UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OPCIONES REALES: UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE OPCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

CÉSAR RODRÍGUEZ HUERTA

Tutor: ACT. SALVADOR PÉREZ MALDONADO

2007

Hoja de Datos del Jurado

1. Rodríguez
   Huerta
   César
   56 18 92 48
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Actuaría
   099275976

2. Act.
   Salvador
   Pérez
   Maldonado

3. Act.
   Gloria
   Roa
   Béjar

4. Act.
   Ricardo Humberto
   Sevilla
   Aguilar

5. Act.
   Irma Evelia
   Valencia
   Sepúlveda

6. Act.
   Ana Lilia
   González
   López

7. Opciones Reales: Una Aplicación de la Teoría de Opciones
   94 p
   2007

A mis padres cuyo logro mas grande es formar la hermosa familia de la que soy parte, ustedes son mi mayor orgullo, ojalá que algún día mis hijos me admiren tanto como los admiro a ustedes.

A mis queridos hermanos Carlos, Javier, Gerardo y Diego que forjaron día a día mi carácter y me han acompañado a cada instante, el orgullo de ser su hermano también lo llevo en la sangre, gracias hermanos.

A todas aquellas personas que a lo largo de mi vida me han hecho quien soy, a quien me ha apoyado y ha estado conmigo, a aquellos que confiaron en mi y depositaron en mi sus esperanzas, me hicieron ver mis errores y vivieron mis alegrías como suyas, espero tener siempre personas así en mi camino.

A toda mi familia, compañeros y amigos, por todos los momentos que serán inolvidables gracias a ustedes, por su apoyo incondicional, por que gracias a ustedes nunca me he sentido solo.

A mi Universidad Nacional Autónoma de México por enriquecer mi mente y espíritu, por hacer nacer en mi la necesidad de aprender.

Y sobre todo gracias a la vida por permitirme vivirla a lado de todos ustedes, por que gracias a ustedes existo y gracias a ustedes soy, por que por ustedes amo y soy amado …

Gracias a todos ustedes …

César Rodríguez Huerta, Enero 2007

ÍNDICE

Introducción

La innovación ha formado parte de la naturaleza del ser humano desde que éste existe, la aportación a través del tiempo de ideas nos ha hecho lo que somos y es esta aportación de ideas lo que pretende mantenernos a la vanguardia generación tras generación. En un mundo en constante desarrollo las preguntas encuentran cada vez más maneras de ser respondidas, el presente trabajo es el resultado de la búsqueda de una solución innovadora que permita tomar en cuenta la flexibilidad y reversibilidad de algunos tipos de proyectos de inversión.

Cuando valuamos los proyectos de inversión de una empresa por medio de los métodos de flujos de efectivo esperados frecuentemente pasamos por alto la futura flexibilidad administrativa que los acompaña, es decir, la subsecuente cadena de decisiones que determinarán en última instancia el valor del proyecto, a estas decisiones en los proyectos de inversión se les llama ***opciones reales***, la valuación de proyectos por medio de opciones reales permite, como mayor característica, valuar la flexibilidad corporativa de los proyectos en un mundo incierto, esta flexibilidad permite tomar decisiones una vez iniciados dichos proyectos por medio de la adaptación de decisiones bajo comportamientos inesperados del mercado, permite a las empresas conocer a mayor profundidad el valor estratégico de una inversión, característica importante en proyectos que se desenvuelven en un amplio rango de incertidumbre y con cambios potencialmente rápidos, logrando de esta manera contar con una mejor administración de riesgos, visión y planeación estratégica.

Por medio de la identificación y el uso correcto de opciones reales en nuestros proyectos de inversión podremos construir una estrategia flexible para nuestras inversiones, es decir, podremos implementar con eficacia los proyectos, reevaluar las oportunidades cruciales a lo largo del tiempo, diferir, expandir, contratar, modificar, o aún abandonar proyectos económicamente importantes dependiendo del devenir del tiempo.

Para lograr implementar la teoría de opciones en proyectos de inversión abordaremos en el primer capítulo los instrumentos derivados más simples, futuros y forwards, observaremos sus características, valuación y utilidad para así comprender el obligado desarrollo teórico de los productos derivados a través de las últimas décadas.

Posteriormente dedicaremos el segundo capítulo al estudio de la teoría de opciones, sus antecedentes, características, valuación, función, utilización y factores que afectan su valor, adicionalmente mencionaremos el creciente conjunto de opciones comerciadas actualmente.

Una vez que hayamos estudiado la importancia de la utilización de opciones en el mercado financiero, observaremos durante el tercer capítulo el comportamiento de ciertos proyectos de inversión y haremos una similitud entre las propiedades de estos proyectos y las opciones financieras, esto con el fin de poder definir las razones por las cuales es posible llevar a cabo la valuación de dichos proyectos mediante la teoría de opciones. Estudiaremos las características particulares de las opciones reales, su clasificación e importancia como herramienta en la valuación de proyectos, deberemos notar que toda vez que se ha reparado en la importancia de la flexibilidad en cierto proyecto, ésta deberá ser medida apropiadamente, por lo que es importante tomar en cuenta las limitaciones y dificultades en las que se incurre al pretender valuarla por medio de opciones, en los capítulos cuarto y quinto valuaremos las opciones reales por diferentes métodos, mencionaremos ya que los modelos utilizados en las opciones financieras están sujetos a ciertos supuestos que pueden no cumplirse en su totalidad en las opciones reales, sin embargo, la aproximación dada será un importante punto de referencia para distinguir las características de los proyectos y su valor como decisiones estratégicas para el futuro de una empresa.

1. Futuros y Forwards

1.1 Antecedentes

El mercado de los productos derivados como hoy lo conocemos es el resultado de un permanente desarrollo de instrumentos innovadores impulsados simultáneamente por las necesidades crecientes de un mundo siempre en desarrollo y el ingenio humano que ha pretendido desde siempre cubrir las necesidades humanas con instrumentos cada vez más convenientes y efectivos, podemos sin embargo poner como punto de partida de este mercado la necesidad de agricultores y comerciantes de granos, en la ciudad de Chicago a principios del siglo XIX, de obtener un precio que no fuera afectado por las altas fluctuaciones en el mercado, obligando a que se comenzaran a celebrar acuerdos de entrega a fecha futura, a un precio predeterminado

A partir de entonces fue cada vez más evidente la necesidad de un mercado organizado y estructurado de productos derivados, en 1848 el Chicago Board of Trade (CBOT) realizó la primera transacción formal de forwards en donde se estandarizó la cantidad y calidad del grano de referencia y en 1865 se negociaron los primeros Contratos de Futuro estandarizados.

En 1874 se fundó el Chicago Product Exchange para la negociación a futuro de productos perecederos y en 1898 surgió el Chicago Butter and Egg Board. Ambas instituciones dieron origen al Chicago Mercantile Exchange (CME) que se constituyó como bolsa de futuros sobre diversos productos agroindustriales.

Sin embargo, la mayor parte de estas transacciones se realizó sobre commodities y no fue sino hasta 1972 que se empezaron a operar los futuros sobre tipo de cambio por medio del International Monetary Market (IMM) y tres años después los futuros sobre tasas de interés. En febrero de 1982 se intercambió por primera vez un contrato de futuros sobre el índice de Standard & Poor's y otros índices bursátiles en Kansas City, Nueva York y Chicago.

Los primeros forwards sobre tasas de interés se ofrecieron sobre instrumentos denominados en dólares y aparecieron en Londres en 1983. Su mercado se expandió rápidamente y, hacia fines de 1985, el volumen mensual alcanzó US$ 7,000 millones. En la actualidad también se ofrecen en Nueva York y Chicago.

En México se inició la creación del Mercado de Derivados en 1994, por medio de dos instituciones, la BMV la cual financió el proyecto de crear el MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V que es la bolsa mexicana de opciones y futuros, y la S.D. Indeval que tomó la responsabilidad de promover la creación de la cámara de compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación, realizando las erogaciones correspondientes desde 1994 hasta las fechas de constitución de las empresas.

A raíz del control de cambios decretado en 1982, se suspendieron las operaciones de contratos a futuro sobre el tipo de cambio peso/dólar que se comenzaron a cotizar en 1978. En 1983 la BMV listó futuros sobre acciones individuales y petrobonos, los cuales registraron operaciones hasta 1986. Fue en 1987 que se suspendió esta negociación debido a problemas de índole prudencial.

El Gobierno Federal ha emitido diversos instrumentos híbridos de deuda como Petrobonos, Pagarés y Tesobonos que incorporan contratos forwards para la valuación de los cupones y principal.

A fines de 1994 entraron en vigor las normas del Banco de México para la operación de contratos forward sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre el índice nacional de precios al consumidor (INPC).

En 1997 se operaban en el mundo 27 trillones de dólares en productos derivados, en tanto el valor de capitalización de las bolsas de valores alcanzaba los 17 trillones de dólares. Es decir, la negociación de derivados equivalía a 1.6 veces el valor de los subyacentes listados en las bolsas del mundo. Las bolsas de derivados de Chicago manejaban, en 1997, un volumen de casi 480 millones de contratos.

1.2 Descripción

Los forwards y futuros son los instrumentos de administración de riesgo más antiguos y mejor conocidos, existen antecedentes que indican que los mercados de futuros fueron creados desde la Edad Media y su función original era satisfacer las demandas de agricultores y comerciantes.

En esencia un contrato de este tipo es un contrato que obliga al tenedor a comprar o vender cierta cantidad de algún activo, al que llamaremos activo subyacente, en una fecha y precio determinados. Dichos activos pueden ser de diversa naturaleza como tasas de interés, commodities, acciones, tipos de cambio, índices de precios, etc.

Al usar estos contratos, las partes contratantes pactan con anticipación las condiciones de compra-venta del bien subyacente, eliminando de esta manera la incertidumbre existente sobre los posibles movimientos imprevistos de los precios en el mercado spot (o al contado) del bien subyacente en el futuro. Así quien compra contratos de de este tipo, adopta una posición "larga", por lo que tiene el derecho a recibir en la fecha de vencimiento del contrato el activo subyacente. Mientras que, quien vende contratos adopta una posición "corta" ante el mercado, por lo que al llegar la fecha de vencimiento del contrato deberá entregar el correspondiente activo subyacente, recibiendo a cambio la cantidad acordada en la fecha de negociación del contrato de futuros.

Para ejemplificar mejor la necesidad de utilizar este tipo de contratos podemos tomar en cuenta la posición en que se encuentra un agricultor de cereales antes de la fecha en que comienza a cosechar su producto. En los meses anteriores a que este agricultor pueda comerciar su producto desconoce el precio al que se pagará su cosecha. Podemos resumir el escenario posible en dos situaciones, en años de escasez, puede que el precio de este cereal sea alto, sobre todo cuando el agricultor no tenga prisa por vender, de esta forma el agricultor obtendrá un rendimiento sobre su cosecha considerable. Por otra parte, en años de abundancia puede suceder que el cereal tenga que venderse a precios muy bajos, por lo que el agricultor no obtendrá una cosecha redituable; es por esto que el agricultor, y su familia, están claramente expuestos a situaciones de alto riesgo.

Consideremos ahora la contraparte del caso expuesto, un comerciante que necesite comprar cereal de forma habitual: también estará expuesto a los mismos riesgos de precio, aunque de manera inversa. Algunos años, la situación de exceso de oferta puede que le aporte precios favorables; en otros, la escasez puede obligar al comprador a adquirir el cereal a un precio mucho mayor a lo previsto. Si ambas partes, el agricultor y el comerciante, pudieran ponerse de acuerdo antes de la cosecha de cada año acerca del precio del cereal, ambos saldrían beneficiados al evitar con esto el riesgo de escasez y abundancia en el mercado y los consecuentes movimientos en el precio del cereal.

Diferencias Principales entre Forwards y Futuros

La principal diferencia que existe entre esos dos contratos es que los contratos de futuros son bursátiles mientras que los forwards no. El éxito tan grande que han tenido las bolsas de contratos de futuros se ha fundamentado en tres innovaciones clave en relación a los contratos forward:

a) Estandarización de los contratos: Los contratos forward se elaboran a la medida de las necesidades de los dos participantes (posiciones corta y larga). Las partes involucradas pactan detalladamente la cantidad, calidad, plazo, lugar de entrega, la forma de liquidación y las garantías necesarias. De esta forma comerciar este tipo de contratos en una bolsa sería prácticamente imposible.

Los contratos de futuros están completamente estandarizados. Los contratos sobre mercancías e instrumentos financieros son uniformes y no negociables en lo que se refiere al tamaño del contrato, la calidad del bien subyacente, la fluctuación mínima del precio (puja), el plazo al vencimiento y el lugar de entrega. Por lo tanto, una vez elegido un contrato a una *fecha* determinada, la única variable negociable en el contrato es su precio.

b) Cámara de compensaciones *(Clearing House):* En esencia, la cámara de compensaciones rompe el vínculo entre compradores y vendedores, al actuar como comprador legal de cada vendedor y viceversa, como vendedor legal de cada comprador. El hecho de que rompa este vínculo es crucial para lograr la bursatilidad de los contratos de futuros. Los compradores y vendedores pueden entrar en el mercado sin preocuparse sobre la disponibilidad y el riesgo crediticio de la contraparte ya que, sin importar quien se encuentre en el piso de remates, su contraparte legal siempre será la cámara de compensaciones. Para poder realizar lo anterior, la cámara de compensaciones requiere de hacer uso de un sistema de depósitos, conocido también como sistema de márgenes.

c) Sistema de márgenes: El uso de un sistema de márgenes en los mercados de futuros - permite a la cámara de compensaciones asumir el riesgo de incumplimiento de los contratos de futuros. Existen tres tipos de márgenes. Inicial, de variación *y* de mantenimiento.

El margen inicial es un depósito que debe hacerse en la cámara de compensaciones un día después de iniciar una posición (ya sea corta o larga) en un contrato de futuros. Cada bolsa determina el margen inicial de cada contrato, aunque generalmente este es de alrededor de un 10%. El margen depositado recibe una tasa de interés competitiva en el mercado

Además del margen inicial, las cámaras de compensaciones exigen también un margen de variación. Cada día de operación, la cámara de compensaciones evalúa todas las posiciones de acuerdo con los precios de cierre Es decir, calcula las pérdidas y ganancias netas de todos los participantes en el mercado y las carga o acredita en la cuenta de cada uno de los participantes. Cuando los cargos o abonos exceden una cantidad preestablecida del margen inicial, conocida como margen de mantenimiento, la bolsa paga o exige un margen de variación, cuya función principal es la de conservar el margen de mantenimiento. El uso del sistema de márgenes evita que se acumulen pérdidas que no se puedan pagar.

Los dos mercados de cambios principales donde se negocian contratos de futuros son el Chicago Board of Trade (CBOT) y el Chicago Mercantile Exchange (CME).

Chicago Board of Trade

El Chicago Board of Trade (CBOT) fue fundado en 1848 con el fin de servir de puente a agricultores y comerciantes. Su tarea principal en su inicio era de estandarizar las cantidades y calidades de cereales que se comercializaban. Al cabo de pocos años, se producía el primer tipo de contrato de futuros. Fue llamado contrato *to-arrive*. Los especuladores pronto se interesaron en ese contrato y encontraron el hecho de comerciar con el contrato mismo una alternativa más atractiva que el comercio de grano. El Chicago Board of Trade ofrece hoy en día contratos de futuros para muchos activos subyacentes, entre ellos, avena, soya, harina de soya, aceite de soya, trigo, plata, bonos del Tesoro, letras del Te*soro* y el Major Market Stock Index.

Chicago Mercantile Exchange

El Chicago Mercantile Exchange fue fundado en 1874 proporcionando un mercado central para mantequilla, huevos, aves y otros productos agrícolas perecederos. En 1898, los tratantes de mantequilla y huevos se retiraron de este mercado para formar el Butter and Egg Board que en 1919 cambió su nombre por el de Chicago Mercantile Exchange (CME) que se reorganizó para negociar futuros. Desde esa fecha, la institución ha aportado mercados de futuros para muchos productos incluyendo entre otros, panceta de cerdo (1961), vacuno vivo (1964), porcino vivo (1966) y vacuno para el consumo (1971). En 1982 introdujo un contrato de futuros sobre el S&P 500 Stock Index.

El International Monetary Market (IMM) fue fundado en 1972 como una división del Chicago Mercantile Exchange, para negociar contratos de futuros en divisas. Los contratos de futuros en divisas hoy en día incluyen la libra esterlina, los euros, el dólar canadiense, el yen japonés, el franco suizo y el dólar australiano. El IMM también negocia un contrato de futuros en oro, un contrato de futuros en bonos del Tesoro y un contrato de futuros en eurodólares

Otros mercados de futuros
Existen muchos mercados en el mundo donde se negocian contratos de futuros, entre ellos el Chicago Rice and Cotton Exchange (CRCE), el New York Futures Exchange (NYFE), el London International Financial Futures Exchange (LIFFE), el Toronto Futures Exchange y el Singapore International Monetary Exchange (SIMEX). La mayoría de los contratos que se negocian en los diferentes mercados de cambio pueden clasificarse como "contratos de futuros sobre productos" (en los que subyace un producto) o como “contratos de futuro" sobre el activo subyacentes financieros" (en los que subyace un activo financiero como puede ser una obligación o una cartera de acciones bursátiles. Constantemente se presentan propuestas para nuevos contratos. Sin lugar a dudas, los mercados de futuros son una de las innovaciones financieras de mayor éxito que jamás ha habido.

1.3 Valuación

Para determinar el precio de un futuro o un forward debemos asumir lo siguiente:

1. Los participantes en el mercado no están sujetos a costos de transacción.
2. Los participantes en el mercado están sujetos a la misma tasa de impuestos sobre sus ingresos netos
3. Los participantes en el mercado pueden prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo
4. Los participantes en el mercado toman ventaja de cualquier oportunidad abierta de arbitraje.

Utilizaremos la siguiente notación:

T: Tiempo en años hasta la fecha de entrega de un contrato forward o futuro.

S_t: Precio del activo subyacente del contrato de futuros o forward al tiempo t.

F_t: Precio del contrato de futuros al tiempo t.

r: Tasa de interés continua compuesta anual libre de riesgo para una inversión con una duración T.

K: Precio de entrega en el contrato

f : Valor actual del contrato forward

El valor del contrato f estará determinado por el valor presente de la diferencia entre el precio de mercado del activo subyacente en ese momento S_t y el precio de entrega K. Para que no existan oportunidades de arbitraje el valor del contrato deberá ser igual a cero al inicio del mismo.

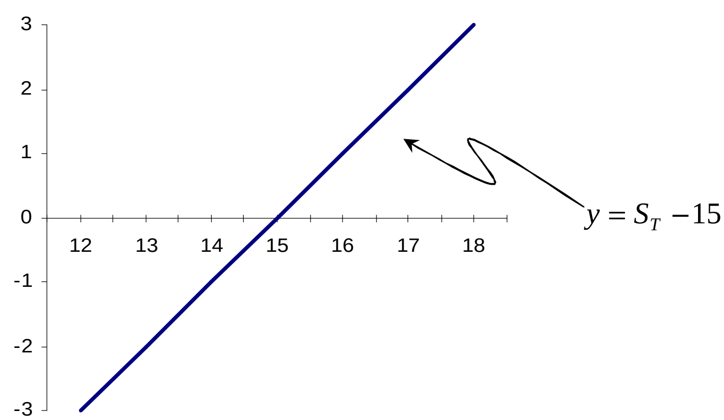
El precio del contrato (F) se define como aquel precio de entrega que hace que el valor del contrato (f) sea cero en todo momento. Este precio es igual al precio de entrega

(K) en el momento en el que se inicia el contrato aunque a partir de ese momento el precio K queda fijo y el precio F puede variar conforme haya cambios en la oferta y demande del bien subyacente, en las tasas de interés y en el tiempo que falte para que madure el contrato. Conforme se acerca la fecha de vencimiento del contrato, el precio del futuro (F) es cada vez mas cercano al precio de mercado en la fecha de vencimiento (S_T).

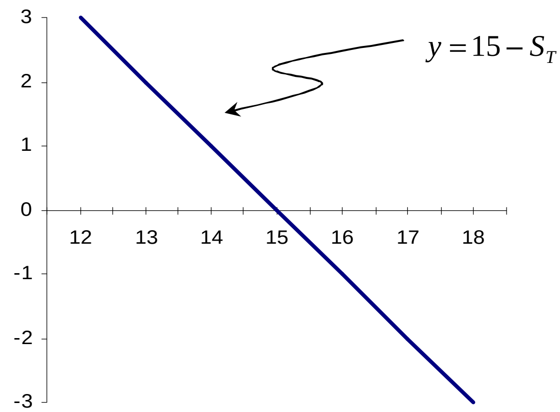
Para obtener gráficamente el pago (Payoff) de este tipo de contratos observemos el diagrama de pagos de un Forward largo si su precio de entrega es de $15 y variamos el valor del activo subyacente al momento de entrega del contrato:

S_T	Ganancia/Pérdida
12	-3
13	-2
14	-1
15	0
16	1
17	2
18	3

Gráficamente:

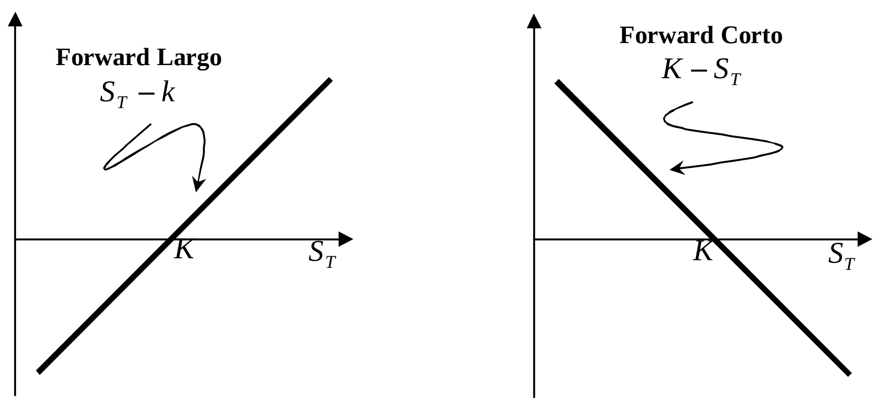


El correspondiente diagrame de pagos de un forward corto es:



Como podemos ver el pago de un contrato forward largo esta determinado por la función: $S_T - k$ y el de un forward corto esta determinado por $K - S_T$.

El Payoff general de un contrato forward es por consiguiente:



Para poder determinar el precio justo de cualquier contrato haremos uso de la ausencia de arbitraje por lo que si construimos un portafolio con el mismo diagrama de pagos futuros que el forward ambos deben de valor lo mismo hoy, si suponemos que el precio actual del subyacente es S_0, la tasa libre de riesgo es r y la entrega se hará en T años, podremos considerar un portafolio que conste de la compra del subyacente y un préstamo del valor presente de *K*, para ejemplificar el valor del portafolio a través del tiempo usaremos la siguiente tabla:

Portafolio	*t*	*T*
Subyacente	$-S_t$	S_T
Préstamo	$Ke^{-r(T-t)}$	-K
	$Ke^{-r(T-t)} - S_t$	$S_T - K$

De esta forma no importa cuál sea el precio del subyacente a la fecha especificada en el contrato, el diagrama de pagos de nuestro portafolio igualará al de un forward sobre el mismo subyacente por lo que podemos deducir que el precio del forward el día de hoy debe de ser:

$$F_0 = Ke^{-rT} - S_0$$

Queremos encontrar un valor justo para K, es decir, un valor tal que el valor del contrato a la fecha de inicio debe de ser cero, por lo que

$$Ke^{-rT} - S_0 = 0 \Rightarrow K = S_0 e^{rT}$$

Pues de otra forma habría oportunidades de arbitraje.

Supongamos que el día de hoy el precio de una acción es de \$43 y queremos obtener un forward sobre esa acción con fecha de entrega en 4 meses, si la tasa de interés libre de riesgo es de 9.43%, obteniendo el portafolio réplica tenemos:

Portafolio	*Hoy*	*T*
Subyacente	*-43*	S_T
Préstamo	$Ke^{-0.0943(1/3)}$	-K
	$Ke^{-0.0943(1/3)} - 43$	$S_T - K$

De donde:

$$F(t,T) = K = 43e^{0.0943(1/3)} - 43 = 44.3731$$

Si el ***precio del forward*** **F(t,T)** fuera diferente al precio justo, podríamos construir un portafolio para cada caso (K > 44.3731, K < 44.3731) en el cual obtendríamos ganancias hoy sin ningún compromiso futuro:

Si K = 44.50

Portafolio A	*Hoy*	*T*
Subyacente	*-43*	S_T
Préstamo	$44.5e^{-0.0943(1/3)}$	*-44.5*
Fwd Corto	*0*	*44.5-* S_T
	0.1230	*0*

Si K = 44.30

Portafolio B	*Hoy*	*T*
Venta en corto	*43*	$-S_T$
Inversión	$-44.3e^{-0.0943(1/3)}$	*44.3*
Fwd Largo	*0*	$S_T - 44.3$
	0.0708	*0*

Obteniendo en ambos casos una ganancia sin riesgo al día de hoy.

Ahora bien, hemos podido obtener el precio forward al inicio del contrato pero debemos poder deducir el ***valor del forward*** en cualquier momento de la vida de éste, para ello consideremos el siguiente ejemplo; Si consideramos un forward iniciado hace un tiempo, cuyo vencimiento es en dos meses, K = 52, el precio actual del activo subyacente es \$51 y *r* = 6%, construiremos un portafolio de la misma manera que en los casos anteriores para obtener el valor actual del forward, con la diferencia de que en este caso el valor del forward se obtendrá al cambiar el signo del resultado obtenido.

Portafolio	*Hoy*	*T*
Subyacente	*-51*	S_T
Préstamo	$52e^{-0.06(1/6)}$	*-52*
	0.4826	$S_T - 52$

Recordando que como ya dijimos

	t	*T*
Fwd	*-V*	S_T *-52*

El valor del forward al día de hoy es: **V =** $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ = -0.4826

Este valor se puede obtener al calcular el precio forward del contrato si éste se iniciara hoy y tomar el valor presente de la diferencia entre éste y el valor del contrato, es decir, calculando F(t,T) = $51e^{0.06/6}$ = 51.5126, notando que K = 52, el valor del forward es igual a V = $-(52 - 51.5126)e^{-0.06/6}$.

Es muy importante notar que no estamos considerando el tiempo transcurrido desde que se inició el contrato, es decir, en el ejemplo anterior no importa si el contrato se inició dos meses o dos años antes de la fecha actual pues como ya vimos para obtener el valor actual del forward no es preciso saber cuánto es el tiempo que el contrato lleva vigente sino solamente el tiempo restante del mismo.

Efecto de los dividendos

Hasta ahora sólo hemos analizado forwards sobre un subyacente que se comporta como una acción que no paga dividendos, ya que si la acción pagara dividendos, ésta tendría que reflejar el dividendo pagado y por esto disminuiría su valor. Esto claramente afecta el valor del forward pues si la acción espera pagar dividendos antes de la fecha de entrega en el contrato, éstos afectarán el precio de la acción; siguiendo con la metodología hasta ahora desarrollada utilizaremos un portafolio con los mismos pagos que el forward pero con la diferencia de que dicho portafolio debe de tomar en cuenta los dividendos pagados por la acción que definiremos como $d_1, d_2, \ldots, d_n$, los cuales podemos verlos como préstamos a la tasa libre de riesgo por un periodo menor a la fecha de término del contrato. Una vez construido dicho portafolio podremos obtener el precio y valor forward de la siguiente manera.

Precio forward de una acción que paga n dividendos (F)

	t	T
Subyacente	$-S_t$	S_T
Prést. div1	$d_1 e^{-r(t_1-t)}$	*0*
Prést. div2	$d_2 e^{-r(t_2-t)}$	*0*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Prést. divn	$d_n e^{-r(t_n-t)}$	*0*
Préstamo	$Fe^{-r(T-t)}$	*-F*
	$Fe^{-r(T-t)} - S_t + \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-r(t_i-t)}$	$S_T - F$

Con el dividendo i pago el préstamo al tiempo t_i $(t_i < T, \forall i)$ *, por lo que el tiempo T la deuda ha sido saldada*

Por los mismos argumentos antes expuestos; $Fe^{-r(T-t)} - S_t + \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-r(t_1-t)} = 0$

$$\Rightarrow F = e^{r(T-t)}(S_t - \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-r(t_i-t)})$$

$$\Rightarrow F = e^{r(T-t)}(S_t - \sum_i VP(d_i))$$

De manera similar para el ***Valor forward de una acción que paga n dividendos (f)***

	t	*T*
Subyacente	$-S_t$	S_T
Prést. div1	$d_1 e^{-r(t_1-t)}$	*0*
Prést. div2	$d_2 e^{-r(t_2-t)}$	*0*
j	j	j
Prést. divn	$d_n e^{-r(t_n-t)}$	*0*
Préstamo	$Ke^{-r(T-t)}$	*-K*
	$Ke^{-r(T-t)} - S_t + \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-r(t_i-t)}$	$S_T - K$

Con el dividendo i pago el préstamo al tiempo t_i $(t_i < T, \forall i)$, por lo que el tiempo T la deuda ha sido saldada

$$\Rightarrow f = S_t - \sum_{i=1}^{n} d_i e^{-r(t_i-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

$$\Rightarrow f = S_t - \sum_i VP(d_i) - Ke^{-r(T-t)}$$

Contratos Forward sobre divisas

Supongamos que iniciamos un forward cuyo subyacente es una divisa extranjera, obviamente las fluctuaciones de dicha moneda con respecto a la nuestra afectan el precio y valor del forward, esta problemática puede ser resulta al definir la tasa de crecimiento esperada de dicha moneda sobre la nuestra como una especie de dividendo que se paga de forma continua, por lo que si el tipo de cambio de la moneda extranjera sobre la nuestra crece con el paso del tiempo también crecerá todo monto que hayamos comprado de dicha moneda.

