



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS DE TRANSFERENCIA DE  
CALOR POR CONVECCIÓN MIXTA  
PARA FLUJO OPUESTO EN UN CANAL  
VERTICAL SUJETO A UN CALENTAMIENTO  
DIFERENCIAL ASIMÉTRICO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

**LORENZO ALBERTO MARTÍNEZ SUÁSTEGUI**



TUTOR:  
**DR. CÉSAR TREVIÑO TREVIÑO**

2007



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE  
Secretario: DR. FRANCISCO JAVIER SOLORIO ORDÁZ  
1<sup>er.</sup> Vocal: DR. CÉSAR TREVIÑO TREVIÑO  
1<sup>er.</sup> Suplente: DR. ERICK EMANUEL LUNA ROJERO  
2<sup>do.</sup> Suplente: DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

Facultad de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. César Treviño Treviño

---

**FIRMA**



# Agradecimientos

El doctor **César Treviño** por concederme el honor de ser mi tutor. Gracias por todo el tiempo que me dedicó y por demostrarme en múltiples ocasiones que usted siempre encuentra una forma de resolver los problemas que aparentemente no tienen solución. Gracias por enseñarme a darle el formato correcto a un código y por todo lo que me inculcó. Sus enseñanzas son muchas y son invaluable para mí. Gracias por brindarme su amistad.

Al doctor Federico Méndez por todos los buenos consejos a lo largo de mi trabajo de investigación.

Al doctor Francisco Solorio por todas las facilidades de material y equipo de medición que me brindó para la realización de los experimentos.

Al doctor Abraham Medina por realizar las correcciones del manuscrito a máxima velocidad.

A los compañeros del cubículo:

Gracias Eduardo, por toda tu ayuda en lo referente a cómputo y en especial por el curso intensivo de UNIX que tanto me sirvió para la parte numérica de este trabajo.

Gracias Juan (ya lo rompiste) por ayudarme a arreglar mis múltiples destrozos.

Gracias Iraís por los regaños y los consejos. Gracias Juan Carlos por tu amistad.

Gracias Jorge, por enseñarme a usar el software de Dantec Dynamics y por toda tu ayuda en la construcción del diseño experimental. Gracias por ayudarme a hacer los experimentos y sobre todo gracias por tu amistad.

En especial agradezco a **Pepe** por haber sido como un segundo tutor para mí. Sin tu ayuda, sin tus consejos, sin los cursos de programación, sin tu paciencia y sin tu amistad jamás habría podido concluir este trabajo. ¡No tengo forma de agradecerte viejo!

Agradezco a los mecánicos locos Ñoñe (ya estoy icróspito), Robert (somos incorregibles), Jack el destapador (me estoy enfriando!), y sobre todo al mismísimo **Ñañel** el travieso alias soy un desastre y nunca estoy tranquilo y estoy loco (UUUUAA) por brindarle a mi vida una dosis gigante de fiesta y catarsis.

A mis amigos de toda la vida, Lord Foullón, Fausto (ya me dió el jamaicón), Sintec (pss igual), Gallito (heart to heart), Adrián Buenrostro (es lo que te estoy diciendo), Lee, Regina, Eréndira, Marky Mark (llévame a mí) y Gorry.

A todo el equipo de entrenadores y a la imponente generación 1991, ya que nuevamente me han hecho disfrutar de la dicha de la victoria.

Agradezco a la familia **Noguez Jimeno** por todas sus atenciones, su singular paciencia, y sobre todo por su gran apoyo durante mis estudios de progrado.

Agradezco a **CONACyT** y a **DGEP** por haberme otorgado una beca durante mis estudios.



# Dedicatorias

Este trabajo se lo dedico a mis padres. Gracias por todo el apoyo que me han proporcionado a lo largo de toda mi vida y gracias por todos sus sacrificios. Soy la persona más afortunada del mundo por tener unos padres como ustedes. Son las personas que más quiero y que más admiro. Su forma tan particular de disfrutar cada instante de la vida es un gran ejemplo para mí.

¡Gracias papá!

¡Gracias Elenita!

¡Esto sólo fue posible gracias a ustedes!

A mi cuñado Bernardo y a mi adorable hermana que tanto quiero y que siempre está al pendiente de mí. ¡Gracias por toda tu ayuda y gracias por los fabulosos diseños. ¡Eres única!

Gracias Laura por TODA tu paciencia. Eres una mujer maravillosa. Tu compañía en los últimos años ha sido toda una bendición. Me siento muy orgulloso de estar a tu lado y quiero decirte que contar con tu compañía es y ha sido toda una dicha. Este logro es parte de nuestra meta común.

¡Eres lo máximo!

¡Te adoro pecosa!



# Índice general

Nomenclatura . . . . .	X
Abstract . . . . .	XII
Resumen . . . . .	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	7
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	8
<b>I Solución numérica al problema del flujo opuesto</b>	<b>9</b>
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>11</b>
<b>3. Método de solución</b>	<b>15</b>
<b>4. Resultados</b>	<b>19</b>
4.1. Hidrodinámica . . . . .	19
4.1.1. Evolución inicial del vórtice . . . . .	19
4.1.2. Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal . . . . .	21
4.2. Transferencia de calor . . . . .	24
4.2.1. Nusselt promedio y punto de estancamiento . . . . .	24
4.2.2. Frecuencias de oscilación del número de Nusselt . . . . .	30
4.2.3. Localización del centroide del flujo másico . . . . .	33
4.2.4. Régimen de transferencia de calor en estado permanente	35
4.2.5. Régimen de transferencia de calor en estado transitorio	39

<b>II Trabajo Experimental</b>	<b>43</b>
<b>5. Diseño experimental</b>	<b>45</b>
5.1. Parámetros de medición . . . . .	47
5.2. Mapas de medición . . . . .	49
<b>6. Resultados experimentales</b>	<b>53</b>
6.1. Flujo instantáneo . . . . .	54
6.2. Centroide del flujo másico . . . . .	56
6.2.1. Frecuencias de oscilación . . . . .	58
6.3. Flujo promedio . . . . .	60
<b>7. Comparación de resultados</b>	<b>69</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Referencias</b>	<b>72</b>
<b>A. Adimensionalización de las ecuaciones</b>	<b>83</b>
<b>B. Formulación vorticidad-función de corriente</b>	<b>87</b>
<b>C. Ecuaciones de la malla</b>	<b>91</b>
<b>D. Método predictor-corrector</b>	<b>93</b>
<b>E. Cálculo de los valores del número de Richardson</b>	<b>99</b>

# Índice de figuras

2.1. Esquema del problema. . . . .	12
3.1. Malla con 71 nodos en dirección longitudinal y 41 nodos en dirección transversal. . . . .	18
4.1. Evolución del vórtice para intervalos de unidades de tiempo adimensional de .01 para $Re = 300$ y $Ri = 3$ ( $Gr = 2.7 \cdot 10^5$ ). . .	20
4.2. Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para $Re = 100$ . . . . .	21
4.3. Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para $Re = 300$ . . . . .	22
4.4. Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para $Re = 500$ . . . . .	23
4.5. Nusselt promedio en la placa para $Re = 100$ y $Pr = 7$ . . . . .	25
4.6. Localización y movimiento del punto de estancamiento para $Re = 100$ y $Pr = 7$ . . . . .	26
4.7. Nusselt promedio en la placa para $Re = 300$ y $Pr = 7$ . . . . .	27
4.8. Localización y movimiento del punto de estancamiento para $Re = 300$ y $Pr = 7$ . . . . .	28
4.9. Nusselt promedio en la placa para $Re = 500$ y $Pr = 7$ . . . . .	29
4.10. Localización y movimiento del punto de estancamiento para $Re = 500$ y $Pr = 7$ . . . . .	30
4.11. Frecuencias adimensionales de oscilación del número de Nusselt promedio para $Re = 300$ . . . . .	31
4.12. Frecuencias adimensionales de oscilación del número de Nusselt promedio para $Re = 500$ . . . . .	32
4.13. Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de $Re = 100$ . . . . .	33
4.14. Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de $Re = 300$ . . . . .	34

6.2. Flujo instantáneo para un número de Reynolds de 500 con un número de Richardson de 27.4 ( $Gr = 6.85 \cdot 10^6$ ) en la región 3 con un intervalo de 2 segundos entre cada imagen. . . . .	55
6.3. Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de $Re = 300$ . . . . .	56
6.4. Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de $Re = 500$ . . . . .	57
6.5. Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de $Re = 700$ . . . . .	57
6.6. Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para $Re = 300$ . . . . .	59
6.7. Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para $Re = 500$ . . . . .	59
6.8. Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para $Re = 700$ . . . . .	60
6.9. Valores promedio para $Re = 300$ y $Ri = 6.5$ ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad . . .	62
6.10. Valores promedio para $Re = 300$ y $Ri = 13.2$ ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad . . .	62
6.11. Valores promedio para $Re = 300$ y $Ri = 27.4$ ( $Gr = 2.466 \cdot 10^6$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad . . .	63
6.12. Valores promedio para $Re = 300$ y $Ri = 42.7$ ( $Gr = 3.843 \cdot 10^6$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad . . .	63
6.13. Valores promedio para $Re = 500$ y $Ri = 27.4$ ( $Gr = 6.85 \cdot 10^6$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad . . .	64
6.14. Valores promedio para $Re = 700$ y $Ri = 27.4$ ( $Gr = 13.426 \cdot 10^6$ ) a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad .	64
6.15. Líneas de corriente y velocidad longitudinal promedio para $Re = 300$ con $Ri = 6.5$ ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ) y $Ri = 13.2$ ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ). . . . .	65

6.16. Líneas de corriente y velocidad longitudinal promedio para Re = 500 con Ri = 6.5 ( $Gr = 1.625 \cdot 10^6$ ) y Ri = 42.7 ( $Gr =$ $10.675 \cdot 10^6$ ). . . . .	66
6.17. Longitud y ancho adimensional del vórtice como una función de los números de Grashof (a,c) y Richardson (b,d) para cuatro diferentes valores del número de Reynolds. . . . .	67

4.15. Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de $Re = 500$ . . . . .	35
4.16. Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para $Re = 100$ . La ordenada muestra los valores de $8 - X$ . . . . .	37
4.17. Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para $Re = 300$ . La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	37
4.18. Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para $Re = 500$ . La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	38
4.19. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 100$ y $Ri = 4$ ( $Gr = 4 \cdot 10^4$ ). La ordenada muestra los valores de $8 - X$ . . . . .	40
4.20. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 100$ y $Ri = 7$ ( $Gr = 7 \cdot 10^4$ ). La ordenada muestra los valores de $8 - X$ . . . . .	40
4.21. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 300$ y $Ri = 1.75$ ( $Gr = 1.575 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	41
4.22. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 300$ y $Ri = 3.25$ ( $Gr = 2.925 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	41
4.23. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 500$ y $Ri = 1.3$ ( $Gr = 3.25 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	42
4.24. Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para $Re = 500$ y $Ri = 1.5$ ( $Gr = 3.75 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de $10 - X$ . . . . .	42
5.1. Diseño experimental. . . . .	45
5.2. Nombre y localización de cada región en el canal. . . . .	50
6.1. Flujo instantáneo para un número de Reynolds de 300 con un número de Richardson de 13.2 ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ) en la región 1 con un intervalo de 2 segundos entre cada imagen. . . . .	55

# Índice de cuadros

5.1. Parámetros de medición. . . . .	49
5.2. Diferencia de temperatura, $T_w - T_0$ , en K que se emplearon en los experimentos. . . . .	51

## Nomenclatura

---

$2D$	valor bidimensional
$f$	frecuencia (Hertz)
$g$	magnitud de la aceleración gravitacional
$Gr$	número de Grashof basado en el ancho del canal, $Gr = g\beta(T_w - T_0)H^3/\nu^2$
$H$	ancho del canal (longitud característica)
$L_1^*$	longitud desde la entrada del canal hasta la placa (ver Fig. 2.1)
$L_1$	$L_1 = L_1^*/H$
$L_2^*$	longitud de la placa caliente (ver Fig. 2.1)
$L_2$	$L_2 = L_2^*/H$
$L_3^*$	longitud desde la placa hasta la salida del canal (ver Fig. 2.1)
$L_3$	$L_3 = L_3^*/H$
$N$	número de puntos espaciales en el dominio
$Nu$	número de Nusselt (ver ec. 2.17)
$\overline{Nu}$	número de Nusselt promedio (ver ec. 2.18)
$P$	presión
$Pe$	número de Peclet, $U_0H/\alpha$
$Pr$	número de Prandtl, $\nu/\alpha$
$q$	flujo de calor por unidad de superficie en la placa caliente
$Re$	número de Reynolds basado en el ancho del canal, $Re = U_0H/\nu$
$Ri$	número de Richardson basado en el ancho del canal, $Ri = Gr/Re^2$
$St$	número de Strouhal, $St = fH/U_0$
$t$	tiempo
$t_f$	tiempo final de medición
$T$	temperatura
$T_0$	temperatura del fluido a la entrada del canal
$T_w$	temperatura de la placa
$U$	$u/u_0$ , velocidad longitudinal adimensional
$u_0$	velocidad del fluido a la entrada del canal
$u, v$	componentes de velocidad longitudinal y transversal, respectivamente
$V$	$v/u_0$ , velocidad transversal adimensional
$x, y, z$	coordenadas rectangulares Cartesianas
$X$	coordenada longitudinal adimensional, $X = x/H$
$Y$	coordenada transversal adimensional, $Y = y/H$
$Y_p$	centroide del flujo másico
$Z$	coordenada adimensional, $Z = z/H$



Letras Griegas

---

$\alpha$	difusividad térmica
$\beta$	coeficiente de expansión volumétrica
$\Delta T$	diferencia de temperaturas
$\mu$	viscosidad dinámica
$\nu$	viscosidad cinemática
$\rho$	densidad para $T = T_0$
$\psi$	función de corriente adimensional (ver ec. 2.12)
$\omega$	vorticidad adimensional (ver ec. 2.11)
$\theta$	temperatura adimensional
$\tau$	tiempo adimensional
$\eta(Y)$	función generadora de la malla en dirección transversal (ver ec. 3.3)
$\xi(X)$	función generadora de la malla en dirección longitudinal (ver ec. 3.4)

Subíndices

---

$i, j$	coordenadas espaciales
$cr$	valor crítico
$co$	valor del corte en infrarojo
$o$	valor de la presión atmosférica

**Abstract**

Laminar mixed convection in an asymmetrically and differentially heated vertical channel subject to an opposing buoyancy is investigated by solving the transient two-dimensional flow and energy equations. Results are particularly presented to illustrate the effects of buoyancy strength  $Gr/Re^2$  and Reynolds number  $Re$ . Two different regimes are observed with increasing  $Gr/Re^2$ : Steady state and transient heat transfer. The critical value of the buoyancy strength between the two regimes strongly depends on the value of the Reynolds number, and the influence of these parameters in the velocity field, the thermal field and the overall heat transfer characteristics are presented. On the other hand, particle image velocimetry (PIV) measurements were carried out in an experimental investigation of laminar mixed convection in a vertical duct with a square cross section. The main downward water-flow is driven by gravity while a portion of a lateral side is heated, and buoyancy forces produce non-stationary vortex structures close to the heated region. Various ranges of the Grashof number,  $Gr$  are studied in combination with the Reynolds number,  $Re$  varying from 300 to 700. The values of the generalized buoyancy parameter or Richardson number,  $Ri = Gr/Re^2$  parallel to the Grashof number are included in the results. The influence of these nondimensional parameters and how they affect the fluid flow structure and vortex sizes and locations are reported. The flow patterns are nonsymmetric, periodic, and exhibit increasing complexity and frequency for increasing buoyancy. For the averaged values of the resulting vortex dimensions, it was found that a better and more congruent representation occurs when employing the Grashof and Reynolds numbers as independent parameters.

### Resumen

En este trabajo, la convección mixta laminar para un flujo opuesto que se encuentra sometido a un calentamiento diferencial asimétrico en un canal vertical se estudió resolviendo los transitorios de las ecuaciones de flujo y energía en dos dimensiones. Los resultados ilustran la influencia de la fuerza de flotación  $Gr/Re^2$  y del número de Reynolds  $Re$ . Se observan dos regímenes existentes de transferencia de calor conforme aumenta el  $Gr/Re^2$ : Estado permanente y estado transitorio. El valor crítico de la fuerza de flotación entre los dos regímenes depende fuertemente del valor del número de Reynolds, mostrándose la influencia de estos parámetros en el campo de velocidades, de temperaturas, y en la transferencia de calor global. Por otro lado, se llevaron a cabo mediciones empleando velocimetría de partículas por imágenes (PIV) para realizar una investigación experimental de convección mixta laminar en un canal vertical de sección cuadrada. El flujo principal de agua cae por la fuerza de gravedad y una porción de un lado del canal es calentada, provocando que las fuerzas de flotación produzcan estructuras vorticales no estacionarias cerca de la región calentada. Se estudiaron varios rangos del número de Grashof,  $Gr$ , en combinación con el número de Reynolds,  $Re$ , variando desde 300 hasta 700. En los resultados se incluyen los valores del parámetro generalizado de flotación,  $Gr/Re^2$  paralelos al número de Grashof. Se reporta la influencia de estos parámetros adimensionales en la estructura del flujo, las dimensiones de los vórtices, y en su localización. Los patrones de flujo son asimétricos, periódicos, e incrementan su complejidad y frecuencia conforme aumenta la flotación. Para los valores promedio de las dimensiones de los vórtices, se encontró que una representación más congruente ocurre cuando se emplean el número de Grashof y el número de Reynolds como parámetros independientes.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

Los problemas de transferencia de calor por convección mixta han sido objeto de estudio desde hace varias décadas. Cuando existe un flujo forzado que interactúa con fuerzas de flotación se tiene una configuración física que es muy común en una gran variedad de aplicaciones ingenieriles, como es el enfriamiento de dispositivos electrónicos, el diseño de intercambiadores de calor compactos, colectores solares y reactores nucleares. Los ductos de sección rectangular cada vez se vuelven más populares que los ductos de sección circular. Esto se debe a que conforme se reducen las dimensiones de los intercambiadores de calor, las restricciones de espacio nos obligan a suplir ductos anulares por ductos con geometrías rectangulares.

Las fuerzas de flotación juegan un papel muy importante en problemas de transferencia de calor por convección forzada cuando la velocidad del flujo es relativamente pequeña y la diferencia de temperaturas entre la superficie del ducto y la corriente libre es relativamente grande. La fuerza de flotación puede ser asistida u opuesta dependiendo de la dirección del flujo forzado y de la temperatura relativa entre la superficie del canal y la corriente libre. En general, cuando la fuerza de flotación va en sentido contrario que la del flujo forzado se tiene flujo opuesto, mientras que cuando la fuerza de flotación y el flujo forzado tienen el mismo sentido se tiene flujo asistido. Se tiene un problema de convección mixta cuando tanto la convección natural como la convección forzada no pueden ser despreciadas. La convección mixta es en general un proceso multiparamétrico, en donde aparte de los parámetros

geométricos existen tres parámetros importantes. Los números de Reynolds ( $Re$ ), Grashof ( $Gr$ ) y Prandtl ( $Pr$ ) sirven para caracterizar al flujo forzado y la influencia de la flotación. Sin embargo, dependiendo del problema que se esté estudiando, en vez de emplear los número de Reynolds y de Grashof como parámetros independientes, frecuentemente se emplea una combinación de la forma  $Gr/Re^n$  en adición al número de Reynolds. El valor de  $n = 2$  se utiliza por razones muy simples. El orden de magnitud del número de Reynolds inducido por la flotación en el problema clásico de capa límite en una placa vertical caliente está relacionado con la raíz cuadrada del número de Grashof.

Existen una gran cantidad de publicaciones que abordan el tema de transferencia de calor por convección mixta empleando métodos numéricos. Aung y Worku [1] realizaron estudios para flujo laminar y ascendente en un canal vertical de placas paralelas. Encontraron que la flotación incrementa drásticamente la longitud de desarrollo hidrodinámico al mismo tiempo que disminuye la longitud de desarrollo térmico, presentando un criterio para que ocurra el fenómeno de reversión del flujo. En [2], Aung y Worku proporcionaron información cuantitativa acerca de los parámetros hidrodinámicos y térmicos en convección mixta laminar para un canal vertical de placas paralelas, reportando los efectos de las fuerzas de flotación y resaltando las diferencias que existen entre la condición de temperatura de pared uniforme y la condición de flujo de calor uniforme en la pared. Habchi y Acharya [3] realizaron estudios para flujo asistido y laminar en un canal vertical con paredes adiabáticas que cuenta con una placa que bloquea parcialmente a un flujo de aire provocando un calentamiento diferencial tanto simétrico como asimétrico, encontrando que el número de Nusselt local aumenta conforme el parámetro de flotación  $Gr/Re^2$  incrementa. Inham et al. [4] realizaron estudios de convección mixta, laminar, permanente y asimétrica en flujos confinados en un canal vertical de placas paralelas con paredes sujetas a calentamiento uniforme, mencionando que el fenómeno de reversión del flujo ocurre cuando la flotación es lo suficientemente grande. Epildorou et al. [5] estudiaron la convección natural y forzada en un canal vertical con una o ambas paredes calentadas uniformemente empleando condiciones de calentamiento simétrico o asimétrico y temperatura(s) o flujo(s) de calor uniformes. Analizaron la influencia de la fuerza de flotación en el flujo forzado y obtuvieron los campos de velocidad, los campos de temperatura y la tasa de transferencia de calor. Lin et al. [6] realizaron estudios de transferencia de calor por convección mixta laminar para flujo asistido y opuesto en un ducto vertical asumiendo que el flujo de entrada se

encuentra totalmente desarrollado. Demostraron que la transferencia de calor está principalmente determinada por la razón de calores específicos entre la pared y el fluido y proporcionaron correlaciones para las variaciones en el tiempo del valor del número de Nusselt. Lin et al. [7] estudiaron los campos de velocidad y temperatura en convección mixta opuesta en un canal vertical sujeto a un calentamiento simétrico. Desarrollaron un análisis de estabilidad para evidenciar la ocurrencia de la bifurcación del flujo y reportaron flujo periódico junto con la evolución térmica en el espacio y en el tiempo. Chang y Lin [8] estudiaron la transferencia de calor por convección mixta para flujo opuesto, laminar y permanente sujeto a calentamiento simétrico en un canal vertical para bajos números de Prandtl. Resolvieron las ecuaciones del flujo y de la energía en estado transitorio encontrando que cuando el parámetro de flotación  $Gr/Re^2$  excede un valor crítico se tiene flujo oscilatorio con una frecuencia fundamental única. Evans y Greif [9] estudiaron el flujo descendente de nitrógeno en un canal vertical alto y parcialmente calentado, mostrando los grandes efectos de la fuerza de flotación aún para pequeñas diferencias de temperatura y reportando la existencia de oscilaciones dependientes del tiempo junto con reversión de flujo periódica en las paredes. Ali y Al-Yousef [10] estudiaron la convección mixta en una superficie vertical que se mueve de forma continua y que está sujeta a succión e inyección. Sus resultados indican que cuando el flujo es asistido, tanto la capa límite hidrodinámica como térmica se reducen, mientras que para el caso de flujo opuesto éstas aumentan. Ozsunar et al. [11] estudiaron la transferencia de calor por convección mixta en canales rectangulares en tres dimensiones para varias condiciones de operación y ángulos de inclinación. Su estudio paramétrico les permitió obtener los valores locales del número de Nusselt y los efectos que la inclinación del canal tiene sobre éste, al mismo tiempo que estudiaron los mecanismos de inestabilidad y la forma en que son afectados por el ángulo de inclinación. Yan y Li [12] estudiaron los efectos de la radiación en convección mixta en un canal vertical cuadrado para el caso de un fluido gris (gas con partículas en suspensión) empleando la formulación vorticidad-función de corriente para flujo tridimensional, señalando que los efectos de la radiación en la transferencia de calor son los de aumentar significativamente el Nusselt total, reducir los efectos de la flotación (para flujo asistido) e incrementar el desarrollo del campo de temperaturas. El-Din [13] estudió los efectos de la fuerza de flotación en convección mixta laminar entre dos placas paralelas sujetas a un flujo uniforme de calor y masa, presentando perfiles de velocidad, temperatura, concentración y explicando cómo es que éstos son afectados por el

número de Richardson. Rao et al. [14] hicieron un análisis de transferencia de calor por convección mixta conjugada, bidimensional, laminar, permanente e incompresible en un canal de placas verticales paralelas con una fuente de calor discreta. Exploraron los efectos de la emisividad, relación de aspecto, posición de la fuente de calor discreta e influencia del número de Richardson en el número de Nusselt, concluyendo que los efectos de la transferencia de calor por radiación no deben de ser despreciados. Chen et al. [15] aplicaron un modelo parabólico en tres dimensiones para estudiar la transferencia de calor y el desprendimiento del flujo debido a la flotación en un ducto con geometría compleja, comparando sus resultados con soluciones de modelos elípticos y obteniendo resultados satisfactorios. Jang y Yan [16] estudiaron la transferencia de calor por convección mixta y la transferencia de masa a lo largo de una superficie vertical ondulada que es mantenida a temperatura uniforme y que cuenta con una concentración de pared constante que es mayor que la del ambiente. Empleando una transformación para que la geometría ondulada se convierta en una placa plana, obtuvieron resultados para campos de velocidad, temperatura, concentraciones, número de Nusselt y número de Sherwood a lo largo de la superficie ondulada. Barletta et al. [17] obtuvieron las distribuciones de velocidad, temperatura, los valores del coeficiente de fricción y el número de Nusselt como una función de la relación de aspecto del canal para varios valores del cociente entre el número de Grashof y el número de Reynolds. El problema de convección mixta en un canal vertical rectangular fue resuelto para la condición de flujo uniforme y diferentes temperaturas en las cuatro paredes.

Por otro lado, existen una gran cantidad de publicaciones que abordan el tema de transferencia de calor por convección mixta en canales verticales de forma analítica. Yao [18] obtuvo una solución analítica para el flujo y la transferencia de calor en la región de entrada de un canal vertical con condiciones tanto de temperatura como de flujo de calor uniforme en las paredes, sugiriendo que si la convección natural es dominante se generan celdas de recirculación con movimiento periódico. Aung y Worku [19] estudiaron la convección mixta empleando condiciones de frontera de temperatura de pared del canal uniforme pero diferente, reportando que el perfil de velocidades puede sufrir una deflexión considerable cuando las fuerzas de flotación son lo suficientemente grandes. Hamadah y Wirtz [20] obtuvieron soluciones para la velocidad y la transferencia de calor en la pared de un canal de placas paralelas para flujo opuesto, desarrollado y laminar, estableciendo criterios para la ocurrencia del fenómeno de reversión del flujo. Di-



chos resultados fueron obtenidos para las condiciones de frontera siguientes: temperaturas de pared uniforme, flujo de calor uniforme en ambas paredes, y temperatura uniforme en una pared con flujo de calor uniforme en la otra. Chen y Chung [21] estudiaron el problema de la estabilidad lineal en convección mixta para el caso de un canal vertical con calentamiento diferencial para varios números de Prandtl, indicando que el flujo desarrollado se puede volver inestable bajo ciertas condiciones. Mencionaron que tanto el número de Prandtl como el número de Reynolds son los responsables de los valores críticos del número de Grashof, el número de onda, la velocidad de onda y el mecanismo de inestabilidad para altos valores del número de Prandtl. Los autores concluyen que los mecanismos de inestabilidad para flujos sometidos a calentamientos diferenciales son sustancialmente diferentes a aquellos flujos que son sometidos a calentamientos uniformes. Barletta [22] propuso un método general para escoger la temperatura de referencia en problemas con convección mixta en canales cuando el flujo de entrada es completamente desarrollado y laminar. Señaló que forzosamente se tiene que emplear el promedio de la temperatura entre la superficie del canal y el flujo a la entrada, ya que de lo contrario pueden existir discrepancias en los resultados obtenidos. Posteriormente, Barletta [23] evaluó analíticamente el campo de velocidades y temperaturas en canales verticales al mismo tiempo que obtuvo las condiciones para que exista el fenómeno de reversión del flujo empleando la aproximación de la capa límite y la condición de flujo desarrollado a la entrada. Sus resultados emplearon las condiciones de frontera siguientes: temperaturas uniformes y diferentes en paredes opuestas mientras que las demás paredes están aisladas y flujo de calor uniforme en paredes opuestas con paredes isotérmicas a la misma temperatura. Barletta y Zanchini [24] realizaron estudios de convección mixta para flujo desarrollado y laminar en canales inclinados empleando métodos de perturbación y tomando en cuenta la disipación viscosa, concluyendo que ésta aumenta los efectos de la flotación y viceversa. Barletta [25] obtuvo soluciones analíticas para las ecuaciones de balance de momentum y energía empleando transformadas de Fourier, auxiliándose de la aproximación de la capa límite y la condición de flujo desarrollado a la entrada del canal.

