Durand-Manterola and H. Pérez de Tejada (2006), *Stochastic Acceleration of Energetic Particles in the Magnetosphere of Saturn*, *Astrophys. and Space Sci.* **306**(4), 259, doi 10.1007/s10509-006-9271-0.
- [Martínez-Gómez et al., 2007a] Martínez-Gómez, E., H. J. Durand-Manterola and H. Pérez de Tejada (2007), *Energization of particles in Saturn's inner magnetosphere: Monte Carlo simulation of stochastic electric field effects*, *Astron. and Astrophys.* (en prensa).
- [Martínez-Gómez et al., 2007b] Martínez-Gómez, E., H. J. Durand-Manterola and H. Pérez de Tejada (2007), *Energization of charged particles in planetary magnetospheres*, *Astrophys. and Space Sci.* (en prensa).
- [Mauk and Meng, 1983] Mauk, B. H. and C. L. Meng (1983), *Dynamical injections as the source of near geostationary quiet time particle spatial boundaries*, *J. Geophys. Res.* **88**, 10011.
- [Mauk et al., 1997] Mauk, B. H., D. J. Williams and R. W. McEntire (1997), *Energy-time dispersed charged particle signatures of dynamic injections in Jupiter's inner magnetosphere*, *Geophys. Res. Lett.* **24**, 2949.
- [McDonald et al., 1980] McDonald, F. B., A. W. Schardt and J. H. Trainor (1980), *If you've seen one magnetosphere you haven't seen them all: Energetic par-*

- ticle observations in the Saturnian magnetosphere*, J. Geophys. Res. **85**, 5813.
- [Möbius, 1994] Möbius, E. (1994), *Sources and acceleration of energetic particles in planetary magnetospheres*, Astrophys. J. Suppl. Series **90**, 521.
- [Morrison et al., 1986] Morrison, D., T. Owen and L. A. Soderblom (1986), The satellites of Saturn. In **Satellites**, edited by J. A. Burns and M. S. Matthews, 764.
- [Motez et al., 2001] Mottez, F., V. Génot and P. Louarn (2004), *Numerical simulation of turbulence and acceleration in the magnetospheric auroral zones*, in **SF2A-2004: Semaine de l’Astrophysique Française**, Paris, France, Edited by F. Combes, D. Barret, T. Conti, F. Meynadier and L. Pagani, EdP-Sciences, Conference Series, 14-18 June 2004.
- [Murdin, 2001] Murdin, P. (2001), Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, P. Murdin (ed.), article 4439.
- [Murray and Dermott, 1999] Murray, C. D. and S. F. Dermott (1999), **Solar System Dynamics**, Cambridge University Press.
- [Neubauer et al., 1984] Neubauer, F. M., D. Gurnett, J. Scudder et al. (1984), *Titan’s magnetospheric interaction*, in **Saturn**, eds. T. Gehrels and M. S. Matthews, 760.

- [Ness et al., 1981] Ness, N. F., M. H. Acuña, R. P. Lepping et. al. (1981), *Magnetic field studies by Voyager 1: preliminary results at Saturn*, Science **212**(10), 211.
- [Ness et al., 1982] Ness, F., M. H. Acuña, K. W. Behannon et. al. (1982), *Magnetic field studies by Voyager 2 - Preliminary results at Saturn*, Science **215**, 558.
- [Nicholson and French, 1998] Nicholson, P. D. and R. G. French (1998), *Particle sizes in Saturn's rings derived from stellar occultation data*, American Astronomical Society, DPS meeting #30, #17.03; Bulletin of the American Astronomical Society **30**, 1043.
- [Nishida, 1976] Nishida, A. (1976), *Outward diffusion of energetic particles from the Jovian radiation belt*, J. Geophys. Res. **81**, 1771.
- [Ostrowski and Schlickeiser, 1993] Ostrowski, M., and R. Schlickeiser (1993), *Diffusive first and second order Fermi acceleration at parallel shock waves*, Astron. and Astrophys. **268**(2), 812.
- [Paranicas et al., 2005] Paranicas, C., D. G. Mitchell, S. Livi et. al. (2005), *Evidence of Enceladus and Tethys microsignatures*, Geophys. Res. Lett. **32**(20), CitelID L20101.
- [Park and Petrosian, 1986] Park, B. T. and V. Petrosian (1996), *Fokker-Planck equations of stochastic acceleration: a study of numerical methods*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **103**, 255.



