



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

**MODELO UNIFICADO DE PROPAGACION DE
OLEAJE E HIDRODINAMICA NO LINEAL**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERIA

CIVIL – HIDRAULICA

P R E S E N T A

EDGAR GERARDO MENDOZA BALDWIN

TUTOR:

RODOLFO SILVA CASARIN



2006



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente:	Dr. Carlos Cruickshank Villanueva
Secretario:	Dr. Rodolfo Silva Casarín
1er Vocal:	Dr. Oscar Fuentes Mariles
2º Vocal:	Dr. Moisés Berezowsky Verduzco
3er Vocal:	Dr. Alejandro Rodríguez Valdés
1er Suplente:	Dr. Carlos Escalante Sandoval
2º Suplente:	Dr. Paulo Salles Afonso de Almeida

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERIA, UNAM

TUTOR DE TESIS

DR. RODOLFO SILVA CASARIN

*Por que todo lo que soy es tuyo
Por tu comprensión, paciencia y compañía
Eres parte de este logro, gracias Yaz*

*Este trabajo está dedicado a todos los que de una forma u otra
han colaborado en mi formación profesional y humana.
A todos ustedes mi cariño, admiración y respeto ¡GRACIAS!*

INDICE

LISTA DE FIGURAS.....	15
LISTA DE TABLAS.....	16
INTRODUCCIÓN.....	17
OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN.....	19
1 FUNDAMENTOS DE HIDRODINÁMICA	23
1.1 Ecuaciones fundamentales.....	23
1.1.1 Ecuación de Continuidad.....	23
1.1.2 Ecuación de Laplace.....	23
1.1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes	23
1.1.4 Ecuaciones de Euler	24
1.1.5 Ecuación de Bernoulli	24
1.2 Flujo sobre fondo impermeable.....	24
1.2.1 Condiciones de contorno	24
1.2.1.a Condición de contorno cinemática	24
1.2.1.b Condición de contorno dinámica.....	25
1.2.1.c Condición de contorno mixta de superficie libre.....	25
1.3 Teoría de ondas de pequeña amplitud	25
1.4 Flujo en un medio poroso	26
1.4.1 Antecedentes sobre la propagación de ondas en y sobre un medio poroso..	26
1.4.2 Ecuaciones del flujo en un medio permeable	27
1.5 Teoría lineal dentro de un medio poroso	33
1.5.1 Solución para el potencial de filtración.....	33
1.5.1.a Condición de contorno cinemática	33
1.5.1.b Condición de contorno dinámica.....	33
1.5.1.c Condición de contorno mixta de superficie libre.....	34
1.5.2 Solución para el potencial de descarga.....	36
1.6 Teoría lineal con interacción entre agua y medio poroso.....	37
1.6.1 Condiciones de contorno	37
2 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN FONDO VARIABLE	47
3 MODELO DE PROPAGACIÓN DE ONDAS.....	57
3.1 Condiciones de frontera.....	57
3.1.1 Condición de frontera abierta.....	59
3.1.1.a Evaluación del potencial de velocidades incidente con profundidad constante	60
3.1.1.b Evaluación del potencial de velocidades incidente con fondo variable ...	60
3.1.2 Condición de frontera parcialmente reflejante	62
3.2 Resumen de las condiciones de frontera.....	63
3.3 Discretización de las ecuaciones	63
3.3.1 Ecuación de gobierno dentro del dominio.....	63
3.3.2 Ecuación para frontera abierta.....	63
3.3.3 Ecuaciones para fronteras con fondo variable.....	64
3.3.4 Ecuaciones para la frontera en la costa.....	65
3.4 Sistema de mallado jerárquico.....	65
3.4.1 Delimitación del dominio	66
3.4.2 Revisión de la calidad de la malla	66

3.4.3	Cortado de celdas	66
3.4.4	Generación de la malla base	67
3.4.5	Regularización	67
3.4.6	Esquema de numeración	67
3.5	Solución del sistema de ecuaciones	69
3.5.1	Método de Eliminación Gaussiana para resolver matrices de banda ancha	70
3.6	Ejercicios de validación	71
3.6.1	Difracción por una cuña	71
3.6.2	Grupo de seis pilas	73
3.6.2.a	Pilas emergidas impermeables	73
3.6.2.b	Pilas emergidas permeables	74
3.6.2.c	Pilas sumergidas impermeables	75
3.6.3	Grupo de cinco pilas porosas con malla jerárquica	76
3.6.3.a	Pilas sumergidas $a/h=0.8$	76
3.6.3.b	Pilas sumergidas $a/h=0.4$	77
3.6.4	Reflexión debida a una isla cilíndrica	78
3.6.5	Validación con oleaje irregular	78
3.7	Aplicación a una batimetría real	81
4	MODELO DE CORRIENTES	85
4.1	Ecuaciones de gobierno	85
4.1.1	Tensores de radiación	86
4.2	Descripción del método numérico	89
4.3	Discretización en volumen finito de las ecuaciones para aguas someras	91
4.4	Implementación numérica	94
4.4.1	Estimación de los estados de Riemann	94
4.4.2	Evaluación del Jacobiano de flujo	97
4.4.3	Cálculo de las funciones de flujo	98
4.4.4	Integración temporal	101
4.4.5	Condiciones de frontera	101
5	RESULTADOS DEL MODELO UNIFICADO	105
5.1	Introducción	105
5.2	Ejercicios de validación	105
5.2.1	Circulación en una playa sinusoidal	105
5.2.2	Corrientes costeras dentro de una bahía	108
5.2.3	Dinámica generada por un obstáculo vertical	112
5.3	Aplicación a una batimetría real	115
	CONCLUSIONES	127
	FUTURAS LINEAS DE TRABAJO	129
	BIBLIOGRAFÍA	131
	ANEXOS	137
A.	CONDICIONES DE CONTORNO DE LA TEORÍA LINEAL	139
A.1	Condición de contorno cinemática	139
A.1.1	Condición cinemática en el fondo	140
A.1.2	Condición cinemática en la superficie libre	141
A.2	Condición de contorno dinámica	141
A.3	Condición de contorno mixta de superficie libre	142

B. TEORÍA DE ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD SOBRE FONDO IMPERMEABLE Y HORIZONTAL	145
B.1 Separación de la variable profundidad.....	148
B.2 Condición de periodicidad espacial	148
B.3 Solución general.....	149
B.4 Propiedades ingenieriles de la teoría lineal.....	153
C. SOLUCIÓN DE LAS INTEGRALES DE LA MMSE CON MEDIO POROSO ..	155

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal en el medio poroso.....	33
Figura 1-2 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal sobre un medio poroso...	37
Figura 2-1 Croquis del problema de propagación en fondo variable	47
Figura 3-1 Tipos de corte de celda permitidos	66
Figura 3-2 Ejemplo de la numeración de malla base	67
Figura 3-3 Esquema de numeración	68
Figura 3-4 Solución analítica (izq.) y numérica (der.) para la cuña impermeable	72
Figura 3-5 Campos de altura de ola ($\theta=0^\circ$) para la solución analítica (izq.) y la numérica (der.)	72
Figura 3-6 Campos de altura de ola ($\theta=30^\circ$) para la solución analítica (izq.) y la numérica (der.)	73
Figura 3-7 Perfiles de altura de ola adimensional en $y/L=0$ (sup.) y $x/L=0$ (inf.).....	74
Figura 3-8 Campo de oleaje con pilas emergidas impermeables (izq.) y porosas (der.).....	74
Figura 3-9 Campo de oleaje con pilas sumergidas impermeables (izq.) y porosas (der.)....	75
Figura 3-10 Campo de oleaje con pilas sumergidas $a/h=0.8$ a) solución numérica, b) solución analítica, c) corte transversal.....	76
Figura 3-11 Campo de oleaje con pilas sumergidas $a/h=0.4$ a) solución numérica, b) solución analítica, c) corte transversal.....	77
Figura 3-12 Esquema de la isla cilíndrica	77
Figura 3-13 Altura de ola adimensional Chamberlain y Porter (1999) (izq.) y modelo presentado (der.).....	78
Figura 3-14 Espectro de oleaje utilizado para la validación.....	79
Figura 3-15 Mapas de altura de ola máxima adimensional analíticos (izq.) y numéricos (der.). a) pilas impermeables, b) pilas permeables	80
Figura 3-16 Cortes transversales de la validación con oleaje irregular	80
Figura 3-17 Batimetría del Puerto de Veracruz (profundidades en metros).....	81
Figura 3-18 Modelación de un caso real. Rompeolas impermeables a) superficie libre instantánea, b) altura de ola máxima. Rompeolas porosos c) superficie libre instantánea, d) altura de ola máxima	82
Figura 4-1 Esquema del volumen de control y localización de las variables.....	93
Figura 4-2 Estados de Riemann.....	95
Figura 5-1 Modelo experimental de playa sinusoidal (profundidades en metros)	106
Figura 5-2 Campo de altura de ola máxima para la playa sinusoidal.....	106
Figura 5-3 Corrientes inducidas en la playa sinusoidal.....	107
Figura 5-4 Velocidades medidas en el modelo experimental (da Silva Lima, 1999).....	107
Figura 5-5 Morfología de bahía idealizada, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m	108
Figura 5-6 Campo de altura de ola máxima dentro de una bahía, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m.....	109
Figura 5-7 Patrones de corrientes inducidas dentro de una bahía, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m.....	110
Figura 5-8 Solución analítica para las corrientes inducidas en una bahía, a) fondo plano, b) con bajos	111
Figura 5-9 Configuración de obstáculo vertical	112

Figura 5-10 Campos de altura de ola máxima obstáculo emergido, a) 0° y b) 45°	113
Figura 5-11 Patrones de corrientes inducidas obstáculo emergido, a) 0° y b) 45°	113
Figura 5-12 Campos de altura de ola máxima obstáculo sumergido, a) 0° y b) 45°	114
Figura 5-13 Patrones de corrientes inducidas obstáculo sumergido, a) 0° y b) 45°	114
Figura 5-14 Vista en planta de la bahía de Acapulco	116
Figura 5-15 Campo de altura de ola máxima, $\theta=45^\circ$	116
Figura 5-16 Superficie libre instantánea, $\theta=45^\circ$	117
Figura 5-17 Corrientes inducidas, $\theta=45^\circ$	117
Figura 5-18 Corrientes en las zonas de detalle, $\theta=45^\circ$	118
Figura 5-19 Campo de altura de ola máxima, $\theta=0^\circ$	119
Figura 5-20 Superficie libre instantánea, $\theta=0^\circ$	119
Figura 5-21 Corrientes inducidas, $\theta=0^\circ$	120
Figura 5-22 Corrientes en las zonas de detalle 1 y 2, $\theta=0^\circ$	120
Figura 5-23 Corrientes en la zonas de detalle 3 a 5, $\theta=0^\circ$	121
Figura 5-24 Campo de altura de ola máxima, $\theta=22.5^\circ$	121
Figura 5-25 Superficie libre instantánea, $\theta=22.5^\circ$	122
Figura 5-26 Corrientes inducidas, $\theta=22.5^\circ$	122
Figura 5-27 Corrientes en las zonas de detalle, $\theta=22.5^\circ$	123
Figura 6-1 Principales parámetros que describen el oleaje	139
Figura 7-1 Obtención de las raíces reales	152
Figura 7-2 Obtención de las raíces imaginarias.....	152

LISTA DE TABLAS

Tabla III-1 Valores de a_0 , a_1 y a_2 para diferentes ángulos de apertura (Kirby, 1986).....	59
Tabla III-2 Números de identificación y niveles de subdivisión.....	68
Tabla B-1 Posibles soluciones de la ecuación de Laplace.....	147

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo numérico para calcular la transformación de ondas en zonas costeras que representa adecuadamente los fenómenos de refracción, difracción, someramiento y reflexión. El modelo tiene la capacidad de disipar energía por rotura del oleaje y fricción de fondo. A partir del oleaje propagado se estiman las velocidades inducidas vía el cálculo de los tensores de radiación. Se diseñó un sistema de mallado de tipo jerárquico (Quad-tree) que admite el uso de dominios y celdas rectangulares.

Los modelos analíticos empleados son 1) la ecuación modificada de la pendiente suave, que se trabaja en forma elíptica con una aproximación parabólica en las fronteras, mientras que para resolver el sistema de ecuaciones se utiliza un algoritmo de eliminación con pivoteo parcial adaptado a una rutina de almacenamiento en disco duro que optimiza los recursos computacionales y 2) las ecuaciones de aguas someras implementadas en un esquema de volumen finito y resueltas numéricamente con un método de tipo Godunov. Entre las fortalezas del modelo están la representación de fronteras de tipo abierta, absorbente y parcialmente reflejante, así como la modelación de las condiciones de fondo impermeable, fondo poroso de amplitud finita y la interacción con obstáculos impermeables y porosos.

El modelo se valida para diferentes condiciones de simulación contra soluciones analíticas de problemas idealizados en algunos casos y contra datos de laboratorio en otros con buenos resultados. Finalmente, como parte importante en el desarrollo del modelo, se logra la aplicación del mismo a batimetrías reales con éxito.

ABSTRACT

A numerical model for the estimation of wave transformation in coastal zones is presented here. The model adequately represents refraction, diffraction, shoaling and reflection phenomena and is capable of considering energy dissipation due to wave breaking and bottom friction. From the propagated wave amplitudes, induced currents are estimated via the radiation stress tensor theory. An original hierarchical meshing system (Quad.-tree) has been used which allows the use of rectangular cells and domains.

Two analytical models are coupled 1) the modified mild slope equation in its elliptic form and with parabolic approximations at the boundaries is used for the estimation of wave transformation. The system of linear equations is solved using an algorithm of Gaussian elimination with partial pivoting adapted to optimize computational resources, and 2) the shallow water equations are used for evaluating currents induced by waves. These are discretized in a finite volume scheme and solved with a Godunov type method. Among the model strengths are the open, absorbing and partially reflecting boundary representation, as well as the impermeable and porous bottom conditions with impermeable and porous structures interaction.

The model is validated for different simulation conditions, against analytical solutions in some idealized problems and also against laboratory data with excellent results. Finally, and very importantly in the development of the model, it was successfully applied to real domains such as the Ports of Veracruz and Acapulco

INTRODUCCIÓN

El uso de las playas y de la zona costera es fundamental en el desarrollo económico y social de gran cantidad de naciones, ya que las actividades que en ellas se llevan a cabo constituyen fuentes de ingreso, de empleos o de esparcimiento y México, país en el que tanto las finanzas públicas como la economía de una parte importante de la población depende de la explotación de recursos en la zona litoral (hidrocarburos, turismo y pesca como ejemplos) no es la excepción.

De esta relevancia dentro del medio nacional surge la necesidad de comprender cada vez mejor los procesos que se suceden en la zona costera con miras a desarrollar herramientas que a su vez permitan la puesta en práctica de acciones y políticas que hagan del aprovechamiento de los frentes costeros una actividad segura, rentable y sustentable.

Las herramientas básicas con que cuenta la ingeniería para llevar a cabo su labor transformadora de la naturaleza y defensora de la actividad y vida humanas, en el sentido de planeación, predicción y diseño, son la medición y construcción en campo, la modelación física en laboratorio y la simulación numérica. Esta última, al representar menores costos, constituye un punto de partida para el resto de las actividades de diseño y planeación de las obras, en este caso, marítimas.

Es en este sentido que el trabajo de investigación que aquí se presenta, busca aportar una mejora importante en la simulación numérica de dos procesos que juegan un papel preponderante en la planeación de cualquier actividad costera, a saber, la propagación de ondas hacia la costa, en el que se incluyen los procesos de transformación más relevantes, y las corrientes que estas ondas generan al acercarse a la playa, las cuales son el principal motor del transporte de sedimento y por ende de los cambios morfológicos del frente costero que se trabajan vía las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.

OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN

El objetivo principal del presente trabajo de investigación se centra en desarrollar un modelo analítico-numérico capaz de representar correctamente la transformación que sufre el oleaje cuando se propaga desde la zona de generación hasta la zona de disipación en la costa para estimar las corrientes que éste induce, principal mecanismo de transporte de sedimentos en las playas.

Es parte esencial del desarrollo, que el modelo pueda ser ejecutado en computadoras personales de capacidad común puesto que el fin último de una herramienta como la que se presenta es su aplicación en el campo ingenieril.

Como objetivos adicionales, el modelo debe ser capaz de representar fronteras de tipo abierto, absorbente y parcialmente reflejante. Las condiciones de simulación han de incluir fondo impermeable y la interacción con obstáculos emergidos y sumergidos, así como impermeables y porosos.

El objetivo de este trabajo se considerará alcanzado cuando el modelo en su conjunto sea aplicado, con resultados exitosos, a batimetrías reales.

Para cumplir con los objetivos planteados, el trabajo se ha organizado de la siguiente manera

- Capítulo I. Se presenta el fundamento teórico que da sustento al modelo unificado, a saber, las ecuaciones de flujo sobre fondo impermeable, dentro de un medio poroso y el flujo cuando hay interacción entre los medios. Durante los desarrollos se muestra la ventaja de utilizar el signo negativo de la función de dependencia temporal a diferencia de lo planteado por otros autores.
- Capítulo II. Trata de la derivación de la ecuación modificada de la pendiente suave con la inclusión de los términos que permiten la modelación de cualquier pendiente y del medio poroso.
- Capítulo III. Presenta la implementación numérica del modelo de oleaje, las características de las fronteras, del sistema de mallado y la metodología para la solución del sistema de ecuaciones. Se lleva a cabo la validación y prueba del modelo.
- Capítulo IV. Es el desarrollo del método numérico empleado para resolver las ecuaciones de aguas someras, la discretización de las ecuaciones y el trabajo de las condiciones de frontera. Se enuncia la teoría de los tensores de radiación.
- Capítulo V. Se abordan los casos de validación y prueba del modelo unificado.
- Conclusiones generales del trabajo.

CAPÍTULO I.
FUNDAMENTOS DE HIDRODINÁMICA

1 FUNDAMENTOS DE HIDRODINÁMICA

En este capítulo se presenta, en forma resumida, los aspectos fundamentales de la hidrodinámica que son la base conceptual para el desarrollo de los modelos numéricos que, a su vez, son el objeto central del trabajo de investigación. Para ello se enlistan las ecuaciones básicas y con ellas como marco teórico, se presentan las ecuaciones de gobierno y condiciones de frontera que rigen la propagación de ondas progresivas para los tres casos de interés particular, esto es, sobre fondo impermeable, dentro de un medio poroso y sobre una capa porosa de amplitud finita.

1.1 Ecuaciones fundamentales

La ecuación de Laplace es la ecuación de gobierno para el problema de flujo oscilatorio; mientras que las condiciones en las interfases, tanto agua-aire como agua-fondo, se describen a partir de las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli. De modo que siguiendo un orden lógico, primero ha de conocerse la ecuación de continuidad y a partir de ella derivar la de Laplace. Por otro lado, dadas las ecuaciones de Navier-Stokes simplificadas a las de Euler e integradas definen la ecuación de Bernoulli. Consultar, por ejemplo, Streeter et al, (1998) o el resumen presentado por Govaere, G., (2002) con relación al desarrollo completo de cada una de las ecuaciones que se enlistan a continuación.

1.1.1 Ecuación de Continuidad

Aceptando que el fluido es incompresible, la ecuación de continuidad es, simplemente

$$\text{div}V = 0 \quad (1.1)$$

en la que V es el vector velocidad del flujo.

1.1.2 Ecuación de Laplace

Bajo el supuesto de flujo irrotacional, existe un potencial de velocidades, Φ , tal que

$$u = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right), v = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) \text{ y } w = \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

donde u , v y w son los componentes cartesianos del vector velocidad. Definido dicho potencial y considerando la ecuación de continuidad (1.1), se obtiene la expresión conocida como ecuación de Laplace para flujo incompresible e irrotacional, a saber,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \nabla^2\Phi = 0. \quad (1.3)$$

1.1.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

La forma vectorial de estas ecuaciones, para flujo incompresible es

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \bar{X} \quad (1.4)$$

siendo p la presión, t el tiempo, μ la viscosidad cinemática y \bar{X} representa a las fuerzas externas.

1.1.4 Ecuaciones de Euler

Son un caso particular de las ecuaciones (1.4) si se aceptan las hipótesis de: flujo no viscoso y fuerzas externas nulas excepto en la dirección vertical, cuyo componente corresponde a la acción de la fuerza de gravedad. De esta forma las ecuaciones de Euler quedan

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.5)$$

donde g es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

1.1.5 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una forma integrada de las ecuaciones de Euler y proporciona una relación entre el campo de presiones y la cinemática del flujo. De modo que para el caso de fluido incompresible la ecuación de Bernoulli es

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (1.6)$$

en la que $C(t)$ es una función del tiempo que permanece constante al o largo de una línea de corriente.

1.2 Flujo sobre fondo impermeable

La solución del problema de flujo oscilatorio sobre fondo impermeable constituye una primera aproximación a la representación matemática de la propagación de ondas en la realidad. Esta simplificación, dada su facilidad de aplicación, permite la obtención de resultados idealizados con poco esfuerzo computacional y buena precisión. A continuación se presentan las ecuaciones que se emplean para modelar la propagación de ondas de pequeña amplitud (o teoría lineal) en agua y sobre fondo horizontal impermeable. Para encontrarlas, conocida la ecuación diferencial de gobierno (Laplace con el potencial de velocidades como variable dependiente), es necesario establecer las condiciones de contorno cinemática (de fondo y superficie libre), dinámica y mixta que complementan el problema, la derivación completa de las mismas se describe en el Anexo A.

1.2.1 Condiciones de contorno

1.2.1.a Condición de contorno cinemática

La condición cinemática de contorno general es

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = -\frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{en } F(x, y, z, t) = 0 \quad (1.7)$$

donde $\bar{u} = (u, v, w)$, $n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ es un vector unitario normal a la superficie libre y

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (1.8)$$

Al aplicar a esta expresión al fondo y a la superficie libre, se obtienen las condiciones de contorno respectivas.

Condición cinemática en el fondo

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h, \quad (1.9)$$

Condición cinemática en la superficie libre

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (1.10)$$

1.2.1.b Condición de contorno dinámica

La ecuación de Bernoulli (1.6) define por sí misma la condición dinámica

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (1.11)$$

1.2.1.c Condición de contorno mixta de superficie libre

La solución del problema requiere una condición de contorno adicional, para obtenerla se utiliza la derivada total de la ecuación (1.11) y se sustituye en la (1.10) así, se tiene

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.12)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

1.3 Teoría de ondas de pequeña amplitud

Como ya se dijo, la solución a la ecuación de Laplace dadas las condiciones de frontera enunciadas en las ecuaciones (1.9) a (1.12), se conoce como teoría de ondas de pequeña amplitud o teoría lineal. En el Anexo B se presenta el desarrollo completo de dicha teoría, mientras que a continuación solo se resumen las expresiones de mayor interés para este trabajo.

La relación de dispersión es

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (1.13)$$

donde $\sigma = 2\pi/T$ es la frecuencia angular, T es el periodo, $k = 2\pi/L$ es una constante de integración denominada número de onda y L la longitud de onda.

La elevación de la superficie libre del agua, η , se calcula con

$$\eta = \Re \left[-\frac{i\sigma}{g} \cosh(kh) A e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (1.14)$$

en la que $A = -\frac{g}{i\sigma} \frac{a}{\cosh kh}$, $\Re[\]$ denota la parte real del argumento, h la profundidad del nivel medio del mar, a es la amplitud de la onda, g la aceleración debida a la fuerza de gravedad, x el eje de propagación y t el tiempo.

Finalmente el potencial de velocidades está dado por

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (1.15)$$

1.4 Flujo en un medio poroso

El fondo marino es predominantemente arenoso, material cuya estructura y configuración permiten el flujo a su través; adicionalmente, su característica friccionante induce modificaciones en las ondas que se propagan sobre él. Otro problema se presenta cuando, para hacer más eficiente y económico el diseño de una obra de protección, se desea conocer la transmisión de ondas a través de un dique rompeolas ya sea emergido o sumergido. En ambos casos, el objeto de interés es tanto la descripción del flujo dentro de un medio permeable como la distorsión que induce al flujo la existencia de un medio granular en el fondo. Para los alcances de este trabajo, la representación matemática del flujo en estas condiciones estará compuesta por las ecuaciones de la teoría lineal con las modificaciones de cada caso, más la de propagación en el agua.

Siendo que los estudios realizados a este respecto son de más reciente inclusión a nivel ingenieril que los citados anteriormente, a continuación se presenta un breve resumen del estado del arte.

1.4.1 Antecedentes sobre la propagación de ondas en y sobre un medio poroso

Al igual que en el caso de fondo impermeable, un tren de ondas que se propaga sobre un medio poroso sufre procesos de reflexión, transmisión y disipación. Por otro lado, aún en el interior de la estructura no pierde su carácter oscilatorio, aunque las presiones inducidas modifican notablemente la cinemática y dinámica del flujo.

Los primeros experimentos en los que se buscó describir el flujo en un medio poroso, fueron los realizados por Darcy quien, al igual que un gran número de investigadores que lo sucedieron, consideró al medio poroso como continuo. Esta hipótesis permite promediar temporalmente los flujos (velocidad de filtración) y así desatender la visión microscópica

del problema, en la que parámetros como la forma, localización, rugosidad, porosidad y orientación de cada una de las partículas individuales que conforman el medio son de gran importancia. De esta forma, el procedimiento más adoptado para resolver el problema consiste en hallar la solución de las ecuaciones de flujo dentro del medio poroso para luego hacerla compatible con la solución correspondiente a la propagación de las ondas en el agua.

Otro de los escalones medulares en la solución del problema, lo resolvieron Reid y Kajiura (1957), al mostrar que el flujo sobre un medio permeable y granular debe satisfacer la ecuación de Laplace. Por su parte, Liu y Dalrymple (1984) realizaron un primer intento de incluir el carácter oscilatorio del flujo reemplazando la ley de Darcy por el modelo desarrollado para flujo en medios porosos de Dagan (1979).

Al demostrar que dentro del medio poroso una aproximación lineal no ofrece resultados suficientemente precisos, algunos investigadores desarrollaron modelos basados en leyes de disipación de carácter no lineal con el fin de estudiar la interacción onda-medio poroso, especialmente para diques de escollera. En este sentido Sollit y Cross (1972) presentaron un procedimiento analítico para derivar las ecuaciones de flujo oscilatorio en un medio granular. Su trabajo parte de la descomposición de las variables instantáneas del flujo para promediarlas temporal y espacialmente. Las ecuaciones resultantes tienen solución analítica si se desprecian las aceleraciones convectivas asociadas a la velocidad de filtración y se linealiza el término de fricción.

A partir de la teoría expuesta por Sollit y Cross (1972) se han desarrollado modelos y soluciones de gran importancia para la ingeniería costera, Gu y Wang (1991), por ejemplo, realizaron un trabajo teórico y experimental enfocado a comprender la propagación de ondas sobre fondos granulares. Dalrymple et al. (1991) extendieron dicha teoría al caso de un dique poroso con un tren de ondas incidiendo oblicuamente. La interacción de un dique con espaldón y oleaje incidiendo en forma oblicua fue analizado por Losada et al. (1993), haciendo especial hincapié sobre la reflexión, transmisión y distribución de presiones bajo el espaldón. Más recientemente, Yu et al. (1994), desarrollaron la solución para el estudio de oscilaciones en una dársena semicircular. En años recientes, y de especial utilidad para este trabajo Rojanakamthorn et al. (1989), Losada et al. (1995) y Silva et al. (2002) derivaron las expresiones de un tren lineal monocromático sobre un medio poroso.

1.4.2 Ecuaciones del flujo en un medio permeable

La resistencia al flujo inducida por un medio poroso formado de material granular grueso depende de varios parámetros, tales como localización, rugosidad de la superficie, porosidad y orientación de cada una de las partículas individuales. La mayor parte de estos parámetros no puede ser controlada ni siquiera en el laboratorio. Es por ello que la descripción del flujo se realiza desde el punto de vista de un medio continuo con propiedades hidráulicas distribuidas uniformemente.

A continuación se presenta el desarrollo completo de las ecuaciones que se utilizan para representar dicho flujo.

Sea el vector $\vec{q}^*(u_i, v_i)$ la velocidad instantánea en un punto cualquiera y p^* el campo de presiones correspondiente. Las ecuaciones de movimiento (Navier – Stokes) en función de dicha velocidad y presión son

$$\frac{D\vec{q}^*}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p^* + \gamma z) + \nu \nabla^2 \vec{q}^* \quad (1.16)$$

donde γ y ρ representan el peso específico y la masa del fluido respectivamente, ν es la viscosidad cinemática y el operador $\nabla = \vec{i}(\partial/\partial x) + \vec{j}(\partial/\partial y) + \vec{k}(\partial/\partial z)$

Por su parte, la conservación de la masa se expresa como,

$$\nabla \vec{q}^* = 0 \quad (1.17)$$

Si se conociera la forma y distribución de las partículas e intersticios del medio poroso, las ecuaciones (1.16) y (1.17) podrían ser resueltas, sin embargo, esta configuración es aleatoria tanto espacial como temporalmente. Es por ello que en lugar de utilizar la aproximación microscópica, es práctica común evaluar las propiedades físicas e hidráulicas del medio poroso como uno continuo y homogéneo. El concepto que permite la aplicación de esta hipótesis es la velocidad de filtración, misma que tiene como punto de partida el promediado de las ecuaciones en un volumen pequeño pero finito del fluido.

Para reemplazar la velocidad instantánea real, $\vec{q}^*(u_i, v_i)$, por la velocidad de filtración, el campo de velocidades puede separarse linealmente, como sigue

$$\vec{q}^*(u_i, v_i) = \vec{q}(u, v) + \vec{q}_s(u_s, v_s) + \vec{q}_t(u_t, v_t) \quad (1.18)$$

donde \vec{q} es la velocidad de filtración, es decir, la velocidad promedio en un número pequeño pero finito de poros distribuidos uniformemente; \vec{q}_s representa la perturbación espacial en la velocidad del flujo debida a la irregularidad de los poros o las capas límite y \vec{q}_t es la perturbación del campo de velocidades por efecto de las fluctuaciones temporales en el interior de los poros. El campo de presiones puede descomponerse en forma similar.

$$p^* = p + p_s + p_t \quad (1.19)$$

Al sustituir las expresiones (1.18) y (1.19) en la (1.16), desarrollando la derivada total y promediando en un periodo menor que el propio de la oscilación se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{q} + \vec{q}_s) + (\vec{q} + \vec{q}_s) \cdot \nabla(\vec{q} + \vec{q}_s) + \overline{\vec{q}_t \cdot \Delta \vec{q}_t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + p_s + \gamma z) + \nu \nabla^2(\vec{q} + \vec{q}_s) \quad (1.20)$$

donde el sobre lineado indica promedio temporal.

Procediendo de igual manera con la ecuación de la continuidad (1.17) se obtiene,

$$\nabla(\vec{q} + \vec{q}_s) = 0 \quad (1.21)$$

Las ecuaciones del movimiento, en un volumen pequeño pero finito del medio poroso, promediadas tanto temporal como espacialmente son

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \cdot \nabla \vec{q} + \overline{\vec{q} \cdot \nabla \vec{q}_t} + \overline{\vec{q}_s \cdot \nabla \vec{q}_s} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) + \nu \nabla^2 \vec{q} \quad (1.22)$$

donde el subrayado indica promedio espacial.

Los términos $\overline{\vec{q}_s \cdot \Delta \vec{q}_s}$ y $\overline{\vec{q}_t \cdot \Delta \vec{q}_t}$ permanecen en las ecuaciones de movimiento luego de realizar los promedios temporal y espacial debido a la no linealidad inherente de los términos relativos a las aceleraciones convectivas.

Buscando simplificar el problema Sollit y Cross (1972), realizaron un análisis de escala bajo el razonamiento que, si bien, q , q_s y q_t son del mismo orden de magnitud, los gradientes de cada uno pueden estar en escalas totalmente distintas ya que las fluctuaciones de la velocidad de filtración ocurren en distancias del orden de la longitud de onda del flujo, mientras que las perturbaciones espaciales y temporales ocurren en una escala similar al diámetro de los poros. De esta forma, si la longitud de onda es mucho mayor que el diámetro de los poros (lo cual se cumple en todos los casos de relevancia práctica) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \vec{q} &\ll \nabla \vec{q}_s \text{ y} \\ \nabla \vec{q} &\ll \nabla \vec{q}_t \text{ y con ello} \\ \vec{q} \cdot \nabla \vec{q} &\ll \overline{\vec{q}_s \cdot \nabla \vec{q}_s} + \overline{\vec{q}_t \cdot \nabla \vec{q}_t} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Como resultado de este razonamiento, el término que contiene el gradiente de la velocidad de filtración se puede ignorar, simplificación que además es consistente con la hipótesis que se aplica en la teoría de ondas de pequeña amplitud, en la que los productos de la velocidad por la aceleración se consideran cuadráticos y, por tanto, despreciables. Las ecuaciones de movimiento resultan, entonces

$$s \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) + \nu \nabla^2 \vec{q} - \left(\overline{\vec{q}_t \cdot \Delta \vec{q}_t} + \overline{\vec{q}_s \cdot \nabla \vec{q}_s} \right) \quad (1.24)$$

y

$$\nabla \vec{q} = 0 \quad (1.25)$$

donde se introduce s en el término de la aceleración local, con el fin de tener en cuenta la masa añadida al imponer un obstáculo poroso al flujo. En general, cuando el flujo es exclusivamente dentro de un medio poroso, el valor de s es unitario.

La expresión (1.24) es la ecuación de movimiento para la velocidad de filtración y la presión, con un término adicional que representa el efecto de las fluctuaciones espaciales y temporales.

Dado que \vec{q}_s y \vec{q}_t no pueden ser evaluadas en forma directa, es posible relacionarlas con cantidades deterministas de forma tal que no se modifique la solución, así, se tiene la equivalencia siguiente

$$v\nabla^2 \bar{q} - \left(\overline{\bar{q}_t \cdot \nabla \bar{q}_t} + \overline{\bar{q}_s \cdot \nabla \bar{q}_s} \right) = - \left[\frac{v\bar{q}_d}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} \bar{q}_d |\bar{q}_d| \right] \quad (1.26)$$

donde K_p es la permeabilidad intrínseca, C_f es un coeficiente turbulento adimensional y \bar{q}_d es la velocidad de descarga, definida como la velocidad de filtración distribuida uniformemente en todo el medio incluyendo sólidos y vacíos. La velocidad de descarga se relaciona con la de filtración mediante

$$\bar{q}_d = \varepsilon \bar{q} \quad (1.27)$$

siendo ε la porosidad del medio.

La igualdad (1.26) se basa en el trabajo desarrollado por Ward (1964), quien demostró que en condiciones de flujo estacionario y no convectivo el decaimiento de la presión dentro de un medio poroso es

$$-\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) = \frac{v\bar{q}_d}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} \bar{q}_d |\bar{q}_d| \quad (1.28)$$

Una útil consecuencia de la ecuación (1.28) es que permite la definición de un coeficiente de pérdida similar al empleado en flujos a presión.

Sustituyendo en la ecuación (1.24) las ecuaciones (1.26) y (1.27) se llega a,

$$s \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) - \left[\frac{v\varepsilon \bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \right] \quad (1.29)$$

y

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad (1.30)$$

Las expresiones (1.29) y (1.30) tienen una gran ventaja respecto de las (1.24) y (1.25) puesto que las propiedades ε , C_f y K_p pueden ser evaluadas a partir de formulaciones empíricas o ensayos de laboratorio, adicionalmente se ha reducido el número de variables de cuatro a dos, por lo que es asequible una solución única.

Para hallar la solución al problema, la única hipótesis que se ha de cumplir es que la longitud de onda del flujo oscilatorio sea mayor que la amplitud de la onda y que el tamaño representativo de las partículas del medio. Adicionalmente, es necesario un proceso de linealización, para lo cual se introduce un término de fricción lineal en q , mismo que ha de disipar la misma cantidad de energía que los términos no lineales (lo que se suele llamar condición de Lorentz de trabajo equivalente), esto es,

$$\frac{v\varepsilon \bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \rightarrow f \sigma \bar{q} \quad (1.31)$$

donde se ha introducido la frecuencia angular por consistencia dimensional. Para estimar f , se parte del conocimiento que el término de disipación representa una fuerza de fricción por unidad de masa actuando en un punto del campo de velocidades. Si este término se

multiplica por el flujo de masa por unidad de volumen que viaja en dirección opuesta a la fricción, se tiene la potencia disipada por unidad de volumen. Esta potencia, al integrarse en todo el volumen del campo de velocidades, V , y en el periodo de la onda, resulta en la energía total consumida por la fricción en todo el volumen de flujo durante un periodo de onda. De acuerdo con la hipótesis de Lorentz, esta energía disipada debe ser la misma con cualquier ley de decaimiento (lineal o no) que describa el mismo proceso, por lo que toda la cadena de operaciones, aplicada a los dos términos de fricción e igualando, puede escribirse matemáticamente como sigue

$$\int_V \varepsilon dV \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\varepsilon\bar{q}}{K_p} + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K_p}} \bar{q} |\bar{q}| \right\} \rho \bar{q} dt = \int_V \varepsilon dV \int_t^{t+T} f \sigma \bar{q} \rho \bar{q} dt \quad (1.32)$$

Evidentemente existe una relación única entre las características del medio (ε, K_p y C_f), las del flujo (v y \bar{q}) y el coeficiente de fricción (f), la cual, aceptando que éste es constante en todo el volumen de flujo resulta

$$f = \frac{\varepsilon^2 \int_V dV \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\bar{q}^2}{K_p} + \frac{\varepsilon C_f}{\sqrt{K_p}} |\bar{q}|^3 \right\} dt}{\sigma \int_V dV \int_t^{t+T} \varepsilon \bar{q}^2 dt} \quad (1.33)$$

y en términos de la velocidad de descarga

$$f = \frac{\varepsilon \int_V \int_t^{t+T} \left\{ \frac{v\bar{q}_d^2}{K_p} + \frac{C_f}{\sqrt{K_p}} |\bar{q}_d|^3 \right\} dt dV}{\sigma \int_V \int_t^{t+T} \varepsilon \bar{q}_d^2 dt dV} \quad (1.34)$$

Al sustituir el término de fricción lineal en la ecuación (1.29) se llega a las ecuaciones lineales del movimiento

$$s \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p + \gamma z) - f \sigma \bar{q} \quad (1.35)$$

con

$$\nabla \bar{q} = 0 \quad (1.36)$$

La ecuación (1.35) es lineal tanto en \bar{q} como en p , por lo que si el sistema es excitado son una onda armónica simple, el resultado será igualmente una armónico simple. Si se utiliza como excitación una onda monocromática en la superficie, se puede igualar la frecuencia de oscilación dentro del medio poroso a la frecuencia de dicha excitación, σ , así la presión y velocidad pueden expresarse como

$$\bar{q}(x, y, z, t), p(x, y, z, t) = \{ \bar{q}(x, y, z), p(x, y, z) \} e^{\pm i\sigma t} \quad (1.37)$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\bar{q}, p\} = \pm i\sigma \{\bar{q}, p\} \quad (1.38)$$

En su desarrollo original, Sollit y Cross (1972) utilizaron el signo positivo de la función de dependencia temporal en la ecuación (1.37). En este trabajo se emplea el signo negativo, lo cual tiene la misma validez puesto que dicho signo solo indica la dirección en que inicia el movimiento oscilatorio.

Al sustituir las ecuaciones (1.37) y (1.38) en la (1.35), se obtiene

$$\sigma(-is + f)\bar{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p + \gamma z) \quad (1.39)$$

La ecuación (1.39), al ser operada en producto cruz resulta

$$\sigma(-is + f)\nabla \times \bar{q} = -\frac{1}{\rho}\nabla \times \nabla(p + \gamma z) = 0 \quad (1.40)$$

Por lo tanto $\nabla \times \bar{q} = 0$, es decir, el campo de flujo es irrotacional y puede ser definido por un potencial de velocidades Φ_p tal que

$$\bar{q} = \nabla\Phi_p \quad (1.41)$$

Al sustituir este potencial en la ecuación (1.36), se obtiene la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\Phi_p = 0 \quad (1.42)$$

que constituye la ecuación de gobierno en el campo de flujo.

Sustituyendo también el potencial en la ecuación (1.35) y removiendo el operador gradiente, se obtiene

$$s\frac{\partial\Phi_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(p + \gamma z) + f\sigma\Phi_p = 0 \quad (1.43)$$

Esta es la ecuación lineal de Bernoulli para flujo de filtración en un medio granular.

Las ecuaciones (1.42) y (1.43) pueden escribirse en términos del potencial de velocidades de descarga, bajo el supuesto que el medio es homogéneo respecto de la porosidad, esto es

$$\nabla^2\Phi_d = 0 \quad (1.44)$$

y

$$s\frac{\partial\Phi_d}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho}(p + \gamma z) + f\sigma\Phi_d = 0 \quad (1.45)$$

1.5 Teoría lineal dentro de un medio poroso

1.5.1 Solución para el potencial de filtración

De acuerdo con las hipótesis consideradas para desarrollar las ecuaciones de gobierno (1.42) y (1.43), el flujo en estudio consiste en un tren de ondas monocromático viajando en un medio poroso sobre un fondo horizontal impermeable con profundidad h (Figura 1-1).

