UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"VALUACIÓN DE CANASTAS DE DERIVADOS FINANCIEROS: UNA APLICACIÓN A UNA OPCIÓN DE TIPO SPREAD"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A :

LIDYA TOVAR RETANA

TUTOR
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2007

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

División de Estudios Profesionales

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e .

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

"Valuación de Canastas de Derivados Financieros: una aplicación a una opción de tipo spread"

realizado por **Tovar Retana Lidya,** con número de cuenta **094322893,** quien opta por titularse en la opción de **Tesis** de la licenciatura en **Actuaría**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Tutor(a) Propietario	Dr.	Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L
Propietario	M. en C.	Jorge Humberto del Castillo Spindola	
Propietario	Act.	María del Rocío Elizondo Camejo	Mª E
Suplente	M. en A.P.	María del Pilar Alonso Reyes	
Suplente	Act.	Martha Trejo González	

A t e n t a m e n t e
"POR MI RAZA [illegible] ESPÍRITU"
Ciudad Universitaria, [illegible] de marzo del 2007.
EL COORDINADOR D[illegible]E TITULACIÓN
DE LA LICENC[illegible]CTUARÍA

ACT. RO[illegible]NOVAS THERIOT

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

A la memoria de mi padre y a mi madre, a quienes amo tanto.

Gracias

Índice General

Introducción

El presente trabajo tiene su ámbito en el campo de los productos derivados financieros, el cual se considera de una importancia relevante por las posibilidades que tiene el uso de los mismos. Esta materia ha venido desarrollándose con el paso del tiempo a una gran velocidad, debido a que los beneficios que pueden alcanzarse con su implementación son considerables en términos financieros y consecuentemente lo son también en las ramas relacionadas. La variedad de productos derivados que existe es inmensa, tan grande como sea el número de necesidades que tengan sus usuarios, lo cual en alguna medida complica ciertos conceptos involucrados en el trato de estos instrumentos financieros.

Uno de los puntos delicados, cuando se trata de productos derivados, es poder obtener un valor para éstos, es decir, el precio justo de dichos productos. Se habla de justo al pensar en el que involucra los conceptos que definen al derivado y no de los intereses propios de quien lo emita o venda. Partiendo de esto, el precio dependerá de las características con las que esté diseñado el instrumento financiero derivado.

A lo largo de este documento se hablará de algunas de estas características que permitirán conocer ciertos tipos de productos derivados, así como desarrollos de su valuación en diferentes alternativas, considerando principalmente modelos discretos y en menor medida, a manera de dar sólo un panorama se habla de uno de los métodos de valuación continuos.

Dentro de los tipos de derivados que se abordan, se hace énfasis en los conocidos como opciones, ya que están entre los más utilizados en el mercado por sus características generales.

Siguiendo el tema de valuación se va un paso más allá para considerar los casos en que no se habla de un derivado sino de un grupo de éstos. En este sentido se muestra de manera general la valuación de canastas de derivados, nuevamente recurriendo a los métodos usados para la valuación de un contrato financiero de sólo un derivado; el discreto y de forma superficial el continuo.

El análisis de grupos de derivados se hace sobre los contratos de las opciones. Específicamente se detallan ejemplos de canastas de opciones y más a fondo se tratan aquellas conocidas como *spreads*.

Ya dentro del estudio de valuación para el caso de canastas, se ejemplifica usando a las opciones *spread*, las cuales tienen un fuerte desarrollo en diferentes sectores como el de la energía y el agropecuario, lo cual las hace útiles más allá del tema puramente financiero, señalándolas como una herramienta en el desarrollo de otras secciones de la economía.

Como herramienta matemática que permita el ejercicio de la forma central de valuación utilizada en este trabajo, se describe y desarrolla el tema de la programación dinámica, el cual además de los usos abordados, cuenta con múltiples asignaciones en diferentes ramas, tanto científicas como sociales.

Finalmente podemos decir que la intención de elaborar este documento es llevar a un plano discreto, principalmente, el método de la valuación de productos derivados, con la idea de usarlo en los casos que se puedan adaptar a él, permitiendo así facilidad para llegar al objetivo final, que es el precio.

Capítulo 1

Particulares de los derivados financieros

Introducción

El trabajo en general tiene como tema principal a los productos financieros derivados porque se consideran una herramienta útil, que debe ser tomada en cuenta por los responsables del área financiera de cualquier institución o empresa que involucre riesgos financieros o que simplemente busque rentabilidad de su capital. En este capítulo se hace énfasis en la descripción de los productos derivados más comunes, abarcando definiciones y usos de los mismos. Además, se define y caracteriza a la extensión de estos productos derivados en su forma de canasta, presentando ejemplos, de los cuales se muestra su forma de operar. Más a detalle se trata el tema de las opciones de tipo *spread*, las cuales tienen un papel importante en este material.

1.1 Usos de instrumentos derivados: necesidades empresariales

El uso de derivados financieros se ha incrementado por la diversidad de éstos y los beneficios que se obtienen de la aplicación de los mismos. Los derivados financieros como su nombre indica son productos que derivan su valor del de otros productos financieros, a los que se les da el nombre de subyacentes. Los derivados son operaciones que se liquidan por diferencias entre el precio de mercado del subyacente y el precio pactado del mismo.

Los productos financieros surgieron en la búsqueda de eliminar la incertidumbre que generaba la fluctuación del precio de diferentes activos, financieros o no, tanto para el vendedor como para su contraparte, el comprador. La contratación de estos productos no requiere de grandes desembolsos, mientras que los beneficios o pérdidas pueden ser de gran magnitud. Por ejemplo con acciones podemos actuar de dos formas:

a) Comprando y vendiendo acciones
b) Comprando y vendiendo derechos a comprar o vender acciones a un precio pactado.

Claramente la segunda opción es más accesible que la primera, ya que la cantidad, llamada prima, que es necesaria para comprar o vender el derecho de compra o venta de una acción es mucho menor que el valor de la misma, mientras que el beneficio posible es equivalente. Esto hace que con cantidades iguales de capital podamos obtener ganancias mayores.

Otro aspecto importante es que se trata de un juego de beneficio cero. Cuando invertimos en bolsa, por ejemplo, con las operaciones más normales encontramos que cuando la bolsa sube todos ganan y cuando la bolsa baja todos pierden; en los instrumentos derivados cuando uno gana, la otra parte del mismo contrato pierde y a la inversa; las ganancias de un contratante son las pérdidas de otro.

Dirigiendo ahora nuestra atención, al uso que se hace o se puede hacer de ellos en empresas, comenzamos por comentar que ante la internacionalización de las empresas y la volatilidad en los mercados financieros, se busca un cuidadoso manejo del riesgo, siendo este aspecto cada vez más importante y necesario. En este sentido, los derivados (opciones estándar, *forwards*, futuros, *swaps*, opciones exóticas, etc.) resultan instrumentos esenciales para facilitar la cobertura de riesgos, en particular el generado por el mercado.

Las posibilidades de cobertura que se ofrecen con los productos derivados y el uso que las empresas hacen de éstas, son fundamentales en el momento de evaluar y corregir el aspecto de vulnerabilidad financiera, la cual se ha generado debido al crecimiento propio de los mercados financieros. El primer aspecto a observar sería el grado y tipo de cobertura de las empresas.

Las economías con alta volatilidad de tasas de interés y tipos de cambio, resultan el escenario que con mayor naturalidad recurrirá al uso de estos derivados como instrumentos de cobertura. Además deben agregarse los casos en que exista dolarización financiera, debido a la importancia que con este escenario adquiere la cobertura contra variaciones en el tipo de cambio.

Las decisiones de cobertura mediante este tipo de instrumentos financieros no alteran el valor de los activos de la empresa, ya que lo que se está logrando es que los inversionistas pueden cubrirse de manera más eficiente diversificando sus inversiones en el mercado. De forma contraria, lo que sucede es que al analizar el efecto de los costos por stress financiero y el método de cobertura, estas decisiones se transformen en un instrumento que incrementa el valor de la firma.

Debido a que los costos esperados de caer en stress financiero afectan negativamente el valor de la firma, la cobertura de riesgos tiene como ventaja que al reducir la varianza de los resultados, disminuye la probabilidad de stress, y como ya se había comentando, al final logra además generar valor. Al mismo tiempo, se puede conseguir que los costos de stress financiero contengan o se caractericen por un factor fijo, razón por la cual las empresas pequeñas deberían tener mayores incentivos que las grandes para evitar el stress financiero, recurriendo a un esquema de cobertura que le permita evitar el stress, al menos hasta el punto de mantenerlo fijo o en una banda de variabilidad. Es en este aspecto como entra en juego el uso de los productos derivados.

Otro punto importante es la participación o no de las empresas, mediante cotización, en la bolsa de valores. De ser activa su posición en este mercado, es muy probable que los propietarios no posean inversiones diversificadas y por lo tanto encuentren mayores incentivos al cubrirse con derivados financieros.

A los argumentos anteriores podemos agregar que en el caso de países en desarrollo con alta volatilidad en los precios de mercado, una política de cobertura permite a la gerencia enfocarse exclusivamente en el riesgo propio de su negocio y delegar el resto de los riesgos al mercado financiero.

Es importante señalar que las necesidades de cobertura de una firma no están totalmente determinadas por el número de negocios con los que cuenta, el número de países en los que opera o el tipo de producción sino que además de conocer los tipos de riesgo a que está expuesta, debemos identificar la intensidad de éstos, ya que en algunos casos podría estar cubierta de forma natural. Por ejemplo sería posible que el riesgo de tasa de interés quedara cubierto de forma directa con el financiamiento de proveedores y clientes.

A continuación se darán algunas formas de exposición al riesgo y los instrumentos que serían viables para dichos eventos.

Exposición al tipo de cambio

Para analizar las necesidades de cobertura sobre el tipo de cambio, en primer lugar es necesario definir cuál es la moneda de referencia que utilizan las empresas para evaluar y medir sus resultados. En principio, las firmas nacionales utilizarán la moneda local y las extranjeras la moneda de su país de origen o el dólar. Sin embargo, en países donde la dolarización es muy alta, las empresas nacionales en su mayoría utilizarán la moneda americana como referencia. En cualquiera de los casos, es necesario conocer el grado de desprendimiento de monedas de cada firma.

Es importante también identificar que porcentaje de sus ingresos y egresos operativos en moneda extranjera son generados en el mercado externo y cuántos en el mercado interno, lo cual en el caso de los países con dolarización representa una buena aproximación de la exposición real de tipo de cambio.

En el caso de las empresas que no utilizan derivados, se espera que la proporción de ingresos y costos en moneda extranjera no sea tan importante como en el caso de empresas que sí lo hacen, debido a que utilizar o no derivados depende directamente del nivel de exposición de la firma y existiendo los instrumentos que se requieren, no es necesario subestimar el riesgo.

Algunos métodos de cobertura para este tipo de riesgo son:

Compraventa de divisas a plazo (*Forward exchange*)

Estos contratos de tipo de cambio *forward*, generalmente son utilizados para cubrir una exposición larga, por medio de los cuales la empresa vende su divisa a plazo ajustando la cantidad y la fecha de vencimiento del *forward* con la cantidad y la fecha de vencimiento de los derechos de cobro. Estos contratos no son accesibles para vencimientos a más de uno o dos años y son aplicables únicamente para algunas monedas.

Contratos de futuro de divisas (*financial futures*)
Éste es un contrato en el que se pacta un tipo de cambio futuro por un importe preestablecido y sobre el que se establece una garantía en concepto de depósito, que está sujeta a liquidaciones diarias en relación al movimiento de los cambios. Los contratos de futuros facilitan la operatividad en un mercado bursátil. Sus limitaciones son tener que utilizar montos estandarizados, los desajustes de vencimientos y la complicación administrativa de ajuste diario.

Opciones de divisas (*currency options*)
Una opción en divisas es un derecho a comprar o vender una cantidad determinada de una moneda por otra diferente a un tipo de cambio prefijado llamado precio de ejercicio, en una fecha predeterminada que recibe el nombre de fecha de vencimiento o expiración. Estos contratos combinan las bondades de la cobertura a plazo con la posibilidad de obtener ventajas a causa de los movimientos favorables de los tipos de cambio.

Swaps de divisas (*currency swaps*)
Es un contrato de permuta financiera por el que se intercambian obligaciones de pagos y cobros en monedas distintas. Se venden mutuamente los montos principales en las divisas respectivas, en el momento de la transacción del día de inicio del contrato. Dichos montos serán recambiados, o revendidos, al vencimiento de la operación al precio spot del día inicial. Cada una de las partes permutantes transfiere a su contraparte, durante la vigencia del *swap* de divisa, los pagos por concepto de intereses de los préstamos permutados en la divisa original y en sus vencimientos respectivos.

1.2 Mercado de derivados

El mercado de derivados se caracteriza por el tipo de activos que ahí se negocian. Dichos activos financieros tienen la particularidad de que su valor está en función del comportamiento que tenga el precio de otro bien o activo, al cual se le llama subyacente. La variedad de subyacentes es basta ya que pueden ser tantos como el número de instrumentos que participan en los diferentes mercados de valores.

Cuando pensamos en la compra o venta de algún activo financiero en los otros mercados, observamos que el desembolso monetario es mayor al realizado en el mercado de derivados, ya que en éste el pago principal se realiza, si es que así es determinado por el tipo de instrumento derivado en cuestión, hasta el vencimiento del plazo establecido. Otro dato que se debe resaltar, es que los contratos emitidos en este mercado se negocian a plazo, debido a que uno de sus principales objetivos es el de cobertura de riesgo.

Los mercados de derivados pueden clasificarse de acuerdo al tipo de bien que funciona como subyacente, el primero de éstos es el de mercancías o materias primas y el segundo es el de derivados financieros.

En el caso de los derivados sobre mercancías, la operación puede implicar o no la entrega en especie al llegar el término del plazo. El inconveniente de comercializar materias primas u otro tipo de mercancías, es que implica la movilización, almacenamiento y resguardo de éstas, lo que además de provocar otros costos representa riesgos, como es el caso de los riesgos a cusa de las condiciones climatológicas. Por esta razón es que se opta por el pago, en efectivo, de la diferencia entre el precio a plazo pactado en el contrato y el precio de mercado en la fecha de vencimiento.

En el mercado de derivados financieros los activos subyacentes son intangibles, como sucede con las tasas de interés, el tipo de cambio, las canastas de divisas, las canastas de acciones o índices bursátiles. El rendimiento estará representado por la misma diferencia de precios antes señalada, la existente entre los dos precios involucrados, el pactado y el de mercado, dicho capital sólo existirá cuando las características del producto derivado y el movimiento del mercado lo generen.

El funcionamiento de los productos derivados igual que muchos otros productos negociados en los mercados bursátiles, se encuentra regulado por una serie de entidades públicas o privadas que establecen las normas de supervisión y vigilancia de los participantes, llámese demandante, oferente o intermediario.

Este tipo de productos financieros también son negociados en los mercados *over - the - counter,* lo que da una ventaja respecto a la flexibilidad que ahí se maneja. Sin embargo siempre está presente el riesgo de crédito, es decir, que el contrato no sea satisfecho por alguna de las dos partes.

1.3 Principales Derivados Financieros

Un derivado financiero es el tipo de producto que se opera en del mercado de derivados cuya principal característica es que su valor, tanto el actual como el futuro, depende de algún otro activo del mercado. El activo del cual se genera la dependencia es llamado el subyacente, dicho papel puede ser tomado por instrumentos financieros como lo son: una acción individual o una canasta de acciones, algún bien físico como el oro o la gasolina, índices como el bursátil o el inflacionario; e incluso el precio de otro derivado.

Entre los principales productos derivados encontramos opciones, futuros, *forwards* y *swaps*. Daremos una introducción a algunos de estos instrumentos, mostrando sus principales características.

Opciones

Una opción es un contrato que proporciona a su dueño el derecho de comprar o vender en un futuro, un número fijo de acciones de una empresa especificada, con un precio preestablecido y una fecha pactada. Como se mencionó dicho contrato sólo proporciona derechos y no obligaciones por parte del comprador del mismo.

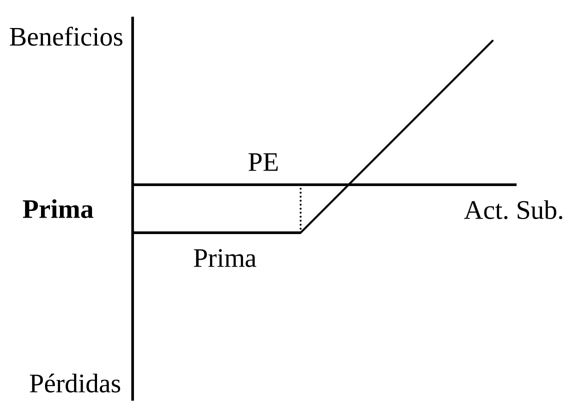
Para definir de manera más amplia una opción, mostraremos las siguientes definiciones:
Comprador o tenedor del contrato: persona interesada por pactar un precio de compra o venta de un activo en una fecha futura.
Vendedor o emisor del contrato: persona que bajo el contrato queda obligada a cumplir al comprador su derecho de compra o venta, con las características de la acción, del precio y del vencimiento, previamente pactados.
Prima: cantidad pagada por el comprador al vendedor del contrato de la opción.

Precio de ejercicio: es el costo de la acción, pactado para una fecha llamada de vencimiento, el cuál será pagado o no, según la decisión que tome el tenedor después de observar la diferencia entre éste y el precio de mercado.
Fecha de vencimiento: día establecido en el contrato, el cuál será el último del mismo y en él que se tomará la decisión por parte del comprador de ejercer o no su derecho, ya sea de compra o de venta. También se puede llamar fecha de expiración o fecha de ejercicio. En este concepto es importante mencionar que existen opciones con la característica de poder ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento, éstas reciben el nombre de opciones americanas, por lo tanto en este tipo de opciones la fecha de vencimiento no coincide con la fecha de ejercicio. Por otro lado están las tradicionales, conocidas como opciones europeas y en éstas no es posible ejercer el derecho de compra o venta antes de la fecha de vencimiento.

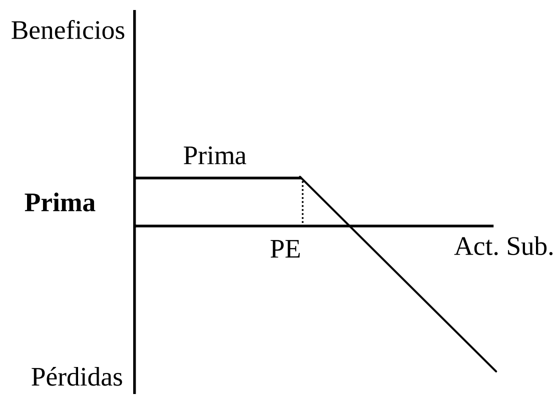
Definidos estos conceptos, contestaremos una de las preguntas básicas:
¿Cuál será la pérdida o ganancia de este contrato?

Comencemos entonces por definir la ganancia en un contrato de opciones.

Existen cuatro diferentes situaciones que pueden darse cuando hablamos de opciones:
Podemos ser compradores o vendedores del contrato, a su vez podemos adquirir el derecho de comprar o de vender, es decir, opciones de compra o de venta.
Cuando se compra una opción se dice que se está largo (*long*) y cuando se vende que se está corto (*short*). A una opción de compra se le llama *call* y a una de venta *put*. Entonces si nuestra posición es *long-call* podemos ver expresados gráficamente, el beneficio o pérdida, de la siguiente forma:



Cuando la situación sea *short-call*:



Se usará por practicidad la siguiente notación que es la usualmente utilizada en los textos:

S_T : precio de mercado en la fecha de vencimiento o también conocido como precio spot.

K : precio de ejercicio. En la gráfica aparece sólo la abreviatura PE.

Para una opción de compra, la situación que permitiría ejercerla sería cuando el precio de mercado a la fecha de vencimiento sea mayor al precio de ejercicio, esto es:

$$S_T > K .$$

Por esta razón, observamos en las gráficas que cuando el precio del activo subyacente en el mercado comienza a superar el precio de ejercicio, se notan las ganancias o las pérdidas según sea el caso de comprador o de vendedor del contrato de la opción.

La opción no se ejercerá si se da que:

$$S_T < K \,.$$

En tal caso la ganancia para la postura *short* será la prima que el comprador del contrato pagó. Para quién esté *long* lo que habrá será una pérdida pero limitada que corresponderá al monto de la prima.