- [Pérez de Tejada et al., 1995] Pérez de Tejada, H., D. S. Intriligator and R. J. Strangeway (1995), *Intermediate transition in the Venus ionosheath*, J. Geophys. Res. **100**(A8), 14523.
- [Perkins, 1968] Perkins, F. W. (1968), *Plasma-wave instabilities in the ionosphere over the aurora*, J. Geophys. Res. **73**, 6631.
- [Pontius et al., 1986] Pontius, D. H., Jr., T. W. Hill and M. E. Rassbach, (1986), *Steady state plasma transport in a corotation-dominated magnetosphere*, Geophys. Res. Lett. **13**, 1097.
- [Porco et al., 2006] Porco, C.C., P. Helfenstein, P. C. Thomas et al. (2006), *Cassini Observes the Active South Pole of Enceladus*, Science **311**, 1393.
- [Pospieszalska and Johnson, 1991] Pospieszalska, M. K. and R. E. Johnson (1991), *Micrometeorite Erosion of the Main Rings as a Source of Plasma in the Inner Saturnian Plasma Torus*, Icarus **93**, 45.
- [Poulet and Cuzzi, 2002] Poulet, F. and J. N. Cuzzi (2002), *The composition of Saturn's rings*, Icarus **160**, 350.
- [Richardson, 1986] Richardson, J. D. (1986), *Thermal ions at Saturn: Plasma parameters and implications*, J. Geophys. Res. **91**, 1381.
- [Richardson and Eviatar, 1988] Richardson, J. D. and A. Eviatar (1988), *Observational and theoretical evidence for anisotropies in Saturn's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **93**, 7297.

- [Richardson, 1998] Richardson, J. D. (1998), *Thermal plasma and neutral gas in Saturn's magnetosphere*, Rev. Geophys. **36**(4), 501.
- [Rohatgi 2003] Rohatgi, V. K., **Statistical inference** (Dover Books on Mathematics, Dover Publications, Inc., United States, 2003).
- [Rosen, 1989] Rosen, P. A. (1989), *Waves in Saturn's rings probed by radio occultation*, PhD Thesis Stanford University.
- [Rosen et al., 1991] Rosen, P. A., G. L. Tyler, E. A. Marouf et. al. (1991), *Resonance structures in Saturn's rings probed by radio occultation II: results and interpretation*, Icarus **93**, 25.
- [Roussos et al., 2005] Roussos, E., N. Krupp, J. Woch et. al. (2005), *Low energy electron microsignatures at the orbit of Tethys: Cassini MIMI/LEMMS observations*, Geophys. Res. Lett. **32**, L24107, doi:10.1029/2005GL024084.
- [Rubinstein, 1981] Rubinstein, R. Y., **Simulation and the Monte Carlo Method** (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., United States, 1981).
- [Salo, 1992] Salo, H. (1992), *Gravitational wakes in Saturn's rings*, Nature **359**, 619.
- [Sandel et al., 1982] Sandel, B. R., D. E. Shemansky, A. L. Broadfoot et. al. (1982), *Extreme ultraviolet observations from Voyager 2 encounter with Saturn*, Science **215**, 548.