Supongamos que se tiene un contrato sobre dólar, el tipo de cambio actual dólar/peso es de 11.20, T = 6 meses, r = 9.45 y la tasa de interés aplicable al dólar es $r_{us} = 0.03$ podemos obtener el precio forward de la siguiente manera:

	t	*T*
Dólar	$-11.20e^{-.03(1/2)}$	S_T
Préstamo	$Fe^{-0.0945(1/2)}$	*-F*
	$Fe^{-0.0945(1/2)} - 11.20e^{-.03(1/2)}$	$S_T - 52$

Debemos notar que no necesitamos comprar hoy un dólar para poseer un dólar al tiempo T, basta con comprar el VP(dólar) con su tasa de crecimiento, es decir, debemos comprar hoy $1 * e^{-.03/2}$ dólares para tener 1 dólar en seis meses, de lo contrario si compráramos un dólar hoy, tendríamos 1.0151 = $(1 * e^{.03/2})$ dólares dentro de seis meses.

$$Fe^{-0.0945(1/2)} - 11.20e^{-.03(1/2)} = 0$$

$$\Rightarrow F = e^{0.0945(1/2)}(11.20e^{-.03(1/2)}) = 11.20e^{(0.0945-.03)(1/2)} = 11.5671$$

Similarmente se obtendría el valor del forward al tiempo t de un contrato sobre divisas.

Para la forma general de este tipo de contratos utilizaremos el siguiente portafolio para determinar ***precio forward***

	t	T
Divisa extranjera	$-S_t e^{-r_{ext}(T-t)}$	S_T
Préstamo	$Fe^{-r(T-t)}$	-F
	$-S_t e^{-r_{ext}(T-t)} + Fe^{-r(T-t)}$	$S_T - 52$

$$\Rightarrow F = e^{r(T-t)}(S_t e^{-r_{ext}(T-t)}) = S_t e^{(r-r_{ext})(T-t)}$$

De manera similar obtenemos que el ***valor del forward*** el tiempo t para un contrato sobre divisas es:

$$f = S_t e^{-r_{ext}(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

2. Opciones

2.1 Antecedentes

Al igual que los instrumentos derivados anteriores, las opciones también han evolucionado a través de los años, comenzando su historia en el Siglo XVII donde fueron utilizadas por los productores de tulipanes en Holanda. En abril de 1973, después de cinco años de investigación y de haber invertido US$ 2.5 millones, el Chicago Board Options Exchange (CBOE) intercambió 16 opciones estandarizadas sobre acciones comunes. Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en The American Stock Exchange (AMEX) y en The Philadelphia Stock Exchange (PHLX). En 1976 se incorporó The Pacific Stock Exchange (PSE). La primera opción sobre índices accionarios fue realizada por la CBOE en 1977.

En la década de los 80's fue importante la introducción de opciones sobre Bonos del Tesoro Americano. En 1984, el Singapore International Monetary Exchange (SIMEX) y el Chicago Mercantile Exchange (CME) formaron un enlace mediante el cual los inversionistas podían operar contratos intercambiables en ambas bolsas, éste fue el primero de los muchos sistemas y redes que se han implantado en el proceso de globalización, existiendo a partir de entonces intercambio automático de instrumentos durante las 24 horas del día; a principios de 1991 el CME y el Chicago Board of Trade (CBOT) ofrecieron el sistema "Globex", por medio del cual se puede comprar y vender electrónicamente alrededor del mundo cuando los mercados de Chicago se encuentran cerrados

A finales de 1992 se inició la negociación de opciones sobre ADR's de Telmex L en The Chicago Board Options Exchange. En 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, AMEX, New York Options Exchange (NYOE), NYSE y PLHX.

El contrato de Telmex L resultó uno de los más exitosos con respecto a los contratos precedentes, en el CBOE en 1993, se operaron más de 30 mil millones de dólares en opciones sobre Telmex, importe cercano a 50% de la operación total en acciones en la BMV, durante ese año.

2.2Descripción

Una opción es un contrato que da al poseedor el derecho mas no la obligación de comprar (Call) o vender (Put) un activo a un precio fijo en una fecha determinada o antes de dicha fecha, si la opción puede ser ejercida sólo en la fecha de expiración, es llamada **Opción Europea**, si por el contrario la opción puede ser ejercida en cualquier fecha anterior a la fecha de expiración, será llamada **Opción Americana**, siendo éstas últimas las más comúnmente comerciadas.

Generalmente las opciones Europeas son más fáciles de analizar que las Americanas, y algunas propiedades de las opciones Americanas son regularmente deducidas a partir de las de las opciones Europeas.

Las Opciones son un tipo único de contrato financiero ya que dan al comprador el derecho pero no la *obligación* de hacer algo. De esta forma el comprador ejerce su opción, es decir la usa, sólo si le conviene hacerlo; de otra forma la opción no será ejercida, la opción de no comprar o vender, es decir, de no ejercer el contrato, tiene valor, y por esto el comprador paga al vendedor de la opción un *premio* por este privilegio.

Una opción que sea rentable ejercer con el precio actual del activo referido se dice que está **dentro de dinero**, de esta forma una opción **fuera de dinero** es una opción que no es rentable ejercer con al precio actual del activo. Existe un momento en el cual, el ejercer o no ejercer la opción puede resultar indiferente, a este estado del contrato lo llamaremos **en dinero.**

Una opción tiene cinco características fundamentales que la definen, siendo éstas el tipo de opción (compra -call- o venta --put-), el activo subyacente o de referencia, la cantidad de subyacente que permite comprar o vender el contrato de opción, la fecha de vencimiento y el precio de ejercicio de la opción.

Existe cierto vocabulario específico para las opciones, el cual definiremos a continuación para tener una mayor claridad en lo subsiguiente:

- Subyacente: Activo referido en el contrato.
- Prima: Cantidad pagada por el comprador de la opción
- Ejercer la opción: El acto de comprar o vender el activo subyacente por medio del contrato.
- Precio “Strike” o de ejercicio: Es aquél al que se podrá comprar o vender el activo subyacente de la opción si se ejerce el derecho otorgado por el contrato al comprador del mismo.
- Valor teórico o intrínseco: Precio del activo subyacente - Precio de ejercicio
- Fecha de expiración: También llamada fecha de madurez de la opción, después de esta fecha la opción pierde todo su valor.

Opciones de compra

El tipo más común de opciones son las **Opciones Call**. Este tipo de opciones da al comprador el derecho de comprar un activo durante un periodo de tiempo particular. No existen restricciones sobre el tipo de activo, comúnmente las opciones se negocian sobre tipos de interés, divisas, índices bursátiles o contratos de futuros, pero los activos más comunes utilizados en las opciones son acciones y bonos, regularmente en los contratos de opciones comerciados, el subyacente se compone de 100 acciones.

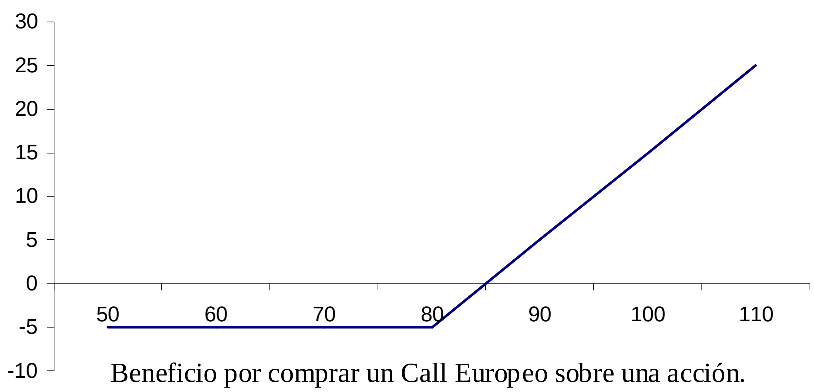
Consideremos la situación de un inversor que compra una opción Call Europeo con un precio strike de $80 para comprar 100 acciones. Supóngase que el precio actual es de $78, la fecha de expiración del contrato es en 6 meses y el precio de una opción para comprar una acción es de $5. Por tanto la inversión inicial es de $500. Como la opción es europea, el inversor sólo puede ejercerla en la fecha de expiración. Si el precio de la acción esta por debajo de $80, claramente la opción no será ejercida, ya que no hay necesidad de comprar la acción a un precio de $80 ejerciendo la opción si en mercado se puede comprar a un menor precio. En estas circunstancias el inversor pierde toda la inversión inicial que en este caso es de $500. Si por el contrario, el precio de la acción esta por encima del precio strike de la opción el inversor elegirá ejercer su opción, si por ejemplo, el precio de la acción se ubica en $95, el inversor podrá comprar 100 acciones a un precio de $80 y si las acciones son vendidas de inmediato, el inversor habrá ganado $15 por acción o $1,500 si ignoramos los costos de transacción. Cuando la inversión inicial es tomada en cuenta, el rendimiento neto del inversor es de $1,000.

Para ilustrar mejor el valor de la opción recurriremos al siguiente diagrama:

Pago en la Fecha de Expiración

	Si $S_T \leq 80$	Si $S_T > 80$
Valor del Call	0	S_T -$80

La siguiente figura muestra cómo la ganancia o pérdida neta de una opción para comprar una acción, ignorando el valor del dinero en el tiempo, varía con el precio final de dicha acción.

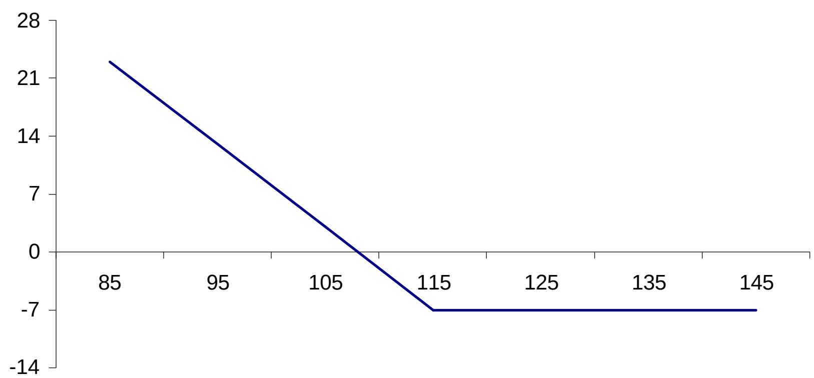


Beneficio por comprar un Call Europeo sobre una acción.
Precio de la Opción = $5; Precio strike = $80

Opciones de venta

Como ya vimos un comprador de un Call se beneficia de los incrementos en el precio de acción, existe una opción en la cual el comprador espera que el precio de la acción disminuya, dicha opción es un Put. Consideremos un inversor que compra un Put Europeo para vender 100 acciones a un precio de ejercicio de $115. Supongamos que el precio actual de cada acción es de $110 y la fecha de expiración de la opción es en tres meses y el precio de la opción para vender una acción es de $7. La inversión inicial, por tanto, es de $700. Como la opción es Europea sólo se ejercerá al final del periodo si el precio de la acción es menor a $120. Supongamos que el precio de la acción en esa fecha es de $100. El inversor puede comprar 100 acciones a un precio de $100 por acción y ejercer su opción y venderlas a un precio de $115, obteniendo con esto un beneficio de $15 por acción o $1500 ignorando de nuevo los costos de transacción. Si nuevamente tomamos en cuenta los $700 de inversión inicial, el beneficio neto del inversor resulta de $800. Desde luego que no hay ninguna garantía de que el inversor hará una ganancia a partir de esta opción, si el precio de la acción se coloca por encima de $115, la opción Put expirará sin valor alguno y el inversor perderá los $700 invertidos.

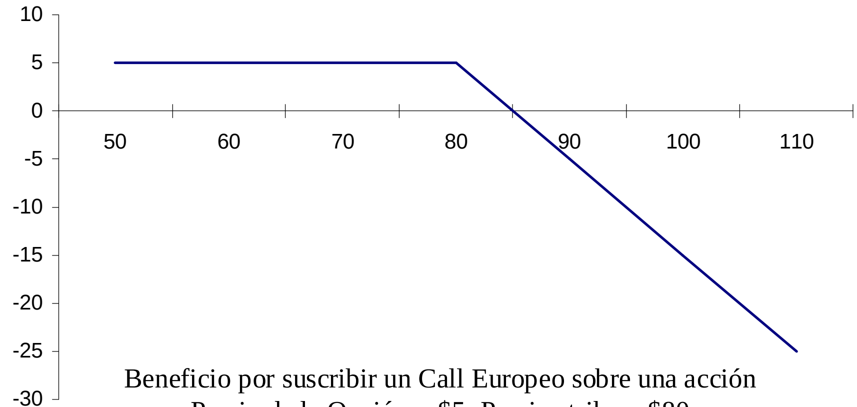
La siguiente figura muestra como en este ejemplo la opción de vender una acción varía su valor dependiendo del precio final de la acción.



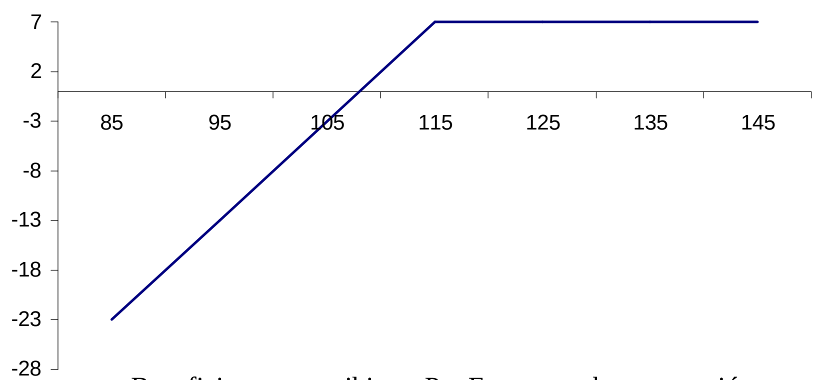
Beneficio por comprar un Put Europeo sobre una acción
Precio de la Opción = $7; Precio strike = $115

Posiciones en las Opciones

Existen dos partes en todo contrato de opciones. Por una parte se encuentra el inversor que toma la posición larga (i.e. que compra el contrato) y por otra esta el inversor que toma la posición corta (i.e. el que vende el contrato). Aquel que ha vendido el contrato debe recibir un pago, pero posteriormente puede tener pérdidas, y éstas están inversamente relacionadas con las ganancias de aquél que compra la acción, este tipo de operaciones en los que la ganancia de una parte equivale íntegramente a las pérdidas de la contraparte son llamados de “suma cero”. Las siguientes figuras muestran las posiciones cortas de las figuras precedentes en los ejemplos de las acciones anteriores.



Beneficio por suscribir un Call Europeo sobre una acción
Precio de la Opción = $5; Precio strike = $80



Beneficio por suscribir un Put Europeo sobre una acción
Precio de la Opción = $7; Precio strike = $115

Existen 4 posibles posiciones en un contrato de opciones:

1. Posición larga en un Call (long call)
2. Posición corta en un Call (short call)
3. Posición larga en un Put (long put)
4. Posición corta en un Put (short put)

Es regularmente útil caracterizar las posiciones en los contratos de opciones a partir del valor al término o "payoff" del inversor en la fecha de expiración. En estos casos el costo inicial de la opción no se incluye

Si ***K*** es el precio strike y definimos S_T como el precio de mercado del activo referido en el contrato en la fecha de expiración T, el payoff o pago de una posición larga en un Call Europeo es:

$$\max(S_T - K, 0)$$

Esto refleja el hecho de que la opción será ejercida si $S_T > \boldsymbol{K}$ y no será ejercida si $S_T \leq$ ***K***, el pago de la posición corta de un Call Europeo es:

$$-max(S_T - k,0) = min(k - S_T,0)$$

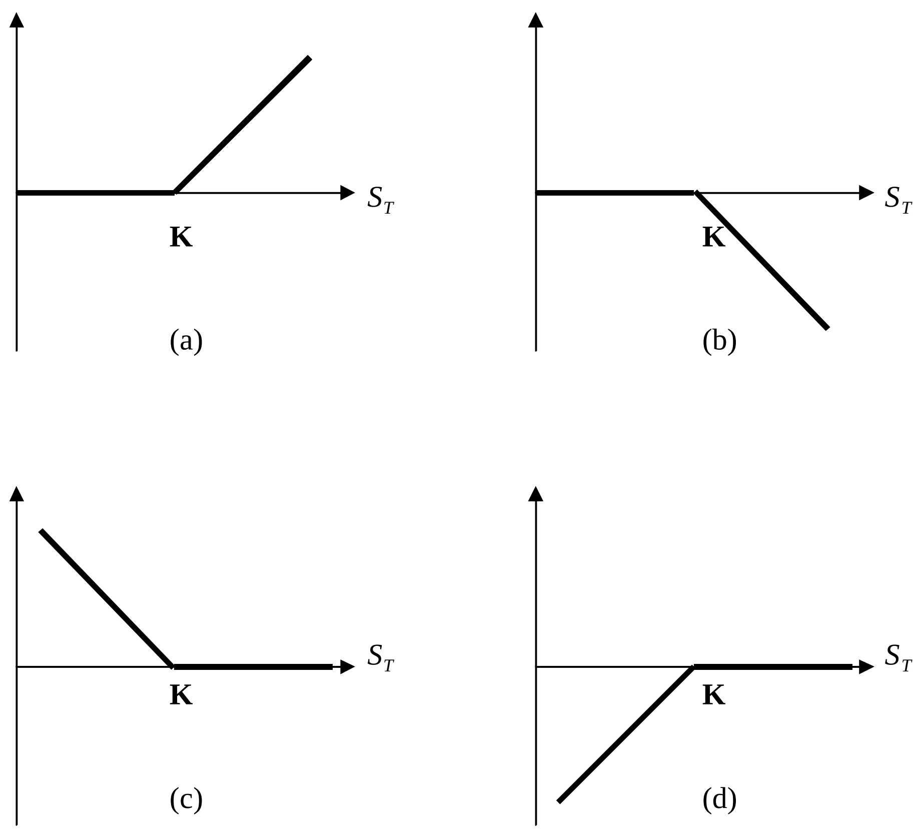
El pago del dueño de la opción con la posición larga en un Put Europeo es:

$$max(k - S_T,0)$$

y el pago de una posición corta en un Put Europeo es:

$$-max(k - S_T,0) = min(S_T - k,0)$$

La siguiente figura muestra claramente como son los pagos de las cuatro posiciones posibles en una opción Europea.



Payoff de posiciones en opciones Europeas: (a) Call largo, (b) Call corto, (c) Put largo, (d) Put corto. Precio Strike = K; precio del activo a la madurez = S_T

Antes de continuar hay que recalcar que, como ya se dijo, las opciones comerciadas sobre acciones son usualmente Americanas en lugar de Europeas. Esto implica que, en vez de esperar forzosamente a la fecha de expiración, el inversor puede ejercer su opción en cualquier fecha anterior. Veremos más adelante que bajo ciertas circunstancias es óptimo ejercer las opciones Americanas antes de su fecha de expiración.

2.3 Factores que afectan el precio de una opción sobre acciones

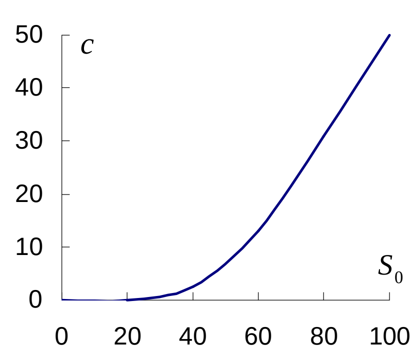
1. Precio actual de la acción, S_0
2. Precio de ejercicio, K
3. El tiempo para vencimiento, T
4. Volatilidad de la acción, σ
5. Tasa de interés libre de riesgo, r
6. Dividendos esperados durante la vida de la opción.

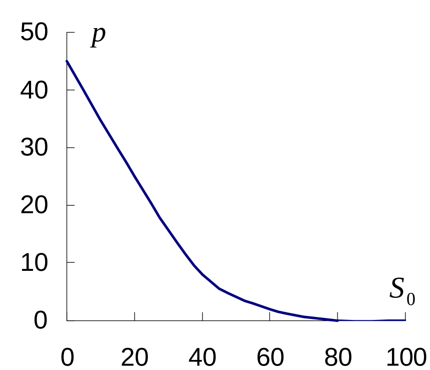
Haremos un análisis por separado de la reacción que presenta el precio de una opción con el incremento de cada una de estas variables con todo lo demás fijo.

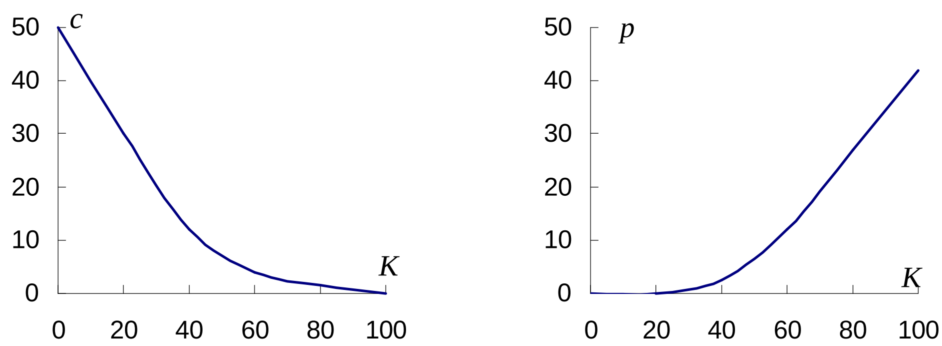
Ilustraremos el efecto de cada una de las variables sobre el precio de una opción con: $S_0 = 50$, $K = 50$, r = 5%, σ = 30% y T = 1

Precio de la acción y precio de ejercicio

Como ya vimos el pago de un call reside en la cantidad con que el precio de la acción excede el precio de ejercicio, por lo que una opción call se vuelve más valiosa si el precio de la acción crece y menos valiosa si el precio de ejercicio crece. Las opciones put se comportan de manera inversa., ya que el pago de éstas resulta del exceso del precio de ejercicio sobre el precio de la acción, de esta forma el valor del put se incrementa si el precio de ejercicio incrementa y disminuye si el precio de la acción aumenta.

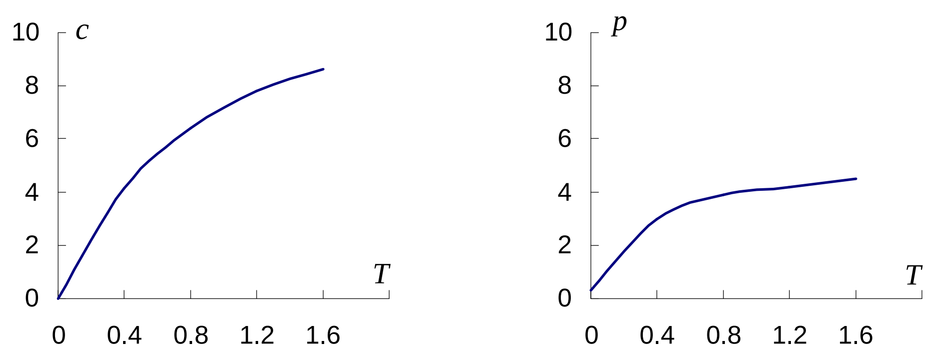






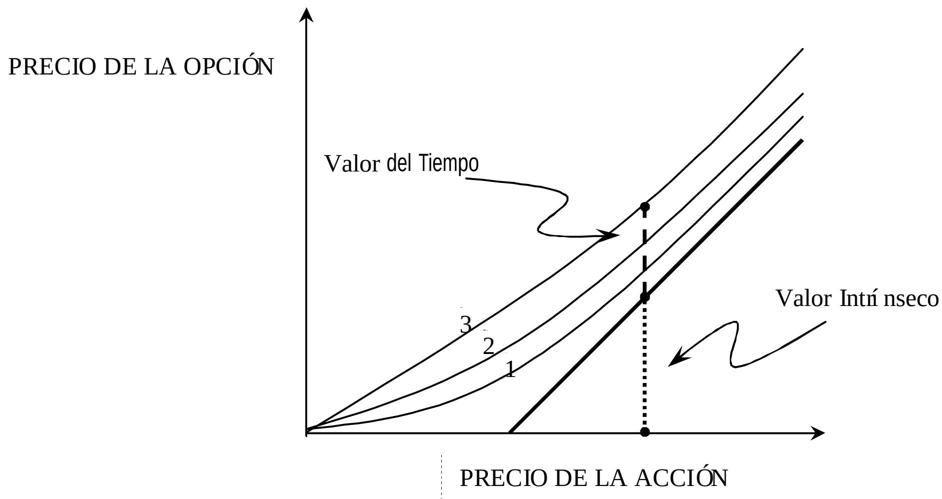
Tiempo antes del vencimiento

Para Calls y Puts americanos un aumento en el tiempo de expiración significa un aumento en el valor de la opción, si consideramos dos opciones que sólo tienen la diferencia de que una de ellas cuenta con un tiempo mayor antes de su fecha de expiración, el dueño de la opción con una vida mayor tiene todas las oportunidades de ejercer la opción que tiene el dueño de la opción con una vida menor y más. Por lo cual podemos deducir que la opción con mayor tiempo de vida debe valer por lo menos el valor de la opción con el menor tiempo de vida. Además, mientras mayor sea el tiempo para su vencimiento, menor será el valor presente del precio de ejercicio que debe pagarse en el Futuro y esto también incrementa el valor de la opción, si las demás cosas permanecen constantes.



A pesar de que las opciones europeas también incrementan generalmente su valor si el tiempo antes de su fecha de expiración se incrementa, este no es el caso general; consideremos, por ejemplo, el caso de dos opciones Call europeas sobre acciones: una con una fecha de expiración de un mes y la otra con una fecha de expiración dentro de dos meses. Supóngase que se espera un dividendo muy grande en seis semanas. El precio de la acción tiene que reflejar el dividendo pagado, es decir, el precio de la acción disminuye, por lo que el valor de la opción con menor vida puede ser mayor que el valor de la opción con una vida mayor.

En general, al acercarse el tiempo de vencimiento, la relación entre el valor de la opción y el de la acción se vuelve más convexa En la siguiente figura, la línea 1 representa una opción con un tiempo menor a su vencimiento que el de la línea 2 y la línea 2, una opción con un tiempo menor a su vencimiento que para el de la línea 3.



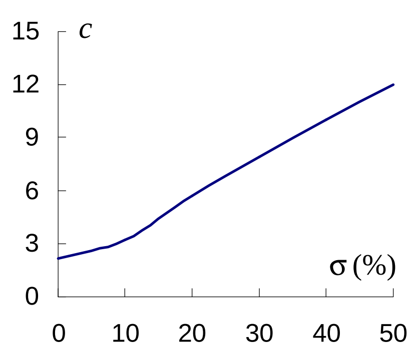
Nunca es lo mejor que el tenedor de opciones las ejerza pronto, esto es evidente en la figura, donde las líneas de valor real de la opción exceden la línea del valor teórico o intrínseco, y desde luego, cuando se ejerce una opción, ésta vale sólo su valor teórico. Esto depende del precio de la acción. El tenedor siempre debe conservar su opción, mientras que para el emisor es conveniente retirar la opción del tenedor tan pronto como sea posible.