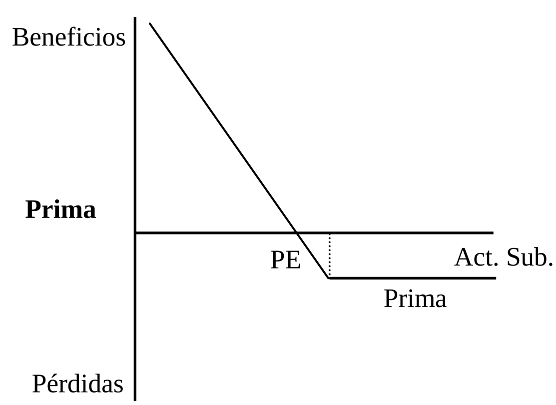
Si observamos a los participantes del contrato, podríamos definir que los beneficios para el comprador del mismo, estarán dados por:

$$Max(S_T - K \,, 0) \,,$$

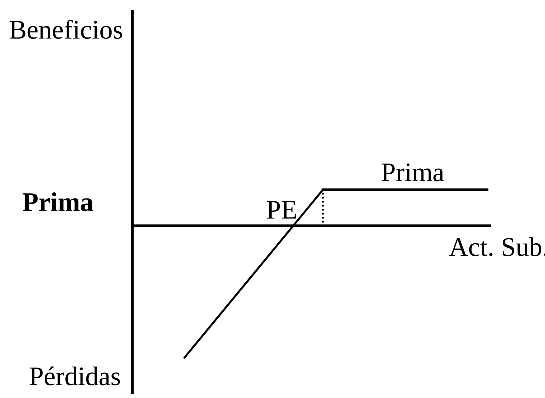
que finalmente es lo que se produce con cuando se ejerce y cuando no. El vendedor vivirá la situación inversa y su beneficio estará dado por:

$$- Max(S_T - K \,, 0\,) = Min(K - S_T \,, 0) \,.$$

Ahora veamos que sucede con la opción de venta (*put*), si el caso es *long-put*:



Si la postura es *short-put*:



Para una opción de venta, veremos que se ejercerá cuando el precio de mercado esté por debajo del precio de ejercicio, es decir cuando suceda que:

$$S_T < K .$$

Por esta causa, es que en las gráficas de beneficio y pérdida se observa como mientras el precio del subyacente se mantiene por debajo del de ejercicio, se dan los beneficios y las pérdidas, según las posturas de comprador y vendedor del contrato respectivamente.

El otro resultado sería:

$$S_T > K ,$$

situación en la cual no se ejercería el contrato porque el comprador del mismo, que es quién finalmente decide si ejercerlo o no, tendría una pérdida respecto al precio que podría encontrar en el mercado.

Entonces para el comprador del contrato según sus derechos de ejercer o no, definimos su beneficio como:

$$Max(K - S_T \ , 0\,) \,,$$

quedando así limitada la pérdida para el comprador del contrato, mientras que el monto de las ganancias será tan amplio como se alejen los precios de mercado y de ejercicio, además de la cantidad que sea invertida.

Si nos fijamos en lo que sucede con el beneficio del vendedor, obtendríamos:

$$- Max(K - S_T \ , 0\,) = Min(S_T \ - K \ , 0\,) \,.$$

Forward (Contratos adelantados)

Estos son contratos que proporcionan a su dueño la certeza de que en una fecha futura, se comprará una acción a un precio preestablecido, lo cual es una garantía.

El funcionamiento de este tipo de instrumento es el siguiente: en la fecha de expiración, el poseedor de este contrato pagará una cantidad ya establecida, llamada precio de ejercicio o precio de entrega; el emisor recibirá dicha cantidad y entregará la acción en la misma fecha.

Se observa que los conceptos de fecha de expiración y precio de ejercicio son los mismos que fueron definidos cuando hablamos de opciones, la diferencia radica en el procedimiento de los participantes de cada contrato de derivados, es por eso que en este caso utilizaremos el término precio de entrega porque ya no hay opción que ejercer sino obligación.

Para un *forward* la pérdida o ganancia se determina al expirar el contrato, y esto dependerá de lo que suceda con el precio de la acción en el mercado y lo que se haya pactado, esto es:

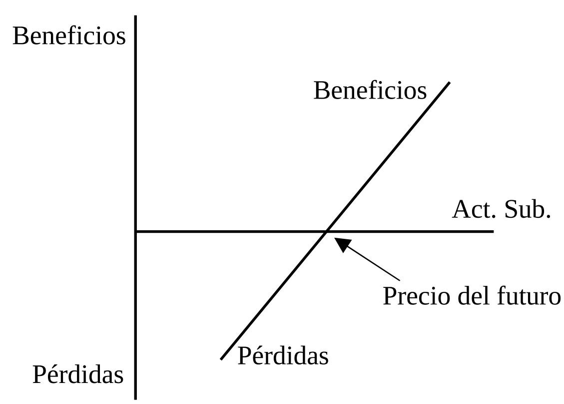
$$S_T - K \,.$$

Esta diferencia representará la pérdida o ganancia de este contrato, ya que por las características de éste, al llegar la fecha de expiración siempre será ejercido y por lo tanto existirá una obligación por parte de ambos participantes.

Una característica de los contratos llamados *Forward*, es que son contratos generalmente negociados en el mercado *over-the-counter* y además son contratos hechos a la medida, es decir, diseñados según las necesidades de los interesados.

La persona que compre el contrato a plazo adoptará la posición larga y por lo tanto tendrá el derecho de recibir en la fecha de vencimiento, el activo subyacente además de la obligación de pagar por él la cantidad preestablecida.

La gráfica de beneficio y pérdida para este contrato con una posición larga será:

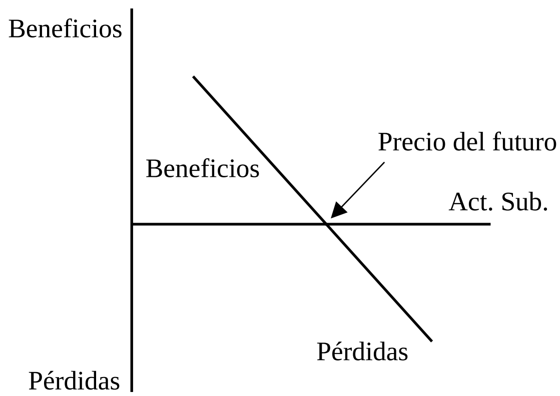


Con esta postura la ganancia estará dada por la diferencia del valor del subyacente en el mercado menos el costo del contrato:

$$S_T - K \, ,$$

en donde K será el precio de entrega.

Si la posición que observamos es la corta, es decir, nos referimos a la persona que vende el contrato, entonces la gráfica sería vista de la siguiente forma:



Aquí el beneficio será el resultado de la operación $K - S_T$, ya que la cantidad que recibe el vendedor es K y la tendrá que comparar contra el precio del mercado.

Futuros

El contrato de futuro se realiza entre dos partes interesadas en comprar o vender un número de bienes o valores en una fecha futura.

Este tipo de contratos se realizan en mercados organizados y son de tipo estandarizado. Son arreglos muy similares a los contratos adelantados ya que el interés de los participantes es prácticamente el mismo. Las diferencias se notan en ciertas características, como lo es el hecho de que los futuros son procedimientos de liquidación diaria, esto significa que el beneficio o pérdida se obtiene día a día, mientras que en el *forward* sólo se verá reflejado hasta el vencimiento.

Entonces la pérdida o ganancia se vería también reflejada por:

$$S_T - K,$$

si estamos pensando en el comprador, caso contrario sería si observamos la postura del vendedor:

$$K - S_T \,.$$

Con la diferencia, respecto de un *Forward*, que el tenedor o vendedor de este contrato tendrá el beneficio o pérdida distribuido a lo largo de los días que dure el contrato, es decir, habrá días con pérdidas y otros con ganancias.

Las gráficas de pérdida y beneficio para este contrato son las mismas que para el contrato *Forward*.

Después de haber dado las consideraciones y definiciones básicas de los productos financieros derivados, existen conceptos importantes que conviene introducir porque servirán como apoyo para el resto del trabajo.

En primer punto hablar del tipo de participantes del mercado de derivados es relevante por que son funciones diferentes pero que engloban características del mercado en sí. Se pueden clasificar en tres grandes grupos: los coberturistas, los especuladores y los que toman posturas de arbitraje.

Los especuladores realizan operaciones en el mercado apostando por la situación futura del mercado.

Los coberturistas usan los instrumentos del mercado de derivados para protegerse y reducir el riesgo que enfrentan, según su postura, ante movimientos abruptos del mercado o del sistema financiero.

Por último están aquellos quienes adoptan diferentes posiciones, las cuales cumplen con la características de compensarse unas con otras, de tal forma que el participante se asegura una ganancia. Estos participantes están tomando las oportunidades de arbitraje.

Para el caso de las opciones es conveniente hablar de tres conceptos, los que definen si una opción está dentro, en o fuera del dinero.

Los conceptos de dentro, en y fuera del dinero relacionan los dos precios importantes en los contratos de opciones, el de ejercicio y el de mercado.

De acuerdo a la propiedad de orden entre dos números reales tenemos tres relaciones posibles entre los precios:

La primera dice que uno sea mayor que el otro, en este caso cuando el precio de mercado sea mayor que el de ejercicio se dice que la opción está dentro del dinero.

La segunda define el caso contrario al anterior, entonces si el precio de mercado está por debajo del de ejercicio, se dirá que la opción está fuera del dinero.

Por último está la igualdad entre ambos precios, lo describe a la opción como una que está en el dinero.

1.4 Canastas de opciones

Las canastas de derivados financieros son también instrumentos financieros, están conformados por un conjunto de productos derivados y son estructurados según las necesidades o estrategias del inversionista.

Es posible conformar diversos arreglos de activos financieros o en su caso de derivados financieros, que se definirán por los requerimientos del inversionista.

Las canastas de derivados que han tenido más desarrollo han sido las de opciones y de ellas se tratará a continuación.

Las canastas de opciones son un instrumento financiero cuyo resultado está ligado a un conjunto de valores subyacentes. La canasta puede conformarse de cualquier cantidad de valores.

Las canastas de opciones son populares porque se liquidan en efectivo y comúnmente se usan para cubrir el riesgo de intercambio de divisas. Las canastas pueden estar relacionadas con tasas de interés, índices, valores o *commodities*. Una corporación con múltiples exposiciones al tipo de cambio, puede cubrirse usando opciones de canasta comprando una opción para cada moneda.

Estas opciones tienen las características de las opciones estándar. El comprador y el vendedor estipulan la duración de la opción, el monto de la moneda extranjera y el precio de ejercicio, el cual debe estar expresado en unidades de la moneda base. Si al término del contrato, el valor de la moneda en el mercado es menos favorable que el precio de ejercicio entonces no se ejerce, de lo contrario el dueño del contrato reclamará el precio de ejercicio.

Existen varias formas básicas de valuar canastas, en una de ellas pueden valuarse como derivados simples utilizando las fórmulas que se usan para valuar cada opción y el valor final será la suma de todos, por lo que no depende de la correlación que exista entre los componentes, aunque finalmente siempre existirá un error moderado.

El segundo procedimiento se lleva a cabo mediante el cálculo de un promedio que incluya los resultados de cada opción, utilizando la volatilidad de cada elemento y la correlación entre los componentes. El costo de una canasta de opciones puede ser significativamente menor al de múltiples contratos de opciones.

Este instrumento es ideal para los inversionistas que desean tener acceso a una región diferente a la de residencia porque como ya se ha mencionado, tendrán la oportunidad de protegerse ante las variaciones del tipo de cambio. Algunas canastas populares son: G7, G10, Europa, Asia del Pacífico, Latinoamérica.

Las ventajas de este tipo de instrumentos son:

- limitar la pérdida potencial
- balancear la exposición
- pueden ser personalizadas

Ejemplos más sofisticados de canastas de opciones son el Altiplano, Annapurna, Atlas, Everest, de los cuales se enunciarán sus características a continuación.

Altiplano

El dueño de esta opción tendrá derecho a un bono si ninguna opción de la canasta llega a uno de los límites predeterminados durante un periodo dado. De lo contrario el pago será como en un contrato de opción convencional. La ganancia o resultado que obtendría quien tuviera este contrato sería:

$$\eta Max\left(0\,,\sum_{j=0}^{n}\frac{S_j^t}{S_j^0}-K \right)+(1-\eta)C\ .$$

Donde C es el bono que se entrega al dueño de la canasta si ninguno de sus valores rebasa el límite preestablecido.

El índice que recorrerá el total de valores (n) incluidos en la canasta, es j, se tratará entonces del *j-ésimo* valor.

Respecto al tiempo, 0 será el momento inicial y otro momento será el tiempo t. El precio de ejercicio será K, por lo cual la opción se ejercerá cuando la suma de los cocientes $\dfrac{S_j^t}{S_j^0}$ supere a éste.

La variable η valuará si sucede o no la condición para el pago del bono y estará definida como:

$$\eta = \begin{cases} 1 & si\ Min_{1\le j\le n\ ,\ t_1\le t_n\le t_2}\left(\dfrac{S_j^t}{S_j^0}\right)\le L \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

Donde L es límite preestablecido que no debe ser superado para obtener el bono.

El principio y el final del periodo a prueba son t_1, t_2 respectivamente.

Annapurna

Esta opción se paga al dueño siempre y cuando ninguna de las componentes de la canasta baje de una fracción predeterminada del valor inicial durante un periodo de tiempo. Ésta es una variante de la anterior, con la diferencia de que se trata de un límite inferior en lugar de un superior, por lo cual el resultado para el poseedor de este contrato sería prácticamente el mismo.

Atlas

Es una opción de compra que al final del periodo quita algunos de los mejores y de los peores momentos de los valores en la canasta.

La ganancia para el dueño del contrato está dada por:

$$Max\left(0, \frac{1}{n-(n_1+n_2)}\sum_{j=n_1+1}^{j=n-n_2}\frac{S_j^T}{S_j^0}-K\right).$$

Donde:

K es el precio de ejercicio
n es el número de valores en la canasta
n_1, n_2 son tales que $n_1 + n_2 \prec n$

Everest

Esta opción da al dueño, al final del periodo, un pago cuando uno de los componentes de la canasta tenga un mal momento. La principal diferencia entre el Everest y los anteriores es que su duración es de 10 a 15 años y el número de componentes va de 10 a 25 valores.

La cantidad que el dueño del contrato tendrá como ganancia es:

$$Min_{i=1}\ n\left(\frac{S_i^T}{S_i^0}\right).$$

Donde:

n es el número de valores que conforman la canasta de opciones y
S_i es el i-ésimo valor.

1.5 Opciones de tipo *spread*

Incluimos el estudio de este tipo de opciones como ejemplo de canasta de derivados porque involucra a más de un derivado financiero, la razón de esto será explicada más adelante. Además son opciones que han tenido desarrollo en diferentes ámbitos económicos, lo que las propone como un buen candidato de cobertura.

Es importante señalar que no hay registro del uso de este tipo de instrumento financiero en nuestro país, debido a eso lo que aquí se describe se refiere a países con más desarrollo financiero, sobre todo respecto al uso de productos derivados en diversos campos.

Una opción *spread* se caracteriza porque lo que se tomará en cuenta ya no será únicamente un valor sino comparaciones entre diferentes valores, al menos entre dos de ellos. Respecto al tipo de opción, tendrá que ser europea porque se va a considerar que únicamente podrá ejercerse al llegar la fecha de vencimiento.

En una opción *spread* también se requiere que el dueño o comprador pague en la fecha de vencimiento un precio preestablecido, llamado precio de ejercicio, como ocurre normalmente en un contrato de opciones. El contrato de este derivado se ejercerá si para el dueño del mismo, la diferencia entre los valores del o los activos subyacentes le proporcionan un beneficio.

En este tipo de opciones las condiciones generales son las mismas, es decir, hay un comprador, un vendedor, de los cuales se supone que son agentes racionales y buscarán maximizar su beneficio mediante el conocimiento de sus posibilidades y la elección de su mejor opción.

Se considera también el no arbitraje, es decir, no será posible obtener beneficios mediante diferencias de precios de un mismo activo partiendo de cero. Esto, entre otras cosas, nos permite asegurar que en un momento dado los precios, tanto de demanda como de oferta, se igualarán y coincidirán ambas necesidades, logrando como consecuencia un mercado completo.

Sean entonces $S_1(T)$ y $S_2(T)$ los valores subyacentes del o los activos que conforman la opción *spread*. Además sea K el precio de ejercicio y T la fecha de vencimiento del contrato de la opción.

Entonces al llegar la fecha de vencimiento, el dueño de este derivado financiero obtendrá el siguiente beneficio:

$$Max((S_2(T) - S_1(T)) - K \ , 0) .$$

Observamos que ésta es una manera de describir a una opción *spread*, pero también es posible ampliar el concepto debido a que no existe restricción para el número de valores a comparar o de activos en la opción *spread*. De forma general podemos definir este tipo de instrumento financiero como una combinación lineal de un conjunto finito de índices. Para el caso de opción *spread* la característica principal que se debe conservar es la comparación entre al menos dos activos financieros.

Sea S el vector que define nuestro contrato de una opción *spread* y sean $S_1, S_2, ..., S_n$ los valores que se incluirán en la comparación que conformará el *spread*.

Tomemos un conjunto de valores $a_1, a_2, ..., a_n$ como coeficientes, tales que:

$$S = a_1 S_1 + a_2 S_2 + ... + a_n S_n = \sum_j^n a_j S_j \ .$$

Entonces el beneficio que se obtendrá en un contrato de una opción *spread*, convencional en sus características, con un número *n* de valores incluidos en el *spread*, y con un precio de ejercicio K será:

$$Max\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j S_j\right) - K\ , 0\right),$$

$$Max(S - K\ , 0).$$

Ahora, hablando específicamente, existen varios tipos de opciones *spread*, los cuales podemos enunciar de acuerdo al mercado en el que se utilizan.

Opciones *spread* en mercados de *commodities* (mercancías)

En el caso de mercados de *commodities*, hay variantes de una opción *spread*, podemos empezar por la que está definida como la diferencia entre los valores de una misma mercancía ubicada en diferentes lugares, a estos contratos se les conoce como opciones de ubicación.

Otro tipo de opciones *spread* en este mismo mercado, es el conocido como opciones de calendario porque se describe como la diferencia entre los valores, en diferentes tiempos, de una misma mercancía o *commodity*.

Otra variante son los contratos conocidos como opciones de proceso, en los cuales la diferencia observada es la que existe entre los precios de insumos y de productos, en un proceso de producción.

La última forma en este mercado es la opción de calidad, en la cual se toma la diferencia entre los valores de la misma mercancía con diferente calidad.

Opciones *Spread* en mercados de rendimiento fijo y de divisas

Las opciones *spread* son muy utilizadas en los mercados de divisas, en éstos el *spread* que se maneja es la diferencia de tasas de interés en distintos países.

El contrato derivado más común es el conocido como opción *spread* estándar de divisas cruzadas. En éste se utilizan como subyacentes a dos índices, sean Y_1

y Y_2, los cuales son tasas *swap* en monedas diferentes entre sí. El beneficio que da este instrumento financiero es para un tercer país y está dado por:

$$Max((\alpha Y_1(T) - \beta Y_2(T)) - K\ ,\ 0\ ) = (\ (\alpha Y_1(T) - \beta Y_2(T)) - K\ )^{+}\ .$$

Para simplificar la notación podemos utilizar el lado derecho de la ecuación,

donde:

K como ha sido usualmente, es el precio de ejercicio y
α , β son constantes positivas.

En mercados de renta fija, los *spread*s más líquidos son los que están basados en las diferencias existentes entre vencimientos, como es el caso de bonos con plazo menor y mayor a un año, por ejemplo podría conformarse un arreglo de este tipo entre cetes a 90 días y BREMS a tres años; otra diferencia podría ser entre la tasa LIBOR a tres meses y la misma tasa a seis meses.

También se utilizan *spreads* de diferencia en calidad, ejemplo de este tipo de contrato son las diferencias entre *treasury bills* y *eurodollars*, otro ejemplo podrían ser los bonos emitidos por el gobierno federal y los que lo son emitidos por municipios o estados.

Opciones *Spread* en mercados de futuros para la agricultura

En este mercado las opciones *spread* son usadas comúnmente en el Chicago *Board of Trade*. En este caso vamos a hablar de algunas de ellas, a las cuales se les conoce como *spreads* de soya o spreads de trituración, nombre que se le da por el proceso de producción de la soya. Los activos subyacentes que participan en este tipo de opciones son contratos de futuros de soya, de aceite de soya y de comida de soya. De éstos, la materia que aún no está refinada es la soya y los derivados son la comida y el aceite de soya. El *spread* de soya se construye restando al valor de una cantidad establecida de soya, el valor de comida y aceite de soya que se puede obtener de esa misma cantidad de soya. Para conformar este contrato y realizar los cálculos es necesario conocer tres precios, y las cantidades de comida y aceite que se pueden producir con soya.

Ejemplo
Si suponemos que con cada 60 libras de soya se producen 48 libras de comida y 11 de aceite, entonces el valor de un contrato *spread* de soya, al tiempo *t* en la moneda local por 60 libras sería:

$$((48(CS_T)+11(AS_T)-S_T)-K).$$

Donde:
S_T es el valor de un contrato de futuros de soya por 60 libras, al tiempo *t* en moneda local,
CS_T es el valor de un contrato de futuros para comida de soya por 48 libras al tiempo *t*,
AS_T es el valor de un contrato de futuros para aceite de soya por 11 libras al tiempo *t*.

En estos contratos para considerar que el arreglo de la diferencia de los precios es rentable, el costo de producción no debe exceder al valor del contrato *spread*. Estas opciones proporcionan a los participantes del mercado un indicador del margen bruto de producción y en otros casos son usados por los productores para cubrirse de posiciones en efectivo o por simple especulación.

Opciones *spread* en mercados del sector energético

En estos mercados, los inversionistas actúan al menos de dos formas, están quienes tratan de tomar ventaja de la diferencia en precios de la misma mercancía en dos diferentes fechas futuras, y los que utilizan los contratos *spread* de ubicación, quienes con el objetivo de protegerse de la exposición al riesgo de transporte o de transmisión, utilizan contratos de futuros hechos para la misma mercancía pero con diferente lugar físico de entrega, incluyendo al menos dos *commodities* o mercancías.

En los mercados de este sector los *spreads* son usados comúnmente para cuantificar el costo de producción de productos refinados derivados del material en bruto.