- [Santos-Costa et al., 2003] Santos-Costa, D., Blanc, M., Maurice et. al. (2003), *Modeling the electron and proton radiation belts of Saturn*, Geophys. Res. Lett. **30**, 6, 10.1029/2003GL017972.
- [Saur et al., 2004] Saur, J., B. Mauk, A. Kaßner et. al. (2004), *A model for the azimuthal plasma velocity in Saturn's magnetosphere*, J. Geophys. Res. **109**(A5), CiteID A05217.
- [Scarf et al., 1984] Scarf, F. L., L. A. Frank, D. A. Gurnett et. al. (1984), *Measurements of Plasma, plasma waves, and suprathermal charged particles in Saturn's inner magnetosphere*, in **Saturn**, eds. T. Gehrels and M. S. Matthews, 318, University of Arizona Press, Tucson.
- [Schardt and McDonald, 1983] Schardt, A. W., and F. B. McDonald (1983), *The flux and source of energetic protons in Saturn's inner magnetosphere*, J. Geophys. Res. **88**, 8923.
- [Schardt et al., 1984] Schardt, A. W., K. W. Behannon, R. P. Lepping et. al. (1984), *The Outer Magnetosphere*, in **Saturn**, eds. T. Gehrels and M. S. Matthews, 416, University of Arizona Press.
- [Schardt et al., 1985] Schardt, A. W., W. S. Kurth, R. P. Lepping et. al. (1985), *Particle acceleration in Saturn's outer magnetosphere*, J. Geophys. Res., **90**(A9), 8539.
- [Schatzmann, 1963] Schatzmann, E. (1963), *On the acceleration of particles in shock fronts*, Ann. Astrophys. **26**, 234.

- [Schlickeiser, 1989] Schlickeiser, R. (1989), *Remarks about diffusive shock wave acceleration*, in: **Hot spots in extragalactic radio sources**; Proceedings of the Workshop, Tegernsee, Federal Republic of Germany, Feb. 8-12 1988, 265.
- [Selkowitz and Blackman, 2004] Selkowitz, R., and E. G. Blackman (2004), *Stochastic Fermi acceleration of subrelativistic electrons and its role in impulsive solar flares*, Mon. Notices Roy. Astron. Soc. **354**(327), 870.
- [Shen, 1965] Shen, C. S. (1965), *Transit Acceleration of Charged Particles in an Inhomogeneous Electromagnetic Field*, ApJ **141**, 1091.
- [Shemansky and Smith, 1983] Shemansky, D. and G. R. Smith (1983), *Whence comes the "Titan" torus*. Eos: Trans. AGU **63**, 1019.
- [Shemansky and Hall, 1992] Shemansky, D. E. and D. T. Hall (1992), *The distribution of atomic hydrogen in the magnetosphere of Saturn*, J. Geophys. Res. **97**, 4143.
- [Shemansky et al., 1993] Shemansky, D. E., P. Matheson, D. T. Hall et al. (1993), *Detection of the hydroxyl radical in the Saturn magnetosphere*, Nature **363**(6427), 329.
- [Sheppard, 2007] Sheppard, S. S. (2007), <http://www.ifa.hawaii.edu/~sheppard/satellites>.
- [Shi et al., 1995] Shi, M., R. A. Baragiola, D. E. Grosjean et al. (1995), *Sputtering of water ice surfaces and the production of extended neutral atmospheres*, J. Geophys. Res. **100**, 26387.

- [Sicardy, 2005] Sicardy, B. (2005), *Dynamics and composition of rings*, Space Science Reviews **116**, 457.
- [Simpson et al., 1980] Simpson, J.A., T. S. Bastian, D. L. Chenette et. al. (1980), *The trapped radiations of Saturn and their absorption by satellites and rings*, J. Geophys. Res. **85**, 5731.
- [Sittler et al., 1983] Sittler Jr., E. C., K. W. Ogilvie and J. D. Scudder (1983), *Survey of low-energy plasma electrons in Saturn's magnetosphere - Voyagers 1 and 2*, J. Geophys. Res. **88**, 8847.
- [Sittler et al., 2005] Sittler Jr., E. C., R. E. Hartle, A. F. Viñas et. al. (2005), *Titan interaction with Saturn's magnetosphere: Voyager 1 results revisited*, J. Geophys. Res. **110**, A09302, doi:10.1029/2004JA010759.
- [Sittler et al., 2006] Sittler Jr., E. C., R. E. Johnson, H. T. Smith et. al. (2006), *Energetic nitrogen ions within the inner magnetosphere of Saturn*, J. Geophys. Res. **111**, A09223, doi:10.1029/2004JA010509.
- [Smith et al., 2004] Smith, H. T., R. E. Johnson and V. L. Shematovich (2004), *Titan's atomic and molecular nitrogen tori*, Geophys. Res. Lett. **31**, L16804.
- [Soderblom and Johnson, 1982] Soderblom, L. A. and T. V. Johnson (1982), *The moons of Saturn*, Scientific American **246**, 101.
- [Spahn et al., 2006] Spahn, F., J. Schmidt, N. Albers et. al. (2006), *Cassini Dust Measurements at Enceladus and*

