



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“HOMOMORFISMOS EN σ -ESPACIOS DE CANTOR
WEYL Y BESICOVITCH”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JOSÉ MIGUEL SALAZAR MONTIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. RICARDO GÓMEZ AÍZA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2007



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. σ-espacios	1
1.1. Introducción	1
1.2. σ -espacios	4
1.2.1. σ -espacios de Cantor	4
1.2.2. σ -espacios de Weyl y Besicovitch	8
1.3. σ -subespacios	12
2. Propiedades topológicas	15
2.1. Sucesiones de Toeplitz	15
2.2. Conexidad por trayectorias y dimensionalidad	22
2.3. Completez	23
2.4. Sucesiones de Sturmian	26
2.5. Separabilidad y compacidad local	29
2.6. Transitividad, Cadenas transitivos y expansibilidad	31

3. Homomorfismos en σ-espacios	35
3.1. Homomorfismos en σ -espacios de Cantor	35
3.1.1. Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund	37
3.2. Conjugaciones y σ -equivalencia fuerte	38
3.3. W,B-Homomorfismos	41
3.3.1. Suprayectividad y equicontinuidad	42
3.3.2. Puntos estables	46
3.3.3. Sensibilidad y transitividad	50
3.3.4. Expansividad y propiedades σ -invariantes	55

Prefacio

La motivación del este trabajo de tesis fue la de presentar una exposición autocontenida de los resultados de Blanchard, Formenti y Kůrka en [1], resultados que involucran tanto propiedades topológicas como propiedades dinámicas de σ -espacios. La intención fue la de hacer un poco más ameno el entendimiento de estas propiedades y también la de plantear un problema abierto que consiste en desarrollar teoremas del tipo Curtis-Lyndon-Hedlund en σ -espacios de Cantor para σ -espacios de Weyl y Besicovitch.

En el primer capítulo de la tesis presentamos una brevísima introducción a los σ -espacios (el lector puede consultar [5] en donde se presenta una exposición detallada de dinámica simbólica). Exhibimos los tres tipos de σ -espacios que estudiaremos: el más común conocido como los σ -espacios de Cantor y los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. Concluimos el capítulo con σ -subespacios.

En el segundo capítulo exploramos las propiedades topológicas de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. Estudiamos la conexidad por trayectorias y la dimensionalidad, la completéz, la separabilidad y la compacidad local y finalmente la transitividad, cadenas transitivos y la expansibilidad. Para la conexidad por trayectorias y la dimensionalidad usaremos las llamadas “sucesiones de Toeplitz”. Para la separabilidad y la compacidad local usaremos las llamadas “sucesiones de Sturmian”.

En el tercer capítulo toca el turno a las propiedades dinámicas. Antes que nada, definimos los homomorfismos en los σ -espacios de Cantor y presentamos su caracterización, el Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund y la σ -equivalencia fuerte. Enseguida comenzamos con homomorfismos de σ -espacios de Weyl y Besicovitch y los comparamos con Cantor. Se consideran mapeos suprayectivos y continuos, puntos estables, sensibilidad y transitividad, transitividad por cadenas y expansibilidad.

Capítulo 1

σ -espacios

1.1. Introducción

Desde los tiempos memorables el hombre ha tenido la necesidad de comunicarse a grandes distancias. Al no poder llevar a cabo una interlocución de persona a persona para realizar dicha comunicación, se crearon lo que llamamos *códigos* para con ellos poder transmitir lo que fuera necesario. Así, como los nativos de América del Norte utilizaban señales de humo, actualmente utilizamos números o bien símbolos que pueden ser transmitidos a través de cables o de ondas como las de radio. El mensaje original que se desea transmitir es entonces *codificado* en cierto formato para luego ser transmitido por algún aparato, posteriormente es capturado por un receptor y finalmente un *decodificador* realiza la tarea de decifrar el mensaje original. Queremos describir éstos procesos en el lenguaje de las matemáticas. Lo que usualmente le interesa a una persona al decifrar un código es el *significado* de cada palabra o del mensaje en sí, pero esto no lo trataremos aquí ya que correspondería a un curso de literatura o algo semejante. Nuestra motivación básica es la de estudiar algunas de las construcciones de códigos que existen entre diversas clases de lenguajes *abstractos* y la de estudiar algunas de sus propiedades matemáticas, particularmente características dinámicas.

Para hacer un código primero tenemos que definir los objetos que utilizaremos para generar nuestras *palabras*. Al conjunto de símbolos que las constituyen le llamamos *alfabeto* y puede estar formado por letras, números, etc. Por ejemplo, podemos pensar en las computadoras como un conjunto de objetos los cuales se comunican entre sí con el alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Los objetos transmiten la información en *bytes*, que no son más que palabras o *bloques* de longitud 8. Si denotamos por \mathcal{A}^n al conjunto de bloques de longitud $n \geq 1$,

entonces podemos pensar que el *lenguaje* de más bajo nivel que maneja una computadora es precisamente \mathcal{A}^n . Esto nos genera todo un espacio topológico discreto con una cantidad finita de puntos (siempre y cuando tanto nuestro alfabeto como la longitud de nuestras palabras sean finitas). En este espacio tenemos una cierta métrica la cual fue introducida en 1950 por Hamming. La distancia de Hamming entre dos puntos $x, y \in \mathcal{A}^n$ es

$$d_H(x, y) = \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i\} \quad (1.1)$$

Veamos que la distancia de Hamming es en efecto una métrica en el conjunto \mathcal{A}^n .

Proposición 1.1. *La distancia de Hamming es una métrica en \mathcal{A}^n .*

PRUEBA. Demostraremos que $d_H(x, z) \leq d_H(x, y) + d_H(y, z)$ para todos $x, y, z \in \mathcal{A}^n$. Por definición,

$$d_H(x, y) + d_H(y, z) = \#\{i \in [1, n] : x_i \neq y_i\} + \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i\}.$$

Tenemos la unión ajena

$$\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i\} = \{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } x_i \neq z_i\} \cup \{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } x_i = z_i\}.$$

De igual forma tenemos la unión ajena

$$\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i\} = \{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i \neq x_i\} \cup \{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i = x_i\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_H(x, y) + d_H(y, z) &= \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i\} + \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i\} = \\ &= \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } y_i = z_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } y_i \neq z_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i = x_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i \neq x_i\} = \\ &= \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } y_i = z_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i = x_i\} + \\ &+ 2\#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i \neq x_i\}. \end{aligned}$$

Como $d_H(x, z)$ puede ser a lo más el número de símbolos que difieren en los dos primeros conjuntos de la última igualdad y a lo mucho todas las del conjunto restante,

$$\begin{aligned} d_H(x, z) &\leq \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i = x_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid x_i \neq y_i \text{ y } y_i = z_i\} + \\ &+ \#\{i \in [1, n] \mid y_i \neq z_i \text{ y } y_i \neq x_i\} \leq \\ &\leq d_H(x, y) + d_H(y, z). \end{aligned}$$

✦

Entonces para cualquier alfabeto finito \mathcal{A} , el conjunto de palabras de longitud $n \geq 1$ nos generan un espacio métrico. Sin embargo, la longitud de las palabras está fija, lo cual constituye una restricción seria en el desarrollo teórico que buscamos. De hecho, uno puede preguntarse con facilidad qué pasa si la longitud de nuestras palabras no es finita. ¿Qué clase de espacios topológicos son? ¿Son metrizable? Más aun, ¿qué significado adquiere un mensaje de longitud infinita? Como veremos, los espacios donde los “mensajes” son de longitud infinita serán los más adecuados para construir el marco matemático que queremos estudiar (de alguna manera, las palabras de longitud finita estarán representadas por conjuntos de puntos *periódicos*). Así pues, pensaremos en el *lenguaje* como todas aquellas palabras de longitud arbitraria, y estudiaremos espacios de sucesiones tanto *unilaterales*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathcal{A}\}$$

como *bilaterales*

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathcal{A}\}.$$

A menos de que se indique explícitamente lo contrario, todas las definiciones y todos los resultados que exponemos admiten versiones para ambos espacios, de forma que sólo presentaremos una de estas versiones, por lo común la más sencilla o bien la que mejor se adapte a nuestra conveniencia, con el entendido de similitud con los casos que omitimos.

Nos encontramos entonces ante el problema de definir y estudiar (pseudo)-métricas en este nuevo conjunto de sucesiones. En ésta tesis estudiaremos tres (pseudo)-métricas: la de Cantor, la de Weyl y la de Besicovitch. La primera, la métrica de Cantor, es por mucho la más estudiada y la que ha encontrado más aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas. Entre los resultados más importantes se encuentra el Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund (Teorema 3.2), que caracteriza a las funciones continuas que conmutan con la función de corrimiento (referimos al lector a [5] en donde se presenta un tratamiento formal y completo del estudio de códigos desde el punto de vista de dinámica simbólica). Las pseudo-métricas de Weyl y Besicovitch están definidas con la idea de capturar la esencia de la definición de

la métrica de Hamming en el sentido de tratar de obtener una medida *promedio* de qué tanto difieren dos sucesiones, sin importar el punto de referencia o la coordenada cero. Presentamos un estudio detallado de las propiedades dinámicas de estos dos espacios, basándonos en [1]. Entre la comunidad de matemáticos interesados en dinámica simbólica es bien conocido el problema de obtener un teorema del tipo Curtis-Lyndon-Hedlund para los espacios de Weyl y Besicovitch. A la fecha éste es un problema abierto...

1.2. σ -espacios

Sea \mathcal{A} un conjunto finito y consideremos al espacio de sucesiones $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, de forma que cada punto es una función que va de \mathbb{Z} en nuestro *alfabeto* \mathcal{A} . Como se puede ver, los puntos son cadenas de símbolos de nuestro alfabeto, por lo que $x \in X$ luce así:

$$x = \dots x_{-3}x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2x_3\dots$$

con cada $x_i \in \mathcal{A}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. La función $\sigma: X \rightarrow X$ definida para toda $x \in X$ por la regla $\sigma(x)_n = x_{n+1}$ se le denomina *corrimiento a la izquierda* o *shift*.

Definición 1.1. Un σ -espacio consiste de un conjunto de sucesiones de símbolos $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y una topología τ definida en X de forma que $\sigma: X \rightarrow X$ es un automorfismo en (X, τ) .

Dados $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \leq m$, denotaremos por $[n, m]$ al conjunto $\{n, n+1, \dots, m\}$ siempre que en el contexto esté claro que no se está refiriendo al *intervalo* de números reales. De igual forma, $[n, m)$ denotará al conjunto $\{n, n+1, \dots, m-1\}$ y definiremos $(n, m]$ y (n, m) de forma similar. Así, dado $x \in X$, establecemos la notación

$$x_{[n,m]} = x_n \dots x_m.$$

De manera similar definiremos $x_{(n,m)}$, $x_{(n,m]}$ y $x_{[n,m)}$.

1.2.1. σ -espacios de Cantor

Sea \mathcal{A} un conjunto finito y consideremos al espacio de sucesiones $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Hacemos de X un espacio topológico al considerar en \mathcal{A} la topología discreta y posteriormente en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la topología producto, puesto que

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \prod_{\mathbb{Z}} \mathcal{A}.$$

Como veremos más adelante, X con esta topología producto es un σ -espacio. Ya que \mathcal{A} es compacto (es un espacio finito con la topología discreta), el teorema de Tychonoff nos garantiza que X es compacto. Más aun, veamos que X es de hecho un espacio topológico metrizable.

Definición 1.2. Sean $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dos puntos cualesquiera. Definamos la *distancia de Cantor* como $d_C(x, x) = 0$ y

$$d_C(x, y) = 2^{-K}$$

donde $K = \min\{i \geq 0 \mid x_i \neq y_i \text{ o } x_{-i} \neq y_{-i}\} \neq 0$.

Proposición 1.2. *La distancia de Cantor d_C es una métrica en X .*

PRUEBA. Por definición $d_C(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Demostremos que $d_C(x, y) \leq d_C(x, z) + d_C(z, y)$ para todos $x, y, z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Primero definamos los siguientes conjuntos:

$$M = \min\{i \geq 0 \mid x_i \neq z_i \text{ o } x_{-i} \neq z_{-i}\}$$

$$N = \min\{i \geq 0 \mid x_i \neq y_i \text{ o } x_{-i} \neq y_{-i}\}$$

$$J = \min\{i \geq 0 \mid z_i \neq y_i \text{ o } z_{-i} \neq y_{-i}\}$$

Si $L + 1 = \min\{M, J\}$, entonces $x_{[-L, L]} = y_{[-L, L]} = z_{[-L, L]}$, por lo que $N \geq L + 1$, y por lo tanto $2^{-N} \leq 2^{-(L+1)}$. Ya que $L + 1 \leq M$ y $L + 1 \leq J$, tenemos que $2^{-N} \leq 2^{-(L+1)} \leq d_C(x, z) + d_C(z, y)$ y por lo tanto se cumple que $d_C(x, y) \leq d_C(x, z) + d_C(z, y)$. \blackrightarrow

Ahora tenemos que verificar que en efecto la topología producto y la topología que induce la distancia de Cantor d_C en X son de hecho la misma topología. Para esto será conveniente trabajar con una base de la topología producto que es de gran utilidad.

Definición 1.3. Sea $w \in \mathcal{A}^n$ con $n \geq 1$. Sea $j \in \mathbb{Z}$. El *cilindro* generado por w en la coordenada j es el conjunto

$$[w; j] = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid x_{[j, j+n-1]} = w\}.$$

Basta entonces demostrar que el conjunto de cilindros constituye una base tanto para la topología producto como para la topología que induce la distancia de Cantor. De la definición de la topología producto se sigue que el conjunto de cilindros constituye una base de esta

topología ya que \mathcal{A} posee la topología discreta. Denotemos a la bola con centro en $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y radio $\varepsilon > 0$ con respecto a la distancia de Cantor por

$$B_{\varepsilon}^C(x) = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid d_C(x, y) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.3. *El conjunto de cilindros constituye una base de la topología inducida por la distancia de Cantor d_C en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.*

PRUEBA. Sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\varepsilon > 0$. Sea $m \geq 0$ tal que $2^{-m} < \varepsilon$. Utilizando la definición de la distancia de Cantor tenemos que si $d_C(x, y) < 2^{-m}$, entonces $x_i = y_i$ para toda $i \in [-m, m]$. De esta forma tenemos que si $u = x_{[-m, m]}$, entonces $[u, -m] \subset B_{\varepsilon}^C(x)$.

Ahora tomemos un cilindro $[u, j]$ con $u \in \mathcal{A}^n$ para alguna $n \geq 0$ y $j \in \mathbb{Z}$. Sea $x \in [u, j]$ y $\varepsilon < 2^{-(n+|j|)}$. Entonces es claro que $B_{\varepsilon}^C(x) \subset [u, j]$. ✦

Como se le ha de ocurrir a uno con el título de esta sección, la distancia de Cantor debe hacer de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un σ -espacio que tenga algo que ver con el bien conocido espacio ternario de Cantor. El perspicaz lector que intuya esta relación estará en lo correcto pues el espacio métrico $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, d_C)$ es topológicamente homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. Este es un resultado bien conocido y daremos solamente un bosquejo de cómo se construye un homeomorfismo.