Los contratos más usados son los *crack spreads* o también conocidos como los documentos de refinería, y los de *spark* conocidos como los de planta.

Un *crack spread* se conforma con una venta o compra de petróleo, simultánea a otra de cualquier producto refinado derivado de éste. Esta diferencia representa el margen de refinación y se calcula con el precio del producto por barril menos el precio del crudo. Por esta razón este tipo de contrato de opción es una herramienta útil en el manejo de riesgo para las refinerías.

Para ejemplificar este *spread*, describiremos tres de los contratos más comunes. En principio se requiere contar con los cálculos diarios del precio de contratos de futuro para el petróleo crudo, para el aceite utilizado en calefacción y para la gasolina ligera. La forma de construir el *spread* es con tres contratos del crudo, dos de gasolina ligera y uno de aceite para calefacción. Es importante contar con las mismas unidades, porque lo que generalmente sucede es que para el petróleo se encuentran en barriles y para los dos productos se tienen en galones, será suficiente con tomar en cuenta que por cada barril se obtienen 48 galones.

Entonces la diferencia sería:

$$(SC)_t = \frac{2}{3}(GL)_t + \frac{1}{3}(AC)_t) - \ PC_t \, .$$

Donde, en cualquier tiempo t:

$(SC)_t$ es el valor del *spread* de *crack,*

$(GL)_t$, $(AC)_t$, $(PC)_t$ son los precios de un contrato de futuros para la gasolina ligera, el aceite para calefacción y el petróleo crudo, respectivamente.

El beneficio de este contrato para el dueño del mismo estaría dado por:

$$\left[(\frac{2}{3}(GL)_T + \frac{1}{3}(AC)_T) - \ (PC)_T) \right] - K \, .$$

Las otras dos formas del contrato *crack spread* son una combinación del primero.

El *crack spread* para gasolina ligera, se conforma con un contrato de petróleo crudo y uno de gasolina ligera, quedando el valor del *spread* y su beneficio de la siguiente forma:

$$(CSGL)_t = (\,(GL)_t - \,(PC)_t),$$

$$\left[((GL)_T - \,(PC)_T) - K\right].$$

Un caso similar es lo que resulta para el contrato del aceite para calefacción:

$$(CSAC)_t = (\,(AC)_t - \,(PC)_t),$$

$$\left[(AC)_T - \,(PC)_T) - K\right].$$

Los contratos *spark spread* son usados por las personas que participan en la conversión de algún combustible, usualmente gas natural, en electricidad; con un grado especifico de facilidad para realizarlo y el costo que esto implica.

Están definidos como la diferencia entre el precio de venta de la electricidad por parte de un generador de la misma, y el precio del combustible usado para generarla, cuidando siempre manejar las mismas unidades. Para ejemplificar conformaremos uno de estos *spread*, tomando cuatro contratos de electricidad y tres contratos de gas natural, definiendo la diferencia entre éstos. El valor y el beneficio de este *spark spread* sería:

$$(SS)_t^{4,3} = (\,4(E)_t - 3(GN)_t),$$

$$\left[(4(E)_T - \,3(GN)_T) - K\right].$$

Donde, en cualquier tiempo t:

$(SS)_t^{4,3}$ es el valor del *spark spread*. Los superíndices indican el número de contratos.

$(E)_t$, $(GN)_t$ son los precios de un contrato de futuros para electricidad y para gas natural. El subíndice T se refiere a la fecha de vencimiento.

A partir de esta forma de construir *spread*s se pueden encontrar varias combinaciones, por ejemplo, usar cinco contratos de electricidad y tres de gas natural.

Dentro de estos *spread*s, se encuentran otros en los que la diferencia que se observa es entre los precios de los futuros para la electricidad y el gas natural, pero agregando un factor de eficiencia, el cual corresponde a la planta que genera la electricidad a partir del gas natural.

Este *spread* se define de la siguiente forma:

$$S_t = F_e(t) - H_{ef} F_{gn}(t),$$

en donde $F_e(t)$, $F_{gn}(t)$ son los precios de los contratos de futuros para electricidad y para gas natural, en un tiempo t. El factor de eficiencia está representado por H_{ef}.

Entonces el beneficio en la fecha de vencimiento sería:

$$\max(((F_e(T) - H_{ef} F_{gn}(T)) - K), 0).$$

Uno de los usos más interesantes de una opción del tipo *spark*, está en permitir valuar de forma real el valor económico por generar el activo usado para producir electricidad. Esto es que la diferencia establecida, da la oportunidad al dueño de una planta generadora de electricidad de observar dos situaciones, las cuales le auxiliarán en la toma de decisiones.

Por ejemplo si el factor de eficiencia resultante de los precios spot de electricidad y de gas está por encima del factor que maneja la planta, entonces al dueño le conviene comprar gas y producir electricidad para venderla con una ganancia. En cambio si sucede lo contrario, es decir, que el factor de operación de la planta esté por encima del resultante en el mercado spot, entonces el dueño deberá detener su producción.

Capítulo 2

Valuación de derivados financieros

Introducción

En este capítulo la intención en primer lugar es utilizar el método de teoría de juegos para la valuación de derivados financieros en su forma simple, con el objetivo de extenderlo al caso de una canasta con dos derivados. Se aborda también un esquema sencillo de lo que es la aplicación de un método muy conocido, *Black-Sholes*, sin proceder a su desarrollo, pero con la misma idea que el primer método, mostrar la extensión a la valuación de una canasta con dos derivados, en este caso una opción tipo *spread*.

2.1 Valuación de derivados

2.1.1. Teoría de juegos

Hemos explicado ya el concepto de un derivado financiero, el fin ahora es valuarlo, es decir, conocer el precio al que se ofertará dicho producto financiero. Para cumplir dicho objetivo recurriremos a las herramientas matemáticas como sucede en la mayoría de los casos de valuación.

Uno de los métodos para llegar al valor de un producto derivado es el conocido como el de la teoría de juegos. El principio de esta alternativa es la eliminación de la incertidumbre en el siguiente momento de valuación, partiendo de la construcción de una cartera que consista en un derivado y a acciones, considerando una inversión libre de riesgo.

Se supondrá que el derivado se compra con un valor inicial V_0 y que venderemos una cantidad a de acciones, mismas que tendrán un precio inicial de S_0. La estructura de la cartera quedaría de la siguiente forma:

$$\pi = V_0 - aS_0 .$$

Además consideraremos que hay una relación entre el valor de la acción y el del derivado, lo cual es parte de la definición de un producto derivado financiero; en este caso en particular esa relación será directa, es decir, que ambos se moverán en la misma dirección.

Esto significa que, partiendo del hecho de que existen dos estados posibles en los que estará el valor de la acción al tiempo t, si ésta se encuentra en el estado superior denotado por S_U, entonces el valor del derivado seguirá el mismo comportamiento a la alza, encontrándose en su valor superior U. El caso o escenario contrario será cuando tengamos S_D para el valor de la acción y D para el del derivado.

<u>Valor de la acción</u> <u>Valor del derivado</u>

Para encontrar el número de acciones (a) que nos permita hacer al valor de la cartera independiente de cualquiera de los dos escenarios que sucedan, igualamos las dos posibles carteras en el periodo siguiente al inicial:

$$\pi_U = U - aS_U = D - aS_D = \pi_D ,$$

$$a = \frac{U - D}{S_U - S_D} = \frac{\Delta V}{\Delta S} .$$

Tendríamos entonces un valor inicial de la cartera: $\pi = V_0 - aS_0$

y un valor final: $\pi = U - aS_U$.

Debido a que hemos elegido una inversión libre de riesgo, llamaremos r a la tasa de rendimiento sin riesgo, la cual generalmente es sustituida por la que corresponde a los bonos emitidos por el gobierno federal. Si bien no están totalmente libres de riesgo, sí son los tienen el menor en el mercado. Con esto podremos finalmente decir que nuestro valor inicial coincide con el valor final actualizado por medio de dicha tasa r

$$V_0 - aS_0 = e^{-r\,t} (U - aS_U) .$$

De esta última igualdad podemos llegar al valor inicial del derivado:

$$V_0 = aS_0 + e^{-r\,t} (U - aS_U) .$$

2.1.2. Ejemplo numérico

Aquí podemos realizar un ejercicio que ejemplifique esta forma de llegar al valor inicial de un derivado:

Una acción está valuada en 60 pesos y en un año su precio será de 75 o 50 pesos.

La tasa libre de riesgo es de 5%

Si pensamos en un derivado con las características de una opción de venta, un precio de ejercicio de 60 pesos, entonces su valor inicial estaría dado de la siguiente forma.

Dado que eliminamos incertidumbre igualando el valor superior con el inferior, podemos definir V_0 *como:*

$$V_0 = aS_0 + e^{-rt}(D - aS_D)\,.$$

Nuestros datos serían:

$S_0 = 60$, $S_U = 75$, $S_D = 50$, $U = 0$, $D = 10$, $r = 0.05$ y $e^{-rt} = 0.9512.$

Falta encontrar $V_0 = ?$

Entonces

$$a = \frac{U - D}{S_U - S_D} = \frac{0 - 10}{75 - 50} = -\frac{10}{25} = -0.4\,.$$

y el valor inicial del derivado sería

$$V_0 = (-0.4)(60) + 0.9512(10 + 0.4(50)) = 4.536\,.$$

2.1.3. La formulación de *Black-Sholes*

Este modelo ha sido usado por mucho tiempo en el cálculo del precio de una opción, es un modelo confiable y pionero en este campo.

La idea principal de este método es replicar con una estrategia financiera, flujos de dinero desconocidos, como es el caso de una opción en su forma más simple o de cualquiera de los tipos de opción *spread* que aquí hemos visto. Con esta idea el precio de una opción en un tiempo t sería el precio de la estrategia de replica utilizada en ese mismo momento. Este razonamiento, además está estableciendo uno de los primeros supuestos del modelo, el no arbitraje y asegurando que los precios de ambos instrumentos financieros coincidirán.

En su forma original el modelo propone que el precio de una opción de compra $p(t,x)$, al tiempo t y con un índice subyacente tal que $S(t)=x$, sea la solución de la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2}+rx\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}-rp(t,x)=0\,.$$

Donde:
$p(T,x)=(x-K)^+$ será la condición final,

T representa la fecha de vencimiento de la opción,

K el precio de ejercicio,

r es la tasa de interés continua y

σ es la volatilidad del activo subyacente.

Otra forma de representar el precio de la opción $p(t,x)$ es utilizando la esperanza de los flujos de dinero en valor presente, con una estructura probabilística conocida como riesgo neutral, la cual es muy útil ya que permite complicar las características de los contratos de una opción, involucrando un mayor número de instrumentos financieros subyacentes. Con la ventaja de ser un método de solución menos complejo que el de una ecuación diferencial, sobre todo en dimensiones mayores.

Para utilizar este método, se requiere conocer el comportamiento de los activos subyacentes bajo la estructura de probabilidad del riesgo neutral. En nuestro caso se considerará el riesgo neutral mediante la tasa de interés, utilizando la que es libre de riesgo, la cual generalmente es la que proporcionan los instrumentos de bajo riesgo provenientes de un emisor confiable, como lo es el estado.

Un caso de la fórmula de *Black-Scholes* proporcionará el valor del precio de la opción p cuando $S(T)$ tenga una distribución *log-normal* bajo la medida de riesgo neutral. Este valor estaría definido como:

$$p = \mathrm{E}\left[e^{-rT}(S(T) - K)^{+}\right].$$

Donde:
r es la tasa de interés continua libre de riesgo para el periodo $(0,T)$ y e^{-rT} es el factor de descuento

Entonces la esperanza se calcularía:

$$p = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)\,,$$

con

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)e^{rT}/K)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Siendo φ la función de densidad y Φ la de distribución para una variable aleatoria normal estándar $N(0,1)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-X^2/2}, \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

La volatilidad quedará definida como la varianza del logaritmo de $S(T)$

$$\mathrm{var}\left[\ln(S(T))\right] = \sigma^2 T.$$

Un concepto importante, tanto en el desarrollo de la fórmula anterior como en muchos temas relacionados con opciones, es el conocido como paridad *call-put*.

Este concepto se puede explicar considerando que se trata de opciones europeas con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K, cuyo beneficio está definido como $(K - S(T))^+$ para el caso de un *put* y como $(S(T) - K)^+$ para el *call* con precios p' y p respectivamente, tendríamos:

$$\begin{aligned} p - p' &= e^{-rT}\mathrm{E}\left[(S(T) - K)^+\right] - e^{-rT}\mathrm{E}\left[(K - S(T))^+\right] \\ &= e^{-rT}\mathrm{E}\left[(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+\right]. \end{aligned}$$

Usando que un número real es igual a la diferencia entre sus partes positva y negativa:

$$x = x^+ - (-x)^+,$$

entonces

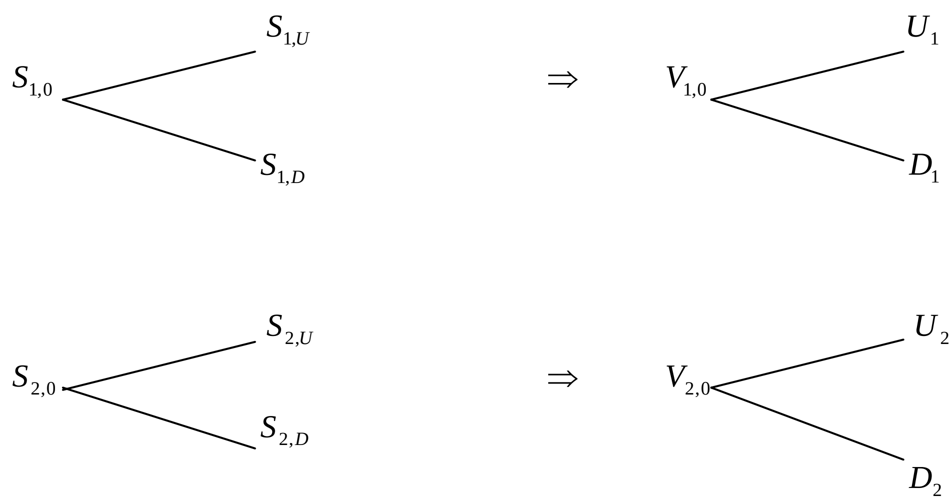
$$\begin{aligned} p - p' &= e^{-rT}\mathrm{E}\left[(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+\right] \\ &= e^{-rT}\mathrm{E}\left[S(T) - K\right] \\ &= S(0) - e^{-rT}K. \end{aligned}$$

Con este hecho se justifica que el estudio de opciones europeas sea reducido al de una opción del tipo *call*.

2.2 Valuación de canastas de derivados

2.2.1. Teoría de Juegos

Buscaremos utilizar el método de teoría de juegos que se usa para valuar el precio de un derivado, pero ahora en la valuación de canastas, considerando el caso de dos activos. Comenzaremos por conformar la cartera, la compondremos mediante la venta de acciones y la compra de dos derivados, ambos pares (derivado-acción) diferentes entre sí. Dada la consideración particular de la teoría de juegos sobre los dos escenarios posibles en el tiempo t por cada par derivado-acción, tendríamos:



Aquí:

$S_{1,0}\ ,\ S_{2,0}$:	valor inicial de ambas acciones,
$V_{1,0}\ ,\ V_{2,0}$:	valor inicial de los dos derivados,
$S_{1,U}\ ,\ S_{2,U}$:	posible valor superior de ambas acciones,
$U_1\ ,\ U_2$:	posible valor superior de los derivados,
$S_{1,D}\ ,\ S_{2,D}$:	posible valor inferior de ambas acciones,
$D_1\ ,\ D_2$:	posible valor inferior de los derivados.

A pesar de que cada activo, ya sea acción o producto derivado tiene dos estados posibles, no debemos concluir que el total de escenarios está dado por 2^4, ya que dos a dos los 4 activos están relacionados a través de los esquemas anteriores. De esta observación, describimos los 4 escenarios posibles:

Valor inicial de nuestra cartera $\quad \pi_0 = V_{1,0} + V_{2,0} - a_1 S_{1,0} - a_2 S_{2,0}$.

Escenarios posibles al tiempo t:

$$\pi_I = U_1 + U_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U}\,,$$

$$\pi_{II} = U_1 + D_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,D} ,$$

$$\pi_{III} = D_1 + U_2 - a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,U} ,$$

$$\pi_{IV} = D_1 + D_2 - a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,D} .$$

Tendríamos así un conjunto de ecuaciones, las cuales nos describen las situaciones que puede tener la cartera. Las variables a identificar, en un primer momento son a_1, a_2. Este último objetivo se cumplirá, como consecuencia de la aplicación del principio de la teoría de juegos en la valuación de derivados financieros, la eliminación de incertidumbre.

El método para eliminar la incertidumbre consiste en igualar todos los escenarios posibles. Dado que contamos con cuatro ecuaciones de escenarios distintos de la cartera, tendremos que igualar

1) $\pi_I = \pi_{II}$, 2) $\pi_I = \pi_{III}$, 3) $\pi_I = \pi_{IV}$, 4) $\pi_{II} = \pi_{III}$, 5) $\pi_{II} = \pi_{IV}$ y 6) $\pi_{III} = \pi_{IV}$.
Desarrollando los escenarios tenemos:

1) $\pi_I = \pi_{II} \quad \Rightarrow \quad U_1 + U_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U} = U_1 + D_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,D}$

$$\begin{aligned} U_2 - a_2 S_{2,U} &= D_2 - a_2 S_{2,D} \\ U_2 - D_2 &= a_2 S_{2,U} - a_2 S_{2,D} \\ U_2 - D_2 &= a_2 (S_{2,U} - S_{2,D}) \\ a_2 &= \frac{U_2 - D_2}{(S_{2,U} - S_{2,D})}. \end{aligned}$$

Esta primera equivalencia entre escenarios nos permite conocer el valor de la primera variable

$$a_2 = \frac{U_2 - D_2}{S_{2,U} - a_2 S_{2,D}} .$$

El siguiente caso de equivalencia da como resultado

$$2)\quad \pi_I = \pi_{III} \quad \Rightarrow \quad U_1 + U_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U} = D_1 + U_2 - a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,U}$$

$$U_1 - a_1 S_{1,U} = D_1 - a_1 S_{1,D}$$

$$U_1 - D_1 = a_1 S_{1,U} - a_1 S_{1,D}$$

$$U_1 - D_1 = a_1 (S_{1,U} - S_{1,D})$$

$$a_1 = \frac{U_1 - D_1}{(S_{1,U} - S_{1,D})}.$$

entonces el valor de a_1 estará representado por el cociente de las diferencias entre los valores, superior e inferior, del derivado y de la acción. Ambos resultados pueden reescribirse como:

$$a_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta S_1} \quad y \quad a_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta S_2}.$$

El caso 3) de equivalencia no proporciona información ya que sólo iguala ceros.
Los resultados del caso 4) coinciden con el caso 3).
Para el caso 5) resulta lo mismo que en el caso 2).
Finalmente el caso 6) coincide con el 1).

Después de encontrar las soluciones, debido a los supuestos de eliminación del riesgo, es posible igualar el momento inicial con el final mediante r (tasa libre de riesgo).

$$V_{1,0} + V_{2,0} - a_1 S_{1,0} - a_2 S_{2,0} = e^{-r\,t}(U_1 + U_2 - a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U}),$$

$$\left[V_{1,0} + V_{2,0}\right] = \left[a_1 S_{1,0} + a_2 S_{2,0}\right] + \left[(U_1 + U_2) - (a_1 S_{1,U} + a_2 S_{2,U})\right] e^{-r\,t}.$$

Si nombramos como π_{V_0} al valor inicial de nuestra canasta de dos derivados, tendríamos que:

$$\pi_{V_0} = \left[a_1 S_{1,0} + a_2 S_{2,0}\right] + \left[(U_1 + U_2) - (a_1 S_{1,U} + a_2 S_{2,U})\right] e^{-r\,t}.$$

2.2.2. Ejemplo para una opción de tipo *spread*

El ejemplo se basará en el caso más sencillo de una opción de tipo *spread*, el cual está definido por la diferencia entre los valores del o los activos subyacentes.

Para resolverlo mediante el método de teoría de juegos pensaremos que los dos valores que forman a la opción *spread* son precisamente los derivados que constituyen nuestra cartera.

Debido a que por definición la opción *spread* es la diferencia entre los valores, entonces no pensaremos que tenemos los dos activos sino que compramos uno y vendimos en corto el otro, razón por la cual nos seguirá afectando el comportamiento de este valor hasta la fecha de vencimiento. Esto significa que estaremos dentro del esquema de valuación desarrollado, de tal forma que nuestros valores se moverán como se muevan los valores de las acciones que conformen nuestra cartera. Será análoga la consideración que debemos hacer respecto a las acciones que de la cartera, ya que para este caso venderemos en corto a_2 y compraremos a_1.

