UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES CARDINALES TOPOLÓGICAS: TEORÍA DE REFLEJO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

DAVID JACOB RAMÍREZ HERRERA

TUTOR: FIDEL CASARRUBIAS SEGURA

2007

Funciones Cardinales Topológicas: teoría de reflejo

David Jacob Ramírez Herrera

Marzo de 2007

Gracias a todos los que
hicieron esto posible.

Contenido

Introducción

La Topología no fue la invención de un solo hombre; algunos problemas topológicos se encuentran en la obra de Euler, de Möbius y de Cantor, e incluso la palabra misma “topología” había sido utilizada ya en 1847 por J. B. Listting (1808-1882) en el título de su libro *“Vorstudien zur Topologie”* (“Introducción al estudio de la topología”). Pero si queremos fijar una fecha que señale los comienzos “oficiales” de esta rama de la matemática, la más adecuada sería la del año de 1895; el año en que Poincaré publicó su *analysis in Situs* (como se le denominaba a la topología combinatoria en aquella época). En su libro se daba por primera vez un desarrollo sistemático del tema.

La Topología es hoy una rama extensa y fundamental dentro de la matemática con muchos aspectos parciales, pero a grandes rasgos se puede subdividir en dos ramas distintas: Topología Combinatoria o Algebraica y Topología Conjuntista. Poincaré mostró poco entusiasmo por la segunda, y en 1908, dirigiéndose al *Inter-*

nacional Mathematical Congress en Roma, se refirío a la *Mengenlehre* de Cantor como una enfermedad de la que las generaciones posteriores se considerarían completamente curadas [3].

Carl B. Boyer, en su libro *Historia de la matemática*, menciona que se cree que la topología comenzó con el *analisys in situs* de Poncairé, algunos otros sostienen que los orígenes de la topología surgen de la teoría de los conjuntos de Cantor o quizá del desarrollo de la teoría de los espacios abstractos, pero para otros el verdadero fundador de la Topología es Brouwer, especialmente por su teorema de la invariancia topológica de la dimensión de 1911 y por su fusión de los métodos de Cantor con los del "analysis in situs". En cualquier caso, con Brouwer comenzó el período de evolución y desarrollo intensivo de la topología que ha continuado hasta el día de hoy [3]. Y si se quiere hablar ahora de un libro que señale el nacimiento de la topología conjuntista como disciplina independiente, ese libro es: *Grundzüge der Mengenlehre* de Felix Hausdorff [16].

Hace ya tiempo que Cantor introdujo el concepto de correspondencia uno-a-uno para poder medir el tamaño de los infinitos [28]. Esta manera de comparar infinitos la seguimos usando hoy como una herramienta indispensable, de hecho vemos que en el tema que atañe a este trabajo se usa frecuentemente. Como consecuencia de esta correspondencia uno-a-uno surgió la hipótesis del continuo [28], la cual es hoy de gran importancia en varias ramas de las matemáticas y no solamente en la teoría de conjuntos.

La topología general (propiamente, la Topología Conjuntista) puede ser considerada como surgida de la teoría de conjuntos. Sin embargo, hoy la topología y la teoría de conjuntos son dos ramas distinguibles una de otra, con sus diferentes métodos de prueba y aplicación. No obstante, la naturaleza conjuntista de la topología hace apropiada la aplicación de métodos de la teoría conjuntista y muchos de los problemas de la teoría de conjuntos tienen sus raíces en la topología. Esto ha hecho posible una interacción entre las dos disciplinas cada vez más profunda. Este acercamiento es más notorio, quizá, en los trabajos hechos en la escuela de Moscú de topología, a principios de los años veinte. De esta parte, de esta nueva interacción, es la teoría de las funciones cardinales. Éstas extienden propiedades topológicas importantes, como base numerable, espacios separables, primero numerable, a cardinalidades superiores. Así las funciones cardinales nos permiten formular, generalizar, y probar resultados de manera sistemática y formal, también nos permiten hacer comparaciones cuantitativas precisas entre ciertas propiedades topológicas. Por ejemplo sabemos que cualquier espacio topológico con base numerable admite un subconjunto denso numerable y la “contraparte” de este resultado, desde la teoría de las funciones cardinales, establece que un espacio regular con un subconjunto denso numerable tiene una base de cardinalidad $\leqslant 2^{\omega}$. La teoría de las funciones cardinales es una de las más útiles e importantes herramientas que unifican conceptos en la así llamada topología de conjuntos [18].

Es importante mencionar que la teoría de las funciones cardinales no comenzó sino hasta mediados de los años 60, por supuesto, ya se habían desarrollado muchas técnicas fundamentales y resultados aislados en años anteriores, pero no con el lenguaje de la teoría de las funciones cardinales propiamente. Los conocimientos sobre números cardinales y ordinales, así como la construcción transfinita, son requisitos para la comprensión de las funciones cardinales. Las ideas sobre estos temas, fueron ampliamente desarrolladas hace ya bastante tiempo, y algunos de los notables trabajos se los debemos a Cantor, Alexandroff, Urysohn, Kuratowski, Sierpiński y Hausdorff, entre otros [18]. Las funciones cardinales, como el número de puntos, el peso, el carácter o la densidad de un espacio topológico aparecen de manera natural y pueden ser tratados en la topología general. El primer trabajo, más o menos sistemático de algunas de estas funciones, se encuentra en el libro de Kowalski [25].

Citando a Hodel [18] a continuación damos un breve resumen de resultados en la teoría de las funciones cardinales entre los años 1920 hasta 1970. Durante los años veintes Alexandroff y Urysohn desarrollaron la teoría básica de espacios compactos. Un resultado obtenido en esta época establece que un espacio compacto, perfectamente normal tiene cardinalidad a lo más 2^ω. Alexandroff y Urysohn se preguntaron si todo espacio compacto y primero numerable tiene cardinalidad a lo más 2^ω. En 1937, Čech y Posṕišil probaron el resultado en la cardinalidad de espacios compactos. Una consecuencia de su teorema es que todo espacio compacto y primero numerable es, o numerable o bien tiene cardinalidad $\geqslant 2^\omega$. A mediados de los cuarenta, Hewitt, Marczewski y Pondiczery probaron de manera independiente un muy importante teorema sobre la densidad en espacios producto. La versión numerable de sus resultados establece que el producto de a lo más 2^ω espacios separables es separable. En 1965, de Groot publicó un artículo en el cual introdujo importantes funciones cardinales. La versión numerable de uno de sus resultados establece que un espacio de Hausdorff en el cual todo subespacio de éste es Lindelöf, tiene cardinalidad a lo más 2^ω. A finales de los sesenta Hajnal y Juhász publicaron dos importantes artículos los cuales profundizan el trabajo de de Groot. En 1969, Arhangel´skiĭ resolvió el viejo problema de Alexandroff y Urysohn. La versión numerable de su desigualdad, fundamental en la teoría de las funciones cardinales, establece que todo espacio de Hausdorff, Lindelöf y primero numerable tiene cardinalidad a lo más 2^ω.

En "tiempos recientes" hemos sido testigos del rápido desarrollo de la Topología de Conjuntos, y dentro de ella, de la teoría de las funciones cardinales topológicas, de sus diferentes métodos de trabajo, y de sus variadas aplicaciones. Esta obra es un intento por dar a conocer uno de esos métodos: el estudio de las propiedades de reflejo de propiedades topológicas.

El estudio de las propiedades de reflejo tiene sus raíces en la misma Teoría de Conjuntos; en este trabajo se pretende dar una idea de cómo puede trabajarse con este método, y muy particularmente, de cómo se puede trabajar con éste en el ámbito de las funciones cardinales topológicas. La noción de reflejo en Topología cobra importancia como un método de estudio de las propiedades topológicas. La idea del método de reflejo puede resumirse de la siguiente manera: si un espacio X no tiene cierta propiedad $\mathcal{P}$, entonces debe existir un subespacio "pequeño" (pequeño en algún sentido) que no tiene la propiedad $\mathcal{P}$; o equivalentemente, si todo subespacio "pequeño" de X tiene $\mathcal{P}$, entonces el espacio X tiene $\mathcal{P}$. Es decir, la idea del método es reducir el estudio de objetos "complejos" al estudio de objetos más simples, aplicar nuestras herramientas matemáticas a los últimos; "regresar" y usar este nuevo conocimiento para clarificar la estructura de los objetos más complejos.

El objetivo principal del presente trabajo es dar una introducción al estudio de las propiedades de reflejo de las distintas funciones cardinales topológicas. De manera particular, exponemos detalladamente los métodos utilizados en las demostraciones de los dos teoremas de reflejo más importantes en el ámbito de las funciones cardinales topológicas: el teorema de reflejo para el peso, debido a Juhász y Hajnal, y el teorema de metrización de Alan Dow.

En el primer capítulo se dan las definiciones básicas para el buen entendimiento de este trabajo. Se explica lo que es una función cardinal topológica, y se establecen las definiciones de las funciones cardinales más utilizadas a través de toda la tesis. Además, se muestran las relaciones más elementales que existen entre las diferentes funciones cardinales con las que trabajamos. Exponemos diversos ejemplos con la idea de hacer la exposición más entendible.

En el segundo capítulo nos enfocamos a las nociones de reflejo y reflejo fuerte, a la de cadena creciente de subespacios y a la propiedad de Darboux, así como a las diversas propiedades que estas nociones poseen. Ejemplificamos varias de esas nociones utilizando a las funciones cardinales topológicas que son definidas en el primer capítulo. Además hacemos notar las relaciones que existen entre todas estas nociones.

En el último capítulo fortalecemos algunas de las condiciones de los espacios topológicos para que, con ello, podamos garantizar que ciertas funciones cardinales puedan tener alguna propiedad de reflejo. Vemos que una propiedad que nos va a permitir generar "buenos" teoremas de reflejo para varias funciones cardinales, será la compacidad. Vemos también el importante teorema de metrización de Alan Dow, y uno de los teoremas más importantes que muestra las fuertes propiedades de reflejo que tiene el peso, dicho teorema es debido a Hajnal y Juhász.

Por lo que toca a las notaciones y terminología utilizadas en esta tesis, debemos señalar que seguimos las líneas marcadas por [19], [18] y [9]. En la bibliografía al final de la tesis, aparecen obras que son excelentes referencias para el estudio de hechos básicos de la Topología General, como por ejemplo [30] y [9], y para el estudio de hechos básicos acerca de funciones cardinales topológicas, como lo son: [18], [23] y [24].

David Jacob Ramírez Herrera

Capítulo 1

Funciones Cardinales

En este capítulo damos la definición de lo que es una función cardinal, y las definiciones de aquéllas que son frecuentemente utilizadas a través de este trabajo. También establecemos algunas propiedades de las funciones cardinales que nos serán de mucha utilidad. Se analizan algunas relaciones que hay entre distintas funciones cardinales y veremos algunas cotas interesantes para espacios con propiedades especiales.

A través de todo el texto, a menos que se especifique explícitamente otra cosa, ω representará el más pequeño número cardinal numerable infinito.

1.1 Funciones cardinales topológicas

1.1 Definición. Una *función cardinal* es una relación ϕ que asigna a cada espacio topológico X un número cardinal $\phi(X)$ tal que $\phi(X) = \phi(Y)$ para todo par de espacios topológicos X , Y homeomorfos.

1.2 Observación. El lector debe notar que hay un abuso de lenguaje en la definición anterior al utilizar la palabra *"función"*, ya que la clase de todos los espacios topológicos no es un conjunto, y por ello lo que hemos llamado función cardinal puede no ser una función en el sentido estricto del sistema axiomático ZFC.

El ejemplo más natural de función cardinal es la *cardinalidad*, denotada con el símbolo $|\cdot|$. Dicha función cardinal asocia a cada espacio topológico X el número de elementos que éste posee. El valor de esta función cardinal en X será denotado por $|X|$.

Otra importante, y muy útil, función cardinal es el peso. Esta función cardinal mide la mínima cardinalidad que puede tener una base de un espacio topológico.

1.3 Definición. Sea X un espacio topológico. El *peso* de X es el número cardinal infinito:

$$w(X) = mín\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base de } X\} + \omega.$$

Es claro que un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad si y sólo si $w(X) = \omega$.

La siguiente función cardinal proporciona información de las bases locales en los espacios topológicos.

1.4 Definición. Sea X un espacio topológico.

(1) Dado $x \in X$, el *carácter* de X *en el punto* x es el número cardinal infinito:

$$\chi(X, x) = mín\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x) \text{ es base local para } x\} + \omega$$

(2) El *carácter* del espacio X es el número cardinal

$$\chi(X) = sup\{\chi(X, x) : x \in X\}.$$

Al igual que en el caso del peso, la función cardinal carácter permite caracterizar a clases de espacios topológicos. En este caso se tiene que un espacio topológico X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \omega$.

Las funciones cardinales cardinalidad, peso y carácter tienen la interesante propiedad de que su valor no se incrementa al ser "calculadas" en subespacios topológicos. Esta propiedad se conoce como monotonía. Formalmente, tenemos la siguiente definición.

1.5 Definición. Se dice que una función cardinal ϕ es *monótona* si, siempre que X sea un espacio topológico y Y un subespacio de X, se tiene que $\phi(Y) \leqslant \phi(X)$.

1.6 Proposición. Las funciones cardinales $|\cdot|, w, \chi$ son monótonas.

Demostración. Sea X un espacio topológico y Y un subespacio de X.
Es claro que $|Y| \leqslant |X|$. De esta manera $|\cdot|$ es una función cardinal monótona.
Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X, con la propiedad de que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Consideremos ahora a la siguiente familia de subconjuntos de Y:

$$\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$$

No es difícil mostrar que $\mathcal{B}_Y$ es una base para la topología de Y, esta base cumple que $|\mathcal{B}_Y| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X)$; y por definición de peso, tenemos que $w(Y) \leqslant |\mathcal{B}_Y| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X)$, con lo que queda probado que la función cardinal peso es monótona.
Procediendo de manera semejante probaremos que la función cardinal carácter es monótona. Sea $x \in Y$ y sea $\mathcal{B}_{(x,X)}$ una base local para x en X tal que $|\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(X, x)$. Consideremos la colección

$$\mathcal{B}_{(x,Y)} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{B}_{(x,X)}\}.$$

Entonces $\mathcal{B}_{(x,Y)}$ es una base local para x en Y que cumple $|\mathcal{B}_{(x,Y)}| \leqslant |\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(X,x) \leqslant \chi(X)$. Por definición de la función cardinal carácter de Y en el punto x, tenemos que $\chi(Y,x) \leqslant |\mathcal{B}_{(x,Y)}| \leqslant |\mathcal{B}_{(x,X)}| = \chi(X,x) \leqslant \chi(X)$. Entonces $\chi(X)$ es cota superior para el conjunto $\{\chi(Y,x) : x \in Y\}$, y dado que $\chi(Y)$ es el supremo de este conjunto, tenemos que $\chi(Y) \leqslant \chi(X)$, con lo que concluimos que la función cardinal carácter es monótona. $\square$

La siguiente proposición nos muestra la relación que hay entre el peso y el carácter.

1.7 Proposición. La función cardinal peso domina a la función cardinal carácter, es decir, $\chi(X) \leqslant w(X)$ para todo espacio topológico X.

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ una base de la topología de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Elijamos $x \in X$ y definamos:

$$\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{B}_x$ es base local para $x \in X$, entonces por definición de $\chi(X,x)$, tenemos que

$$\chi(X,x) \leqslant |\mathcal{B}_x| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X).$$

Es decir, $w(X)$ es cota superior de $\{\chi(X,x) : x \in X\}$ y como $\chi(X)$ es supremo de este conjunto, tenemos que $\chi(X) \leqslant w(X)$; con lo que queda demostrada la proposición. $\square$

Note que la propiedad enunciada en la proposición anterior puede generalizar a cardinales mayores que ω la conocida propiedad de que todo espacio segundo numerable es un espacio primero numerable. Esto es de hecho un rasgo distintivo de las funciones cardinales: permiten extender a cardinales superiores propiedades clásicas en las que están inmiscuidos cardinales finitos o el cardinal ω. Otro rasgo que distingue a las funciones cardinales, es que ellas nos permiten, en varios casos, hallar cotas para las cardinalidades de los espacios topológicos, y con ello obtener información cualitativa de los mismos. En este sentido se enuncia la siguiente proposición.

1.8 Proposición. Si X es T_0, entonces $|X| \leqslant 2^{w(X)}$.

Demostración. Sea X un espacio topológico T_0 y sea $\mathcal{B}$ una base para X, con $|\mathcal{B}| = w(X)$. Definamos $\varphi : X \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ como $\varphi(p) = \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$. Como $X \in T_0$ se tiene que φ es uno-a-uno (sean $p \neq q$, como $X \in T_0$ $\exists$ $V \in \mathcal{T}(X)$ tal que $p \in V$ y $q \notin V$ note ahora que $V \in \{B \in \mathcal{B} : p \in B\}$, y que $V \notin \{B \in \mathcal{B} : q \in B\}$ lo cual implica que $\varphi(p) \neq \varphi(q)$). Con esto podemos concluir que $|X| \leqslant 2^{w(X)}$. □

Otra importante función cardinal que mide la mínima cardinalidad para un subconjunto denso de un espacio topológico es la densidad, la cual definimos enseguida.

1.9 Definición. Sea X un espacio topológico. La *densidad* de X es el número cardinal infinito:

$$d(X) = mín\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } X\} + \omega.$$

Es claro que utilizando a la función cardinal d podemos caracterizar a la clase de los espacios topológicos separables. Un espacio topológico X es separable si y sólo si $d(X) = \omega$.

Toda función cardinal ϕ tiene asociada una función cardinal monótona llamada *versión hereditaria* de ϕ, esta función cardinal se define de la siguiente forma:

$$h\phi(X) = sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}$$

Es fácil convencerse que $h\phi$ es efectivamente una función cardinal monótona, y que si ϕ es una función cardinal monótona entonces $\phi = h\phi$ (de hecho ϕ es monótona si y sólo si $\phi = h\phi$). Por esto último es que en el caso de las funciones cardinales $|\cdot|, w$ y χ, se tiene que $|\cdot| = h|\cdot|, w = hw$ y $\chi = h\chi$.

Para el caso de la función cardinal d la situación cambia, ya que dicha función cardinal no es monótona (por ello $d \neq hd$). Para notar esto fijémonos en en el siguiente ejemplo. Sea X el plano de Moore. Entonces, sabemos que $d(X) = \omega$, pero para el subespacio $Y = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ la topología sería la discreta, así que $d(Y) = \mathfrak{c}$.

La versión hereditaria de la densidad es una función cardinal muy importante, por lo que a continuación daremos explícitamente su definición.

1.10 Definición. Sea X un espacio topológico. La *densidad hereditaria* de X es el número cardinal:

$$hd(X) = sup\{d(Y) : Y \subseteq X\}$$

Es fácil verificar que $hd \leqslant |\cdot|$ y que $hd \leqslant w$. Y no es difícil notar que hay ejemplos de espacios topológicos en donde se da la desigualdad estricta: si X es la recta real con la topología usual, entonces $hd(X) = \aleph_0 < 2^{\aleph_o} = |X|$, y si X es la línea de Sorgenfrey, entonces $hd(X) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = w(X)$.

Para una prueba de esta última desigualdad vea el ejemplo 1.29.

Otra función cardinal que tiene una estrecha relación con la función cardinal d es la celularidad ó número de Souslin. Primeramente introducimos la definición de familia celular.

1.11 Definición. Sea $(X, \mathcal{T}(X))$ un espacio topológico. Se dice que $\mathcal{C}$ es una *familia celular* en X si:

(1) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}(X) \backslash \{\emptyset\}$ y

(2) $x \cap y = \emptyset$ para todo $x, y \in \mathcal{C}$ con $x \neq y$.

Notemos que el conjunto de familias celulares de un espacio topológico X es no vacía, ya que $\{X\}$ es una familia celular (siempre que $X \neq \emptyset$).

Llamamos *celularidad (ó número de Souslin)* de X al número cardinal infinito:

$$c(X) = sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

La siguiente proposición muestra la relación que hay entre las funciones cardinales c, d y w.

1.12 Proposición. El peso domina a la densidad y la densidad domina a la celularidad, es decir, $c(X) \leqslant d(X) \leqslant w(X)$ para todo espacio topológico X.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathcal{T}(X)$ tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Elijamos un único x_B para cada elemento $B \in \mathcal{B}$ no vacío, y denotemos al conjunto de éstos como:

$$D = \{x_B \in B : B \in \mathcal{B} \backslash \{\emptyset\}\}.$$

El conjunto D es denso en X, ya que escogimos un elemento de cada miembro de la base $\mathcal{B}$ de la topología de X; note ahora que por la definición de D su cardinalidad es menor o igual que la cardinalidad de $\mathcal{B}$. Entonces $|D| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X)$, y por la definición de densidad tenemos que $d(X) \leqslant |D| \leqslant w(X)$.
Para la otra desigualdad, tomemos $D \subseteq X$ denso tal que $|D| = d(X)$ y sea $\mathcal{G} = \{U_t\}_{t \in T}$ una familia celular de X. Como D es denso se tiene que $U_t \cap D \neq \emptyset$ para cada $t \in T$. Si para cada t elegimos un único elemento $y_t \in U_t \cap D$, podemos definir la función:

$$\phi : \mathcal{G} \to D, \text{por la fórmula } : \phi(U_t) = y_t \; \forall t \in T.$$

Vamos a comprobar que ϕ es una función inyectiva. Lo haremos suponiendo que no lo es para obtener una contradicción. Sean $U_{t_1} \neq U_{t_2}$ y supongamos que $y_{t_1} = y_{t_2}$. Entonces $y_{t_1} \in U_{t_1} \cap D$ y también $y_{t_1} \in U_{t_2} \cap D$, lo cual nos dice que $U_{t_1} \cap U_{t_2} \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{G}$ es una familia celular. De esta forma hemos comprobado que ϕ es uno-a-uno. Podemos concluir entonces que $|\mathcal{G}| \leqslant |D| \leqslant d(X)$ y como $\mathcal{G}$ fue arbitraria, $d(X)$ es cota superior de $\{|G| : G \text{ es familia celular de } X\}$ y dado que la celularidad es el supremo de este conjunto obtenemos que $c(X) \leqslant d(X)$. □

A partir de la anterior proposición podemos concluir que todo espacio separable tiene celularidad numerable. Hemos hecho notar anteriormente que d no es una función cardinal monótona. A pesar de esto, esta función cardinal y el número de Souslin tienen un comportamiento de monotonía cuando se aplican a subespacios abiertos.