Teorema 1.1. *Si $\#\mathcal{A} \geq 2$ y $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, entonces (X, d_C) es topológicamente homeomorfo al conjunto ternario de Cantor.*

PRUEBA. Recordemos cómo construir el conjunto ternario de Cantor. Tomemos el intervalo $C_0 = [0, 1]$, dividámoslo en tres partes $[0, 1] = [0, \frac{1}{3}] \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1]$ y definamos a C_1 como la unión de los intervalos $C_1^0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $C_1^1 = [\frac{2}{3}, 1]$, es decir, como el conjunto que resulta de eliminar el intervalo abierto de en medio $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Repetimos inductivamente este proceso con cada uno de nuestros intervalos restantes, escribiendo $[0, \frac{1}{3}] = [0, \frac{1}{9}] \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1] = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup [\frac{8}{9}, 1]$ y definiendo a C_2 como la unión de los conjuntos C_2^j con $j = 0, 1, 2, 3$ los cuales resultan de eliminar del intervalo $[0, \frac{1}{3}]$ el intervalo abierto de en medio $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y del intervalo $[\frac{2}{3}, 1]$ el intervalo abierto de en medio $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ y así sucesivamente. Definimos el espacio ternario de Cantor como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

donde

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} C_n^j.$$



Figura 1.1: Las primeras etapas en la construcción del conjunto de Cantor

Es sencillo ver que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \simeq \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Supongamos, por simplicidad, que $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Un punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ es de la forma $x = .x_1x_2x_3\dots$ donde $x_i \in \{0, 1\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$, vamos a asignar un elemento $f(x) \in C$, el cual está determinado de manera inductiva de la siguiente manera.

$$\begin{cases} f(x) \in C_1^0 & \text{si } x_1 = 0 \\ f(x) \in C_1^1 & \text{si } x_1 = 1 \end{cases}$$

Supongamos que $f(x) \in C_n^j$ para $n \geq 1$ y $0 \leq j \leq 2^n - 1$.

$$\begin{cases} f(x) \in C_{n+1}^{2^j} & \text{si } x_{n+1} = 0 \\ f(x) \in C_{n+1}^{2^j+1} & \text{si } x_{n+1} = 1 \end{cases}$$

El mapeo $f: \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$ constituye un homeomorfismo de espacios topológicos. \Leftarrow

Lo único que falta por hacer es ver que σ es realmente un automorfismo, es decir es continua y biyectiva.

Proposición 1.4. σ es una función continua bajo la métrica de Cantor y biyectiva de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

PRUEBA. Es claro que σ es biyectiva en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, por lo cual no lo demostraremos, para no aburrir al lector, sin embargo demostraremos que σ es continua.

Utilizaremos la clásica demostración de continuidad en espacios métricos. Sea $\varepsilon > 0$ demosetremos que existe δ tal que si $d_C(x, y) < \delta$, entonces $d_C(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Fijemonos en $\sigma(x)$ y tomemos las coordenadas de $[-k, k]$, para cualquier punto $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con $z_i = \sigma(x)_i$ e $i \in [-k, k]$ se tiene que $d_C(\sigma(x), z) < \frac{1}{2^k}$. Si pedimos que $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con $y_i = x_i$ e $i \in [-k-1, k+1]$ (es igual a pedir $d_C(x, y) < \frac{1}{2^{k+1}}$), entonces $\sigma(y)_i = \sigma(x)_i$ con $i \in [-k, k]$.

Por lo anterior tenemos que $d_C(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. ✦

1.2.2. σ -espacios de Weyl y Besicovitch

En la distancia de Cantor la coordenada cero de un punto juega un papel crucial: no importa si dos puntos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ difieren en grandes cantidades de coordenadas, estarán cerca siempre que coincidan en una “ventana” lo suficientemente grande alrededor de la coordenada cero. En este sentido, la métrica de Cantor no captura la esencia de “similitud” que encontramos en la métrica de Hamming para conjuntos de palabras de cierta longitud fija. Las pseudo-métricas de Weyl y Besicovitch constituyen un acercamiento a la métrica de Hamming ya que proponen una distancia en términos de qué tan similares son dos sucesiones. Veamos cómo se definen.

La pseudo-métrica de Weyl está definida de la siguiente forma.

Definición 1.4 (Distancia de Weyl). Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, la *distancia bilateral de Weyl* está definida por

$$d_W(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\}}{l}. \quad (1.2)$$

De forma similar, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, la *distancia unilateral de Weyl* está definida por

$$d_W(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{\#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\}}{l}. \quad (1.3)$$

La pseudo-métrica de Besicovitch se define de la siguiente forma.

Definición 1.5 (Distancia de Besicovitch). Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, la *distancia bilateral de Besicovitch* está definida por

$$d_B(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{j \in [-l, l] \mid x_j \neq y_j\}}{2l+1} \quad (1.4)$$

De forma similar, para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, la *distancia unilateral de Besicovitch* está definida por

$$d_B(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{j \in [0, l] \mid x_j \neq y_j\}}{l+1} \quad (1.5)$$

Hemos afirmado que éstas son pseudo-métricas en sus espacios correspondientes.

Proposición 1.5. d_W y d_B satisfacen las siguientes dos propiedades:

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

PRUEBA. Es claro de las definiciones que d_W y d_B satisfacen la propiedad 1.

Demostremos la propiedad 2 para la distancia bilateral de de Besicovitch 1.4. Pongamos nuestra atención en los siguientes conjuntos

$$A = \{i \in [-l, l] \mid x_i \neq y_i\}$$

$$B = \{i \in [-l, l] \mid x_i \neq z_i\}$$

$$C = \{i \in [-l, l] \mid y_i \neq z_i\}$$

Tenemos que $A \subset B \cup C$. En efecto, sea $j \in A$, por lo que $x_j \neq y_j$. Si $j \notin B \cup C$, entonces $x_j = z_j = y_j$, una contradicción. Ya que $\limsup \#(B \cup C) \leq \limsup \#B + \limsup \#C$, dividiendo entre $2l + 1$ y tomando el límite superior cuando $l \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} d_B(x, y) &= \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#A}{2l+1} \leq \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#(B \cup C)}{2l+1} \leq \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#B}{2l+1} + \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#C}{2l+1} = \\ &= d_B(x, z) + d_B(z, y). \end{aligned}$$

La prueba de 2 para el caso unilateral es similar, lo mismo que las pruebas para la distancia de Weyl.



Observación 1.1. Como éstas son pseudo-métricas, es importante hacer notar que los puntos se dividen entonces en clases de equivalencia, donde la relación está dada por $x \overset{W}{\sim} y \Leftrightarrow d_W(x, y) = 0$ en el caso de la pseudo-métrica de Weyl, y $x \overset{B}{\sim} y \Leftrightarrow d_B(x, y) = 0$ en el caso de la pseudo-métrica de Besicovitch. A estos conjuntos de clases de equivalencia los denotaremos por X_W y X_B respectivamente (en caso de que no esté claro en el contexto, indicaremos si se trata de espacios unilaterales o bilaterales). De esta manera obtenemos espacios métricos en el sentido estricto de la palabra.

Para poder trabajar con este par de pseudo-métricas es importante tener una caracterización de éstas, pues resulta difícil tener que estar pensando en límites superiores. Veamos primero la distancia de Weyl.

Si $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$d_W(x, y) < \varepsilon \text{ si y sólo si} \quad (1.6)$$

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall l \geq l_0 \text{ y } \forall k \in \mathbb{Z}, \#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\} < l\varepsilon$$

y si $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$d_W(x, y) < \varepsilon \text{ si y sólo si} \quad (1.7)$$

$$\exists l_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall l \geq l_0 \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}, \#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\} < l\varepsilon$$

Ahora consideremos la distancia de Besicovitch.

Si $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$d_B(x, y) < \varepsilon \text{ si y sólo si} \quad (1.8)$$

$$\exists l_0 \text{ tal que } \forall l > l_0, \#\{i \in [-l, l] \mid x_i \neq y_i\} < (2l+1)\varepsilon$$

y si $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$d_W(x, y) < \varepsilon \text{ si y sólo si} \quad (1.9)$$

$$\exists l_0 \text{ tal que } \forall l > l_0, \#\{i \in [0, l] \mid x_i \neq y_i\} < (l+1)\varepsilon$$

Es importante hacer una pausa y observar una propiedad de este par de espacios que no se tiene en Cantor. El corrimiento σ es una isometría en los espacios de Weyl y Besicovitch

pues claramente $d_W(x, y) = d_W(\sigma(x), \sigma(y))$ y $d_B(x, y) = d_B(\sigma(x), \sigma(y))$. Esto se debe a que mientras que en la métrica de Cantor la ventana está fija alrededor de la coordenada cero, en las pseudo-métricas de Weyl y Besicovitch carece de importancia una coordenada en particular y lo que observan son las diferencias globales a lo largo de todas las coordenadas de los puntos.

Definición 1.6. La bola con radio δ y centro en $x \in X$ se denota como $B_\delta(x)$ y se define de la siguiente manera:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}.$$

Observación 1.2. Para indicar en qué métrica se está trabajando, agregaremos un superíndice a la bola. Así pues, $B_\varepsilon^C(x)$ denotará a la bola de radio ε y centro en x en el espacio de Cantor.

Es muy natural preguntarse cuál de las topologías de Weyl y Besicovitch es más fina, en caso de que alguna esté contenida en la otra. La respuesta está dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.6. Para todo $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, $d_B(x, y) \leq d_W(x, y)$. Por lo tanto, para toda $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon^W(x) \subset B_\varepsilon^B(x).$$

PRUEBA. Tomemos a $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con $x \neq y$ y tomemos las distancias bajo Weyl y Besicovitch

$$d_W(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\#\{j \in [k+1, k+l] \mid x_j \neq y_j\}}{l}$$

y

$$d_B(x, y) = \limsup_{l' \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in [-l', l'] \mid x_i \neq y_i\}}{2l' + 1}.$$

Como el hábil lector podrá ver, en la distancia de Weyl se considera el número máximo de diferencias en ventanas de longitud $l > 0$ que comienzan en la posición $k \in \mathbb{Z}$, es decir que para cada longitud de l , recorremos la ventana sobre cada $k \in \mathbb{Z}$, tomando la k en la cual hay un mayor número de diferencias con respecto a la longitud l . Por otro lado, es claro que esta situación incluye a aquellas consideraciones al tomar la distancia de Besicovitch, cuando la longitud de la ventana l es impar y $k = -(l-1)/2$. Concretamente, tomemos a $l = 2l' + 1$. Tenemos entonces que

$$\frac{\#\{i \in [-l', l'] \mid x_i \neq y_i\}}{2l' + 1} \leq \max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\#\{j \in [k+1, k+l] \mid x_j \neq y_j\}}{l}.$$

Al tomar los límites superiores, lo que nos queda es que $d_B(x, y) \leq d_W(x, y)$.

Y como consecuencia es claro que todo elemento de $B_\varepsilon^B(x)$ dista en menor o igual medida que ε de x , en la distancia de Weyl. Por lo que tenemos que

$$B_\varepsilon^W(x) \subset B_\varepsilon^B(x).$$

✦

1.3. σ -subespacios

Consideremos los σ -espacios de Cantor $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Ya que en los códigos nosotros queremos que nuestras palabras signifiquen algo, o más bien que las palabras que no significan nada no estén en el código, prohibiremos ciertos bloques de letras del alfabeto, para que de esta forma los puntos que contengan a estos bloques no estén considerados dentro de nuestro conjunto de puntos. Al conjunto de bloques “prohibidos” lo denotaremos por \mathcal{F} , y denotaremos por $X_{\mathcal{F}}$ al espacio que resulta de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ después de remover todos los puntos que contengan bloques de \mathcal{F} . Observemos que el espacio resultante tiene la propiedad de que es invariante bajo el corrimiento, es decir, $\sigma(X_{\mathcal{F}}) = X_{\mathcal{F}}$.

Definición 1.7. Un subconjunto $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un σ -subespacio si existe un conjunto $\mathcal{F} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ de bloques “prohibidos” tal que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 1.1. Sea $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. Entonces X es en sí un σ -subespacio generado por el conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \emptyset$. Entonces X es un σ -espacio completo.

✦

Ejemplo 1.2. Sea $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el σ -subespacio generado por el conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \{11\}$. A X le llama el σ -espacio *aureo*. La razón de ésto es que la tasa de crecimiento exponencial del número de bloques de tamaño n es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

✦

Ejemplo 1.3. Sea $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ el σ -subespacio generado por el conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \{10^{2k+1}1 \mid \forall k \in \mathbb{Z}^+\}$. A X le llama el σ -subespacio *par* puesto que todas las palabras del espacio tienen un número par de 0 entre cualquier par de 1 consecutivos.

✦

Ejemplo 1.4. Sea $X \subset \{a, b, c\}^{\mathbb{Z}}$ el σ -subespacio generado por el conjunto de palabras prohibidas $\mathcal{F} = \{ab^m c^k a \mid \forall m, k \in \mathbb{Z}^+, m \neq k\}$. A X se le llama el σ -subespacio *libre de contexto*.



De los ejemplos anteriores observamos una distinción entre σ -subespacios, a saber, aquellos que pueden estar determinados por un conjunto *finito* de bloques prohibidos (y por lo tanto por un conjunto de bloques prohibidos de cierta longitud fija), y aquellos que no. Así, el σ -subespacio áureo pertenece a la primera clase, y es sencillo ver que el σ -subespacio par no se puede definir con un número finito de bloques prohibidos. A los σ -subespacios que pueden ser determinados por un conjunto finito de bloques prohibidos se les conoce como *σ -subespacios de tipo finito*. Éstos siempre admiten una representación por medio de una digráfica, lo cual puede llevarse a cabo mediante “presentación en bloques” del σ -espacio. A grandes rasgos, la digráfica consistirá de un vértice por cada bloque permitido de tamaño la longitud fija del conjunto de bloques prohibidos, y dos vértices serán adyacentes si existe una yuxtaposición de los bloques. Ya que la presentación en bloques da como resultado un sistema conjugado al original, podemos entonces pensar en los shifts de tipo finito como matrices de adyacencia de digráficas dirigidas.

Los σ -subespacios que *no* son de tipo finito se dividen a su vez en dos clases, aquellos que son *σ -subespacios sóficos* y aquellos que no lo son. Un σ -subespacio es *sófico* si admite una representación por medio de una “digráfica etiquetada” (ver [5]). El σ -subespacio par es un ejemplo de un σ -subespacio sófico, mientras que el σ -subespacio libre de contexto es un ejemplo de uno *no* sófico.

La intención de la presente tesis es la de estudiar propiedades de los espacios de Weyl y Besicovitch. En estos espacios el concepto de σ -subespacio se vuelve sutil ya que en ellos se consideran clases de equivalencia y la ocurrencia de bloques prohibidos en un punto puede no afectar la clase de equivalencia en consideración. Es así que sólo consideraremos σ -espacios, i.e. σ -subespacios completos. Presentamos los ejemplos anteriores como motivación para explorar nuevas definiciones en los espacios que nos incumben. De nuevo, referimos al lector a [5], en donde se presenta un tratamiento detallado de σ -subespacios bajo la métrica de Cantor.

Capítulo 2

Propiedades topológicas de σ -espacios de Weyl y Besicovitch

2.1. Sucesiones de Toeplitz

En [3] Downarowicz e Iwanik usaron las llamadas *sucesiones de Toeplitz* para demostrar que los espacios de Weyl son conexos por trayectorias. Usando estas sucesiones demostraremos en la siguiente sección que lo mismo sucede para los espacios de Besicovitch. En esta sección nos damos a la tarea de construir sucesiones de Toeplitz y observar algunas de sus propiedades, las cuales nos servirán más adelante para nuestro propósito.