La cartera entonces queda definida como:

$$\pi_0 = V_{2,0} - V_{1,0} + a_1 S_{1,0} - a_2 S_{2,0}.$$

Esta cartera cuenta con sus respectivos cuatro escenarios, de los cuales, por el desarrollo del método sabemos que sólo nos interesan dos igualdades de entre las 6 posibles:

$$\pi_I = U_2 - U_1 + a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U},$$

$$\pi_{II} = D_2 - U_1 + a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,D},$$

$$\pi_{III} = U_2 - D_1 + a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,U},$$

$$\pi_{IV} = D_2 - D_1 + a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,D}.$$

Desarrollo de casos para obtener las variables a_1, a_2

1) $\pi_I = \pi_{II} \quad \Rightarrow \quad U_2 - U_1 + a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U} = D_2 - U_1 + a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,D}$

$$U_2 - a_2 S_{2,U} = D_2 - a_2 S_{2,D}$$
$$U_2 - D_2 = a_2 S_{2,U} - a_2 S_{2,D}$$
$$U_2 - D_2 = a_2 (S_{2,U} - S_{2,D})$$
$$a_2 = \frac{U_2 - D_2}{(S_{2,U} - S_{2,D})}.$$

2) $\pi_I = \pi_{III} \quad \Rightarrow \quad U_2 - U_1 + a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U} = U_2 - D_1 + a_1 S_{1,D} - a_2 S_{2,U}$

$$-U_1 + a_1 S_{1,U} = -D_1 + a_1 S_{1,D}$$
$$-U_1 + D_1 = -a_1 S_{1,U} + a_1 S_{1,D}$$
$$U_1 - D_1 = a_1 (S_{1,U} - S_{1,D})$$
$$a_1 = \frac{U_1 - D_1}{(S_{1,U} - S_{1,D})}.$$

Con estos dos escenarios obtenemos los valores de las variables a_1, a_2, observamos y comprobamos que no cambiaron de los que ya conocíamos.

Por lo tanto, dada la opción *spread* definida como

$$S = V_2 - V_1,$$

cuyo rendimiento está dado por

$$Max((V_2(T) - V_1(T)) - K , 0),$$

con

K : *precio de ejercicio* y

T : *fecha de vencimiento*.

El valor inicial está dado por

$$\pi_{V_0} = (V_2 - V_1) = \left[a_2 S_{2,0} - a_1 S_{1,0}\right] + \left[(U_2 - U_1) - (a_1 S_{1,U} - a_2 S_{2,U})\right] e^{-r\,t},$$

con

$$a_1 = \frac{U_1 - D_1}{(S_{1,U} - S_{1,D})} \qquad y \qquad a_2 = \frac{U_2 - D_2}{(S_{2,U} - S_{2,D})},$$

donde:

U_i y D_i para $i = 1\,,2$, son los valores superior e inferior, respectivamente, de los activos que conforman la opción *spread*.

$S_{i,U}$ y $S_{i,D}$ para $i = 1{,}2$, son los valores superior e inferior, respectivamente, de los subyacentes.

2.2.3. La formulación de *Black-Sholes* en una opción de tipo *spread*

Este modelo fue visto en la valuación de derivados sencillos, específicamente en la valuación de opciones. En esta sección nos interesa mostrar una de sus extensiones al cálculo del precio de un derivado en el caso de canastas. Lo haremos, particularmente, con las opciones *spread*.

En el desarrollo de este método, llegamos a definir el precio de una opción como:

$$p = \mathrm{E}\left[e^{-rT}(S(T) - K)^{+}\right].$$

Considerando una tasa de interés continua libre de riesgo r, un precio de ejercicio K y a $S(T)$ como el valor del índice subyacente con distribución log-normal.

Ahora recordando la forma del beneficio obtenido en una opción *spread*, tendríamos que éste es visto como:

$$Max((S_2(T) - S_1(T)) - K\ ,0) = ((S_2(T) - S_1(T)) - K)^+ \,,$$

y el *spread* $S(T)$ definido de la siguiente forma:

$$S(T) = S_2(T) - S_1(T)\,,$$

entonces el precio de esta opción *spread*, de acuerdo a la fórmula de *Black-Scholes* que hemos revisado, sería el valor presente de la esperanza del beneficio de este contrato:

$$p = e^{-rT}\mathrm{E}\left[((S_2(T) - S_1(T)) - K)^+\right].$$

Capítulo 3

Programación dinámica

Introducción

La metodología de la programación dinámica es una aproximación a la optimización. La optimización es la tarea de encontrar la mejor solución, eligiéndola dentro de un grupo de soluciones, las cuales podrán ser del tipo viable o incluso óptimo. Los problemas de este tipo se solucionan estableciendo modelos matemáticos que los describan, las soluciones de éstos datan de mucho tiempo atrás y el desarrollo de sus teorías está relacionado con el del cálculo.

Para mediados del siglo XX la teoría de la optimización tomó una nueva dirección por el uso de las computadoras en la formulación de los modelos y en su solución, lo cual permitió ampliar el número tanto de variables como de periodos en cada uno los planteamientos. Este hecho además provocó el resurgimiento y éxito de esta teoría, la cual es utilizada en diferentes disciplinas. Es importante señalar que aunque la computación, como se dijo, ha sido un factor relevante en el desarrollo de esta teoría, cuando aquí hablamos de programación dinámica el término no está totalmente ligado a un programa de cómputo, sino a la construcción del plan de una acción, que servirá como el proceso de solución de un problema.

El término “programación dinámica” fue originalmente usado por el matemático *Richard Ernest Bellman*, quien tuvo importantes aportaciones en el tema. Viendo a la programación dinámica como el método para obtener la ruta óptima de solución de un problema, podemos además decir que el estudio de las descripciones de caminos o trayectorias de un objeto con movimiento, ha sido descrito por matemáticos reconocidos como es el caso de *Jean Bernoulli*, *Euler*, *Lagrange* y *Hamilton*.

3.1. Características del método

Como ya se ha mencionado éste es un problema de optimización. Una de las principales características de este método consiste en descomponer un problema en diferentes momentos, lo que da como resultado generar subproblemas en cada paso, los cuales se resolverán cada uno en su tiempo. Los tiempos quedarán establecidos de forma secuencial, es decir, que nos importará el orden de solución de cada subdivisión del problema en estudio.

Un modelo matemático es la representación simbólica de la relación que existe entre los factores que afectan o que definen un fenómeno, en el caso de la programación dinámica, el modelo definirá al sistema que pretendemos optimizar.

En su forma general, un sistema es descrito de la siguiente manera:

Se considera un sistema que ha sido subdividido en n momentos de evaluación.

1. Sea $D=(D_1,D_2,\ldots,D_n)$ el vector conformado por las variables de decisión en cada momento. Estas variables son aquellas que pueden ser manipuladas para alcanzar el objetivo, también se les conoce como independientes.

2. Sea $A=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ el vector de parámetros que intervienen en el sistema, es decir, que afectan el objetivo pero que no son controlables.

3. Sea R la función objetivo, la cual nos permitirá obtener el valor o la utilidad buscada, ya sea maximizando o minimizando, según sea el caso. Esta función tiene una relación con las variables de decisión y los parámetros, misma que puede representarse de la siguiente forma:

$$R = R(D, A).$$

Se supone que esta función siempre podrá ser encontrada y que se logrará con ella diferenciar entre cada variable que sea evaluada.

4. En la mayoría de los casos es posible definir una región en la cual estén contenidas las variables de estado, llamémosle S. Para las variables esto representará los límites de sus valores, entonces los valores factibles deberán estar contenidos en dicha región.

$$D \in S.$$

Podemos definir al conjunto de restricción S utilizando igualdades o desigualdades de funciones. Por ejemplo:

$$g_i(D) \left.\begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix}\right\} 0, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

A estas funciones g_i se les conoce como restricciones. A cualquier vector D que satisfaga la región factible se le llama vector de solución factible para el modelo. Entonces lo que pretendemos es encontrar una solución factible que maximice nuestro objetivo. A una solución óptima la identificaremos como D^*, la cual nos dará el mayor beneficio dentro del conjunto de soluciones factibles. Esto puede describirse como:

$$\begin{aligned} R(A) &= R(D^*, A) \geq R(D, A) \qquad D \in S \\ &= \max_D R(D, A). \end{aligned}$$

Si la función óptima $R(A)$ existe, ésta es única para cada problema aunque puede haber más de una solución óptima.

Dentro del ejercicio de optimización se pueden hacer clasificaciones respecto a varios aspectos. Una de las principales formas de diferenciar los modelos, es por el hecho de que las variables que determinen la función objetivo sean variables de decisión o también llamadas deterministas, entonces se trataría de un modelo determinista.

La otra posibilidad es que se trate de modelos definidos con variables aleatorias que no pueden ser controladas y que dependen de una distribución de probabilidad, éstos serían modelos probabilísticos o estocásticos. Los modelos deterministas son un caso especial de los probabilísticos, si se considera que las variables aleatorias que conforman el modelo pueden tomar algún valor con probabilidad 1 y 0 para el resto de los valores.

Si se clasifica de acuerdo a la temporalidad de las variables, entonces habrá modelos discretos y continuos.

Otra clasificación es la que resulta de diferenciar el tipo de ecuaciones que son usadas en el modelo, esto es si son lineales o no lineales.

Una última clasificación importante está dada por la separación de las variables, la cual genera un sistema de un estado o uno de multiestados, esto al final depende de quien esté modelando. Cuando no son separadas entonces el proceso de decisión será en un periodo y todas las decisiones serán tomadas simultáneamente. Por ejemplo en caso de un modelo determinista, con D el vector de variables de decisión, la función objetivo se vería así:

$$R(D) = R(D_1, D_2, \ldots, D_n),$$

cuando se trate de un modelo que se ha separado por periodos, sería:

$$R(D) = r_1(D_1) + r_2(D_2) + \ldots + r_n(D_n).$$

Ésta es precisamente la alternativa de clasificación que define a la programación dinámica, la cual tiene como característica que el proceso de decisión se lleva a cabo en varios estados y de forma secuencial. Dentro de esta clasificación se pueden encontrar aquellos que tienen un número finito de periodos, los cuales reciben el nombre de modelos de horizonte finito y por el contrario aquellos que de horizonte infinito. Veamos entonces a los problemas del tipo de programación dinámica, los cuales se subdividen en multiestados.

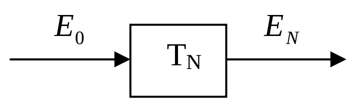
Sistemas de multiestados

Como ya se ha mencionado la programación dinámica descompone los problemas en subproblemas como método de solución de la optimización. Ya se ha hablado también de las variables de estado, mismas que definen la situación del sistema en cada momento n. Se describirá entonces la forma en que opera este mecanismo de subdivisión del sistema.

Establezcamos al vector de estado que define el momento inicial como E_0 y a E_N como el del último momento.

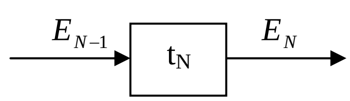
Entonces un primer objetivo sería encontrar la forma de llevar al sistema del estado inicial al final, a ésta le llamaremos transformación T_N, la cual es desconocida y cumple que:

$$E_N = T_N(E_0).$$



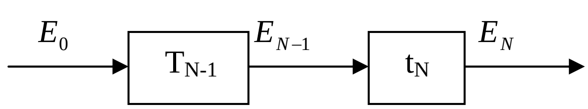
Supongamos ahora que conocemos una transformación t_N que permite cambiar de las condiciones del sistema en E_{N-1} a las del estado definido por E_N, de tal forma que:

$$E_N = t_N(E_{N-1}).$$



Esto reduciría el problema original a conocer la transformación que nos permitiera trasladarnos del momento inicial al penúltimo momento, lo cual se describiría como

$$E_{N-1} = T_{N-1}(E_0) \qquad E_N = t_N(E_{N-1}),$$
$$\Rightarrow \quad E_N = t_N(T_{N-1}(E_0)).$$



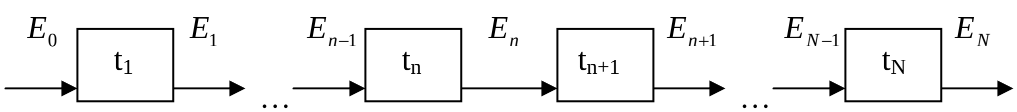
Hasta el momento el problema original se ha dividido en dos subproblemas. Es intuitivo un proceso similar para reducir la transformación T_{N-1}, incorporando en el análisis la variable de estado E_{N-2}.

$$E_N = t_N(t_{N-1}(T_{N-2}(E_0))).$$

Podríamos entonces seguir con el mismo procedimiento para llegar a describir completamente el problema original, lo que nos daría como resultado los siguientes subproblemas,

$$\begin{array}{ll}
1. & E_N = t_N(E_{N-1}), \\
2. & E_{N-1} = t_{N-1}(E_{N-2}), \\
 & \vdots \\
N-n & E_{n+1} = t_{n+1}(E_n), \\
N-n+1 & E_n = t_n(E_{n-1}), \\
 & \vdots \\
N. & E_1 = t_1(E_0),
\end{array}$$

los cuales corresponderían a $E_N = t_N(t_{N-1}(\ldots(t_{n+1}(t_n(\ldots(t_1(E_0)))))))$ y también a la siguiente forma gráfica:

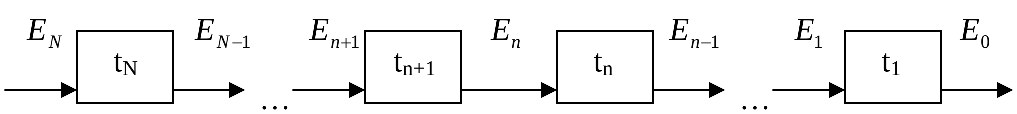


Es visible que ahora el sistema se conforma de N subproblemas, los cuales se analizan en retroceso, comenzando por el valor del estado final E_N, encontrando periodo a periodo las funciones de transformación que llevan de un estado a otro y finalmente llegando al estado inicial E_0. Este es entonces un análisis en retroceso. Con este análisis podemos concluir que dada la descripción final que encontramos de E_N y la relación $E_N = T_N(E_0)$ entonces T_N quedaría definido como:

$$T_N = t_N(t_{N-1}(\ldots(t_{n+1}(t_n(\ldots(t_1)))))).$$

Dentro de este tipo de análisis, es posible por facilidad reacomodar los índices y las etiquetas de los estados, lo que permitirá que concuerde el orden de obtención de las transformaciones con el subíndice que les corresponde. Entonces se asignaría la etiqueta E_N al estado inicial aunque en el caso del análisis este sea el último término; la etiqueta E_0 le corresponderá al estado final del sistema, pero para el análisis será el primer término por el que se empezará. Se debe notar que sólo se están modificando las etiquetas no el orden con el que se analiza el sistema. En términos gráficos y de funciones esto se vería así:

$$
\begin{array}{rl}
1. & E_0 = t_1(E_1), \\
2. & E_1 = t_2(E_2), \\
 & \vdots \\
n. & E_{n-1} = t_n(E_n), \\
n+1. & E_n = t_{n+1}(E_{n+1}), \\
 & \vdots \\
N. & E_{N-1} = t_N(E_N).
\end{array}
$$



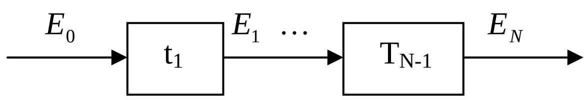
Además la relación entre las variables de estado estaría definida como:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= T_N(E_N) \\
T_N &= t_1(\dots(t_n(t_{n+1}(\dots(t_N)))))
\end{aligned}
$$

Finalmente la importancia del método radica en que, usando la descomposición del sistema en subproblemas y el análisis multiestados, se logre llegar a la solución del problema.

Es importante saber que un sistema de multiestados puede ser analizado también hacia adelante, lo cual es una alternativa en la que el principio del análisis se da en el estado E_0 y se lleva mediante las transformaciones al estado final E_N que puede describirse de la siguiente forma:

1. $E_1 = t_1(E_0),$
2. $E_N = T_{N-1}(E_1),$



La diferencia entre ambos tipos de análisis es el orden que se usa para obtener las transformaciones de un estado a otro; básicamente eso es lo que los distingue, ya que al final los dos caminos nos deben conducir al mismo resultado. Sin embargo, lo que define la importancia de mencionar a ambos es el hecho de que en el desarrollo, a pesar de que un análisis progresivo pueda ser más natural tiende a causar más conflicto para llegar al final que el que podemos encontrar en el camino de un análisis en retroceso. La elección de cada uno de ellos dependerá finalmente de quien aplique el análisis multiestado como método de solución.

Ya hemos descrito un sistema multiestado, ahora extenderemos el concepto a un sistema multiestado de decisión en serie. Se trata de un sistema compuesto por un conjunto de estados que definen al propio sistema, los cuales se encuentran ligados en serie de tal forma que la salida de uno de ellos se convierte en la entrada del siguiente. El método de análisis será en retroceso y se usará la notación que etiqueta las variables de estado, de acuerdo al orden en que se van resolviendo los subproblemas, mediante la elección de las funciones de transformación.

Para cada estado n del sistema donde $n = 1, 2, \dots, N$, la función de transformación que le corresponde es:

$$E_{n-1} = t_n(E_n, D_n).$$

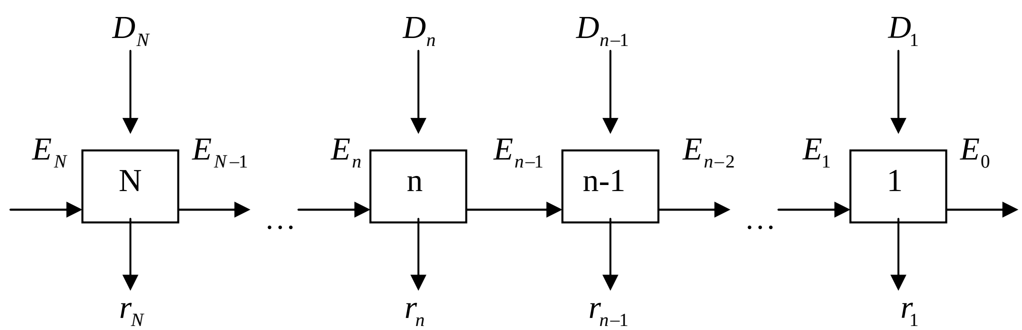
En donde E_i es la variable del estado i, t_i es la función que nos permite movernos dentro del sistema, desde la variable de estado i hasta la variable

$i-1$. La variable D_n es la que representa a la o las decisiones tomadas en el estado n.

De acuerdo a lo anterior entonces la función de rentabilidad quedará definida para cada estado n del sistema como:

$$r_n = r_n(E_n, D_n).$$

Gráficamente este sistema se vería de la siguiente forma:



Hay algunas observaciones que debemos hacer respecto al sistema.

La primera de ellas es que de acuerdo a la definición de las funciones de transformación, la variable de estado E_n depende solamente de las decisiones tomadas antes de llegar a ese estado y de la variable N - ésima, esto es, que la situación del sistema en el momento n sólo dependerá de ($D_{n+1}, \ldots, D_N$) y de E_N. Podemos mostrar este resultado con el siguiente desarrollo:

$$E_n = t_{n+1}(E_{n+1}, D_{n+1}) = t_{n+1}(t_{n+2}(E_{n+2}, D_{n+2}), D_{n+1}) = t_{n+1}(E_{n+2}, D_{n+2}, D_{n+1})$$

$$= t_{n+1}(t_{n+3}(E_{n+3}, D_{n+3}), D_{n+2}, D_{n+1}) = \ \ldots \ = t_{n+1}(E_N, D_N, \ \ldots, D_{n+2}, D_{n+1}).$$

De lo anterior se puede concluir que la función de rentabilidad o rendimiento para cada estado n, sólo dependerá del conjunto de decisiones $(D_n, D_{n+1}, \ldots, D_N)$ y de E_N. Se justifica con lo siguiente:

$$\begin{aligned} r_n &= r_n(E_n, D_n) = r_n(t_{n+1}(E_N, D_N, \ldots, D_{n+1}), D_n) \\ &= r_n(E_N, D_N, \ldots, D_{n+1}, D_n). \end{aligned}$$

Esto también implica que la decisión del estado n (D_n) sólo afecta la función de rendimiento para los estados $1, 2, \ldots, n$.

La siguiente observación se refiere a la función total de rentabilidad R_N, la cual por supuesto acumula desde el estado 1 hasta el N, ésta puede describirse con lo que sigue:

$$\begin{aligned} R_N &= R_N(E_N, E_{N-1}, \ \ldots\ldots \ , D_N, D_{N-1}, \ \ldots\ldots \ , D_1) \\ &= g\left[r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots\ldots, r_1(E_1, D_1)\right]. \end{aligned}$$

Recordando una de las observaciones anteriores, sabemos que el conjunto de variables de estado $(E_{N-1}, E_{N-2}, \ldots, E_1)$ puede ser eliminado de las funciones individuales de rentabilidad, tendríamos entonces que la función total de rendimiento sería:

$$\begin{aligned} R_N &= R_N(E_N, D_N, D_{N-1}, \ldots\ldots, D_1) \\ &= g(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_N, D_N, D_{N-1})), \ \ldots\ldots \ , r_1(E_N, D_N, D_{N-1}, \ldots, D_1). \end{aligned}$$

Finalmente se observa que en el estado inicial del problema de optimización, en nuestro caso etiquetado con el nombre de estado *N*, la intención es maximizar la función de rendimiento R_N sobre las variables de decisión $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Esto es lo mismo que encontrar la función óptima de rendimiento, correspondiente al estado inicial E_N.