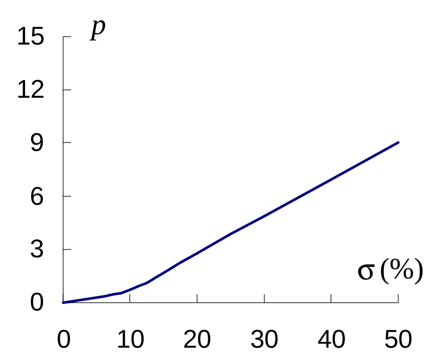
Hemos denominado como valor del tiempo de la opción al exceso de valor de la opción sobre su valor intrínseco, así, el valor en el mercado de una acción dentro de dinero depende de qué tan dentro esta en dinero, es decir su valor intrínseco y del valor del tiempo de la opción, mientras que dado que una opción fuera de dinero no tiene valor intrínseco, su valor en el mercado depende sólo del valor del tiempo del contrato. Este valor del tiempo del contrato refleja la probabilidad de que su valor se incremente antes de la fecha de expiración, esto tiene que ver entre otras cosas con la volatilidad de la acción o activo subyacente, como se muestra en la figura, con todo lo demás constante, mientras mayor sea el tiempo antes de su vencimiento, mayor será el valor del tiempo del contrato, esto es por la simple razón de que mientras menor sea el tiempo antes de expiración, menores son las oportunidades de que el contrato entre profundamente en dinero antes de expirar. Una vez que llega la fecha de expiración, el valor del tiempo de la opción es cero y el contrato sólo vale su valor intrínseco.

Ahora veremos que el valor del tiempo del contrato se aproxima a cero cuando la opción se encuentra profundamente dentro o fuera de dinero y cuando el tiempo de expiración esta a punto de llegar, más aún podemos adicionar que el mayor valor que puede llegar a obtener el tiempo del contrato se logra cuando la opción esta en dinero, podemos ejemplificar esto al tomar los dos extremos del precio del activo ($S = 0$ ó $S = \infty$) cuando el precio del activo se aproxima a estos dos extremos el valor del tiempo del contrato es virtualmente cero por que es extremadamente improbable que el valor del activo cambie su tendencia por eventos futuros y regrese a un valor en el cual la opción pueda llegar a ser valiosa.

Volatilidad

La volatilidad de una acción es una medida de qué tan inciertos son los movimientos en los precios futuros de la acción, si la volatilidad se incrementa, la oportunidad de que podamos tener grandes ganancias con la opción aumenta, así mismo, también aumenta la oportunidad que nos pueda ir muy mal. Para el dueño de una acción esos dos resultados tienden a compensarse entre ellos, pero para el poseedor de una opción esto no sucede de este modo, de este modo, el poseedor de una opción call se beneficia de todo incremento en el precio de una acción pero su pérdida esta limitada tan sólo por el precio de la opción no importa cuánto caiga el precio de la acción. Similarmente el poseedor de un put, se beneficia de la disminución en el precio de la acción a que está referida su opción pero su pérdida es limitada en el evento en que el precio de la acción crezca. Es por esto que el valor de ambos, Puts y Calls se incrementa cuando la volatilidad se incrementa.





Por lo general, el factor más importante en la valuación de las opciones es la volatilidad en el precio del valor asociado. Mientras mayor sea la volatilidad, más alta será la curva en la línea de mercado en la figura del inciso anterior. Si no es probable que la acción cambie mucho en su precio, una opción sobre la misma vale poco, y la curva estará muy cerca del límite inferior. Con la volatilidad, la opción será valiosa. Al principio de un periodo, podemos estar considerando opciones en las dos acciones que se muestran en la siguiente tabla.

Probabilidad de ocurrencia	.1	.25	.30	.25	.10
Precio de la acción A	\$30	\$36	\$40	\$44	\$50
Precio de la acción B	\$20	\$30	\$40	\$50	\$60

El valor esperado del precio de las acciones al final del periodo es igual para ambas acciones, \$40. Sin embargo, para la acción B existe una dispersión mucho más grande de resultados posibles Supongamos que los precios de ejercicio de las opciones para comprar las acciones A y B al final del periodo son los mismos, \$38. De manera que las dos acciones tienen los mismos valores esperados al final del periodo, y las opciones tienen el mismo precio de ejercicio.

Sin embargo, el valor esperado de la opción para la acción A al final del periodo es

Opción A = 0(.10) + 0(.25) + (\$40 -\$38) (.30) + (\$44 -\$38) (.25) + (\$50 -\$38) (.10)

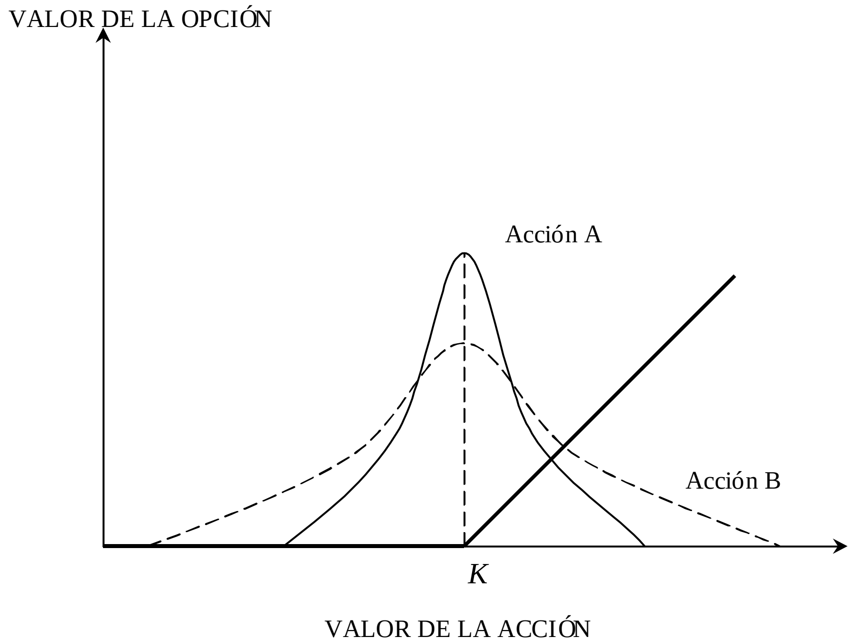
= \$330

Mientras que para la acción B es

Opción B = 0(.10) + 0(.25) + (\$40 -\$38) (.30) + (\$50 -\$38) (.25) + (\$60 -\$38) (.10)

=\$580

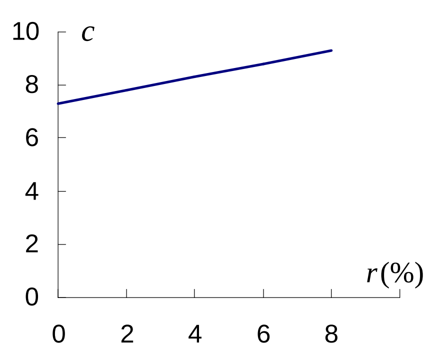
De manera que la mayor dispersión de resultados posibles para la acción B lleva a un valor esperado mayor del precio de la opción en la fecha de vencimiento. A su vez, esto se origina en el hecho de que el valor de una opción no puede ser inferior a cero. Como resultado, mientras mayor sea la dispersión, mayor será la magnitud de los posibles resultados favorables que se miden por el precio de la acción menos el precio de ejercicio. En consecuencia, los incrementos en la volatilidad de la acción aumentan la magnitud de los posibles resultados favorables para el comprador de la opción y, por tanto, aumentan el valor de la opción.
Esto se puede ver en la siguiente figura, donde se muestran dos acciones con diferentes distribuciones en el precio de las acciones al final del periodo. El precio de ejercicio, *K*, es el mismo, de manera que el límite inferior de los valores de las opciones en las fechas de vencimiento también es igual para ambas. Esto se muestra mediante la línea oscura que ya mencionamos anteriormente al referirnos al pago de la opción.

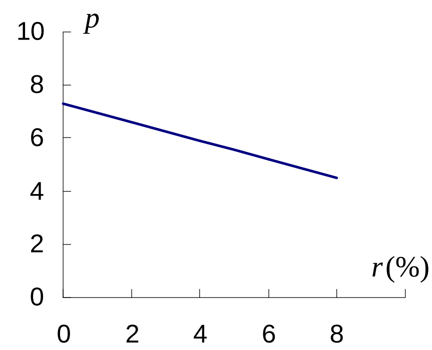


La distribución de probabilidades del precio de las acciones al final del periodo es más amplia para la acción B que para la acción A, la cual refleja una mayor volatilidad. Puesto que la acción B proporciona una mayor probabilidad de obtener un pago grande, su opción vale más.

Tasa libre de riesgo

El precio de una opción se ve afectado por la tasa libre de riesgo en una manera menos obvia o directa que en las variables anteriores. Cuando las tasas de interés en la economía se incrementan, el rendimiento requerido por los inversores en las acciones también tiende a incrementarse, además disminuye el valor presente de todo flujo de efectivo futuro que recibirá el poseedor de la opción; La acción combinada de estos dos efectos resulta en la disminución del valor de la opción put y en el incremento de la opción call.
Debemos recalcar que estamos suponiendo que las tasas de interés cambian mientras todos los demás factores permanecen constantes, en particular, estamos asumiendo que el precio de la acción se mantiene fijo mientras las tasas de interés cambian, en la práctica cuando las tasas de interés suben (bajan), el precio de las acciones baja (sube). El efecto neto en el aumento de las tasas de interés y el decremento de los precios de las acciones puede resultar en el incremento del valor de un put y la disminución en el valor de un call y, de manera análoga, el decremento en las tasas de interés y el aumento en los precios de las acciones pueden tener un efecto combinado neto de un incremento en el valor de un call y una disminución de valor de un put.





Dividendos

Los dividendos tienen el efecto de reducir el precio de una acción, estas son malas noticias para el valor de una opción call y buenas noticias para el valor de una opción put. El valor de un call es entonces negativamente relacionado al tamaño de cualquier dividendo anticipado, y el valor de un put es positivamente relacionado al tamaño de los dividendos anticipados.

Cada uno de estos factores afecta de diferente manera y con diferente intensidad el valor de una opción, ya sea de compra o de venta, americana o europea. Resumiremos en la siguiente tabla el efecto positivo o negativo que se observa sobre el precio de las opciones cuando se presenta un incremento en una de las seis variables y se mantienen fijas las otras cinco:

Variable	Call Europeo	Put Europeo	Call Americano	Put Americano
Precio actual de la acción	↑	-	↑	-
Precio de ejercicio	-	↑	-	↑
Tiempo para vencimiento	?	?	↑	↑
Volatilidad	↑	↑	↑	↑
Tasa libre de riesgo	↑	-	↑	-
Dividendos	-	↑	-	↑

Para continuar con este desarrollo es necesario precisar ciertos supuestos que se utilizarán y notación necesaria para las opciones.

Asumimos que existen algunos participantes en el mercado, como bancos con grandes inversiones, tales que:

1. No hay costos de transacción
2. Todos los beneficios y pérdidas de transacciones están sujetos a los mismos impuestos.
3. Se puede prestar y pedir prestado a la tasa libre de riesgo.

Asumimos que estos participantes están listos para tomar ventaja de cualquier oportunidad de arbitraje que se pueda dar, esto significa que cualquier oportunidad de arbitraje desaparece muy rápidamente. Para el propósito de nuestro análisis es entonces razonable suponer que no existe oportunidad de arbitraje.

Usaremos la siguiente notación:

S_0: Precio stock actual

K : Precio de ejercicio de la opción

T : Tiempo para vencimiento

S_T : Precio stock al vencimiento

r : Tasa de interés libre de riesgo compuesta y continua para una inversión con vencimiento en tiempo T

C : Valor de una opción call Americana para comprar una acción.

P : Valor de una opción put Americana para comprar una acción.

c : Valor de una opción call Europea para comprar una acción.

p : Valor de una opción put Europea para comprar una acción.

Debemos decir que r es la tasa nominal, no la tasa real de interés. Por lo que podemos asumir que $r > 0$; de otra forma, una inversión libre de riesgo no proveerá ventajas sobre dinero en efectivo, es decir, si $r < 0$, el efectivo sería preferible a la inversión libre de riesgo.

2.4 Rango de valores de las opciones

Cuando hablamos del tiempo restante para el vencimiento, implícitamente hicimos notar que el valor de una opción Americana debe ser mayor o al menos igual al de una opción Europea, ya anteriormente habíamos mencionado que la opción de no comprar o vender, es decir, de no ejercer el contrato, tiene valor, por lo que podemos deducir las siguientes desigualdades:

$$C \geq c \geq 0 \qquad\qquad P \geq p \geq 0$$

Para deducir las fronteras de los precios de las opciones utilizaremos el argumento de que si el precio de la opción se encuentra fuera de dichas fronteras, existen oportunidades de arbitraje.

Fronteras Superiores

El mayor valor que la opción puede alcanzar es el valor de la acción. Se supone que se puede alcanzar este valor sólo si la opción tiene mucho tiempo para su vencimiento, quizás para siempre, y si no se espera que la opción se ejerza sino hasta en un futuro muy lejano. En estas circunstancias, se aproxima a cero el valor presente del precio de ejercicio que deberá pagarse en el futuro. Como resultado, el valor de la opción se aproxima al valor de la acción asociada.

Un call Americano o Europeo da al tenedor la oportunidad de comprar una acción a cierto precio. Como ya dijimos, no importa que pase, la opción no puede valer más de lo que vale la acción, por lo cual el precio stock es una frontera superior del precio de una opción.

$$c \le S_0 \qquad \text{y} \qquad C \le S_0$$

Si esta relación no se diera un arbitrajista podría hacer una ganancia sin riesgo comprando la acción y vendiendo la opción.

Un put Americano o Europeo da al dueño la opción de vender una acción a cierto precio, por lo que nunca su valor debe de ser mayor a *K*. Es decir,

$$p \le K \qquad \text{y} \qquad P \le K$$

Para opciones Europeas sabemos que la opción en su madurez no puede valer más que *K*, deducimos entonces que hoy no puede valer más que el valor presente de *K*.

$$p \le Ke^{-rT}$$

Si esto no fuera cierto un arbitrajista podría vender la opción e invertir el dinero de la venta a la tasa libre de riesgo.

Fronteras inferiores para Opciones de compra sobre acciones que no pagan dividendos

Consideremos los siguientes dos portafolios.
Portafolio A : un call Europeo mas una cantidad de dinero igual a Ke^{-rT}
Portafolio B : una acción

Para tener una mejor idea del valor del portafolio A a través del tiempo, lo ejemplificaremos en la siguiente tabla:

Portafolio A	t	$T_1 : S_T > K$	$T_2 : S_T < K$
Call Europeo	c	$S_T - K$	0
Dinero en Efectivo	Ke^{rT}	K	K
Total	c+ Ke^{rT}	S_T	K

Es decir, si $S_T > K$ el portafolio A vale S_T y si $S_T < K$ el portafolio vale K.

Por lo que el portafolio A al tiempo T vale:

$$\max(S_T, K)$$

El portafolio B valdrá S_T al tiempo T sin importar si S_T > K o S_T <K.

Por lo que podemos observar que el portafolio A vale lo mismo o puede valer más que el portafolio B a la fecha de expiración T, por lo que para que no existan oportunidades de arbitraje debe ser cierto también para hoy, es decir:

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

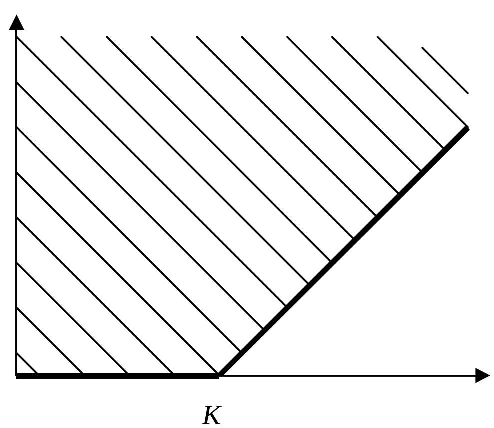
o

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

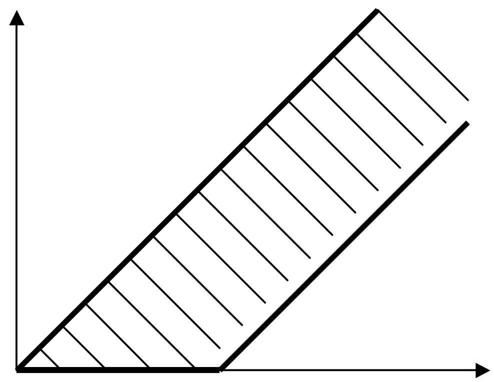
Como ya mencionamos el valor de una opción nunca es negativo, por lo que:

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

Gráficamente



Como la opción no puede valer más que la acción, obtenemos el **rango de valores para un call**:



Fronteras inferiores para Opciones de Venta Europeas sobre acciones que no pagan dividendos

De nuevo consideraremos dos portafolios:
Portafolio C : un put Europeo mas una acción
Portafolio D : una cantidad de dinero igual a Ke^{-rT}

Para tener una mejor idea del valor del portafolio C a través del tiempo, lo ejemplificaremos en la siguiente tabla:

Portafolio C	t	$T_1 : S_T > K$	$T_2 : S_T < K$
Put Europeo	p	0	K
Acción	S_0	S_T	0
Total	p+ S_0	S_T	K

Es decir, si $S_T > K$, el portafolio vale S_T ; y si $S_T < K$ se ejerce la opción, esto es, vendemos la acción y el portafolio vale K.

Por lo tanto, el valor del portafolio C al tiempo T es:

$$\max(S_T, K)$$

Por otro lado, si invertimos a la tasa libre de riesgo, el portafolio D vale K al tiempo T. Lo que implica que el portafolio C vale tanto o más que el portafolio D al tiempo T, podemos entonces asumir que en ausencia de arbitraje, el portafolio C también vale tanto o más hoy que portafolio D, es decir:

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

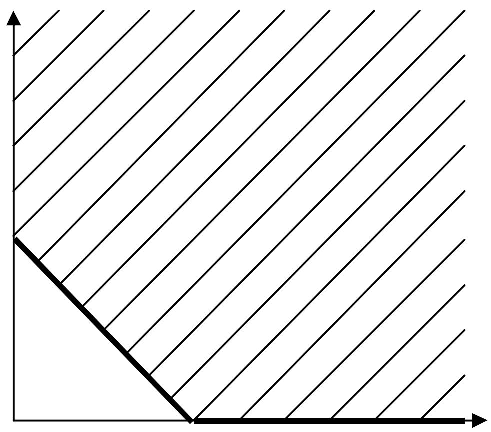
o

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

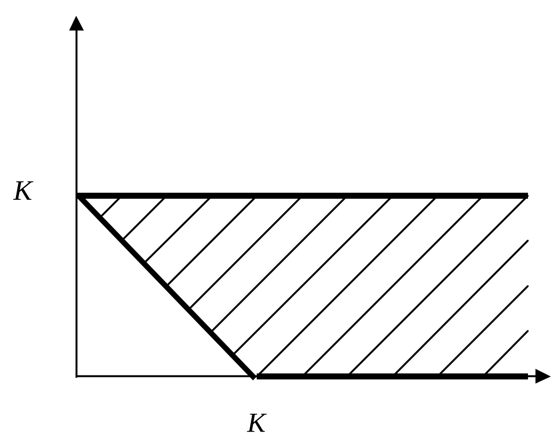
Como lo peor que puede pasar para una opción es que expire sin valor, su valor no puede ser negativo, lo que significa que:

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

Gráficamente



Como sabemos, el valor del put no puede sobrepasar el precio de ejercicio (K), por lo que gráficamente trazamos el **rango de valores de un put** de la siguiente forma:



2.5 Paridad Call-Put

Ahora deduciremos una relación muy importante entre p y c. Consideremos dos portafolios que usamos recientemente:

Portafolio A : un call Europeo mas una cantidad de dinero igual a Ke^{-rT}
Portafolio C : un put Europeo mas una acción

Como ya vimos, al momento de su madurez ambos valen

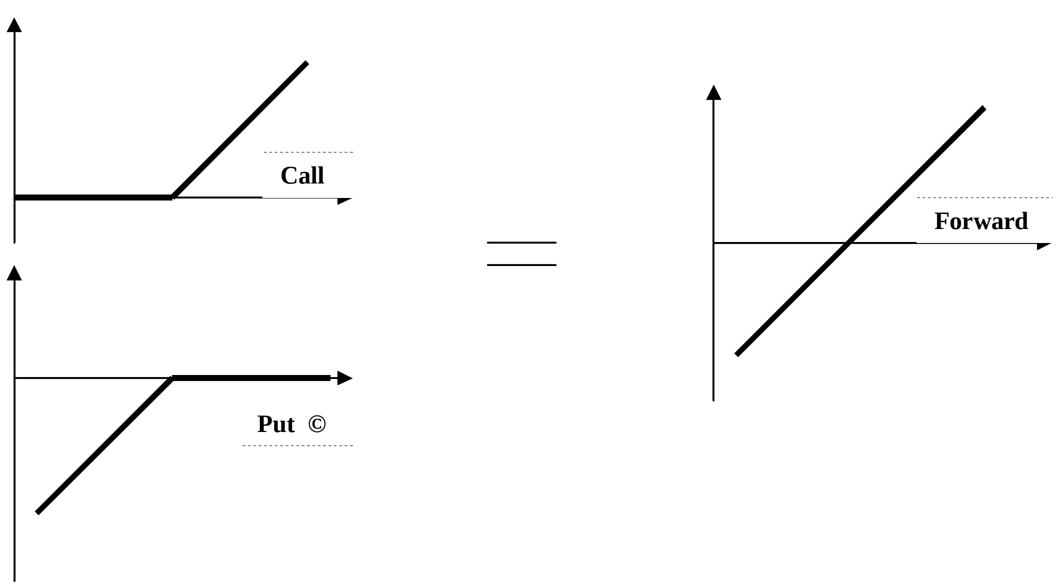
$$\max(S_T, K)$$

por lo que hoy, ambos deben de valer lo mismo, lo que significa que:

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

Esta relación (paridad call-put) muestra que el precio de un call Europeo con cierta fecha de expiración y precio de ejercicio, puede ser deducido a partir del precio de un put Europeo con la misma fecha de vencimiento y mismo precio de ejercicio.

Para deducir un poco más lógicamente esta relación, podemos observar el pago de un call y de la posición corta de un put con la misma fecha de expiración y precio de ejercicio y a lo que esto se iguala al tener ambos instrumentos en un portafolio:



Por lo que un portafolio conformado por un call y un put corto es igual a un forward, en términos de sus respetivos valores:

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT}$$

o

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

que es la desigualdad ya deducida con la ayuda de los portafolios A y C.

2.6 Ejercer anticipadamente

Ejercer anticipadamente una opción de compra sobre una acción que no paga dividendos

En esta parte demostraremos que nunca es óptimo ejercer prematuramente un call Americano sobre una acción que no paga dividendos. Consideremos un call Americano con fecha de vencimiento en un mes y precio de ejercicio $40, el precio actual de la acción es de $50. La opción esta profundamente en dinero por lo que el tenedor puede estar tentado a ejercer su opción en este momento, sin embargo si desea mantener la acción por más de un mes, esta no es la mejor estrategia. Una mejor estrategia es ejercerla al final del mes, de esta forma, los $40 se pagan un mes después y con esto el tenedor de la opción puede ganar intereses sobre los $40 por todo un mes. Como la acción no paga dividendos, ningún beneficio resulta desperdiciado. Otra ventaja de esperar hasta el vencimiento de la opción, es que existe la posibilidad de que el precio de la acción caiga por debajo de los $40, con lo que el tenedor de la opción no la ejercería y se alegraría de no haberla ejercido antes.

Los argumentos hasta ahora dados muestran que nunca es óptimo ejercer un call Americano si el inversor pretende conservar la acción hasta la madurez de la opción. Otra opción es que el inversor pueda pensar que la acción esta sobrevaluada y se pregunta si debe ejercer la opción y vender inmediatamente la acción, en este caso, lo que se debe de hacer es vender la opción, ya que de esta forma la opción será comprada por un inversor que sí quiera mantenerla hasta su vencimiento, estos inversores deben de existir, de otra forma la acción no valdría en este momento $50 y, por las razones antes mencionadas, el precio obtenido por vender la opción será mayor que su valor intrínseco.

Formalmente podemos decir que como ya vimos, en ausencia de arbitraje:

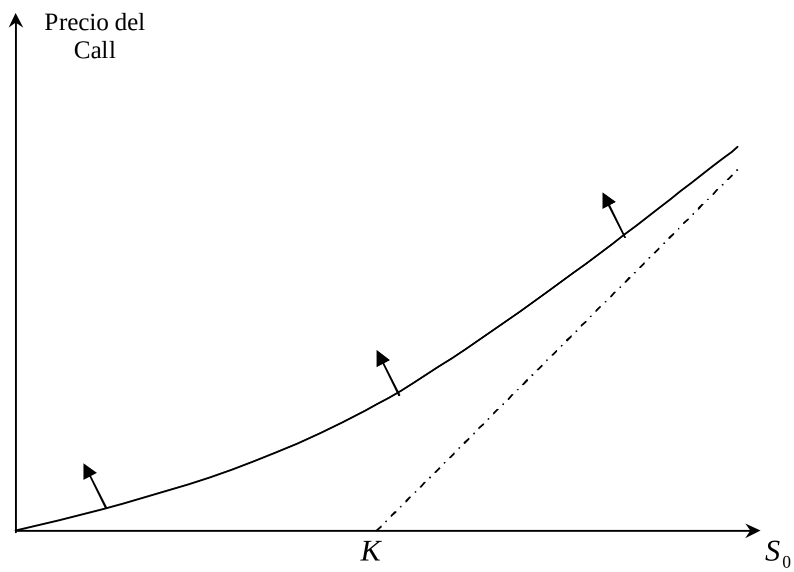
$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Como el dueño de la opción Americana tiene las mismas oportunidades de ejercer su opción que el dueño de la correspondiente opción Europea y más $C \geq c$, por lo que

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Como r > 0 se sigue que $C > S_0 - K$, si fuera óptimo ejercer antes la opción C sería igual a $S_0 - K$, por lo tanto nunca es óptimo ejercer prematuramente.

La siguiente figura muestra la forma general en que el valor del call varía con respecto a K y S_0. Indica que el precio del call siempre esta por encima de su valor intrínseco de $\max(S_0 - K, 0)$. Si r o T o la volatilidad se incrementa, el precio de la opción se mueve en la dirección indicada por las flechas, es decir, más lejos aún de su valor intrínseco.



Ejercer anticipadamente una opción de venta sobre una acción que no paga dividendos

Contrario a lo que acabamos de ver para los calls, puede ser óptimo ejercer prematuramente un put Americano sobre una acción que no paga dividendos si éste se encuentra suficientemente dentro de dinero en determinado momento de su vida. Para ilustrar esto tomaremos como ejemplo un caso extremo, supongamos que el precio de ejercicio es $10 y el precio actual de la acción es virtualmente cero, si el dueño de la opción ejerce inmediatamente su opción, tendrá una ganancia neta de $10, por el contrario si decide esperar, podrá recibir menos de $10 al ejercer pero nunca más, ya que, las acciones no tienen precios negativos, más aún, si ejerce en este momento recibirá $10 en este momento que es preferible a recibir $10 en el futuro, se sigue que la opción debe ser ejercida inmediatamente.

El put, como el call, puede ser visto como un contrato que provee un seguro. Un portafolio con un put y la acción referida por la opción provee un seguro en contra de una caída abrupta del precio de la acción, pero a diferencia de los calls, puede ser óptimo para el tenedor de un put ejercer anticipadamente su opción si esta se encuentra suficientemente dentro de dinero y dejar de contar con dicho seguro. En general ejercer anticipadamente el put se vuelve más atractivo cuando S_0 decrece, r se incrementa o la volatilidad disminuye.