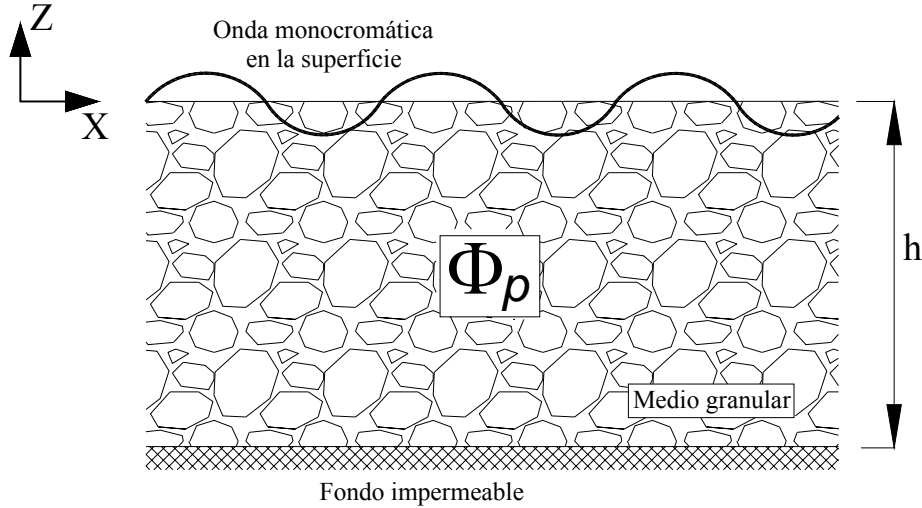


Figura 1-1 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal en el medio poroso

Para encontrar la solución, se aplicarán las condiciones de frontera propias de la teoría lineal (ondas de pequeña amplitud) con las modificaciones correspondientes debidas al medio granular, mismas que se presentan a continuación

1.5.1.a Condición de contorno cinemática

La condición de impermeabilidad en el fondo está dada por

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (1.46)$$

La condición cinemática de superficie libre es la siguiente relación

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (1.47)$$

1.5.1.b Condición de contorno dinámica

La presión del fluido en la superficie libre es la presión atmosférica, por tanto, en la superficie libre se cumple que $p = 0$ y $z = \eta$, lo que sustituido en la ecuación (1.43) resulta

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + f \sigma \Phi_p \right) \quad \text{con } p = 0 \text{ y en } z = \eta \quad (1.48)$$

1.5.1.c Condición de contorno mixta de superficie libre

Al sustituir la ecuación (1.48) en la (1.47) y aplicando la dependencia de un armónico simple al potencial de velocidades, la condición homogénea o mixta de superficie libre queda expresada como

$$\sigma^2 (s + if) \Phi_p + g \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (1.49)$$

Es conveniente recordar que en este trabajo se toma el signo negativo de la función de dependencia temporal, lo cual facilita el desarrollo analítico.

Al igual que en la teoría lineal en agua, es posible aplicar el método de separación de variables por lo que el procedimiento de solución es similar al que se detalla en el Anexo B. En principio, la función del potencial de descarga puede descomponerse en una parte con dependencia espacial y otra con dependencia temporal de la siguiente forma

$$\Phi_p(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z) e^{-i\sigma t}] \quad (1.50)$$

con lo que la ecuación de Laplace es ahora

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (1.51)$$

Las variables en el plano y en la vertical también pueden separarse, quedando

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \quad (1.52)$$

A partir de esta separación y operando en forma similar a lo desarrollado en el Anexo B, se obtiene

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = -\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (1.53)$$

donde k debe ser una constante. La expresión (1.53) puede descomponerse en dos ecuaciones

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \quad (1.54)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + k^2 \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.55)$$

La separación de variables mostrada y la elección del signo negativo en la dependencia temporal dan lugar a cambios en las expresiones de las condiciones de frontera, así, la condición de impermeabilidad en el fondo es ahora

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = e^{-i\sigma t} \frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi e^{-i\sigma t} \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (1.56)$$

y por lo tanto

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (1.57)$$

Por su parte, la condición mixta de contorno en la superficie libre queda

$$(s + if) \frac{\sigma^2}{g} f(z) + \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (1.58)$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria (1.54) se puede escribir (ver Tabla B-1)

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \sen(\mu z) = A \cos(ikz) + B \sen(ikz) = Ce^{kz} + De^{-kz} \quad (1.59)$$

en la que

$$k^2 = -\mu^2 \quad \text{con } -\mu^2 > 0 \quad (1.60)$$

Aceptando esta solución, la condición cinemática de fondo resulta

$$k [Ce^{-kh} - De^{kh}] = 0 \quad \text{por tanto } C = De^{2kh} \quad (1.61)$$

lo cual, sustituido en (1.59) y arreglando los términos convenientemente es

$$f(z) = 2De^{kh} \left[\frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B' \cosh k(h+z) \quad (1.62)$$

Insertando la forma de la función de profundidad dada por (1.62) en la condición mixta de superficie libre, ec. (1.58), se llega a

$$(s + if) \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh kh + B' k \sinh kh = 0 \quad (1.63)$$

Agrupando convenientemente y realizando un cambio de signo ya que, de acuerdo con Sollit y Cross (1972), esta expresión es par para k , se tiene

$$\frac{\sigma^2}{g} (s + if) = k \tanh(kh) \quad (1.64)$$

La ecuación (1.64) es la relación de dispersión para flujo en un medio poroso y la constante de integración, k , se denominará número de onda.

Por otro lado, la solución de la ecuación (1.55), Tabla B-1, tiene la forma

$$\phi = Ae^{-ikx} + Be^{ikx} \quad (1.65)$$

de donde el potencial de velocidades es

$$\Phi_p(x, z, t) = A \cosh(k(h+z)) e^{i(kx - \sigma t)} \quad (1.66)$$

La condición dinámica de superficie libre es una relación entre el potencial de velocidades y la elevación de la superficie libre, de modo que al sustituir la expresión (1.66) en la (1.48) se tiene

$$\eta = \Re \left[-\frac{\sigma}{g} (-is + f) A \cosh(kh) e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (1.67)$$

La elevación de la superficie libre debe coincidir con una onda progresiva, misma que puede ser representada por una expresión del tipo

$$\eta = \Re \left[a e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (1.68)$$

donde $a = H/2$ es la amplitud del movimiento y H la altura de ola.

Por simple deducción, a partir de las ecuaciones (1.67) y (1.68), se sabe que

$$A = \frac{g}{\sigma(is - f)} \frac{a}{\cosh(kh)} \quad (1.69)$$

Sustituyendo este valor en el potencial, finalmente se obtiene

$$\Phi_p(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma(s + if)} a \frac{\cosh k(h + z)}{\cosh kh} e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (1.70)$$

1.5.2 Solución para el potencial de descarga

La deducción del potencial de descarga se realiza en forma idéntica a lo desarrollado para el potencial de filtración, por lo tanto, a continuación solo se enlistan las expresiones resultantes.

La relación de dispersión es

$$\frac{\sigma^2 (s + if)}{g \varepsilon} = k_d \tanh k_d h \quad (1.71)$$

Por su parte, la elevación de la superficie libre

$$\eta_d = \Re \left[-\frac{\sigma (-is + f)}{g \varepsilon} A \cosh(k_d h) e^{i(k_d x - \sigma t)} \right] \quad (1.72)$$

en la que

$$A = \frac{g \varepsilon}{\sigma (is - f)} \frac{a}{\cosh(k_d h)} \quad (1.73)$$

y el potencial de velocidades de descarga queda expresado como

$$\Phi_d(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[-\frac{ig \varepsilon}{\sigma (s + if)} a \frac{\cosh k_d (h + z)}{\cosh k_d h} e^{i(k_d x - \sigma t)} \right] \quad (1.74)$$

1.6 Teoría lineal con interacción entre agua y medio poroso

Hasta ahora se han presentado las soluciones para describir el flujo oscilatorio en agua (1.3) y dentro de un medio poroso (1.5). En esta sección se tratará el caso en el que el medio granular ocupa solo parte del volumen, es decir, constituye una capa finita con fondo impermeable en su parte inferior y tiene interacción con el agua en su parte superior. Se denotará h_p a la profundidad de agua y h_a al grosor de la capa de medio poroso, de esta forma el calado total h será

$$h = h_p + h_a \quad (1.75)$$

En la Figura 1-2 se muestra un esquema del problema planteado, cuya solución se hallará aceptando las hipótesis de la teoría de ondas de pequeña amplitud.

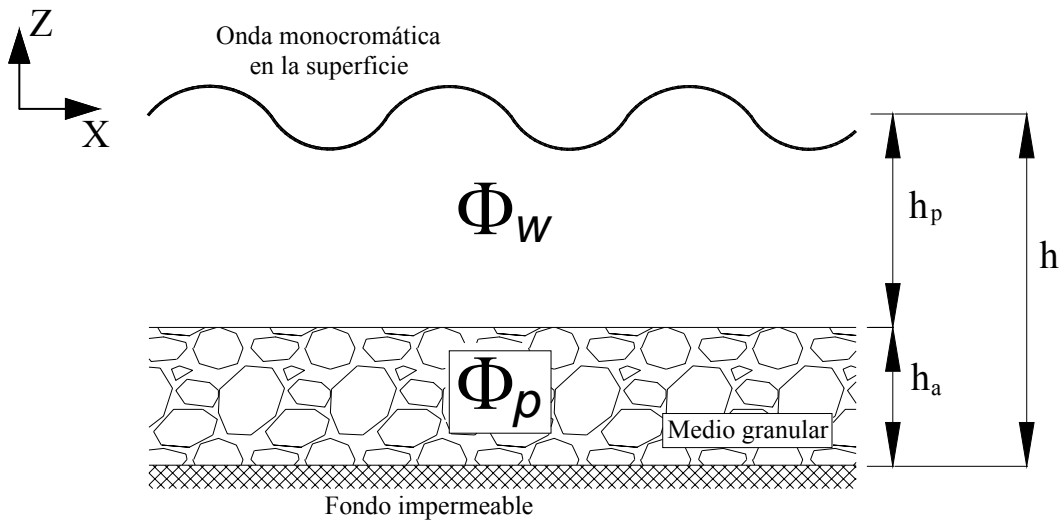


Figura 1-2 Esquema y sistema de referencia para la teoría lineal sobre un medio poroso

Las ecuaciones de gobierno (Laplace) para el flujo en el agua y dentro del medio poroso son

$$\nabla^2 \Phi_w = 0 \quad \text{para } -h_p < z < 0 \quad (1.76)$$

$$\nabla^2 \Phi_p = 0 \quad \text{para } -h < z < -h_p \quad (1.77)$$

en la que los subíndices w y p denotan las características en el agua fuera y dentro de la capa finita de medio poroso, respectivamente.

1.6.1 Condiciones de contorno

Bajo la suposición de pequeña amplitud, las condiciones contorno cinemática y dinámica de superficie libre pueden ser expresadas como

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (1.78)$$

y

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } z = 0 \quad (1.79)$$

respectivamente.

Aceptando que el fondo impermeable es plano se cumple que $\nabla_h h = 0$ y si el flujo de masa vertical evaluado en $z = -h$ es igual a cero, esto es,

$$\rho w_p = \rho \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi_p \right) = \rho \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (1.80)$$

al operar se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (1.81)$$

Ahora, dicho flujo de masa vertical debe cumplir la continuidad en la interfase de medios, lo que se representa como

$$\rho w_w = \rho w_p \quad \text{en } z = -h_p \quad (1.82)$$

de donde, bajo el supuesto que el espesor del medio poroso también es constante ($\nabla_h h_p = 0$), se tiene

$$w_w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.83)$$

$$w_p = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_p \right) = \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \quad (1.84)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.83) y (1.84) en la (1.82) y operando, se obtiene la siguiente condición de contorno

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} \quad \text{en } z = -h_p \quad (1.85)$$

Para resolver el problema hace falta una condición de contorno más, la cual se obtendrá a partir de la continuidad de presiones en la interfase agua - medio poroso, para ello se emplean las ecuaciones de Bernoulli en ambos medios, a saber,

$$p_w = -\rho \left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + gz \right) \quad \text{en } -h_p < z < 0 \quad (1.86)$$

$$p_p = -\rho \left(s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + gz + f \sigma \Phi_p \right) \quad \text{en } -h < z < -h_p \quad (1.87)$$

que por continuidad se igualan en $z = -h_p$, de donde

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} = s \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + f \sigma \Phi_p \quad \text{en } z = -h_p \quad (1.88)$$

El tipo flujo para el que interesa resolver las ecuaciones y condiciones de contorno planteadas corresponde al caso de una onda progresiva, de modo que al contar con homogeneidad en las condiciones de contorno, es posible aplicar la técnica de separación de variables, para lo cual los potenciales se descomponen como sigue

$$\Phi_w(x, z, t) = \phi(x)M(z)\Gamma(t) \quad (1.89)$$

$$\Phi_p(x, z, t) = \phi_s(x)P(z)\Gamma(t) \quad (1.90)$$

Al sustituir estos potenciales en las ecuaciones de gobierno se obtiene

$$\frac{1}{\phi_w} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = 0 \quad (1.91)$$

y

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (1.92)$$

De manera muy similar a los casos de flujo en un solo medio, se pueden establecer las igualdades

$$\frac{1}{\phi_w} \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} = -\frac{1}{M} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -K^2 \quad (1.93)$$

y

$$\frac{1}{\phi_p} \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} = -\frac{1}{P} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -K^2 \quad (1.94)$$

Intencionalmente se ha empleado la misma constante en ambas ecuaciones ya que de este modo, dicha constante resultará equivalente al número de onda local dentro y fuera del poroso. El problema se traduce ahora a la solución de cuatro ecuaciones diferenciales, a saber,

$$\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial x^2} + K^2 \phi_w = 0 \quad \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} - K^2 M = 0 \quad (1.95)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + K^2 \phi_p = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - K^2 P = 0 \quad (1.96)$$

De acuerdo con la Tabla B-1, la solución de las ecuaciones (1.95) y (1.96) tienen la forma

$$\phi_w = A_1 e^{-iKx} + A_2 e^{+iKx} \quad M = A_3 e^{Kz} + A_4 e^{-Kz} \quad (1.97)$$

$$\phi_p = A_5 e^{-iKx} + A_6 e^{+iKx} \quad P = A_7 e^{Kz} + A_8 e^{-Kz} \quad (1.98)$$

donde los coeficientes A_i dependen de las condiciones de contorno.

Considerando que las ondas viajan en el sentido positivo del eje x y adoptando la parte negativa de la función de dependencia temporal, los potenciales de velocidades en (1.89) y (1.90) son ahora

$$\Phi_w = A_1 (A_3 e^{Kz} + A_4 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.99)$$

$$\Phi_p = A_5 (A_7 e^{Kz} + A_8 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.100)$$

Sustituyendo la ecuación (1.100) en la condición de contorno de fondo impermeable, ecuación (1.81), se obtiene

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} = A_5 (KA_7 e^{Kz} - KA_8 e^{-Kz}) e^{i(-\sigma t + Kx)} = 0 \quad (1.101)$$

operando y evaluando en $z = -h$ se llega a

$$A_7 = A_8 e^{2Kh} \quad (1.102)$$

así, la ecuación (1.100) se convierte en

$$\Phi_p = A_5 A_8 e^{Kh} (e^{K(z+h)} + e^{-K(z+h)}) e^{i(-\sigma t + Kx)} = A_9 \cosh K(h+z) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.103)$$

donde se ha definido el factor

$$A_9 = 2A_5 A_8 e^{Kh} \quad (1.104)$$

Haciendo uso de este último potencial en la condición de continuidad de presión, ec. (1.88), se obtiene

$$\Phi_w = (s + if) \Phi_p \quad z = -h_p \quad (1.105)$$

Sustituyendo los potenciales definidos por las ecuaciones (1.99) y (1.103) en (1.105) y en la condición de contorno (1.85), se tiene

$$A_1 (A_3 e^{-Kh_p} + A_4 e^{Kh_p}) e^{i(-\sigma t - Kx)} = (s + if) A_9 \cosh(Kh_a) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.106)$$

$$A_1 (A_3 e^{-Kh_p} - A_4 e^{Kh_p}) = \varepsilon A_9 \sinh(Kh_a) \quad (1.107)$$

Al despejar A_3 de (1.106), resulta

$$A_3 = \left((s + if) \frac{A_9}{A_1} \cosh(Kh_a) - A_4 e^{Kh_p} \right) e^{Kh_p} \quad (1.108)$$

y sustituyéndolo en (1.107)

$$(s + if) \frac{A_9}{A_1} \cosh(Kh_a) - 2A_4 e^{Kh_p} = \varepsilon \frac{A_9}{A_1} \sinh(Kh_a) \quad (1.109)$$

A_4 , entonces, queda definido por

$$A_4 = \frac{A_9}{A_1} \left((s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a) \right) \frac{e^{-Kh_p}}{2} \quad (1.110)$$

Si se agrupan términos de forma que $\gamma = (s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a)$, las ecuaciones (1.110) y (1.108) quedan, respectivamente,

$$A_4 = \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} \gamma e^{-Kh_p} \quad (1.111)$$

y

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} (2(s + if) \cosh(Kh_a) - \gamma) e^{Kh_p} \\ &= \frac{1}{2} \frac{A_9}{A_1} ((s + if) \cosh(Kh_a) + \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{Kh_p} \end{aligned} \quad (1.112)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (1.110) y (1.112) en la ecuación (1.99), resulta

$$\begin{aligned} \Phi_w &= \frac{1}{2} A_9 \left\{ ((s + if) \cosh(Kh_a) + \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{K(z+h_p)} \right. \\ &\quad \left. + ((s + if) \cosh(Kh_a) - \varepsilon \sinh(Kh_a)) e^{-K(z+h_p)} \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \end{aligned} \quad (1.113)$$

La aplicación de las relaciones trigonométricas $e^{K(z+h_p)} = \sinh K(h_p + z) + \cosh K(h_p + z)$ y $e^{-K(z+h_p)} = -\sinh K(h_p + z) + \cosh K(h_p + z)$ en la ecuación (1.113), la convierten en

$$\begin{aligned} \Phi_w &= A_9 \left\{ (s + if) \cosh(Kh_a) \cosh K(h_p + z) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sinh(Kh_a) \sinh K(h_p + z) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \end{aligned} \quad (1.114)$$

Utilizando ahora $\cosh K(h + z - h_a) = \cosh K(h + z) \cosh Kh_a - \sinh K(h + z) \sinh Kh_a$ y $\sinh K(h + z - h_a) = \sinh K(h + z) \cosh Kh_a - \cosh K(h + z) \sinh Kh_a$ y recordando que $h_p = h - h_a$ la ecuación (1.114) se puede escribir

$$\begin{aligned} \Phi_w &= A_9 (s + if) \cosh K(h + z) \left\{ \left[\cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \sinh^2(Kh_a) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sinh K(h + z) \left[\cosh(Kh_a) \sinh(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \cosh(Kh_a) \sinh(Kh_a) \right] \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \end{aligned} \quad (1.115)$$

reagrupando convenientemente se tiene

$$\Phi_w = A_9 (s + if) \cosh^2 (Kh_a) \left\{ \cosh K (h + z) \left[1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2 (Kh_a) \right] - \right. \\ \left. - \sinh K (h + z) \left[\tanh (Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh (Kh_a) \right] \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.116)$$

lo que permite definir una nueva constante

$$A_{10} = A_9 (s + if) \cosh^2 (Kh_a) \left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2 (Kh_a) \right\} \quad (1.117)$$

y así, la ecuación (1.116) se simplifica de la siguiente forma

$$\Phi_w = A_{10} \left\{ \cosh k (h + z) - F \sinh K (h + z) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.118)$$

donde

$$F = \frac{\tanh (Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh (Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2 (Kh_a)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \right) \frac{\tanh (Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s + if} \tanh^2 (Kh_a)} \quad (1.119)$$

Aplicando la definición del potencial en (1.118) a la condición dinámica de superficie libre, ec. (1.78), el desplazamiento de la superficie libre es

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} = \frac{i\sigma}{g} A_{10} \left\{ \cosh (Kh) - F \sinh (Kh) \right\} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.120)$$

Como se ha considerado una onda progresiva de amplitud $H/2$, de la forma

$$\eta = \frac{H}{2} e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.121)$$

se pueden comparar las ecuaciones (1.120) y (1.121) para deducir la constante A_{10} , que resulta

$$A_{10} = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left(\frac{1}{\cosh (Kh) - F \sinh (Kh)} \right) \quad (1.122)$$

de tal suerte que al sustituir la ecuación (1.122) en la ecuación (1.118), se obtiene el potencial de velocidades en el agua

$$\Phi_w = -\frac{igH}{2\sigma} \left(\frac{\cosh K (h + z) - F \sinh K (h + z)}{\cosh (Kh) - F \sinh (Kh)} \right) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.123)$$

Para encontrar la función que determina el potencial de velocidades en el medio poroso es necesario determinar el valor del resto de las constantes. A_9 se encuentra al sustituir y operar la ecuación (1.122) en la ecuación (1.117), esto es,

$$A_9 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left(\frac{1}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \frac{1}{\left(\cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s+if} \sinh^2(Kh_a) \right) (s+if)} \quad (1.124)$$

Si se considera la siguiente relación

$$1 - F \tanh(Kh_a) = \frac{1 - \tanh^2(Kh_a)}{1 - \frac{\varepsilon}{s+if} \tanh^2(Kh_a)} = \frac{1}{\cosh^2(Kh_a) - \frac{\varepsilon}{s+if} \sinh^2(Kh_a)} \quad (1.125)$$

la ecuación (1.124) se puede simplificar a

$$A_9 = -\frac{ig}{\sigma} \frac{H}{2} \left(\frac{1 - F \tanh(Kh_a)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \left(\frac{1}{s+if} \right) \quad (1.126)$$

y con ello, el potencial dentro de la capa porosa, ec. (1.103), es

$$\Phi_p = -\frac{igH}{2\sigma} \left(\frac{1 - F \tanh(Kh_a)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) \left(\frac{\cosh K(h+z)}{s+if} \right) e^{i(-\sigma t + Kx)} \quad (1.127)$$

Para establecer la expresión que relaciona la frecuencia angular y el numero de onda, las ecuaciones (1.121) y (1.123) se sustituyen en la ecuación (1.79), de donde

$$K \left(\frac{igH}{2\sigma} \left[\frac{\sinh(Kh) - F \cosh(Kh)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right] \right) e^{i(-\sigma t - Kx)} + \frac{iH\sigma}{2} e^{i(-\sigma t + Kx)} = 0 \quad (1.128)$$

al simplificar la ecuación (1.128), dividir por $\cosh(Kh)$ se obtiene una relación de dispersión que es válida para toda la columna ($0 \leq z \leq -h_p$)

$$\frac{\sigma^2}{g} = K \frac{\tanh Kh - F}{1 - F \tanh Kh} \quad (1.129)$$

Es importante resaltar que de acuerdo con Sollit y Cross (1972) la relación de dispersión es para K .

Con lo hasta ahora desarrollado y dada la forma en que se han trabajado y presentado las expresiones para los potenciales en cada caso (tomando el signo negativo de la función de dependencia temporal), es evidente que el tercero de ellos constituye el caso general del resto, es decir, la propagación de ondas en agua y dentro de un medio poroso, son casos particulares de la propagación sobre una capa finita de medio granular. Así, el potencial de velocidades en agua con una capa de medio poroso al fondo está definido por la ec. (1.123); Si el medio granular no existe, significa que $h_a = 0$, $\varepsilon = 1$ y $s = 1$ con lo que $F = 0$ y el potencial queda idéntico al expuesto en la ecuación (1.15). Por otra parte, si la capa de medio poroso se extiende hasta alcanzar o sobrepasar el nivel medio del agua, se tiene que

$h_a = h$, con ello y trabajo algebraico, la expresión (1.127) se convierte en la (1.74). Lo mismo sucede con las expresiones de la elevación de la superficie libre y del número de onda, tal y como ha sido demostrado por Silva et al (2003). En resumen y a la vista de las soluciones obtenidas, los casos de propagación en un solo medio constituyen los extremos del problema de propagación de ondas cuando dos medios de distinta porosidad interactúan, característica de gran importancia para el desarrollo del siguiente capítulo.

CAPÍTULO II
PROPAGACIÓN DE ONDAS EN FONDO VARIABLE

2 PROPAGACIÓN DE ONDAS EN FONDO VARIABLE

Las matemáticas desarrolladas en el capítulo anterior consideran que la profundidad del lecho sobre el que se propaga una onda progresiva y el espesor de la capa de medio granular son constantes. En este capítulo se eliminan estas restricciones y se desarrolla la solución conocida como ecuación de la pendiente suave, la cual fue presentada inicialmente por Berkhoff (1972) solo para inclinaciones suaves del fondo (impermeable) y modificada por Chamberlain y Porter (1995) para ser aplicada a cualquier pendiente. Por su parte, autores como Rojanakamtorn et al (1989,1990), Losada et al (1996) y Silva (2002) han presentado mejoras a la solución al considerar un obstáculo permeable en el fondo y adoptando la teoría de Sollit y Cross (1972). En este trabajo se obtendrá la solución a la ecuación de propagación más general; es decir, el caso con agua y una capa finita de medio poroso sobre fondo impermeable.

El desarrollo que se presenta a continuación, supone flujo incompresible, homogéneo e irrotacional en fondo impermeable con profundidad total $h(x, y)$ sobre el cual descansa una capa de medio poroso con límite superior en la profundidad $h_p(x, y)$, siendo x e y las coordenadas cartesianas horizontales. La coordenada vertical, z , es positiva hacia arriba y el nivel $z = 0$ se encuentra en el nivel medio del mar (ver Figura 2-1).

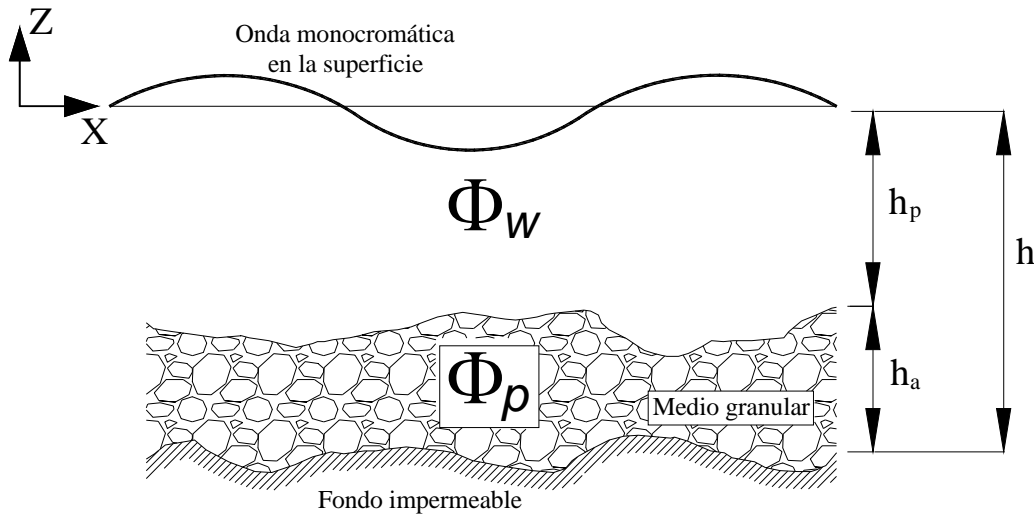


Figura 2-1 Croquis del problema de propagación en fondo variable

La ecuación de Laplace es la ley que representa el movimiento general del fluido, la cual, a la vista de las suposiciones arriba mencionadas puede escribirse como función del potencial de velocidades de la forma

$$\nabla_h^2 \Phi_w + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} = 0 \quad -h_p \leq z \leq 0 \quad (2.1)$$

para la región fuera del medio poroso y como

$$\nabla_h^2 \Phi_p + \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial z^2} = 0 \quad -h \leq z \leq -h_p \quad (2.2)$$

en las que Φ es potencial de velocidades, $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ y los subíndices w y p denotan las características fuera y dentro del medio granular, respectivamente. Es importante señalar que, en lo sucesivo, dentro del medio permeable se emplearán las definiciones correspondientes al potencial de velocidades de descarga.

Las condiciones de frontera que se necesitan para hallar la solución son: 1) la dinámica y cinemática de superficie libre en el agua, esto es,

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \quad z = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (2.4)$$

2) la velocidad fuera del medio granular justo en la interfase entre ambos medios, ec. (1.83), para espesor de la capa porosa variable, es decir,

$$w_w = \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w \quad z = -h_p \quad (2.5)$$

3) la presión en el agua,

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + gz \right) \quad -h_p \leq z \leq 0 \quad (2.6)$$

4) la presión dentro del medio permeable,

$$p_p = -\rho \left(\frac{s}{\varepsilon} \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + gz + \frac{f}{\varepsilon} \sigma \Phi_p \right) \quad -h \leq z \leq -h_p \quad (2.7)$$

en la que ε es la permeabilidad del medio, f el coeficiente de fricción linealizado y s la masa añadida

5) la velocidad de descarga en el medio poroso justo en la interfase entre ambos medios

$$w_p = \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_p \quad z = -h_p \quad (2.8)$$

6) la condición de impermeabilidad en el fondo por debajo de la capa permeable

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi_p = 0 \quad z = -h \quad (2.9)$$

La principal ventaja de utilizar las condiciones de contorno de la teoría lineal, es que son homogéneas y así, el problema se puede resolver por el método de separación de variables.

Para lo cual, los potenciales de velocidades fuera y dentro del medio granular se pueden descomponer respectivamente, como

$$\Phi_w(x, y, z, t) = \Re\{\varphi(x, y, t)M(z)\} \quad (2.10)$$

$$\Phi_p(x, y, z, t) = \Re\{\varphi(x, y, t)P(z)\} \quad (2.11)$$

Las funciones de dependencia de la profundidad, $M(z)$ y $P(z)$ corresponden a las obtenidas bajo los supuestos de fondo y espesor de la capa porosa constantes, (ver ecuaciones (1.123) y (1.127)) a saber,

$$M(z) = \frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (2.12)$$

$$P(z) = \delta \frac{(1 - F \tanh Kh_a) \cosh K(h+z)}{\cosh Kh - F \sinh Kh} \quad (2.13)$$

donde $F = \frac{(1-\delta) \tanh Kh_a}{1-\delta \tanh^2 Kh_a}$, $\delta = \frac{\varepsilon}{s+if}$ y $h_a = h - h_p$. Por su parte, K , el número de onda común para ambos medios, se calcula de la expresión

$$\frac{\sigma^2}{g} = K \frac{\tanh Kh - F}{1 - F \tanh Kh} \quad (2.14)$$

De acuerdo con Smith y Sprinks (1975), Kirby (1986), Mase y Takeba (1994) y Silva et al (2002), se puede partir de aplicar la segunda identidad de Green a $M(z)$ y Φ_w , esto es

$$\int_{-h_p}^0 M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz - \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz - \left(M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{-h_p}^0 = 0 \quad (2.15)$$

sustituyendo en el primer término de la ecuación (2.15), las ecuaciones (2.1) y (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} dz &= - \int_{-h_p}^0 M \nabla_h^2 \Phi_w dz = \int_{-h_p}^0 M \nabla_h^2 (\varphi M) dz \\ &= - \int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M + 2M \nabla_h \varphi \nabla_h M + M^2 \nabla_h^2 \varphi dz = \\ &= - \int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M + \nabla_h M^2 \nabla_h \varphi + M^2 \nabla_h^2 \varphi dz = \\ &= - \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por otra parte, aplicando la definición de la función de profundidad M , ec. (2.12), en el segundo término de la ecuación (2.15) queda

$$\int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} dz = \int_{-h_p}^0 \Phi_w \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\cosh K(h+z) - F \sinh K(h+z)}{\cosh(Kh) - F \sinh(Kh)} \right) dz = \int_{-h_p}^0 \Phi_w K^2 M dz \quad (2.17)$$

Ahora, el tercer término de la ecuación (2.15) puede descomponerse en dos partes, si $z = 0$ se tiene que

$$\left(M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \left(M \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} \right) - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \left(M \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} \right) - \frac{\sigma^2}{g} \Phi_w M \right) \Big|_{z=0} \quad (2.18)$$

mientras que si $z = -h_p$ resulta

$$\left(M \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} - \Phi_w \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = \left(M w_w - M \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} \quad (2.19)$$

Entonces, la ecuación (2.15) queda de la siguiente manera

$$-\int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz - \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz - \int_{-h_p}^0 \Phi_w K^2 M dz + \left(\frac{1}{g} M \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \Phi_w M \frac{\sigma^2}{g} \right) \Big|_{z=0} + \left(M w_w - M \nabla_h h_p \cdot \nabla_h \Phi_w - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0 \quad (2.20)$$

Si se aplica ahora la regla de Leibnitz al primer término de la ecuación (2.20) se tiene

$$\int_{-h_p}^0 \nabla_h (M^2 \nabla_h \varphi) dz = \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi)_{z=0} \cdot \nabla_h 0 + (M^2 \nabla_h \varphi)_{z=-h_p} \cdot (\nabla_h (-h_p)) = \nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz - (M^2 \nabla_h \varphi \cdot \nabla_h h_p)_{z=-h_p} \quad (2.21)$$

lo cual, sustituido en la ec. (2.20) es

$$\nabla_h \cdot \int_{-h_p}^0 (M^2 \nabla_h \varphi) dz + \int_{-h_p}^0 (M \varphi \nabla_h^2 M) dz + \int_{-h_p}^0 K^2 M^2 \Phi_w dz - \frac{1}{g} \left(M^2 \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + \sigma^2 M^2 \varphi \right) \Big|_{z=0} - \left(M w_w - M \varphi \nabla_h h \cdot \nabla_h M - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0 \quad (2.22)$$

Para continuar con el desarrollo a partir de ésta última expresión, es necesario evaluar los gradientes de $M(z)$, los cuales se presentan a continuación

$$\begin{aligned}\nabla_h M &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h h + \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h_p\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}\nabla_h^2 M &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} \left(\frac{\partial h_p}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h_p}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} \frac{\partial h_p}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial h_p} \frac{\partial^2 h_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} \left(\frac{\partial h_p}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h_p}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h + \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} (\nabla_h h)^2 + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p^2} (\nabla_{h_p} h)^2 + \left(\frac{\partial^2 M}{\partial h \partial h_p} + \frac{\partial^2 M}{\partial h_p \partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p\end{aligned}\quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}M \nabla_h^2 M &= M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h + M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p + \frac{\partial}{\partial h} \left(M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left(M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) (\nabla_h h_p)^2 - \left(\frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h)^2 + \frac{\partial}{\partial h} \left(M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p + \\ &+ \frac{\partial}{\partial h_p} \left(M \frac{\partial M}{\partial h} \right) \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p - 2 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h \cdot \nabla_h h_p\end{aligned}\quad (2.25)$$

La aplicación de la ecuación (2.25) en el tercer término de la expresión (2.22) lleva a

$$\begin{aligned}\int_{-h_p}^0 \varphi M \nabla_h^2 M dz &= \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\ &+ \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h} \left(M \frac{\partial M}{\partial h} \right) (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h_p} \left(M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) (\nabla_h h_p)^2 dz + \\ &+ \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h} \left(M \frac{\partial M}{\partial h_p} \right) \nabla_h h \nabla_h h_p dz + \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial}{\partial h_p} \left(M \frac{\partial M}{\partial h} \right) \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \\ &- \varphi \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\ &- 2 \varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h \nabla_h h_p dz\end{aligned}\quad (2.26)$$

Al aplicar la regla de Leibnitz al tercer, cuarto, quinto y sexto términos del lado derecho de la expresión anterior y sustituirlo en la (2.22) queda

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \int_{-h_p}^0 M^2 \nabla_h \varphi dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\
& + \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} (\nabla_h h_p)^2 dz + \\
& + \varphi \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz \right) \nabla_h h_p \nabla_h h - \\
& - \varphi \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\
& - 2\varphi \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \int_{-h_p}^0 K^2 M^2 \varphi dz - \\
& - \frac{1}{g} \left(M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + M^2 \varphi \sigma^2 \right) \Big|_{z=0} - \left(w_w M - M \varphi \frac{\partial M}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0
\end{aligned} \tag{2.27}$$

De manera similar a lo anterior, se aplica la segunda identidad de Green a $P(z)$ y Φ_p , así

$$\int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial^2 \Phi_p}{\partial z^2} dz - \int_{-h}^{-h_p} \Phi_p \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} dz - \left(P \frac{\partial \Phi_p}{\partial z} - \Phi_p \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h}^{z=-h_p} = 0 \tag{2.28}$$

y siguiendo el mismo procedimiento del caso anterior se llega a la expresión

$$\begin{aligned}
& \nabla_h \int_{-h}^{-h_p} P^2 \nabla_h \varphi dz + \varphi \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} \nabla_h^2 h dz + \varphi \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} \nabla_h^2 h_p dz + \\
& + \varphi \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} (\nabla_h h)^2 dz + \varphi \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} (\nabla_h h_p)^2 dz + \\
& + \varphi \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} dz + \frac{\partial}{\partial h_p} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} dz \right) \nabla_h h_p \nabla_h h - \\
& - \varphi \int_{-h}^{-h_p} \left(\frac{\partial P}{\partial h} \right)^2 (\nabla_h h)^2 dz - \varphi \int_{-h}^{-h_p} \left(\frac{\partial P}{\partial h_p} \right)^2 (\nabla_h h_p)^2 dz - \\
& - 2\varphi \int_{-h}^{-h_p} \frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial h_p} \nabla_h h_p \nabla_h h dz - \int_{-h}^{-h_p} K^2 P^2 \varphi dz + \\
& + \left(w_p P - P \varphi \frac{\partial P}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h_p} = 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Para encontrar una sola expresión que describa el flujo en $-h \leq z \leq 0$, se debe cumplir con la continuidad de presiones ($p_w = p_p$) y de flujo de masa ($w_w = w_p$) en la interfase entre ambos flujos ($z = -h_p$). Esta condición permite la combinación de las ecuaciones (2.27) y

(2.29) obteniéndose así la versión extendida de la ecuación de la pendiente suave dependiente del tiempo, esto es,

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h, h_p) - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \phi \sigma^2 \right) = 0 \quad (2.30)$$

en la que

$$\begin{aligned} r(h, h_p) = & I_{21} \nabla_h^2 h + I_{22} \nabla_h^2 h_p + (\nabla_h h)^2 \left(\frac{\partial I_{21}}{\partial h} - I_{31} \right) + (\nabla_h h_p)^2 \left(\frac{\partial I_{22}}{\partial h_p} - I_{32} \right) + \\ & + \nabla_h h_p \nabla_h h \left(\frac{\partial I_{22}}{\partial h} + \frac{\partial I_{21}}{\partial h_p} - 2I_{33} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

además

$$I_1 = \int_{-h_p}^0 M^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P^2 dz \quad (2.32)$$

$$I_{21} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h} dz \quad (2.33)$$

$$I_{22} = \int_{-h_p}^0 M \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} P \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \quad (2.34)$$

$$I_{31} = \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left(\frac{\partial P}{\partial h} \right)^2 dz \quad (2.35)$$

$$I_{32} = \int_{-h_p}^0 \left(\frac{\partial M}{\partial h_p} \right)^2 dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \left(\frac{\partial P}{\partial h_p} \right)^2 dz \quad (2.36)$$

$$I_{33} = \int_{-h_p}^0 \frac{\partial M}{\partial h} \frac{\partial M}{\partial h_p} dz + \frac{1}{\delta} \int_{-h}^{-h_p} \frac{\partial P}{\partial h} \frac{\partial P}{\partial h_p} dz \quad (2.37)$$

La solución de las integrales (2.32) a (2.37) se encuentra en el Anexo C.

Para obtener la extensión de la ecuación de la pendiente suave independiente del tiempo o armónica, se utiliza la siguiente separación

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i\sigma t} \quad (2.38)$$

que sustituida en la expresión (2.30) resulta en la ecuación modificada de la pendiente suave (MMSE por sus siglas en inglés)

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h, h_p) = 0 \quad (2.39)$$

Las corrientes por oleaje más importantes se generan en la zona de rotura, por lo que es esencial que el modelo de oleaje tenga la capacidad de disipar la energía y representar lo mejor posible el decaimiento en la superficie libre provocados por dicho fenómeno. Para lograrlo, se ha modificado la ecuación (2.39) añadiendo artificialmente un término disipativo similar al presentado por Dally et al (1985), así la MMSE queda

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + \left[(K^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h, h_p) \right] \phi = 0 \quad (2.40)$$

donde

$$f_D = \frac{\Re(K) C_k}{\sigma h^*} \left[1 - \left(\frac{C_G h^*}{H_B} \right)^2 \right]$$

$\Re(\)$ indica la parte real del argumento, C_k y C_G son coeficientes experimentales, en este trabajo, con valores de 0.15 y 0.4, respectivamente. $h^* = h_p + \varepsilon h_a$ es la profundidad efectiva.