Si a esta función de máximo rendimiento del estado N la definimos como:

$$f_N(E_N).$$

además a la decisión y estado óptimos los describimos de la siguiente forma:

$$D_n^* = D_n(E_N) \text{ y } E_n^* = t_n(E_N).$$

Entonces conseguiríamos describir más formalmente a $f_N(E_N)$:

$$f_N(E_N) = g(r_N(E_N, D_N^*), r_{N-1}(E_{N-1}^*, D_{N-1}^*), \ldots\ldots, r_1(E_1^*, D_1^*))$$

$$= \max_{D_N, \ldots D_1} g\left[r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots\ldots, r_1(E_1, D_1)\right],$$

$$sujeto \;\; a \;\; E_{n-1} = t_n(X_n, D_n) \qquad n = 1,2, \ldots, N,$$

o también

$$f_N(E_N) = g(r_N(E_N, D_N^*), r_{N-1}(E_N, D_N^*, D_{N-1}^*), \ldots\ldots, r_1(E_N, D_N^*, \ldots, D_1^*))$$

$$= \max_{D_N, \ldots, D_1} g\left[r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_N, D_N, D_{N-1}), \ldots\ldots, r_1(E_N, D_N, \ldots, D_1)\right].$$

Si pensamos en elegir alguna de las dos definiciones para solucionar nuestro problema de optimización, lo primero sería optar por la que maneja un menor número de variables, que es la segunda. Sin embargo la primera definición puede subdividirse en N problemas de optimización y cada uno de ellos sólo involucraría una variable de estado, lo cual simplificaría cada subproblema. Nuevamente queda a criterio de quien esté resolviendo el problema.

<u>Método de división en subproblemas</u>

Aquí presentaremos la forma en que podemos subdividir en N subproblemas al sistema, utilizando suma de rendimientos de cada estado:

$$f_N(E_N) = \max_{D_N, \ldots, D_1} g\left[r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1)\right],$$
$$sujeto \;\; a \;\; E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2,\ldots, N \,.$$

Primero definiremos una característica de la función g, la cual dice:

$$g(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1))$$
$$= r_N(E_N, D_N) + r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) + \ldots + r_1(E_1, D_1).$$

Eso implicaría que

$$f_N(E_N) = \max_{D_N,\ldots,D_1} (r_N(E_N, D_N) + r_{N-1}(E_N, D_N, D_{N-1}) + \ldots + r_1(E_N, D_N, \ldots, D_1),$$
$$sujeto \quad a \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad\qquad n = 1,2,\ldots,N.$$

Si recordamos dos hechos importantes:

- La rentabilidad del estado N no depende de $D_{N-1}, D_{N-2}, \ldots, D_1$.
- Para cualquier función real valuada en ciertos puntos, se cumple que:

$$\max_{u_1,u_2} (h_1(u_1) + h_2(u_1,u_2)) = \max_{u_1}(h_1(u_1) + \max_{u_2} h_2(u_1,u_2)),$$

entonces podríamos describir a la función $f_N(E_N)$ así:

$$f_N(E_N) = \max_{D_N}(r_N(E_N, D_N) + \max_{D_{N-1},\ldots D_1}(r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) + \ldots + r_1(E_1, D_1))),$$
$$sujeto \quad a \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \quad con \quad n = 1,2,\ldots,N.$$

Con esta definición damos un primer avance en la descomposición del sistema. Ahora podemos considerar la descripción de un estado anterior a N

$$f_{N-1}(E_{N-1}) = \max_{D_{B-1},\ldots,D_1}(r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) + r_{N-2}(E_{N-2}, D_{N-2}) + \ldots + r_1(E_1, D_1)),$$

por lo que

$$f_N(E_N) = \max_{D_N}(r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(E_{N-1})),$$
$$sujeto \quad a \quad E_{N-1} = t_N(E_N, D_N) \quad con \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

o

$$f_N(E_N) = \max_{D_N}(r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(t_N(E_N, D_N))).$$

Ahora, si hacemos que

$$Q_N(E_N, D_N) = r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(t_N(E_N, D_N)),$$

entonces determinar a $f_N(E_N)$ y a $D_N^{*} = D_N(E_N)$, dada $f_{N-1}(E_{N-1})$, se simplifica hasta el punto en que tenemos un problema de un estado de optimización inicial con la variable inicial E_N, la variable de decisión D_N y rendimiento Q_N, de tal forma que

$$f_N(E_N) = \max_{D_N} Q_N(E_N, D_N) .$$

Esto significaría que hemos reducido el problema inicial de N a dos problemas de optimización.

El primero es un sistema de $N-1$ estados

$$\begin{aligned} & f_{N-1}(E_{N-1}) = \max_{D_{B-1},\ldots,D_1} (r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) + r_{N-2}(E_{N-2}, D_{N-2}) + \ldots + r_1(E_1, D_1)) \\ & \textit{sujeto a} \;\; E_{n-1} = t_n(E_n, D_n), \;\; n = 1,2, \ldots, N-1 \end{aligned}$$

y el segundo problema de optimización de un estado

$$\begin{aligned} f_N(E_N) &= \max_{D_N} Q_N(E_N, D_N) \\ &= \max_{D_N} (r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(t_N(E_N, D_N))). \end{aligned}$$

Podemos entonces repetir este paso aplicándolo a $f_{N-2}(E_{N-2}),\ f_{N-3}(E_{N-3}),\ldots$ $\ldots, f_2(E_2)$, tal como se hizo con $f_N(E_N)$, logrando descomponer el problema original en N problemas de optimización iniciales de un sólo estado.

1. $f_1(E_1) = \max_{D_1} Q_1(E_1, D_1) = \max_{D_1}(r_1(E_1, D_1)),$

$\vdots$

n. $f_n(E_n) = \max_{D_n} Q_n(E_n, D_n) = \max_{D_n}(r_n(E_n, D_n) + f_{n-1}(t_n(E_n, D_n))),$

$\vdots$

$N.$ $f_N(E_N) = \max_{D_N} Q_N(E_N, D_N) = \max_{D_N}(r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(t_N(E_N, D_N))).$

Resumiendo lo anterior podemos redefinirlo

$$f_n(E_n) = \max_{D_n} Q_n(E_n, D_n), \qquad n = 1,2, \dots , N$$

$$Q_n(E_n, D_n) = r_n(E_n, D_n), \qquad n = 1$$

$$= r_n(E_n, D_n) + f_{n-1}(t_n(E_n, D_n)), \qquad n = 2, \dots , N.$$

Se han enmarcado estos resultados debido a que finalmente llegamos a las ecuaciones que representan a la programación dinámica, mediante la solución recursiva que empieza en $n = 1$ hasta llegar a $n = N$, la función óptima de rendimiento del estado N nombrada $f_N(E_N)$, la decisión óptima $D_N^* = D_N^*(E_N)$ y las funciones de decisión $D_n = D_n(X_n)$ con $n = 1,2, \dots , N-1$.

Especificando algunos resultados que son consecuencia del anterior podemos decir que si buscamos la función óptima de entrada del estado E_N^*, sólo deberíamos resolver

$$f_N(E_N^*) = \max_{E_N} f_N(E_N).$$

Para encontrar el resto de las decisiones y estados óptimos como función de E_N, lo haríamos así

$$E_{N-1}^* = t_N(E_N, D_N^*) = t_N(E_N, D_N(E_N)) = t_N(E_N)$$

y

$$D_{N-1}^* = D_{N-1}(E_{N-1}^*) = D_{N-1}(t_N(E_N, D_N^*)) = D_{N-1}(E_N).$$

Si nos interesará realizar el análisis recursivo en forma invertida, es decir, de $n = N-1, \dots , 1$, usaríamos las siguientes relaciones

$$E_{n-1}^* = t_n(E_n, D_n^*) = t_n(E_N) \qquad y \qquad D_{n-1}^* = D_{n-1}(E_{n-1}^*) = D_{n-1}(E_N).$$

Optimización Terminal

A la elección por maximizar la función de salida del momento final se le conoce como optimización terminal, la cual es un caso especial de la maximización de la suma de los rendimientos en cada estado del sistema. Esto se describe de la siguiente forma:

$$f_N(E_N) = \max_{D_N \ldots . D_1} g(E_0),$$
$$sujeto \;\; a \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2, \ldots, N.$$

Luego, definiendo

$$r_N(E_N, D_N) = r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) = \ldots = r_2(E_2, D_2) = 0$$

y

$$r_1(E_1, D_1) = g(t_1(E_1, D_1)) = g(E_0),$$

entonces

$$r_N(E_N, D_N) + \ldots + r_1(E_1, D_1) = g(E_0),$$

esto implicaría que

$$f_N(E_N) = \max_{D_N \ldots . D_1} g(E_0) = \max_{D_N \ldots . D_1} (r_N(E_N, D_N) + \ldots + r_1(E_1, D_1)),$$
$$sujeto \;\; a \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2, \ldots, N.$$

Entonces hasta el momento tenemos dos resultados para f_N que corresponden con los dos métodos, podemos enseguida mostrar cómo existe un vínculo entre éstos. En el caso de

$$f_N(E_N) = \max_{D_N \ldots . D_1} \sum_{n=1}^{N} r_n(E_n, D_n),$$
$$sujeto \;\; a \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2, \ldots, N.$$

podríamos reescribirlo como un problema de optimización terminal, de la siguiente forma:

$$y_N = 0 \quad \text{y} \quad y_n = \sum_{k=n+1}^{N} r_k(E_k, D_k), \qquad n = 0,1,\dots, N-1,$$

de aquí se desprende que

$$y_0 = \sum_{n=1}^{N} r_n(E_n, D_n) \quad \text{y} \quad y_{n-1} = y_n + r_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,\dots, N,$$

eso nos lleva a

$$\begin{aligned} & f_N(E_N) = \max_{D_N \dots D_1} y_0, \\ & \textit{sujeto a} \quad E_{n-1} = t_n(E_n, D_n), \\ & \textit{con} \qquad y_{n-1} = y_n + r_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2,\dots, N. \end{aligned}$$

Podemos entonces decir que es posible convertir un problema de maximización de la suma de los rendimientos de cada estado en otro de optimización terminal y viceversa.

3.2 Fórmula General

En este momento se busca llegar a una generalización del proceso de descomposición. Comencemos entonces con

$$\max_{D_N,\, D_{N-1},\, \dots,\, D_1} \quad g(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \dots, r_1(E_1, D_1)),$$

para iniciar el proceso de subdivisión del sistema, lo primero que haremos será comenzar con un sistema de dos fases o estados. Un resultado fundamental en el desarrollo será la condición de derivación de Mitten[1].

---

[1] L.G. Mitten, "Composition Principles for synthesis of Optimal Multistage Processes", Operations Research, 12, 610-619 (1964)

Sea

$$f_2(E_2) = \max_{D_2, D_1} g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_1, D_1)),$$
$$sujeto\ \ a\ \ E_1 = t_2(E_2, D_2),$$

sustituyendo E_1 tenemos

$$f_2(E_2) = \max_{D_2, D_1} \quad g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1)) .$$

Sea

$$f_2^{'}(E_2) = \max_{D_2} \ (g(r_2(E_2, D_2), \max_{D_1} r_1(E_2, D_2, D_1))) .$$

Sabemos que por definición un máximo cumple que $f_2^{'}(E_2) \leq f_2(E_2)$, de esto el caso que nos interesaría sería el de igualdad entre ambos. Una condición que nos permitiría asegurar esto sería que g fuera una función monótona creciente de r_1 para cada valor de r_2. Entonces por monotonía tenemos que:

$$r_1(E_2, D_2, D_1^{'}) \geq r_1(E_2, D_2, D_1^{''}) \quad considerando\ \ E_2, D_2 \quad fijos ,$$

entonces

$$g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1^{'})) \geq g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1^{''})) ,$$

pero si además consideramos que para cada valor de E_2 y D_2 sucede que

$$r_1(E_2, D_2, D_1^{*}) = \max_{D_1} r_1(E_2, D_2, D_1) \geq r_1(E_2, D_2, D_1) ,$$

así que de lo anterior, de la monotonía y considerando fijos a E_2, D_2 tenemos

$$g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1^{*})) \geq g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1)) ,$$

para todos los valores de D_1, en particular esto implica que el máximo con respecto a D_1 cumpla que

$$g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1^{*})) \geq \max\, g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1)) ,$$

lo cual tiene como consecuencia que

$$f_2^{'}(E_2) = \max_{D_2} \; g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1^*))$$
$$\geq \max_{D_2} \max_{D_1} g(r_2(E_2, D_2), r_1(E_2, D_2, D_1)) = f_2(E_2)$$
$$\Rightarrow \quad f_2^{'}(E_2) \geq f_2(E_2).$$

Por la condición de máximo sabíamos que

$$f_2^{'}(E_2) \leq f_2(E_2)$$

$$\Rightarrow \qquad f_2^{'}(E_2) = f_2(E_2)\,.$$

Con esto se muestra que si g es una función monótona creciente de r_1 para cada r_2, entonces la maximización respecto a D_1 se puede cambiar en la forma antes vista sin perder la solución óptima.

La siguiente condición necesaria para descomponer el sistema en N fases es la posibilidad de separación del mismo. Las condiciones de monotonía y de separación nos llevarán a la descomposición en fases del problema.

1. Si el sistema es separable entonces se cumple

$$g(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1))$$
$$= g_1(r_N(E_N, D_N)), g_2(r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1))) \qquad g_1, g_2 : \Re \to \Re.$$

2. Cuando un sistema presenta monotonía, se refiere al hecho de que g_1 sea monótona creciente de g_2 para cada valor de r_N .

3. Entonces la descomposición se caracterizaría por

$$\max_{D_N,\, D_{N-1}, \ldots,\, D_1} \quad g(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1))$$
$$= \max_{D_N} \; g_1(r_N(E_N, D_N), \quad \max_{D_{N-1}, \ldots,\, D_1} g_2(r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \ldots, r_1(E_1, D_1))).$$

Una demostración, como la que se desarrollo para dos estados, utilizando monotonía y separación, permite concluir que si un problema satisface la posibilidad de separación y la condición de monotonía entonces es posible descomponerlo en N subproblemas. A los que cuentan con estas características se les conoce como problemas con posibilidad de descomposición.

Podemos ver qué sucede en el caso de las sumas de los rendimientos de los estados, respecto a las condiciones de monotonía y de separación. Sabemos que

$$g(r_N, r_{N-1}, \ldots, r_1) = r_N + r_{N-1} + \ldots + r_1 .$$

Si definimos

$$g_2(r_{N-1}, r_{N-2}, \ldots, r_1) = r_{N-1} + r_{N-2} + \ldots + r_1 ,$$

entonces

$$g_1(r_N,\, g_2(r_{N-1}, \ldots, r_1)) = r_N + g_2(r_{N-1} + \ldots + r_1) ,$$

incluso si

$$r_{N-1}^{'} + \ldots + r_1^{'} \geq r_{N-1}^{''} + \ldots + r_1^{''}$$
$$\Rightarrow\; r_N + r_{N-1}^{'} + \ldots + r_1^{'} \geq r_N + r_{N-1}^{''} + \ldots + r_1^{''} \qquad \forall\, r_N .$$

Por lo tanto se cumple la monotonía y separación de los problemas de adición de los rendimientos de los estados, lo que implica que éstos puedan ser descompuestos en subproblemas.

Un resultado importante es el que se usa para comprobar la monotonía y la capacidad de separación de las funciones de rendimiento total, mediante "$\circ$" un operador de composición.

Para describir la condición de separación, se considera el rendimiento total para las funciones de tipo:

$$\begin{aligned} R_N &= r_N(E_N, D_N) \circ r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) \circ \ldots \circ r_1(E_1, D_1) \\ &= r_N(E_N, D_N) \circ R_{N-1}, \end{aligned}$$

donde

$$R_{N-1} = r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) \circ \ldots \circ r_1(E_1, D_1) .$$

La intención de utilizar el operador "$\circ$" es que éste determine condición de separación, lo que significa que la expresión $R_N = r_N \circ R_{N-1}$ implica

$$R_N = g(r_N, r_{N-1}, \dots, r_1) = g_1(r_N, g_2(r_{N-1}, \dots, r_1)).$$

Además de la suma, el operador puede interpretarse como la multiplicación de los rendimientos de los estados de un sistema. Veamos como se ve en este tipo de aplicación la monotonía y la posibilidad de separación.

Sea

$$R_N = r_N(E_N, D_N) \circ r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) \circ, \dots, \circ\, r_1(E_1, D_1),$$

se supone que $r_n(E_n, D_n)$ está definida en un rango contenido en $\Re^+$, entonces si $R'_{N-1} \geq R''_{N-1}$, tenemos

$$R'_N = r_N(E_N, D_N) \circ R'_{N-1} \geq r_N(E_N, D_N) \circ R''_{N-1} = R''_N, \qquad \forall\, r_N \in \Re^+.$$

Si la condición de no negativo se eliminara, la composición vista como multiplicación no nos permitiría maximizar la función original optimizando sobre d_1. Un ejemplo sería

$$r_1 = D_1, \quad r_2 = E_2 D_2, \quad g(r_2, r_1) = E_2 D_2 D_1, \qquad E_2 \geq 0,$$
$$f_2(E_2) = \max_{\substack{a_1 \leq D_1 \leq b_1 \\ a_2 \leq D_2 \leq b_2}} E_2 D_2 D_1 \qquad a_1, b_1 > 0 \quad a_2, b_2 < 0.$$

La solución sería $d_1 = a_1$, $d_2 = a_2$, $f_2(e_2) = e_2 b_2 a_1$ pero el resultado final no cumpliría con el máximo de la función original, primero sobre d_1

$$\max_{a_2 \leq d_2 \leq b_2} ((E_2 D_2) \circ \max_{a_1 \leq d_1 \leq b_1} D_1) = \max_{a_2 \leq d_2 \leq b_2} E_2 D_2 b_1 = E_2 D_2 b_1.$$

La última interpretación del operador de composición es maximizar el valor mínimo de una secuencia de funciones. Definamos a R_N como

$$R_N = \min(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \dots, r_1(E_1, D_1)),$$

entonces el rendimiento óptimo se definiría

$$f_N(E_N) = \max_{D_N, \dots, D_N} (\min(r_N(E_N, D_N), r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \dots, r_1(E_1, D_1))),$$
$$\textit{sujeto a } E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2, \dots, N,$$

debido a que $\min\ (r_N, R_{N-1}{}^{'}) \geq \min\ (r_N, R_{N-1}{}^{''}) \qquad \forall\ r_N$,

entonces, si $R_{N-1}{}^{'} > R_{N-1}{}^{''}$ es posible descomponer el problema de la siguiente forma:

$$f_N(E_N) = \max_{D_N} (\min(r_N(E_N.D_N), \max_{D_{N-1}, \dots, D_1} (r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}), \dots, r_1(E_1, D_1)))).$$

Finalmente, mediante el uso del operador de la composición se puede llegar a las ecuaciones recursivas. Se define la función

$$f_N(E_N) = \max\ (r_N(E_N, D_N) \circ \dots \circ r_1(E_1, D_1))$$
$$\textit{sujeto a } E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1, \dots, N$$

Suponiendo monotonía, la maximización respecto a $D_{N-1}, D_{N-2}, \dots, D_1$ sería

$$f_N(E_N) = \max_{D_N} (r_N(E_N, D_N) \circ \max_{D_{N-1}, \dots, D_1} (r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) \circ \dots \circ r_1(E_1, D_1))),$$
$$\textit{sujeto a } E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1, \dots, N.$$

Entonces si

$$f_{N-1}(E_{N-1}) = \max_{D_{N-1}, \dots, D_1} (r_{N-1}(E_{N-1}, D_{N-1}) \circ \dots \circ r_1(E_1, D_1)),$$

tendríamos

$$f_N(E_N) = \max_{D_{N-1}, \dots, D_1} (r_N(E_N, D_N) \circ f_{N-1}(E_{N-1})),$$
$$\textit{sujeto a } E_{N-1} = t_N(E_N, D_N).$$

Ahora, definiendo $Q_N(E_N, D_N) = r_N(E_N, D_N) \circ f_{N-1}(t_N(E_N, D_N))$,
entonces

$$f_N(E_N),$$

es un problema de optimización en un estado

$$f_N(E_N) = \max_{D_N} Q_N(E_N, D_N).$$

Utilizando el mismo proceso de descomposición para $f_{N-1}(E_{N-1}), \ldots, f_1(E_1)$ obtenemos las ecuaciones del proceso en retroceso o recursivo:

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(E_n) &= \max_{D_n} Q_n(E_n, D_n), && n = 1,2, \ldots, N \\ Q_n(E_n, D_n) &= r_n(E_n, D_n), && n = 1 \\ &= r_n(E_n, D_n) \circ f_{n-1}(t_n(E_n, D_n)). && n = 2, \ldots, N \end{aligned}}$$

<u>Problema de optimización de tres estados</u>

Con la intención de dar un primer ejemplo de programación dinámica, aterrizaremos la teoría antes descrita. Sea un problema de minimización, formalmente descrito:

$$\begin{aligned} &\min imizar \;\; r_1(E_1, D_1) + r_2(E_2, D_2) + r_3(E_3, D_3), \\ &sujeto \;\; a \;\; E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \qquad n = 1,2,3. \end{aligned}$$

En este ejemplo de un problema de tres estados se tratará el siguiente ejercicio de adición

$$\begin{aligned} &\min imizar \;\; D_1^2 + D_2^2 + D_3^2, \\ &sujeto \;\; a \;\; D_1 + D_2 + D_3 \geq K, \qquad K > 0, \quad D_1, D_2, D_3 \geq 0, \end{aligned}$$

para incorporar las variables de estado, E_1, E_2, E_3 definimos que

$$E_3 \geq K, \quad E_2 = E_3 - D_3, \quad E_1 = E_2 - D_2, \quad E_0 = E_1 - D_1.$$