Ejemplos de publicaciones en donde se resuelve (numérica o analíticamente) el problema de transferencia de calor por convección mixta en superficies verticales, canales verticales de placas paralelas, ductos verticales y problemas de estabilidad de flujos en canales, se encuentran en [33]-[72], mientras que en [73]-[90] se presentan soluciones numéricas en las que se emplea

la formulación de vorticidad-función de corriente para resolver problemas de convección mixta en canales y en cavidades.

En la literatura abundan estudios experimentales que abordan el problema de convección mixta en canales verticales. Zhang y Dutta [26] realizaron mediciones e hicieron un análisis de transferencia de calor por convección mixta para flujo asistido en un canal vertical cuadrado con condiciones de calentamiento asimétrico. Empleando cuatro diferentes configuraciones de calentamiento y variando el número de Reynolds junto con el número de Richardson, concluyeron que el coeficiente de transferencia de calor aumenta conforme aumenta el parámetro de flotación, afirmando que esto se debe a que existe un mejor mezclado cuando se emplean configuraciones de calentamiento irregulares. Kimura et al. [27] realizaron experimentos de transferencia de calor por convección natural empleando un receptáculo de agua con una placa vertical caliente en una de las paredes. Empleando tres diferentes materiales en la placa (cobre, acero inoxidable y cerámicos), obtuvieron la transferencia de calor promedio para cada uno de los materiales. Las mediciones obtenidas fueron comparadas con los resultados teóricos y encontraron valores muy parecidos a los precedidos en publicaciones anteriores. Abu-Mulaweh [28] estudió el flujo laminar en convección mixta para una placa plana inclinada y caliente con flujo de calor uniforme. Empleando velocimetría láser-dopler y anemómetros de hilo caliente, realizó mediciones simultáneas de las distribuciones de velocidad y temperatura encontrando que para el caso de flujo asistido, tanto el Nusselt local como el coeficiente de fricción local aumentan cuando se incrementa el valor de la fuerza de flotación. También reportó que el campo de velocidades es mucho más sensible a la fuerza de flotación que el campo de temperaturas. Gau et al. [29] estudiaron el fenómeno de reversión del flujo para el caso de flujo asistido en un canal vertical empleando visualización en un túnel de viento, reportando la distorsión que sufre el campo de velocidades debido al calentamiento.

Desafortunadamente, todas las investigaciones experimentales se centran en la obtención de la transferencia de calor sin tomar en cuenta la estructura y la dinámica de este tipo de flujo. La identificación y la observación de vórtices junto con la forma en la que interactúan en el flujo ha sido un tema que hasta la fecha ha recibido muy poca atención. Técnicas para realizar mediciones puntuales como son la anemometría de hilo caliente, la anemometría con sensores de presión y la anemometría láser Doppler (LDA), son muy útiles cuando se quiere analizar el flujo de manera estadística. Desafortunadamente, las estructuras que existen cuando hay convección mixta son muy difíciles de

estudiar con estas técnicas debido a que resulta demasiado complicado obtener mediciones que tengan una alta resolución instantánea del flujo en varios puntos del canal. La motivación de esta investigación es la de realizar un estudio experimental a detalle de la estructura del flujo y la generación de vórtices en convección mixta para el caso de un canal vertical empleando velocimetría de partículas por imágenes (PIV). Como resultado, mediciones no intrusivas para obtener campos de velocidad instantánea y campos de velocidad promedio (con una resolución mayor que la que se puede obtener con mediciones puntuales) fueron logradas a lo largo de todo el canal. Para contestar la pregunta acerca de cómo es la hidrodinámica del problema y cómo es que ésta influye en la transferencia de calor en la placa se emplearon métodos experimentales y métodos numéricos. Cabe mencionarse que a diferencia de todos los trabajos que se han hecho con anterioridad, en este caso no se emplea la aproximación de la capa límite, se considera flujo opuesto y se utiliza la condición de flujo uniforme a la entrada del canal en vez de flujo desarrollado.

## 1.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- Determinar la estructura, localización, geometría y dimensiones de él o los vórtices que aparecen en las cercanías de la placa.
- Obtener la transferencia de calor en la placa.
- Realizar un estudio paramétrico empleando diferentes valores del número de Reynolds y del número de Richardson (Grashof) para determinar su influencia tanto en la formación de vórtices como en la transferencia de calor en la placa.
- Hacer una comparación con los resultados experimentales y los resultados numéricos obtenidos.

### 1.3. Estructura de la tesis

La tesis se divide en dos partes. La primera hace referencia a la solución numérica, mientras que la segunda parte corresponde al trabajo experimental.

#### Parte I

En el Capítulo 2 se plantea el problema a resolver y se hace una descripción detallada de la geometría del problema, el origen de coordenadas y las suposiciones empleadas para resolverlo. En este capítulo se presentan las ecuaciones que modelan la física del problema con sus respectivas condiciones de frontera y se introducen los parámetros relevantes junto con su significado físico.

En el Capítulo 3 se explica a detalle la forma en la que se realizó la solución numérica junto con la malla empleada para dicha solución.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos a partir de la solución numérica. Éstos incluyen la forma en la que se origina el vórtice, la localización y tipo de movimiento del punto de estancamiento, los perfiles instantáneos de velocidad longitudinal a lo largo de todo el canal, la evolución en el tiempo del número de Nusselt promedio en la placa y los regímenes existentes de transferencia de calor.

#### Parte II

En el Capítulo 5 se muestra el diseño experimental, el equipo empleado para realizar las mediciones con velocimetría láser, los parámetros de medición y los mapas de medición en el canal.

En el Capítulo 6 se presentan los resultados experimentales. Los resultados incluyen a las estructuras del flujo instantáneo, la ubicación del centroide del flujo másico adimensional, las frecuencias adimensionales de oscilación del centroide del flujo másico y la estructura del flujo promedio.

En el Capítulo 7 se hace una comparación entre los resultados obtenidos con las simulaciones numéricas y los resultados obtenidos a partir de las mediciones experimentales.

Finalmente, en el Capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo de tesis.

# Capítulo 2

## Formulación del problema

Se considera un flujo Newtoniano, laminar y bidimensional que es acelerado por la fuerza de gravedad dentro de un canal vertical cuadrado donde  $x$  es la coordenada longitudinal (con sentido positivo hacia abajo) e  $y$  es la coordenada transversal ( $y = 0$  en la pared izquierda). El flujo forzado se encuentra a temperatura  $T_0$  y entra al canal con una velocidad uniforme  $u_0$  y con la misma dirección que la fuerza de gravedad. Las paredes del canal son adiabáticas y una de las paredes ( $y = 0, L_1^* \geq x \leq L_1^* + L_2^*$ ) cuenta con una fuente de calor discreta con temperatura uniforme  $T_w$ , donde  $T_w > T_0$ . Para resolver el problema se desprecia el término de la disipación viscosa en la ecuación de la energía y las variaciones de densidad en las ecuaciones de conservación de masa y energía (aproximación de Boussinesq). El esquema del problema se muestra en la Figura 2.1.

Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de convección mixta en el canal son la ecuación de continuidad, las dos ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y la ecuación de la energía, respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 g \beta (T - T_0) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho_0 C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

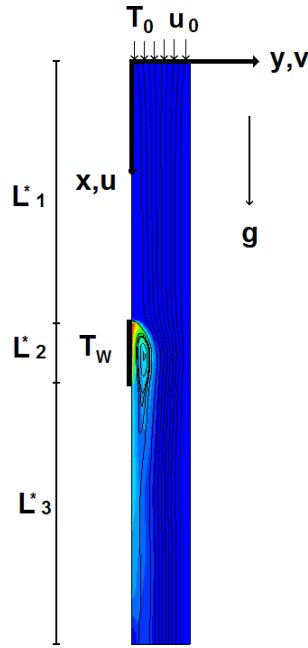


Figura 2.1: Esquema del problema.

Se emplean las variables adimensionales donde las coordenadas longitudinales se escalan con el ancho del canal  $H$ , las velocidades con la velocidad característica  $u_0$ , el tiempo con  $H/u_0$ , la presión con la presión dinámica  $(p - p_0)/\rho_0 u_0^2$  y la diferencia de temperatura relativa al flujo de entrada con la diferencia global  $(T - T_0)/(T_w - T_0)$ . Así, las variables adimensionales son las siguientes

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{H}, & Y &= \frac{y}{H}, & U &= \frac{u}{u_0}, & V &= \frac{v}{u_0} \\ P &= \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, & \theta &= \frac{(T - T_0)}{(T_w - T_0)}, & \tau &= \frac{tu_0}{H} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en las ecuaciones (2.1)-(2.4), las ecuaciones en forma adimensional (ver apéndice A) toman la forma

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \theta \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.9)$$

En las ecuaciones (2.6)-(2.9),  $\text{Re} = UH/\nu$  es el número de Reynolds,  $Gr = g\beta(T_W - T_0)H^3/\nu^2$  es el número de Grashof,  $\text{Pr} = \nu/\alpha$  es el número de Prandl y  $\text{Pe} = \text{Pr} \text{Re}$  es el número de Peclet. El número de Richardson es el parámetro que gobierna la convección mixta y se define como  $Ri = Gr/\text{Re}^2$ . Este parámetro proporciona la relación de las fuerzas de flotación a las fuerzas de inercia.

Suponiendo un flujo paralelo tanto a la entrada como a la salida del canal, las condiciones de frontera en forma adimensional son

$$\begin{aligned} U &= V = 0, \text{ en } Y = 0, 1 \\ U &= 1, V = 0, P = 0 \text{ en } X = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}, \text{ en } Y = 0, 1 \\ \theta &= 1, \text{ en } Y = 0, \text{ para } L_1 \leq X \leq L_1 + L_2 \\ \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0 \text{ en } Y = 0, \text{ para } L_1 + L_2 < X < L_1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0 \text{ en } Y = 1 \\ \frac{\partial U}{\partial X} &= V = 0 \text{ en } X = L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $L_i = L_i^*/H$ , con  $i = 1, 3$ . Las condiciones iniciales corresponden a un flujo desarrollado, pero donde la flotación no se tomaba todavía en cuenta. Para simplificar el problema, se introducen la vorticidad adimensional  $\omega$  y la función de corriente adimensional  $\psi$ , dadas por

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (2.11)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (2.12)$$

Introduciendo las nuevas variables adimensionales dadas por las ecuaciones (2.11) y (2.12) en las ecuaciones (2.6)-(2.9), el sistema de ecuaciones (ver

Apéndice B) se transforma en

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) - \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.15)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial Y} &= 1, \quad \omega = 0, \theta = 0, \quad \text{en } X = 0 \\ \psi &= 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}, \quad \text{en } Y = 0, \\ \theta &= 1, \quad \text{en } Y = 0, \quad \text{para } L_1 \geq X \leq L_1 + L_2 \\ \frac{\partial \theta}{\partial X} &= 0 \quad \text{en } Y = 0, \quad \text{para } L_1 + L_2 < X < L_1 \\ \psi &= 1, \quad \omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \text{en } Y = 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial X} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0, \quad \nabla^2 \psi = -\omega, \quad \text{en } X = L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

e iniciales correspondientes. Como la vorticidad es un escalar en un flujo bidimensional, al emplear la formulación vorticidad-función de corriente se elimina a la presión y el número de incógnitas se reduce a tres: la función de corriente  $\psi$ , la vorticidad  $\omega$  y la temperatura  $\theta$ . Posteriormente, las componentes de velocidad longitudinal y transversal  $U$  y  $V$  son calculadas empleando la ecuación (2.12), una vez que se ha obtenido la función de corriente.

El coeficiente convectivo local de transferencia de calor en la placa está dado por el número de Nusselt local, que se define como

$$\text{Nu}(X, \tau) = \frac{qH}{k(T_W - T_0)} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \quad (2.17)$$

donde  $q$  es el flujo de calor por unidad de superficie en la placa caliente. El número de Nusselt promedio se calcula integrando el Nusselt local a lo largo de toda la placa

$$\overline{\text{Nu}}(\tau) = \frac{1}{L_2} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \text{Nu} dX \quad (2.18)$$



# Capítulo 3

## Método de solución

Como el flujo que gobierna las ecuaciones (2.13)-(2.16) es parabólico en el tiempo y elíptico en el espacio, el problema se marchó en el tiempo empleando un método iterativo basado en descomposición  $LU$ . Las ecuaciones junto con sus condiciones de frontera se resolvieron empleando diferencias finitas junto con el método predictor-corrector (ver Apéndice D). Este método proporciona un valor inicial estimado para el siguiente valor a calcularse empleando diferenciación hacia adelante. Posteriormente, el método corrector es empleado para mejorar la primera estimación por medio de diferenciación hacia atrás. El procedimiento iterativo es el siguiente:

1. Predecir valores para la  $\omega$  en la ecuación (2.14) para  $\tau + 1/2\Delta\tau$ , donde  $\Delta\tau$  corresponde al intervalo de tiempo adimensional.
2. Predecir valores para la  $\psi$  en la ecuación (2.13) para  $\tau + 1/2\Delta\tau$ .
3. Predecir valores para la  $\theta$  en la ecuación (2.15) para  $\tau + 1/2\Delta\tau$ .
4. Sustituir los valores predecidos para obtener los valores corregidos para la  $\omega$  en la ecuación (2.14) para  $\tau + \Delta\tau$ .
5. El paso final es el de obtener los valores de la  $\psi$ ,  $\omega$ , y  $\theta$  con los valores corregidos de la  $\omega$ .

El procedimiento descrito se lleva a cabo para todos los puntos nodales de la malla a lo largo del canal y de esta manera se calculan todos los campos de velocidad, vorticidad y temperatura para el tiempo  $\tau + \Delta\tau$ .

Se empleó relajación sucesiva con un parámetro de relajación de 0.5 para la función de corriente ( $\psi$ ), mientras que para la vorticidad ( $\omega$ ) y la temperatura ( $\theta$ ) se empleó un parámetro de relajación con un valor de 1.8. Por razones de estabilidad numérica, para la discretización de las ecuaciones (ver Apéndice D) se emplearon diferencias finitas hacia adelante en los valores positivos de los términos convectivos, mientras que para valores negativos de los términos convectivos se emplearon diferencias finitas hacia atrás. Tanto el término de flotación como los términos de difusión fueron discretizados empleando diferencias finitas centradas y todos los cálculos fueron hechos empleando al agua como el fluido estudiado ( $Pr = 7$ ).

Para cada paso de tiempo, se realizaron iteraciones que satisfagan en cada nodo de la malla el siguiente criterio de convergencia

$$\sum_{i,j} |\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n| \leq 10^{-6} \quad (3.1)$$

donde  $\phi$  representa a la  $\psi$ ,  $\omega$  ó  $\theta$ ;  $n$  hace referencia al tiempo e  $i$  y  $j$  hacen referencia a las coordenadas espaciales.

La vorticidad en las paredes fue evaluada empleando la fórmula de primer orden

$$\omega_w = \frac{2(\psi_{w+1} - \psi_w)}{\Delta n^2} \quad (3.2)$$

donde  $\Delta n$  es el espacio de la malla normal a la pared. Existen aproximaciones de orden mayor pero éstas no fueron empleadas porque está demostrado que éstas no necesariamente llevan a soluciones estables [30]. Para evitar que existan problemas debido a inestabilidad numérica y como el cálculo de la vorticidad en las paredes se encuentra retrasado por un paso de tiempo, para que las condiciones de frontera de la vorticidad cuenten con la precisión necesaria, fue necesario emplear pasos de tiempo adimensional  $\Delta\tau$  muy pequeños (del orden de  $10^{-3}$ ).

Para poder tener mayor resolución, se creó una malla cuya principal característica es que aumente gradualmente el número de nodos en dirección longitudinal conforme se acerque a la parte media del canal. A medida que la malla se aleja de la región en la que se encuentra ubicada la placa caliente, la distancia entre cada nodo se incrementa de forma gradual, alcanzando el máximo espaciamiento longitudinal entre cada nodo en los extremos del canal. Para poder resolver los grandes gradientes de velocidad cerca de las paredes, una característica indispensable de la malla fue que ésta incremente

drásticamente el empaquetamiento de nodos conforme se acerque a ambas paredes y que reduzca gradualmente la cantidad de nodos conforme se acerque al centro del canal. El dominio computacional fue discretizado en la dirección transversal empleando la coordenada  $\eta(Y)$  (ver Apéndice C)

$$\eta(Y) = \frac{1}{2} + m_y \left( Y - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1 - m_y}{2} \right) \left\{ \frac{\sinh [k_y (Y - \frac{1}{2})]}{\sinh (\frac{k_y}{2})} \right\} \quad (3.3)$$

donde  $m$  y  $k$  son parámetros de empaquetamiento de la malla con valores escogidos de  $m_y = 0.4$  y  $k_y = 10$ . Para la dirección longitudinal se empleó la coordenada  $\xi(X)$  (ver Apéndice C),

$$\xi(X) = \frac{1}{2} + m_x \left( \frac{X}{L_1 + L_2 + L_3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(1 - m_x) \operatorname{erf} \left[ k_x \left( \frac{X}{L_1 + L_2 + L_3} - \frac{1}{2} \right) \right]}{2 \operatorname{erf} [k_x/2]} \quad (3.4)$$

donde los valores de los parámetros de empaquetamiento de la malla al final elegidos son  $m_x = 0.8$  y  $k_x = 2$ . Para la solución del sistema de ecuaciones se pusieron espaciamentos iguales en  $\eta$  y  $\xi$ , generando la malla deseada en las coordenadas originales  $X$  e  $Y$ . La Figura 3.1 muestra la malla empleada para un número de Reynolds de 100 con un total de 71 x 41 nodos. Para poder determinar el tamaño de malla óptimo para realizar las simulaciones numéricas de la manera más rápida y sin perder exactitud de cálculo, se realizó un estudio comparativo para cuatro diferentes tamaños de malla. Los tamaños estudiados fueron 101 x 71, 111 x 81, 121 x 91, y 131 x 101 nodos. Se concluyó que un refinamiento de malla mayor a 71 x 41 nodos no proporcionaba un cambio significativo en el valor del número de Nusselt promedio ni en el máximo valor de la función de corriente. Basados en esta observación, se empleó una malla no uniforme de 71 x 41 nodos para un número de Reynolds de  $Re = 100$ . Se llevaron a cabo pruebas similares para números de Reynolds de 300 y 500, obteniéndose como tamaño óptimo para ambos casos una malla de 101 x 51 nodos.

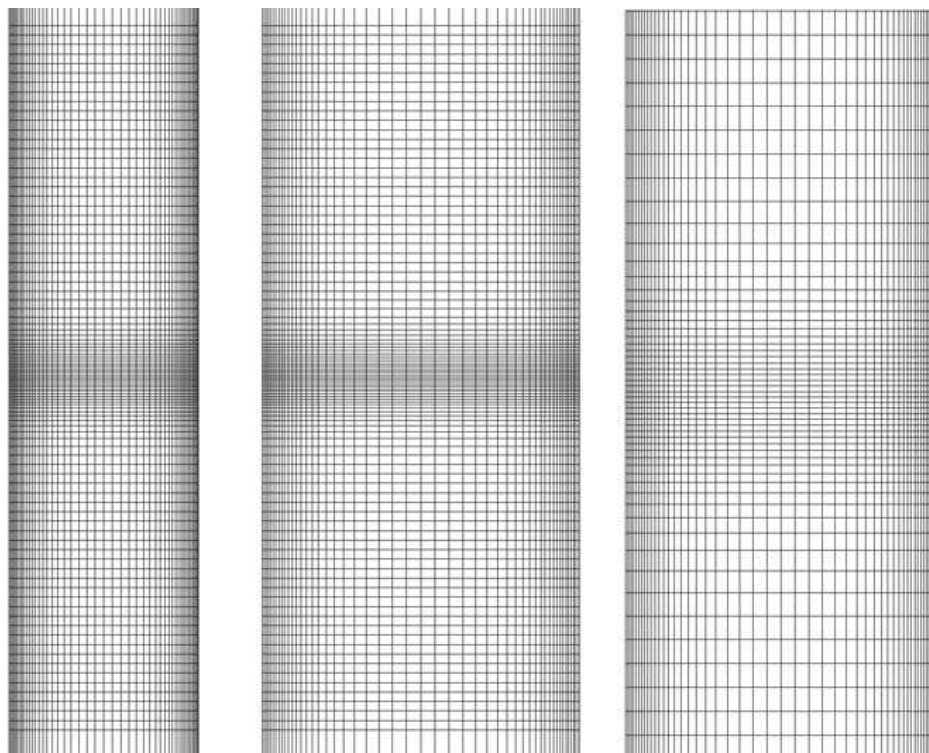


Figura 3.1: Malla con 71 nodos en dirección longitudinal y 41 nodos en dirección transversal.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Hidrodinámica

#### 4.1.1. Evolución inicial del vórtice

La Figura 4.1 muestra la manera en la que el vórtice se forma a partir del tiempo inicial,  $\tau = 0$ . Partiendo de las condiciones iniciales, el intervalo entre cada imagen es de  $\Delta\tau = 0.01$  unidades de tiempo adimensional. La gravedad va hacia abajo y lo que se presenta es la zona cercana a la placa caliente que abarca la totalidad de la longitud  $L_2$  junto con porciones de las longitudes  $L_1$  y  $L_3$ . Para los cálculos, para un número de Reynolds de  $Re = 100$ , las dimensiones del canal son  $L_1 = 3.5$ ,  $L_2 = 1$  y  $L_3 = 3.5$ , mientras que para números de Reynolds de  $Re = 300$  y  $Re = 500$ , las dimensiones del canal son  $L_1 = 4.5$ ,  $L_2 = 1$  y  $L_3 = 4.5$ .

- a) En la primera imagen se tiene flujo descendente en desarrollo a lo largo de todo el canal, que corresponde a la condición inicial.
- b) En la siguiente imagen, el campo de velocidades presenta reversión del flujo cerca de la placa. El perfil de velocidades se vuelve asimétrico y se observa cómo hay zonas de baja velocidad en la parte superior de la placa. Se observa la aparición de un punto de estancamiento debido a la existencia de dos flujos con sentidos opuestos.
- c) Instantes después y por efecto de las fuerzas de flotación, el flujo cercano a la placa aumenta su velocidad y la cantidad de fluido que se desplaza hacia arriba. Como consecuencia, el punto de estancamiento cambia

de posición y existe una deflexión mayor en el campo de velocidades. Debido a la diferencia de temperaturas entre el fluido y la placa se genera una celda de recirculación en sentido horario.

- d) Se observa un aumento considerable en la acumulación de fluido en la parte inferior del punto de estancamiento que provoca que la recirculación aumente su tamaño. El centro de la recirculación se encuentra ubicado a la altura de la parte superior de la placa. Tanto el campo de velocidades como de temperaturas presentan inestabilidades de Kelvin-Helmoltz.
- e) La recirculación incrementa sus dimensiones hasta que el peso del fluido es mayor a las fuerzas de flotación y el vórtice cae por gravedad.
- f) El campo de velocidades presenta "ojos de gato" que se forman cuando se aparean dos vórtices y que son típicos de las inestabilidades de Kelvin-Helmoltz.

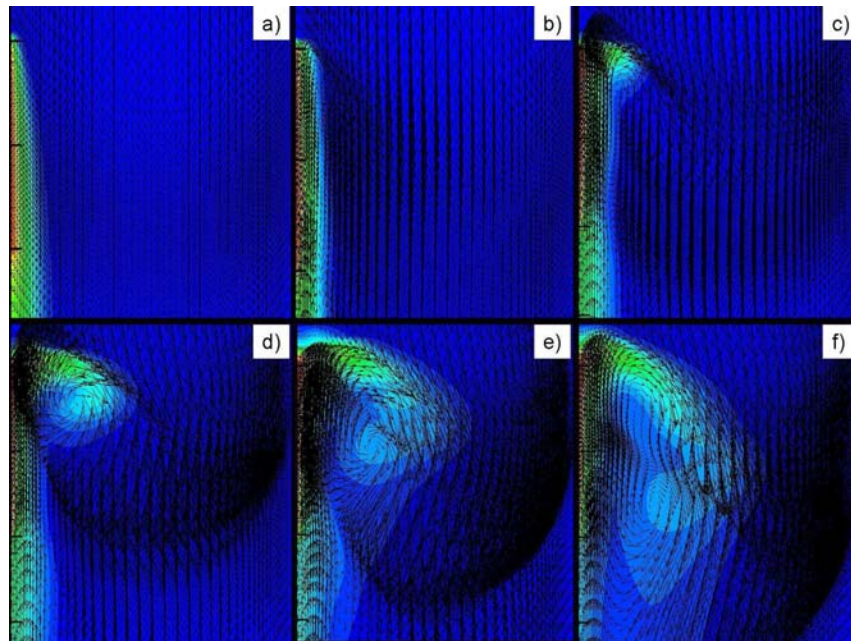


Figura 4.1: Evolución del vórtice para intervalos de unidades de tiempo adimensional de .01 para  $Re = 300$  y  $Ri = 3$  ( $Gr = 2.7 \cdot 10^5$ ).

### 4.1.2. Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal

Las Figuras 4.2 - 4.4 ilustran la influencia que ejerce el parámetro de flotación en la componente longitudinal de velocidad. Las imágenes muestran los perfiles de velocidad longitudinal instantáneos a lo largo de toda la longitud del canal. En este caso, el flujo forzado va en sentido ascendente, mientras que el calentamiento diferencial se encuentra del lado izquierdo de las gráficas y la reversión de flujo se manifiesta hacia abajo. En general, el fenómeno de reversión de flujo aumenta conforme se incrementa el valor del parámetro de flotación. Como el flujo másico es constante, un aumento en la reversión del flujo necesariamente implica un incremento en el máximo valor de la velocidad del flujo forzado. En la parte superior izquierda de las Figuras 4.2 - 4.4 se muestra el perfil inicial de velocidades para el tiempo  $\tau = 0$  y se ilustra la influencia del número de Reynolds en el desarrollo del flujo. Se observa que para un valor fijo del número de Reynolds, los valores máximos de velocidad longitudinal tanto positiva como negativa incrementan conforme aumenta el valor del parámetro de flotación y se observa la influencia que éste ejerce en el ancho del vórtice. La Figura 4.2 muestra los perfiles de velocidad instantáneos para un número de Reynolds de 100 y para tres diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1$  ( $Gr = 1 \cdot 10^4$ ), 2 ( $Gr = 2 \cdot 10^4$ ) y 4.5 ( $Gr = 4.5 \cdot 10^4$ ).