La ecuación hasta aquí obtenida para representar la propagación de una onda progresiva sobre fondo impermeable variable y con una capa de medio poroso de espesor finito pero variable sobre él, ec. (2.40), constituye el caso general de las ecuaciones derivadas por otros autores. A continuación se enlistan algunas de ellas indicando las simplificaciones que se consideraron en cada una.

- Si se elimina el medio granular, $h_a = 0$ o $\varepsilon = 0$, y se desprecia el efecto del término $r(h, h_p)$, es decir $I_{21} = I_{22} = I_{31} = I_{32} = I_{33} = 0$, se obtiene la ecuación de la pendiente suave como fue presentada originalmente por Berkhoff (1972).
- De nuevo sin medio permeable ($h_a = 0$, $\varepsilon = 0$) pero involucrando los términos de orden $O(|\nabla_h h|^2, \nabla_h^2 h)$, resulta en la expresión modificada de la pendiente suave publicada por Chamberlain y Porter (1995).
- Si únicamente se ignora el término $r(h, h_p)$, se llega a la expresión empleada por Rojanakamthorn (1989) y Losada et al (1996).
- Kirby y Misra (1998) derivaron la llamada ecuación ligeramente modificada de la pendiente suave, la cual se obtiene al prescindir de los términos I_{31} , I_{32} e I_{33} .

A la vista de su robustez, las ecuaciones aquí presentadas constituyen un medio numérico relativamente simple para comprender el comportamiento físico del fenómeno de propagación. Y son aplicables para variaciones rápidas del fondo y del espesor del medio granular, a la vez que resuelven correctamente pendientes pronunciadas en (1:3 -1:5) lo que les otorga la posibilidad de ser empleadas en la práctica de la ingeniería.

CAPÍTULO III.
MODELO DE PROPAGACIÓN DE ONDAS

3 MODELO DE PROPAGACIÓN DE ONDAS

En este capítulo se tratan los tópicos que permiten codificar las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior, esto es, la definición de las condiciones de frontera, la discretización de las ecuaciones, el sistema de mallas de tipo jerárquico y el método de solución del sistema de ecuaciones. Por otro lado, en la parte final del capítulo se presentan los casos de validación y aplicación del modelo.

3.1 Condiciones de frontera

Tradicionalmente se han utilizado relaciones muy simples para resolver la transmisión del oleaje a través de los contornos del dominio (p.e. Rojanakanthorn et al 1989), sin embargo, Kirby (1989), Silva et al. (2004) y Silva et al. (2005) demostraron que una incorrecta aproximación en las fronteras, cuando el oleaje incide de forma oblicua, genera importantes oscilaciones numéricas (reflexión) que se propagan rápidamente hacia dentro del dominio en especial si se utiliza la forma elíptica de la ecuación de pendiente suave. Esta distorsión en las amplitudes de onda, se traduce en graves errores cuando los resultados de la propagación se utilizan como datos de entrada para otros modelos como es en este trabajo con la estimación de las corrientes costeras. De acuerdo con el mismo Kirby (1989) si se aproxima la solución en las fronteras con la ecuación de pendiente suave en su forma parabólica, es posible minimizar las oscilaciones numéricas, sin embargo, la precisión de los resultados al aplicar dicha técnica, dependerá del orden de aproximación con que se construya la aproximación parabólica. A continuación se presenta una forma de obtener diferentes órdenes de aproximación.

Sin perder precisión ni generalidad, la ecuación (2.40) se puede escribir en forma de Helmholtz, es decir

$$\nabla_h^2 \psi + K_c^2 \psi = 0 \quad (3.1)$$

donde $\psi = \sqrt{I_1} \phi$ es el potencial de velocidades normalizado y en la que se ha empleado la

$$\text{transformación } K_c^2 = (K^2 - i\sigma f_D) + \frac{r(h, h_p)}{I_1} - \frac{\nabla_h^2 I_1}{\sqrt{I_1}}.$$

Con el fin de hallar una forma estable de la ecuación de gobierno para las fronteras del dominio, se propone escribir la ecuación (3.1) en forma parabólica, lo cual, de acuerdo con Dingemans (1997)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -K_c^2 \left(1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \quad (3.2)$$

así, la propagación del oleaje en la dirección positiva del eje x puede ser hallada con el uso de un operador pseudo-diferencial, quedando

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \left(1 + \frac{1}{K_c^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{1/2} \psi \quad (3.3)$$

cuya solución, para ondas incidiendo con cualquier dirección, es

$$\psi(x, y) = \zeta e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (3.4)$$

Sustituyendo la ecuación (3.4) en la (3.3) se tiene

$$\frac{k_x}{K_c} = \left(1 - \left(\frac{k_y}{K_c} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

la cual también puede expresarse como

$$l = (1 - m^2)^{1/2} \quad (3.6)$$

donde $l = k_x / K_c$ y $m = k_y / K_c$ son los números de onda relativos en las direcciones x e y , respectivamente. Para lo cual se han utilizado las siguientes correspondencias

$$il \sim \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{y} \quad im \sim \frac{1}{K_c} \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.7)$$

En los casos en que m sea pequeño, la relación entre l y m puede aproximarse de varias formas, en una primera instancia puede ser

$$l = [1 + m^2]^{1/2} \approx 1 + O(\varepsilon)^2 \quad (3.8)$$

donde $O(\varepsilon)$ indica el orden de error relativo a una diferencial espacial. La ecuación (3.8) corresponde a la condición de frontera más simple, misma que fue empleada por Panchang et al. (1991)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \psi \quad (3.9)$$

Por otro lado, utilizando una expansión lineal l puede aproximarse con

$$l \approx \left[1 - \frac{1}{2} m^2 \right] + O(\varepsilon)^4 \quad (3.10)$$

que corresponde a la aproximación parabólica de primer orden, empleada por Radder (1979)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \left(\psi + \frac{1}{2K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (3.11)$$

Otra posibilidad es utilizar una aproximación de Padé para la estimación de l , lo que lleva a

$$l \approx \frac{1 - 0.75m^2}{1 - 0.25m^2} + O(\varepsilon)^4 \quad (3.12)$$

que corresponde al segundo orden de aproximación parabólica

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = iK_c \psi + \frac{3i}{4K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{4K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (3.13)$$

Más aún, si l se aproxima por el método minimax (Kirby, 1986), se llega a

$$l \approx \frac{a_0 - a_1 \varepsilon^2}{1 - b_1 \varepsilon^2} \quad (3.14)$$

que corresponde a la aproximación parabólica de tercer orden, es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = i a_0 K_c \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \quad (3.15)$$

en la que los valores de los coeficientes a_0 , a_1 y b_1 dependen de la dirección del oleaje y se muestran en la Tabla 3-1.

Tabla 3-1 Valores de a_0 , a_1 y a_2 para diferentes ángulos de apertura (Kirby, 1986)

Ángulo de apertura (°)	a_0	a_1	a_2
0	1.000000000	0.750000000	0.250000000
10	0.999999972	0.752858477	0.252874920
20	0.999998178	0.761464683	0.261734267
30	0.999978391	0.775898646	0.277321130
40	0.999871128	0.796244743	0.301017258
50	0.999465861	0.822482968	0.335107575
60	0.998213736	0.854229482	0.383283031
70	0.994733030	0.890064831	0.451640568
80	0.985273164	0.925464479	0.550974375
90	0.956311082	0.943396628	0.704401903

La aproximación parabólica representada por la ecuación (3.15) es la que se utilizó en este trabajo debido al amplio rango de direcciones que permite modelar con buena precisión. A partir de ella, se presentan a continuación los casos particulares.

3.1.1 Condición de frontera abierta

Para esta condición, el potencial total es la suma del oleaje incidente y el perturbado ($\psi = \psi_i + \psi_s$). Por tanto usando la ecuación (3.15), como una aproximación del oleaje perturbado, se tiene que

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x} = \frac{\partial (\psi - \psi_i)}{\partial x} = -iK_c \left(a_0 (\psi - \psi_i) + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 (\psi - \psi_i)}{\partial y^2} \right) + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 (\psi - \psi_i)}{\partial x \partial y^2} \quad (3.16)$$

en la que las ondas perturbadas viajan hacia fuera del dominio en direcciones parcialmente opuestas al oleaje incidente. Por definición, el potencial de velocidades normalizado, denotado en lo sucesivo por $\psi^g = \sqrt{I_1} \phi$, está representado por

$$\psi^g = \sqrt{I_1} \frac{iHg}{2\sigma} \frac{\cosh K(h+z)}{\cosh Kh} \exp[iK(x \cos \theta + y \sin \theta)] \quad (3.17)$$

De tal forma que, sustituyendo la ecuación (3.17) en la (3.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -iK_c a_0 \psi - i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \\ &+ i \left(K_c a_0 - \frac{k^2 a_1 \sin^2 \theta}{K_c} + \frac{k^3 a_2 \sin^2 \theta \cos \theta}{K_c^2} + k \cos \theta \right) \psi^g \approx \\ &\approx - \left(iK_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + i(k + K_c) \psi^g \cos \theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.1.1.a Evaluación del potencial de velocidades incidente con profundidad constante

Si se acepta que el fondo es constante a lo largo del contorno y fuera del dominio, se puede aplicar directamente la ecuación (3.18) empleando la coordenada x o y , según sea la orientación del contorno. Esta condición, entonces, solo es aplicable para fronteras paralelas a la costa.

3.1.1.b Evaluación del potencial de velocidades incidente con fondo variable

En vista que la ecuación (3.18) no es útil cuando la profundidad varía, es decir, en un contorno perpendicular a la playa, el problema se divide en las siguientes tres zonas

Potencial en la frontera del dominio

Este potencial se define como la suma de un potencial incidente y otro reflejado, de la forma

$$\Psi_1 = \sqrt{I_1} f(z) \left(A_1 e^{iK(x \cos \theta)} + R e^{-iK(x \cos \theta)} \right) \quad (3.19)$$

donde A_1 y R son las amplitudes de los potenciales incidente y reflejado, respectivamente. Por su parte, el potencial dentro del dominio está definido por

$$\Psi_2 = f(z) \psi \quad (3.20)$$

Ahora, una onda que viaja en la dirección x , debe cumplir las condiciones de continuidad de flujo de masa y presiones, es decir,

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad \text{en } x = 0 \quad (3.21)$$

$$\Psi_{1x} = \Psi_{2x} \quad \text{en } x = 0 \quad (3.22)$$

en la que el subíndice x indica derivación. Sustituyendo las expresiones (3.19) y (3.20) en la (3.21), se obtiene

$$\sqrt{I_1} (A_1 + R) = \psi \quad (3.23)$$

Por otro lado, insertando las ecuaciones (3.19) y (3.20) en la (3.22), se tiene

$$iK \cos \theta \sqrt{I_1} I_1 (A_1 - R) = \frac{\partial h}{\partial x} I_2 \Psi + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.24)$$

y al combinar las ecuaciones (3.23) y (3.24), se llega a

$$C_1 \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = C_2 \quad (3.25)$$

donde $C_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{I_2}{I_1} + iK \cos \theta \right)$ y $C_2 = 2iA_1 K \cos \theta \sqrt{I_1}$.

Por otro lado si se acepta que no existe reflexión en la dirección y , al sustituir la ecuación (3.19) en el segundo miembro de la ecuación (3.1), la ecuación de gobierno puede ser expresada como

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + K_c^2 \Psi = C_3 \quad (3.26)$$

donde $C_3 = A_1 K^2 \sin^2 \theta$.

Potencial en el dominio

Dentro del dominio se considera que la batimetría es paralela en el sentido perpendicular al eje en cuestión, así por ejemplo, para el eje y la ecuación de gobierno se transforma en

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + B \Psi = 0 \quad (3.27)$$

donde $B = (K_c^2 - K^2 \sin^2 \theta_1)$. Para la que el valor del ángulo local θ_1 se puede estimar haciendo uso de la ley de Snell, a saber,

$$\theta_1 = \text{asen} \left(\frac{K_0}{K_1} \sin \theta_0 \right) \quad (3.28)$$

Potencial en la costa

Para obtener las condiciones de frontera en la costa, se define un potencial justo fuera del dominio como la suma un potencial que se transmite y otro que se refleja, tal que

$$\Psi = \psi f(z) \left(e^{iK(x \cos \theta_2)} + K_R e^{-iK(x \cos \theta_2)} \right) \quad (3.29)$$

La velocidad horizontal (derivada respecto de x) de la onda en el contorno es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = i\psi f(z) k \cos \theta_2 \left(e^{ik(x \cos \theta_2)} - K_R e^{-ik(x \cos \theta_2)} \right) \quad (3.30)$$

Si la ecuación (3.30) es multiplicada y dividida por Ψ , la ec. (3.29) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \\ &= \frac{-i\psi f(z)K \cos \theta_2 \left(e^{iK(x \cos \theta_2)} - K_R e^{-iK(x \cos \theta_2)} \right)}{\psi f(z) \left(e^{iK(x \cos \theta_2)} + K_R e^{-iK(x \cos \theta_2)} \right)} \Psi = -iK \cos \theta_2 \frac{(1 - K_R)}{(1 + K_R)} \Psi \end{aligned} \quad (3.31)$$

es decir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + D_1 \Psi = 0 \quad (3.32)$$

donde $D_1 = ik \gamma \cos \theta_2$ y $\gamma = \frac{(1 - K_R)}{(1 + K_R)}$

La solución de la condición de frontera con fondo variable requiere emplear conjuntamente a) las ecuaciones (3.25) y (3.26), b) la ecuación dentro del dominio, ec. (3.27), y c) la condición hacia la costa, ecuación (3.32).

3.1.2 Condición de frontera parcialmente reflejante

Este caso se presenta cuando las fronteras reflejan solo parte de las ondas, los extremos de esta condición corresponden a los estados totalmente reflejante y totalmente absorbente. Para obtener la ecuación de gobierno se define un potencial justo en la frontera como la suma de un potencial que se transmite y otro que se refleja, tal que dentro del dominio se tiene

$$\Psi = \Psi^- + \Psi_r = \Psi^- (1 + K_R) \quad (3.33)$$

y fuera del dominio

$$\Psi = \Psi^- (1 - K_R) \quad (3.34)$$

Al aplicar las condiciones de continuidad de flujo de masa y presiones se llega a

$$(1 + K_R) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = (1 - K_R) \left(ia_0 K_c \Psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.35)$$

que simplificado es

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \gamma \left(ia_0 K_c \Psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

donde $\gamma = \frac{(1 - K_R)}{(1 + K_R)}$.

De tal manera que si el coeficiente de reflexión, K_R , es igual a cero se tendría una condición de contorno totalmente absorbente, mientras que si el coeficiente de reflexión toma un valor igual a uno se tendría una condición de frontera totalmente reflejante.

3.2 Resumen de las condiciones de frontera

A continuación se presentan las condiciones de frontera generalizadas.

Condición de frontera lado de mar

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = - \left(iK_c a_0 \Psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right) + i(K + K_c) \Psi^s \cos \theta \quad (3.37)$$

Condición de frontera abierta

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \pm \left(iK_c a_0 \Psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right) + 2ik_l \Psi_l \cos \theta_l \quad \text{en la frontera } \pm x \quad (3.38)$$

y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \pm \left(iK_c a_0 \Psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y \partial x^2} \right) + 2ik_l \Psi_l \cos \theta_l \quad \text{en la frontera } \pm y \quad (3.39)$$

Condición de frontera parcialmente reflejante

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \gamma \left[iK_c \left(a_0 \Psi + \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \right] \quad \text{en la frontera } +x \quad (3.40)$$

y

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \pm \gamma \left[iK_c \left(a_0 \Psi + \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \quad \text{en la frontera } \pm y \quad (3.41)$$

3.3 Discretización de las ecuaciones

La discretización y adecuación de las ecuaciones de gobierno y de las fronteras se realizó mediante la técnica de diferencias finitas centradas, y solo en el caso de algunas fronteras se ha utilizado el apoyo de una celda ficticia, misma que desaparece al combinar la ecuación de gobierno con la definida para el caso de contorno específico. A continuación se presenta la forma discreta de cada caso.

3.3.1 Ecuación de gobierno dentro del dominio

Aproximando las diferenciales parciales de segundo orden con diferencias finitas centrales, la ecuación de gobierno (3.1) puede ser representada en forma discreta como

$$\frac{\Psi_{i,j-1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\Psi_{i-1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + K_c^2 \Psi_{i,j} = 0 \quad (3.42)$$

3.3.2 Ecuación para frontera abierta

Para el caso de las fronteras, es necesario incluir una celda ficticia, es decir, se incrementan a la malla de cálculo original una columna y un renglón que solo servirán de apoyo para lograr una aproximación de segundo orden. Utilizando diferencias finitas hacia adelante y

centradas, la condición de frontera de lado de mar, ecuación (3.37), puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j})}{2\Delta x} &= i(K + K_c)\psi^g \cos \theta - iK_c a_0 \psi_{i,j} - i \frac{a_1}{K_c} \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ &+ \frac{b_1}{k_c^2} \frac{3(\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}) - 4(\psi_{i+1,j+1} - 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j-1}) + \psi_{i+2,j+1} - 2\psi_{i+2,j} + \psi_{i+2,j-1}}{2\Delta x \Delta y^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usando las ecuaciones (3.42) y (3.43) para eliminar $\psi_{i-1,j}$ (el punto ficticio), la ecuación de contorno discretizada es

$$\begin{aligned} &\left(i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j-1} - \\ &- 2 \left(\Delta y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x^2 K_c^2 (1 + 2ia_0) - 2i \frac{a_1}{K_c} \Delta x + 3 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i,j} + \\ &+ \left(i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta y^2 + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j+1} + 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j+1} \left(\Delta y^2 - 8 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i+1,j} + \\ &+ 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j-1} + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j+1} - 2 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j} + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j-1} = \\ &= 2\Delta x \Delta y^2 i (k + K_c) \psi^g \cos \theta \end{aligned} \quad (3.44)$$

En las esquinas de la malla, las expresiones correspondientes a las diferencias finitas son derivadas a partir de las ecuaciones (3.1), (3.40) y (3.39).

3.3.3 Ecuaciones para fronteras con fondo variable

Haciendo uso de las series de Taylor, de manera similar a Silva et al (2005), la condición de mar abierto (3.25), es discretizada como

$$-3\psi_{0,1} + (12\Delta x C_1 - 10)\psi_{1,1} + 18\psi_{2,1} - 6\psi_{3,1} + \psi_{4,1} = 12\Delta x C_2 \quad (3.45)$$

en la que el subíndice 0 corresponde a la celda ficticia. Por otra parte la ecuación de gobierno (3.26), en forma discreta es

$$10\psi_{0,1} + (12\Delta x^2 K_c^2 - 15)\psi_{1,1} - 4\psi_{2,1} + 14\psi_{3,1} - 6\psi_{4,1} + 1\psi_{5,1} = 12\Delta x^2 C_3 \quad (3.46)$$

Eliminando $\psi_{0,1}$ de las ecuaciones (3.45) y (3.46), se obtiene, la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (120\Delta x C_1 + 36\Delta x^2 K_c^2 - 145)\psi_{1,1} + 168\psi_{2,1} - 18\psi_{3,1} - 8\psi_{4,1} + 3\psi_{5,1} = \\ = 120\Delta x C_2 + 36\Delta x^2 C_3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dado que la discretización de las ecuaciones en la frontera es de cuarto orden, entonces se necesitará realizar la discretización de forma especial para los nodos $i = 2$ e $i = n-1$, donde n es el número de celdas del dominio

Nodo $i = 2$

$$10\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 B - 15)\psi_{i,1} - 4\psi_{i+1,1} + 14\psi_{i+2,1} - 6\psi_{i+3,1} + \psi_{i+4,1} = 0 \quad (3.48)$$

Nodo $i = 3 \dots i = n-2$

$$-\psi_{i-2,1} + 16\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 B - 30)\psi_{i,1} + 16\psi_{i+1,1} - \psi_{i+2,1} = 0 \quad (3.49)$$

Nodo $i = n-1$

$$\psi_{i-4,1} - 6\psi_{i-3,1} + 14\psi_{i-2,1} - 4\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 B - 15)\psi_{i,1} + 10\psi_{i+1,1} = 0 \quad (3.50)$$

3.3.4 Ecuaciones para la frontera en la costa

Al igual que en los casos anteriores, haciendo uso de las series de Taylor, las ecuaciones (3.32) y (3.27), son discretizadas como

$$-\psi_{i-3,1} + 6\psi_{i-2,1} - 18\psi_{i-1,1} + (12\Delta x D_1 + 10)\psi_{i,1} + 3\psi_{i+1,1} = 0 \quad (3.51)$$

y

$$\psi_{i-4,1} - 6\psi_{i-3,1} + 14\psi_{i-2,1} - 4\psi_{i-1,1} + (12\Delta x^2 B - 15)\psi_{i,1} + 10\psi_{i+1,1} = 0 \quad (3.52)$$

Eliminando $\psi_{i+1,1}$, de las ecuaciones (3.51) y (3.52), se obtiene finalmente

$$-3\psi_{i-4,1} + 8\psi_{i-3,1} + 18\psi_{i-2,1} - 168\psi_{i-1,1} + (120\Delta x D_1 - 36\Delta x^2 B + 145)\psi_{i,1} = 0 \quad (3.53)$$

La aplicación del esquema en diferencias finitas a todo el dominio de interés, da lugar a un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes complejos. Existe en la literatura una gran variedad de métodos para resolver este tipo de sistemas; sin embargo, pocas son las metodologías computacionales diseñadas para la solución de sistemas con cientos de miles de incógnitas. A continuación se describe el procedimiento empleado en este trabajo.

3.4 Sistema de mallado jerárquico

Las mallas adaptables de tipo jerárquico (*Quad-tree*) que se han utilizado en años recientes para la modelación de hidrodinámica costera, son relativamente simples de generar y optimizan el trabajo numérico al reducir significativamente el número de celdas del dominio. Entre otras ventajas de este tipo de mallas se cuenta la capacidad de generar la malla independientemente de la forma que tenga el dominio y que su estructura en forma de “árbol” permite una fácil identificación de las celdas colindantes de cada elemento (Yiu et al, 1996).

Las mallas jerárquicas normalmente parten de un dominio cuadrado, o incluso si no lo es, se agregan celdas o regiones ficticias a fin de lograr dicha geometría (Rogers, 1991). En este trabajo y considerando que la mayoría de las zonas de interés para la ingeniería costera son de forma rectangular, se presenta un método de generación del *Quad-tree* que elimina

esta restricción. A continuación se describe la metodología de generación que tiene la misma estructura que la presentada por Silva et al. (2004), Silva et al. (2006a) y Silva et al. (2006b).

3.4.1 Delimitación del dominio

El primer paso es crear un archivo que contenga la información batimétrica y los siguientes datos

- Los límites de dominio X eY
- El máximo orden de subdivisión, k , que se evalúa a partir de

$$k = INT(\ln(R/r)/\ln 2 + 0.99) \quad (3.54)$$

donde $R = L_0/n$ es la resolución mínima y $r = L_s/n$ la resolución máxima que permite esta metodología. L_0 y L_s son la mayor y menor longitudes de onda de interés y n es el número mínimo de puntos que defina el usuario para describir una longitud de onda (p.e. $n = 20$).

- El número máximo de celdas en cada dirección, lo cual se estima a partir de

$$N_x = 2knX/L_0 \quad \text{para el eje } x \quad (3.55)$$

y

$$N_y = 2knY/L_0 \quad \text{para el eje } y \quad (3.56)$$

3.4.2 Revisión de la calidad de la malla

Si existe algún nivel de marea prefijado por el usuario se añade o sustrae a todo el dominio por igual. En este punto también se revisa si existen lagunas (cuerpos de agua cerrados y que no estén conectados con el cuerpo principal) para convertirlas en zonas de tierra y eliminarlas del cálculo.

3.4.3 Cortado de celdas

Con el fin de aproximar la forma de la malla lo más posible a los contornos batimétricos y fronteras del dominio, el modelo tiene la capacidad de cortar algunas celdas. En este trabajo solo se permiten los cuatro tipos de corte de celdas que se muestran en la Figura 3-1.

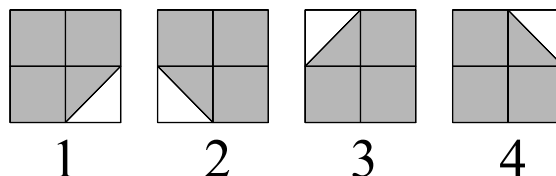


Figura 3-1 Tipos de corte de celda permitidos

El valor de una celda que ha sido cortada se obtiene interpolando los valores cercanos y se inserta en el esquema numérico como una celda en frontera reflejante.

1	2	3	4	1	2
5	6	7	8		
9	10	11	12	3	4
13	14	15	16		
1		2		1	2
3		4		3	4

Figura 3-3 Esquema de numeración

Los números de identificación de las celdas del ejemplo en la Figura 3-3 se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 3-2 Números de identificación y niveles de subdivisión

Número de identificación (I_D)	Nivel de subdivisión (I_V)
1.0001	2
1.0002	2
1.0003	2
...	...
1.0016	2
2.0001	1
2.0002	1
...	...

El código de identificación puede emplearse para localizar la posición de una celda relativa a la malla. Dicha posición en la malla base se determina con

$$N[k] = INT(I_D[k]) \tag{3.57}$$

La posición de una celda referida al la sub-malla es

$$n[k] = I_D[k] - N[k] \tag{3.58}$$

El tamaño de las celdas de la malla base se puede calcular como

$$\Delta = X/N_x = Y/N_y \tag{3.59}$$

El tamaño de una celda dentro en una sub-malla resulta de

$$\delta[k] = \Delta / 2^{I_V[k]} \tag{3.60}$$

Las coordenadas de las celdas pueden ser obtenidas a partir del número de identificación como se resume a continuación.

Para las coordenadas generales x e y (referidas a la malla base) se utiliza, respectivamente

$$I[k] = INT\left(\frac{N[k]-1}{N_x} + 1\right) \quad (3.61)$$

$$J[k] = N[k] - (I_D - 1)N_x \quad (3.62)$$

Mientras que las coordenadas locales (dentro de la sub-malla) se determinan a partir de

$$i[k] = INT\left(\frac{n[k]-1}{2^{l_x[k]}} + 1\right) \quad (3.63)$$

$$j[k] = n[k] - (I_D - 1)2^{l_x[k]} \quad (3.64)$$

para los ejes x e y, respectivamente.

Finalmente las coordenadas del centro de las celdas se obtienen como sigue

$$x[k] = \Delta(I[k]-1) + \delta[k](i[k]-0.5) \quad (3.65)$$

$$y[k] = \Delta(J[k]-1) + \delta[k](j[k]-0.5) \quad (3.66)$$

3.5 Solución del sistema de ecuaciones

Las aproximaciones más comúnmente usadas para dar solución a ecuaciones diferenciales parciales elípticas se dividen en tres categorías: (1) aproximación hiperbólica, (2) aproximación iterativa para resolver ecuaciones elípticas y (3) solución directa de ecuaciones matriciales.

La primera aproximación cambia la ecuación elíptica en un par de ecuaciones hiperbólicas con dependencia temporal. La velocidad de cálculo de esta aproximación es mejor que en los métodos iterativos tradicionales y puede ser similar en eficiencia al más avanzado método iterativo.

La segunda aproximación, métodos iterativos más avanzados, como son los métodos Multi-Grid (MG) (Li y Anastasiou, 1992) y Generalized Minimum Residual Method (Walker, 1998), no requieren una amplia memoria computacional y la velocidad de convergencia frecuentemente es buena. La desventaja es que tanto los algoritmos como los códigos computacionales no son simples, lo que dificulta la operación de las aplicaciones. El índice de convergencia también se degrada si el dominio computacional es muy irregular o la selección del preconditionamiento no es adecuada.

Por lo que respecta a la solución directa de la matriz, una opción aparentemente devaluada es utilizar el algoritmo de Eliminación Gaussiana con Pivoteo parcial (EGP), (Dongarra, et al, 1979) el cual se ha aplicado casi en forma exclusiva en computadoras con enorme memoria (del orden de giga-bytes, GB) ya que las soluciones directas no son fiables al resolver grandes grupos de ecuaciones cuando la memoria computacional es limitada. Ante esta desventaja, emplear el algoritmo de eliminación Gaussiana para resolver ecuaciones diferenciales parciales tiene dos ventajas principales, a saber,

- El sistema numérico es simple de codificar y comprender y ha estado disponible por más de 20 años.
- El tiempo computacional no es afectado por el tipo ni por la complicación de las condiciones de frontera, al contrario de los métodos de iterativos, en los que el tiempo en que converge el sistema con condiciones de frontera tipo Neumann respecto de condiciones geométricas complejas, aumenta significativamente.

Considerando que las ventajas en cuanto a su aplicación computacional pueden ser aprovechadas y que el uso eficiente de los recursos puede soslayar la necesidad de memoria sin demeritar la precisión de la solución, en este trabajo se utiliza una versión modificada del método originalmente presentado por Maa et al (1997) para resolver ecuaciones matriciales de banda ancha vía la eliminación Gaussiana con pivoteo parcial.

3.5.1 Método de Eliminación Gaussiana para resolver matrices de banda ancha

La ecuación de cualquier matriz en forma de banda puede ser representada de la siguiente manera

$$BX = G \tag{3.67}$$

donde B es la matriz banda de orden $M \times N$, N es la longitud de la matriz (es decir, el número total de nodos que tiene la malla), M es el ancho de banda de la matriz, X es el vector de incógnitas, donde la variable es el potencial de velocidades y G es el vector de términos independientes. M varía con la orientación la malla y con la geometría del dominio de estudio, en general, cuando el eje x se selecciona de forma paralela a la dimensión más larga del dominio de estudio, el ancho de banda es mínimo.

La ecuación de la matriz banda se resuelve utilizando el algoritmo de eliminación Gaussiana con pivoteo parcial (EGP) con un procedimiento especial de almacenamiento en disco duro, por lo que el requerimiento tradicional de memoria se sustituye por capacidad en disco duro, que resulta más simple de suplir. En aplicaciones prácticas, N se utiliza en el orden de $10^4 - 10^6$ y M es del orden de $10^2 - 10^3$. De esta manera, utilizando el algoritmo tradicional de EGP, 16 bytes son requeridos para representar un número complejo y se requieren de 24 MB a 24 GB de memoria simplemente para almacenar la matriz. El método tradicional de EGP tiene que almacenar en la memoria la matriz completa, razón por la que es imposible proveer de memoria suficiente para dominios de mediana extensión. La estructura actual de las computadoras personales toma espacio del disco duro para complementar la memoria, realizando una enorme cantidad de intercambios aleatorios de información entre la memoria y el disco duro (caché), como consecuencia, la eficiencia computacional es muy baja.

El procedimiento de almacenamiento en el disco duro que se utiliza en este trabajo consta de dos etapas. Primero, sólo las diagonales que contienen elementos no nulos de la matriz banda son almacenadas. En este paso la matriz B (de dimensión $M \times N$) es reemplazada por dos matrices pequeñas (una matriz compleja, Z , con tamaño $49 \times N$ y una matriz entera, I , de dimensión $49 \times N$). Con esta simplificación de matrices, el problema de memoria insuficiente no ha sido resuelto, la clave para solucionarlo está en utilizar una pequeña sub-

matriz de trabajo repetidamente. La matriz de trabajo es de orden $(M+Q) \times W$, donde Q es el ancho de banda inferior y W es seleccionada de acuerdo con la memoria computacional disponible, la cual usualmente oscila entre $4M$ y $10M$. Es evidente que la matriz de trabajo es mucho más pequeña que la matriz banda porque $W \ll N$. Adicionalmente, sólo la operación de eliminación del método estándar de EGP es realizada en la matriz de trabajo. Después de completar la eliminación con pivoteo parcial en cada matriz de trabajo, los resultados son guardados en un archivo en el disco duro. Ahora, la matriz de trabajo es remplazada por el siguiente bloque de datos, es decir, nuevas matrices Z e I y así continua el proceso (construyendo una nueva matriz de trabajo y realizando eliminación con pivoteo parcial) hasta que toda la ecuación de la matriz banda es diagonalizada. Operando en esta forma, la escritura de los archivos y la lectura de las matrices Z e I son los únicos datos de entrada y salida en el disco duro, y por tanto, el número de veces que se escriben datos en el disco es reducido.

El segundo paso es la sustitución, en la cual el programa lee la última matriz de trabajo diagonalizada y la resuelve, encontrando los valores del potencial desconocidos. El procedimiento de la sustitución retroactiva consta de leer y resolver todas las matrices realizadas en el proceso anterior.

A diferencia del funcionamiento de la memoria virtual implementada en la mayoría de los sistemas operativos, el proceso anteriormente descrito escribe y lee datos del disco un número de veces muy reducido, aprovechando la mayor parte del tiempo de cómputo para el trabajo numérico. Por esta razón la eficiencia resulta ser ligeramente mayor que en los casos en que toda la matriz banda es almacenada y operada en la memoria, con la ventaja de que el proceso no depende de la cantidad de memoria disponible, aunque sí de la capacidad del disco duro.

3.6 Ejercicios de validación

A continuación se presentan los ejercicios numéricos que se ejecutaron para validar y experimentar con el funcionamiento del modelo de oleaje, los cuales fueron seleccionados de forma que cada uno permita explorar las distintas capacidades del modelo.

3.6.1 Difracción por una cuña

Este primer caso, el más sencillo, consiste en una onda propagándose sobre fondo plano a una profundidad tal que las olas no rompen (aguas profundas) y el periodo se ha fijado de tal forma que resulte $Kh = 2\pi$ en todo el dominio. El oleaje incide con altura de ola unitaria desde la frontera superior del dominio con dirección $\theta = 45^\circ$ en sentido horario. A la mitad del contorno izquierdo inicia un obstáculo (cuña) impermeable que se extiende hacia la derecha, su grosor es despreciable pero su longitud es igual al semi-ancho del dominio. Para la construcción de la malla regular empleada en este ejercicio se definió $\Delta x = \Delta y = L/40$.

La Figura 3-4 muestra la comparación entre el campo de altura de ola máxima calculado numéricamente y la solución analítica que presentara Lick (1978). En dicha figura, las coordenadas adimensionales de los ejes son relativas a la longitud de onda y la escala de

colores en la parte superior representa la altura de ola local relativa a la ola incidente (H_L/H_i).

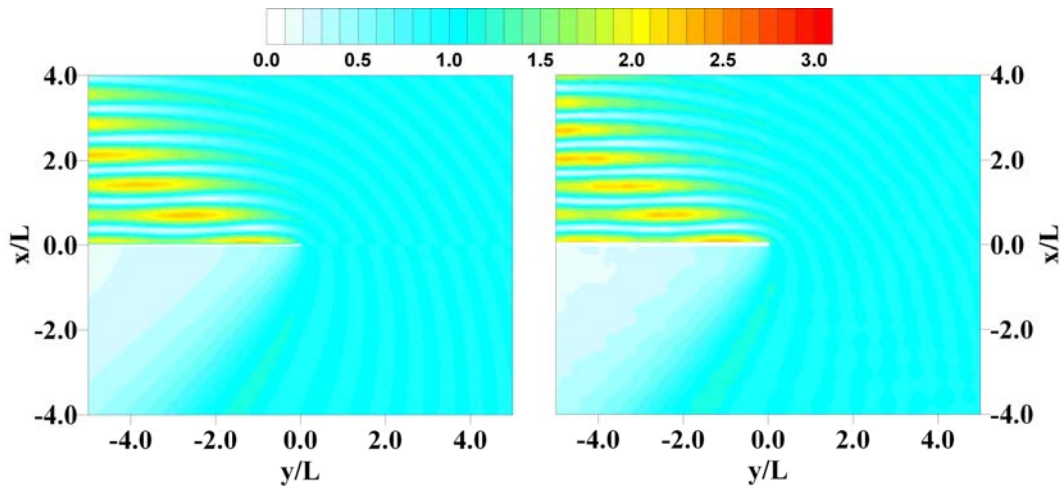


Figura 3-4 Solución analítica (izq.) y numérica (der.) para la cuña impermeable

Dadas las características morfológicas del caso, el fenómeno reinante durante la propagación es la difracción, sin embargo, también ocurre un proceso de reflexión generado por la dirección del oleaje y por la impermeabilidad de la cuña. El modelo numérico representa de manera muy precisa los resultados de la solución analítica tanto en la disminución de la energía dentro de la zona de sombra, como en los patrones de reflexión.

En la zona expuesta de la cuña se observa que la altura de ola relativa supera por muy poco el valor de 2, valor típico para la suma de las ondas reflejada e incidente en un obstáculo vertical e impermeable.

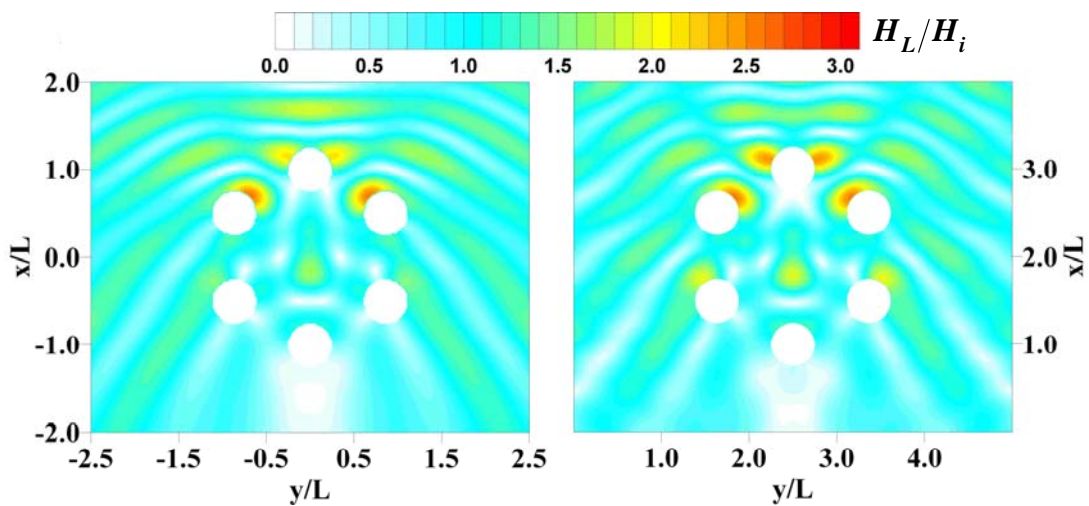


Figura 3-5 Campos de altura de ola ($\theta=0^\circ$) para la solución analítica (izq.) y la numérica (der.)

3.6.2 Grupo de seis pilas

Sobre fondo plano con profundidad y clima de oleaje definidos tal que $Kh = 2\pi$, se modela un arreglo de seis pilas cilíndricas cuyo radio es $r = L/4$, siendo L la longitud de onda incidente. En las tres condiciones de simulación que se presentan a continuación, se utilizó una malla regular de 800 x 640 nodos.

3.6.2.a Pilas emergidas impermeables

Como se muestra en la Figura 3-5, Linton y Evans (1990) presentaron una solución analítica para este problema con el origen del sistema de referencia al centro geométrico del arreglo de pilas. En esta misma figura se presenta el campo de altura de ola máxima para incidencia normal del oleaje ($\theta = 0^\circ$) desde la frontera superior del dominio, los ejes adimensionales son relativos a la longitud de onda y la escala de colores muestra la altura de ola relativa (H_L/H_i).

En este caso el fenómeno reinante es la reflexión de las ondas, el cual dado el arreglo de pilas resulta bastante complicado, sin embargo, el modelo numérico ofrece resultados muy cercanos a la solución analítica. Entre las características del campo de altura de ola máxima que se pueden destacar y que el modelo numérico representa adecuadamente se tienen la concentración de energía en la parte expuesta de las tres primeras pilas, un pequeño efecto de resonancia al centro del arreglo y la pequeña zona de sombra después de la última pila (inferior).

La misma solución presentada por Linton y Evans (1990) permite la modelación de incidencia oblicua del oleaje, que en un segundo caso se eligió de $\theta = 30^\circ$ en sentido antihorario y cuyos resultados (comparación entre numérico y analítico) se presentan en la Figura 3-6.

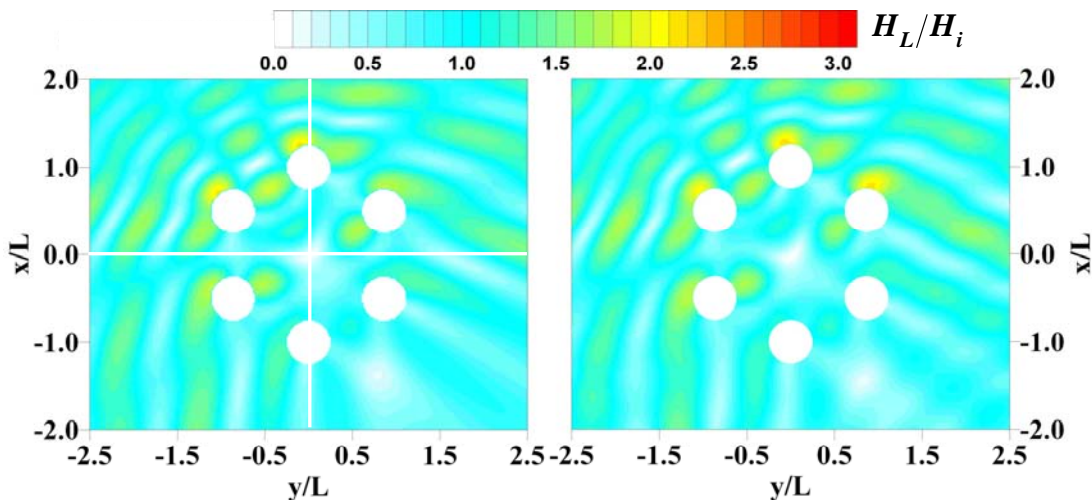


Figura 3-6 Campos de altura de ola ($\theta = 30^\circ$) para la solución analítica (izq.) y la numérica (der.)