Sumando estas ecuaciones se ve que son equivalentes a $D_1 + D_2 + D_3 \geq K - E_0$, lo que implica que para ser congruentes basta con hacer $E_0 = 0$ o $E_1 = D_1$. Luego, dado que $D_1 = E_1 \geq 0$ implica que $D_2 \leq E_2$ y de forma similar $D_3 \leq E_3$. Con estos resultados podemos reescribir el problema

$$\begin{aligned} &\min imizar \quad D_1^2 + D_2^2 + D_3^2, \\ &sujeto \;\; a \quad E_1 = E_2 - D_2 \qquad\qquad D_1 = E_1 \geq 0, \\ &\qquad\qquad\;\; E_2 = E_3 - D_3 \qquad\qquad 0 \leq D_2 \leq E_2, \\ &\qquad\qquad\;\; E_3 \geq K, \qquad\qquad\qquad 0 \leq D_3 \leq E_3. \end{aligned}$$

Formalmente sería

$$r_n(E_n, D_n) = D_n^2,$$

$$E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) = E_n - D_n \qquad n = 1,2,3$$

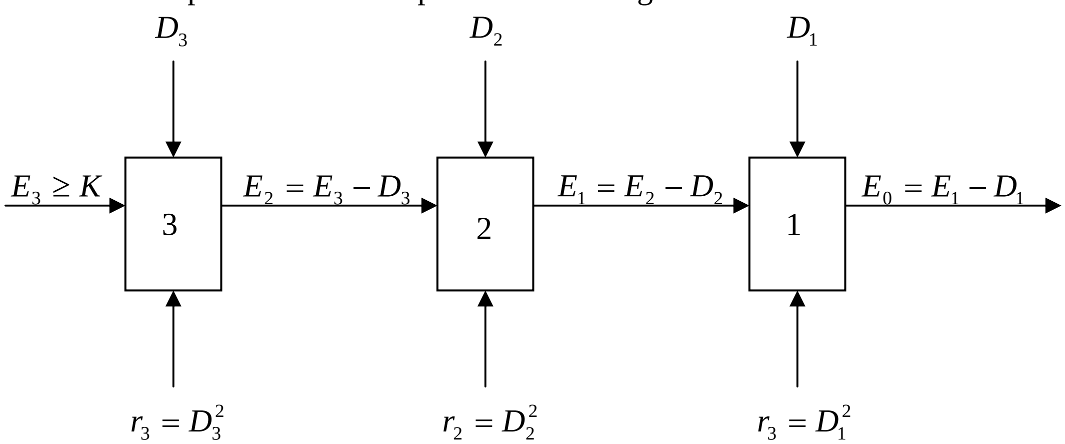
$$y \qquad R_3 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2.$$

En términos de las ecuaciones recursivas podemos describirlo como

$$f_1(E_1) = \min_{D_1 = E_1} \; D_1^2,$$

$$f_n(E_n) = \min_{0 \leq D_n \leq E_n} (D_n^2) + f_{n-1}(E_n - D_n) \qquad n = 2,3, \quad con \quad E_3 \geq K.$$

Gráficamente podemos ver este problema de la siguiente forma



Para empezar con el procedimiento de solución encontraremos $D_1(E_1)$ y $f_1(E_1)$. De acuerdo al modelo multifase o multiestado, $D_1(E_1)$ es la asignación que le corresponde a la fase o estado 1, está representada como función de E_1. Por otro lado $f_1(E_1)$ es el rendimiento óptimo de la fase 1 que se resulta de la asignación $D_1(E_1)$. Como ya se había establecido que $D_1(E_1) = E_1$ entonces no hay optimización y por lo tanto $f_1(E_1) = E_1^2$.

El siguiente paso es expresar el rendimiento óptimo de la fase o estado uno, como función de E_2 y D_2.

Debido a que

$$E_1 = E_2 - D_2,$$
$$f_1(E_1) = (E_2 - D_2)^2,$$

entonces el rendimiento del estado dos es D_2^2. Esto implica que el rendimiento total de las fases dos y uno, dado que el estado uno está operado óptimamente como una función de su entrada o ingreso, sea

$$Q_2(E_2, D_2) = D_2^2 + (E_2 - D_2)^2.$$

El rendimiento óptimo de los dos estados, en términos de D_2 es

$$f_2(E_2) = \min_{0 \le D_2 \le E_2} Q_2(E_2, D_2) = \min_{0 \le D_2 \le E} (D_2^2 + (E_2 - D_2)^2).$$

Si definimos como cero la derivada parcial de Q_2 con respecto a D_2, tendremos la condición necesaria para un mínimo

$$\frac{\partial Q_2}{\partial D_2} = 2D_2 - 2(E_2 - D_2) = 0.$$

Esta condición es suficiente dado que la segunda derivada $\frac{\partial Q_2}{\partial D_2}$ es positiva. Entonces la única solución es $D_2 = \frac{E_2}{2}$ y $f_2(E_2) = \frac{E_2^2}{2} = \frac{(E_3 - D_3)^2}{2}$.

Se sigue el mismo procedimiento para n=3

$$f_3(E_3) = \min_{0 \le D_3 \le E_3} \left[D_3^2 + \frac{(E_3 - D_3)^2}{2} \right] .$$

Derivando parcialmente se obtiene que $D_3 = \frac{E_3}{3}$ con función de rendimiento $f(E_3) = \frac{E_3^2}{3}$. Si se observa que f_3 tiene un mínimo cuando $E_3 = K$, entonces

$$f_3(K) = \frac{K^2}{3}, \qquad D_3^* = \frac{K}{3}, \qquad E_2^* = K - \frac{K}{3} = \frac{2K}{3},$$

$$D_2^* = \frac{E_2^*}{2} = \frac{K}{3} \qquad y \qquad E_1^* = \frac{2K}{3} - \frac{K}{3} = \frac{K}{3} = D_1^* .$$

La mayor dificultad cuando se aplica programación dinámica para transformar un problema a las ecuaciones recursivas, está en obtener los componentes de dichas ecuaciones, los cuales son determinados por las fases, decisiones, rendimientos y transformaciones.

- Para identificar las fases, el paso a seguir es imaginar como puede ser resuelto secuencialmente el problema.
- Para definir las decisiones, se puede pensar en que están en función de lo que sucedió antes.
- Las variables de estado serán básicamente la unión de las decisiones anteriores.
- Las transformaciones se definen relacionando el estado de la variable al salir de una fase con el estado al momento de entrar, además de tomar en cuenta las decisiones.

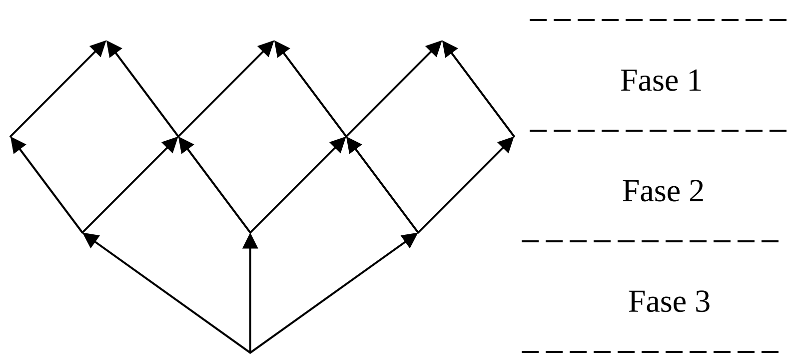
Estos componentes se sustituyen en la ecuación general recursiva

$$f_n(E_n) = \max_{D_n}(r_n(E_n, D_n) \circ f_{n-1}(E_{n-1})).$$

Queda como comentario que el análisis de programación dinámica para *N* fases o estados, es una extensión del que aquí se describió en tres estados.

3.3. Árboles de decisión

Un sistema multifase o multiestado, puede representarse de forma gráfica mediante un árbol de decisión. Este tipo de sistema tiene la característica de que cada decisión y variable de estado pueden tomar sólo un número finito de valores.



Descripción

Las puntas de flecha, ya sea una o un par de ellas representan los nodos, los cuales corresponden a los estados del sistema.
Las líneas entre los nodos se llaman arcos y representan las decisiones.
A cada arco se le asocia un rendimiento y una salida, a su vez ésta toma el papel de entrada para el siguiente nodo.
Las soluciones factibles corresponden a las rutas conformadas por la unión de los arcos, que relacionan el nodo inicial en la base del árbol con alguno de los nodos finales en la parte superior del mismo
El rendimiento de una ruta está definido por la suma de los rendimientos de los arcos que la conforman.
El objetivo es determinar una ruta que proporcione el máximo rendimiento.

Desarrollo

Se comienza por los cuatro nodos de entrada para el estado uno, se escoge el arco que maximice el rendimiento al llegar a la punta del árbol partiendo de

estos nodos, con esto se obtiene el rendimiento y el arco óptimos para cada nodo del estado uno, sin saber si dicho arco corresponde o no a una ruta óptima.

Este proceso es lo equivalente a obtener lo que se describió anteriormente como $f_1(E_1)$ y $D_1(E_1)$, ya que el rendimiento óptimo de un nodo y el arco que lo produce son elementos de $f_1(E_1)$ y $D_1(E_1)$.

El paso siguiente es considerar que se trabaja con un árbol de dos estados, con tres nodos de entrada. Se busca la ruta y rendimiento óptimos para cada uno de ellos. La forma de determinarlos será con el arco que maximice los rendimientos de las combinaciones hechas con los arcos de los nodos de salida, es decir, con los cuatro nodos del primer paso. Una vez que se logra completar este paso, se repite pero aplicándolo ahora a un sistema de tres estados.

El punto importante en este desarrollo es que se consideran únicamente los rendimientos óptimos de los nodos de salida, ya que si se define una solución óptima para el sistema, entonces cada parte de ésta deberá ser optima.

3.4. Principio de Optimalidad

El principio de optimalidad fue establecido por el matemático *Bellman*. Una de las formas de este principio se refiere a las rutas óptimas de secuencias formadas por decisiones. En nuestro contexto, el principio establece que:

“Cualquier subsecuencia de decisiones de una secuencia óptima de decisiones que resuelve un problema también debe ser óptima respecto al subproblema que resuelve”.

La demostración de este principio se hace por contradicción. Se basa en decir que si existe una mejor solución para el subproblema entonces también lo es para el problema original, lo cual contradice el hecho de que hablamos de una ruta óptima.

La introducción de este principio se debe, además de a la evidente importancia del mismo, al hecho de que de éste se desprendan las ecuaciones recursivas de la programación dinámica. La intención ahora será que a partir del problema descrito mediante el árbol de decisión, llegar a $f_N(E_N)$.

Suponga que los nodos en el estado N son $1,2,\ldots$ y que la variable que los define es $E_N = 1, 2, \ldots$.

Sean $A, B, \ldots$ los indicadores de cada uno de los nodos del estado N y son designados por la variable $D_N = A, B, \ldots$.

Entonces un arco puede describirse mediante E_N y D_N, por ejemplo

$$(E_N, D_N) = (2, A).$$

Esto implica que el rendimiento de un arco sea función de la combinación de estas variables y se describa como

$$r_N = r_N(E_N, D_N).$$

Esto conduce a que cada nodo pueda ser reescrito como

$$E_{N-1} = t_N(E_N, D_N).$$

Luego, sea $f_{N-1}(E_{N-1})$ la función del rendimiento óptimo para uno de los nodos de entrada del estado $N-1$.
Finalmente, el principio de optimalidad implica que

$$f_N(E_N) = \max\,(r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(E_{N-1})).$$

Para ejemplificar tomaremos el primer nodo del estado dos:

$$\begin{aligned} f_2(E_2 = 1) &= \max_{D_2 = A,B}\,(r_2(E_2 = 1, D_2) + f_1(E_1)), \qquad E_1 = t_2(E_2, D_2) \\ &= \max\,(r_2(E_2 = 1, D_2 = A) + f_1(E_1 = 1) \\ &\qquad\qquad + f_1(E_1 = 2)), \quad r_2(E_2 = 1, D_2 = B). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Programación dinámica como método de valuación

Introducción

Este capítulo tiene como objetivo, utilizar la teoría de la programación dinámica vista en el capítulo anterior para llegar a una expresión que defina el problema de valuar un derivado y una canasta de derivados de dos elementos, además de proponer una forma de solución. En el primer caso se presentará un ejercicio numérico que apoye el objetivo del capítulo, posteriormente para el caso de canasta de derivados de dos valores se ejemplificará mediante una opción de tipo *spread*. La intención es mostrar alternativas de valuación para productos derivados financieros, mismas que aún en su condición de modelos discretos puedan apoyar en el cálculo del precio de un derivado o una canasta de derivados.

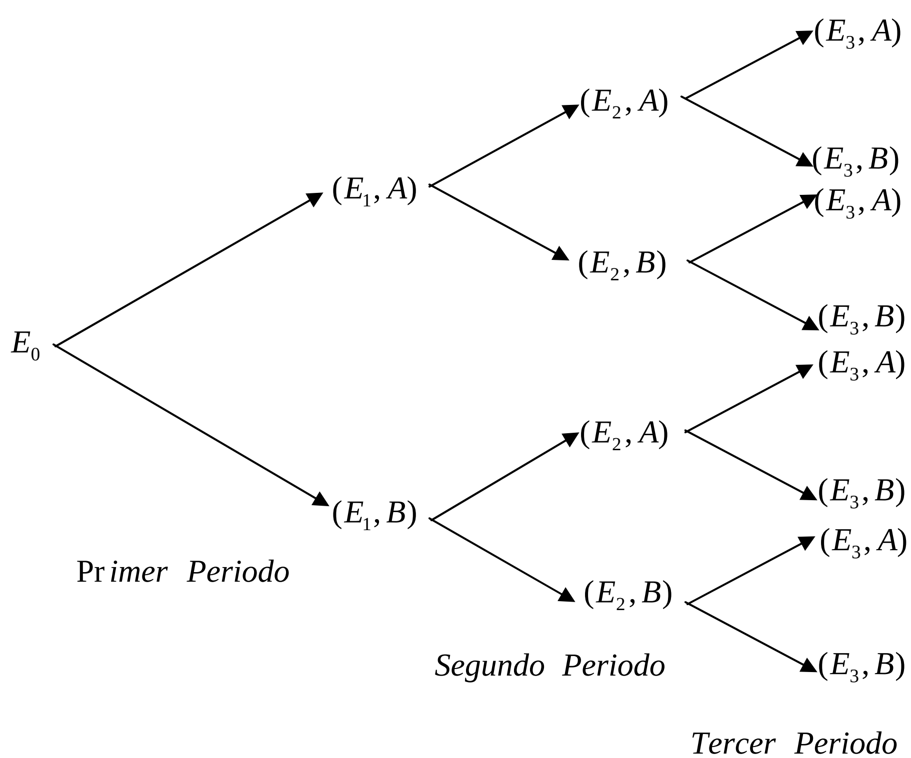
4.1. Una aplicación del método

Continuando con el caso de árboles de decisiones, describiremos un esquema de flujos de efectivo dinámico, el cual se mostrará en la forma de sistema multiestados, los cuales pueden solucionarse mediante rutas o caminos óptimos definidos por las variables de estado y el conjunto de decisiones.

Se considera una inversión en la cual será necesario tomar decisiones periódicamente en la búsqueda de un mejor rendimiento. El proceso dinámico tendrá entonces como objetivo encontrar la mejor opción, la cual estará conformada por un conjunto de acciones o decisiones que nos darán la optimización del beneficio.

Para ser congruentes con el capítulo anterior, definiremos al vector $E=(E_0, E_1, E_2, ..., E_n)$ como el que representa los diferentes flujos que tendrá nuestra inversión en los periodos de decisión, cuyas magnitudes estarán dependiendo de las elecciones que se hagan. Dichas elecciones serán representadas mediante un modelo dinámico, mismo que nos permitirá además conocer las consecuencias de las decisiones tomadas sobre los flujos futuros.

En un principio, la forma de presentar el modelo será gráfica. Si pensamos en la forma más simple del modelo construiríamos uno con sólo dos alternativas de elección en cada periodo, ejemplificando sólo tres periodos:

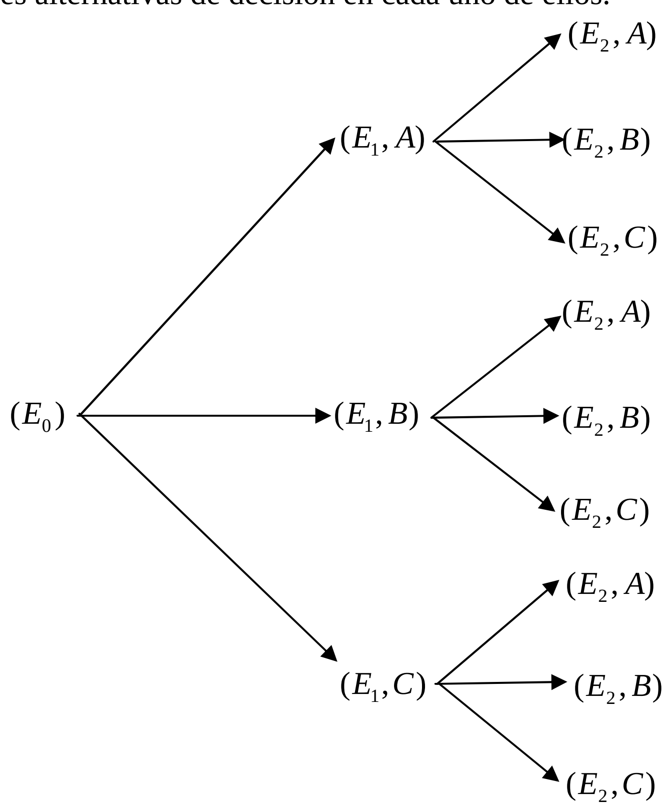


Cada punto de unión entre las líneas se llama nodo, en este caso tenemos 15 nodos. Estos puntos están etiquetados por parejas de variables, las cuales definen el estado del sistema y la elección que se tomó.

Los periodos de elección están representados de forma horizontal y las posibilidades para cada elección se ven gráficamente en las verticales.

En esta gráfica E_0, E_1, E_2, E_3 representan cuatro momentos diferentes, el primero de ellos, E_0, determina el momento inicial, los tres restantes son escenarios de elección y de cada uno de ellos se desprenderán como consecuencia diferentes situaciones, razón por la cual habrá que diferenciar con la segunda entrada de la pareja de variables, la cual identifica qué decisión representa, y que obviamente nos dirigirá por diferentes caminos.

Es claro que este tipo de gráficos podría complicarse tanto como número de periodos y de decisiones agreguemos. Aquí tenemos uno con sólo dos periodos, pero con tres alternativas de decisión en cada uno de ellos.



Así podríamos construir los modelos gráficos que definieran inversiones según el número de opciones de decisión que tenga cada periodo y el tiempo de duración del plan de inversión. Hacer esto se complicaría más conforme aumentaran las alternativas de elección por periodo y el número de periodos, o estados del sistema, esto llevaría a que se convirtiera en un ejercicio propio de realizarse en una computadora.

Aunque ya se han estado manejando los nombres de las variables claramente, sería bueno describir un problema de este tipo, con dos periodos y tres opciones de decisión, de manera formal. Sobre todo en lo que respecta a las funciones que permiten llegar a la optimización.

Entonces, estamos tratando con un sistema de $N = 3$ estados, cuyo vector de variables de estado será

$$E_n = (1, \ldots, 3^n) \qquad n = 0,1,2 .$$

Sea $A, \; B, C$ el conjunto de indicadores de nodo para el estado n

$$D_n = A, B, C ,$$

entonces, cada una de las líneas que van de un nodo a otro, llamadas arco pueden describirse mediante E_n y D_n, por ejemplo

$$(E_n, D_n) = (3, A) .$$

Lo cual define al rendimiento de cada arco como una función en términos de E_n y D_n

$$r_n = r_n(E_n, D_n) .$$

Además cada nodo puede reescribirse como

$$E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) .$$

Luego, sea $f_{n-1}(E_{n-1})$ la función del rendimiento óptimo para uno de los nodos de entrada del estado $n-1$.

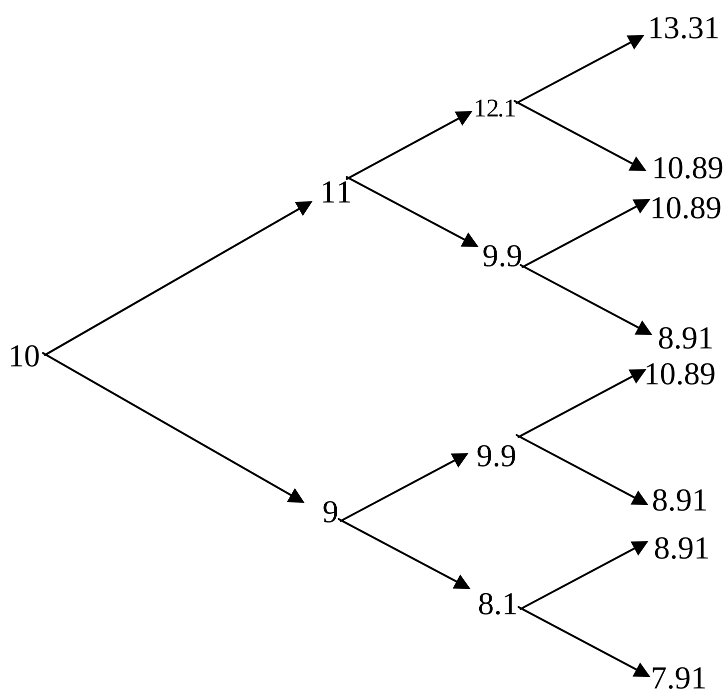
Finalmente, llegaremos a que

$$f_N(E_N) = \max\left(r_N(E_N, D_N) + f_{N-1}(E_{N-1})\right).$$

Ahora veremos en un ejemplo, en el cual estableceremos cantidades para ejemplificar numéricamente. Pensemos en el valor inicial de un derivado y los cambios que 'este sufre a lo largo del tiempo, causados por el comportamiento del subyacente periodo a periodo.