1.13 Proposición. Sea X un espacio topológico. Si Y es un subespacio abierto no vacío de X, entonces $d(Y) \leqslant d(X)$ y $c(Y) \leqslant c(X)$.

Demostración. Sea $D \subseteq X$ denso en X, con la propiedad de que $|D| = d(X)$. Definamos $D' = D \cap Y$. Veremos que D' es denso en Y.

Si nos fijamos en la topología de Y, observamos que todo abierto en Y es la intersección de un abierto en X con el subespacio Y. Entonces para todo $U \subseteq Y$ abierto no vacío existe $V \subseteq X$ abierto no vacío en X tal que $U = V \cap Y$. Así

$$U \cap D' = (V \cap Y) \cap D.$$

Pero $(V \cap Y) \cap D \neq \emptyset$, por ser D denso en X y $(V \cap Y)$ un subconjunto abierto no vacío de X. Con lo que se prueba que D' es denso en Y, y entonces por definición de densidad tenemos que

$$d(Y) \leqslant |D'| \leqslant |D| = d(X)$$

con lo que podemos concluir que $d(Y) \leqslant d(X)$.

Por otro lado, como todo abierto en Y es abierto en X (por ser Y abierto en X), tenemos que toda familia celular de Y es una familia celular de X, y por lo tanto $c(Y) \leqslant c(X)$. $\square$

1.14 Proposición. Sea X un espacio topológico. Si $D \subseteq X$ es denso, entonces $d(X) \leqslant d(D)$ y $c(D) \leqslant c(X)$.

Demostración. Sea $D \subseteq X$ denso en X y sea $A \subseteq D$ denso en D tal que $|A| = d(D)$. Es suficiente probar que A es un subconjunto denso en X. Sea U un abierto no vacío en X. Entonces el conjunto $D \cap U$ es un abierto en la topología de D, y además, por ser D denso en X, sabemos que es no vacío.
Como $A \cap U \supseteq A \cap (D \cap U) \neq \emptyset$ (esto último porque A es denso en D), tenemos que $A \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, A es un subconjunto denso de X. Con lo anterior podemos concluir que $d(X) \leqslant |A| = d(D)$.

Por otro lado, dada una familia celular en D, ésta induce una familia celular en X. Veamos por qué razón. Dados dos conjuntos abiertos ajenos y no vacíos U' y V' en D, existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $U' = U \cap D$ y $V' = V \cap D$; observemos que U y V son ajenos, ya que si por el contrario $U \cap V \neq \emptyset$, entonces para el abierto no vacío $U \cap V$, se tendría que $(U \cap V) \cap D = (U \cap D) \cap (V \cap D) = U' \cap V' = \emptyset$, contradiciendo así la densidad del conjunto D. Podemos entonces concluir que $c(X)$ es cota superior del conjunto de las cardinalidades de las familias celulares de D, de donde tenemos que $c(D) \leqslant c(X)$.

$\square$

La siguiente proposición nos dota de una interesante cota, en términos de la función cardinal d, para la cardinalidad de los espacios Hausdorff.

1.15 Proposición. (de Groot) Si X es T_2, entonces $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$.

Demostración. Sea $D \subseteq X$ denso tal que $|D| = d(X)$. Para todo $x \in X$ sea $D_x = \{G \cap D : x \in G, G \in \mathcal{T}(X)\} \subseteq \mathcal{P}(D)$. Ahora notemos que $x \neq y$ implica que $D_x \neq D_y$ por ser X un espacio de Hausdorff. Entonces la función $g : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ dada por $g(x) = D_x \ \forall x \in X$, es inyectiva. Por ello, $|X| \leqslant |\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))| = 2^{2^{|D|}} = 2^{2^{d(X)}}$. $\square$

Las funciones cardinales $|\cdot|, w$ y d nos proporcionan información global de un espacio topológico, a diferencia de lo que ocurre con la función cardinal χ que proporciona información local. Esto sugiere una manera en que podemos clasificar a las funciones cardinales: en globales o locales. Una función del segundo tipo, es el pseudocarácter de un espacio topológico (ver Definición 1.21), definida únicamente para espacios topológicos que satisfacen el axioma de separación T_1. Por otro lado debemos comentar que hay funciones cardinales que nos proporcionan tanto información local como global; de este último tipo de funciones cardinales es el *peso separante*.

1.16 Definición. Una cubierta $\mathcal{A}$ de un conjunto E se llama *separante* si para cada punto $p \in E$, tenemos que:

$$\bigcap \{A \in \mathcal{A} : p \in A\} = \{p\}$$

.

Como ejemplo, obsérvese que la familia

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(x - \frac{1}{n} \ , \ x + \frac{1}{n} \right) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una cubierta abierta separante en $\mathbb{R}$ con la topología usual, ya que

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(x - \frac{1}{n} \ , \ x + \frac{1}{n} \right)$$

1.17 Observación. Un espacio topológico X tiene una cubierta abierta separante si y sólo si X es un espacio T_1.

Demostración. Primero supongamos que X es T_1 y demostremos que X tiene una cubierta abierta separante.
Definamos
$$\mathcal{B} = \{X\backslash\{x\} : x \in X\}$$
Vamos a probar que $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta separante de X. Como X es T_1, tenemos que $X\backslash\{x\}$ es abierto en X para toda $x \in X$, con lo que obtenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(X)$.
Ahora, $\{x\} \subseteq X\backslash\{y\}$ para toda $y \neq x$, entonces
$$\{x\} \subseteq \bigcap\{X\backslash\{y\} : y \neq x\}.$$
Para la otra contención, supongamos que existe $z \neq x$ tal que $z \in \bigcap\{X\backslash\{y\} : y \neq x\}$. Por ello, para todo $y \neq x$, se tiene que $z \in X\backslash\{y\}$. Pero $z \neq x$, por lo tanto $z \in X\backslash\{z\}$, lo cual es una contradicción. En consecuencia,
$$\bigcap\{X\backslash\{y\} : y \neq x\} \subseteq \{x\}.$$
Con lo que queda probada la primera implicación.
Para probar la otra implicación supongamos que existe una cubierta abierta separante $\mathcal{B}$ de X. Para demostrar que X es T_1 basta ver que $\{x\}$ es cerrado para toda $x \in X$.
Entonces sea $x \in X$ y elijamos $y \in X\backslash\{x\}$. Como $y \neq x$ existe $B \in \mathcal{B}$ con $y \in B$ tal que $x \notin B$. Entonces $y \in B \subseteq X\backslash\{x\}$, con lo cual probamos que $X\backslash\{x\}$ es abierto en X. Por lo tanto X es T_1. □

1.18 Definición. Sea X un espacio topológico. El *peso separante* de X, denotado por $sw(X)$, es el más pequeño cardinal infinito κ tal que X tiene una cubierta abierta separante $\mathcal{V}$ con $|\mathcal{V}| \leqslant \kappa$.

1.19 Definición. Sea X un espacio topológico. El *peso punto separante* de X, denotado como $psw(X)$, es el más pequeño cardinal infinito κ tal que X tiene una cubierta abierta separante $\mathcal{V}$ con $|\{A \in \mathcal{V} : p \in A\}| \leqslant \kappa$ para cada $p \in X$.

Es claro a partir de la definición que $psw(X) \leqslant sw(X)$.

1.20 Proposición. Si X es un espacio T_1, entonces $|X| \leqslant 2^{sw(X)}$.

Demostración. Sea C una cubierta abierta separante de X, tal que $|C| = sw(X)$ (la existencia de tal cubierta esta garantizada por ser X un espacio T_1 veáse la Observación 1.17). Como C es cubierta separante,

$$(*) \qquad \forall x \in X : \{x\} = \bigcap\{U \in C : x \in U\}$$

Definimos $f : X \to \mathcal{P}(C)$ por medio de: $f(x) = \{U \in C : x \in U\}$ para toda $x \in X$.
La propiedad $(*)$ permite probar que f es inyectiva y por lo tanto tendríamos que $|X| \leqslant 2^{sw(X)}$. □

Observe que, por la Proposición 1.20, si X es un espacio T_1, con $|X| > 2^{\omega}$ necesariamente $sw(X) > \omega$.

Por otro lado notemos que para espacios discretos X, se tiene que $psw(X) = \omega$. Con lo que si X es un espacio discreto, tal que $|X| > 2^{\omega}$, tenemos, por lo anterior, que $psw(X) < sw(X)$.

1.21 Definición. (1) Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(X)$ es una *pseudobase* de x en X si $\{x\} = \bigcap\{B : B \in \mathcal{B}\}$

(2) El *pseudocarácter* de X en x, es el número cardinal

$$\psi(X, x) = mín\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una pseudobase de x en } X\} + \omega;$$

(3) El *pseudocarácter* de X es el número cardinal

$$\psi(X) = sup\{\psi(X, x) : x \in X\}.$$

Otra función cardinal que nos proporciona información local de un espacio topológico es la *estrechez*.

1.22 Definición. Sea X un espacio topológico.

(1) La *estrechez* $t(X,x)$ de X en el punto x es el más pequeño de los números cardinales infinitos κ que tienen la siguiente propiedad: *Para cada* $A \subseteq X$ *tal que* $x \in cl_X(A)$*, existe* $B \subseteq A$ *de tal manera que* $|B| \leqslant \kappa$ *y* $x \in cl_X(B)$.

(2) La *estrechez* de X es el número cardinal infinito

$$t(X) = sup\{t(X,x) : x \in X\}$$

Continuamos con una serie de definiciones que se usarán posteriormente, y algunos ejemplos que nos harán comprender éstas con mayor claridad.

1.23 Definición. Sea X un espacio topológico. La *amplitud de* X es el número cardinal

$$s(X) = sup\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq X, \mathcal{D} \text{ es discreto } \} + \omega$$

Note que la línea de Sorgenfrey tiene amplitud igual a $\aleph_0$ (ver el ejemplo 1.29).

Sea κ un cardinal infinito. Un espacio topológico X es llamado κ*-Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leqslant \kappa$.

1.24 Definición. Sea X un espacio topológico. El *grado de Lindelöf* de X es el número cardinal

$$L(X) = mín\{\kappa \geqslant \omega : X \text{ es } \kappa\text{-Lindelöf } \}.$$

1.25 Definición. Sea X un espacio topológico. La *extensión de* X es el número cardinal infinito

$$e(X) = sup\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq X, \mathcal{D} \text{ es cerrado y discreto}\} + \omega.$$

Recordemos que una familia $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una *red* para X si para cada $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$, $\exists\, N \in \mathcal{N}$ tal que $x \in N \subseteq U$.

1.26 Definición. Sea X un espacio topológico. El *peso de red de* X es el número cardinal:

$$nw(X) = \textit{mín}\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N} \text{ es una red para } X\} + \omega.$$

1.27 Definición. Sea $(X, \mathcal{T}(X))$ un espacio topológico.

(1) Decimos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(X) \backslash \{\emptyset\}$ es una *π-base* de X si para todo $G \in \mathcal{T}(X)$ distinto del vacío, existe un $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq G$.

(2) El *π-peso* es el número cardinal

$$\pi w(X) = \textit{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una } \pi\text{-base de } X\} + \omega.$$

Resumiremos algunas desigualdades de funciones cardinales en el siguiente diagrama (ver Proposición 1.28).

$$\begin{tikzcd}
 & w(X) & & |X| & \\
 & & nw(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & hd(X) \arrow[ur] & & hL(X) \arrow[ul] & \\
d(X) \arrow[ur] & & s(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & L(X) \arrow[ul] \\
 & c(X) \arrow[ul] \arrow[ur] & & e(X) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En la siguiente proposición establecemos algunas propiedades importantes de las funciones cardinales d, w, πw, hL, nw, c, y χ que serán frecuentemente utilizadas a través de este trabajo.

1.28 Proposición. Sean X y Z espacios topológicos.

(1) El π-peso domina a la densidad y es dominado por el peso, es decir, $d(X) \leqslant \pi w(X) \leqslant w(X)$.

(2) $hL(X) \leqslant nw(X)$.

(3) Si Z es imagen continua de X entonces $c(Z) \leqslant c(X)$ y $d(Z) \leqslant d(X)$;

(4) Si Z es imagen continua y abierta de X entonces $w(Z) \leqslant w(X)$ y $\chi(Z) \leqslant \chi(X)$.

Demostración. (1) La prueba para la primera desigualdad es casi la misma que en la proposición 1.12 y para la otra desigualdad, sólo hay que fijarse en que toda base es una π-base.

(2) Sea $\mathcal{N}$ una red para X, con $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Sea Y un subespacio de X. Vamos a probar que Y es $nw(X)$-Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Definamos $R = \{N \in \mathcal{N} :$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $N \cap Y \subseteq U\}$. Claramente $|R| \leqslant |\mathcal{N}| = nw(X)$. Para cada $N \in R$ fijemos un elemento $U_N \in \mathcal{U}$ tal que $N \cap Y \subseteq U_N$.
Afirmación: La colección $\mathcal{V} = \{U_N : N \in R\}$, es una subcubierta de $\mathcal{U}$.
En efecto: Claramente, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Así que bastará probar que $Y \subseteq \cup\mathcal{V}$. Para ello, sea $y \in Y$. Entonces existe $U_y \in \mathcal{U}$, tal que $y \in U_y$. Con lo que existe V, abierto de X tal que $V \cap Y = U_y$. Como $y \in V$ y $\mathcal{N}$ es red en X, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $y \in N \subseteq V$. Entonces $y \in N \cap Y \subseteq V \cap Y \subseteq U_y$. Note ahora que esto último implica que $N \in R$ (en consecuencia $R \neq \emptyset$). Consideremos ahora al elemento $U_N \in \mathcal{U}$ tal que $N \cap Y \subseteq U_N$. Entonces $y \in N \cap Y \subseteq U_N$. Por lo tanto, $y \in U_N$ con lo que podemos concluir que $Y \subseteq \cup\mathcal{V}$.
Resumiendo, hemos probado que Y es $nw(X)$-Lindelöf. Entonces $L(Y) \leqslant nw(X)$. En consecuencia, $hL(X) \leqslant nw(X)$.

(3) Sea D un subconjunto denso en X tal que $|D| = d(X)$, sólo hay que probar que $f(D)$ es denso en Z. Como f es sobre y D denso en X, tenemos que $Z = f(X) = f(cl(D))$ y por la continuidad de f tenemos que $f(cl_X(D)) \subseteq cl_Z(f(D))$, con lo que podemos concluir que $Z = cl_Z(f(D))$ y de esta manera $f(D)$ es denso en Z.

Para la otra desigualdad: Sea $\mathcal{B}$ una familia celular en Z. Fijémonos en $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Demostraremos que $f^{-1}(\mathcal{B})$ es una familia celular en X. Por ser f sobre y $\mathcal{B}$ una familia celular , $\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{B})$. Ahora supongamos que $f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \neq \emptyset$, para $B, B' \in \mathcal{B}$ distintos, entonces existe $x \in f^{-1}(B \cap B')$, aplicando f tenemos que $f(x) \in B \cap B'$ contradiciendo el hecho que $\mathcal{B}$ es una familia celular. Con lo que concluimos que $c(Z) \leqslant |f^{-1}(\mathcal{B})| \leqslant c(X)$.

(4) Sea $\mathcal{B}$ una base de X tal que $|\mathcal{B}| = w(X)$. Vamos a probar que $f(\mathcal{B}) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ es base para Z. Sea $U \subseteq Z$ abierto. Como f es continua, existe $\{C_s\}_{s\in S} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $f^{-1}(U) = \bigcup_{s\in S} C_s$. Entonces $U = \bigcup_{s\in S} f(C_s)$. Note que cada elemento $f(C_s) \in f(\mathcal{B})$.
Como los elementos de $f(\mathcal{B})$ son subconjuntos abiertos de Z (puesto que $\mathcal{B}$ es base de X y f es abierta), tenemos que $f(\mathcal{B})$ es una base de Z. Así que $w(Z) \leqslant |f(\mathcal{B})| \leqslant |\mathcal{B}| = w(X)$.
Probaremos ahora que $\chi(Z) \leqslant \chi(X)$. Para ello consideremos un punto $z \in Z$. Como f es sobreyectiva, existe $x \in X$, tal que $f(x) = z$. Tomemos una base local $\mathcal{B}_x$ de x en X tal que $|\mathcal{B}_x| = \chi(X, x)$. Como f es abierta, la colección $f(\mathcal{B}_x) = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_x\}$ está formada por subconjuntos abiertos de Z.
Afirmación: $f(\mathcal{B}_x)$ es base local de Z en z.
En efecto: es claro que $z \in f(B)\ \ \forall\ \ B \in \mathcal{B}_x$. Sea U un abierto en Z tal que $z \in U$. Entonces $x \in f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U)$ es un abierto en X. Como $\mathcal{B}_x$ es base local de X en x, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq f^{-1}(U)$. Entonces $z = f(x) \in f(B) \subseteq U$.
Como $f(\mathcal{B}_x)$ es base local de Z en z, tenemos que $\chi(Z, z) \leqslant |f(\mathcal{B}_x)| \leqslant |\mathcal{B}_x| = \chi(X, x) \leqslant \chi(X)$. Por lo tanto, $\chi(Z) \leqslant \chi(X)$.
$\square$

1.29 Ejemplo. Veamos que si X es la línea de Sorgenfrey, entonces $hL(X) = hd(X) = \aleph_0 < w(X)$.

Comencemos por la segunda desigualdad. Vamos a probar que ninguna colección de abiertos $\mathcal{R}$ de cardinalidad $< \mathfrak{c}$ puede ser una base para la recta de Sorgenfrey. Definamos como $B = \{A \in \mathcal{R} : A$ es acotado inferiormente$\}$. Si $B = \emptyset$ entonces el conjunto abierto $[1, 2)$ no puede ser cubierto por ninguna subcolección de $\mathcal{R}$. Así que podemos suponer que B no es vacío. Claramente la cardinalidad de B es menor estricto que $\mathfrak{c}$. Para cada $A \in B$, sea $\alpha_A = inf A$. La colección $D = \{\alpha_A : A \in B\}$ tiene cardinalidad menor que $\mathfrak{c}$. Entonces existe un punto $x \in \mathbb{R} \setminus D$.
Afirmacion Para el abierto $[x, x+1)$ no existe subcolección de $\mathcal{R}$ cuya unión sea igual a $[x, x+1)$.
En efecto, supongase que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ es tal que $[x, x+1) = \bigcup_{A\in\mathcal{S}} A$. Entonces para toda $A \in \mathcal{S}$ se tiene que $A \subseteq [x, x+1)$. Así que $\alpha_A \geqslant x$ para toda $A \in \mathcal{S}$. Como $x \in [x, x+1)$, existe una $A_0 \in \mathcal{S}$ tal que $x \in A_0$. En consecuencia, $\alpha_{A_0} \leqslant x$. Por lo tanto, tenemos que $x = \alpha_{A_0}$ contradiciendo la elección de x. La anterior afirmación muestra que $\mathcal{R}$ no puede ser una base para la línea de Sorgenfrey.

Ahora veamos que $hL(X) = \aleph_0$. Sea Y un subespacio cualquiera de X, y sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que los elementos de la familia $\mathcal{F}$ son abiertos básicos del espacio X. Sea $M = \{(a, b) : [a, b) \in \mathcal{F}\}$, y sea $Z = \bigcup M$. Dado que $\mathbb{R}$ (con la topología usual) es hereditariamente Lindelöf, pues es un espacio segundo numerable, $L(Z) = \aleph_0$. Así de la cubierta abierta M de Z, se puede extraer una subcubierta numerable N. Sea $\mathcal{G} = \{[a, b) : (a, b) \in N\}$.
Afirmación: El conjunto $Y \setminus \bigcup \mathcal{G}$ es a lo más numerable.
En efecto: Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $|Y \setminus \bigcup \mathcal{G}| > \aleph_0$. Dado que $\mathcal{F}$ es una cubierta de Y, para cada $x \in Y \setminus \bigcup \mathcal{G}$, podemos elegir un elemento $[a_x, b_x)$ en $\mathcal{F}$, de tal manera que, $x \in [a_x, b_x)$. Obsérvese que $x = a_x$, para cada $x \in Y \setminus \bigcup \mathcal{G}$. Ahora si x y y son dos elementos distintos de

$Y \setminus \bigcup \mathcal{G}$, entonces los correspondientes intervalos abiertos (a_x, b_x) y (a_y, b_y) son ajenos. De otra forma, supongamos que $x < y$ y que existe $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$. Entonces $x < y < z < b_x$; de donde, $y \in \bigcup \mathcal{G}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, la familia $\mathcal{C} = \{(a_x, b_x) : x \in Y \setminus \bigcup \mathcal{G}\}$ es una familia celular de abiertos no vacíos del espacio $\mathbb{R}$, cuya cardinalidad excede $\aleph_0$, lo cual contradice el hecho de que $\mathbb{R}$ tiene celularidad numerable. Por lo tanto, $|Y \setminus \bigcup \mathcal{G}| \leqslant \aleph_0$. De todo lo anterior, podemos concluir que $\mathcal{F}$ posee una subcubierta numerable, y por lo tanto $hL(X) = \omega$.

Y por último probaremos que el espacio X es hereditariamente separable. Sea Z un subespacio arbitrario de X, y sea A el conjunto de puntos aislados de Z en X. Dado que $hL(X) = \aleph_0$, (ver párrafo anterior), $L(A) = \aleph_0$. De donde $|A| \leqslant \aleph_0$. Ahora consideremos a la familia $\mathcal{B} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \text{ y } p < q\}$ de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, tal que $B \cap Z \neq \emptyset$, elijamos un elemento $x_B \in B \cap Z$.