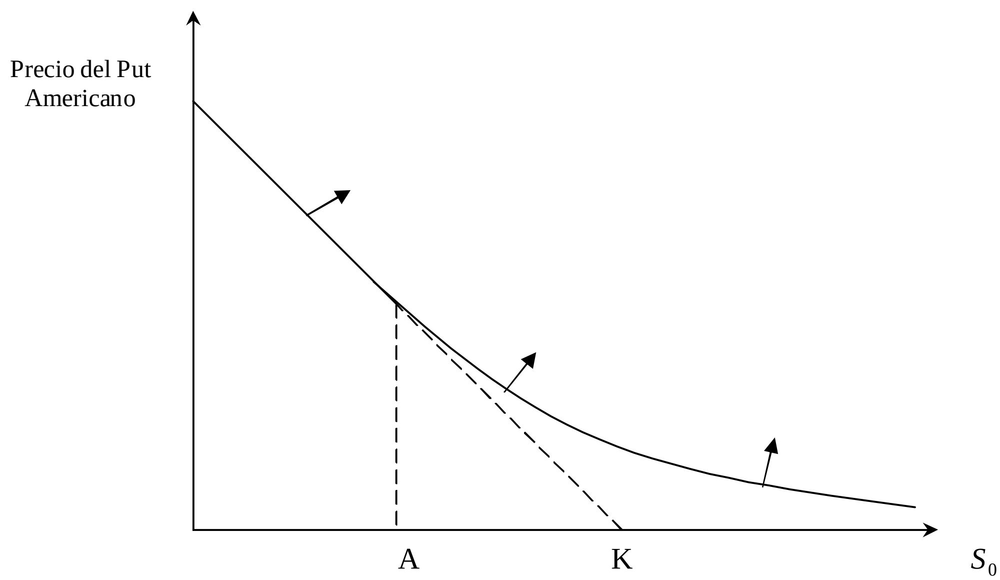
Recordamos que

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Como ejercer inmediatamente la opción es algo posible para una opción Americana

$$P \geq K - S_0$$

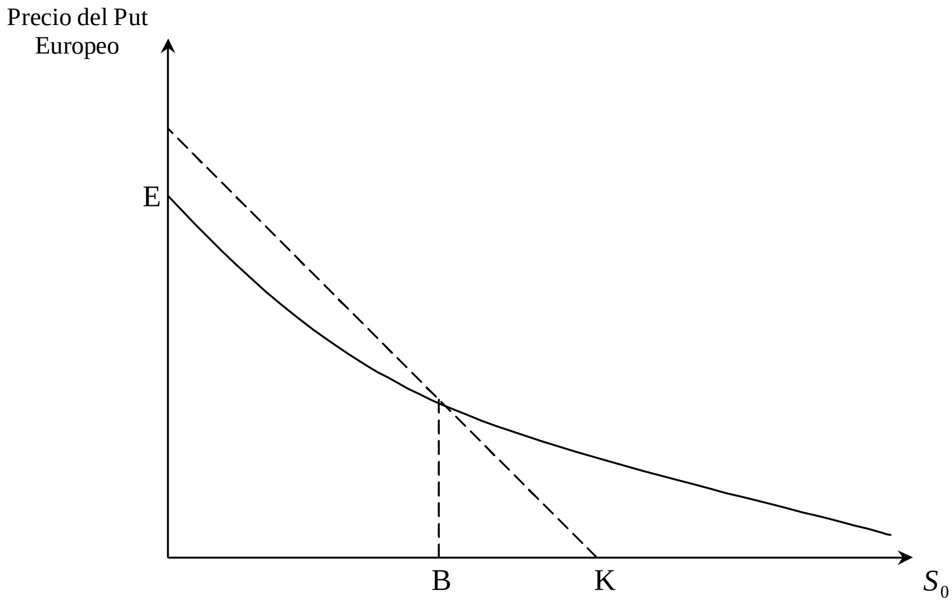
La siguiente figura muestra en forma general cómo es que el precio de un put Americano varía de acuerdo con S_0



Dado que r > 0, siempre es óptimo ejercer la opción si el precio actual de la acción es suficientemente bajo, cuando ejercer anticipadamente es óptimo, el valor de la opción es $K - S_0$, entonces para valores suficientemente pequeños de S_0, la curva que representa el valor del put se aproxima a su valor intrínseco $K - S_0$. En la figura anterior este valor de S_0 se denota por el punto A. La curva que relaciona el precio del put y el precio de la acción se mueve en la dirección indicada por las flechas cuando r decrece, la volatilidad crece y cuando T decrece.

Como es algunas veces óptimo ejercer anticipadamente un put Americano, se sigue que el valor del put Americano debe ser siempre mayor que el del correspondiente put Europeo. Más aún como en ocasiones el valor del put Americano es igual a su valor intrínseco, podemos deducir que el valor del put Europeo es, en algunas ocasiones, menor que su valor intrínseco.

La siguiente figura muestra las variaciones en el precio de un put Europeo con respecto al precio de la acción.

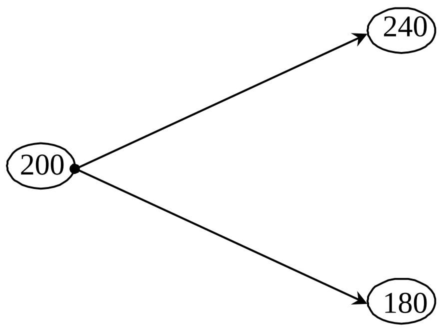


Se debe notar que el valor de B en la figura anterior, en el cual el precio de la opción se iguala a su valor intrínseco, debe representar un valor mayor de S_0 que el punto A en la figura que le precede, el punto E de la figura anterior es el punto en que el valor donde $S_0 = 0$, y el precio de la opción es Ke^{-rT}.

2.7 Modelo Binomial

El argumento fundamental de este método es el mismo que ya describimos para delimitar los precios de las opciones, el uso de la ausencia de arbitraje se utilizará a continuación para crear un portafolio que replique los pagos de una opción y dado que tienen el mismo diagrama de pagos futuros, ambos portafolios deben de valer hoy lo mismo.

Supongamos que existe una acción cuyo precio hoy es de \$200 y calculamos que dicho precio sólo podrá aumentar a un precio de \$240 o disminuir a \$180. Si existe una opción call para esta acción con precio de ejercicio \$190, sus pagos, tomando en cuenta que la acción sólo podrá moverse en los dos sentidos mencionados, serán entonces de \$50 y 0 respectivamente. La situación se ilustra en la siguiente figura



K = 190	Pago de la opción
50	50
-10	0

Como ya dijimos construiremos un portafolio que replique el diagrama de pagos de dicha opción, este portafolio constará de **Δ** veces la acción y un préstamo de una cantidad *B* a la tasa libre de riesgo que supondremos es de 10%. Para obtener el valor de **Δ** observemos que contamos con los pagos futuros del portafolio (los mismos que los de la opción) por lo que podemos construir el siguiente diagrama y deducir posteriormente el valor de **Δ**.

	t	$T_1 : S_T = 240$	$T_2 : S_T = 180$
Δ Subyacente	**200Δ**	**240Δ**	**180Δ**
Prétamos VP(*B*)	$\boldsymbol{B}\, e^{-rT}$	**-*B***	**-*B***
Total	**200Δ-B** e^{-rT}	**240Δ-*B***	**180Δ-*B***

entonces

$$\left.\begin{array}{l} 240\Delta - B = 50 \\ 180\Delta - B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 60\Delta = 50 \Rightarrow \Delta = \frac{5}{6}$$

Con el valor de **Δ** podemos fácilmente calcular el valor de *B* ya que

$$B = 240\Delta - 50$$

o

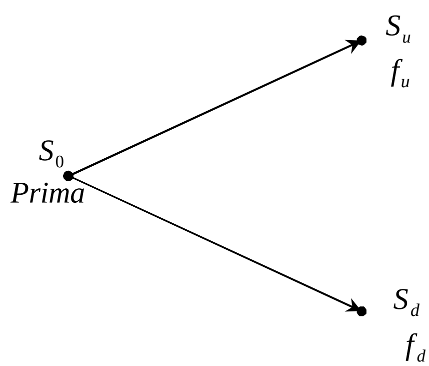
$$B = 180\Delta$$

Por lo que *B* = 150, ya con estos valores podemos calcular el valor del call.

	t		
5/6 Subyacente	166.6666667	200	150
Prétamos VP(150)	150 e^{-rT}	-150	-150
Total	166.66667-150 e^{-rT}	50	0

De este modo deducimos que el precio del Call es de $150e^{rT} - 166.66667$ y como ya vimos el valor de una opción no puede ser negativo por lo que determinamos que si T=1 el precio de la opción es: C = 30.9411

Para ilustrar de modo general esta valuación utilizaremos la notación ya descrita. Supondremos que la opción durará por un tiempo T y que el precio del subyacente sólo podrá cambiar a uno de los siguientes dos estado: S_d o S_u, donde $S_d = d * S_0$ y $S_u = u * S_0$ con d <1 y u > 1. Si el subyacente alcanza el precio S_d supondremos que el valor intrínseco de la opción será f_d y por el contrario el valor teórico de la opción será f_u si el subyacente tiene un valor de S_u. Esta situación se ilustra en la siguiente figura que será la forma básica que nos permita valuar e ilustrar los movimientos del subyacente por medio de *árboles binomiales*



Como ya explicamos al inicio de esta sección construiremos un portafolio que replique el pago de una opción sobre el subyacente que se comporta como arriba se menciona.

Usando **Δ** y *B* como en el ejemplo:

	t	$S_T = S_u$	$S_T = S_d$
Δ Subyacente	-Δ S_0	Δ S_u	ΔS_d
Prétamos VP(*B*)	*B* e^{-rT}	-*B*	-*B*
Total	-ΔS_0+B e^{-rT}	f_u	f_d

Donde

$$\begin{aligned} f_u &= \Delta S_u - B \\ f_d &= \Delta S_d - B \end{aligned} \qquad \Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$

y

$$B = \begin{cases} \Delta S_u - f_u \\ \Delta S_d - f_d \end{cases}$$

Otra forma de obtener *B* es usar Cramer a partir del primer sistema de ecuaciones de arriba

$$B = \frac{\begin{vmatrix} S_u & f_u \\ S_d & f_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_u & -1 \\ S_d & -1 \end{vmatrix}} = \frac{S_u f_d - S_d f_u}{-S_u + S_d} = \frac{uf_d - df_u}{-u + d}$$

La prima de la opción en este caso sería:

$$\Delta S_0 - Be^{-rT} = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S_0 + \frac{uf_d - df_u}{-u + d} e^{-rT}$$

$$\Rightarrow \Pr ima = \frac{f_u - f_d}{u - d} + e^{-rT} \frac{uf_d - df_u}{u - d} = \frac{f_u (1 - de^{-rT})}{u - d} + \frac{f_d (ue^{-rT} - 1)}{u - d}$$

$$\Rightarrow \Pr ima = e^{-rT} \left[\left(\frac{e^{rT} - d}{u - d} \right) f_u + \left(\frac{u - e^{rT}}{u - d} \right) f_d \right]$$

Suponiendo que $u \geq e^{-rT} \geq d$

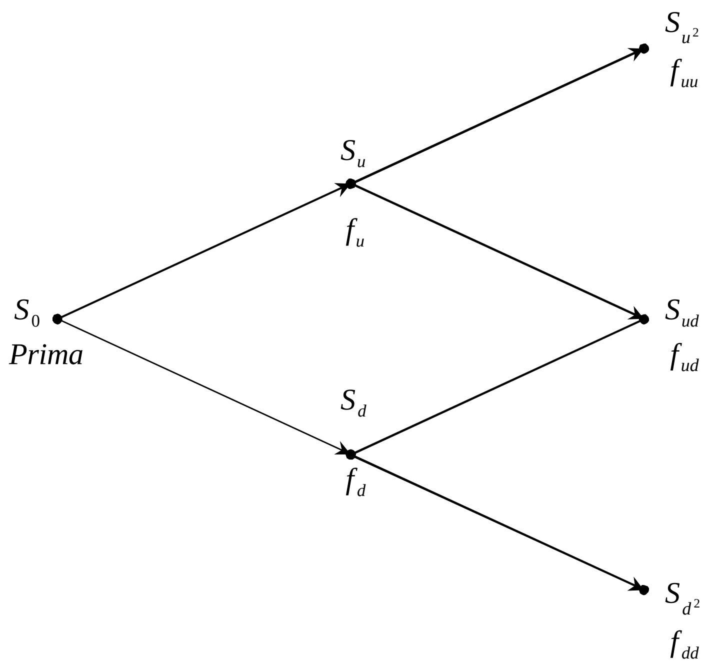
$$\Pr ima = e^{-rT} \left[\Pi f_u + (1 - \Pi) f_d \right]$$

Donde $\Pi = \left(\frac{e^{rT} - d}{u - d} \right)$ es conocida como la *Probabilidad Riesgo Neutral*, si tomamos en cuenta esta probabilidad, podemos observar que la prima del instrumento puede ser interpretada como el valor presente del valor esperado de los pagos de la opción en un mundo neutral al riesgo.

Utilizando este método podemos darnos cuenta que no tomamos en cuenta la probabilidad de que el precio del subyacente subiera o bajara, esto podría parecer raro o contradictorio, ya que podríamos pensar que un inversor que piensa que las probabilidades de que el precio del subyacente baje sean mínimas obtendría el mismo precio de opción que aquél inversor cuyas expectativas de que el precio del subyacente suba sean muy pocas, existe un argumento natural para esta explicación, el hecho es que no estamos valuando la opción en términos absolutos, es decir, estamos calculando su valor de acuerdo con el precio del bien subyacente, las probabilidades de movimientos favorables o desfavorables en el precio de la acción están siendo incorporadas desde que tomamos el precio del subyacente. Y es por esto que no tenemos que tomarlas nuevamente en cuenta al valuar la opción en términos del precio del subyacente.

Modelo Binomial de Dos Etapas

Muy similar al modelo de una etapa este modelo nos servirá para notar que la probabilidad riesgo neutral sigue utilizándose efectivamente para la valuación de estos árboles. Durante cada una de sus dos etapas, este árbol ilustra el movimiento del subyacente hacia arriba *u* veces su valor inicial o hacia abajo *d* veces su valor inicial. La notación es similar a la del modelo Binomial de una sola etapa y la notación adicional sigue la misma lógica, es decir, denotaremos el valor de la opción como f_{uu} cuando el subyacente haya aumentado su valor *u* veces en cada una de las etapas del modelo, supondremos que la tasa libre de riesgo es *r* y la longitud de cada paso en el modelo es de δt, la notación completa se ejemplifica en el siguiente árbol:



Del modelo de un paso deducimos las siguientes ecuaciones de la segunda etapa de nuestro árbol

$$f_u = e^{-r\delta t}\left[\Pi\, f_{uu} + (1-\Pi)\, f_{ud}\right]$$
$$f_d = e^{-r\delta t}\left[\Pi\, f_{ud} + (1-\Pi)\, f_{dd}\right]$$

Estas ecuaciones las podemos sustituir en la ecuación ya mencionada del modelo simple donde $\Pr ima = e^{-r\delta t}\left[\Pi\, f_u + (1-\Pi)\, f_d\right]$, obteniendo lo siguiente:

$$\Pr ima = e^{-r\delta t}\left[\Pi\left\{e^{-r\delta t}\left[\Pi\, f_{uu} + (1-\Pi)\, f_{ud}\right]\right\} + (1-\Pi)\left\{e^{-r\delta t}\left[\Pi\, f_{ud} + (1-\Pi)\, f_{dd}\right]\right\}\right]$$

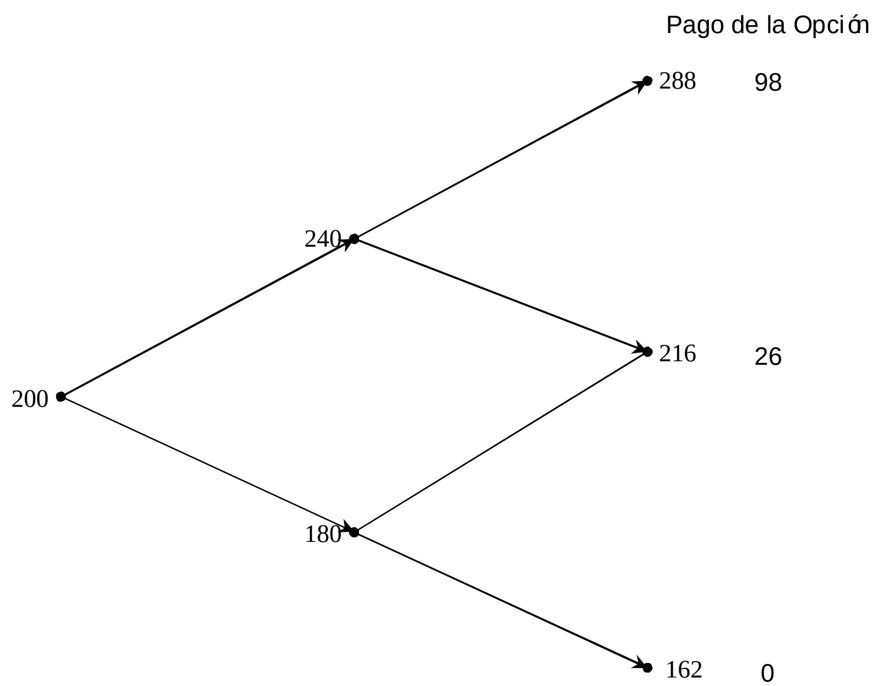
$$= e^{-2r\delta t}\left[\Pi^2 \ f_{uu} + \Pi(1-\Pi) f_{ud} + \Pi(1-\Pi) f_{ud} + (1-\Pi)^2 f_{dd}\right]$$
$$= e^{-2r\delta t}\left[\Pi^2 \ f_{uu} + 2\Pi(1-\Pi) f_{ud} + (1-\Pi)^2 f_{dd}\right]$$

Esto es consistente con la forma de valuación por medio del principio de riesgo neutral del método simple.

Las variables $\Pi^2, 2\Pi(1-\Pi)$ y $(1-\Pi)^2$ son las probabilidades de que el precio del subyacente alcance al final del proceso un nodo alto, medio y bajo respectivamente. De esta forma calculamos el precio de la opción en un mundo neutral al riesgo como los pagos esperados descontados a la tasa libre de riesgo, valuación que se mantiene *sin importar cuántas etapas* sean agregadas al modelo.

Para ejemplificar supongamos que queremos valuar una opción de compra que tendrá una duración de un año sobre una acción cuyo precio el día de hoy es de $200, el precio de ejercicio es de $190, U = 1.20, D = 0.9, dividiremos el comportamiento de la acción en dos periodos de seis meses y supondremos que la tasa libre de riesgo por periodo es de 5%.

El árbol de dos etapas que representa el precio de la acción queda de la siguiente forma:



Utilizando la definición $\quad \Pi = \left(\dfrac{e^{rT} - d}{u-d}\right) = \dfrac{e^{0.5} - 0.9}{1.2 - 0.9} = 0.5042$

De donde

$$c = e^{-2r\delta t}\left[\Pi^2 \, f_{uu} + 2\,\Pi(1-\Pi)\, f_{ud} + (1-\Pi)^2\, f_{dd}\right]$$

$$= e^{-0.05(2)}\left[(0.5042)^2 98 + 2(0.5042)(1-(0.5042))26 + (1-0.5042)^2 0\right]$$

$$= e^{-0.1}\left[37.9161\right] = 34.3079$$

El precio de la opción es de $34.3079 bajo el comportamiento modelado.

Determinación de Π, u y d.

Los parámetros *Π, u y d* deben de dar valores correctos de la media y varianza de los movimientos en el precio de la acción durante las etapas de nuestro árbol, las cuales ya denotamos con una longitud δ*t*. Como hemos estado trabajando bajo la valuación riesgo neutral, el rendimiento esperado de las inversiones es igual a la tasa libre de riesgo *r*, por lo que el rendimiento al término de cada periodo de longitud δ*t* es $Se^{r\delta t}$, donde S es el valor del activo al inicio del intervalo de tiempo. Por la forma en la que hemos estado valuando los árboles se sigue que:

$$Se^{r\delta t} = \Pi S_u + (1-\Pi)S_d$$

$$\Rightarrow e^{r\delta t} = \Pi u + (1-\Pi)d$$

Si suponemos que el precio de la acción sigue un proceso de Wiener y que el periodo de tiempo δ*t* es pequeño obtenemos que la varianza del cambio porcentual en el precio de la acción en el intervalo de tiempo δ*t* es $\sigma^2 \delta t$. Utilizando que la varianza de un variable *X* puede ser expresada como $E(X^2) - [E(X)]^2$ obtenemos que:

$$\Pi u^2 + (1-\Pi)d^2 - [\Pi u + (1-\Pi)d]^2 = \sigma^2 \delta t$$

Pero como ya vimos $e^{r\delta t} = \Pi u + (1-\Pi)d$ por lo que sustituyendo en el segundo término del lado izquierdo de la ecuación tenemos que $e^{2r\delta t} = [\Pi u + (1-\Pi)d]^2$, para el primer término observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Pi u^2 + (1-\Pi)d^2 &= \Pi u^2 + (1-\Pi)d^2 + ud - ud \\
&= \Pi u^2 + (1-\Pi)d^2 + (\Pi * ud + (1-\Pi) * ud) - ud \\
&= (\Pi u + (1-\Pi)d)u + (\Pi u + (1-\Pi)d)d - ud \\
&= e^{r\delta t}u + e^{r\delta t}d - ud \\
&= e^{r\delta t}(u+d) - ud
\end{aligned}$$

Sustituyendo ambas partes en la ecuación anterior obtenemos la siguiente condición

$$e^{r\delta t}(u+d) - ud - e^{2r\delta t} = \sigma^2 \delta t$$

Esta ecuación y la definición misma de Π aportan dos condiciones para Π, u y d, existe una tercera condición que es

$$u = \frac{1}{d}$$

Conjuntamente, estas condiciones implican que

$$\Pi = \frac{a-d}{u-d}$$

donde

$$a = e^{r\delta t}$$

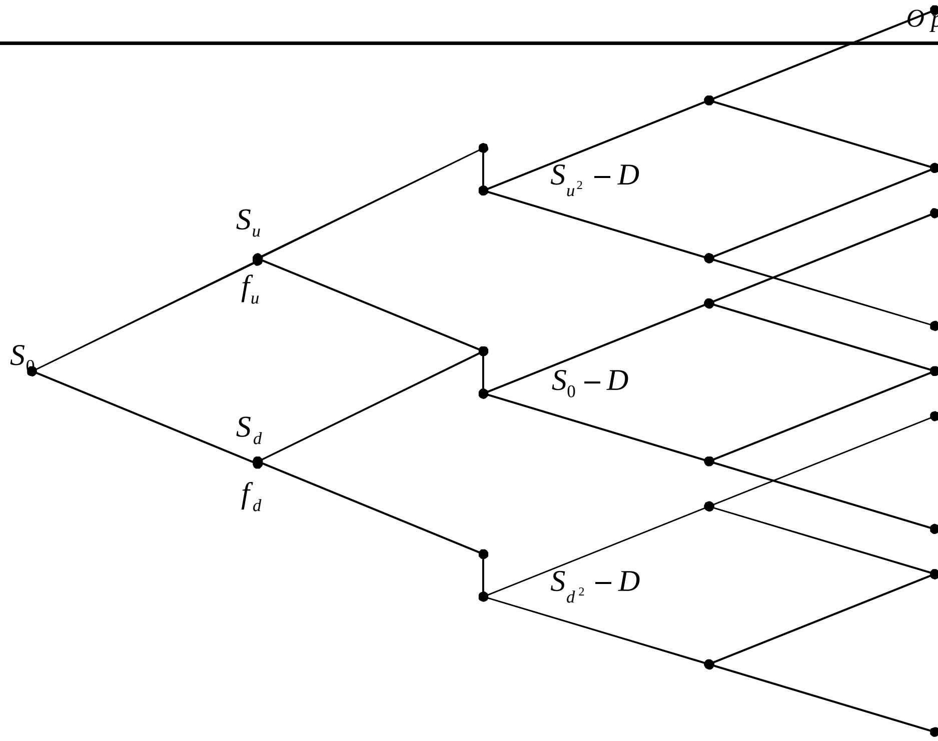
$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

La variable a es también llamada *factor de crecimiento*; las definiciones satisfacen las ecuaciones dadas si los términos de orden mayor a δt son ignorados al aplicar la expansión de Taylor a u, d y a para resolver la condición que acabamos de aportar, las otras dos condiciones mencionadas se satisfacen exactamente.

Modelo Binomial para una acción que paga dividendos

Supongamos que conocemos el monto a entregar como dividendo en algún momento en el futuro, y que la volatilidad, medida por σ, es constante. El árbol binomial como hasta ahora lo conocemos presentará una modificación importante en el momento en que el dividendo será entregado, dada esta modificación, el árbol tendrá que se evaluado en un número mayor de nodos que el árbol de una acción que no paga dividendos, particularmente si el número de dividendos y el tiempo antes de vencimiento se incrementan, el número de nodos será muy grande. El siguiente diagrama muestra cómo s que se comportará un árbol binomial al entregar sólo un dividendo que denotaremos por D.



Supongamos que con nuestra notación anterior tenemos que la fecha en la cual se entrega el dividendo es τ, para calcular los valores de árbol antes de dicha basta recordar la forma en la que se calculaba para cualquier otro árbol binomial.

$$S_0 u^j d^{i-j}, \qquad j = 0,1,\ldots,i$$

En la fecha en que es entregado el dividendo, los nodos se calculan de la siguiente forma

$$S_0 u^j d^{i-j} - D, \qquad j = 0,1,\ldots,i$$

Y a partir de la fecha en la cual el dividendo ha afectado el precio de la opción, los nodos del árbol toman la siguiente forma

$$(S_0 u^j d^{i-j} - D)u \quad \text{y} \quad (S_0 u^j d^{i-j} - D)d \qquad j = 0,1,\ldots,i-1.$$

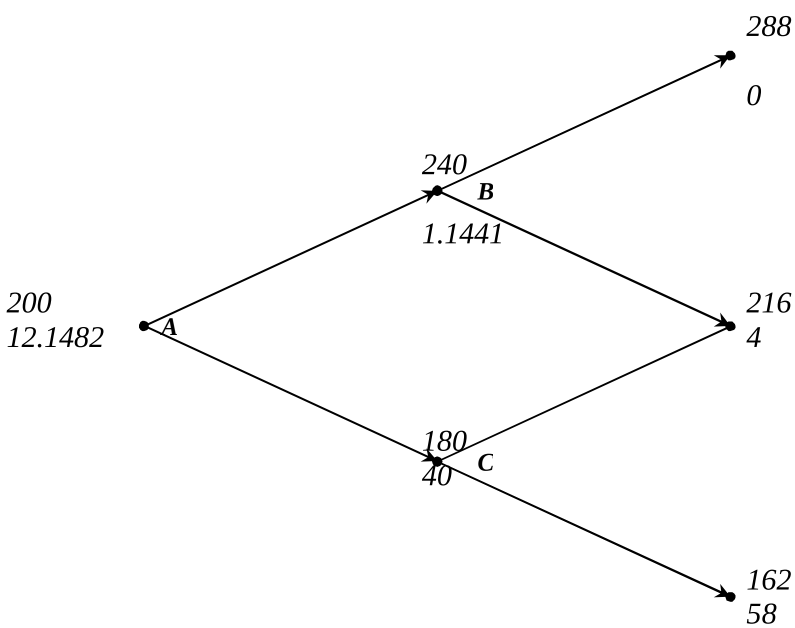
De esta forma obtenemos 2i en lugar de i+1 nodos en el nodo posterior al momento de la entrega del dividendo. Si agregamos m etapas a la k-ésima etapa en la cual no tenemos entregados dividendos, es decir m-1 etapas sin contar la etapa en la que se entrega el dividendo, obtenemos m(k+2) nodos, de esta forma al final del árbol anterior obtenemos 3(1+2) = 9 nodos y a la siguiente etapa tendríamos 4(1+2) = 12 nodos en lugar de m+k+1=5 nodos.

Modelo Binomial para Opciones Americanas

Hasta ahora implícitamente sólo hemos tomado en cuenta el método Binomial para opciones de tipo Europea pues hemos estado tomando en cuenta la valuación con respecto al ejercicio de la opción en los últimos nodos del modelo, las opciones Americanas tienen la peculiaridad de que se pueden ejercer antes del término de todas las etapas del árbol por lo que puede ser óptimo ejercer la opción en un nodo intermedio del árbol. De hecho la forma de valuar árboles binomiales cuando tomamos en cuenta que se puede ejercer la opción anticipadamente es obtener la decisión óptima en cada nodo desde los nodos finales hacia el inicio del árbol, es decir, primero se evalúan los nodos más lejanos y posteriormente se trabaja hacia atrás hasta llegar a la valuación del primer nodo en nuestro modelo, probando en cada paso del árbol cuándo es óptimo ejercer anticipadamente. Los valores de los últimos nodos del árbol son los mismos que para la valuación de las opciones Europeas y el valor de los nodos intermedios será el mayor entre

- El valor de la opción usando probabilidad riesgo neutral
- El pago de la opción al ejercer anticipadamente

Para ilustrar mejor este caso consideremos una opción con los mismos parámetros que la que mencionamos al inicio de esta sección acerca del modelo binomial pero con dos diferencias, ahora se tratará de una opción de venta (Put) Americana y el precio de ejercicio se fijará en \$220, de esta manera *r* sigue siendo 10%, los valores de *u* y *d* permanecerán como 1.2 y 0.9 respectivamente. El árbol de dos etapas con sus valores numéricos correspondientes queda como sigue:



En el nodo B el valor de la opción por medio de la probabilidad riesgo neutral ($Prima = e^{-rT}\left[\prod f_u + (1-\prod) f_d\right]$) es \$1.1441 y el pago al ejercer la opción es -\$20 por lo que el ejercer anticipadamente no es óptimo y el valor del nodo B es 1.1441, caso contrario en el nodo C donde el valor calculado de la prima es de $19.0642 y el pago por ejercer anticipadamente esta opción es de $40 por lo que sí es óptimo ejercer anticipadamente la opción y por tanto el valor del nodo C es de 40; con estos dos valores se puede deducir por medio de la misma valuación el valor de la prima en el momento actual

$$\Pr ima = e^{-.1}\left[0.6839 * 1.1441 + (1 - 0.6839)40\right] = 12.1482$$

Por construcción el valor de la prima (12.1482) es mayor que el valor de ejercicio al momento de la compra de la opción (-20), pues si no se diera este caso existiría arbitraje comprando la opción y ejerciéndola inmediatamente, por lo que el valor de la opción al momento de la compra es efectivamente el precio de la opción por medio de la valuación de riesgo neutral, en este caso 12.1482.