El campo de oleaje con el cambio en la dirección de incidencia presenta características similares al anterior, con la diferencia que la concentración de energía en las pilas

expuestas es notoriamente menor y el efecto de resonancia que se hallaba al centro del arreglo de ha desplazado hacia las pilas dejando lugar a una zona de poca amplitud. La zona de sombra, aunque menor en extensión, sigue apareciendo al final del arreglo.

En la Figura 3-6 se han marcado las líneas $x/L=0$ y $y/L=0$ que se han utilizado como cortes transversales para observar a detalle el perfil de la altura de ola adimensional, la muestra dichos cortes. La similitud entre ambos cálculos es evidente.

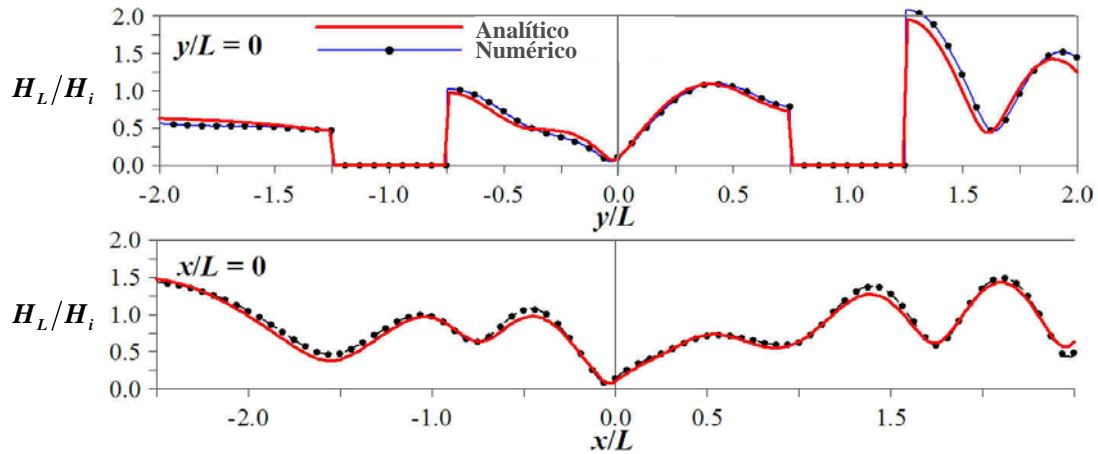


Figura 3-7 Perfiles de altura de ola adimensional en $y/L=0$ (sup.) y $x/L=0$ (inf.)

3.6.2.b Pilas emergidas permeables

El arreglo de pilas permite probar el modelo de oleaje cuando se encuentra con obstáculos permeables. La morfología base es exactamente la misma y la solución analítica ha sido presentada por Silva et al. (2003), con la diferencia que a las pilas se les ha asignado una permeabilidad $\varepsilon=0.4$, coeficiente de fricción $f=2.0$ y coeficiente de masa añadida $s=1.0$. Las condiciones de oleaje y profundidad son tales que $Kh=2\pi$ en todo el dominio y la incidencia es normal desde la frontera superior.

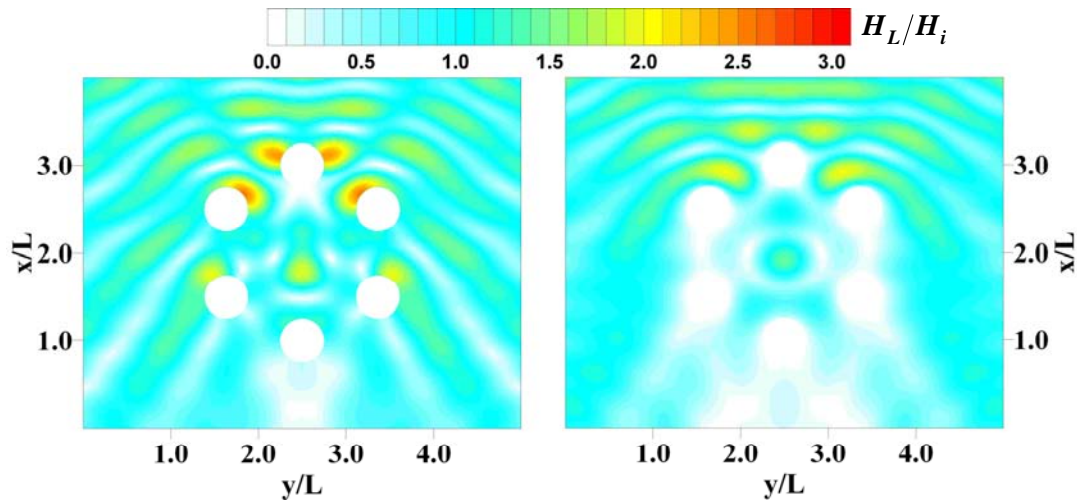


Figura 3-8 Campo de oleaje con pilas emergidas impermeables (izq.) y porosas (der.)

La Figura 3-8 muestra el resultado obtenido previamente con pilas impermeables en comparación con el campo de altura de ola adimensional para la condición de pilas porosas. La principal característica es la gran disipación de energía que supone la existencia de estructuras granulares acusado por la disminución en la altura de ola relativa en las zonas de concentración de energía y por la gran extensión de la zona de sombra que se genera. Por otro lado, los patrones de oleaje reflejado en la parte superior del dominio son un poco más regulares (tendencia a onda estacionaria) y de menor intensidad. Mientras que la resonancia dentro del arreglo y la cesión de energía por reflexión y difracción hacia los lados del mismo son casi nulas.

3.6.2.c Pilas sumergidas impermeables

Sobre el mismo arreglo de pilas, ahora se reduce su altura de forma que $h_a/h = 0.8$, así, se puede probar el modelo para el caso más general, es decir, propagación de oleaje sobre fondo impermeable con una capa de medio poroso de ancho finito al fondo. De nuevo $Kh = 2\pi$ y la incidencia es desde el contorno superior. Las características del medio granular son $\varepsilon = 0.4$, $f = 2.0$ y $s = 1.0$.

La presentación del comparativo de los campos de oleaje adimensionales para las pilas sumergidas impermeables y porosas se encuentra en la Figura 3-9. Es claro que el modelo representa adecuadamente lo que físicamente se esperaría, que en igualdad de circunstancias, las estructuras permeables son más eficientes disipadores de energía ya que tanto la reflexión que generan es mucho menor como el oleaje que se propaga sobre ellas son mucho menores. El resultado es una mayor zona de sombra y agitación casi nula.

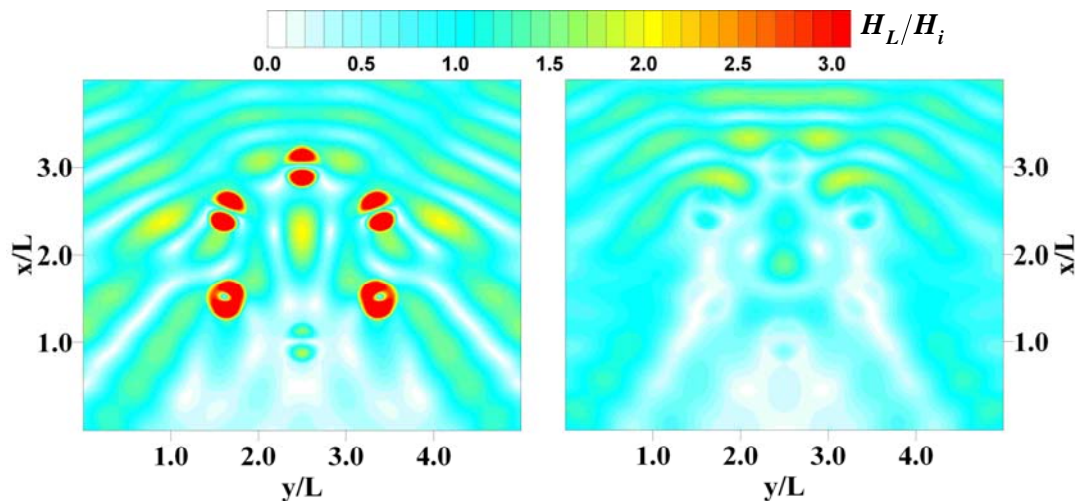


Figura 3-9 Campo de oleaje con pilas sumergidas impermeables (izq.) y porosas (der.)

La simulación de diversos escenarios con el arreglo de pilas ha mostrado muchas de las capacidades del modelo: se han visto los fenómenos de difracción y reflexión y se ha propagado la onda en los casos de obstáculo impermeable y poroso tanto sumergido como emergido, es decir, se cubrió todo el abanico de posibilidades con buenos resultados y se ha visto que el modelo puede ser una herramienta para el estudio de diversas condiciones en proyectos de ingeniería reales.

3.6.3 Grupo de cinco pilas porosas con malla jerárquica

Este ejercicio de validación consiste en una onda monocromática que interactúa con un grupo de cinco pilas sobre fondo horizontal. El radio de los cilindros es $r = L/4$. Visto en planta, los centros de cuatro pilas coinciden con los vértices de un cuadrado con lados de $2L$ y el quinto con el centro. La profundidad y el oleaje se definen de forma que se cumpla que $kh = 0.2\pi$. El tamaño de las celdas de la malla base es $\Delta = L/10$ y el tamaño mínimo de celdas es de $\delta = 5L/400$. Se definió como número mínimo de celdas por longitud de onda $n = 40$. En los dos casos que se presentan a continuación, el oleaje incide desde la frontera superior con un ángulo de 45° en sentido antihorario. La permeabilidad de las pilas es $\varepsilon = 0.4$ y el coeficiente de fricción se fijó en $f = 3.0$

3.6.3.a Pilas sumergidas $a/h=0.8$

Los campos de oleaje adimensionales analítico y numérico (Silva et al, 2006a) de este caso se presentan en la Figura 3-10 a) y b), respectivamente. En dicha figura se observa que el modelo desarrollado en este trabajo de investigación representa adecuadamente los patrones de oleaje perturbado, aunque sobrestima ligeramente el efecto de resonancia que se presenta al centro del arreglo. La parte c) de la misma figura muestra un corte transversal del campo de altura de ola máxima, la cercanía del modelo numérico con la solución teórica es evidente.

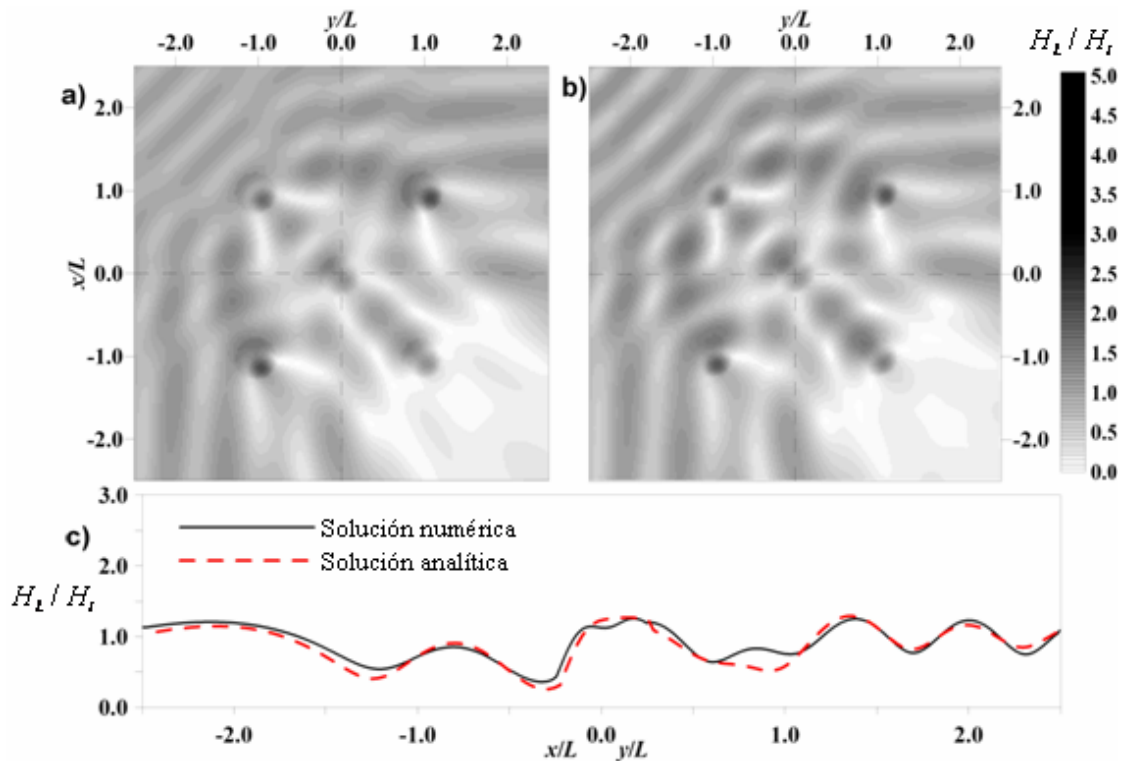


Figura 3-10 Campo de oleaje con pilas sumergidas $a/h=0.8$ a) solución numérica, b) solución analítica, c) corte transversal

3.6.3.b Pilas sumergidas $a/h=0.4$

Con el arreglo de cinco pilas, se llevó a cabo la validación con pilas permeables sumergidas más de la mitad del calado total. El oleaje y características de simulación son similares al caso anterior. En la Figura 3-11 se puede observar el campo de altura de ola máxima adimensional obtenido en forma analítica (parte a) y en forma numérica (parte b). La aproximación calculada presenta pequeñas diferencias en la distribución de la energía debidas al súbito someramiento de las ondas que supone la existencia de discontinuidades en el fondo. Sin embargo, la parte c) de la misma figura, que corresponde al corte transversal, acusa un ajuste casi perfecto entre ambas soluciones.

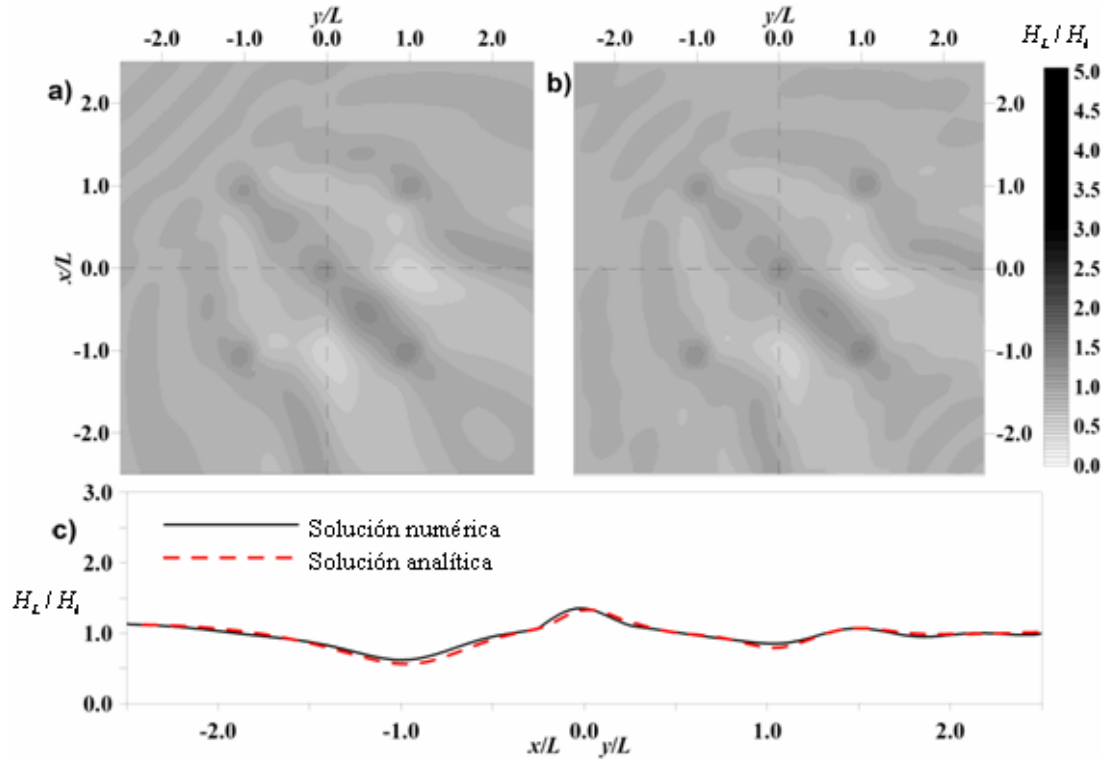


Figura 3-11 Campo de oleaje con pilas sumergidas $a/h=0.4$ a) solución numérica, b) solución analítica, c) corte transversal

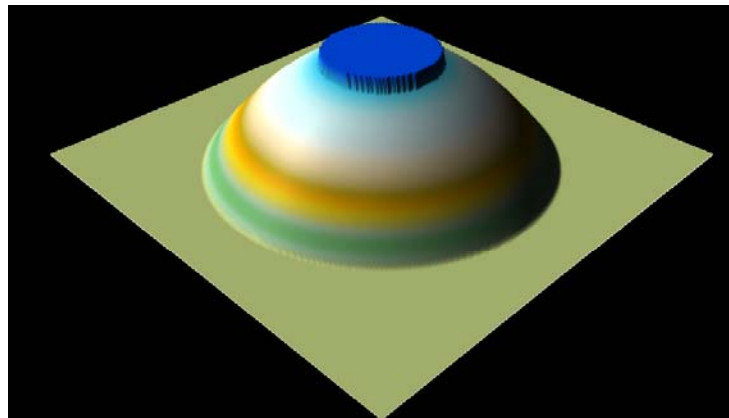


Figura 3-12 Esquema de la isla cilíndrica

3.6.4 Reflexión debida a una isla cilíndrica

Xu y Panchang (1993) y Chamberlain y Porter (1999) estudiaron la reflexión generada por una isla de forma cilíndrica empleando un método numérico para aproximar las ecuaciones de la pendiente suave y modificada de la pendiente suave. La isla tiene un radio $r=10$ km y a partir de ella el perfil del fondo es parabólico, $h(r)=\alpha r^2$ en la que la constante α se fija de modo que la profundidad en derredor de la isla sea de 444 m. A una distancia de $rb=30$ km desde el centro de la isla, el fondo se considera plano con profundidad $hb=4$ km. La Figura 3-12 es un esquema del problema descrito, mismo que se discretizó en una malla regular con $\Delta x = \Delta y = rb/40$.

Para este trabajo, el dominio se arregló de forma que el oleaje incide desde la frontera superior del mismo con dirección perpendicular a dicho contorno, el periodo de la onda monocromática es de 240 s. La Figura 3-13 presenta el resultado de altura de ola total (incidente más reflejada) adimensional, el lado izquierdo es lo obtenido por Chamberlain y Porter (1999), mientras que el lado derecho muestra la predicción del modelo presentado en este trabajo. En ella se observa claramente que el resultado de ambos modelos es prácticamente similar.

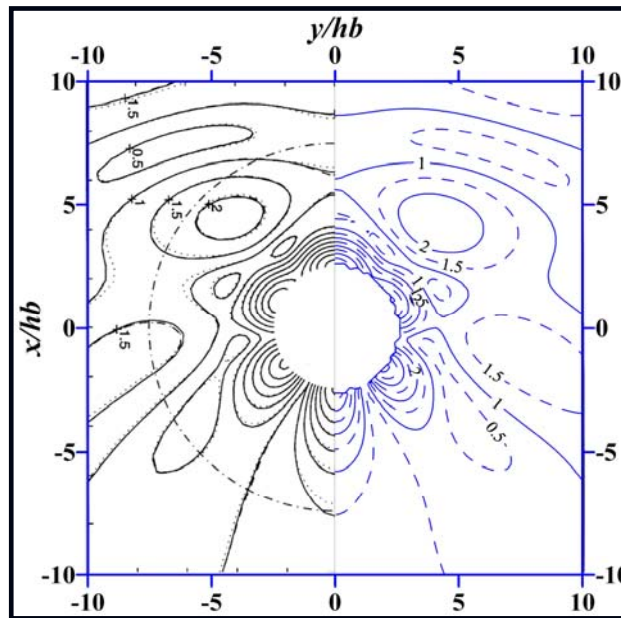


Figura 3-13 Altura de ola adimensional Chamberlain y Porter (1999) (izq.) y modelo presentado (der.)

La solución de este ejercicio además de servir como comparación con una solución numérica conocida y publicada, permite mostrar que el modelo aquí desarrollado es aplicable en casos de ondas muy largas y en dominios de gran extensión.

3.6.5 Validación con oleaje irregular

Aprovechando la linealidad de la ecuación de gobierno del modelo de propagación, es posible resolver problemas de oleaje espectral, para tal efecto y como lo hicieron Silva (1995) y Losada et al (1996), el espectro incidente se divide en una serie de componentes

monocromáticas, es decir, que corresponden a una frecuencia f_j . De este modo, el espectro propagado $S_p(f_j, x, y)$ queda definido como

$$S_p(f_j, x, y) = |\phi(x, y)|^2 S_n(f_j) \quad (3.68)$$

donde $S_n(f_j)$ es el espectro incidente.

La validación del modelo en estas condiciones se llevó a cabo con un arreglo sencillo de cuatro pilas cilíndricas de radio igual a la semi-longitud de onda incidente y los centros de las mismas colocados en los vértices de un cuadrado cuyos lados miden dos veces la longitud de onda incidente, el fondo es plano con profundidad de 5 m. La Figura 3-14 muestra el espectro de oleaje de entrada, cuyas características son: periodo pico de 14.51 s y altura de ola cuadrática media unitaria. El oleaje incide desde la frontera superior con un ángulo de 45° en sentido antihorario. Para la construcción de la malla base de cálculo se fijó un mínimo de 25 celdas por longitud de onda local.

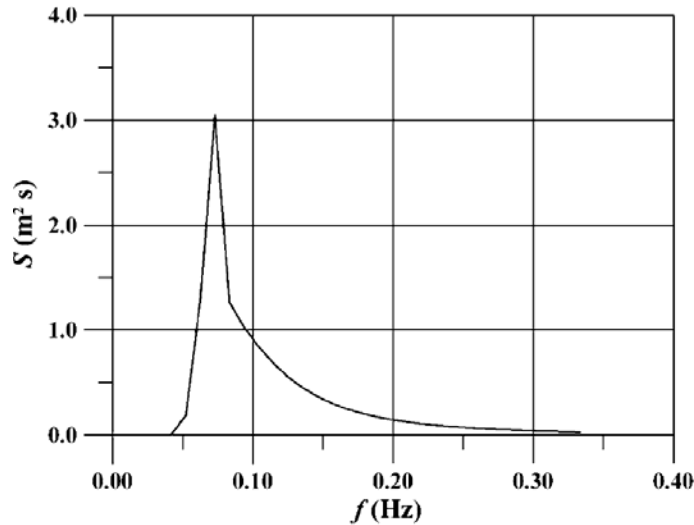


Figura 3-14 Espectro de oleaje utilizado para la validación

La Figura 3-15 presenta las soluciones analítica (parte izquierda) y numérica (parte derecha) para pilas sumergidas hasta la mitad del calado. La parte a) se resolvió con pilas impermeables y la parte b) con permeables. En ambos casos existen algunas diferencias entre las soluciones, especialmente en la zona de reflexión, donde el modelo tiende a subestimar la altura de ola. En la zona interior del arreglo se genera resonancia (de mayor magnitud con las pilas impermeables) que el modelo reproduce en forma muy precisa. Por lo que toca a la zona de sombra, la distribución de la energía es muy similar a la teoría en ambos casos.

Al revisar los cortes transversales que para ambas condiciones de pilas se muestran en la Figura 3-16 queda claro que aún con las diferencias observadas, la aproximación numérica ofrece resultados satisfactorios.

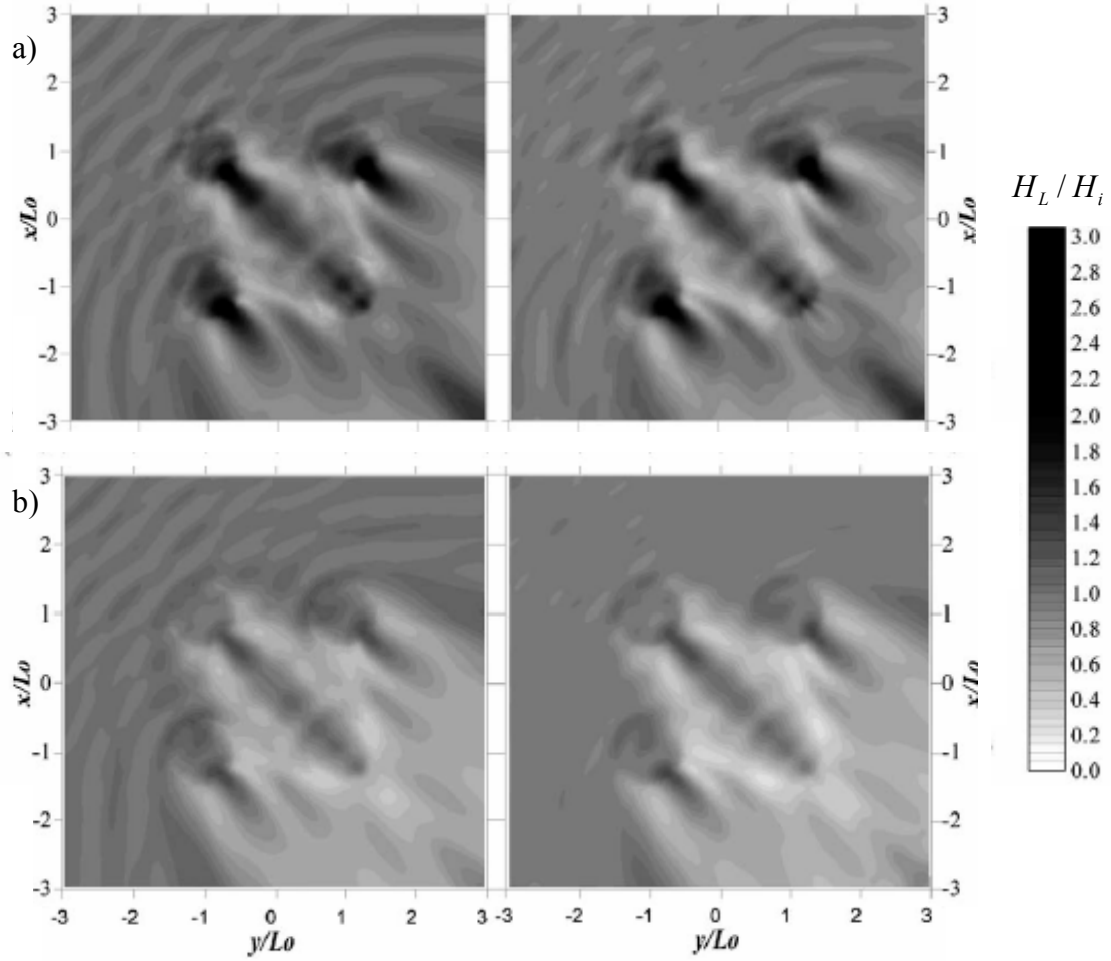


Figura 3-15 Mapas de altura de ola máxima adimensional analíticos (izq.) y numéricos (der.). a) pilas impermeables, b) pilas permeables

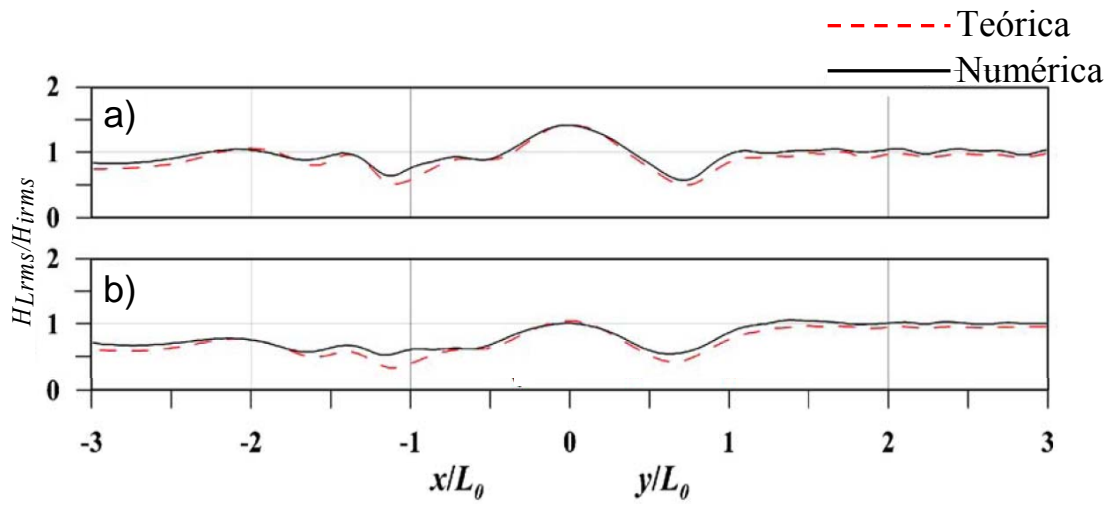


Figura 3-16 Cortes transversales de la validación con oleaje irregular

3.7 Aplicación a una batimetría real

El fin último del modelo de oleaje es, además de incorporarse al modelo de corrientes que se tratará en el siguiente capítulo, ofrecer a la práctica de la ingeniería una herramienta para aplicaciones reales. En este sentido, Mendoza y Silva (2004) realizaron una primera aplicación al desarrollar una metodología para la estimación del crecimiento de playa seca debido a la presencia de un dique arrecife. El ejercicio que se presenta en este apartado es la ejecución de un caso de propagación de ondas en una batimetría real; para tal efecto se eligió el puerto de Veracruz, cuya forma y batimetría se muestran en la Figura 3-17.

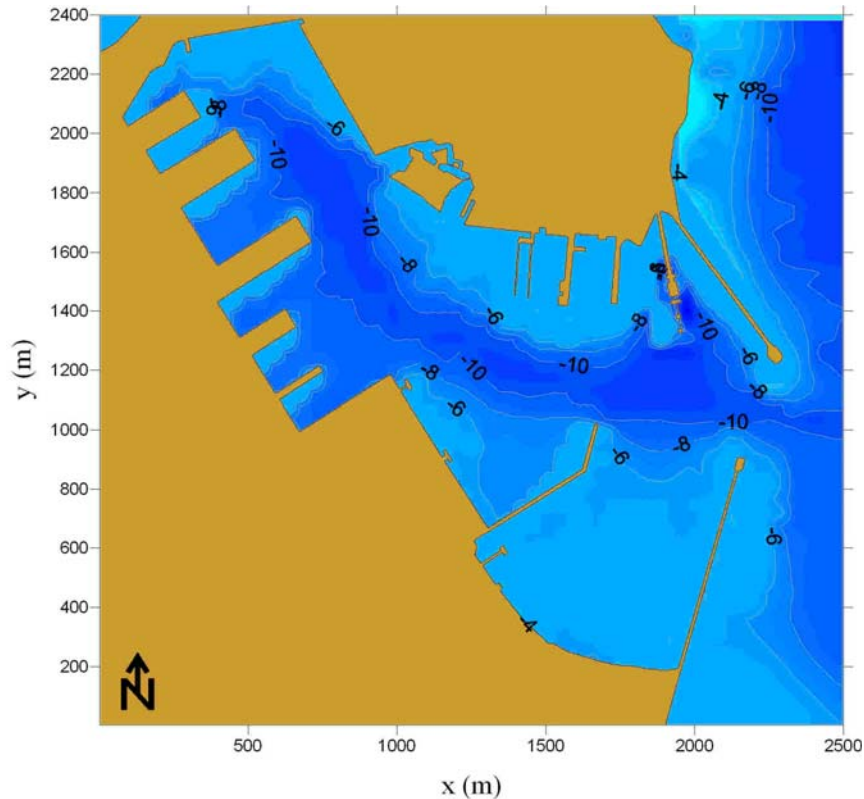


Figura 3-17 Batimetría del Puerto de Veracruz (profundidades en metros)

Este caso también se utilizó para mostrar la diferencia entre los resultados de los modelos que no consideran el efecto de obstáculos porosos de los que sí lo hacen. Específicamente se han realizado dos ejecuciones: la primera considera todos los rompeolas del puerto como impermeables, mientras que en la segunda, los ocho rompeolas exteriores se han simulado con una porosidad de $\epsilon = 0.5$.

La malla con que se discretizó el dominio es de tipo jerárquico con tamaño mínimo de celda $\delta = 2.5\text{ m}$ y una longitud $\Delta = 20\text{ m}$ de los lados de las celdas de la malla base. Se determinó que el número mínimo de puntos por longitud de onda es $n = 20$ y el oleaje es de altura unitaria con periodo de 15 s e incide desde la frontera este con dirección perpendicular a dicho contorno. A continuación se muestran los resultados de ambas modelaciones.

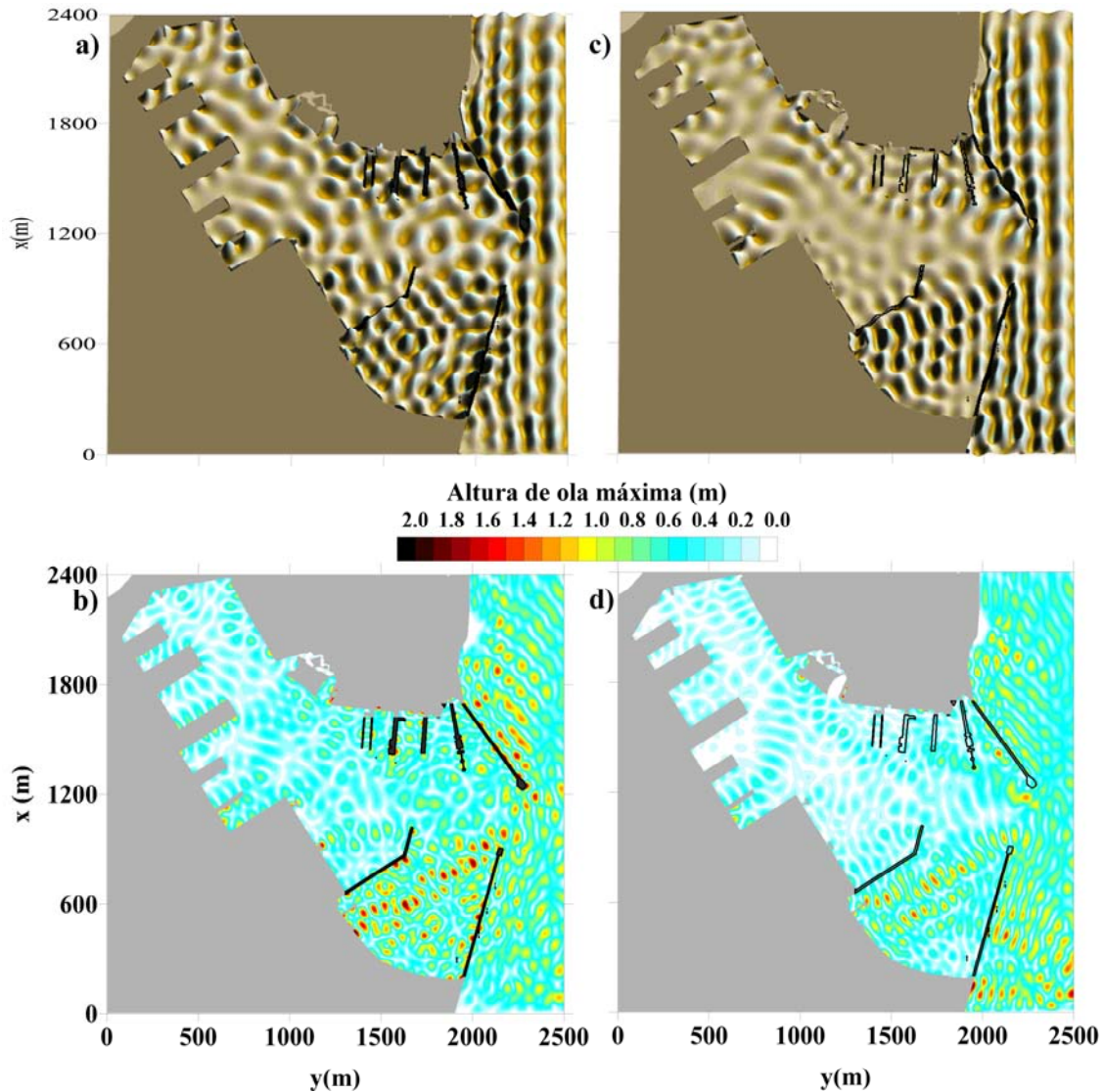


Figura 3-18 Modelación de un caso real. Rompeolas impermeables a) superficie libre instantánea, b) altura de ola máxima. Rompeolas porosos c) superficie libre instantánea, d) altura de ola máxima

Los resultados muestran claramente que el considerar los rompeolas impermeables provoca un aumento en las alturas de ola en algunas áreas al interior del puerto que podrían no estar ocurriendo en la realidad; adicionalmente, la reflexión hacia fuera de la instalación también es mayor y esto podría provocar cambios innecesarios en las rutas de navegación. Sin embargo, es interesante resaltar que la forma del campo de oleaje es similar en ambos casos, es decir, las zonas de máximos y de mínimos coinciden. En todo caso, con este ejemplo se han mostrado las capacidades del modelo.

CAPÍTULO IV.
MODELO DE CORRIENTES

4 MODELO DE CORRIENTES

En este capítulo se presenta la solución del sistema en 2-D conformado por las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento promediadas en la vertical, conocido también como ecuaciones para aguas someras. La solución emplea una aproximación de segundo orden tipo Godunov y los flujos en las interfaces de las celdas se calculan vía la aproximación de Roe al problema de Riemann. Por su parte, la integración temporal se realiza en un esquema Adams-Bashford de segundo orden.

4.1 Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones promediadas de Navier-Stokes, describen tanto el flujo en cuerpos de agua en los que la velocidad vertical es casi nula y la presión es considerada hidrostática como sus efectos, es decir, la generación de campos de corrientes y perturbaciones en la superficie libre del agua cuyas escalas de tiempo son mayores que la del periodo propio de la onda. Dichas ecuaciones son no lineales e imposibles de resolver analíticamente excepto por algunos casos específicos. De acuerdo con Mei (1989) y considerando el efecto de Coriolis, las ecuaciones de movimiento integradas en la vertical se pueden escribir como

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} - \left(\frac{\partial(\varepsilon hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hu_y)}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\tau_{bx}}{\rho} - gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + hfv - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2h)}{\partial y} - \left(\frac{\partial(\varepsilon hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hv_y)}{\partial y} \right) = \\ - \frac{\tau_{by}}{\rho} - gh \frac{\partial \eta}{\partial y} + hfu - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

- η elevación de la superficie libre sobre el nivel medio del mar, h_s
- u, v componentes del vector velocidad, el subíndice indica derivación.
- h profundidad total, $h = h_s + \eta$
- h_s profundidad del nivel medio de l mar
- g aceleración debida la gravedad terrestre
- ε viscosidad de remolino

$$\tau_{bi} \quad \text{esfuerzos debidos a la fricción del fondo, } \tau_{bx} = \frac{\rho g u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}, \tau_{by} = \frac{\rho g v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2}$$

- f parámetro de Coriolis
- S_{ij} componentes del tensor de radiación, cuya estimación se describe en seguida

4.1.1 Tensores de radiación

Desarrollados originalmente por Longuet-Higgins y Stewart (1962) quienes utilizan una analogía con las ondas electromagnéticas y la presión (o tensión) que inducen a obstáculos en su trayectoria. En estos trabajos se define un tensor de radiación como el exceso en el flujo de momentum debido a la presencia de las ondas.