Afirmación. El conjunto $D = A \cup \{x_B : B \in \mathcal{B}, B \cap Z \neq \emptyset\}$ es un subespacio denso del subespacio Z. Note que $|D| \leqslant \aleph_0$.

En efecto: Consideremos un abierto no vacío V de Z. Elijamos un elemento básico $[a, b)$ de la topología de la línea de Sorgenfrey de tal modo que: $\emptyset \neq [a, b) \cap Z \subseteq V$.

Si $\{a\} = [a, b) \cap Z$, entonces $a \in A$. De donde, $V \cap D \neq \emptyset$, pues $a \in A \cap V$. Si por el contrario, existe un $z \in (a, b) \cap Z$, entonces podemos elegir, $p, q \in \mathbb{Q}$, con $p < q$, de tal modo que $z \in (p, q) \subseteq (a, b)$. Como $(p, q) \cap Z \neq \emptyset, B = (p, q) \in \mathcal{B}$. Consideremos al correspondiente elemento x_B. Para tal elemento ocurre que $x_B \in B = (p, q) \subseteq [a, b)$ y $x_B \in D$. De donde también en este caso sucede que $V \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto D es denso en Z. Y como Z fue arbitrario lo anterior prueba que $d(Z) \leqslant \aleph_0$, por lo cual, $hd(X) = \aleph_0$.

Finalizaremos la presente sección demostrando algunos lemas referentes a cotas para la cardinalidad de los espacios topológicos.

1.30 Lema. Sea X un espacio T_0, entonces $|X| \leqslant 2^{nw(X)}$.

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una red para X con $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Es fácil verificar que la función $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{N})$, definida por $f(x) = \{U \in \mathcal{N} : x \in U\}$, donde $x \in X$, es inyectiva. $\square$

1.31 Lema. Sea X un espacio T_2, entonces $w(X) \leqslant 2^{2^{2^{d(X)}}}$

Demostración. Por la Proposición 1.15 sabemos que $|X| \leqslant 2^{2^{d(X)}}$ y también sabemos que $w(X) \leqslant 2^{|X|}$, con lo que podemos concluir que $w(X) \leqslant 2^{2^{2^{d(X)}}}$ $\square$

1.2 El teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery

En esta sección probaremos el importante teorema sobre la densidad de un producto topológico, debido a E. Hewitt, E. Marczewski y E. S. Pondiczery.

Con el propósito de hacer clara la exposición de este teorema es que analizaremos a los cubos de Cantor.

Sea κ un número cardinal arbitrario. Consideremos el producto topológico $D(2)^\kappa$ de κ copias del espacio discreto $D(2)$ de cardinalidad dos. Dado que el producto topológico de un número finito de espacios discretos es un espacio discreto, cuando κ es un número cardinal finito, el peso, la densidad y la celularidad de $D(2)^\kappa$ son iguales al cardinal del espacio $D(2)^\kappa$.

La pregunta natural a lo anterior es qué sucede en el caso en que κ es un número cardinal infinito. Con el propósito de esclarecer esto, recordemos que un elemento típico de la base canónica $\mathcal{B}$ para $D(2)^\kappa$ es un conjunto de la forma

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n; U_1, \ldots, U_n] = \{f : \kappa \to \{0,1\} : f(\alpha_j) \in U_j; \;\; j = 1, \ldots n\}$$

donde $\alpha_j \in \kappa$ y $U_j \subseteq D(2)$ es un abierto propio no vacío, para cada $j = 1, \ldots, n$. Observe que las posibles elecciones para los subconjuntos abiertos propios no vacíos U_j son: $\{0\}$ y $\{1\}$. Con esto en mente, no es difícil demostrar que $|\mathcal{B}| \leqslant \kappa$. De esta forma podemos garantizar que $w(D(2)^\kappa) \leqslant \kappa$.

1.32 Proposición. Sea $\kappa \geqslant \omega$. Entonces

$$w(D(2)^\kappa) = \chi(D(2)^\kappa) = \psi(D(2)^\kappa) = \kappa \quad .$$

Demostración. Bastará demostrar que $\kappa \leqslant \psi(D(2)^\kappa)$.
Supongamos lo contrario; esto es, supongamos que $\psi(D(2)^\kappa) < \kappa$. Entonces $\psi(D(2)^\kappa, \mathbf{0}) < \kappa$, donde $\mathbf{0} : \kappa \to \{0,1\}$ es la función constante de valor 0. Sea $\mathcal{A}$ una pseudobase de $\mathbf{0}$ en $D(2)^\kappa$ tal que $|\mathcal{A}| \leqslant \kappa$. Sin perdida de generalidad se puede suponer que los elementos de $\mathcal{A}$ son vecindades canónicas de $\mathbf{0}$ en $D(2)^\kappa$. Ahora, para cada $W = [\mathbf{0}; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; U_1, \ldots, U_n]$ en $\mathcal{A}$, sea $K(W) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Definamos $K = \bigcup_{W \in \mathcal{A}} K(W)$. Entonces $K \subseteq \kappa$ y $|K| < \kappa$. De donde, $\kappa \setminus K \neq \emptyset$. Sea $\chi_{\kappa \setminus K} : \kappa \to \{0,1\}$ la función característica de $\kappa \setminus K$. Entonces $\chi_{\kappa \setminus K} \in \bigcap \mathcal{A}$ y $\chi_{\kappa \setminus K} \neq \mathbf{0}$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\psi(D(2)^\kappa) \geqslant \kappa$. □

1.33 Lema. Sea $\kappa \geqslant \omega$. Si A es un conjunto de cardinalidad 2^κ, entonces existe una topología Hausdorff en A cuyo peso es menor o igual a κ.

Demostración. Sea $D(2)^\kappa$ el producto topológico de κ copias del espacio discreto de cardinalidad 2. Por la Proposición 1.32, existe una base $\mathcal{B}$ de $D(2)^\kappa$ cuya cardinalidad es exactamente κ. Dado que $|A| = 2^\kappa$, existe $f : A \to D(2)^\kappa$ función biyectiva. La familia

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}\}$$

es base de una topología Hausdorff para $\mathcal{A}$ cuyo peso es menor o igual a κ. □

1.34 Proposición. Si $\kappa \geqslant \omega$, $D(\kappa)$ es el espacio discreto de cardinalidad κ y T es un conjunto de cardinalidad 2^κ, entonces $d(D(\kappa)^T) \leqslant \kappa$

Demostración. Por el lema anterior, podemos considerar en T una topología Hausdorff $\mathcal{T}$ cuyo peso es menor o igual a κ. Así, podemos fijar una base $\mathcal{B}$ para T cuya cardinalidad no excede a κ. Sea

$$\mathcal{F} = \{\{U_1, \ldots, U_n\} \in [\mathcal{B}]^{<\omega} : U_i \cap U_j = \emptyset, \text{ para } i \neq j\},$$

donde $[\mathcal{B}]^{<\omega} = \{A \subseteq B : |A| < \omega\}$.
Considere ahora al siguiente conjunto:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \{f \in D(\kappa)^T : \exists \{U_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F} \text{ tal que } f|_{U_i} = c_i \text{ y} \\ f|_{T \setminus \cup_{i=1}^n U_i} = \text{c}, \text{ donde } c_1, c_2 \cdots c_n, c \text{ son constantes } \}\end{aligned}$$

Claramente, $\mathcal{D} \subseteq D(\kappa)^T$ y $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$. Aún más, el conjunto $\mathcal{D}$ es un subconjunto denso de $D(\kappa)^T$. Efectivamente, sea $W = \bigcap_{i=1}^n \pi_{t_i}^{-1}(\{y_i\}) = [t_1, \ldots, t_n; \{y_1\}, \ldots, \{y_n\}]$ un abierto canónico del producto topológico $D(\kappa)^T$ (donde $y_i \in D(\kappa)$ y $t_i \in T$, para cada $i = 1, \ldots, n$). Podemos suponer que $t_i \neq t_j$, para $i \neq j$. Por la elección de la base $\mathcal{B}$, existen $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$ tales que $t_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ (si $i \neq j$). Consideremos ahora la función $g : T \to D(\kappa)$ dada por lo siguiente:

$$g(t) = \begin{cases} y_i & \text{si } t \in U_i \text{ para } i = 1, \ldots, n; \\ y_1 & \text{si } t \in T \setminus \cup_{i=1}^n U_i \end{cases}$$

Entonces, $g \in \mathcal{D} \cap W$. De lo cual, $\mathcal{D}$ es denso en $D(\kappa)^T$. Por lo tanto, $d(D(\kappa)^T) \leqslant |\mathcal{D}| \leqslant \kappa$. □

1.35 Teorema. [Hewitt-Marczewski-Pondiczery] Sea $\kappa \geqslant \omega$, y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección no vacía de espacios topológicos no vacíos. Si $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$ para cada $\alpha \in I$ y $|I| \leqslant 2^\kappa$, entonces $d(\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha) \leqslant \kappa$.

Demostración. Sea, para cada $\alpha \in I$, $D_\alpha \subseteq X_\alpha$ un subespacio denso tal que $|D_\alpha| \leqslant \kappa$. Claramente $\prod_{\alpha \in I} D_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es un subespacio denso; de lo cual $d(\prod_{\alpha\in I} X_\alpha) \leqslant d(\prod_{\alpha\in I} D_\alpha)$ (ver Proposición 1.14). Así, basta demostrar que $d(\prod_{\alpha\in I} D_\alpha) \leqslant \kappa$.

Ahora, dado que para cada $\alpha \in I$ la cardinalidad de cada D_α no excede a κ, existen funciones sobreyectivas

$$f_\alpha : D(\kappa) \to D_\alpha$$

Claramente, cada función f_α es una función continua. De donde, la función producto

$$\prod_{\alpha\in I} f_\alpha : D(\kappa)^I \to \prod_{\alpha\in I} D_\alpha$$

es continua y sobreyectiva.

Debido a que la densidad no se incrementa bajo imagenes continuas (ver Proposición 1.28 (3)), bastará demostrar que $d(D(\kappa)^I) \leqslant \kappa$. Pero nótese que si $|I| = \gamma$, entonces $D(\kappa)^I$ es homeomorfo al producto $D(\kappa)^\gamma$; además, note que este último espacio es imagen continua del producto $D(\kappa)^{2^\kappa}$ (la función $\pi : D(\kappa)^{2^\kappa} \to D(\kappa)^\gamma$ dada por $\pi(f)(\beta) = f(\beta)$, donde $f \in D(\kappa)^{2^\kappa}$ y $\beta < \gamma$, es una función continua y sobreyectiva). Así, por la proposición anterior, $d(D(\kappa)^I) \leqslant d(D(\kappa)^{2^\kappa}) \leqslant \kappa$. $\square$

1.36 Definición. Sea $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ un producto topológico, y sea $V = \prod_{\alpha\in I} V_\alpha$ un abierto canónico (o básico) en X, entonces

$$K(V) = \{\beta \in I : V_\beta \neq X_\beta\}$$

es llamado el soporte de V.

1.37 Corolario. Si $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos tales que $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$, para cada $\alpha \in A$, entonces

$$c(\prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}) \leqslant \kappa.$$

Demostración. Sea $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Supongamos que existe una familia celular $\mathcal{W}$ en X cuya cardinalidad excede a κ. Entonces podemos elegir una familia

$$\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda < \kappa^+\}$$

de abiertos no vacíos ajenos dos a dos en X. Claramente, podemos suponer que los elementos de la familia $\mathcal{V}$ son abiertos básicos canónicos de X.

Sea, para cada $\lambda < \kappa^+$, $K(V_\lambda)$ el soporte de V_λ.

Sea $B = \bigcup_{\lambda<\kappa^+} K(V_\lambda)$. Claramente, $|B| \leqslant 2^\kappa$. Entonces si $Y = \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$, por el Teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery, $d(Y) \leqslant \kappa$. Pero si $V_\lambda^* = \pi_B(V_\lambda)$ es la proyección de V_λ en Y, entonces la familia

$$\mathcal{W} = \{V_\lambda^* : \lambda < \kappa^+\}$$

es una familia celular en Y cuya cardinalidad excede a κ. Pero esto es una contradicción, ya que la celularidad de un espacio está siempre dominada por la densidad del mismo. Por lo tanto, $c(X) \leqslant \kappa$. $\square$

Capítulo 2

Teoría de Reflejo

Ahora nos abocaremos a la teoría de reflejo. Si tenemos un espacio topológico X, una propiedad topológica P y una clase $\mathcal{D}$ de subespacios de X, es posible preguntarnos si el hecho de que todos los subespacios pertenecientes a la clase $\mathcal{D}$ tienen la propiedad P, implica que X debe tener necesariamente esta misma propiedad. Cuando esto sucede se dice que la propiedad P es reflejada de los subespacios al espacio X.

En el ámbito de la teoría de las funciones cardinales topológicas, la clase $\mathcal{D}$ de subespacios es comúnmente la clase de los subespacios de cardinalidad $\leqslant \kappa$ (para un cardinal infinito κ, fijo) y la propiedad topológica P es comúnmente la propiedad: $\phi(Y) < \kappa$, para alguna función cardinal ϕ fija. De esta manera, uno puede preguntar si el hecho de que todos los subespacios Y, de cardinalidad $\leqslant \kappa$, de un espacio X satisfacen que $\phi(Y) < \kappa$, implica que $\phi(X) < \kappa$. Cuando esto ocurre para todos los espacios topológicos X en una cierta clase fija $\mathcal{C}$ de espacios topológicos, se dice que la función cardinal ϕ refleja al cardinal κ en la clase $\mathcal{C}$.

Es valioso comentar que el estudio de las propiedades de reflejo de funciones cardinales topológicas fue iniciado por I. Juhász y A. Hajnal en sus trabajos [24], [11], y en [19] R. Hodel y J. Vaughan realizaron el primer estudio sistemático de teoremas de reflejo para funciones cardinales topológicas.

En este capítulo haremos un breve análisis de las propiedades de reflejo para las funciones cardinales más básicas. Para ello seguimos la línea marcada por R. Hodel y J. Vaughan. En todo el capítulo se asumirá que $|X| \geqslant \omega$.

2.1 Hechos básicos de la teoría de reflejo

Iniciamos la presente sección con la noción de reflejo en funciones cardinales.

2.1 Definición. Sea X un espacio topológico y sea κ un cardinal infinito. Se dice que una función cardinal ϕ *refleja* al cardinal κ si se cumple la siguiente condición:

$(*)$ si $\phi(X) \geqslant \kappa$, entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $|Y| \leqslant \kappa$ y $\phi(Y) \geqslant \kappa$.

Se puede comprobar fácilmente que cualquier función cardinal refleja al cardinal ω.

Por otro lado, note que la condición $(*)$ en la anterior definición es equivalente a lo siguiente:

- Si para todo subespacio Y de X, con $|Y| \leqslant \kappa$, se tiene que $\phi(Y) < \kappa$, entonces $\phi(X) < \kappa$.

Debemos mencionar también que para algunas funciones cardinales es necesario restringir la clase de espacios en consideración con la finalidad de obtener "buenos" teoremas de reflejo. La definición apropiada en este caso es la siguiente.

2.2 Definición. Una función cardinal ϕ *refleja* al cardinal infinito κ, en una clase $\mathcal{C}$ de espacios topológicos, si para cualquier $X \in \mathcal{C}$ con $\phi(X) \geqslant \kappa$, existe un subespacio Y de X con $|Y| \leqslant \kappa$ y $\phi(Y) \geqslant \kappa$.

Cuando $\mathcal{C}$ sea la clase de los espacios topológicos, diremos simplemente que "ϕ refleja al cardinal infinito κ". Otro concepto relacionado con el reflejo es la noción de reflejo fuerte, que definiremos a continuación. Un poco más adelante, en el Lema 2.6, veremos la relación que hay entre el reflejo y el reflejo fuerte.

2.3 Definición. Sea ϕ una función cardinal, X un espacio topológico y sea $\kappa \geqslant \omega$. Diremos que ϕ *refleja fuertemente* a κ si el hecho de que $\phi(X) \geqslant \kappa$ implica la existencia de un subespacio Y de X con las siguientes propiedades:

(1) $|Y| \leqslant \kappa$; y

(2) $\forall Z \subseteq X$ con $Y \subseteq Z$, se tiene que $\phi(Z) \geqslant \kappa$.

Es claro que toda función cardinal refleja fuertemente a ω. Por ello podemos pensar que el número cardinal κ, en la anterior definición, es estrictamente mayor que ω.

Recordemos que un cardinal λ es *regular* si $\lambda = cf(\lambda)$, véase [20].

Es importante mencionar, en este momento, la noción de cadena creciente de subespacios.

2.4 Definición. Sea λ un cardinal infinito. Una *cadena creciente*, de longitud λ, es una colección $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de subespacios de un espacio topológico X que cumple las siguientes condiciones:

(1) $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$, y

(2) $\forall\, \beta \leqslant \alpha < \lambda$, $X_\beta \subseteq X_\alpha$.

Obsérvese que en la definición de una cadena creciente de subespacios podemos suponer que el cardinal λ es un cardinal regular, esto es así debido a que

$$\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}.$$

Efectivamente, es claro que sólo habrá que probar que $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{X_\alpha : \alpha < cf(\lambda)\}$. Para ello, sea $x \in \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$, entonces existe $\alpha < \lambda$ tal que $x \in X_\alpha$. Por definición de $cf(\lambda)$ existe $\nu \in cf(\lambda)$, con $\alpha < \nu$; como la cadena es creciente, $X_\alpha \subseteq X_\nu$. Por ello $x \in \bigcup\{X_\nu : \nu < cf(\lambda)\}$. Entonces $\bigcup\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \bigcup\{X_\nu : \nu < cf(\lambda)\}$. □

El reflejo fuerte de una función cardinal ϕ tiene una relación intrínseca con el cálculo de valores de la función cardinal en un espacio X que puede ser descompuesto en una cadena creciente de subespacios.

2.5 Definición. Diremos que una función cardinal ϕ satisface la propiedad de la *unión creciente para* κ (lo cual será denotado por $IU(\kappa)$), si siendo $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una cadena creciente de subespacios de X cuya longitud excede a κ (esto es, $\kappa < \lambda$), y $\phi(X_\alpha) < \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$, se tiene que $\phi(X) < \kappa$.

El siguiente lema resume las relaciones que hay entre los conceptos de reflejo, reflejo fuerte y la propiedad de unión creciente.

2.6 Lema. Sea ϕ una función cardinal y $\kappa \geqslant \omega$.

(1) Si ϕ refleja fuertemente a κ entonces ϕ refleja a κ.

(2) Si ϕ refleja fuertemente a κ, entonces ϕ satisface $IU(\kappa)$.

Demostración. (1) se sigue inmediatamente de la definición.

Para demostrar (2) sea $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una cadena creciente de subespacios, donde $\kappa < \lambda$ y λ es regular.
Supongamos que para todo $\alpha < \lambda$, $\phi(X_\alpha) < \kappa$; debemos demostrar que $\phi(X) < \kappa$. Vamos a suponer lo opuesto para llegar a una contradicción. Supongamos entonces que $\phi(X) \geqslant \kappa$. Debido a que ϕ refleja fuertemente a κ, existe Y subespacio de X, con $|Y| \leqslant \kappa$ tal que para todo $Z \subseteq X$ con $Y \subseteq Z$, se tiene que $\phi(Z) \geqslant \kappa$. Ahora bien, puesto que $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es creciente, λ es regular, $|Y| \leqslant \kappa$ y $\kappa < \lambda$, existe $\alpha \in \lambda$ tal que $Y \subseteq X_\alpha$. Como ϕ refleja fuertemente a κ tenemos que $\phi(X_\alpha) \geqslant \kappa$; lo cual es una contradicción. □

La densidad es un ejemplo de una función cardinal que refleja a ciertos cardinales infinitos, pero puede no reflejarlos fuertemente (véase 2.19 y 2.21)

2.7 Observación. Note que si ϕ es una función cardinal monótona que refleja a un cardinal infinito κ, entonces ϕ refleja fuertemente a κ. En efecto, si $\phi(X) \geqslant \kappa$, entonces existe Y con $|Y| \leqslant \kappa$ tal que $\phi(Y) \geqslant \kappa$. Puesto que supusimos que ϕ es monótona, si $Z \subseteq X$ es tal que $Y \subseteq Z$, se tiene que $\phi(Z) \geqslant \phi(Y) \geqslant \kappa$.

A continuación enunciaremos dos propiedades de reflejo y reflejo fuerte, que serán frecuentemente utilizadas en lo que resta del trabajo.

2.8 Lema. Sea $\kappa \geqslant \omega$. Si una función cardinal ϕ refleja a κ^+, entonces $h\phi$ refleja fuertemente a κ^+.

Demostración. Puesto que $h\phi$ es monótona, es suficiente probar que $h\phi$ refleja a κ^+ (véase la Observación 2.7). Supongamos que $h\phi(X) = sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\} \geqslant \kappa^+$, entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $\phi(Y) \geqslant \kappa^+$ (ya que si $\phi(Y) < \kappa^+ \ \forall \ Y \subseteq X$, entonces $sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\} < \kappa^+$). Luego, dado que ϕ refleja a κ^+, existe $Z \subseteq Y$ con $|Z| \leqslant \kappa^+$ tal que $\phi(Z) \geqslant \kappa^+$. Claramente $h\phi(Z) \geqslant \kappa^+$. $\square$

2.9 Lema. Si ϕ refleja fuertemente a todo cardinal sucesor, entonces ϕ refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Sea κ un cardinal límite y supongamos que $\phi(X) \geqslant \kappa$. Para cada cardinal infinito $\lambda < \kappa$, se tiene que $\phi(X) \geqslant \lambda^+$. Debido a que ϕ refleja fuertemente a λ^+, existe un subespacio Y_λ de X con $|Y_\lambda| \leqslant \lambda^+$ tal que para todo $Z \subseteq X$, para el cual $Y_\lambda \subseteq Z$, se tiene que $\phi(Z) \geqslant \lambda^+$.
Sea $Y = \bigcup \{Y_\lambda : \lambda < \kappa\}$. Claramente tenemos que $|Y| \leqslant \kappa$, y para todo $Z \subseteq X$ tal que $Y \subseteq Z$, $\phi(Z) \geqslant \kappa$ (supongamos que $\phi(Z) < \kappa$, entonces existe λ tal que $\phi(Z) < \lambda < \kappa$, pero entonces $\phi(Z) < \lambda^+$, contradiciendo la hipótesis). $\square$

2.10 Observación. Note que como una aplicación de los anteriores lemas y la Observación 2.7, podemos probar fácilmente que *si* ϕ *es monótona y refleja a todo cardinal sucesor, entonces* ϕ *refleja fuertemente a todo cardinal infinito.*

La siguiente definición contiene otra noción relacionada con el reflejo.