Definición 2.1. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es *Toeplitz* si cada sub-bloque ocurre periódicamente, es decir, si

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists p > 0 \text{ tal que } \forall j \in \mathbb{N}, x_{n+pj} = x_n.$$

Sea $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \{*\}$ (es decir, $\tilde{\mathcal{A}}$ es el conjunto \mathcal{A} al cual se le añade el símbolo $*$). Para poder construir sucesiones de Toeplitz vamos a definir la función

$$T: \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}} \times \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$$

de forma tal que para cualesquiera $x, y \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$, la imagen $T(x, y)$ es el punto en $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$ que se obtiene al remplazar ocurrencias del símbolo $*$ en x por los símbolos de y . Concretamente,

sea $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sucesión creciente de enteros no negativos tales que $x_{t_i} = *$. Entonces

$$T(x, y)_n = \begin{cases} x_n & \text{si } x_n \neq * \\ y_i & \text{si } n = t_i \text{ para alguna } i. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1. Si

$$\begin{array}{r} x = 0 \ 1 \ * \ * \ 0 \ 1 \ * \ 0 \ 1 \ 1 \ * \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots \\ y = 0 \ 0 \ * \ 0 \ * \ 1 \ * \ * \ 0 \ 1 \ 1 \ * \ * \ * \ \dots \end{array}$$

entonces

$$T(x, y) = 0 \ 1 \ \underline{0} \ \underline{0} \ 0 \ 1 \ * \ 0 \ 1 \ 1 \ \underline{0} \ 0 \ 0 \ 1 \ \dots$$

siendo 3, 4, 7, 11, ... los primeros términos de la sucesión $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y lo subrayado lo que pertenece a y . ➔

En general, dado un conjunto finito \mathcal{A} , definimos

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n.$$

Supongamos que $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Definiremos inductivamente una función $f: \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$ con funciones $f_n: \mathcal{A}^n \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{N}}$, y así podremos construir sucesiones de Toeplitz. Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, escribiremos $f_n(x) = f_n(x_1 \dots x_n)$. Sea $\lambda = \emptyset$ el bloque *vacío* (es decir, aquel que no contiene ningún símbolo). Definimos $f_0(\lambda) = (*^{\infty})$ e inductivamente definimos para toda $n \geq 1$,

$$f_n(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} T(f_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1}), (0*)^{\infty}) & \text{si } x_n = 0 \\ T(f_{n-1}(x_1 \dots x_{n-1}), (*1)^{\infty}) & \text{si } x_n = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. Para $n = 1$ tenemos

$$\begin{array}{r} f_1(0) = 0 \ * \ 0 \ * \ 0 \ * \ 0 \ * \ 0 \ * \ 0 \ * \ 0 \ * \ \dots \\ f_1(1) = * \ 1 \ * \ 1 \ * \ 1 \ * \ 1 \ * \ 1 \ * \ 1 \ * \ 1 \ \dots \end{array}$$

Para $n = 2$ tenemos

$$\begin{array}{r} f_2(00) = 0 \ 0 \ 0 \ * \ 0 \ 0 \ 0 \ * \ 0 \ 0 \ 0 \ * \ \dots \\ f_2(10) = 0 \ 1 \ * \ 1 \ 0 \ 1 \ * \ 1 \ 0 \ 1 \ * \ 1 \ \dots \\ f_2(01) = 0 \ * \ 0 \ 1 \ 0 \ * \ 0 \ 1 \ 0 \ * \ 0 \ 1 \ \dots \\ f_2(11) = * \ 1 \ 1 \ 1 \ * \ 1 \ 1 \ 1 \ * \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \end{array}$$

Para $n = 3$ tenemos

$$\begin{aligned}
 f_3(000) &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ * \ \dots \\
 f_3(100) &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ \dots \\
 f_3(010) &= 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(110) &= 0\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_3(001) &= 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(101) &= 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_3(011) &= 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(111) &= * \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots
 \end{aligned}$$

Para $n = 4$ tenemos

$$\begin{aligned}
 f_4(0000) &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ * \ \dots \\
 f_4(1000) &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ \dots \\
 f_4(0100) &= 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ \dots \\
 f_4(1100) &= 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_4(0010) &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots \\
 f_4(1010) &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_4(0110) &= 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots \\
 f_4(1110) &= 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_4(0001) &= 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(1001) &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_3(0101) &= 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(1101) &= 0\ 1\ 1\ 1\ * \ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_3(0011) &= 0\ 0\ 0\ * \ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(1011) &= 0\ 1\ * \ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 f_3(0111) &= 0\ * \ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ \dots \\
 f_3(1111) &= * \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots
 \end{aligned}$$

Observamos que en f_n la primera ocurrencia del símbolo $*$ ocupa una posición a lo más 2^n . Observamos también que la distancia entre dos símbolos $*$ consecutivos es 2^n y que el bloque de longitud 2^n a partir de la primera ocurrencia del símbolo $*$ se repite de manera periódica. Estos son hechos inductivos que demostraremos.

Proposición 2.1. *La primera ocurrencia del símbolo $*$ en $f_n(x)$ ocupa una posición de a lo más 2^n*

Proposición 2.2. *En $f_n(x)$, los bloques entre dos ocurrencias consecutivas del símbolo $*$ son de longitud $2^n - 1$*

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 2.1. Hagámoslo por inducción. Para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ es claro por el desarrollo anterior. Supongamos pues verdadero el resultado para $n \geq 0$ y demostrémoslo para $n + 1$. Fijémonos en la $(n + 1)$ -ésima coordenada en la expansión binaria de x .

- Si es 1, entonces la primera ocurrencia de $*$ en $f_n(x)$ ocupa una posición de a lo más 2^n por hipótesis de inducción, y permanece donde estaba en $f_{n+1}(x)$, por definición del operador *Toeplitz*, pues con $(*1)^\infty$ se intercambia por $*$.
- Si es 0, entonces la primera ocurrencia de $*$ ocupa una posición de a lo más 2^n por hipótesis de inducción, y entonces en $f_{n+1}(x)$ es reemplazada por 0, esto por definición del operador *Toeplitz* pues en este caso el punto involucrado es $(0*)^\infty$. Por la proposición 2.2, la segunda ocurrencia de $*$ ocupa una posición de a lo más 2^{n+1} . En este caso, la segunda ocurrencia de $*$ es reemplazada por otra $*$.

✦

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 2.2. Es claro que la proposición es verdadera para $n = 0, 1$, pues tenemos:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= *^\infty \\ f_1(1) &= (*1)^\infty \\ f_1(0) &= (0*)^\infty \end{aligned}$$

Supongamos que la proposición es cierta para $n \geq 1$, es decir, supongamos que si m_i es la sucesión creciente de las posiciones de $*$ en $f_n(x)$, entonces $m_{i+1} = m_i + 2^n$. Demostremos que la afirmación es cierta para $n + 1$. Consideremos dos ocurrencias consecutivas de $*$ en $f_{n+1}(x)$, digamos que ocurren en las posiciones h y k con $h < k$. De nuevo, fijémonos en la $(n + 1)$ -ésima coordenada en la expansión binaria de x .

- Supongamos que es 1. En este caso, el punto involucrado en el operador *Toeplitz* es el $(*1)^\infty$. En la posición h se encuentra $*$ en $f_n(x)$ por construcción, por lo que entonces $h = m_i$ para alguna i impar, pues es reemplazada por $*$ en $f_{n+1}(x)$. Por hipótesis de inducción, las siguientes dos ocurrencias de $*$ ocupan las posiciones $m_{i+1} = m_i + 2^n$ y $m_{i+2} = m_i + 2^{n+1}$. La que está en la posición m_{i+1} es reemplazada por 1, y la que está en la posición $m_{i+2} = k$ es reemplazada por $*$. Por lo tanto $k = h + 2^{n+1}$.

- Supongamos que es 0. En este caso, el punto involucrado en el *operador Toeplitz* es el $(0^*)^\infty$. De nuevo, en la posición h se encuentra $*$ en $f_n(x)$ por construcción, por lo que entonces $h = m_i$ para alguna i par, pues es reemplazada por $*$ en $f_{n+1}(x)$. Por hipótesis de inducción, las siguientes dos ocurrencias de $*$ ocupan las posiciones $m_{i+1} = m_i + 2^n$ y $m_{i+2} = m_i + 2^{n+1}$. La que está en la posición m_{i+1} es reemplazada por 0, y la que está en la posición $m_{i+2} = k$ es reemplazada por $*$. Por lo tanto $k = h + 2^{n+1}$.

✦

✦

Para lo que se presenta más adelante será necesario el siguiente resultado.

Lema 2.1. Sean $w \in \{0, 1\}^n$ y $x \in \{0, 1\}^\infty$. Supongamos que x es eventualmente w^∞ , es decir, existe $N \geq 0$ tal que $x_i = (w^\infty)_i$ para toda $i \geq N$. Entonces

$$d_W(x, 0^\infty) = \frac{\#\{w_j \neq 0\}}{n}.$$

PRUEBA. Al ser σ una isometría tenemos que

$$d_W(x, 0^\infty) = d_W(\sigma^{Nn}(x), \sigma^{Nn}(0^\infty)) = d_W(w^\infty, 0^\infty).$$

Es claro de la definición de la pseudo-métrica de Weyl que

$$d_W(w^\infty, 0^\infty) = \frac{\#\{w_j \neq 0\}}{n}.$$

Luego entonces la afirmación es correcta.

✦

Ahora tomemos $x \in [0, 1]$ y consideremos la expansión binaria

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i} \tag{2.1}$$

con $x_i \in \{0, 1\}$. Escribimos

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1 \dots x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \tag{2.2}$$

donde el límite es en el sentido de denotar al punto que resulta del proceso inductivo que se lleva a cabo.

Consideremos el bloque de longitud $2^m - 1$ que ocurre en z entre dos símbolos $*$ consecutivos (recuerde la proposición 2.2). Entonces el bloque inicial de longitud 2^{m+1} que ocurre en $f_{m+1}(x_1 \dots x_{m+1})$ diferirá en a lo más un símbolo del bloque inicial de la misma longitud correspondiente a $f_{m+1}(y_1 \dots y_{m+1})$. Luego entonces un bloque de longitud 2^{m+2} que ocurra en $f_{m+2}(x_1 \dots x_{m+2})$ diferirá en a lo más dos símbolos del bloque correspondiente en $f_{m+2}(y_1 \dots y_{m+2})$. En general, un bloque de longitud 2^{m+r} que ocurra en $f_{m+r}(x_1 \dots x_{m+r})$ diferirá en a lo más 2^{r-1} símbolos del bloque correspondiente en $f_{m+r}(y_1 \dots y_{m+r})$. Así.

$$\frac{\#\{i \in [k, k + 2^{m+r}] \mid f_{m+r}(x)_i \neq f_{m+r}(y)_i\}}{2^{m+r}} < \frac{2^{r-1}}{2^{m+r}} = 2^{-m-1}.$$

Por lo tanto $d_W(f(x), f(y)) \leq 2^{-m-1}$. ✦

Proposición 2.4. Si $x \in [0, 1]$ y $n \geq 1$, entonces

$$d_W(f_n(x), 0^\infty) = 1 - \sum_{i \in \{k \leq n \mid x_k = 0\}} \frac{1}{2^i}.$$

PRUEBA. Vamos a hacerla por inducción. Tomemos $n = 1$. Si $x_1 = 1$, entonces tenemos que

$$f_1(x_1) = 1 * 1 * 1 * \dots$$

donde la distancia con respecto a 0^∞ es igual a 1, por lo que en este caso se cumple la proposición. Si $x_1 = 0$, entonces tenemos que

$$f_1(x_1) = 0 * 0 * 0 * 0 *$$

por lo que la distancia con respecto a 0^∞ es $\frac{1}{2}$ en virtud de la proposición 2.1, y así, en este caso también se cumple la proposición.

Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$ y demostrémoslo para $n + 1$. Así pues, suponemos que

$$d_W(f_n(x), 0^\infty) = 1 - \sum_{i \in \{k \leq n \mid x_k = 0\}} \frac{1}{2^i}.$$

Veamos que si $x_{n+1} = 0$, entonces $f_{n+1}(x)$ se acerca $\frac{1}{2^{n+1}}$ al 0^∞ , y si no, entonces la distancia queda igual. Como sabemos, el bloque entre cualquier ocurrencia consecutiva de $*$ en $f_n(x)$ es el mismo. Lo mismo ocurre para $f_{n+1}(x)$, sólo que el segundo es dos veces más largo que primero. Más aún, el mayor se obtiene de concatenar al menor dos veces por medio de una concatenación intermedia de un símbolo que corresponde a $*$, su valor depende de la acción del *operador Toeplitz*. Si el resultado es reemplazar a $*$ por 0, entonces la $(n + 1)$ -ésima coordenada de x es 0, lo que indica que se ha obtenido una ganancia de $\frac{1}{2^{n+1}}$ en lo que respecta a las cercanías tanto entre x y 0 como entre $f(x)$ a 0^∞ según d_W . Si, por el contrario, el resultado es reemplazar a $*$ por 1, entonces aumentan en $\frac{1}{2^{n+1}}$ los valores tanto de x como el de la distancia entre $f(x)$ y 0^∞ según d_W .

✦

Como corolario de la proposición 2.4 tenemos la siguiente proposición, la cual nos ayudará para poder demostrar ciertas propiedades topológicas de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch.

Proposición 2.5. *Sea $x \in [0, 1]$. Entonces*

$$d_W(f(x), 0^\infty) = d_B(f(x), 0^\infty) = x. \quad (2.3)$$

PRUEBA. De la proposición 2.4, tomando el lím $n \rightarrow \infty$, se deduce 2.3.

✦

2.2. Conexidad por trayectorias y dimensionalidad

Recordemos que un espacio topológico X es *conexo por trayectorias* si para todos $x, y \in X$, existe una función continua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Recordemos también que X es n -dimensional si existe una función continua e inyectiva $g: [0, 1]^n \rightarrow X$. Decimos que X es ∞ -dimensional si es n -dimensional para toda $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.6. *Los σ -espacios de Weyl y Besicovitch son conexos por trayectorias.*

PRUEBA. Daremos una demostración para σ -espacios unilaterales. Para poder demostrar esta afirmación utilizaremos la función f definida en 2.2. Sea $u \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Definamos la función $g_u: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma, $g_u(x)_i = u_i f(x)_i$ para todo entero $i \geq 0$. La función g_u es continua en el σ -espacio de Weyl y constituye una trayectoria que une al punto 0^∞ con u puesto que $f(0^\infty) = 0^\infty$ y $f(1^\infty) = 1^\infty$. Si $v \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, podemos construir a g_v de la misma manera, teniendo así que para cualesquiera par de puntos $u, v \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, se puede construir una trayectoria de u a v que además siempre pasa por 0^∞ .

Para Besicovitch utilizamos la misma trayectoria.

✦

Proposición 2.7. *Los σ -espacios de Weyl y Besicovitch son ∞ -dimensionales*

PRUEBA. De nuevo, daremos una demostración para σ -espacios unilaterales. Como la función f definida en 2.2 es uno a uno, podemos afirmar que al menos los σ -espacios de Weyl y Besicovitch son de dimensión uno.

Sea $f_n: [0, 1]^n \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)_0 f(x_2)_0 \dots f(x_n)_0 f(x_1)_1 \dots f(x_n)_1 \dots$$

La función f_n es continua en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, por lo tanto los σ -espacios son n -dimensionales para cualquier entero $n > 0$, por lo que son ∞ -dimensionales. \blackleftarrow

2.3. Completez

En esta sección nos damos a la tarea de demostrar que el espacio de Besicovitch es completo. La prueba que presentamos es una adaptación de la prueba de Marcinkiewicz (ver [6]).

Proposición 2.8. *Los σ -espacios de Besicovitch son completos.*

PRUEBA. Daremos la demostración para los σ -espacios de Besicovitch *unilaterales*.

Hay que demostrar que cualquier sucesión de Cauchy en un σ -espacio de Besicovitch unilateral $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ es convergente. Sea pues $x^{(n)} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Por ser $x^{(n)}$ de Cauchy, existe una subsucesión $x^{(n_j)}$ tal que

$$d_B(x^{(n_{j+1})}, x^{(n_j)}) < 2^{-(j+1)}$$

(es decir que la distancia entre dos elementos consecutivos es menor que la correspondiente potencia inversa de dos). Tomando la definición de la distancia de Besicovitch,

$$d_B(x, y) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in [0, l-1] \mid x_i \neq y_i\}}{l}, \quad x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

tenemos entonces que

$$d_B(x^{(n_{j+1})}, x^{(n_j)}) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in [0, l) \mid x_i^{(n_{j+1})} \neq x_i^{(n_j)}\}}{l} < 2^{-(j+1)}.$$

Utilizando la caracterización de dicha distancia obtenemos que existe l'_j tal que para toda $l' \geq l'_j$

$$\#\{i \in [0, l') \mid x_i^{(n_{j+1})} \neq x_i^{(n_j)}\} < l' 2^{-(j+1)}.$$

Tomemos una sucesión $\{l_j\}_{j \geq 1}$ de enteros positivos tal que $l_{j+1} \geq 2l_j$ para toda $j \geq 1$ (es decir que dicha sucesión es al menos crece como potencias de dos), y que cada una cumpla que $l_j \geq l'_j$.