- Implications for the Origin of the E Ring*, Science **311**, 1416.
- [Speiser, 1965] Speiser, T. W. (1965), *Particle Trajectories in a Model Current Sheet, Based on the Open Model of the Magnetosphere, with Applications to Auroral Particles*, J. Geophys. Res. **70**, 1717.
- [Spencer et. al., 2006] Spencer, J. R., J. C. Pearl, M. Segura et. al. (2006), *Cassini Encounters Enceladus: Background and the Discovery of a South Polar Hot Spot*, Science **311**, 1401.
- [Spilker et. al., 2006] Spilker, L. J., S. H. Piorz, C. Ferrari et. al. (2006), *Cassini CIRS observations of thermal differences in Saturn's main rings with increasing phase angle*. Paper presented at the 37th Lunar and Planetary Science, League City, Texas, 13-17 March 2006.
- [Stephens, 1974] Stephens, M. A. (1974), *EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons*, Journal of the American Statistical Association **69**, 730.
- [Summers and Chun-yu, 2000] Summers, D. and M. Chun-yu (2000), *Rapid acceleration of electrons in the magnetosphere by fast-mode MHD waves*, J. Geophys. Res. **105** (A7), 15887.
- [Swann, 1933] Swann, W. F. G. (1933), *Application of Liouville's Theorem to Electron Orbits in the Earth's Magnetic Field*, Phys. Rev. **44**(3), 224.

- [Van Allen, 1984] Van Allen, J. A. (1984), *Energetic particles in the inner magnetosphere of Saturn*, in **Saturn**, edited by T. Gehrels and M.S. Matthews, 281.
- [Van Allen, 1986] Van Allen, J. A. (1986), *An upper limit on shepherding satellites at Saturn's Ring G*, Progress Report Iowa Univ., Iowa City. Dept. of Physics and Astronomy.
- [Vasundhara et al., 1984] Vasundhara, R., P. Santhanam and M. Roza-rio (1984), *Possible Occultation by Saturnian Magnetospheric Ring*, IAU Circ. No. 3941, 3945.
- [Vogt et al., 1982] Vogt, R. E., D. L. Chenette, A. C. Cummings et. al. (1982), *Energetic charged particles in Saturn's magnetosphere - Voyager 2 results*, Science **215**, 577.
- [Wahlund et al., 2005] Wahlund, J. E., R. Boström, G. Gustafsson et. al. (2005), *The inner magnetosphere of Saturn: Cassini RPWS cold plasma results from the first encounter*, Geophys. Res. Lett. **32**, L20S09, doi:10.1029/2005GL022699.
- [Weidenschilling et al., 1984] Weidenschilling, S. J., C. R. Chapman, D. R. Davis et. al. (1984), *Ring particles: collisional interactions and physical nature*, in **Planetary Rings**, (eds. R. Greenberg and A. Brahic), University of Arizona Press, 367.
- [Yelle et al., 2006] Yelle, R. V., N. Borggren, V. de la Haye et. al. (2006), *The vertical structure of Titan's up-*

- per atmosphere from Cassini Ion Neutral Mass Spectrometer measurements*, Icarus **182**, 567.
- [Young et al., 2005] Young, D. T., J. J. Berthelier, M. Blanc et.al. (2005), *Composition and Dynamics of Plasma in Saturn's Magnetosphere*, Science **307**, 1262.
- [Zebker and Tyler, 1984] Zebker, H. A. and G. L. Tyler (1984), *Thickness of Saturn's rings inferred from Voyager 1 observations of microwave scatter*, Science **223**, 396.
- [Zebker et al., 1985] Zebker, H. A., E. A. Marouf and G. L. Tyler (1985), *Saturn's rings-Particle size distributions for thin layer model*, Icarus **64**, 531.