2.11 Definición. Sea $\kappa \geqslant \omega$. Se dice que una función cardinal ϕ tiene la *propiedad de Darboux* en κ si se verifica la siguiente condición:

$$\text{si } \phi(X) > \kappa, \text{ entonces existe } Y \subseteq X \text{ tal que } \phi(Y) = \kappa.$$

La relación entre reflejo y la propiedad de Darboux se aclara en la siguiente proposición.

2.12 Proposición. Si ϕ refleja a κ y para todo X se tiene que $\phi(X) \leqslant |X| + \omega$, entonces ϕ tiene la propiedad de Darboux en κ.

Demostración. Supondremos que $\phi(X) > \kappa \geqslant \omega$. Entonces, debido a que ϕ refleja a κ, existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa$ tal que $\phi(Y) \geqslant \kappa$. Pero $\phi(Y) \leqslant |Y| + \omega \leqslant \kappa$, por lo tanto $\phi(Y) = \kappa$. $\square$

Debemos comentar que la hipótesis de que ϕ este dominada por la cardinalidad en el teorema anterior no puede ser omitida. Hajnal y Juhász han demostrado que el peso refleja a todo cardinal κ, pero no necesariamente tiene la propiedad de Darboux en κ [12, 13].

El diagrama siguiente resume algunas de las relaciones que hay entre las distintas nociones de la teoría de reflejo que hemos introducido hasta este momento.

$$
\begin{tikzcd}
 & \phi \text{ refleja fuertemente } \kappa \arrow[dl, shift left] \arrow[dr] & \\
\phi \text{ refleja } \kappa \arrow[ur, shift left, "\text{si } \phi \text{ monótona}"] \arrow[dr, "\text{suponiendo que } \phi \leqslant |\cdot| + \omega"] & & \phi \text{ satisface } IU(\kappa) \\
 & \phi \text{ tiene la propiedad de Darboux en } \kappa &
\end{tikzcd}
$$

Uno puede preguntarse si la propiedad de Darboux y la propiedad de la unión creciente, separadas o juntas, implican la propiedad de reflejo para funciones cardinales. El siguiente resultado da respuesta negativa a esta pregunta.

2.13 Teorema. Para cada $\kappa > \omega$, existe una función cardinal ϕ tal que:

(1) ϕ es monótona y $\phi \leqslant |\cdot| + \omega$;

(2) ϕ satisface $IU(\kappa)$ y tiene la propiedad de Darboux en κ;

(3) ϕ no refleja a κ.

Demostración. Sea $\kappa > \omega$ un cardinal y sea $\{\kappa_n : n \in \omega\}$ la sucesión definida de la siguiente manera: $\kappa_0 = \kappa$ y para cada $n \in \omega$, $\kappa_{n+1} = \kappa_n^+$. Sea $\mu = sup\{\kappa_n : n \in \omega\}$. Note que $cf(\mu) = \omega$. Definamos ahora ϕ por medio de la fórmula siguiente:

$$
\phi(X) = \begin{cases} \omega & \text{si } |X| < \mu; \\ \\ \kappa & \text{si } |X| \geqslant \mu. \end{cases}
$$

Claramente ϕ satisface (1).

Puesto que $\phi(X) > \kappa$ es imposible, automáticamente ϕ tiene la propiedad de Darboux en κ.

Para verificar que ϕ satisface $IU(\kappa)$, supongamos que

$$X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha < \lambda\},$$

donde $\lambda > \kappa$, λ regular, $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ creciente y para todo $\alpha < \lambda$, $\phi(X_\alpha) < \kappa$ (*i.e.* para todo $\alpha < \lambda$, $|X_\alpha| < \mu$). Notemos que es suficiente probar que $|X| < \mu$.

Ahora, para probar que $|X| < \mu$. Note lo siguiente:

* Si $\lambda \leqslant \mu$, entonces claramente $|X| < \mu$. Ya que

$$|X| = \left|\bigcup \{X_\alpha : \alpha < \lambda\}\right| \leqslant sup_{\alpha<\lambda}|X_\alpha| < \lambda \cdot \mu = \mu$$

** En el caso $\lambda > \mu$, veremos primero que $\exists\, j_0 \in \omega$ tal que $|X_\alpha| \leqslant \kappa_{j_0}$, para todo $\alpha < \lambda$. Para probar esto supongamos lo contrario, entonces para cada $j \in \omega$ $\exists\, \alpha < \lambda$ tal que $|X_\alpha| > \kappa_j$, pero como $cf(\lambda) > \omega$, entonces debe existir $\alpha_0 < \lambda$ tal que $|X_\alpha| > \kappa_j$, para todo $\alpha \geqslant \alpha_0$, y $\forall\, j \in \omega$, pero $|X_{\alpha_0}| < \mu$, lo que implica que existe un $i \in \omega$ tal que $|X_{\alpha_0}| < \kappa_i$ (esto por propiedades del supremo), lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $|X| \geqslant \mu$. Sea Y un subconjunto de X tal que $|Y| = \kappa_{j_0+1}$. Puesto que $\lambda > \kappa_{j_0+1}$ y λ es regular y la cadena $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ es creciente, existe $\alpha < \lambda$ tal que $Y \subseteq X_\alpha$. Entonces tenemos que $|Y| \leqslant |X_\alpha| \leqslant \kappa_{j_0}$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto se satisface (2).

Finalmente, para probar (3), sea X un espacio con $|X| \geqslant \mu$. Entonces , $\phi(X) \geqslant \kappa$; pero para todo Y subespacio de X con $|Y| \leqslant \kappa$, se tiene que $\phi(Y) = \omega$. Por tanto, ϕ no refleja a κ. $\square$

2.2 Teoremas de reflejo para c, e, s, L y d

El primer resultado de esta sección establece que las funciones cardinales celularidad, extensión y amplitud reflejan fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de los espacios topológicos.

2.14 Teorema. Las funciones cardinales c, e y s reflejan fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Por el lema 2.9, para la función cardinal c es suficiente probar que c refleja fuertemente a todo cardinal sucesor κ^+.

Supongamos que $c(X) \geqslant \kappa^+$; puesto que $c(X) \geqslant \kappa^+ > \kappa$, existe una familia celular $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de cardinalidad κ^+.
Para cada $\alpha < \kappa^+$, sea $x_\alpha \in V_\alpha$ y construyamos $Y = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$. Claramente $|Y| \leqslant \kappa^+$, y además, para cada $Z \subseteq X$ tal que $Y \subseteq Z$, $c(Z) \geqslant \kappa^+$ (ya que $\{V_\alpha \cap Z : \alpha < \kappa^+\}$ forma una familia celular en Z). Por tanto c refleja fuertemente a κ^+.

Para el caso de la función cardinal e, nuevamente es suficiente probar que e refleja fuertemente a todo cardinal sucesor.
Supongamos que $e(X) \geqslant \kappa^+$. Como $e(X) \geqslant \kappa^+ > \kappa$, existe un conjunto Y cerrado y discreto en X, de cardinalidad κ^+. Note que para cada $Z \subseteq X$ tal que $Y \subseteq Z$, se tiene que $e(Z) \geqslant \kappa^+(Y \cap Z$ es discreto y cerrado en Z, con $|Y \cap Z| = \kappa^+)$. Por tanto e refleja fuertemente a κ^+.

Para la función cardinal s probaremos primero[1] que $s = hc$. Sea D un subconjunto discreto de X. Como D es discreto, para todo $x \in D$ existe U abierto en X tal que $U \cap D = \{x\}$. Formemos el conjunto $\{\{x\} : x \in D\}$, es claro que dicho conjunto es una

[1]Note, que para esta prueba, podríamos haber hecho lo mismo que para la función cardinal e.

familia celular en D y que $|D| = |\{\{x\} : x \in D\}|$, entonces $|D| \leqslant hc(X)$. Como el subconjunto discreto D fue elegido arbitrariamente tenemos la desigualdad $s(X) \leqslant hc(X)$.

Para la otra desigualdad tomemos un subespacio Y de X y una familia celular $\mathcal{C} = \{V_s : s \in S\}$ en Y. Tomemos para cada $s \in S$ un único $x_s \in V_s$ y formemos el conjunto $D = \{x_s : s \in S\}$, es claro que D es un subespacio discreto de X y que $|\mathcal{C}| = |\{x_s : s \in S\}|$. Entonces $|\mathcal{C}| \leqslant s(X)$. Así, como $\mathcal{C}$ y Y fueron elegidos arbitrariamente, entonces $s(X)$ es una cota superior para el conjunto $\{c(Y) : Y \subseteq X\}$, con lo que afirmamos que $hc(X) \leqslant s(X)$. Podemos concluir que $s = hc$.
Como c refleja a todo cardinal sucesor, de los lemas 2.8 y 2.9, se tiene que s refleja fuertemente a todo cardinal infinito. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema anterior, el Lema 2.6 y la Proposición 2.12.

2.15 Corolario. Para todo cardinal infinito κ, las funciones cardinales c , e y s satisfacen $IU(\kappa)$ y tienen la propiedad de Darboux en κ.

Con la finalidad de hacer clara la exposición del siguiente teorema, recordaremos algunas nociones básicas de la teoría de los números cardinales.

Recordemos primeramente que un número cardinal κ es llamado *cardinal límite* si para todo cardinal $\gamma < \kappa$ se tiene que $\gamma^+ < \kappa$. Por otro lado, el cardinal κ es llamado *regular* si $\kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$; y es llamado cardinal *singular* si $\kappa > \mathrm{cf}(\kappa)$. Recuérdese también que κ es un cardinal *límite fuerte* si $\beta < \kappa$ implica que $2^\beta < \kappa$. Además, κ es un cardinal *débilmente inaccesible* si κ es límite y regular, y es un cardinal *fuertemente inaccesible* si κ es límite fuerte y regular.

Nótese que como todo cardinal sucesor es regular, necesariamente todo cardinal singular es un cardinal límite.

Observe también que si se supone cierta la hipótesis generalizada del continuo, esto es, si se supone cierta la proposición:

HGC: $$\forall\kappa \geqslant \omega, \kappa^+ = 2^\kappa,$$

entonces todo cardinal límite es un cardinal límite fuerte; por esta razón los cardinales fuertemente inaccesibles coinciden con los cardinales débilmente inaccesibles. Por ello podemos referirnos a éstos simplemente como cardinales inaccesibles.

Es sabido que la HGC es consistente con la proposición "ZFC+ no existen cardinales inaccesibles". Estos hechos serán utilizados en el siguiente teorema.

2.16 Teorema. Las siguientes afirmaciones son ciertas.

(1) El grado de Lindelöf L refleja a todo cardinal sucesor.

(2) L refleja a todo cardinal singular límite fuerte en la clase de espacios Hausdorff.

(3) Suponiendo HGC +(no existen cardinales inaccesibles), L refleja a todo cardinal para la clase de espacios Hausdorff.

(4) Para un cardinal singular κ, L no necesariamente tiene la propiedad de Darboux en κ (en consecuencia no necesariamente refleja a κ) para la clase de espacios T_1.

(5) Para cardinales no numerables κ, L no necesariamente satisface $IU(\kappa)$ (y por lo tanto no necesariamente refleja fuertemente a κ) en la clase de espacios Hausdorff y completamente normales.

Demostración. (1) Sea κ un cardinal infinito.
Supongamos que $L(X) \geqslant \kappa^+$, entonces existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X para la cual no existen subcolecciones de $\mathcal{U}$ de cardinalidad $< \kappa^+$ que cubran a X.

Tomemos un $x_0 \in X$ y sea $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_0$; como $\{U_0\}$ no cubre a X existe un $x_1 \in X \setminus U_0$. Tomemos un $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $x_1 \in U_1 \quad (x_1 \in U_1 \setminus U_0)$; como $\{U_0, U_1\}$ no cubre a X escojamos un $x_2 \in X \setminus (U_0 \cup U_1)$, entonces existe $U_2 \in \mathcal{U}$, tal que $x_2 \in U_2 \setminus (U_0 \cup U_1)$. Sea $\alpha < \kappa^+$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$ se hizo la misma construcción, es decir, hemos tomado $x_\beta \in X \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} U_\gamma$, y hemos tomado $U_\beta \in \mathcal{U}$ tal que $x_\beta \in U_\beta$. Como $L(X) \geqslant \kappa^+$ la familia $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ no cubre a X. En consecuencia, existe $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$. Elijamos $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $x_\alpha \in U_\alpha$. Esto termina nuestra construcción. Note que hemos construido dos colecciones; a saber,

$$\{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \text{ y}$$

$$Y = \{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\},$$

en donde $x_\alpha \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.

Es claro que $|Y| \leqslant \kappa^+$, y que $L(Y) \geqslant \kappa^+$, ya que $\{U_\alpha \cap Y : \alpha < \kappa^+\}$ es una cubierta abierta a la que no se le puede extraer una subcubierta de cardinalidad menor que κ^+, esto por la misma construcción de Y. Por tanto hemos probado que L refleja a κ^+.

(2) Supongamos que κ es un cardinal singular límite fuerte y que $L(X) \geqslant \kappa$, donde X es un espacio de Hausdorff. Como X es T_2, tenemos que $|X| \leqslant 2^{2^{s(X)}}$ (véase 4.12 en [18]). Note ahora que como κ es límite fuerte, lo anterior implica que $s(X) \geqslant \kappa$ (porque $L(X) \leqslant |X|$). Aplicando el teorema de Hajnal-Juhász (véase 12.3 en [18]), podemos concluir que existe un subespacio discreto Y de X tal que $|Y| = \kappa$. Claramente tenemos que $L(Y) \geqslant \kappa$.

(3) Se sigue de (1) y (2).

(4) Sea κ un cardinal singular. Considere $X = [0, \kappa^+)$. La familia con elementos de la forma $[0, \alpha) \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, donde para cada $i \in \{1, ..., n\}$ $\alpha_i < \alpha < \kappa^+$, es base para una topología T_1 sobre X. Se tiene que $L(X) > \kappa$. En efecto, sea $\alpha < \kappa^+$ arbitrario.

Considere

$$\mathcal{U} = \{[0, \alpha) \setminus \{0\}\} \bigcup \left\{[0, \beta + 1) \setminus \{\beta\} : \alpha < \beta < \kappa^+\right\},$$

entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Note ahora que si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ tiene cardinalidad $\leqslant \kappa$, entonces $\gamma = sup\, \{\beta : [0, \beta+1) \setminus \{\beta\} \in \mathcal{V}\} < \kappa^+$. Por ello, $\gamma \notin \bigcup \mathcal{V}$. Por lo tanto $\mathcal{V}$ no puede ser cubierta abierta de X; así, $L(X) \geqslant \kappa^+$ (de hecho $L(X) = \kappa^+$).

Demostraremos ahora que no existe $Y \subseteq X$ con $L(Y) = \kappa$ (esto mostrará que L no tiene la propiedad Darboux en κ).

Sea $Y \subseteq X$ arbitrario. Si $|Y| = \kappa^+$, entonces $L(Y) = \kappa^+$. (Para convencerse de ello considere a la colección $\mathcal{U}$ definida en el párrafo anterior, entonces $\mathcal{U}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de Y que no admite subcubiertas de cardinalidad $< \kappa^+$.)

Supongamos que $|Y| \leqslant \kappa$, Probaremos que $L(Y) < \kappa$. Como $Y \subseteq X = [0, \kappa^+)$ y $|Y| \leqslant \kappa$, existe un ordinal $\alpha < \kappa^+$ tal que Y es isomorfo (en orden) a α. Más aún, podemos suponer que $\alpha = \beta + n$, donde β es un ordinal límite y $n \in \omega$. Sea $\mu = cf(\beta)$, entonces μ es regular y como κ es singular también tenemos que $\mu < \kappa$. Finalmente, es fácil probar que $L(Y) \leqslant \mu$.

(5) Sea κ un cardinal no numerable. El espacio requerido es $X = [0, \kappa^+)$ con la topología del orden. Es conocido que $L(X) = \kappa^+$ (ver [9]). Para cada $\alpha \in \kappa^+$, sea $X_\alpha = [0, \alpha]$. Entonces $X = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} X_\alpha$. Observe que para todo $\alpha \in \kappa^+$, $L(X_\alpha) = \omega$. □

2.17 Corolario. La función cardinal hL refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Por el Teorema 2.16 (1) L refleja a todo cardinal sucesor, y por el Lema 2.8, hL refleja fuertemente a todo cardinal sucesor; por último, por el Lema 2.9 hL refleja fuertemente a todo cardinal infinito. □

Ahora analizaremos las propiedades de reflejo de la densidad. En el artículo [13] A Hajnal e I. Juhász establecen resultados que relacionan a la función cardinal d con la propiedad de Darboux.

R. E. Hodel y J.E. Vaughan demuestran en [19] que para el caso de la función cardinal densidad, la propiedad de Darboux y el reflejo son lo mismo. Esto demuestra que los teoremas de Juhász y Hajnal son en verdad teoremas de reflejo.

2.18 Teorema. Las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquier cardinal $\kappa \geqslant \omega$.

(1) La función cardinal d refleja a κ;

(2) La función cardinal d tiene la propiedad de Darboux en κ.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Se sigue de la Proposición 2.12.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que d tiene la propiedad de Darboux en κ y que $d(X) \geqslant \kappa$. Debemos probar que existe $Y \subseteq X$ tal que $|Y| \leqslant \kappa$ y $d(Y) \geqslant \kappa$.
Tenemos entonces dos casos:
(a) Si $d(X) > \kappa$, como d tiene la propiedad de Darboux existe $Y \subseteq X$ tal que $d(Y) = \kappa$. Ahora sea D un subconjunto denso de Y tal que $|D| = d(Y)$. Entonces $|D| = \kappa$. Como $d(D) \geqslant d(Y) = \kappa$ (ver Proposición 1.14), se tiene que $d(D) = \kappa$, y $|D| = \kappa$. Así d refleja a κ.
(b) Si $d(X) = \kappa$, tomamos un subconjunto denso D de X con $|D| = d(X)$. Dado que $d(D) \geqslant d(X) = \kappa$, se tiene que $d(D) = \kappa$ y $|D| = \kappa$.
Por tanto d refleja a κ. □

2.19 Teorema. (Hajnal-Juhász [13])

(1) La función cardinal d refleja a todo cardinal regular.

(2) Sea κ un cardinal límite fuerte, entonces d refleja fuertemente a κ en la clase de espacios Hausdorff.

(3) Suponiendo la HGC, d refleja a todo cardinal infinito para la clase de espacios Hausdorff.

(4) La función cardinal d no necesariamente refleja a los cardinales singulares en la clase de espacios T_1.

Demostración. (1) Sea κ un cardinal regular y supongamos que $d(X) \geqslant \kappa$. Vamos a construir un subespacio Y que sirva para nuestro fin.
Sea $x_0 \in X$ arbitrario, como $d(X) \geqslant \kappa$ existe $x_1 \in X \setminus cl(\{x_0\})$. Como $\{x_0, x_1\}$ no es denso en X, existe $x_2 \in X \setminus cl(\{x_0, x_1\})$. Ahora sea $0 < \alpha < \kappa$ y supongamos que hemos construido el conjunto $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Como este subconjunto no es denso en X, entonces existe un punto $x_\alpha \in X \setminus cl(\{x_\beta : \beta < \alpha\})$. De esta manera hemos obtenido los puntos x_α necesarios para que construyamos el conjunto: $Y = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$.

Es claro que $|Y| \leqslant \kappa$. Así que resta probar que $d(Y) \geqslant \kappa$. Supongamos $D \subseteq Y$ es tal que $|D| < \kappa$. Por la regularidad de κ, existe $\alpha < \kappa$ tal que $|D| < \alpha < \kappa$. Entonces $D \subseteq \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Puesto que $x_\alpha \in X \setminus cl\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, tenemos que $x_\alpha \notin cl(D)$. Por lo tanto D no es denso en Y. Por lo que podemos concluir que $d(Y) \geqslant \kappa$ (Como $d(Y) \leqslant |Y| \leqslant \kappa$, tenemos que $d(Y) = \kappa$).

(2) Sea κ un cardinal límite fuerte y X un espacio de Hausdorff tal que $d(X) \geqslant \kappa$. Tomemos un subespacio Y de X tal que $|Y| \geqslant \kappa$. Afirmamos que $d(Z) \geqslant \kappa$ para cada $Z \subseteq X$ con $Y \subseteq Z$. Sea $Z \subseteq X$ tal que $Y \subseteq Z$.
Si ocurriera que $d(Z) < \kappa$, entonces $|Z| \leqslant 2^{2^{d(Z)}} < \kappa$ (aplique la Proposición 1.15 para la primera desigualdad y para la segunda el hecho de que κ es límite fuerte). Pero entonces $|Y| < \kappa$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $d(Z) \geqslant \kappa$ para todo subespacio Z de X tal que $Y \subseteq Z$.

(3) Esta propiedad es un simple aplicación de (1) y (2), recordando que bajo la HGC los cardinales límites y los cardinales límite fuerte son lo mismo.

(4) Para la demostración de esta afirmación remitimos al lector al Ejemplo 2.34. $\square$

No obstante que d refleja a todo cardinal regular, esta función cardinal no tiene la propiedad de reflejar fuertemente a todos los cardinales infinitos, ni aún en la clase de espacios Tychonoff (véase la Proposición 2.21).
Antes de establecer esto último, tenemos el siguiente corolario.