Al tomar nuestra sucesión de $\{l_j\}$ tenemos que para cada n_j ,

$$\#\{i \in [0, l] \mid x_i^{(n_{j+1})} \neq x_i^{(n_j)}\} < l_j \cdot 2^{-(j+1)}. \quad (2.4)$$

Para cualesquiera $k > j$, observemos el siguiente conjunto:

$$\{i \in [0, l-1] : x_i^{(n_k)} \neq x_i^{(n_j)}\}. \quad (2.5)$$

Para cada i en el conjunto anterior, la coordenada correspondiente en $x^{(n_k)}$ tiene dos posibilidades:

$$\begin{aligned} x_i^{(n_k)} &\neq x_i^{(n_{k-1})} \\ &\text{o} \\ x_i^{(n_k)} &= x_i^{(n_{k-1})}. \end{aligned}$$

Si cumple la primera, entonces está contenida en $\{i \in [0, l-1] : x_i^{(n_k)} \neq x_i^{(n_{k-1})}\}$. Si no, entonces podemos hacer lo mismo, es decir:

$$\begin{aligned} x_i^{(n_k)} &= x_i^{(n_{k-1})} \neq x_i^{(n_{k-2})} \\ &\text{o} \\ x_i^{(n_k)} &= x_i^{(n_{k-1})} = x_i^{(n_{k-2})} \end{aligned}$$

Podemos continuar de esta forma hasta llegar a n_j . Lo que nos da como consecuencia:

$$\begin{aligned} \{i \in [0, l-1] \mid x_i^{(n_j)} \neq x_i^{(n_k)}\} &\subset \{i \in [0, l] \mid x_i^{(n_j)} \neq x_i^{(n_{j+1})}\} \cup \dots \\ &\dots \cup \{i \in [0, l] \mid x_i^{(n_{k-1})} \neq x_i^{(n_k)}\} = \\ &= \bigcup_{r=j}^{k-1} \{i \in [0, l] \mid x_i^{(n_{r+1})} \neq x_i^{(n_r)}\} \end{aligned}$$

De esta manera, si $k > j$ y $l \geq l_k$, entonces, utilizando 2.4, se tiene

$$\begin{aligned} \#\{i \in [0, l] : x_i^{(n_j)} \neq x_i^{(n_k)}\} &< l \cdot 2^{-j-1} + l \cdot 2^{-j-2} + \dots + l \cdot 2^{-k} \\ &= l(2^{-j-1} + 2^{-j-2} + \dots + 2^{-k}) \\ &\leq l(2^{-j-1} + 2^{-j-2} + \dots) \\ &= l \cdot 2^{-j}. \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que $x^{(n_j)}$ converge a $x \in \mathcal{A}^N$ definido de forma que para toda $j \geq 1$, $x_t = x_t^{(n_j)}$ si $l_j \leq t < l_{j+1}$ (el resto de las coordenadas de x correspondientes a $t < l_1$ se escojen de manera arbitraria). Si $k > j$ y $l_k \leq l < l_{k+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \#\{i \in [0, l-1] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} &= \#\{i \in [0, l_j] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \\ &\quad + \#\{i \in [l_j, l_{j+1}] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \\ &\quad + \#\{i \in [l_{j+1}, l_{j+2}] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} + \dots \\ &\quad + \#\{i \in [l_{k-1}, l_k] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \\ &\quad + \#\{i \in [l_k, l] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\}. \end{aligned}$$

Primero tenemos que

$$\#\{i \in [0, l_j] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq l_j.$$

Luego,

$$\#\{i \in [l_j, l_{j+1}] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} = 0$$

Para toda $i = j+2, \dots, k$ se tiene que

$$\#\{i \in [l_{i-1}, l_i] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq \#\{i \in [0, l_i] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq l_i 2^{-j}$$

y también

$$\#\{i \in [l_k, l] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq \#\{i \in [0, l] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq l 2^{-j}$$

Así pues,

$$\#\{i \in [0, l-1] \mid x_i \neq x_i^{(n_j)}\} \leq l_j + \underbrace{(l_{j+2} + \dots + l_k + l)}_{\leq 2l} 2^{-j} \leq l_j + 3l \cdot 2^{-j}. \quad (2.6)$$

Justifiquemos la desigualdad que se indica con la llave. Tenemos que $l_{j+1} \geq 2l_j$ para toda j .

Así, tenemos que

$$l_{j+2} \leq \frac{1}{2} l_{j+3} \leq \frac{1}{4} l_{j+4} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{k-j-2}} l_k.$$

Como $l_k < l$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} l_{j+2} + \dots + l_k &\leq \frac{1}{2^{k-j-2}} l_k + \dots + l_k \\ &\leq \frac{1}{2^{k-j-2}} l + \dots + l \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{k-j-2}}\right) l \\ &\leq 2l \end{aligned}$$

Regresemos con la ecuación a 2.6. Dividiéndola entre l nos queda

$$d_B(x, x^{(n_j)}) \leq \frac{l_j}{l} + \frac{3}{2^j}$$

y tomando el límite superior cuando $l \rightarrow \infty$ nos queda

$$d_B(x, x^{(n_j)}) \leq \frac{3}{2^j}$$

por lo que entonces $x^{(n_j)} \rightarrow x$ cuando $j \rightarrow \infty$. Sabemos que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión original es convergente y converge al mismo punto.

Por lo tanto el espacio de Besicovitch unilateral es completo. Los otros casos se desarrollan en forma similar. \blackleftarrow

2.4. Sucesiones de Sturmian

Para estudiar la separabilidad y la compacidad local de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, usaremos las cadenas ó sucesiones de Sturmian. Para $x \in (0, 1)$, definimos $S(x) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$S(x)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq nx - k < 1 - x \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Veamos que al igual que en la proposición 2.5 para sucesiones de Toeplitz, las sucesiones de Sturmian se comportan de manera similar con respecto a la distancia con el 0^∞ , es decir, demosremos la siguiente proposición análoga a la proposición 2.5.

Proposición 2.9. *Sea $x \in (0, 1)$. Entonces*

$$d_W(S(x), 0^\infty) = d_B(S(x), 0^\infty) = x.$$

PRUEBA. Primero hagamos la siguiente observación.

Observación 2.2. Si tomamos $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p, q) = 1$, entonces $S(x) = w^\infty$ con $w \in \mathcal{A}^q$.

En otras palabras, $S(x)$ es un punto periódico de periodo q , por lo que las coordenadas se repiten en longitudes de q ; si la m -ésima coordenada es 0, la $(m + q)$ -ésima coordenada también será 0. Formalmente hablando, si $S(x)_m = 0$, entonces se cumple que

$$0 \leq m \cdot \frac{p}{q} - k < 1 - \frac{p}{q} \text{ para alguna } k \in \mathbb{N} .$$

Veamos que pasa con $S(x)_{m+q}$. Para poder calcular esta coordenada tenemos que ver la condición 2.7. Tenemos que

$$(m+q)\frac{p}{q} = m\frac{p}{q} + p.$$

Tomando a $k' = k + p$ podemos ver que

$$m\frac{p}{q} + p - k' = \frac{mp}{q} + p - k - p = \frac{mp}{q} - k.$$

Si $S(x)_m = 0$, entonces $\frac{mp}{q} - k \geq 0$ y $\frac{mp}{q} - k < 1 - \frac{p}{q}$. Por lo tanto $S(x)_m = S(x)_{m+q} = 0$. Ahora veamos que pasa con $S(x)_{m+q}$ si $S(x)_m = 1$. Como $S(x)_m = 1$ quiere decir que no cumple con la primera condición de 2.7. Lo que es igual a decir que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 > \frac{mp}{q} - k$, o bien, $\frac{mp}{q} - k \geq 1 - \frac{p}{q}$. Teniendo ésto en cuenta, partimos otra vez de que

$$(m+q)\frac{p}{q} = m\frac{p}{q} + p.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{mp}{q} + p - \underbrace{(k+p)}_{k'} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{mp}{q} + p - \underbrace{(k+p)}_{k'} \geq 1 - \frac{p}{q}$$

como $k' \in \mathbb{N}$ se sigue cumpliendo, por lo tanto $S(x)_{m+1} = S(x)_m = 1$. Tomando a $k' = k + p$ tenemos que en el residuo módulo uno, todo se repite en bloques de longitud q . Esto justifica la observación.

Continuemos con la demostración. Por la última observación 2.2 y por la Proposición 2.1 sabemos que $d_W(S(x), 0^\infty) = \frac{\#\{S(x)_m \neq 0\}}{q}$ siempre que $x = \frac{p}{q}$.

Con lo anterior lo único que nos interesa saber es cual de los numeros que son menores que q cumplen la primera condición de 2.7. Veamos que son exactamente $q - p$.

Tenemos que

$$0 \leq nx - k < 1 - x$$

sustituyendo a x por $\frac{p}{q}$ y haciendo cuentas

$$0 \leq np - qk < q - p$$

teniendo lo así lo que nos interesa saber es si $n \in \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ cumple lo anterior. Cada elemento del conjunto anterior lo multiplicamos por p , obteniendo así $\{0, p, 2p, \dots, p(q-1)\}$.

Como p y q son primos relativos, este conjunto sigue siendo un sistema completo de residuos módulo q . Por lo tanto si el residuo de np módulo q es menor que $q - p$, entonces

cumple la condición de arriba. Lo cual nos lleva a que los elementos que cumplen la condición son exactamente $q - p$. O bien el numero de elementos que no la cumplen es p .

Por lo que obtenemos que $\#\{S(x)_m \neq 0\} = p$. Por lo tanto si $x \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ tenemos que

$$d_W(S(x), 0^\infty) = d_B(S(x), 0^\infty) = x.$$

Formalmente hablando, las sucesiones de Sturmian se definen como $S(x)$ donde $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Por lo que a nuestra prueba le faltan los irracionales. A continuación haremos un bosquejo de la parte faltante.

Sea $x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ y pensemos a x como una fracción continua simple (ver [2])

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

así x está determinado por una sucesión de enteros $x = [0, a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Definamos a $\frac{p_n}{q_n}$ como la fracción parcial hasta a_n

$$\frac{p_n}{q_n} = [0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$$

y tomemos a $S\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$. Como ya demostramos que

$$d_W\left(S\left(\frac{p_n}{q_n}\right), 0^\infty\right) = d_B\left(S\left(\frac{p_n}{q_n}\right), 0^\infty\right) = \frac{p_n}{q_n},$$

Cabe mencionar que $S(x)$ no es una función continua sin embargo se da que al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$d_W(S(x), 0^\infty) = d_B(S(x), 0^\infty) = x.$$

para mayores referencias vease [2].

✦

Lema 2.2. Si $x, y \in (0, 1)$ y x, y y x/y son irracionales, entonces

$$d_W(S(x), S(y)) = d_B(S(x), S(y)) = x(1 - y) + (1 - x)y. \quad (2.8)$$

Daremos una prueba haciendo uso de resultados de teoría ergódica que incluimos aquí.

PRUEBA. Consideremos la rotación en el Toro

$$T(a, b) = (a + x \pmod{1}, b + y \pmod{1})$$

T es únicamente ergódica (ver [7] o [9]) y invariante con respecto a la medida de Lebesgue. Se tiene que $S(x)_n \neq S(y)_n$ si solo si

$$T^n(0, 0) \in [0, 1 - x] \times [1 - y, 1] \cup [1 - x, 1] \times [0, 1 - y] \quad (2.9)$$

Haciendo una descomposición más detallada de la 2.9, y pensando a $T(a, b) = (T_1(a), T_2(b))$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq T_1^n(0) \leq 1 - x & \quad 1 - y \leq T_2^n(0) \leq 1 \\ 1 - y \leq T_1^n(0) \leq 1 & \quad 0 \leq T_2^n(0) \leq 1 - x. \end{aligned}$$

Por lo que se ve que si $T^n(0, 0)$ cumple lo anterior, entonces $S(x)_n$ y $S(y)_n$ serán distintas.

El conjunto descrito en 2.9 tiene medida de Lebesgue $x(1 - y) + y(1 - x)$ y por unicidad ergódica de la rotación T (i.e la única medida que se preserva bajo T es la de Lebesgue), ésta es la densidad donde $S(x)_n \neq S(y)_n$ haciendo así que $d_W(S(x), S(y)) = d_B(S(x), S(y)) = x(1 - y) + y(1 - x)$.

◆

2.5. Separabilidad y compacidad local

Recordemos que un espacio métrico X es *separable* si tiene un conjunto E el cual es denso en X y numerable. Recordemos también que un espacio topológico X es *localmente compacto* si cualquier punto $x \in X$ tiene una vecindad compacta.

Proposición 2.10. *Los espacios de Weyl y Besicovitch no son separables ni localmente compactos.*

PRUEBA. Para demostrar que los σ -espacios de Weyl y Besicovitch no son separables, probaremos que no contienen un conjunto denso numerable, lo que en espacios métricos equivale a ser no separable.

Sean $0 < a < b < 1$. Existe un subconjunto no numerable $E \subset (a, b)$ tal que si $x, y \in E$, entonces x, y y x/y son irracionales. Por el lema 2.2, sabemos que la ecuación 2.8 se satisface, es decir, tenemos que

$$d_W(S(x), S(y)) = d_B(S(x), S(y)) = x(1-y) + (1-x)y.$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$. Entonces

$$\begin{aligned} 1-a &> (1-x) > (1-y) > 1-b \\ b(1-a) &> y(1-x) > x(1-y) > a(1-b) \\ 2b(1-a) &> y(1-x) + x(1-y) > 2a(1-b) > a(1-b) \\ 2b(1-a) &> d_W(S(x), S(y)) = d_B(S(x), S(y)) > a(1-b) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pongamos nuestra atención en la parte derecha de la última desigualdad. En ésta se ve que las sucesiones $S(x)$ y $S(y)$ distan al menos $a(1-b)$.

Veamos que no podemos encontrar un conjunto denso numerable. Tomemos a $x, y \in E$ como observamos con anterioridad con anterioridad $d_W(S(x), S(y)) = d_B(S(x), S(y)) > a(1-b)$ por lo tomamos un punto $d_x \in B_{\left(\frac{a(1-b)}{2}\right)}^W(x)$, este no está en $B_{\left(\frac{a(1-b)}{2}\right)}^W(y)$ pues $B_{\left(\frac{a(1-b)}{2}\right)}^W(x) \cap B_{\left(\frac{a(1-b)}{2}\right)}^W(y) = \emptyset$. Por lo tanto un conjunto denso en el espacio tiene que tener al menos tantos puntos como E y este es no numerable.

Para demostrar que no puede ser localmente compacto, usaremos el hecho de que los espacios son homogéneos, es decir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, siempre podemos encontrar un homeomorfismo $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ con la propiedad de que $f(x) = y$.

Tomemos cualquier vecindad V de $S(x)$ con $x \in E$. Veremos que no podemos encontrar una vecindad de $S(x)$ compacta dentro de V . Supongamos que existe una vecindad $M \subset V$ de $S(x)$ que es compacta. Mostraremos una cubierta abierta \mathcal{C}_M de M , la cual no contendrá una subcubierta finita.