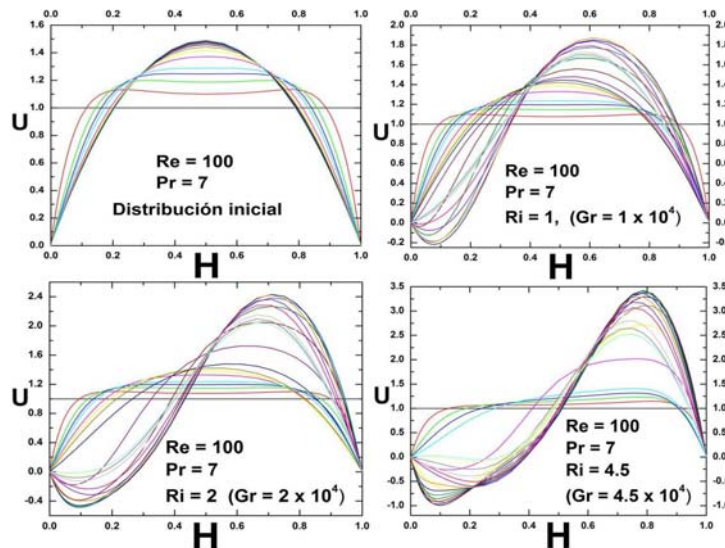


Figura 4.2: Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para  $Re = 100$ .

En la Figura 4.3 se muestran los perfiles de velocidad instantáneos para un número de Reynolds de 300 y para tres diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1$  ( $Gr = 9 \cdot 10^4$ ), 2 ( $Gr = 1.8 \cdot 10^5$ ) y 3.25 ( $Gr = 2.925 \cdot 10^5$ ). Los perfiles de velocidad longitudinal a lo largo de todo el canal permiten ilustrar la forma en la que las fluctuaciones en el flujo resultante debido a las oscilaciones del vórtice principal se incrementan conforme aumenta el valor del número de Richardson (Grashof).

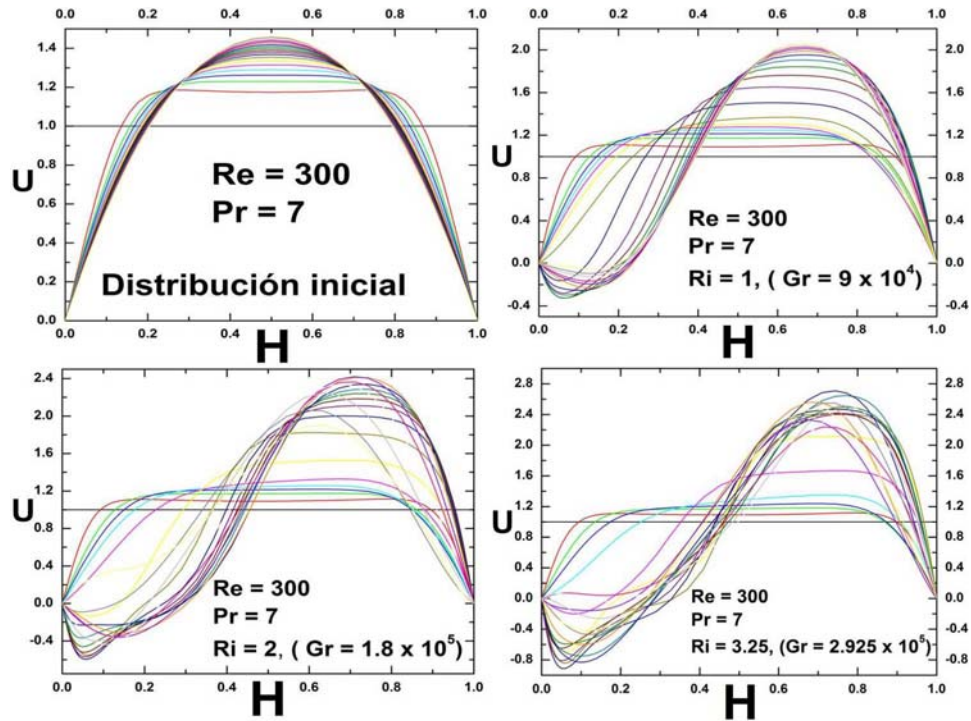
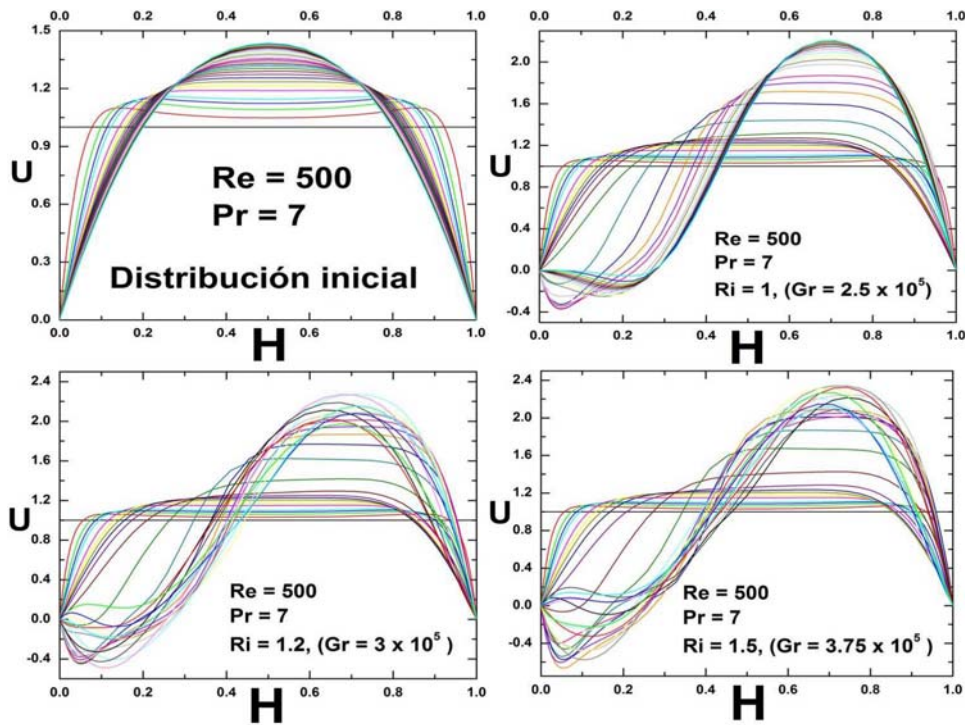


Figura 4.3: Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para  $Re = 300$ .

En la Figura 4.4 se muestran los perfiles de velocidad instantáneos para un número de Reynolds de 500 y para tres diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1$  ( $Gr = 2.5 \cdot 10^5$ ), 1.2 ( $Gr = 3 \cdot 10^5$ ) y 1.5 ( $Gr = 3.75 \cdot 10^5$ ). De las Figuras 4.2 - 4.4 se observa que un incremento en la velocidad del flujo forzado provoca que el flujo resultante sea mucho más sensible a la fuerza de flotación. En comparación con los números de Reynolds de 100 y 300, el fenómeno de reversión del flujo se manifiesta con la misma intensidad pero para valores más pequeños del parámetro de flotación.



Figura 4.4: Perfiles instantáneos de velocidad longitudinal para  $Re = 500$ .

## 4.2. Transferencia de calor

En la siguiente subsección se muestra cómo es el flujo de calor promedio en la placa,  $\overline{Nu}$ . Las variaciones en el tiempo y la magnitud de la tasa de transferencia de calor son presentadas junto con la ubicación y movimiento del punto de estancamiento que se origina en la parte superior del vórtice principal, ilustrando el fuerte acomplamiento que existe entre el campo de velocidades y el campo de temperaturas.

### 4.2.1. Nusselt promedio y punto de estancamiento

Las siguientes figuras muestran la evolución temporal del número de Nusselt promedio en la placa. Para un número de Reynolds de 100, las simulaciones se hicieron hasta alcanzar 200 unidades de tiempo. Para números de Reynolds de 300 y 500, las simulaciones se hicieron hasta alcanzar 300 unidades de tiempo. Esto se debe a que estos intervalos fueron lo suficientemente grandes como para que el número de Nusselt alcance un estado permanente o que muestre el valor hacia el cuál tiende el estado permanente.

El punto de estancamiento que se encuentra en la parte superior del vórtice principal puede ser fijo o móvil. El tipo de movimiento que éste presenta depende tanto del valor del parámetro de flotación como del valor del número de Reynolds. Debido a que la tasa de transferencia de calor junto con el movimiento del punto de estancamiento están en función de éstos dos parámetros, no existe un valor crítico único del parámetro de flotación para el cuál el punto de estancamiento deje de ser de fijo y se vuelva móvil. En general, para valores relativamente pequeños tanto del número de Reynolds como del número de Richardson (Grashof), el punto de estancamiento permanece fijo. Cuando se rebasa el valor crítico del parámetro de flotación para un número de Reynolds dado, el punto de estancamiento emigra de la parte superior de la placa a la parte superior del canal. Si el parámetro de flotación es muy grande para un valor dado del número de Reynolds, el desplazamiento del punto de estancamiento se lleva a cabo presentando oscilaciones en dirección longitudinal. Las figuras que se presentan a continuación muestran la localización del punto de estancamiento para diversos valores del número de Reynolds y para un rango de valores del número de Richardson (Grashof) que engoban los dos tipos de comportamiento. Las Figuras 4.5 - 4.9 ilustran la forma en la que el desplazamiento del punto de estancamiento se vuelve más sensible a la fuerza de flotación conforme aumenta el valor del número

de Reynolds.

Las Figuras 4.5 y 4.6 muestran el Nusselt promedio en la placa junto con la localización y el movimiento del punto de estancamiento para un número de Reynolds de 100. Para este valor del número de Reynolds y para los valores del número de Richardson (Grashof) empleados, todos los valores del número de Nusselt promedio en la placa tienden a un estado permanente después de un transitorio relativamente corto. En la Figura 4.5 se observa que la duración del transitorio inicial es proporcional al valor del parámetro de flotación.

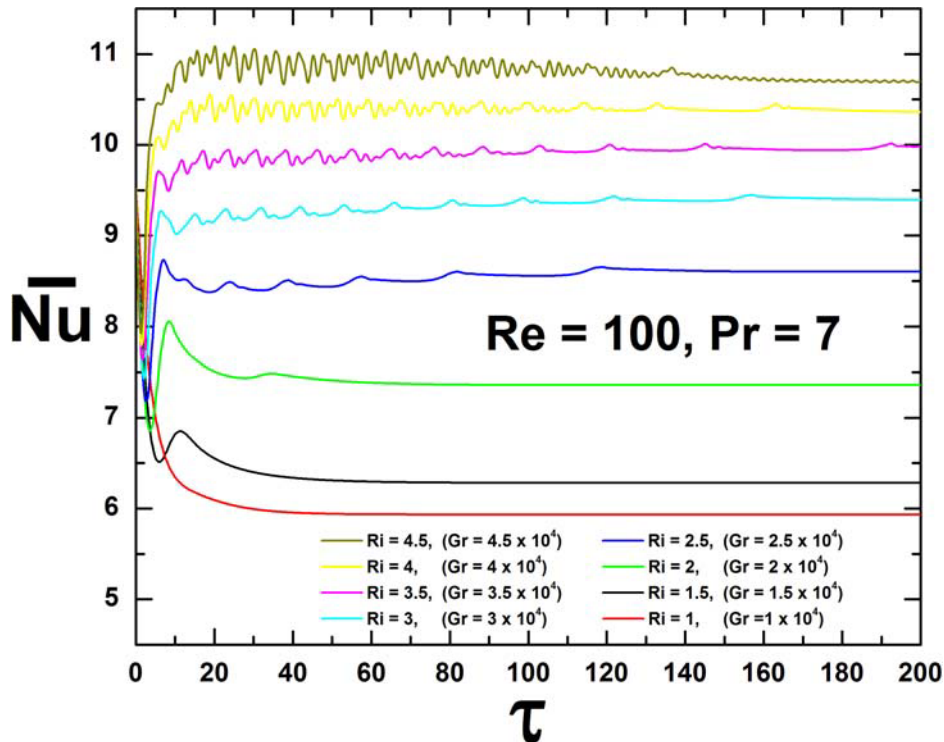


Figura 4.5: Nusselt promedio en la placa para  $Re = 100$  y  $Pr = 7$ .

En la Figura 4.6, para valores del número de Richardson menores a 2, el punto de estancamiento permanece fijo y el número de Nusselt tiene un valor constante. Cuando el número de Richardson es mayor a 2, el punto de estancamiento se vuelve móvil y emigra hacia la parte superior del canal. Debido a que el campo de velocidades y temperaturas se encuentran fuertemente acoplados, las oscilaciones del flujo resultante en el canal provocan que

el número de Nusselt también presente oscilaciones menores. Conforme aumenta el valor del parámetro de flotación, tanto las oscilaciones del número de Nusselt como la velocidad de desplazamiento del punto de estancamiento se incrementan. De las Figuras 4.5 y 4.6 se observa que cuando el número de Nusselt alcanza un estado permanente, el punto de estancamiento deja de ascender para permanecer fijo nuevamente. Este comportamiento se presenta cuando el tiempo de simulación alcanza aproximadamente 140 unidades.

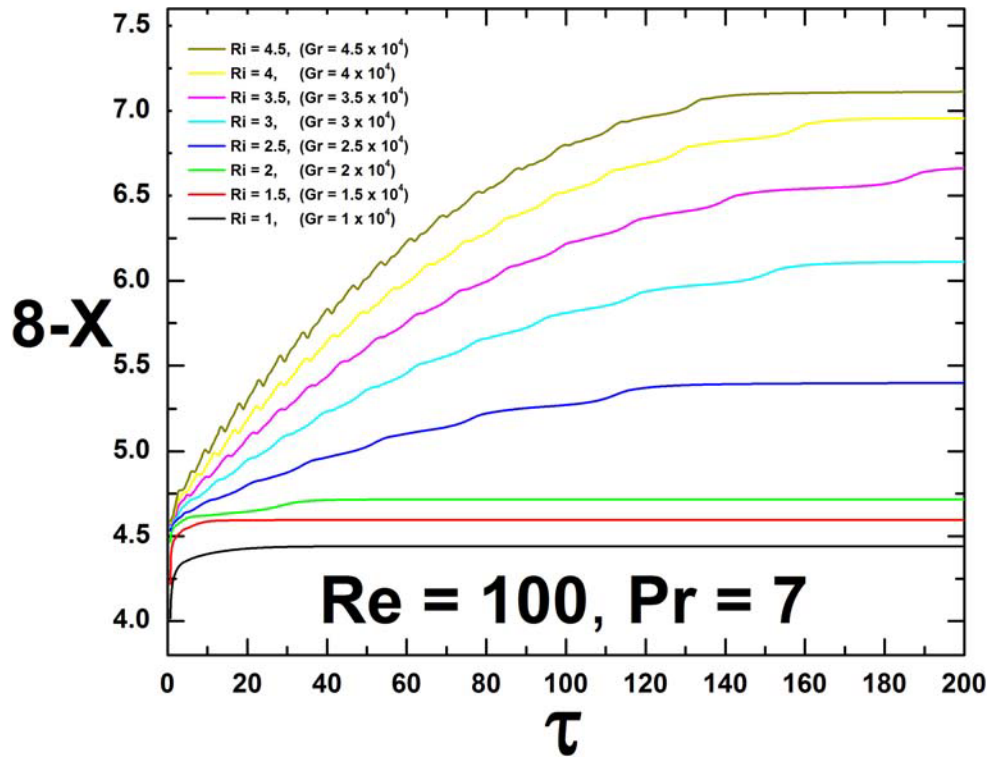


Figura 4.6: Localización y movimiento del punto de estancamiento para  $Re = 100$  y  $Pr = 7$ .

Para números de Reynolds de 300 y 500, las simulaciones muestran que cada valor del número de Reynolds tiene un número de Richardson crítico ( $Ri_{cr}$ ). Cuando el parámetro de flotación excede el valor del número de Richardson crítico, el régimen de transferencia de calor pasa de estado permanente a estado transitorio. Cuando esto ocurre, la transferencia de calor en la placa presenta oscilaciones que se van atenuando con el tiempo. Para los

valores más grandes del número de Richardson (Grashof) empleados en cada caso, este comportamiento no necesariamente se cumple, ya que aparentemente las oscilaciones no se atenúan con el tiempo.

Para un número de Reynolds de 300, la Figura 4.7 muestra que el valor del número de Richardson crítico es de aproximadamente,  $Ri_{cr} = 1.3$ .

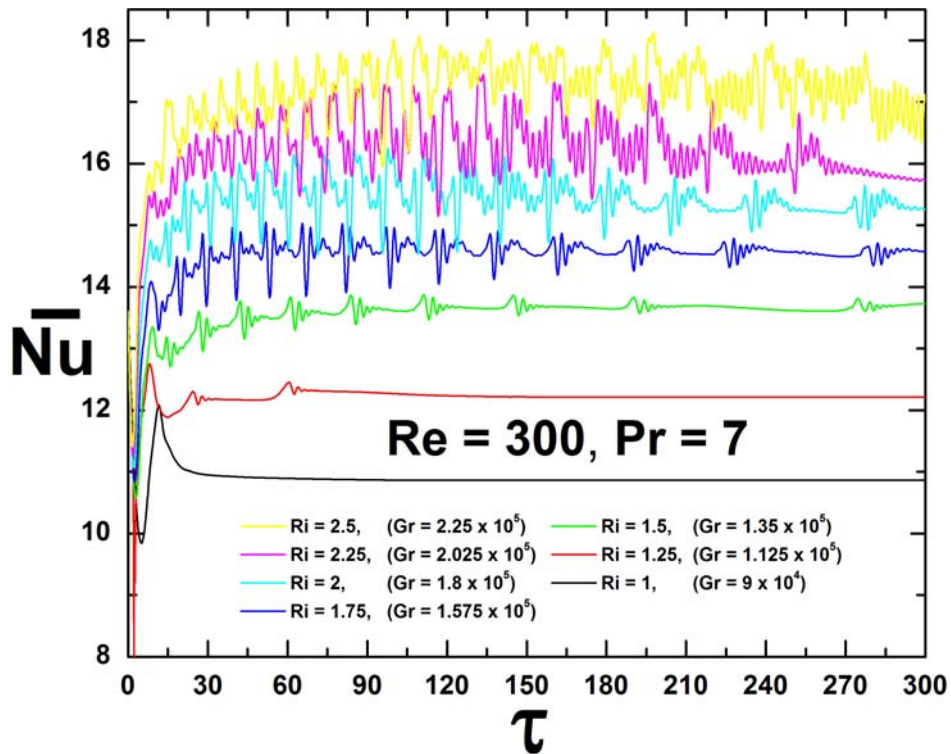


Figura 4.7: Nusselt promedio en la placa para  $Re = 300$  y  $Pr = 7$ .

De la Figura 4.8 se observa que el incremento en la velocidad del flujo forzado provoca que el valor del parámetro de flotación para el cual el punto de estancamiento permanece fijo se reduzca de  $Ri_{cr} = 2$  a  $Ri_{cr} = 1.3$ . Para valores más grandes del parámetro de flotación, el punto de estancamiento se desplaza hacia regiones más altas del canal por medio de saltos que son cada vez más frecuentes y más bruscos.

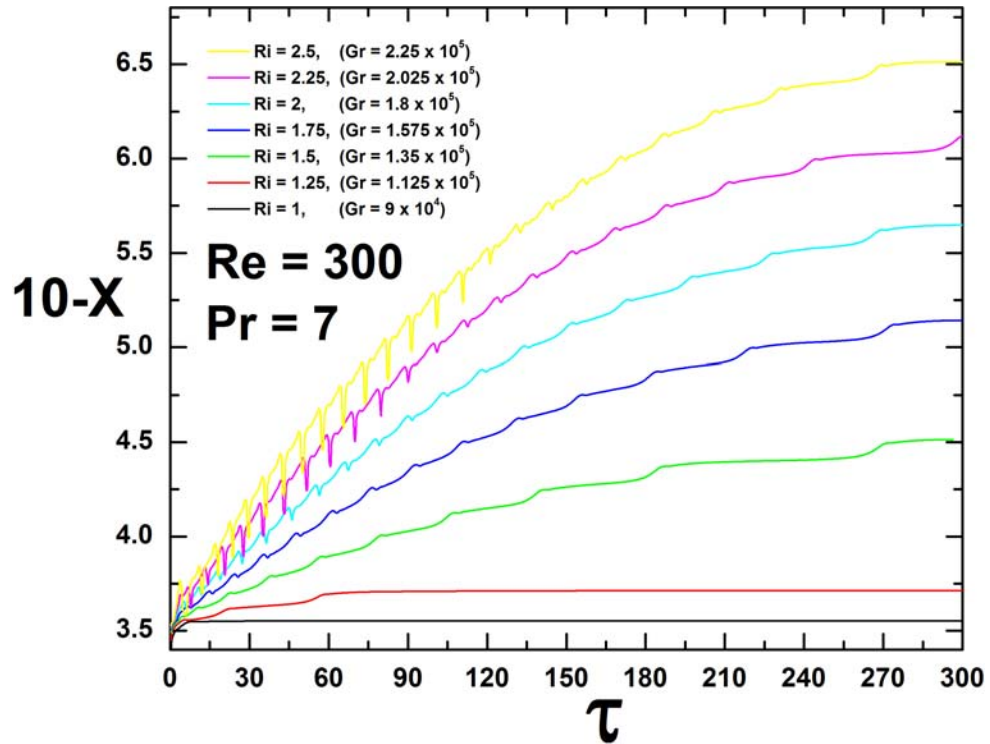
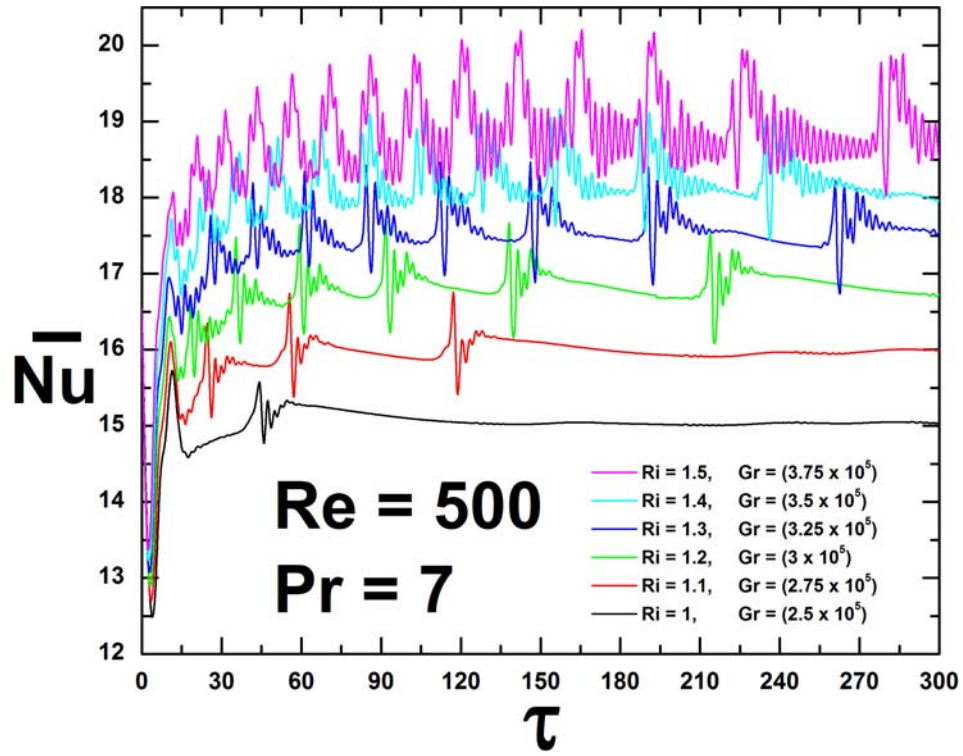


Figura 4.8: Localización y movimiento del punto de estancamiento para  $Re = 300$  y  $Pr = 7$ .

Las Figuras 4.9 y 4.10 muestran la misma tendencia que se describió anteriormente. Nuevamente, el incremento en el valor del número de Reynolds provoca que el valor del número de Richardson crítico disminuya. El máximo valor del punto de estancamiento fijo nuevamente se reduce, pasando de un valor de  $Ri_{cr} = 1.3$  a un nuevo valor de  $Ri_{cr} = 1$ . Conforme aumenta la velocidad relativa entre el flujo forzado y el flujo ascendente, el flujo se vuelve más inestable y cada vez más sensible a la fuerza de flotación. Se observa cómo las oscilaciones del número de Nusselt promedio en la placa tienen una amplitud mayor conforme aumenta el valor del número de Reynolds.

Figura 4.9: Nusselt promedio en la placa para  $Re = 500$  y  $Pr = 7$ .



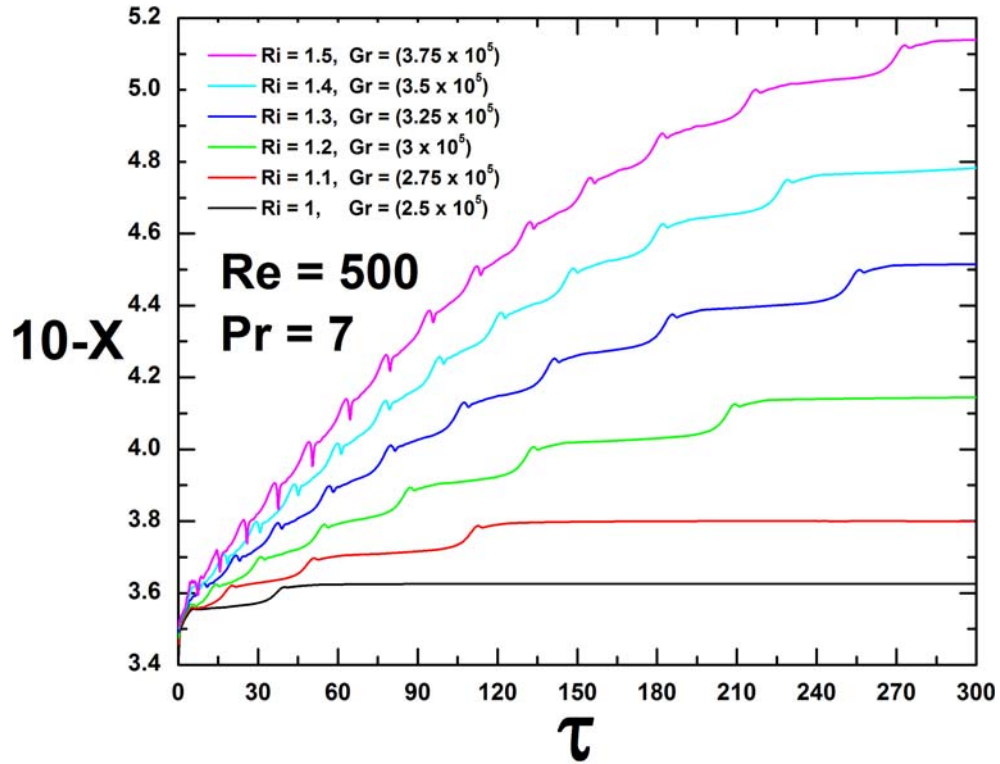


Figura 4.10: Localización y movimiento del punto de estancamiento para  $Re = 500$  y  $Pr = 7$ .