2.20 Corolario. La función hd refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Por el Teorema 2.19 d refleja a todo cardinal regular y por el Lema 2.8 hd refleja fuertemente a κ^+. Con lo que podemos concluir por el Lema 2.9 que hd refleja fuertemente a todo cardinal infinito. $\square$

Como consecuencia de la siguiente proposición, se tiene que la función cardinal d no tiene la propiedad de reflejo fuerte.

2.21 Proposición. Para cada cardinal infinito κ, existe un espacio de Tychonoff X tal que:

(1) $d(X) \geqslant \kappa^+$ (de hecho $d(X) = \kappa^{++}$); y además

(2) $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^{++}\}$, donde $\{X_\alpha : \alpha < \kappa^{++}\}$ es creciente y para todo $\alpha < \kappa^{++}$, se tiene que $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$.

Demostración. El espacio que necesitamos es un subespacio de $D(2)^{\kappa^{++}}$, el cubo de Cantor de peso κ^{++} (esto es, el producto de κ^{++} copias del espacio discreto $\{0,1\}$).
Para cada $\alpha < \kappa^{++}$, definamos

$$X_\alpha = \{f \in D(2)^{\kappa^{++}} : f(\beta) = 0,\, \alpha < \beta < \kappa^{++}\}$$

y sea

$$X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha < \kappa^{++}\}.$$

Note que para cada $\alpha < \kappa^{++}$, el espacio X_α es homeomorfo a un producto de $\leqslant \kappa^+$ copias del espacio discreto $\{0,1\}$ (considere $F : X_\alpha \to D(2)^{|\alpha|}$, definida por $F(g) = g\,|_{\alpha+1}$). Por el teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery (véase el Teorema 1.35), para todo $\alpha < \kappa^{++}$, se tiene que $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$. Por tanto (2) se cumple.

Para verificar que $d(X) \geqslant \kappa^{++}$, sea $D \subseteq X$ con $|D| \leqslant \kappa^+$. Entonces existe $\alpha \in \kappa^{++}$ tal que $D \subseteq X_\alpha$. Defínase $f : \kappa^{++} \to \{0,1\}$ por medio de la siguiente fórmula:

$$f(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma = \alpha + 1; \\ \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

entonces $f \in X$ y $f \notin cl_X D$. Por tanto D no es denso en X. Así, $d(X) \geqslant \kappa^{++}$. □

Del teorema anterior se sigue que para la clase de espacios Tychonoff, y para todo cardinal sucesor κ^+, d no necesariamente satisface la $IU(\kappa^+)$ y en consecuencia no necesariamente refleja fuertemente a κ^+.

Mostraremos ahora que la función cardinal d no necesariamente satisface la $IU(\kappa)$, en la clase de los espacios T_1 y por ello no siempre refleja fuertemente en la clase de espacios T_1.
Note que con esto también podríamos haber concluido que d no refleja fuertemente para los espacios Tychonoff.

2.22 Teorema. Para cada cardinal infinito κ, existe un espacio T_1 tal que:

(1) $d(X) = \kappa^+$;

(2) $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$, donde $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ es creciente y para todo $\alpha \in \kappa^+$, sucede que $d(X_\alpha) = \omega$.

Demostración. Sea $X = [0, \kappa^+)$. Una base para la topología de X consiste de todos los subconjuntos de X de la siguiente forma:

$$\left[\alpha, \kappa^+\right) \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\};$$

donde, $\alpha < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \kappa^+$. No es difícil probar que X es un espacio T_1 y que $d(X) > \kappa$. Como $d(X) \leqslant |X| \leqslant \kappa^+$, tenemos que $d(X) = \kappa^+$.

Para ver que (2) se cumple, es suficiente construir una sucesión $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ de subconjuntos de X tal que para todo $\alpha \in \kappa^+$, sucede lo siguiente:

(a) $\beta < \alpha$, implica que $X_\beta \subseteq X_\alpha$;

(b) $\alpha \in X_\alpha$;

(c) $d(X_\alpha) = \omega$.

Sea $\alpha < \kappa^+$ y supongamos que hemos construido $\{X_\beta : \beta < \alpha\}$ tal que (a), (b) y (c) se cumplen. Definamos $\gamma = \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\}$; sea, además, $\{\beta_n : n \in \omega\}$ una sucesión estrictamente creciente en κ^+ tal que: $\alpha,\ \gamma < \beta_0$. Sea $X_\alpha = \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\alpha\} \cup \{\beta_n : n \in \omega\}$. Note ahora que $\{\beta_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto denso numerable de X_α. Por ello, $d(X_\alpha) = \omega$. $\square$

A continuación estudiaremos el reflejo de la función monótona nw. El primer resultado relacionado a esta función cardinal muestra que para la clase de espacios T_1 compactos, nw no necesariamente refleja a un cardinal sucesor. Pero para probarlo primero necesitamos algunos lemas auxiliares. Cabe mencionar que en el siguiente capítulo haremos un análisis más preciso de las propiedades de reflejo de distintas funciones cardinales en la clase de espacios compactos T_2.

2.23 Lema. Sean $\kappa \geqslant \omega$ y T un conjunto tal que $|T| \leqslant 2^\kappa$. Entonces existe una cubierta $\mathcal{F}$ de T tal que:

(1) $|\mathcal{F}| \leqslant \kappa$;

(2) Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son puntos distintos de T, entonces existe una subcolección $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de elementos ajenos por pares de $\mathcal{F}$ tal que para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}, t_i \in A_i$.

Demostración. Sea $X = D(2)^\kappa$, el cubo de Cantor de peso κ. Sabemos que $w(X) = \kappa$. Sea $f : T \to X$ una inyección. Entonces

$f(T)$ es un subespacio de X de peso $\leqslant \kappa$. Sea $\mathcal{B}$ una base de $f(T)$. Entonces

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{B}\}$$

es una base para una topología T_2 para T. La colección $\mathcal{F}$ satisface (1) y (2). □

2.24 Teorema. Para cada $\kappa \geqslant \omega$, existe un espacio X que es compacto y T_1 tal que:

(1) $nw(X) \geqslant \kappa^+$;

(2) $X = \bigcup \left\{X_\alpha : \alpha < (2^\kappa)^+\right\}$, donde $\left\{X_\alpha : \alpha < (2^\kappa)^+\right\}$ es creciente y para todo $\alpha < (2^\kappa)^+$, sucede que $nw(X_\alpha) \leqslant \kappa$.

Demostración. Sea $X = [0, (2^\kappa)^+ \ )$ con la topología cofinita. Por el Lema 1.30 podemos concluir que $nw(X) \geqslant \kappa^+$. Veamos que se cumple (2). Definimos para cada $\alpha < (2^\kappa)^+$, $X_\alpha = [0, \alpha]$. Como $|X_\alpha| \leqslant \alpha \leqslant 2^\kappa$, podemos aplicar el lema anterior y concluir que existe una cubierta $\mathcal{N}_\alpha$ de X_α que cumple (1) y (2) del lema. Observe ahora que como X_α tiene la topología cofinita, entonces $\mathcal{N}_\alpha$ es una red para X_α. Efectivamente, sean $x \in X_\alpha$ y $U \subseteq X_\alpha$ abierto en X_α tal que $x \in U$. Como X_α tiene la topología cofinita, $X \setminus U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Entonces existen $N, N_1, \ldots, N_n \in \mathcal{N}_\alpha$ ajenos, tales que $x \in N, x_i \in N_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces $x \in N \subseteq X \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i \subseteq X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = U$. De esta forma, $\mathcal{N}_\alpha$ es una red para X_α. Entonces podemos concluir que $nw(X_\alpha) \leqslant \kappa$. □

Por el teorema anterior, para la clase de espacios T_1, la función cardinal nw no necesariamente satisface $IU(\kappa^+)$ y no necesariamente refleja fuertemente a cardinales $\kappa > \omega$. Por otro lado, para la clase de espacios T_0, nw refleja a todo cardinal límite fuerte.

2.25 Teorema. Sea κ un cardinal límite fuerte. Entonces nw refleja a κ en la clase de espacios T_0.

Demostración. Sea X un espacio topológico T_0.
Supongamos que $nw(X) \geqslant \kappa$. Entonces $|X| \geqslant \kappa$ (pues $nw(X) \leqslant |X|$). Luego existe $Y \subseteq X$ con $|Y| = \kappa$. Suponga que $nw(Y) = \lambda < \kappa$. Por el Lema 1.30, y por el hecho de ser κ un cardinal límite fuerte, $|Y| \leqslant 2^\lambda < \kappa$, lo que contradice el hecho de que $|Y| = \kappa$. Por lo tanto, $nw(Y) = \kappa$. $\square$

A pesar del resultado negativo dado en el Teorema 2.24, podemos probar el siguiente teorema.

2.26 Teorema. Suponiendo valida la HGC. En la clase de espacios Hausdorff, nw refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff con $nw(X) \geqslant \kappa$. Puesto que hL refleja a todo cardinal infinito y $hL \leqslant nw$ (ver Corolario 2.17 y la Proposición 1.28), podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $hL(X) < \kappa$. Por 4.10 en [18], $|X| \leqslant 2^{hL(X)}$, y por la HGC, $|X| \leqslant \kappa$. Así, tomando $Y = X$, tenemos que $|Y| \leqslant \kappa$ y $nw(Y) \geqslant \kappa$. $\square$

2.3 Teoremas de reflejo para w y πw

Uno de los más importantes, e interesantes, teoremas de reflejo en el ámbito de las funciones cardinales topológicas es el teorema de reflejo del peso w, debido a Hajnal y Juhász [15].

Debido a la importancia del resultado de Hajnal y Juhász, presentaremos su demostración en esta sección, tal y como aparece en su artículo [15].

Con la finalidad de hacer clara la exposición del mismo utilizaremos a partir de ahora la siguiente notación: Si X es un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X y Y un subconjunto de X, denotamos con $\mathcal{F}|_Y$ a la colección $\{F \cap Y : F \in \mathcal{F}\}$.

2.27 Lema. Sea X un espacio topológico arbitrario y κ un cardinal regular. Suponga que todo subespacio de X, con cardinalidad $\leqslant \kappa$, tiene un subconjunto denso de cardinalidad $< \kappa$. Si

$\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión creciente de subespacios de X y $\mathcal{F}$ es una familia de abiertos en X tal que para cada $\alpha < \kappa$, $\mathcal{F}|_{Y_\alpha}$ es base para Y_α, entonces $\mathcal{F}|_Y$ también es base de $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$.

Demostración. Supongamos, para generar una contradicción, que $\mathcal{F}|_Y$ no es base para Y. Entonces existe un punto $p \in Y$ y una vecindad U de p en X tal que si $p \in F \in \mathcal{F}$, entonces $F \cap Y \nsubseteq U \cap Y$.

Usando el método de inducción transfinita, construiremos una sucesión $\{q_\gamma : \gamma < \kappa\}$ de puntos en Y y una sucesión $\{F_\gamma : \gamma < \kappa\}$ de elementos de $\mathcal{F}$, de tal forma que:
(1) para $\gamma < \kappa$, se tiene que $q_\gamma \in (Y \cap F_\gamma) \setminus U$;

(2) si $\gamma < \mu < \kappa$, entonces $q_\gamma \notin F_\mu$.

Sea $A = \{\beta < \kappa : p \in Y_\beta\}$. Claramente $A \neq \emptyset$. Entonces A tiene primer elemento, digamos α_0. Puesto que $\mathcal{F}\big|_{Y_{\alpha_0}}$ es base para Y_{α_0}, existe $F_0 \in \mathcal{F}$ tal que $p \in F_0 \cap Y_{\alpha_0} \subseteq U \cap Y_{\alpha_0}$. Por la elección de p, tenemos que $Y \bigcap F_0 \nsubseteq U \bigcap Y$. Sea $q_0 \in (Y \cap F_0) \setminus U$.

Sea α_1 el primer elemento de $A \setminus \alpha_0$. Entonces existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $p \in F_1 \cap Y_{\alpha_1} \subseteq U \cap Y_{\alpha_1}$. Considere $q_1 \in (Y \cap F_1) \setminus U$. Observe que $q_0 \notin F_1$, puesto que de lo contrario, $q_0 \in F_1 \cap Y_{\alpha_1} \subseteq Y_{\alpha_1} \cap U \subseteq U$; lo cual no es cierto.

Sea $\mu < \kappa$ y suponga que para todo $\gamma < \mu$, hemos construido q_γ y F_γ de tal manera que (1) y (2) se cumplen. Para construir a q_μ y a F_μ, note que como κ es regular, existe $\alpha_\mu < \kappa$ tal que para todo $\gamma < \mu$, se tiene que $\alpha_\gamma < \alpha_\mu$. Dado que $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión creciente, tenemos que $p \in Y_{\alpha_\mu}$. Por tanto existe $F_\mu \in \mathcal{F}$ tal que $p \in F_\mu \cap Y_{\alpha_\mu} \subseteq U \cap Y_{\alpha_\mu}$. Elijamos ahora un punto $q_\mu \in (Y \cap F_\mu) \setminus U$. Observe que si $\gamma < \mu$, entonces $q_\gamma \notin F_\mu$, de lo contrario $q_\mu \in F_\mu \cap Y_{\alpha_\mu} \subseteq Y_{\alpha_\mu} \cap U \subseteq U$ (lo cual sería una contradicción). Con esto terminamos la construcción.

Observe ahora que el subespacio $\{q_\alpha : \alpha < \kappa\}$ no contiene subconjuntos densos de cardinalidad menor que κ. Como esto último contradice nuestra hipótesis, tenemos que $\mathcal{F}|_Y$ es base para Y. $\square$

2.28 Teorema. (Hajnal-Juhász [15]) La función w refleja a todo cardinal infinito.

Demostración. Sea X un espacio topológico y sea κ un cardinal infinito. Dividiremos la prueba en dos casos:

(a) κ ES UN CARDINAL REGULAR. Supongamos que $w(Y) < \kappa \;\forall\, Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa$ y que $w(X) \geqslant \kappa$. Vamos a construir, para $\alpha < \kappa$, usando el método de inducción transfinita, subespacios Y_α de X y familias de abiertos $\mathcal{B}_\alpha$ de tal forma que:
(1) para todo $\alpha < \kappa$, $|Y_\alpha| \leqslant \kappa$;

(2) para todo $\alpha < \kappa$, $|\mathcal{B}_\alpha| < \kappa$,

(3) para cada $\alpha < \kappa$, $\mathcal{B}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es base para Y_α.

Sea Y_0 un subconjunto no vacío de X con $|Y_0| \leqslant \kappa$. Por hipótesis existe una familia $\mathcal{B}_0$ de abiertos en X tal que $|\mathcal{B}_0| < \kappa$ y $\mathcal{B}_0|_{Y_0}$ es base para Y_0. Claramente Y_0 y $\mathcal{B}_0$ satisfacen (1), (2) y (3).

Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos que para cada $\beta < \alpha$ hemos construido Y_β y $\mathcal{B}_\beta$ tales que (1), (2) y (3) se verifican.

Si α es un ordinal límite tomamos $Y_\alpha = \bigcup\{Y_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\mathcal{B}_\alpha$ como una familia de abiertos en X tal que $\bigcup\{\mathcal{B}_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$, $|\mathcal{B}_\alpha| < \kappa$ y $\mathcal{B}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es base para Y_α. Esto es posible ya que $|Y_\alpha| \leqslant \kappa$.

Si $\alpha = \gamma + 1$ para algún γ, por nuestra hipótesis $\mathcal{B}_\gamma$ no es base para X; por tanto existe $p_\gamma \in X$ y U abierto en X de tal forma que para todo $B \in \mathcal{B}_\gamma$ que contiene a p_γ, no puede ocurrir que $B \subseteq U$. Sea $\mathcal{B}^*_\gamma = \{B \in \mathcal{B}_\gamma : p_\gamma \in B\}$. Para cada $B \in \mathcal{B}^*_\gamma$ elijamos un único punto $q_B \in B \backslash U$. Tomamos $Y_\alpha = \{p_\gamma\} \cup \big\{q_B : B \in \mathcal{B}^*_\gamma\big\} \cup Y_\gamma$, y $\mathcal{B}_\alpha$ se elige de tal manera que $|\mathcal{B}_\alpha| < \kappa$ y $\mathcal{B}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es base para Y_α (esto es posible porque $|Y_\alpha| \leqslant \kappa$).

Observe que $\mathcal{B}_\gamma\big|_{Y_{\gamma+1}}$ no es base para $Y_{\gamma+1}$. En efecto, supongamos que $\mathcal{B}_\gamma\big|_{Y_{\gamma+1}}$ es base para $Y_{\gamma+1}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}_\gamma$ tal que $p_\gamma \in B \cap Y_{\gamma+1} \subseteq Y_{\gamma+1} \cap U$, pues $Y_{\gamma+1} \cap U$ es una vecindad abierta de p_γ en Y_γ. Entonces $B \in \mathcal{B}^*_\gamma$ y, para tal B, hemos tomado

$q_B \in B \backslash U$. Pero entonces $q_B \in B \cap Y_{\gamma+1} \subseteq Y_{\gamma+1} \cap U \subseteq U$; luego, $q_B \in U$, lo cual contradice la elección de q_B. Por tanto $\mathcal{B}_\gamma \big|_{Y_{\gamma+1}}$ no es base para $Y_{\gamma+1}$.

Por hipótesis tenemos que si $Z \subseteq X$ con $|Z| \leqslant \kappa$, entonces $w(Z) < \kappa$, pero, por la Proposición 1.12, $d(Z) \leqslant w(Z)$, entonces $d(Z) < \kappa$. Así, por el lema anterior (aplicado a $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \kappa\}$), tenemos que $\mathcal{B}|_Y$ es base para $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$. Pero $|Y| \leqslant \kappa$; por tanto existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{C}| = w(Y) < \kappa$ y $\mathcal{C}$ es base para Y. Por la regularidad de κ, existe $\alpha < \kappa$ de tal forma que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_\alpha$. Pero por construcción, $\mathcal{B}_\alpha \big|_{Y_{\alpha+1}}$ no es base para $Y_{\alpha+1}$, y por lo tanto, $\mathcal{B}_\alpha|_Y$ no es base para Y. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $w(X) < \kappa$. Así termina la prueba para este caso.

(b) κ ES UN CARDINAL SINGULAR. Supongamos que $w(Y) < \kappa \ \forall \ Y \subseteq X$ tal que $|Y| \leqslant \kappa$.

AFIRMACIÓN: Existe un cardinal $\lambda < \kappa$ tal que $w(Y) < \lambda$ siempre que Y sea subespacio de X tal que $|Y| \leqslant \kappa$.

En efecto, supongamos, por el contrario, que tal λ no existe. Entonces para todo $\lambda < \kappa$ existe un subespacio Y_λ de X con $|Y_\lambda| \leqslant \kappa$ tal que $w(Y_\lambda) \geqslant \lambda$. Entonces $Y = \bigcup_{\lambda<\kappa} Y_\lambda$ es tal que $|Y| \leqslant \kappa$ y $w(Y) \geqslant \kappa$ (puesto que κ es límite), lo cual es imposible por nuestras hipótesis. $\boxtimes$

Por la anterior afirmación podemos concluir que para todo subespacio Y de X tal que $|Y| \leqslant \kappa$, se tiene que $w(Y) < \lambda^+$. Ahora bien, aplicando la primera parte de la prueba (el inciso (a)) a λ^+, se concluye que $w(X) < \lambda^+ < \kappa$. $\square$

2.29 Corolario. La función w refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Como w es una función cardinal monótona tenemos que se cumple esto como una consecuencia de la Proposición 1.6 y de la Observación 2.7. $\square$

2.30 Corolario. La función w satisface la $IU(\kappa)$ para todo cardinal infinito κ.

Demostración. Por el corolario anterior y el Lema 2.6. $\square$

A diferencia del peso, la función cardinal πw tiene un comportamiento de reflejo más errático.

2.31 Lema. Sea $\mathfrak{L}$ una colección de subconjuntos abiertos no vacíos de un espacio topológico X, con $|\mathfrak{L}| < \kappa$, donde $\kappa > \omega$. Si $\mathfrak{L}$ no es una π-base para X, entonces existe $A \subseteq X$ con $|A| < \kappa$ tal que $L \cap A \neq \emptyset$, para todo $L \in \mathfrak{L}$, pero $\mathfrak{L}|_A$ no es una π-base para A ($\mathfrak{L}|_A = \{L \cap A : L \in \mathfrak{L}\}$).

Demostración. Como $\mathfrak{L}$ no es π-base, existe un abierto no vacío R tal que $\forall\ L \in \mathfrak{L},\ L \nsubseteq R$. Fijemos un punto $x \in R$ y $\forall\ L \in \mathfrak{L}$ un punto $x_L \in L \setminus R$. Entonces $A = \{x\} \cup \{x_L : L \in \mathfrak{L}\}$ es tal que $|A| \leqslant |\mathfrak{L}| < \kappa$, $L \cap A \neq \emptyset\ \forall\ L \in \mathfrak{L}$ y $\mathfrak{L}|_A$ no es π-base para A (note que $R \cap A$ es un abierto no vacío de A para el cual no sucede que $L \cap A \subseteq R \cap A$, para algún $L \in \mathfrak{L}$). $\square$

2.32 Lema. Sea κ un cardinal regular no numerable y sea X un espacio tal que $d(Z) < \kappa$ para todo $Z \subseteq X$. Sea $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión creciente de subespacios de X y sea $\{\mathfrak{L}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia, de colecciones de abiertos en X, tales que para toda $\alpha < \kappa$, $\mathfrak{L}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es una π-base para Y_α. Entonces $\mathfrak{L}|_Y$ es una π-base para Y, donde $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ y $\mathfrak{L} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{L}_\alpha$.