Por la parte izquierda de la desigualdad 2.10, las imágenes de E bajo S distan entre sí en menos que $2b(1-a)$. Así, haciendo suficientemente pequeño el intervalo (a, b) podemos garantizar que la imagen de E estará contenida en M . Podemos tomar bolas con centro en $S(y)$ con $y \in E$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{X} = \{B_{\delta}^W(S(y)) \mid y \in E\},$$

con $\delta < 1/2a(1-b)$. Para completar la cubierta de M , tomamos a

$$\mathcal{Y} = \{B_{\delta/2}^W(S(y)) \mid y \in E\}.$$

y definimos

$$\mathcal{Z} = \overline{\cup \mathcal{Y}} = \overline{\cup \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid y \in K \text{ para alguna } K \in \mathcal{Y}\}}.$$

Tomemos un tiempo para analizar el último conjunto (es decir \mathcal{Z}). Primero observemos que $\cup \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid y \in K \text{ para alguna } K \in \mathcal{Y}\}$ es unión arbitraria de abiertos, por lo tanto es abierto. Al tomar la cerradura se convierte en un conjunto cerrado. Por consecuencia \mathcal{Z}^c es abierto. Definamos la cubierta abierta

$$\mathcal{C}_M = \mathcal{X} \cup \mathcal{Z}^c.$$

Entonces \mathcal{C}_M es una cubierta abierta de nuestro supuesto compacto M , la cual no contiene una subcubierta finita, pues al quitar cualquiera de los abiertos en \mathcal{X} , el centro del abierto removido queda sin cubrir (no es posible remover a \mathcal{Z}^c). ✦

2.6. Transitividad, Cadenas transitivos y expansibilidad

Si una función es continua bajo las distancia de Weyl o la de Besicovitch, entonces es posible observar algunas de sus propiedades dinámicas. A continuación definimos algunas de estas propiedades, pero primero daremos una definición de lo que entendemos por un sistema dinámico.

Definición 2.2. Un *sistema dinámico* es una función continua $f: X \rightarrow X$, donde X es un espacio topológico.

Definición 2.3. Un sistema dinámico (X, f) es (*topológicamente*) *transitivo* si para cualesquiera abiertos $U, V \in X$, existe un entero $n \geq 0$ tal que

$$f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset \quad (\text{o sea que } f^n(V) \cap U \neq \emptyset).$$

Proposición 2.11. *Sea $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ una función continua bajo las distancias de Weyl y Besicovitch. Si f es W -transitivo, entonces también es B -transitivo.*

PRUEBA. Para poder hacer la siguiente demostración usaremos la definición 1.6 ya que en todos los espacios métricos las bolas son una base para la topología. Bastará entonces demostrar la propiedad de transitividad para cualesquiera $U = B_{\delta}^B(x)$ y $V = B_{\delta'}^B(y)$ con $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ distintos y $\delta, \delta' > 0$. Por la propocición 1.6 tenemos que

$$B_{\delta}^W(x) \subset B_{\delta}^B(x)$$

y

$$B_{\delta'}^W(x) \subset B_{\delta'}^B(x).$$

Como f es W -transitiva, sabemos que existe $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$z \in f^{-n}(B_{\delta'}^W(x)) \cap B_{\delta'}^W(y).$$

Por la proposición 1.6, $z \in f^{-n}(B_{\delta'}^B(x))$ y $z \in B_{\delta'}^B(y)$, es decir,

$$f^{-n}(B_{\delta'}^B(x)) \cap B_{\delta'}^B(y) \neq \emptyset.$$

Ejemplo 2.4. Definamos la función $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ por $f(x)_i = x_{2i}$, la cual es continua en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. Veamos que la función f es transitiva. Para esto tomemos dos puntos distintos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ cualesquiera. Construyamos el punto $z \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, el cual proponemos de la siguiente manera:

$$z_i = \begin{cases} y_k & \text{si } i = 2^n k \\ x_i & \text{si } i \neq 2^n k \end{cases}$$

Es sencillo ver que el punto $z \in B_{2^{-n+1}}^{W,B}(x)$ y que $f(z) = y$, por lo que f es transitiva.

Cabe observar, como nuestro hábil lector se habrá dado cuenta, que la función f no conmuta con el corrimiento, por lo que no es de la clase de funciones en las cuales estamos más interesados. Pero sirve para ver que sí hay funciones transitivas en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch.

Definición 2.4. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Sea $\varepsilon > 0$. Una ε -cadena de longitud $n \geq 1$ para f es una sucesión de puntos $x_0, \dots, x_n \in X$ tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ con $0 \leq i < n$.

Definición 2.5. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que (X, f) es *cadena transitivo* si para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe una ε cadena para f de puntos $x_0, \dots, x_n \in X$ tal que $x_0 = x$ y $x_n = y$.

Proposición 2.12. Sea $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ una función continua bajo las distancias de Weyl y Besicovitch. Si f es W -cadena transitivo entonces f es B -cadena transitivo.

PRUEBA. Tomemos cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ distintos y $\varepsilon > 0$. Demostremos que hay una ε -cadena de x a y en Besicovitch. Como f es W-cadena transitivo, existe la ε -cadena de x a y en Weyl; y por la proposición 1.6, tenemos que

$$d_B(f(x_i), x_{i+1}) \leq d_W(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Así, los mismos puntos de la ε -cadena en Weyl nos sirven para la ε -cadena en Besicovitch. \blackleftarrow

Definición 2.6. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. El sistema dinámico (X, f) es (*positivo*) *expansivo* si existe ε tal que para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe un entero $n \geq 0$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

Proposición 2.13. *Sea $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ una función continua bajo las distancias de Weyl y Besicovitch. Si f es B-expansiva, entonces es W-expansiva.*

PRUEBA. Esta afirmación, una vez más, es consecuencia de la proposición 1.6 pues como f es expansiva en la distancia de Besicovitch, tenemos que para cualesquiera $x, y \in X$ y $1 > \varepsilon > 0$, existe un entero $n \geq 0$ tal que

$$d_W(f^n(x), f^n(y)) \geq d_B(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

Es decir, las mismas ε y n nos sirven para la distancia de Weyl. \blackrightarrow

Definición 2.7. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Decimos que (X, f) es *sensible (a condiciones iniciales)* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ y para cualquier $\delta > 0$, existe $y \in B_\delta(x)$ y un entero $n \geq 0$ tales que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$

La siguiente proposición y la proposición 2.10 nos servirán para poder describir la sensibilidad de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch.

Proposición 2.14. *Sea (X, d) un espacio métrico no separable y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Si (X, f) es transitivo, entonces también es sensible.*

PRUEBA. Sea $E \subset X$ un subconjunto no numerable con la propiedad de que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todos $x, y \in E$ distintos se tiene que $d(x, y) > 4\varepsilon$ (tal subconjunto E existe por

la hipótesis de no separabilidad). Veamos que se cumple la definición 2.7, con ε la constante para que el sistema sea sensible.

Sea $x \in X$ y consideremos sus imágenes al aplicarle f iteradamente. Podemos afirmar que para todo entero $n \geq 0$ siempre hay a lo más una $z \in E$ con la propiedad de que $d(f^n(x), z) < \varepsilon$, pues ésto pasa por las restricciones que le impusimos a E . Como E es no numerable, podemos encontrar $z' \in E$ con la propiedad $d(f^n(x), z') > 2\varepsilon$ para cualquier entero $n \geq 0$.

Como f es transitiva, tomemos una vecindad de x , digamos a $B_\varepsilon(x)$, la cual contiene a y . Usando la propiedad de transitividad nos queda que $d(f^m(y), z') < \varepsilon$ para algún entero $m \geq 0$. Aplicando la desigualdad del triángulo nos queda

$$d(f^m(x), f^m(y)) \geq d(f^m(x), z') - d(z', f^m(y)) \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

◀

Capítulo 3

Homomorfismos en σ -espacios

Definición 3.1. Un *homomorfismo* entre σ -espacios es una función continua $\phi: X \rightarrow Y$ que es σ -invariante, es decir, $\sigma \circ \phi = \phi \circ \sigma$. En otras palabras, hay un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{\phi} & Y \end{array}$$

Los homomorfismos son una clase particular de funciones continuas que son de gran importancia en sistemas dinámicos. En el caso de los σ -espacios de Cantor, esta clase de homomorfismos ha sido muy estudiada. Queremos estudiar los homomorfismos entre σ -espacios para las nuevas topologías que hemos considerado, a saber, las que determinan las pseudométricas de Weyl y Besicovitch.

3.1. Homomorfismos en σ -espacios de Cantor

Para una exposición completa de homomorfismos en σ -espacios de Cantor referimos al lector [5]. Aquí sólo incluiré los resultados más importantes, resultados que motivan su

presentación en el marco de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. Consideraremos los σ -espacios de Cantor $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y $Y = \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$, donde \mathcal{A} y \mathcal{B} denotan conjuntos finitos.

Definiciones 3.1. Una función $\phi: X \rightarrow Y$ es un *mapeo de bloques* si existen enteros $m, a \geq 0$ y una función $\Phi: \mathcal{A}^{m+a+1} \rightarrow \mathcal{B}$ de forma que para cualesquiera $i \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$, $\phi(x)_i = \Phi(x_{[i-m, i+a]})$. Un mapeo de bloques está entonces representado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \dots x_{-i-m-1} \boxed{x_{-i-m} x_{-m+1} \dots x_{i+a-1} x_{i+a}} x_{i+a+1} \dots \\ \downarrow \Phi \\ \dots \phi(x)_{i-1} \boxed{\phi(x)_i} \phi(x)_{i+1} \dots \end{array}$$

Decimos que ϕ tiene *memoria* m y *anticipación* a . A la función Φ la llamaremos *regla local*. Es claro que podemos encontrar una regla local con memoria y anticipación tan grande como queramos. En particular podemos suponer que $m = a = r$, en cuyo caso decimos que r es un *radio* de f .

Teorema 3.1. *Todo mapeo de bloques $\phi: X \rightarrow Y$ es un homomorfismo de σ -espacios de Cantor.*

PRUEBA. Sea $i \in \mathbb{Z}$. Tenemos que

$$\sigma_Y(\phi(x))_i = \phi(x)_{i+1} = \Phi(x_{i+1-m} \dots x_{i+1+n})$$

mientras que

$$\phi(\sigma_X(x))_i = \Phi(\sigma_X(x)) = \Phi(\sigma_X(x)_{i-m} \dots \sigma_X(x)_{i+n}) = \Phi(x_{i+1-m} \dots x_{i+1+n}).$$

Como vemos, las dos partes son iguales y por lo tanto ϕ es σ -invariante. Falta ver que ϕ es continua. Sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos el mínimo entero $k \geq 0$ tal que $2^{-k} \leq \varepsilon$ de forma que $B_{2^{-k}}^C(x) \subset B_\varepsilon^C(x)$. Así, si $d_C(x, y) < 2^{-k}$, entonces $x_{[-k, k]} = y_{[-k, k]}$. Para cada $i \in [-k - m, k + a]$, el conjunto $\Phi^{-1}(x_i)$ es finito. Más aún,

$$\phi^{-1}(B_{2^{-k}}^C(x)) = \bigcap_{i=-k}^k \left(\bigcap_{\omega \in \Phi^{-1}(x_i)} [\omega; i - m] \right).$$

El resultado se sigue del hecho de que lo que se obtiene es una intersección finita de cilindros (abiertos). ◆

El inverso del teorema 3.1 se le conoce como el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund y es digno de exponer en una nueva sección.

3.1.1. Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund

El teorema 3.1 presenta a los códigos de bloques como una clase de funciones continuas entre σ -espacios que conmutan con el corrimiento, es decir, como una clase de homomorfismos. El Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund afirma que los códigos de bloques *son* los homomorfismos, es decir, constituyen a *todas* las funciones continuas que conmutan con el corrimiento. Presentaremos su demostración.

Necesitaremos dos resultados de espacios métricos. El primero afirma que subconjuntos compactos y ajenos están “separados”.

Lema 3.1. *Sean M y N subconjuntos compactos y ajenos de un espacio métrico (S, ρ) . Entonces existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, y) \geq \delta$ para cualquier $x \in M$ y $y \in N$*

PRUEBA. Hagamos la siguiente demostración por contradicción, es decir, supongamos que tal δ no existe. Así pues, tomamos sucesiones $x_i \in N$ y $y_i \in M$ con la siguiente propiedad $\rho(x_i, y_i) < \frac{1}{i}$ con $i \geq 1$.

Como N es compacto existe una subsucesión de $\{x_i\}$ convergente a algun $x \in N$, sea $\{x_{i_k}\}$ dicha subsucesión. Por la primera condición que pedimos sobre las sucesiones tenemos que $\rho(x_{i_k}, y_{i_k}) < \frac{1}{i_k}$ tomando el limite tenemos que $\{y_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a x . Lo cual es una contradicción, pues M y N son compactos y ajenos en S . Como bien sabemos todo subconjunto compacto de un espacio métrico contiene a todos sus punto de acumulación, lo que implica que $x \in M$. ↔

Lema 3.2. *Sean M y N espacios métricos, con M compacto, y sea $\phi: M \rightarrow N$ una función continua. Si $E \subset N$ es compacto, entonces $\phi^{-1}(E)$ es compacto en M .*

PRUEBA. Como M es un espacio métrico compacto, cualquier subconjunto cerrado de M es un conjunto compacto. Como ϕ es continua, $\phi^{-1}(E)$ es cerrado. Esto concluye la demostración. ↔

Teniendo estos dos lemas a la mano, estamos finalmente en condiciones de demostrar el siguiente teorema que da nombre a esta sección.

Teorema 3.2 (Curtis-Lyndon-Hedlund). *Sea $\phi: X \rightarrow Y$ una función entre los σ -espacios de Cantor X y Y . Entonces ϕ es un homomorfismo si y sólo si es un código de bloques.*

PRUEBA. Por el teorema 3.1, sabemos que si ϕ es un mapeo de bloques, entonces ϕ es un homomorfismo. Entonces bastará con hacer la otra parte de la demostración, es decir, el inverso que afirma que todo homomorfismo entre σ -espacios de Cantor es un código de bloques.

Supongamos que $\phi: X \rightarrow Y$ es un homomorfismo entre σ -espacios de Cantor. Demostraremos que ϕ es un mapeo de bloques. Sea \mathcal{A} el alfabeto de X y \mathcal{B} el alfabeto de Y . Tomemos los cilindros $[b; 0]$ y $[d; 0]$ con $b, d \in \mathcal{B}$ distintos, los cuales son compactos y ajenos en Y . Por el lema 3.2 las imágenes inversas también son conjuntos compactos y ajenos en X .

Al ser $\phi^{-1}([b; 0])$ y $\phi^{-1}([d; 0])$ compactos y ajenos, podemos aplicar el lema 3.1, de forma que existe $\delta > 0$ tal que $d_C(x, y) > \delta$ para todos $x \in \phi^{-1}([b; 0])$ y $y \in \bigcup_{d \in \mathcal{A} \setminus \{b\}} \phi^{-1}([d; 0])$. Encontramos un entero $n \geq 0$ tal que $2^{-n} < \delta$ de forma que para toda $z \in \{w \in X \mid d_C(x, w) < 2^{-n} \text{ con } x \in \phi^{-1}([b; 0])\} \subset \phi^{-1}([b; 0])$, es decir que si $x_{[-n, n]} = z_{[-n, n]}$, se tiene que $\phi(z)_0 = b$, por lo que la coordenada 0 en la imagen sólo depende de un bloque de tamaño $2n + 1$, lo que hace de ϕ un mapeo de bloques. ✦

3.2. Conjugaciones y σ -equivalencia fuerte

¿Si un mapeo de bloques es biyectivo, su inversa es un mapeo de bloques? La respuesta es *no*. Un mapeo de bloques biyectivo cuya función inversa es un mapeo de bloques es una *conjugación*. En esta sección se exhiben mapeos de bloques biyectivos cuyas inversas son mapeos de bloques; se deja como un ejercicio al lector contruir un mapeo de bloques cuya inversa no sea un mapeo de bloques.

En la sección 1.3 nos referimos a los shifts de tipo finito, los cuales están representados por digráficas. El teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund 3.2 es válido para σ -espacios. Los σ -espacios de tipo finito admiten una representación por una digráfica y por lo tanto por matrices de adyacencia. En esta sección exploramos la relación algebraica que hay entre las matrices para que los σ -espacios generados sean conjugados, es decir, que exista un código de bloques biyectivo entre ellos y cuya función inversa es también un código de

bloques. R. Williams aborda esta situación y establece una teoría que involucra operaciones en digráficas y estructuras algebraicas, y que es conocida como la *teoría de la σ -equivalencia fuerte*. La existencia de un teorema del tipo Curtis-Lyndon-Hedlund para σ -espacios de Weyl y Besicovitch motivaría el desarrollo de una teoría de la σ -equivalencia fuerte para estos espacios. Queremos presentar la definición básica y un ejemplo en el que se exhiben los procesos básicos de esta teoría.