2.8 Modelo de Valuación Black-Scholes

Deduciremos a continuación la conocida fórmula de B-S para valuar un call al tiempo cero sobre una acción que no paga dividendos por medio de un enfoque diferente al comúnmente usado que obtiene la fórmula al resolver la ecuación diferencial que lleva el mismo nombre, como ya lo hemos hecho anteriormente haremos uso de la *valuación riesgo neutral*.

Para obtener dicha deducción probaremos el siguiente resultado previo que nos permitirá derivar la fórmula de una manera inmediata.

Si V se distribuye lognormal y la desviación estándar de lnV es s, entonces

$$E[\max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[E(V)/K] + s^2/2}{s}$$
$$d_2 = \frac{\ln[E(V)/K] - s^2/2}{s}$$

y E denota el valor esperado.

Prueba
Si definimos a g(V) como la función de densidad de V. Se sigue que

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{K}^{\infty} (V-K)g(V)dV$$

La variable lnV se distribuye normal con desviación estándar *s* por lo que por las propiedades de la distribución lognormal la media del lnV es *m*, donde

$$m = \ln[E(V)] - s^2/2$$

Definimos la siguiente variable estandarizada

$$Q = \frac{\ln V - m}{s}$$

Como lnV se distribuye normal, el restarle la media y dividirla entre su desviación estándar obtenemos una variable *Q* que se distribuye normal con medio 0 y varianza 1. Es decir, su función de densidad *h(Q)* es de la siguiente forma

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

Dado *Q* podemos hacer un cambio de variable de V a *Q* en la integral al comienzo de la prueba

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} (e^{Qs+m} - K)h(Q)dQ$$

o

$$E[\max(V-K,0)] = \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} e^{Qs+m} h(Q)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q)dQ$$

Por otro lado veamos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} e^{Qs+m} h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qs+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-(Q-s)^2+s^2+2m)/2} \\ &= \frac{e^{m+s^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-s)^2]/2} \\ &= e^{m+s^2/2} h(Q-s) \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo obtenemos

$$E[\max(V-K),0] = e^{m+s^2/2} \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q-s)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q)dQ$$

Si definimos a *N(x)* como la probabilidad de que una variable con media cero y desviación estándar 1 sea menor a *x*, el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es:

$$1 - N[(\ln K - m)/s - s]$$

o

$$N[(-\ln K + m)/s + s]$$

Sustituyendo el valor de *m* obtenemos

$$N\left(\frac{\ln[E(V)/K] + s^2/2}{s}\right) = N(d_1)$$

De la misma manera podemos obtener $N(d_2)$ del segundo término de la ecuación, por lo que

$$E[\max(V-K,0)] = e^{m+s^2/2} N(d_1) - KN(d_2)$$

Sustituyendo el valor de *m* obtenemos el resultado

$$E[\max(V-K,0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \qquad \bullet$$

Una vez probado este resultado, consideremos un Call Europeo sobre una acción que no paga dividendos, con un tiempo de madurez de T, el precio strike es de *K*, la tasa libre de riesgo es *r*, el precio actual de la acción es S_0, la volatilidad es σ y S_T denota el valor de la acción al tiempo T, el valor esperado de la opción en la fecha de vencimiento en un mundo neutral al riesgo es:

$$\hat{E}[\max(S_T - k,0)]$$

donde $\hat{E}$ denota el valor esperado en un mundo neutral al riesgo, por argumentos de valuación riesgo neutral, el valor del call *c* es este valor esperado descontado a la tasa libre de riesgo, es decir

$$c = e^{-rT}\,\hat{E}[\max(S_T - K,0)]$$

Bajo el proceso estocástico asumido por Black-Scholes S_T es lognormal, $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ y la desviación estándar del $\ln S_T$ es $\sigma\sqrt{T}$. Por el resultado ya probado

$$c = e^{-rT}[S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)]$$

o

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[E(S_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{\ln[S_0/K] + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln[E(S_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow d_2 = \frac{\ln[S_0/K] - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Debido a que ya probamos que cuando las acciones no otorgan dividendos el precio de un call Americano y Europeo es el mismo, esta ecuación se mantiene para valuar precios de Calls Americanos.

La fórmula Black-Scholes para valuar un put Europeo con los mismos parámetros que el call es:

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Con d_1 y d_2 como se definieron anteriormente. Contrario a lo que podemos lograr para la opción Call, no podemos generalizar esta fórmula para un put Americano, por las razones ya expuestas cuando profundizamos en el ejercicio prematuro de las opciones, por lo que no existe hasta el momento una fórmula analítica exacta para valuar los puts Americanos

2.9 Opciones Exóticas

Hasta ahora hemos visto instrumentos derivados que tienen características establecidas sobre bases regulares, existen sin embargo otros tipos de opciones que son llamadas exóticas, las cuales tienen características especiales, surgen principalmente por una necesidad particular de protección para un mercado específico aunque puede haber muchas razones para su creación. Mencionaremos algunas de estas opciones con el afán de mostrar la ilimitada gama de productos que se pueden desarrollar en el mercado over-the-counter.

Opciones Bermuda: Este tipo de opciones tienen la particularidad de que sólo pueden ser ejercidas ya sea en momentos específicos dentro de la duración del contrato o en periodos determinados, esto significa que este tipo de opciones son opciones Americanas con la restricción de que el ejercicio anticipado está restringido a ciertas fechas o periodos de tiempo.

Opciones con inicio adelantado. Estas opciones como su nombre lo dicen tienen la característica de que pueden ser pagadas en estos momentos y no comenzarán hasta algún momento en el futuro. Suele especificarse en este tipo de opciones que al momento de su inicio éstas estarán en dinero.

Opciones Compuestas. Una opción compuesta es una opción sobre una opción. Como principalmente contamos con 2 opciones (call y put) existen 4 opciones compuestas que constan de las combinaciones de dichas opciones.

Opciones de Elección. El poseedor de esta opción puede, transcurrido un determinado tiempo, decidir si la opción con la que cuenta es un put o un call. Si suponemos que la decisión se realiza en un momento T_1, el valor de la acción en ese momento es S_1, K es el precio de ejercicio, T_2 es el momento de expiración de las opciones y r es la tasa libre de riesgo, el pago de la opción al momento T_1 es:

$$\max(c, p) = \max(c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)})$$

$$= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max(0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1)$$

Este tipo de opción puede tornarse más complicada si el precio strike y la fecha de expiración de las opciones call y put difieren.

Opciones Barrera. El pago de estas opciones depende de si el activo subyacente alcanza o no cierta barrera de precio, existen principalmente dos tipos de opciones barrera, de entrada y de salida, una opción barrera de entrada es aquella que sólo entra en vigor cuando al activo alcanza cierto precio y una opción barrera de salida es aquella que termina sin valor si el precio del activo subyacente alcanza una barrera especificada. Estas opciones son atractivas a ciertos participantes del mercado por que suelen ser más baratas que las opciones regulares correspondientes.

Opciones Digitales. El principal tipo de estas opciones es aquella que paga $1 si el activo subyacente sobrepasa cierto precio de ejercicio (si la opción esta dentro de dinero) y no paga nada si no lo hace (si la opción esta fuera de dinero).

Opciones Binarias: Este tipo de opciones tienen pagos que son funciones discontinuas del precio del activo subyacente. Un tipo de estas opciones es muy parecido a las opciones anteriores, con la diferencia de que el monto a pagar si la opción esta dentro de dinero puede ser elegido. Otro tipo de opción con estas características es aquella que paga el monto de la acción misma si la opción se encuentra dentro de dinero o nada si el precio de la opción queda por debajo del precio de ejercicio.

Opciones de Intercambio. Esta opción da el derecho al poseedor de intercambiar un activo por otro. Los principales activos que se intercambian en este tipo de opciones son acciones de una compañía por otra y divisas.

Opciones de Relación Cruzada. Estas son opciones sobre una moneda extranjera denominadas en otra moneda extranjera, por ejemplo, un call sobre francos suizos con precio de ejercicio es yen japonés.

Opciones con Memoria. En este tipo de opciones los pagos están determinados por el precio máximo (en el caso de un put) o mínimo (en el caso de un call) alcanzado por la acción durante la duración de la opción. Por ejemplo un call Europeo con memoria tiene un pago igual a:

$$\max(S_T - S_{\min}, 0) = S_T - S_{\min}$$

Donde $S_{\min}$ es el precio mínimo alcanzado por la acción durante el periodo de vida de la opción. Este tipo de opciones son muy atractivas ya que siempre tienen pagos positivos (a menos que $S_T = S_{\min}$), por supuesto que el precio de estas acciones refleja su atractivo.

Opciones Llamado. Este tipo de opciones son opciones europeas con la característica de que el poseedor puede "llamar" al vendedor de la opción una sola vez durante el periodo de vida de la opción. Al final del periodo de vida de la opción, el tenedor recibirá el pago mayor entre el valor usual de la opción Europea correspondiente y el valor intrínseco de la opción al momento del llamado. Si suponemos que el valor del activo subyacente es de S_τ al momento del llamado al tiempo τ, y usamos la notación usual, el pago de la opción quedará determinado por:

$$\max(0, S_T - S_\tau) + (S_\tau - k)$$

Opciones Asiáticas. El pago de las opciones asiáticas depende del precio promedio de la acción S_{prom} durante el periodo de vida de la opción. Existen básicamente dos maneras en que estos pagos se pueden conformar a partir de S_{prom}, el pago de una opción de compra puede ser:

$$\max(S_T - S_{prom}, 0) \qquad \text{ó} \qquad \max(S_{prom} - K, 0)$$

Este tipo de opciones son menos costosas que las opciones regulares y se puede argumentar que el ser menos agresivas que éstas pueden proporcionar mejor cobertura a las necesidades de algunos participantes del mercado.

3. Opciones reales

Descripción

Las compañías deben valuar el conjunto de proyectos de inversión disponibles para poder determinar cuál o cuáles de ellos vale la pena llevar a cabo. Una aproximación recomendada consiste en estimar los flujos de efectivo esperados del proyecto. Sin embargo muchas inversiones tienen pagos muy inciertos que son mejor valuados por medio de una aproximación con la teoría de opciones.

Las personas encargadas en tomar las decisiones de inversión pueden hacer cambios que afectan los flujos de efectivo posteriores y/o la vida del proyecto, y a menudo las hacen, a las decisiones que pueden llevarse a cabo debido a la flexibilidad con la que ciertos proyectos de inversión pueden contar se les llaman ***opciones reales***, estas opciones reales están incorporadas en el proyecto de inversión.

La presencia de opciones reales añade valor a un proyecto de inversión. Podemos ver el valor de un proyecto como su valor presente neto, calculado en la forma usual, junto con el valor de la(s) opción(es).

Valor del proyecto = VPN + valor de la opción real

Mientras más grande sea el número de opciones y más grande sea la incertidumbre que rodea su uso, mayor será el segundo término de la ecuación, y mayor el valor del proyecto.

Como veremos más adelante, existen proyectos para los cuales al llevar a cabo una valuación por medio del Valor Presente Neto nos dará como resultado que el proyecto no es rentable, esto se deberá a que en muchos casos la opciones reales que se tienen al decidir si se sigue con el proyecto, si se aumenta la capacidad del mismo, si se abandona, etc. agregan valor al proyecto, esto es por que estas decisiones se tomarán una vez iniciado el proyecto y como resultado de acontecimientos que al inicio de éste se desconocen con precisión.

En ocasiones, estas opciones se tratan de manera informal como factores cualitativos cuando se está estudiando el valor de un proyecto. Puede no ser más que "si tal cosa y tal otra suceden, tendremos la oportunidad de hacer esto".Para valuar las opciones reales se debe acudir a los árboles de decisiones, a las simulaciones y a los enfoques específicos, y por supuesto, ya que nos percatamos de la semejanza entre ciertos tipos de flexibilidad de los proyectos y las opciones financieras, los métodos “tradicionales” para evaluar las opciones financieras pueden darnos una aproximación.

Consideremos, por ejemplo, una compañía que debe decidir si realiza o no un pago de $50,000 en un terreno no urbanizado, considerando que este pago permitirá a la compañía comprar el terreno pagando un monto adicional de $500,000 en cualquier momento durante los siguientes 6 meses, si el pago adicional no se realiza, los $50,000 iniciales se perderán. El acuerdo inicial es una opción call, con el pago de $50,000 equivalente al precio de la opción, el pago adicional necesario para ejercer la opción es el precio de ejercicio; y el valor incierto del terreno después de que es urbanizado es el precio “stock”. La decisión de ejercer la opción, esto es, pagar los $500,000 adicionales para comprar el terreno, depende de si el valor del terreno es mayor a $500,000 para el tiempo en que el acuerdo está por expirar. Antes de aceptar este acuerdo, la compañía debe determinar si el precio de la opción ($50,000) es un precio justo para esta opción.

Otros contratos implícitos y explícitos en los cuales una compañía participa pueden ser pensados (y valuados) como opciones. Un arrendamiento con la opción de cancelar puede ser visto como un Put. Si el valor de arrendar la propiedad cae por debajo de los pagos, el arrendamiento será cancelado y la propiedad será “regresada” a su dueño, justo como una acción será vendida para el que suscribe un Put si su valor baja lo suficiente. Por ejemplo un programa federal de soporte al precio del maíz puede ser visto como emitir opciones Put a los granjeros. Un granjero preferirá vender su maíz a un mayor precio en el mercado pero siempre podrá vendérselo al gobierno a un precio garantizado si el precio de mercado se desploma.

Con un enfoque más Actuarial, la compra de una póliza de seguros de daños puede ser pensada como un Put: Si la propiedad no se daña y permanece con el mismo valor, el contrato de seguro no se usará, si un siniestro daña la propiedad, el contrato de seguro será ejercido y la compañía aseguradora tendrá que pagar la suma pactada. Esto es análogo a ejercer una opción Put cuando el precio de la acción cae por debajo del precio de ejercicio.

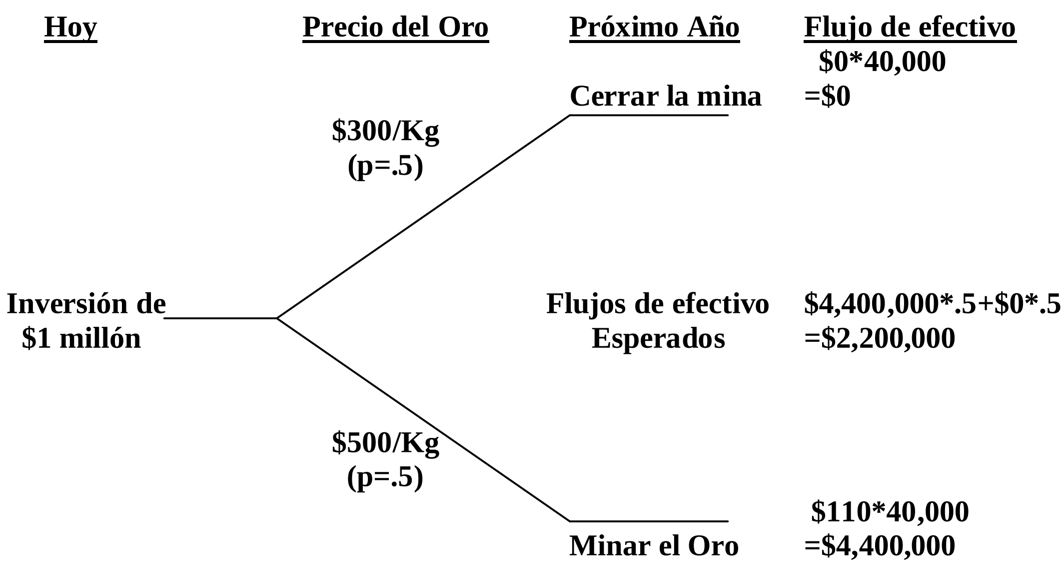
Cualquier inversión que requiera de una aportación adicional de fondos para llevarla a cabo y que ofrece un pago incierto puede ser vista como una opción real.

Que un activo sea real no necesariamente significa que tiene una presencia física, consideremos, por ejemplo, una supuesta cura contra el cáncer. No existe ningún ingreso sólo por tener la patente, pero sí tiene valor. El precio de obtener la patente es el precio de la opción; el costo de desarrollar, producir, y vender el fármaco es el equivalente al precio de ejercicio; y el valor de mercado de los beneficios por las ventas del nuevo fármaco es el equivalente al precio del activo subyacente. Los fondos adicionales requeridos para iniciar la producción serán invertidos sólo si éstos son menores a los pagos derivados de las subsecuentes ganancias de la venta del fármaco.

Podemos pensar que cualquier empresa que enfrente una serie continua de decisiones operativas permitidas por la flexibilidad del proyecto y que afecten la rentabilidad del mismo esta tratando con opciones reales. Si ahora consideramos una mina de oro, los dueños de dicha mina podrán incrementar o disminuir posibles ganancias de la mina, dependiendo del precio actual del oro y de las expectativas a futuro que se tengan sobre éste. La mina puede ser cerrada y posteriormente re-abierta cuando la producción y las condiciones del mercado sean favorables, o puede ser abandonada permanentemente. Cada decisión antes explicada es una opción desde el punto de vista del dueño de la mina. El valor de estas opciones, que es a lo que nos abocamos en este momento, afecta el valor de los proyectos de inversión que tienen como insumo los recursos provenientes de la mina.

Si dicha mina de oro esta actualmente cerrada, pero puede ser re-abierta con un costo de $1 millón. Podemos considerar el valor actual de la mina como el valor de un call largo sobre el valor del oro en la mina. El precio de ejercicio equivale al costo de re-abrirla, y el precio del activo subyacente es igual el valor del oro que puede ser subsecuentemente producido. La mina será re-abierta sólo si el valor del oro a producir es mayor al costo de re-abrirla, justo como ocurre en un call largo donde sólo se ejercerá la opción si el precio del activo subyacente excede el precio de ejercicio. Si más aún suponemos que existe un estimado de 40,000 kilos de oro en la mina, si la mina es re-abierta el oro puede ser minado en un año a un costo variable de $390 por kilo. Asumiendo un precio del oro esperado en un año de $400/Kg, el beneficio esperado por Kg es de $10, claramente el ingreso esperado (ignorando impuestos) es de $400,000 para el próximo año ($10*40,000) lo cual es mucho menor de lo que necesitamos para cubrir el millón invertido, mucho menos si tomamos en cuenta el rendimiento esperado de una inversión tan riesgosa, el cuál fijaremos en 15%. Pero esta intuición que nos sugiere un valor presente neto (VPN) negativo de –652,174 (-$1,000,000 + 400,000/1.15) esta mal en este caso. La razón es que el enfoque clásico de los flujos de efectivo descontados no toma en cuenta lo que concierne a esta tesis, es decir, las opciones reales en este tipo de proyectos de inversión, por lo que nuestra primera intuición de usar los flujos de efectivo descontados no toma en cuenta la importante opción de no producir oro si no es rentable hacerlo.

Suponiendo que sólo existen dos posibles resultados en el precio del oro en el próximo año: $300/Kg y $500/Kg cada uno con probabilidad 0.5. El precio esperado del oro es $400/Kg, pero este precio esperado es irrelevante cuando tomamos en cuenta la regla óptima para producir: Minar oro si, y sólo si, el precio del oro para el próximo año es de $500/Kg, la siguiente figura muestra los flujos de efectivo consecuentes a esta regla de decisión. Los costos de cierre se asumen como cero.



VPN de la inversión en la mina de oro =-$1,000,000+$2,200,000/1.15 =$913,043

Como podemos ver en este ejemplo la posibilidad de alterar decisiones en respuesta a nueva información, puede contribuir significantemente al valor del proyecto. Este tipo de inversiones contiene características de opciones sobre acciones y deben ser valuadas de acuerdo a ellas.

Estas opciones reales tienen un hilo común, puesto que limitan las situaciones en las cuales se pueden producir eventos no deseados, es decir, las indeseadas pérdidas por todo inversor racional, mientras mayor sea la varianza o incertidumbre asociada con el futuro, más valiosas se vuelven estas opciones. Existen diferencias entre las opciones financieras y las opciones reales, la teoría de precios de las opciones nos indica una relación exacta entre el valor de una opción y el precio del activo asociado, con base en la idea de que una posición cubierta sin riesgo debe proporcionar un rendimiento igual a la tasa libre de riesgo. El equilibrio del mercado depende de mercados financieros altamente eficientes, en los cuales, impulsados por el arbitraje, los precios de los activos negociados reflejan toda la información disponible y se ajustan total y rápidamente a la llegada de nueva información. Puesto que las opciones reales se encuentran en mercados menos eficientes, las opciones reales son diferentes.

No podemos utilizar la neutralidad del riesgo para dividir como factores las varianzas implícitas, como se puede hacer con las opciones financieras. El precio de ejercer una opción real puede cambiar con el tiempo. Además, es difícil medir la volatilidad, puesto que uno rara vez ha tenido cambios anteriores en el valor de mercado como para fincar un cálculo. El costo de oportunidad de esperar a ejercer una opción real no es tan preciso como la cesión de dividendos en acciones que los pagan. Estas diferencias, y otras más, hacen que sea muy diferente evaluar una opción real a una opción financiera.

El reconocimiento de la flexibilidad administrativa puede modificar una decisión inicial de aceptar o rechazar un proyecto. Se puede revertir una decisión de rechazo utilizando el análisis clásico de los Flujos de Efectivo Descontados (FED), si el valor de la opción es suficientemente elevado. Se puede cambiar una decisión de aceptación en una de postergación, si el valor de la opción sobrepasa los primeros flujos de efectivo, aunque un enfoque con FED para determinar el valor presente neto es un punto apropiado para comenzar, en muchos casos habrá necesidad de modificarlo para las opciones reales.

Puesto que las propuestas de inversión significan diferentes grados de riesgo de negocio, debemos analizar no sólo la rentabilidad que se espera de ellas, sino también las posibles desviaciones respecto de esas expectativas. El riesgo se expresa en términos de la dispersión de la distribución de probabilidades de posibles valores presentes netos o posibles tasas internas de rendimiento, y se mide mediante la desviación estándar.

Al medir la desviación estándar en una diversidad de supuestos y al utilizarla en relación con el valor esperado de la distribución, tratamos de determinar las probabilidades de que tengan lugar determinados acontecimientos. Se puede medir el riesgo de acuerdo con el supuesto de que existe independencia en la serie de flujos de efectivo a través del tiempo, o cuando los flujos de efectivo de un periodo al siguiente son dependientes a través del tiempo. Para tratar las situaciones de correlación moderada de los flujos de efectivo a lo largo de determinado tiempo, son útiles los árboles de probabilidades. Frecuentemente se pueden aplicar técnicas de simulación al problema del análisis de inversiones riesgosas. Aunque el enfoque de portafolio tiene validez sólo en ciertas circunstancias, es una forma de medir el riesgo marginal de un proyecto en relación con otros que existen o que están siendo considerados.

A menudo, las opciones reales son importantes en la presupuestación de capital. Este término simplemente significa que la administración tiene flexibilidad para modificar una decisión anterior. Como ya mencionamos anteriormente, se puede visualizar el valor de un proyecto de inversión como su valor presente neto, calculado mediante el análisis clásico del flujo de efectivo descontado o VPN, junto con el valor de la opción, y de esta forma mientras mayor sea la incertidumbre que rodea el uso de la opción, mayor será su valor.

La consideración de las diversas opciones reales puede hacer que una decisión de rechazo de un proyecto de presupuestación de capital se transforme en una decisión de aceptación, y una decisión de aceptación en una decisión de posponer. Al analizar las opciones reales, es frecuente que, como el caso de la mina de oro, se utilicen los árboles de decisión para tratar de resolver la naturaleza secuencial del problema.

Clasificación y características

Basándose en la discusión y ejemplificación ya descrita, debe ser ahora bastante claro que las opciones reales pueden ser asociadas a un amplio rango de problemas en los negocios, para clarificar y explicar esta cantidad de casos en los que se pueden utilizar las opciones reales presentaremos la siguiente clasificación, tomando en cuenta que ésta es sólo una forma de distinguir los varios tipos de opciones que pueden agregar valor a proyectos y con esto a las compañías.

Opción de variar la producción. Una opción importante es ampliar la producción si las condiciones se vuelven favorables, y contraer la producción si las condiciones se tornan malas. A lo primero se le llama en ocasiones opción de crecimiento, y la segunda puede involucrar realmente el cierre de la producción. Una y otra vez las compañías llevan a cabo inversiones que parecen tener un valor muy pequeño en cuanto a sus flujos de efectivo descontados pero que les permiten descubrir proyectos que después resultan rentables. El ejemplo de la patente antes mencionado es un ejemplo de una opción de crecimiento, las compañías deben invertir en investigaciones y desarrollo, lo cual pareciera que sólo absorbe dinero, pero en realidad son los fundamentos para nuevas opciones de crecimiento. Estas opciones son frecuentemente llamadas estratégicas debido a que definen la competitividad a largo plazo de la compañía. La opción de crecimiento es un call Americano sobre el valor de la capacidad adicional, el precio strike es el costo de adquirir esta nueva capacidad descontado al momento en que se ejerce la opción. La opción de contraer la producción es un put Americano sobre el valor de la capacidad de pérdida, el precio strike es el valor presente de los gastos futuros que se pueden evitar al ejercer la opción.

También en esta clasificación tomaremos en cuenta la opción real que permite al tenedor invertir en un proyecto en pequeños incrementos. La lógica que sigue este procedimiento es que aguardando a que pase un poco de tiempo puede ser que llegue información importante para el proyecto, de esta forma los inversores pueden aprender acerca de la rentabilidad del proyecto sin comprometer más fondos. Esta opción es muy importante, ya que, para algunos proyectos, ciertos factores inciertos no son resueltos a través del tiempo, por lo que se debe invertir para tener una buena idea del verdadero costo y rendimiento de un proyecto.

Opción de abandono. Si un proyecto tiene valor de abandono, esto representa efectivamente una opción de venta para el dueño del proyecto. Este tipo de opción es una de de las que la mayoría de las personas reconocen intuitivamente. Si una inversión resulta ser mala, vale la pena dejar abierta una ruta de escape de forma que los flujos de efectivo negativos puedan ser evitados o disminuidos. Un ejemplo de esto puede ser una compañía que se dedica al desarrollo de software y que emplea a programadores con contratos a corto plazo y que renta sus edificios y activos operativos. En este caso se debe de pagar un premio a ambos, los programadores y arrendadoras para poder terminar los contratos a corto plazo pero da la posibilidad a la compañía de cancelar rápidamente un proyecto de desarrollo de software si éste se torna una mala inversión.

Esta opción es un put americano sobre el valor del proyecto, el precio strike de la opción es la liquidación del proyecto (restando los costos en los que se incurre por hacerlo), este tipo de opciones mitigan considerablemente el efecto de resultados desastrosos e incrementan la valuación inicial de los proyectos.

Opción de posponer, también conocida como opción de tiempo de espera de la inversión. Para algunos proyectos existe la opción de esperar, lo que permite obtener más información. Por supuesto, el valor de posponer debe ser comparado con el valor en el tiempo de los beneficios del proyecto. Esta opción es un call Americano sobre el valor del proyecto.

Opción de extender. A veces es posible extender el periodo de tiempo en la duración de un proyecto o la vida de algún activo pagando un monto fijo. Esto es un call Europeo sobre el valor futuro del activo o proyecto.

Opción de flexibilidad. Otro ejemplo de opciones reales es dar flexibilidad a los activos de forma que puedan ser utilizados con varios propósitos o usos. Un empleado bilingüe es más valioso que uno que no lo es, aunque no existan planes para mandarlo al extranjero, la posibilidad de hacerlo existe. También podemos considerar una planta que podría usar carbón, aceite o gas natural. Si los precios relativos de estos tres activos siempre estuvieran fijos, no habría razón para construir dicha planta con esta flexibilidad, simplemente usaríamos el combustible que fuera más barato. Sin embargo si los precios relativos a estos combustibles fluctúan, la planta puede tomar ventaja de estas fluctuaciones y la inversión extra en flexibilidad de la planta, que comprendería la opción, claramente tiene valor.

Opción operativa. Esta es una opción similar a la opción de abandono, que permite a la compañía ajustar sus procesos a condiciones favorables en los negocios. Una compañía que construye su planta con exceso de capacidad sobre el pronóstico medio esta comprando la opción de tomar ventaja sobre condiciones de demanda más fuertes que las esperadas.