#### 4.2.2. Frecuencias de oscilación del número de Nusselt

En esta subsección se presentan las frecuencias de oscilación del número de Nusselt promedio en la placa para los casos en los que se tiene transferencia de calor en estado transitorio. Para obtener las frecuencias de oscilación se obtuvo la transformada de Fourier y el valor absoluto de la amplitud se muestra como una función de la frecuencia adimensional (o número de Strouhal). Las Figuras 4.11 y 4.12 ilustran cómo en ambos casos existe una frecuencia dominante. Las gráficas tienen cortes en  $St = 0.00416$  (espectro de baja frecuencia) y se observa un pico en la zona de números de Strouhal pequeños. La Figura 4.11 muestra el número de Strouhal para un número de Reynolds de 300 y para cuatro diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1.5$  ( $Gr = 3.75 \cdot 10^5$ ),  $1.4$  ( $Gr = 3.5 \cdot 10^5$ ),  $1.3$  ( $Gr = 3.25 \cdot 10^5$ ) y  $1.2$



( $Gr = 3 \cdot 10^5$ ). Las imágenes muestran cómo conforme aumenta el valor del parámetro de flotación, la frecuencia dominante se recorre al espectro de baja frecuencia. Se muestran principalmente dos picos donde la amplitud es importante. El primero alrededor de  $St \approx 0.4$  y el otro de más baja frecuencia, alrededor de  $St \approx 0.1$ , para un número de Reynolds de 300 y  $St \approx 0.2$ , para un número de Reynolds de 500. El primero está relacionado con las oscilaciones propias del flujo, mientras que las frecuencias bajas están relacionadas con las oscilaciones generadas al trasladarse el punto de estancamiento hacia arriba durante los transitorios. Para números de Reynolds de 500, a frecuencias todavía más bajas surge otro pico que está relacionado con la lenta evolución del proceso.

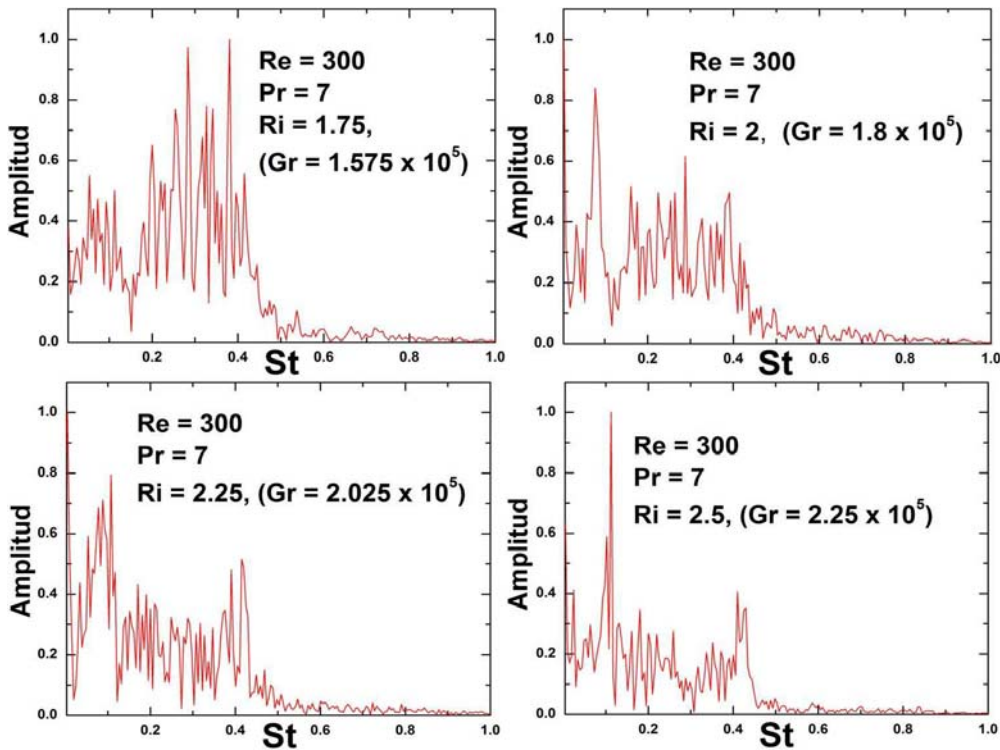


Figura 4.11: Frecuencias adimensionales de oscilación del número de Nusselt promedio para  $Re = 300$ .

La Figura 4.12 muestra las frecuencias dominantes para un número de Reynolds de 500 y para valores del parámetro de flotación de  $Ri = 2.5$  ( $Gr =$

$2.25 \cdot 10^5$ ),  $2.25$  ( $Gr = 2.025 \cdot 10^5$ ),  $2$  ( $Gr = 1.8 \cdot 10^5$ ) y  $1.75$  ( $Gr = 1.575 \cdot 10^5$ ). Nuevamente, se observa que las frecuencias dominantes se encuentran en el espectro de baja frecuencia.

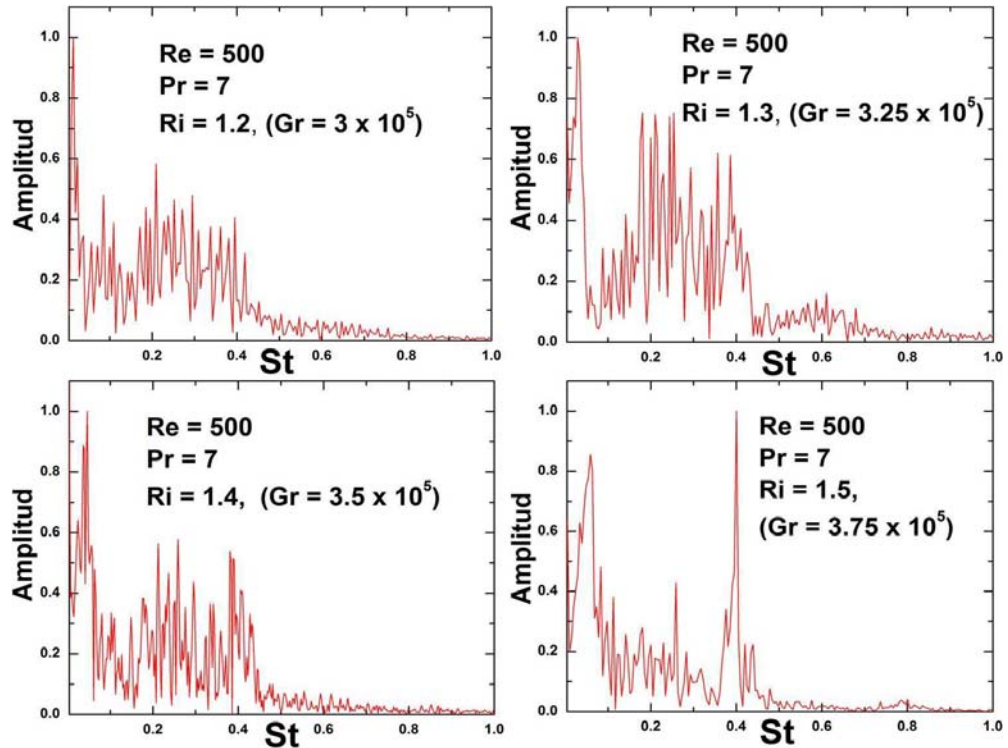


Figura 4.12: Frecuencias adimensionales de oscilación del número de Nusselt promedio para  $Re = 500$ .

Cabe mencionarse que no se reportan frecuencias de oscilación para un número de Reynolds de 100. Esto se debe a que para los valores del parámetro de flotación estudiados, como la duración del transitorio inicial es muy corta, se puede considerar que el régimen de transferencia de calor es permanente.

### 4.2.3. Localización del centroide del flujo másico

Para poder representar la respuesta del flujo resultante y para describir de manera sencilla la forma en que oscila, se obtuvo el centroide del flujo másico [31],  $Y_p$

$$Y_p = \frac{1}{\bar{U}} \int_0^1 UY dY \quad (4.1)$$

como una función del tiempo, donde  $\bar{U}$  corresponde a la velocidad promedio en la posición seleccionada  $X$ ,  $\bar{U} = \int_0^1 U dY$ . Para obtener el centroide del flujo másico se empleó como punto de referencia la región que corresponde a la parte media del canal. Las variaciones en el tiempo del centroide del flujo másico están directamente relacionadas con las oscilaciones transversales que presenta el flujo resultante en el canal. Las Figuras 4.13 - 4.15 ilustran la forma en que el flujo másico resultante oscila para tres diferentes valores del número de Reynolds, 100, 300 y 500 y para diferentes valores del parámetro de flotación.

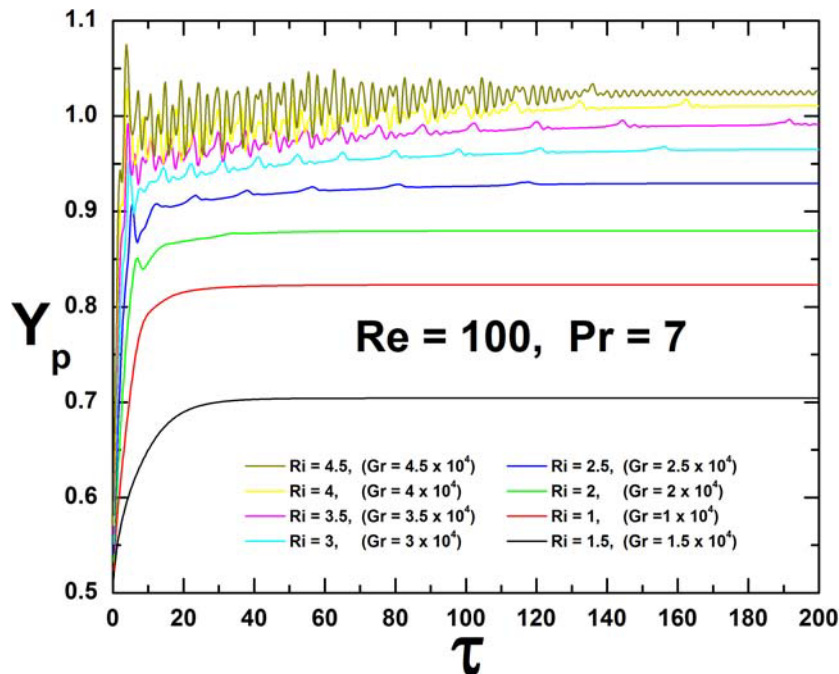


Figura 4.13: Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de  $Re = 100$ .

En la Figura 4.13 se observa cómo las oscilaciones transversales son prácticamente inexistentes. Nuevamente, cuando transcurren aproximadamente 140 unidades de tiempo, las oscilaciones se atenúan hasta desaparecer. Este comportamiento coincide con el hecho de que el valor del número de Nusselt alcanza estado permanente y que el punto de estancamiento deja de ascender.

En la Figura 4.14 se ilustra cómo un incremento en el valor del número de Reynolds provoca que para el régimen de transferencia de calor en estado transitorio, las oscilaciones transversales aumenten considerablemente en amplitud. En las subsecciones siguientes se muestra cómo las oscilaciones más importantes se llevan a cabo en la parte inferior del vórtice principal.

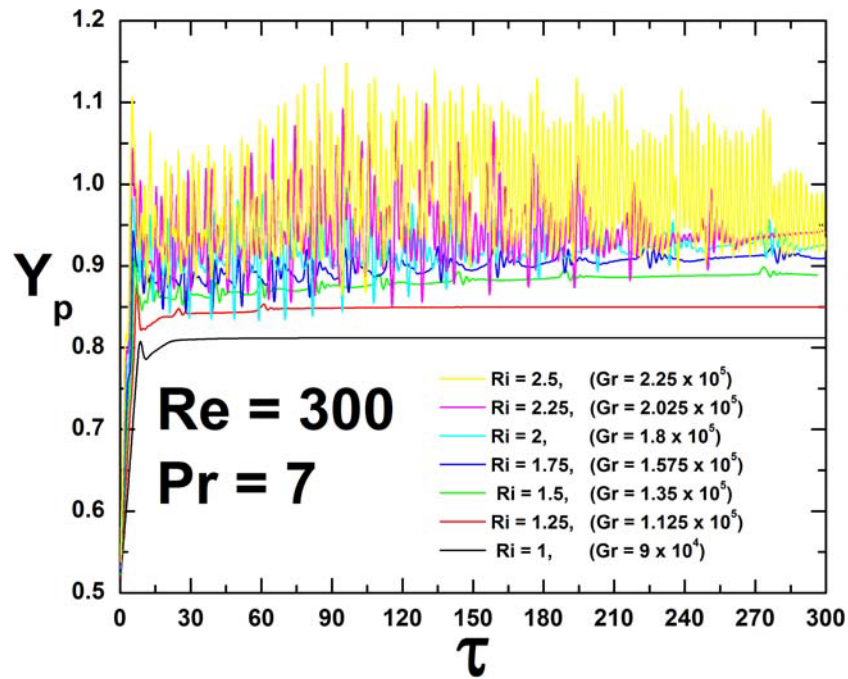


Figura 4.14: Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de  $Re = 300$

En la Figura 4.15 se observa que al pasar de  $Re = 300$  a  $Re = 500$ , el centroide del flujo másico se desplaza aún más hacia la parte derecha del canal como consecuencia del aumento en la velocidad del flujo forzado. En general, las oscilaciones resultantes del flujo, y por lo tanto de su centroide,

tienen un comportamiento similar al obtenido al analizarse las oscilaciones del número de Nusselt en la subsección 4.2.2.

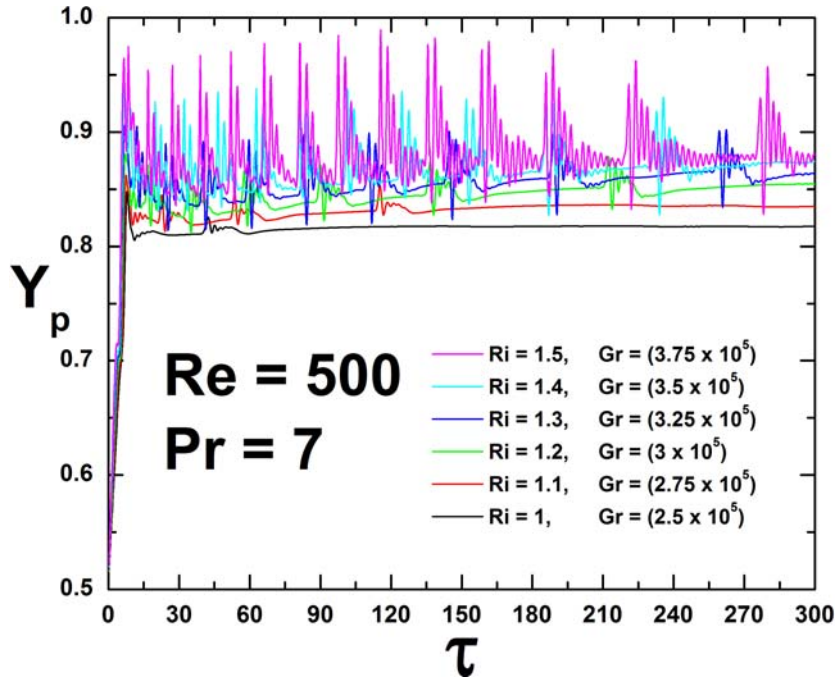


Figura 4.15: Centroide del flujo másico para un número de Reynolds de  $Re = 500$

#### 4.2.4. Régimen de transferencia de calor en estado permanente

Las Figuras 4.16 - 4.18 muestran el campo instantáneo de temperaturas junto con las líneas de corriente instantáneas del flujo resultante en el canal. Cabe mencionarse que para los valores del parámetro de flotación mostrados en esta subsección, las dimensiones del vórtice permanecen constantes, el flujo no presenta oscilaciones de ningún tipo y el punto de estancamiento permanece fijo. Como resultado, después de un transitorio muy breve en el que se forma el vórtice, el régimen de transferencia de calor alcanza estado permanente. Las imágenes presentadas permiten visualizar la influencia que ejerce el valor del número de Richardson (Grashof) en las dimensiones y

localización del vórtice para los diferentes valores del número de Reynolds. En las Figuras 4.16 - 4.18, sólo se muestra una parte del canal con el objeto de que las imágenes sean más claras, ya que la longitud total del canal es de 8 unidades para un número de Reynolds de  $Re = 100$  y de 10 unidades para los número de Reynolds de  $Re = 300$  y  $Re = 500$ .

La Figura 4.16 muestra los patrones del flujo resultante para un valor del número de Reynolds de  $Re = 100$  para cuatro diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1$  ( $Gr = 1 \cdot 10^4$ ),  $Ri = 1.5$  ( $Gr = 1.5 \cdot 10^4$ ),  $Ri = 2$  ( $Gr = 2 \cdot 10^4$ ) y  $Ri = 3$  ( $Gr = 3 \cdot 10^4$ ). Para un valor del número de Richardson de  $Ri = 1$ , el vórtice presenta simetría longitudinal con respecto al centro de la recirculación, por lo que el campo de temperaturas también es simétrico con respecto a la parte media de la placa. Para un valor del número de Richardson de  $Ri = 1.5$ , se genera una estela en la parte inferior del vórtice y tanto la longitud como el ancho de la recirculación duplican su tamaño. Esto ocasiona que tanto el vórtice como el campo de temperaturas pierdan simetría en dirección longitudinal. Para un valor del número de Richardson de  $Ri = 2$ , el centro del vórtice sufre un ligero desplazamiento de la parte inferior de la placa hacia la parte superior de ésta. Por efecto del incremento en la velocidad de recirculación del vórtice, el campo de temperaturas incrementa su influencia en la zona correspondiente a la parte superior de la placa e incrementa sus dimensiones en la dirección transversal. Para un valor del número de Richardson de  $Ri = 3$ , se observa que la longitud del vórtice es mayor que la longitud característica, alcanzando un tamaño considerablemente mayor al que tenía para valores más pequeños del número de Richardson (Grashof).

En la Figura 4.17 se muestran las líneas de corriente con sus respectivos campos de temperatura para un número de Reynolds de  $Re = 300$  y para tres diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 1$  ( $Gr = 9 \cdot 10^4$ ),  $Ri = 1.25$  ( $Gr = 1.125 \cdot 10^5$ ) y  $Ri = 1.37$  ( $Gr = 1.233 \cdot 10^5$ ). Las imágenes ilustran la forma en que el incremento de la velocidad del flujo forzado afecta al flujo resultante y por lo tanto al campo de temperaturas. Ya no existe condición de simetría longitudinal y el vórtice cuenta con un ligero ángulo de inclinación. Se observa cómo el centro del vórtice se desplaza de la parte inferior de la placa hacia zonas que se encuentran aguas abajo.

Para un valor del número de Reynolds de  $Re = 500$ , la Figura 4.18 muestra cómo el flujo forzado tiende a estabilizar y a reducir considerablemente el ancho del vórtice, aumentando considerablemente el tamaño de la estela aguas abajo.

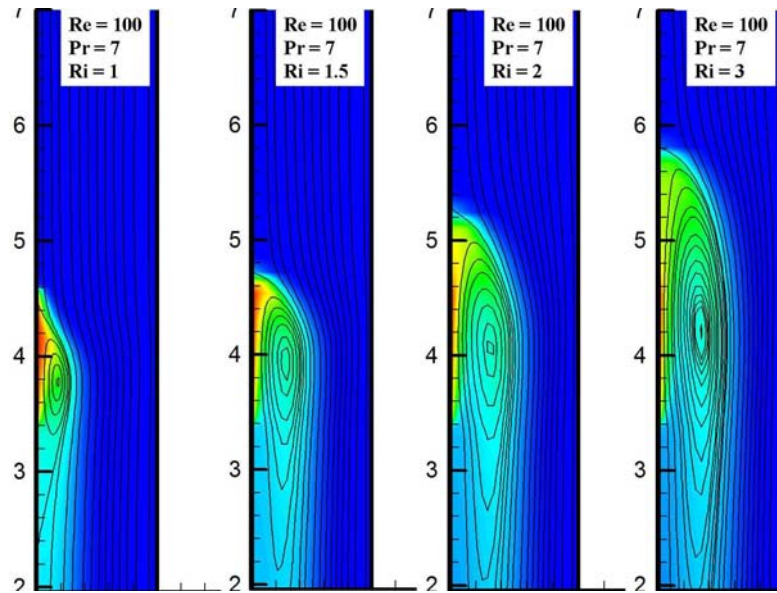


Figura 4.16: Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para  $Re = 100$ . La ordenada muestra los valores de  $8 - X$ .

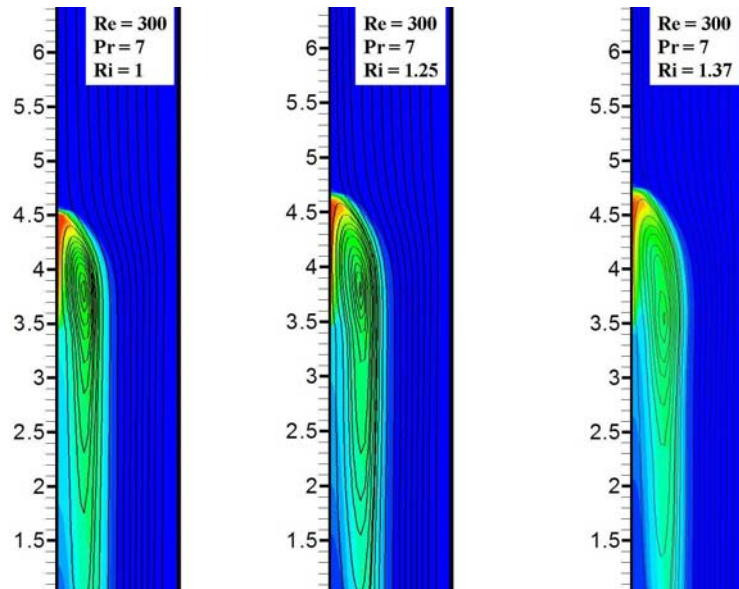


Figura 4.17: Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para  $Re = 300$ . La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .



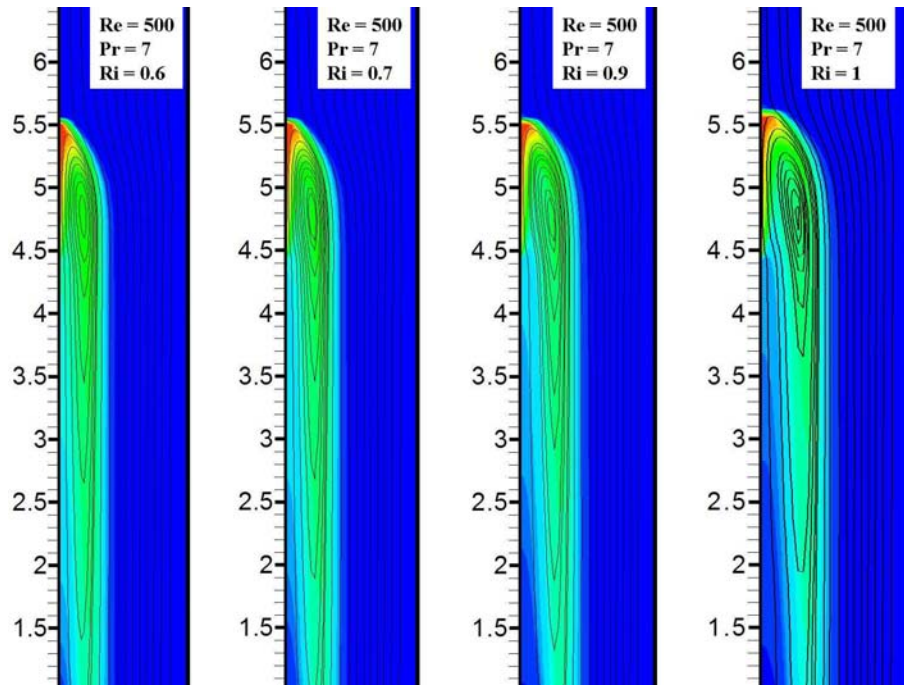


Figura 4.18: Líneas de corriente y campo de temperaturas en estado permanente para  $Re = 500$ . La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .



#### 4.2.5. Régimen de transferencia de calor en estado transitorio

En esta subsección, las Figuras 4.19 - 4.24 ilustran la forma en la que se presentan las oscilaciones longitudinales y transversales del vórtice, el desplazamiento del punto de estancamiento hacia la parte superior del canal, el efecto que tiene el incremento de la velocidad del flujo forzado en las dimensiones del vórtice, y la forma en la que el flujo resultante se vuelve cada vez más sensible a las fuerzas de flotación conforme se incrementa el valor del número de Reynolds. La Figura 4.19 muestra las líneas de corriente instantáneas junto con el campo de temperaturas instantáneo para un valor del número de Reynolds de  $Re = 100$ , para valores del número de Richardson (Grashof) de  $Ri = 4$  ( $Gr = 4 \cdot 10^4$ ) y  $Ri = 7$  ( $Gr = 7 \cdot 10^4$ ). Las imágenes corresponden al instante  $\tau = 40$ ,  $\tau = 80$ ,  $\tau = 120$ ,  $\tau = 160$  y  $\tau = 200$  unidades de tiempo. El vórtice presenta uno ó dos centros de recirculación que se aparean constantemente. Conforme se incrementa el valor del parámetro de flotación, las oscilaciones en la parte inferior del vórtice son más pronunciadas y la velocidad de ascenso del punto de estancamiento es mayor. Las Figuras 4.21 - 4.24 muestran las líneas de corriente junto con el campo de temperaturas para un número de Reynolds de  $Re = 300$  y  $Re = 500$ , respectivamente, para el instante  $\tau = 50$ ,  $\tau = 100$ ,  $\tau = 150$ ,  $\tau = 200$  y  $\tau = 250$  unidades de tiempo. Para un número de Reynolds de  $Re = 300$  y para valores del número de Richardson (Grashof) de  $Ri = 1.75$  ( $Gr = 1.575 \cdot 10^5$ ) y  $Ri = 3.25$  ( $Gr = 2.925 \cdot 10^5$ ), el ancho de la recirculación junto con las dimensiones del vórtice principal se reducen. Cabe mencionarse que aunque las dimensiones del vórtice principal disminuyen, la longitud total del flujo resultante es mayor. Se observa que aparecen múltiples vórtices que se aparean incrementando el número total de vórtices a tres. Para un número de Reynolds de  $Re = 500$  y para valores del número de Richardson (Grashof) de  $Ri = 1.3$  ( $Gr = 3.25 \cdot 10^5$ ) y  $Ri = 1.5$  ( $Gr = 3.75 \cdot 10^5$ ), existen cuatro vórtices interactuando al mismo tiempo. Debido al aumento de la velocidad del flujo forzado, el campo de temperaturas deja una estela aguas abajo que favorece la formación de vórtices secundarios. Nuevamente, conforme aumenta la velocidad del flujo forzado, el ancho del vórtice disminuye y los vórtices se aparean con una frecuencia mayor.

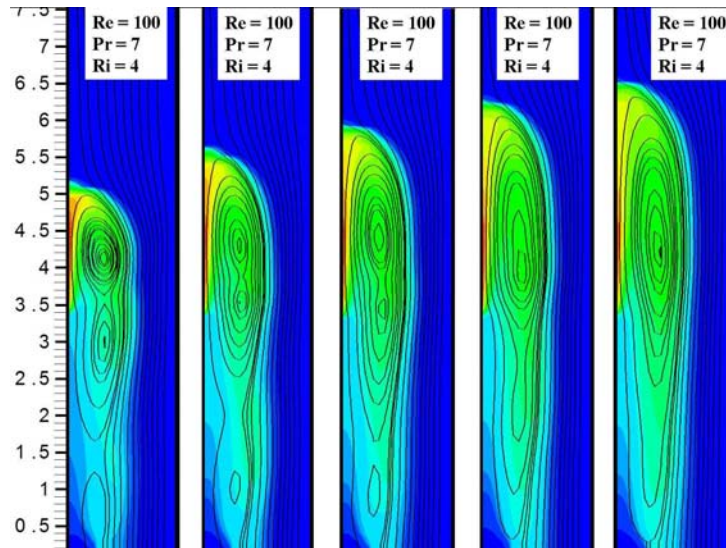


Figura 4.19: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 100$  y  $Ri = 4$  ( $Gr = 4 \cdot 10^4$ ). La ordenada muestra los valores de  $8 - X$ .