Estamos entonces buscando algún tipo de relación algebraica en términos de matrices y que ocurra justo cuando dos σ -espacios de tipo finito son conjugados.

Definición 3.2. Sean G y G' las digráficas de X y Y σ -espacios de tipo finito y sean A y B las matrices de adyacencia de G y G' respectivamente. Diremos que $A \cong B$ si existe una cadena de matrices de adyacencia $\{A_1, \dots, A_n\}$ con la propiedad de que existe otra cadena de matrices E_i y D_i (no necesariamente cuadradas), con entradas enteras positivas y con la propiedad de que

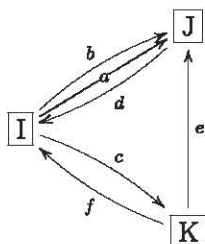
$$\begin{aligned} A &= E_1 D_1 \\ A_1 &= D_1 E_1 & A_1 &= E_2 D_2 \\ A_2 &= D_2 E_2 & A_2 &= E_3 D_3 \\ & & & \vdots \\ A_{n-1} &= D_{n-1} E_{n-1} & A_{n-1} &= E_n D_n \\ B &= A_n = D_n E_n \end{aligned}$$

Como el perspicaz y hábil lector podrá observar queremos que nuestras matrices de adyacencia estén relacionadas a través de una cadena de matrices con entradas positivas. Por lo cual enunciaremos el siguiente teorema.

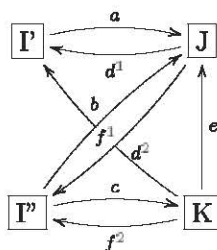
Teorema 3.3 (R. Williams, ver [5]). *Sean G y G' las digráficas de X y Y σ -espacios de tipo finito y sean A y B las matrices de adyacencia de G y G' respectivamente. Entonces X y Y son conjugados si y sólo si $A \cong B$.*

La prueba de este teorema se encuentra en la cita dada y no la presentaremos en esta tesis. Veremos un ejemplo, en el cual ilustramos la clase de descomposiciones que se llevan a cabo y que dan lugar a la conjugación. Este tipo de descomposición se le conoce como “state splittings”, que traducimos como “división de estados”. En el ejemplo damos muestra de cómo están definidas estas operaciones en digráficas.

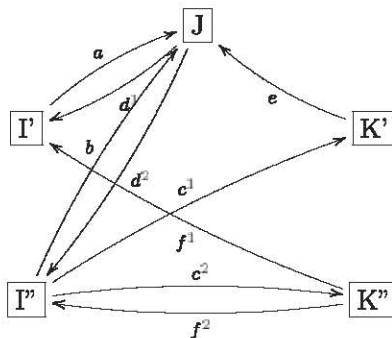
Ejemplo 3.1. Sea G_0 la digráfica en la siguiente figura:



Tomemos una partición de las flechas que salen del vértice I , es decir, de $\{a, b, c\}$, digamos $\mathcal{P}_1 = \{A_I^1 = \{a\}, A_I^2 = \{b, c\}\}$ y ejecutemos una "ex-división" del vértice I , obteniendo como resultado la digráfica G_1 que se muestra en la siguiente figura:



Ahora tomamos una partición de las flechas que salen del vértice K , es decir, de $\{d^2, e, f^2\}$, digamos $\mathcal{P}_2 = \{A_K^1 = \{e\}, A_K^2 = \{f^1, f^2\}\}$. El resultado de hacer una "ex-división" con respecto a esta partición es la digráfica G_2 que se muestra en la siguiente figura:



Veamos, las matrices de adyacencia de G_0 y G_2 son

$$A = \begin{array}{c} \boxed{\text{I}} \\ \boxed{\text{J}} \\ \boxed{\text{K}} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\text{I}} \quad \boxed{\text{J}} \quad \boxed{\text{K}} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \boxed{\Gamma'} \\ \boxed{\Gamma''} \\ \boxed{\text{J}} \\ \boxed{\text{K}'} \\ \boxed{\text{K}''} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\Gamma'} \quad \boxed{\Gamma''} \quad \boxed{\text{J}} \quad \boxed{\text{K}'} \quad \boxed{\text{K}''} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Veamos que $A \cong B$. Para esto tomaremos las siguientes matrices:

$$D = \begin{array}{c} \boxed{\text{I}} \\ \boxed{\text{J}} \\ \boxed{\text{K}} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\Gamma'} \quad \boxed{\Gamma''} \quad \boxed{\text{J}} \quad \boxed{\text{K}'} \quad \boxed{\text{K}''} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array} \quad E = \begin{array}{c} \boxed{\text{I}} \quad \boxed{\text{J}} \quad \boxed{\text{K}} \\ \boxed{\Gamma'} \\ \boxed{\Gamma''} \\ \boxed{\text{J}} \\ \boxed{\text{K}'} \\ \boxed{\text{K}''} \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Por un lado tenemos que $A = ED$ y por otro $B = DE$. ➔

3.3. Homomorfismos en σ -espacios de Weyl y Besicovitch

Ya consideramos homomorfismos en los σ -espacios de Cantor, con el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund caracterizándolos como los códigos de bloques, los cuales están definidos por una regla local finita. En esta sección giramos nuestra atención a los homomorfismos en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. A la fecha no existe un teorema del tipo Curtis-Lyndon-Hedlund para estas dos topologías. Es la intención de este trabajo la de presentar los resultados más relevantes que se conocen en este rubro con la finalidad de constituir una monografía con material necesario que pudiera llevar a caracterizaciones de homomorfismos, pues así se tendría un mejor entendimiento de los espacios que nos incumben y cuyas métricas fueron motivadas por la original métrica de Hamming.

Las funciones entre los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, en virtud de la observación 1.1, son funciones entre clases de equivalencia. Dada una función $f: X \rightarrow Y$ entre σ -espacios, denotaremos por \tilde{f} a la funciones inducida, en caso de estar bien definida. Para hacer incipié en cuál de estos espacios estamos trabajando, añadiremos los prefijos o superíndices 'C', 'W' y 'B' respectivamente.

3.3.1. Suprayectividad y equicontinuidad

Como es de esperarse, los mapeos de bloques, es decir, las funciones continuas en σ -espacios de Cantor, son una subclase de las funciones continuas en las categorías de los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. Los siguientes resultados tienen que ver con el comportamiento de los mapeos de bloques en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, los cuales están bien definidos por estar determinados por una regla local finita. Comenzamos estableciendo la siguiente notación.

Definición 3.3. Dado un conjunto finito \mathcal{A} , definimos

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n.$$

Proposición 3.1. Sea $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un mapeo de bloques. Son equivalentes:

1. f es C-sobre.
2. f es W-sobre.
3. f es B-sobre.

PRUEBA. Supongamos que $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es C-sobre. Entonces \tilde{f} es sobre en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, es decir, 1 implica 2 y 3. Demostremos entonces las situaciones inversas. Supongamos que $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$ es W-sobre (B-sobre). Tenemos que demostrar que $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es C-sobre. Por el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlum 3.2, f es sobre si y sólo si existe un entero $k \geq 0$ tal que cada bloque $v \in \mathcal{A}^*$ tiene una preimagen en $\mathcal{A}^{k+\ell(v)}$, donde $\ell(v)$ denota la longitud de v . Entonces para cada $v \in \mathcal{A}^*$ necesitamos encontrar $u \in \mathcal{A}^{k+\ell(v)-1}$ tal que $F(u) = v$, donde $F: \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$ es la función de bloques que determina a \tilde{f} . Por $F(u)$ entendemos la concatenación

$$F(u) = F(u_0 \dots u_{k-1}) \dots F(u_{\ell(v)} \dots u_{k+\ell(v)-1}).$$

Sabemos por hipótesis que \tilde{f} es W-sobre (B-sobre), por lo que si tomamos el punto $v^\infty \in \tilde{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}$, entonces existe un punto y tal que $d_W(\tilde{f}(y), v^\infty) = 0$ ($d_B(\tilde{f}(y), v^\infty) = 0$), por lo que en y hay un bloque u de longitud $k + \ell(v) - 1$ que satisface $F(u) = v$, hecho que se ilustra en la figura 3.1.



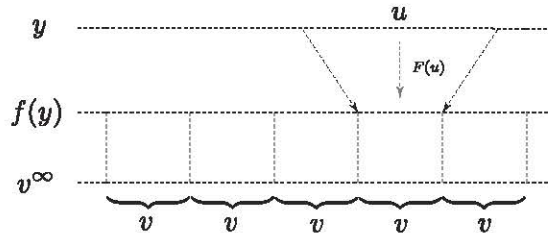


Figura 3.1: Existencia de un bloque u en la imagen inversa $F^{-1}(v)$.

Definición 3.4. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Un punto $x \in X$ es *equicontinuo* si la familia de las imágenes de x bajo f^n es “puntualmente uniformemente continua”, es decir, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $y \in B_\delta(x)$, sucede que para toda $n > 0$,

$$d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon.$$

Definición 3.5. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$. Decimos que f es *equicontinua* si es “globalmente uniformemente continua”, es decir, si para toda $\varepsilon > 0$ y para toda $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $y \in B_\delta(x)$, sucede que para toda $n > 0$,

$$d(f^n(y), f^n(x)) < \varepsilon.$$

Observación 3.1. Como el hábil lector se habrá dado cuenta, en caso de que f sea sensible (ver definición 2.7), no puede haber puntos equicontinuos.

Proposición 3.2. Si un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es *C-equicontinuo*, entonces es también *W-equicontinuo* y *B-equicontinuo*.

PRUEBA. Como f es *C-equicontinua*, existe $r \geq 1$ tal que si $d_C(x, y) < 2^{-r}$, entonces $f^n(x)_0 = f^n(y)_0$, es decir, $d_C(f^n(x), f^n(y)) < 1$, para toda $n \geq 1$. Teniéndolo así podemos tomar el mayor entre el radio de la función y dicha r . Es fácil ver que se puede hacer crecer el radio de f por lo que podemos decir que r es el radio de f . Por lo tanto, para cualesquiera $j < k$, si $x_{[j-r, k+r]} = y_{[j-r, k+r]}$, entonces $f^n(x)_{[j, k]} = f^n(y)_{[j, k]}$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2r+2}$. Tomemos $y \in B_\delta^W(x)$. Por la caracterización de la distancia de Weyl 1.6, existe l_0 tal que para cualquier $l \geq l_0$ y cualquier $k \in \mathbb{Z}$, si $y \in B_\delta^W(x)$, entonces

$$\#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\} < l\delta = \frac{l\varepsilon}{2r+2}.$$

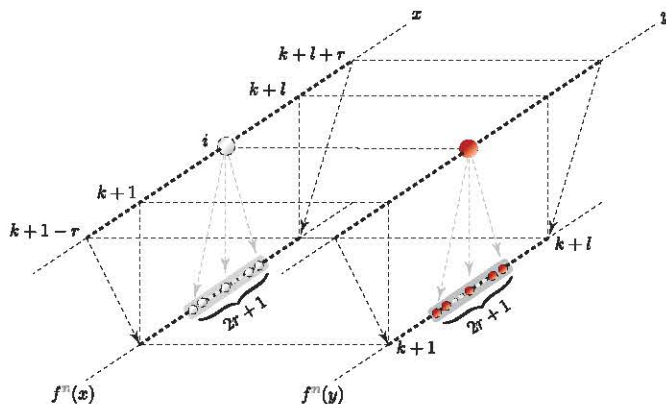


Figura 3.2: Diferencias entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ cuando x y y difieren en una coordenada i .

Observemos la figura 3.2 con la finalidad de comparar $f^n(x)$ y $f^n(y)$ en las coordenadas del intervalo $[k+1, k+l]$, las cuales están determinadas por las coordenadas de x y y en el intervalo $[k+1-r, k+l+r]$. Vemos que podrían diferir en el intervalo inicial $[k+1, k+r]$, o bien en el intervalo final $[k+l-r+1, k+l]$, o bien en uno de los intervalos internos $[i-r, i+r] \subset [k+1, k+l]$ donde i es tal que $x_i \neq y_i$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} & \#\{i \in [k+1, k+l] \mid f^n(x)_i \neq f^n(y)_i\} < \\ & < \#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i \neq y_i\} \underbrace{(2r+1)}_{\text{internos}} + \underbrace{2r}_{\text{inicial y final}} < l\delta(2r+1) + 2r. \end{aligned}$$

Si hacemos $l\delta > 2r$, entonces

$$\frac{\#\{i \in [k+1, k+l] \mid f^n(x)_i \neq f^n(y)_i\}}{l} < \delta(2r+2) = \varepsilon,$$

por lo que $d_W(x, y) < \varepsilon$ y entonces f es W -equicontinuo.

Para Besicovitch basta que el hábil lector se remonte a la proposición 1.6. Las demostraciones para los σ -espacios unilaterales es similar. \blackrightarrow

Proposición 3.3. *Si un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tiene un punto C -equicontinuo, entonces \tilde{f} tiene un punto W -equicontinuo y un punto B -equicontinuo.*

PRUEBA. Sea $v \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un punto C-equicontinuo de f y sea r un radio de f . Tomando $\varepsilon = 2^{-r}$, sabemos entonces que existe $m \geq 1$ tal que para cualquier $y \in B_{2^{-m}}^C(v)$, es decir que $y_{[-m,m]} = v_{[-m,m]} = u \in \mathcal{A}^{2m+1}$, se tiene que $d_C(f^n(v), f^n(y)) < \varepsilon$, es decir, $f^n(y)_{[-r,r]} = f^n(v)_{[-r,r]}$ para toda $n \geq 1$. Tomemos el punto $x = u^\infty$ y demostremos que este punto es W-equicontinuo.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos a $\delta = \frac{\varepsilon}{4m-2r+1}$. Sea y tal que $d_W(x, y) < \delta$. Como ya sabemos, ésto sucede si y sólo si existe l_0 tal que para toda $l \geq l_0$,

$$\#\{i \in [k+1, k+l] : x_i \neq y_i\} < l\delta.$$

Fijémonos en $f^n(x)$ y en $f^n(y)$. Las coordenadas que son distintas entre estos dos puntos están determinadas por las coordenadas en las que difieren x y y . Como $x = u^\infty$, entonces sabemos que $u = x_{[k+1, k+2m+1]}$ para toda $k = j(2m+1)$. En cada uno de estos intervalos $[k+1, k+2m+1]$, una diferencia en una coordenada en los correspondientes bloques de x y y afecta tan sólo a los bloques de $f^n(x)$ y $f^n(y)$ correspondientes al intervalo $[k+1, k+2m+1]$, o a lo más $m-r$ coordenadas en los dos bloques vecinos, es decir, aquellos determinados por $j-1$ y $j+1$ (ver figura 3.3). En otras palabras, como la “ventana” que determina a la

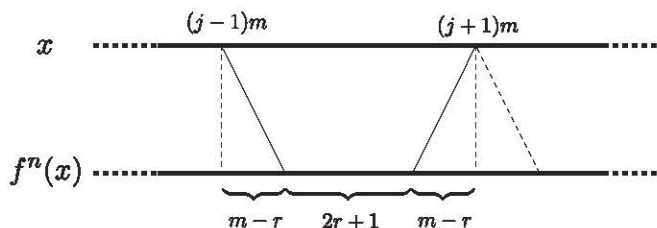


Figura 3.3: Existencia de un punto W,B-equicontinuo.

función f no siempre está dentro de $[k+1+r, k+2m-r]$ y no sabemos lo que genera en la imagen, tenemos que suponer que son distintos, lo que nos generan dos bloques de longitud r y que se encuentran al principio y al final del intervalo. La suma total de las coordenadas distintas es a lo más $4m-2r+1$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \#\{i \in [k+1, k+l] : f^n(x)_i \neq f^n(y)_i\} &< \#\{i \in [k+1, k+l] : x_i \neq y_i\}(4m-2r+1) \\ &< (4m-2r+1)l\delta = l\varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que x es W-equicontinuo.