Demostración. Supongamos que existe un subconjunto abierto R tal que $R \cap Y \neq \emptyset$ y que para toda $L \in \mathfrak{L}$ se tiene que $L \cap Y \nsubseteq R$. Sea D un subconjunto denso de $Y \setminus R$ de cardinalidad $< \kappa$, y sea $C = \{x\} \cup D$, donde $x \in R \cap Y$. Ahora $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es creciente, $C \subseteq Y$ con $|C| < \kappa$ y κ es regular, por lo cual existe $\alpha < \kappa$ tal que $C \subseteq Y_\alpha$. Como $\mathfrak{L}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es una π-base para Y_α, y $R \cap Y_\alpha \neq \emptyset$ (puesto que $x \in R \cap Y_\alpha$), existe $L \in \mathfrak{L}_\alpha$ tal que $L \cap Y_\alpha \subseteq R$, pero $L \cap Y \nsubseteq R$, por lo que $L \cap (Y \setminus R) \neq \emptyset$. Ahora D es denso en

$Y \setminus R$, así que existe $d \in L \cap D$. Pero $L \cap D \subseteq L \cap Y_\alpha \subseteq R$, con lo que $d \in R$, esto contradice el hecho de que $D \subseteq (Y \setminus R)$. □

2.33 Teorema. (Hajnal y Juhász). La función cardinal πw refleja a todo cardinal regular κ.

Demostración. Supongamos que $\pi w(X) \geqslant \kappa$, donde κ es un cardinal regular (no numerable). Debemos demostrar la existencia de un subespacio Y de X tal que $|Y| \leqslant \kappa$ y $\pi w(Y) \geqslant \kappa$. Para ello consideremos los siguientes casos:
Caso A: Existe Z tal que $d(Z) \geqslant \kappa$.

Como d refleja a todo cardinal regular (ver Teorema 2.19), existe $Y \subseteq Z$ tal que $|Y| \leqslant \kappa$ y $d(Y) \geqslant \kappa$. Pero sabemos que $d \leqslant \pi w$ (vea la Proposición 1.28), así tenemos que $\pi w(Y) \geqslant \kappa$.

Caso B: $\forall\, Z \subseteq X : d(Z) < \kappa$.
Supongamos también que:

$$(*) \qquad \forall\, Y \subseteq X : |Y| < \kappa \Rightarrow \pi w(Y) < \kappa \qquad .$$

(obsérvese que si existe $Y \subseteq X$ con $|Y| < \kappa$ tal que $\pi w(Y) \geqslant \kappa$ terminaríamos la prueba). Construiremos ahora dos colecciones $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tales que $Y_\alpha \subseteq X\, \forall\, \alpha < \kappa$ y $\mathcal{L}_\alpha$ es una colección de abiertos no vacíos de X para cada $\alpha < \kappa$ y además:

(1) $|Y_\alpha|, |\mathcal{L}_\alpha| < \kappa\, \forall\, \alpha < \kappa$;

(2) $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión creciente de subespacios de X,

(3) $\forall\, L \in (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta), L \cap Y_\alpha \neq \emptyset$; pero $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta|_{Y_\alpha}$ no es una π-base de Y_α.

(4) $\mathcal{L}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es una π-base para $Y_\alpha, \forall\, \alpha < \kappa$.

Construcción de las colecciones $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \kappa\}$:

Sea $x_0 \in X$ y $Y_0 = \{x_0\}$. Como $|Y_0| < \kappa$, por $(*)$, $\pi w(Y_0) < \kappa$. Así, existe una colección $\mathcal{L}_0$ de subconjuntos abiertos no vacíos de

X tal que $\mathfrak{L}_0|_{Y_0}$ es una π-base de Y_0 y $|\mathfrak{L}_0| = \pi w(Y_0) < \kappa$.
Como $|\mathfrak{L}_0| < \kappa$ y $\pi w(X) \geqslant \kappa, \mathfrak{L}_0$ no es una π-base para X, así que existe $A_0 \subseteq X$ con $|A_0| < \kappa$ tal que $L \cap A_0 \neq \emptyset \; \forall \; L \in \mathfrak{L}_0$ (ver Lema 2.31).
Pero por el mismo lema, $\mathfrak{L}_0|_{A_0}$ no es π-base para A_0 . Definamos $Y_1 = Y_0 \cup A_0$.
Note que $|Y_1| < \kappa$. Así que por $(*)$, se tiene que $\pi w(Y_1) < \kappa$. Existe entonces una colección $\mathfrak{L}_1$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que $|\mathfrak{L}_1| = \pi w(Y_1) < \kappa$ y $\mathfrak{L}_1|_{Y_1}$ es una π-basede Y_1.
Observe que $Y_0, Y_1, \mathfrak{L}_0$ y $\mathfrak{L}_1$ satisfacen $(1), (2), (3)$ y (4) (como $\mathfrak{L}_0|_{A_0}$ no es π-base de $A_0, \mathfrak{L}_0|_{Y_1}$ no es π-base de Y_1).
Supongamos que $\alpha < \kappa$ y que tenemos construidas las colecciones $\{Y_\beta : \beta < \alpha\}$ y $\{\mathfrak{L}_\beta : \beta < \alpha\}$ de tal manera que satisfacen $(1), (2), (3)$ y (4).
Como $|\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{L}_\beta| < \kappa$, $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{L}_\alpha$ no es π-base de X puesto que $\pi w(X) \geqslant \kappa$. Por el Lema 2.31, existe $A_\alpha \subseteq X$ tal que $|A_\alpha| < \kappa$ y $L \cap A_\alpha \neq \emptyset \; \forall \; L \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{L}_\beta$, pero $(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{L}_\beta)|_{A_\alpha}$ no es π-base para A_α.
Definamos $Y_\alpha = A_\alpha \cup \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$. Entonces $|Y_\alpha| < \kappa$. Aplicando $(*)$, podemos concluir que $\pi w(Y_\alpha) < \kappa$. Entonces existe $\mathfrak{L}_\alpha$ colección de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que $|\mathfrak{L}_\alpha| = \pi w(Y_\alpha) < \kappa$ y $\mathfrak{L}_\alpha|_{Y_\alpha}$ es π-base de Y_α.

Observe ahora que las colecciones $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\alpha, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_\alpha$ satisfacen $(1), (2), (3)$ y (4).
De esta manera terminamos la construcción de las colecciones $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y $\{\mathfrak{L}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ que satisfacen $(1), (2), (3)$ y (4).

Definamos ahora $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha$ y $\mathfrak{L} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{L}_\alpha$. Observe que por el Lema 2.32, $\mathfrak{L}|_Y$ es una π-base para Y. Note también que $|Y| \leqslant \kappa$. Demostraremos ahora que $\pi w(Y) \geqslant \kappa$.

Para ello supongamos que $\pi w(Y) < \kappa$. Como $\mathfrak{L}|_Y$ es una π-base para Y y $\pi w(Y) < \kappa$, existe $\mathfrak{L}^{'} \subseteq \mathfrak{L}$ tal que $|\mathfrak{L}^{'}| < \kappa$ y $\mathfrak{L}^{'}|_Y$ es π-base para Y. Como $|\mathfrak{L}^{'}| < \kappa$ y κ es regular, existe $\alpha < \kappa$ tal

que $\mathcal{L}' \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta$.
Por (3), $L \cap Y_0 \neq \emptyset \; \forall \; L \in \mathcal{L}'$, pero $\mathcal{L}'|_{Y_\alpha}$ no puede ser una π-base para Y, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\pi w(Y) \geqslant \kappa$.

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que la función πw no refleja a los cardinales singulares en la clase de espacios T_1.

2.34 Ejemplo. Sea κ un cardinal singular y sea τ la colección cuyos elementos son conjuntos de la forma $\kappa^+ \setminus (\alpha \cup F)$; donde $\alpha \leqslant \kappa$ y $F \in [\kappa^+]^{<\omega}$. Claramente $X = (\kappa^+, \tau)$ es un espacio T_1.

Afirmación. $\pi w(Y) < \kappa$ siempre que $Y \subseteq X$ y $|Y| \leqslant \kappa$.

En efecto. Sea Y un subconjunto de X con $|Y| \leqslant \kappa$. Entonces, sin perdida de generalidad, podemos suponer que el tipo de orden de Y (como conjunto de ordinales) es $\lambda + n$, donde λ es límite y $n \in \omega$. Ahora, si F denota al conjunto de los n últimos elementos de Y y $Y' = Y \setminus F$, entonces el tipo de orden de Y' es igual a λ y $|\lambda| \leqslant \kappa$. Luego existe un subconjunto cofinal Z de Y' con $|Z| = cf(\lambda) < \kappa$. Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{Y \setminus (\alpha \cup F) : \alpha \in Z\} \bigcup \mathcal{P}(F)$$

es una $\pi-$base de Y con $|\mathcal{B}| = |Z| < \kappa$. De aquí que para cada $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa$, se tiene que $d(Y) \leqslant \pi w(Y) < \kappa$. Obviamente $\pi w(X) = \kappa^+$ y $d(X) = \kappa^+$. $\square$

No obstante que la función cardinal πw no refleja a los cardinales singulares, sí refleja, en la clase de los espacios de Hausdorff, a todos los cardinales que son límite fuerte.

2.35 Teorema. Para un cardinal límite fuerte κ, la función πw refleja fuertemente a κ en la clase de espacios Hausdorff.

Demostración. Sea X un espacio de Hausdorff tal que $\pi w(X) \geqslant \kappa$. Entonces $d(X) \geqslant \kappa$; pues de lo contrario, si $d(X) < \kappa$, entonces como X es Hausdorff por el Lema 1.31, $w(X) \leqslant 2^{2^{2^{d(X)}}} < \kappa$, lo cual es una contradicción, puesto que $\pi w(X) \leqslant w(X)$. Ahora bien, como d refleja fuertemente a κ en la clase de espacios Hausdorff (véase el Teorema 2.19 (2)), existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa$ tal que para todo $Z \subseteq X$ con $Y \subseteq Z$, $d(Z) \geqslant \kappa$. Pero, por la Proposición 1.28, $d \leqslant \pi w$; así que, para todo $Z \subseteq X$ con $Y \subseteq Z$, tenemos que $\pi w(Z) \geqslant \kappa$. □

2.36 Teorema. Para un cardinal sucesor κ^+, la función cardinal πw no necesariamente satisface $IU(\kappa^+)$ en la clase de espacios Tychonoff; en consecuencia no necesariamente refleja fuertemente a κ^+.

Demostración. El espacio requerido para verificar que πw no satisface la $IU(\kappa^+)$ es un subespacio de $D(2)^{\kappa^{++}}$, el cubo de Cantor de peso κ^{++}. Sean

$$X_\alpha = \left\{ f \in D(2)^{\kappa^{++}} : f(\beta) = 0,\, \alpha < \beta < \kappa^{++} \right\} \text{ para cada } \alpha < \kappa^+$$

y definamos $X = \bigcup \{X_\alpha : \alpha \in \kappa^{++}\}$. Sabemos, por la Proposición 2.21, que $d(X) \geqslant \kappa^{++}$. Luego, como $\pi w \geqslant d$ (ver Proposición 1.28), se tiene que $\pi w(X) \geqslant \kappa^{++}$.

Para cada $\alpha < \kappa^{++}$ construiremos un subespacio Y_α de X tal que $X_\alpha \subseteq Y_\alpha \subseteq X_{\alpha+\kappa}$ y $\pi w(Y_\alpha) \leqslant \kappa$. Sea $\{d_\beta : \beta < \kappa\}$ un subconjunto denso de X_α y sea $(\alpha, \alpha+\kappa) = \bigcup \{E_\beta : \beta < \kappa\}$, donde $\{E_\beta : \beta < \kappa\}$, es una colección de conjuntos infinitos numerables, ajenos por pares, digamos $E_\beta = \{\gamma_{\beta,n} : n \in \omega\}$. Para cada $\beta < \kappa$ y cada $n \in \omega$, definimos $h_{\beta,n} : \kappa^{++} \to \{0,1\}$ por

$$h_{\beta,n}(\delta) = \begin{cases} d_\beta(\delta) & \text{si } \delta \leqslant \alpha \\ 1 & \text{si } \delta = \gamma_{\beta,n} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{h_{\beta,n} : \beta < \kappa \text{ y } n \in \omega\}$. Claramente $X_\alpha \subseteq Y_\alpha \subseteq X_{\alpha+\kappa}$; más aún, para cada β y cada n, el conjunto $\{h_{\beta,n}\}$ es abierto en Y_α. En efecto, sea $\pi_{\gamma_{\beta,n}} : D(2)^{\kappa^{++}} \to D(2)$ la $\gamma_{\beta,n}$ proyección y sea $U = \pi^{-1}_{\gamma_{\beta,n}}(\{1\}) \cap Y_\alpha$, entonces $h_{\beta,n} \in U$. Claramente, si $f \in X_\alpha$, entonces $f \notin U$ y, si $h_{\rho,m} \in U$, entonces $\gamma_{\beta,n} = \gamma_{\rho,m}$, luego $h_{\beta,n} = h_{\rho,m}$. Así $U = \{h_{\beta,n}\}$. Note ahora que $\{h_{\beta,n} : \beta < \kappa \text{ y } n \in \omega\}$ es una $\pi-$base para Y_α (use el hecho de que $\{d_\beta : \beta < \kappa\}$ es denso en X_α).

Ahora construya una sucesión creciente $\{\delta_\alpha : \alpha \in \kappa^{++}\}$ en κ^{++} como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0, \\ \delta_{\alpha+1} &= \delta_\alpha + \kappa, \\ \delta_\alpha &= \bigcup \{\delta_\beta : \beta < \alpha\} \, (\alpha \text{ es ordinal límite}). \end{aligned}$$

Entonces $\{Y_{\delta_\alpha} : \alpha < \kappa^{++}\}$ es una sucesión creciente de subespacios de X, además $X = \bigcup_{\alpha<\kappa^{++}} Y_{\delta_\alpha}$ y $\pi w(Y_{\delta_\alpha}) = \kappa < \kappa^+ \ \forall\ \alpha < \kappa^{++}$. Pero recordemos que $\pi w(X) \geqslant \kappa^{++}$. $\square$

2.37 Teorema. Para la clase de espacios T_1 y para todo $\kappa > \omega$, πw no necesariamente satisface $IU(\kappa)$ y no necesariamente refleja fuertemente a κ.

Demostración. Sea $X = [0, \kappa^+)$. Una base para la topología requerida en X consiste de todos los subconjuntos de X de la forma: $[\alpha, \kappa^+) \backslash \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, donde, $\alpha < \alpha_i < \kappa^+$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note que $\pi w(X) \geqslant \kappa^+$. Para completar la prueba es suficiente escribir a X como la unión de una colección creciente de κ^+ subespacios de X, cada uno con π-peso numerable.

Sea $\beta < \kappa^+$ un ordinal límite con $cf(\beta) = \omega$. Note que existe una cantidad κ^+ de tales β. Y sea $\{\beta_n : n \in \omega\}$ una sucesión estríctamente creciente en $[0, \beta)$ tal que $\beta = sup\,\{\beta_n : n \in \omega\}$. Una $\pi-$base numerable para $[0, \beta)$ es $\{[0, \beta) \cap [\beta_n, \kappa^+) : n \in \omega\}$. Finalmente notemos que, $X = \bigcup \{[0, \beta) : \beta < \kappa^+ \text{ y } cf(\beta) = \omega\}$ como es deseado. $\square$

Como se observa en los Teoremas 2.19, 2.22 y la Proposición 2.21, relativos al reflejo de la función d, y en los dados en esta sección para la función πw, las funciones d y πw son muy similares respecto a sus propiedades de reflejo.

Capítulo 3

Teoremas de reflejo en la clase de espacios compactos

En el capítulo anterior hemos visto que la combinación de alguna condición de cubierta y algún axioma de separación débil en los espacios topológicos no es suficiente para garantizar que ciertas funciones cardinales tengan alguna propiedad de reflejo en ellos. Sabemos, por ejemplo, que ni aún en la clase de espacios compactos T_1, el peso de red nw puede reflejar a cardinales sucesores. En este capítulo se "fortalecen" algunas de estas condiciones y se muestra que una clase de espacios topológicos que tiene buenos teoremas de reflejo es la clase de los espacios Hausdorff compactos.

3.1 Teoremas de reflejo para χ, t, ψ y psw

Antes de mostrar el buen comportamiento que tienen algunas funciones cardinales en la clases de los espacios Hausdorff compactos con respecto a las propiedades de reflejo, daremos ejemplos de funciones cardinales cuyo comportamiento es "malo" respecto a la reflexión de cardinales en clases de espacios con propiedades muy "fuertes", con propiedades muy "cercanas" a la compacidad. Por ejemplo, el primer resultado de esta sección muestra que las funciones cardinales χ, t, ψ y psw no necesariamente reflejan a cualquier cardinal no numerable, en la clase de espacios paracompactos completamente normales.

3.1 Teorema. Para cada $\kappa \geqslant \omega$, existe un espacio Hausdorff, paracompacto y completamente normal X, con las siguientes propiedades:

(1) $\phi(X) = \kappa^+$ para $\phi \in \{\chi, t, \psi, psw\}$;

(2) $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$, donde $\{X_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ es creciente y cada X_α es discreto (luego, para cada $\alpha \in \kappa^+$, $\phi(X_\alpha) = \omega$ para $\phi \in \{\chi, t, \psi, psw\}$).

Demostración. Sea $X = [0, \kappa^+]$. La topología en X es aquélla que tiene como base a la colección de todos los subconjuntos de X de la forma $\{\alpha\}$ y $(\alpha, \kappa^+]$, para toda $\alpha < \kappa^+$, $0 \leqslant \alpha$.

La propiedad (1) es una consecuencia de:
$t(\kappa^+, X) = \psi(\kappa^+, X) = \kappa^+, t \leqslant \chi$ y $\psi \leqslant psw$.

Para demostrar (2), definamos $X_\alpha = [0, \alpha] \cup \{\kappa^+\}$ (para toda $\alpha < \kappa^+, 0 \leqslant \alpha$). No es difícil verificar que toda X_α es un subespacio discreto de X. Es claro también que $X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ y que la sucesión $\{X_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es creciente. □

Del teorema anterior podemos deducir fácilmente que las funciones cardinales χ, t, ψ y psw no necesariamente satisfacen $IU(\kappa)$ y no necesariamente reflejan fuertemente a cualquier cardinal infinito. Sin embargo, a continuación mostraremos que la situación cambia si nos restringimos a la clase de espacios compactos Hausdorff.

Primero consideramos a las funciones cardinales t y χ.

3.2 Definición. Sea κ un cardinal infinito. Una sucesión $\{x_\alpha : 0 \leqslant \alpha \leqslant \kappa\}$ en X se dice que es una *sucesión libre de longitud κ* si, para todo $\beta < \kappa$ tenemos que

$$cl_X(\{x_\alpha : \alpha < \beta\}) \bigcap cl_X(\{x_\alpha : \alpha \geqslant \beta\}) = \emptyset.$$

3.3 Proposición. Si X es un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces $t(X) = F(X)$; donde $F(X) = sup\{\kappa : X$ tiene una sucesión libre de longitud $\kappa\} + \omega$.

Para una demostración de la proposición anterior ver [1].

3.4 Teorema. Para la clase de espacios Hausdorff compactos, t refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Puesto que t es monótona, es suficiente probar que t refleja a todo cardinal sucesor κ^+ (ver la Observación 2.10). Sea X un espacio compacto Hausdorff. Supongamos que $t(X) \geqslant \kappa^+$, entonces X tiene una sucesión libre de longitud κ^+ (véase [1]). Digamos $Z = \{x_\alpha : 0 \leqslant \alpha < \kappa^+\}$.
Sea $p \in \bigcap_{\alpha<\kappa^+} cl\,\{x_\beta : \alpha \leqslant \beta < \kappa^+\}$ y sea $Y = Z \cup \{p\}$. Entonces $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $t(p, Y) \geqslant \kappa^+$. □

La prueba del correspondiente resultado para χ necesita del siguiente teorema de I. Juhász (para una demostración vea 6.14(b) de [24]).

3.5 Teorema. (Juhász) Sea X un espacio Hausdorff y compacto tal que $t(X) < \lambda$ donde $\lambda > \omega$. Si $\chi(p, X) \geqslant \lambda$ para $p \in X$, entonces existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \lambda$ tal que $p \in Y$ y $\chi(p, Y) \geqslant \lambda$.

3.6 Corolario. En la clase de espacios Hausdorff compactos, χ refleja fuertemente a todo cardinal infinito.

Demostración. Como χ es monótona, es suficiente probar el resultado para cardinales sucesores (ver la Observación 2.10). Sean $\kappa \geqslant \omega$ y X un espacio compacto T_2. Si $\chi(X) \geqslant \kappa^+$, entonces existe $p \in X$ tal que $\chi(p, X) \geqslant \kappa^+$. Ahora, $t \leqslant \chi$ y t refleja a todo

cardinal infinito en la clase de los espacios compactos T_2. Así que si $t(X) \geqslant \kappa^+$, entonces podemos aplicar el Teorema 3.4 y concluir que existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $t(Y) \geqslant \kappa^+$. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $\chi(Y) \geqslant \kappa^+$.
Por otro lado, si se tiene que $t(X) < \kappa^+$, por el teorema anterior, aplicado a $\lambda = \kappa^+$, existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa^+$ tal que $p \in Y$ y $\chi(p, Y) \geqslant \kappa^+$. De donde, $\chi(Y) \geqslant \kappa^+$. □

Ahora demostraremos que en la clase de espacios Hausdorff compactos, las funciones cardinales *psw* y ψ reflejan a todo cardinal infinito.

Ambos resultados usan el Lema 3.8 en el que se hace uso de la noción de espacio inicialmente κ-compacto (para un cardinal infinito κ). A continuación introducimos dicho concepto.

3.7 Definición. Sea κ un cardinal infinito. Se dice que un espacio topológico X es *inicialmente κ-compacto* si de toda cubierta abierta de X de cardinalidad $\leqslant \kappa$ siempre es posible extraer una subcubierta finita.

Es claro que todo espacio compacto es un espacio inicialmente κ-compacto, para todo cardinal infinito κ. Y es claro además que los espacios ω-inicialmente compactos son precisamente los espacios numerablemente compactos. También es fácil probar que todo subespacio cerrado de un espacio inicialmente κ-compacto, es un espacio inicialmente κ-compacto. Esto último implica, en particular, que $e(X) \leqslant \kappa$ para cualquier espacio inicialmente κ-compacto X.