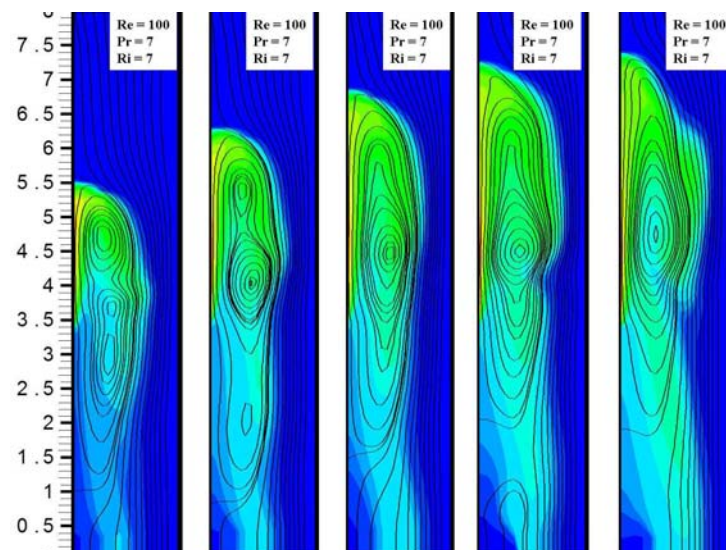


Figura 4.20: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 100$  y  $Ri = 7$  ( $Gr = 7 \cdot 10^4$ ). La ordenada muestra los valores de  $8 - X$ .

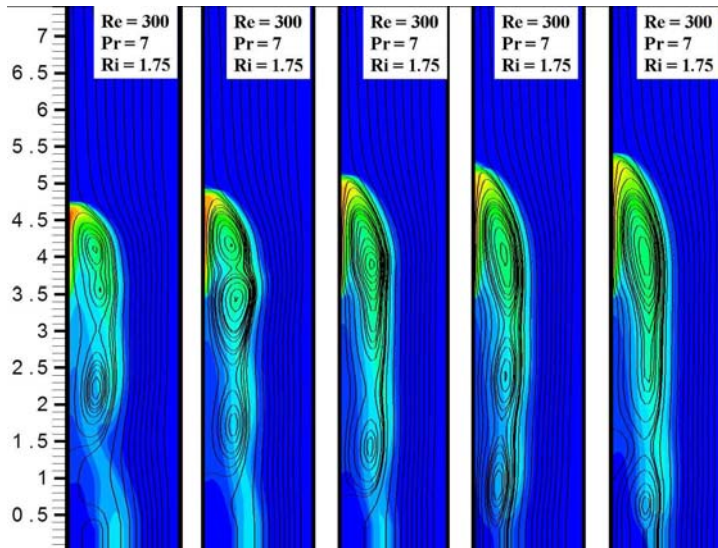


Figura 4.21: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 300$  y  $Ri = 1.75$  ( $Gr = 1.575 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .

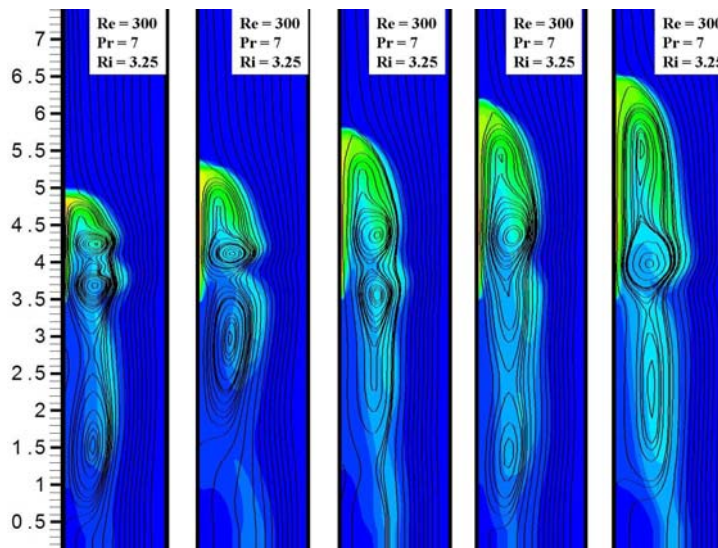


Figura 4.22: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 300$  y  $Ri = 3.25$  ( $Gr = 2.925 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .

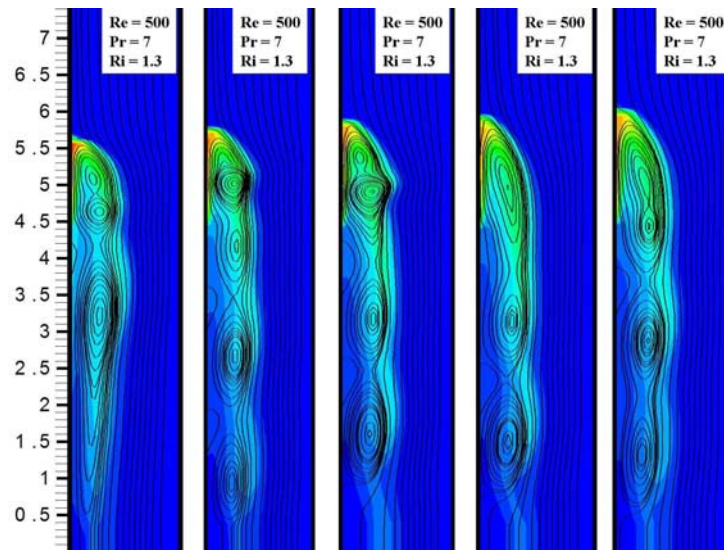


Figura 4.23: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 500$  y  $Ri = 1.3$  ( $Gr = 3.25 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .

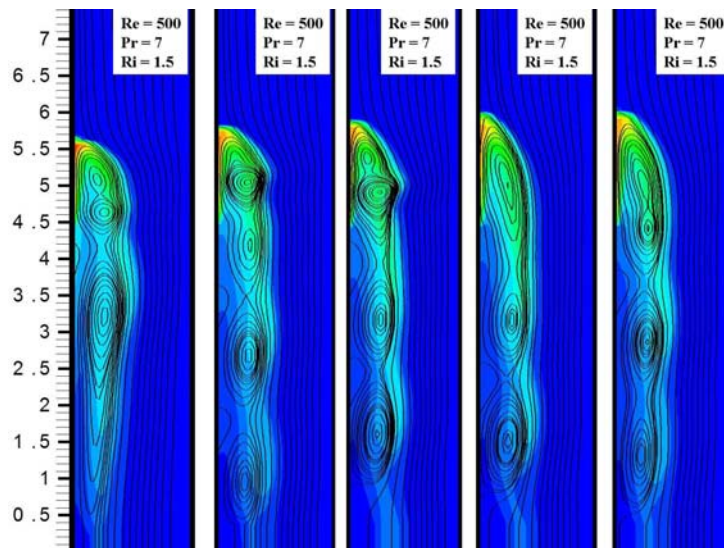


Figura 4.24: Líneas de corriente y campo de temperaturas instantáneos para  $Re = 500$  y  $Ri = 1.5$  ( $Gr = 3.75 \cdot 10^5$ ). La ordenada muestra los valores de  $10 - X$ .

# Capítulo 5

## Diseño experimental

El diagrama del diseño experimental del canal se muestra en la Figura 5.1.

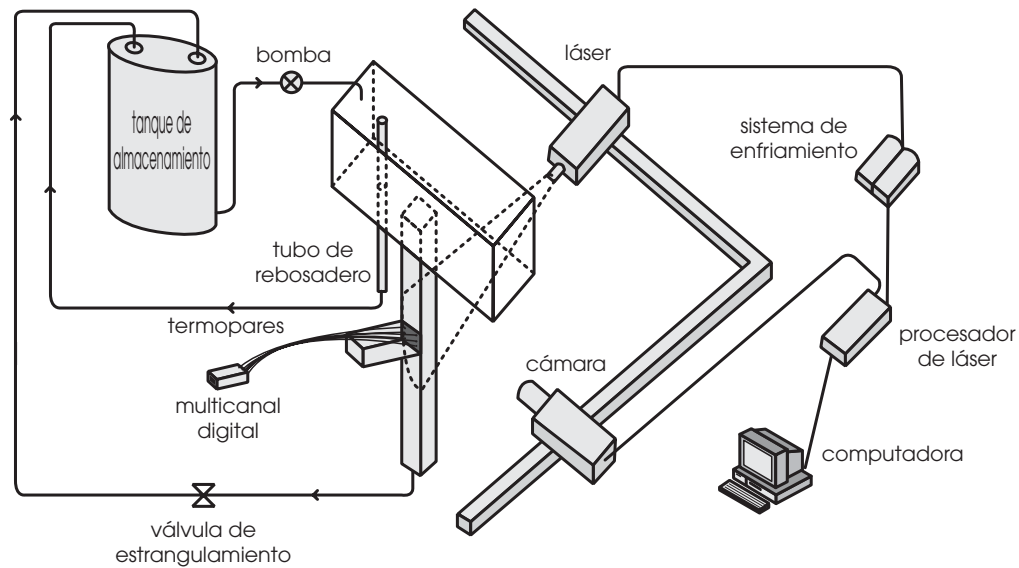


Figura 5.1: Diseño experimental.

Un flujo de agua que es acelerado por la fuerza de gravedad entra con una velocidad  $u_0$  a través de la apertura superior de un canal vertical de sección cuadrada que tiene un ancho de  $H = 67 \text{ mm}$  y una longitud de  $700 \text{ mm}$ . El canal cuenta con rectificadores de flujo tanto a la entrada como a la salida de la sección de prueba. Mediciones de velocidad promedio a la entrada de

la zona de medición muestran que la velocidad de la corriente es uniforme y constante con una repetibilidad de las mediciones estimada alrededor del 1%. Las paredes del canal están hechas de acrílico transparente con un espesor de pared de 10 mm. En una de las paredes, en la parte media del canal, se encuentra una placa de aluminio a temperatura uniforme  $T_w$  que somete al flujo a un calentamiento diferencial asimétrico. La placa tiene una longitud  $L_2^* = 80$  mm y un ancho de 70 mm, ocupando toda la profundidad del canal. La placa cuenta con nueve termopares distribuidos en intervalos regulares a lo largo de su superficie. La temperatura en la placa es el promedio de las nueve lecturas, las cuales se llevan a cabo por medio de un multicanal digital. El gradiente de temperatura de la placa en dirección longitudinal tiene un máximo valor de 0.00025 K/mm. La placa de aluminio es calentada por medio de una resistencia eléctrica que se encuentra en un depósito secundario lleno de agua. La temperatura de la placa se mantiene uniforme y constante con la ayuda de un reóstato que permite variar la cantidad de corriente eléctrica que fluye por la resistencia. La incertidumbre asociada a la energía añadida es menor al 2%. Las pérdidas por conducción a través de las paredes de acrílico se evaluaron, obteniéndose que el cociente entre las pérdidas de calor por unidad de área y la adición de calor de la placa por unidad de área es menor a 1%. Dicho valor se obtuvo con la relación de las conductividades térmicas del acrílico y el agua junto con el espesor del acrílico comparado con la longitud de la placa. Debido a que la superficie activa de pérdidas de calor es del mismo orden de magnitud que el de la superficie de la placa, las paredes del canal se pudieron asumir como adiabáticas y no hubo necesidad de aislarlas. El agua que sale del canal se deposita en un tanque de almacenamiento. Por medio de una bomba, el agua que se encuentra en el tanque se transporta a un depósito que se encuentra en la entrada del canal formándose un circuito de recirculación de agua. Un requisito para que se empiezen a realizar mediciones fue que la temperatura del agua a la entrada del canal deje de incrementar debido al calor añadido por la placa. Después de aproximadamente 30 minutos, el experimento alcanza equilibrio térmico entre el agua que se encuentra en el tanque de almacenamiento y el agua que sale del canal. Esto ocurre cuando las pérdidas por conducción a lo largo del circuito son iguales al calor añadido por la placa. El número de Reynolds, Grashof y Prandtl son obtenidos con las propiedades termofísicas evaluadas con el promedio de la temperatura del fluido a la entrada del canal y la temperatura en la placa. El número de Reynolds,  $Re = U_0 H / \nu$ , y el número de Grashof,  $Gr = g\beta(T_w - T_0)H^3/\nu^2$ , cuantifican la convección

forzada y la convección natural, respectivamente. El número de Prandtl relaciona las fuerzas viscosas con la difusividad térmica del fluido e involucra a una serie de parámetros geométricos. En el presente estudio experimental, tanto los parámetros geométricos como el número de Prandtl permanecen fijos y sólo se varió el número de Reynolds y el número de Grashof. De esta manera, en vez de emplear a los números de Reynolds y de Grashof como parámetros independientes, se escogió al número de Reynolds junto con el número de Richardson,  $Ri = Gr/Re^2$ , como los parámetros que gobiernan la convección mixta. Sin embargo, debido a que los experimentos se llevaron a cabo dejando fijo al número de Reynolds, siempre se obtuvo una dependencia lineal entre el número de Grashof y del número de Richardson. Para un valor dado del número de Reynolds, el número de Richardson se modifica variando la diferencia de temperatura entre el fluido y la placa. Cuando  $T_w > T_0$ , la flotación se opone al flujo forzado provocando reversión de flujo creando un perfil de velocidades asimétrico y generando estructuras vorticales complejas que aparecen en las cercanías de la placa. Estas estructuras se reportan y se describen más adelante. La incertidumbre en los resultados se debe principalmente a la resolución de los aparatos de medición (desviación por instrumentación). La incertidumbre para los números de Reynolds y Grashof son de 2 % y 9 %, respectivamente.

## 5.1. Parámetros de medición

Se empleó un sistema de velocimetría de partículas por imágenes de Dantec Dynamics para medir componentes verticales y horizontales de velocidad en un plano paralelo al flujo. El sistema cuenta con un posicionador automatizado en tres dimensiones para acomodar la cámara y el láser en cualquier región del canal. Para iluminar dicho plano se empleó un láser tipo YAG de doble pulso (New Wave Gemini) a 120 mJ y con una longitud de onda de 532 nm con una duración de pulso de 10 ns. El intervalo entre los dos pulsos se ajustaba dependiendo del valor del número de Reynolds, variando desde los 9000 a los 9500  $\mu s$ . El láser cuenta con una lente cilíndrica que produce un haz de luz divergente que no excede 1 mm de espesor. Se empleó una cámara Hi Sense 12 bit con 1280 x 1024 píxeles a 8 cuadros por segundo. Las imágenes procesadas cuentan con un área de interrogación de 64 x 64 píxeles con 50 % de traslape vertical y 25 % de traslape horizontal. El trazador empleado fue poliamida con un diámetro de 20  $\mu m$ . La densidad de sembrado

requiere que haya al menos 10 partículas por área de interrogación para que el trazador sea homogéneo y constante y de ésta forma se reduzcan de manera considerable los errores en las mediciones de velocidad tanto fluctuante como promedio [32]. La cámara se encuentra orientada de forma perpendicular al plano de medición y cuenta con un lente Nikon con un diámetro de 60 *mm*. Los vectores de velocidad son obtenidos con las imágenes dobles empleando un algoritmo de correlación adaptiva. La sección de prueba ocupa un 98.5% del ancho del canal y se obtuvieron varios mapas para diferentes valores del número de Richardson y del número de Reynolds. Se realizaron 5 series de mediciones para cada región del canal. Como cada serie está hecha con 180 pares de imágenes, se estableció que un total de 1800 muestras de velocidad instantánea eran suficientes como para poder determinar con precisión la velocidad promedio del flujo. La repetibilidad de las mediciones está dentro del 4%, y la incertidumbre en los resultados obtenidos tiene un nivel de confiabilidad del 95% de acuerdo al procedimiento recomendado por Moffat [33]. El campo de vorticidad junto con las componentes de velocidad longitudinal y transversal fueron obtenidas con evaluaciones estadísticas hechas por el procesador del PIV. El sistema de medición de PIV incluye la visualización y la captura de imágenes, el cálculo de vectores de velocidad en dos dimensiones y post-procesamiento para su análisis. El campo de vectores se determina obteniendo el desplazamiento del trazador entre dos pares de imágenes y el tiempo que transcurre entre dos pulsos del láser.

Los valores de adquisición de datos junto con los parámetros más importantes del sistema se presentan en la tabla siguiente:



Fluido empleado	agua
Temperatura	298 - 310 K
número de Reynolds	$300 < Re < 700$
trazador	Poliamida
diámetro del trazador	$20 \mu m$
Densidad del trazador	$1130 kg/m^3$
tamaño de imagen	1280 x 1024 pixeles
intervalo entre pulsos	$9000 - 9500 \mu s$
tipo del láser	New Wave Gemini
longitud de onda	532 nm
Potencia	120 mJ/pulso
duración de cada pulso	10 ns
pulsos por grabación	2
espesor de la hoja láser	$\approx 1 mm$
cámara CCD	Hi Sense 12 bit
celdas fotosensibles	1280 x 1024 pixeles
tipo de imágenes	dobles
tiempo entre cada imagen	$0.01 \mu s$
velocidad de encuadre	4 pares/s
algoritmo de interrogación del PIV	correlación adaptiva
resolución del área de interrogación	64 x 64 pixeles

Cuadro 5.1: Parámetros de medición.

## 5.2. Mapas de medición

La longitud total del canal fue dividida en ocho regiones. Cada región ocupa la máxima capacidad de captura de la cámara, que en este caso es de 1280 x 1240 pixeles. La ubicación de cada región junto con su nombre se representa en la Figura 5.2.

Las imágenes capturadas abarcan 66 de los 67  $mm$  que mide el ancho del canal, mientras que en la dirección longitudinal se abarcan 53  $mm$ . Las mediciones realizadas para cada mapa de vectores en el canal tienen a  $x$  como la coordenada longitudinal (positiva hacia abajo) y a  $y$  como la coordenada transversal ( $y = 0$  en la pared izquierda). Fue necesario dividir la longitud total del canal en ocho regiones para que la cámara se encuentre

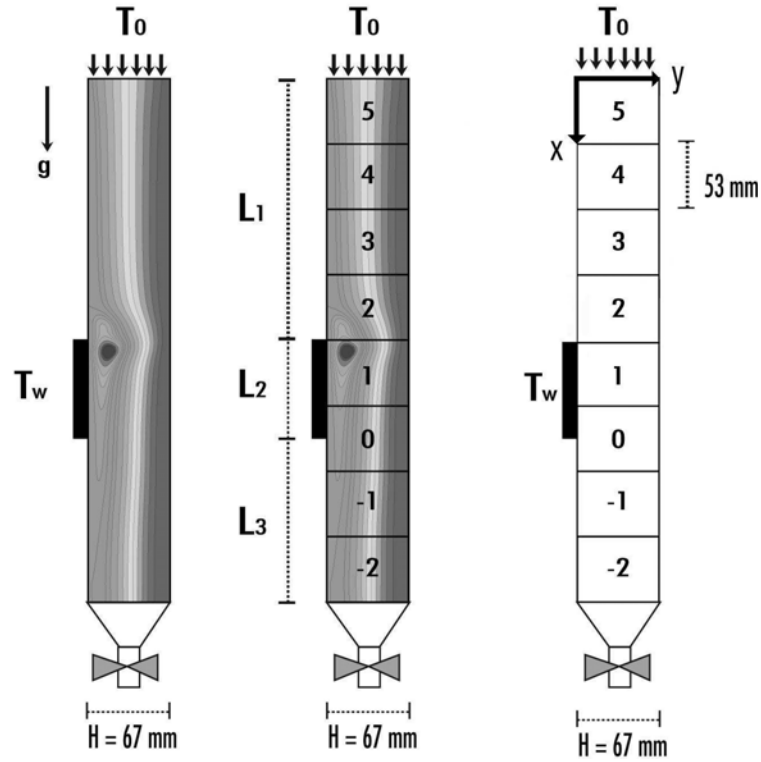


Figura 5.2: Nombre y localización de cada región en el canal.

suficientemente cerca del experimento para que se puedan captar los detalles del vórtice y no sólo las grandes escalas del remolino. Las mediciones fueron hechas en múltiples planos  $x-y$  trasladando la cámara y el láser a lo largo de las ocho regiones estudiadas. El número de imágenes que podían ser captadas dependía de la memoria disponible en el sistema de PIV y del tamaño de las imágenes adquiridas. En este caso, el límite fue de 180 pares de imágenes de tamaño completo (12 bits) a una razón de  $4\text{ Hz}$ . Se adquirieron un total de 1080 pares de imágenes para cada región, de las cuales 540 pares fueron tomados para dos valores de la componente  $z$ , siendo ésta la coordenada perpendicular al plano de medición  $x-y$ , que da la profundidad del canal. Los campos de velocidad que no cumplieran con un criterio de al menos un 95% de vectores correctos fueron rechazados y reemplazados empleando un método de interpolación lineal basado en los vectores circundantes. Los vectores

promedio para la componente de velocidad longitudinal  $U$  y la componente de velocidad transversal  $V$  fueron obtenidos empleando métodos estadísticos a lo largo de los mapas de vectores de velocidad.

Para un número de Reynolds de 300, los valores de los números de Richardson con los que se trabajó se obtuvieron para una diferencia de temperatura entre la placa y el fluido de 0.5, 1, 2 y 3  $K$ . Los valores correspondientes del número de Richardson son  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ), 13.2 ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ), 27.4 ( $Gr = 2.466 \cdot 10^6$ ) y 42.7 ( $Gr = 3.843 \cdot 10^6$ ), respectivamente. Para poder estudiar la forma en que el valor del número de Richardson afecta la estructura del flujo para diferentes valores del número de Reynolds, se optó por dejar fijos los valores obtenidos del parámetro de flotación. Por lo tanto, para un número de Reynolds de 500 y 700, la diferencia de temperaturas entre el fluido y la placa caliente se obtuvieron empleando los mismos valores del número de Richardson. La tabla siguiente muestra las diferencias de temperatura para los valores fijos del número de Richardson para cada valor del número de Reynolds (ver Apéndice E).

$Re \backslash Ri$	6.5	13.2	27.4	42.7
300	0.5	1	2	3
500	1.4	2.8	5.6	8.4
700	2.7	5.4	10.9	16.3

Cuadro 5.2: Diferencia de temperatura,  $T_w - T_0$ , en  $K$  que se emplearon en los experimentos.

# Capítulo 6

## Resultados experimentales

La unidad de almacenamiento del PIV almacena un total de 180 pares de imágenes en 45 segundos. Una vez que las imágenes han sido capturadas, es necesario esperar unos instantes para que el sistema transfiera las imágenes a la computadora. Como el flujo estudiado es transitorio y el vórtice presenta oscilaciones importantes en dirección longitudinal y transversal, fue prácticamente imposible empalmar las imágenes obtenidas para las ocho regiones estudiadas. Todas las mediciones fueron obtenidas para dos diferentes profundidades del canal, en la posición  $Z = z/H = 0.25$  y  $Z = 0.5$ . Las estructuras de los vórtices obtenidas para los números de Reynolds y de Richardson empleados eran muy similares para ambas profundidades, por lo que el flujo se pudo considerar prácticamente bidimensional (excepto en posiciones muy cercanas a las paredes perpendiculares a la placa).

De los resultados obtenidos con la solución numérica, se sabe que existe un número de Richardson (Grashof) crítico (que está en función del número de Reynolds) para el cual la estructura del flujo se vuelve inestable. En este estudio, todas las mediciones experimentales fueron hechas con números de Richardson (Grashof) superiores al valor crítico. Mediciones con valores por debajo del número de Richardson (Grashof) crítico no fueron realizadas debido a la falta de resolución en el equipo de medición. En las siguientes secciones, las características del flujo son analizadas para valores instantáneos y valores promedio. El flujo instantáneo se muestra para un cierto intervalo, mientras que el flujo promedio se obtiene promediando al total de las imágenes instantáneas adquiridas para cada región.

## 6.1. Flujo instantáneo

El flujo resultante dentro del canal produce una recirculación vortical que gira en sentido horario. Esto se debe a la interacción que existe entre el flujo que asciende cerca de la placa caliente y el flujo forzado frío que cae en regiones alejadas a la placa. Cabe mencionarse que para el rango de valores del número de Reynolds y del número de Richardson empleados en los experimentos, la estructura del flujo siempre fue inestable. En esta subsección se muestran imágenes del flujo instantáneo para poder ilustrar la forma en que las oscilaciones longitudinales y transversales provocan que el centro del vórtice sea móvil. Las imágenes muestran cómo la estructura del flujo tiene uno ó más vórtices e ilustra la forma en que éstos interactúan. La Figura 6.1 muestra la estructura del flujo instantáneo para un número de Reynolds de 300 y un número de Richardson de 13.2 ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ) con un intervalo de 2 segundos entre imágenes consecutivas. En esta figura, las líneas de corriente instantáneas se muestran para la zona en la que se encuentra el vórtice principal (región 1), observándose fluctuaciones tanto en dirección longitudinal como transversal. La secuencia muestra cómo las oscilaciones del vórtice en dirección longitudinal provocan que éste se desplace desde la región 0 hasta la región 2. Para un número de Reynolds de 300, la Figura 6.2 muestra una estructura de flujo que presenta uno ó dos vórtices interactuando. Como puede verse, la frecuencia con la que se aparean es relativamente grande en comparación con la que se obtuvo para valores más grandes del número de Reynolds y del número de Richardson. Para la secuencia mostrada en la Figura 6.1, el apareamiento entre los vórtices ocurre sólo una vez en un intervalo de seis segundos. La Figura 6.2 muestra la estructura del flujo instantáneo para un valor del número de Reynolds de 500 y un valor del número de Richardson de 27.4 ( $Gr = 6.85 \cdot 10^6$ ) para la región 3. En esta figura se redujo considerablemente el número de líneas de corriente trazadas de manera que sea más fácil poder visualizar la interacción de hasta tres vórtices. Para este caso, la interacción entre uno, dos o tres vórtices tiene una frecuencia mayor.

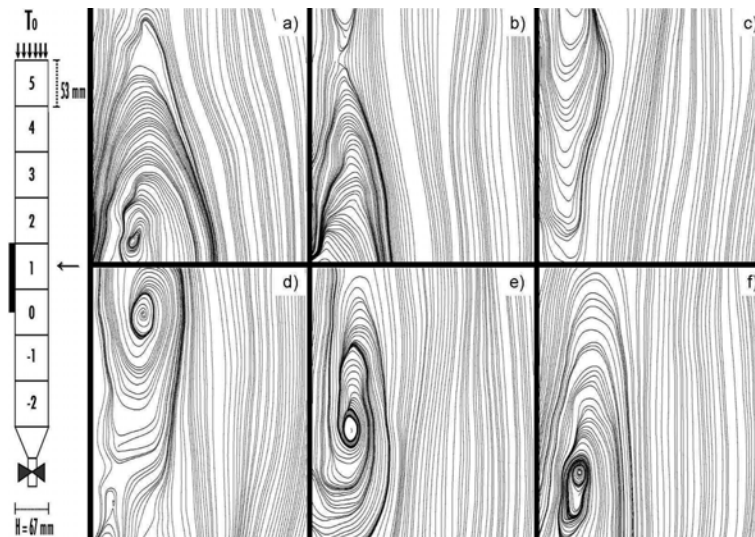


Figura 6.1: Flujo instantáneo para un número de Reynolds de 300 con un número de Richardson de 13.2 ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ) en la región 1 con un intervalo de 2 segundos entre cada imagen.