Una forma para comprender el concepto de tensor de radiación, es partir de una onda de pequeña amplitud viajando en dirección x , tal que

$$u = \sigma a \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \quad (4.4)$$

$$w = \sigma a \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (4.5)$$

donde

- u velocidad horizontal de las partículas
- w velocidad vertical de las partículas
- a amplitud de la onda
- σ frecuencia angular
- k número de onda
- h profundidad
- t tiempo
- z coordenada vertical positiva desde el nivel medio del mar hacia arriba
- x coordenada horizontal

Se considera ahora el flujo horizontal de momentum por unidad de área a través de un plano vertical, el cual es igual a la presión ejercida sobre dicho plano, a saber,

$$M(x, t) = \int_{-h}^{\eta} (p + \rho u^2) dz \quad (4.6)$$

en la que p es la presión total (dinámica más hidrostática), por lo que ha de sustraerse la parte del flujo de momentum correspondiente a la presión hidrostática, a fin de considerar solo la debida a las ondas, quedando

$$S_{ij} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho u^2) dz} - \overline{\int_{-h}^0 p_0 dz} \quad (4.7)$$

donde

- S tensor de radiación
- i, j subíndices que indican que el flujo de momentum es en la dirección i a través de un plano definido por j constante
- ρ densidad del fluido
- p_0 presión hidrostática

η elevación de la superficie libre del mar

Desde este punto de vista, el tensor de radiación se define, alternativamente, como la diferencia entre el valor medio del flujo de momentum, $M(x,t)$, respecto del tiempo y el valor medio del mismo flujo en ausencia de ondas. Dicho tensor, ec. (4.7), para el caso de la onda representada por (4.4) y (4.5), puede descomponerse en tres términos,

$$\begin{aligned} S_{xx}^{(1)} &= \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u^2 dz} \\ S_{xx}^{(2)} &= \overline{\int_{-h}^0 (p - p_0) dz} \\ S_{xx}^{(3)} &= \int_0^{\eta} p dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

de tal forma que $S_{xx} = S_{xx}^{(1)} + S_{xx}^{(2)} + S_{xx}^{(3)}$.

Si se toma en cuenta que las ecuaciones (4.4) y (4.5) fueron desarrolladas a partir de la teoría de ondas de pequeña amplitud se tiene, para el primer término, que

$$S_{xx}^{(1)} = \overline{\int_{-h}^0 \rho u^2 dz} = \int_{-h}^0 \overline{\rho u^2} dz \quad (4.9)$$

en donde $S_{xx}^{(1)}$ es idéntico al tensor de Reynolds en la dirección de propagación.

Por otro lado, si se acepta que no existen efectos no hidrostáticos, el segundo término queda

$$S_{xx}^{(2)} = \int_{-h}^0 \overline{(p - p_0)} dz \quad (4.10)$$

Recordando la hipótesis de incompresibilidad del fluido, se tiene

$$\overline{p + \rho w^2} = -\rho g z = p_0 \quad (4.11)$$

de manera que

$$\overline{p} - p_0 = -\overline{\rho w^2} \quad (4.12)$$

lo cual indica que, en general, \overline{p} es menor que cero y por tanto $S_{xx}^{(2)} \leq 0$. La combinación de las ecuaciones (4.9), (4.10) y (4.12) resulta:

$$S_{xx}^{(1)} + S_{xx}^{(2)} = \int_{-h}^0 \overline{\rho (u^2 - w^2)} dz \quad (4.13)$$

donde es evidente que para cualquier caso excepto en aguas profundas $S_{xx}^{(1)} + S_{xx}^{(2)} > 0$.

Al integrar la ecuación (4.13) se llega a:

$$S_{xx}^{(1)} + S_{xx}^{(2)} = \frac{\rho g a^2 k h}{\sinh 2kh} \quad (4.14)$$

Es notorio que, en aguas profundas, la suma de los dos primeros términos del tensor de radiación es igual a cero ($\overline{u^2} = \overline{w^2}$); mientras que en aguas someras $\overline{w^2} = 0$. Esta suma es también igual al doble de la energía cinética.

El tercer término puede simplificarse si se acepta que la presión es casi-hidroestática, con lo que se estimaría como

$$p = \rho g (\eta - z) \quad (4.15)$$

lo cual, sustituido en $S_{xx}^{(3)}$ y recordando que $\eta = a \cos(kx - \sigma t)$ resulta

$$S_{xx}^{(3)} = \frac{\rho g \overline{\eta^2}}{2} = \frac{\rho g a^2}{8} \quad (4.16)$$

que equivale a la densidad de energía potencial.

Al combinar las ecuaciones (4.14) y (4.16) se llega a la definición del tensor de radiación

$$S_{xx} = \rho g a^2 \left(\frac{kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{4} \right) \quad (4.17)$$

Operando de la misma forma ahora para el eje y , y dado que $v = 0$, se llega a

$$S_{yy} = \rho g a^2 \frac{kh}{2 \sinh 2kh} \quad (4.18)$$

De modo que el tensor de radiación para el caso unidireccional queda representado por

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 \\ 0 & S_{yy} \end{pmatrix} = \rho g a^2 \begin{pmatrix} \frac{kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{kh}{2 \sinh 2kh} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Utilizando un desarrollo similar, los tensores de radiación para una onda progresiva viajando en una dirección θ respecto del eje x y sus respectivas simplificaciones en función de la profundidad relativa, son

- Tensor de radiación en aguas intermedias

$$S = \frac{\rho g a^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{2C_g}{C} \cos^2 \theta + \left(\frac{2C_g}{C} - 1 \right) & \frac{C_g}{C} \cos \theta \sin \theta \\ \frac{C_g}{C} \cos \theta \sin \theta & \frac{2C_g}{C} \sin^2 \theta + \left(\frac{2C_g}{C} - 1 \right) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

- Tensor de radiación para aguas profundas

$$S = \frac{\rho g a^2}{4} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

- Tensor de radiación para aguas someras

$$S = \frac{\rho g a^2}{4} \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta + 1 & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & 2 \sin^2 \theta + 1 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Aunque las ecuaciones (4.20), (4.21) y (4.22) han sido desarrolladas para fondo plano, constituyen una excelente aproximación al fondo variable si a y k se interpretan como los valores locales en cada profundidad h .

4.2 Descripción del método numérico

La simulación de flujos con discontinuidades (como saltos hidráulicos) ha sido, desde hace décadas, un reto en la hidrodinámica. Los estudios realizados al respecto llevaron a Godunov (1959) a desarrollar una técnica para la solución de sistemas hiperbólicos que consiste en reemplazar el flujo continuo en un dominio de cálculo por una serie de estados que se consideran constantes en pequeñas secciones y discontinuos al inicio y al final de cada una. De manera que se puede hallar una solución al problema de Riemann (definido como la existencia de discontinuidades locales en un flujo) para cada sección y reconstruir el campo general de flujo agrupando todas las soluciones locales.

El mismo Godunov (1959) presentó la solución exacta de dicha técnica, misma que resultó computacionalmente imposible para su época, por lo que desde entonces existe una gran variedad de soluciones aproximadas que se conocen como métodos de tipo Godunov (p.e. Harten et al, 1983; Toro, 1989; Roe, 1981a y b y Roe y Pike, 1984). A continuación se presenta la solución aproximada propuesta por Roe (1981a y b) aplicable para el caso de un sistema hiperbólico de leyes de conservación, misma que en este trabajo se empleará para la solución de las ecuaciones para aguas someras.

Matemáticamente, el problema de Riemann se define como resolver el sistema

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0 \quad (4.23)$$

en una discontinuidad de las variables de flujo contenidas en \mathbf{u} , siendo \mathbf{u} un vector de variables continuas en el resto del dominio, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ el vector de funciones de flujo de \mathbf{u} y x es una variable real y continua tal que para un caso unidimensional

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_L && \text{para } x < 0 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_R && \text{para } x > 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde los subíndices L y R indican izquierdo y derecho, respectivamente.

Para linealizar el problema, la ecuación (4.23) puede escribirse

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (4.25)$$

en la que el Jacobiano de flujo, \mathbf{A} , está dado por $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$. Como la solución que se busca corresponde a una onda viajando en cada lado de la discontinuidad se tiene

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}(x - \lambda t) \quad (4.26)$$

la que, sustituida en la ecuación (4.25) permite obtener la ecuación característica

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u}' = 0 \quad (4.27)$$

Los valores característicos, λ , de esta última expresión, son las velocidades características de las olas cuya dirección de propagación está dada por los correspondientes vectores característicos. Dado que la ecuación (4.23) es hiperbólica, la matriz \mathbf{A} debe tener solo valores característicos reales y distintos, con lo que los incrementos $\Delta \mathbf{u}$ y $\Delta \mathbf{f}$ a través de la discontinuidad siempre están definidos y se representan, en términos de los vectores característicos, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = \sum \alpha_k \mathbf{e}_k \\ \Delta \mathbf{f} &= \mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L = \sum \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde α_k son coeficientes lineales conocidos como esfuerzos de onda y λ_k y \mathbf{e}_k son el k -ésimo valor y vector característico, respectivamente. La principal característica de la solución aproximada de Roe es la posibilidad de calcular el flujo en la interfase de una celda, $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$, en forma directa, lo cual está definido por

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_L + \sum_{\lambda_k \leq 0} \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_L + \sum \alpha_k \lambda_k^- \mathbf{e}_k \quad (4.29)$$

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_R - \sum_{\lambda_k \geq 0} \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_R - \sum \alpha_k \lambda_k^+ \mathbf{e}_k$$

\mathbf{f}_R y \mathbf{f}_L son los flujos a la derecha e izquierda de la discontinuidad, respectivamente, y λ_k^+ y λ_k^- denotan las velocidades positiva y negativa de las ondas, respectivamente. Si las velocidades se definen como lo propusieron Harten et al (1983), a saber,

$$\begin{aligned} \lambda_k^+ &= \max(\lambda, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_k + |\lambda_k|) \\ \lambda_k^- &= \min(\lambda, 0) = \frac{1}{2}(\lambda_k - |\lambda_k|) \end{aligned} \quad (4.30)$$

los flujos en la interfase de la celda, ec. (4.29), quedan

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_R + \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k - \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k |\lambda_k| \mathbf{e}_k \quad (4.31)$$

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}_R + \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k - \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k |\lambda_k| \mathbf{e}_k \quad (4.32)$$

Al sumar la ecuación (4.31) a la (4.32) y promediar se llega a

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_R + \mathbf{f}_L) - \frac{1}{2} \sum_k \alpha_k |\lambda_k| \mathbf{e}_k \quad (4.33)$$

Considerando la ecuación (4.28) en la (4.33) los términos de la sumatoria se pueden escribir en función del incremento de velocidad $\Delta \mathbf{u}$ a través de la discontinuidad, con lo que se obtiene

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_R + \mathbf{f}_L) - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{u}_R + \mathbf{u}_L) \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) es conocida como la solución aproximada de Roe al problema de Riemann.

El uso de un modelo matemático no lineal y la implementación de una técnica numérica capaz de resolver discontinuidades en el flujo permiten el cálculo de la hidrodinámica en la zona de rompiente, que es donde se generan las corrientes costeras más importantes. Así mismo, facilita la solución de problemas de interacción del flujo con estructuras emergidas y sumergidas. Adicionalmente, el modelo elegido permite la inclusión de fenómenos como la fricción con el fondo, el esfuerzo en la superficie generado por el viento y los efectos de marea de manera directa.

4.3 Discretización en volumen finito de las ecuaciones para aguas someras

Para implementar numéricamente el sistema compuesto por las ecuaciones (4.1) a (4.3) en un esquema en volumen finito y resolverlas con el método de tipo Godunov descrito en el apartado previo, se debe garantizar la hiperbolicidad de dicho sistema. Para tal efecto, es práctica común la siguiente separación del término $gh \partial \eta / \partial x$ (Anastasiou y Chan, 1997; Zhao et al, 1996):

$$gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = gh S_{ox} + \frac{1}{2} g \frac{\partial (h^2)}{\partial x} \quad (4.35)$$

donde S_{ox} es la pendiente del fondo en dirección x . Sin embargo, de acuerdo con Rogers (2001), esta separación puede provocar problemas numéricos relacionados con la continuidad al aplicar la aproximación de Roe, por lo que propone la siguiente redistribución del término en cuestión

$$gh \frac{\partial \eta}{\partial x} = g \eta S_{ox} + \frac{1}{2} g \frac{\partial (\eta^2 + 2\eta h_s)}{\partial x} \quad (4.36)$$

Al aplicar esta misma separación al término correspondiente en la dirección y , las ecuaciones de gobierno quedan de la siguiente forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial\left(u^2h + \frac{1}{2}g(\eta^2 + 2h_s)\right)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} - \left(\frac{\partial(\varepsilon hu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hu_y)}{\partial y}\right) = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} - g\eta S_{ox} + hfv - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right) \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v^2h + \frac{1}{2}g(\eta^2 + 2h_s)\right)}{\partial y} - \left(\frac{\partial(\varepsilon hv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hv_y)}{\partial y}\right) = -\frac{\tau_{by}}{\rho} - g\eta S_{oy} + hfu - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right) \quad (4.39)$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse en forma integral como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{h} d\Omega \quad (4.40)$$

Ω representa el dominio de cálculo, \mathbf{q} es el vector de variables conservativas, \mathbf{f} y \mathbf{g} son los vectores de flujo y \mathbf{h} el vector de fuerzas externas. Dichos vectores corresponden a

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta \\ q_x = uh \\ q_y = vh \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g(\eta^2 + 2\eta h_s)/2 - vh \partial u / \partial x \\ uvh - \varepsilon h \partial v / \partial x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh - \varepsilon h \partial u / \partial y \\ v^2h + g(\eta^2 + 2\eta h_s)/2 - \varepsilon h \partial v / \partial y \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{bx}/\rho - g\eta S_{ox} + hfv - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}\right) \\ -\tau_{by}/\rho - g\eta S_{oy} - hfu - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial S_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

Al aplicar el teorema de Green al segundo término de la ecuación (4.40) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{q} d\Omega + \oint_S \hat{\mathbf{f}}_s dS = \int_{\Omega} \mathbf{h} d\Omega \quad (4.42)$$

en la que S es la frontera de Ω y $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_x + \mathbf{g}n_y$ es el vector de funciones de flujo a través de S , siendo n_x y n_y los componentes cartesianos de un vector, \mathbf{n} , normal a S . En este caso, el vector de funciones de flujo se ha expresado como la suma de los flujos viscosos y los no viscosos, esto es

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^I - \varepsilon \mathbf{f}^V \quad (4.43)$$

donde

$$\mathbf{f}^I = \begin{bmatrix} uhn_x + vhn_y \\ \left(u^2h + g \left[\eta^2 + 2\eta h_s \right] / 2 \right) n_x + uvhn_y \\ uvhn_x + \left(v^2h + g \left[\eta^2 + 2\eta h_s \right] / 2 \right) n_y \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{f}^V = \begin{bmatrix} 0 \\ (h \partial u / \partial x) n_x + (h \partial u / \partial y) n_y \\ (h \partial v / \partial x) n_x + (h \partial v / \partial y) n_y \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

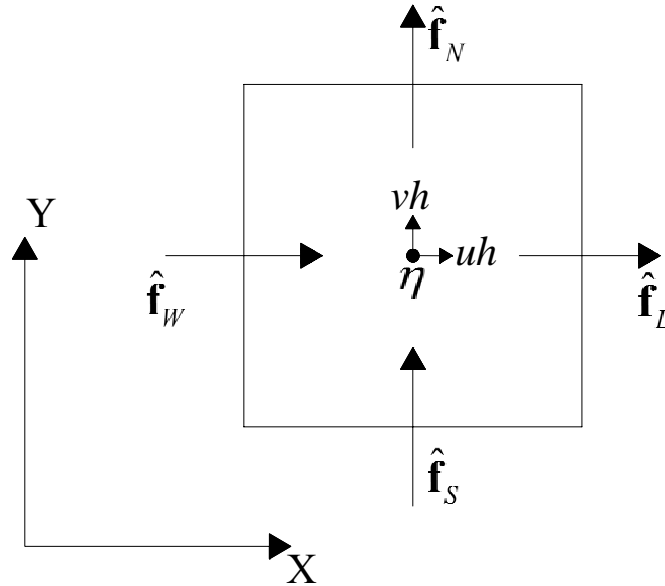


Figura 4-1 Esquema del volumen de control y localización de las variables

De este modo, las ecuaciones se han discretizado considerando que las variables son representativas de un volumen de control y su colocación es al centro de éste, tal como se muestra en la Figura 4-1. Finalmente, al integrar la ecuación (4.42) se puede escribir, para cada celda, como

$$\left. \frac{\partial V \mathbf{q}}{\partial t} \right|_i = - \oint_{\partial C_i} \hat{\mathbf{f}}_i ds + V_i \mathbf{h}_i \quad (4.45)$$

\mathbf{q}_i y \mathbf{h}_i son los valores al centro y V_i es el área de la celda i . Por otro lado, la trayectoria de integración ∂C_i es a lo largo de los cuatro bordes de la celda, por lo que la integral de superficie puede ser evaluada como

$$\oint_{\partial C_i} \hat{\mathbf{f}}_i ds = (\hat{\mathbf{f}}_E - \hat{\mathbf{f}}_W + \hat{\mathbf{f}}_N - \hat{\mathbf{f}}_S) \Delta s \quad (4.46)$$

donde $\hat{\mathbf{f}}_E$, $\hat{\mathbf{f}}_W$, $\hat{\mathbf{f}}_N$ y $\hat{\mathbf{f}}_S$ son los vectores de flujo a través de las caras este, oeste, norte y sur de cada celda, respectivamente (Figura 4-1).

4.4 Implementación numérica

La metodología de solución numérica, a la luz de la aproximación y discretización descritas anteriormente, consiste en cuatro grandes pasos, mismos que se enlistan a continuación y en adelante se detallarán

1. Estimación de los estados de Riemann
2. Evaluación del Jacobiano de flujo
3. Cálculo de las funciones de flujo
4. Integración temporal

La parte final de este apartado detalla las condiciones de frontera empleadas.

4.4.1 Estimación de los estados de Riemann

El primer paso para hallar la solución de la ecuación (4.45) es el cálculo de los estados de Riemann a cada lado de la interfase entre celdas, es de notar que cada celda, al contar con cuatro interfases, tendrá asociados ocho estados de Riemann, cuatro internos y cuatro externos. La expresión general para el cálculo de los estados de Riemann es

$$\mathbf{q}(x, y) = \mathbf{q}_i + \frac{\Phi(r)}{2} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}) \quad (4.47)$$

$\Phi(r)$ es una función denominada limitador de flujo, la cual cumple la función de controlar o limitar los gradientes en las interfases de forma que los valores de los estados de Riemann permanezcan dentro del rango de los valores al centro de las celdas. El limitador de flujo está definido por

$$\Phi(r) = \max [0, \min(\beta r, 1), \min(r, \beta)] \quad (4.48)$$

donde $1 \leq \beta \leq 2$ es un parámetro que hace el limitador mas compresivo (reducción de picos) a medida que aumenta su valor y r es la relación de gradientes definida por

$$r = \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}} \quad (4.49)$$

La ubicación de los estados de Riemann internos y externos se muestra a continuación, donde es claro que los estados externos de una celda corresponden con los internos de las adyacentes.

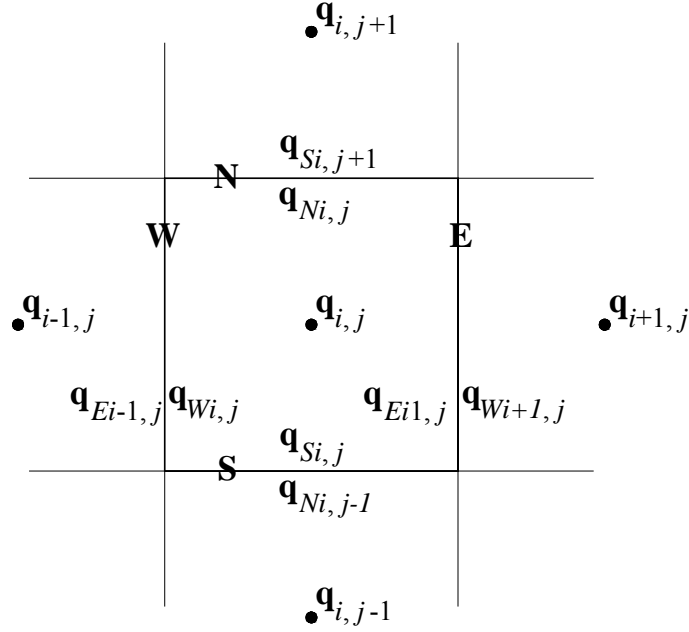


Figura 4-2 Estados de Riemann

Atendiendo a la nomenclatura presentada en la Figura 4-2, el estado de Riemann al lado Oeste queda definido como

$$\mathbf{q}_{W i,j} = \mathbf{q}_{i,j} - \frac{\Phi(r)}{2} (\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i-1,j}) \quad (4.50)$$

donde $r = \frac{\mathbf{q}_{i+1,j} - \mathbf{q}_{i,j}}{\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i-1,j}}$ y $\Phi(r)$ se calcula como dice la ecuación (4.48), lo cual en forma extendida es

$$\eta_{W i,j} = \eta_{i,j} - \frac{\Phi(r_1)}{2} (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) \text{ con } r_1 = \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}}{\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}} \text{ pero si } |\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_1) = 0$$

$$q_{xW i,j} = q_{xi,j} - \frac{\Phi(r_2)}{2} (q_{xi,j} - q_{xi-1,j}) \text{ con } r_2 = \frac{q_{xi+1,j} - q_{xi,j}}{q_{xi,j} - q_{xi-1,j}} \text{ pero si } |q_{xi,j} - q_{xi-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_2) = 0$$

$$q_{yW i,j} = q_{yi,j} - \frac{\Phi(r_3)}{2} (q_{yi,j} - q_{yi-1,j}) \text{ con } r_3 = \frac{q_{yi+1,j} - q_{yi,j}}{q_{yi,j} - q_{yi-1,j}} \text{ pero si } |q_{yi,j} - q_{yi-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_3) = 0$$

De manera similar, el estado de Riemann al lado Este se calcula con

$$\mathbf{q}_{E i,j} = \mathbf{q}_{i,j} + \frac{\Phi(r)}{2} (\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i-1,j}) \quad (4.51)$$

y en forma extendida

$$\begin{aligned}\eta_{E i,j} &= \eta_{i,j} + \frac{\Phi(r_1)}{2}(\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) \\ q_{xE i,j} &= q_{xi,j} + \frac{\Phi(r_2)}{2}(q_{xi,j} - q_{xi-1,j}) \\ q_{yE i,j} &= q_{yi,j} + \frac{\Phi(r_2)}{2}(q_{yi,j} - q_{yi-1,j})\end{aligned}$$

con r_1, r_2 y r_3 idénticos al lado Oeste.

Por lo que toca a la dirección vertical, para el estado del Riemann al lado Sur se tiene

$$\mathbf{q}_{S i,j} = \mathbf{q}_{i,j} - \frac{\Phi(r)}{2}(\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i,j-1}) \quad (4.52)$$

ahora $r = \frac{\mathbf{q}_{i,j+1} - \mathbf{q}_{i,j}}{\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i,j-1}}$ y la definición de $\Phi(r)$ es la ecuación (4.48). Escribiendo los componentes del vector \mathbf{q} , queda

$$\begin{aligned}\eta_{S i,j} &= \eta_{i,j} - \frac{\Phi(r_4)}{2}(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}) \text{ con } r_4 = \frac{\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j}}{\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}} \text{ pero si } |\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_4) = 0 \\ q_{xS i,j} &= q_{xi,j} - \frac{\Phi(r_5)}{2}(q_{xi,j} - q_{xi,j-1}) \text{ con } r_5 = \frac{q_{xi,j+1} - q_{xi,j}}{q_{xi,j} - q_{xi,j-1}} \text{ pero si } |q_{xi,j} - q_{xi,j-1}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_5) = 0 \\ q_{yS i,j} &= q_{yi,j} - \frac{\Phi(r_6)}{2}(q_{yi,j} - q_{yi,j-1}) \text{ con } r_6 = \frac{q_{yi,j+1} - q_{yi,j}}{q_{yi,j} - q_{yi,j-1}} \text{ pero si } |q_{yi,j} - q_{yi,j-1}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_6) = 0\end{aligned}$$

Finalmente, el lado Norte se estima a partir de la expresión

$$\mathbf{q}_{N i,j} = \mathbf{q}_{i,j} + \frac{\Phi(r)}{2}(\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_{i,j-1}) \quad (4.53)$$

es decir,

$$\begin{aligned}\eta_{N i,j} &= \eta_{i,j} + \frac{\Phi(r_4)}{2}(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1}) \\ q_{xN i,j} &= q_{xi,j} + \frac{\Phi(r_5)}{2}(q_{xi,j} - q_{xi,j-1}) \\ q_{yN i,j} &= q_{yi,j} + \frac{\Phi(r_6)}{2}(q_{yi,j} - q_{yi,j-1})\end{aligned}$$

con r_4, r_5 y r_6 idénticos al lado Sur.

4.4.2 Evaluación del Jacobiano de flujo

Para el cálculo de las funciones de flujo de acuerdo con la aproximación de Roe, ec. (4.34), es necesario conocer y evaluar el Jacobiano de flujo, \mathbf{A} , el cual como se dijo, debe tener solo valores característicos reales y distintos. Dicho Jacobiano, en términos de los flujos no viscosos, está dado por

$$\mathbf{A} = \frac{\partial(\mathbf{f}^1)}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - v^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

que tiene por valores característicos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= un_x + vn_y \\ \lambda_2 &= un_x + vn_y - cn \\ \lambda_3 &= un_x + vn_y + cn \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde c es la celeridad de la onda y $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$. Además

$$u = \frac{u^+ \sqrt{h^+} + u^- \sqrt{h^-}}{\sqrt{h^+} + \sqrt{h^-}} \quad v = \frac{v^+ \sqrt{h^+} + v^- \sqrt{h^-}}{\sqrt{h^+} + \sqrt{h^-}} \quad c = \sqrt{\frac{g(h^+ + h^-)}{2}} \quad (4.56)$$

en las que los subíndices + y - indican los estados de Riemann al lado derecho e izquierdo de cada interfase entre celdas, respectivamente.

Para calcular el absoluto del Jacobiano $|\mathbf{A}|$ se emplean \mathbf{L} y \mathbf{R} , a saber, las matrices izquierda y derecha de vectores característicos de \mathbf{A} , así como $|\Lambda|$, la matriz diagonal con los absolutos de los valores característicos de \mathbf{A} , esto es

$$|\mathbf{A}| = \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{L} \quad (4.57)$$

siendo

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ n_y & u - cn_x/n & u + cn_x/n \\ -n_x & v - cn_y/n & v + cn_y/n \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -(un_y - vn_y)/n^2 & n_y/n^2 & -n_x/n^2 \\ 1/2 + (un_x + vn_y)/2cn & -n_x/2cn & -n_y/2cn \\ 1/2 - (un_x + vn_y)/2cn & n_x/2cn & n_y/2cn \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$$|\Lambda| = \begin{bmatrix} |unx + vny| & 0 & 0 \\ 0 & |un_x + vn_y - cn| & 0 \\ 0 & 0 & |un_x + vn_y + cn| \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Para la aplicación del Jacobiano reflujo en la dirección X se tiene que $n_x = 1$, $n_y = 0$, y $n = 1$ con lo que los valores característicos son $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - c$ y $\lambda_3 = u + c$. De esta forma \mathbf{R} , \mathbf{L} y $|\Lambda|$ son

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & u - c & u + c \\ -1 & v & v \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} 2cv & 0 & -2c \\ c + u & -1 & 0 \\ c - u & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } |\Lambda| = \begin{bmatrix} |u| & 0 & 0 \\ 0 & |u - c| & 0 \\ 0 & 0 & |u + c| \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Con estas matrices, al efectuar las operaciones indicadas en la ecuación (4.57) se llega a

$$|\mathbf{A}|_x = \frac{1}{2c} \times \begin{bmatrix} (c+u)|u-c| + (c-u)|u+c| & -|u-c| + |u+c| & 0 \\ (c+u)(u-c)(|u-c| - |u+c|) & (u+c)|u+c| - (u-c)|u-c| & 0 \\ v[-2c|u| + (c+u)|u-c| + (c-u)|u+c|] & v[|u+c| - |u-c|] & 2c|u| \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

De manera similar, para la dirección Y; $n_x = 0$, $n_y = 1$, y $n = 1$ y con ello $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v - c$ y $\lambda_3 = v + c$, quedando

$$|\mathbf{A}|_y = \frac{1}{2c} \times \begin{bmatrix} (c+v)|v-c| + (c-v)|v+c| & 0 & |v+c| - |v-c| \\ u[-2c|v| + (c+v)|v-c| + (c-v)|v+c|] & 2c|v| & u[|v+c| - |v-c|] \\ (c+v)(c-v)(|v+c| - |v-c|) & 0 & (v+c)|v+c| - (v-c)|v-c| \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

4.4.3 Cálculo de las funciones de flujo

De acuerdo con la expresión (4.43) las funciones de flujo pueden estimarse por separado según estén relacionados con la viscosidad o no. Así, y aplicando la solución aproximada de Roe ecuación (4.34), los flujos no viscosos se calculan como

$$\mathbf{f}_{i,j}^I = \frac{1}{2} [\mathbf{f}^I(\mathbf{q}^+) + \mathbf{f}^I(\mathbf{q}^-) - |\mathbf{A}|(\mathbf{q}^+ - \mathbf{q}^-)] \quad (4.64)$$

en la que los superíndices + y - denotan el estado de Riemann al lado derecho e izquierdo de la interfase entre celdas, respectivamente.

Para la presentación de la forma extendida, considérense los flujos en la dirección X. Se tiene el flujo Oeste definido por

$$\mathbf{f}_{Wi,j}^1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Wi,j}) + \mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ei-1,j}) - |\mathbf{A}_x| (\mathbf{q}_{Wi,j} - \mathbf{q}_{Ei-1,j}) \right] \quad (4.65)$$

donde

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Wi,j}) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + g \left[\eta^2 + 2\eta h_s \right] / 2 \\ uvh \end{bmatrix}_{Wi,j} = \begin{bmatrix} q_{xWi,j} \\ q_{xWi,j}^2 / h_{Wi,j} + g \left[\eta_{Wi,j}^2 + 2\eta_{Wi,j} h_{sWi,j} \right] / 2 \\ q_{xWi,j} q_{yWi,j} / h_{Wi,j} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

con $h_{sWi,j} = (hs_{i,j} + hs_{i-1,j})/2$ y $h_{Wi,j} = h_{sWi,j} + \eta_{Wi,j}$. Por su parte

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ei-1,j}) = \begin{bmatrix} q_{xEi-1,j} \\ q_{xEi-1,j}^2 / h_{Ei-1,j} + g \left[\eta_{Ei-1,j}^2 + 2\eta_{Ei-1,j} h_{sEi-1,j} \right] / 2 \\ q_{xEi-1,j} q_{yEi-1,j} / h_{Ei-1,j} \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

siendo $h_{sEi-1,j} = h_{sWi,j}$ y $h_{Ei-1,j} = h_{sEi-1,j} + \eta_{Ei-1,j}$. El caso del flujo Este es similar, ya que

$$\mathbf{f}_{Ei,j}^1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Wi+1,j}) + \mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ei,j}) - |\mathbf{A}_x| (\mathbf{q}_{Wi+1,j} - \mathbf{q}_{Ei,j}) \right] \quad (4.68)$$

donde

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Wi+1,j}) = \begin{bmatrix} q_{xWi+1,j} \\ q_{xWi+1,j}^2 / h_{Wi+1,j} + g \left[\eta_{Wi+1,j}^2 + 2\eta_{Wi+1,j} h_{sWi+1,j} \right] / 2 \\ q_{xWi+1,j} q_{yWi+1,j} / h_{Wi+1,j} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

en la que $h_{sWi+1,j} = (hs_{i+1,j} + hs_{i,j})/2$ y $h_{Wi+1,j} = h_{sWi+1,j} + \eta_{Wi+1,j}$. De igual forma

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ei,j}) = \begin{bmatrix} q_{xEi,j} \\ q_{xEi,j}^2 / h_{Ei,j} + g \left[\eta_{Ei,j}^2 + 2\eta_{Ei,j} h_{sEi,j} \right] / 2 \\ q_{xEi,j} q_{yEi,j} / h_{Ei,j} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

con $h_{sEi,j} = h_{sWi+1,j}$ y $h_{Ei,j} = h_{sEi,j} + \eta_{Ei,j}$.

La función de flujos no viscosos en la dirección Y, tiene por ecuación la siguiente

$$\mathbf{f}_{Si,j}^1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Si,j}) + \mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ni,j-1}) - |\mathbf{A}_y| (\mathbf{q}_{Si,j-1} - \mathbf{q}_{Ni,j-1}) \right] \quad (4.71)$$

donde

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Si,j}) = \begin{bmatrix} q_{ySi,j} \\ q_{xSi,j}q_{ySi,j}/h_{Si,j} \\ q_{ySi,j}^2/h_{Si,j} + g[\eta_{Si,j}^2 + 2\eta_{Si,j}h_{sSi,j}]/2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

siendo $h_{sSi,j} = (hs_{i,j} + hs_{i,j-1})/2$ y $h_{Si,j} = h_{sSi,j} + \eta_{Si,j}$. Adicionalmente

$$\mathbf{f}^1(q_{Ni,j-1}) = \begin{bmatrix} q_{yNi,j-1} \\ q_{xNi,j-1}q_{yNi,j-1}/h_{Ni,j-1} \\ q_{yNi,j-1}^2/h_{Ni,j-1} + g[\eta_{Ni,j-1}^2 + 2\eta_{Ni,j-1}h_{sNi,j-1}]/2 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

en la que $h_{sNi,j-1} = h_{sSi,j}$ y $h_{Ni,j-1} = h_{sNi,j-1} + \eta_{Ni,j-1}$. Finalmente el flujo en el lado Norte es

$$\mathbf{f}_{Ni,j}^1 = \frac{1}{2}[\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Si,j+1}) + \mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ni,j}) - |\mathbf{A}_y|(\mathbf{q}_{Si,j+1} - \mathbf{q}_{Ni,j})] \quad (4.74)$$

donde

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Si,j+1}) = \begin{bmatrix} q_{ySi,j+1} \\ q_{xSi,j+1}q_{ySi,j+1}/h_{Si,j+1} \\ q_{ySi,j+1}^2/h_{Si,j+1} + g[\eta_{Si,j+1}^2 + 2\eta_{Si,j+1}h_{sSi,j+1}]/2 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

con $h_{sSi,j+1} = (hs_{i,j+1} + hs_{i,j})/2$ y $h_{Si,j+1} = h_{sSi,j+1} + \eta_{Si,j+1}$. Análogamente

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{q}_{Ni,j}) = \begin{bmatrix} q_{yNi,j} \\ q_{xNi,j}q_{yNi,j}/h_{Ni,j} \\ q_{yNi,j}^2/h_{Ni,j} + g[\eta_{Ni,j}^2 + 2\eta_{Ni,j}h_{sNi,j}]/2 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

siendo $h_{sNi,j} = h_{sSi,j+1}$ y $h_{Ni,j} = h_{sNi,j} + \eta_{Ni,j}$.

Para el cálculo de los flujos viscosos se utiliza un esquema de diferencias centrado tal que, para la dirección X se tiene

$$\mathbf{f}_{xi,j}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ h\partial u/\partial x \\ h\partial v/\partial x \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ h_{i,j} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

y para la dirección Y

$$\mathbf{f}_{y,i,j}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ h \partial u / \partial y \\ h \partial v / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ h_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

4.4.4 Integración temporal

La solución a las ecuaciones para aguas someras en un instante dado $t = n\Delta t$, siendo Δt el incremento temporal (paso de tiempo), está dada por la ecuación (4.45), de donde la integración temporal vía el método de segundo orden de Adams-Bashford es

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n + \frac{\Delta t}{V_i^n} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial V \mathbf{q}}{\partial t} \Big|_i^n - \frac{1}{2} \frac{\partial V \mathbf{q}}{\partial t} \Big|_i^{n-1} \right) \quad (4.79)$$

en la que n de nota el nivel de avance temporal. El paso de tiempo se ha determinado por un proceso de prueba y error, ya que la estabilidad de la solución, además de estar afectada por el tamaño de las celdas y la velocidad del flujo, depende de la estabilidad del método de Adams-Bashford y del tiempo que puede tomar a las ondas generadas en discontinuidades resueltas como problemas de Riemann independientes, interactuar entre si. Por lo que el criterio de Courant se convierte en una condición necesaria pero no suficiente en la selección del incremento temporal.

4.4.5 Condiciones de frontera

La implementación numérica aquí presentada se ha codificado con la capacidad de representar solo fronteras totalmente abiertas o total mente reflejantes, para lo cual, en el estado de Riemann correspondiente se agrega una celda ficticia que permita la salida del flujo o lo refleje hacia dentro del dominio. De esta forma el estado de Riemann para una celda en la frontera oeste es

$$\mathbf{q}_{w,i,j} = \mathbf{q}_{i,j} - \frac{\Phi(r)}{2} (\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_G) \quad (4.80)$$

donde \mathbf{q}_G es el vector de variables correspondiente a la celda ficticia añadida al lado oeste fuera del dominio de cálculo y $r = (\mathbf{q}_{i+1,j} - \mathbf{q}_{i,j}) / (\mathbf{q}_{i,j} - \mathbf{q}_G)$. Los valores que toma la celda ficticia dependen de la condición de frontera que se imponga, esto es, para la condición de frontera abierta al lado oeste se tiene

$$\mathbf{q}_G = \mathbf{q}_{1,j} = \begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ q_{xi,j} \\ q_{y1,j} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

mientras que para la condición reflejante, la celda ficticia, en el caso de frontera deslizante es

$$\mathbf{q}_G = \begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ 0 \\ q_{y1,j} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

y para el caso no deslizante queda

$$\mathbf{q}_G = \begin{bmatrix} \eta_{1,j} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Las expresiones en forma explícita para esta frontera son

$$\eta_{W i,j} = \eta_{i,j} - \frac{\Phi(r_1)}{2} (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) \text{ con } r_1 = \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}}{\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}} \text{ pero si } |\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_1) = 0$$

$$q_{xW i,j} = q_{xi,j} - \frac{\Phi(r_2)}{2} (q_{xi,j}) \text{ con } r_2 = \frac{q_{xi+1,j} - q_{xi,j}}{q_{xi,j}} \text{ pero si } |q_{xi,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_2) = 0$$

$$q_{yW i,j} = q_{yi,j} - \frac{\Phi(r_3)}{2} (q_{yi,j} - q_{yi-1,j}) \text{ con } r_3 = \frac{q_{yi+1,j} - q_{yi,j}}{q_{yi,j} - q_{yi-1,j}} \text{ pero si } |q_{yi,j} - q_{yi-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_3) = 0$$

para el caso deslizante y

$$\eta_{W i,j} = \eta_{i,j} - \frac{\Phi(r_1)}{2} (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) \text{ con } r_1 = \frac{\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}}{\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}} \text{ pero si } |\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_1) = 0$$

$$q_{xW i,j} = q_{xi,j} - \frac{\Phi(r_2)}{2} (q_{xi,j}) \text{ con } r_2 = \frac{q_{xi+1,j} - q_{xi,j}}{q_{xi,j}} \text{ pero si } |q_{xi,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_2) = 0$$

$$q_{yW i,j} = q_{yi,j} - \frac{\Phi(r_3)}{2} (q_{yi,j}) \text{ con } r_3 = \frac{q_{yi+1,j} - q_{yi,j}}{q_{yi,j}} \text{ pero si } |q_{yi,j}| \leq 0 \rightarrow \Phi(r_3) = 0$$

para el no deslizante.

El resto de las fronteras, así como la ocurrencia de islas o zonas de tierra dentro del dominio de cálculo se resuelven de forma análoga.

CAPÍTULO V.
RESULTADOS DEL MODELO UNIFICADO

5 RESULTADOS DEL MODELO UNIFICADO

5.1 Introducción

La construcción del modelo unificado consiste en ligar los resultados obtenidos de la propagación de oleaje con la información de entrada del modelo de corrientes para así lograr una ejecución completa. Esta metodología pretende proveer una opción a bajo costo para la simulación de escenarios costeros que coadyuve en el diseño óptimo de obras de defensa, puertos y aprovechamientos litorales. Adicionalmente, los resultados de dicha simulación pueden ser empleados como datos de entrada para modelos de transporte de sedimentos o de calidad de agua en zonas cercanas a la playa. En todo caso este modelo no es un fin en sí mismo sino un eslabón dentro de la cadena de trabajos que se requieren para el desarrollo y explotación responsable de los recursos litorales.

En este sentido, las herramientas que se ofrezcan a los ingenieros costeros deben ser previamente validadas y probadas a fin de garantizar que las obras, recursos económicos y aún vidas humanas que de sus resultados dependen sean efectivamente asegurados.

5.2 Ejercicios de validación

Como ejercicios de validación y prueba del modelo se utilizaron cuatro casos buscando cubrir el más amplio rango de condiciones posible. La validación incluye comparación con datos de laboratorio y con una solución analítica. Los datos empleados son: 1) Circulación en la corriente inducida por efecto del fondo en una playa sinusoidal, 2) Corrientes costeras dentro de una bahía y 3) Dinámica generada por un obstáculo vertical.

5.2.1 Circulación en una playa sinusoidal

Representar el lecho marino como un fondo plano ofrece una serie de ventajas durante los desarrollos analíticos, sin embargo, es una suposición que pierde validez muy fácilmente. Es el caso de la hidrodinámica en la zona costera, donde el efecto de las variaciones del fondo predomina sobre otros factores en la distorsión del oleaje por fenómenos como la refracción, el someramiento y la rotura. El resultado de esta perturbación son las corrientes longitudinales y las zonas de circulación (giros).