El siguiente lema establece que todos los subconjuntos "pequeños" de un espacio inicialmente κ-compacto están contenidos en subespacios inicialmente κ-compacto relativamente "pequeños". Para una demostración de este resultado remitimos al lector al artículo de R. M. Stephenson [29].

3.8 Lema. Supongamos que X es un espacio inicialmente $\kappa-$compacto y sea $A \subseteq X$ con $|A| \leqslant 2^\kappa$. Entonces existe $Y \subseteq X$ tal que $A \subseteq Y$, $|Y| \leqslant 2^\kappa$ y Y inicialmente $\kappa-$compacto.

El Lema 3.11 establece una generalización de la muy conocida igualdad $psw(X) = w(X)$ para espacios compactos T_2. En la demostración del lema 3.11 utilizaremos el siguiente resultado debido a Miščenko (ver [18, 2.5]).

3.9 Lema (de Miščenko)**.** Sean κ un cardinal infinito, E un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X tales que

$$\operatorname{ord}(p, \mathcal{A}) = |\{A \in \mathcal{A} : p \in A\}| \leqslant \kappa$$

para toda $p \in E$. El número de cubiertas finitas minimales de E formadas por elementos de $\mathcal{A}$ es menor que κ.

Utilizando el lema de Miščenko y el siguiente resultado podemos demostrar el Lema 3.11. Para una demostración del Lema 3.10, remitimos al lector al artículo [18, 9.2].

3.10 Lema. Sea X un espacio T_1 con $e(X) \leqslant \kappa$. Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X tal que $\operatorname{ord}(x, \mathcal{U}) \leqslant \kappa$. Entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta de cardinalidad $\leqslant \kappa$.

3.11 Lema. Sea X un espacio Hausdorff inicialmente $\kappa-$compacto. Si $psw(X) \leqslant \kappa$, entonces $psw(X) = w(X)$.

Demostración. Es bien conocido que si X es un espacio topológico T_1 entonces se tiene que $psw(X) \leqslant w(X)$. De tal manera que sólo resta demostrar que $w(X) \leqslant psw(X)$.

Sea $\lambda = psw(X) \leqslant \kappa$ y sea $\mathcal{S}$ una cubierta abierta separante de X tal que para todo $x \in X$, $|\{S \in \mathcal{S} : x \in S\}| \leqslant \lambda$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de cubiertas finitas minimales de X formadas por elementos de $\mathcal{S}$.

Aplicando el lema anterior, y el hecho de que X es inicialmente $\kappa-$compacto, podemos verificar que $\mathcal{F}$ no es vacía. Aplicando el Lema de Miščenko tenemos que $|\mathcal{F}| \leqslant \lambda$.

Por otro lado, note que cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a algún elemento de $\mathcal{F}$. En efecto, sea $U \in \mathcal{S}$ y sea $p \in U$ arbitrario; puesto que $\mathcal{S}$ es separante, para cada $x \in X \setminus U$, existe $V_x \in \mathcal{S}$ tal que $p \notin V_x$. Claramente la colección $\mathcal{W} = \{V_x : x \in X \setminus U\} \cup \{U\}$ es una cubierta abierta de X tal que para todo $x \in X$, $|\{W : W \in \mathcal{W}, x \in W\}| \leqslant \kappa$; por tanto, existe $\mathcal{V}$ subcolección de $\mathcal{W}$ con $|\mathcal{V}| \leqslant \kappa$ tal que $\mathcal{V}$ cubre a X (por el Lema 3.10). Puesto que X es inicialmente $\kappa-$compacto, existe $\mathcal{V}'$ subcolección finita de $\mathcal{V}$ que cubre a X. Claramente $U \in \mathcal{V}'$ y por tanto U está en algún elemento de $\mathcal{F}$. Todo lo anterior define una función del conjunto $\mathcal{S}$ en $\mathcal{F}$ que de hecho es inyectiva. De aquí que $|\mathcal{S}| \leqslant \lambda$.

Construiremos ahora a partir de $\mathcal{S}$ una red para X.

Sea $\mathcal{N}$ la colección formada por todos los conjuntos de la forma $X \setminus W$, donde W es unión finita de elementos de $\mathcal{S}$. Note que $|\mathcal{N}| \leqslant \lambda$.

Afirmación: $\mathcal{N}$ es una red para X.

En efecto. Sea U abierto no vacío en X y $p \in U$. Para cada $x \in X \setminus U$, existe $V_x \in \mathcal{S}$ tal que $p \notin V_x$. Dado que la colección $\mathcal{W} = \{V_x : x \in X \setminus U\} \cup \{U\}$ es una cubierta abierta de X, existen $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus U$ tales que $X = \bigcup \{V_{x_i} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{U\}$. Claramente $p \in X \setminus \bigcup \{V_{x_i} : i = 1, \ldots, n\} \subseteq U$. Por tanto $\mathcal{N}$ es red para X. $\square$

Ahora construiremos una colección $\mathcal{V}$ de abiertos en X de tal forma que:

1. $|\mathcal{V}| \leqslant \lambda$;
2. si $p, q \in X$, con $p \neq q$, entonces existen V_p, $V_q \in \mathcal{V}$ tales que $p \in V_p$, $q \in V_q$ y $V_p \cap V_q = \emptyset$.

Para cada par de elementos $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ tales que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, elijamos, si es posible, abiertos ajenos V_1, V_2 tales que $N_1 \subseteq V_1$ y $N_2 \subseteq V_2$. Denotemos con $\mathcal{V}$ a la colección formada por tales conjuntos. Observe que $|\mathcal{V}| \leqslant |[\mathcal{N}]^2| \leqslant \lambda$. Además, si $p, q \in X$, son tales que $p \neq q$, entonces existen U_p, U_q vecindades abiertas ajenas de p y q respectivamente, y $N_p, N_q \in \mathcal{N}$ de tal forma que $p \in N_p \subseteq U_p$ y $q \in N_q \subseteq U_q$; por tanto existen V_p, $V_q \in \mathcal{V}$ tales que $p \in V_p$, $q \in V_q$ y $V_p \cap V_q = \emptyset$. Así $\mathcal{V}$ satisface (1) y (2).

Ahora sea $\mathcal{B}$ la colección formada por todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para X y $|\mathcal{V}| \leqslant \lambda$. Por tanto $w(X) \leqslant \lambda = psw(X)$. □

3.12 Teorema. Bajo HGC, *psw* refleja fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de espacios Hausdorff y compactos.

Demostración. Puesto que *psw* es monótona, por la Observación 2.10, es suficiente probar el resultado para cardinales sucesores. Sea $\kappa \geqslant \omega$ y sea X un espacio compacto T_2.

Si $psw(X) \geqslant \kappa^+$, entonces $w(X) \geqslant \kappa^+$, luego, dado que w refleja a todo cardinal infinito, existe un subconjunto Y de X con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $w(Y) \geqslant \kappa^+$. Por el Lema 3.8 y dado que $\kappa^+ = 2^\kappa$, podemos suponer que Y es inicialmente $\kappa-$compacto. Luego, por el Lema 3.11, $psw(Y) \geqslant \kappa^+$. □

3.13 Lema. Sea X es un espacio T_3 inicialmente $\kappa-$compacto. Si $\psi(X) \leqslant \kappa$ entonces $\psi(X) = \chi(X)$.

Demostración. Para probar la igualdad demostraremos que $\chi(X) \leqslant \kappa$. Sea $\lambda = \psi(X) \leqslant \kappa$. Sea $x \in X$ arbitrario y $\{V_s : s \in S\}$ una pseudobase de x con $|S| \leqslant \lambda$. Entonces $\{x\} = \bigcap_{s\in S} V_s$. Puesto que X es T_3, para cada $s \in S$, existe U_s abierto tal que $x \in \overline{U}_s \subseteq V_s$, entonces $\{x\} = \bigcap_{s\in S} \overline{U}_s$. Claramente, para todo $s \in S$, el subespacio $\overline{U}_s$ es inicialmente $\kappa-$compacto.

Afirmación: La colección $\mathcal{B}_x$ de todas las intersecciones finitas de elementos de $\{U_s : s \in S\}$ es base local de x.
En efecto, sean U una vecindad abierta de x y $A = X \setminus U$. Definamos $\mathcal{F} = \{X \setminus \overline{U}_s : s \in S\}$. Si $y \in A$, entonces $y \notin U$; por tanto $x \neq y$. Luego, existe $s \in S$ tal que $y \notin \overline{U}_s$, es decir, $y \in X \setminus \overline{U}_s$; por tanto $A \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Por otro lado, dado que A es cerrado en X, entonces A es inicialmente $\kappa-$compacto; de

donde, existe $\{s_1, ..., s_n\} \subseteq S$ tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(X \setminus \overline{U}_{s_i} \right) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{U}_{s_i} \right) \subseteq X \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} U_{s_i})$; de donde $\bigcap_{i=1}^{n} U_{s_i} \subseteq U$. Así, la afirmación está probada. ⊠

Finalmente, dado que $|\mathcal{B}_x| \leqslant \lambda$, concluimos que $\chi(x, X) \leqslant \lambda$. De esta manera, $\chi(X) = \psi(X)$. □

3.14 Teorema. Bajo HGC, ψ refleja fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de espacios Hausdorff y compactos.

Demostración. Sea X un espacio compacto T_2. Como ψ es monótona, bastará probar que refleja a todo cardinal sucesor (ver Observación 2.10). Sea $\kappa \geqslant \omega$. Supongamos que $\psi(X) \geqslant \kappa^+$. Entonces $\chi(X) \geqslant \kappa^+$. Como χ refleja en los espacios compactos T_2 a todos los cardinales infinitos, existe $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa^+$ tal que $\chi(Y) \geqslant \kappa^+$. Aplicando el Lema 3.8, y por la HGC podemos suponer sin perdida de generalidad que Y es inicialmente κ-compacto. Aplicando ahora el Lema 3.13, podemos concluir que $\psi(Y) = \chi(Y) \geqslant \kappa^+$. □

3.2 El teorema de metrización de Alan Dow

Uno de los teoremas de reflejo más notables es el debido a A. Hajnal e I. Juhász, que muestra las fuertes propiedades de reflejo que tiene el peso (ver Teorema 2.28). Otro resultado igualmente notable es el siguiente teorema de metrización perteneciente a Alan Dow [6]: *Si X es un espacio topológico numerablemente compacto no metrizable, entonces existe un subespacio de X con cardinalidad $\leqslant \omega_1$ que es no metrizable.* Este teorema de Alan Dow es en realidad un teorema de reflejo. Éste se puede escribir en términos de las propiedades de reflejo de una función cardinal: *la función cardinal pw refleja ω_1 en la clase de los espacios numerablemente compactos* (ver Definición 3.16).

En esta sección probaremos este importante teorema de reflejo.

Para ello usaremos la siguiente terminología que ya ha sido utilizada anteriormente.
Sea X un espacio topológico. Para $Y \subseteq X$ y $\mathcal{L}$ una colección de subconjuntos abiertos en X, denotamos $\mathcal{L} \restriction_Y = \{L \cap Y : L \in \mathcal{L}\}$. Con esta notación, la proposición "$\mathcal{L} \restriction_Y$ es base para Y", significa que: si $x \in Y$ y R es una vecindad abierta de x en Y, entonces existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $x \in L \cap Y \subseteq R$. Por otro lado, la proposición " $\mathcal{L}$ es base para Y", significa que: si $x \in Y$ y R es una vecindad abierta de x en Y, entonces existe $L \in \mathcal{L}$ tal que $x \in L \subseteq R$.
Para hacer más clara la distinción de estas dos ideas, probaremos el siguiente lema, que usaremos repetidas veces.

3.15 Lema. Sea $Y \subseteq X$ y sea $\mathcal{L}$ una colección de subconjuntos abiertos de X, con $|\mathcal{L}| \leqslant \kappa$. Si $\mathcal{L}$ no es una base para Y, entonces existe $A \subseteq X$ tal que $|A| \leqslant \kappa$ y $\mathcal{L} \restriction_Y$ no es base para A. Más aún, existe un punto $z \in A \cap Y$ que constata este hecho, es decir, existe un punto $z \in A \cap Y$ y existe una vecindad R de z en A tal que si $z \in L \in \mathcal{L}$, entonces $L \cap A \nsubseteq R$.

Demostración. Como $\mathcal{L}$ no es base para Y, existe un $z \in Y$ y una vecindad abierta R de z tal que si $z \in L \in \mathcal{L}$, entonces $L \nsubseteq R$. Para cada $L \in \mathcal{L}$ con $z \in L$, escojamos $x_L \in (L \setminus R)$. El conjunto requerido es $A = \{z\} \bigcup \{x_L : L \in \mathcal{L} \text{ y } z \in L\}$. $\square$

3.16 Definición. Sea X un espacio topológico. El peso-punto de X es el número cardinal infinito

$$pw(X) = mín\{\kappa \geqslant \omega : \exists \text{ una base } \mathcal{B} \text{ de } X \text{ con } ord(\mathcal{B}, x) \leqslant \kappa \,\forall\, x \in X\},$$

donde $ord(\mathcal{B}, x) = |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}|$.

No es difícil verificar que la función cardinal pw es monótona y que $\chi, psw, sw \leqslant pw$.

3.17 Teorema. Sea κ un cardinal infinito y sea X un espacio T_1 inicialmente κ-compacto con $\chi(X) \leqslant \kappa$. Si $w(X) \geqslant \kappa^+$, entonces existe un subespacio Y de X con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $pw(Y) \geqslant \kappa^+$.

Demostración. Para cada $x \in X$ fijemos una colección $\mathcal{U}_x$ que sea base local para x tal que $|\mathcal{U}_x| \leqslant \kappa$ (recuerde que $\chi(X) \leqslant \kappa$). A continuación construiremos una colección $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de subconjuntos de X y una colección $\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de subconjuntos abiertos de X tales que las siguientes condiciones se satisfacen para cada $\alpha \leqslant \kappa^+$.

(1) $|Y_\alpha| \leqslant \kappa$;

(2) $\mathcal{L}_\alpha = \{U : U \in \mathcal{U}_x, x \in Y_\alpha\}$ y $|\mathcal{L}_\alpha| \leqslant \kappa$;

(3) si $\beta < \alpha$, entonces $Y_\beta \subseteq Y_\alpha$;

(4) si α es un ordinal límite, entonces

$$Y_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta \text{ y } \mathcal{L}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta;$$

(5) si α no es un ordinal límite y si $G \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{L}_\beta$ es una subcolección finita tal que $\bigcup G \neq X$, entonces $Y_\alpha \setminus \bigcup G \neq \emptyset$;

(6) si α es un ordinal límite, entonces existe un punto $z \in cl_X(Y_\alpha) \cap Y_{\alpha+1}$ que constata que $\mathcal{L}_\alpha \restriction_{Y_{\alpha+1}}$ no es una base para $Y_{\alpha+1}$.

CONSTRUCCIÓN:
Sea $x_0 \in X$ fijo. Definamos $Y_0 = \{x_0\}$ y $\mathcal{L}_0 = \mathcal{U}_{x_0}$. Claramente se satisfacen $(1), (2), (3), (4), (5)$ y (6).
Ahora, para cada $G \subseteq \mathcal{L}_0$ finita tal que $\bigcup G \neq X$, fijemos un elemento $x_G \in X \setminus \bigcup G$. Definamos $Y_1 = Y_0 \cup \{x_G : G \in [\mathcal{L}_0]^{<\omega}\}$. Definamos también $\mathcal{L}_1 = \{U : U \in \mathcal{U}_x \text{ con } x \in Y_1\}$.

Note que por construcción Y_1 y $\mathcal{L}_1$ satisfacen $(1), \cdots, (6)$. Supongamos ahora que $\gamma < \kappa^+$ y que tenemos ya construidas a las colecciones $\{Y_\beta : \beta < \gamma\}$ y $\{\mathcal{L}_\beta : \beta < \gamma\}$, que satisfacen $(1), \cdots, (6)$.

Caso(1): γ es un ordinal sucesor, ie, $\exists\, \beta$ tal que $\gamma = \beta + 1$.

Subcaso (A) β no es un ordinal límite. Para cada $G \subseteq \mathcal{L}_\beta$ tal que $\bigcup G \neq X$, fije un punto $x_G \in X \setminus \bigcup G$. Definimos $Y_\gamma = Y_\beta \cup \{x_G : G \in [\mathcal{L}_\beta]^{<\omega}\}$ y $\mathcal{L}_\gamma = \{U : U \in \mathcal{U}_x, x \in Y_\gamma\}$

Subcaso (B) β es un ordinal límite (así, γ es el sucesor de un ordinal límite).

Afirmación: Existe $x \in cl_X(Y_\beta)$ tal que $\mathcal{L}_\beta$ no es base local de x.
En efecto, supongamos que $\mathcal{L}_\beta$ es base local de $x\ \forall\ x \in cl_X(Y_\beta)$. Como $|\mathcal{L}_\beta| \leqslant \kappa$ y $w(X) \geqslant \kappa^+, \mathcal{L}_\beta$ no es base de X. Entonces existe $q \in X$ y un abierto R de X tal que $q \in R$ y $\forall\ L \in \mathcal{L}_\beta\ : q \in L \Longrightarrow L \nsubseteq R$, es decir, $L \setminus R \neq \emptyset\ \forall\ L \in \mathcal{L}_\beta$ tal que $q \in L$. Como $\mathcal{L}_\beta$ es base local de cada punto de $cl_X(Y_\beta)$, tenemos que $q \notin cl_X(Y_\beta)$. Como X es $T_1, X \setminus \{q\}$ es abierto y $cl_X(Y_\beta) \subseteq X \setminus \{q\}$. Entonces $\forall\ x \in cl_X(Y_\beta)\ \exists\ L_x \in \mathcal{L}_\beta$ tal que $x \in L_x \cap cl_X(Y_\beta) \subseteq X \setminus \{q\}$. Entonces la colección $\mathcal{U} = \{L_x : x \in cl_X(Y_\beta)\}$ es una cubierta abierta de $cl_X(Y_\beta)$. Como $cl_X(Y_\beta)$ es inicialmente κ-compacto (note que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}_\beta$ y que $|\mathcal{L}_\beta| \leqslant \kappa$), existe $G \subseteq \mathcal{U}$ subcubierta finita. Como $\mathcal{L}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{L}_\alpha$ (pues β es límite ver (4)), existe $\alpha < \beta$ tal que $G \subseteq \mathcal{L}_\alpha$. Podemos suponer sin perdida de generalidad que α es un ordinal sucesor. Como G no cubre a X (puesto que $q \notin \bigcup G$), el elemento x_G que hemos tomado en la construcción de Y_β es tal que $x_G \in X \setminus \bigcup G$ y $x_G \in Y_{\alpha+1} \subseteq Y_\beta$. Pero entonces debería suceder que $x_G \in \bigcup G$ porque $\bigcup G$ cubre a $cl_X(Y_\beta)$. Pero esto es una contradicción. Por lo tanto la afirmación es cierta. $\square$

Como existe $x \in cl_X(Y_\beta)$ tal que $\mathcal{L}_\beta$ no es base local de x, existe un abierto $R \subseteq X$ tal que $\forall\ L \in \mathcal{L}_\beta$ con $x \in L$ se tiene que $L \setminus R \neq \emptyset$. Para cada $L \in \mathcal{L}_\beta$, tal que $x \in L$, fijemos un elemento $x_L \in L \setminus R$. Definamos

$$Y_\gamma = Y_\beta \cup \{x\} \cup \{x_L : x \in L \in L_\beta\}.$$

Note que $\mathcal{L}_\beta$ no es una base local de x en $Y_{\beta+1} = Y_\gamma$. De esta forma hemos terminado de construir Y_γ para el caso (1).

Caso(2): γ es ordinal límite.
En el caso en que γ sea un ordinal límite, definimos

$$Y_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} Y_\beta \text{ y } \mathcal{L}_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{L}_\beta.$$

Esto termina la construcción de las colecciones Y_γ y $\mathcal{L}_\gamma$.

Observe ahora que Y_γ y $\mathcal{L}_\gamma$ satisfacen $(1), \cdots, (6)$. De esta manera hemos terminado la construcción de las colecciones $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ y $\{\mathcal{L}_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ que satisfacen $(1), \cdots, (6)$. Defina ahora $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} Y_\alpha$ y $\mathcal{L} = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathcal{L}_\alpha$. Note que $|Y| \leqslant \kappa^+$ y que $\mathcal{L}$ es una base para Y. Ahora mostraremos que $pw(Y) \geqslant \kappa^+$.
Supongamos por el contrario que $pw(Y) < \kappa^+$. Entonces existe una colección $\mathcal{B}$ de abiertos de X, tal que

(1) $\mathcal{B} \restriction_Y$ es base de Y,

(2) $\forall\, x \in Y : |\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}| \leqslant \kappa^+$.