# Apéndice A

## Pruebas de hipótesis de bondad de ajuste

Una hipótesis estadística se define como una afirmación o conjetura acerca de la distribución  $f(x, \theta)$  de una o más variables aleatorias. Esta distribución puede tener uno o más parámetros desconocidos, denotados por  $\theta$  y la hipótesis se relaciona con este parámetro o conjunto de parámetros. En otros casos, se desconoce por completo la forma de la distribución y la hipótesis entonces se relaciona con una distribución específica  $f(x, \theta)$  que puede ser asignada al conjunto de datos de la muestra.

En este trabajo el problema es verificar si el conjunto de datos se puede ajustar o afirmar que proviene de una determinada distribución. Las pruebas estadísticas que tratan este problema reciben el nombre general de “*Pruebas de Bondad de Ajuste*”.

Se analizarán dos pruebas básicas que pueden aplicarse: la prueba  $\chi^2$  y la prueba de *Kolmogorov-Smirnov*. Ambas pruebas están basadas en la hipótesis nula de que no hay diferencias significativas entre la distribución muestral y la teórica:

$$H_0 : f(x, \theta) = f_0(x, \theta)$$

$$H_1 : f(x, \theta) \neq f_0(x, \theta)$$

donde  $f_0(x, \theta)$  es la distribución que se supone sigue la muestra aleatoria. La hipótesis alternativa siempre se enuncia como que los datos no siguen la distribución

supuesta. Si se desea examinar otra distribución específica, deberá realizarse de nuevo la otra prueba suponiendo que la hipótesis nula es esta nueva distribución. Al especificar la hipótesis nula, el conjunto de parámetros definidos por  $\theta$  puede ser conocido o desconocido. En caso de que los parámetros sean desconocidos, es necesario estimarlos. Para formular la hipótesis nula deberán tenerse en cuenta los siguientes aspectos o criterios:

1. La naturaleza de los datos a analizar. Por ejemplo, si se desea investigar la distribución que siguen los tiempos de falla de unos componentes, es posible pensar en una distribución exponencial, o una distribución gama o una distribución Weibull, pero no una distribución normal.
2. Histograma. La forma que tome el histograma de frecuencia es quizás la mejor indicación del tipo de distribución a considerar.

### A.0.2. Prueba $\chi^2$

La prueba  $\chi^2$  se basa en la comparación entre la frecuencia observada en un intervalo de clase y la frecuencia esperada en dicho intervalo, calculada de acuerdo con la hipótesis nula formulada. Es decir, se quiere determinar si las frecuencias observadas en la muestra están lo suficientemente cerca de las frecuencias esperadas bajo la hipótesis nula.

Para esta prueba es necesario agrupar o distribuir las observaciones de la muestra en intervalos de clase, preferiblemente del mismo tamaño. El estadístico de prueba está definido como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

donde:  $O_i$  es el total de valores que caen en el intervalo  $i$ ;  $E_i$  es el número esperado de valores en el intervalo  $i$ ,  $k$  es el número de intervalos de clase en que se distribuyen las observaciones. Cabe mencionar que las clases y las frecuencias observadas se obtienen directamente de cualquier paquete estadístico.

Si los límites del intervalo de clase  $i$  están dados por  $x_{i-1}$  y  $x_i$ , el número esperado de observaciones para ese intervalo está dado por:  $E_i = nP_i$  donde  $P_i$  representa la

probabilidad de que una observación quede en el intervalo  $i$ , de acuerdo con función de densidad que se esté analizando, y  $n$  es el número total de observaciones. La probabilidad de que una observación caiga en el intervalo  $i$  está dada por:

$$P_i = P(x_{i-1} \leq x < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_0(x, \theta) dx$$

siendo  $f_0(x, \theta)$  la función de densidad de la variable aleatoria  $X$  bajo la hipótesis nula.

En esta prueba de hipótesis se acepta la hipótesis nula si  $\chi^2 \leq \chi_{k-1-p, \alpha}^2$ , donde el valor  $\chi_{k-1-p, \alpha}^2$  representa el valor de la distribución  $\chi^2$  con  $k-1-p$  grados de libertad y un nivel de significancia  $\alpha$ .