La demostración para Besicovitch se sigue de nuevo gracias a la proposición 1.6. Los casos unilaterales son semejantes.



Veamos que no ocurren los recíprocos de las dos proposiciones anteriores, y para esto con un simple ejemplo nos basta.

Ejemplo 3.2. Tomemos el corrimiento $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. Como anteriormente vimos, σ es una isometría en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch, por lo tanto es un mapeo de bloques equicontinuo en estos σ -espacios, pero *no* es C-equicontinuo, es más, es un mapeo de bloques que es C-sensible y C-transitivo. Demostremos esto último, es decir que σ es C-transitivo. Tomemos dos cilindros cualesquiera $[u; i]$ y $[v; j]$ con $u, v \in \mathcal{A}^*$ y $i, j \in \mathbb{Z}$. Es claro que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^{-k}([v; j]) \cap [u; i] \neq \emptyset$. Por la observación 3.1, un sistema que es sensible no puede tener puntos equicontinuos, por lo que el regreso de las proposiciones 3.2 y 3.3 no se cumple.

3.3.2. Puntos estables

Definición 3.6. Sea X un conjunto y $f: X \rightarrow X$. Un punto $x \in X$ es *periódico* de periodo n si $f^n(x) = x$ para alguna $n \geq 1$. El mínimo $n \geq 1$ con esta propiedad es el *periodo mínimo* de x . Un punto periódico de periodo uno es un punto *fijo*.

Definición 3.7. Sea (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una función continua. Un punto fijo $x \in X$ es *estable* si cumple la definición 3.4 y existe una “vecindad atractora” U de x tal que para todo $y \in U$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x.$$

Un punto periódico de periodo n es *estable* si es estable para f^n .

Lema 3.3. *Sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un punto periódico C-estable de un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Supongamos que x posee una vecindad V tal que $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en V . Entonces $\sigma(x) = x$ y $f(x) = x$.*

PRUEBA. Sea p el periodo de x . Si U es una vecindad atractora de x , entonces $\sigma(x)$ es un punto periódico C-estable con vecindad atractora $\sigma(U)$. Sin pérdida de generalidad, tomemos a $U = \{y : d_C(x, y) < 2^{-m}\}$ lo que quiere decir que para toda $y \neq x$ con $y \in U$, se tiene que $y_{[-m, m]} = x_{[-m, m]}$ y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(y) = x.$$

Si tomamos una k suficientemente grande, entonces $U \cap \sigma^k(U) \neq \emptyset$ y también $U \cap \sigma^{k+1}(U) \neq \emptyset$, lo cual se sigue del hecho de que U es un cilindro. Como estas intersecciones son distintas

del vacío, podemos agarrar dos puntos $y \in U \cap \sigma^k(U)$ y $z \in U \cap \sigma^{k+1}(U)$ y luego aplicarles la función f , tomando sus respectivos límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(y) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z).$$

Como ambos están en la vecindad atractora U , tienen que converger a x bajo iteraciones de f^p , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(y) = x = \sigma^k(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = x = \sigma^{k+1}(x),$$

por lo que concluimos que $\sigma(x) = x$ y $x = a^\infty$ para alguna $a \in \mathcal{A}$.

Nos falta demostrar que $f(x) = x$. Como $\sigma(x) = x$, $f(x) = b^\infty$ para alguna $b \in \mathcal{A}$. Como sabemos, x es un punto estable y para cualquier $y \in U$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x.$$

Tomemos un punto z que nos convenga y que definimos como $z_i = a$ si $i \leq N$ y $z_i = b$ si $i > N$. Si $N \geq m$, entonces este punto está en U , pues

$$\{i \in [-m, m] : z_i \neq a\} = \emptyset.$$

Como z está en una vecindad atractora de x , podemos tomar el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = x.$$

Para demostrar que $f(x) = x$ basta ver que $a = b$, ya que sabemos que $x = a^\infty$ y $f(x) = b^\infty$. Para esto tomamos nuestro punto z y le aplicamos la función y el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) = a^\infty,$$

Como bien sabemos, el corrimiento conmuta con el mapeo de bloques, sin embargo aquí utilizaremos el hecho de que la $\{f^k\}$ es equicontinua en la vecindad V , para poder conmutar los límites. Por lo que aplicamos el corrimiento con una pequeña variación:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(z) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k(a^\infty),$$

y conmutando con el corrimiento y los límites pues $\{f^k\}$ es equicontinuo en todo V tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k(z) \right) = a^\infty.$$

(Esta propiedad está justificada en [8] en la página 144).¹

¹En [1] los autores omiten cualquier detalle de ésta demostración y a la fecha de impresión de esta tesis la única forma de justificar fue agregando la condición de equicontinuidad en la vecindad V .

Como b^∞ está en la órbita de x , tiene el mismo periodo p , y tomando el límite tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{np} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k(z) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(b^\infty) = b^\infty.$$

Por el análisis anterior obtenemos que $a = b$ y por lo tanto el periodo de x es $p = 1$. \blackleftarrow

Proposición 3.4. *Sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un punto periódico C-estable de un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Supongamos que x posee una vecindad V tal que $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en V . Entonces \tilde{x} es W-estable y B-estable.*

PRUEBA. Recordemos que por el lema anterior sabemos que si x es C-periódico estable, entonces x es de la forma $x = a^\infty$ y $f(x) = x$, y como es C-equicontinuo, y por la prueba de la proposición 3.3, \tilde{x} es también W-equicontinuo y B-equicontinuo.

Como x es C-periódico estable, existe $m > 0$ tal que para todo $y \in U = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid y_{[-m, m]} = a^{2m+1}\}$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$, por lo que la vecindad U cumple que $f^s(U) \subseteq V$ para alguna $s \in \mathbb{N}$, donde $V = \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid y_{[-m-1, m+1]} = a^{2m+3}\}$. Esto pasa pues U es una vecindad atractora, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, existe $N_{(y)} \in \mathbb{N}$ tal que $\forall s > N$ se tiene que $d_C(f^s(y), x) < \varepsilon$ para toda $y \in U$, por lo que basta tomar $\varepsilon \leq 2^{-(m+1)}$.

Todo lo anterior es en Cantor, por lo que ahora nos fijamos en la siguiente vecindad en Weyl:

$$U' = \left\{ y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid d_W(x, y) < \frac{1}{2m+1} \right\}.$$

Para cada $y \in U'$, existe una l tal que para toda k , el numero coordenadas de y que son distintas a a en la ventana $[k+1, k+l(2m+1)]$ están acotadas por l , es decir que

$$\#\{i \in [k+1, k+l(2m+1)] \mid y_i \neq a\} < l.$$

Hagamos un análisis de la expresión anterior. Tenemos que para cada coordenada i en la cual $y_i \neq a$ por lo menos hay $2m+1$ coordenadas que son iguales a a y utilizando el principio de las casillas tenemos que siempre en cada sub-bloque de longitud $l(2m+1)$ en y hay un sub-bloque $u = a^{2m+1}$.

Por la primera parte de la prueba tenemos que después de $s > N_{(y)}$ iteraciones de f , es decir $f^s(y)$, aparece una a en ambos lados de nuestro bloque u de longitud $2m+1$. Como las coordenadas i donde $y_i \neq a$ son a lo más $l-1$ y la longitud de la ventana es $2m+1$, entonces tomamos a $t > s(l-1)(2m+1)$ y después de t iteraciones de f tenemos que $f^t(y) = x$ en Weyl. \blackleftarrow

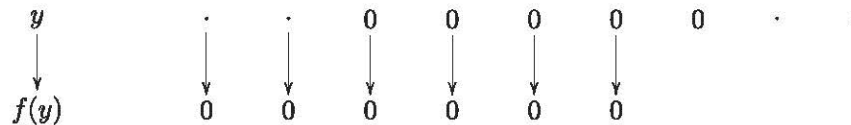
Veamos en el siguiente ejemplo que si tenemos puntos W-estables y/o B-estables, éstos no tienen que ser C-estables.

Ejemplo 3.3. (Autómata celular de Gilman) Sea $f(x)_i = x_{i+1} \cdot x_{i+2}$. En este mapeo de bloques el punto 0^∞ es W-estable pero veremos que no es C-estable. Es claro que 0^∞ es un punto fijo. Veremos que para cualquier vecindad existe un elemento de ésta que al aplicarle la función iteradamente no se obtiene convergencia a 0^∞ de acuerdo a la topología de Cantor.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid d_C(x, 0^\infty) < \varepsilon\}$. Como ya es costumbre, encontramos un cierto entero $m \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Pasándolo a los cilindros lo que tenemos es

$$C_0 = [0^{2m+1}; -m] = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \text{si } i \in [-m, m], \text{ entonces } x_i = 0\}.$$

Ahora apliquemos el mapeo de bloques a todos los elementos del cilindro C_0 . Como sabemos, éstos van a dar a un cilindro, pues al aplicar el mapeo sólo a las coordenadas $[-m, m]$ que determinan al cilindro C_0 , éstas, al mandarlas bajo f , están contenidas en un cilindro que está determinado por ceros en las coordenadas $[-m - 2, m - 1]$ (ver el siguiente diagrama):



Más precisamente, $f(C_0) \subset \{y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \text{si } i \in [-m - 2, m - 1], \text{ entonces } y_i = 0\}$. Entonces lo que nos queda está contenido dentro del cilindro $[0^{2m+2}; -m - 2]$. Así, cada vez que aplicamos f , los bloques de ceros se recorren a la izquierda dos coordenadas y gana un cero, por lo que el límite bajo iteraciones de f de un elemento de C_0 puede ser distinto de 0^∞ . Concluimos que el inverso de de la proposición 3.4 no es cierto.



3.3.3. Sensibilidad y transitividad

Proposición 3.5. Si un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es W-sensible o B-sensible, entonces es C-sensible.

PRUEBA. Si f es W -sensible o B -sensible, entonces quiere decir que no tiene ningún punto W -equicontinuo o B -equicontinuo respectivamente. Por la proposición 3.3, no tenemos puntos C -equicontinuos, pues de tenerlos serían puntos W -equicontinuos y B -equicontinuos, pero ya habíamos mencionado antes que f no tiene puntos W -equicontinuos ni B -equicontinuos.

Por un teorema que demuestra K urka en [4], se sabe que si un mapeo de bloques no es C -sensible, entonces el conjunto de puntos C -equicontinuos $Eq(f)$ es un conjunto residual, y como bien sabemos nuestro conjunto de puntos equicontinuos (el vacío) no cumple con tal definición, por lo que f es transitiva. Pero para toda persona que no se acuerde de la definición, recordemos qué es un conjunto residual.

Definición 3.8. Sea $U \subset X$ donde X es un espacio topológico. Decimos que U es *residual* si contiene una intersección numerable de conjuntos densos abiertos.

Claramente en un espacio métrico completo (que es nuestro caso), el conjunto vacío no es residual.

Bueno, ya sabemos que K urka nos dice que si f no es C -sensible, entonces el conjunto de puntos C -equicontinuos $Eq(f)$ es residual. Lo que nos falta hacer es demostrar lo que dice K urka.

Proposición 3.6. Si $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un mapeo de bloques no C -sensible, entonces $Eq(f)$ es residual.

PRUEBA. Contradiciendo la definición de ser sensible tenemos lo siguiente: Sea $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un punto, tomemos a $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sabemos que $d_C(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para cualquier $y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $d_C(x, y) < \delta(\varepsilon)$ para alguna $\delta(\varepsilon)$. Sea $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2^m}$ lo que quiere decir que si $x_i = y_i$ con $i \in [-m, m]$, entonces $f^n(x)_{[-1,1]} = f^n(f)_{[-1,1]}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definamos a $z = x_{[-m,m]}^{\infty}$. Entonces el punto z es C -equicontinuo.

Veamos que $Eq(f)$ contiene una intersección numerable de conjuntos densos abiertos. Para generar esta intersección, sea $V_K = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid x_{[-m,m]} \text{ aparece al menos } K \text{ veces en } w\}$. Primero verifiquemos que son densos. Para toda $q \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $t \in V_K$ tal que $d_C(q, t) < \varepsilon$, tomando $\varepsilon' = \frac{1}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $\varepsilon' < \varepsilon$ y $t \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definido de la siguiente forma: $t_i = q_i$ si $i \in [-n, n]$, y cualquier cosa si $i > |n|$, pero asegurando que $x_{[-m,m]} \subset t$ al menos K veces. Se tiene entonces que $d_C(q, t) < \varepsilon' < \varepsilon$. Por lo que V_K es denso en todo nuestro espacio. Es claro que V_K es abierto.

Tomemos la intersección de todos, $V = \bigcap_{K>0} V_K$, la cual es una intersección numerable

de densos abiertos y es un subconjunto del conjunto de puntos equicontinuos $V \subset Eq(f)$, pues al menos tienen a z y bajo el corrimiento los puntos serán equicontinuos. \blacklozenge

Por lo anterior, un mapeo de bloques es en el σ -espacio de Cantor al menos tan sensible como lo es en los σ -espacios de Weyl y Besicovitch. ¿Sucederá lo mismo para la transitividad? Es decir, ¿si un mapeo de bloques f es W -transitivo o B -transitivo, entonces es C -transitivo? La respuesta es afirmativa y, como todo, hay que demostrarlo.

Proposición 3.7. *Si un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es W -transitivo o B -transitivo, entonces es también C -transitivo.*

PRUEBA. Para demostrar que un mapeo de bloques f es transitivo debemos recordar la definición 2.3. Como ya lo recordamos, ahora tomemos dos bloques de letras $u, v \in \mathcal{A}^{[-m, m]}$ y las vecindades en Cantor que generan, a saber, $B_{2^{-m}}^C(u)$ y $B_{2^{-m}}^C(v)$ y demostraremos que $B_{2^{-m}}^C(u) \cap f^n(B_{2^{-m}}^C(v)) \neq \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

Los bloques u y v , que son elementos de $\mathcal{A}^{[-m, m]}$ determinan los puntos u^∞ y v^∞ en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Tomemos las vecindades en Besicovitch alrededor de este par de puntos $B_\varepsilon^B(u^\infty)$ y $B_\varepsilon^B(v^\infty)$. Como f es B -transitivo, existe $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $x \in B_\varepsilon^B(u^\infty)$ y $f^n(x) \in B_\varepsilon^B(v^\infty)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, y como ya es costumbre, usamos la caracterización de la distancia de Besicovitch 1.8: Existe una l_0 tal que para cualquier $l > l_0$ las diferencias entre los puntos en la ventana $[-l, l]$ están acotadas por $(2l+1)\varepsilon$. Como en todas las matemáticas, vamos hacer un poco de trampa: hacemos $l' = m + (2m+1)l$ de forma que en la ventana $[-m - (2m+1)l, m + (2m+1)l]$ las diferencias son menores que $(2m+1)(2l+1)\varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{3(2m+1)}$, la última expresión es igual a $\frac{2l+1}{3}$, lo que quiere decir que

$$\#\{i \in [-m - (2m+1)l, m + (2m+1)l] \mid x_i \neq (u^\infty)_i\} < \frac{2l+1}{3}$$

y

$$\#\{i \in [-m - (2m+1)l, m + (2m+1)l] \mid f^n(x)_i \neq (v^\infty)_i\} < \frac{2l+1}{3}.$$

De esta forma se puede ver que por cada diferencia en la ventana tenemos un bloque de tamaño $2m+1$ que será igual a u y de igual forma para la imagen, pero no para cualquier bloque, si tomamos una $l_1 < l$, entonces haciendo $j = (2m+1)l_1$ tenemos que $x_{[j-m, j+m]} = u$ y $f^n(x)_{[j-m, j+m]} = v$ y utilizando el corrimiento,

$$\sigma^j(x) \in B^C(u^\infty)_\varepsilon \cap f^{-n}(B^C(v^\infty)_\varepsilon).$$



Proposición 3.8. *Si un mapeo de bloques $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es C-cadena transitivo, entonces es W-cadena transitivo y B-cadena transitivo.*

PRUEBA. Para poder demostrar que f es W-cadena transitivo, necesitamos recordar tal definición 2.5. Así, para que $f = F_{\infty}$ sea W-cadena transitivo necesitamos encontrar una W-cadena tal que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, se pueda llegar de x a y a través de ella. Ya que la distancia de Cantor depende de un número finito de coordenadas, una C-cadena estará determinada por una sucesión finita de bloques. Si podemos encontrar una C-cadena de longitud fija para cualquier par de bloques del mismo tamaño, tendremos resuelto el problema pues a través de estas C-cadenas encontraremos la W-cadena $x^0, \dots, x^n \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que nos manda de x a y .