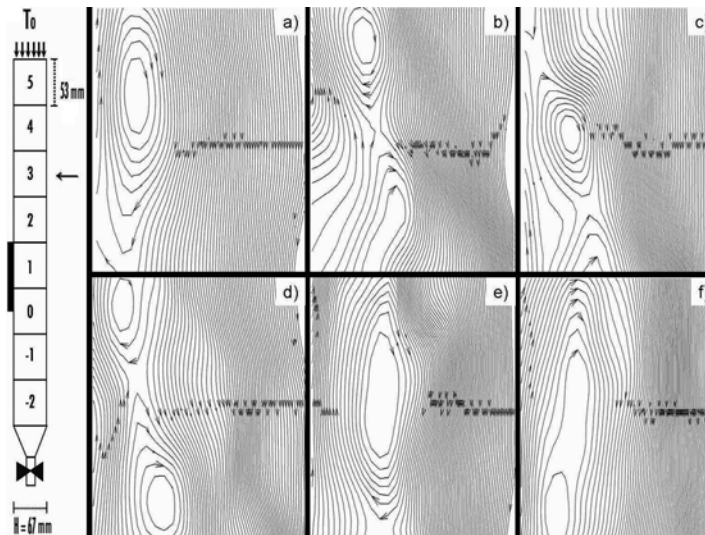


Figura 6.2: Flujo instantáneo para un número de Reynolds de 500 con un número de Richardson de 27.4 ( $Gr = 6.85 \cdot 10^6$ ) en la región 3 con un intervalo de 2 segundos entre cada imagen.

## 6.2. Centroide del flujo másico

Para poder caracterizar la respuesta transitoria del flujo fue necesario simplificar el problema introduciendo un sólo parámetro para poder estudiar las oscilaciones del flujo resultante, tal como se hizo en la solución numérica. El centroide del flujo másico [31],  $y_p$  se define por

$$y_p = \frac{\sum_{j=1}^N y_j u_j}{\sum_{j=1}^N u_j} \quad (6.1)$$

y se obtuvo como una función del tiempo. Aquí  $y_j$  es la distancia que existe desde la placa caliente hasta el nodo  $j$ ,  $u_j$  es la velocidad longitudinal asociada a cada nodo  $j$ , y  $N$  corresponde al número total de regiones de interrogación en la imagen (que en nuestro caso es de  $N = 20$ ). La parte inferior de la región 1 es la que se empleó como punto de referencia para medir al centroide  $y_p$ . Las variaciones de este parámetro en el tiempo están directamente relacionadas con las oscilaciones transversales. La ubicación del centroide del flujo másico se muestra para un intervalo de  $t_f = 45$  segundos, siendo éste el tiempo requerido para grabar 180 pares de imágenes. El tiempo transcurrido se normalizó con el tiempo de residencia  $H/u_0$ , mientras que el centroide del flujo másico se normalizó con el ancho del canal,  $Y_p = y_p/H$ .

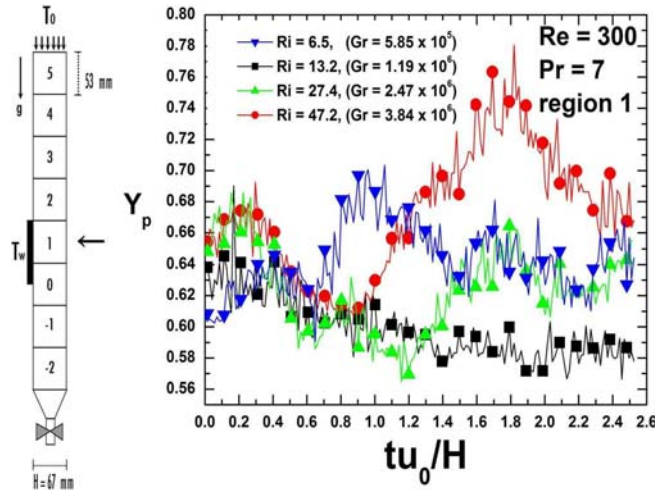


Figura 6.3: Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de  $Re = 300$

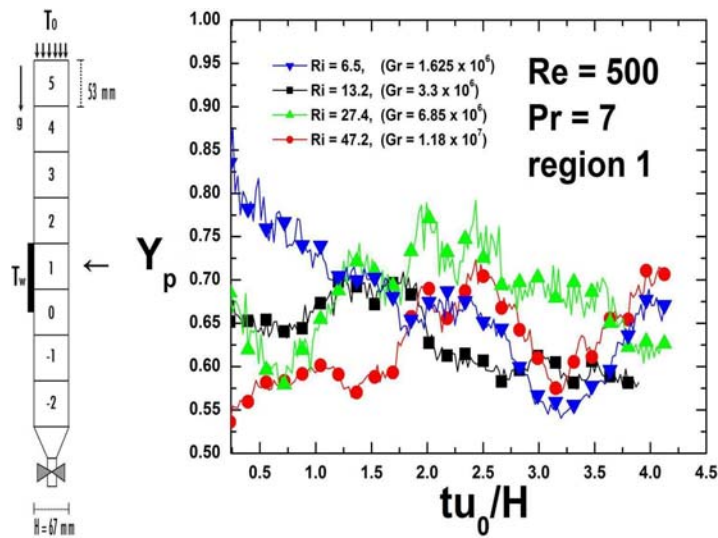


Figura 6.4: Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de  $Re = 500$

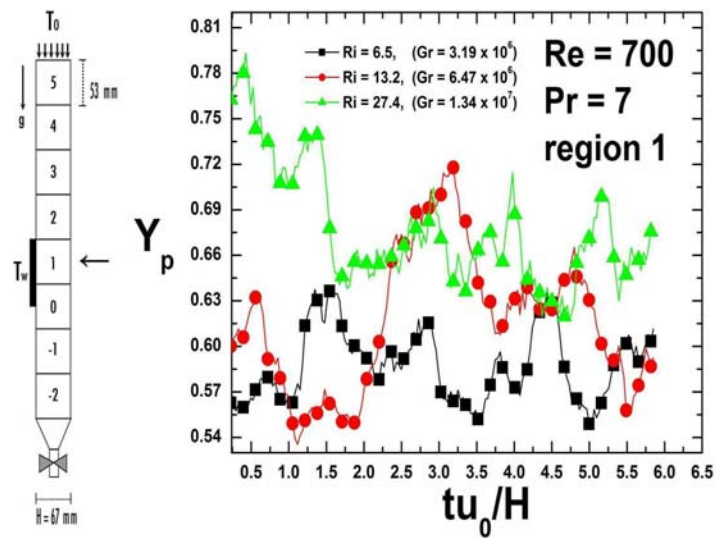


Figura 6.5: Centroide del flujo másico adimensional para un número de Reynolds de  $Re = 700$



### 6.2.1. Frecuencias de oscilación

Las Figuras 6.6 a 6.8 muestran las oscilaciones del flujo másico como una función del tiempo adimensional para tres diferentes valores del número de Reynolds, 300, 500 y 700 y para cuatro diferentes valores del parámetro de flotación. La respuesta en el tiempo importante es la que corresponde a las frecuencias menores, mientras que las frecuencias altas pueden ser asociadas con ruido. Las Figuras 6.6 a 6.8 muestran la amplitud normalizada de la transformada de Fourier de la función  $Y_p(tu_0/H)$  para números de Reynolds de 300, 500 y 700 y para diferentes valores del parámetro de flotación como una función del número de Strouhal,  $St = fH/u_0$ , donde  $f$  corresponde a la frecuencia en Hertz. En este caso, el número de Strouhal relaciona el tiempo de residencia característico del flujo  $H/u_0$ , con el tiempo de oscilación. El corte en infrarrojo está dictado por el tiempo final de medición,  $St_{co} = (1/t_f)(H^2/\nu)(1/Re)$ . Para todos los casos estudiados, la amplitud mayor ocurre para números de Strouhal bajos, cercanos al corte. Las gráficas muestran que la amplitud importante es cercana al corte inferior y los picos están alrededor de  $St \approx 0.4$  que coincide con lo encontrado en la solución numérica (ver subsección 4.2.2). Para un número de Reynolds de 300, estas frecuencias están cercanas al corte infrarrojo, por lo que su resolución no es tal como se quisiera y ello debido a las limitaciones del equipo experimental. Por esto no fue posible representar la respuesta en el tiempo para un ciclo completo, ya que el intervalo de tiempo mayor (que es de 45 segundos) es todavía muy pequeño en comparación con el tiempo de residencia para valores pequeños del número de Reynolds. Sin embargo, para valores mayores del número de Reynolds, si fue posible representar el ciclo completo, tal como puede verse en las figuras 6.7 y 6.8.

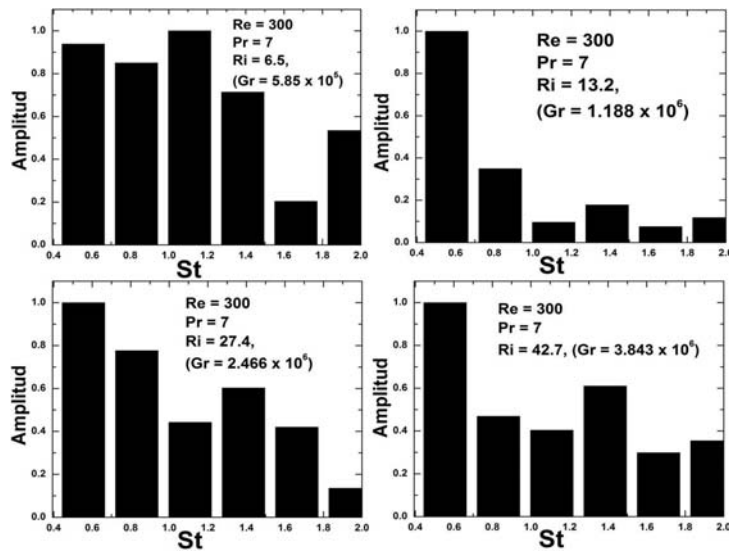


Figura 6.6: Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para  $Re = 300$ .

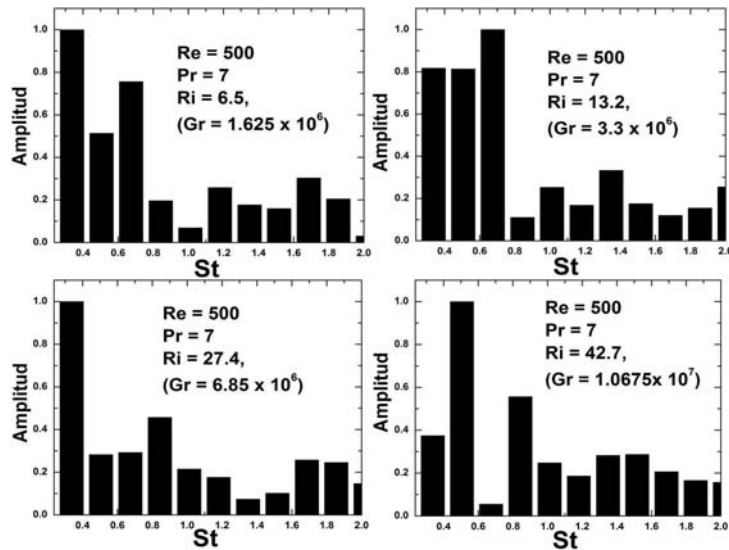


Figura 6.7: Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para  $Re = 500$ .

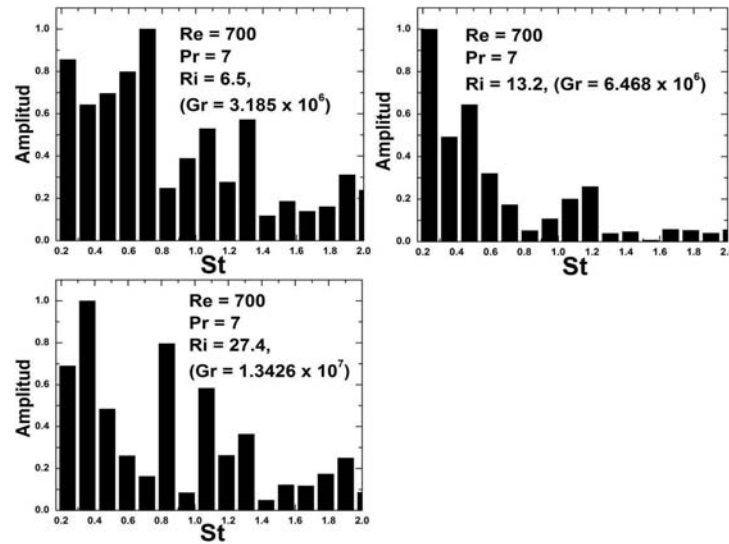


Figura 6.8: Frecuencias adimensionales de oscilación ( $St = fH/u_0$ ) para  $Re = 700$ .

### 6.3. Flujo promedio

En esta subsección, en un esfuerzo por reducir la complejidad de los datos experimentales en la estructura del flujo resultante, los valores del flujo promedio en el plano  $x - y$  para  $z = 0.5H$  (la mitad de la profundidad del canal) son presentados. Los valores promedio de los campos de velocidad se obtuvieron promediando todos los campos de velocidad instantáneos obtenidos para cada región del canal. En cada región se realizaron un total de cinco series de mediciones. Como cada serie está conformada por 180 pares de imágenes, las imágenes mostradas para cada región del canal fueron obtenidas promediando un total de 1800 fotografías. Las Figuras 6.9 - 6.12 muestran los campos de velocidad promedio para un número de Reynolds de 300 y para cuatro diferentes valores del número de Richardson (Grashof):  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ),  $13.2$  ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ),  $27.4$  ( $Gr = 2.466 \cdot 10^6$ ) y  $42.7$  ( $Gr = 3.843 \cdot 10^6$ ). Las imágenes muestran cómo la estructura del flujo puede presentar uno ó más vórtices circulando en sentido horario. La ubicación del centro del vórtice se obtuvo con los valores promedio, encontrándose que existe una dependencia muy grande entre la región en la que

éste se ubica y el valor del número de Richardson (Grashof). Conforme aumenta el valor del parámetro de flotación, el vórtice se desplaza de la región 1 hasta la región 3 del canal. La Figura 6.9 muestra las líneas de corriente (a), la componente de velocidad transversal junto con los vectores de velocidad (b), la componente longitudinal de velocidad (c) y los contornos del campo de vorticidad (d) en el plano  $x - y$  para la región 1 y para  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ). En las imágenes presentadas, el color azul corresponde a zonas con velocidad y vorticidad negativa, mientras que el color rojo corresponde a zonas con velocidad y vorticidad positiva. Las imágenes mostradas en las Figuras 6.9- 6.14 se seleccionaron por encontrarse en la región en la que se ubica el centro de la estructura del vórtice promedio. Para el caso en el que existen varios vórtices con más de un centro de recirculación, sólo se muestra la región en la cual se encuentra ubicado el vórtice de mayor tamaño. La Figura 6.10 muestra las mismas gráficas para  $Ri = 13.2$  ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ) también para la región 1. Si se compara con la imagen anterior, esta figura muestra cómo el centro del vórtice sufre un ligero desplazamiento hacia arriba para un número de Richardson más grande. Las Figuras 6.11 - 6.12 ilustran la forma en la que el centro del vórtice emigra hacia regiones más altas del canal conforme se incrementa el valor del número de Richardson. Las Figuras 6.11, 6.13 y 6.14 muestran la influencia del número de Reynolds en la estructura promedio del flujo para un valor fijo del número de Richardson,  $Ri = 27.4$ . Se observa cómo el espesor promedio del vórtice disminuye y su longitud aumenta conforme incrementa el valor del número de Reynolds. En la Figura 6.13, para un número de Reynolds de 700, existen múltiples estructuras vorticales.

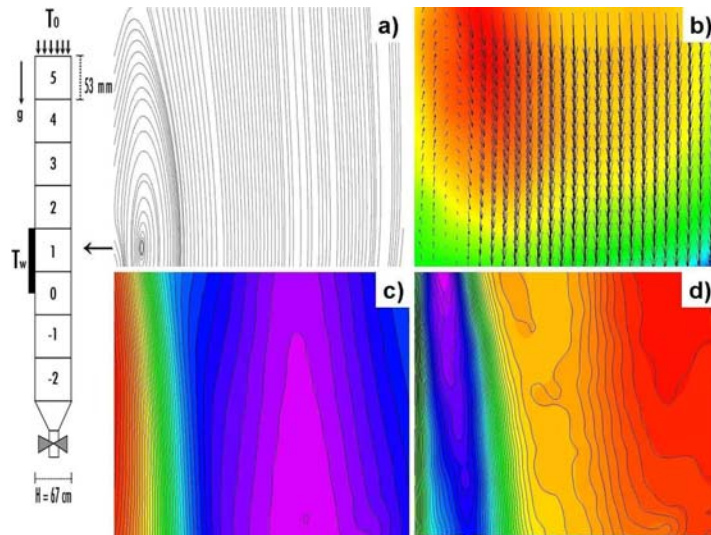


Figura 6.9: Valores promedio para  $Re = 300$  y  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

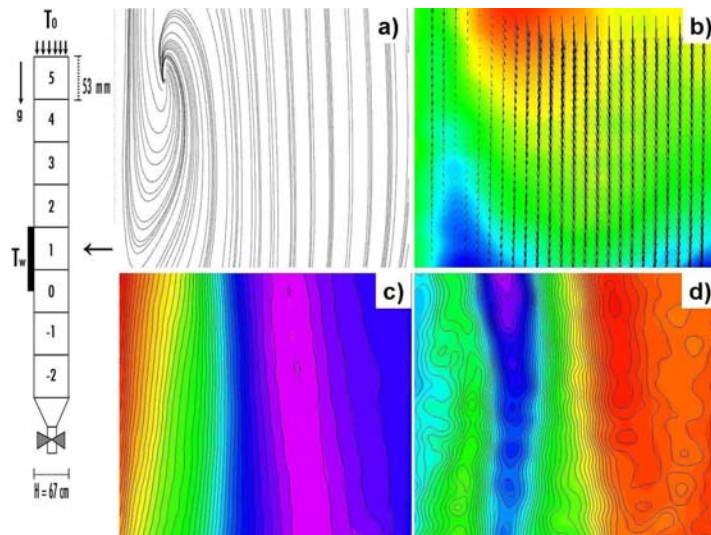


Figura 6.10: Valores promedio para  $Re = 300$  y  $Ri = 13.2$  ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

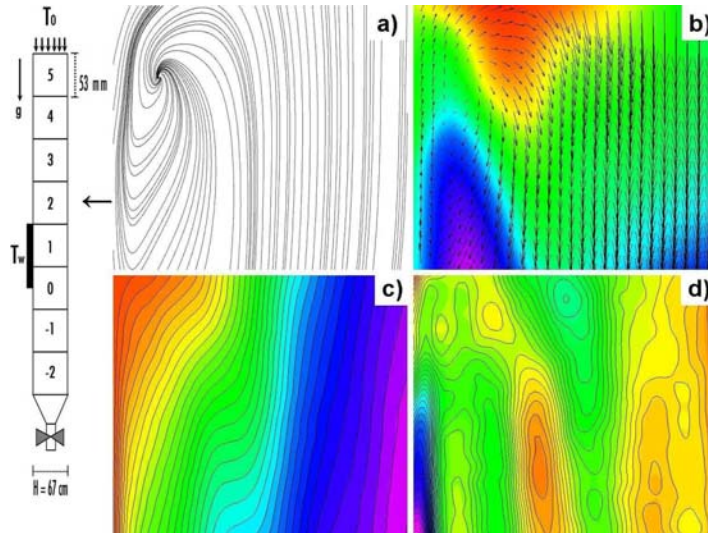


Figura 6.11: Valores promedio para  $Re = 300$  y  $Ri = 27.4$  ( $Gr = 2.466 \cdot 10^6$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

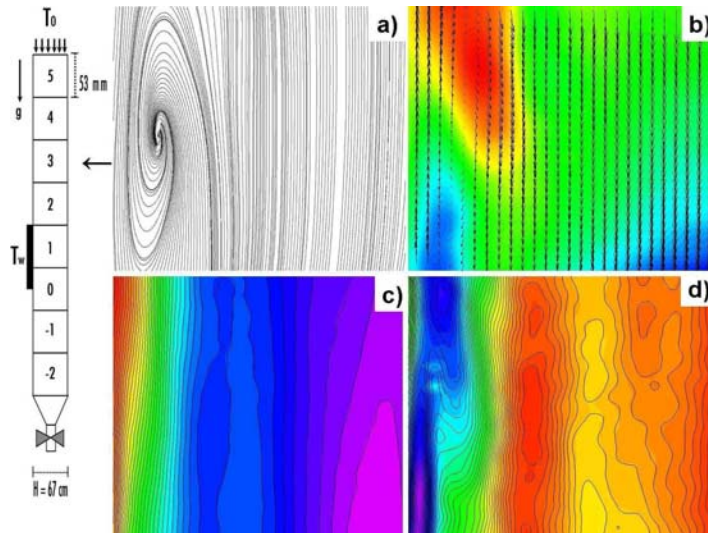


Figura 6.12: Valores promedio para  $Re = 300$  y  $Ri = 42.7$  ( $Gr = 3.843 \cdot 10^6$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

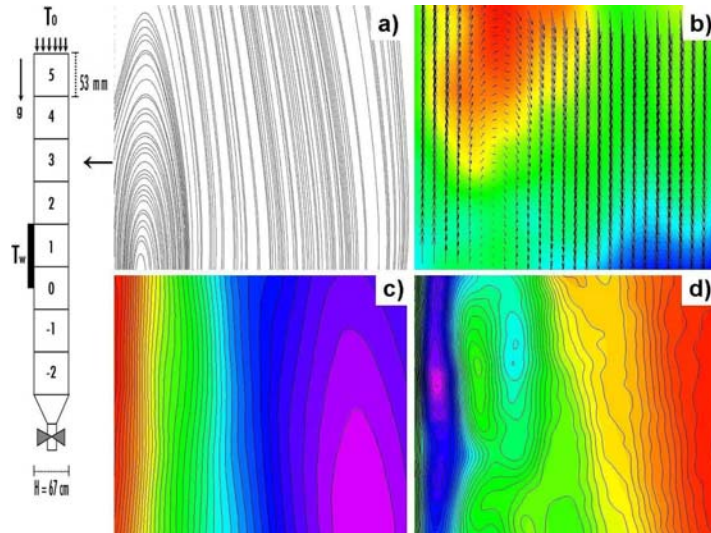


Figura 6.13: Valores promedio para  $Re = 500$  y  $Ri = 27.4$  ( $Gr = 6.85 \cdot 10^6$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

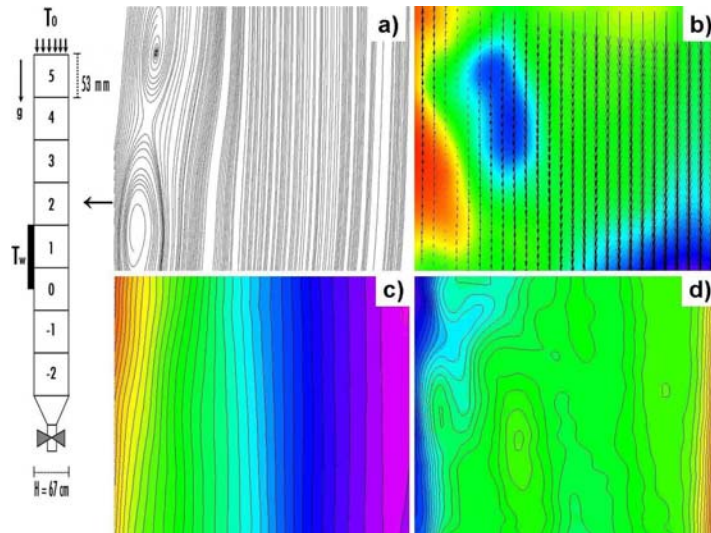


Figura 6.14: Valores promedio para  $Re = 700$  y  $Ri = 27.4$  ( $Gr = 13.426 \cdot 10^6$ )  
 a) líneas de corriente, b) componente de velocidad transversal y vectores en 2D, c) velocidad longitudinal, d) vorticidad

En la Figura 6.15 se muestra la estructura del vórtice resultante cuando se unen las imágenes promedio para múltiples regiones del canal. Cabe mencionarse que las imágenes empalmadas fueron obtenidas en tiempos diferentes para un número de Reynolds de 300 y para dos diferentes valores del número de Richardson,  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ) y  $13.2$  ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ). Las dimensiones promedio del vórtice aumentan conforme se incrementa la flotación. La Figura 6.16 presenta el mismo comportamiento para un número de Reynolds mayor,  $Re = 500$  con  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 1.625 \cdot 10^5$ ) y  $42.7$  ( $Gr = 10.675 \cdot 10^5$ ). Nuevamente, las dimensiones promedio del vórtice incrementan conforme aumenta el número de Reynolds para un valor fijo del número de Richardson.

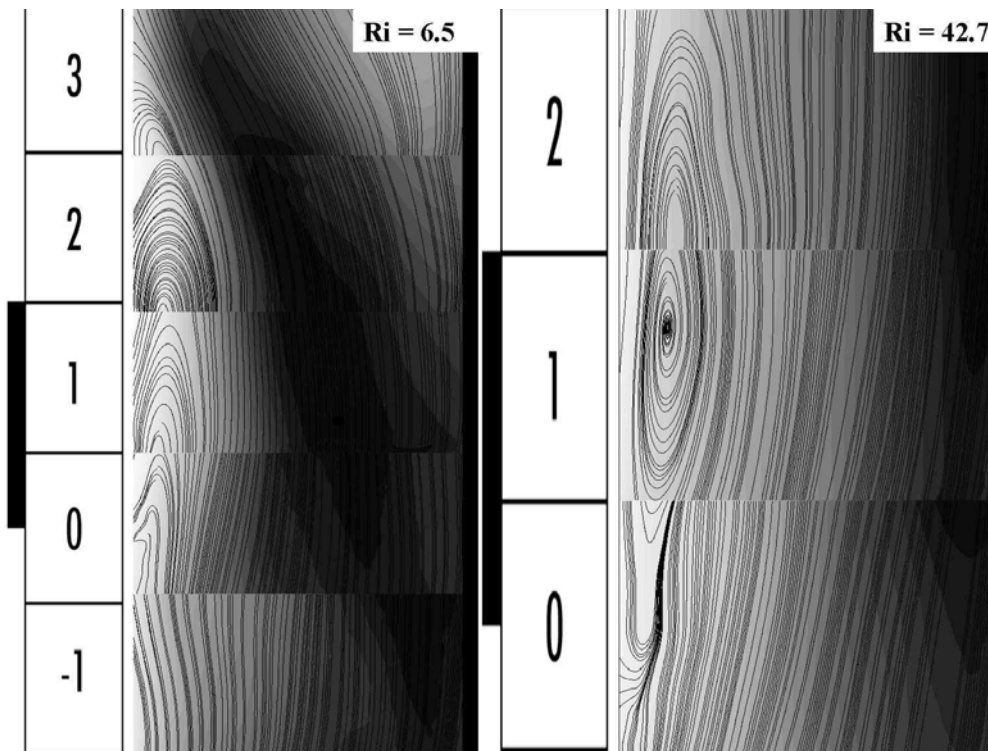


Figura 6.15: Líneas de corriente y velocidad longitudinal promedio para  $Re = 300$  con  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 5.85 \cdot 10^5$ ) y  $Ri = 13.2$  ( $Gr = 1.188 \cdot 10^6$ ).