En este sentido se eligió, con propósitos de validación, el trabajo experimental realizado por da Silva Lima (1981) que consiste en una playa construida de madera con líneas batimétricas sinusoidales definidas por

$$h(x, y) = \begin{cases} sx & -0.7 \text{ m} \leq x \leq 0 \\ s \left[x - 0.75 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{4.36} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \right) \right] & 0 \leq x \leq 4.36 \text{ m} \end{cases} \quad (5.1)$$

donde x es la distancia desde la línea de costa hacia mar adentro, y es la distancia paralela a la playa ($1.5 \text{ m} \leq y \leq 4.5 \text{ m}$), $s = 0.05$ es la pendiente de la playa recta y $\lambda = 6 \text{ m}$ es un parámetro llamado espacio de la corriente de rizo. En la Figura 5-1 se muestra una vista en planta del modelo experimental.

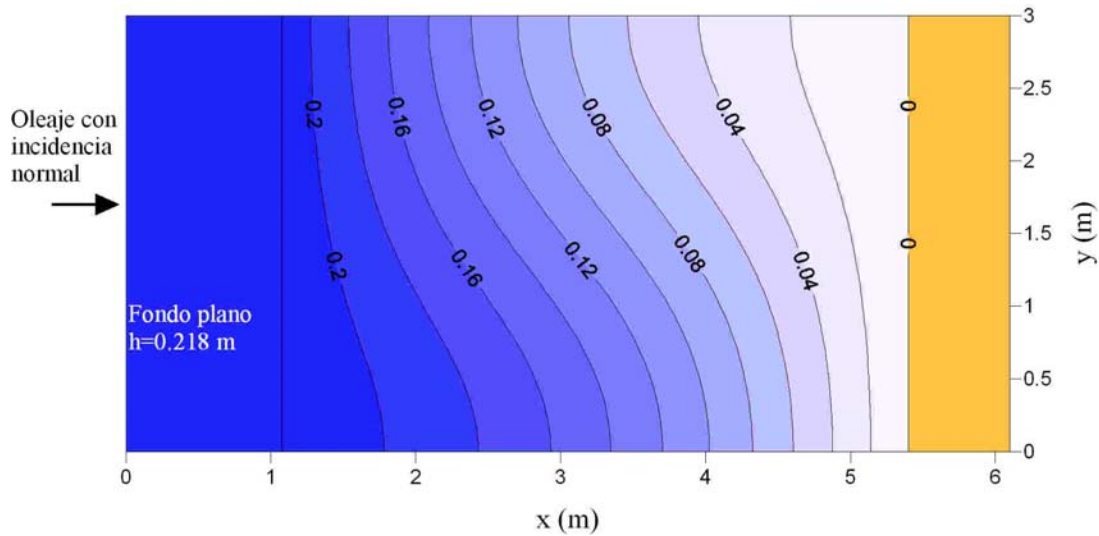


Figura 5-1 Modelo experimental de playa sinusoidal (profundidades en metros)

Los resultados numéricos de la propagación muestran el efecto del fondo en la onda incidente por refracción, someramiento y rotura como se puede observar en la siguiente figura. El oleaje, como se indica en la Figura 5-1, incide desde la frontera izquierda con dirección perpendicular a dicho contorno y altura de 0.0618 m, el periodo es de 0.76 s. En la ejecución del modelo de propagación se incluyó la disipación por rotura del oleaje. En este caso se utilizaron celdas con $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ m}$. La altura de ola estimada se presenta en la Figura 5-2.

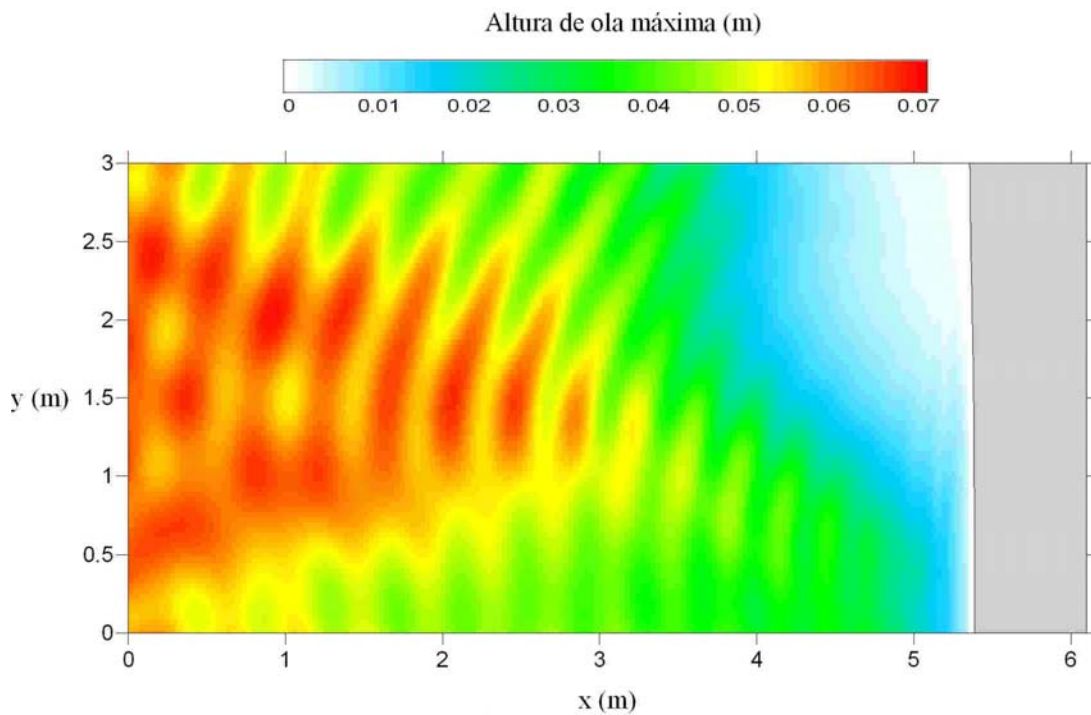


Figura 5-2 Campo de altura de ola máxima para la playa sinusoidal

La Figura 5-3 muestra las corrientes inducidas por oleaje calculadas con el modelo unificado. La principal característica es el giro que domina la hidrodinámica local. Adicionalmente se presenta un segundo giro prácticamente pegado a la línea de costa. Por lo que respecta a las velocidades cerca de la frontera por donde entra la onda y en toda la zona de fondo plano, son prácticamente nulas.

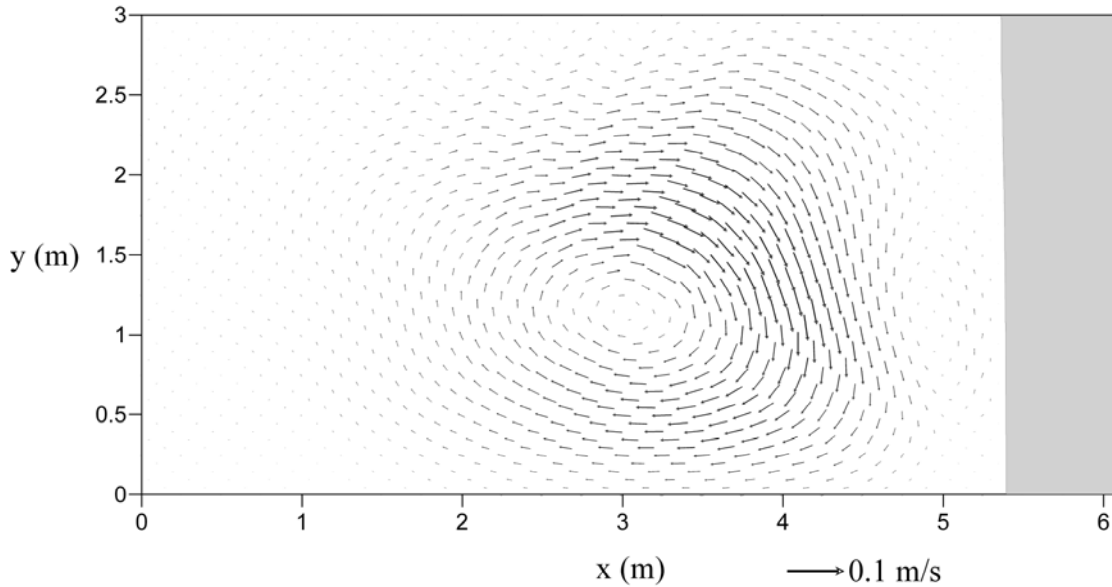


Figura 5-3 Corrientes inducidas en la playa sinusoidal

Los resultados que se obtuvieron con el modelo unificado son congruentes con los datos de laboratorio presentados por da Silva Lima (1999), que se muestran en la Figura 5-4. En ella es evidente la rotación principal en sentido horario con magnitudes máximas del orden de 0.1 m/s, similares a las predicciones numéricas. El trabajo experimental también evidencia ligeramente el giro en sentido horario ubicado muy cerca de la línea de costa.

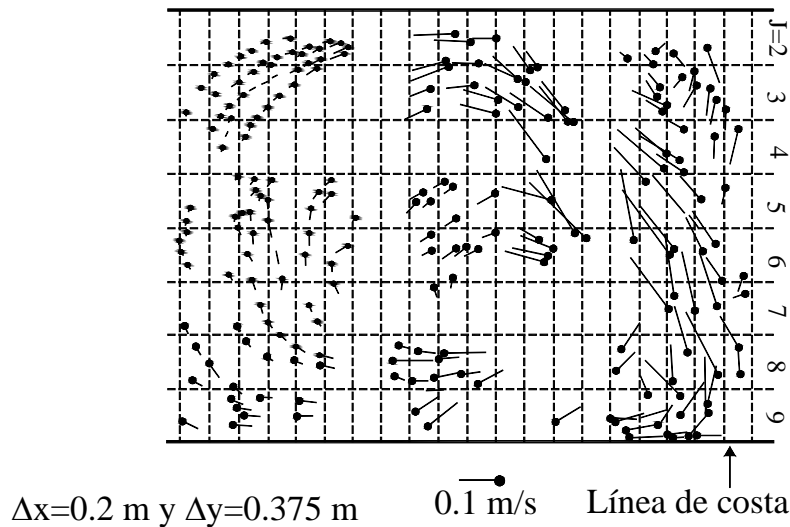


Figura 5-4 Velocidades medidas en el modelo experimental (da Silva Lima, 1999)

Respecto de la posición del centro del giro principal, existe una muy ligera diferencia entre la calculada y la que se observa en el modelo físico. El centro calculado se halla un poco más hacia mar adentro respecto del medido, lo cual se debe a que en la simulación se considera la línea de costa como una frontera reflejante.

5.2.2 Corrientes costeras dentro de una bahía

La hidrodinámica dentro de una bahía y los efectos que ésta tiene sobre la playa es un problema de no fácil comprensión, pero de gran interés dada la importancia que a nivel mundial representa el uso de este tipo de sitios, especialmente para turismo y recreación. En función de las características del clima marítimo local, una playa puede encontrarse en proceso de erosión, de acreción o en equilibrio. La definición de éste último término ha sido objeto de diversos estudios y publicaciones (ver Hsu et al, 2005) en los que, en forma resumida, se establece que una playa puede experimentar un equilibrio estático y mantener su forma constante en el tiempo o un equilibrio dinámico, lo que supone un ciclo en los procesos de erosión-acreción y formación-migración-lavado de barras y bajos.

La configuración idealizada que se eligió para representar este caso, consiste en una bahía elíptica inicialmente con fondo plano. En dos etapas subsecuentes, frente a la playa se insertan dos bajos de uno y dos metros, respectivamente por encima del lecho marino original. La Figura 5-5 muestra la vista en planta de las tres morfologías modeladas.

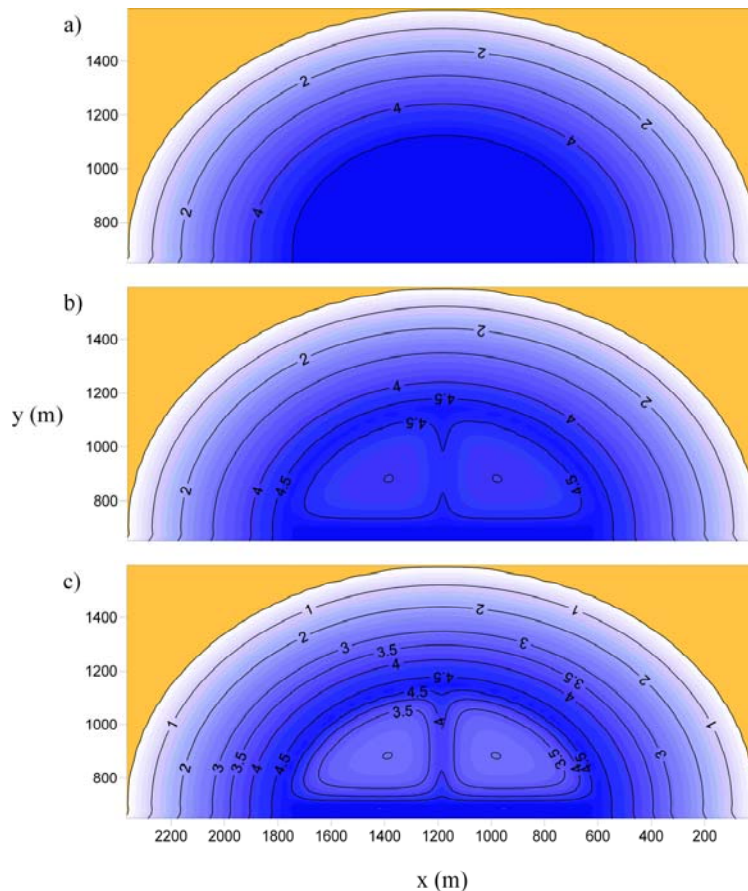


Figura 5-5 Morfología de bahía idealizada, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m

La Figura 5-6 muestra las alturas de ola máximas para los tres casos considerados de la bahía elíptica. El oleaje incide desde la frontera inferior con dirección normal a dicho contorno, la altura de ola es unitaria y el periodo 20 s. La discretización del dominio se llevó a cabo con $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$, como longitud de las caras de las celdas.

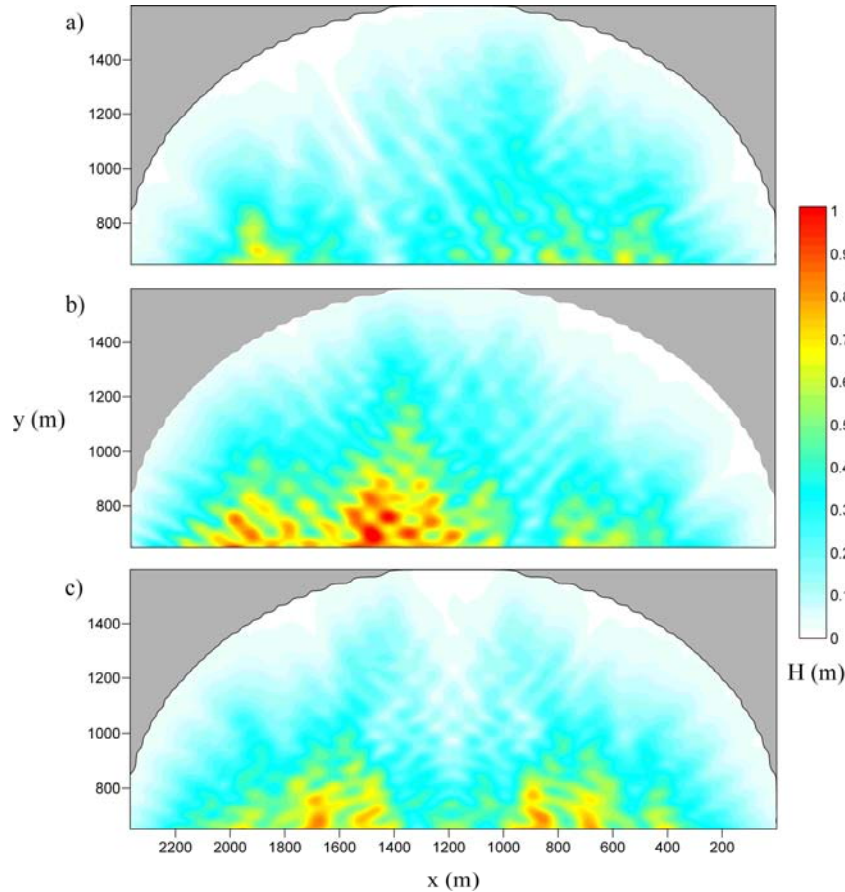


Figura 5-6 Campo de altura de ola máxima dentro de una bahía, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m

Por lo que toca a los resultados del campo de alturas de ola, es claro que una bahía de este tipo en su forma natural (Figura 5-6a) no presenta zonas de concentración importante de energía, puesto que su configuración batimétrica y la forma de la línea de costa son óptimas para la disipación y distribución de la energía. Esta forma en planta de una playa, si las condiciones de oleaje bajo las que se formó no cambian substancialmente, está cerca del equilibrio estático.

Cuando se hacen aparecer los bajos con altura de apenas un metro sobre el lecho marino original (Figura 5-6b) se genera un aperaltamiento de las olas por la reducción del fondo. Este fenómeno modifica la forma en que se distribuye la energía y podría eventualmente afectar la estabilidad de la playa, ya que se presenta alturas de ola mayores que a su vez provocan rotura mucho más violenta (turbulencia) y así el sedimento podría quedar disponible para ser removido.

En el tercer caso (Figura 5-6c) la altura de los bajos los hace funcionar como frente de protección a la playa, no solo por que provocan la rotura de las olas antes que en los casos anteriores, sino por que reflejan parte de la energía de las mismas. De hecho, en la parte central de la bahía, la altura de ola es propiamente nula.

Por lo que toca al cálculo de las corrientes inducidas, la Figura 5-7 muestra la hidrodinámica calculada.

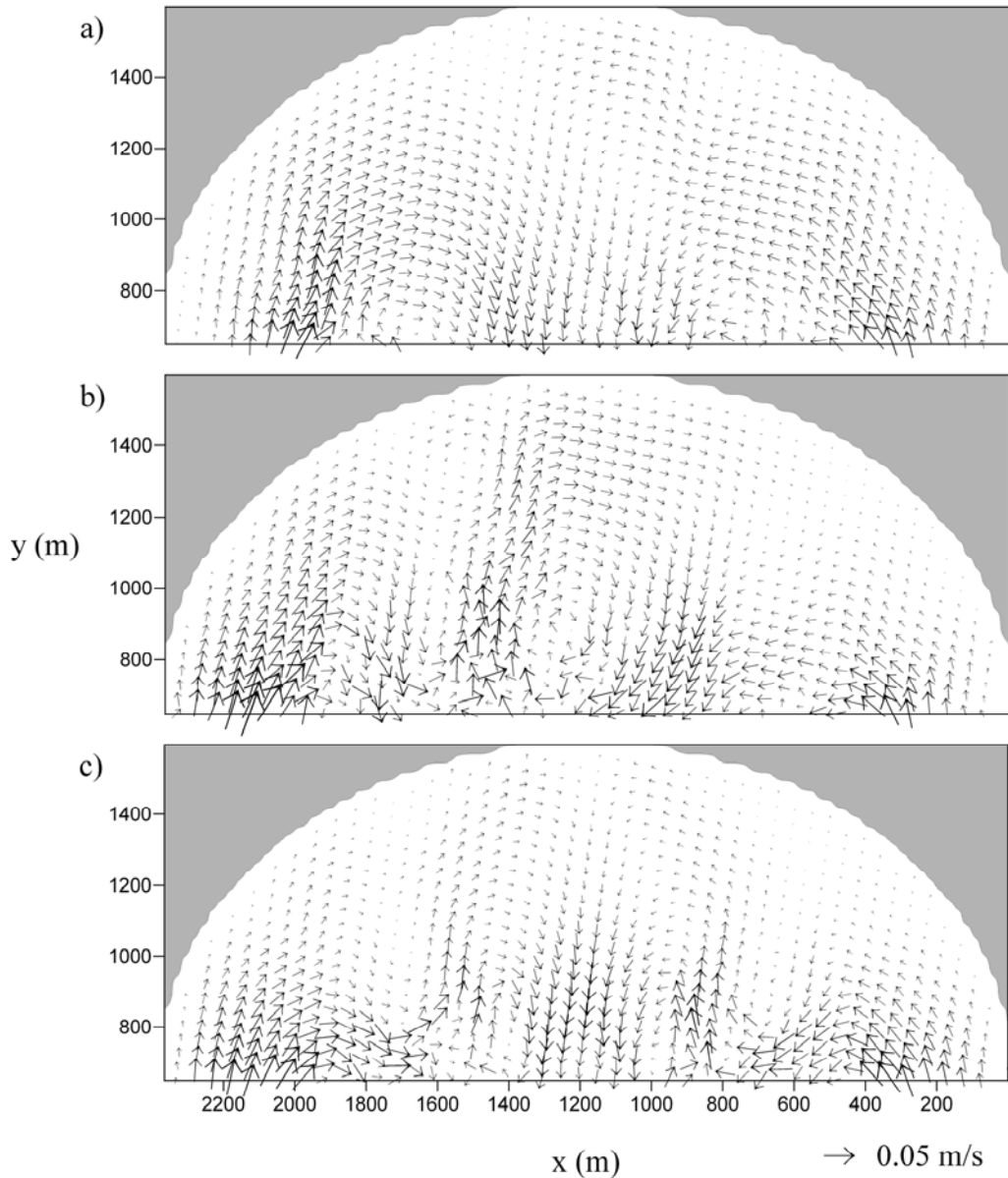


Figura 5-7 Patrones de corrientes inducidas dentro de una bahía, a) fondo plano, b) bajos de 1 m y c) bajos de 2 m

De acuerdo con los los patrones de corrientes estimados (Figura 5-7) en la forma inicial de la bahía (parte a), se generan dos giros uno del lado derecho en sentido horario y otro del lado izquierdo en sentido antihorario. Toda la dinámica de la bahía está gobernada por estos

giros. Cuando aparecen los bajos de 1 m (parte b), el patrón se modifica de manera que ahora el movimiento principal es un giro en sentido horario al centro de la bahía. Es de notar que las velocidades cerca de playa son mayores que en el caso anterior, atentando contra la estabilidad de la costa. Si la altura de los bajos es mayor (parte c), como ya se dijo, comienzan a trabajar como barrera de defensa y aparecen de nuevo dos giros ahora confinados en el centro de la bahía. A los lados de los giros se presentan zonas de corriente casi nula que podrían favorecer la decantación del sedimento y con ello la estabilidad del sistema.

Con lo hasta ahora descrito, el modelo unificado ofrece resultados acordes con la física conocida de una bahía. Sin embargo, para cumplir cabalmente con los propósitos de validación, se presenta a continuación (Fig. 5.8) la solución analítica presentada por Baquerizo et al (2002) para el mismo caso.

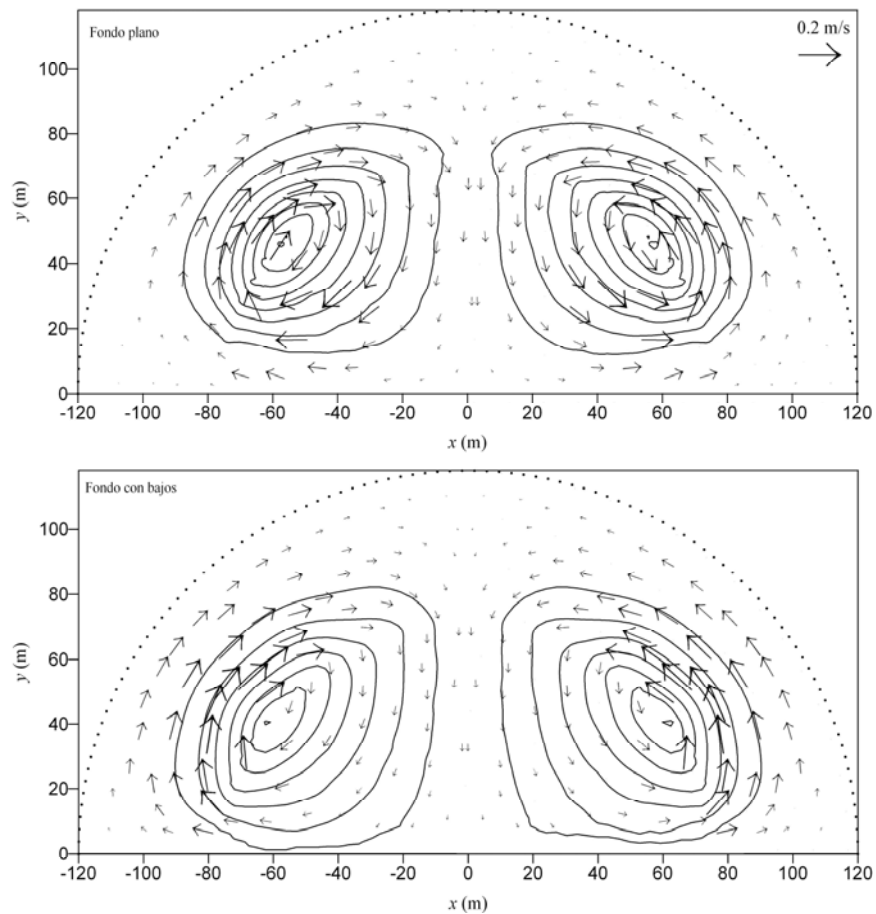


Figura 5-8 Solución analítica para las corrientes inducidas en una bahía, a) fondo plano, b) con bajos (Baquerizo, et al, 2002)

Los resultados de la simulación numérica y el cálculo analítico son muy similares, con excepción de algunos patrones de circulación que la solución analítica no reproduce dado su carácter no reflexivo.

5.2.3 Dinámica generada por un obstáculo vertical

Muchas obras de protección de playas y puertos, se construyen ligadas a tierra y están conformadas por dos brazos, uno que va de tierra a mar adentro y otro paralelo a la playa. En años recientes, sin embargo, se ha extendido el uso de obras de protección paralelas a la costa pero desligadas de la tierra. En ambos casos la idealización más simple para simulación numérica es oponer un obstáculo vertical a la propagación de las ondas, siendo este el caso de prueba que se presenta a continuación.

Este ejercicio de prueba consiste en una batimetría recta y paralela sobre la que dispone un muro vertical. El muro se considera impermeable y su altura se modifica para que sea emergido y sumergido. La batimetría toca tierra justo al final del dominio de cálculo. A continuación se muestra la vista en planta del arreglo.

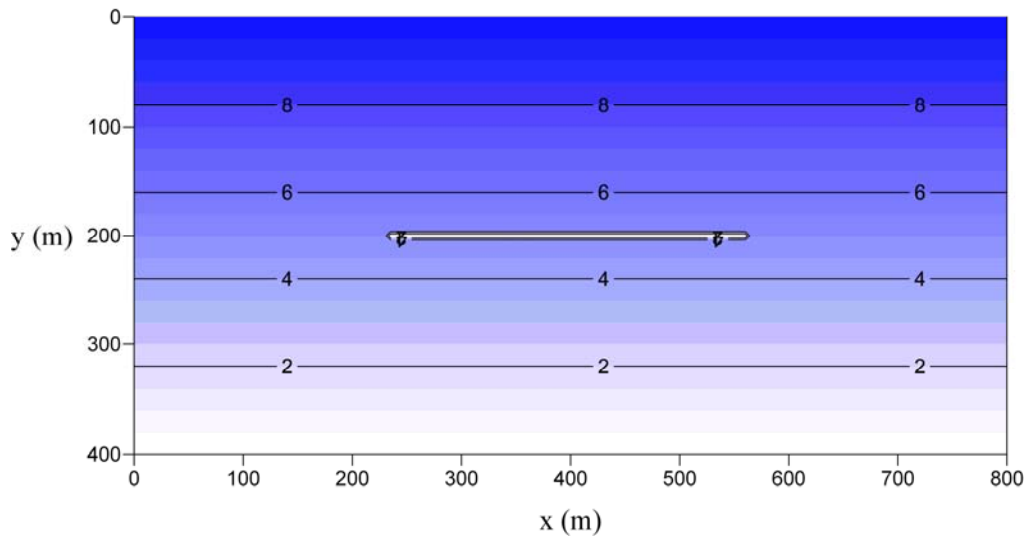


Figura 5-9 Configuración de obstáculo vertical

La zona de estudio se dividió en celdas con $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ m}$ y para todos los casos que se presentan a continuación, la altura de ola es de tres metros y el periodo de diez segundos.

La Figura 5-10 presenta los resultados del campo de altura de ola máxima para el obstáculo emergido, se modelaron dos direcciones de oleaje incidente desde la frontera superior a) normal a dicho contorno y b) 45° en sentido antihorario. En ambos casos es evidente el patrón de reflexión que la estructura impermeable genera y que el oleaje rompe muy cerca del nivel del muro. Por otro lado, la zona de sombra en el caso de incidencia normal presenta más agitación ya que las difracciones en ambos extremos del obstáculo se encuentran.

La dinámica de ambos casos es la Figura 5-11, en la que se aprecia la circulación hacia dentro de la zona de sombra, fenómeno que a la postre es el motor principal de la generación de tómbolos. Dicha circulación es de mayor magnitud cuando la incidencia es normal a la estructura debido a la energía que se encuentra disponible por los fenómenos de difracción y rotura.

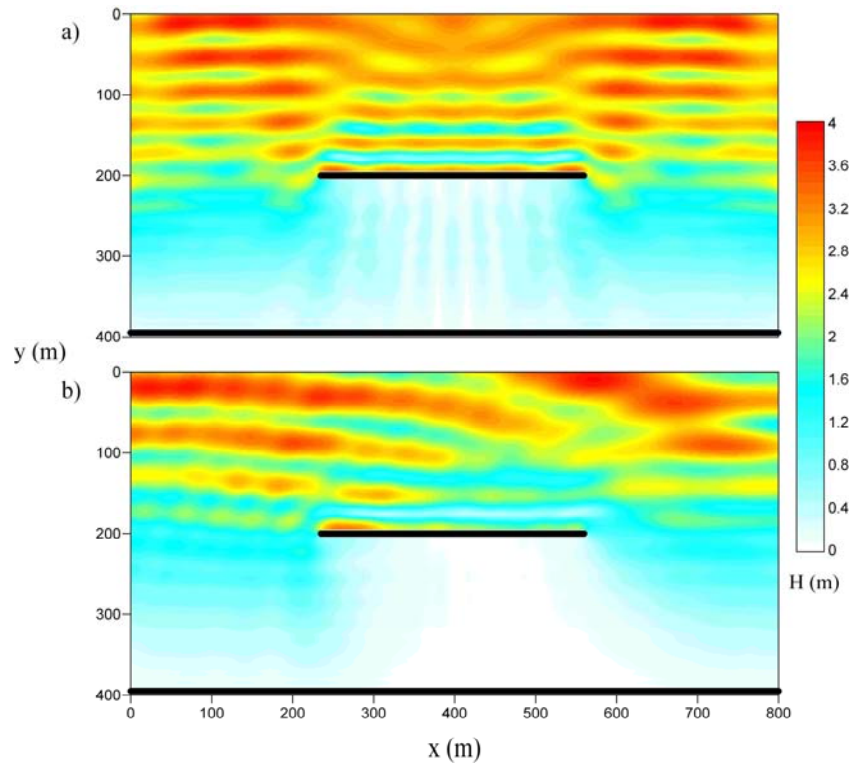


Figura 5-10 Campos de altura de ola máxima obstáculo emergido, a) 0° y b) 45°

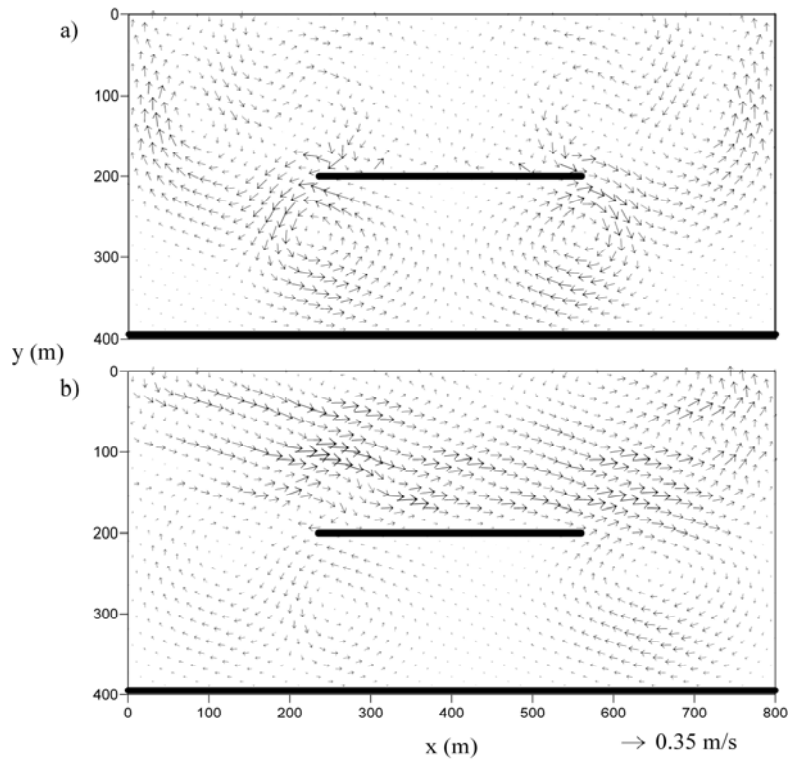


Figura 5-11 Patrones de corrientes inducidas obstáculo emergido, a) 0° y b) 45°

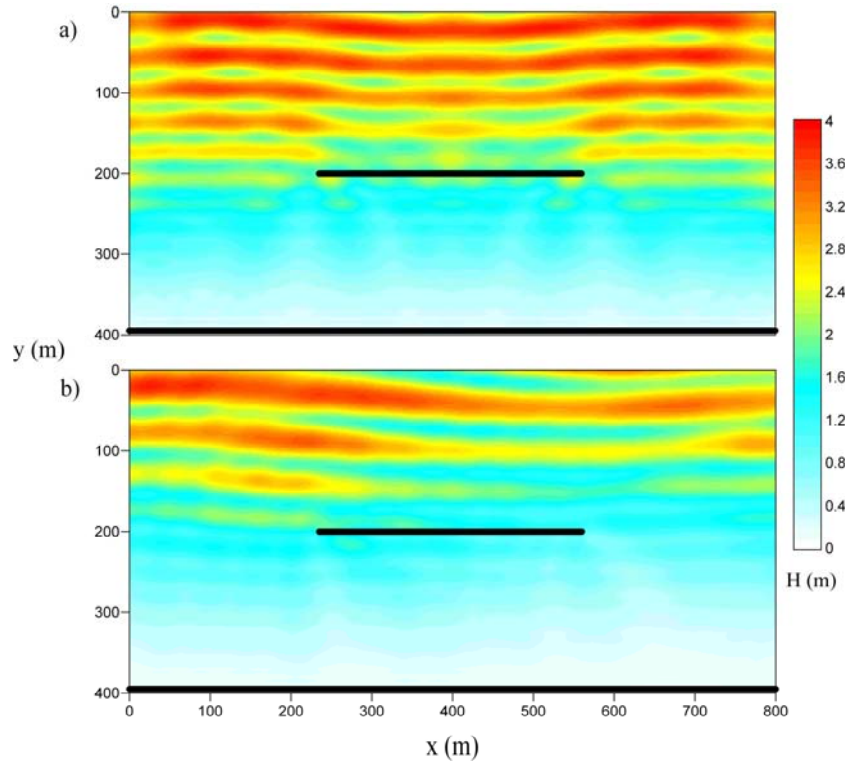


Figura 5-12 Campos de altura de ola máxima obstáculo sumergido, a) 0° y b) 45°

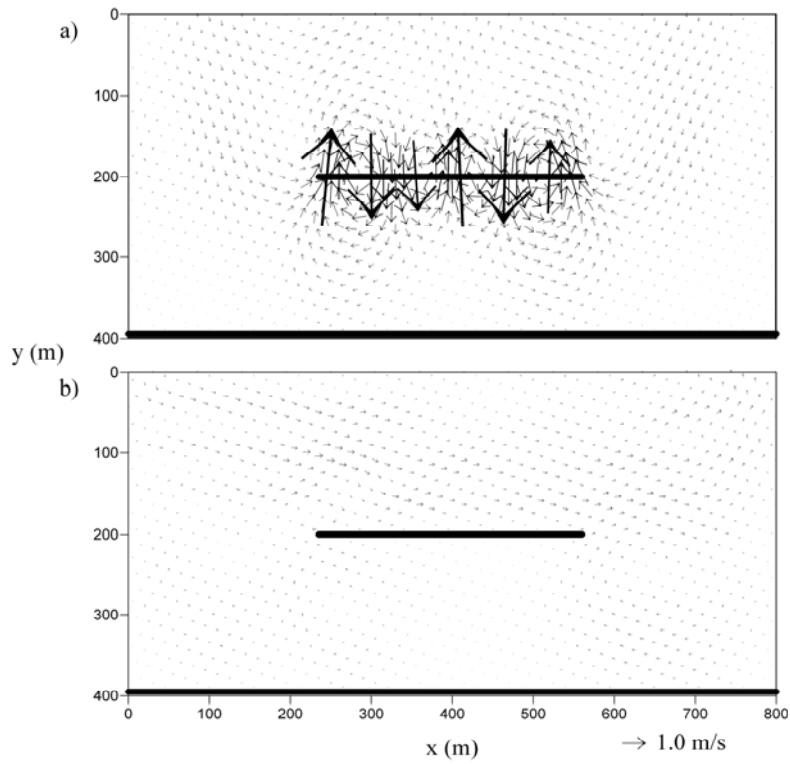


Figura 5-13 Patrones de corrientes inducidas obstáculo sumergido, a) 0° y b) 45°

Las últimas simulaciones de este ejercicio corresponden a una disminución en la altura del muro vertical, de modo que permanezca sumergido 1 m debajo del nivel medio del agua. La Figura 5-12 muestra el campo de altura de ola máxima, la reflexión es menor y obviamente la zona protegida presenta mayores alturas de ola en ambas direcciones de incidencia respecto del caso anterior.

El punto más relevante y que da razón al ejercicio es la Figura 5-13, específicamente la parte a) en donde resaltan inmediatamente los vórtices de gran velocidad que se generan justo sobre la estructura sumergida. El incremento en las velocidades se debe a la reducción del área hidráulica y al aperaltamiento del oleaje que el mismo obstáculo provoca. La circulación dentro de la zona de sombra, que en el caso emergido era hacia dentro de la misma, ha cambiado completamente el sentido y ahora cualquier partícula que se halle en suspensión será trasladada hacia la parte superior del dominio, es decir, la estructura ha dejado de funcionar a favor de la estabilidad costera. Por lo que toca a la incidencia oblicua, el patrón de corrientes no ha sufrido cambios relevantes salvo el incremento en la velocidad.

Este ejemplo pone de manifiesto la importancia que puede representar el uso de una herramienta como el modelo unificado aquí desarrollado en la simulación de escenarios durante el diseño de obras marítimas.

5.3 Aplicación a una batimetría real

Para la modelación de una batimetría real se eligió la bahía de Acapulco. Este sitio resulta de especial interés ya que en su morfología se pueden encontrar diversas formaciones como bajos, puntas, islas, acantilados y zonas de playa dentro de la bahía que hacen que el modelo unificado ponga a prueba todas sus capacidades.

La malla que se generó para este ejemplo es de $\Delta x = \Delta y = 10\text{ m}$ y la vista en planta del dominio de cálculo se presenta en la Figura 5-14. En esta misma figura se marcaron seis rectángulos que corresponden a las zonas de detalle en las que se mostrarán las corrientes inducidas. Se realizaron tres ejecuciones correspondientes a tres direcciones de incidencia del oleaje, el cual tiene altura unitaria y periodo de 10 s. Las direcciones del oleaje, que entra al dominio desde la frontera inferior son 1) 45° en sentido horario, 2) normal a la frontera inferior y 3) 22.5° en sentido horario. En la modelación se incluyó la disipación por rotura del oleaje.

La Figura 5-15, Figura 5-19 y Figura 5-24 muestran el campo de altura de ola máxima para las ejecuciones 1, 2 y 3, respectivamente. En ellas la migración de las zonas de concentración de energía responde adecuadamente a la dirección de incidencia del oleaje. Algunos patrones de difracción y reflexión son muy visibles. Las Figura 5-16, Figura 5-20 y Figura 5-25 presentan la superficie libre instantánea, en donde se puede observar claramente la trayectoria y deformación de las ondas.

En la Figura 5-17, Figura 5-21 y Figura 5-26 se dibujó el campo de corrientes inducidas para todo el dominio, es claro que en las zonas de bajos y en los acantilados se presentan las mayores velocidades mientras que dentro de la bahía las corrientes de muy reducida

magnitud. Finalmente la Figura 5-18, Figura 5-22, Figura 5-23 y Figura 5-27 son las zonas de detalle indicadas en la Figura 5-14, en cada una de ellas se puede observar cómo se modifica la dinámica en función de la dirección del oleaje.