Note que $\forall\, \alpha < \kappa^+$ la colección $\mathcal{B}_\alpha = \{B \in \mathcal{B} : B \cap Y_\alpha \neq \emptyset\}$, tiene cardinalidad a lo más κ. Dado cualquier cardinal $\beta < \kappa^+$, defina

$$p_\beta = \{(B, B') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \emptyset \neq B \cap Y_\beta \subseteq B' \cap Y_\beta\}$$

Claramente $|p_\beta| \leqslant \kappa$. Defina ahora

$$p'_\beta = \{(B, B') \in p_\beta : \exists\, L \in \mathcal{L} \text{ tal que } B \cap Y \subseteq L \cap Y \subseteq B' \cap Y\}$$

(recuerde que $\mathfrak{L}$ es una base de Y). De nuevo $|p'_\beta| \leqslant \kappa$. Ahora, para cada $(B, B) \in p'_\beta$ fije un único elemento $L_{(B,B)} \in \mathfrak{L}$ tal que $B \cap Y \subseteq L_{(B,B)} \cap Y \subseteq B' \cap Y$. Defina

$$E_\beta = \{L_{(B,B)} : (B, B) \in p'_\beta\}.$$

Es claro que $|E_\beta| \leqslant \kappa$ y que $E_\beta \subseteq \mathfrak{L}$. Entonces existe un ordinal $\tau(\beta) < \kappa^+$ tal que $E_\beta \subseteq \mathfrak{L}_{\tau(\beta)}$.
La anterior construcción permite definir una sucesión de ordinales $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \cdots < \kappa$ y una sucesión de conjuntos E_{α_n}, tales que:

$$(a) \qquad E_{\alpha_n} \subseteq \mathfrak{L}_{\alpha_{n+1}}$$

Definamos ahora $\alpha = sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Note que α es un ordinal límite. Entonces, por (a), existe un punto $z \in cl_X(Y_\alpha) \cap Y_{\alpha+1}$ que constata que $\mathfrak{L}_\alpha \restriction_{Y_{\alpha+1}}$ no es base para $Y_{\alpha+1}$, es decir, existe un abierto R de X tal que $z \in R$ y

$$(b) \qquad \forall\, L \in \mathfrak{L}_\alpha : z \in L \Longrightarrow L \cap Y_{\alpha+1} \nsubseteq R$$

Note ahora que como $\mathfrak{B} \restriction_Y$ y $\mathfrak{L} \restriction_Y$ son base para Y, existen $B, B' \in \mathfrak{B}$ y $L \in \mathfrak{L}$, tales que

$$(c) \qquad z \in B \cap Y \subseteq L \cap Y \subseteq B' \cap Y \subseteq R$$

Obsérvese también que como $z \in cl_X(Y_\alpha)$ y $z \in B \cap B'$, se tiene que $B \cap Y_\alpha \neq \emptyset \neq B' \cap Y_\alpha$. Como α es un ordinal límite, $Y_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$. Entonces existe $\alpha_n < \alpha$ tal que $B, B' \in \mathfrak{B}_{\alpha_n}$ por (c), y la forma en que se construyó a E_{α_n}, el elemento $L_{(B,B')} \in E_{\alpha_n}$ es tal que:

$$(d) \qquad z \in L_{(B,B')} \cap Y \subseteq R$$

Pero entonces $L_{(B,B')} \in \mathcal{L}_\alpha$ por la contención en (a). Entonces (d) contradice (b). Por lo tanto $pw(Y) \geqslant \kappa^+$.

Por lo tanto pw refleja a κ^+.

□

3.18 Corolario. Si X es un espacio inicialmente κ-compacto T_1 con $pw(X) \leqslant \kappa$, entonces $w(X) \leqslant \kappa$.

Demostración. Si $w(X) \geqslant \kappa^+$, entonces por el Teorema 3.17 existe $Y \in [X]^{\leqslant \kappa^+}$ tal que $pw(Y) \geqslant \kappa^+$. Pero entonces $pw(X) \geqslant \kappa^+$. Lo cual es una contradicción. □

3.19 Corolario. Sea X un espacio topológico.

1. Si X es un espacio compacto T_1 que tiene peso-punto numerable, entonces X tiene una base numerable;

2. Si X es un espacio compacto T_1, entonces $pw(X) = w(X)$.

3.20 Teorema. Sea ϕ una función cardinal monótona con $pw \leqslant \phi \leqslant w$. Entonces ϕ refleja a κ^+ para la clase de espacios inicialmente κ-compactos T_3.

Demostración. Sea X un espacio inicialmente κ-compacto T_3 con $\phi(X) \geqslant \kappa^+$. Entonces $w(X) \geqslant \kappa^+$ y por el Teorema 2.28, de reflección, de Hajnal-Juhász existe un subespacio Y de X con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $w(Y) \geqslant \kappa^+$. Podemos asumir que $\chi(cl_X(Y)) < \kappa^+$ (ya que por otro lado, existiría $z \in cl_X(Y)$ tal que $\chi(z, cl_X(Y)) \geqslant \kappa^+$ y por la regularidad de X se seguiría que $Z = Y \cup \{z\}$ es un subespacio de X de cardinalidad a lo mas κ^+ con $\phi(Z) \geqslant \kappa^+$). Así $\chi(cl_X(Y)) < \kappa$ y $w(cl_X(Y)) \geqslant \kappa^+$ y aplicando el Teorema 3.17 se concluye la demostración. □

El grado de metrizabilidad de un espacio X es el número cardinal

$$m(X) = \textit{mín}\big\{\kappa \geqslant \omega : X \text{ tiene una base } \mathcal{B} = \bigcup\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}, \\ \text{donde cada } B_\alpha \text{ es localmente finita en } X.\big\}$$

No es difícil ver que m es una función cardinal monótona y que $pw \leqslant m \leqslant w$.

3.21 Corolario. En la clase de espacios compactos Hausdorff, pw, w y m reflejan a todo cardinal.

Ahora daremos una demostración del teorema de metrización de Dow usando el Teorema 3.17. Para ello necesitaremos el siguiente resultado.

3.22 Lema. Sean κ y λ cardinales infinitos con $\lambda \leqslant \kappa$ y sea X un espacio topológico con $d(X) \leqslant \kappa$. Supongamos que para cualquier subconjunto Y de X que cumple $|Y| \leqslant \kappa$, Y es regular y $\chi(Y) \leqslant \lambda$, entonces X es regular y $\chi(X) \leqslant \lambda$.

Demostración. Vamos a suponer lo contrario. Sea X un espacio topológico no regular, entonces existe $q \in X$ y una vecindad abierta R de q tal que para cualquier conjunto abierto V, se tiene que

$$\text{si } q \in V, \text{ entonces } cl_X(V) \nsubseteq R.$$

Sea $Y = D \cup \{q\}$, donde D es un subconjunto denso de X con $|D| \leqslant \kappa$. Como $\chi(Y) \leqslant \lambda$, existe una colección $\{B_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de vecindades abiertas de q, tales que para cualquier conjunto abierto V

$$(**) \qquad \text{si } q \in V, \text{ entonces existe } \alpha < \lambda \text{ tal que } (B_\alpha \cap Y) \subseteq V.$$

Para cada $\alpha < \lambda$ sean $x_\alpha \in (B_\alpha \backslash R)$ y $Z = Y \cup \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Por hipótesis Z es un espacio regular, por lo que existe una vecindad abierta V de q tal que

$$q \in (V \cap Z) \subseteq cl_Z(V \cap Z) \subseteq R.$$

Por $(**)$, existe $\alpha < \lambda$ tal que $(B_\alpha \cap Y) \subseteq V$. Entonces:

$$x_\alpha \in cl_X(B_\alpha) = cl_X(B_\alpha \cap Y) \subseteq cl_X(V \cap Z),$$

puesto que Y es denso en X.
Tenemos también que $x_\alpha \in Z$, por lo que $x_\alpha \in cl_X(V \cap Z) \cap Z = cl_Z(V \cap Z) \subseteq R$, lo cual es una contradicción.
Para demostrar que $\chi(X) \leqslant \lambda$, sea $x \in X$. Por hipótesis, $\chi(x, D \cup \{x\}) \leqslant \lambda$. Pero D es denso en X y X es regular, así que $\chi(x, X) \leqslant \lambda$ como se desea. $\square$

Ahora estamos listos para probar el teorema de Dow. Probamos antes una generalización sugerida por Juhász.

3.23 Teorema. Sea X un espacio inicialmente κ-compacto tal que para todo $Y \subseteq X$ con $|Y| \leqslant \kappa^+, Y$ es T_3 y $pw(Y) \leqslant \kappa$. Entonces X es un espacio T_3 y $w(X) \leqslant \kappa$.

Demostración. Primero notemos que X es un espacio T_1 (aplique la hipótesis a $\{x, y\}$). Supongamos que $w(X) \geqslant \kappa^+$. Por el teorema de Hajnal-Juhász (Teorema 2.28) existe un subespacio Y de X con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $w(Y) \geqslant \kappa^+$. Por el Lema 3.22, $\chi(cl_X(Y)) \leqslant \kappa$. Aplicando el Teorema 3.17 tenemos que $cl_X(Y)$ tiene un subespacio Z de cardinalidad $\leqslant \kappa^+$ con $pw(Z) \geqslant \kappa^+$, contradiciendo así que $pw(X) \leqslant \kappa$. Observe que el Teorema 3.17 se puede aplicar aquí ya que la condición $d(X) \leqslant \kappa$ implica, según el Lema 3.22, que $\chi(X) \leqslant \kappa$. $\square$

3.24 Corolario. (de Metrización de Alan Dow). Si X es un espacio numerablemente compacto y todo subconjunto de X de cardinalidad a lo más ω_1 es metrizable, entonces X es metrizable.

Demostración. Por el teorema anterior podemos concluir que X es un espacio T_3 y $w(X) \leqslant \omega$, es decir, tiene una base numerable. Por el teorema de metrización de Urysohn X es metrizable. $\square$

3.3 Teorema de reflejo para el i-peso y espacios diádicos

Utilizando el teorema de reflejo para el pseudocarácter y el teorema de reflejo para el peso, Alejandro Ramírez Páramo demostró en [27] que, suponiendo cierta la HGC, la función cardinal i-peso refleja fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de los espacios compactos de Hausdorff. En esta sección exponemos este y otros resultados.

Con este propósito en mente es que establecemos los siguientes conceptos.

3.25 Definición. Sea X un espacio de topológico.

1. Diremos que el espacio X se *condensa* sobre el espacio Y si existe una función biyectiva continua de X sobre Y.

2. El i-peso, $iw(X)$, de un espacio de Tychonoff X es el más pequeño de los pesos $w(Y)$ de todos los espacios de Tychonoff Y sobre los cuales X puede ser condensado; esto es,

   $$iw(X) = \textit{mín}\{w(Y) : \text{existe una condensación de } X \text{ sobre } Y\}$$

   donde X y Y son Tychonoff.

La siguiente proposición resume algunas de las principales propiedades de la función cardinal iw.

3.26 Proposición.

1. La función cardinal iw es monótona.

2. Para todo espacio de Tychonoff X, se tiene que $\psi(X) \leqslant iw(X)$.

3. Para todo espacio de Tychonoff X, se tiene que $iw(X) \leqslant nw(X) \leqslant w(X)$.

4. Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces $iw(X) = nw(X) = w(X)$.

Demostración.

1. Sea $Y \subseteq X$ y sea $Z \in T_{31/2}$ y $f : X \to Z$ una condensación de X sobre Z con la propiedad de que $w(Z) = iw(X)$.
   Ahora fijémonos en la restricción de f sobre Y, es decir, $f|_Y : Y \to f(Y)$ y note que es una condensación sobre $f(Y)$, como $f(Y) \subseteq Z$ y como w es monótona tenemos que $w(f(Y)) \leqslant w(Z)$, y por definición de iw, tenemos que $iw(Y) \leqslant w(f(Y)) \leqslant iw(X)$.

2. Sea $Z \in T_{31/2}$ y $f : X \to Z$ una condensación de X sobre Z tal que $w(Z) = iw(X)$. Sea $\mathcal{B}$ base de Z, con $|\mathcal{B}| = w(Z)$. Sea $x \in X$ y fijémonos en $f(x) \in Z(f(x) = y)$. Tomemos:

   $$B_y = \{B \in \mathcal{B} : y \in B\}.$$

   Entonces B_y es una pseudobase de Z en y es decir, $\bigcap\{B \in \mathcal{B} : y \in B\} = \{y\}$.
   Ahora fijémonos en $f^{-1}(B_y) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}, y \in B\}$. Notemos que $\bigcap f^{-1}(B_y) = \{x\}$. En efecto, supongamos que existe $x^{'} \neq x$ tal que $x^{'} \in \bigcap f^{-1}(B_y)$, entonces, para toda $B \in B_y, x^{'} \in f^{-1}(B)$, con lo que $f(x^{'}) \in B$, para toda $B \in B_y$, es decir que $f(x^{'}) \in \bigcap B_y$, con lo que podríamos concluir que $f(x^{'}) = y$, lo cual contradice nuestras hipótesis. Con esto vemos que $f^{-1}(B_y)$ es una pseudobase de X en x. Además $|f^{-1}(B_y)| \leqslant w(Z)$.
   Ahora como x fue arbitraria, $\psi(X, x) \leqslant |f^{-1}(B_y)| \leqslant w(Z)$,

es decir que $w(Z)$ es cota superior del conjunto $\{\psi(X,x) : x \in X\}$, con lo que podemos concluir que:

$$\psi(X) \leqslant iw(X).$$

3. Para ver que $nw(X) \leqslant w(X)$, basta notar que toda base es una red, por lo que la desigualdad es inmediata.
   Ahora probaremos la otra desigualdad, es decir $iw(X) \leqslant nw(X)$. Denotemos con $\mathcal{T}(X)$ a la topología de X y sea $\mathcal{N}$ una red para X tal que $|\mathcal{N}| = nw(X)$. Formemos el conjunto $\mathcal{M}$ de la siguiente manera:

   $$\{(M_1, M_2) : \exists\, U_{M_1}, U_{M_2} \in \mathcal{T}(X), M_i \subseteq U_{M_i} \text{ y } U_{M_1} \cap U_{M_2} = \emptyset\},$$

   donde $(M_1, M_2) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ e $i \in \{1, 2\}$.
   Para cada $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}$, fijemos un par de abiertos $U_{M_1}, U_{M_2} \in \mathcal{T}(X)$ tal que $M_i \subseteq U_{M_i}, i \in \{1, 2\}$ y $U_{M_1} \cap U_{M_2} = \emptyset$ y formemos

   $$\mathcal{B}_0 = \{U_{M_1}, U_{M_2} : (M_1, M_2) \in \mathcal{M}\}.$$

   Esta familia, $\mathcal{B}_0$, es una subbase para una única topología para X, es decir, la familia $\mathcal{B}$ de todas las intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{B}_0$ forma una base para una única topología para X, que denotamos $\mathcal{T}_B(X)$.
   De la definición de red y el hecho de que $(X, \mathcal{T}(X))$ es un espacio de Hausdorff, se sigue que el conjunto X con la topología generada por $\mathcal{B}$ es un espacio de Hausdorff, denotemos a este espacio como $Y = (X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}}(X))$. Como $|\mathcal{B}| \leqslant nw(X)$, tenemos que $w(Y) \leqslant nw(X)$ y como $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(X) \subseteq \mathcal{T}(X)$ se sigue que la función identidad $id_X : X \to Y$, es biyectiva y continua, con lo que se concluye la desigualdad deseada.

4. Para esta última prueba note que por lo anterior sólo es necesario hacer el caso $w(X) \leqslant iw(X)$. Sea $f : X \to Y$ una condensación y sea $\mathcal{B}$ base en Y tal que $|\mathcal{B}| = w(Y)$

y con la propiedad de que $w(Y) = iw(X)$. Ahora, como f es un homeomorfismo (ver 3.1.13 en [9]), tenemos que la desigualdad deseada ocurre de manera natural, ya que: $f^{-1}(\mathcal{B})$ es base en X, con lo que por definición de peso $w(X) \leqslant |f^{-1}(\mathcal{B})|$ y $|f^{-1}(\mathcal{B})| = |\mathcal{B}| = w(Y)$, por lo que podemos concluir que $w(X) \leqslant iw(X)$.

□

3.27 Teorema (Ramírez Páramo [27])**.** Suponiendo cierta la HGC, la función cardinal iw refleja fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de los espacios Hausdorff compactos.

Demostración. Como el iw es una función cardinal monótona, es suficiente probar (ver Observación 2.10) que el iw refleja a todo cardinal sucesor κ^+.
Sea X un espacio de Hausdorff compacto tal que $iw(X) \geqslant \kappa^+$. Mostraremos que existe un subconjunto Z de X, con $|Z| \leqslant \kappa^+$ y $iw(Z) \geqslant \kappa^+$.
Como $iw(X) = w(X)$, entonces $w(X) \geqslant \kappa^+$; por el teorema de reflejo de Hajnal-Juhász (Teorema 2.28) existe un subespacio Y de X con $|Y| \leqslant \kappa^+$ y $w(Y) \geqslant \kappa^+$. Sea $Y_0 = cl_X(Y)$, entonces Y_0 es un espacio de Hausdorff compacto.
Consideremos los siguientes casos:

(a) $\psi(Y_0) \geqslant \kappa^+$. Por el Teorema 3.14, existe un subespacio Z de Y_0 tal que $|Z| \leqslant \kappa^+$ y $\psi(Z) \geqslant \kappa^+$. De aquí concluimos que $iw(Z) \geqslant \kappa^+$ (ver Teorema 3.26).

(b) $\psi(Y_0) < \kappa^+$, es decir, $\psi(Y_0) \leqslant \kappa$. Como Y_0 es un espacio de Hausdorff compacto, $\psi(Y_0) = \chi(Y_0)$, y $|Y_0| \leqslant 2^{\chi(Y_0)}$. Tenemos que $|Y_0| \leqslant 2^\kappa = \kappa^+$ por la HGC. Por otro lado, es claro que $iw(Y_0) = w(Y_0) \geqslant w(Y) \geqslant \kappa^+$. Así $Z = Y_0$ constata el hecho de que iw refleja a κ^+.

□

3.28 Definición. Sea X un espacio Hausdorff. Se dice que X es un espacio *diádico* si X es imagen continua de un cubo de Cantor $D(2)^\kappa$ (donde $\kappa \geqslant \omega$).

3.29 Corolario (Ramírez Páramo [27])**.** Suponiendo cierta la HGC, la función cardinal iw tiene la propiedad $IU(\kappa)$

3.30 Teorema (Ramírez Páramo [27])**.** La función cardinal iw refleja fuertemente a todo cardinal infinito en la clase de los espacios diádicos.

Demostración. Por la Observación 2.10 es suficiente probar que el iw refleja a todo cardinal sucesor κ^+. Sea X un espacio diádico tal que $iw(X) \geqslant \kappa^+$. Por el Teorema 3.26, $w(X) \geqslant \kappa^+$; así por el teorema de Efimov-Gerlitz-Hagler [8], X contiene una copia topológica de D^{κ^+} (el producto topológico de κ^+ copias del espacio D). Sea $p \in D^{\kappa^+}$, como $\psi(p, D^{\kappa^+}) = \kappa^+$, por el teorema de Efimov [7], existe $M \subseteq D^{\kappa^+}$ tal que M es discreto, $|M| = \kappa^+$ y $Y = M \cap \{p\}$ es homeomorfo a $A(\kappa^+)$, donde $A(\kappa^+)$ es compactificación de un espacio discreto de cardinalidad κ^+. Por lo tanto $\kappa^+ \leqslant iw(Y)$. $\square$

Bibliografía

[1] Arkhangel'skii A., *On bicompacta hereditarily satisfying the Souslin's condition. Tightness and free sequences*, Soviet Math. Doklady **12** (1971) 1253-1257.

[2] Arkhangel'skii A., *Topological Function Space*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.

[3] Boyer Carl B. , *Historia de la matemática*, Alianza Edotorial S.A., Madrid, 1986.

[4] Cohen Paul J., *The independence of the continuum hypothesis, I*, Proc. Math. Acad. Sci. USA **50** (1963), 1143-1148.

[5] Cohen Paul J. , *The independence of the continuum hypothesis, II*, Proc. Math. Acad. Sci. USA **51** (1964), 105-110.

[6] Dow A., *An empty class of nonmetric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988) 999–1001.

[7] Efimov B., *Dyadic compacta*, Trudy Moskov. Mat Obšč **14** (1965) 211–247.

[8] Efimov B., *Mapping and embedding of dyadic spaces*, Math. Sb. (N.S.) **103(145)** (1977) 52–68.

[9] Engelking R., *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol 6, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[10] Gödel Kurt , *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton Univ. Press, 1940.

[11] Hajnal A. and Juhász I., *Discrete subspaces of topological space*, Indag Math **29 no. 3** (1967) 343–356.

[12] Hajnal A. and Juhász I., *On hereditarily α-Lindelöf and hereditarily α-separable spaces*, Ann. Univ. Soc. Budapest Eötvös Sect. Math. **11** (1968) 115–124.

[13] Hajnal A. and Juhász I., *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **20** (1969) 25–37.

[14] Hajnal A. and Juhász I., *Discrete subspaces of topological space II*, Indag Math **31** (1969) 18–30.

[15] Hajnal A. and Juhász I., *Having a small weight is determined by the small subespaces*, Proc. Amer. Math.Soc. **79** (1980) 657–658.

[16] Hausdorff Felix, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit&Comp., Leipzig, 1914; NachdruckNewYork, 1949, 1965, 1978.

[17] Hausdorff Felix, *Set Theory*, Chelsea Publishing Company, 1957.

[18] Hodel R., *Cardinal Functions I*, En: Kunen K. and Vaughan J. Editors Handbook of Set-theoretic Topology,pp. 1–61 North-Holland, Amsterdam 1984.

[19] Hodel R. E. and Vaughan J. E., *Reflection theorems for cardinal functions*, Topology Appl. 100(2000), 47-66.

[20] Hrbacek Karel and Jech Thomas, *Introduction to set theory*, Marcel Dekker, Inc., 1999.

[21] Jech Thomas, *The axiom of choice*, North-Holland, 1973.

[22] Jech Thomas, *Set Theory*, Springer, New York, 2002.

[23] Juhász I, *Cardinal Functions in Topology*, Mathematisch Centrum Amsterdan, 1971.

[24] Juhász I., *Cardinal Functions in Topology- Ten Years Later*, 2nd ed.Math. Center Tracts 123. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1980.

[25] Kowalski H., *Topologische Räume*, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1961.

[26] Kunen Kenneth, *Set theory, an introduction to independence proofs*, North-Holland, 1995.

[27] Ramírez Páramo, *A reflection theorem for iw*, Topology preceedigs **28** (2004) 1-5.

[28] Rudin Mary Ellen, *Lectures on Set Theoretic Topology*, American Mathematical Society. **43** (1975) 1.

[29] Stephenson R., *Initially κ-compact and related spaces*, En: Kunen K. and Vaughan J. Editors Handbook of Set-theoretic, North-Holland, Amsterdam (1984) 603-632.

[30] Tamariz Mascarúa, *Curso de Topología General, Notas de Clase*, Vinculos Matematicos,F. Ciencias UNAM #114 México, 1998.

[31] Tkachuk Vladimir, *Curso básico de Topología General*, UAM, México, 1999.

[32] Zorn M., *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Am. Math. Soc. **41** (1935) 667-670.

Índice