Como resumen, la Figura 6.17 muestra la longitud y el ancho promedio del vórtice relacionado con el ancho del canal  $H$  como una función del número de Grashof (a y c) y del número de Richardson (b y d) para tres diferentes



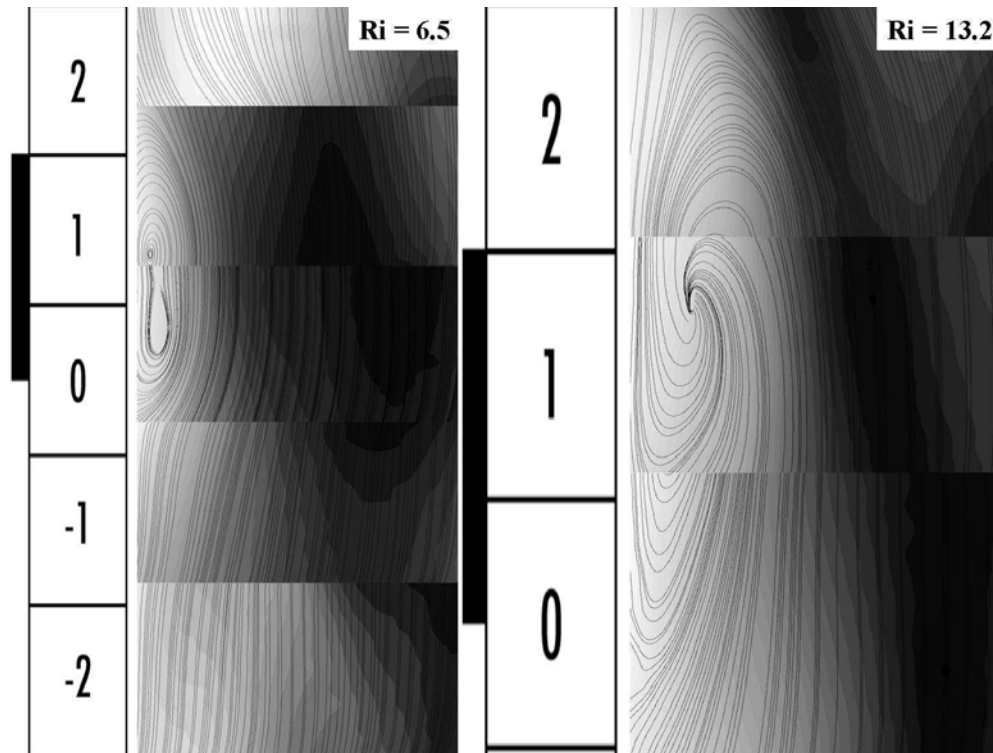


Figura 6.16: Líneas de corriente y velocidad longitudinal promedio para  $Re = 500$  con  $Ri = 6.5$  ( $Gr = 1.625 \cdot 10^6$ ) y  $Ri = 42.7$  ( $Gr = 10.675 \cdot 10^6$ ).

valores del número de Reynolds. Cabe mencionarse que cuando existen múltiples vórtices en la estructura del flujo, la longitud promedio corresponde al total de la longitud abarcada por todos los vórtices presentes. La longitud total siempre aumenta conforme incrementan los valores de los números de Grashof y de Richardson para el rango de valores del número de Reynolds considerado. Para un valor dado del número de Grashof, las dimensiones del vórtice siempre disminuyen conforme se incrementa el valor del número de Reynolds (ver Figs. 6.17a y 6.17c). Sin embargo, la Figura 6.17b muestra que la longitud del vórtice para un valor dado del número de Richardson primero aumenta conforme incrementa el número de Reynolds de 300 a 500 y después disminuye conforme el número de Reynolds se incrementa de 500 a 700. Para un valor dado del número de Richardson, la estructura del vórtice se vuelve más delgada a medida que incrementa el número de Reynolds. La

Figura 6.17 corrobora que las dimensiones promedio del vórtice se representan mejor empleando a los números de Grashof y Reynolds como parámetros independientes.

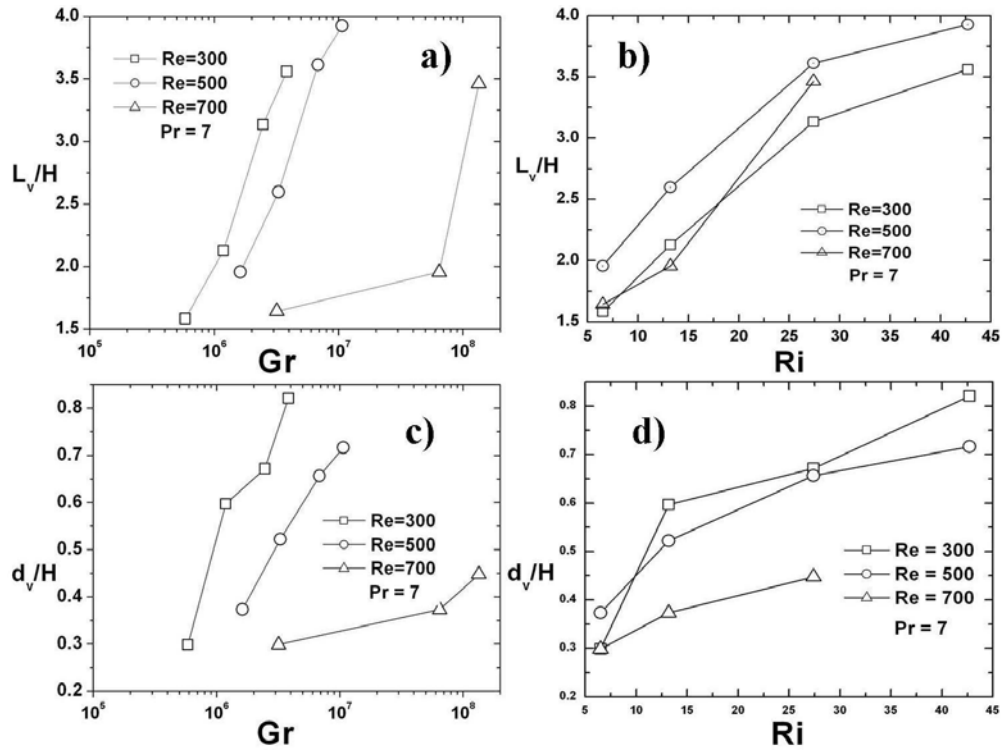


Figura 6.17: Longitud y ancho adimensional del vórtice como una función de los números de Grashof (a,c) y Richardson (b,d) para cuatro diferentes valores del número de Reynolds.

# Capítulo 7

## Comparación de resultados

En este trabajo se realizaron simulaciones numéricas para el proceso transitorio, cubriendo el tramo inicial hasta 300 veces el tiempo de residencia,  $H/u_0$  y complementariamente se hicieron mediciones para flujos ya estacionarios (muy alejados del proceso inicial). En la parte numérica se obtuvieron tanto soluciones estables, a las que se llegó después de un transitorio con oscilaciones de baja frecuencia debido principalmente al movimiento del vórtice hacia arriba, como soluciones inestables, dependiendo del número de Richardson. En la parte experimental sólo se obtuvieron respuestas oscilatorias, aunque ya muy alejadas del transitorio inicial estudiado numéricamente. Lo común en ambos casos es que se obtuvieron tiempos característicos de oscilación del flujo muy parecidos y que resultaron ser casi independientes del número de Richardson (Grashof), del orden de 2 veces el tiempo de residencia. Sin embargo, partiendo de los resultados obtenidos con las simulaciones numéricas y con las mediciones experimentales, se pudo corroborar la existencia de los siguientes puntos en común entre ambos casos:

- a) Se origina una recirculación que gira en sentido horario y que se ubica a la misma altura que la placa caliente. Cuando aumenta la fuerza de flotación, el vórtice principal se desplaza hacia la parte superior del canal, localizándose en regiones que se encuentran arriba de la placa caliente.
- b) Conforme aumenta el valor del parámetro de flotación, el vórtice se desplaza hacia la parte superior del canal presentando oscilaciones longitudinales.

- c) Existe un punto de estancamiento localizado en la parte superior del vórtice principal, el cual puede ser fijo ó móvil dependiendo del valor del número de Reynolds y del valor del número de Richardson (Grashof).
- d) Los perfiles de velocidad presentan comportamientos similares. Ambos son asimétricos, presentan oscilaciones longitudinales y transversales, cuentan con puntos de estancamiento y aumentan su complejidad cuando se incrementa el valor del número de Richardson (Grashof).
- e) Conforme incrementa el valor del parámetro de flotación, el número de vórtices presentes va aumentando hasta llegar a cuatro vórtices interactuando y apareándose. La frecuencia con la que éstos se aparean aumenta conforme se incrementa el valor del número de Richardson (Grashof).
- f) Un incremento en el valor del número de Reynolds provoca que las oscilaciones transversales que se presentan en la parte inferior del vórtice principal sean más pronunciadas. Aunque las dimensiones del vórtice principal se reducen, el tamaño total de la recirculación aumenta debido a la aparición de más vórtices.
- g) Los perfiles de velocidad longitudinal ilustran el fenómeno de reversión del flujo cuando la flotación se opone al flujo forzado. En ambos casos, conforme aumenta el valor del número de Reynolds, la reversión del flujo se vuelve mucho más sensible a la fuerza de flotación.
- h) Se comprobó la existencia de un valor crítico del número de Richardson (Grashof) para cada valor del número de Reynolds. Conforme incrementa la velocidad del flujo forzado, el valor crítico del parámetro de flotación se reduce.
- i) La frecuencia de las oscilaciones es proporcional al valor del número de Reynolds y al valor del número de Richardson (Grashof).

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo de investigación se estudió el problema de convección mixta para un flujo opuesto que se encuentra confinado dentro de un canal vertical con sección transversal cuadrada y que está sujeto a un calentamiento diferencial asimétrico. El problema se abordó empleando métodos numéricos y realizando mediciones experimentales.

Los resultados obtenidos con la solución numérica permitieron identificar la existencia de dos regímenes de transferencia de calor en la placa, demostrándose que la transición de régimen permanente a régimen transitorio ocurre cuando el parámetro de flotación rebasa un valor crítico. Los resultados muestran que no existe un valor crítico único del número de Richardson (Grashof), sino que éste está en función del valor del número de Reynolds. El valor crítico del parámetro de flotación es inversamente proporcional al valor del número de Reynolds, ya que conforme se incrementa la velocidad del flujo forzado, el valor crítico del número de Richardson (Grashof) disminuye. En general, para un valor dado del número de Reynolds, el valor del número de Nusselt promedio en la placa incrementa conforme aumenta el valor del parámetro de flotación. Se mostró la forma en que los parámetros que caracterizan el flujo influyen en las dimensiones, la localización, el movimiento y la frecuencia de oscilación de él ó los vórtices que se generan en las cercanías de la placa, a la vez que se reportó su influencia en la razón de transferencia de calor en la placa.

El problema se abordó experimentalmente empleando velocimetría de partículas por imágenes (PIV). El estudio se hizo para un rango del número de Reynolds (300 a 700) en combinación con diversos valores del número de Richardson (6 - 42) y número de Grashof ( $10^6$  -  $10^8$ ), determinandose la

forma en la que estos parámetros influyen en la estructura del flujo dentro del canal. Los efectos de la flotación son mayores cercanos a las superficies calientes, generando un flujo ascendente que se opone al flujo forzado que cuenta con una temperatura menor. Para los valores de los parámetros empleados en los experimentos, las condiciones de flujo son altamente inestables y trajeron como consecuencia que la estructura del flujo resultante genere uno ó varios vórtices que siempre permanecen en estado transitorio. Para grandes valores del número de Reynolds, se demostró la existencia de dos ó tres vórtices que se aparean formando una estructura de flujo súmamente compleja. Se obtuvieron mediciones de velocidad instantánea para intervalos de 45 segundos empleando la técnica de PIV. Se detectaron oscilaciones del flujo obteniendo el centroide del flujo másico como una función del tiempo para la región que se encuentra encima de la placa caliente. La frecuencia de oscilación adimensional o número de Strouhal fue obtenida empleando la transformada de Fourier del centroide del flujo másico. La máxima amplitud de la transformada de Fourier ocurre para valores del número de Strouhal cercanos al corte en infrarojo de orden unidad, indicando que el tiempo de oscilación es casi igual al doble del tiempo de residencia (tiempo necesario para que el fluido con velocidad de entrada  $u_0$  atraviese una distancia  $H$ ). Empleando los campos de velocidad instantánea, se obtuvieron campos de velocidad promedio y las dimensiones promedio de las estructuras vorticales para diferentes valores del número de Reynolds y del número de Grashof. Para un valor dado del número de Grashof, el vórtice reduce su longitud y su ancho conforme aumenta el número de Reynolds, mientras que para un valor dado del número de Reynolds, la estructura del vórtice se vuelve más larga y más ancha conforme se incrementa el valor del número de Grashof (Richardson). Los resultados demuestran que la forma adecuada para representar este fenómeno se obtienen cuando se emplean como parámetros independientes al número de Reynolds y al número de Grashof.

# Referencias

- [1] W. Aung, G. Worku, Developing flow and flow reversal in a vertical channel with asymmetric wall temperatures, *ASME Journal of Heat Transfer* 108 (1986) 299–304.
- [2] W. Aung, G. Worku, Mixed convection in ducts with asymmetric wall heat fluxes, *ASME Journal of Heat Transfer* 109 (1987) 947–951.
- [3] S. Habchi, S. Acharya, Laminar mixed convection in a partially blocked, vertical channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* 29 (1986) 1711–1722.
- [4] D. Ingham, D. Keen, P. Heggs, Flows in vertical channels with asymmetric wall temperatures and including situations where reverse flows occur, *ASME Journal of Heat Transfer* 110 (1988) 910–917.
- [5] D. Elpidorou, V. Prasad, V. Modi, Convection in a vertical channel with a finite wall heat source, *Int. Journal Heat Mass* 34 (1991) 573–578.
- [6] T. Lin, C. P. Yin, W. M. Yan, Transient laminar mixed convective heat transfer in a vertical flat duct, *ASME Journal of Heat Transfer* 113 (1991) 384–390.
- [7] T.-F. Lin, T.-S. Chang, Y.-F. Chen, Development of oscillatory asymmetric recirculating flow in transient laminar opposing mixed convection in a symmetrically heated vertical channel, *ASME Journal of Heat Transfer* 115 (1993) 342–352.
- [8] T.-S. Chang, T.-F. Lin, Steady and oscillatory opposing mixed convection in a symmetrically heated vertical channel with a low-prandtl number fluid, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 36 (1993) 3783–3795.

- [9] G. Evans, R. Greif, Buoyant instabilities in downward flow in a symmetrically heated vertical channel, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 40 (1997) 2419–2430.
- [10] M. Ali, F. Al-Yousef, Laminar mixed convection from a continuously moving vertical surface with suction or injection, *ASME Heat and Mass Transfer* 33 (1998) 301–306.
- [11] A. Ozsunar, S. Baskaya, M. Sivrioglu, Numerical analysis of grashof number, reynolds number and inclination effects on mixed convection heat transfer in rectangular channels, *Int. Comm. Heat Mass* 28 (2001) 985–994.
- [12] W.-M. Yan, H.-Y. Li, Radiation effects on mixed convection heat transfer in a vertical square duct, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 44 (2001) 1401–1410.
- [13] M. S. El-Din, Effect of thermal and mass buoyancy forces on the development of laminar mixed convection between vertical parallel plates with uniform wall heat and mass fluxes, *Int. Journal of Thermal Sciences* 42 (2003) 447–453.
- [14] C. G. Rao, C. Balali, S. Venkateshan, Effect of surface radiation on conjugate mixed convection in a vertical channel with a discrete heat source in each wall, *Int. Journal* 45 (2002) 3331–3347.
- [15] C.-H. Cheng, S.-Y. Huang, W. Aung, Numerical predictions of mixed convection and flow separation in a vertical duct with arbitrary cross section, *Numerical Heat Transfer, Part A* 41 (2002) 491–514.
- [16] J.-H. Jang, W.-M. Yan, Mixed convection heat and mass transfer along a vertical wavy surface, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 47 (2004) 419–428.
- [17] A. Barletta, E. R. di Schio, E. Zanchini, Combined forced and free flow in a vertical rectangular duct with prescribed heat flux, *Int. Journal of Heat and Fluid Flow* 24 (2003) 874–887.
- [18] L. S. Yao, Free and forced convection in the entry region of a heated vertical channel, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 26 (1983) 65–72.



- [19] W. Aung, G. Worku, Theory of fully developed, combined convection including flow reversal, *ASME Journal of Heat Transfer* 108 (1986) 485–488.
- [20] T. Hamadah, R. Wirtz, Analysis of laminar fully developed mixed convection in a vertical channel with opposing buoyancy, *ASME Journal of Heat Transfer* 113 (1991) 507–510.
- [21] Y.-C. Chen, J. Chung, Stability of mixed convection in a differentially heated vertical channel, *ASME Journal of Heat Transfer* 120 (1998) 127–132.
- [22] A. Barletta, E. Zanchini, On the choice of the reference temperature for fully-developed mixed convection in a vertical channel, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 42 (1999) 3169–3181.
- [23] A. Barletta, Analysis of flow reversal for laminar mixed convection in a vertical rectangular duct with one or more isothermal walls, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 44 (2001) 3481–3497.
- [24] A. Barletta, E. Zanchini, Mixed convection with viscous dissipation in an inclined channel with prescribed wall temperatures, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 44 (2001) 4267–4275.
- [25] A. Barletta, Fully developed mixed convection and flow reversal in a vertical rectangular duct with uniform wall heat flux, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 45 (2002) 641–654.
- [26] X. Zhang, S. Dutta, Heat transfer analysis of buoyancy-assisted mixed convection with asymmetric heating conditions, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 41 (1988) 3255–3264.
- [27] S. Kimura, A. Okajima, T. Kiwata, Conjugate natural convection from a vertical heated slab, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 41 (1998) 3203–3211.
- [28] H. Abu-Mulaweh, Measurements of laminar mixed convection flow adjacent to an inclined surface with uniform wall heat flux, *Int. Journal of Thermal Sciences* 4 (2) (2003) 57–62.

## REFERENCIAS

- [29] C. Gau, T. Huang, W. Aung, Flow and mixed convection heat transfer in a divergent heated vertical channel, *ASME Journal of Heat Transfer* 118 (1996) 606–615.
- [30] D. Anderson, J. Tannehill, R. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis, New York, 1984.
- [31] A. Medina, J.A. Córdova, E. Luna, C. Treviño, Velocity field measurements in the granular gravity flow in a near 2d silo, *Phys. Lett. A.* 250 No.1/3 (198) 111–116.
- [32] M. Raffel, C. Willert, J. Kompenhansa, *Particle image velocimetry, a practical guide*, Springer, New York, 1988.
- [33] R. Moffat, Describing the uncertainties in experimental results, *Exp. Therm. Fluids Sci.* 1 (1988) 3–17.
- [34] E. M. Sparrow, G. Chrysler, L. Azevedo, Observed flow reversals and measured-predicted nusselt numbers for natural convection in a one sided heated vertical channel, *Journal Heat Mass Transfer*.
- [35] J. Watson, N. Anand, L. Fletcher, Mixed convective heat transfer between a series of vertical parallel plates with planar heat sources, *J. Heat Mass Transfer* 118 (1996) 984–990.
- [36] J.-C. Han, Y.-M. Zhang, K. Kalkuehler, Uneven wall temperature effect on local heat transfer in a rotating two-pass square channel with smooth walls, *J. Heat Mass Transfer* 115 (1993) 912–920.
- [37] P. L. Y.L. Wang, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *A.I.Ch.E. Journal* 10 (1964) 323–329.
- [38] C.-H. Cheng, C.-J. Weng, W. Aung, Buoyancy-assisted flow reversal and convective heat transfer in the entrance region of a vertical rectangular duct, *Int. Journal Heat and Fluid Flow* 21 (2000) 403–411.
- [39] W.-M. Yan, H.-Y. Li, Radiation effects on mixed convection heat transfer in a vertical square duct, *Int. Journal Heat Mass Transfer* 44 (2001) 1401–1410.

- [40] S. Mahmud, R. Fraser, Analysis of mixed convection-radiation interaction in a vertical channel: Entropy generation, Exergy, *an International Journal* 2 (2002) 330–339.
- [41] C. Nonino, S. D. Guidice, Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 13 (1991) 33–48.
- [42] J. Aparecido, R. Cotta, Thermally developing laminar flow inside rectangular channels, *Int. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 341–347.
- [43] G. McBain, Fully developed laminar buoyant flow in vertical cavities and ducts of bounded section, *J. Fluid Mechanics* 401 (1999) 365–377.
- [44] A. Barletta, E. Zanchini, Time-periodic laminar mixed convection in an inclined channel, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 551–563.
- [45] D. Anigrasa, Interaction of low-velocity plane jets with buoyant convection adjacent to heated vertical surfaces, *Numerical Heat Transfer, Part A* 35 (1999) 67–84.
- [46] E. Sparrow, J. Gregg, Buoyant effects in forced convection flow and heat transfer, *J. Appl. Mech.* 26 (1959) 133–134.
- [47] A. Szewczyk, Combined forced and free convection laminar flow, *ASME Journal Heat Transfer* 86 (1964) 501–507.
- [48] J. Merkin, The effect of buoyancy forces on the boundary-layer flow over a semi-infinite vertical flat plate in a uniform free stream, *J. Fluid Mech.* 35 (1969) 439–450.
- [49] J. Lloyd, E. Sparrow, Combined forced and free convection flow on vertical surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer* 13 (1970) 434–438.
- [50] J. Merkin, I. Pop, Mixed convection along a vertical surface: similarity solutions for uniform flow, *Fluid Dynamics Research* 30 (2002) 233–250.
- [51] C. Odouza, A. Wragg, M. Patrick, Mixed convection mass transfer studies of opposing and aiding flow in a parallel plate electrochemical flow cell, *Journal of applied electrochemistry* 28 (1998) 697–702.

- [52] A. Brandtl, J. Gillis, Magnetohydrodynamic flow in the inlet region of a straight channel, *The Physics of Fluids* 9 (1966) 690–699.
- [53] R. Sadri, J. Florynan, Entry flow in a channel, *Computers & Fluids* 31 (2002) 133–157.
- [54] H. Morihara, R. Cheng, Numerical solution of viscous flow in the entrance region of parallel plates, *J. Comput. Phys.* 11 (1973) 550–572.
- [55] S. McComas, Hydrodynamic entrance length for ducts of arbitrary cross section, *ASME J. Basic Engineering* 89 (1967) 847–850.
- [56] M. V. Dyke, Entry flow in a channel, *J. Fluid Mechanics* 44 (1970) 813–823.
- [57] S. Wilson, Entry flow in a channel, part 2, *J. Fluid Mechanics* 46 (1971) 787–799.
- [58] A. Kapila, G. Ludford, V. Olunloyo, Entry flow in a channel, part 3: inlet in a uniform stream, *J. Fluid Mechanics* 57 (1973) 787–799.
- [59] Y. Wang, P. Longwell, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *J. Am. Inst. Chem. Engrs.* 10 (1964) 323–329.
- [60] Z. Fang, A. Saber, Marching control volume finite-element calculation for developing entrance flow, *AIAA J.* 25 (1987) 346–348.
- [61] R. Chilikuri, R. Pletcher, Numerical solutions to the parabolized navier stokes equations for developing flow in a channel, *Numerical Heat Transfer* 3 (1980) 169–188.
- [62] T. Narang, G. Krishnamoorthy, Laminar flow in the entrance region of parallel plates, *J. Appl. Mech.* 43 (1976) 186–188.
- [63] E. Sparrow, C. Hixon, G. Shavit, Experiments on laminar flow development in rectangular ducts, *ASME J. Basic. Engng.* 89 (1967) 116–124.
- [64] S. Brown, N. Riley, Flow past a suddenly heated vertical plate, *J. Fluid Mechanics* 59 (1973) 225–237.
- [65] D. Inham, Flow past a suddenly heated vertical plate, *Proc. R. Soc.* 402A (1985) 109–134.

- [66] J. R. Stocker, P. Duck, Stationary perturbations of couette-poiseuille flow: the flow development in long cavities and channels, *J. Fluid Mechanics* 292 (1995) 153–18.
- [67] H. Steinrück, About the physical relevance of similarity solutions of the boundary-layer flow equations describing mixed convection flow along a vertical plate, *Fluid Dynamics Research* 32 (2003) 1–13.
- [68] K.-T. Lee, Laminar natural convection heat and mass transfer in vertical rectangular ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (1999) 4523–4534.
- [69] T. Lee, P. Parikh, A. Acrivosand, D. Bershadar, Natural convection in a vertical channel with opposing buoyancy forces, *Int. J. Heat Mass Transfer* 25 (1982) 499–511.
- [70] D. Nelson, B. Wood, Combined heat and mass transfer natural convection between vertical parallel plates, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 1779–1787.
- [71] D. Nelson, B. Wood, Combined heat and mass transfer natural convection between vertical parallel plates with uniform flow boundary conditions, *Heat and Mass Transfer* 4 (1986) 1587–1592.
- [72] D. Nelson, B. Wood, Fully developed combined heat and mass transfer natural convection between vertical parallel plates with asymmetric boundary conditions, *Int. J. Heat Mass Transfer* 32 (1989) 1789–1792.
- [73] K. Ramakrishna, S. Rubin, P. Khosla, Laminar natural convection along vertical square ducts, *Numerical Heat Transfer* 5 (1982) 59–79.
- [74] O. Aydin, A. Unal, T. Ayhan, Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (1999) 2345–2355.
- [75] H. F. Oztop, I. Dagtekin, Mixed convection in two-sided lid-driven differentially heated square cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 1761–1769.
- [76] A. Andreozzi, O. Manca, Natural convection in vertical channels with an auxiliary plate, *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow* 12 (2002) 716–734.

- [77] N. O. Moraga, S. Vega, Unsteady three-dimensional natural convection of water cooled inside a cubic enclosure, *Numerical Heat Transfer, Part A* 45 (2004) 825–839.
- [78] O. Aydin, Aiding and opposing mechanisms of mixed convection in a shear and buoyancy-driven cavity, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 26 (1999) 1019–1028.
- [79] A. Gill, The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity, *ASME J. Fluid Mechanics* 26 (1966) 515–536.
- [80] J. Wilkes, S. Churchill, The finite-difference computation of natural convection in a rectangular enclosure, *A.I.Ch.E. Journal* 12 (1966) 161–166.
- [81] K. Kubbleck, C. Merker, J. Straub, Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities, *Int. J. Heat Mass Transfer* 23 (1980) 203–217.
- [82] O. Manca, S. Nardini, Effect of heated wall position on mixed convection in a channel with an open cavity, *Numerical Heat Transfer*, 43 (2003) 259–282.
- [83] G. Jones, J. Cai, Analysis of a transient asymmetrically heated/cooled open thermosyphon, *ASME J. Heat Transfer* 115 (1993) 621–630.
- [84] A. Dehghan, M. Behnia, Combined natural convection-conduction and radiation heat transfer in a discretely heated open cavity, *ASME J. Heat Transfer* 118 (1996) 56–64.
- [85] P. Oosthuizen, J. Paul, Mixed convective heat transfer in a cavity, *ASME-HTD* 42 (1985) 159–169.
- [86] K. Vafai, J. Eftefagh, Thermal and fluid flow instabilities in buoyancy-driven flows in open-ended cavities, *Int. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 2329–2344.
- [87] K. Khanafer, K. Vafai, Buoyancy-driven flow and heat transfer in open-ended enclosures: elimination of the extended boundaries, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2003) 4087–4100.

- [88] E. Papanicolau, Y. Jaluria, Mixed convection from a localized heat source in a cavity with conducting walls: a numerical study, *Numerical Heat Transfer, Part A* 23 (1993) 463–484.
- [89] T. Hsu, S. Wang, Mixed convection in a rectangular enclosure with discrete heat sources, *Numerical Heat Transfer, Part A* 38 (2000) 627–652.
- [90] H.-S. Chu, S. Churchill, C. Patterson, The effect of heater size, location, aspect ratio, and boundary conditions on two-dimensional, laminar, natural convection in channels, *ASME Journal of Heat Transfer* 98 (1976) 1194–1201.
- [91] M. November, M. Nansteel, Natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled along one side, *Int. Journal of Heat Transfer* 30 (1987) 2433–2440.
- [92] C. Bender, S. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*, Mc. Graw Hill, New York, 1978.