Factores que afectan el valor de una opción real

Incertidumbres sobre el futuro: Mientras mayores sean estas incertidumbres, es decir, más amplia sea la gama de resultados futuros, más valioso será poder reaccionar de acuerdo a ellos. Esto se debe a la estructura de pagos asimétrica y a los derechos de juicio.

Valor del dinero en el tiempo: Al igual que en los flujos de efectivo descontados, la tasa de descuentos afecta a la valuación de las opciones reales.

El precio de ejercicio: Como ya se dijo en varios ejemplo anteriores, el precio de ejercicio de las opciones reales es el valor presente del cúmulo de costos futuros al ejercer la opción. Dichos costos son de vital importancia para la valuación de este tipo de opciones ya que son una de las principales diferencias que existen entre las opciones financieras y reales, ya que conocemos de antemano el precio de ejercicio de las opciones financieras pues éste es especificado en el contrato, sin embargo, en la mayoría de los proyectos en los que se encuentran opciones incrustadas los costos para ejercer la opción real son desconocidos en el momento de hacer la inversión inicial para llevar a acabo el proyecto y este desconocimiento sólo puede ser resuelto al invertir para ejercer la opción. Podemos dividir esta incertidumbre de los costos de ejercicio sobre opciones reales en dos: Incertidumbre Tecnológica, que sólo puede ser resulta al llevar a cabo la inversión e incertidumbre de los costos principales, que se debe a factores externos como el cambio en los precios de las materias primas o mano de obra. Podemos notar que mientras que el primer costo no es correlacionado con la economía, el segundo sí lo es.

Tiempo hasta expiración: La opciones reales tienen un tiempo de vida, las patentes expiran, los competidores se actualizan, la capacidad excesiva lentamente se transforma en capacidad para demanda ordinaria, etc. Generalmente el valor de las opciones reales se incrementa en la medida en que el tiempo para tomar decisiones sobre éstas aumenta aunque algunas veces esto es compensado por costos incurridos por diferir la inversión o disminuciones en los pagos.

Contrario a la que pasa al calcular opciones financieras, en las opciones reales el tiempo de expiración no esta completamente definido, pongamos como ejemplo un proyecto que esta basado en la investigación y desarrollo de nuevos productos, mientras mayor sea la incertidumbre tecnológica mayor será la incertidumbre acerca de cuándo se podrá ejercer la opción de comerciar los nuevos productos; en un proyecto en que la situación del mercado sea muy competitiva y exista la posibilidad de que alguna otra compañía ejerza una opción similar a la que planeamos utilizar, podremos tender a ejercer anticipadamente la opción aún cuando hayamos decidido que era óptimo diferir la inversión; en el caso contrario cuando una compañía firma una patente asegura se mercado potencial y posee una opción abierta para invertir en dicha patente.

3.4 Diferencias entre una opción financiera y una opción real

Podemos comparar las seis variables descritas que afectan el valor de una opción financiera con las seis variables siguientes que afectan una opción real.

Opción Real		***Opción Financiera***
Valor presente de los flujos	→	***Precio de la acción***
Costo de la inversión	→	***Precio de ejercicio***
Tasa de descuento	→	***Tasa de interés libre de riesgo***
Tiempo hasta el ejercicio	→	***Tiempo hasta el ejercicio***
Volatilidad de los flujos esperados	→	***Volatilidad de la acción***
Pérdidas por diferir la opción	→	***Los dividendos esperados***

Más aún, podemos agregar que el valor de la opción financiera no depende de la revalorización esperada de la acción, mientras que la opción real si depende de ella.

Ventajas de las opciones reales sobre los FED

A continuación se presentan una serie de casos en los que la valuación de proyectos de inversión por medio de VPN no toman en cuenta muchos de los aspectos más importantes de los proyectos, la flexibilidad en los proyectos agrega valor a éstos y en el caso de la valuación clásica no es tomada en cuenta, sin embargo no se pretende asumir que los FED estén en desuso o que no sean útiles a los inversores para tomar decisiones inteligentes sobre sus proyectos, no se pretende decir que a partir de que notamos que puede haber opciones incrustadas en los proyectos de inversión los FED sean herramientas inútiles para la valuación de éstos, los FED son una herramienta útil en la presupuestación de capital pero sus limitaciones deben de ser entendidas. Incluso en la valuación de opciones reales necesitamos utilizar un análisis FED para conocer el valor del activo subyacente, un parámetro clave en esta valuación. Un análisis basado sólo en FED puede dar mucha información útil para la toma de decisiones de los inversores pero es muy importante que se tomen en cuenta las limitaciones que se tienen y la naturaleza de los números con los que están lidiando.

Comencemos por puntualizar una importante observación sobre los FED, cuando éstos son utilizados en la forma tradicional se asume que si las condiciones de mercado resultan desfavorables, los activos pueden ser vendidos, esto se conoce como asumir que la inversión es reversible, lo cual no es necesariamente el caso ya que si las condiciones de mercado son desfavorables para un productor, es muy probable que también lo sean para otros productores por lo que las compañías pueden dejar la industria en cuestión y tratar de deshacerse de sus activos. En este proceso es muy improbable que los activos puedan ser vendidos más allá de un valor despreciable.

La situación se agrava al cuantificar los errores cometidos al evaluar un proyecto con los FED cuando en éste identificamos algún tipo de opción real.

La valuación por medio del VPN de un proyecto implícitamente toma en cuenta las inversiones como oportunidades de “ahora o nunca”. Sin embargo la mayoría de los proyectos pueden ser pospuestos o divididos en pequeñas partes que pueden ser llevadas a cabo secuencialmente. Si todos los factores que afectan la valuación son determinísticos y la curva de rendimiento de la tasa de interés es plana, no existe ninguna ventaja en esperar. Si la curva de rendimiento es determinística pero tiene una curva hacia abajo, puede valer mucho la pena posponer la inversión pero los FED pueden revelar esto fácilmente. Las opciones cobran gran importancia en la valuación cuando uno de los factores es estocástico, de esta forma una opción para esperar el arribo de nueva información del proyecto resulta tener mucho valor. Considerando como ejemplo la tasa de interés, un proyecto con VPN positivo puede llegar a tener un VPN aún mayor, y por otro lado un proyecto que hoy tiene un VPN negativo puede llegar a tener un VPN positivo si las tasas de interés se desploman. El *derecho* de llevar a cabo el proyecto tiene ciertamente valor y éste no es tomado en cuenta por los FED.

Si existe competencia por los proyectos, es decir si otras compañías se pueden adelantar con las inversiones entra un juego de consideraciones teóricas a la decisiones sobre inversiones.

Otros proyectos pueden cerrar operaciones en condiciones desfavorables para los negocios, expandirlas o contraerlas, cambiar entre procesos y flujos alternativos, etc. Todas estas opciones tienen valor y es fácil ver por qué, la discreción administrativa puede ayudar a mitigar pérdidas y generar valor a partir de condiciones favorables del mercado o simplemente variables. En este tipo de casos la valuación por medio de los FED no toma en cuenta estas opciones por lo que su valuación queda generalmente por debajo del valor real del proyecto. La única manera de valuar esta flexibilidad de los proyectos es a través de técnicas relacionadas con opciones.

Ahora tomemos el caso en que la inversión en un proyecto abre la posibilidad de tener inversiones subsecuentes. En este caso nos encontramos con una importante disyuntiva, el principal beneficio o valor de proyectos de investigación y desarrollo es obtener información acerca de inversiones futuras y esto no es tomado en cuenta por el VPN, en este caso las inversiones que son llamadas "estratégicas" regularmente están relacionadas con un VPN negativo pero los inversores intuitivamente reconocen que a pesar de esto, dichos proyectos tienen valor.

Un método de valuación

El siguiente método de valuación es un método muy sencillo que introduce los flujos de efectivo esperados al momento en que se toma la decisión de llevar a cabo una opción real, el método quedará ejemplificado para una opción real que sea equivalente a un call (opción de crecimiento, posponer, extender, etc.), en el entendido de que puede ser igualmente aplicable para aquellas opciones que sean idénticas a un put.

Para obtener el valor de una Opción Call Real *no replicable* en términos del Valor Presente (VP) utilizamos la siguiente fórmula:

$$\text{Call no replicable} = \text{VP}\begin{pmatrix}\text{flujos esperados si}\\ \text{se ejerce la opción}\end{pmatrix} - \text{VP}\begin{pmatrix}\text{inversión necesaria}\\ \text{para ejercer la opción}\end{pmatrix}$$

Si el proyecto esta compuesto únicamente por un Call, lo llevaremos a cabo si "Call no replicable">0. Si existe la necesidad de invertir una suma de dinero para que podamos llevar a cabo el proyecto, entonces lo llevaremos a cabo si "Call no replicable">inversión inicial.

Por lo tanto el proyecto será llevado a cabo si:

$$(\text{Call no replicable - Inversión Inicial}) > \begin{matrix}\text{VP(flujos esperados si se ejerce la opción) -}\\ \text{VP(inversión necesaria para ejercer la opción)}\end{matrix}$$

Podemos definir el siguiente Valor Presente:

$$VP_{Call} = \frac{\text{VP(flujos esperados si se ejerce la opción)}}{[\text{VP(inversión necesaria para ejercer la opción)} + \text{inversión inicial}]}$$

Lógicamente interesará llevar a cabo el proyecto si: $VP_{Call} > 1$

Con estas definiciones podemos clasificar las opciones en seis tipos:

Tipo A: muy poco volatilidad, $VP_{Call}>1$ y valor del ejercicio inmediato positivo. Son opciones que interesa ejercerlas inmediatamente.

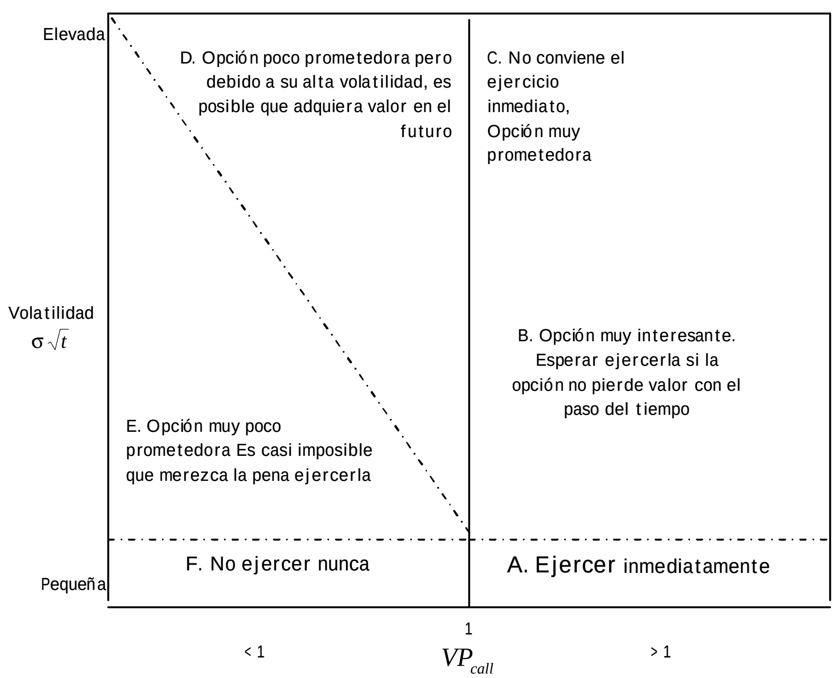
Tipo B: $VP_{Call}>1$, mayor volatilidad valor del ejercicio inmediato positivo. Compensa ejercerlas inmediatamente, pero esperar les puede añadir valor debido a la volatilidad.

Tipo C: $VP_{Call}>1$, volatilidad elevada y valor del ejercicio inmediato negativo. Son opciones que no conviene ejercerlas de inmediato pero esperar puede aumentar el valor de la opción debido a la volatilidad.

Tipo D: $VP_{Call}<1$, volatilidad elevada valor del ejercicio inmediato negativo. No conviene ejercerlas inmediatamente, puede que con el tiempo y debido a su volatilidad el $VP_{Call}>1$ por lo que puede ser conveniente esperar para ejercerlas posteriormente.

Tipo E: $VP_{Call}<1$, menor volatilidad y valor del ejercicio inmediato negativo. No conviene ejercerlas ahora y dado que $VP_{Call}<1$, es posible que este tipo de opción nunca consiga tener ningún valor.

Tipo F: $VP_{Call}<1$, muy poca volatilidad y valor del ejercicio inmediato negativo. Estas opciones no conviene ejercerlas nunca.



Cómo aplicar la teoría de opciones en una empresa

1. Cuando las tasas de interés son elevadas, el valor presente de los flujos es menor debido a las elevadas tasas de descuento. Con lo anteriormente dicho es fácil observar que el valor de la opción de emprender un proyecto disminuirá. Por otra parte al ser altas las tasas de descuento, el valor presente del precio de ejercicio de la opción también disminuye. Con esto podemos observar un cierto efecto compensador por lo que dependiendo del tipo de opción de que se trate el efecto de aumento en las tasas de interés podrá resultar benéfico o perjudicial.

2. A diferencia de las opciones sobre acciones, existen dos tipos de opciones sobre crecimiento: exclusivas y compartidas. Las primeras suelen ser las más valiosas ya que se derivan del ejercicio de una patente, de una tecnología exclusiva o de algún otro método que la competencia no puede imitar. Las opciones de crecimiento compartidas son menos valiosas, son oportunidades colectivas del sector, es decir son opciones que la competencia puede igualmente llevar a cabo.

3. Cabe destacar que se debe de caracterizar a las opciones de acuerdo a si éstas te generan beneficios en forma de flujos de efectivo, las cuales llamaremos opciones simples, ó aquellas cuyos beneficios futuros incluyan la posibilidad de tener opciones posteriores de inversión, que llamaremos opciones compuestas.

4. La empresa debe de separar los proyectos en los cuales se tenga que tomar una decisión inmediata sobre la totalidad del proyecto, de aquellos en que se puede tener cierta flexibilidad de decisión futura. También debe de preguntarse si los beneficios de la opción serán exclusivos para la empresa o si serán alcanzables para la competencia.

5. Cabe recalcar que, como ya dijimos, al utilizar la técnica del Valor Presente, ésta puede subvaluar el valor de las opciones presentes en el proyecto y la flexibilidad futura de decisión,

6. A diferencia de lo que comúnmente se cree, si aplicamos la teoría de las opciones para la toma de decisiones, podemos deducir que el tener un proyecto con *mayor incertidumbre, tasas altas de interés y horizontes lejanos de inversión* no necesariamente es perjudicial ya que esto puede aumentar el valor de una oportunidad de inversión.

4. Aplicación del modelo Binomial para la valuación de Opciones Reales

4.1 Aplicación del modelo a opciones reales

Para poder observar la versatilidad del modelo binomial para valuar opciones financieras en el ámbito de las opciones reales supongamos que contamos con una empresa que comercia con productos perecederos y que al día de hoy hemos producido la cantidad necesaria de producto para poder satisfacer las necesidades de nuestros clientes durante todo el periodo, existen sin embargo ciertas complicaciones al comerciar con este tipo de productos, a pesar de que existe una gran demanda por nuestros productos, la volatilidad en el precio de éstos es de 40%, suponemos que durante los seis primeros meses tenemos la versatilidad de negar nuestros productos a los consumidores cuando el precio de ellos es muy bajo, durante todo el año podemos suponer que el costo de almacenaje en nuestra planta es igual a cero pues los productos de este proyecto se almacenan con los de todos los proyectos de la planta a un muy bajo costo, sin embargo, para la segunda mitad del año no podemos escoger esperar a que el precio de nuestro producto sea mayor por que corremos el riesgo de que nuestra mercancía se dañe o se pudra por completo, por lo que la política de la empresa establece que se debe vender el producto al precio de mercado cuando éstos cuenten con 6 meses, perdiendo con esto la opción de venderlos. Dicha venta se realiza generalmente al final del año pues nuestros distribuidores necesitan abastecerse para el próximo año, por lo que al final de los seis meses en donde contamos con la opción de vender nuestros productos, estamos expuestos a los movimientos del mercado en el precio de nuestros productos hasta el final del año, punto en el cual, la mercancía es forzosamente vendida. Sin embargo estudios recientes han desembocado en la producción de un conservador que al actuar en forma conjunta con los cuidados con los que ya contamos en la planta y que se asumen como cero, resultan en la conservación indefinida de nuestro producto. Dicho conservador tiene un costo de 3 millones de pesos para toda la producción.

Suponemos que la tasa de interés libre de riesgo de este año es de 10%, las proyecciones de los flujos de efectivo futuros coinciden en que el valor presente (cifras en millones)del proyecto (S) es de \$200 si se inicia el día de hoy, sin embargo se ha calculado que el costo de llevar a cabo el proyecto (K) es de \$220 por lo que tenemos un VP de -\$20 algo importante es que se espera que el costo del proyecto permanezca constante durante todo el año

Calculemos primero el valor del proyecto cuando se sigue con la política anterior de la empresa por medio de un árbol binomial con periodos de duración de 3 meses, en este caso dada dicha política debemos de calcular el árbol de forma que los primeros seis meses podemos suponer que se trata de un opción americana, es decir podemos ejercer el derecho de venta si resulta mas rentable que continuar con la opción y los últimos seis meses nos veremos obligados a utilizar sólo la valuación riesgo neutral ya que deberemos vender el producto sin importar cuál sea el precio al final del año.

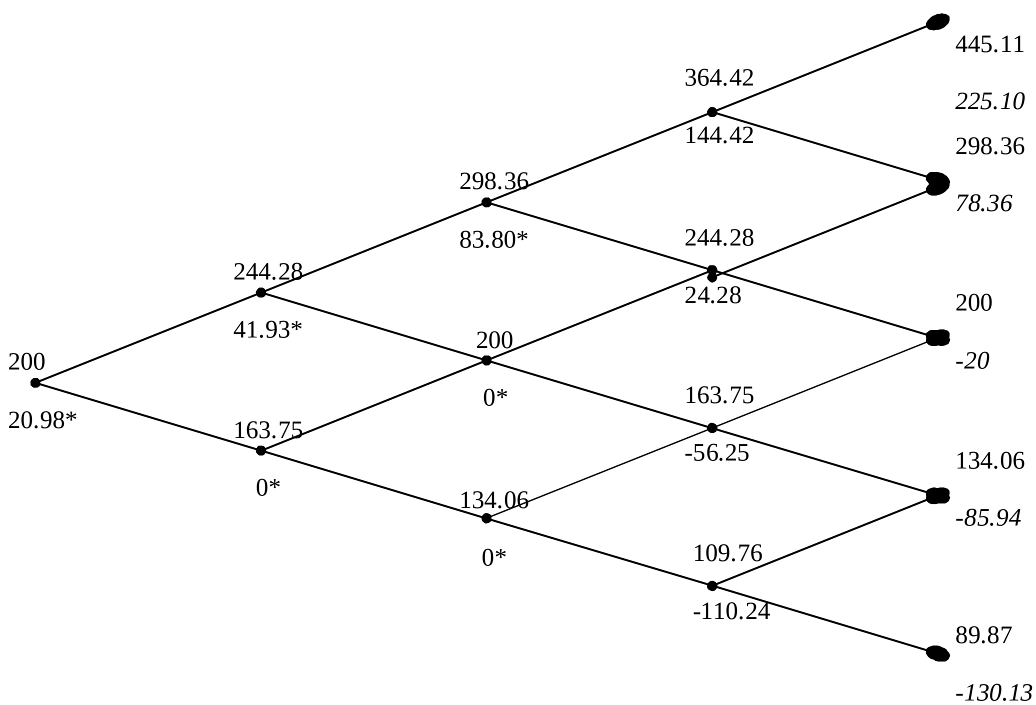
Utilizaremos las variables ya definidas

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{0.4\sqrt{0.25}} = 1.2214$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = e^{-0.4\sqrt{0.25}} = 0.8187$$

$$\Pi = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{0.1*0.25} - 0.8187}{1.2214 - 0.8187} = 0.513$$

Gráficamente el árbol toma la siguiente forma:



En cada uno de los nodos en los cuales es tiene la opción de vender el producto se tiene el precio de éstos bajo el modelo propuesto conjuntamente con el valor máximo entre el valor de la opción y el valor del ejercicio prematuro de las ventas, denotamos con (*) los nodos en los cuales la opción tiene mayor valor que el ejercicio prematuro, podemos observar que las ventas en esta primera etapa en la que contamos con la opción no sufren de grandes pérdidas por lo que podemos deducir que la opción, a pesar de que llegamos al resultado de que no es óptimo ejercer prematuramente durante estos primeros 6 meses, tiene valor.

Como a los seis meses se pierde la opción americana, a partir de este punto no tenemos protección contra los eventos desfavorables en los que incurra el precio de nuestros productos con la consecuente desventura de las pérdidas esperadas por aceptar el precio modelado.

En los nodos finales tenemos el valor de las ventas al final del año con los respectivos rendimientos netos al tomar en cuenta el costo de producir y vender el producto.

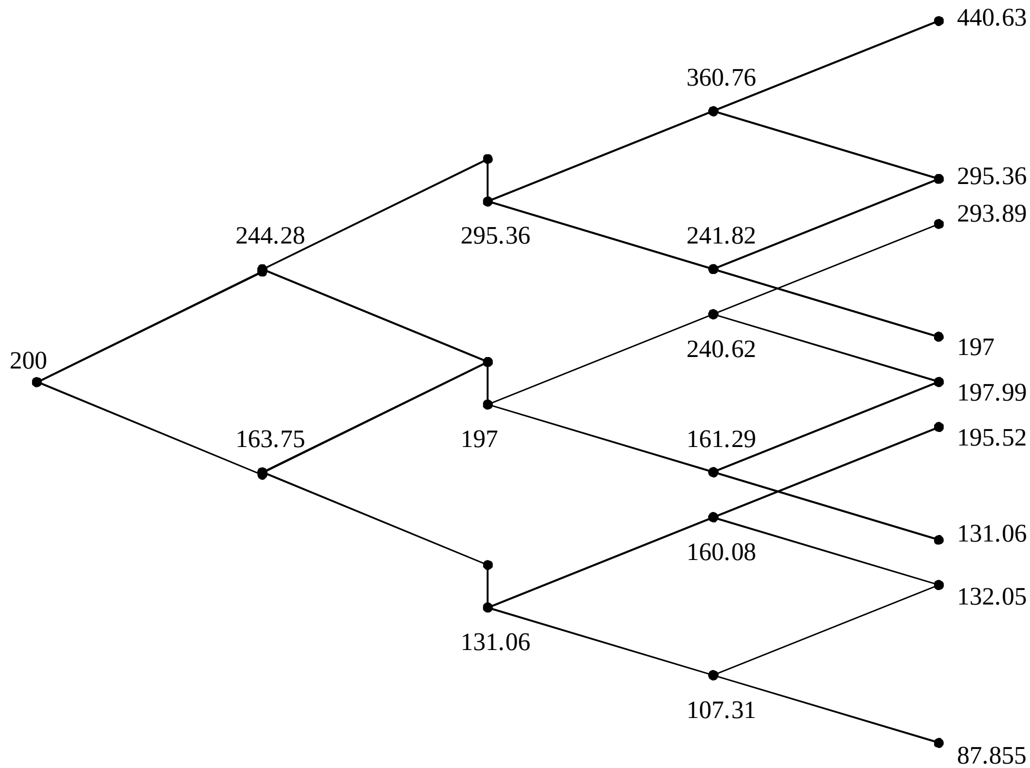
4.2 Aplicación del modelo para una acción que paga dividendos

A continuación valuaremos la posibilidad de adquirir el nuevo conservador, como nuestros productos por sí mismos nos dan la opción de venderlos durante seis meses, no existe la necesidad aunque sí la posibilidad de adquirir el conservador desde el inicio del periodo, sabemos que siempre será mejor pagar cualquier cantidad de dinero en el futuro que hacerlo inmediatamente y como no existe ningún aliciente en el uso del conservador en este momento, lo utilizaremos cuando sea completamente necesario, es decir, seis meses después de cuando se fabrica nuestro producto, logrando con esto beneficiarnos de los intereses sobre los 3 millones de pesos durante medio año.

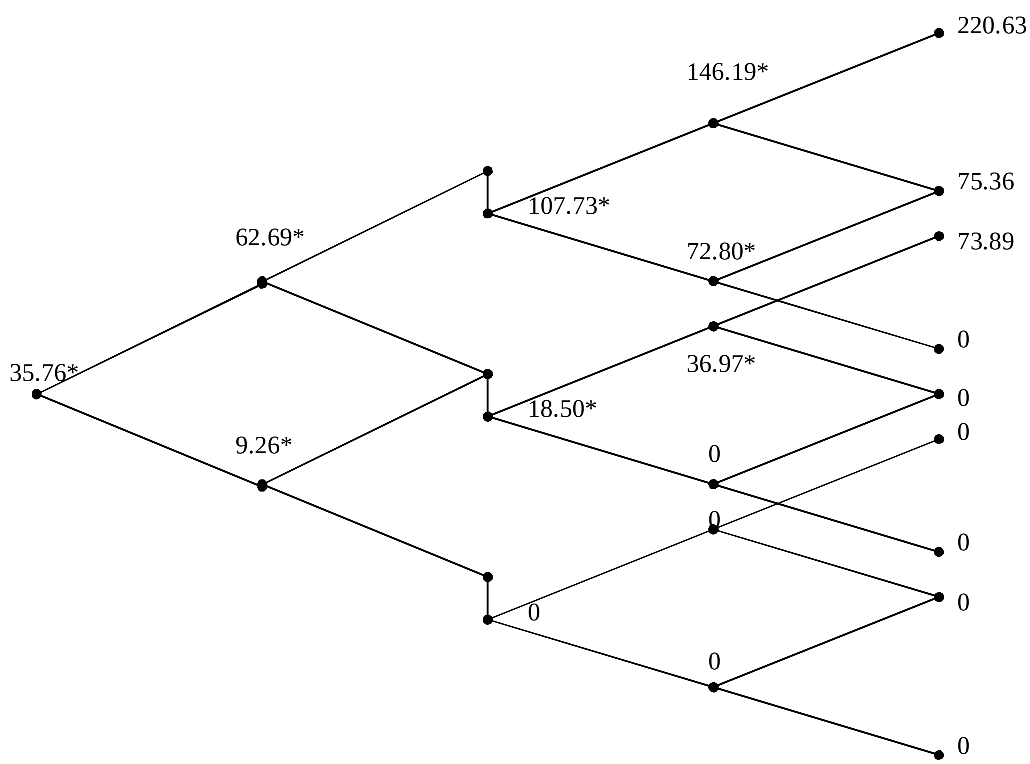
Como los 3 millones se pagan a mediados de año, podemos ver éstos como el pago de un dividendo y graficar la baja en el valor del activo, de esta forma podremos tener la opción de vender el producto durante todo el año.

Podemos ver esta opción como una opción de venta y se puede valuar como una opción de compra pues a pesar de que vendemos nuestro producto, pagamos el precio de ejercicio, es decir, el precio por producir, mantener y comerciar el producto, como si fuera una opción de compra

Los movimientos en el precio de nuestros productos siguen, pagando el conservador a los seis meses, el siguiente comportamiento.



Por lo que los rendimientos netos al contar con la opción americana durante todo el año quedan determinados por la siguiente gráfica



Los valores marcados por (*) representan valores de la opción de esperar para vender, es decir, queremos hacer notar que aunque en ninguno de los casos es óptimo ejercer anticipadamente debido principalmente a la alta volatilidad con la que modelamos el precio de nuestro producto, podemos comprobar que tiene un valor de $35.76 el poder contar con la opción durante todo el periodo, como se puede apreciar al comparar los rendimientos cuando se tiene y cuando no se tiene la opción, la gran diferencia es que como ya dijimos con las opciones acotamos las situaciones en las cuales podemos incurrir en pérdidas para la empresa por lo que cuando aplicamos el conservador podemos optar por no vender y con esto teóricamente no perdemos nunca pues debido a la alta volatilidad del precio del producto, vale la pena esperar a una alza en los precios.

El modelo binomial sobre acciones que pagan dividendos puede ser aplicado a una amplia gama de inversiones, en este caso se asemejó al pago de dividendos de una acción con el pago de un conservador que permitiera tener la *opción* de vender nuestro producto en el futuro, sin embargo estos dividendos pueden ser vistos como muchas otras decisiones que nos permitan tener *flexibilidad* en cuanto a la opción de hacer algo en el futuro, entre las cuales se encuentran:

Costo de diferir la inversión por un determinado tiempo.

Renovar un contrato que permita tener ciertas flexibilidades sobre la comercialización de nuestros productos o aquellos que pretendamos adquirir.

Adquisición o renta de una bodega que permita tener la opción de mantener nuestros productos en existencia hasta la mejora del comportamiento del mercado (muy semejante al caso del conservador aunque en este caso pueden existir una serie incremental de pagos cuando se renta la bodega).

Ceder parte del patrimonio o producto para obtener la flexibilidad deseada

Pagar una prima, multa o garantía que permita acotar las situaciones de pérdida de la empresa.