Supongamos que el valor del derivado se mueve en cada periodo entre dos puntos, uno superior y otro inferior al actual.

Diremos además que tenemos un valor inicial de 10 pesos, el cual si sube lo hace en un 10% y si baja será en un 10%. Consideremos que los periodos de movimiento del valor del derivado son tres, entonces nuestra gráfica se vería de la siguiente forma:

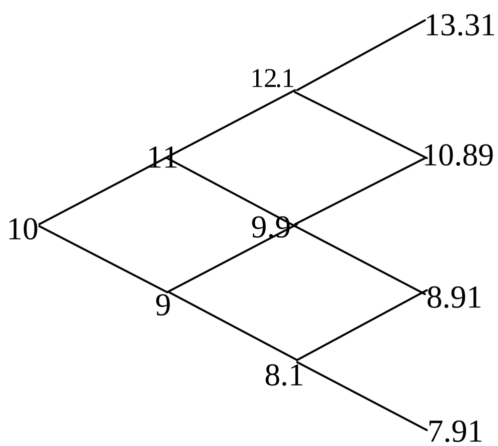


Entonces, nuestro ejemplo podríamos describirlo como:

$$E_{n-1} = t_n(E_n, D_n) \;\; donde \;\; t_n = \begin{cases} 0.05(E_n) & si \quad D_n = A \\ 0.1(E_n) & si \quad D_n = B \end{cases}$$

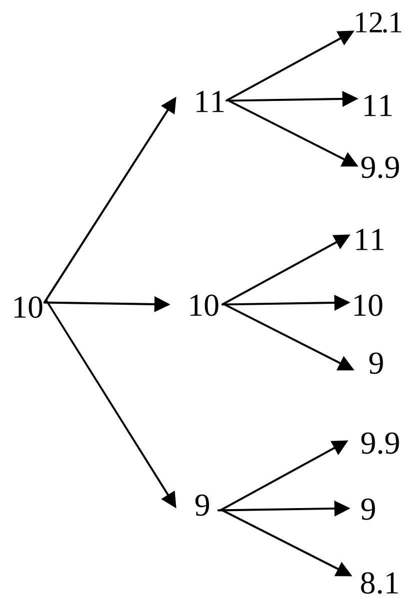
La gráfica anterior, el cual es llamado árbol binomial por la forma en que está construido, tiene la característica de que en algunos casos dos caminos nos llevan al mismo resultado. Por ejemplo si el valor inicial del derivado sube primero y luego baja, llegará al valor de 9.9 pero si ese mismo valor inicial de 10 pesos primero baja y luego sube, se obtendrá el mismo valor de 9.9.

También podemos notar que para el siguiente periodo es evidente que en ambos casos se darán exactamente los mismos resultados. Por esta razón se simplifica el gráfico del árbol binomial quedando de la siguiente forma, la cual es conocida como enrejado o red:

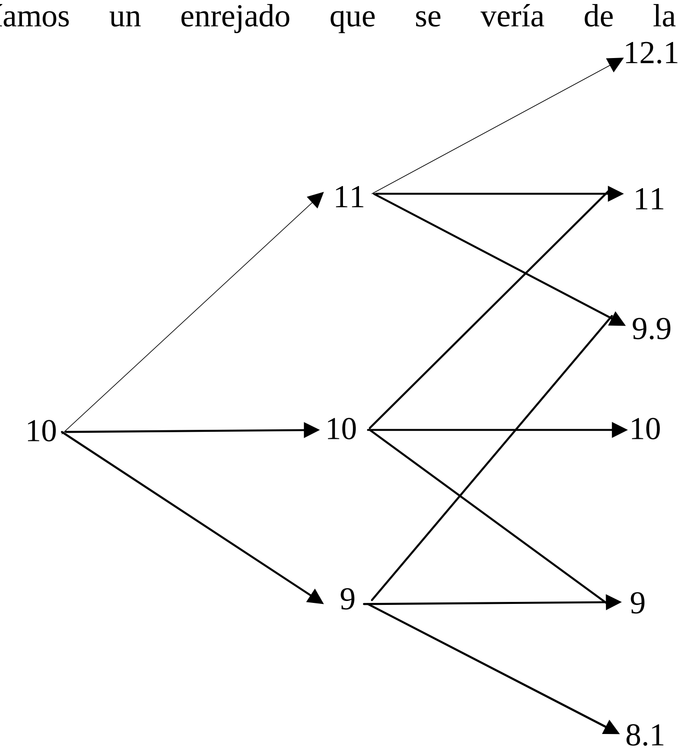


Evidentemente los árboles gráficos pueden crecer tanto en sus periodos como el número de decisiones que se toman en cada uno de ellos, es también posible para cada uno de éstos reducirlos a una gráfica con menos nodos, siempre que periodo a periodo, los nodos tengan las mismas posibilidades de elección.
Para ejemplificarlo haremos un ejercicio con un árbol en el que por cada periodo existen tres opciones a elegir y graficaremos dos periodos.
Utilizaremos el ejercicio anterior, sólo agregaremos la tercera opción, la cual representará el hecho de que el valor permanezca sin movimiento, es decir, el valor del derivado subirá, bajará o se conservará.

Primero se vería así:



Uniendo los caminos de nodos que nos llevan a los mismos resultados tendríamos un enrejado que se vería de la siguiente forma:



Como ya se había mencionado la intención de este método es encontrar el conjunto de decisiones óptimo, es decir, la ruta sobre la gráfica que represente dichas decisiones.

La forma de obtener esta ruta puede llamarse deductiva, porque basa su desarrollo en comenzar por el final para llegar al momento inicial. Hasta el momento, sólo se había estado tratando la idea de que los árboles de decisiones son un caso especial de programación dinámica. En seguida comenzaremos a usar la parte de la programación dinámica que nos permite solucionar los problemas, después de haberlos descompuestos en subproblemas o sistemas de N estados; mediante el análisis en retroceso o recursivo.

La función de rendimiento que nos permitirá movernos de un estado a otro será el valor presente, el cual en un primer momento podemos calcularlo mediante la tasa spot de cada periodo

$$s_i \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Se considerarán entonces los flujos monetarios de cada ruta posible, los cuales se generan en cada rama que une dos nodos del árbol. Tomemos el vector $E = (E_0, E_1, E_2, \ldots, E_N)$, el cual caracteriza los flujos generados en una de las rutas posibles del árbol.
El último valor del árbol será representado por E_n, y será el primero en términos del análisis, a éste lo renombraremos como V_n y es precisamente el valor final del derivado.

El valor presente de este vector estaría definido como:

$$VP = E_0 + \frac{E_1}{(1+s_1)} + \frac{E_2}{(1+s_2)^2} + \frac{E_3}{(1+s_3)^3} + \ldots\ldots + \frac{E_{n-1}}{(1+s_{n-1})^{n-1}} + \frac{E_n}{(1+s_n)^n} .$$

El procedimiento que se seguirá será asignar a cada nodo el valor presente más alto de sus ramas, cada nodo estará identificado por (k,i) donde k indica el periodo en el que se encuentra el nodo y la i el número de éste, entonces el mejor valor presente de cada nodo será representado por $V_{k,i}$.

Es importante señalar que el cálculo de estos valores no toma en cuenta los flujos anteriores al nodo que estamos evaluando, de tal forma que para calcular

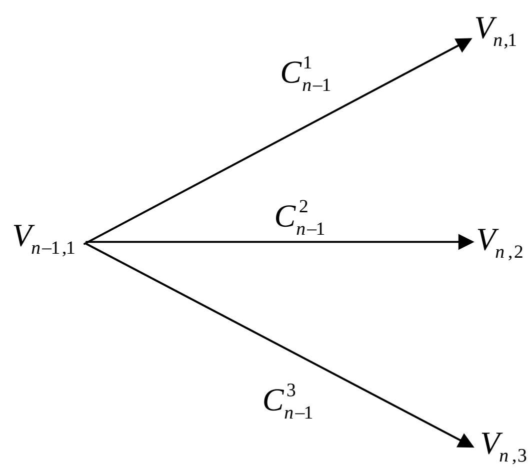
el valor presente de una rama sólo tomaremos en cuenta el flujo de esa rama y el valor final de la misma.
Debido a que el cálculo se hará periodo a periodo, se requerirá de una tasa para cada periodo

$$r_k = f_{k,k+1}.$$

Esta será la tasa que corresponda al periodo que va de k a $k+1$, además se considerará que los flujos ocurren anticipados, es decir, al principio del periodo. Entonces el factor de descuento para los flujos de cada periodo estaría dado por:

$$d_k = \frac{1}{(1+r_k)}.$$

La notación para el flujo de cada rama será C_{n-1}^{a}, en donde el superíndice a representa el número de rama y el subíndice $n-1$ es el periodo en el que está el nodo que estamos evaluando. Por ejemplo, un nodo del periodo $n-1$ con tres ramas sería:



También necesitamos los valores de los flujos de efectivo C_{ki}^{a}, los cuales representen el flujo del nodo (k,i) al nodo $(k+1,a)$

Entonces el valor sería:

$$V_{k,i} = \max_{a=1,2,3}(C_{ki}^{a} + d_k V_{k+1,a}) .$$

Este es un proceso que debemos seguir con cada nodo en cada periodo hasta llegar al nodo inicial, esto nos dibujará la ruta de valores máximos que finalmente nos dará la serie de elecciones que nos retribuyan el valor máximo.

Como ya se había comentado, en la programación dinámica, el principal detalle consiste en la determinación de las funciones de transformación, las variables de estados y la forma de dividir el sistema.

En este ejemplo de aplicación de la programación dinámica, la función adecuada a maximizar que permitirá la optimización del la solución será el valor presente.

Hasta este momento lo que se ha hecho es completar los valores de los nodos según la evolución del problema propuesto según sus características. Lo que ahora se calculará será la ruta óptima del problema, utilizando la función de este ejercicio de programación dinámica, el valor presente.

Descripción del problema:

- Tenemos $n = 2$ estados.
- Cada nodo tiene 3 alternativas de decisión $a = 1,2,3$.
- Los arcos que llevan al mismo valor final están en un mismo nodo.
- En nuestro ejemplo supondremos que nuestros periodos son de 28 días, para efectos de la tasa de cada periodo.

Paso 1

Tenemos como valores finales a 12.1, 11, 9.9, 10, 9, 8.1 según la notación de este modelo éstos corresponden a:

$V_{2,1} = 12.1$, $V_{2,2} = 11$, $V_{2,3} = 9.9$, $V_{2,4} = 10$, $V_{2,5} = 9$, $V_{2,6} = 8.1$.

Además necesitamos los valores de los flujos de efectivo C_{ki}^{a}

$$C_{11}^{1}=1.1,\quad C_{11}^{2}=0,\quad C_{11}^{3}=-1.1,\quad C_{12}^{4}=1,\quad C_{12}^{5}=0,\quad C_{12}^{6}=-1,$$
$$C_{13}^{7}=0.9,\quad C_{13}^{8}=0,\quad C_{13}^{9}=-0.9\,.$$

Paso 2

Aplicaremos la función de transformación para el periodo $n=2$ y poder encontrar los valores de $V_{1,1}$ y $V_{1,2}$.

$$V_{1,1}=\max(C_{11}^{1}+d_2(12.1),\; C_{11}^{2}+d_2(11),\; C_{11}^{3}+d_2(9.9)),$$
$$V_{1,1}=C_{11}^{1}+d_2(12.1),$$

$$V_{1,2}=\max(C_{12}^{1}+d_2(11),\; C_{12}^{2}+d_2(10),\; C_{12}^{3}+d_2(9)),$$
$$V_{1,2}=C_{12}^{1}+d_2(11),$$

$$V_{1,3}=\max(C_{13}^{1}+d_2(9.9),\; C_{13}^{2}+d_2(9),\; C_{13}^{3}+d_2(8.1)),$$
$$V_{1,3}=C_{13}^{1}+d_2(9.9).$$

Si consideramos que d_k es $d_1=d_2=\dfrac{1}{(1+0.0705)}$ la tasa libre de riesgo, en este caso la que corresponde a los Cetes a 28 días coincide en los dos últimos periodos.

Entonces los valores de los nodos antes son:

$$V_{1,1} = 1.1 + \frac{1}{(1+0.0705)}(12.1) = 1.1 + 0.9341 = 2.0341,$$

$$V_{1,1} = 2.0341,$$

$$V_{1,2} = 1 + \frac{1}{(1+0.0705)}(11) = 1 + 0.9341 = 1.9341,$$

$$V_{1,2} = 1.9341,$$

$$V_{1,3} = 0.9 + \frac{1}{(1+0.0705)}(9.9) = 0.9 + 0.9341 = 1.8341,$$

$$V_{1,3} = 1.8341.$$

Paso 3

Ahora aplicaremos la función de transformación para el periodo $n-1=1$ y poder encontrar el valor de

$$V_{0,1}$$

Dados

$$V_{1,1} = 2.0341, \qquad V_{1,2} = 1.9341, \qquad V_{1,3} = 1.8341,$$

$$C_{01}^{1} = 1, \qquad C_{01}^{2} = 0, \qquad C_{01}^{3} = -1,$$

$$V_{0,1} = \max(C_{01}^1 + d_0(11),\ C_{01}^2 + d_0(10),\ C_{01}^3 + d_0(9)),$$

$$V_{0,1} = C_{01}^1 + d_0(11).$$

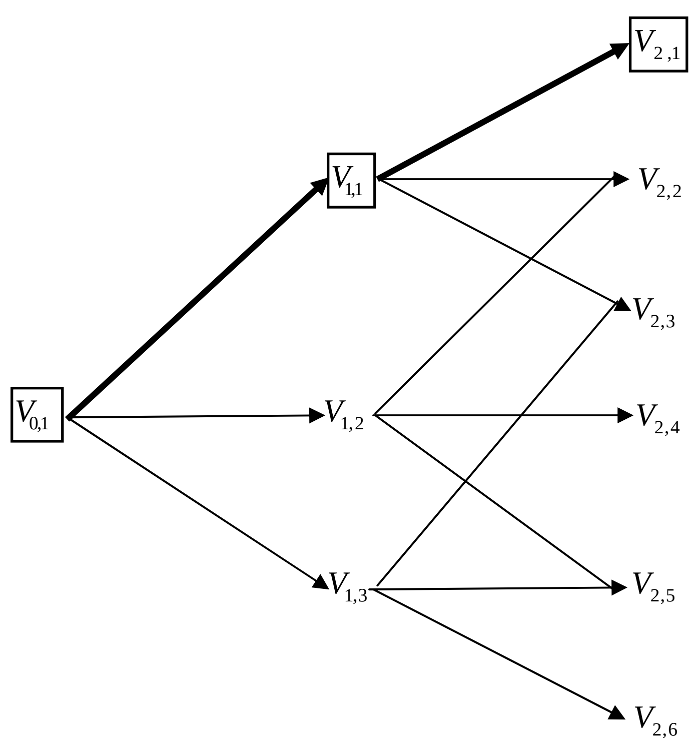
Utilizando d_1

$$V_{0,1} = 1 + \frac{1}{(1+0.0705)}(11) = 1 + 0.9341 = 1.9341,$$

$$V_{0,1} = 1.9341.$$

Entonces nuestra ruta óptima quedaría descrita por

$$V_{2,1} \rightarrow V_{1,1} \rightarrow V_{0,1}$$



La ruta óptima está remarcada gráficamente.

Hay dos formas de utilizar la información que proporciona esta ruta óptima. La primera es que si pensamos al valor del derivado como el de una inversión, entonces estaríamos encontrando la mejor ruta de rendimiento que podría obtener el valor de este derivado.

La otra forma de usarla es pensar que al encontrar la ruta óptima que siguió el valor del derivado, en términos de valuarlo, nos daría los mejores valores que tomó en su momento el derivado, los cuales nos servirían para decidir el mejor precio de éste, ya que es el valor presente de la mejor ruta que podría tener el comprador de este contrato.

Esto puede parecer un método rudimentario, porque para decidir el precio del derivado habría que encontrar también la ruta de mayor rendimiento y establecer un criterio para definir el precio final del derivado a partir de estos. Sin embargo, si pensamos en que es mejorable aumentando el número de posibles valores en cada periodo, eso nos permitirían definir el precio final estableciendo una regla entre ellos, entonces nos acercaríamos a un precio más exacto.

Aún queda el hecho de que éstos son valores dados, lo cual en la realidad no sucede comúnmente, sólo podrían darse de valores esperados calculando las esperanzas de éstos dadas las probabilidades de ocurrencia, obteniendo así un valor esperado para cada periodo. Es en este sentido que siguiendo la idea de la programación dinámica, con sistemas multi-estados o multi-periodos, estableceremos una forma más exacta de definir el precio de un derivado.

4.2. Valuación de una opción

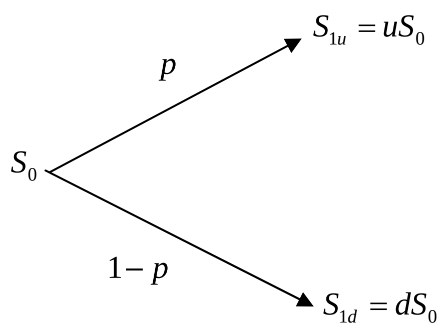
Se utilizará el esquema de la programación dinámica, para hacer un análisis de de forma recursiva en retroceso del sistema mediante el cual se describirá el problema de encontrar el valor de una opción. Se considerarán también como esquemas de multiperiodos a los comportamientos del activo subyacente y de la tasa de rendimiento libre de riesgo.

Primero se hará un desarrollo para de obtener el precio de una opción es un sistema de un sólo periodo de tiempo.

Supongamos que S es el precio inicial de un activo, entonces éste sería el estado inicial del sistema que describe al precio del activo $S_0 = S$.

Para el siguiente periodo, en este caso el último momento, se considerarán dos posibles escenarios: que el precio suba y se convierta en uS o que el precio baje y tome el valor de dS. Las variables de estado en el momento siguiente, quedan definidas como $S_{1u} = uS_0$ y $S_{1d} = dS_0$.

Además se asignarán probabilidades a estos escenarios. En el caso de $S_{1,u}$, éste sucederá con probabilidad p y a $S_{1,d}$ le corresponderá el complemento $1 - p$.



Será necesario pedir que se cumpla $u > d > 0$, con la finalidad de asegurar que representen movimientos efectivos hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

La tasa libre de riesgo es r y en consecuencia con la desigualdad anterior deberá cumplirse que

$$u > (1 + r) > d \ .$$

Esta desigualdad es necesaria debido a que evita las oportunidades de arbitraje[1].

[1] Si $(1 + r) \geq u > d$, aún el valor más alto que puede tomar que pudiera tomar el precio del activo, no sería tan redituable como el uso de la tasa libre de riesgo. Además se podría obtener un beneficio estando corto en la acción y prestando con r. En el caso contrario $u > d \geq (1 + r)$ se puede pedir prestado con r y comprar una acción.

La variable de tasa con la que trabajaremos será $R = 1 + r$ .Las condiciones de la opción serán las comunes y el precio de ejercicio estará determinado, como usualmente sucede, por K. La tasa de interés, como ya se mencionó, con el objetivo de evitar el arbitraje estará determinada por la desigualdad antes descrita.

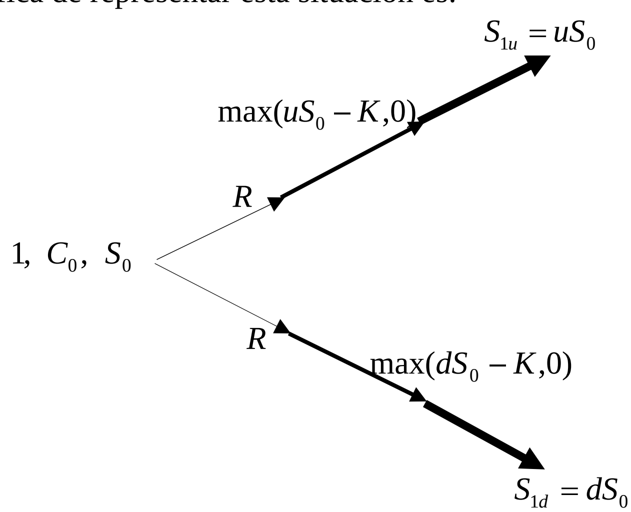
Si suponemos que conocemos S el valor inicial del activo, entonces se podrían determinar los valores al siguiente periodo excepto el del valor del derivado, el cual se identifica con la letra C_0 y es precisamente el objetivo del procedimiento. Al final este valor quedará determinado por el subyacente y la tasa.En el caso de la tasa de interés, el valor inicial será 1 y el final será siempre R, el cual mantendrá la desigualdad con los movimientos del activo. Esto es

$$R_0 = 1, \quad R_{1u} = R \quad \text{y} \quad R_{1d} = R .$$

Los valores que en el siguiente periodo tendrá el valor del derivado estarán determinados por

$$C_{1u} = \max(uS_0 - K, 0),$$
$$C_{1d} = \max(dS_0 - K, 0).$$

Los movimientos del activo, la tasa de interés y del valor de la opción estarán ligados y serán en la misma dirección, esto significa que si el valor del subyacente se mueve en forma ascendente, este movimiento será replicado por las otras dos variables.
Una forma gráfica de representar esta situación es:



Para duplicar los resultados de los tres esquemas, se considerará una cartera conformada por x unidades del activo subyacente y por b del valor de R. De esta forma, el valor de dicha cartera tendrá alguno de los siguientes valores:

$$xu + bR = C_{1u},$$
$$xd + bR = C_{1d}.$$

Resolviendo el sistema tendríamos

$$x = \frac{C_{1u} - C_{1d}}{u - d} \quad \text{y} \quad b = \frac{uC_{1d} - dC_{1u}}{R(u-d)},$$

entonces el valor del portafolio quedaría determinado por

$$\begin{aligned} x + b &= \frac{C_{1u} - C_{1d}}{u - d} + \frac{uC_{1d} - dC_{1u}}{R(u-d)} \\ &= \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_{1u} + \frac{u-R}{u-d}C_{1d}\right). \end{aligned}$$

Debido a la construcción del portafolio, el valor de éste debe coincidir con el valor del derivado, justificado por la ausencia de arbitraje. Entonces

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_{1u} + \frac{u-R}{u-d}C_{1d}\right).$$

Si definimos $q = \dfrac{R-d}{u-d}$ y observamos que dada la relación entre las variables ($0 < q < 1$), puede ser considerada como una probabilidad.