# Apéndice A

## Adimensionalización de las ecuaciones

En este apéndice se deduce la aproximación de Boussinesq para posteriormente adimensionalizar la ecuación de continuidad, las dos ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal y transversal y la ecuación de la energía.

Partiendo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad (\text{A.1})$$

empleando la aproximación de Boussinesq

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad (\text{A.2})$$

si

$$p^*(x) = p(x) + \rho_0 g \quad (\text{A.3})$$

entonces

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 g - \rho g \quad (\text{A.4})$$

de (A.2)

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 - \rho_0 \beta (T - T_0) \\ \rho_0 - \rho &= \rho_0 \beta (T - T_0) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



sustituyendo (A.5) en (A.4)

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (\rho_0 - \rho)g \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo (A.6) en (A.1)

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0 \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho_0 g \beta (T - T_0)$$

por lo que la ecuación de continuidad, momentum en dirección longitudinal y transversal y energía, respectivamente, son

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \beta (T - T_0) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho_0 C_p} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

empleando las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{H}, & Y &= \frac{y}{H}, & U &= \frac{u}{u_0}, & V &= \frac{v}{u_0} \\ P &= \frac{p}{\rho_0 u_0^2}, & \theta &= \frac{(T - T_0)}{(T_W - T_0)}, & \tau &= \frac{t u_0}{H} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\frac{u_0}{H} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{u_0}{H} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

sustituyendo las variables adimensionales (A.11) en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección longitudinal

$$\frac{\rho_0 u_0^2}{t H} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) + \frac{\rho_0 u_0^2}{H} \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) =$$

$$= -\frac{\rho_0 u_0^2}{H} \frac{\partial P}{\partial X} + \mu \frac{u_0}{H^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \rho_0 g \beta (T_W - T_0) \theta$$

multiplicando la ecuación anterior por  $H/\rho_0 u_0^2$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\nu}{u_0 H} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{g \beta (T_W - T_0) H}{u_0^2} \theta \quad (\text{A.12})$$

como

$$\text{Re} = \frac{u_0 H}{\nu}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta (T_W - T_0) H^3}{\nu^2} \quad (\text{A.13})$$

sustituyendo (A.13) en (A.12)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \theta$$

de forma similar, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en dirección transversal queda como

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right)$$

Para la ecuación de la energía

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \frac{u_0 (T_W - T_0) + T_0}{H \tau} \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) + \rho_0 C_p \frac{u_0 (T_W - T_0) + T_0}{H} \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) &= \\ \frac{k (T_W - T_0) + T_0}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned}$$

como  $\alpha = k/\rho C_p$

$$\begin{aligned} \frac{u_0 (T_W - T_0) + T_0}{H \tau} \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) + \frac{u_0 (T_W - T_0) + T_0}{H} \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) &= \\ \alpha \frac{(T_W - T_0) + T_0}{H^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned}$$

multiplicando todo por  $H/u_0(T_W - T_0) + T_0$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\alpha}{u_0 H} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

como

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \\ \text{Pe} &= \text{Pr Re} = \frac{\nu u_0 H}{\alpha \nu} = \frac{u_0 H}{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

sustituyendo (A.15) en (A.14)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

Por lo que las ecuaciones adimensionales de continuidad, conservación de cantidad de movimiento en dirección longitudinal y transversal junto con la ecuación de energía son, respectivamente

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

## Apéndice B

### Formulación vorticidad-función de corriente

En este apéndice se deduce la transformación de las ecuaciones adimensionales a la formulación vorticidad-función de corriente. Las ecuaciones adimensionales de continuidad, cantidad de movimiento en dirección longitudinal y transversal junto con la ecuación de conservación de energía, respectivamente, son

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + Ri\theta \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{B.4})$$

de la definición de función de corriente

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo (B.5) en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo (B.5) en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección longitudinal

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + Ri\theta \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) &= \\ -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \right] + Ri\theta & \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right] + Ri\theta \quad (\text{B.6})\end{aligned}$$

Sustituyendo (B.5) en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en dirección transversal

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) \frac{\partial}{\partial X} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \frac{\partial}{\partial Y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) &= \\ -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \right] & \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} \right) \quad (\text{B.7})\end{aligned}$$

Derivando (B.6) respecto a  $Y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Y} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right) + Ri\theta \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} &= \quad (\text{B.8})\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 Y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y}$$

Derivando (B.7) respecto a  $X$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau X} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} \right) \right] \\ - \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} = \quad (\text{B.9}) \\ - \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right) \end{aligned}$$

Restando (B.8) a (B.9)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau X^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 Y^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \end{aligned}$$

la ecuación resultante es

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau X^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial \tau Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} - 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

factorizando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right) = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( -\frac{\partial^4 \psi}{\partial X^4} - 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \end{aligned}$$

acomodando términos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial X} \left[ \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] = \\ \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

sea

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (\text{B.12})$$

sustituyendo (B.12) en (B.11)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] + \frac{\partial \psi}{\partial X} \left[ \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] = \\ & \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right) \right] - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ & \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Las ecuaciones adimensionales transformadas a la formulación vorticidad función de corriente son

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \\ & \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) - Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned}$$

# Apéndice C

## Ecuaciones de la malla

En este Apéndice se deducen las ecuaciones que se utilizan para transformar la malla empleada en la solución numérica.

Compresión en  $X$  :

Una ecuación lineal que modela la capa límite en el origen y cuya solución tiene una pendiente pequeña fuera de la capa límite está dada por [92] (pág. 455)

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{d\varphi}{ds} - m = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño comparado con la unidad que corresponde al espesor de la capa límite y  $m$  es la pendiente fuera de la capa límite. Esta ecuación hay que resolverla con las condiciones de frontera

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(1) = 1. \quad (\text{C.2})$$

La solución de la ecuación (C.1) es

$$\varphi = ms + (1 - m) \frac{\text{erf}(s/\varepsilon)}{\text{erf}(1/\varepsilon)}. \quad (\text{C.3})$$

Sustituyendo  $\varphi$  por  $2\xi - 1$  y  $s$  por  $2X/(L_1 + L_2 + L_3) - 1$  se obtiene finalmente la solución en función de las variables apropiadas y está dada por

$$\xi(X) = \frac{1}{2} + m \left( \frac{X}{L_1 + L_2 + L_3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{(1 - m)}{2} \frac{\text{erf} \left[ k \left( \frac{X}{L_1 + L_2 + L_3} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\text{erf} [k/2]}, \quad (\text{C.4})$$



donde  $k = 2/\varepsilon$ .

Compresión en  $Y$  :

La ecuación que modela la compresión en la dirección transversal está tomada de la aparición de una capa límite en su frontera ( $s = 1$ ) y es [92] (pág. 435)

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = \varphi - ms \quad (\text{C.5})$$

donde  $\varepsilon$  es el espesor de la capa límite y es un parámetro pequeño comparado con la unidad y  $m$  es la pendiente fuera de la capa límite y es por lo tanto pequeña comparada con la unidad pero mayor que cero para que haya una resolución fuera de la capa límite. Esta ecuación está sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi(1) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La solución de la ecuación (C.5) es simplemente

$$\varphi = ms + (1 - m) \frac{\sinh(s/\varepsilon)}{\sinh(1/\varepsilon)}. \quad (\text{C.7})$$

Sustituyendo  $\varphi$  por  $2\eta - 1$  y  $s$  por  $2Y - 1$  se obtiene finalmente la solución en función de las variables apropiadas y está dada por

$$\eta(Y) = \frac{1}{2} + m \left( Y - \frac{1}{2} \right) + \frac{(1 - m) \sinh [k(Y - 1/2)]}{2 \sinh [k/2]}, \quad (\text{C.8})$$

donde  $k = 2/\varepsilon$  y debe ser grande comparada con la unidad.

# Apéndice D

## Método predictor-corrector

En este apéndice se presenta la discretización de las ecuaciones junto con la forma de iterar del método predictor-corrector, obteniéndose así los coeficientes de las matrices.

Partiendo de la ecuación de la vorticidad

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{D.1})$$

Discretizando y multiplicando por Re

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + \text{Re } u_{i,j}^n \left( \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + \text{Re } v_{i,j}^n \left( \frac{\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) = \\ & \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right) + Ri \text{Re} \left( \frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \end{aligned}$$

multiplicando (D.1) por  $\Delta t \Delta x^2$

$$\begin{aligned} & \Delta x^2 \left( \omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n \right) + \text{Re } u_{i,j}^n \Delta x \Delta t \left( \omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \text{Re } v_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t \left( \omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j-1}^{n+1/2} \right) = \\ & \Delta t \left( \omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \left( \omega_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \\ & \quad Ri \text{Re} \left( \frac{\Delta t \Delta x^2}{2\Delta y} \right) \left( \theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n \right) \end{aligned}$$

acomodando términos

$$\begin{aligned}
& -\omega_{i,j}^{n+1/2} \Delta x^2 - \operatorname{Re} u_{i,j}^n \Delta x \Delta t \left( \omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \right) - \operatorname{Re} v_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t \left( \omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j-1}^{n+1/2} \right) + \\
& \Delta t \left( \omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \left( \omega_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i,j-1}^{n+1/2} \right) = \\
& \quad -Ri \operatorname{Re} \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} \right) \left( \theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n \right) - \omega_{i,j}^n \Delta x^2
\end{aligned}$$

agrupando coeficientes

$$\begin{aligned}
a(k, k) & \longrightarrow i, j \longrightarrow -\Delta x^2 - \operatorname{Re} u_{i,j}^n \Delta x \Delta t - \operatorname{Re} v_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t - 2 \left( 1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \Delta t \\
a(k, k+1) & \longrightarrow i, j+1 \longrightarrow \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k-1) & \longrightarrow i, j-1 \longrightarrow \operatorname{Re} v_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t + \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k+nj) & \longrightarrow i+1, j \longrightarrow \Delta t \\
a(k, k-nj) & \longrightarrow i-1, j \longrightarrow \operatorname{Re} u_{i,j}^n \Delta x \Delta t + \Delta t \\
b(k) & \longrightarrow -Ri \operatorname{Re} \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{2\Delta y} \right) \left( \theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n \right) - \omega_{i,j}^n \Delta x^2
\end{aligned} \tag{D.2}$$

obteniéndose así el valor de  $\omega_{i,j}^{n+1/2}$  que será empleado en la ecuación de la función de corriente.

Partiendo de la ecuación de la función de corriente

$$-\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{D.3}$$

discretizando

$$-\omega_{i,j}^{n+1/2} = \left( \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right) \tag{D.4}$$

multiplicando (D.4) por  $\Delta x^2$

$$-\omega_{i,j}^{n+1/2} \Delta x^2 = \left( \psi_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \left( \psi_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i,j-1}^{n+1/2} \right)$$

agrupando coeficientes

$$\begin{aligned}
a(k, k) &\longrightarrow i, j \longrightarrow -2 \left( 1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k+1) &\longrightarrow i, j+1 \longrightarrow \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k-1) &\longrightarrow i, j-1 \longrightarrow \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k+nj) &\longrightarrow i+1, j \longrightarrow 1 \\
a(k, k-nj) &\longrightarrow i-1, j \longrightarrow 1 \\
b(k) &\longrightarrow -\omega_{i,j}^{n+1/2} \Delta x^2
\end{aligned} \tag{D.5}$$

obteniéndose los valores de las variables  $u_{i,j}^{n+1/2}$  y  $v_{i,j}^{n+1/2}$

Empleando la ecuación de la energía

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \tag{D.6}$$

Discretizando

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \left( \frac{\theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left( \frac{\theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) = \\
&\frac{1}{Pe} \left( \frac{\theta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{Pe} \left( \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned}$$

acomodando términos y multiplicando la ecuación anterior por  $Pe\Delta t (\Delta x^2)$

$$\begin{aligned}
&-\theta_{i,j}^{n+1/2} \Delta x^2 - Pe u_{i,j}^n \Delta x \Delta t \left( \theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i-1,j}^{n+1/2} \right) - Pe v_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t \left( \theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2} \right) \\
&\Delta t \left( \theta_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i-1,j}^{n+1/2} \right) + \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \left( \theta_{i,j+1}^{n+1/2} - 2\theta_{i,j}^{n+1/2} + \theta_{i,j-1}^{n+1/2} \right) = -\theta_{i,j}^n \Delta x^2
\end{aligned}$$

acomodando términos

$$\begin{aligned}
a(k, k) &\longrightarrow i, j \longrightarrow -\Delta x^2 - Peu_{i,j}^n \Delta x \Delta t - Pev_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t - 2 \left( 1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \Delta t \\
a(k, k+1) &\longrightarrow i, j+1 \longrightarrow \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k-1) &\longrightarrow i, j-1 \longrightarrow -Peu_{i,j}^n \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t + \Delta t \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \\
a(k, k+nj) &\longrightarrow i+1, j \longrightarrow \Delta t \\
a(k, k-nj) &\longrightarrow i-1, j \longrightarrow -Peu_{i,j}^n \Delta x \Delta t + \Delta t \\
b(k) &\longrightarrow -\theta_{i,j}^n \Delta x^2
\end{aligned}$$

obteniéndose los valores de  $\theta_{i,j}^{n+1/2}$

Aplicando la corrección a los valores predecidos

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + \operatorname{Re} \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \\
&\quad + \operatorname{Re} \left( \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) \left( \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) = \\
&\quad \left( \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \\
&\quad + \frac{\operatorname{Re} Ri}{4} \left[ \left( \frac{\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right) + \left( \frac{\theta_{i,j+1}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \right]
\end{aligned}$$

acomodando términos y multiplicando por  $(\Delta x^2) \Delta t$

$$\begin{aligned}
& - (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n) \Delta x^2 - \operatorname{Re} \Delta x \Delta t \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) (\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) \\
& - \operatorname{Re} \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \Delta t \left( \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) (\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}) + (\omega_{i+1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1}) \Delta t \\
& \quad + \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) (\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}) \Delta t =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{\text{Re } Ri}{4} \left[ (\theta_{i,j}^n - \theta_{i,j-1}^n) + (\theta_{i,j}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}) \right] \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t$$

agrupando coeficientes

$$\begin{aligned} a(k, k) &\longrightarrow i, j \longrightarrow -\Delta x^2 \Delta t - \text{Re } \Delta x \Delta t \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) \\ &\quad - \text{Re } \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \Delta t \left( \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) - 2 \left( 1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \Delta t \\ a(k, k+1) &\longrightarrow i, j+1 \longrightarrow -\text{Re } \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \Delta t \left( \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) + \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \Delta t \\ a(k, k-1) &\longrightarrow i, j-1 \longrightarrow \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \right) \Delta t \\ a(k, k+nj) &\longrightarrow i+1, j \longrightarrow -\text{Re } \Delta x \Delta t \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1/2}}{2} \right) + \Delta t \\ a(k, k-nj) &\longrightarrow i-1, j \longrightarrow \Delta t \\ b(k) &\longrightarrow -\frac{\text{Re } Ri}{4} \left[ (\theta_{i,j+1}^n - \theta_{i,j-1}^n) + (\theta_{i,j+1}^{n+1/2} - \theta_{i,j-1}^{n+1/2}) \right] \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta y} \right) \Delta t - \omega_{i,j}^n \Delta x^2 \end{aligned}$$



# Apéndice E

## Cálculo de los valores del número de Richardson

En éste apéndice se obtienen los valores del número de Richardson correspondientes a una diferencia de temperatura entre el fluido y la placa de 0.5, 1, 2, y 3 grados para un número de Reynolds de 300. Posteriormente, se calcula la diferencia de temperatura entre el fluido y la placa para un número de Reynolds de 500 y 700 con los valores del número de Richardson obtenidos previamente. De esta manera, todos los experimentos son realizados con los mismos valores del parámetro de flotación para diversos valores del número de Reynolds para poderlos comparar entre sí.

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_0)H^3}{\nu^2} \quad (\text{E.1})$$

$$Re = \frac{UH}{\nu} \quad (\text{E.2})$$

$$Ri = Gr / Re^2 = \frac{g\beta\Delta TH}{U_0^2} \quad (\text{E.3})$$

$$Re = 300$$

Para  $\Delta T = 0.5 [K]$

Obteniendo la temperatura promedio ( $T_m$ ) entre la temperatura del fluido a la entrada del canal ( $T_0$ ) y la temperatura promedio de la placa ( $T$ )

$$T_m = \frac{T + T_0}{2} = \frac{27.5 + 28}{2} = 27.75 [^{\circ}C]$$



100 APÉNDICE E. CÁLCULO DE LOS VALORES DEL NÚMERO DE RICHARDSON

Con la temperatura promedio, de tablas se obtienen los valores del coeficiente de expansión volumétrica ( $\beta$ ) y de la viscosidad cinemática ( $\nu$ )

$$\begin{aligned}\beta &= 2.82x10^{-4} [K^{-1}] \\ \nu &= 8.434x10^{-7} [m^2/s]\end{aligned}\tag{E.4}$$

Sustituyendo (E.4) en (E.1)-(E.3)

$$\begin{aligned}Gr &= \frac{(9.81)(2.82x10^{-4})(0.5)(0.067)^3}{(8.434x10^{-7})^2} = 5.85x10^5 \\ Re &= (300)^2 = 90000 \\ Ri &= 6.49\end{aligned}$$

Para  $\Delta T = 1 [K]$

$$\begin{aligned}T_m &= \frac{27.5 + 28.5}{2} = 28 [^{\circ}C] \\ \beta &= 2.84x10^{-4} [K^{-1}] \\ \nu &= 8.388x10^{-7} [m^2/s] \\ Gr &= \frac{(9.81)(2.84x10^{-4})(1)(0.067)^3}{(8.388x10^{-7})^2} = 1.19x10^6 \\ Re &= (300)^2 = 90000 \\ Ri &= 13.23\end{aligned}$$

Para  $\Delta T = 2 [K]$

$$\begin{aligned}T_m &= \frac{27.5 + 29.5}{2} = 28.5 [^{\circ}C] \\ \beta &= 2.88x10^{-4} [K^{-1}] \\ \nu &= 8.296x10^{-7} [m^2/s] \\ Gr &= \frac{(9.81)(2.88x10^{-4})(2)(0.067)^3}{(8.296x10^{-7})^2} = 2.47x10^6 \\ Re &= (300)^2 = 90000 \\ Ri &= 27.44\end{aligned}$$

Para  $\Delta T = 3 [K]$

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{27.5 + 30.5}{2} = 29 [^{\circ}C] \\ \beta &= 2.92 \times 10^{-4} [K^{-1}] \\ \nu &= 8.204 \times 10^{-7} [m^2/s] \\ Gr &= \frac{(9.81)(2.92 \times 10^{-4})(3)(0.067)^3}{(8.204 \times 10^{-7})^2} = 3.84 \times 10^6 \\ Re &= (300)^2 = 90000 \\ Ri &= 42.67 \end{aligned}$$

Sea  $D_H$  el diámetro hidráulico del canal,  $A$  el área transversal del canal y  $P$  el perímetro del canal, calculando la velocidad promedio para un valor del número de Reynolds de 300 con  $T_m = 27.75 [^{\circ}C]$

$$\begin{aligned} D_H &= \frac{4A}{P} = \frac{4(0.067)^2}{4(0.067)} = 0.067 [m] \\ Re &= \frac{UH}{\bar{\nu}} \implies \bar{\nu} = \frac{Re \nu}{D_H} = \frac{300(8.434 \times 10^{-7})}{0.067} = 3.7764 \times 10^{-3} [m/s] \end{aligned}$$

por lo que la velocidad promedio es

$$\bar{\nu} = 3.78 \times 10^{-3} [m/s]$$

Obteniendo el gasto con la velocidad promedio

$$Q = \bar{\nu}A = (3.78 \times 10^{-3})(0.004489) = 1.6968 \times 10^{-5} [m^3/s] = 1.6968 \times 10^{-2} [l/s]$$

El tiempo necesario para llenar un litro con el gasto calculado es de  $t = 58.93$  segundos.

$$\begin{aligned} Re &= 300 \\ \bar{\nu} &= 3.78 \times 10^{-3} [m/s] \\ Q &= 1.6968 \times 10^{-5} [m^3/s] = 1.6968 \times 10^{-2} [l/s] \\ t &= 58.93 [s] \end{aligned}$$

102 APÉNDICE E. CÁLCULO DE LOS VALORES DEL NÚMERO DE RICHARDSON

$$Re = 500$$

Cálculando la diferencia de temperatura entre el fluido y la placa dejando fijos los valores del número de Richardson

$$\begin{aligned} Re &= 500 \\ Ri &= Gr / Re^2 \implies Gr = Ri Re^2 \end{aligned}$$

Empleando el número de Richardson para medio grado

$$Gr = (6.49) (250000) = 1.62x10^6 = \frac{g\beta(\Delta T) H^3}{\nu^2} \quad (E.5)$$

despejando  $\Delta T$  de (E.5)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(1.62x10^6) (8.434x10^{-7})^2}{(9.81) (2.82x10^{-4}) (0.067)^3} = 1.38 \text{ } [^{\circ}K] \quad (E.6)$$

Empleando el número de Richardson para 1 grado

$$Gr = (13.23) (250000) = 3.31x10^6 = \frac{g\beta(\Delta T) H^3}{\nu^2} \quad (E.7)$$

despejando  $\Delta T$  de (E.7)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(3.31x10^6) (8.388x10^{-7})^2}{(9.81) (2.84x10^{-4}) (0.067)^3} = 2.78 \text{ } [^{\circ}C] \quad (E.8)$$

Empleando el número de Richardson para 2 grados

$$Gr = (27.44) (250000) = 6.86x10^6 = \frac{g\beta(\Delta T) H^3}{\nu^2} \quad (E.9)$$

despejando  $\Delta T$  de (E.9)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(6.86x10^6) (8.296x10^{-7})^2}{(9.81) (2.88x10^{-4}) (0.067)^3} = 5.56 \text{ } [^{\circ}C] \quad (E.10)$$

Empleando el número de Richardson para 3 grados

$$Gr = (42.67) (250000) = 1.07x10^7 = \frac{g\beta(\Delta T) H^3}{\nu^2} \quad (E.11)$$

despejando  $\Delta T$  de (E.11)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(1.07x10^7)(8.204x10^{-7})^2}{(9.81)(2.92x10^{-4})(0.067)^3} = 8.36 \text{ } [^{\circ}C] \quad (\text{E.12})$$

Calculando la velocidad promedio para un valor del número de Reynolds de 500 con  $T_m = 27.75 \text{ } [^{\circ}C]$

$$\text{Re} = \frac{UH}{\bar{\nu}} \implies \bar{\nu} = \frac{\text{Re}\nu}{D_H} = \frac{500(8.434x10^{-7})}{0.067} = 6.29x10^{-3} \text{ } [m/s]$$

$$\bar{\nu} = 6.29x10^{-3} \text{ } [m/s] \quad (\text{E.13})$$

por lo que el gasto en el canal es

$$Q = \bar{\nu}A = (6.29x10^{-3})(0.004489) = 2.82x10^{-5} \text{ } [m^3/s] = 2.82x10^{-2} \text{ } [l/s]$$

El tiempo necesario para llenar un litro con el gasto calculado es de  $t = 35.46$  segundos.

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 500 \\ \bar{\nu} &= 6.29x10^{-3} \text{ } [m/s] \\ Q &= 2.82x10^{-5} \text{ } [m^3/s] = 2.82x10^{-2} \text{ } [l/s] \\ t &= 35.46 \text{ } [s] \end{aligned}$$

$$\text{Re} = 700$$

Cálculo de la diferencia de temperatura entre el fluido y la placa dejando fijos los valores del número de Richardson

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 700 \\ \text{Ri} &= Gr/\text{Re}^2 \implies Gr = \text{Ri}\text{Re}^2 \end{aligned}$$

Empleando el número de Richardson para medio grado

$$Gr = (6.49)(490000) = 3.18x10^6 = \frac{g\beta(\Delta T)H^3}{\nu^2} \quad (\text{E.14})$$

despejando  $\Delta T$  de (E.14)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(3.18x10^6)(8.434x10^{-7})^2}{(9.81)(2.82x10^{-4})(0.067)^3} = 2.71 \text{ } [^{\circ}C]$$

Empleando el número de Richardson para 1 grado

$$Gr = (13.23) (490000) = 6.48x10^6 = \frac{g\beta(\Delta T)H^3}{\nu^2} \quad (\text{E.15})$$

despejando  $\Delta T$  de (E.15)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(6.48x10^6)(8.388x10^{-7})^2}{(9.81)(2.84x10^{-4})(0.067)^3} = 5.44 \text{ } [^{\circ}C]$$

Empleando el número de Richardson para 2 grados

$$Gr = (27.44) (490000) = 1.34x10^7 = \frac{g\beta(\Delta T)H^3}{\nu^2} \quad (\text{E.16})$$

despejando  $\Delta T$  de (E.16)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(1.34x10^7)(8.296x10^{-7})^2}{(9.81)(2.88x10^{-4})(0.067)^3} = 10.86 \text{ } [^{\circ}C]$$

Empleando el número de Richardson para 3 grados

$$Gr = (42.67) (490000) = 2.09x10^7 = \frac{g\beta(\Delta T)H^3}{\nu^2} \quad (\text{E.17})$$

despejando  $\Delta T$  de (E.17)

$$\Delta T = \frac{Gr\nu^2}{g\beta H^3} = \frac{(2.09x10^7)(8.204x10^{-7})^2}{(9.81)(2.92x10^{-4})(0.067)^3} = 16.33 \text{ } [^{\circ}C]$$

Calculando la velocidad promedio para un valor del número de Reynolds de 700 con  $T_m = 27.75 \text{ } [^{\circ}C]$

$$\text{Re} = \frac{UH}{\bar{\nu}} \implies \bar{\nu} = \frac{\text{Re}\nu}{D_H} = \frac{700(8.434x10^{-7})}{0.067} = 8.81x10^{-3} \text{ } [m/s]$$

$$\bar{\nu} = 8.81x10^{-3} \text{ } [m/s]$$

por lo que el gasto en el canal es

$$Q = \bar{\nu}A = (8.81x10^{-3})(0.004489) = 3.95x10^{-5} \text{ } [m^3/s] = 3.95x10^{-2} \text{ } [l/s]$$

El tiempo necesario para llenar un litro con el gasto calculado es de  $t = 25.31$  segundos.

$$\begin{aligned} \text{Re} &= 700 \\ \bar{v} &= 8.81 \times 10^{-3} \text{ [m/s]} \\ Q &= 3.95 \times 10^{-5} \text{ [m}^3\text{/s]} = 3.95 \times 10^{-2} \text{ [l/s]} \\ t &= 25.31 \text{ [s]} \end{aligned}$$

En la tabla siguiente se presentan las diferencias de temperatura entre el fluido y la placa correspondientes a cada valor del número de Reynolds y del número de Richardson.

<b>Re \ Ri</b>	<b>6.5</b>	<b>13.2</b>	<b>27.4</b>	<b>42.7</b>
<b>300</b>	<b>0.5</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>500</b>	<b>1.4</b>	<b>2.8</b>	<b>5.6</b>	<b>8.4</b>
<b>700</b>	<b>2.7</b>	<b>5.4</b>	<b>10.9</b>	<b>16.3</b>

Como se observa en la tabla anterior, para poder medir un valor del número de Richardson de uno es necesario poder censar diferencias de temperatura del orden de centésimas de grado. Desafortunadamente, el multicanal digital empleado cuenta con una resolución de décimas de grado, razón por la cual no se pudieron llevar a cabo mediciones para ése caso.