### A.0.3. Prueba de Kolmogorov-Smirnov

En esta prueba (perteneciente a la Estadística No Paramétrica) también se está interesado en el grado de concordancia entre la distribución de frecuencia muestral y la distribución de frecuencia teórica, bajo la hipótesis nula de que la distribución de la muestra es  $f_0(x, \theta)$  y probar que no existe diferencia significativa. La prueba trabaja con la función de distribución (distribución de frecuencia acumulativa).

Sea  $F_0(x)$  la función de distribución teórica para la variable aleatoria  $X$ , y representa la probabilidad de que la variable aleatoria  $X$  tome un valor menor o igual a  $x$  (también se interpreta como la proporción esperada de observaciones que tengan un valor menor o igual a  $x$ ). Es decir:

$$F_0(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f_0(x, \theta) dx$$

Sea  $S_n(x)$  la función de distribución empírica, calculada a partir de los valores observados de la muestra de  $n$  observaciones.  $S_n(x)$  representa la proporción de valores observados que son menores o iguales a  $x$ , y está definida como:

$$S_n(x) = P(X < x | \text{resultados muestrales}) = \frac{m}{n}$$

donde  $m$  es el número de valores observados que son menores o iguales a  $x$ .

En la prueba de Kolmogorov-Smirnov se está interesado en la mayor desviación entre la función de distribución teórica y la empírica, es decir entre  $F_0(x)$  y  $S_n(x)$ , para todo el rango de valores de  $x$ . Bajo la hipótesis nula se espera que estas desviaciones sean pequeñas y estén dentro de los límites de errores aleatorios. Por lo tanto, en la prueba K-S se calcula la mayor desviación existente entre  $F_0(x)$  y  $S_n(x)$ , denotada por  $D_{max}(x)$  y está dada por:

$$D_{max}(x) = \text{Max} |F_0(x) - S_n(x)|$$

La distribución de  $D_{max}(x)$  es conocida y depende del número de observaciones  $n$ . Se acepta la hipótesis nula de que no existe diferencia significativa entre las distribuciones teóricas y empíricas si el valor de  $D_{max}(x)$  es menor o igual que el valor crítico  $D_{maxp}(\alpha, n)$ . Las propiedades más sobresalientes de esta prueba son:

- La prueba K-S puede aplicarse para tamaños de muestra pequeños, lo que no sucede con la  $\chi^2$ .
- Además, la prueba K-S es más poderosa que la  $\chi^2$ , es decir, cuando se rechaza la hipótesis nula, se tiene una mayor confiabilidad en dicho resultado.
- La prueba K-S debe usarse cuando la variable de análisis es continua. Sin embargo, si la prueba se usa cuando la distribución de la población no es continua, el error que ocurre en la probabilidad resultante está en la dirección segura. Es decir, cuando se rechaza la hipótesis nula, tenemos verdadera confianza en la decisión.

Existen otras pruebas estadísticas pero básicamente están diseñadas para demostrar normalidad en una distribución de datos muestrales. Entre ellas están las gráficas de normalidad disponibles en cualquier paquete estadístico, la prueba de Jarque-Bera, la prueba de Shapiro-Wilk y otras.

# Apéndice B

## Función de distribución logística

En teoría de probabilidad y estadística, la distribución logística es una función de densidad de probabilidad continua, simétrica y unimodal. Se deriva del trabajo de Pierre F. Verhulst sobre el modelo de crecimiento de la población en Bélgica a principios de 1800. La descripción de Verhulst sigue la función de distribución acumulada de la función logística (también conocida como “ojiva logística”). A continuación se define matemáticamente esta función y se enuncian sus propiedades más importantes.

### B.0.4. Definición matemática. La función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada

Esta función está caracterizada principalmente por dos parámetros: localización ( $\alpha$ ) y escala ( $\beta$ ). La función de densidad de probabilidad (pdf) está dada por:

$$f(X) = \frac{e^{-\frac{(X-\alpha)}{\beta}}}{\beta \left(1 + e^{-\frac{(X-\alpha)}{\beta}}\right)^2} \quad (\text{B.0.1})$$

donde  $-\infty < X < \infty$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$  y  $\beta > 0$ . Si  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , o si equivalentemente se considera la distribución de la variable  $Y$  definida como  $Y = \frac{X-\alpha}{\beta}$ , de la Ec. (B.0.1) se obtiene la forma estandarizada:

$$f(Y) = \frac{e^{-Y}}{[1 + e^{-Y}]^2} \quad (\text{B.0.2})$$

La función de distribución acumulada (cdf) se obtiene al integrar la Ec. (B.0.1):