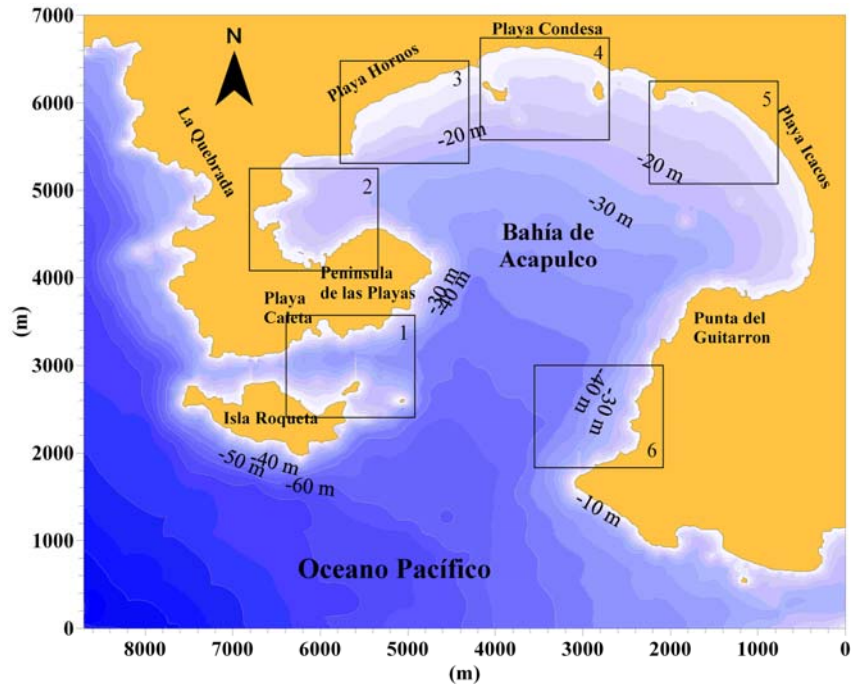


Figura 5-14 Vista en planta de la bahía de Acapulco

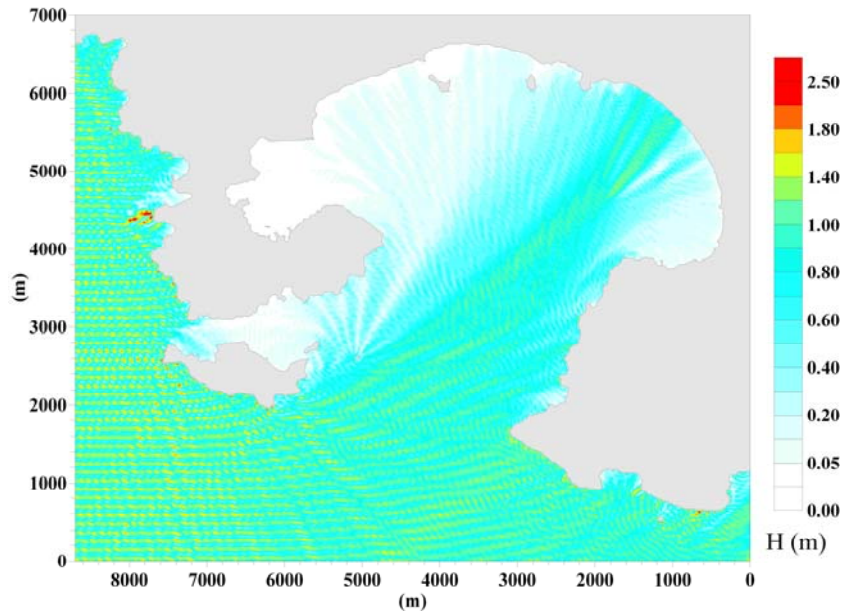


Figura 5-15 Campo de altura de ola máxima, $\theta=45^\circ$

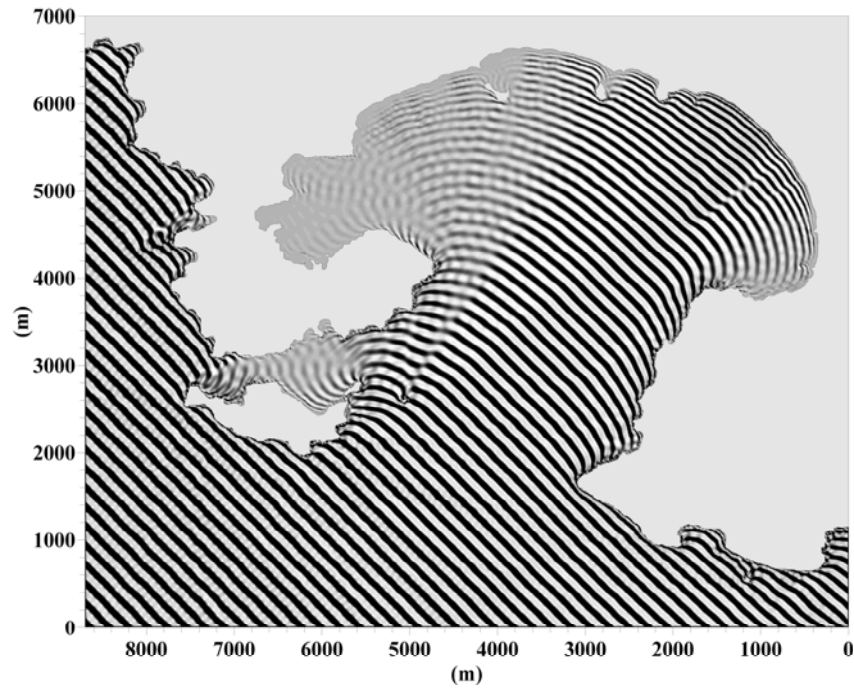


Figura 5-16 Superficie libre instantánea, $\theta=45^\circ$

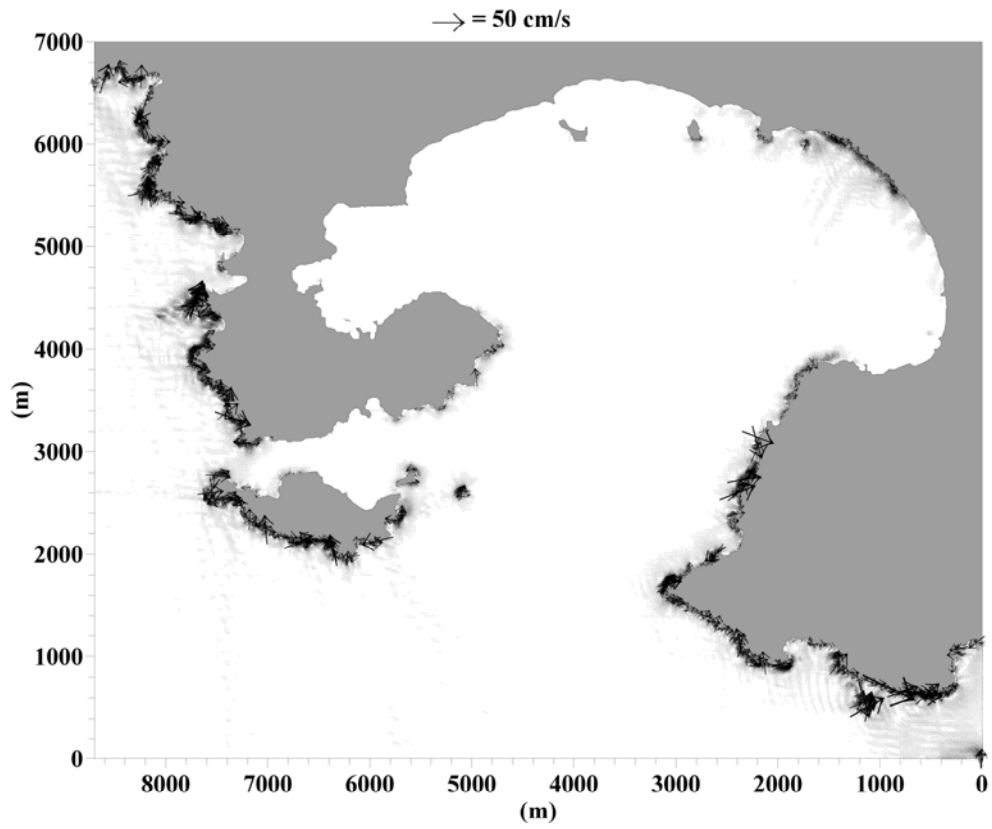


Figura 5-17 Corrientes inducidas, $\theta=45^\circ$

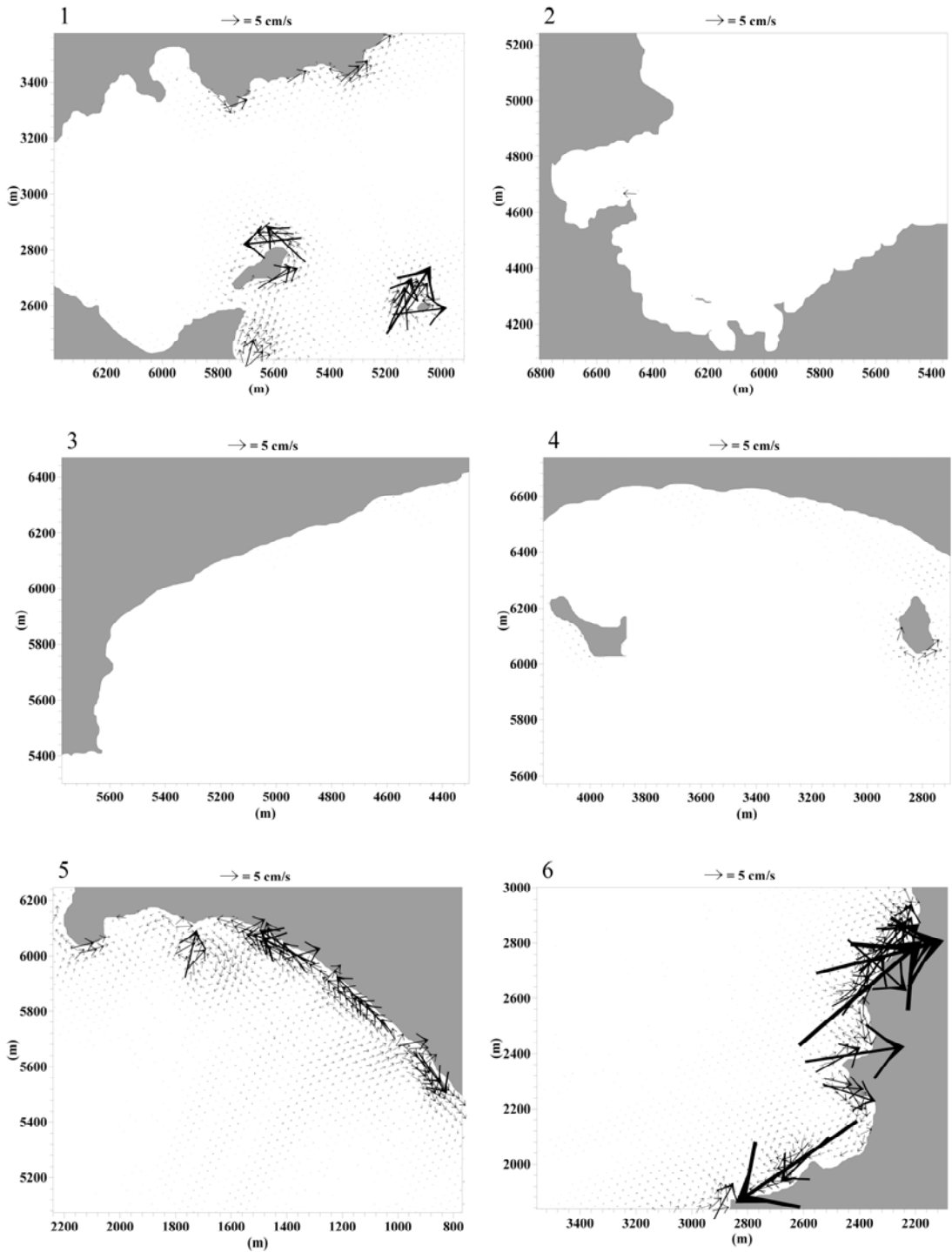


Figura 5-18 Corrientes en las zonas de detalle, $\theta=45^\circ$

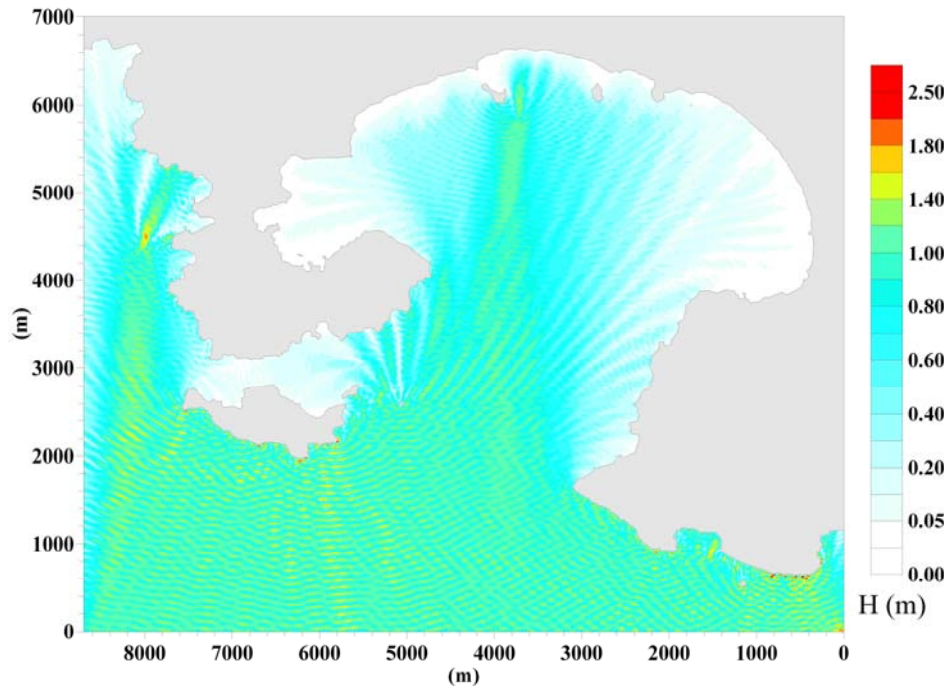


Figura 5-19 Campo de altura de ola máxima, $\theta=0^\circ$

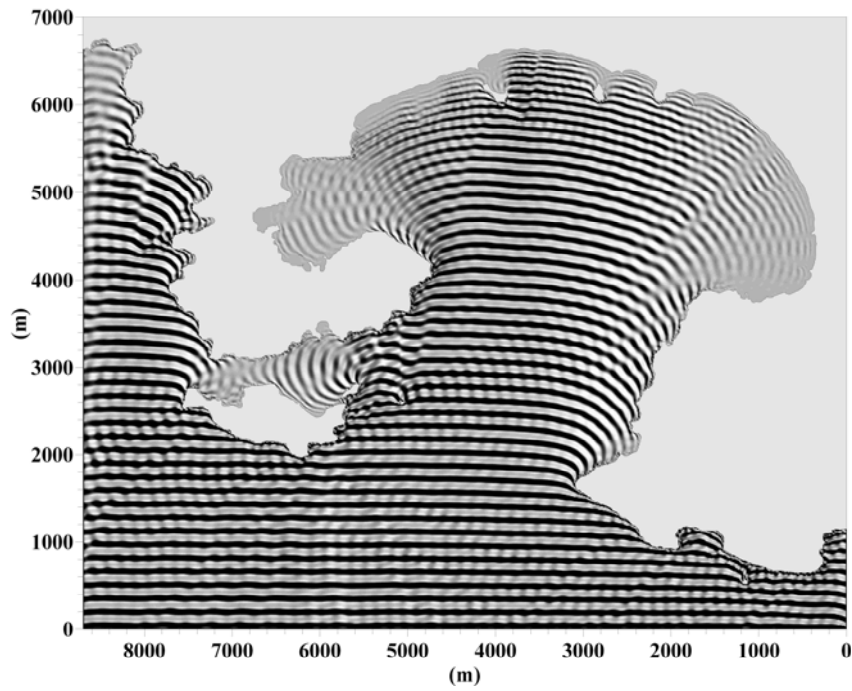


Figura 5-20 Superficie libre instantánea, $\theta=0^\circ$

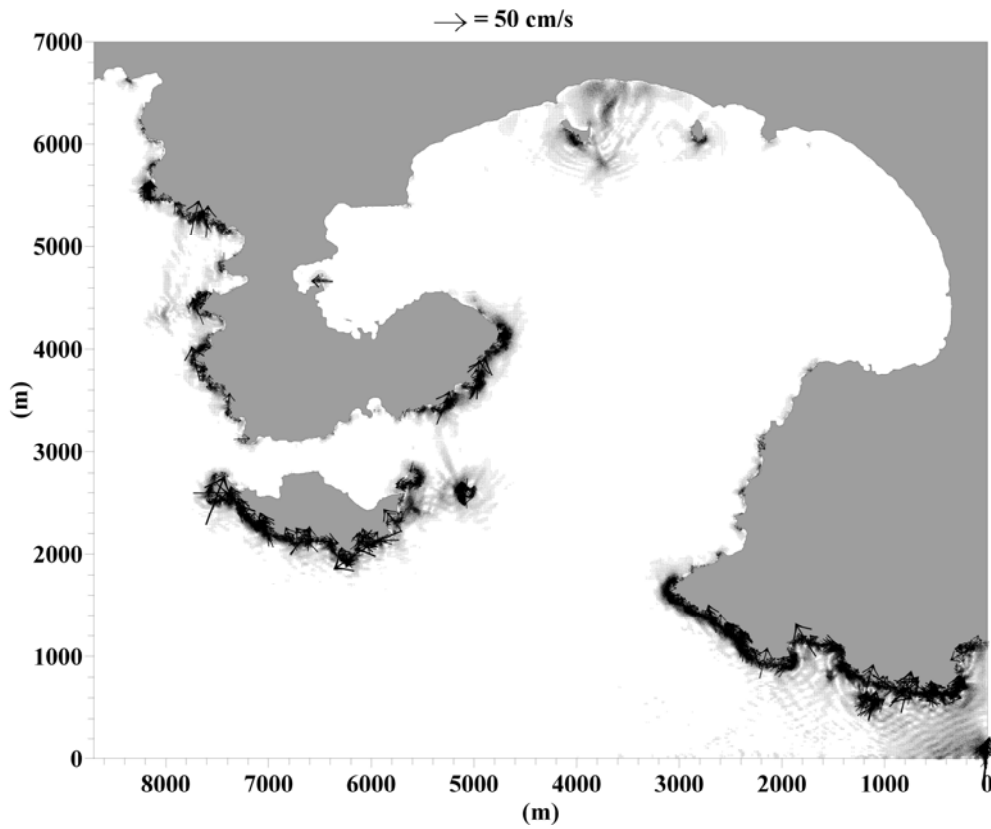


Figura 5-21 Corrientes inducidas, $\theta=0^\circ$

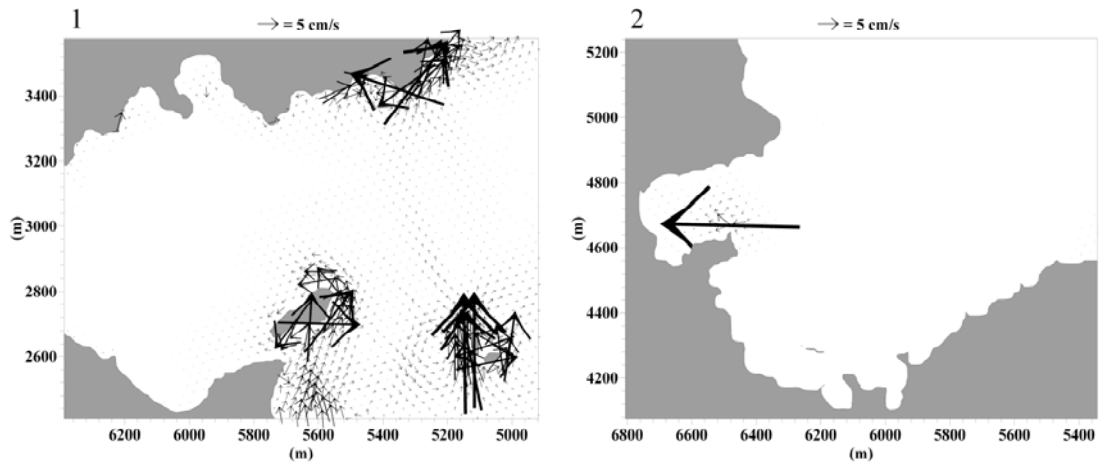


Figura 5-22 Corrientes en las zonas de detalle 1 y 2, $\theta=0^\circ$

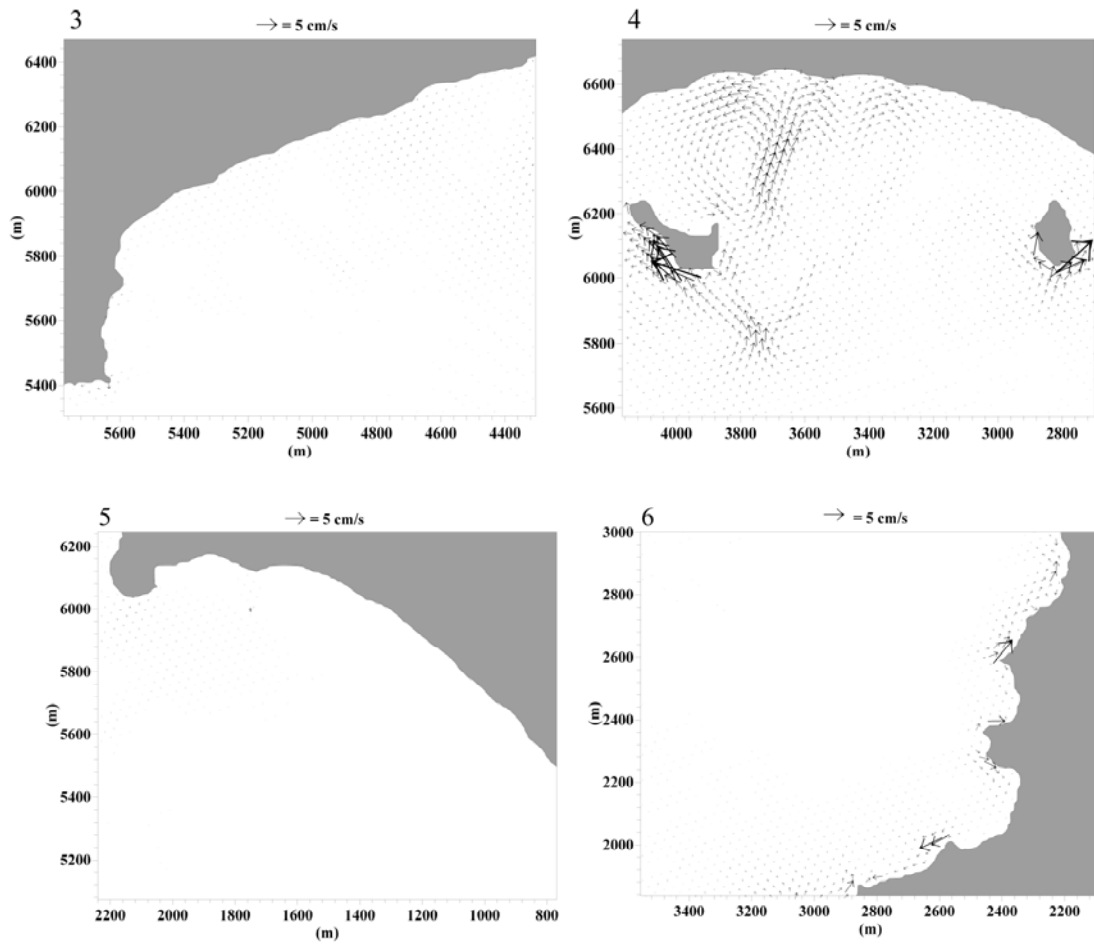


Figura 5-23 Corrientes en la zonas de detalle 3 a 5, $\theta=0^\circ$

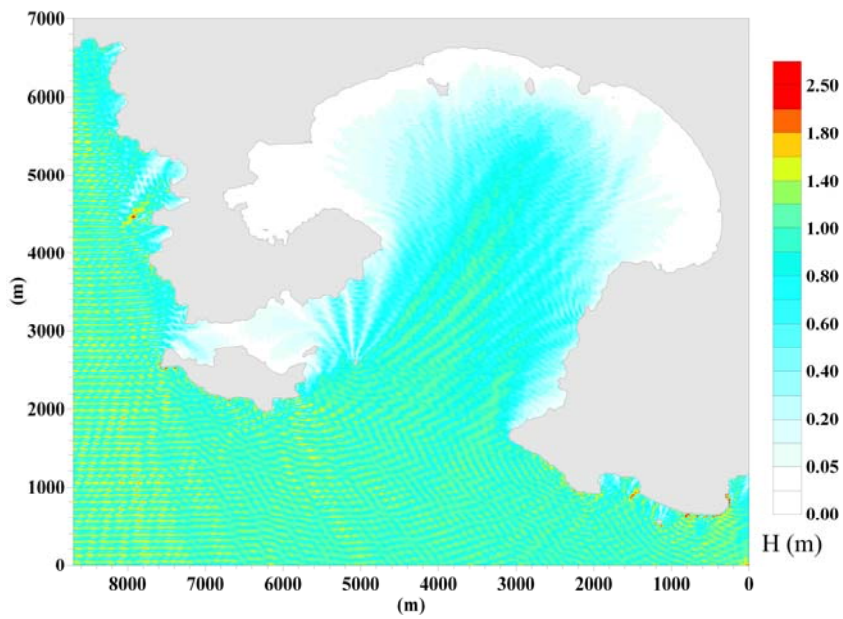


Figura 5-24 Campo de altura de ola máxima, $\theta=22.5^\circ$

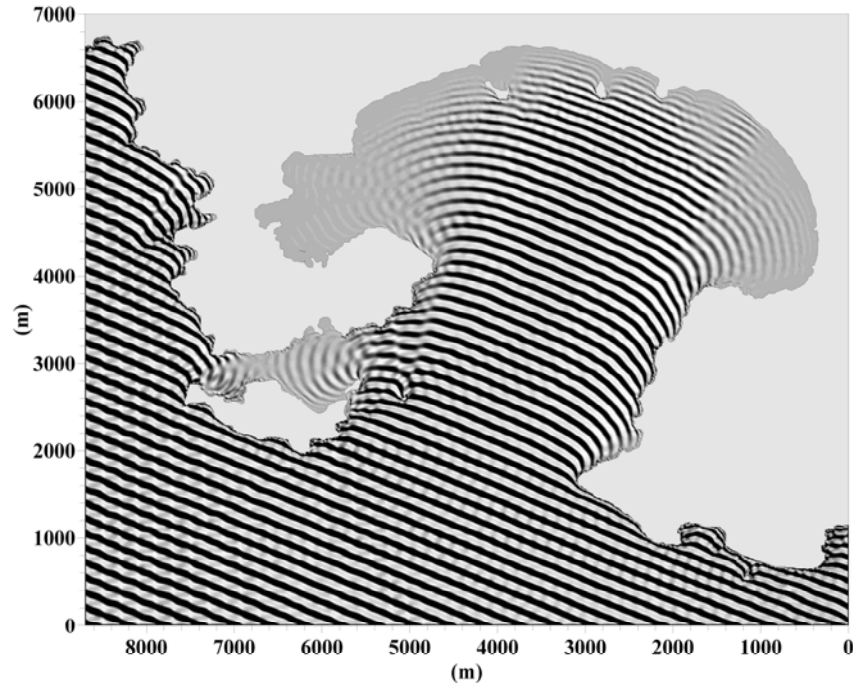


Figura 5-25 Superficie libre instantánea, $\theta=22.5^\circ$

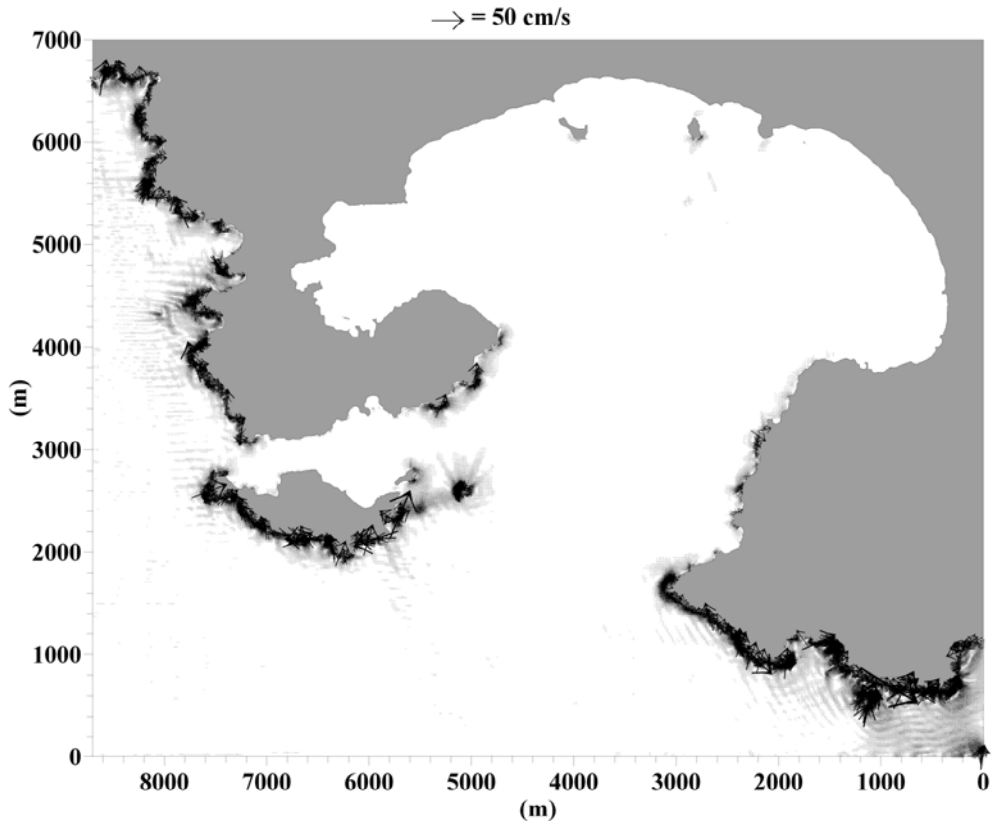


Figura 5-26 Corrientes inducidas, $\theta=22.5^\circ$

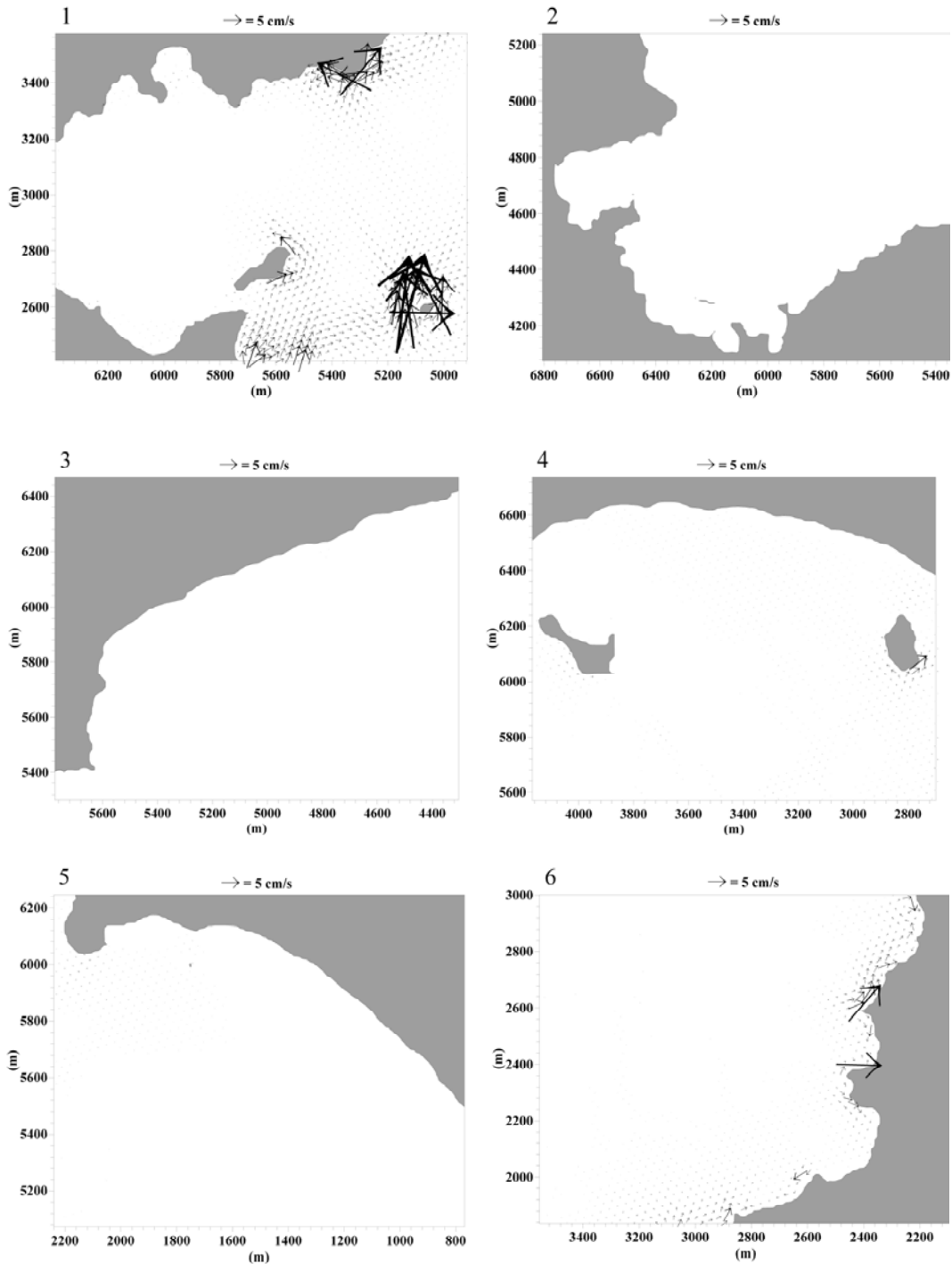


Figura 5-27 Corrientes en las zonas de detalle, $\theta=22.5^\circ$

Con este ejemplo se ha demostrado que el modelo unificado puede aplicarse tanto para estudios académicos soportados con soluciones analíticas y datos experimentales como para proyectos reales de ingeniería.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

El trabajo de investigación presentado permite concluir respecto de la hidrodinámica fundamental, del modelo de propagación de ondas, del modelo de corrientes y de la construcción del modelo unificado.

El desarrollo de las ecuaciones fundamentales que se presentó, con el solo hecho de considerar el signo negativo en la función de dependencia temporal, pone de manifiesto que la propagación de ondas sobre fondo impermeable en agua y dentro de un medio poroso constituyen los extremos de un caso general que es la propagación de ondas sobre fondo impermeable con una capa de medio granular de espesor finito que descansa sobre el fondo. En todos los casos, la aplicación de las hipótesis de la teoría lineal es similar y permite representar adecuadamente la transformación que sufre una onda progresiva.

Con base en la misma teoría lineal, es posible retirar la limitación de fondo plano y derivar una ecuación que lo mismo considera el caso general que los extremos, con buena precisión y un algoritmo de solución relativamente sencillo. De ello se desprende la llamada ecuación modificada de la pendiente suave que ha sido ampliamente utilizada con diversas simplificaciones desde hace más de tres décadas. En este trabajo se derivó y utilizó una versión más general de la ecuación de la pendiente suave con el mínimo de simplificaciones buscando alcanzar un modelo de propagación de ondas aplicable a las condiciones que la teoría lineal permite.

La implementación numérica de la ecuación modificada de la pendiente suave es uno de los tópicos centrales de este trabajo. En el modelo desarrollado, se utiliza la ecuación de gobierno en forma Helmholtz; lo cual, sin comprometer la precisión de los resultados favorece la discretización de las ecuaciones. Por lo que toca a las fronteras, se trabajaron con una aproximación parabólica ajustada para una dirección de apertura máxima, con lo que se han minimizado las ondas espurias que aparecen al emplear aproximaciones de menor orden.

Especial atención requiere el trabajo desarrollado en el caso de la frontera con fondo variable (en dirección a la playa), misma que se resuelve como un problema independiente y unidireccional. La estimación de los ángulos locales se llevó a cabo ayuda de la ley de Snell logrando con ello que el oleaje incida al dominio ya propagado, eliminando así los errores en la vecindad del contorno que se presentan en varios modelos incluyendo a los comerciales.

La combinación algebraica de las ecuaciones de las fronteras con la ecuación de gobierno anuló la necesidad de celdas ficticias, con lo que los requerimientos de memoria computacional se limitaron al tamaño de la malla del dominio. Es importante recalcar que se derivaron las ecuaciones correspondientes a fronteras abiertas, absorbentes y parcialmente reflejantes, esto no se considera en los modelos de la literatura cotejada.

La discretización el dominio con mallas de tipo jerárquico permitió modelar grandes extensiones costeras, eliminando así una de las limitaciones tradicionales en el uso de la ecuación el a pendiente suave. El método y algoritmo de generación de la malla jerárquica

es completamente original y a diferencia de otras metodologías, hace posible el uso de dominios rectangulares con celdas rectangulares.

Adicionalmente, se ha incorporado el cortado de celdas para incrementar la nitidez en la representación de morfologías complicadas.

La solución del sistema de ecuaciones propio de la pendiente suave, ha requerido la integración del algoritmo de eliminación con pivoteo parcial con un esquema de optimización de la memoria computacionales disponible. Ello dió origen a una nueva metodología que permite resolver grandes sistemas de ecuaciones en cualquier computadora personal siempre que cuente con espacio suficiente en el disco duro.

El resultado de lo expuesto en los párrafos anteriores es un modelo de oleaje muy robusto y que ha sido probado y validado para varios casos con fondo plano, fondo variable, con obstáculos impermeables y porosos; y que representó adecuadamente los fenómenos de difracción, refracción, someramiento y reflexión de las ondas. La exitosa aplicación del modelo a una batimetría real mostró que se pueden obtener resultados útiles para la práctica de la ingeniería.

La segunda parte del modelo unificado se resolvió con las ecuaciones no lineales para aguas someras vía la aplicación de un esquema en volumen finito. El método utilizado para la solución numérica es de reciente adaptación, aunque no invención, gracias al desarrollo de las herramientas computacionales. Este modelo es de fácil codificación y sus resultados son muy similares a las soluciones analíticas disponibles. En este trabajo se presentan las condiciones que permiten modelar con fronteras abiertas o cerradas y al aplicar el algoritmo de frontera abierta al caso un contorno sólido, puede representarse el caso de un obstáculo absorbente.

Los ejercicios de validación y prueba del modelo unificado mostraron su capacidad de representar fenómenos físicos complicados a la vez que sus resultados son congruentes y muy cercanos tanto a una solución analítica como a datos de laboratorio. El modelo unificado puede representar adecuadamente la dinámica de una zona costera gobernada por el fondo y ante la presencia de diversas formas y tamaños de obstáculos, a la vez que estima con buena precisión la circulación que se genera dadas las diversas condiciones.

El modelo unificado se utilizó para calcular la dinámica en un sitio real, en el que se presentan una serie de configuraciones complicadas de simular como puntas, bahías, acantilados, zonas de bajos, islas y zonas con pendientes muy pronunciadas. El resultado es congruente con la dinámica conocida de la zona.

FUTURAS LINEAS DE TRABAJO

- Una de las limitaciones más importantes del modelo unificado es la incapacidad de representar la inundación de celdas, por lo que en algunas aplicaciones los resultados no tendrán la información completa de la dinámica costera. Este es un algoritmo que puede servir de base para incorporar estos aspectos.
- Con el fin de contar con la información hidrodinámica completa, especialmente en casos reales, debe añadirse la información de la marea y las corrientes que ésta genera en la zona costera. Como complemento a lo anterior, la ecuación de la pendiente suave puede modificarse para que sea capaz de propagar el oleaje en presencia de corrientes y así contar con el panorama completo.
- Entre los estudios que pueden requerir los resultados del modelo unificado, se encuentran los de transporte de sedimentos y de calidad de agua cerca de la costa. Es deseable añadir al modelo unificado módulos de estimación de ambos fenómenos para contar con una herramienta aún más completa.
- Por lo que toca al modelo de propagación, es necesario revisar el criterio de rotura y las expresiones para el cálculo de la disipación de energía a fin de hacerlos válidos para los casos de pendientes muy pronunciadas (taludes de estructuras) y porosas, así como para los diversos materiales que pueden emplearse en laboratorio. Adicionalmente es recomendable verificar la sensibilidad del modelo a los valores de la fricción de fondo.
- El método de solución de las ecuaciones para aguas someras aquí presentado, no incluye el efecto del viento, mismo que puede ser de importancia en algunas zonas, por lo que es recomendable añadirlo.
- Las expresiones empleadas para la estimación de los tensores de radiación fueron desarrolladas para fondo plano, entonces, el desarrollo de nuevas expresiones que consideren las variaciones en el fondo pueden mejorar los resultados obtenidos.
- El esquema en volumen finito y el método numérico empleados requieren un espaciado temporal muy reducido (muy por debajo del número de Courant), es recomendable incrementar la aproximación de la integración temporal con el fin de admitir pasos de tiempo más grandes.