Pongamos nuestra atención en la regla local de f , es decir, en $F: \mathcal{A}^{2r+1} \rightarrow \mathcal{A}$ para cierta r . Sea $x^i \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ una 2^{-m} -cadena en Cantor. Tomemos una de las coordenadas que nos interesan en un punto de la cadena, x_j^{n+1} con $|j| \leq m$, pues como es una 2^{-m} -cadena en Cantor, esta coordenada viene de un un bloque de un punto anterior $x_j^{n+1} = F(x_{j-r}^n \dots x_{j+r}^n)$. Así, como lo habíamos mencionado, nuestra C-cadena está determinada por la sucesión de bloques $x_{[-m-r, m+r]}^i \in \mathcal{A}^{2m+2r+1}$.

Ahora bien, para alguna letra $a \in \mathcal{A}$ el punto a^{∞} es periódico bajo f , digamos que el periodo de a^{∞} es p . Como f es C-cadena transitivo, podemos encontrar una 2^{-m} -cadena $a^{2m+2r+1} = u^1, u^2, \dots, u^n = u$ donde $u \in \mathcal{A}^{2m+2r+1}$. Tomemos los últimos p bloques, es decir u^{n-p+1}, \dots, u^n , coloquemos a estos bloques dentro de un bloque w de mayor tamaño de forma que cada uno de los bloques antes mencionados sean sub-bloques de w . Digamos que el tamaño del bloque w es $2b+1$ y tomemos una $2^{-(b-r)}$ -cadena en Cantor de a^{2b+1} a w de longitud l . Si sólo nos tomamos las coordenadas de w en donde están los bloques de la primera cadena, obtenemos cadenas de mayor longitud de a^{2m+1} a u .

Hagamos un examen más detallado de la última afirmación. En las coordenadas en donde se encuentra los últimos p bloques u^i con $i \in [n-p+1, n]$ tenemos que hay una 2^{-m} -cadena de $a^{2m+2r+1}$ a u^i de longitud l , ya que cada uno es sub-bloque de w y existe la cadena de a^{2b+1} a w de longitud l . Como cada uno de estos bloques pertenecen a la cadena de a^{2m+1} a u , podemos generar cadenas de longitud $l, l+1, \dots, l+p-1$ de a^{2m+1} a u , restringiendo la cadena a las coordenadas en donde están ubicados los u^i y aplicando el resto de la cadena original. Como a^{∞} es periódico, podemos encontrar cadenas de longitud $q, q+1, \dots, q+p-1$ con $q = tp$ con $t \geq 0$, donde todas son de longitud mayor que l .

Si tenemos una 2^{-m} -cadena de un bloque cualquiera $v \in \mathcal{A}^{2m+2r+1}$ a a^{∞} , podemos

construir una 2^{-m} -cadena de v a u . Esta C-cadena sería la que nos interesa y podemos afirmar que dicha cadena es de longitud q para algún entero $q \geq 0$.

Observación 3.2. Como los bloques de un mismo tamaño son finitos existe una cadena de longitud máxima de v a $a^{2m+2r+1}$.

Hagamos la construcción de esta cadena, tomando $v \in \mathcal{A}^{2m+2r+1}$. Sea $\{x_1, \dots, x_k\}$ la C-cadena de v a $a^{2m+2r+1}$, por lo que los primeros k términos de la cadena de v a u son de la cadena de v a $a^{2m+2r+1}$ y los últimos términos de la cadena son los términos de alguna de las cadenas de $a^{2m+2r+1}$ a u completando así la cadena de v a u .

Para poder ver que para toda $v \in \mathcal{A}^{2m+2r+1}$ la cadena de v a u tienen la misma longitud nos fijamos en la primera parte de la cadena antes construida, en particular en

$$\text{máx}\{k_v \in \mathbb{N} \mid k \text{ es la longitud de la cadena } v \text{ a } a^{2m+2r+1}\}$$

y nos fijamos en su residuo módulo p , digamos b . Completamos la cadena con los términos de la cadena de $a^{2m+2r+1}$ a u cuya longitud sea c tal que $c + b = t'p$ con $t' \geq 0$. Esto nos da cadenas de cualquier v a u , todas de longitud múltiplo de p . Entonces podemos hacer que todas las cadenas tengan la misma longitud tomando la órbita de a^∞ bajo f , alargando así nuestra cadena en p términos, por lo que podemos encontrar una q máxima para todas nuestras cadenas.

Como habíamos mencionado anteriormente, había que demostrar que para cualquier v y u podíamos encontrar una cadena que nos mandara los bloques v a los bloques de u de cierta longitud fija, y que para cada una de estas cadenas de bloques las cadenas fueran de la misma longitud. Esto ya lo demostramos, lo que nos queda para el σ -espacio de Weyl es exhibir una cadena para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ en cada intervalo

$$[b_j, c_j] = [-m - r + j(2m + 2r + 1), m + r + j(2m + 2r + 1)]$$

con $j \in \mathbb{Z}$. Podemos construir nuestra 2^{-m} -cadena de $x_{[b_j, c_j]}$ a $y_{[b_j, c_j]}$ si tomamos a $x^1 = x$ y $x^q = y$.

Esta es la cadena que buscábamos, es más,

$$d_W(f(x^i), x^{i+1}) = 0$$

para toda $1 \leq i \leq q$. ➔

A continuación daremos un ejemplo en donde se ve que el inverso de la proposición 3.7 no es cierto.

Ejemplo 3.4. El mapeo de bloques dado por $f(x) = x$ (la identidad). Demostremos que es W-cadena transitivo y no es C-cadena transitivo.

Sea $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y a $\varepsilon > 0$. Para poder hacer la ε -cadena transitiva de x a y primero encontremos una $q \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{q} < \varepsilon$. Fijamos nuestra atención en x^1 que está construido de la siguiente forma:

$$x_i^1 = \begin{cases} x_i^0 & \text{si } i \neq pq \text{ para toda } p \in \mathbb{Z} \\ y_i & \text{si } i = pq \text{ para alguna } p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

y verifiquemos la distancia de Weyl entre x^0 y x^1 , observando

$$\frac{\#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i^0 \neq x_i^1\}}{l}.$$

Si tomamos a la ventana de tamaño $l = q$ y todas las coordenadas son iguales excepto la coordenada $i = pq$ con $p \in \mathbb{Z}$ nos da

$$\frac{\#\{i \in [k+1, k+l] \mid x_i^0 \neq x_i^1\}}{l} = \frac{1}{q},$$

por lo que $d_W(x^0, x^1) = \frac{1}{q} < \varepsilon$.

De igual forma podemos definirla para todos los residuos módulo q y nos quedaría de la siguiente manera:

$$x_i^1 = \begin{cases} x_i^{j-1} & \text{si } i \neq pq + j \text{ para toda } p \in \mathbb{Z} \\ y_i & \text{si } i = pq + j \text{ para alguna } p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

con $j \in \{0, 1, \dots, q-2, q-1\}$. Es claro que $d_W(x^j, f(x^{j-1})) = \frac{1}{q}$, generando así la cadena. Por lo que de $x^0 = x$ a y nos toma a lo más q pasos, entonces la identidad es W-cadena transitiva.

Falta demostrar que no es C-cadena transitiva.

Esto es fácil de ver pues si en la coordenada 0 de x y la coordenada 0 de y no son iguales, no hay forma que podamos encontrar una cadena en donde se cumpla que $d_C(x^i, f(x^{i-1})) < \varepsilon$ pues siempre están a distancia 1.

✦

3.3.4. Expansividad y propiedades σ -invariantes

Proposición 3.9. *Ningún mapeo de bloques es B -positivo expansivo.*

PRUEBA. Para hacer esta demostración, primero recordemos la definición 2.6... ya? Ahora necesitamos encontrar un par de puntos que bajo ningún mapeo de bloques se separen en Besicovitch, para esto tomaremos a nuestro alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ y la distancia de Besicovitch.

Fijemos un $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana podemos encontrar un entero q que cumpla con $\frac{1}{q+1} < \varepsilon$. Construyamos los puntos $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ donde x y y son simétricos ($x_i = x_{-i}$), por lo que nuestro análisis lo podemos restringir solo a $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Nuestros puntos serán de la forma

$$\begin{aligned} x_{[0, \infty]} &= 0^{q^1} 1^{q^0} 0^{q^3} 1^{q^2} 0^{q^5} 1^{q^4} \dots \\ y_{[0, \infty]} &= 1^{q^1} 0^{q^0} 1^{q^3} 0^{q^2} 1^{q^5} 0^{q^4} \dots \end{aligned}$$

Para poder calcular $d_B(0^\infty, x)$ observemos dónde son distintos. En este caso, las diferencias se dan en los bloques de unos. Si hacemos crecer nuestra ventana $l = q^1 + q^0 + \dots + q^{2n+1} + q^{2n}$ en donde tomamos las diferencias, obtenemos $l = \frac{q^{2n+2}-1}{q-1}$. Fijándonos en las coordenadas que son distintas obtenemos

$$\#\{i \in [0, l-1] \mid x_i \neq 0\} = q^0 + q^2 + \dots + q^{2n}$$

y realizando más cuentas obtenemos

$$\#\{i \in [0, l-1] \mid x_i \neq 0\} = \frac{q^{2n+1} - 1}{q^2 - 1}.$$

Como es un promedio, hay que dividir entre el tamaño de nuestra ventana, lo que nos da como resultado $\frac{1}{q+1}$ y esto sabíamos que es menor que ε , es decir,

$$d_B(0^\infty, x) < \varepsilon$$

y como el caso es análogo,

$$d_B(1^\infty, y) < \varepsilon.$$

Tomemos a $f = F_\infty$ con $F: \mathcal{A}^{r+1} \rightarrow \mathcal{A}$ y analicemos qué pasa cuando aplicamos F a cada bloque de longitud $r+1$ donde todo el bloque son 0 o 1, pues los bloques que no son de esta forma son muy pocos en comparación al total de los bloques en las palabras, es decir que su densidad es nula y siendo así, lo que modifican no es significativo. Entonces tenemos cuatro casos distintos.

1. Si $F(0^{r+1}) = 0$ y $F(1^{r+1}) = 0$, entonces $d_B(f(x), 0^\infty) = 0$ y $\forall t \in \mathbb{N}$,

$$d_B(f^t(x), f^t(0^\infty)) < \varepsilon.$$

2. Si $F(0^{r+1}) = 0$ y $F(1^{r+1}) = 1$, entonces $d_B(f(x), x) = 0$ y $\forall t \in \mathbb{N}$,

$$d_B(f^t(x), f^t(0^\infty)) < \frac{1}{q+1} < \varepsilon.$$

3. Si $F(0^{r+1}) = 1$ y $F(1^{r+1}) = 1$, entonces $d_B(f(y), 1^\infty) = 0$ y $\forall t \in \mathbb{N}$,

$$d_B(f^t(x), f^t(1^\infty)) < \varepsilon.$$

4. Si $F(0^{r+1}) = 1$ y $F(1^{r+1}) = 0$, entonces $d_B(f(x), 1^\infty) = 0$ y $\forall t \in \mathbb{N}$,

$$d_B(f^t(x), f^t(0^\infty)) < \frac{1}{q+1} < \varepsilon.$$

Como en todos los casos tenemos que hay puntos que no se separan, se obtiene que no existe un mapeo de bloques B-expansivo. \blackleftarrow

Proposición 3.10. *Sea f continuo que conmuta con el corrimiento en el espacio de Weyl. Supongamos que f es W -equicontinuo, W -sensible o que x es un punto W -equicontinuo de f . Entonces $\sigma^n \circ f$ tiene la misma propiedad. Las mismas afirmaciones son ciertas para el espacio de Besicovitch.*

PRUEBA. Es fácil ver que estas propiedades se dan pues σ es una isometría en ambos espacios y todas estas propiedades tienen que ver con la distancia. \blackleftarrow

A continuación daremos un ejemplo de una función que no es un mapeo de bloques y que es un homomorfismo en los σ -espacios de Weyl y en Besicovitch, por lo que en los σ -espacios de Weyl y de Besicovitch no se cumple el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund 3.2.

Ejemplo 3.5. Definamos la siguiente función $f: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ donde $\mathcal{A} = \{0, 1, s\}$

$$f(x)_i = \begin{cases} a + b + c & \text{si } x_{[i-j-1, i+k+1]} = as^jbs^kc \\ a + b & \text{si } x_{[i-j-1, \infty)} = as^jbs^\infty \\ b + c & \text{si } x_{(-\infty, i+k+1]} = s^\infty bs^kc \\ b & \text{si } x_{(-\infty, \infty)} = s^\infty bs^\infty \\ s & \text{si } x_i = s \end{cases}$$

donde $a, b, c \in \{0, 1\}$.

Para poder hacer esto veamos que si tomamos una n fija y la ventana inducida por ésta en la imagen y el dominio de la función, por cada diferencia en la ventana del dominio de la función en el peor de los casos nos da tres diferencias en la ventana de la imagen y para que todo salga bien supongamos que también al principio y al final son distintas, por lo que la desigualdad queda de la siguiente forma:

$$\#\{j \in [-n, n] \mid x_j \neq y_j\} \leq 3\#\{j \in [-n, n] \mid f(x)_j \neq f(y)_j\} + 4.$$

Dividiendo entre n y tomando el límite superior cuando n tiende a infinito, obtenemos que $d_W(f(x), f(y)) < 3d_W(x, y)$ por lo que queda demostrado que es W-continua y, gracias a la proposición 1.6, también es B-continua. La función f es σ -invariante por definición, por lo tanto es un W,B-homomorfismo.

✦

Bibliografía

- [1] F. Blanchard, E. Formenti y P. Kůrka. Cellular automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl topological spaces. *Complex Systems* **11** (1997) No. 2, 107–123.
- [2] T.C. Brown. Descriptions of the characteristic sequence of an irrational. *Canad. Math. Bull.* **36** (1993) 15–21.
- [3] T. Downarowicz and A. Iwanik. Quasi-uniform convergence in compact dynamical systems. *Studia Mathematica* **89** (1998) 11–25.
- [4] P. Kůrka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **17** (1997) 417–433.
- [5] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press 1995.
- [6] J. Marcinkiewicz. Une remarque sur les espaces de A. S. Besicovitch. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **208** (1993) 147-159.
- [7] K. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge University Press. 1983.
- [8] W. Rudin *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 1953.
- [9] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Springer Verlag. 1981.

Bibliografía

- [1] F. Blanchard, E. Formenti y P. Kurka. Cellular automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl topological spaces.
Complex Systems (1997) No. 2, 107--123.
- [2] T.C. Brown. Descriptions of the characteristic sequence of an irrational.
Canad. Math. Bull. (1993) 15--21.
- [3] T. Downarowicz and A. Iwanik. Quasi-uniform convergence in compact dynamical systems.
Studia Mathematica (1998) 11--25.
- [4] P. Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata.
Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1997) 417--433.
- [5] D. Lind and B. Marcus. An introduction to symbolic dynamics and coding.
Cambridge University Press 1995.
- [6] J. Marcinkiewicz. Une remarque sur les espaces de A. S. Besicovitch.
C. R. Acad. Sc. Paris, t. (1993) 147-159.
- [7] K. Petersen. Ergodic Theory. Cambridge University Press. 1983.
- [8] W. Rudin Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill, 1953.
- [9] P. Walters. An introduction to ergodic theory. Springer Verlag. 1981 .