Entonces finalmente la ecuación de valuación del derivado sería:

$$C = \frac{1}{R}\left(qC_{1u} + (1-q)C_{1d}\right).$$

Esta ecuación sería la que nos permitiría encontrar el valor de un derivado en un sistema de *n* periodos mediante la programación dinámica.

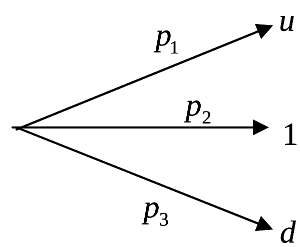
Comenzaríamos con los valores del último periodo y encontraríamos el valor para $n-1$, después estos valores nos permitirían llegar a los de $n-2$ y así sucesivamente hasta llegar al valor inicial. Prácticamente es sólo seguir el procedimiento n veces, como es característico de la programación dinámica.

Es interesante pensar en qué pasaría si el esquema no fuera binomial sino trinomial. En principio no es posible utilizar el método de duplicación de cartera como función de transformación para los nodos entre un periodo y otro, debido a que tendríamos un sistema de tres ecuaciones, una por cada resultado del periodo. Para resolver estas ecuaciones sólo contaríamos con el activo subyacente y la tasa de interés, entonces no nos sería posible encontrar la solución del sistema. Por esta razón se utilizará la teoría del riesgo neutral[2], la cual en términos de valuación de opciones, establece que:

$$C = \frac{1}{R_T} E(\max(S_T - K, 0)).$$

Entonces el valor del activo tendrá tres posibilidades en cada nodo, las cuales serán u, 1, d, las cuales ocurrirán con probabilidad p_1, p_2, p_3

Entonces el esquema trinomial sería:



[2] Ver Apéndice

El valor de d se escoge de forma que un movimiento hacia arriba seguido de uno hacia abajo sea uno. Entonces $d = \frac{1}{u}$, el valor de u sí será arbitrario.

Después, de acuerdo a las características del sistema, se conforma un conjunto de tres ecuaciones, las cuales están en función de que los valores de la esperanza y la varianza estén dados.

$$
\begin{aligned}
&p_1 + \ p_2 + \ p_3 = 1, \\
&up_1 + \ p_2 + \ dp_3 = 1 + \mu\,\Delta t, \\
&u^2 p_1 + \ p_2 + \ d^2 p_3 = \sigma^2\,\Delta t \ + \ (1 + \mu\,\Delta t)^2.
\end{aligned}
$$

Donde

$1 + \mu\,\Delta t$ es la esperanza del periodo
$\sigma^2\,\Delta t$ es la varianza del periodo

Finalmente sólo falta determinar las probabilidades q_1, q_2, q_3, las cuales se pueden obtener mediante el mismo sistema de tres ecuaciones pero con esperanza $\mu\,\Delta t$.

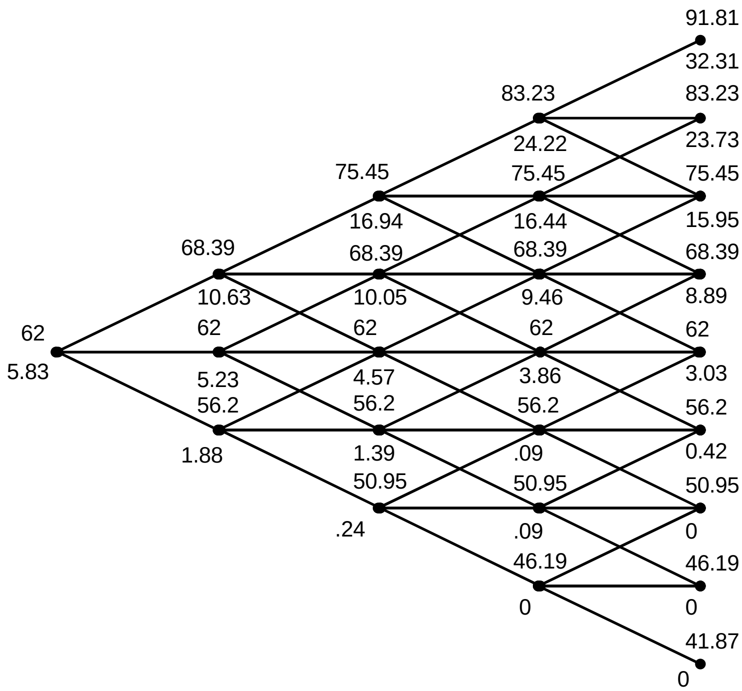
Una vez que se tienen los valores q_1, q_2, q_3 el valor a un periodo de la opción sería:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{R}(q_1 u + q_2 + q_3 d) \\
&= \frac{1}{R}E(S), \qquad S = S_1, S_2, S_3.
\end{aligned}
$$

4.3. Ejemplo numérico

Tomemos una opción *call*, la cual cuenta con 4 periodos de vida.
El valor inicial del subyacente será $S_0 = 62$.
El precio de ejercicio será $K = 60$.
La tasa libre de riesgo será $r = 10\%$.

El valor de $\sigma = 20\%$.
El valor de $u = 1.06 \Rightarrow q_1 = 0.20947, \quad q_2 = 0.64896$ y $q_3 = 0.14156$.



En cada nodo del gráfico se muestran dos datos, el superior que corresponde al valor del subyacente y el inferior que es el valor de la opción.

4.4. Valuación de canastas de derivados

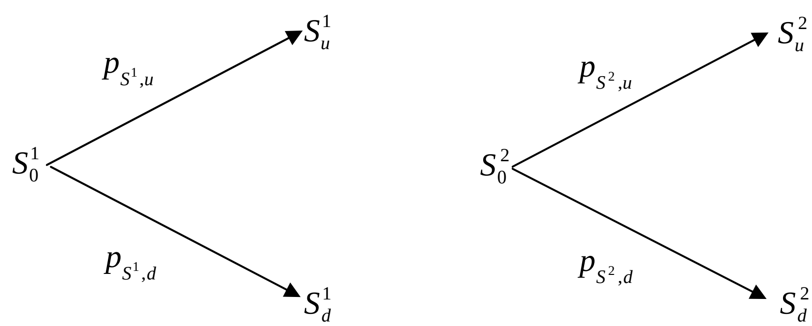
El caso de valuación de canastas de derivados se desarrollará usando programación dinámica, en lo que respecta al análisis recursivo de sistemas multiperiodos, en este caso un análisis en retroceso.

El desarrollo será en el caso particular de canastas con dos derivados financieros.

El método será en términos de situaciones futuras binomiales, es decir, el esquema que representará los movimientos de los activos sólo tendrá dos opciones por cada activo.

En la solución será esencial considerar la teoría de riesgo neutral, antes descrita y por lo tanto su fórmula de valuación.

Sean S^1 y S^2, los activos subyacentes correspondientes a los derivados que componen la canasta. Cada uno presentará dos posibles valores en el siguiente periodo, uno superior y otro inferior, con cierta probabilidad.



Activo 1 Activo 2

Uniendo los comportamientos de estos dos activos, tendremos cuatro posibles estados conjuntos al siguiente periodo. Todas estas características pueden expresarse de la siguiente forma:

Sea la canasta de dos derivados $S = \{S^1, S^2\}$.

Sean S_u^1 y S_u^2 los valores superiores de los activos.

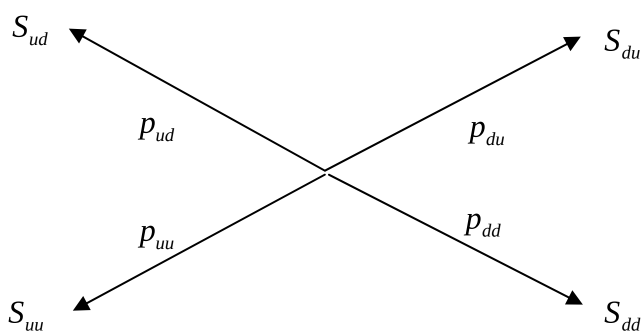
Sean S_d^1 y S_d^2 los valores inferiores de los activos.

Sean $p_{S^1,u}$ y $p_{S^2,u}$ las probabilidades de que S^1 y S^2 suban.

Sean $p_{S^1,d}$ y $p_{S^2,d}$ las probabilidades de que S^1 y S^2 bajen.

Luego tenemos que los cuatro escenarios posibles para nuestra canasta son:

$$1)\ S_{uu} = S_u^1 S_u^2, \quad 2) S_{dd} = S_d^1 S_d^2, \quad 3) S_{ud} = S_u^1 S_d^2 \ \text{ y } \ 4) S_{du} = S_d^1 S_u^2 .$$



Canasta de dos derivados

Las probabilidades de estos cuatro escenarios son:

1) $S_u^1 S_u^2 \rightarrow p_{uu}$, 2) $S_d^1 S_d^2 \rightarrow p_{dd}$,

3) $S_u^1 S_d^2 \rightarrow p_{ud}$ y 4) $S_d^1 S_u^2 \rightarrow p_{du}$.

Se debe considerar el hecho de que estos dos activos pueden estar correlacionados.

Ahora, con las siguientes ecuaciones se busca definir los valores de las probabilidades conjuntas de los cuatro estados posibles de la canasta, si los valores fueran independientes que las probabilidades conjuntas serían el producto de las probabilidades y el caso sería más sencillo. En general tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&p_{uu} + p_{ud} = p_{S^1 u},\\
&p_{du} + p_{dd} = p_{S^1 d},\\
&p_{uu} + p_{du} = p_{S^2 d},\\
&(p_{uu} - p_{S^1 u} p_{S^2 u})(\ln S_u^1)(\ln S_u^2) + (p_{ud} - p_{S^1 u} p_{S^2 d})(\ln S_u^1)(\ln S_d^2)\\
&+ (p_{du} - p_{S^1 d} p_{S^2 u})(\ln S_d^1)(\ln S_u^2) + (p_{dd} - p_{S^1 d} p_{S^2 d})(\ln S_d^1)(\ln S_d^2)
\end{aligned}
$$

Finalmente, lo que nos falta identificar son las probabilidades conjuntas q_{ij} que nos permitan valuar la canasta según la teoría de riesgo neutral

$$q_{uu},\ q_{dd},\ q_{ud},\ \text{y} \quad q_{du}.$$

Según la teoría, una forma de encontrarlas sería:

$$q_{i,j} = \frac{p_{ij} U'_{ij}}{\sum_{j,l \in \{u,d\}} p_{kl} U'_{kl}}.$$

En donde:
X_{ij}^* es el valor óptimo en el punto siguiente a *ij*,
$U_{ij}^{'} = U^{'}(X_{ij}^*)$.

Finalmente el valor de la canasta se encuentra usando programación dinámica con análisis en retroceso por periodo. Para un periodo, el valor de la canasta estaría dado por:

$$S_0 = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{4} q_i * \max[S_{1i} - K, 0],$$

$$\therefore \; S_0 = \frac{1}{R} E[S_1].$$

Donde

S_0 es el valor inicial de nuestra canasta.

$S_1 = (S_{11},..,S_{14})$ son los cuatro posibles estados de nuestra canasta en el tiempo 1, de tal forma que el primer subíndice indica el tiempo 1 y el segundo el número de estado dentro de los cuatro posibles.

$\frac{1}{R}$ es el factor de descuento de la tasa libre de riesgo.

q_i es la probabilidad de que suceda el estado S_{1i}.

4.5. Ejemplo para una opción de tipo *spread*

El caso de una opción de tipo *spread* es un caso especial de la canasta de dos derivados. Una opción de este tipo se define como la diferencia de los valores en un tiempo T, razón por la cual para valuar este tipo de derivado es necesario ligarse a los valores de dos activos subyacentes. La forma de resolver el valor inicial de las opciones de este tipo será mediante el mismo procedimiento que se realizó para la canasta de dos derivados, la única diferencia será que el valor de una opción *spread* se definirá como:

$$\max((S_2(T) - S_1(T)), 0)$$

Entonces según los cuatro escenarios posibles en un periodo serán:

1) $S_u^1 S_u^2 \quad \rightarrow \quad \max((S_u^2 - S_u^1) - K, 0),$

2) $S_u^1 S_d^2 \quad \rightarrow \quad \max((S_d^2 - S_u^1) - K, 0),$

3) $S_d^1 S_u^2 \quad \rightarrow \quad \max((S_u^2 - S_d^1) - K, 0);$ y

4) $S_d^1 S_d^2 \quad \rightarrow \quad \max((S_d^2 - S_d^1) - K, 0).$

La ecuación que se utilizaría para evaluar en un periodo sería:

$$S_0 = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} q_1 * \max((S_u^2 - S_u^1) - K, 0) \; + \; q_2 * \max((S_d^2 - S_u^1) - K, 0) \\ + \, q_3 * \max((S_u^2 - S_d^1) - K, 0) \; + \; q_4 * \max((S_d^2 - S_d^1) - K, 0) \end{bmatrix},$$

$$S_0 = \frac{1}{R} \sum_{K,L \in \{u,d\}} q_i * \max\left[(S_{KL}^2 - S_{KL}^1) - K, 0\right],$$

$$\therefore \;\; S_0 = \frac{1}{R} E\left[S_1\right].$$

Donde

S_0 es el valor inicial de nuestra canasta.

$S_1 = (S_{11}, .., S_{14})$ son los cuatro posibles estados de nuestra canasta en el tiempo 1, de tal forma que el primer subíndice indica el tiempo 1 y el segundo el número de estado dentro de los cuatro posibles.

$\frac{1}{R}$ es el factor de descuento de la tasa libre de riesgo,

q_i es la probabilidad de que suceda el estado S_{1i}.

Igualmente las ecuaciones serán que nos permitirán encontrar los valores de las probabilidades son:

$$
\begin{aligned}
&p_{uu} + p_{ud} = p_{S^1 u},\\
&p_{du} + p_{dd} = p_{S^1 d},\\
&p_{uu} + p_{du} = p_{S^2 d},\\
&(p_{uu} - p_{S^1 u} p_{S^2 u})(\ln S_u^1)(\ln S_u^2) + (p_{ud} - p_{S^1 u} p_{S^2 d})(\ln S_u^1)(\ln S_d^2)\\
&+(p_{du} - p_{S^1 d} p_{S^2 u})(\ln S_d^1)(\ln S_u^2) + (p_{dd} - p_{S^1 d} p_{S^2 d})(\ln S_d^1)(\ln S_d^2).
\end{aligned}
$$

Finalmente las probabilidades para valuar el precio de la opción tipo *spread* serán:

$$q_{ij} = \frac{p_{ij} U'_{ij}}{\sum_{j,l \in \{u,d\}} p_{kl} U'_{kl}}.$$

Donde:

X_{ij}^* es el valor óptimo en el punto siguiente a *ij*,
$U_{ij}' = U'(X_{ij}^*)$.

Conclusiones

Después de terminar este trabajo podemos plasmar algunas ideas que se fueron recabando a lo largo del mismo para finalmente tener una perspectiva que las englobe.

Al concluir la primera parte, en la cual se desarrollan las características de algunos derivados, queda como motivación el hecho de que en nuestro país el mercado de valores, más aún el financiero, no se encuentran desarrollados en gran medida. Esta característica limita el grado en que se usan los productos financieros, en particular los derivados. Sin embargo, el incentivo está en que ya se ha empezado con las bases, se cuenta con algunos contratos de futuros y otros más de opciones, dentro de los cuales sería interesante ampliar la gama de productos, añadiendo por ejemplo los *spreads*, ya que éstos podrían abrir horizontes hacia otros sectores que permitan rebasar el uso que actualmente se les da a los derivados financieros, el cual está principalmente dirigido a las acciones de algunas empresas que cotizan en la bolsa de valores, o en algunos casos a contratos de divisas. Más específicamente se propone el desarrollo de éstos derivados en el sector de mercancías, en nuestra región esencialmente el sería necesario en el energético y el agropecuario.

Dentro de la propuesta anterior se nota que es posible, de acuerdo a los métodos revisados, implementar en principio algunos casos en los que puedan usarse modelos discretos que permitan que la valuación sea más sencilla, lo que en el caso de un proyecto de implementación de productos derivados de mercancías, resulte muy útil.

Respecto al método de programación dinámica, es interesante pensar que extenderlo a múltiples posibilidades de escenarios en cada periodo, lo que nos daría un mejor resultado, ya que se aproximaría más a un precio obtenido mediante un sistema continuo pero con las bondades propias de uno discreto, en cuanto a desarrollo e implementación se refiere. Esto es real ya que con las herramientas de cómputo, la tarea se vería facilitada y mejorada.

Además también sería factible aumentar el número de periodos de estudio, que permitiera modelar con más exactitud el fenómeno que describen los movimientos de los precios de los subyacentes.

Todas estas pretensiones, evidentemente, complicarían el análisis y por supuesto la resolución de la valuación pero serían resultados de utilidad.

Para un trabajo posterior quedaría el desarrollo de la valuación y uso de canastas de derivados para múltiples exposiciones al riesgo, aumentando el número de componentes aquí expuesto e incluso podría también abordarse el caso en que éstos se encuentren altamente relacionados.

Como última conclusión podemos decir que el uso de opciones *spread*, en los sectores ya mencionados, es viable para nuestro país. En ese sentido utilizar los métodos de la valuación aquí expuestos sería una posibilidad.

Apéndice

Valuación con teoría de riesgo neutral.

Suponga un conjunto de estados de precios, todos ellos positivos

$$\Psi_S \qquad s = 1,2,.....,S$$

y el valor de un activo conformado de la forma $d = (d^1, d^2, ..., d^S)$, entonces el precio del activo estaría determinado por

$$P = \sum_{S=1}^{S} d^S \Psi_S \ .$$

Si se normaliza el conjunto de precios, haciendo $\Psi_0 = \sum_{S=1}^{S} \Psi_S \ \Rightarrow \quad q_S = {}^{\Psi_S}\!/\!{}_{\Psi_0}$.

Usando a las q_S como probabilidades artificiales tendríamos

$$P = \Psi_S E(d) \, .$$

Llevando este resultado al caso de una opción *call* podemos decir que el precio de este derivado es:

$$C = \frac{1}{R_T} E(\max(S_T - K, 0)) \, .$$

Donde

R_T es la tasa libre de riesgo del periodo,

$\max(S_T - K, 0)$ es el flujo del derivado en el periodo.

Bibliografía

[1] Bodie ZVI, Merton Robert C. “Finanzas”. Pearson Educación de México. (2003)

[2] Carmona René, Durrleman Valdo. “Pricing and Hedging *Spread* Options”. Society for Industrial and Applied Mathematics. (2003)

[3] Cooper Leon. “Introduction to dynamic programming”. Oxford University Press. (1981)

[4] George L. Nemhauser. “Introduction to dynamic Programming” John Wiley and Sons, Inc. (1966)

[5] Hull John C. “Introducción a los mercados de futuros y opciones”. Prentice Hall. (2002)

[6] Kaufman Arnold. “Métodos y modelos de la programación dinámica: las matemáticas de la empresa”. Ed. Continental. México. (1966)

[7] Kaufmann A. “La Programación dinámica”. Compañía Editorial Continental S.A. de C.V. España. (1969)

[8] Lamothe Fernández Prosper, Pérez Somalo Miguel. “Opciones Financieras y Productos Estructurados”. McGraw-Hill / Interamericana de España. (2003)

[9] Luenberger David G. ¨Investment Sciencie”. Oxford University Press. (1998)

[10] Marín José M., Rubio Gonzalo. “Economía Financiera”. Antoni Bosch editor. (2001)

[11] Smith K. David. “Dynamic Programming, a practical introduction”. Ellis Horwood. Great Britain. (1991)

[12] Stampfli Joseph, Goodman Victor. “Matemáticas para las finanzas, modelado y cobertura”. Internacional Thomson Editores. (2002)

[13] Sven Dano. “Nonlinear and Dynamic Programming”. Ed. Springer-Verlag. (1975)

[14] www.global-derivatives.com . “Global Derivatives – Mountain Range Options”.