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}} \quad (\text{B.0.3})$$

o bien,

$$F_Y(y) = \frac{1}{1 + e^{-Y}} \quad (\text{B.0.4})$$

### B.0.5. Propiedades

- Además de ser utilizada para los modelos de crecimiento -donde  $x$  representa al tiempo- esta distribución es empleada en un tipo de regresión conocida como *regresión logística* [Kleinbaum et al., 2005]. También tiene aplicaciones en los modelos de “tiempos de vida”. Algunos consideran que es inapropiado usarla en estos casos ya que el límite por la izquierda de esta función tiende a  $-\infty$ , lo cual podría resultar en modelar tiempos negativos. Sin embargo, dado que la distribución tiene una media relativamente alta y un parámetro de localización pequeño, el hecho de tener tiempos negativos no representa un problema significativo.
- La forma de esta distribución es similar a la de la distribución normal y en la práctica estas dos distribuciones no pueden distinguirse entre sí. Esta distribución tiene colas más largas que las de la distribución normal y un coeficiente de curtosis de 4.2 (la distribución normal tiene un coeficiente de curtosis de 3). Esto puede tener un gran efecto sobre el valor del cuarto momento central, pero no en la función de distribución acumulada.
- La distribución logística con valor esperado igual a cero ( $\alpha=0$ ) y varianza igual a la unidad ( $\beta=0.551329$ ), es simétrica alrededor de  $\alpha$  con puntos de inflexión en:  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\pi} \log_e(2 + \sqrt{3}) = \pm 0.726077$ ; mientras que la distribución normal estandarizada tiene los puntos de inflexión en  $x = \pm 1$ .
- La distribución de probabilidad logística está caracterizada por:

$$f(Y) = F(y)[1 - F(y)]$$

y

$$y = \log_e \left[ \frac{F(y)}{1 - F(y)} \right]$$

La simple relación explícita entre  $y$ ,  $F(y)$ ,  $f(Y)$  hace que gran parte del análisis de la distribución logística sea simple. El hecho de que el perfil de esta distribución sea similar al de la distribución normal hace posible, en ocasiones, reemplazar la normal por la logística con el propósito de simplificar el análisis sin tener grandes discrepancias con la teoría.

- Si se usa una distribución de probabilidad logística en lugar de una normal, el análisis se lleva a cabo en términos de “logits” [Berkson, 1950]. La función “logit” es el inverso de la función logística.

## B.0.6. Momentos

### B.0.6.1. Función generadora de momentos

Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue una función de distribución logística. El momento de  $X$  (alrededor de  $t$ ) se calcula a través de la función generadora de momentos dada por:

$$M_X(t) = e^{\alpha t} \Gamma[1 - \beta t] \Gamma[1 + \beta t] \tag{B.0.5}$$

donde  $-\frac{1}{\beta} < t < \frac{1}{\beta}$ . Al derivar la expresión anterior se obtienen cada uno de los momentos que se mencionan a continuación.

#### Primer momento: valor esperado o media

El primer momento alrededor del origen ( $t = 0$ ) corresponde al valor esperado (o media) y es igual al valor del parámetro de localización,  $\alpha$ :

$$E[X] = \alpha \tag{B.0.6}$$

Dado que la distribución es simétrica, la mediana y la moda también son iguales a  $\alpha$ .

**Segundo momento central: varianza**

La varianza de esta distribución es:

$$Var(X) = \frac{1}{3} (\pi \beta)^2 = \sigma^2 \tag{B.0.7}$$

Por lo tanto de la Ec. (B.0.7) se deduce que:  $\beta = 0.551329 \sigma$ . Donde  $\sigma$  es la desviación estándar asociada a la distribución.

Al comparar la varianza de la distribución normal con la de la distribución logística se observa que esta última es diferente por un factor de escala de  $\frac{\pi^2}{3}$ .