Compra o préstamo de equipo y/o maquinaria necesaria para producir en cualquier momento del tiempo, esto con el fin de producir sólo cuando sea óptimo hacerlo.

Liquidación de trabajadores para producir sólo cuando el mercado sea favorable para ello, esta opción puede también pensarse como la contratación continua de trabajadores por periodos cortos de tiempo y los costos en los que incurrimos al hacer esto.

4.3 Un ejemplo con muchas opciones

Siguiendo con el tema por este trabajo referido y el enfoque que se pretende dar a las opciones como medio de aplicación en la toma de decisiones en una empresa, tomaremos el caso de un estudio de mercado; en este caso éste también puede ser visto como una opción, pues se paga un precio por obtener una cobertura, aunque en este sentido la cobertura se refiere a la información que el estudio pueda proveer, esto puede ser similar a una opción de posponer la inversión hasta la llegada de información relevante y el costo del estudio de mercado lo podemos ver como el costo de diferir la inversión, por lo que una vez que el estudio de mercado nos ha proporcionado la información apropiada, tomaremos distintas decisiones.

Supongamos que cierta compañía debe decidir si manufactura una parte de un componente en sus plantas locales o comprar parte del componente con un proveedor, estas dos alternativas serán denotadas como A_1 y A_2 respectivamente. La ganancia resultante dependerá de la demanda del producto, la siguiente tabla de pagos muestra la ganancia proyectada en cientos de miles de pesos.

	Demanda		
ALTERNATIVAS	Alta	Media	Baja
Manufacturar	14	9	10
Comprar	11	10	8

Las probabilidades de que la demanda sea alta (A), media (M) y baja (B) son 0.30, 0.35 y 0.35 respectivamente.

Si ahora suponemos que un estudio de mercado acerca de la demanda del producto cuesta $100,000 y éste puede arrojar sólo dos resultados: Favorable (F) o no favorable (NF), debemos cuantificar la confianza dada por los resultados por dicho estudio, la probabilidad de que el estudio sea favorable o no dada cualquiera de las demandas aleatorias que estamos considerando.

Obteniendo de esta forma estas probabilidades condicionales:

P(F/B)=.10	P(F/M)=.40	P(F/A)=.60
P(NF/B)=.90	P(NF/M)=.60	P(NF/A)=.40

A estas probabilidades las llamaremos probabilidades a *priori*. Como ejemplo podemos decir que la probabilidad de que el estudio sea no favorable dado que la demanda es baja es 0.90, mientras que la probabilidad de que dicho estudio sea favorable dado que existe una demanda alta es de 0.60.

Al hablar de probabilidades condicionales, implícitamente estamos hablando de la probabilidad de la intersección de los posibles comportamientos de la demanda con los resultados del estudio, ya que, por definición:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ f } B)}{P(B)}$$

Por esto una vez calculada la probabilidad de cada evento es fácil obtener la probabilidad condicional a partir de la probabilidad conjunta y viceversa.

Para poder elaborar un árbol de decisión necesitamos obtener las probabilidades condicionales cuando el resultado del estudio de mercado ya ha sido favorable o no favorable y cualquiera de los tres casos de demanda es posible, es decir una vez que conocemos P(F/B) necesitamos obtener P(B/F).

Usaremos el ***Teorema de Bayes*** que dice que si (Ω, f, P) es un espacio de probabilidad y $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de Ω, $P(B_i) > 0$ y $A \in f$

$$P(B_K / A) = \frac{P(A/B_K)P(B_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)}$$

Así una vez que tenemos las probabilidades a *priori* podemos obtener lo siguiente:

Multiplicando por las probabilidades de cada uno de los eventos

$$\begin{pmatrix} .10 & .40 & .60 \\ .90 & .60 & .40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .35 \\ .35 \\ .30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .035 & .14 & .18 \\ .315 & .21 & .12 \end{pmatrix}$$

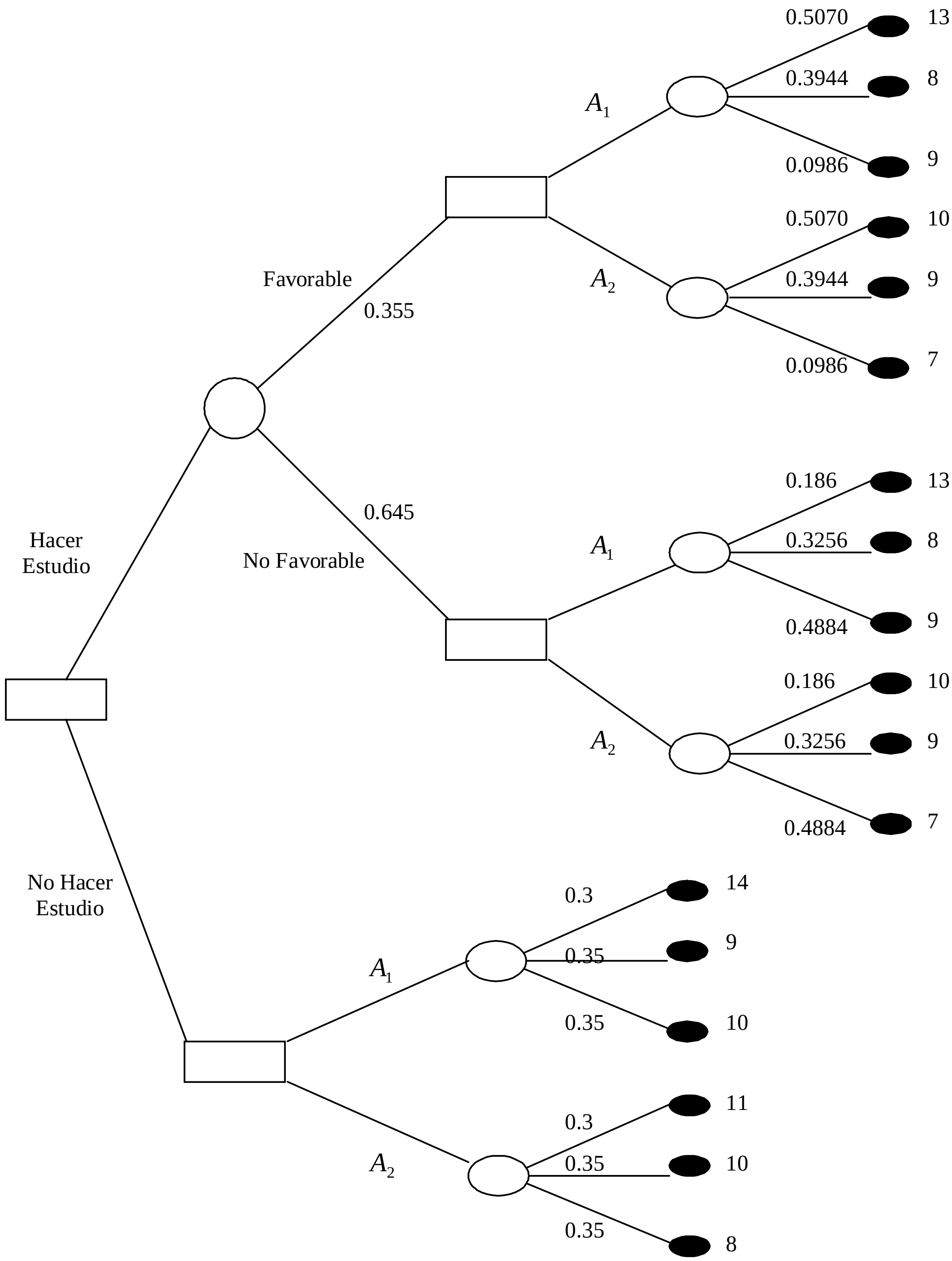
Sumando los renglones de esta matriz obtenemos $\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i)$ que es en realidad P(F) y P(NF) en nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} P(F) \\ P(NF) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .355 \\ .645 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.035 + 0.14 + 0.18 \\ 0.315 + 0.21 + 0.12 \end{pmatrix}$$

Por lo que ya podemos obtener las probabilidades deseadas que llamaremos probabilidades a *posteriori*

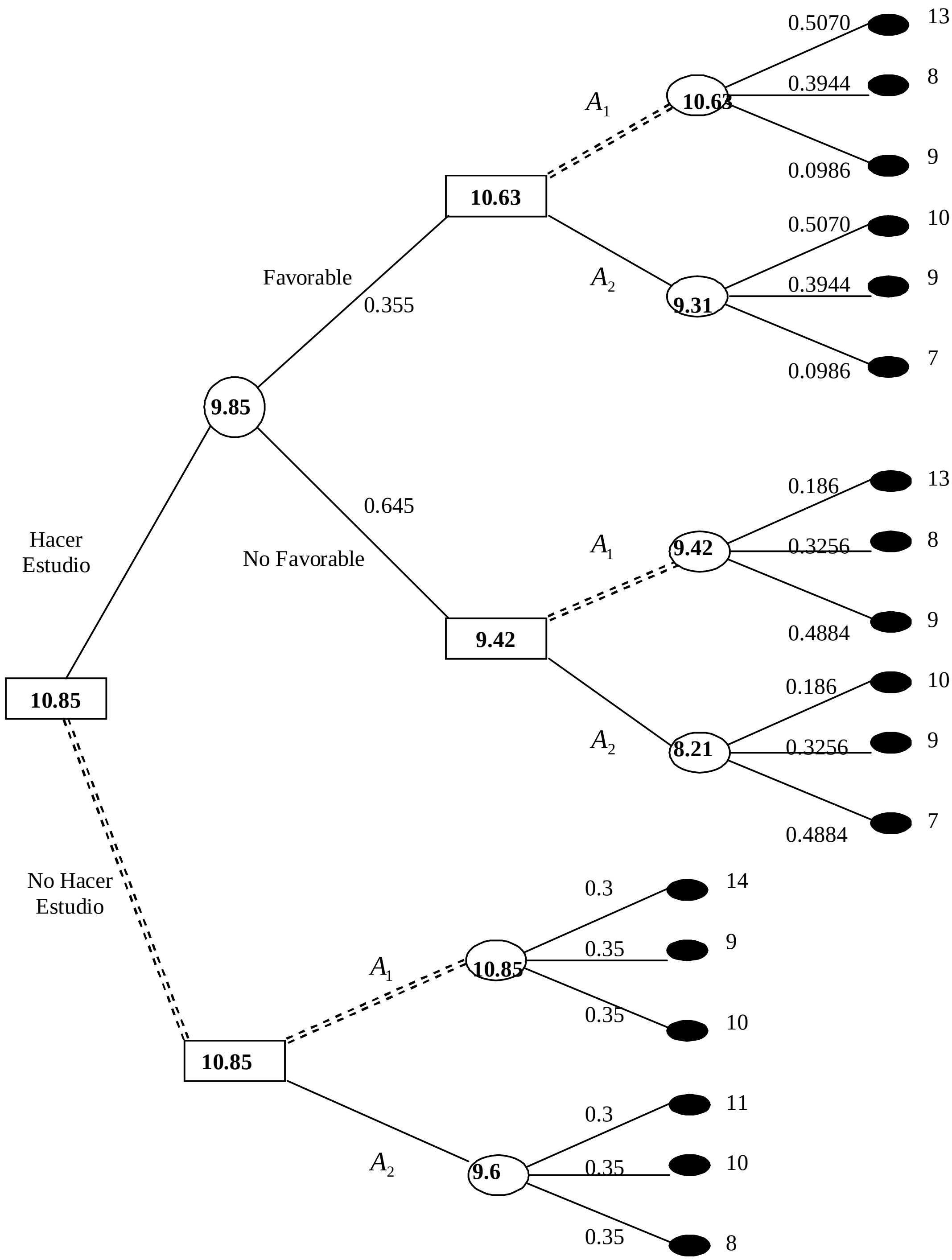
$$\begin{pmatrix} .035/.355 & .14/.355 & .18/.355 \\ .315/.645 & .21/.645 & .12/.645 \end{pmatrix}$$

Con estas probabilidades y las que ya contábamos podemos construir el siguiente árbol de decisión.



Este árbol de decisión es una gráfica conexa y acíclica, cada óvalo corresponde a un evento aleatorio y los rectángulos corresponden a decisiones que se pueden llevar a cabo, cada línea que sale de un óvalo tiene asignada una probabilidad y los óvalos negros finales tienen asignados los rendimientos netos de la inversión en cada uno de estos nodos finales, así pues, podemos observar que en el caso de que se lleve a cabo el estudio de mercado, los rendimientos de cada uno de los escenarios posteriores se verán mermados debido al costo incurrido al llevarlo a cabo.

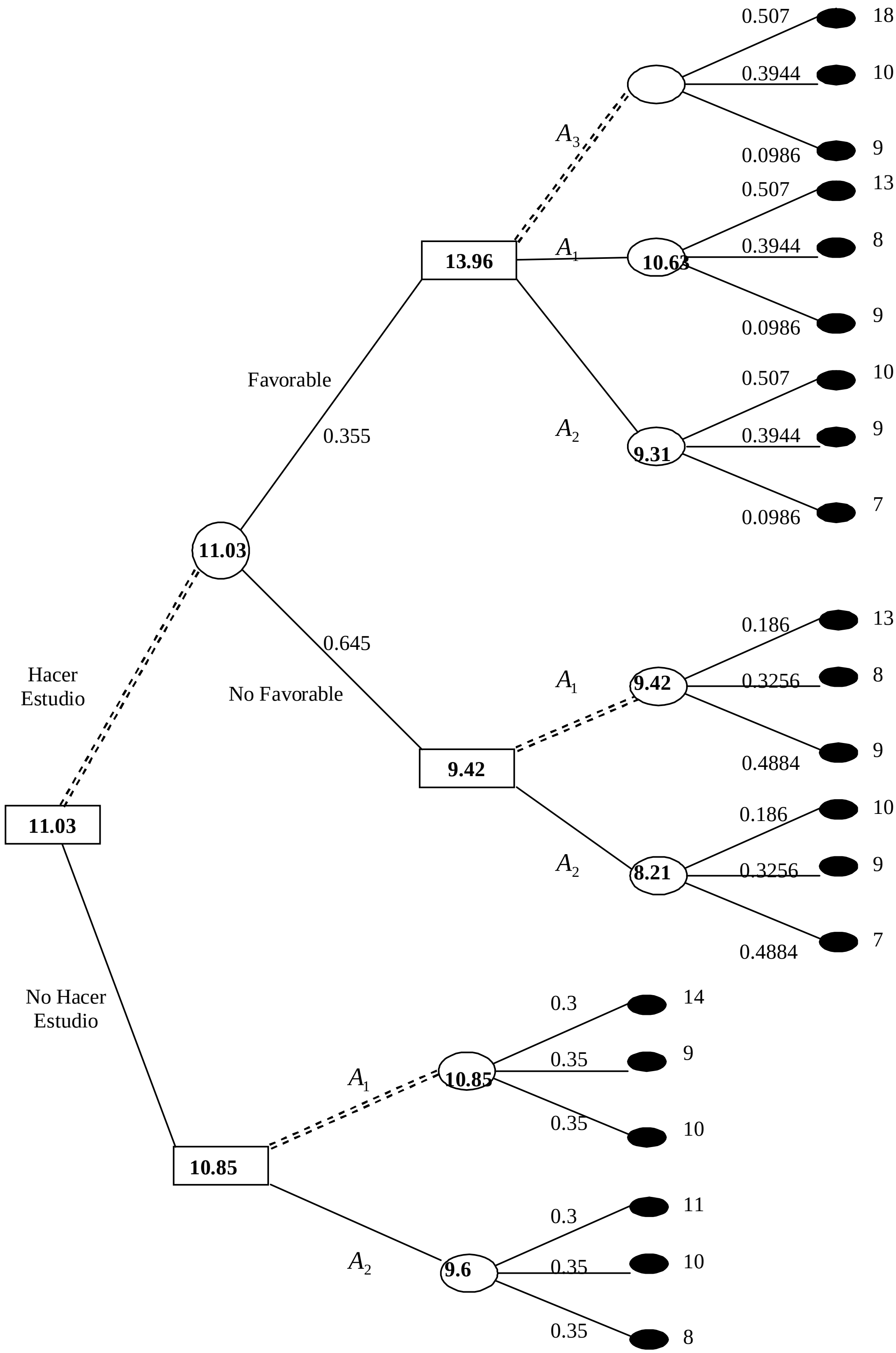
Para obtener el valor de la inversión en cada uno de los nodos basta con tomar la decisión que beneficie en mayor medida al inversor si se trata de un nodo ilustrado por un rectángulo o calcular el valor esperado de los flujos para los eventos aleatorios ilustrados, como ya se dijo, con óvalos, de esta forma el problema queda resulto de la siguiente manera:



Las decisiones óptimas a cada etapa del árbol están trazadas por las líneas dobles punteadas, podemos observar que la decisión óptima es no hacer el estudio de mercado y escoger A_1, es decir, manufacturar los componentes en las plantas locales.

Este resultado en realidad no debería de sorprendernos por que aunque estamos pagando una prima por obtener información que los competidores no tienen inmediatamente, no estamos reaccionando de forma distinta a como ellos lo hacen sin importar cuál es el resultado de la información, es decir, si agregamos al problema que con la confianza de haber obtenido datos alentadores del estudio la empresa puede, por ejemplo, manufacturar en exceso para cubrir la demanda que los competidores no pueden, estaremos agregando valor al estudio de mercado. Pues permitimos a la empresa llevar a cabo una *Opción Operativa*.

Supongamos que si el estudio de mercado resulta ser favorable podemos reaccionar anticipándonos a la probable alta demanda de nuestro producto manufacturando en exceso y obteniendo con esto los siguientes beneficios: Si la demanda es alta, media o baja; los beneficios serán de 18,10 y 9 cientos de miles de pesos respectivamente, a esta alternativa de producción la denominaremos A_3, tomando en cuenta esta alternativa el árbol se modifica en la siguiente forma:



0.507
18
0.3944
10
A_3
0.0986
9
0.507
13
A_1
13.96
10.63
0.3944
8
0.0986
9
Favorable
0.507
10
0.355
A_2
9.31
0.3944
9
0.0986
7
11.03
0.186
13
0.645
Hacer Estudio
A_1
9.42
0.3256
8
No Favorable
0.4884
9
9.42
0.186
10
11.03
A_2
8.21
0.3256
9
0.4884
7
No Hacer Estudio
0.3
14
0.35
9
A_1
10.85
0.35
10
10.85
0.3
11
A_2
9.6
0.35
10
0.35
8

En este caso resulta más rentable hacer el estudio de mercado y tomar las decisiones marcadas por las líneas punteadas para obtener el beneficio óptimo en la inversión, esto ocurre debido a que con el estudio estamos reduciendo la incertidumbre en el comportamiento del mercado y la información obtenida es benéfica no importa cuál sea el resultado del estudio pues ambos resultados posibles derivan en decisiones distintas.

4.4 La opción de abandonar

En este tipo de opción generalmente se considera la venta del activo como la forma en la cual se obtiene el valor residual de un proyecto, sin embargo podemos también notar que no se tiene que vender un activo para conseguir el valor de abandono, basta con que se le emplee en otra área de la empresa o en otro proyecto similar para que los activos de un proyecto cuenten con valor para la empresa.

Podemos claramente asemejar la opción de abandono a una opción de venta con la que cuenta la empresa sobre sus activos. En general, se debe abandonar un proyecto de inversión cuando (1) su valor de abandono excede el valor presente neto de los flujos de efectivo futuros posteriores del proyecto, y (2) es mejor abandonar en el momento en que se esta haciendo la valuación que en el futuro.

Como ya dijimos podemos agregar el valor de la opción al VPN del proyecto calculado de la forma usual, incrementando de esta forma el valor del proyecto, así, mientras más valiosa se torne la opción de abandono del proyecto, más valioso será el proyecto para la empresa.

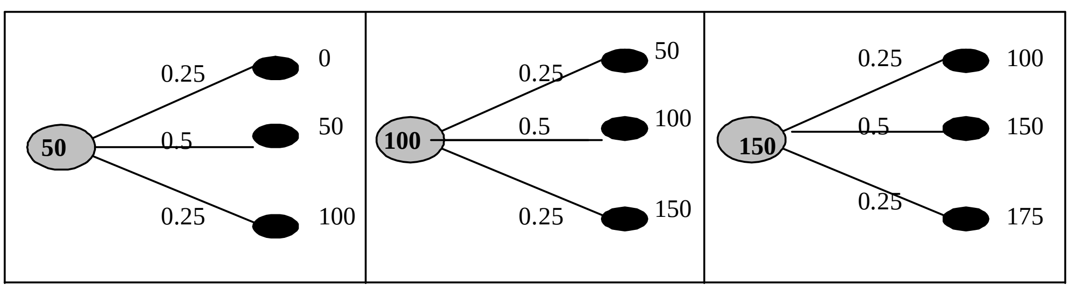
$$\text{Valor del proyecto} = \begin{array}{c}\text{VPN sin opción}\\ \text{de abandono}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Valor de la opción}\\ \text{de abandono}\end{array}$$

El reconocimiento de una opción de abandono posterior puede tener un efecto significativo sobre la selección de un proyecto pues puede cambiar una decisión de rechazo hacia una de aceptación una vez que se ha decidido la forma en que se empleará la opción dependiendo de los movimientos del mercado.

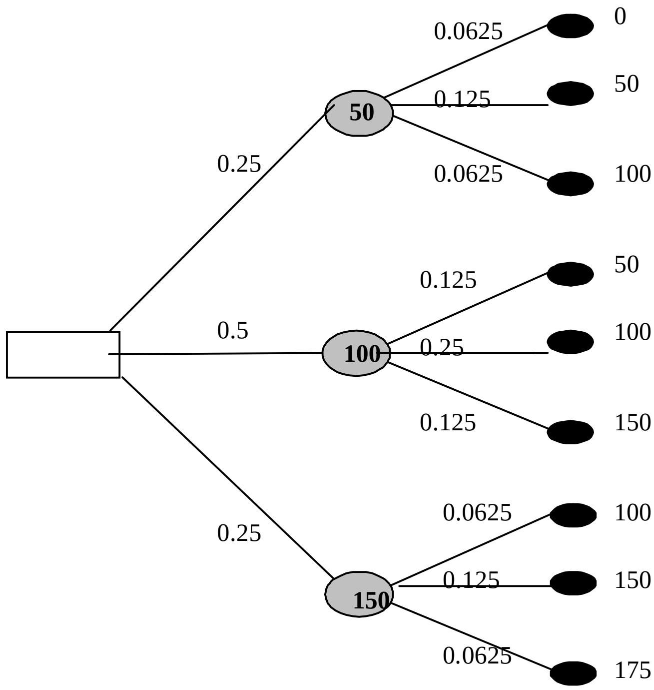
Supóngase que contamos con una empresa que realiza actualizaciones de sus productos cada 2 años, es decir, el diseño y funcionamiento de los modelos que se fabrican son mejorados pasado este periodo de tiempo. Se esta considerando la posibilidad de llevar a cabo un proyecto en el cual la empresa deberá de hacer una inversión de \$140 millones, las probabilidades de eventos futuros con sus correspondientes probabilidades se muestran en la siguiente tabla:

Periodo 1		Periodo 2		
Flujo de efectivo (en millones)	Probabilidad inicial P(1)	Flujo de efectivo (en millones)	Probabilidad condicional P(2/1)	Probabilidad conjunta P(2,1)
$50	0.25	$ 0 50 100	0.25 0.5 0.25	0.0625 0.125 0.0625
100	0.5	50 100 150	0.25 0.5 0.25	0.125 0.25 0.125
150	0.25	100 150 175	0.25 0.5 0.25	0.0625 0.125 0.0625

Gráficamente podemos ver que durante el segundo año los posibles estados del primer año se subdividen con sus respectivas probabilidades condicionales de la siguiente forma:



Cuando tomamos bajo consideración las probabilidades conjuntas de cada uno de los eventos, se obtiene el árbol terminado, en este caso los óvalos no representan el valor esperado de los flujos de efectivo futuro sino los flujos de efectivo que se esperan recibir en cada periodo.



Suponemos un valor de abandono esperado de $75 millones al final del primer año, como se espera que en dos años el proyecto sea mejorado, suponemos que después del segundo año, no se espera que el proyecto tenga valor residual.

Si suponemos una tasa de rendimiento requerida de 10% y utilizamos esta tasa como nuestro factor de descuento, podemos determinar el valor presente neto esperado del proyecto sin su abandono tomando la suma de 1) y 2) cuando cada uno representa.

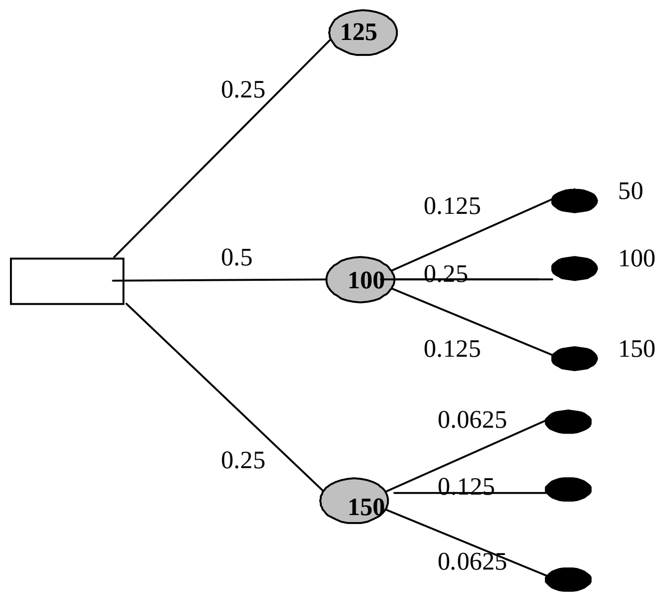
1) El valor presente de la suma de los flujos de efectivo del segundo año ponderada por las probabilidades conjuntas (= $80.59)

2) El valor presente de la suma de los valores de los flujos de efectivo del primer año ponderada por las probabilidades iniciales.(= $90.48)

Al sumar ambos valores y descontar el costo de realizar el proyecto obtenemos que el valor neto del proyecto sin tomar en cuenta el abandono es de $31.08 millones.

Sin embargo, cuando tomamos en cuenta la probabilidad de abandono, los resultados cambian de manera importante. Al seguir las reglas de decisión ya especificadas, la empresa se desharí a del proyecto si su valor de abandono al final del periodo 1 rebasara los flujos de efectivo esperados para el periodo siguiente descontados al 10%. Puesto que se esperan flujos de efectivo sólo en dos periodos, no existe la posibilidad de abandonar el proyecto más allá del periodo 1. Podemos entonces concluir que debemos abandonar el proyecto al final del primer año si el flujo de efectivo en ese periodo es de $50 millones. La razón es que el valor presente medio de los posibles flujos de efectivo en el periodo 2, descontados al periodo 1, es de $45.24 millones, cantidad claramente menor al valor de abandono al final del periodo, que es de $75 millones. Si el flujo de efectivo en el periodo 1 llega a ser $100 o 150 millones, el abandono no valdrí a la pena porque el valor presente medio de los flujos de efectivo del periodo 2, descontados al periodo 1, exceden los $75 millones ($90.48, 130.07 millones respectivamente).

Cuando se admite la posibilidad de abandono, se deben revisar los flujos de efectivo esperados, quedando el árbol de la siguiente forma



Al recalcular el valor presente neto medio para la propuesta con base en la información, encontramos que es de $37.81 millones. Hay una mejora significativa, porque se elimina una parte del riesgo al abandonar el proyecto cuando los hechos se vuelven desfavorables en el primer año.

Como ya vimos lo que realmente hace valiosos a una opción en general es que acota las condiciones en las cuales la inversión no es rentable, de hecho, aún cuando el proyecto es rentable, puede tener sentido abandonarlo si el valor de abandono es suficientemente elevado. En otras palabras, el momento óptimo de abandonarlo es el punto en que la combinación de flujos de efectivo futuros esperados y el valor futuro del abandono tienen el mayor valor presente. Esta opción es muy importante para empresas que llevan a cabo varios proyectos simultáneamente ya que mediante la evaluación continua de ellos, una compañí a puede eliminar aquellos proyectos que ya no son viables desde el punto de vista económico.

5. Aplicación del modelo Black – Scholes para la valuación de Opciones Reales

5.1 Modificaciones y supuestos al aplicar el modelo B&S para la valuación de opciones reales

El modelo Black-Scholes anteriormente descrito se utiliza para la valuación de cualquier activo que tenga las características de una opción, con algunas modificaciones. Una vez que hemos comprobado que este modelo es aplicable a los proyectos que estamos estudiando debemos por tanto hacer hincapié en algunas modificaciones, adecuaciones y limitaciones de este modelo al utilizarlo para la valuación de opciones reales a fin de poder aplicarlo eficazmente a este tipo de proyectos, ya que, en los tipos de proyectos que ya describimos, las opciones que están evaluándose no son activos de intercambio financiero (como acciones o commodities) sino opciones reales (como proyectos o reservas de recursos naturales) por lo que la naturaleza de cada una de las variables que intervienen en el modelo debe de ser explicada en comparación con los supuestos y variables del modelo.

El activo subyacente no se intercambia

Como ya describimos en su momento, la valuación de opciones por medio del modelo Black – Scholes se basa en el supuesto de que puede crearse un portafolio de réplica usando el activo subyacente y un préstamo a la tasa libre de riesgo, este supuesto es para este tipo de activos perfectamente justificable pues como ya dijimos estos activos son de intercambio financiero. Sin embargo cuando el activo subyacente no es intercambiado no es posible asegurar que existe un portafolio de réplica por lo que el argumento en base a la ausencia de arbitraje no es factible. Es por esto que los valores de cada una de las variables en nuestro modelo deben de ser interpretados con mucha cautela pues al no ser intercambiados en ningún tipo de mercado podemos incurrir en errores de estimación.

El precio del activo sigue un proceso continuo

Como pudimos notar anteriormente, el modelo de valuación de opciones Black – Scholes deriva del supuesto de que el proceso de precio del activo subyacente es continuo (esto es, no existen brincos de precio). Si se viola dicho supuesto, como se hace en muchas opciones reales, el modelo subestimará el valor de las opciones fuera de dinero. Una solución es usar estimaciones de varianza más altas para evaluar este tipo de opciones y menores estimaciones de varianza para las opciones dentro de dinero o las que están en dinero.

La varianza es conocida y no cambia a través del tiempo de vida de la opción

Este supuesto es justificable para cualquier activo que se intercambiado en un mercado establecido, cuando estamos valuando una opción sobre un activo financiero la volatilidad es fácilmente observable, más aún si se aplica a opciones a corto plazo. En el caso que nos ocupa, los proyectos de inversión suelen ser a largo plazo por lo que existen problemas con este supuesto pues es poco probable que la varianza se mantenga constante a lo largo de periodos extendidos de tiempo (factor que afecta incluso la valuación por medio de árboles binomiales) y de hecho, puede ser mucho más difícil de estimar bajo estas condiciones. Más aún, si el proyecto es una innovación será virtualmente imposible determinar la volatilidad basándonos en proyecciones del proyecto.

Existen versiones modificadas del modelo de valuación de opciones, que permiten cambiar varianzas, aunque requieren que el proceso por el cual cambia la varianza sea modelado de manera muy explícita.

Existen algunas sugerencias que podemos tomar en cuenta al precisar la volatilidad de un proyecto:

1. Podemos hacer un supuesto de la volatilidad estimada de un amplio índice de las acciones del mercado y luego evaluar el riesgo del proyecto, con lo cual, podemos establecer una medida de volatilidad apropiada para el proyecto.
2. Estimar la volatilidad basados en proyectos similares de industrias relacionadas.
3. Simular la volatilidad. Esto se realiza con proyecciones de los flujos de efectivo futuros del proyecto, con simulaciones se puede establecer la distribución de probabilidad del proyecto y con esto podemos tomar la medida de volatilidad apropiada.

El ejercicio es instantáneo

Los modelos de valuación de opciones están basados en la premisa de que el ejercicio de una opción es instantáneo. Este supuesto puede ser difícil de justificar con opciones reales pues podemos decir que el ejercicio de la opción puede requerir el construir una planta o construir un pozo petrolero, reabrir una mina, etc. Estas acciones no son instantáneas. El hecho de que el ejercicio tome tiempo también implica que la vida real de una opción real a menudo es menor a la que se considera. Así, mientras una empresa pueda poseer los derechos de una reserva de petróleo por los siguientes diez años, el hecho de que toma mucho tiempo el extraer el petróleo reduce la vida de la opción del recurso natural que la firma posee, lo mismo pasa con la extracción de metales de una mina o la comercialización de un medicamento del cual se tiene una patente.

Costo de ejercicio

Es muy poco probable que se conozca de antemano el costo de ejercicio de una opción sobre proyecto de inversión, es decir es muy difícil precisar con seguridad cuál será el costo total de ejercer la opción sobre un activo real, y que éste sea fijo, este punto es una de las principales discrepancias entre las opciones sobre activos reales y la opciones financieras.

Si no se tiene información fidedigna del costo de ejercicio de la opción que pretendemos ejercer, el reto en este tipo de casos es ser capaz de modelar la incertidumbre que envuelve a esta variable. Debemos de ser capaces de establecer una distribución de probabilidad del costo de ejercicio y del valor del activo subyacente para poder con esto determinar el nivel y signo de correlación.

Fecha de ejercicio

Para algunos proyectos, la fecha de ejercicio de la opción no es fija de antemano, en este tipo de proyectos la fecha de ejercicio es muy incierta y se ve altamente afectada por factores exógenos como la competencia, barreras de entrada, etc. Debemos de tomar en cuenta que existen ciertos factores que hacen que incluso en proyectos de inversión, la fecha de ejercicio sea fija, por ejemplo si queremos lanzar a la venta un producto y si esta fecha de lanzamiento tiene grandes implicaciones con el comportamiento del mercado o si el dudar en lanzar el producto puede derivar en un costo de oportunidad al no ser el primero en actuar sobre el mercado. Podemos decir que en este tipo de opciones la competencia es uno de los principales factores que afectan las estrategias de ejercicio de las opciones.

5.2 La opción de posponer la inversión

Como ya dijimos, para algunos proyectos de inversión, existe la opción de esperar. Es decir, no se tiene la obligación de llevar a cabo el proyecto inmediatamente. Cuando se decide esperar para llevar a cabo un proyecto, uno obtiene nueva información sobre el mercado, sobre precios, costos, competidores, etc. Sin embargo, uno deja de percibir los flujos de efectivo de ese tiempo intermedio en el que se está a la espera de nueva información, y posiblemente la ventaja de ser el primero que ejerce la opción en el mercado.

Si consideramos la decisión de llevar a cabo un proyecto sobre un nuevo producto, donde la empresa tiene la opción de lanzarlo ahora o de diferir su lanzamiento, es lógico pensar que si se lanza el producto ahora la empresa obtendrá flujos de efectivo más pronto que si esperara al lanzamiento, tomando en cuenta sólo este análisis podríamos llegar a la errónea conclusión de que es mejor comenzar el proyecto lo antes posible, sin embargo podemos asemejar esto a tener una opción sobre acciones que pagan dividendos. Des esta forma, si se ejerce la opción en este momento, se obtienen los dividendos en un futuro próximo, pero se cede la opción y se pierde con esto la flexibilidad de decisión con la nueva llegada de información. Si se espera, tal vez podamos ejercer la opción con mayor provecho cuando el mercado sea más favorable para nuestro nuevo producto.

Este dilema puede ser cuantificado haciendo algunos supuestos sobre las variables que determinan los resultados del proyecto, algo que vale la pena señalar es que al hablar de volatilidad de los resultados posibles del proyecto, como ya hemos visto desde que iniciamos el análisis de las opciones financieras, mientras mayor sea esta variable, mayor valor tendrá la opción.

Si el valor de la opción de posponer la inversión es alto, puede llegar a ser atractivo diferir el proyecto en cuestión, aún cuando el proyecto tenga un valor presente neto positivo si se realizara ahora el lanzamiento del producto.

Otra razón importante por la cual se debe de tomar en cuenta la posibilidad de posponer la inversión es la incertidumbre respecto de las futuras tasas de interés, que afectan la tasa de rendimiento requerida que se utiliza como tasa de descuento. Si existe una probabilidad significativa de que puedan bajar las tasas, esto puede hacer que un proyecto sea aceptable en el futuro, aunque no sea aceptable en la actualidad. Nuevamente mientras mayor es la incertidumbre respecto de las tasas futuras en el mercado de capitales, mayor es el valor de ese derecho.

Definición de variables

Las variables necesarias para aplicar la valuación de este tipo de opciones reales son las mismas que se necesitan para cualquier opción. Se necesita el valor del activo subyacente, la varianza sobre ese valor, el tiempo a la expiración de la opción, el precio de ejercicio, la tasa libre de riesgo y la equivalente de dividendos (en este caso esta tasa es idéntica al costo de posponer la inversión), una vez que hemos vistos las modificaciones generales del modelo para ser aplicado a opciones reales, definiremos a continuación las peculiaridades de las variables en este caso particular.

Valor del activo subyacente

Como ya sabemos en el caso de opciones reales, el activo subyacente es el proyecto por sí mismo. El valor presente de este activo es el valor presente de flujos de efectivo esperados de iniciar el proyecto ahora, sin incluir la inversión inicial, que puede obtenerse al hacer un análisis estándar de presupuesto de capital. Sin embargo, es posible que exista discrepancia y confusión en las estimaciones de los flujos de efectivo y el valor presente. En vez de verlo como un problema, esta incertidumbre debe verse como la razón por la que la opción de posponer el proyecto tiene valor. Si los flujos de efectivo esperados sobre el proyecto se conocieran con certeza y no se esperara que cambiaran, no habría necesidad de adoptar un soporte de valuación de opciones, pues no habría valor para la opción.

Varianza en el valor del activo

Como ya mencionamos, es posible que exista incertidumbre asociada con las estimaciones de los flujos de efectivo y el valor presente que mide el valor del activo a la fecha actual. Esto es, en parte porque el tamaño del mercado potencial del producto puede ser desconocido y en parte porque los avances tecnológicos pueden cambiar la estructura de costos y rentabilidad del producto. La varianza en el valor presente de los flujos de efectivo del proyecto puede estimarse en tres posibles formas:

1) Si se han introducido proyectos similares en el pasado, la varianza en los flujos de efectivo sobre estos proyectos se puede utilizar como un estimado.

2) Se pueden asignar probabilidades a varios escenarios de mercado, flujos de efectivo estimados bajo cada escenario y la varianza estimada a través de valores presentes. Alternativamente, las distribuciones probabilísticas se pueden estimar para cada una de las entradas del análisis del proyecto: el tamaño del mercado, la participación de mercado y el margen de beneficio, por ejemplo; y las simulaciones que se usan para estimar la varianza en los valores presentes que se requieran. Esta aproximación tiende a trabajar mejor cuando solamente existen una o dos fuentes (como la aleatoriedad en ingresos y egresos) de incertidumbre sobre los flujos de efectivo futuros.

3) Como un estimado de la varianza puede utilizarse la varianza en el valor de la empresa o empresas involucradas en el mismo negocio que el proyecto que se está considerando. Así, la varianza promedio en el valor de una empresa aseguradora, podría representar la varianza del valor presente de un proyecto particular de seguros. Desgraciadamente, en México este tipo de información no se da a conocer públicamente.

El valor de la opción está ampliamente influido por la varianza en los flujos de efectivo: a mayor varianza, mayor será el valor de la opción de posponer el proyecto. Entonces el valor de la opción de hacer un proyecto en un negocio estable será menor que el valor de una en un entorno donde la tecnología, competencia y resultados finales cambian constantemente.

Precio de ejercicio de una opción

Una opción de posponer un proyecto se ejerce cuando la empresa que posee derechos sobre el proyecto decide invertir en él. El costo de hacer esta inversión es el precio de ejercicio de la opción. El supuesto implícito es que este costo permanece constante (en valor presente monetario) y que cualquier incertidumbre asociada con el producto se refleja en el valor presente de los flujos de efectivo del producto.

Vencimiento de la opción y tasa libre de riesgo

La opción de posponer el proyecto expira cuando los derechos sobre el proyecto terminan su plazo, se supone que las inversiones hechas después de que los derechos del proyecto expiran, originan un valor presente neto igual a cero debido a que la entrada de competencia resulta en el decremento de los ingresos hasta la tasa requerida. La tasa libre de riesgo que se usa en la valuación de opciones debe ser la que corresponda a la expiración de la opción. Mientras esta variable puede estimarse relativamente fácil cuando las empresas tienen derechos explícitos sobre un proyecto (a través de una licencia o patente, por ejemplo), se vuelve más difícil de obtener cuando las empresas solo tienen una ventaja competitiva para tomar un proyecto. Como las ventajas competitivas se disuelven al pasar el tiempo, el número de años por los que la empresa puede esperar tener estas ventajas es la vida de la opción.

Costo de posponer (tasa de dividendos)

Existe un costo al posponer un proyecto, una vez que el valor presente neto se vuelve positivo. Como los derechos sobre un proyecto expiran después de un período fijo, se elabora el supuesto de que los beneficios en exceso (que son la fuente de un valor presente positivo) desaparecen después del tiempo a la par que van emergiendo nuevos competidores, cada año de retraso se traduce en un año menos de flujos de efectivo que crean valor. Si los flujos de efectivo se distribuyen sobre el tiempo y la vida de la patente es de n años, el costo de posponer se puede expresar como:

$$\text{Costo de Posponer} = \frac{1}{n}$$

Así, si los derechos sobre el proyecto son por 20 años, el costo anual de posponer se vuelve de 5% anual. Este costo de posponer se incrementa cada año ya que al segundo año no se pierde 1/20 sino 1/19, 1/18 en el año 3 y así sucesivamente haciendo que el ejercicio del costo de posponer sea mayor a lo largo del tiempo.

Valuación de la opción de posponer por medio de B&S

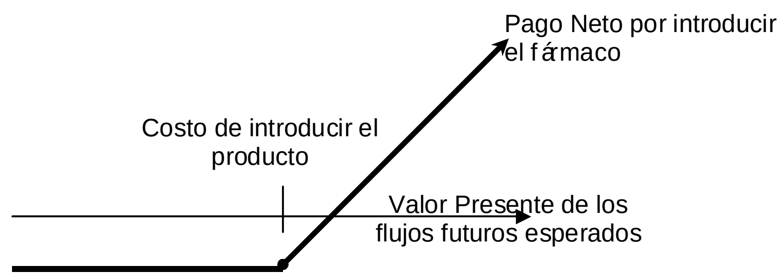
Valuación de una patente: Como ya mencionamos anteriormente podemos valuar la patente de una supuesta cura contra el cáncer que le da a la empresa el derecho de desarrollar y comercializar el fármaco. Si se lanza el fármaco ahora, la organización obtendrá flujos de efectivo más pronto que si esperara. Como ya se explicó esto es como tener una opción sobre acciones que pagan dividendos. Si se ejerce ahora, se obtienen los dividendos en un futuro próximo, pero se cede la opción. Si se espera, tal vez se la pueda ejercer con mayor provecho. Desde luego, mientras mayor sea la volatilidad de los resultados posibles, mayor valor tendrá la opción. El costo de desarrollar, producir, y vender el fármaco es el equivalente al precio strike de la opción y el valor de mercado de los beneficios por las ventas del nuevo fármaco es el equivalente al precio stock. Los fondos adicionales requeridos para iniciar la producción serán invertidos sólo si éstos son menores a los pagos derivados de las subsecuentes ganancias de la venta del fármaco. Si esto no pasa, la empresa puede dejar a un lado esta patente y no incurrir en más costos. Si es alto el valor de la opción para el nuevo fármaco, tal vez la administración desee posponer el lanzamiento del mismo, aunque el proyecto tenga un valor presente neto positivo si se emprende ahora el lanzamiento. Sin embargo, uno debe cerciorarse de que la opción sigue válida.

Siguiendo con la notación hasta ahora utilizada si decimos que S es el valor presente de los costos de desarrollar, producir, y vender el fármaco y K es el valor presente de los flujos esperados del desarrollo del mismo, claramente podemos concluir que los pagos finales de poseer una patente del fármaco indicado pueden describirse como:

	Si $S \leq K$	Si $S > K$
Valor de la posesión la patente	0	S_T -K

Como ya vimos estos son los pagos de un call por lo que poseer la patente se asemeja a contar con una opción de compra donde el activo subyacente es el producto en sí mismo.

Gráficamente:



Suponiendo las siguientes estimaciones:

a. Un análisis interno del comportamiento de la droga, basado en el mercado potencial y el precio que la empresa podría esperar cobrar, deriva en un valor presente de los flujos de $35,891 millones, antes de considerar el costo inicial de desarrollo

b. El costo inicial de desarrollar la droga para su uso comercial se estima en $27,551 millones, si se introduce el día de hoy

c. La empresa tiene la patente de la droga durante los siguientes 17 años, y la tasa actual para ese plazo es del 15%

d. La varianza promedio en el valor de la empresa para empresas de biotecnología que son públicamente intercambiadas es del 0.3, aunque se dificulta el hacer simulaciones razonables de los flujos de efectivo y valores presentes El potencial para que exista exceso en retornos es solamente durante la duración de la patente ya que la competencia eliminará dicho exceso después de ese período. De esta forma, cualquier retraso al introducir el producto (una vez que se determina que éste es viable), costará a la empresa un año de exceso de retornos protegidos por la patente. (De acuerdo al análisis inicial, el costo de retraso es 1/17, al siguiente año será 1/16, dentro de dos años será 1/15 y así sucesivamente).

Basándose en estos supuestos, se obtiene lo siguiente en el modelo de valuación de opciones cuando el subyacente entrega dividendos, donde:

$$c = Se^{-yT}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln[S/K] + (r - y + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Con una tasa de dividendos y = 1/17, obteniendo los siguientes resultados:

$d_1 =$ 1.9326 $N(d_1) =$ 0.9734

$d_2 =$ -0.3257 $N(d_2) =$ 0.3723

Sustituyendo estos valores sobre el modelo de valuación de opciones tenemos:

Valor de la Patente = $35{,}891 * e^{-1} * (0.9734) - 27{,}551 e^{-0.15(17)} * (0.3723)$

$$\Rightarrow \text{Valor de la Patente} = 12{,}051$$

Para obtener un punto de comparación el valor presente neto es sólo de $8,340 millones:

VPN = $35,891 - $27,551 = $8,340

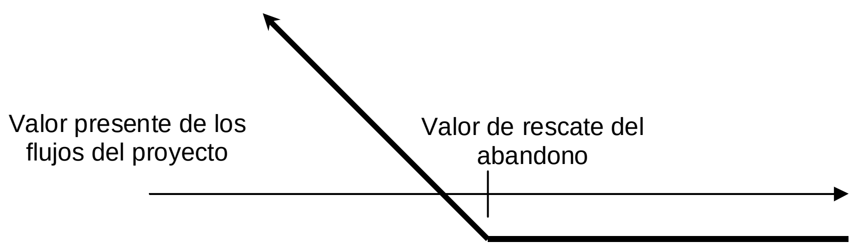
El premio del tiempo de esta opción sugiere que la empresa haría mejor en esperar para desarrollar el fármaco en lugar de hacerlo ahora mismo a pesar del costo de diferir la inversión. Sin embargo este costo se incrementará con el paso del tiempo haciendo del ejercicio de la opción una estrategia mejor.

5.3 Opción de abandonar un proyecto

Podemos considerar ahora abandonar un proyecto cuando sus flujos no cumplen con las expectativas deseadas. Usaremos la valuación de opciones para tomar en cuenta el valor de abandono de un proyecto para valuarlo. Para ilustrar, supóngase que S es el valor remanente de un proyecto si éste continúa hasta el final de su duración, y K es la liquidación o valor de abandono para el mismo proyecto en el mismo punto del tiempo. Si el proyecto tiene una vida de n años, el valor de continuar con el proyecto puede compararse al valor de liquidación o abandono; si el valor de continuar es mayor, entonces debe seguirse adelante y si el valor de abandono es alto, el tenedor de la opción de abandono podrí a considerar abandonar el proyecto.

Por tanto la opción de abandono tiene el siguiente diagrama de pagos:

	Si $S \leq K$	Si $S > K$
Valor de la opción de abandono	K-S	0



Supongamos que contamos con una empresa cuyo giro en los negocios implica grandes inversiones en activos fijos para cada uno de los proyectos que considera llevar a cabo, por el momento se encuentra analizando la posibilidad de realizar la inversión sobre un proyecto cuya inversión inicial es de 18 millones mientras que el valor presente de flujos de efectivo futuros se estiman en 20 millones, con una varianza del 20%, se ha también estimado que si se decide renunciar al proyecto en cualquier momento durante el periodo de vida del mismo, que es de 20 años, se podrá obtener un costo residual de 15 millones. Cabe mencionar que en este caso aunque el análisis por medio de los FED determina que se debe de aceptar el proyecto pues se obtiene un resultado positivo (20-18=2 millones), no se esta tomando en consideración la opción de desistir en el proyecto y de esta forma recuperar el valor de abandono de éste, opción con la que se incrementará el valor del proyecto.

Si asumimos que la tasa de interés libre de riesgo es de 10%, obtenemos todas las variables necesarias para poder valuar esta opción que se asemeja a un put:

$$r = 0.1 \qquad \sigma^2 = 0.2$$

$$S = 20 \qquad K = 15 \qquad T = 20$$

Por medio de Black-Scholes obtenemos:

$$d_1 = 2.1438 \qquad N(-d_1) = 0.016$$

$$d_2 = 0.1438 \qquad N(-d_2) = 0.4428$$

Valor del Put = Valor de Abandono $= 15e^{-0.1*20} * 0.4428 - 20 * 0.016$

$$= 0.5785$$

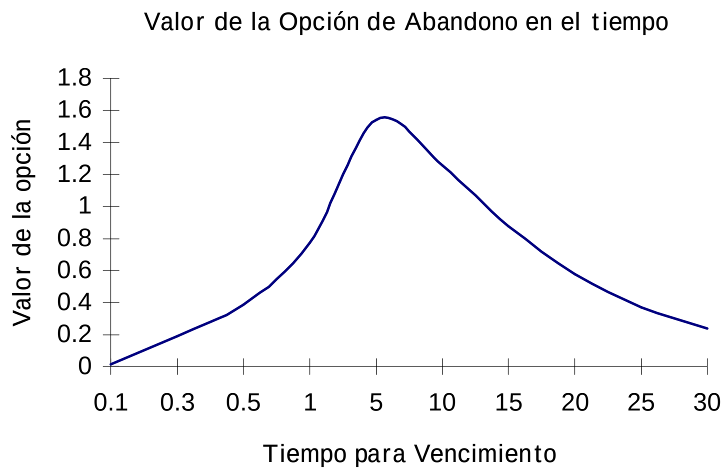
Por lo que la opción de abandonar el proyecto vale $578,500. Cantidad que debemos sumar al valor presente neto de los rendimientos esperados del proyecto que ya habíamos determinado en 2 millones obteniendo de esta forma un valor del proyecto de 2.5785 millones de pesos.

Debemos destacar que mientras que en el análisis general de las opciones financieras al elevar el tiempo antes de vencimiento observamos que se incrementaba el valor de cualquier opción americana, en este caso particular no sucede así en general, ya que mientras mayor sea el tiempo para vencimiento el valor remanente del proyecto aumenta, por lo que el valor de la opción disminuye, por el contrario, el valor de la opción aumenta si el tiempo para vencimiento disminuye debido esto principalmente a que el valor presente de los flujos remanentes va a disminuir.

A continuación ilustraremos los movimientos del valor de esta opción que responden a fluctuaciones en torno al tiempo para vencimiento del proyecto en cuestión.

Valor de la Opción	Tiempo para Vencimiento (años)
0.2359	30
0.3722	25
0.5785	**20**
0.8759	15
1.2569	10
1.5405	5
0.7742	1
0.3873	0.5
0.1905	0.3
0.0155	0.1

Graficando



Vale la pena observar que existe un punto de inflexión a los 5 años del proyectos esto es debido a que aunque ya mencionamos que el valor presente de los flujos de efectivo remanentes del proyecto disminuye cuando el tiempo para vencimiento hace lo propio, cuando el tiempo para vencimiento del proyecto es muy reducido, la probabilidad de que el evento S > K se conserve de esta manera aumenta, obteniendo la opción un pago de 0, por lo tanto cuando $T \to 0$ el valor de la opción también lo hace. De hecho el valor de la opción tiende más rápido a cero cuando $T \to 0$ que cuando $T \to \infty$.

Conclusiones

Cada vez que algo ha sido innovado o descubierto se han tenido que tomar riesgos, el riesgo siempre esta presente en nuestras vidas, la valuación de opciones reales permite obtener información más allá de datos financieros, si en un futuro las empresas comienzan a tomar en cuenta en mayor medida estas opciones reales podremos observar un aumento en el valor de proyectos de investigación y desarrollo que nuestro país tanto requiere.

La magnitud en la cual se puede tener la opción de tomar decisiones que modifiquen el curso de un proyecto de inversión radica en la *flexibilidad* con la que pueda contar dicho proyecto, la flexibilidad entre dos proyectos puede ser determinante para tomar una decisión entre ambos, debemos notar que la flexibilidad es medible y cuantificable, lo que se intenta no es crear una medida para lograr valuar cada uno de los factores futuros de una inversión sino crear una visión general de lo que podrá suceder en un futuro y la capacidad que se tendrá de reaccionar a cada uno de estos estados. Como ya notamos en algunos de los ejemplos antes descritos, no siempre es óptimo ejercer alguna de las opciones reales identificadas en un proyecto pero siempre es conveniente tener cierto poder de decisión sobre el proyecto a través del tiempo.

Cada vez nos damos cuenta de que existen mas formas útiles de valuación que asemejan el comportamiento real de ciertos proyectos, lo que se pretende al utilizar la valuación por medio de opciones reales es utilizar un método que aplicado en conjunto con los métodos más populares y conocidos para valuación de proyectos de inversión, pueda ayudar a evaluar eficientemente un proyecto de inversión.

Una de las características más importantes de las opciones financieras es precisamente el motor que impulsó su creación, la disminución de pérdidas en momentos no favorables del mercado, es importante hacer énfasis en este punto pues al darnos cuenta que ciertos proyectos cuentan con opciones reales debemos notar que, como las opciones financieras, éstas aumentan su valor a medida que la incertidumbre crece, el horizonte de inversión es mayor (factor usual en los proyectos reales de inversión) y las tasas de interés son altas. Las opciones reales son más valiosas cuanta más incertidumbre existe en un proyecto, lo que hace tan importante su valuación.

Es importante conocer las deficiencias en la aproximación por medio de procedimientos como Black & Scholes para las opciones reales debido a que desde un principio los supuestos básicos de dichos procedimientos difícilmente serán cumplidos en su totalidad por un proyecto de inversión, sin embargo, las variables utilizadas para esta valuación pueden ser aproximadas por medio de simulaciones o datos históricos en los casos en los que se cuente con experiencias similares a las del proyecto en cuestión, los modelos pueden ser modificados para valuar de mejor forma las opciones reales, al evaluar las ventajas de las opciones lo importante es destacar la trascendencia de acotar las situaciones fortuitas desfavorables. Por supuesto es más difícil tratar de generalizar las particularidades de los proyectos de inversión de todo ramo o giro en el mercado, aunque siempre se ha podido tomar en cuenta de manera empírica la flexibilidad de los proyectos, lo importante en este momento es que las empresas comiencen a medirla para poder tomarla como un factor determinante en la valuación de sus proyectos.

Es una gran ventaja poder aplicar la importante modelación que se ha conseguido con el paso del tiempo sobre los mercados financieros a los proyectos de inversión, esta ventaja nos permitirá obtener un desarrollo importante en este ramo.

Siempre se ha dicho que se puede aprender de la historia, podemos aprender de los acontecimientos contraproducentes que en algún momento se han tenido al llevar a cabo una empresa, debemos de entender que no es posible evadir las situaciones imprevistas que nos resulten desfavorables pero no sólo es posible sino inteligente estar preparados para todas las situaciones previsibles, sabiendo sin embargo que muchas veces, una vez iniciado el proyecto, las posibilidades superarán nuestras expectativas, las matemáticas ayudan a manejar óptimamente nuestras inversiones, nunca se puede asegurar un éxito rotundo de la inversión pero identificando, evaluando y reduciendo el riesgo de forma correcta podemos reducir la incertidumbre en cada una de nuestras decisiones.

Bibliografí a

Adan Shapiro. Modern Corporate Finance. Mc. Millan

John C. Hull. Options, Futures, and Other Derivatives. 5ª Edición. Prentice Hall. 2003

Aswath Damodaran. Corporate Finance Theory and Practice. John Wiley & Sons, Inc. 1993

Aswath Damodaran. The Promise and Peril of Real Options. Stern School of Business

David G. Luenberger. Investment Science. Oxford University Press 1998

John C. Hull. Fundamentals of Futures and Options Markets. 3ª Edición. Prentice-Hall 1998

Grupo Financiero Banamex-Accival, Departamento De Análisis. Derivados 1994

Timothy Heyman. Inversión en la globalización. Imef, ITAM, BMV

James C. Van Horne. Administración Financiera 3ª Edición Prentice Hall 1997

Jens Schmidt. Real Options and Strategic Decision-Making. Helsinki University of Technology. 2003

Remedios Varo. Valuación de proyectos de inversión a través de opciones reales.

Soren Bruun, Peter Bason. Real Options Approaches in Venture Capital Finance. Essay Series. 2001