BIBLIOGRAFÍA

Anastasiou, K. y Chan, C. (1997) Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes Int. Journal for Num. Methods in Fluids. Vol. 24: pp. 1225-1245.

Baquerizo, A. M. A. Losada and J. L. Ortega (2002). Rip currents in semielliptic bays. Proc. 28th International Conference on Coastal Engineering, Cardiff. 1. pp. 718-726.

Berkhoff, J. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th. International Conference on Coastal Engineering, ASCE., Vancouver, Canadá.

Chamberlain, P. and Porter, D. (1995). The modified mild-slope equation. Journal Fluid Mechanics Vol. 29: pp. 393-407.

Chamberlain, P. and Porter, D. (1999). Scattering and near-trapping of water waves by axisymmetric topography. Journal of Fluid Mechanics. Vol. 388: pp. 335-354.

Dagan, G. (1979) Models of groundwater flow in statistically homogeneous porous formations. Water Resour. Res. Vol. 15: pp. 47-63.

da Silva Lima, S. (1981) Wave induced nearshore currents. Tesis doctoral, Universidad de Oxford, Reino Unido.

Dalrymple, R.A., Losada, M.A., Martin, P.A. 1991. Reflection and transmission from porous structures under oblique wave attack. J. Fluid Mechanics, Vol. 224: pp. 625-644.

Dean, R. y Dalrymple, R. A. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Singapur, World Scientific.

Dingemans, M. W. (1997). Water wave propagation over uneven bottoms. Singapur., World Scientific.

Dongarra, A., J. Bunch, et al. (1979). Linpack Users Guide, SIAM.

Ebersole, B.A. and Dalrymple, R.A., (1979). A numerical model for nearshore circulation including convective accelerations and lateral mixing. Univ. of Delaware, Newark, DE, Ocean Eng. Rep. 21.

Godunov, S. (1959) A difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of hydrodynamic equations. Math. Sbornik, Vol. 47: pp. 271-306.

Govaere, G. (2002). Acción del oleaje sobre estructuras disipativas de simetría radial. Tesis Doctoral. DEPI. UNAM.

Gu, Z. y Wang H. (1991). Gravity Waves over Porous Bottoms. Coastal Engineering. Elsevier, Vol. 15: pp. 497-524.

-
-
- Harten, A., Lax, P., y van Leer, B. (1983) On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*. Vol. 25: pp. 35-61.
- Hsu, J., Klein, A., Benedet, L., Raabe, A. and Tsai, C. (2005). Static equilibrium bay beach for coastal management and protection. *Journal of Coastal Research* (Enviado).
- Kirby, J. (1986). Rational approximations in the parabolic equation method for water waves. *Coastal Engineering* Vol. 10: pp. 355-378.
- Kirby, J. (1989). A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations. *Coastal Engineering*. Vol.13: pp. 211-218.
- Kirby, R. y Misra, S. (1998). A note on the modified mild-slope equation. Report CACR-98-07. Universidad de Delaware, EUA.
- Li, B. and K. Anastasiou (1992). Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique. *Applied Ocean Research* Vol. 13: pp. 245-266.
- Linton, C. y Evans, D. (1990) The interaction of waves with arrays of vertical circular cylinders. *J. Fluid Mechanics*. Vol. 215, 549-569.
- Liu, P.L.-F. and R.A. Dalrymple (1984). The Damping of Gravity Water Waves Due to Percolation. *Coastal Engineering* , Vol. 8: pp. 33-49.
- Lick, W., (1978). Diffraction of waves by a wedge. *J. of the Waterway Port Coastal and Ocean Div.* pp. 119-133.
- Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W. (1962) Radiation stress and mass transport in gravity waves with application to 'surf beat'. *J. Fluid Mechanics*. Vol. 13: pp. 481-504.
- Losada, I.J., Dalrymple, R.A. y Losada, M.A., (1993). Water Waves on Crown Breakwaters. *J. Waterways, Ports, Coastal, Oc. Engrg. Div., ASCE*. Vol. 119(4): pp. 367-380.
- Losada I., Silva, R. Y Losada, M. (1996) Interaction of non-breaking directional random seas with submerged breakwaters. *Cosatal Engineering*. Vol. 28: pp. 229-248.
- Maa, J., M. Maa, et al. (1997a). Using the Gaussian elimination method for large banded matrix equations. Virginia Institute of Marine Science, Gloucester Point, VA 230662.
- Mase, H. y Takeba, K. (1994). Bragg scattering of gravity waves over a porous rippled bed. *Proc. 24th ICCE*. ASCE. Kobe, Japón, pp. 635-649.
- Mei, C. (1989). *The applied dynamics of ocean surface waves*. New York, World Scientific.
- Mendoza, E. y Silva R. (2004) Modelo de perfil de playa en presencia de estructuras sumergidas de protección. *Ingeniería Hidráulica en México*. Vol. 19(1): pp. 5-16.

-
-
- Panchang, V. and B. Pearce (1991). Solution of mild-slope wave problem by iteration. *Applied Ocean Research*. Vol. 13: pp. 187-200.
- Péchon, P. and Teisson, C., (1995). Numerical modelling of three-dimensional wave-driven currents in the surf-zone. In: *Proceedings 24th Conference on Coastal Engineering*. Am. Soc. Civ. Eng., New York, NY. pp. 2503-2512.
- Peregrine, D. (1967). Long waves on a beach. *J. Fluid Mechanics*. Vol. 15: pp. 815-827.
- Putnam, J., Munk, W. and Traylor, M. (1949). The prediction of longshore currents. *Trans. Am. Geophys. Union*. Vol. 30: pp 337-345.
- Radder, A. (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagation. *J. Fluid Mechanics* Vol. 95: pp. 159-176.
- Reid, R.O. y Kajiura, K. 1957. On the Damping of Surface Gravity Waves in a Bounded Liquid. *Trans. Am. Geophys. Union*. Vol. 38.
- Roe, P. (1981a) The use of the Riemann problem in finite difference schemes. *Proc. 7th Int. Conf. Num. Methods in Fluid Dynamics*. Nueva York/Berlin, pp. 354-359.
- Roe, P. (1981b) Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Comp. Physics*. Vol. 43: pp. 357-372.
- Roe, P. y Pike, J. (1984) Efficient construction and utilization of approximate Riemann solutions. *Comp. Methods in Applied Science and Engineering*. Holanda.
- Rogers, B. (2001). Refined localised modelling of coastal flow features using adaptive quadtree grids. Tesis Doctoral. Universidad de Oxford.
- Rojanakamthorn, S., Isobe, M. and Watanabe, A. (1989). A mathematical model of wave transformation over submerged breakwaters. *Coastal Engineering*. Vol. 32: pp. 209-234.
- Rojanakamthorn, S., Isobe, M. and Watanabe, A. (1990). Modelling of wave transformation on submerged breakwaters. *Proceedings 22nd ICCE, ASCE.*, New York, USA.
- Sanchez-Arcilla, A., Collado, F. and Rodriguez, A., (1992). Vertically varying velocity field in 3D nearshore circulation. *Proc. 22th Conference on Coastal Engineering*. Am. Soc. Civ. Eng., New York, NY, pp. 2811-2824.
- Shepard, P. and Wanless, H. (1973). *Our changing coastlines*. McGraw-Hill. Nueva York.
- Silva (1995) Transformación del oleaje debido a obras de defensa del litoral. Tesis doctoral, Universidad de Cantabria, Santander, España. 338 pp.
- Silva, R., Mendoza, E. and Losada, M.A. (2006a). Modelling linear wave transformation induced by dissipative structures. Regular waves. *Ocean Engineering*. (En imprenta)

- Silva, R., Losada, M.A. and Salles, P. (2006b). Modelling linear wave transformation induced by dissipative structures. Random waves. Ocean Engineering. (En imprenta)
- Silva, R., Borthwick, A.G.L. and Eatock-Taylor, R., (2005). Numerical implementation of the harmonic modified mild-slope equation. Coastal Engineering, Vol. 52: pp. 391-407.
- Silva, R., Borthwick, A.G.L. and Mendoza, E., (2004). Linear wave propagation on an adaptive quad-tree cut-cell grid, Proceedings of the 29th International Conference on Coastal Engineering. ASCE, Lisboa, Portugal, pp. 842-854.
- Silva, R., P. Salles, et al. (2002). Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed. Coastal Engineering Vol. 44: pp. 239-260.
- Silva, R., Govaere, G. and Salles, P., (2003). Wave interaction with cylindrical porous piles. Ocean Engineering, Vol. 30: pp. 1719-1740.
- Smith, R. y Sprinks, T. (1995). Scattering of surface waves by a conical island. J. Fluid Mechanics. Vol. 72: pp. 373-384.
- Sollitt, C. and Cross, R. (1972). Wave transmission through permeable breakwaters. Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE., Vancouver, Canada.
- Southgate, H.N., (1989). A nearshore profile model of wave and tidal current interaction. Coast. Eng., Vol. 13: pp. 219-246.
- Streeter, V., Wylie, E. y Bedford, K. (1998) Fluid Mechanics. Mc Graw Hill.
- Toro, E. (1989) A weighted average flux method for hyperbolic conservation laws. Proc. Roy. Soc. Londres. Vol. A423: pp. 401-418.
- US Army Coastal Engineering Research Center. (1977). Shore Protection Manual.
- Walker, H. (1988). Implementation of the GMRES method using householder transformation. SIAM, J. Sci. Statist. Comput. Vol. 9: pp. 152-163.
- Ward, J. (1964). Turbulent flow in porous media. Journal of Hydraulics Division, ASCE. Vol. 90: pp. 1-12.
- Wu, C.S. and Liu, P.L.F., (1982). Finite element modelling of breaking wave induced nearshore current. In: T.K. Kawai (Editor), Finite Element Flow Analysis. pp. 579-586.
- Xu, B. y Panchang, V. (1993) Outgoing boundary conditions for finite difference elliptic water wave models. Proc. Royal Soc. Londres. Vol. A441: pp. 575-588.
- Yiu, K., Greaves, D., Cruz, S. Saalehi, A. y Borthwick, A. (1996) Quadtree grid generation: Information handling, boundary fitting and CFD applications. Computers and fluids. Vol. 25: pp. 759-769.

Zhao, D. Shen, H., Lai, J. y Tabios III, G. (1996) Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modeling. J. Hydr. Eng., ASCE. Vol. 122: pp. 692-702.

ANEXOS

A. CONDICIONES DE CONTORNO DE LA TEORÍA LINEAL

En este anexo se presenta la derivación de las condiciones que contorno para cualquier problema basado en la teoría lineal. A modo de definición, se presenta un esquema con las principales características empleadas en la caracterización del oleaje.

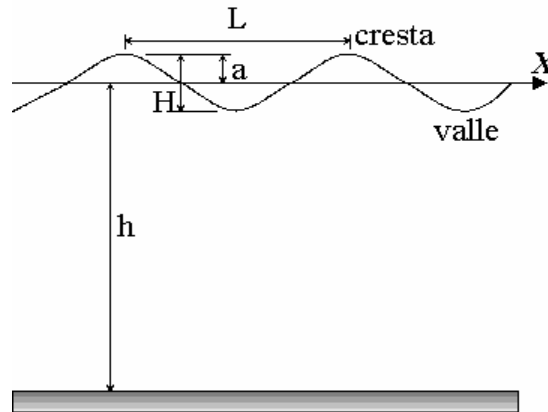


Figura A-1 Principales parámetros que describen el oleaje

En la Figura A-1, L es la longitud de onda, H la altura de ola, a la amplitud de onda, T el periodo y h la profundidad.

A.1 Condición de contorno cinemática

Para encontrar una expresión que represente la condición cinemática de contorno (relativa exclusivamente al movimiento) puede emplearse una ecuación que describa dicha frontera. Considérese entonces que cualquier superficie fija o móvil puede ser expresada como:

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

La dependencia del tiempo se incluye ya que el fenómeno físico en estudio, una onda propagándose en el agua, así lo manifiesta. Esto conlleva que la derivada total de la superficie con respecto al tiempo sea cero, esto es

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{F(x, y, z, t) = 0} = 0, \quad (\text{A.2})$$

lo cual también puede escribirse como

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{u} \cdot \nabla F = \bar{u} \cdot n |\nabla F| \quad (\text{A.3})$$

donde $\bar{u} = (u, v, w)$ y n es un vector unitario normal a la superficie libre, definido por

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (\text{A.4})$$

Reagrupando, la condición cinemática de contorno queda expresada como:

$$\bar{u} \cdot n = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad \text{en} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (\text{A.6})$$

A partir de esta última expresión y aplicando las condiciones de cada caso, se definen las condiciones de contorno cinemáticas para el fonda y la superficie libre.

A.1.1 Condición cinemática en el fondo

Como se ha aceptado que el fondo es impermeable, se cumple que

$$\bar{u} \cdot n = 0, \quad (\text{A.7})$$

es decir, no hay flujo a través del fondo.

Por otro lado, la ecuación que describe el fondo es

$$F(x, y) = z + h(x, y) = 0 \quad (\text{A.8})$$

la cual, al sustituirla en la ecuación de Laplace, resulta

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x} i + \frac{\partial h}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{A.9})$$

Realizando el producto punto de \bar{u} por n , multiplicando por la raíz cuadrada del denominador y recordando la definición del potencial de velocidades se obtiene

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \quad (\text{A.10})$$

de donde

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \quad (\text{A.11})$$

siendo $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Como hasta ahora, el fondo se ha considerado horizontal, la expresión (A.11) queda

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (\text{A.12})$$

que es la condición de contorno cinemática en el fondo.

A.1.2 Condición cinemática en la superficie libre

La superficie libre del agua puede ser descrita por medio de la siguiente expresión

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (\text{A.13})$$

donde η es el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel z .

Sustituyendo la ecuación (A.13) en la ecuación (1.7), se obtiene la siguiente expresión

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.14})$$

Por otro lado, de sustituir la ecuación (A.9) en la (A.14), se obtiene

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{A.15})$$

Realizando el producto punto de \bar{u} por n e igualando con la ecuación (A.14), se obtiene:

$$\bar{u} \cdot n = \bar{u} \cdot \frac{\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + k\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (\text{A.16})$$

operando igual que en el caso anterior se llega a

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t), \quad (\text{A.17})$$

y utilizando el potencial de velocidades, se tiene

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{A.18})$$

La expresión (A.18) es la condición de contorno cinemática de superficie libre.

A.2 Condición de contorno dinámica

La ecuación de Bernoulli

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (\text{A.19})$$

que también puede ser expresada como

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = 0 \quad (\text{A.20})$$

define la condición dinámica de superficie libre, la cual es relativa a las fuerzas externas al flujo, que en este caso, serán la presión y la debida a la fuerza de gravedad.

La solución del problema consiste en determinar la función del potencial de velocidades $\Phi(x,y,z,t)$ que satisface las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo.

A.3 Condición de contorno mixta de superficie libre

Para obtener la condición de contorno mixta de superficie, considérese primero la derivada total de la ecuación (A.18)

$$\begin{aligned} g \frac{d\eta}{dt} &= g \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

en $z = \eta(x, y, t)$

la cual también se puede expresar como

$$\begin{aligned} g \left(-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

en $z = \eta(x, y, t)$

Sustituyendo la ecuación (A.22) en la(A.18), se obtiene la condición de contorno mixta de superficie

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (\text{A.23})$$

en $z = \eta(x, y, t)$

Las condiciones de contorno hasta ahora descritas dependen del potencial de velocidades, Φ , y de la elevación de la superficie libre, η , los cuales no se conocen a priori. Una forma de resolver el problema es aproximarlas haciendo uso de un desarrollo en serie de Taylor sobre el nivel de reposo del agua ($z = 0$), de la forma

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_m \quad (\text{A.24})$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \eta_m \quad (\text{A.25})$$

A manera de ejemplo, se presenta la expresión general para la expansión de las condiciones de contorno dinámica y mixta de superficie libre, ecuaciones (A.20) y (A.23), respectivamente.

$$g \eta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad (\text{A.26})$$

en $z = 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad (\text{A.27})$$

en $z = 0$

B. TEORÍA DE ONDAS DE PEQUEÑA AMPLITUD SOBRE FONDO IMPERMEABLE Y HORIZONTAL

La teoría de ondas de pequeña amplitud es un desarrollo lineal, por ello, los términos de inercia convectivos no lineales son considerados pequeños. Es llamada teoría de pequeña amplitud porque las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero. Esta hipótesis es conveniente porque la elevación de la superficie libre puede ser despreciada a priori y tal solución es válida no obstante que el movimiento del oleaje sea diferente de cero.

Considérese la expansión en series de Taylor de primer orden, de una onda viajando en la dirección $\mathbf{x}(x, y)$ sobre fondo horizontal. Se cumple que $\partial h/\partial x = 0$, $\partial h/\partial y = 0$ y es válida la expresión (1.9), esto es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (\text{B.1})$$

Despreciando los términos de segundo orden o mayores, las condiciones de contorno de superficie libre dinámica y mixta, respectivamente, son

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (\text{B.3})$$

Para la representación completa del dominio de integración, es necesario definir dos condiciones laterales, las cuales dependen del problema. Si el movimiento del fluido es armónico con período T y longitud de onda L , las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad. Por ejemplo, para la propagación en el plano \mathbf{x} es

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x} + L, z, t) \quad (\text{B.4})$$

donde $\mathbf{x} = f(x, y)$. Por otro lado, la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema, es decir,

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x}, z, t + T) \quad (\text{B.5})$$

Definidas las condiciones de contorno, se aplica el método de separación de variables para encontrar las soluciones del problema definido por la ecuación de Laplace entre $z = 0$, $z = -h$ y las condiciones laterales. Dado que la ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, el problema analizado se reduce al caso de un tren de ondas con periodo T . Así, la función potencial Φ se puede escribir

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z)e^{i\sigma t}] \quad (\text{B.6})$$

donde \Re indica la parte real del argumento y σ es la frecuencia angular, definida por

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{B.7})$$

Con lo que la ecuación de Laplace, queda ahora en función de ϕ^*

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Al cumplirse que tanto la ecuación diferencial como las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, el método de separación de variables es aplicable. Por lo que se realiza la siguiente separación

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \quad (\text{B.9})$$

donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función todavía desconocida de las variables x e y , que se denominará potencial de velocidades plano.

Un caso particular del problema rectangular, es el movimiento que se realiza solo en la dirección el eje x y que no está confinado en el sentido y . Este caso, que se conoce con el nombre de ondas de cresta larga, se reduce solo a las dimensiones x y z .

Sustituyendo la descomposición de la función potencial ϕ^* en la ecuación de Laplace se obtiene

$$f(z) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.10})$$

al dividir la ecuación anterior por el producto $\phi(\mathbf{x}) f(z)$, resulta

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{B.11})$$

El primer término de la ecuación depende solamente de la variable \mathbf{x} , mientras que el segundo depende solamente de z . Por tanto, es posible escribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = -\frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (\text{B.12})$$

donde k es una constante.

Se han obtenido, de esta forma, dos ecuaciones

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 \cdot f(z) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + k^2 \cdot \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{B.14})$$

La ecuación (B.14) sigue siendo una ecuación en derivadas parciales, que se conoce con el nombre de ecuación de Helmholtz. La constante se ha expresado como $-k^2$ porque, como se verá, de esta forma se obtiene para $k^2 > 0$ una dependencia en \mathbf{x} que no es oscilatoria, sino exponencial (o decreciente con la profundidad). Más adelante se considerarán también los casos $k^2 < 0$ y en ellos el movimiento en z sí es oscilatorio, lo que corresponde a los llamados modos evanescentes.

Con la separación de variables realizada se ha formulado un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en z , ecuación (B.13). Ahora, aplicando la misma separación a las condiciones de contorno de impermeabilidad en el fondo y mixta de superficie libre

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad z = -h \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^* = \phi \left[\frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right] = 0 \quad \text{de donde} \quad \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) = 0 \quad z = 0 \quad (\text{B.16})$$

El cual tiene la forma de un problema regular de autovalores del tipo Sturm-Liouville.

Tabla B-1 Posibles soluciones de la ecuación de Laplace

Carácter de la constante de separación k	Ecuación diferencial ordinaria	Solución
Real $k^2 > 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$X(\mathbf{x}) = A \cos k\mathbf{x} + B \sen k\mathbf{x}$ $Z(z) = C e^{kz} + D e^{-kz}$
$k^2 = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$X(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$ $Z(z) = Cz + D$
Imaginaria $k^2 < 0, k = i k $ $ k = \text{magnitud de } k$	$\frac{d^2 X}{dx^2} - k ^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} + k ^2 Z = 0$	$X(\mathbf{x}) = A e^{ k \mathbf{x}} + B e^{- k \mathbf{x}}$ $f(z) = C \cos k z + D \sen k z$

B.1 Separación de la variable profundidad

En la Tabla B-1 se presentan las posibles soluciones que tiene la ecuación de Laplace. De estas, se obvia la correspondiente a $k^2 = 0$, dado que la solución es la trivial. Para incluir las soluciones imaginaria y real en una sola, la primera se puede expresar como la correspondiente a $k^2 > 0$. Se define, entonces

$$k^2 = -\mu^2 \text{ y con ello } -\mu^2 > 0 \quad (\text{B.17})$$

y así, la solución se puede escribir

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \sin(\mu z) = A \cos(ikz) + B \sin(ikz) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \quad (\text{B.18})$$

Adoptando la misma estructura de solución tanto para $k^2 > 0$ como para $k^2 < 0$, y aplicándola a la condición en el fondo, se llega a

$$k \left[Ae^{-kh} - Be^{+kh} \right] = 0, \text{ es decir, } A = B \cdot e^{2kh} \quad (\text{B.19})$$

Al considerar esta última igualdad en $f(z)$, ecuación, se tiene

$$f(z) = 2Be^{kh} \left[\frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B' \cosh k(h+z) \quad (\text{B.20})$$

Sustituyendo el lado derecho de la ecuación anterior en la condición de contorno mixta, ecuación, se obtiene

$$B'k \sinh kh - \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh kh = 0 \quad (\text{B.21})$$

o expresado de otra forma

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (\text{B.22})$$

La ecuación (B.22) relaciona la constante k , a partir de aquí llamada número de onda, con la frecuencia angular, σ , y permite identificar los autovalores del problema de contorno en estudio. Conocidos estos, se está en condiciones de analizar las soluciones del problema definido por la ecuación (B.14). La relación de dispersión, ecuación, tiene una solución real e infinitas imaginarias puras, conocidas como modos evanescentes para k .

B.2 Condición de periodicidad espacial

La ecuación (B.14) debe de cumplir también con la condición de contorno lateral dada por la condición de periodicidad espacial

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} + L) \quad (\text{B.23})$$

El problema en \mathbf{x} no tiene la estructura del problema regular de Sturm-Liouville, es decir, no tiene dos condiciones de contorno homogéneas y lineales. En este caso no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. De hecho, en la

resolución de la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones (seno y coseno) linealmente independientes para el mismo autovalor. Este problema se dice que es un problema singular (o no regular) de Sturm-Liouville al cual se le pueden aplicar la mayoría de los teoremas correspondientes al problema regular, en particular el correspondiente a la ortogonalidad de las autofunciones aún cuando, en algunos casos, sea necesario aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Por conveniencia para desarrollos posteriores, la solución de $\phi(\mathbf{x})$ se escribirá en forma compleja, dada la posibilidad de aplicar el principio de superposición. La forma de solución adoptada, entonces, es

$$\phi(\mathbf{x}) = -Ae^{\pm ikx} \quad (\text{B.24})$$

Para que dicha solución cumpla con la condición de periodicidad, ec. (B.23) se tiene que cumplir que

$$e^{\pm ikx} = e^{\pm ik(x+L)} \quad (\text{B.25})$$

donde es evidente que

$$e^{\pm ikL} = 1 \quad (\text{B.26})$$

y por propiedades de la función exponencial

$$\cos kL = 1 \quad (\text{B.27})$$

$$\text{sen } kL = 0 \quad (\text{B.28})$$

por tanto,

$$kL = n\pi \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (\text{B.29})$$

Las dos soluciones iniciales, $n = 0$ y $n = 2$, corresponden a las dos primeras repeticiones del movimiento periódico, por tanto, el número de onda queda definido por

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (\text{B.30})$$

B.3 Solución general

A partir de la condición de contorno dinámica de superficie se obtiene una relación entre el potencial total, $\Phi(\mathbf{x}, z, t)$ y la elevación de la superficie libre, η , dada por

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (\text{B.31})$$

de donde

$$\eta = \Re \left[-\frac{i\sigma}{g} \cosh(kh) \cdot A \cdot e^{\pm i(-kx + \sigma t)} \right] \quad (\text{B.32})$$

Ahora, dado que se busca una solución periódica de la superficie libre que represente una onda progresiva, una definición clásica de la elevación de la superficie libre es

$$\eta = \Re \left[a e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{B.33})$$

donde $a = H/2$ es la amplitud del movimiento y H la altura de ola.

Al comparar las expresiones (B.32) y (B.33), se obtiene

$$A = -\frac{g}{i\sigma} \frac{a}{\cosh kh} \quad (\text{B.34})$$

que sustituido en el potencial resulta

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{\pm i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{B.35})$$

y, por conveniencia, tomando el signo negativo en la exponencial queda

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx - \sigma t)} \right] \quad (\text{B.36})$$

La ecuación (B.36) es la solución general del potencial de velocidades para una onda de cresta larga propagándose sobre fondo horizontal impermeable, la cual es válida para el caso bidimensional que contempla este trabajo..

A partir de la ecuación (1.15), se derivan las llamadas propiedades ingenieriles de la teoría lineal, que son las expresiones con las que se determinan las características del flujo.

Nota 1. Problema regular de Sturm-Liouville

Se considera a continuación la teoría de Sturm-Liouville, cuya principal aplicación es la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método de separación de variables.

Se conoce como problema de Sturm-Liouville al problema de contorno de segundo orden definido por

$$\left[p(x) y' \right]' + q(x) y + \lambda r(x) y = 0 \quad a < x < b$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$$

$$\tau y(b) + \delta y'(b) = 0$$

donde p , p' , q y r son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ siendo a y b finitos. Además $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en dicho intervalo; α , β , τ y δ no pueden ser simultáneamente cero. a , b , $p(x)$, $r(x)$, α , β , τ , δ son reales.

Se trata, pues, de un problema definido por una ecuación diferencial, lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

Nota 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz

Este problema es análogo al problema regular de autovalores de Sturm-Liouville y todos los teoremas que se dan a continuación tienen su correspondiente en el problema de una dimensión. A continuación solamente se dará el enunciado del teorema, sin entrar en su demostración que, por otra parte, es muy compleja.

- Todos los autovalores son reales.
- Existe un número infinito de autovalores. Existe un autovalor mínimo, pero no existe uno máximo.
- A un autovalor le puede corresponder más de una autofunción.
- Las autofunciones $\phi_k(x,y)$ forman un conjunto completo en el dominio en el que han sido obtenidas. Cualquier función $f(x,y)$ suave por tramos puede representarse por medio de una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x, y) \sim \sum_{\lambda} a_k \phi_k(x, y)$$

donde el término del sumatorio expresa una combinación lineal de todas las autofunciones. La serie así obtenida converge en la medida que los coeficientes a_k se eligen correctamente.

- Las autofunciones pertenecientes a diferentes autovalores k_1 y k_2 son ortogonales (de peso unitario) en el dominio, es decir,

$$\iint_{\text{Dominio}} \phi_{k_1} \phi_{k_2} dx dy = 0 \quad k_1 \neq k_2$$

- Un autovalor k puede ser relacionado con la autofunción por medio del coeficiente de Rayleigh

$$k = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \bar{n} ds + \iint_{\text{Dominio}} (\nabla \phi)^2 dx dy}{\iint_{\text{Dominio}} \phi^2 dx dy}$$

\bar{n} es la normal exterior y $\oint ds$ es una integral de línea cerrada sobre todo el contorno del dominio bidimensional estudiado.

Nota 3. Valores característicos y funciones características del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$

Las soluciones a la relación de la dispersión, ecuación (1.13), pueden obtenerse gráficamente. En la Figura B-1 se ha dibujado kh contra las dos partes de la ecuación de la dispersión, $\sigma^2 h / gkh$ y $\tanh(kh)$. Como se puede observar, existen dos raíces reales $\pm k$ que son los dos autovalores que tienen una única autofunción, a saber, $\cosh \mathbf{k}(h+z)$, por lo que solamente es necesario considerar la raíz positiva, denotada comúnmente como k_0 .

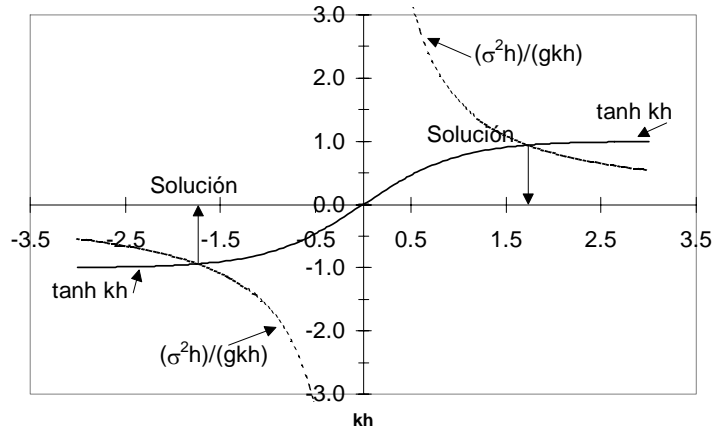


Figura B-1 Obtención de las raíces reales

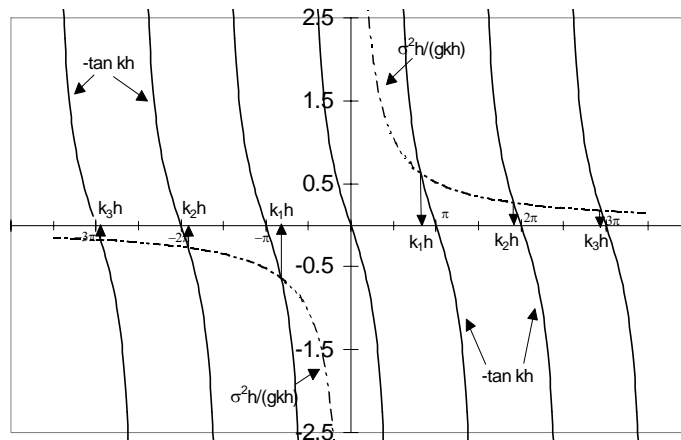


Figura B-2 Obtención de las raíces imaginarias

Además, la ecuación de la dispersión tiene raíces (autovalores) imaginarias puras, correspondientes a $k^2 < 0$

$$k = i \cdot \mu$$

cuyas soluciones se pueden ver en la Figura B-2 Obtención de las raíces imaginarias. A diferencia de la raíz real y puesto que la función tangente tiene ramas infinitas; ahora se

obtiene un número infinito de raíces $\mu = \pm k_n$, cuya correspondiente autofunción es $\cosh[ik_n(h+z)] = \cos k_n(h+z)$. Al igual que en el caso anterior, solamente se debe de usar uno de los signos. Para este caso se considerará la raíz negativa pues con ello se representan los modos oscilantes en vertical que se amortiguan al propagarse. Estas raíces se encuentran en los intervalos $\pi/2 < k_1 h < \pi$, $3\pi/2 < k_2 h < 2\pi, \dots$; $(n - 1/2)\pi < k_n h < n\pi$.

Por definición, una onda viajará una distancia de una longitud de onda L , en un periodo T . Recordando que $\sigma = 2\pi/T$ y que $k = 2\pi/L$, es evidente que la celeridad de propagación de la onda C , puede ser expresada como

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k}$$

B.4 Propiedades ingenieriles de la teoría lineal

Resumen de las características del oleaje para aguas intermedias ($\pi/10 < kh < \pi$).

Longitud de onda	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad de grupo	$C_g = nC = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$
Velocidad de las partículas: Horizontal	$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Vertical	$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Aceleración de las partículas: Horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Desplazamiento de las partículas: Horizontal	$\zeta = \int u dt = -a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$\xi = \int w dt = a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Presión total (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho g z + \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Flujo de energía	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{\sigma}{k} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right]$

Resumen de las características del oleaje para aguas someras ($kh < \pi/10$) y profundas ($kh > \pi$)

Longitud de onda	$L = T\sqrt{gh}$	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$	$C = \frac{gT}{2\pi}$
Celeridad de grupo	$C_g = C = \sqrt{gh}$	$C_g = \frac{C}{2}$
Velocidad partículas Horizontal	$u = a\sqrt{\frac{g}{h}} \cos(kx - \sigma t)$	$u = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$
Vertical	$w = a\sigma \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin(kx - \sigma t)$	$w = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$
Aceleración partículas Horizontal	$a_x = a\sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$	$a_x = a\sigma^2 e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$a_z = -a\sigma^2 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$	$a_z = -a\sigma^2 e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$
Desplazamiento partículas Horizontal	$\zeta = -a\sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$	$\zeta = -ae^{kz} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$\xi = a \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$	$\xi = ae^{kz} \cos(kx - \sigma t)$
Presión total (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho gz + \rho g\eta$	$p = -\rho gz + \rho g\eta e^{kz}$
Flujo de energía	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) \sqrt{gh}$	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) \frac{1}{2} C$

C. SOLUCIÓN DE LAS INTEGRALES DE LA MMSE CON MEDIO POROSO

A continuación se presenta la forma explícita de las ecuaciones (2.32) – (2.37)

$$I_1 = D_0^2 (FF - DD \cdot FF + F^2 E + \delta^2 T_0 II)$$

$$I_{21} = D_0^2 \left[PKhF_3 + \frac{1}{2} (K + KF^2) DD - FKE - FK \cdot FF - PFhD_1 - D_0 PDhF_2 + \delta^2 T_0 Q \right. \\ \left. + \delta^2 (T \cdot T_1 - D_0 T^2 PDh) II \right]$$

$$I_{22} = D_0^2 \left[PKhpF_3 - PFhpD_1 - D_0 PDhpF_2 + \frac{1}{2} \delta^2 PKhpT^2 G - \right. \\ \left. - \delta^2 (PFhpTT \cdot T + FT_0 (PKhp \cdot a - K)T + D_0 PDhpT^2) II \right]$$

$$I_{31} = D_0^2 \left[PKh^2 K_1 + 2PKhK (B - FA + F^2 C + K^2 (E - F \cdot DD + F^2 FF)) - \right. \\ - 2PKh \left(PFhB - \frac{1}{2} FPFhA \right) - 2K \left(PFhE - \frac{1}{2} PFhFDD \right) - \\ - 2D_0 PDh (PKhF_3 - PFhD_1 + K (F_1 DD - FE - F \cdot FF)) + \\ + D_0^2 PDh^2 F^2 + \delta^2 T^2 (PKh^2 MM + 2PKhKN + K^2 OO) + 2\delta^2 TT_1 Q - 2D_0 \delta^2 T^2 PDhQ + \\ \left. + \left(\frac{\delta}{D_0} T_1 - \delta T \right)^2 II \right]$$

$$I_{32} = D_0^2 \left[Pkhp^2 K_1 + PFhp^2 E - 2PFhpPKhpB + PFhpPKhpFA - \right. \\ - 2D_0 PDhp (PKhpF_3 - PFhpD_1) + D_0^2 PDhp^2 F_2 + RPKhpTG + T^2 PKhp^2 MM + \\ \left. + \delta^2 RII - 2D_0 \delta^2 PDhp \left(RTII + \frac{1}{2} T^2 PKhpG \right) + D_0^2 \delta^2 PDhp^2 T^2 II \right]$$

$$\begin{aligned}
I_{33} = D_0^2 & \left[PKhPKhpK_1 + PKhpK(B - FA + F^2C) - PKhPFhpB_1 - KPFhpE_1 - \right. \\
& - PFhPkhpB_1 + PFhPFhpE - D_0PDhp(PKhF_3 + K(F_1DD - FE - F \cdot FF) - PFhD_1) - \\
& - D_0PDh(PKhF_3 - PFhpD_1) + D_0^2PDhPDhp(-F \cdot DD + FF + F^2E) + \frac{1}{2}\delta^2RTPKhG + \\
& + \frac{1}{2}\delta^2RTKH + \delta^2T^2PKhPKhpMM + \delta^2T^2PKhpKN + (\delta^2R - D_0\delta^2PDhT)RII + \\
& + \frac{1}{2}(\delta^2R - D_0\delta^2PDhT)TPKhG - \frac{1}{2}D_0\delta^2PDhpT^2(PKhG + KH) - \\
& \left. - \delta^2PDhpD_0(-PFhTT - F(PKh a + K)T_0 - D_0PDhT)TII \right]
\end{aligned}$$

en las que

$$B_1 = B - \frac{1}{2}FA$$

$$E_1 = E - \frac{1}{2}F \cdot DD$$

$$F_1 = \frac{1}{2}(1 + F^2)$$

$$F_2 = -F \cdot DD + FF + F^2E$$

$$F_3 = F_1A - FB - FC$$

$$D_0 = \frac{1}{\cosh kh - F \sinh kh}$$

$$D_1 = \frac{1}{2}DD - FE$$

$$K_1 = KK - FJ - F^2L$$

$$Q = \frac{1}{2}PKhG + \frac{1}{2}KH$$

$$R = -PFhp \tanh ka - FT_0(Pkhp a - K)$$

$$T = 1 - F \tanh ka$$

$$T_0 = 1 - F \tanh(ka)^2$$

$$T_1 = -PFh \tanh ka - F(PKh a + K)T_0$$

$$TT = \tanh ka$$

$$A = -1/4(-2 \cosh(2kh)kh + \sinh(2kh) - 2 \cosh(-2khp + 2kh)khp + 2 \cosh(-2khp + 2kh)Kh - \sinh(-2khp + 2kh)) / K^2$$

$$B = -1/4(-2 \cosh(kh) \sinh(kh)kh + \cosh(kh)^2 - 2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)khp + 2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)kh - k^2hp^2 + 2k^2hph - \cosh(-khp + kh)^2) / k^2$$

$$C = -1/4(-2 \cosh(kh) \sinh(kh)kh + \cosh(kh)^2 - 2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)khp + 2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)kh + K^2hp^2 - 2k^2hph - \cosh(-khp + kh)^2) / k^2$$

$$DD = -1/2(-\cosh(2kh) + \cosh(-2khp + 2kh)) / k$$

$$E = 1/2(\sinh(kh) \cosh(kh) - \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) - khp) / k$$

$$FF = 1/2(\sinh(kh) \cosh(kh) - \cosh(-khp + -kh) \sinh(-khp + kh) + khp) / k$$

$$G = 1/4(-2 \cosh(-2khp + 2kh)khp + 2 \cosh(-2khp + 2kh)kh - \sinh(-2khp + 2kh)) / k^2$$

$$H = 1/2(\cosh(-2khp + 2kh) - 1) / k$$

$$II = 1/2(\cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) - khp + kh) / k$$

$$J = 1/4(2 \cosh(2kh)k^2h^2 - 2 \sinh(2kh)kh + \cosh(2kh) - 2 \cosh(-2khp + 2kh)k^2hp^2 + 4 \cosh(-2khp + 2kh)K^2hph - 2 \cosh(-2khp + 2kh)k^2h^2 - 2 \sinh(-2khp + 2kh)khp + 2 \sinh(-2khp + 2kh)kh - \cosh(-2khp + 2kh)) / k^3$$

$$KK = 1/12(6 \cosh(kh) \sinh(kh)k^2h^2 - 6 \cosh(kh)^2kh + 3 \sinh(kh) \cosh(kh) - 6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)K^2hp^2 + 12 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2hph - 6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2h^2 - 2k^3hp^3 + 6k^3hp^2h - 6k^3hph^2 - 6 \cosh(-khp + kh)^2khp + 6 \cosh(-khp + kh)^2kh - 3 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) + 3khp) / k^3$$

$$\begin{aligned}
L = & 1/12(6 \cosh(kh) \sinh(kh)k^2h^2 - 6 \cosh(kh)^2 kh + 3 \sinh(kh) \cosh(kh) - \\
& - 6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2hp^2 + \\
& + 12 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2hph - \\
& - 6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2h^2 + 2k^3hp^3 - \\
& - 6k^3hp^2h + 6k^3hph^2 - 6 \cosh(-khp + kh)^2 khp + 6 \cosh(-khp + kh)^2 kh - \\
& - 3 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) + 3khp) / k^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MM = & -1/12(-6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2hp^2 + \\
& + 12 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2hph - 6 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)k^2h^2 - \\
& - 2k^3hp^3 + 6k^3hp^2h - 6k^3hph^2 + 2K3h^3 - 6 \cosh(-khp + kh)^2 khp + \\
& + 6 \cosh(-khp + kh)^2 kh - 3 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) + 3khp - 3kh) / k^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = & -1/4(2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)khp - 2 \cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh)kh + \\
& + k^2hp^2 - 2k^2hph + k^2h^2 + \cosh(-khp + kh)^2 - 1) / k^2
\end{aligned}$$

$$OO = 1/2(\cosh(-khp + kh) \sinh(-khp + kh) + khp - kh) / k$$

Además, PKh es la parcial de k con respecto a h , $PKhp$ la parcial de k respecto de hp , PFh la de F respecto de h y $PFhp$ la parcial de F respecto de hp .