**Tercer momento central: sesgo**

El sesgo de la distribución logística es cero, reflejando su simetría.

**Cuarto momento central: curtosis**

La curtosis de la distribución logística es de 4.2, lo cual significa que la logística es una distribución leptocúrtica, es decir, es más picuda que la distribución normal.

**B.0.7. Generación de números aleatorios**

La generación de números aleatorios  $X$  con distribución logística está basada en el método de la transformación inversa [Rubinstein, 1981]. Sean  $X$  una variable aleatoria con una función de distribución acumulada (cdf) dada por la Ec. (B.0.3) y  $\xi$  un número que está uniformemente distribuido en el intervalo  $[0, 1]$ . Entonces se cumple que,  $X = F_X^{-1}(\xi)$  y que además tiene una función de distribución acumulada dada por  $F_X(x)$ . Por lo tanto:

$$1 + e^{-\frac{(X-\alpha)}{\beta}} = \frac{1}{U(0,1)}$$

$$e^{\frac{(X-\alpha)}{\beta}} = \frac{U(0,1)}{1 - U(0,1)}$$

$$X = \beta \log_e \left( \frac{U(0,1)}{1 - U(0,1)} \right) + \alpha = \beta \log_e \left( \frac{\xi}{1 - \xi} \right) + \alpha \tag{B.0.8}$$



La Ec. (B.0.8) transforma a los números  $\xi$  que están distribuidos en el intervalo  $[0, 1]$  en números aleatorios  $X$  con distribución logística.

# Apéndice C

## Método de Box-Müller para generar números aleatorios con distribución normal

La transformación de Box-Müller es un método para generar pares de números aleatorios e independientes normalmente distribuidos. Hay dos maneras para generarlos:

- Dados  $r$  y  $\varphi$  distribuidos uniformemente e independientes en el intervalo  $(0, 1]$  se calcula:

$$z_0 = \cos(2\pi\varphi) \sqrt{-2\log r} \quad (\text{C.0.1})$$

$$z_1 = \text{sen}(2\pi\varphi) \sqrt{-2\log r} \quad (\text{C.0.2})$$

Al generar los números de esta manera, se asegura que éstos se distribuyen dentro de un círculo unitario con las coordenadas polares  $(r, 2\pi\varphi)$ .

- Dados  $x$  e  $y$  distribuidos uniformemente e independientes en el intervalo  $[-1, 1]$  que cumplen con la relación  $R = x^2 + y^2$ . Si  $R = 0$  ó  $R > 1$ , se desechan y se busca otra pareja  $(x, y)$ . Entonces para esos puntos filtrados se calcula:

$$z_0 = x \sqrt{\frac{-2\log R}{R}} \quad (\text{C.0.3})$$

$$z_1 = y \sqrt{\frac{-2 \log R}{R}} \quad (\text{C.0.4})$$

Todos los puntos que han quedado después de haber sido filtrados estarán distribuidos uniformemente dentro de un círculo con las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y con  $R$  que define la distancia al origen. Este procedimiento resulta ser el más rápido porque sólo emplea una función trascendental, aún cuando desecha  $\frac{4}{\pi} - 1 \approx 0.2732$  de los números aleatorios distribuidos uniformemente por cada par de números aleatorios con distribución gaussiana.

### Generación de números aleatorios con distribución Maxwelliana

Para generar números aleatorios con distribución Maxwelliana, basta con multiplicar los números  $z_0$  y  $z_1$  calculados en las Ecs. (C.01) y (C.0.2) por un factor adecuado. Este factor se determina a partir de la equivalencia entre las distribuciones Maxwelliana y Gaussiana.

La función de distribución Maxwelliana en 1D está dada por la expresión:

$$f(v) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k_B T}} e^{\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right]} \quad (\text{C.0.5})$$

La función de distribución normal o Gaussiana es:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (\text{C.0.6})$$

Para que las Ecs. (C.0.5) y (C.0.6) sean iguales, se debe de cumplir que  $\mu = 0$  y  $\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ .

Por lo tanto, la función de distribución Maxwelliana es una función de distribución Gaussiana con parámetros  $\mu = 0$  y  $\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ .