

Universidad Nacional Autónoma de México
Posgrado en Ciencias Matemáticas
Facultad de Ciencias

Álgebras de Lie Cuánticas

Tesis
que para obtener el grado académico de
Doctor en Ciencias
(Matemáticas)

presenta

César Bautista Ramos¹

Director de tesis: Dr. Micho Durdevich Lucich

¹bautista@cs.buap.mx



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Patrocinios

- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.
- Fundación TELMEX.
- Proyecto de Investigación INI106897 de DGAPA/UNAM.

Agradecimientos

- **Capítulo 2:** Quisiera agradecer a M. Durdevich y R. Bautista por sus alientos, a C. Ramírez por darme acceso a su colección personal de artículos, a A. Sudbery por llamar mi atención sobre su propio trabajo sobre álgebras cuánticas, y gracias a J. García-Fernández, P. García y L. Montgomery por el software libre.

Los programas de computadora usados en este capítulo fueron diseñados por el autor en colaboración con Yaocíhuatl E. Arroyo.

- **Capítulo 3:** Quisiera agradecer a M. Durdevich quien me sugirió la existencia de una estructura trenzada (ver (2.11)) en el caso A_n . Además el lema 4.1 es de su autoría.
- **Capítulo 4:** El autor quisiera agradecer a M. Durdevich quien sugirió la proposición 6.1.
- **Capítulo 5.** Gracias a V. K Khartchenko y M. Durdevich por sus útiles comentarios.
- A cada uno de los sinodales:
 - Dr. Micho Durdevich Lucich
 - Dr. José Antonio de la Peña Mena
 - Dr. Vladislav Kirillovich Khartchenko
 - Dr. Adolfo Sánchez Valenzuela
 - Dr. Michael Barot Schlatter
 - Dr. Stephen Bruce Sontz

Contenido

Patrocinios	iii
Agradecimientos	v
Introducción	vii
Capítulo 1. Los resultados principales	1
1. El caso clásico	1
2. El caso cuántico	4
3. Álgebras de Lie cuánticas de tipo A_n positivo	6
4. Coestructura	11
Capítulo 2. Un teorema Poincaré-Birkhoff-Witt generalizado	15
1. Antecedentes	15
2. La noción de T -álgebra de Lie	17
3. Ejemplos	21
4. Álgebras envolventes universales	24
5. Álgebras envolventes universales y álgebras simétricas	26
6. Representaciones	31
7. El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt	34
8. Trenzas	35
9. Deformaciones cuánticas no estándar de $GL(n)$	36
10. $U(sl_{n+1}^+)_q$: el caso general.	37
Capítulo 3. Relaciones con los grupos cuánticos trenzados	43
1. Antecedentes	43
2. Trenzas y coproducto	44
3. Antípoda	49
4. La condición adicional del grupo cuántico trenzado	55
5. La representación adjunta	58
Capítulo 4. Álgebras de Lie cuánticas de tipo A_n positivo	61
1. Antecedentes	61
2. Nociones básicas y construcciones comunes	62
3. Bases Poincaré-Birkhoff-Witt y T -álgebras de Lie	64
4. Un álgebra de Lie cuántica de tipo A_n positivo	67

5. Álgebras graduadas y álgebras envolventes universales	68
6. La ecuación de Yang-Baxter y algunas álgebras de Lie cuánticas	69
Capítulo 5. Generalizaciones: el caso D_n .	73
1. Antecedentes	73
2. Identidades no trenzadas y la cuantización de $U^+(sl_4)$	75
3. La cuantización de D_n positivo	77
4. Elementos básicos canónicos en $U_q^+\mathfrak{o}(2n)$	82
5. Estructuras de álgebra de Lie generalizadas	84
6. Morfismos y problemas de programación entera	89
Capítulo 6. El caso excepcional E_6 . Trabajo a futuro y posibles aplicaciones.	93
1. GAP, QuaGroup y E_6, E_7 cuánticos	93
2. Computación cuántica y relaciones de q -conmutación	93
Conclusiones	95
Apéndice 1. $(\widetilde{sl_4^+})_q$	97
Apéndice 2. Trenzas	103
Referencias	107

Introducción

Un principio fundamental en Ciencia es que la naturaleza es en esencia simple, a pesar de que su comportamiento pueda parecer complicado. El reto es entonces explicar los patrones y simetrías de tal complejidad de forma sencilla. En términos matemáticos las simetrías aparecen como estructuras algebraicas formadas por transformaciones. A veces como grupos finitos, discretos, continuos, de Lie, etcétera. En Física Cuántica, por ejemplo, en la descripción del momento angular, según la mecánica cuántica, aparece el álgebra de Lie simple de tipo $A_1 \simeq su_2$, que es el álgebra de Lie del grupo de Lie SU_2 que es, a su vez, localmente isomorfo al grupo de rotaciones en dimensión tres. En los modelos de las interacciones fuertes y electrodébiles aparecen álgebras de Lie que son sumas directas de semisimples y abelianas [28]. Sin embargo, problemas más complicados en física fundamental requieren nuevas generalizaciones. La llamada teoría de sistemas cuánticos integrables ha iniciado el estudio de una nueva clase de simetría; los objetos matemáticos relacionados son llamados *grupos cuánticos*. El papel de los grupos cuánticos en mecánica cuántica es similar al de los grupos de Lie en geometría clásica y en la teoría general de la relatividad de Einstein [15].

Existen diferentes construcciones de grupos cuánticos: la de Drinfeld-Jimbo, la de Faddeev-Reshetekhin-Takhtajan, de Manin y la de Woronowicz.

En el presente trabajo nosotros trabajamos con grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo.

¿Qué es un grupo cuántico? De forma muy general, de acuerdo con Durdevich [26], es un espacio *cuántico* con una estructura adicional análoga (en cierto sentido) a la de grupo. Expliquemos: por espacio cuántico se entiende una generalización del concepto geométrico de espacio. Tal generalización se hace primero generalizando el concepto de *punto*; traduciendo el concepto geométrico en un concepto algebraico: punto se traduce en *carácter* de un álgebra conmutativa (ver [26]). Entonces la generalización consiste en permitir el uso de álgebras no-conmutativas: un *punto cuántico* es entonces un carácter

sobre un álgebra no-conmutativa (en general) y un espacio cuántico es una colección de tales caracteres. Como en principio no siempre existen caracteres, es posible que un espacio cuántico no sea una colección de puntos. Lo cual muestra la flexibilidad de esta nueva *geometría no-conmutativa*, y como consecuencia su posibilidad de aplicaciones a la Física. En particular su potencial para describir de manera coherente el espacio-tiempo a todas las escalas: el viejo sueño de unificar la Física Cuántica (micromundo) y la Teoría de la Gravitación (macromundo); en contraste con las descripciones usuales en las que se encuentran incoherencias matemáticas en escalas del orden de l la longitud de Planck que es

$$l = \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^3}}$$

donde γ es la constante gravitacional, \hbar la constante de Planck y c la velocidad de la luz.

Como uno puede notar la clave de estas generalizaciones es el paso de las estructuras conmutativas a las no-conmutativas.

La descripción anterior está más cercana a los grupos cuánticos de Woronowicz que se consideran como duales a los de Drinfeld-Jimbo, y éstos últimos (que son nuestro principal interés), al igual que los de Woronowicz se describen haciendo generalizaciones no-conmutativas de ciertos objetos algebraicos infinito dimensionales que son llamados *álgebras envolventes universales de álgebras de Lie*. De forma más precisa, tales generalizaciones son *no-coconmutativas*.

Que tal generalización no-coconmutativa puede obtenerse desde la estructura finito dimensional de una generalización del concepto de álgebra de Lie en el caso A_n positivo es la principal afirmación del presente trabajo. Es decir, se afirma que existen generalizaciones no-conmutativas (cuánticas) de álgebras de Lie.

De hecho, recientemente se ha conjeturado la existencia de álgebras de Lie (semisimples) generalizadas de tal forma que sus envolventes universales, también generalizadas, deberían ser exactamente los llamados grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo. De existir tales deberían de llamarse *álgebras de Lie cuánticas* [47, 45]. En otras palabras, se conjetura que un grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo no es más que un álgebra envolvente universal de un álgebra de Lie cuántica.

En el presente trabajo exponemos nuestra propia propuesta de álgebra de Lie cuántica. La llamamos T -álgebra de Lie, para evitar confusiones con las generalizaciones ya existentes, por un lado, y por otro para remarcar el hecho de que éstas T -Lie álgebras están inspiradas en las S -álgebras de Lie de Gurevich [32].

Recordemos que un álgebra de Lie sobre un anillo conmutativo unitario k es un k -módulo L junto con un morfismo $[\cdot, \cdot] : L \otimes L \rightarrow L$ tal que

- (1) $[\cdot, \cdot]s = -[\cdot, \cdot]$, (antisimetría);
- (2) $[\cdot, \cdot]_2(s_1s_2 + s_2s_1 + Id \otimes Id \otimes Id) = 0$, (identidad de Jacobi);

donde s denota al switch $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ y $s_1 = s \otimes Id : L^{3\otimes} \rightarrow L^{3\otimes}$, $s_2 = Id \otimes s : L^{3\otimes} \rightarrow L^{3\otimes}$, $[\cdot, \cdot]_2 = Id \otimes [\cdot, \cdot] : L^{3\otimes} \rightarrow L^{2\otimes}$ [35, 34].

Una fuente importante de ejemplos de álgebras de Lie lo proporcionan las álgebras asociativas, si definimos $[x, y] = xy - yx$, $\forall x, y$ elementos del álgebra asociativa. De hecho, ésta es la única fuente de ejemplos en el sentido de que cualquier álgebra de Lie libre como k -módulo se puede sumergir en una k -álgebra asociativa $U(L)$ llamada *envolvente universal de L* , según el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt [12]. Aún más: la estructura lineal de $U(L)$ es polinomial. Sin embargo no puede decirse que el estudio de las álgebras de Lie puede hacerse a través de las álgebras asociativas, puesto que en general $U(L)$ es demasiado grande comparada con L ; mientras L es de dimensión finita, $U(L)$ no lo es. Sin embargo el álgebra envolvente universal refleja muchas de las propiedades de L . Por ejemplo, el hecho de que el morfismo diagonal $L \rightarrow L \oplus L$, $x \mapsto x \oplus x$ sea un morfismo de álgebras de Lie (la suma directa $L \oplus L$ es, de manera natural, un álgebra de Lie), es traducido en el hecho de que $U(L)$ tenga un coproducto: $U(L) \rightarrow U(L) \otimes U(L)$.

Así el álgebra envolvente universal $U(L)$ del álgebra de Lie L tiene una estructura y coestructura compatibles entre sí, con ciertas propiedades adicionales: $U(L)$ es un *álgebra de Hopf* [1, Ejem. 2.5 p.59].

Las álgebras de Lie de dimensión finita consideradas como las más interesantes son las llamadas *álgebras de Lie semisimples*. En tal caso sus envolventes universales pueden ser presentadas por una familia finita de generadores y siete familias de relaciones, gracias al teorema de Serre [34, 18.1 p.96, 18.3 p.99].

A principios de la década de 1980, simultáneamente V. Drinfeld y M. Jimbo encontraron nuevas álgebras de Hopf no conmutativas como formalizaciones del llamado *método de dispersión inverso* usado en Física-Matemática [22, 23, 38]. Estas nuevas álgebras de Hopf, llamadas *grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo* o *envolventes universales cuantizadas* [36], surgen al añadir esencialmente un nuevo parámetro q a las relaciones de Serre que describen las envolventes universales de las álgebras de Lie semisimples. Se denotan como $U_q(L)$.

Las envolventes universales cuantizadas tienen la característica de que cuando se toma el límite $q \rightarrow 1$ se colapsan a las envolventes universales clásicas: $U_{q \rightarrow 1}(L) = U(L)$.

Esta es la construcción usual de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo: tomar L un álgebra de Lie, construir entonces su envolvente universal $U(L)$ para luego *cuantizarla* mediante la introducción de un parámetro de deformación q y obtener entonces el grupo cuántico $U_q(L)$ que es un álgebra de Hopf no conmutativa.

$$(0.1) \quad \begin{array}{ccc} U(L_q) \stackrel{=?}{=} U_q(L) & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & U(L) \\ \uparrow \text{---} & & \uparrow \\ L_q \stackrel{=?}{=} & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & L \end{array}$$

Debido a que las álgebras envolventes universales cuantizadas tienen muchas propiedades que comparten con las envolventes universales clásicas (el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, por ejemplo [58]) se especula que es debido a que existe un álgebra de Lie cuantizada (en algún sentido por descubrir), que produce como envolvente universal generalizada (en algún sentido) a su cuantización.

Esto es, se conjetura que existen álgebras de Lie generalizadas L_q con envolventes universales, también generalizadas, que hacen conmutar el diagrama (0.1)

Se espera que tales álgebras de Lie cuantizadas sean de dimensión finita. Tal concepto sería útil porque en lugar de tener que trabajar con todo el grupo cuántico sólo trataríamos con la álgebra de Lie cuántica [47] de dimensión finita.

Existen varias propuestas para el concepto de álgebra de Lie cuántica. Entre las más importantes están, la de Woronowicz [61], que tiene generalizaciones tanto de la antisimetría como de la identidad de Jacobi para trenzas (que son generalizaciones del switch); la de Majid [47], que sólo tiene una generalización de la identidad de Jacobi, también para trenzas; la de Lyubashenko-Sudbery [45], con generalizaciones tanto de antisimetría como de la identidad de Jacobi, pero no necesariamente para trenzas; la de Delius-Gould [17], con sólo una generalización de antisimetría, sin identidad de Jacobi; la de Kharchenko [41], sin antisimetría ni identidad de Jacobi, sino con un punto de vista muy diferente: generalización del criterio de Friedrichs (caracterización de la estructura de Lie por medio de primitivos).

En el artículo [45] aparecen los requerimientos ideales para un álgebra de Lie cuántica, estos son:

- (1) El álgebra de Lie cuántica \mathfrak{g}_q debe de ser un espacio vectorial de la misma dimensión que el álgebra de Lie clásica \mathfrak{g} .

- (2) Debe de ser una deformación de \mathfrak{g} , es decir, el álgebra de Lie clásica debe de obtenerse en el límite $q \rightarrow 1$.
- (3) Debe de tener una operación binaria: *el corchete de Lie cuántico*.
- (4) El corchete de Lie cuántico debe de ser una función bilineal de $\mathfrak{g}_q \otimes \mathfrak{g}_q$ a \mathfrak{g}_q .
- (5) Debe de satisfacer una identidad de Jacobi y un axioma de antisimetría.
- (6) Estos axiomas deben de establecerse sólo en términos del corchete de Lie cuántico (es decir, sin referencia alguna a una pre-existente álgebra envolvente).
- (7) El álgebra de Lie cuántica debe de aparecer como un subespacio del álgebra envolvente cuantizada, siendo el corchete la acción adjunta del álgebra de Hopf de x sobre y .
- (8) Debe de ser posible definir las relaciones del álgebra envolvente en términos del corchete de Lie cuántico, interpretando el corchete como un conmutador con expresión cuadrática.
- (9) Debe de existir un teorema de Poncaré-Birkhoff-Witt estableciendo que el álgebra envolvente universal cuantizada tiene una base que consiste de monomios ordenados de los elementos del álgebra de Lie.

Nuestra propuesta satisface todos ellos, excepto la segunda parte del punto 7: el corchete de Lie cuántico no coincide con la acción adjunta del de la estructura de Hopf del álgebra envolvente universal (ver capítulo 3, nota 5.1). Tales son las virtudes de nuestra propuesta. Entre los defectos que tiene es que sólo parecen funcionar tales ideas con las partes negativas y positivas de las álgebras de Lie, no para la totalidad.

El presente documento está organizado como sigue: en el capítulo 1 se enuncian los resultados principales con sólo breves ideas acerca de las demostraciones. Las demostraciones detalladas aparecen en los capítulos siguientes. En capítulo 2 se explora la idea de utilizar el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt en el caso cuántico para extraer una álgebra de Lie cuántica. En la literatura existen varias formas de obtener bases del tipo Poincaré-Birkhoff-Witt, por ejemplo en el trabajo de Kharchenko [40] se usa una generalización del llamado método de Shirshov, sin embargo, tal vez el método más popular sea mediante el uso del llamado *lema del diamante* [10]. En contraste, nosotros utilizamos otro camino más cercano a la teoría clásica: construimos una

representación sobre la q -álgebra simétrica. Aunque nuestros ejemplos principal trata con las parte positiva y negativa de las envolventes universales del tipo A_n y D_n nuestra versión del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt puede aplicarse a las álgebras de Lie clásicas, a las álgebra de Lie coloreadas, a las álgebras de Clifford y a las deformaciones multiparamétricas de $GL(n)$. Las álgebras de Lie generalizada encontradas son esencialmente álgebras de Lie en una categoría trenzada. El capítulo 3 trata sobre la estructura de álgebra de Hopf trenzada de la envolvente universal cuantizada en el caso A_n . El capítulo 4 trata sobre definiciones de álgebras de Lie generalizadas independientes de la elección de las bases. Además de correspondientes versiones graduadas de álgebras simétricas y su relación con las soluciones de la ecuación de Yang-Baxter. En el capítulo 5 se estudia el caso D_n . Finalmente en el capítulo 6 se discuten posibles aplicaciones y el trabajo a futuro.

Los capítulos 2, 3, 4 y 5 son los artículos [2], [3], [4] y [8] respectivamente. Una versión de [3] aparece formalmente publicada en el *International Journal of Theoretical Physics* [5].

CAPÍTULO 1

Los resultados principales

1. El caso clásico

La presente sección es un acopio de hechos bien conocidos sobre álgebras de Lie [34], que nos interesan porque la mayoría de ellos se pueden generalizar.

La siguiente notación será usada en todo el presente trabajo.

NOTACIÓN 1. Supóngase que k es un anillo conmutativo fijo y L, N, M tres k -módulos. Si $f : M \rightarrow N$ es una función k -lineal, entonces $f_1 = f \otimes Id : M \otimes L \rightarrow N \otimes L$ y $f_2 = Id \otimes f : L \otimes M \rightarrow L \otimes N$ donde $Id : L \rightarrow L$ es la función identidad.

Un álgebra de Lie \mathfrak{g} es un módulo sobre un anillo conmutativo k (usualmente el campo complejo $k = \mathbb{C}$) dotado de un morfismo $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que satisface

- (1) $[x, y] = -[y, x]$, $x, y \in \mathfrak{g}$; antisimetría ;
- (2) $[x, [y, z]] + [[x, y], z] + [y, [x, z]] = 0$, $x, y, z \in \mathfrak{g}$; identidad de Jacobi.

Las álgebras más comunes son las álgebras asociativas. En vista de la identidad de Jacobi, las álgebras de Lie no son asociativas, sin embargo, se pueden incluir en tales usando la llamada álgebra envolvente universal.

DEFINICIÓN 1.1. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie sobre k . El *álgebra envolvente universal de \mathfrak{g}* , denotada $U(\mathfrak{g})$, es la k -álgebra generada por los elementos de \mathfrak{g} módulo las relaciones

$$(1.1) \quad xy - yx = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Que las álgebras de Lie pueden incluirse dentro de álgebras asociativas es consecuencia del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW).

TEOREMA 1.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt). *Sea \mathfrak{g} una k -álgebra de Lie con base libre totalmente ordenada, entonces existe un isomorfismo de k -módulos:*

$$U(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

donde $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ es el álgebra simétrica de \mathfrak{g} , esto es, la k -álgebra generada por los elementos de \mathfrak{g} módulo las relaciones

$$xy - yx = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Tal isomorfismo depende tanto de la base elegida, así como del orden dado.

Una inspección cuidadosa de las demostraciones de este teorema ([12] ó [35]) revelan que están basadas en cierto procedimiento de ordenación. Por ejemplo si x, y son elementos básicos de \mathfrak{g} y declaramos $x < y$ entonces tal isomorfismo tiene el efecto:

$$(xy \in U(\mathfrak{g})) \mapsto (xy \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}))$$

pero si hubieramos declarado $x > y$, entonces

$$(xy \in U(\mathfrak{g})) \mapsto ([x, y] + yx \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})).$$

Por otro lado, PBW es equivalente a la identidad de Jacobi y también es equivalente al hecho de que la envolvente universal contenga al álgebra de Lie.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sean \mathfrak{g} un k -módulo libre, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ un morfismo k -lineal antisimétrico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (1) *El morfismo k -lineal $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$, $x \mapsto x$ es inyectivo;*
- (2) *Existe un isomorfismo k -lineal $U(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{S}(\mathfrak{g})$;*
- (3) *El morfismo $[\cdot, \cdot]$ satisface la identidad de Jacobi.*

La demostración de ésta proposición puede consultarse en [12, 35, 34].

En los casos interesantes (álgebras de Lie semisimples), muchas de las relaciones que definen al envolvente universal son redundantes, según el teorema de Serre [34, p.99].

TEOREMA 1.3 (Serre). *Sea \mathfrak{g} una \mathbb{C} -álgebra de Lie simple con matriz de Cartan (c_{ij}) simétrica de orden $n \times n$ con álgebra envolvente universal $U = U(\mathfrak{g})$. Entonces existen elementos $x_i, y_i, h_i \in U$, $i = 1, \dots, n$ que forman un conjunto de generadores de U sujetos a*

las relaciones ($1 \leq i, j \leq n$)

$$(1.2) \quad h_i h_j - h_j h_i = 0$$

$$(1.3) \quad h_i x_j - x_j h_i = c_{ij} x_i, \quad h_i y_j - y_j h_i = -c_{ij} y_i$$

$$(1.4) \quad \text{si } c_{ij} = 0, \quad \begin{cases} x_i x_j - x_j x_i = 0 \\ y_i y_j - y_j y_i = 0 \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \text{si } c_{ij} = -1, \quad \begin{cases} x_i^2 x_j - 2x_i x_j x_i + x_j x_i^2 = 0 \\ y_i^2 y_j - 2y_i y_j y_i + y_j y_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$(1.6) \quad x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij} h_i.$$

En general las envolventes universales tienen más estructura: son *álgebras de Hopf*.

Sean \mathfrak{g} y \mathfrak{h} un par de álgebras de Lie, entonces $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie con corchete definido por

$$[x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2] = [x_1, x_2] \oplus [y_1, y_2]$$

entonces resulta que la asociación $x \oplus y \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes y$, $x \oplus y \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, induce un isomorfismo de álgebras $\varphi : U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$. Además, el morfismo diagonal $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $x \mapsto x \oplus x$ es un morfismo de álgebras de Lie, por lo que éste induce un morfismo de álgebras asociativas $\Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$.

PROPOSICIÓN 1.4. *La composición*

$$\phi = \varphi \Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}),$$

(donde $\varphi : U(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$), es un morfismo de álgebras tal que

$$(Id \otimes \phi)\phi = (\phi \otimes Id)\phi .$$

El anillo conmutativo k es un álgebra de Lie abeliana. La función cero $0 : \mathfrak{g} \rightarrow k$ es un morfismo de álgebras que induce un morfismo de álgebras asociativas $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(k) \simeq k$. Si $m : U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ denota al morfismo multiplicación y $u : k \rightarrow U(\mathfrak{g})$ es el morfismo unidad entonces

PROPOSICIÓN 1.5. *Los siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{array}{ccccc} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{\phi} & U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\phi} & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\ \epsilon \otimes Id \downarrow & & \parallel & & \downarrow Id \otimes \epsilon \\ k \otimes U(\mathfrak{g}) & \xlongequal{\quad} & U(\mathfrak{g}) & \xlongequal{\quad} & U(\mathfrak{g}) \otimes k \end{array}$$

Asociada a \mathfrak{g} existe el álgebra de Lie opuesta, definida como \mathfrak{g} misma como k -espacio, pero con corchete $[\cdot, \cdot]^{op} = -[\cdot, \cdot]$. Tal álgebra la denotamos con \mathfrak{g}^{op} . Resulta que $U(\mathfrak{g}^{op})$ es isomorfa a $U(\mathfrak{g})^{op}$ el álgebra opuesta de $U(\mathfrak{g})$.

PROPOSICIÓN 1.6. *La función $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^{op}$, $x \mapsto -x$ es un morfismo de álgebras que induce un morfismo de álgebras asociativas $\kappa : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{op}$ que restringido a los espacios lineales subyacentes da $\kappa : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ lineal tal que $\kappa(x) = -x$, $\forall x \in \mathfrak{g}$ y además hace conmutar los diagramas*

$$\begin{array}{ccccc} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{\phi} & U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\phi} & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\ \text{Id} \otimes \kappa \downarrow & & \downarrow u\epsilon & & \downarrow \kappa \otimes \text{Id} \\ U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{m} & U(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{m} & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Los morfismos ϕ, ϵ, κ se llaman coproducto, counidad y antípoda, respectivamente.

Los proposiciones 1.4, 1.5 y 1.6 se resumen en el siguiente teorema:

TEOREMA 1.7. *El álgebra unitaria $U(\mathfrak{g})$ junto con los morfismos ϕ, ϵ, κ forman una álgebra de Hopf.*

2. El caso cuántico

Los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo aparecen como *deformaciones* de las envolventes universales de las álgebras de Lie simples añadiendo un nuevo parámetro q a las relaciones de Serre. Para evitar complicaciones técnicas nos restringiremos al caso matriz de Cartan simétrica.

DEFINICIÓN 2.1. Sea \mathfrak{g} una \mathbb{C} -álgebra de Lie simple con matriz de Cartan (c_{ij}) simétrica de orden $n \times n$ y q una indeterminada. Sea $k = \mathbb{Q}(q)$ campo de cocientes de $\mathbb{Z}[q]$. La k -álgebra generada por los

símbolos E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} , ($1 \leq i \leq n$) con relaciones ($1 \leq i, j \leq n$)

$$(2.1) \quad K_i K_j = K_j K_i, \quad K_i K_i^{-1} = 1,$$

$$(2.2) \quad K_i E_j = q^{c_{ij}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q^{-c_{ij}} F_j K_i,$$

$$(2.3) \quad \text{si } c_{ij} = 0, \quad \begin{cases} E_i E_j - E_j E_i = 0 \\ F_i F_j - F_j F_i = 0 \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \text{si } c_{ij} = -1, \quad \begin{cases} E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \\ F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$(2.5) \quad E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$$

se denota con $U_q(\mathfrak{g})$. Si el diagrama de Dynkin asociado a \mathfrak{g} es del tipo \mathbb{G} entonces $U_q(\mathfrak{g})$ se llama *grupo cuántico de Drinfeld- Jimbo del tipo \mathbb{G}* .

Algunos autores se refieren a $U_q(\mathfrak{g})$ como *envolvente universal cuantizada*. Existen diferentes versiones de $U_q(\mathfrak{g})$. Nosotros estamos utilizando la versión que aparece en el trabajo de Lusztig (por ejemplo en [43]).

Obsérvese que las relaciones (2.2) son equivalentes a las siguientes:

$$(2.6) \quad (K_i - 1)E_j = (q^{c_{ij}} - 1)E_j, \quad (K_i - 1)F_j = (q^{-c_{ij}} - 1)F_j$$

Usualmente se interpreta a q como $q = \exp(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i / i!$ serie formal en el anillo de series formales $\mathbb{C}[[t]]$ con coeficientes en \mathbb{C} e indeterminada t ; mientras que se interpreta $K_i = \exp(h_i t)$ serie formal en el anillo de series formales con coeficientes en $U(\mathfrak{g})$. Con tales interpretaciones si se hace $t = 0$ se obtiene $q = 1$. Entonces de (2.4) y (2.6) se observa que la envolvente universal cuantizada $U_q(\mathfrak{g})$ se colapsa a la envolvente universal clásica $U(\mathfrak{g})$. Es por ésto que $U_q(\mathfrak{g})$ se considera una deformación de $U(\mathfrak{g})$.

El álgebra $U_q(\mathfrak{g})$ tiene propiedades análogas a las de las envolventes universales clásicas. Por ejemplo existen versiones de PBW para $U_q(\mathfrak{g})$. Se conjetura que existen dentro de $U_q(\mathfrak{g})$ álgebras de Lie generalizadas (o más específicamente, *cuantizadas*) en algún sentido de tal suerte que obligan a la envolvente universal cuantizada a comportarse como en el caso clásico.

El problema entonces es encontrar una estructura \mathfrak{g}_q que sea un álgebra de Lie generalizada y con una envolvente universal generalizada

$U(\mathfrak{g}_q)$ de tal forma que el siguiente diagrama conmute:

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}_q) \stackrel{=?}{=} U_q(L) & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & U(\mathfrak{g}) \\ \uparrow \text{---} & & \uparrow \\ \mathfrak{g}_q \stackrel{=?}{=} & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & \mathfrak{g} \end{array}$$

para luego explicar las propiedades de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo a través del álgebra de Lie cuantizada \mathfrak{g}_q .

3. Álgebras de Lie cuánticas de tipo A_n positivo

Se puede resolver parcialmente el problema para el caso de las envolventes universales cuantizadas de tipo A_n en su parte positiva. Esto es, para $\mathfrak{g} = sl_{n+1}^+$ el álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores de orden $(n+1) \times (n+1)$ con traza cero.

En lo que sigue construiremos un álgebra de Lie generalizada $(sl_{n+1}^+)_q$ que satisface casi todos los requerimientos de una cuantización.

Sea e_{ij} , $1 \leq i < j \leq n+1$ la base canónica de sl_{n+1}^+ . Entonces existen enteros $c_{ij,ab}$ tales que

$$[e_{ij}, e_{ji}], e_{ab} = c_{ij,ab} e_{ab}, \quad 1 \leq i < j \leq n+1, \quad 1 \leq a < b \leq n+1.$$

Enseguida definiremos lo que consideraremos como una *cuantización* del espacio sl_{n+1}^+ , de su corchete $[,]$ y de la transposición $x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

DEFINICIÓN 3.1. Denotemos con $k = \mathbb{Q}(q)$ al campo de funciones racionales con coeficientes en \mathbb{Q} e indeterminada q .

- (1) Sea $(sl_{n+1}^+)_q$ el k -espacio vectorial con base \mathcal{B} el conjunto formado los símbolos E_{ij} , $1 \leq i < j \leq n+1$.
- (2) Definimos un orden sobre \mathcal{B} por $E_{ij} < E_{ab}$ ssi $i+j < a+b$ o si $(i+j = a+b \text{ y } j < b)$.
- (3) Sea $S : (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q$ función k -lineal tal que

$$\begin{aligned} S(E_{ij} \otimes E_{ab}) &= q^{c_{ij,ab}} E_{ab} \otimes E_{ij}, \text{ si } E_{ij} < E_{ab}, \\ S(E_{ij} \otimes E_{ij}) &= E_{ij} \otimes E_{ij}, \\ S^2 &= Id. \end{aligned}$$

- (4) Sea $[\cdot, \cdot]_q : (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q$ función k -lineal tal que

$$[E_{ij}, E_{ab}]_q = \delta_{ja} E_{ib}, \text{ si } E_{ij} \leq E_{ab}$$

$$[\cdot, \cdot]_q S = -[\cdot, \cdot]_q.$$

- (5) Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q$, tal que

$$\langle E_{ij}, E_{ab} \rangle = \begin{cases} (q - q^{-1})E_{aj} \otimes E_{ib}, & \text{si } i < a < j < b; \\ (q^{-1} - q)E_{ib} \otimes E_{aj}, & \text{si } a < i < b < j; \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

- (6) Sea $\eta(E_{ij}) = i(j - i)$, si $i < j$.

El álgebra $(sl_{n+1}^+)_q$ satisface generalizaciones de antisimetría y de la identidad de Jacobi.

Sea L^3 el subespacio lineal del álgebra tensorial de $(sl_{n+1}^+)_q$ generado por los elementos $E_{ij} \otimes E_{ab} \otimes E_{uv}$, tales que $E_{ij} < E_{ab} < E_{uv}$.

PROPOSICIÓN 3.1.

$$S(1 \otimes [\cdot, \cdot]_q) \Big|_{L^3} = ([\cdot, \cdot]_q \otimes 1) S_2 S_1 \Big|_{L^3},$$

$$S([\cdot, \cdot]_q \otimes 1) \Big|_{L^3} = (1 \otimes [\cdot, \cdot]_q) S_1 S_2 \Big|_{L^3}$$

TEOREMA 3.2.

- (1) $[\cdot, \cdot]_q S = -[\cdot, \cdot]_q$, $\langle \cdot, \cdot \rangle S = -\langle \cdot, \cdot \rangle$, $[\cdot, \cdot]_q \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$
- (2) $[\cdot, \cdot]_q (Id \otimes [\cdot, \cdot]_q) - [\cdot, \cdot]_q ([\cdot, \cdot]_q \otimes Id) - [\cdot, \cdot]_q (Id \otimes [\cdot, \cdot]_q) (S \otimes Id) = 0$,
- (3) La función η induce una descomposición $(sl_{n+1}^+)_q = \bigoplus_d s_d$ en subespacios $s_d = \bigoplus_{\eta(E_{ij})=d} k E_{ij}$, $s_0 = k$ tal que

$$[s_{d_1}, s_{d_2}] \subseteq s_{d_1+d_2-1}, \quad \forall d_1, d_2$$

$$\langle s_{d_1}, s_{d_2} \rangle \subseteq \bigoplus_{\mu_1+\mu_2=d_1+d_2-1} s_{\mu_1} \otimes s_{\mu_2}.$$

DEM. Ver capítulo 2 ejemplo 3.4 p.22 y capítulo 4 proposición 3.2 p.65. \square

DEFINICIÓN 3.2. Sea k un anillo conmutativo. Llamamos T -álgebra de Lie a un k -módulo $L = \bigoplus_{\eta} L_{\eta}$ junto con morfismos k -lineales $[\cdot, \cdot] : L \otimes_k L \rightarrow L$, $S : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L$ sujetos a los axiomas que aparecen en el teorema 3.2 como propiedades. De tal forma que la descomposición $L = \bigoplus_{\eta} L_{\eta}$ es una graduación estricta (ver capítulo 2, definición 2.1).

También generalizaciones de la identidad de Jacobi análogas a 2 Teo. 3.2 aparecen en [61], [49, Lema 8] y [50].

DEFINICIÓN 3.3. Sea $(L_i, [,]_i, S_i, \langle , \rangle_i)$ una T -álgebra de Lie, $i = 1, 2$. Un morfismo k -lineal $\theta : L_1 \rightarrow L_2$ se llama *morfismo de T -álgebras de Lie* si θ es un morfismo de álgebras graduadas relativo a los corchetes $[,]_i$, $i = 1, 2$ tal que hace conmutar los diagramas:

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 \otimes L_1 & \xrightarrow{S_1} & L_1 \otimes L_1 & L_1 \otimes L_1 & \xrightarrow{\langle , \rangle_1} & L_1 \otimes L_1 \\ \theta \otimes \theta \downarrow & & \theta \otimes \theta \downarrow & \theta \otimes \theta \downarrow & & \theta \otimes \theta \downarrow \\ L_2 \otimes L_2 & \xrightarrow{S_2} & L_2 \otimes L_2 & L_2 \otimes L_2 & \xrightarrow{\langle , \rangle_2} & L_2 \otimes L_2 \end{array}$$

DEFINICIÓN 3.4. Sea $(L, [,], S, \langle , \rangle)$ una T -álgebra de Lie. Una *álgebra envolvente universal de L* es un par $(U(L), i)$ donde $U(L)$ es una k -álgebra asociativa unitaria e $i : L \rightarrow U(L)$ es una función lineal que satisface

$$(3.1) \quad i([x, y]) = i(x)i(y) - \sum_a i(y_a)i(x_a) - \sum_b i(u_b)i(v_b), \quad \forall x, y \in L,$$

donde

$$S(x \otimes y) = \sum_a y_a \otimes x_a, \quad \langle x, y \rangle = \sum_b u_b \otimes v_b,$$

y la siguiente propiedad universal se cumple: para cualquier k -álgebra asociativa A unitaria y cualquier función lineal $j : L \rightarrow A$ satisfaciendo (3.1), existe un único morfismo de álgebras unitarias $g : U(L) \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} & & U(L) \\ & \nearrow i & \vdots g \\ L & & \downarrow \\ & \searrow j & A \end{array}$$

La existencia de tales envolventes universales $(U(L), i)$ se demuestra en la sección 4 del capítulo 2. En particular cada T -álgebra de Lie L tiene asociada una *T -álgebra de Lie abeliana L_0* que es la misma L como k -módulo con la misma presimetía S pero con corchete y psudocorchete nulos: $(L_0, S, 0, 0)$. El álgebra envolvente universal de L_0 es llamada *el álgebra simétrica de L* y se denota con $\mathcal{S}(L)$.

Notemos que las T -Lie álgebras forman una categoría y que U, \mathcal{S} son funtores de la categoría de T -Lie álgebras hacia la categoría de las álgebras asociativas.

Por supuesto $(sl_{n+1}^+)_q$ es un ejemplo de T -álgebra de Lie. También son ejemplos de T -álgebras de Lie las álgebras de Lie generalizadas según Scheunert [55] (y por tanto las álgebras de Lie clásicas y las superálgebras de Lie [56]). Aún más, existen T -álgebras de Lie cuyas envolventes universales coinciden con ciertas álgebras que se consideran duales a los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n : las llamadas *deformaciones multiparamétricas de $GL(n)$* [20], que se denotan con $M_{p,q,\epsilon}(n, k)$.

El concepto de T -álgebra de Lie generaliza al concepto de álgebra de Clifford en el siguiente sentido: sea $C(M, f)$ la k -álgebra de Clifford del k -módulo M relativa a la función bilineal $f : M \times M \rightarrow k$, esto es, $C(M, f)$ es la k -álgebra tensorial de M módulo el ideal bilateral generado por

$$x \otimes y + y \otimes x - f(x, y), \quad x, y \in M.$$

Podemos recuperar tal definición de la siguiente forma: extendemos M a $\widetilde{M} = M \oplus k$ y definimos $S : \widetilde{M} \otimes_k \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \otimes_k \widetilde{M}$ mediante

$$\begin{aligned} x \otimes y &\mapsto -y \otimes x, \quad x \otimes 1 \mapsto -1 \otimes x, \quad 1 \otimes x \mapsto -x \otimes 1, \quad x, y \in M, \quad 1 \in k \\ 1 \otimes 1 &\mapsto -1 \otimes 1, \end{aligned}$$

además de $\langle, \rangle : \widetilde{M} \otimes_k \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M} \otimes_k \widetilde{M}$ mediante

$$\begin{aligned} x \otimes y &\mapsto f(x, y)(1 \otimes 1), \quad x \otimes 1 \mapsto 0, \quad 1 \otimes x \mapsto 0, \quad x, y \in M, \quad 1 \in k \\ 1 \otimes 1 &\mapsto 0 \end{aligned}$$

y definimos $[,] = 0$, $\eta(x) = 1$, para todo $x \in M$. Entonces el k -módulo \widetilde{M} junto con $[,]$, \langle, \rangle y S es una T -álgebra de Lie cuya envolvente universal $U(\widetilde{M})$ coincide con el álgebra de Clifford $C(M, f)$.

DEFINICIÓN 3.5. Sea \mathfrak{g} una \mathbb{C} -álgebra de Lie simple con matriz de Cartan simétrica. La *parte positiva del grupo cuántico* $U_q(\mathfrak{g})$ es la k -subálgebra $U_q^+(\mathfrak{g})$ generada por los elementos E_1, \dots, E_n .

El siguiente teorema justifica, en parte, porque consideramos a $(sl_{n+1}^+)_q$ como un álgebra de Lie cuántica.

TEOREMA 3.3. *Existe un isomorfismo de álgebras*

$$U(sl_{n+1}^+)_q \simeq U_q^+(sl_{n+1}).$$

DEM. Ver [2, Teo.X.4] ó bien ver capítulo 2 teorema 10.4. \square

Como en el caso clásico, se puede demostrar PBW para $U_q^+(sl_{n+1})$ usando la T -álgebra de Lie, puesto que PBW se cumple para las envolventes universales de T -álgebras de Lie *adecuadas*.

Sea $L = \bigoplus L_\eta$ una T -álgebra de Lie con base \mathcal{B} totalmente ordenada, $T = S + \langle, \rangle$, J_r el k -submódulo de la k -álgebra tensorial de L generado por

$$(3.2) \quad L_\alpha \otimes L_\beta \otimes L_\delta - T(L_\alpha \otimes L_\beta) \otimes L_\delta - [L_\alpha, L_\beta] \otimes L_\delta$$

$$(3.3) \quad L_\alpha \otimes L_\beta \otimes L_\delta - L_\alpha \otimes T(L_\beta \otimes L_\delta) - L_\alpha \otimes [L_\beta, L_\delta]$$

para cualesquiera $\alpha + \beta + \delta \leq r$. Sea, además, 3L el k -submódulo del álgebra tensorial de L generado por los elementos $x_i \otimes x_j \otimes x_l$, tales que $x_i, x_j, x_l \in \mathcal{B}$ y $x_i > x_j > x_l$; y sea L^3 el k -submódulo generado por los elementos $x_i \otimes x_j \otimes x_l$ tales que $x_i < x_j < x_l \in \mathcal{B}$.

TEOREMA 3.4. *Sea k un anillo conmutativo. Si L es una T -álgebra de Lie con una base \mathcal{B} totalmente ordenada tal que cumple con la proposición 3.1, además de*

$$\begin{aligned} S(1 \otimes [,]_q) \Big|_{{}^3L} &= ([,]_q \otimes 1) S_2 S_1 \Big|_{{}^3L}, \\ S([,]_q \otimes 1) \Big|_{{}^3L} &= (1 \otimes [,]_q) S_1 S_2 \Big|_{{}^3L}, \\ S^2 &= Id, \end{aligned}$$

$$\forall x, y \in \mathcal{B}, \exists q_{xy} \in k, S(x \otimes y) = q_{xy} y \otimes x,$$

y tal que

$$\begin{aligned} \left(\langle, \rangle_1 - [,]_1 S_1 \right) \Big|_{{}^3L} &\equiv \left(\langle, \rangle_2 S_1 S_2 + \langle, \rangle_1 S_2 - \langle, \rangle_2 S_1 \right. \\ &\quad \left. + [,]_1 S_2 - [,]_2 S_1 + \langle, \rangle_2 - \langle, \rangle_1 S_2 S_1 - \langle, \rangle_1 [,]_1 S_2 S_1 \right) \Big|_{{}^3L} \pmod{J_r} \end{aligned}$$

entonces existe un isomorfismo k -lineal

$$U(L) \simeq \mathcal{S}(L).$$

DEM. Ver capítulo 4. □

COROLARIO 3.5. *Sea $k = \mathbb{Q}(q)$. Existe un isomorfismo k -lineal*

$$U_q(\mathfrak{sl}_{n+1}) \simeq \mathcal{S}((\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q).$$

DEM. La T -álgebra de Lie $(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q$ cumple las condiciones del teorema 3.4. □

Por lo tanto, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U(sl_{n+1}^+)_q \simeq U_q^+(sl_{n+1}) & \xrightarrow{q=1} & U(sl_{n+1}^+) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{q=1} & sl_{n+1} \end{array}$$

Aún más, el Teo. 3.4 se puede aplicar a las álgebras de Lie generalizadas de Scheunert, a $M_{p,q,\epsilon}(n,k)$ y a las álgebras de Clifford.

4. Coestructura

En esta sección k denotará al campo de funciones racionales $\mathbb{Q}(q)$ y $\otimes = \otimes_k$.

Se puede definir un coproducto consistente con las relaciones que definen a $U(sl_{n+1}^+)_q$. Más explícitamente, se puede dotar a $U(sl_{n+1}^+)_q$ de una estructura de álgebra de Hopf en una categoría *trenzada*.

Sea $\sigma : (sl_{n+1}^+)_q \otimes (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q \otimes (sl_{n+1}^+)_q$, $\sigma(E_{ij} \otimes E_{ab}) = q^{c_{ij,ab}} E_{ab} \otimes E_{ij}$. Entonces σ satisface la ecuación

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$$

llamada *ecuación de trenza*. Además, de que se cumplen:

$$(4.1) \quad \sigma([,]_q \otimes Id) = (Id \otimes [,]_q) \sigma_1 \sigma_2, \quad \sigma(Id \otimes [,]_q) = ([,]_q \otimes Id) \sigma_2 \sigma_1$$

se sigue que σ se puede extender a $U(sl_{n+1}^+)_q$ de tal forma que se siguen cumpliendo (4.1).

La k -álgebra $U(sl_{n+1}^+)_q$ es en particular un $U(sl_{n+1}^+)_q$ -bimódulo. Se define

$$(4.2) \quad (a \otimes b)(c \otimes d) = a\sigma(b \otimes c)d,$$

donde $a, b, c, d \in U(sl_{n+1}^+)_q$ cualesquiera.

También de que se cumplen (4.1) sobre $U(sl_{n+1}^+)_q$ se sigue que el producto (4.2) sobre $U(sl_{n+1}^+)_q \otimes U(sl_{n+1}^+)_q$ es asociativo. Y de que $\sigma(1 \otimes a) = a \otimes 1$, $\sigma(a \otimes 1) = 1 \otimes a$, $\forall a \in U(sl_{n+1}^+)_q$ se sigue que (4.2) tiene unidad $1 \otimes 1$.

Denotamos con $U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_\sigma U(sl_{n+1}^+)_q$ al k -módulo $U(sl_{n+1}^+)_q \otimes U(sl_{n+1}^+)_q$ con producto asociativo dado por (4.2).

PROPOSICIÓN 4.1. *La asociación $E_{i(i+1)} \mapsto E_{i(i+1)} \otimes 1 + 1 \otimes E_{i(i+1)}$, $i = 1, \dots, n$, induce un morfismo de álgebras asociativas $\phi : U(sl_{n+1}^+)_q \rightarrow U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_\sigma U(sl_{n+1}^+)_q$.*

Se pueden construir la counidad y una antípoda de manera análoga al caso clásico. El morfismo cero $0 : (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow k$ es un morfismo de T -álgebras de Lie. Luego este induce un morfismo de álgebras asociativas $\epsilon : U(sl_{n+1}^+)_q \rightarrow U(k) \simeq k$.

PROPOSICIÓN 4.2. *Los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{array}{ccccc} U(sl_{n+1}^+)_q \otimes U(sl_{n+1}^+)_q & \xleftarrow{\phi} & U(sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{\phi} & U(sl_{n+1}^+)_q \otimes U(sl_{n+1}^+)_q \\ \epsilon \otimes Id \downarrow & & \parallel & & \downarrow Id \otimes \epsilon \\ k \otimes U(sl_{n+1}^+)_q & \xlongequal{\quad} & U(sl_{n+1}^+)_q & \xlongequal{\quad} & U(sl_{n+1}^+)_q \otimes k \end{array}$$

Definimos la T -álgebra de Lie opuesta $(sl_{n+1}^+)_q^{op}$ como el mismo $(sl_{n+1}^+)_q$ en su estructura de espacio vectorial y con estructura de T -álgebra de Lie dada por

$$[,]^{op} = -[,]_q, S^{op} = S^{-1}, \langle , \rangle^{op} = -\sigma^{-1} \langle , \rangle.$$

También definimos el álgebra opuesta $U(sl_{n+1}^+)_q^{op}$ como la misma $U(sl_{n+1}^+)_q$ con cambio de escalares vía el automorfismo de campo $k \rightarrow k, q \mapsto q^{-1}$, pero con producto m^{op} dado por $m^{op} = m\sigma$, donde m denota al producto de $U(sl_{n+1}^+)_q$.

PROPOSICIÓN 4.3.

(1) *Existe un isomorfismo de álgebras asociativas*

$$U(sl_{n+1}^{op}) \simeq U(sl_{n+1}^+)_q^{op}$$

(2) *La función $(sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q^{op}, x \mapsto -x$ es un morfismo de T -álgebras de Lie que induce un morfismo*

$$\Omega : U(sl_{n+1}^+)_q \rightarrow U(sl_{n+1}^+)_q^{op}$$

(3) *La función Ω induce un morfismo k -lineal $\kappa : U(sl_{n+1}^+)_q \rightarrow U(sl_{n+1}^+)_q$ que hace conmutar los siguientes diagramas:*

$$\begin{array}{ccc} U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_{\sigma} U(sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{\kappa \otimes Id} & U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_k U(sl_{n+1}^+)_q \\ \uparrow \phi & & \downarrow m \\ U(sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{u\epsilon} & U(sl_{n+1}^+)_q \\ \downarrow \phi & & \uparrow m \\ U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_{\sigma} U(sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{Id \otimes \kappa} & U(sl_{n+1}^+)_q \otimes_k U(sl_{n+1}^+)_q \end{array}$$

donde $u : k \rightarrow U(sl_{n+1}^+)_q$ es el morfismo unidad.

DEM. Ver capítulo 3. □

La proposición anterior dice que $U(sl_{n+1}^+)_q$ es un álgebra de Hopf en una categoría con trenza σ . En cierto sentido los cálculos son más simples si utilizamos el marco más general de un *grupo cuántico de trenza generalizado* (*generalized braided quantum group*) [25]. En el mismo artículo [25] se demuestra que cuando la counidad ϵ es multiplicativa (que es nuestro caso), se obtiene en particular un álgebra de Hopf en una categoría trezada.

TEOREMA 4.4. *El álgebra $U(sl_{n+1}^+)_q$ junto con los morfismos ϕ , ϵ y κ forman un grupo cuántico trezado. Aún más, debido que $\epsilon m = \epsilon \otimes \epsilon$ se sigue que*

$$(U(sl_{n+1}^+)_q, m, u, \phi, \epsilon, \kappa)$$

es un álgebra de Hopf en una categoría trezada.

CAPÍTULO 2

Un teorema Poincaré-Birkhoff-Witt generalizado

Se da una prueba del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para una clase de álgebras de Lie generalizadas relacionadas, de manera cercana, a las S -álgebras de Lie según Gurevich. Como ejemplos concretos, construimos las partes positivas (y negativas) del álgebra envolvente cuantizada de tipo A_n y el álgebra $M_{p,q,\epsilon}(n, k)$, la cual es una deformación no estándar de $GL(n)$. En particular, obtenemos, para ambas álgebras, una prueba unificada del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt y mostramos que ellas son genuinas álgebras envolventes universales de ciertas álgebras de Lie generalizadas.

1. Antecedentes

En el artículo [58], H. Yamane presenta una prueba del teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) para cierta clase de grupos cuánticos: los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n . En su prueba no usa de manera explícita los conceptos de la teoría de las álgebras de Lie.

En este capítulo mostramos que Yamane usa de manera implícita cierta álgebra de Lie generalizada. Tal álgebra de Lie generalizada será llamada T -álgebra de Lie básica.

Las T -álgebras de Lie básicas satisfacen no solo una antisimetría generalizada y una identidad de Jacobi (generalizada también), sino propiedades adicionales, como multiplicatividad (también generalizada, en el sentido de S -álgebras de Lie según Gurevich [32]). Tales T -álgebras de Lie surgen de manera natural dentro de las partes positivas y negativas de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo $U_q(sl_{n+1})$ de tipo A_n .

Nuestras T -álgebras de Lie básicas comparten algunas propiedades con las S -álgebras de Lie, pero no son equivalentes. Por ejemplo, las T -álgebras de Lie básicas satisfacen una condición de multiplicatividad más débil. En particular, hay algunas T -álgebras de Lie básicas que no son S -álgebras de Lie. Sin embargo, las álgebra de Lie clásicas [34], las superálgebras de Lie [56] y las álgebras de Lie generalizadas de

Scheunert (álgebras de Lie coloreadas) [55] son, todas ellas, ejemplos de T -álgebras de Lie básicas.

Estas T -álgebras de Lie básicas están relacionadas al problema de encontrar la definición apropiada de una *álgebra de Lie cuántica*. Existen ya algunas álgebras de Lie generalizadas propuestas para resolver este problema: las álgebras de Lie trenzadas de Majid [47], las de Woronowicz [61], las álgebras de Lie cuánticas de Delius-Gould [17], las nuevas álgebras de Lie generalizadas de Gurevich-Rubstov [33], álgebras de Lie generalizadas debidas a Lyubashenko-Sudbery [45], entre otras. Pero la definición de Delius-Gould y la de Gurevich-Rubstov también, depende del álgebra envolvente universal asociada (en la primera el corchete cuántico se define en términos del coproducto del grupo cuántico en cuestión; en la segunda se pide a la envolvente universal ser una álgebra de Koszul). Este no es el caso para las T -álgebras de Lie básicas. Nuestros axiomas implican las propiedades del álgebra envolvente universal. En particular probaremos el teorema PBW.

Los axiomas de álgebras de Lie generalizadas de Lyubashenko-Sudbery no son suficientes para obtener bases del tipo PBW (ver ejemplo 4.3). Mientras que la diferencia principal con las álgebras de Lie trenzadas de Majid es que las simetrías de nuestras T -álgebras de Lie básicas no son del todo trenzadas. Sólo una parte de tales simetrías satisface la ecuación de trenza.

En particular, obtenemos una T -álgebra de Lie $(sl_{n+1}^\pm)_q$ la cual es una deformación de la subálgebra de Lie de las matrices triangulares superiores (inferiores). Tal álgebra de Lie generalizada cumple con casi todos los requisitos de una *álgebra de Lie cuántica* en el sentido de Lyubashenko-Sudbery [45], (sólo falla el punto 7; la estructura de álgebra de Hopf es tratada en el capítulo siguiente). Aún más, el álgebra envolvente universal de $(sl_{n+1}^\pm)_q$ es $U_q^\pm(sl_{n+1})$ es la parte positiva del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n , por lo tanto el diagrama en la figura 1 conmuta. Esto significa que, relativo a

$$\begin{array}{ccc}
 U_q^\pm(sl_{n+1}) \simeq U(sl_{n+1}^\pm)_q & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & U(sl_{n+1}^\pm) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (sl_{n+1}^\pm)_q & \xrightarrow{q \rightarrow 1} & sl_{n+1}
 \end{array}$$

FIGURA 1. Clásica sl_{n+1}^\pm y cuántica $(sl_{n+1}^\pm)_q$

$U_q^\pm(\mathfrak{sl}_{n+1})$, la T -Lie álgebra básica $(\mathfrak{sl}_{n+1}^\pm)_q$ satisface la condición de álgebra de Lie cuántica de Delius [17].

Algunas posibles aplicaciones en Física, del formalismo de las álgebras de Lie generalizadas están en la teoría afín de Toda [18], sistemas integrables cuánticos, y teorías de norma [45].

Este capítulo está organizado como sigue. En la sección 2 se definen las T -Lie álgebras básicas. En la sección 3 se da una lista de clásicas y nuevas álgebras de Lie. En la sección 4 se define el álgebra envolvente universal de una T -Lie álgebra básica y se prueba que esperar bases del tipo PBW para tales envolventes es demasiado, en general. Tenemos que restringir nuestras álgebras de Lie generalizadas en una forma adecuada. Sin embargo, en la sección 5 perseguimos la idea clásica de probar el teorema PBW construyendo una representación del álgebra envolvente universal sobre el álgebra simétrica (con modificaciones inspiradas en [58]).

En la sección 6 se da la definición de representación de una T -álgebra e Lie. En la sección 7 se prueba una versión del teorema PBW para la envolvente universal de una T -álgebra de Lie básica adecuada. Algunas observaciones sobre morfismos de trenzas aparecen en la sección 8. La sección 9 se dedica a explicar por qué podemos aplicar la teoría de las T -álgebras de Lie a las deformaciones cuánticas no estándar de $GL(n)$. Explicaciones similares se dan en la sección 10 pero ahora para $U_q^\pm(\mathfrak{sl}_{n+1})$ la parte positiva (negativa) de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n . En particular, en la sección 10 se prueba que $U_q^\pm(\mathfrak{sl}_{n+1})$ es una genuina envolvente universal de la T -álgebra de Lie básica $(\mathfrak{sl}_{n+1}^\pm)_q$.

2. La noción de T -álgebra de Lie

Sea k un anillo conmutativo unitario y $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ el conjunto de números naturales.

DEFINICIÓN 2.1. Una k -álgebra A es *graduada estrictamente* si existen k -submódulos $(A_\eta)_{\eta \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A = \bigoplus_{\eta \in \mathbb{N}} A_\eta \text{ y } A_{\eta_1} \cdot A_{\eta_2} \subseteq \sum_{n \leq \eta_1 + \eta_2 - 1} A_n$$

para todo $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para $a \in A_\eta$, pondremos, abusando de la notación, $\eta(a) = \eta$.

NOTA 2.1. Para tales álgebras graduadas A podemos inducir una filtración de $A \otimes_k A$ dada por

$$(A \otimes_k A)_\eta = \bigoplus_{\eta_1 + \eta_2 \leq \eta} A_{\eta_1} \otimes A_{\eta_2}$$

Sea L un k -módulo libre con una base dada \mathcal{B} totalmente ordenada.

DEFINICIÓN 2.2. Denotamos con L^n al k -submódulo de $L^{n\otimes}$ generado por

$$x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n}, \quad x_{i_1} < \dots < x_{i_n}, \quad (x_{i_j} \in \mathcal{B}),$$

y con nL al k -submódulo generado por

$$x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_n}, \quad x_{i_1} > \dots > x_{i_n}, \quad (x_{i_j} \in \mathcal{B}).$$

DEFINICIÓN 2.3. El módulo L junto con k -morfismos

$$(2.1) \quad S : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L, \text{ (presimetría)}$$

$$(2.2) \quad T : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L, \text{ (simetría)}$$

$$(2.3) \quad \langle , \rangle : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L, \text{ (pseudocorchete)}$$

$$(2.4) \quad [,] : L \otimes_k L \rightarrow L, \text{ (corchete)}$$

se llama T -álgebra de Lie con base \mathcal{B} (o T -álgebra de Lie básica) si, para $S_{12} = S \otimes_k Id_L$, $S_{23} = Id_L \otimes_k S$, los siguientes axiomas se satisfacen:

- (1) (a) $S^2 = Id$
 (b) $S(x \otimes y) = q_{x,y}y \otimes x$, para ciertos $q_{x,y} \in k$, $\forall x, y \in \mathcal{B}$
 (c) *Multiplicatividad*
 (i) $S(Id \otimes_k [,])|_{L^3} = ([,] \otimes_k Id)S_{23}S_{12}|_{L^3}$
 (ii) $S([,] \otimes_k Id)|_{L^3} = (Id \otimes_k [,])S_{12}S_{23}|_{L^3}$
- (2) *Estabilidad*
 (a) Existe una graduación estricta

$$L = \bigoplus_{\eta \in \mathbb{N}} L_\eta$$

de L relativa a $[,]$.

- (b) $\langle L_{\eta_1} \otimes L_{\eta_2} \rangle \subseteq (L \otimes_k L)_{\eta_1 + \eta_2 - 1}$
 para todo L_{η_1}, L_{η_2} .

- (3) $T = S + \langle , \rangle$
- (4) *Antisimetría*
 (a) $[,]T = -[,]$
 (b) $\langle , \rangle S = -\langle , \rangle$
 (c) $[,]\langle , \rangle = 0$
- (5) *Identidad de Jacobi*

$$[,]((Id \otimes_k [,])S_{12}S_{23} - ([,] \otimes_k Id)S_{23}S_{12} + (Id \otimes_k [,])S_{23}S_{12})|_{3L} = 0$$

Las condiciones de multiplicatividad son para controlar las relaciones de conmutación en el álgebra envolvente universal, mientras que las condiciones de estabilidad son para demostrar después el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt usando el principio de inducción matemática.

El pseudocorchete se puede interpretar como una perturbación debida a que la falta de multiplicatividad en todo el espacio (ver ecuación (2.2) capítulo 5).

Los operadores de las T -álgebras de Lie pueden ser entendidos usando morfismos diagramáticos [51]: el corchete $[\cdot, \cdot] : L \otimes L \rightarrow L$ se dibuja como en la figura 2. Mientras que en la figura 3 corresponden

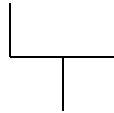


FIGURA 2. Diagrama correspondiente al corchete.

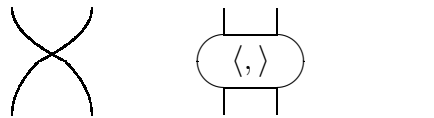


FIGURA 3. La presimetría, el pseudocorchete y la identidad.

a la presimetría S , al pseudocorchete \langle, \rangle y a la identidad, respectivamente.

La composición de tales morfismos diagramáticos se hace juntando tales diagramas de arriba hacia abajo. Por ejemplo, el diagrama correspondiente a $[\cdot, \cdot] \circ S$ está en la figura 4. Mientras que el espacio horizontal



FIGURA 4. La composición $[\cdot, \cdot] \circ S$: el diagrama debe leerse de arriba hacia abajo.

entre tales diagramas se debe entender como el producto tensorial. Por ejemplo, en la figura 5 aparece $S \otimes Id$. Que S sea una involución se

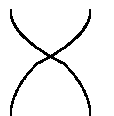


FIGURA 5. Producto tensorial en forma diagramática. Aquí aparece $S \otimes Id$.

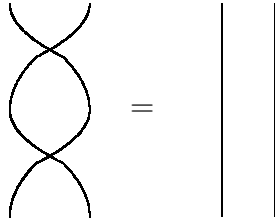


FIGURA 6. La ecuación $S^2 = Id$.

dibuja como en la figura 6. Las dos condiciones de multiplicatividad están en la figura 7. Finalmente, las condiciones de antisimetría y la

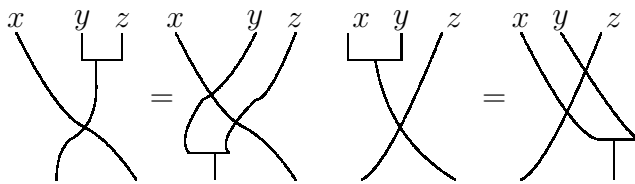


FIGURA 7. Multiplicatividad: $x, y, z \in \mathcal{B}$ con $x < y < z$.

identidad de Jacobi aparecen en las figuras 8 y 9 respectivamente.

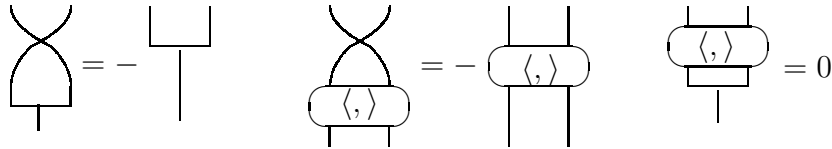


FIGURA 8. Antisimetría.

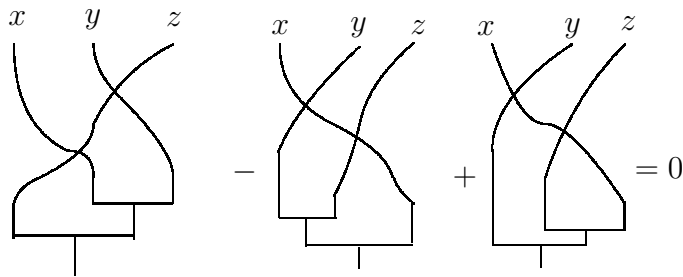


FIGURA 9. La identidad de Jacobi generalizada: para $x, y, z \in \mathcal{B}$ con $x > y > z$.

DEFINICIÓN 2.4. Sea L_i una T -álgebra de Lie básica con corchete $[,]_i$, pseudocorchete \langle, \rangle_i y presimetría S_i , $i = 1, 2$. Un k -morfismo $f : L_1 \rightarrow L_2$ es llamado un *morfismo de T -álgebras de Lie básicas* si f

$$\begin{array}{ccccccc}
L_1 \otimes_k L_1 & \xrightarrow{\langle, \rangle_1} & L_1 \otimes_k L_1 & L_1 \otimes_k L_1 & \xrightarrow{S_1} & L_1 \otimes_k L_1 & \\
f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \otimes f & f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \otimes f & \\
L_2 \otimes_k L_2 & \xrightarrow{\langle, \rangle_2} & L_2 \otimes_k L_2 & L_2 \otimes_k L_2 & \xrightarrow{S_2} & L_2 \otimes_k L_2 &
\end{array}$$

FIGURA 10. Un morfismo de T -álgebras de Lie básicas

es un morfismo de álgebras graduadas relativas a $[\cdot, \cdot]_i$, $i = 1, 2$ y si los diagramas en la figura 10 conmutan.

3. Ejemplos

Para obtener una graduación de L consistente con las condiciones de estabilidad, es suficiente definir una función $\eta : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{N}$, (\mathcal{B} base de L) que tenga las propiedades (2a) y (2b) de los axiomas de estabilidad. Esto es: para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$L_n = \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ \eta(b)=n}} kb.$$

Esta observación será usada en los siguientes ejemplos.

3.1. Algunas álgebras de Lie comunes.

EJEMPLO 3.1. Las álgebras de Lie clásicas sobre campos son T -álgebras de Lie básicas:

$$[\cdot, \cdot] \text{ corchete clásico, } \langle, \rangle = 0, T = S \text{ switch usual, } \eta = 1.$$

EJEMPLO 3.2. Las superálgebras de Lie sobre campos [56] son T -álgebras de Lie:

Sea $L = L_0 \oplus L_1$ una superálgebra de Lie con corchete $[\cdot, \cdot]$ sobre un campo k . Sea \mathcal{B}_α base de L_α , $\alpha = 0, 1$. Se define $S : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L$ sobre la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ por $S(x \otimes y) = (-1)^{\alpha\beta} y \otimes x$ si $x \in \mathcal{B}_\alpha$, $y \in \mathcal{B}_\beta$. Además

$$\langle, \rangle = 0, T = S, \eta = 1.$$

EJEMPLO 3.3 (Álgebras de Lie coloreadas). Sea k un campo con característica cero. Sea

$$L = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} L_\gamma$$

una ϵ álgebra de Lie [55], donde Γ es un grupo abeliano y ϵ es factor de conmutación sobre Γ , esto es, una función

$$\epsilon : \Gamma \times \Gamma \rightarrow k^*$$

tal que

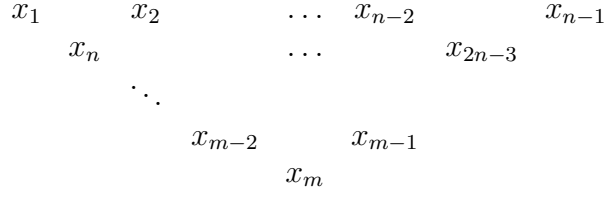


FIGURA 11. La T -álgebra de Lie básica $(sl_{n+1}^+)_q$

- (1) $\epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\beta, \alpha) = 1$
- (2) $\epsilon(\alpha, \beta + \gamma) = \epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\alpha, \gamma)$
- (3) $\epsilon(\alpha + \beta, \gamma) = \epsilon(\alpha, \gamma)\epsilon(\beta, \gamma)$

para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

Sea $[\cdot, \cdot]$ el corchete de L . Pongamos \mathcal{B}_γ base de L_γ para cada $\gamma \in \Gamma$. Se define

$$S(x \otimes y) = \epsilon(\alpha, \beta)y \otimes x, \text{ si } x \in \mathcal{B}_\alpha, y \in \mathcal{B}_\beta,$$

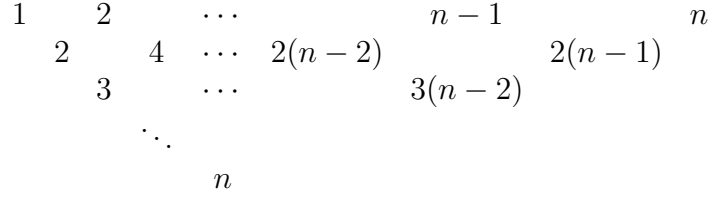
además de $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$ y $\eta = 1$.

Las condiciones de multiplicatividad se siguen fácilmente de la definición de factor de conmutación. Concluimos que cada ϵ álgebra de Lie es una T -álgebra de Lie básica.

3.2. T -álgebras de Lie básicas lineales.

EJEMPLO 3.4. Sea $e_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ la base usual de gl_n matrices $n \times n$ sobre un campo \mathbb{K} . Sea $[\cdot, \cdot]$ el corchete usual en gl_n y sl_n^+ la subálgebra de Lie formada por las matrices triangulares de traza cero. Ponemos $x_i = e_{i(i+1)}, i = 1, \dots, n-1, x_n = [x_1, x_2], x_{n+1} = [x_2, x_3], \dots, x_{2n-3} = [x_{n-2}, x_{n-1}], x_{2n-2} = [x_1, x_{n+1}], \dots, x_{3n-6} = [x_{n-3}, x_{2n-3}], x_{3n-5} = [x_1, x_{2n-1}], x_{3n-4} = [x_2, x_{2n}], \dots, x_m = [x_1, x_{m-1}]$ donde $m = n(n-1)/2$, además definimos $h_i = [e_{i(i+1)}, e_{(i+1)i}], i = 1, \dots, m$ matrices diagonales en sl_n . Adicionalmente, $q = \exp(t) \in \mathbb{K}[[t]]$ anillo de series formales con indeterminada t y coeficientes en $\mathbb{K}, k = \mathbb{K}[q, q^{-1}], c_{i,j} \in \mathbb{Z}$ tales que $[h_i, x_j] = c_{i,j}x_j, 1 \leq i, j \leq m$.

Sea $(sl_n^+)_q$ un k -módulo libre con base $\mathcal{B} = \{x_i | 1 \leq i \leq m\}$. Aprovechando que $m = n(n-1)/2$ es un número “triangular”, esto es, $m = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$, podemos definir un orden en \mathcal{B} de acuerdo con la figura 11, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Por ejemplo, $x_1 < x_n < x_2 < x_{n-2} < x_{m-1}$. La primera vez que un diagrama (carcaj de Auslander-Reiten de tipo A_{n-1}) de este tipo apareció relacionado a los grupos cuánticos, es en el trabajo de Ringel sobre la relación entre las bases de Poincaré-Birkhoff-Witt, grupos cuánticos y las álgebras de Hall [52].

FIGURA 12. La graduación de $(sl_{n+1}^+)_q$

Cuando sea conveniente identificaremos a los elementos básicos x_1, x_2, \dots, x_m con sus contrapartes clásicas $e_{12}, e_{23}, \dots, e_{1n}$ (después de todo, sl_n^+ y $(sl_n^+)_q$ son k -módulos isomorfos). Esto es, pondremos $e_{12} = x_1, \dots, e_{1n} = x_{n-1}, e_{13} = x_n, \dots, e_{(n-2)n} = x_{2n-3}, \dots, e_{1n} = x_m$.

Se define:

$$[x, y]_q = [x, y] \text{ si } x < y \in \mathcal{B}$$

$$\langle e_{ij}, e_{uv} \rangle = \begin{cases} (q - q^{-1})e_{iv} \otimes e_{uj} & \text{si } i < u < j < v, \\ (q^{-1} - q)e_{uj} \otimes e_{iv} & \text{si } u < i < v < j \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$S(x_i \otimes x_j) = q^{c_{i,j}} x_j \otimes x_i, \text{ if } x_i < x_j,$$

$$T = S + \langle, \rangle$$

Finalmente, definimos η de tal forma que cada elemento básico en la figura 11 está en correspondencia con un número que pertenece a la figura 12, esto resulta en $\eta(e_{ij}) = i(j - i), \quad 1 \leq i < j \leq n$.

La condición de multiplicatividad se sigue de las propiedades

$$x_i < x_j < x_l \Rightarrow \begin{cases} [x_i, x_j] < x_l, & \text{si } [x_i, x_j] \neq 0, \\ x_i < [x_j, x_l], & \text{si } [x_j, x_l] \neq 0, \end{cases}$$

y

$$[h_i, [x_j, x_l]] = (c_{i,j} + c_{i,l})[x_j, x_l]$$

En los casos $n = 2, 3, 4, 5$, la identidad de Jacobi para $[\cdot, \cdot]_q$ se puede verificar por cálculos directos. Obtenemos que $(sl_n^+)_q$ con corchete $[\cdot, \cdot]_q$ es una T -álgebra de Lie básica, $n = 2, 3, 4, 5$.

Similarmente podemos definir $(sl_n^-)_q$.

NOTA 3.5. Tenemos que

$$(sl_n^\pm)_q|_{t=0} = sl_n^\pm,$$

así que, en los casos $n = 2, 3, 4, 5$, $(sl_n^\pm)_q$ es una deformación de sl_n^\pm en la categoría de las T -álgebras de Lie básicas. Después, en la sección 10, tal propiedad será generalizada para cualquier n .

EJEMPLO 3.6. Comenzando con $(sl_4^+)_q$ vamos a construir una nueva T -álgebra de-Lie, denotada $(\widetilde{sl}_4^+)_q$. Su estructura es:

$$[\widetilde{\cdot}, \widetilde{\cdot}]_q = [\cdot, \cdot]_q, \quad \langle \widetilde{\cdot}, \widetilde{\cdot} \rangle = 0, \quad \widetilde{S} = S, \quad \widetilde{T} = S, \quad \widetilde{\eta} = \eta.$$

EJEMPLO 3.7. Deformaciones cuánticas no usuales de $GL(n)$ [20]. Sean p, q unidades en un anillo conmutativo unitario k con $pq \neq 1$ y escojamos $n(n-1)/2$ parámetros discretos ϵ_{ij} , $\epsilon_{ij} = \pm 1$, $1 \leq i < j \leq n$, $\epsilon_{ii} = 1$, $\epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$.

El k -módulo $L_{p,q,\epsilon}(n, k)$ se define entonces como el k -módulo libre con base

$$\mathcal{B} = \{Z_i^j \mid 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Ordenamos \mathcal{B} poniendo $Z_i^j > Z_u^v$ si bien $i > u$, o si $i = u$ y $j > v$. Se define η por $\eta(Z_j^i) = j 3^{i-1}$. Además, ponemos $[\cdot, \cdot] = 0$, y si $Z_i^l > Z_u^v$,

$$(3.1) \quad \langle Z_i^l, Z_u^v \rangle = \begin{cases} \epsilon_{vl}(p - q^{-1})Z_i^v \otimes Z_u^l, & \text{si } i > u \text{ y } l > v \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$S(Z_i^l \otimes Z_u^v) = \begin{cases} \epsilon_{vl}pZ_u^v \otimes Z_i^l, & \text{si } i = u, l > v, \\ \epsilon_{ui}qZ_u^v \otimes Z_i^l, & \text{si } l = v, i > u, \\ \epsilon_{iu}\epsilon_{vl}p^{-1}qZ_u^v \otimes Z_i^l, & \text{si } i > u, v > l \\ \epsilon_{vl}\epsilon_{ui}Z_u^v \otimes Z_i^l, & \text{si } i > u, l > v \end{cases}$$

Para probar que $L_{p,q,\epsilon}(n, k)$ es una T -álgebra de Lie básica, en vista de (3.1) es suficiente con verificar la condición de estabilidad (2b) para $Z_i^l > Z_u^v$, tales que $i > u$ y $l > v$:

$$(i - u)3^{l-1} > (i - u)3^{v-1}$$

entonces

$$i3^{l-1} + u3^{v-1} > i3^{v-1} + u3^{l-1}$$

pero esta ecuación tiene lado izquierdo $\eta(Z_i^l) + \eta(Z_u^v)$ mientras que el lado derecho es $\eta(Z_i^v) + \eta(Z_u^l)$. Lo que prueba las condiciones de estabilidad.

4. Álgebras envolventes universales

4.1. Construcción de $U(L)$.

DEFINICIÓN 4.1. Sea L be a T -álgebra de Lie con base \mathcal{B} , y $\otimes_k L$ la k -álgebra tensorial del módulo L . El *álgebra envolvente universal* $U(L)$ es el cociente

$$U(L) = \otimes_k L / J$$

donde J es el ideal bilateral generado por

$$x \otimes y - T(x \otimes y) - [x, y], \quad x, y \in \mathcal{B}.$$

El nombre *álgebra envolvente universal* para $U(L)$ es legítimo pues si $i : L \rightarrow U(L)$ es el morfismo lineal natural, es inmediato comprobar que la pareja $(U(L), i)$ satisface la propiedad universal dada en la definición 3.4 del capítulo 1.

Debido al axioma de estabilidad (2b), el álgebra $U(L)$ tiene una estructura similar a una *álgebra cuadrática con algoritmo de ordenación* (*quadratic algebra with an ordering algorithm* [57]).

4.2. Ejemplos.

EJEMPLO 4.1.

$$U(L_{p,q,\epsilon}(n, k)) = M_{p,q,\epsilon}(n, k)$$

es una deformación cuántica no estándar de $GL(n)$ [20].

EJEMPLO 4.2.

$$U(sl_{n+1}^{\pm})_q = U_q^{\pm}(sl_{n+1})$$

parte positiva (negativa) del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n , $n = 3, 4$.

EJEMPLO 4.3. En $U(\widetilde{sl}_4^+)_q$ la ecuación $x_2x_6 = 0$ se cumple. Entonces $U(\widetilde{sl}_4^+)_q$ es un álgebra envolvente universal donde el teorema PBW no se cumple. Así que, si queremos una buena envolvente universal tenemos que adicionar condiciones a las T -álgebras de Lie.

Además, si β y \tilde{S} denotan al corchete y a la simetría de $(\widetilde{sl}_4^+)_q$ respectivamente y si la característica del campo \mathbb{K} es cero, entonces para $\gamma = Id - \tilde{S}$, donde Id es el morfismo identidad sobre $(\widetilde{sl}_4^+)_q^{2\otimes}$, la condición $\gamma(t) = 0$ implica $\beta(t) = 0$. Aún más, si \mathcal{B} es la base canónica de $(\widetilde{sl}_4^+)_q$, y x, y, z son elementos arbitrarios en \mathcal{B} , cálculos directos (usando *Maxima* [54], ver apéndice 1) nos da:

$$\begin{aligned} \beta(\beta(x, y), z) &= \beta(x, \beta(y, z)) - q_{x,y}\beta(y, \beta(x, z)) \\ \beta(z, \beta(x, y)) &= \beta(\beta(z, x), y) - q_{x,y}\beta(\beta(z, y), x) \end{aligned}$$

donde $\tilde{S}(x \otimes y) = q_{x,y}y \otimes x$. Esto significa que $(\widetilde{sl}_4^+)_q$ tiene una estructura de *álgebra de Lie generalizada y balanceada* (*balanced generalised Lie algebra*) [45] y que su álgebra envolvente universal universal como álgebra de Lie generalizada es la misma que como T -álgebra de Lie básica. Por lo tanto, los axiomas de álgebra de Lie generalizada de Lyubashenko-Sudbery [45] no son suficientes para obtener bases del tipo PBW.

EJEMPLO 4.4. Sea L una T -álgebra de Lie básica. Vamos a definir una nueva T -álgebra de Lie L^0 : $L^0 = L$ en su estructura de k -módulo, $[,]^0 = 0$, $\langle , \rangle^0 = 0$, $\eta^0 = \eta$, $S^0 = S$ y se define

$$\mathcal{S}(L) = U(L^0)$$

$\mathcal{S}(L)$ es un k -módulo libre con base los monomios formados por los productos $z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_r}$ de elementos de \mathcal{B} tales que $r \geq 0$, $z_{i_1} \leq z_{i_2} \leq \dots \leq z_{i_r}$ donde $z_{i_j} = z_{i_{j+1}}$ si $q_{z_{i_j} z_{i_{j+1}}} = 1$ (ver definición 2.3(1)(b)).

Tal objeto $\mathcal{S}(L)$ será llamado la q -álgebra simétrica de L .

5. Álgebras envolventes universales y álgebras simétricas

Sea L una T -álgebra de Lie con base totalmente ordenada $\mathcal{B} = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ para Λ un conjunto de índices, $\Sigma = (x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_u})$ sucesión finita no decreciente de elementos de \mathcal{B} . Escribimos $z_\lambda = x_\lambda \in \mathcal{S}(L)$, $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_u} \in \mathcal{S}(L)$, $z_\emptyset = 1 \in \mathcal{S}(L)$, $\eta(\lambda) = \eta(x_\lambda)$, $\eta(\Sigma) = \eta(z_\Sigma) = \eta(x_{\lambda_1}) + \dots + \eta(x_{\lambda_u})$. Además ponemos $x_\lambda \leq \Sigma$ si $x_\lambda \leq x_{\lambda_1}$.

LEMA 5.1 (A-B). Sea L una T -álgebra de Lie con base \mathcal{B} . Sea $\mathcal{P} = \mathcal{S}(L)$ la q -álgebra simétrica y \mathcal{P}_p el k -submódulo generado por los z_Σ tales que $\eta(\Sigma) \leq p$. Existe un k -morfismo

$$(5.1) \quad \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} : L \otimes_k \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

satisfaciendo

- (A) $x_\lambda \cdot z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ para $x_\lambda \leq \Sigma$;
- (B) $x_\lambda \cdot z_\Sigma - z_\lambda z_\Sigma \in \mathcal{P}_{\eta(\lambda) + \eta(\Sigma) - 1}$.

DEM. Por inducción sobre $\eta(\lambda) + \eta(\Sigma)$. Si $\eta(\lambda) + \eta(\Sigma) = 1$ entonces $\eta(\lambda) = 1$ y $\Sigma = \emptyset$, se sigue $z_\emptyset = 1$. Se define

$$x_\lambda \cdot 1 = z_\lambda$$

así que (A) y (B) se cumplen. Supongamos la existencia de $x_{\lambda'} \cdot z_{\Sigma'}$ para $\eta(\lambda') + \eta(\Sigma') < \eta(\lambda) + \eta(\Sigma)$ satisfaciendo (A) y (B). Tenemos que definir $x_\lambda \cdot z_\Sigma$.

Hay dos casos: $\lambda \leq \Sigma$ o $\lambda \not\leq \Sigma$.

Caso $\lambda \leq \Sigma$: Debido a (A):

$$x_\lambda \cdot z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$$

Caso $\lambda \not\leq \Sigma$: Podemos escribir $\Sigma = (x_\mu, N)$ con $x_\mu \leq N$ y $x_\lambda > x_\mu$. Puesto que $\eta(N) < \eta(\Sigma)$ y por la hipótesis de inducción, $x_\lambda \cdot z_N$ está ya definido, y

$$w = x_\lambda \cdot z_N - z_\lambda z_N \in \mathcal{P}_{\eta(\lambda) + \eta(N) - 1}.$$

Aún más, de que $\eta(\mu) + \eta(\lambda) + \eta(N) - 1 < \eta(\mu) + \eta(\lambda) + \eta(N) = \eta(\lambda) + \eta(\Sigma)$ que sigue que $x_\mu \cdot w$ está ya definido.

Tenemos

$$(5.2) \quad T(x_\lambda \otimes x_\mu) = q_{\lambda\mu} x_\mu \otimes x_\lambda + \sum_i \xi_i x_{\mu_i} \otimes x_{\lambda_i}$$

y por (B) y por la hipótesis de inducción $x_{\lambda_i} \cdot z_N \in \mathcal{P}_{\eta(\lambda_i)+\eta(N)}$. Como consecuencia $x_{\mu_i} \cdot (x_{\lambda_i} \cdot z_N)$ está ya definido porque $\eta(\mu_i) + \eta(\lambda_i) + \eta(N) < \eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(N)$ de acuerdo con el axioma de estabilidad.

Podemos definir

$$(5.3) \quad x_\lambda \cdot z_\Sigma = q_{\lambda\mu} z_\mu z_\lambda z_N + q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot w + \sum_i \xi_i x_{\mu_i} \cdot (x_{\lambda_i} \cdot z_N) + [x_\lambda, x_\mu] \cdot z_N$$

donde $w = x_\lambda \cdot z_N - z_\lambda z_N$; $[x_\lambda, x_\mu] \cdot z_N$ está ya definido, porque $\eta([x_\lambda, x_\mu]) + \eta(N) < \eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(N) = \eta(\lambda) + \eta(\Sigma)$.

Ahora sólo falta probar (B). De $z_\lambda z_\Sigma = q_{\lambda\mu} z_\mu z_\lambda z_N$ obtenemos

$$x_\lambda \cdot z_\Sigma - z_\lambda z_\Sigma = q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot w + \sum_i \xi_i x_{\mu_i} \cdot x_{\lambda_i} \cdot z_N + [x_\lambda, x_\mu] \cdot z_N.$$

Además

$$x_\mu \cdot w \in \mathcal{P}_{\eta(\mu)+\eta(w)} = \mathcal{P}_{\eta(\mu)+\eta(\lambda)+\eta(N)-1} = \mathcal{P}_{\eta(\lambda)+\eta(\Sigma)-1}$$

$$x_{\mu_i} \cdot x_{\lambda_i} \cdot z_N \in \mathcal{P}_{\eta(\mu_i)+\eta(\lambda_i)+\eta(N)} \subseteq \mathcal{P}_{\eta(\mu)+\eta(\lambda)-1+\eta(N)} = \mathcal{P}_{\eta(\lambda)+\eta(\Sigma)-1}$$

$$[x_\lambda, x_\mu] \cdot z_N \in \mathcal{P}_{\eta(\lambda)+\eta(\mu)-1+\eta(N)} = \mathcal{P}_{\eta(\lambda)+\eta(\Sigma)-1}$$

implican

$$x_\lambda \cdot z_\Sigma - z_\lambda z_\Sigma \in \mathcal{P}_{\eta(\lambda)+\eta(\Sigma)-1}$$

□

Las demostraciones clásicas del teorema PBW [34], [35], hacen uso del principio de inducción. La condición de la siguiente definición permite que se cumpla el paso inductivo en el caso cuántico. Y también puede interpretarse como una condición análoga a la condición de resolubilidad del lema del diamante [10].

DEFINICIÓN 5.1. Sea L una T -álgebra de Lie con base \mathcal{B} . Llamamos a L adecuada si el morfismo del lema (A-B) es tal que la condición

$$(5.4) \quad x_{\lambda'} \cdot x_{\mu'} \cdot z_M - T(x_{\lambda'} \otimes x_{\mu'}) \cdot z_M = [x_{\lambda'}, x_{\mu'}] \cdot z_M$$

para todo $\eta(x_{\lambda'}) + \eta(x_{\mu'}) + \eta(M) \leq r$ implica

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot x_{\gamma} \cdot z_N - q_{\lambda\mu}[x_{\mu}, [x_{\lambda}, x_{\gamma}]] \cdot z_N = \\ & \quad q_{\mu\gamma}q_{\lambda\gamma}\langle x_{\gamma}[x_{\lambda}, x_{\mu}] \rangle \cdot z_N + q_{\mu\gamma}q_{\lambda\gamma}x_{\gamma} \cdot \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N \\ & \quad + q_{\mu\gamma}\langle x_{\lambda}, x_{\gamma} \rangle \cdot x_{\mu} \cdot z_N - q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot \langle x_{\lambda}, x_{\gamma} \rangle \cdot z_N \\ & \quad + q_{\mu\gamma}[x_{\lambda}, x_{\gamma}] \cdot x_{\mu} \cdot z_N - q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot [x_{\lambda}, x_{\gamma}] \cdot z_N \\ & + x_{\lambda} \cdot \langle x_{\mu}, x_{\gamma} \rangle \cdot z_N - q_{\lambda\mu}q_{\lambda\gamma}\langle x_{\mu}, x_{\gamma} \rangle \cdot x_{\lambda} \cdot z_N - q_{\lambda\gamma}q_{\lambda\mu}\langle [x_{\mu}, x_{\gamma}], x_{\lambda} \rangle \cdot z_N \end{aligned}$$

para cada $x_{\lambda} > x_{\mu} > x_{\gamma} \in \mathcal{B}$, $x_{\gamma} \leq z_N$ tal que $\eta(x_{\lambda}) + \eta(x_{\mu}) + \eta(x_{\gamma}) + \eta(N) \leq r + 1$.

LEMA 5.2 (C). Sea L una T -álgebra de Lie adecuada con base \mathcal{B} , y \mathcal{P} la q -álgebra simétrica relacionada. Entonces existe un k -morfismo $\underline{\cdot} : L \otimes_k \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que

$$(C) \quad x_{\lambda} \cdot x_{\mu} \cdot z_N = T(x_{\lambda} \otimes x_{\mu}) \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N, \quad \forall z_N \in \mathcal{P}, \forall x_{\lambda}, x_{\mu} \in \mathcal{B}.$$

DEM. Sea $\underline{\cdot}$ el morfismo del lema (A-B). Hay dos casos:

- (1) $\mu \leq N$ o $\lambda \leq N$;
- (2) $\mu \not\leq N$ y $\lambda \not\leq N$;

(1): Supongamos $\mu \leq N$ y $\mu < \lambda$. Sea $M = (\mu, N)$, entonces, por definición

$$\begin{aligned} x_{\lambda} \cdot x_{\mu} \cdot z_N &= x_{\lambda} z_M \text{ donde } \lambda \not\leq M \\ &= z_{\lambda} \cdot z_M + q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot w + \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & T(x_{\lambda} \otimes x_{\mu}) \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \\ &= q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot x_{\lambda} \cdot z_N + \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \\ &= q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot (z_{\lambda}z_N) + q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot w + \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \end{aligned}$$

de que $\mu < \lambda$ y $\mu \leq N$ se cumple $z_{\lambda}z_N = cz_{N'}$ donde $\mu \leq N'$ y $c \in k$,

$$x_{\mu} \cdot (z_{\lambda}z_N) = cx_{\mu} \cdot z_{N'} = cz_{\mu}z_{N'} = z_{\mu}z_{\lambda}z_N,$$

por lo que

$$q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot (z_{\lambda}z_N) = q_{\lambda\mu}z_{\mu}z_{\lambda}z_N = z_{\lambda}z_{\mu}z_N = z_{\lambda}z_M.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & T(x_{\lambda} \otimes x_{\mu}) \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \\ &= z_{\lambda}z_M + q_{\lambda\mu}x_{\mu} \cdot w + \langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N + [x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N \\ &= x_{\lambda} \cdot x_{\mu} \cdot z_N \end{aligned}$$

(i.e. (C) se cumple para $\mu < \lambda$). Se sigue que, multiplicando por $-q_{\mu\lambda}$:

$$(5.6) \quad -q_{\mu\lambda}x_{\lambda} \cdot x_{\mu} \cdot z_N = -x_{\mu} \otimes x_{\lambda} \cdot z_N - q_{\mu\lambda}\langle x_{\lambda}, x_{\mu} \rangle \cdot z_N - q_{\mu\lambda}[x_{\lambda}, x_{\mu}] \cdot z_N.$$

Esto implica, usando antisimetría,

$$(5.7) \quad x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N - T(x_\mu \otimes x_\lambda) \cdot z_N = [x_\mu, x_\lambda] \cdot z_N$$

y concluimos que (C) también se cumple para $\lambda < \mu$.

(2): Sea $N = (\gamma, Q)$ donde $\gamma \leq Q$, $\gamma < \lambda$, $\gamma < \mu$. Procedemos por inducción sobre $\eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(N)$. Supongamos que para cada $\eta(\lambda') + \eta(\mu') + \eta(N') \leq r$ se cumple (C). Entonces, para $\eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(N) \leq r + 1$ tenemos:

$$(5.8) \quad x_\mu \cdot z_N = x_\mu \cdot (x_\gamma \cdot z_Q) = T(x_\mu \otimes x_\gamma) \cdot z_Q + [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q$$

porque $\eta(\mu) + \eta(\gamma) + \eta(Q) = \eta(\mu) + \eta(N) \leq r$ y la hipótesis de inducción.

Ahora, $x_\mu \cdot z_Q = z_\mu z_Q + w$ donde $w \in \mathcal{P}_{\eta(\mu) + \eta(Q) - 1}$. Podemos aplicar (C) a $x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot (z_\mu z_Q)$ puesto que $z_\mu z_Q = cz_{Q'}$ donde $c \in k$ y $\gamma \leq Q'$ porque $\gamma \leq Q$, $\gamma < \mu$ el caso (A).

También (C) se aplica a $x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot w$ pues

$$\begin{aligned} \eta(\lambda) + \eta(\gamma) + \eta(w) &\leq \eta(\lambda) + \eta(\gamma) + \eta(\mu) + \eta(Q) - 1 \\ &= \eta(\lambda) + \eta(\gamma) + \eta(N) - 1 \leq r \end{aligned}$$

y de nuevo la hipótesis de inducción.

Las observaciones anteriores muestran que (C) se aplica a

$$x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot x_\mu \cdot z_Q = x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot (z_\mu z_Q) + x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot w$$

Usando (5.8) y multiplicando por x_λ ,

$$\begin{aligned} x_\lambda \cdot x_\mu \cdot z_N &= x_\lambda \cdot T(x_\mu \otimes x_\gamma) \cdot z_Q + x_\lambda \cdot [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q \\ &= \underbrace{q_{\mu\gamma} x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot x_\mu \cdot z_Q}_{q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot x_\mu \cdot z_Q} + x_\lambda \cdot \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot z_Q + x_\lambda \cdot [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q \\ &= q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot x_\mu \cdot z_Q + q_{\mu\gamma} \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot x_\mu \cdot z_Q \\ &\quad + q_{\mu\gamma} [x_\lambda, x_\gamma] \cdot x_\mu \cdot z_Q + x_\lambda \cdot \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot z_Q + x_\lambda \cdot [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q. \end{aligned}$$

Notando que λ y μ son intercambiables:

$$\begin{aligned} x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N &= q_{\lambda\gamma} q_{\mu\gamma} x_\lambda \cdot x_\gamma \cdot x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_Q + q_{\lambda\gamma} \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot x_\lambda \cdot z_Q \\ &\quad + q_{\lambda\gamma} [x_\mu, x_\gamma] \cdot x_\lambda \cdot z_Q + x_\mu \cdot \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot z_Q + x_\mu \cdot [x_\lambda, x_\gamma] \cdot z_Q. \end{aligned}$$

Ahora, usando $\eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(Q) = \eta(\lambda) + \eta(N) \leq r$ para obtener

$$(5.9) \quad x_\lambda \cdot x_\mu \cdot z_N - q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N = \\ q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} x_\gamma \cdot ([x_\lambda, x_\mu] + \langle x_\lambda, x_\mu \rangle) \cdot z_Q + \\ q_{\mu\gamma} \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot x_\mu \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot z_Q + \\ q_{\mu\gamma} [x_\lambda, x_\gamma] \cdot x_\mu \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot [x_\lambda, x_\gamma] \cdot z_Q + \\ x_\lambda \cdot \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} q_{\lambda\gamma} \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot x_\lambda \cdot z_Q + \\ x_\lambda \cdot [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} q_{\lambda\gamma} [x_\mu, x_\gamma] \cdot x_\lambda \cdot z_Q.$$

Adicionalmente,

$$(5.10) \quad x_\lambda \cdot [x_\mu, x_\gamma] \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} q_{\lambda\gamma} [x_\mu, x_\gamma] \cdot x_\lambda \cdot z_Q \\ = -q_{\mu\gamma} x_\lambda \cdot [x_\gamma, x_\mu] + q_{\lambda\mu} q_{\lambda\gamma} q_{\mu\gamma} [x_\gamma, x_\mu] \cdot x_\lambda \cdot z_Q \\ = q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} ([x_\gamma, x_\mu] \cdot x_\lambda \cdot z_Q - q_{\gamma\lambda} q_{\mu\lambda} x_\lambda \cdot [x_\gamma, x_\mu] \cdot z_Q).$$

Si suponemos $x_\mu < x_\lambda$ entonces podemos hacer uso de la condición de multiplicatividad y puesto que $\eta([x_\gamma, x_\mu]) + \eta(\lambda) + \eta(Q) < \eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(\gamma) + \eta(Q) = \eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(N)$ obtenemos que (5.10) es igual a

$$(5.11) \quad = q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} [[x_\gamma, x_\mu], x_\lambda] \cdot z_Q + q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} \langle [x_\gamma, x_\mu], x_\lambda \rangle \cdot z_Q \\ = -q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} [[x_\mu, x_\gamma], x_\lambda] \cdot z_Q - q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} \langle [x_\mu, x_\gamma], x_\lambda \rangle \cdot z_Q.$$

Usando multiplicatividad de nuevo y puesto que $\eta(x_\gamma) + \eta([x_\lambda, x_\mu]) + \eta(Q) < \eta(x_\lambda) + \eta(\mu) + \eta(\gamma) + \eta(Q) = \eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(N)$ podemos escribir

$$(5.12) \quad x_\gamma \cdot [x_\lambda, x_\mu] \cdot z_Q = \\ q_{\gamma\mu} q_{\gamma\lambda} [x_\lambda, x_\mu] \cdot x_\gamma \cdot z_Q + [x_\gamma, [x_\lambda, x_\mu]] \cdot z_Q + \langle x_\gamma, [x_\lambda, x_\mu] \rangle \cdot z_Q.$$

Sustituyendo (5.11) y (5.12) en (5.9),

$$x_\lambda \cdot x_\mu \cdot z_N - q_{\mu\lambda} x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N = \\ [x_\lambda, x_\mu] \cdot x_\gamma \cdot z_Q + q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} [x_\gamma, [x_\lambda, x_\mu]] \cdot z_Q \\ + q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} \langle x_\gamma, [x_\lambda, x_\mu] \rangle \cdot z_Q + q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} x_\gamma \cdot \langle x_\lambda, x_\mu \rangle \cdot z_Q \\ + q_{\mu\gamma} \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot x_\mu \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} x_\mu \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \cdot z_Q \\ + q_{\mu\gamma} [x_\lambda, x_\gamma] \cdot x_\mu \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} x_\mu [x_\lambda, x_\gamma] \cdot z_Q \\ + x_\lambda \cdot \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} q_{\lambda\gamma} \langle x_\mu, x_\gamma \rangle \cdot x_\lambda \cdot z_Q \\ - q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} [[x_\mu, x_\gamma], x_\lambda] \cdot z_Q - q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} \langle [x_\mu, x_\gamma], x_\lambda \rangle \cdot z_Q$$

pues L es adecuada,

$$= [x_\lambda, x_\mu] \cdot x_\gamma \cdot z_Q + \langle x_\lambda, x_\mu \rangle \cdot x_\gamma \cdot z_Q + \\ q_{\mu\gamma} q_{\lambda\gamma} [x_\gamma, [x_\lambda, x_\mu]] \cdot z_Q - q_{\lambda\gamma} q_{\lambda\mu} [[x_\mu, x_\gamma], x_\lambda] \cdot z_Q - q_{\lambda\mu} [x_\mu, [x_\lambda, x_\gamma]] \cdot z_Q.$$

Gracias a la identidad de Jacobi y (A) obtenemos

$$(5.13) \quad x_\lambda \cdot x_\mu \cdot z_N - q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N - \langle x_\lambda, x_\mu \rangle \cdot z_N = [x_\lambda, x_\mu] \cdot z_N$$

si $x_\mu < x_\lambda$. Multiplicando ambos lados de (5.13) por $-q_{\lambda\mu}$ y usando antisimetría, obtenemos

$$x_\mu \cdot x_\lambda \cdot z_N - q_{\lambda\mu} x_\lambda \cdot x_\mu \cdot z_N - \langle x_\mu, x_\lambda \rangle \cdot z_N = [x_\mu, x_\lambda] \cdot z_N$$

así (5.13) también se cumple si $x_\lambda < x_\mu$. \square

6. Representaciones

DEFINICIÓN 6.1. Sea L una T -álgebra de Lie básica y V un k -módulo. Un k -morfismo $\underline{\cdot} : L \otimes_k V \rightarrow V$ es llamado *representación de L* si satisface

$$x \cdot y \cdot v - T(x \otimes y) \cdot v = [x, y] \cdot v, \quad \forall x, y \in L, \forall v \in V$$

donde $(a \otimes b) \cdot v$ significa $a \cdot b \cdot v$.

TEOREMA 6.1. Si L es una T -álgebra de Lie básica adecuada entonces L tiene una representación natural sobre su q -álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$.

COROLARIO 6.1. Si L es una T -álgebra de Lie básica adecuada entonces su álgebra envolvente universal $U(L)$ tiene una representación sobre la q -álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$.

Dentro de $(sl_n^+)_q$, $n \geq 4$, los k -submódulos generados por los elementos básicos dados en la figura 13 tienen una estructura de T -álgebra

$$\begin{array}{ccccc} e_{ij} & & e_{jk} & & e_{kl} \\ & e_{ik} & & e_{jl} & \\ & & e_{il} & & \end{array}$$

FIGURA 13. Una T -álgebra de Lie básica de tipo $(sl_4^+)_q$; se está suponiendo que $i < j < k < l$.

de Lie básica que recuerda a la de $(sl_4^+)_q$. Pero tal álgebra tiene una graduación dada por $\eta(e_{ab}) = a(b - a)$, y esta no es, en general, la graduación de $(sl_4^+)_q$. Sin embargo, la figura 13 da una T -Lie álgebra básica.

La T -álgebra de Lie básica dada por la figura 13 será llamada de tipo $(sl_4^+)_q$. De forma similar podemos definir una T -álgebra de Lie de tipo $(sl_n^\pm)_q$.

EJEMPLO 6.2. Cada T -álgebra de Lie básica de tipo $(sl_4^\pm)_q$ es adecuada.

DEM. Supongamos $x_\lambda > x_\mu > x_\gamma \in \mathcal{B}$, $x_\gamma \leq z_N$ tal que $\eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(x_\gamma) + \eta(N) \leq r + 1$. Tenemos que probar que (5.5) se cumple.

Notemos que $\langle x_\lambda, x_\mu \rangle = 0$ para cualesquiera $x_\lambda, x_\mu \in \mathcal{B}$ excepto e_{ik}, e_{jl} , así que cada término en la ecuación (5.5) se anula ó e_{ik}, e_{jl} aparecen. Esto significa que la ecuación (5.5) se cumple trivialmente exepcto en los siguientes casos:

$$e_{ij} < e_{jk} < e_{jl}, e_{ij} < e_{ik} < e_{jl}, e_{ik} < e_{jk} < e_{kl}, e_{ik} < e_{jl} < e_{kl}$$

Caso $e_{ij} < e_{jk} < e_{jl}$: El lado izquierdo de (5.5) se anula, mientras que el lado derecho es:

$$\begin{aligned} e_{jk} \cdot e_{il} \cdot z_N - q^2 e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N + q \langle e_{ik}, e_{jl} \rangle \cdot z_N \\ = e_{jk} \cdot e_{il} \cdot z_N - q^2 e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N + (q^2 - 1) e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N = 0, \end{aligned}$$

porque $e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N = e_{jk} \cdot e_{il} \cdot z_N$ pues $\eta(e_{il}) + \eta(e_{jk}) < \eta(e_{ij}) + \eta(e_{jk}) + \eta(e_{jl})$ y la suposición (5.4).

Caso $e_{ij} < e_{ik} < e_{jl}$: Sea $d = \eta(e_{ij}) + \eta(e_{ik}) + \eta(e_{jl})$. El lado izquierdo de (5.5) es

$$\begin{aligned} (q^{-1} - q) e_{il} \cdot e_{jk} \cdot e_{ij} \cdot z_N \\ = (q^{-1} - q) (q e_{il} \cdot e_{ij} \cdot e_{jk} \cdot z_N - q e_{il} \cdot e_{ik} \cdot z_N) \\ = (q^{-1} - q) (e_{ij} \cdot e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N) - (q^{-1} - q) q e_{il} \cdot e_{ik} \cdot z_N \\ (\eta(e_{il}) + \eta(e_{ij}) + \eta(e_{jk}) < d \text{ y (5.4)}) \\ = (q^{-1} - q) (e_{ij} \cdot e_{il} \cdot e_{jk} \cdot z_N - e_{il} \cdot e_{ik} \cdot z_N + q e_{ik} \cdot e_{il} \cdot z_N) \\ (\eta(e_{ik}) + \eta(e_{il}) < d), \text{ y este es el lado derecho de (5.5).} \end{aligned}$$

Los restantes casos son similares. \square

EJEMPLO 6.3. Cada T -álgebra de Lie básica de tipo $(sl_n^\pm)_q$ es adecuada, $n = 5, 6$.

DEM. Por cálculos similares al ejemplo previo. \square

EJEMPLO 6.4. La T -álgebra de Lie $\widetilde{(sl_4^+)_q}$ no es adecuada, porque el lado izquierdo de la ecuación (5.5) sobre $z_N = 1$ y $x_3 > x_2 > x_4$ es cero, mientras que el lado derecho es $(q^2 - 1)z_2 z_6 \neq 0$.

Nótese que el símbolo $\cdot z_N$ es redundante en los cálculos del ejemplo 6.2. Esta observación conduce al siguiente lema.

Sea $\otimes_k L$ la k -álgebra tensorial de L y J_r el k -submódulo generado por

$$(6.1) \quad x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - T(x_\alpha \otimes x_\beta) \otimes x_\delta - [x_\alpha, x_\beta] \otimes x_\delta,$$

$$(6.2) \quad x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - x_\alpha \otimes T(x_\beta \otimes x_\delta) - x_\alpha \otimes [x_\beta, x_\delta]$$

donde $\eta(\alpha) + \eta(\beta) + \eta(\delta) \leq r$, $\forall x_\alpha, x_\beta, x_\delta \in \mathcal{B}$.

LEMA 6.5. L es adecuada si

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \langle x_\lambda, x_\mu \rangle \otimes x_\gamma - q_{\lambda\mu}[x_\mu, [x_\lambda, x_\gamma]] \equiv & \\ & q_{\mu\gamma}q_{\lambda\gamma}\langle x_\gamma[x_\lambda, x_\mu] \rangle + q_{\mu\gamma}q_{\lambda\gamma}x_\gamma \otimes \langle x_\lambda, x_\mu \rangle \\ & + q_{\mu\gamma}\langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \otimes x_\mu - q_{\lambda\mu}x_\mu \otimes \langle x_\lambda, x_\gamma \rangle \\ & + q_{\mu\gamma}[x_\lambda, x_\gamma] \otimes x_\mu - q_{\lambda\mu}x_\mu \otimes [x_\lambda, x_\gamma] \\ & + x_\lambda \otimes \langle x_\mu, x_\gamma \rangle - q_{\lambda\mu}q_{\lambda\gamma}\langle x_\mu, x_\gamma \rangle \otimes x_\lambda - q_{\lambda\gamma}q_{\lambda\mu}\langle [x_\mu, x_\gamma], x_\lambda \rangle \quad \text{mod } J_r \end{aligned}$$

para cada $x_\lambda > x_\mu > x_\gamma \in \mathcal{B}$ tal que $\eta(\lambda) + \eta(\mu) + \eta(\gamma) \leq r + 1$.

DEM. Supongamos que

$$x_{\lambda'} \cdot x_{\mu'} \cdot z_M - T(x_{\lambda'} \otimes x_{\mu'}) \cdot z_M = [x_{\lambda'}, x_{\mu'}] \cdot z_M$$

para cualesquiera $x_{\lambda'}, x_{\mu'} \in \mathcal{B}$ tales que $\eta(x_{\lambda'}) + \eta(x_{\mu'}) + \eta(z_M) \leq r$.

Tomemos $x_\lambda > x_\mu > x_\gamma \in \mathcal{B}$ y z_N en el álgebra simétrica con $x_\gamma \leq z_N$ tales que $\eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(x_\gamma) + \eta(N) \leq r + 1$. Pongamos $r_0 = \eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(x_\gamma)$. Sea $I \cdot z_N$ el lado izquierdo de la ecuación (5.5) y $D \cdot z_N$ el lado derecho. Por hipótesis tenemos que $I - D \in J_{r_0-1}$; es decir, para algunos escalares $r_{\alpha,\beta,\delta}, s_{\alpha,\beta,\delta}$ se cumple

$$(6.4) \quad \begin{aligned} I - D = & \sum_{\alpha,\beta,\delta} r_{\alpha,\beta,\delta} (x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - T(x_\alpha \otimes x_\beta) \otimes x_\delta - [x_\alpha, x_\beta] \otimes x_\delta) \\ & + \sum_{\alpha,\beta,\delta} s_{\alpha,\beta,\delta} (x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - x_\alpha \otimes T(x_\beta \otimes x_\delta) - x_\alpha \otimes [x_\beta, x_\delta]) \end{aligned}$$

donde $\eta(x_\alpha) + \eta(x_\beta) + \eta(x_\delta) \leq r_0 - 1$. Puesto que $\eta(x_\beta) + \eta(x_\delta) + \eta(N) \leq r$ entonces, por nuestra suposición,

$$\sum_{\alpha,\beta,\delta} s_{\alpha,\beta,\delta} (x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - x_\alpha \otimes T(x_\beta \otimes x_\delta) - x_\alpha \otimes [x_\beta, x_\delta]) \cdot z_N = 0.$$

Además, usando el Lema 5.1, se obtiene que $x_\delta \cdot Z_N = z_\delta Z_N + w$ con $w \in \mathcal{P}_{\eta(\delta)+\eta(N)-1}$, luego, también por nuestra suposición,

$$\sum_{\alpha, \beta, \delta} r_{\alpha, \beta, \delta} (x_\alpha \otimes x_\beta \otimes x_\delta - T(x_\alpha \otimes x_\beta) \otimes x_\delta - [x_\alpha, x_\beta] \otimes x_\delta) \cdot z_N = 0.$$

Por lo tanto $I \cdot z_N - D \cdot z_N = 0$. □

7. El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Definamos

$$\mathcal{T}^n = \underbrace{L \otimes_k \dots \otimes_k L}_{n\text{-veces}}$$

Para $u = x_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes x_{\lambda_n} \in \mathcal{T}^n$ definamos $\delta(u) = \eta(x_{\lambda_1}) + \dots + \eta(x_{\lambda_n})$, $D(u) = \#\{(x_{\lambda_i}, x_{\lambda_j}) \mid x_{\lambda_i} > x_{\lambda_j} \text{ y } i < j\}$. Si $u \in \otimes_k L$ y $u = \sum_i \xi_i u_i$ con $u_i \in \mathcal{T}^i$, $\xi_i \in k$, $\forall i$, pongamos

$$(7.1) \quad D(u) = \max\{D(u_i) \mid \xi_i \neq 0, i\}$$

$$(7.2) \quad \delta(u) = \max\{\delta(u_i) \mid \xi_i \neq 0, i\}$$

El número $D(u)$ es llamado *el desorden de u*.

Denotemos por \mathcal{T}_p el k -submódulo generado por $u \in \otimes_k L$ tal que $\delta(u) \leq p$.

DEFINICIÓN 7.1. Una sucesión $(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n})$ de elementos en una base de una T -álgebra de Lie básica es llamada *no decreciente* si $x_{\lambda_1} \leq \dots \leq x_{\lambda_n}$ y $x_{\lambda_i} = x_{\lambda_{i+1}}$ si y sólo si $S(x_{\lambda_i} \otimes x_{\lambda_{i+1}}) = x_{\lambda_i} \otimes x_{\lambda_{i+1}}$.

TEOREMA 7.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt). Sea L una T -álgebra de Lie adecuada con base \mathcal{B} . Los monomios formados por sucesiones finitas no decrecientes de elementos de \mathcal{B} constituyen una k -base libre del álgebra envolvente universal $U(L)$.

DEM. Sea $P : \otimes_k L \rightarrow U(L)$ el k -morfismo canónico, \mathcal{M} el k -submódulo generado por los monomios descritos en el enunciado del teorema. Tenemos que probar que $U(L) = \mathcal{M}$. Obsérvese que

$$U(L) = \sum_{p=1}^{\infty} P(\mathcal{T}_p).$$

Si $p = 1$ entonces $\mathcal{T}_p \subseteq L$, se sigue $P(\mathcal{T}_p) \subseteq \mathcal{M}$. Supóngase $P(\mathcal{T}_r) \subseteq \mathcal{M}$. Es suficiente con mostrar que $P(\mathcal{T}_{r+1}) \subseteq \mathcal{M}$.

Definimos \mathcal{T}_r^u como el k -submódulo de \mathcal{T}_r generado por los elementos con desorden $\leq u$, y procedemos con una segunda inducción sobre el desorden. Tenemos $P(\mathcal{T}_{r+1}^0) \subseteq \mathcal{M}$. Supóngase que $v = a \otimes x \otimes y \otimes b \in$

\mathcal{T}_{r+1}^u donde $x > y \in \mathcal{B}$, y $a \in \mathcal{T}^n$, $b \in \mathcal{T}^m$ monomios formados por elementos básicos en \mathcal{B} . Entonces

$$\begin{aligned} P(v) &= P(a \otimes q_{xy}y \otimes x \otimes b) + P(a \otimes \langle x, y \rangle \otimes b) + P(a \otimes [x, y] \otimes b) \\ &\equiv P(a \otimes q_{xy}y \otimes x \otimes b) \pmod{\mathcal{T}_r} \end{aligned}$$

pero $P(a \otimes q_{xy}y \otimes x \otimes b) \in \mathcal{T}_{r+1}^{u-1} \subseteq \mathcal{M}$. Así $P(v) \in \mathcal{M}$. Se sigue, $P(\mathcal{T}_{r+1}) \subseteq \mathcal{M}$.

Falta probar independencia lineal. Para una sucesión dada $\Sigma = (x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n})$ de elementos no decrecientes de \mathcal{B} , definimos $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_n} \in U(L)$.

Supóngase

$$\sum_i \xi_i x_{\Sigma_i} = 0$$

donde cada Σ_i es una sucesión no decreciente y $\xi_i \in k$, $\forall i$. Usando la representación de $U(L)$, obtenemos del lema (C)

$$0 = \sum_i \xi_i x_{\Sigma_i} \cdot 1 = \sum_i \xi_i z_{\Sigma_i}$$

y por la independencia lineal de $z_{\Sigma_i} \in \mathcal{S}(L)$, se sigue que $\xi_i = 0$, $\forall i$. \square

Según los ejemplos 6.2 y 6.3 tenemos que $(s_n^\pm)_q$ es adecuada para $n = 4, 5, 6$. Los casos $n = 2, 3$ son obvios. Podemos aplicarles el teorema inmeiato anterior para obtener que sus álgebras envolventes universales tienen bases del tipo de PBW. Usando estos casos como base de inducción, el resultado para n arbitrario será examinado posteriormente, en la sección 10 teorema 10.2.

COROLARIO 7.1. *El álgebra $U(sl_n^\pm)_q$ tiene una base del tipo de Poincaré-Birkhoff-Witt, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.*

8. Trenzas

PROPOSICIÓN 8.1. *Para $L = (sl_n^\pm)_q$, $n = 2, 3, 4$ se satisface la ecuación de trenza:*

$$(8.1) \quad T_1 T_2 T_1|_{3L} = T_2 T_1 T_2|_{3L},$$

donde $T_1 = T \otimes_k Id_L$, $T_2 = Id_L \otimes_k T$.

DEM. Por cálculos directos sobre los elementos básicos, (usando *Maxima* [54], ver apéndice 2). \square

PROPOSICIÓN 8.2. *La presimetría S de una T -álgebra de Lie cumple con la ecuación de trenza:*

$$S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$$

DEM. Sean x, y, z elementos básicos. Entonces

$$S_1 S_2 S_1(x \otimes y \otimes z) = q_{x,y} q_{x,z} q_{y,z} z \otimes y \otimes x = S_2 S_1 S_2(x \otimes y \otimes z)$$

□

NOTA 8.1. La simetría de $(\widetilde{sl_4^+})_q$ es un morfismo de trenza, sin embargo, no se tiene una base PBW para $U(\widetilde{sl_4^+})_q$, puesto que se tienen dos elementos básicos x_2 y x_6 cuyo producto en la envolvente universal no forma parte de ninguna base pues $x_2 x_6 = 0$ (ver ejemplo 4.3). En consecuencia el teorema PBW es independiente de la ecuación de trenza.

9. Deformaciones cuánticas no estándar de $GL(n)$

DEFINICIÓN 9.1. Sean p, q unidades en un anillo conmutativo k con $pq \neq 1$ y elíjanse $\alpha(\alpha - 1)/2$ parámetros discretos ϵ_{ij} , $\epsilon_{ij} = \pm 1$, $1 \leq i < j \leq \alpha$, $\epsilon_{ii} = 1$, $\epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$. Sean m, n enteros positivos tales que $m, n \leq \alpha$.

El k -módulo $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$ se define entonces como el k -módulo libre con base

$$\mathcal{B} = \{Z_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Ahora definimos un orden en \mathcal{B} y morfismos $S, T, \langle, \rangle, [,]$ copiando la estructura de $L(n, k)$ que aparece en el ejemplo 3.7.

PROPOSICIÓN 9.1. *El módulo $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$ tiene una estructura de T -álgebra de Lie básica.*

De forma similar a las álgebras del tipo $(sl_n^+)_q$ (ver sección 6) podemos definir *álgebras del tipo $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$.*

LEMA 9.1. Cada álgebra del tipo $L_{p,q,\epsilon}(\lambda, \mu, k)$ es una T -álgebra de Lie básica adecuada, donde $\lambda, \mu \in \{2, 3\}$.

LEMA 9.2. Si $Z_u^v > Z_i^j > Z_a^b$ entonces existe L una T -Lie subálgebra de $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$ y números $\lambda, \mu \in \{2, 3\}$ tales que L es del tipo $L_{p,q,\epsilon'}(\lambda, \mu, k)$ y $\{Z_u^v, Z_i^j, Z_a^b\} \subset L$.

DEM. Pongamos los elementos básicos en un arreglo matricial (figura 14 (a)).

Obsérvese que para enteros positivos u, v los elementos que aparecen en la definición del pseudocorchete están en una relación diagonal (figura 14(b)), y ellos forman una base libre de una T -álgebra de Lie del tipo $L_{p,q,\epsilon'}(2, 2, k)$, donde $\epsilon' = \{1, \epsilon_{i,i+u}, \epsilon_{j,j+u}\}$.

Para $Z_u^v > Z_i^j > Z_a^b$ hay varios casos. Los casos dados por la figuras 15(a), 15(b), 15(c), o ellos forman un triángulo que puede ser ajustado,

$$(a) \begin{matrix} Z_1^1 & Z_1^2 & \dots & Z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_m^1 & Z_m^2 & \dots & Z_m^n \end{matrix} \quad (b) \begin{matrix} \circ_i^j & \circ_i^{j+u} \\ \circ_{i+u}^j & \circ_{i+u}^{j+u} \end{matrix}$$

FIGURA 14. (a) La T -álgebra de Lie básica $L_{p,q,\epsilon'}(\lambda, \mu, k)$. (b) Relación diagonal.

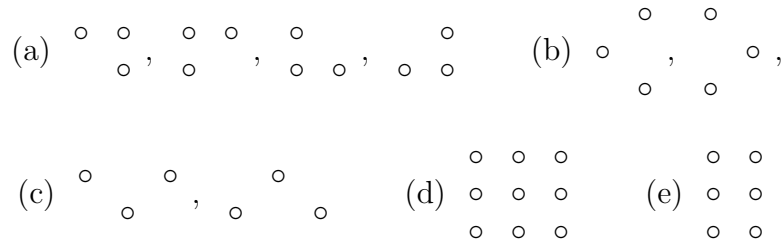


FIGURA 15. Algunos casos en $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$

con vértices sobre la frontera, dentro del rectángulo de la figura 15(d).

En el caso dado por la figura 15(a) podemos completar cada triángulo a un cuadrado y obtener $L_{p,q,\epsilon_0}(2, 2, k)$. En el caso dado por la figura 15(b), cada triángulo puede ser completado a un rectángulo de la forma de la figura 15(e) y obtenemos $L_{p,q,\epsilon_1}(3, 2, k)$. Similarmente, en el caso dado por la figura 15(c) obtenemos $L_{p,q,\epsilon_2}(2, 3, k)$. Finalmente, en el caso dado por la figura 15(d), obtenemos $L_{p,q,\epsilon_3}(3, 3, k)$.

□

TEOREMA 9.3. $L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$ es una T -álgebra de Lie básica adecuada.

COROLARIO 9.2. *Los monomios formados por las sucesiones finitas no decrecientes de elementos en*

$$\mathcal{B} = \{Z_i^j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

constituyen una base libre de $M_{p,q,\epsilon}(n, m, k) = U L_{p,q,\epsilon}(n, m, k)$ como k -módulo.

10. $U(sl_{n+1}^+)_q$: el caso general.

LEMA 10.1. Sean e_{ab}, e_{uv}, e_{ij} elementos básicos en $(sl_{n+1}^+)_q$ y $[,]$ el corchete usual en sl_{n+1} .

- (1) $e_{ab} < e_{uv}$ si y sólo si $a + b < i + j$ ó $a + b = i + j$ y $b < j$.

(2) Si $S(e_{ab} \otimes e_{uv}) = q^{c_{ab,uv}} e_{uv} \otimes e_{ab}$ y $e_{ab} < e_{uv}$ entonces

$$c_{ab,uv} = -\delta_{v,a} + \delta_{v,b} + \delta_{u,a} - \delta_{u,b}$$

(3) Si $e_{ab} < e_{uv} < e_{ij}$ entonces

$$q^{c_{uv,ab}} [e_{uv}, [e_{ab}, e_{ij}]] = [e_{uv}, [e_{ab}, e_{ij}]]_q$$

DEM.

- (1) Por la definición del orden.
- (2) Se sigue de la fórmula $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj}$ en el álgebra de Lie clásica sl_n .
- (3) Puesto que $e_{ab} < e_{ij}$ podemos suponer $b = i$. tenemos que probar $q^{c_{uv,ab}} [e_{uv}, e_{aj}] = [e_{uv}, e_{aj}]_q$. Hay dos casos
 - (a) $e_{uv} < e_{aj}$;
 - (b) $e_{uv} > e_{aj}$.
 - (3a): Si $[e_{uv}, e_{aj}] \neq 0$ entonces $v = a$ y $u < v = a < b$, se sigue $e_{uv} < e_{ab}$ pues $u + v < a + b$. Una contradicción. Por lo tanto $[e_{uv}, e_{aj}]_q = [e_{uv}, e_{aj}] = 0$.
 - (3b): Tenemos que probar

$$q_{uv,ab} [e_{aj}, e_{uv}] = q_{uv,aj} [e_{aj}, e_{uv}]$$

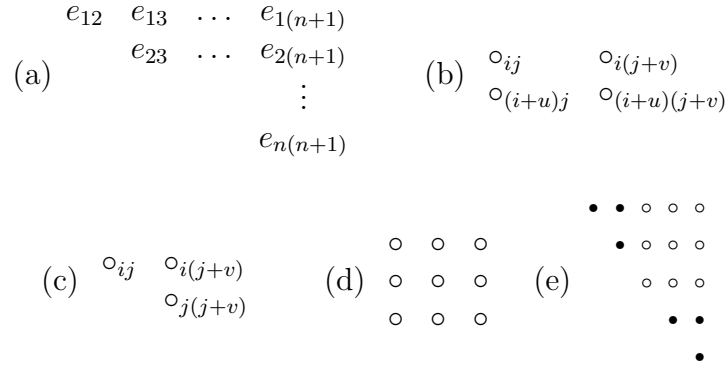
Ambos lados son cero, porque sino, entonces $j = u$ y $i < j = u < v$, lo que implican $i + j < v + u$, y entonces $e_{ij} < e_{uv}$. De nuevo, tenemos una contradicción.

□

TEOREMA 10.2. $(sl_{n+1}^+)_q$ es una T -álgebra de Lie básica adecuada.

DEM. Sea \mathcal{B} la base canónica de sl_{n+1} , y escribimos los elementos básicos de \mathcal{B} de la forma e_{ij} . Ahora pongamos estos elementos básicos en un arreglo triangular superior (figura 16(a)). Observe que, si $\langle e_{ij}, e_{(i+u)(j+v)} \rangle \neq 0$ entonces los elementos que aparecen en la definición del pseudocorchete están en una relación diagonal (figura 16(b)), y si $[e_{ij}, e_{(i+u)(j+v)}]_q \neq 0$ entonces $j = i + u$ y obtenemos la figura 16(c).

Así, que si suponemos $e_{ij} > e_{uv} > e_{ab}$ entonces los elementos que aparecen en el enunciado del lema 6.5 (corchetes y pseudocorchetes) pueden ser puestos dentro de un cuadrado de la forma de la figura 16(d), y tal cuadrado puede ser extendido a un triángulo superior (figura 16(e)), pero este triángulo nos da un álgebra graduada estrictamente del tipo $(sl_6^+)_q$. Puesto que éstas álgebras satisfacen la condición del lema 6.5, entonces en particular los elementos $e_{ij} > e_{uv} > e_{ab}$ satisfacen

FIGURA 16. Algunos casos en $(sl_{n+1}^+)_q$

esta condición. Además,

$$[\cdot, \cdot]_q((Id \otimes [\cdot, \cdot]_q)S_{12}S_{23} - ([\cdot, \cdot]_q \otimes Id)S_{23}S_{12} + (Id \otimes [\cdot, \cdot]_q)S_{23}S_{12})(e_{ij} \otimes e_{uv} \otimes e_{ab}) =$$

$$q^{c_{uv, ab} + c_{ij, ab} + c_{ij, uv}}([e_{ab}, e_{uv}], e_{ij}] - [e_{ab}, [e_{uv}, e_{ij}]] + [e_{uv}, [e_{ab}, e_{ij}]]) = 0$$

pues el lema 10.1 y la identidad de Jacobi en sl_n^+ .

Concluimos que $(sl_{n+1}^+)_q$ es una T -álgebra de Lie básica adecuada. \square

LEMA 10.3. Supongamos que $e_{ij} < e_{ab} \in U_q^+(sl_{n+1})$. Entonces las siguientes ecuaciones se satisfacen en $U_q^+(sl_{n+1})$,

(10.1)

$$[e_{ij}, e_{ab}] = \begin{cases} e_{ij}e_{ab} - qe_{ab}e_{ij}, & \text{si } i = a \text{ o } j = b \\ e_{ij}e_{ab} - e_{ab}e_{ij} - \langle e_{ij}, e_{ab} \rangle & \text{si } i \neq a, j \neq b \text{ y } j \neq a, \\ e_{ij}e_{ab} - q^{-1}e_{ab}e_{ij}, & \text{si } j = a. \end{cases}$$

DEM. Por inducción sobre n . Para los casos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ las ecuaciones 10.1 pueden ser verificadas por cálculos directos. Así que podemos suponer $n > 5$. Consideremos la figura 16(a). Tal diagrama puede ser pensado como formado por dos triángulos traslapados. El primero, un triángulo T_1 con vértices $e_{12}, e_{1n}, e_{(n-1)n}$ y el segundo, un triángulo T_2 con vértices $e_{23}, e_{2(n+1)}, e_{n(n+1)}$.

Los elementos en T_i generan una k -subálgebra isomorfa a $U_q^+(sl_n)$, $i = 1, 2$. Entonces, si e_{ij} y e_{ab} están ambos en T_1 ó T_2 , las ecuaciones (10.1) se cumplen. En consecuencia, podemos suponer $i = 1$ y $b = n+1$, y poner $j \neq n+1$ y $a \neq 1$.

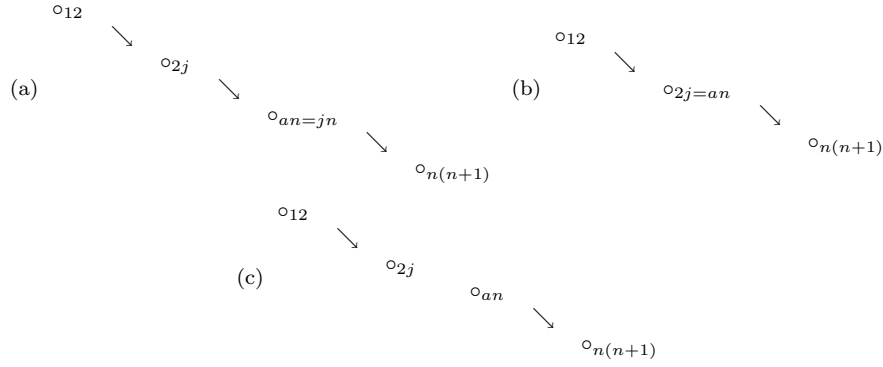


FIGURA 17. (a) Primer caso (b) segundo caso (c) tercer caso.

En la figura 16(a) juntamos el nodo rs con el nodo uv si $[e_{rs}, e_{uv}]_q \neq 0$. Tenemos varios casos dados en la figura 17, (en el primer y tercer caso, puesto que e_{12}, e_{2j}, e_{nn} están en T_1 y la hipótesis de inducción, no hay flecha entre 12 y an . Mientras que no hay flecha entre $2j$ y $n(n+1)$ porque $e_{2j}, e_{an}, e_{n(n+1)}$ están en T_2).

En el primer caso obtenemos una gráfica del tipo A_4 . Entonces $e_{1j} = [e_{12}, e_{2j}]_q, e_{a(n+1)} = [e_{an}, e_{n(n+1)}]_q$ están en una subálgebra isomorfa a $U_q^+(sl_5)$. Se sigue que,

$$[e_{1j}, e_{j(n+1)}]_q = e_{1j}e_{j(n+1)} - q^{-1}e_{j(n+1)}e_{1j}$$

En el segundo caso obtenemos una gráfica del tipo A_3 entonces $e_{1j} = [e_{12}, e_{2n}]_q, e_{2(n+1)} = [e_{2n}, e_{n(n+1)}]_q$ están en una subálgebra isomorfa a $U_q^+(sl_4)$, además

$$[e_{1j}, e_{a(n+1)}]_q = e_{1n}e_{2(n+1)} - e_{2(n+1)}e_{1n} - (q - q^{-1})e_{1(n+1)}e_{2n}$$

En el tercer caso podemos insertar el nodo ja para obtener

$$o_{12} \rightarrow o_{2j} \rightarrow o_{ja} \rightarrow o_{an} \rightarrow o_{n(n+1)}$$

que es una gráfica del tipo A_5 , entonces $e_{1j} = [e_{12}, e_{2j}] = e_{1(n+1)}$, obtenemos

$$e_{1j}e_{a(n+1)} = qe_{a(n+1)}e_{1j}.$$

□

TEOREMA 10.4. Existe un isomorfismo

$$U_q^+(sl_{n+1}) \simeq U(sl_{n+1}^+)_q$$

de k -álgebras.

DEM. Pongamos $c_{ab,cd} = c_{uv}$ donde $x_u = e_{ab}$, $x_v = e_{cd}$, y $x_u < x_v$, $1 \leq a, b, c, d \leq n+1$. De que

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$$

que sigue que, si $e_{ab} < e_{cd}$,

$$c_{ab,cd} = \begin{cases} 1, & \text{si } a = c \text{ o } b = d, \\ 0, & \text{si } a \neq c \text{ y } b \neq d, \\ -1, & \text{si } b = c, \end{cases}$$

Ahora usemos el lema 10.3 para obtener las siguientes ecuaciones en $U_q^+(\mathfrak{sl}_{n+1})$,

$$e_{ab}e_{cd} - q^{c_{ab,cd}}e_{cd}e_{ab} = [e_{ab}, e_{cd}]_q + \langle e_{ab}, e_{cd} \rangle,$$

para cualesquiera $1 \leq a, b, c, d \leq n+1$.

Concluimos que $U_q^+(\mathfrak{sl}_{n+1}) \simeq U(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q$. \square

COROLARIO 10.1.

- (1) *Los monomios formados por sucesiones finitas de elementos en*

$$\mathcal{B} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq m\}$$

constituyen una base libre del k -módulo $U_q^+(\mathfrak{sl}_{n+1})$, donde $m = n(n+1)/2$.

- (2) *Tenemos que*

$$(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q|_{t=0} = \mathfrak{sl}_{n+1}^+$$

y así $(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q$ es una deformación de \mathfrak{sl}_{n+1}^+ en la categoría de las T -álgebras de Lie.

CAPÍTULO 3

Relaciones con los grupos cuánticos trenzados

Una estructura de álgebra de Hopf para la parte positiva (negativa) del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n es establecida sin hacer uso de la deformación usual de la parte abeliana de sl_{n+1} . Además, un morfismo trenzado adjunto es construido. Como una consecuencia se obtiene una identidad de Jacobi generalizada en tal parte positiva.

1. Antecedentes

El objetivo de éste capítulo es explicar la estructura de biálgebra de la parte positiva del álgebra envolvente universal cuantizada (grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo) de tipo A_n , usando conceptos de la teoría de álgebras de Lie.

Naturalmente el siguiente paso en el estudio de $(sl_{n+1}^+)_q$ como una T -álgebra de Lie básica es dotar a su álgebra envolvente universal de una estructura de álgebra de Hopf.

Ahora una estructura de álgebra de Hopf generalizada (grupo cuántico trenzado) para el álgebra envolvente universal $U_q^+(sl_{n+1})$ de $(sl_{n+1}^+)_q$ se presenta. De hecho, $U_q^+(sl_{n+1})$ como álgebra tiene su estructura usual: generadores E_1, \dots, E_n y relaciones

$$(1.1) \quad E_i E_j - E_j E_i = 0, \text{ si } |i - j| > 1$$

$$(1.2) \quad E_i E_j^2 - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j^2 E_i = 0, \text{ if } |i - j| = 1$$

pero ahora el producto tensorial $U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1})$ tiene una estructura de álgebra no estándar: la multiplicación está dada por

$$(1.3) \quad (a \otimes b)(c \otimes d) = a\sigma(b \otimes c)d$$

donde $\sigma : U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1})$ no es el switch usual. Esto es así porque $U_q^+(sl_{n+1})$ tiene un coproducto dado por

$$\phi(E_i) = E_i \otimes 1 + 1 \otimes E_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Obtenemos una deformación no trivial de la clásica álgebra envolvente universal $U(sl_{n+1}^+)$ sin hacer uso alguno de los usuales

$K_1^{\pm 1}, \dots, K_n^{\pm 1}$ (los cuales forman una deformación de la parte abeliana de sl_{n+1}).

Como consecuencia $U_q^+(sl_{n+1})$ es, también, un ejemplo de una *álgebra de Hopf en una categoría trenzada* [27, p. 596]. Sin embargo las “simetrías” de $(sl_{n+1}^+)_q$ no son las mismas que las “simetrías” de $U_q^+(sl_{n+1})$.

Aunque muchos de los resultados que aparecen en este capítulo pueden ser encontrados en la literatura clásica sobre grupos cuánticos (por ejemplo, la multiplicación (1.3) aparece en [44]), aquí $U_q^+(sl_{n+1})$ se reconoce como una genuina álgebra de Hopf generalizada, así como un álgebra envolvente universal generalizada.

En el capítulo 2 mostramos que $(sl_{n+1}^+)_q$ satisface casi todos los requerimientos de un álgebra de Lie cuántica según Lyubashenko-Sudbery [45]. Falla el punto 7 solamente. Por qué falla tal se explica en la sección 5.

2. Trenzas y coproducto

Consideremos al álgebra $(sl_{n+1}^+)_q$. Sabemos que $(sl_{n+1}^+)_q$ satisface axiomas de álgebra de Lie generalizados (ver capítulo 2). Por otro lado, puesto que $[e_{ij}, e_{ab}] = \delta_{ja}e_{ib} - \delta_{bi}e_{aj}$ donde δ es la delta de Kronecker, obtenemos

$$(2.1) \quad c_{ij,ab} = -\delta_{b,i} + \delta_{b,j} + \delta_{i,a} - \delta_{j,a}, \quad \forall e_{ij}, e_{ab} \in \mathcal{B}.$$

Definamos una nueva “simetría” σ . Sea $\sigma : (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q$ tal que

$$\sigma(e_{ij} \otimes e_{ab}) = q^{c_{ij,ab}} e_{ab} \otimes e_{ij}, \quad \forall e_{ij}, e_{ab} \in \mathcal{B}.$$

Notemos que, aunque la llamada presimetría S está relacionada con σ , no son iguales, pues $S^2 = Id$ y $\sigma^2 \neq Id$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $[,]_q$ el corchete de $(sl_{n+1}^+)_q$. El morfismo lineal σ satisface las condiciones de multiplicatividad:*

$$(2.2) \quad \sigma(Id \otimes [,]_q) = ([,]_q \otimes Id) \sigma_2 \sigma_1,$$

$$(2.3) \quad \sigma([,]_q \otimes Id) = (Id \otimes [,]_q) \sigma_1 \sigma_2$$

DEM. La identidad de Jacobi en sl_{n+1}^+ asegura que

$$[[e_{ij}, e_{ji}], [e_{ab}, e_{uv}]] = (c_{ij,ab} + c_{ij,uv}) [e_{ab}, e_{uv}]$$

lo que implica

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma(e_{ij} \otimes [e_{ab}, e_{uv}]_q) &= q^{c_{ij,ab} + c_{ij,uv}} [e_{ab}, e_{uv}]_q \otimes e_{ij} \\ &= ([,]_q \otimes Id) \sigma_2 \sigma_1 (e_{ij} \otimes e_{ab} \otimes e_{uv}). \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos

$$\sigma([e_{ij}, e_{ab}]_q \otimes e_{uv}) = (Id \otimes [,]_q) \sigma_2 \sigma_1(e_{ij} \otimes e_{ab} \otimes e_{uv})$$

□

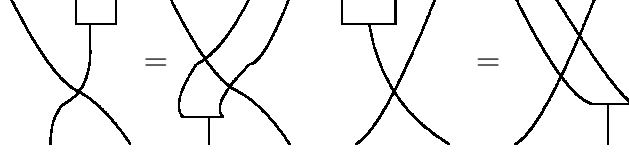


FIGURA 1. Forma diagramática de la proposición 2.1.

Ahora podemos extender σ a $U_q^+(sl_{n+1})$; para lo cual consideremos \mathcal{T} como la k -álgebra tensorial de $(sl_{n+1}^+)_q$. Definimos $\tilde{\sigma} : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} \otimes_k \mathcal{T}$ por

$$\tilde{\sigma}(z_1 \dots z_n \otimes y_1 \dots y_m) = \prod_{i,j} p_{z_i, y_j} y_1 \dots y_m \otimes z_1 \dots z_m, \quad \forall z_i, y_j \in \mathcal{B},$$

donde $\sigma(z_i \otimes y_j) = p_{z_i, y_j} y_j \otimes z_i$, $p_{z_i, y_j} \in k$.

En particular, los objetos formados por productos tensoriales finitos de los espacios unidimensional $\langle x \rangle$, $x \in \mathcal{B}$ forman una *categoría tensorial trenzada* con trenza $\tilde{\sigma}$, (ver [39]) y la proposición 2.1 dice que el corchete $[\cdot, \cdot]_q$ es compatible con la trenza $\tilde{\sigma}$.

LEMA 2.1. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el pseudocorchete de $(sl_{n+1}^+)_q$ y m el producto del álgebra tensorial \mathcal{T} . El morfismo lineal $\tilde{\sigma}$ satisface las condiciones de multiplicatividad

$$(2.5) \quad \tilde{\sigma}(Id \otimes m\langle \cdot, \cdot \rangle) = (m\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes Id) \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1,$$

$$(2.6) \quad \tilde{\sigma}(m\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes Id) = (Id \otimes m\langle \cdot, \cdot \rangle) \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2.$$

DEM. Sean $e_{ab}, e_{uv}, e_{\alpha\beta}$ elementos de \mathcal{B} . Tenemos que probar que

$$(2.7) \quad \tilde{\sigma}(e_{ab} \otimes m\langle e_{uv}, e_{\alpha\beta} \rangle) = (m\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes 1) \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1(e_{ab} \otimes e_{uv} \otimes e_{\alpha\beta}),$$

$$(2.8) \quad \tilde{\sigma}(m\langle e_{ab}, e_{uv} \rangle \otimes e_{\alpha\beta}) = (1 \otimes m\langle \cdot, \cdot \rangle) \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2(e_{ab} \otimes e_{uv} \otimes e_{\alpha\beta}).$$

El lado izquierdo de (2.7) es, si $\langle e_{uv}, e_{\alpha\beta} \rangle \neq 0$,

$$q^{c_{ab, \alpha v} + c_{ab, u\beta}} (q - q^{-1}) e_{\alpha v} e_{u\beta} \otimes e_{ab}$$

mientras que el lado derecho es

$$q^{c_{ab, uv} + c_{ab, \alpha\beta}} m\langle e_{uv} \otimes e_{\alpha\beta} \rangle \otimes e_{ab}$$

De (2.1) obtenemos $c_{ab, \alpha v} + c_{ab, u\beta} = c_{ab, uv} + c_{ab, \alpha\beta}$. Concluimos que (2.7) se cumple. Y por cálculos similares (2.8) se cumple también. □

PROPOSICIÓN 2.2. *El morfismo lineal $\tilde{\sigma}$ puede ser extendido a un morfismo lineal*

$$\sigma : U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1})$$

donde $U_q^+(sl_{n+1})$ es el álgebra envolvente universal de $(sl_{n+1}^+)_q$, tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1}) & \xrightarrow{\sigma} & U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q & \xrightarrow{\sigma} & (sl_{n+1}^+)_q \otimes_k (sl_{n+1}^+)_q \end{array}$$

además las condiciones de multiplicatividad,

$$(2.9) \quad \sigma(Id \otimes m) = (m \otimes Id)(Id \otimes \sigma)(\sigma \otimes Id)$$

$$(2.10) \quad \sigma(m \otimes Id) = (Id \otimes m)(\sigma \otimes Id)(Id \otimes \sigma)$$

se cumplen, donde m denota la multiplicación sobre $U_q^+(sl_{n+1})$.

Los diagramas correspondientes a la multiplicación asociativa m y a σ aparecen en la las figuras 2 y 3 respectivamente. Luego las ecua-



FIGURA 2. La multiplicación m .



FIGURA 3. El diagrama de σ .

ciones (2.9) y (2.10) se dibujan como en la figura 4. Ahora podemos aplicar algunas observaciones de Durdevich [24]. Supongamos que estamos en las condiciones de la proposición 2.2. El producto tensorial

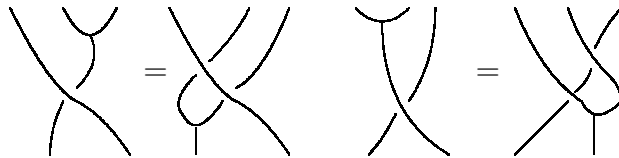


FIGURA 4. Multiplicatividad

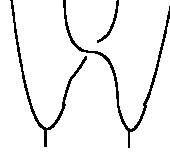


FIGURA 5. El producto de tensores.

$U(L) \otimes U(L)$ es de manera natural un $U(L)$ -bimódulo y podemos definir una multiplicación sobre $U(L) \otimes U(L)$ mediante

$$(2.11) \quad (a \otimes b)(c \otimes d) = a\sigma(b \otimes c)d.$$

La que en forma diagramática se ve según la figura 5.

COROLARIO 2.3. *El módulo $U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1})$ con multiplicación definida por la ecuación (2.11) es un álgebra asociativa.*

DEM. Las condiciones de multiplicatividad (2.9), (2.10) implican la asociatividad de (2.11), [24] \square

De manera análoga al caso clásico definamos $\phi : (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1})$ por

$$(2.12) \quad \phi(e_{i(i+1)}) = e_{i(i+1)} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i(i+1)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

TEOREMA 2.2. El morfismo definido por (2.12) puede ser extendido a un morfismo de k -álgebras

$$\phi : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1})$$

DEM. La k -álgebra $U_q^+(sl_{n+1})$ es generada por E_i , $i = 1, \dots, n$ módulo las relaciones

$$(2.13) \quad E_i^2 E_j - (q + q^{-1})E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \quad \text{si } |i - j| = 1,$$

$$(2.14) \quad E_i E_j - E_j E_i = 0, \quad \text{si } |i - j| > 1.$$

Tenemos que probar que ϕ preserva estas relaciones. Que (2.14) es preservada es inmediato. Para demostrar que (2.13) se preserva, pongamos $\sigma(E_i \otimes E_j) = q^{c_{ij}} E_j \otimes E_i$, $1 \leq i, j, \leq n$ recordando que $E_i = e_{i(i+1)}$, $i = 1, \dots, n$.

$$\phi(E_i)^2 \phi(E_j) =$$

$$\begin{aligned} & E_i^2 E_j \otimes 1 + E_i^2 \otimes E_j + q^{c_{ij}} E_i E_j \otimes E_i + E_i \otimes E_i E_j \\ & + q^{2+c_{ij}} E_i E_j \otimes E_i + q^2 E_i \otimes E_i E_j + q^{2c_{ij}} E_j \otimes E_i^2 + 1 \otimes E_i^2 E_j \end{aligned}$$

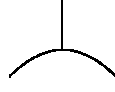


FIGURA 6. Coproducto.

mientras

$$\begin{aligned} \phi(E_j)\phi(E_i)^2 = \\ E_j E_i^2 \otimes 1 + E_j E_i \otimes E_i + q^2 E_j E_i \otimes E_i + E_j \otimes E_i^2 + q^{2c_{ji}} E_i^2 \otimes E_j + q^{2+c_{ji}} E_i \otimes E_j E_i \\ + q^{c_{ji}} E_i \otimes E_j E_i + 1 \otimes E_j E_i^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (2.15) \quad \phi(E_i)\phi(E_j)\phi(E_i) = \\ E_i E_j E_i \otimes 1 + E_i E_j \otimes E_i + q^{c_{ij}} E_i^2 \otimes E_j + E_i \otimes E_j E_i \\ + q^{c_{ij}+2} E_j E_i \otimes E_i + q^{c_{ij}} E_j \otimes E_i^2 \\ + q^{c_{ij}+2} E_i \otimes E_i E_j + 1 \otimes E_i E_j E_i \end{aligned}$$

Se sigue que, si $|i - j| = 1$,

$$\begin{aligned} (2.16) \quad \phi(E_i)^2\phi(E_j) + \phi(E_j)\phi(E_i)^2 = \\ q^{-1}(q + q^{-1})(E_i^2 \otimes E_j) + (q^{-1} + q)E_i \otimes E_i E_j + (q + q^{-1})E_j \otimes E_i^2 \\ + (q + q^{-1})E_i E_j E_i \otimes 1 + 1 \otimes (q + q^{-1})E_i E_j E_i \\ = (q + q^{-1})\phi(E_i)\phi(E_j)\phi(E_i). \end{aligned}$$

□

La notación diagramática para el coproducto aparece en la figura 6. Y entonces el teorema 2.2 asegura la ecuación diagramática de la figura 7.

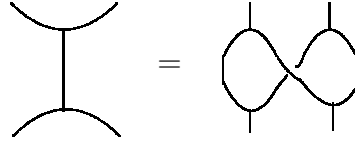


FIGURA 7. Versión diagramática del teorema 2.2.

Definiremos, ahora, la counidad. Lo cual puede ser hecho siguiendo el caso clásico.



FIGURA 8. Counidad.

El anillo conmutativo k es una T -álgebra de Lie básica de manera obvia y el morfismo cero $0 : (sl_{n+1}^+)_q \rightarrow k$ es un morfismo de T -álgebras de Lie básicas, entonces $\epsilon = U(0) : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U(k) \simeq k$ es un morfismo de k -álgebras asociativas.

PROPOSICIÓN 2.4. Sea $\mathcal{C} = \{E_1, \dots, E_n\}$ y m un entero $m \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(E_{i_1}) \dots \phi(E_{i_m}) &= E_{i_1} \dots E_{i_m} \otimes 1 + \sum_j u_j \otimes v_j \\ &= 1 \otimes E_{i_1} \dots E_{i_m} + \sum_l a_l \otimes b_l \end{aligned}$$

donde cada u_j, v_j, a_l, b_l es un producto no vacío de elementos en \mathcal{C} . Se sigue que

$$(1 \otimes \epsilon)\phi(E_{i_1}) \dots \phi(E_{i_m}) = E_{i_1} \dots E_{i_m} = (\epsilon \otimes 1)\phi(E_{i_1}) \dots \phi(E_{i_m}).$$

Puesto que \mathcal{C} es un conjunto de generadores de $U_q^+(sl_{n+1})$ obtenemos que ϵ es la counidad de ϕ .

El diagrama para la counidad está en la figura 8. Entonces, la proposición 2.4 se puede expresar como en la figura 9.

3. Antípoda

Un concepto fundamental en la teoría de álgebras de Lie cuánticas de Delius-Gould [18] es q -conjugación. En este trabajo estamos usando una versión modificada de q -conjugación.

DEFINICIÓN 3.1. El automorfismo de $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$, como \mathbb{Q} -álgebra, dado por $q \mapsto q^{-1}$ se llama q -conjugación.

Fijemos el anillo k como $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ y sea L igual a $(sl_{n+1}^+)_q$ como una T -álgebra de Lie.

DEFINICIÓN 3.2.



FIGURA 9. La proposición 2.4.

- (1) La T -álgebra de Lie opuesta L^{op} es el $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -módulo que coincide con L como conjunto, tiene estructura modular inducida por cambio de escalares a través de la q -conjugación y tiene estructura de T -álgebra de Lie dada por

$$[,]^{op} = -[,]_q, S^{op} = S^{-1} = S, \langle, \rangle^{op} = -\langle, \rangle.$$

- (2) Sea m el producto de $U(L)$. El álgebra opuesta $U(L)^{op}$ es la $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -álgebra que coincide con $U(L)$ como conjunto, tiene $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -estructura modular inducida por cambio de escalares a través de q -conjugación:

$$_ \cdot _ : \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \otimes U(L)^{op} \rightarrow U(L)^{op}$$

y tiene producto dado por

$$m^{op} = m\sigma = _ * _ : U(L)^{op} \otimes U(L)^{op} \rightarrow U(L)^{op}$$

- (3) Denotamos con $U(L)^c$ a la $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -álgebra obtenida de $U(L)$ por cambio de escalares a través de q -conjugación:

$$_ \cdot _ : \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \otimes U(L)^c \rightarrow U(L)^c.$$

PROPOSICIÓN 3.1. *Existe un $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -álgebra isomorfismo*

$$\gamma : U(L) \rightarrow U(L)^c$$

tal que $q \mapsto q^{-1}$, $E_i \mapsto E_i$, $i = 1, \dots, n$.

DEM. Las relaciones

$$(3.1) \quad \gamma(E_i)^2 \gamma(E_j) - (q + q^{-1}) \cdot \gamma(E_i) \gamma(E_j) \gamma(E_i) + \gamma(E_j) \gamma(E_i)^2 = 0, \text{ si } c_{ij} = -1$$

y

$$\gamma(E_i) \gamma(E_j) - \gamma(E_j) \gamma(E_i) = 0, \text{ si } c_{ij} = 0$$

son las relaciones (1.2) y (1.1) respectivamente. \square

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea L igual a $(sl_{n+1}^+)_q$.*

- (1) L^{op} es una T -álgebra de Lie básica.
- (2) La k -álgebra $U(L)^{op}$ es asociativa.
- (3) La función $\lambda : L \rightarrow L^{op}$, $x \mapsto -x$ es un morfismo de T -Lie álgebras.
- (4) Existe un isomorfismo

$$U(L^{op}) \simeq U(L)^{op}$$

de k -álgebras.

DEM.

- (1) Se sigue directamente de la definición.

- (2) La ecuación de trenza para σ junto con las condiciones de multiplicatividad (2.9) y (2.10) aseguran la asociatividad de m^{op} .
- (3) Los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L & \xrightarrow{[\cdot]_q} & L \\ \lambda \otimes \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ L^{op} \otimes L^{op} & \xrightarrow{[\cdot]_q^{op}} & L^{op} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L & \xrightarrow{S} & L \otimes L \\ \lambda \otimes \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \otimes \lambda \\ L^{op} \otimes L^{op} & \xrightarrow{S^{op}} & L^{op} \otimes L^{op} \end{array}$$

También, aunque no lo parezca, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} L \otimes L & \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} & L \otimes L \\ \lambda \otimes \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \otimes \lambda \\ L^{op} \otimes L^{op} & \xrightarrow{\langle \cdot \rangle^{op}} & L^{op} \otimes L^{op} \end{array}$$

El detalle es que $\kappa \otimes \kappa \neq Id$ puesto que κ cambia los escalares por q -conjugación. Esto es, si $\langle e_{ij}, e_{ab} \rangle \neq 0$ con $e_{ij} < e_{ab}$ entonces

$$\begin{aligned} (\lambda \otimes \lambda) \langle e_{ij}, e_{ab} \rangle &= (q^{-1} - q) e_{aj} \otimes e_{ib} \\ &= -\langle e_{ij}, e_{ab} \rangle \\ &= \langle e_{ij}, e_{ab} \rangle^{op}. \end{aligned}$$

- (4) Pongamos $\sigma(x \otimes y) = p_{xy} y \otimes x$, y $S(x \otimes y) = q_{xy} y \otimes x$ para cualesquiera x, y elementos en la base canónica \mathcal{B} de L y donde $p_{xy}, q_{xy} \in \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$. Si $x, y \in \mathcal{B}$, las relaciones que definen a $U(L)$ pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} & - (xy - p_{xy}yx - [x, y] - \langle x, y \rangle) \\ & = p_{xy}yx - p_{xy}^{-1}p_{xy}xy + [x, y] + \langle x, y \rangle \\ (3.2) \quad & = x * y - p_{xy} \cdot y * x - [x, y]^{op} - \langle x, y \rangle^{op}, \quad x < y. \end{aligned}$$

Esto significa: $U(L)^{op}$ es el álgebra definida por las relaciones (3.2), que son las relaciones que definen a $U(L^{op})$. \square

PROPOSICIÓN 3.3. *Existe un morfismo*

$$\lambda : U(L) \rightarrow U(L)^{op}$$

de k -álgebras tal que $\lambda(x) = -x, \forall x \in L$.

Ahora, consideremos el plano cuántico $\mathbb{A}_q^{2|0}$ definido como el anillo

$$\mathbb{A}_q^{2|0} = k\langle x, y \rangle / \langle yx - qxy \rangle$$

donde $k\langle x, y \rangle$ significa un álgebra asociativa libremente generada por x, y con coeficientes en el anillo conmutativo k y $q \in k^*$.

Para enteros $0 \leq i \leq n$, definimos los escalares

$$\binom{n}{i}_q$$

por la ecuación en $\mathbb{A}_q^{2|0}$,

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_q x^{n-i} y^i.$$

LEMA 3.1.

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_{q^2} (-1)^i q^{i(i-1)} = 0$$

DEM. Usando [37, p. 6], ecuación (3) y advertencia 0.4: tenemos que

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n x + (x + y)^n y \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(q^i \binom{n}{i}_q + \binom{n}{i-1}_q \right) x^{n+1-i} y^i + y^{n+1}, \end{aligned}$$

luego, por definición,

$$\binom{n+1}{i}_q = q^i \binom{n}{i}_q + \binom{n}{i-1}_q, \quad 1 \leq i \leq n.$$

En particular

$$\binom{n+1}{i}_{q^2} = q^{2i} \binom{n}{i}_{q^2} + \binom{n}{i-1}_{q^2}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Multiplicando por $q^{-i(n+1-i)}$,

$$\begin{aligned} q^{-i(n+1-i)} \binom{n+1}{i}_{q^2} &= \\ & q^i q^{-i(n-i)} \binom{n}{i}_{q^2} + q^{-n+i-1} q^{-(i-1)(n-i+1)} \binom{n}{i-1}_{q^2}. \end{aligned}$$

Usando la notación de [37, p. 5], la ecuación anterior significa que $q^{-i(n-i)} \binom{n}{i}_{q^2}$ satisface la misma ecuación de recurrencia que $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ con $v = q$ (la ecuación (2) de [37, p. 6]):

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ i \end{bmatrix} = q^i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} + q^{-n+i-1} \begin{bmatrix} n \\ i-1 \end{bmatrix}.$$

Como además $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ y $q^{-i(n-i)} \binom{n}{i}_{q^2}$ coinciden en la frontera del triángulo de Pascal, esto es

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1 = q^{-n(n-n)} \binom{n}{n}_{q^2} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = q^{-0(n-0)} \binom{n}{0}_{q^2},$$

se sigue que

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = q^{-i(n-i)} \binom{n}{i}_{q^2}.$$

Luego la ecuación (3) de [37, p. 6] (recordar que $v = q$), nos da

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i q^{i(n-1)} q^{-i(n-i)} \binom{n}{i}_{q^2} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i q^{i(i-1)} \binom{n}{i}_{q^2}. \end{aligned}$$

□

LEMA 3.2. Si $\iota : U(L)^{op} \rightarrow U(L)^c$ es la inclusión $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -lineal natural y $\kappa = \gamma^{-1} \circ \iota \circ \lambda : U(L) \rightarrow U(L)$ entonces

(1)

$$\phi(E_j)^\ell = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i}_{q^2} E_j^{\ell-i} \otimes E_j^i, \quad 1 \leq j \leq n$$

(2)

$$\begin{aligned} (E_{j_1}^{n_1-i_1} \otimes E_{j_1}^{i_1})(E_{j_2}^{n_2-i_2} \otimes E_{j_2}^{i_2}) \dots (E_{j_u}^{n_u-i_u} \otimes E_{j_u}^{i_u}) = \\ q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a i_b} E_{j_1}^{n_1-i_1} E_{j_2}^{n_2-i_2} \dots E_{j_u}^{n_u-i_u} \otimes E_{j_1}^{i_1} E_{j_2}^{i_2} \dots E_{j_u}^{i_u} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (1 \otimes \kappa)(E_{j_1}^{n_1-i_1} E_{j_2}^{n_2-i_2} \dots E_{j_u}^{n_u-i_u} \otimes E_{j_1}^{i_1} E_{j_2}^{i_2} \dots E_{j_u}^{i_u}) = \\ q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a i_b} E_{j_1}^{n_1-i_1} E_{j_2}^{n_2-i_2} \dots E_{j_u}^{n_u-i_u} \otimes \lambda(E_{j_u}^{i_u}) \dots \lambda(E_{j_1}^{i_1}) \end{aligned}$$

(4) Para $j = 1, \dots, n$,

$$\lambda(E_j^i) = (-1)^i q^{i(i-1)} E_j^i.$$

(5) Denotemos con m al producto de $U_q^+(sl_{n+1})$. Entonces

$$m(1 \otimes \kappa)\phi(E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u}) = 0, \quad 1 \leq j_1, \dots, j_u \leq n.$$

si n_1, \dots, n_u son todos enteros positivos.

DEM. Por cálculos directos. Por ejemplo, defínase

$$c = \sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a (n_{j_a} - i_b)$$

entonces

$$\begin{aligned} m(1 \otimes \kappa)\phi(E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u}) &= m(1 \otimes \lambda)\phi(E_{j_1}^{n_1}) \dots \phi(E_{j_u}^{n_u}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_u=0}^{n_1, \dots, n_u} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_u}{i_u}_{q^2} q^c m(E_{j_1}^{n_1-i_1} \dots E_{j_u}^{n_u-i_u} \otimes \lambda(E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u})) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_u=0}^{n_1, \dots, n_u} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_u}{i_u}_{q^2} q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a n_{j_b}} E_{j_1}^{n_1-i_1} \dots E_{j_u}^{n_u-i_u} \\ & \quad \lambda(E_{j_u}^{n_u}) \dots \lambda(E_{j_1}^{n_1}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{u-1}=0}^{n_1, \dots, n_{u-1}} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_{u-1}}{i_{u-1}}_{q^2} q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a n_{j_b}} E_{j_1}^{n_1-i_1} \dots E_{j_{u-1}}^{n_{u-1}-i_{u-1}} \\ & \quad \sum_{i_u=0}^{n_u} \binom{n_u}{i_u}_{q^2} (-1)^{i_u} q^{i_u(i_u-1)} E_{j_u}^{n_u} \lambda(E_{j_{u-1}}^{n_{u-1}}) \dots \lambda(E_{j_1}^{n_1}) = 0 \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.4. Sea $\iota : U(L)^{op} \rightarrow U(L)^c$ la inclusión $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -lineal natural. Entonces, el $\mathbb{Q}[q, q^{-1}]$ -morfismo lineal

$$\kappa = \gamma^{-1} \circ \iota \circ \lambda : U(L) \rightarrow U(L)$$

es la antípoda para el coproducto ϕ .

Los diagramas del morfismo unidad $u : \mathbb{Q}[q, q^{-1}] \rightarrow U(L)$, $1 \mapsto 1$ y de la antípoda aparecen, respectivamente en la figura 10.



FIGURA 10. La counidad y la antípoda.

La propiedad 3.4 se puede escribir según la figura 11.

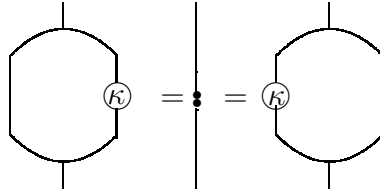


FIGURA 11. La propiedad 3.4.

De la demostración de tal propiedad se obtiene también que κ es un σ -antimorfismo. Ver figura 12.

4. La condición adicional del grupo cuántico trenzado

La siguiente ecuación (4.3) es una de las condiciones de la definición de grupo cuántico trenzado [25]. Tal condición es importante porque, por ejemplo, permite escribir el operador de trenza en términos del producto, coproducto y la antípoda (ver [25]). Hacemos la aclaración de que bajo ciertas condiciones, un grupo cuántico trenzado se convierte en una álgebra de Hopf trenzada. Una de éstas es que la comultiplicación sea un morfismo de álgebras. Este será el caso para nuestra $U_q^+(sl_{n+1})$.

LEMA 4.1. En general, sea k un anillo conmutativo, M un k -módulo, $\sigma : M \otimes_k M \rightarrow M \otimes_k M$ un k -morfismo lineal invertible. Además $\phi : M \rightarrow M \otimes_k M$ también morfismo k -lineal.

Si

$$(4.1) \quad (\sigma \otimes Id)(Id \otimes \sigma)(\phi \otimes Id) = (Id \otimes \phi)\sigma;$$

$$(4.2) \quad (Id \otimes \sigma)(\sigma \otimes Id)(Id \otimes \phi) = (\phi \otimes Id)\sigma.$$

entonces

$$(4.3) \quad (\sigma \otimes Id \otimes Id)(Id \otimes \phi \otimes Id)(\sigma^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \phi) = (Id \otimes Id \otimes \sigma)(Id \otimes \phi \otimes Id)(Id \otimes \sigma^{-1})(\phi \otimes Id)$$

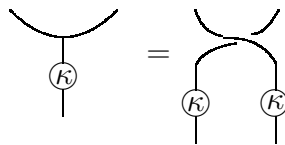


FIGURA 12. La antípoda κ es un σ -antimorfismo.

DEM.

$$\begin{aligned}
& (\sigma \otimes Id \otimes Id)(Id \otimes \phi \otimes Id)(\sigma^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \phi) \\
&= ((\sigma \otimes Id)(Id \otimes \phi) \otimes Id)(\sigma^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \phi) \\
&= ((Id \otimes \sigma^{-1})(\phi \otimes Id) \sigma \otimes Id)(\sigma^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \phi) \\
&= (Id \otimes \sigma^{-1} \otimes Id)(\phi \otimes \phi),
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
& (Id \otimes Id \otimes \sigma)(Id \otimes \phi \otimes Id)(Id \otimes \sigma^{-1})(\phi \otimes Id) \\
&= (Id \otimes (Id \otimes \sigma)(\phi \otimes Id))(Id \otimes \sigma^{-1})(\phi \otimes Id) \\
&= (Id \otimes (\sigma^{-1} \otimes Id)(Id \otimes \phi) \sigma)(Id \otimes \sigma^{-1})(\phi \otimes Id) \\
&= (Id \otimes \sigma^{-1} \otimes Id)(\phi \otimes \phi).
\end{aligned}$$

Concluimos que (4.3) se cumple. \square

PROPOSICIÓN 4.1. Sean $\sigma : U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1})$, $\phi : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes U_q^+(sl_{n+1})$ los morfismos definidos en las secciones anteriores.

Se cumplen las siguientes ecuaciones,

$$(4.4) \quad (\sigma \otimes Id)(Id \otimes \sigma)(\phi \otimes Id) = (Id \otimes \phi)\sigma$$

$$(4.5) \quad (Id \otimes \sigma)(\sigma \otimes Id)(Id \otimes \phi) = (\phi \otimes Id)\sigma.$$

DEM. Supongamos que E_{j_1}, \dots, E_{j_u} y E_{k_1}, \dots, E_{k_v} son elementos de $\{E_1, \dots, E_n\}$. Pongamos $E_J = E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u}$, $E_K = E_{k_1}^{m_1} \dots E_{k_v}^{m_v}$. Entonces

$$(4.6) \quad (\phi \otimes Id)(E_J \otimes E_K) = \sum_{i_1=0, \dots, i_u=0} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_u}{i_u}_{q^2} q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a (n_{j_b} - i_b)} E_{j_1}^{n_1 - i_1} \dots E_{j_u}^{n_u - i_u} \otimes E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u} \otimes E_{k_1}^{m_1} \dots E_{k_v}^{m_v}$$

se sigue,

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \sigma)(\phi \otimes Id)(E_J \otimes E_K) &= \sum_{i_1=0, \dots, i_u=0} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_u}{i_u}_{q^2} \\
& q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a (n_{j_b} - i_b)} q^{\sum_{a, b} c_{j_a k_b} i_a m_b} E_{j_1}^{n_1 - i_1} \dots E_{j_u}^{n_u - i_u} \otimes E_{k_1}^{m_1} \dots E_{k_v}^{m_v} \\
& \otimes E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& (\sigma \otimes Id)(Id \otimes \sigma)(\phi \otimes Id)(E_J \otimes E_K) = \\
& \sum_{i_1=0, \dots, i_u=0} \binom{n_1}{i_1}_{q^2} \dots \binom{n_u}{i_u}_{q^2} q^{\sum_{a < b} c_{j_a j_b} i_a (n_{j_b} - i_b)} \\
& \quad q^{\sum_{a,b} (c_{j_a k_b} i_a m_b + c_{j_a k_b} (n_a - i_a) m_b)} E_{k_1}^{m_1} \dots E_{k_v}^{m_v} \otimes E_{j_1}^{n_1} \dots E_{j_u}^{n_u} \\
& \quad \otimes E_{j_1}^{n_1 - i_1} \dots E_{j_u}^{n_u - i_u} \\
& = q^{\sum_{a,b} c_{j_a k_b} n_a m_b} E_{k_1}^{m_1} \dots E_{k_v}^{m_v} \otimes \phi(E_{j_1}^{n_1}) \dots \phi(E_{j_u}^{n_u}) \\
& = (1 \otimes \phi)\sigma(E_J \otimes E_K)
\end{aligned}$$

Por cálculos similares (4.5) se cumple también. \square

Denotemos con $U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_{\sigma} U_q^+(sl_{n+1})$ al álgebra asociativa que es el k -módulo $U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_k U_q^+(sl_{n+1})$ con producto dado por la ecuación (2.11).

TEOREMA 4.2. El álgebra $U_q^+(sl_{n+1})$ es un grupo cuántico trenzado con

(1) coproducto:

$$\phi : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1}) \otimes_{\sigma} U_q^+(sl_{n+1})$$

inducido por $\phi(e_{ij}) = e_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes e_{ij} + \sum_{i < u < j} (Id - \sigma^2)(e_{iu} \otimes e_{uj})$, $1 \leq i < j \leq n+1$;

(2) counidad:

$$\epsilon : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow k$$

inducida por $\epsilon(x) = 0$, $\forall x \in (sl_{n+1}^+)_q$;

(3) antípoda:

$$\kappa : U_q^+(sl_{n+1}) \rightarrow U_q^+(sl_{n+1})$$

inducida por $x \mapsto -x$, $\forall x \in (sl_{n+1}^+)_q$.

Además, la counidad ϵ es un morfismo de álgebras:

$$\epsilon m = \epsilon \otimes \epsilon$$

DEM. El teorema sólo es un resumen de los resultados del presente capítulo. Particularmente de las proposición 2.2 y su corolario 2.3, el teorema 2.2 y las proposiciones 3.4, 2.4.

Sólo hay que probar la forma del coproducto sobre los elementos e_{ij} , $1 \leq i < j \leq n+1$, lo cual puede hacerse por inducción sobre $j-i$. \square

5. La representación adjunta

Construiremos una representación del álgebra envolvente universal $U(sl_{n+1}^+)_q$ en ella misma por medio de la función adjunta. Primero, notemos que $U(sl_{n+1}^+)_q$ es un grupo cuántico trenzado con operador de simetría σ . Tal σ está relacionado con nuestra simetría S por la ecuación:

$$\sigma(e_{ab} \otimes e_{uv}) = S(e_{ab} \otimes e_{uv}), \text{ si } e_{ab} < e_{uv}$$

pero σ no es una involución.

Sea \mathcal{A} un grupo cuántico trenzado. Para $y \in \mathcal{A}$ definamos

$$\text{ad}(y) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, u \mapsto m(\text{Id} \otimes m)(\text{Id} \otimes \text{Id} \otimes \kappa)(\text{Id} \otimes \sigma)(\phi(y) \otimes u)$$

donde m es el producto, ϕ el coproducto y κ es la antípoda sobre \mathcal{A} .

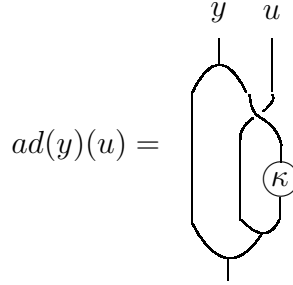


FIGURA 13. La representación adjunta.

De acuerdo con [24], si la counidad ϵ del grupo cuántico trenzado \mathcal{A} es un morfismo de álgebras entonces \mathcal{A} es un álgebra de Hopf en una categoría trenzada y entonces podemos usar los resultados de [47]. En particular obtenemos que la función ad es una representación de \mathcal{A} en ella misma. Tal afirmación está probada en [46] para la función coadjunta. La prueba para ad es dual, por supuesto.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea $(\mathcal{A}, \{\phi, \epsilon, \lambda, \sigma\})$ un grupo cuántico trenzado con multiplicación m . Si $\epsilon m = \epsilon \otimes \epsilon$ entonces*

$$\text{ad}(x)\text{ad}(y) = \text{ad}(xy), \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

En otras palabras, la función ad es una representación de \mathcal{A} en ella misma.

Obtenemos una identidad de Jacobi adicional:

COROLARIO 5.2. *Sean S, \langle, \rangle la presimetría y el pseudocochete de $(sl_{n+1}^+)_q$. Definamos $\gamma = 1 \otimes 1 - S - \langle, \rangle$, entonces, la siguiente identidad de Jacobi generalizada se cumple en $U(sl_{n+1}^+)_q$:*

$$(5.1) \quad \text{ad}([x, y]_q)(z) = \mu \circ (\text{ad} \otimes \text{ad}) \circ \gamma(x \otimes y)(z),$$

para cualesquiera $x, y \in (sl_{n+1}^+)_q$ y para todo $z \in U(sl_{n+1}^+)_q$, donde μ denota la multiplicación de funciones lineales sobre $U(sl_{n+1}^+)_q$.

NOTA 5.1. La identidad de Jacobi (5.1) es similar a la considerada en [45]. Sin embargo, en general, $ad(x)(y) \neq [x, y]_q$. Por ejemplo, para $e_{13} = e_{12}e_{23} - q^{-1}e_{23}e_{12}$ tenemos

$$ad(e_{13})(e_{12}) = [e_{13}, e_{12}]_q - q^{-1}(1 - q^{-2})e_{12}^2e_{23}$$

donde $[e_{13}, e_{12}]_q = e_{13}e_{12} - q^{-1}e_{12}e_{13}$. Es por esta razón que el punto 7 de los requerimientos ideales para un álgebra de Lie cuántica [45], no se cumple.

Álgebras de Lie cuánticas de tipo A_n positivo

Mostramos de manera explícita un álgebra de Lie generalizada su-
mergida en la parte positiva (y negativa) de los grupos cuánticos de
Drinfeld-Jimbo de tipo A_n . Tal álgebra de Lie generalizada satisface
axiomas muy similares a los encontrados por S.L. Woronowicz. Para las
álgebras envolventes universales de tales álgebras de Lie generalizadas
establecemos varias condiciones para obtener bases del tipo Poincaré-
Birkhoff-Witt. Además un álgebra graduada relacionada se propone y
algunas relaciones con la ecuación cuántica de Yang-Baxter se estudian.

1. Antecedentes

En el capítulo 2 se mostró que existe dentro de $U_q(sl_{n+1})$ un álgebra
de Lie coloreada generalizada $(sl_{n+1}^+)_q$ tal que su álgebra envolvente uni-
versal es la parte positiva $U_q^+(sl_{n+1})$ de $U_q(sl_{n+1})$. Desafortunadamente
sus axiomas dependen de la base elegida.

El objetivo de este capítulo es proponer axiomas de álgebra de
Lie generalizados para el módulo $(sl_{n+1}^+)_q$ independientes de la base
elegida. Llamamos a tal estructura *T-álgebra de Lie*. Una parte de
tales axiomas (antisimetría, identidad de Jacobi) son muy cercanos a
los encontrados por Woronowicz [61].

Además probaremos que $(sl_{n+1}^+)_q$ satisface una identidad de Jacobi
adicional que es similar a las *álgebras de Lie generalizadas balancea-
das* de Lyubashenko-Sudbery [45]. Esto significa que, $(sl_{n+1}^+)_q$ es un
álgebra de Lie generalizada balanceada. Sin embargo, el álgebra envol-
vente universal de $(sl_{n+1}^+)_q$ como una *T-álgebra de Lie* no es la misma
que el álgebra envolvente universal como un álgebra de Lie generalizada
balanceada.

Finalmente, algunas relaciones con la definición de álgebra de Lie
cuántica de Vybornov [60] se estudian. Siguiendo el trabajo de Vy-
bornov obtenemos que, en cierto sentido, la ecuación cuántica de Yang-
Baxter (QYBE) incluye no sólo una identidad de Jacobi y una anti-
simetría, generalizadas ambas, sino condiciones adicionales llamadas de
multiplicatividad, las cuales son parte de las condiciones para obtener
bases del tipo Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW). El hecho de que existe

una liga entre la ecuación de trenza a la identidad de Jacobi ya había sido notada por Woronowicz dentro del marco del cálculo diferencial sobre grupos cuánticos [61].

2. Nociones básicas y construcciones comunes

Sea k un anillo conmutativo unitario.

DEFINICIÓN 2.1. Una T -álgebra de Lie es un k -módulo L con morfismos

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : L \otimes_k L &\rightarrow L, & \text{corchete} \\ S : L \otimes_k L &\rightarrow L, & \text{presimetría} \\ \langle \cdot, \cdot \rangle : L \otimes_k L &\rightarrow L \otimes_k L, & \text{pseudocorchete} \end{aligned}$$

tales que los siguientes axiomas se satisfacen

(1) Estabilidad

- (a) Existe una graduación estricta $L = \bigoplus_{\eta \in \mathbb{N}} L_\eta$ de L relativa a $[\cdot, \cdot]$, (esto significa $[L_{\eta_1}, L_{\eta_2}] \subseteq \sum_{\eta \leq \eta_1 + \eta_2 - 1} L_\eta$, $\forall \eta_1, \eta_2$).
- (b)

$$\langle L_{\eta_1}, L_{\eta_2} \rangle \subseteq (L \otimes_k L)_{\eta_1 + \eta_2 - 1}, \quad \forall \eta_1, \eta_2$$

$$\text{donde } (L \otimes_k L)_\eta = \sum_{\eta_1 + \eta_2 \leq \eta} L_{\eta_1} \otimes_k L_{\eta_2}.$$

(2) Antisimetría

- (a) $[\cdot, \cdot]S = -[\cdot, \cdot]$
 (b) $\langle \cdot, \cdot \rangle S = -\langle \cdot, \cdot \rangle$
 (c) $[\cdot, \cdot]\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$

(3) Identidad de Jacobi

$$(2.1) \quad [\cdot, \cdot](Id \otimes [\cdot, \cdot]) - [\cdot, \cdot]([\cdot, \cdot] \otimes Id) - [\cdot, \cdot](Id \otimes [\cdot, \cdot])(S \otimes Id) = 0$$

El diagrama correspondiente a ésta nueva identidad de Jacobi está en la figura 1. Nótese la diferencia con la identidad de Jacobi para las T -álgebras de Lie *básicas* de la figura 9 del capítulo 1. Más adelante se probará que bajo ciertas condiciones ambas identidades coinciden.

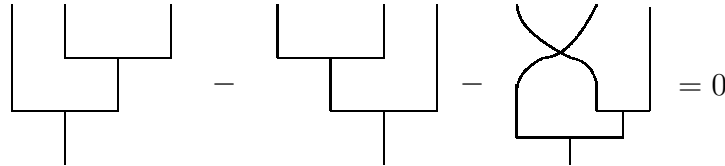


FIGURA 1. Identidad de Jacobi para T -álgebras de Lie.

EJEMPLO 2.1. Una G -álgebra Λ es un k -módulo graduado $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$ equipado con dos multiplicaciones, $(\lambda, \gamma) \mapsto \lambda\gamma$ y $(\lambda, \gamma) \mapsto [\lambda, \gamma]$ con algunas condiciones adicionales. Estamos interesados sólo en las propiedades del corchete $[\cdot, \cdot]$. Estas son:

$$(2.2) \quad [\lambda, \gamma] \in \Lambda_{m+n-1}, \text{ if } \lambda \in \Lambda_m, \gamma \in \Lambda_n$$

$$(2.3) \quad [\lambda, \gamma] = -(-1)^{(m-1)(n-1)}[\gamma, \lambda], \text{ if } \lambda \in \Lambda_m, \gamma \in \Lambda_n,$$

y si $\lambda \in \Lambda_m, \gamma \in \Lambda_n, \eta \in \Lambda_p$,

$$(2.4) \quad (-1)^{(m-1)(p-1)}[\lambda, [\gamma, \eta]] + (-1)^{(n-1)(m-1)}[\gamma, [\eta, \lambda]] \\ + (-1)^{(p-1)(n-1)}[\eta, [\lambda, \gamma]] = 0.$$

La propiedad 2.2 dice que $\Lambda = \bigoplus_n \Lambda_n$ es una álgebra estrictamente graduada relativa a $[\cdot, \cdot]$. Por lo tanto Λ tiene una estructura de T -álgebra de Lie con corchete $[\cdot, \cdot]$, pseudocorchete $\langle \cdot, \cdot \rangle = 0$, y presimetría S definida por

$$S(\lambda \otimes \gamma) = (-1)^{(m-1)(n-1)}\gamma \otimes \lambda, \text{ si } \lambda \in \Lambda_m, \gamma \in \Lambda_n.$$

Puesto que

$$S(Id \otimes [\cdot, \cdot]) = (Id \otimes [\cdot, \cdot])(Id \otimes S)(S \otimes Id) \\ S([\cdot, \cdot] \otimes Id) = ([\cdot, \cdot] \otimes Id)(S \otimes Id)(Id \otimes S)$$

entonces la identidad de Jacobi (2.4) es equivalente a la identidad de Jacobi (2.1) de Λ como una T -álgebra de Lie.

Nótese que no estamos usando el usual *grado reducido* (*reduced degree*) de Λ (ver [30], p 89).

Si L es una T -álgebra de Lie definimos su *álgebra envolvente universal* $U(L)$ como el cociente

$$U(L) = L^\otimes / J$$

donde L^\otimes es la k -álgebra tensorial de L y J es el ideal bilateral generado por

$$x \otimes y - S(x \otimes y) - \langle x, y \rangle - [x, y], \quad \forall x, y \in L.$$

Relacionada con cada T -álgebra de Lie L existe una T -álgebra de Lie abeliana denotada L^0 . Su estructura es: $L^0 = L$ como k -módulo, $[\cdot, \cdot]^0 = 0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle^0 = 0$, $S^0 = S$. El álgebra envolvente universal

$$\mathcal{S}(L) = U(L^0)$$

es llamada el *álgebra simétrica de L* .

Ahora, sea \mathcal{B} una base totalmente ordenada de L como T -álgebra de Lie con graduación estricta dada por

$$L = \bigoplus_{\eta \in \mathbb{N}} L_\eta$$

tal que $\forall x \in \mathcal{B} \exists \eta = \eta(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_\eta$. Sea $x_\lambda \in \mathcal{B}$, $\Sigma = (x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_u})$ sucesión finita no decreciente de elementos de \mathcal{B} . Escribimos $\eta(\lambda) = \eta(x_\lambda) = \alpha$ si $x_\lambda \in L_\alpha$, $z_\lambda = x_\lambda \in \mathcal{S}(L)$, $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_u} \in \mathcal{S}(L)$, $z_\emptyset = 1 \in \mathcal{S}(L)$, $\eta(\Sigma) = \eta(z_\Sigma) = \eta(x_{\lambda_1}) + \dots + \eta(x_{\lambda_u})$. Además ponemos $x_\lambda \leq \Sigma$ si $x_\lambda \leq x_{\lambda_1}$.

Sea \mathcal{S}_p el k -submódulo de $\mathcal{S}(L)$ generado por los z_Σ tales que $\eta(\Sigma) \leq p$.

LEMA 2.2. Sea L una T -álgebra de Lie y \mathcal{B} una base libre de L como k -módulo, \mathcal{B} totalmente ordenada tal que

- (1) $S(x \otimes y) = q_{x,y}y \otimes x$, $q_{x,y} \in k$, $\forall x, y \in \mathcal{B}$;
- (2) $q_{x,y} = q_{y,x}^{-1}$.

Entonces, existe un k -morfismo

$$_ \cdot _ : L \otimes_k \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L)$$

satisfaciendo

- (A) $x_\lambda \cdot z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ para $x_\lambda \leq \Sigma$;
- (B) $x_\lambda \cdot z_\Sigma - z_\lambda z_\Sigma \in \mathcal{S}_{\eta(\lambda) + \eta(\Sigma) - 1}$.

DEM. Ver capítulo 2, prueba del lema V.1. □

Remarcamos que éste lema es muy parecido al lema 5.1 del capítulo 1. La diferencia es que este nuevo lema es para T -álgebras de Lie, cuya definición no depende de una base en particular. Mientras el lema anterior mencionado es para T -álgebras de Lie *básicas* cuya definición depende de una base elegida.

3. Bases Poincaré-Birkhoff-Witt y T -álgebras de Lie

En el capítulo 2 probamos que la existencia de bases PBW no es una propiedad común para todas las T -álgebra de Lie básicas. Tenemos que restringirlas. Tal condición de restricción se llama *adecuada*. Gracias al lema 2.2 la condición *adecuada* tiene sentido no sólo para T -álgebras de Lie básicas sino para T -álgebras de Lie.

DEFINICIÓN 3.1. Una T -álgebra de Lie adecuada es una T -álgebra de Lie con una base libre para L como k -módulo totalmente ordenada tal que se cumple la condición *adecuada* (ver capítulo 2, definición V.1).

No debemos confundir T -álgebra de Lie básica adecuada (definida en el capítulo 2) con T -álgebra de Lie adecuada (definida en este capítulo) puesto que cumplen identidades de Jacobi generalizadas, que en principio, son diferentes. Sin embargo, veremos más abajo que coinciden bajo ciertas condiciones.

Sea L^3 el k -submódulo de la k -álgebra tensorial L^{\otimes} generado por

$$x_i \otimes x_j \otimes x_k, \quad x_i < x_j < x_k \in \mathcal{B}$$

y sea 3L el k -submódulo generado por

$$x_k \otimes x_j \otimes x_i, \quad x_i < x_j < x_k \in \mathcal{B}.$$

Pongamos $S_2, S_1 : L^{3\otimes} \rightarrow L^{3\otimes}$, $S_1 = 1 \otimes S$, $S_2 = (1 \otimes S)$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea L una T -álgebra de Lie adecuada tal que para una base \mathcal{B} se cumplen,*

- (1) $S([\] \otimes Id)|_{L^3} = (Id \otimes [\])S_1S_2|_{L^3}$;
- (2) $S(Id \otimes [\])|_{L^3} = ([\] \otimes Id)S_2S_1|_{L^3}$;
- (3) $S([\] \otimes Id)|_{{}^3L} = (Id \otimes [\])S_1S_2|_{{}^3L}$;
- (4) $S(Id \otimes [\])|_{{}^3L} = ([\] \otimes Id)S_2S_1|_{{}^3L}$;

entonces $U(L)$ tiene una base de tipo PBW relativa a \mathcal{B} .

DEM. De acuerdo con el capítulo 2, es suficiente con probar que L es una T -álgebra de Lie básica. Las condiciones 1 y 2 aseguran la propiedad de multiplicatividad, mientras que las condiciones 3 y 4 dicen que la identidad de Jacobi para L como una T -álgebra de Lie se siguen de la identidad de Jacobi como T -álgebra de Lie. Por lo tanto, L es una T -Lie algebra básica. \square

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea L una T -álgebra de Lie básica, con base \mathcal{B} . Si se cumplen*

- (1) $S([\] \otimes Id)|_{{}^3L} = (Id \otimes [\])S_1S_2|_{{}^3L}$;
- (2) $S(Id \otimes [\])|_{{}^3L} = ([\] \otimes Id)S_2S_1|_{{}^3L}$;
- (3) $[\]S([x_i, x_j] \otimes x_j) = [\](Id \otimes [\])S_1S_2(x_i \otimes x_j \otimes x_j), \forall x_i, x_j \in \mathcal{B}$.

y una segunda identidad de Jacobi

$$(3.1) \quad [\]((1 \otimes [\])S_1S_2 - ([\] \otimes 1)S_2S_1 + ([\] \otimes 1)S_2)|_{{}^3L} = 0$$

entonces

$$(3.2) \quad [\](Id \otimes [\]) - [\]([\] \otimes Id) - [\](Id \otimes [\])S_1 = 0$$

$$(3.3) \quad [\](Id \otimes [\]) - [\]([\] \otimes Id) + [\]([\] \otimes Id)S_2 = 0.$$

DEM. Sean $x, y, z \in \mathcal{B}$. Si $x > y > z$ entonces la identidad de Jacobi de L como una T -álgebra de Lie junto con las hipótesis 1 y 2 dicen

$$(3.4) \quad [x, [y, z]] - [[x, y], z] - q_{x,y}[y, [x, z]] = 0$$

además, la segunda identidad de Jacobi (3.1) puede ser escrita como

$$(3.5) \quad [x, [y, z]] - [[x, y], z] + q_{y,z}[[x, z], y] = 0.$$

Primero, vamos a probar que

$$(3.6) \quad [x, [y, z]] - [[x, y], z] - q_{x,y}[y, [x, z]] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{B}.$$

Hay varios casos:

Caso $x = y = z$: entonces (3.6) trivialmente se cumple.

Caso Dos de los elementos x, y, z coinciden: ahora hay varios sub-casos;

Subcaso $x = y, z$: el lado izquierdo de (3.6) es

$$[x, [x, z]] - q_{x,x}[x, [x, z]] = 0$$

Subcaso $x, y = z$: el lado izquierdo de (3.6) es

$$-[[x, y], y] - q_{x,y}[y, [x, y]] = [S([x, y] \otimes y) - q_{x,y}[y, [x, y]]] = 0$$

debido a la hipótesis 3.

Subcaso $x = z, y$: de nuevo, el lado izquierdo de (3.6) es

$$\begin{aligned} [x, [y, x]] - [[x, y], x] &= [x, [y, x]] + q_{x,y}[[y, x], x] \\ &= [x, [y, x]] - q_{y,x}[S([y, x] \otimes x)] \\ &= [x, [y, x]] - q_{y,x}q_{x,y}[x, [y, x]] \end{aligned}$$

porque la hipótesis 3.

Caso x, y, z son tres elementos básicos diferentes entre sí: sea s el lado izquierdo de (3.6). Hay varios subcasos: $x > y > z, x > z > y, y > x > z, y > z > x, z > x > y, z > y > x$

Subcaso $x > y > z$: equation (3.4)

Subcaso $x > z > y$:

$$\begin{aligned} s &= -q_{y,z}[x, [z, y]] - [[x, y], z] + q_{x,y}[y, [x, z]] \\ &= -q_{y,z}[x, [z, y]] - [[x, y], z] - q_{x,y}q_{y,x}q_{y,z}[[x, z], y] \\ &= -q_{y,z}([x, [z, y]] - [[x, z], y] + q_{z,y}[[x, y], z]) = 0 \end{aligned}$$

gracias a (3.5).

Subcaso $y > x > z$:

$$\begin{aligned} s &= [x, [y, z]] + q_{x,y}[[y, z], z] - q_{x,y}[y, [x, z]] \\ &= -q_{x,y}([y, [x, z]] - [[y, x], z] - q_{y,x}[x, [y, z]]) = 0 \end{aligned}$$

debido a la identidad de Jacobi en L .

Los casos restantes son similares.

Por cálculos similares (3.3) se cumple también. \square

4. Un álgebra de Lie cuántica de tipo A_n positivo

Consideremos a $(sl_{n+1}^+)_q$ en su estructura de T -álgebra de Lie con base $\mathcal{B} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$.

LEMA 4.1. Si $e_{ab} > e_{ij} > e_{uv}$ entonces

$$[[e_{uv}, e_{ab}], e_{ij}] = [[e_{uv}, e_{ab}]_q, e_{ij}]_q = 0.$$

DEM. Puesto que $[\cdot]_q$ es una deformación del corchete usual $[\cdot]$ de sl_n , se sigue que $[[e_{uv}, e_{ab}], e_{ij}] = 0$.

Porque $e_{uv} < e_{ab}$ podemos suponer $v = a$ entonces tenemos que probar

$$(4.1) \quad [e_{ub}, e_{ij}] = 0.$$

Notemos que si $b \neq i$ y $j \neq u$ entonces (4.1) se cumple. Pero si $b = i$ entonces $a < b = i < j$ implica $a + i < j + i$ y $e_{ab} = e_{ai} < e_{ij}$, una contradicción. Y si $j = u$ entonces $e_{ua} < e_{iu}$ esto implica $u + a < i + u$ ó $u + a = i + u$ y $a < u$, se sigue $a < u$, de nuevo una contradicción porque $u < v = a$. Por lo tanto (4.1) se cumple. \square

TEOREMA 4.2. El k -módulo $(sl_{n+1}^+)_q$ tiene una estructura de T -álgebra de Lie.

DEM. Tenemos que probar la identidad de Jacobi (3) de la definición 2.1 para el corchete $[\cdot]_q$. En vista de la proposición 3.2, es suficiente con probar que sus condiciones se cumplen. Sea e_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$ la base canónica de $(sl_{n+1}^+)_q$. Si $e_{ab} < e_{ij} < e_{uv}$ entonces

$$[e_{ab}, e_{ij}]_q < e_{uv}, \text{ si } [e_{ab}, e_{ij}]_q \neq 0 \text{ y } e_{ab} < [e_{ij}, e_{uv}]_q, \text{ si } [e_{ij}, e_{uv}]_q \neq 0$$

además, si $[\cdot]$ denota al corchete clásico de sl_n y $h_{ij} = [e_{ij}, e_{ij}^t]$ entonces $[h_{ij}, e_{uv}] = [h_{uv}, e_{ij}] = c_{ij,uv}e_{uv}$ para ciertos $c_{ij,uv} \in k$, y de la identidad de Jacobi en sl_n se sigue

$$[h_{ab}, [e_{ij}, e_{uv}]] = (c_{ab,ij} + c_{ab,uv})[e_{ij}, e_{uv}]$$

lo que implica las condiciones 1 y 2 de la proposición 3.2. La condición 3 de la proposición 3.2 se cumple porque $[[e_{ij}, e_{ab}]_q, e_{ab}]_q = 0, \forall e_{ij}, e_{ab}$. Ahora sólo resta por probar la segunda identidad de Jacobi (3.1).

Sean x, y, z elementos básicos tales que $x > y > z$, entonces el lado izquierdo de (3.5) es,

$$\begin{aligned} &= -q_{xy}q_{xz}q_{yz}([z, [y, x]] - [[z, y], x]) - q_{yz}q_{xz}[[z, x], y] \\ &= q_{xz}q_{yz}(q_{x,y}[[z, x], y] - [[z, x], y]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues lema 4.1. \square

PROPOSICIÓN 4.1. *La T -álgebra de Lie $(sl_{n+1}^+)_q$ es un álgebra de Lie generalizada y balanceada.*

DEM. Definamos $\gamma : (sl_n^+)_q \otimes_k (sl_n^+)_q \rightarrow (sl_n^+)_q \otimes_k (sl_n^+)_q$ por $\gamma = 1 - S$. Entonces, las ecuaciones (3.2) y (3.3) de la proposición 3.2 son la identidad de Jacobi izquierda y derecha, respectivamente (ver [45]). \square

5. Álgebras graduadas y álgebras envolventes universales

Para las T -álgebra de Lie podemos repetir la construcción clásica [34] (ó la coloreada [55]) del álgebra graduada relacionada al álgebra envolvente universal.

Sea $L = \bigoplus_{\eta} L_{\eta}$ la graduación estricta de la T -álgebra de Lie L . Definamos los k -submódulos de L^{\otimes} el álgebra tensorial de L ,

$$T_m = \coprod_{\substack{k \geq 0 \\ \eta_1 + \dots + \eta_k \leq m}} (L_{\eta_1} \otimes \dots \otimes L_{\eta_k}), \quad m \geq 0$$

$$T^m = \coprod_{\substack{k \geq 0 \\ \eta_1 + \dots + \eta_k = m}} (L_{\eta_1} \otimes \dots \otimes L_{\eta_k}), \quad m \geq 0$$

y sean $\pi : L^{\otimes} \rightarrow U(L)$ morfismos naturales. Pongamos $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1} = 0$. Sea el k -módulo $G^m = U_m/U_{m-1}$. La multiplicación en $U(L)$ define una función bilineal $G^m \times G^p \rightarrow G^{m+p}$. Esta se extiende a una sola función bilineal $G \times G \rightarrow G$ haciendo de $G = \coprod_{m \geq 0} G^m$ álgebra graduada asociativa con unidad 1.

Puesto que π envía a T^m en U_m , la composición lineal $\varphi_m : T^m \rightarrow U_m \rightarrow G^m$ tiene sentido. Es sobreyectiva porque $\pi(T_m - T_{m-1}) = U_m - U_{m-1}$. Usando la propiedad universal del k -módulo coproducto $L^{\otimes} = \coprod_{m \geq 0} T^m$ obtenemos un k -morfismo $\varphi : L^{\otimes} \rightarrow G$, el cual es sobreyectivo.

Sea I el k -ideal bilateral de L^{\otimes} generado por

$$x \otimes y - S(x \otimes y), \quad \forall x, y \in L.$$

PROPOSICIÓN 5.1. *La función $\varphi : L^{\otimes} \rightarrow G$ es un morfismo de k -álgebras. Aún más, $\varphi(I) = 0$, así que φ induce un epimorfismo de k -álgebras $\omega : \mathcal{S}(L) \rightarrow G$.*

DEM. Primero, notemos que $\varphi : L^{\otimes} \rightarrow G$ es un morfismo de k -álgebras debido a la definición del producto sobre G .

Sea $x \otimes y - S(x \otimes y)$, ($x, y \in L$) un generador de I tal que $x \in L_{\eta_1}$, $y \in L_{\eta_2}$. Entonces $\pi(x \otimes y - S(x \otimes y)) \in U_\eta$ donde $\eta = \eta_1 + \eta_2$. Por otro lado $\pi(x \otimes y - S(x \otimes y)) = \pi([x, y] + \langle x, y \rangle) \in U_{\eta-1}$, de donde $\pi(x \otimes y - S(x \otimes y)) \in U_{\eta-1}/U_{\eta-1} = 0$. Se sigue $I \subseteq \text{Ker } \varphi$. \square

NOTA IMPORTANTE 1. En el caso clásico ω es un isomorfismo. Sin embargo, no es así en general, porque si tomamos la T -álgebra de Lie $L = (\mathfrak{sl}_4)_q$, (ver capítulo 2, ejemplos III.5, IV.4 y definición IV.1) entonces $x_2 x_6 = 0$ en $U(L)$. Además, si $p : L^\otimes \rightarrow \mathcal{S}(L)$ es la proyección natural entonces $\omega(p(x_2 \otimes x_4)) = \pi(x_2 \otimes x_6) = 0$. Por lo tanto ω no es inyectivo. Sin embargo, si L es una T -álgebra de Lie básica, el álgebra simétrica $\mathcal{S}(L)$ es isomorfa al álgebra graduada G .

COROLARIO 5.2.

- (1) Si L es una T -álgebra de Lie básica entonces $\mathcal{S}(L) \simeq G$ como álgebras.
- (2) Si L es una T -álgebra de Lie básica entonces $U(L)$ no tiene divisores de cero $\neq 0$.
- (3) Las álgebras $U(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q$ y $M_{p,q,\epsilon}(n)$ no tienen divisores de cero $\neq 0$.

DEM.

- (1) Copiar palabra por palabra las pruebas clásicas [34], p 94 ó [35], p 166.
- (2) Ver [35], teorema 4, p 164.
- (3) Las álgebras $U(\mathfrak{sl}_{n+1}^+)_q$ y $M_{p,q,\epsilon}(n)$ son, ambas, álgebras envolventes universales de T -álgebras de Lie, (ver capítulo 2). \square

6. La ecuación de Yang-Baxter y algunas álgebras de Lie cuánticas

Ahora vamos a aplicar algunas observaciones de Vyborno [60] a la teoría de T -álgebras de Lie para obtener soluciones de la QYBE. Tales observaciones ligan la ecuación de trenza a la identidad de Jacobi. Tal relación ya había sido notada por Woronowicz dentro del marco del cálculo diferencial sobre grupos cuánticos [61].

Sea L un k -módulo, V un k -submódulo de $L^{3\otimes}$ y $S : L \otimes_k L \rightarrow L \otimes_k L$ un k -morfismo.

DEFINICIÓN 6.1. Decimos que S es un morfismo de trenza sobre V si

$$S_1 S_2 S_1|_V = S_2 S_1 S_2|_V$$

donde $S_1 = S \otimes_k 1$ y $S_2 = 1 \otimes_k S$.

Pongamos $\tilde{L} = L \oplus k$. Podemos extender S a \tilde{L} definiendo $S(x \otimes 1) = 1 \otimes x$, $S(1 \otimes x) = x \otimes 1$, $S(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1$, $\forall x \in L, 1 \in k$.

Si S es invertible, dos familias de funciones lineales se definen:

$$\mathcal{R}(\lambda, S), \mathcal{R}'(\lambda, S) : \tilde{L} \otimes \tilde{L} \rightarrow \tilde{L} \otimes \tilde{L}$$

$$\mathcal{R}(\lambda, S) = S + [,](p \otimes p) \otimes \lambda, \quad \mathcal{R}'(\lambda, S) = S + \lambda \otimes [,](p \otimes p)$$

donde $p : \tilde{L} \rightarrow L$ es la proyección natural y $\lambda \in k$. Cálculos directos muestran que:

PROPOSICIÓN 6.1. *Las funciones $\mathcal{R}(\lambda, S)$ y $\mathcal{R}'(\lambda, S^{-1})$ son mutuamente invertibles.*

PROPOSICIÓN 6.2. *Sea V un k -submódulo de $L^{3\otimes}$.*

- (1) $\mathcal{R}(\lambda^2, S)\mathcal{R}'(\lambda, S^{-1}) = \mathcal{R}'(\lambda, S^{-1})\mathcal{R}(\lambda^2, S) = Id$, si y sólo si $[,]S = -\lambda[,]$;
- (2) $\mathcal{R}(\lambda, S)\mathcal{R}'(\lambda, S^{-1}) = \mathcal{R}'(\lambda, S^{-1})\mathcal{R}(\lambda, S) = Id$, si y sólo si $[,]S = -[,]$;
- (3) *El morfismo $\mathcal{R}(\lambda, S)$ es un morfismo de trenza sobre V , para cualquier λ si y sólo si S es un morfismo de trenza sobre V , la identidad de Jacobi (2.1) se cumple sobre V y las siguientes condiciones de multiplicatividad se cumplen*

$$(S([,] \otimes Id) + S(Id \otimes [,])S_1)|_V = (([,] \otimes Id)S_2 + (Id \otimes [,])S_1S_2)|_V$$

$$S(1 \otimes [,])S_1|_V = ([,] \otimes 1)S_2|_V.$$

- (4) *El morfismo $\mathcal{R}'(\lambda, S)$ es un morfismo de trenza sobre V , para cualquier λ si y sólo si S es un morfismo de trenza sobre V la identidad de Jacobi (3.3) se cumple sobre V y las siguientes condiciones de multiplicatividad se cumplen*

$$(S(Id \otimes [,]) + S([,] \otimes Id))|_V = (([,] \otimes Id)S_2S_1 + (Id \otimes [,])S_1)|_V$$

$$S([,] \otimes Id)|_V = (Id \otimes [,])S_1S_2|_V.$$

COROLARIO 6.3. *Sea $(\mathfrak{g}, c, [,])$ un álgebra de Lie cuántica según Wambst (ver [59] p 1128), donde la simetría c tiene marca ν . Entonces*

- (1) $\mathcal{R}'(\nu, c)$ es un morfismo de trenza invertible sobre $V = \mathfrak{g}^{3\otimes}$, y $\mathcal{R}'(\nu, c)^{-1} = \mathcal{R}(\nu^2, c^{-1})$.

- (2) \mathfrak{g} es un álgebra de Lie cuántica según Vybormov.

La ecuación (4) aparece en [61] como la ecuación (5.36). Las álgebras de Lie cuánticas relacionadas a las álgebras de Lie generalizadas de Woronowicz parecen ser duales a nuestras T -álgebras de Lie; las álgebras de Lie cuánticas nos proveen de soluciones a la ecuación

de trenza: $\mathcal{R}'(\nu, S)$ en el caso de la definición de Wambst (debido a la identidad de Jacobi (3.3)) y $\mathcal{R}(\lambda, S)$ en el caso de las T -álgebras de Lie (debido a la identidad de Jacobi (2.1)).

COROLARIO 6.4. *Sea L igual a $(sl_{n+1}^+)_q$ con base canónica \mathcal{B} y presimetría S .*

- (1) *Pongamos $x < 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$. Sea V_1 el k -submódulo de L^3 generado por $x \otimes y \otimes z$ tal que $x, y, z \in \mathcal{B}$, $x < y < z$ y $y < [x, z]_q$. Entonces, para cada λ , $\mathcal{R}(\lambda, S)$ es un morfismo de trenza invertible sobre V_1 y*

$$\mathcal{R}(\lambda, S)^{-1} = \mathcal{R}'(\lambda, S)$$

- (2) *Pongamos $x > 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$. Sea V_2 el k -submódulo de L^3 generado por $x \otimes y \otimes z$ tal que $x, y, z \in \mathcal{B}$, $x < y < z$ y $y > [x, z]_q$. Entonces, para cualquier λ , $\mathcal{R}'(\lambda, S)$ es un morfismo de trenza sobre V_2 y*

$$\mathcal{R}'(\lambda, S)^{-1} = \mathcal{R}(\lambda, S)$$

Puesto que la QYBE es equivalente a la ecuación de trenza (ver [42] p 3316), hemos obtenido soluciones *restringidas* a la QYBE.

Además, para $L = (sl_3^+)_q$, tenemos $V_1 = V_2 = L^{3\otimes}$. Así, $(sl_3^+)_q$ es un álgebra de Lie cuántica de acuerdo con [60].

CAPÍTULO 5

Generalizaciones: el caso D_n .

Se muestra que el encontrar un álgebra de Lie cuántica de tipo D_n positivo se reduce a un problema de programación entera. La estructura de álgebra de Lie cuántica encontrada incluye una generalización de la propiedad de antisimetría y una identidad de Jacobi muy cercana a la ecuación de trenza. Se prueba que un álgebra envolvente universal generalizada de nuestra álgebra de Lie cuántica de tipo D_n positivo es el grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo del mismo tipo. Aún más, cuando el problema de programación entera relacionado es factible, mostramos por medio de la identidad de Jacobi generalizada que el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (bases) se sigue cumpliendo.

1. Antecedentes

En [45] Lyubashenko y Sudbery requieren de generalizaciones del concepto de álgebra de Lie. El problema principal es encontrar espacios vectoriales (ó módulos) de dimensión finita junto con una operación binaria que satisfagan una propiedad de antisimetría generalizada, así como también una generalización de la identidad de Jacobi, de forma tal que su envolvente universal (en algún sentido) coincida con el grupo cuántico tratado; tales estructuras, de existir, se llamarían *álgebras de Lie cuánticas*. Se requieren condiciones adicionales. Por ejemplo, bases de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt, una función adjunta contruida por medio de conmutadores y de la estructura de álgebra de Hopf, entre otras.

En cuanto a su utilidad en Física, Delius *et al* [19, 18] sugieren usar álgebras de Lie cuánticas para entender algunas propiedades de los modelos integrables cuánticos (radios completos de masas cuánticas (*full quantum mass ratios*) y S -matrices exactas para partículas elementales) en vista de que los modelos integrables clásicos se pueden estudiar usando álgebras de Lie clásicas; mientras que una teoría de norma q -deformada (*q-deformed gauge theory*) propone Sudbery [57] basada en las álgebras de Lie cuánticas de tipo A_n . Extensiones a otras clases de álgebras de Lie cuánticas, como la que se propone en el presente capítulo, están pendientes.

Desde el punto de vista de las matemáticas, las álgebras de Lie cuánticas son útiles porque nos permite reducir problemas del grupo cuántico, que es de dimensión infinita, al álgebra de Lie cuántica que es de dimensión finita [47]. Por ejemplo, mostraremos que el problema de encontrar bases del tipo Poincaré-Birkhoff-Witt en la parte positiva del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo D_n positivo se reduce a encontrar una representación de nuestra álgebra de Lie cuántica sobre la q -álgebra simétrica relacionada.

En este capítulo estamos interesados en la construcción de cuantizaciones de álgebras de Lie por medio de q -conmutadores para $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$ la parte positiva del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo D_n . Mostramos que tal construcción es posible exhibiendo un espacio vectorial de dimensión finita junto con una operación binaria que satisface una propiedad de antisimetría generalizada y una identidad de Jacobi también generalizada de tal forma que su envolvente universal (generalizada) es $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$. Pero, además del operador binario, el cual es un operador cuadrático-lineal, obtenemos otros dos operadores que son cuadrático-cuadrático y cuadrático-cúbico, respectivamente. Sin embargo, podemos probar un teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt sobre tales estructuras. Aún más, puesto que una forma bilineal es un operador cuadrático-escalar, nuestros resultados pueden ser aplicados a las álgebras de Clifford.

Para mantener los cálculos bajo control, haremos uso de cierta clase de notación diagramática similar a la usada en los carcajes (*quivers*) (gráficas orientadas) que aparecen en la teoría de la representación de álgebras de dimensión finita [53].

Los carcajes relacionados con grupos cuánticos han sido usados por Cibils [13, 14] y Ringel [52]. Sin embargo, nuestro punto de vista es diferente. Comenzamos con una identidad de Jacobi generalizada para el conmutador generalizado $f(x, y) = xy - \sigma(xy)$ la cual es válida en cualquier álgebra asociativa; resultado que es el análogo a la identidad de Jacobi inducida por un producto asociativo mediante el conmutador $[x, y] = xy - yx$.

Las propiedades de nuestra cuantización $\mathfrak{o}^+(2n)$ se prueban por inducción matemática sobre n . El caso base es $n = 4$, la cuantización de $\mathfrak{o}^+(8)$, que se sigue por cálculos directos. Es entonces que el paso inductivo para la cuantización de $\mathfrak{o}^+(2n)$ for $n > 4$ se sigue casi directamente del caso $\mathfrak{o}^+(8)$ porque, en cierto sentido, la cuantización de $\mathfrak{o}(2n)$ está cubierta por copias de $\mathfrak{o}^+(8)$ cuántico (ver teorema 4.3).

Existe en la literatura algunas otras propuestas para cuantizaciones de álgebras de Lie de tipo D_n : álgebras de Lie cuánticas definidas por

una generalización del criterio de Friedrich (caracterización de la estructura de álgebra de Lie por medio de primitivos) de Kharchenko [41] pero sin antisimetría ni identidad de Jacobi; álgebras de Lie cuánticas debidas a Delius, Gardner y Gould [17] con antisimetría pero sin una identidad de Jacobi, entre otras.

Este capítulo está organizado como sigue. Comenzamos aplicando una identidad de Jacobi a algunos generadores de $U_q^+(sl_4)$ la parte positiva del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo A_3 . Enseguida, en la sección 3 definimos una estructura cuántica sobre $\mathfrak{o}(2n)$ y probamos que, en cierto sentido $U_q^+\mathfrak{o}(8)$ es un álgebra envolvente universal de una cuantización de $\mathfrak{o}^+(8)$. Una generalización de este resultado se prueba en la sección 4. La definición de un álgebra de Lie generalizada (que llamamos σ -álgebra de Lie) que también generaliza a las álgebras de Clifford, se da en la sección 5, así como una representación de nuestra álgebra de Lie generalizada sobre la q -álgebra simétrica, análogamente al caso clásico. Finalmente, en la sección 6, definimos lo que son los morfismos de σ -álgebras de Lie y explicamos por qué la prueba de que $\mathfrak{o}(2n)$ es una σ -álgebra de Lie es un problema de programación entera.

2. Identidades no trenzadas y la cuantización de $U^+(sl_4)$

Nuestro punto inicial es la identidad (2.1), la cual se cumple en cualquier algebra asociativa.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea k un anillo conmutativo y A una k -álgebra asociativa, M un k -submódulo del k -módulo A , m el operador multiplicación de A y $\sigma : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ una función k -lineal arbitraria. Entonces, si $f = m(Id - \sigma) : M \otimes M \rightarrow M$, se sigue que*

$$(2.1) \quad f(f_1 - f_2) = m(f_1\sigma_2 - f_2\sigma_1 + \sigma f_2 - \sigma f_1 + f_2\sigma_1\sigma_2 - f_1\sigma_2\sigma_1) \\ + mm_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2\sigma_1).$$

DEM. Por cálculos directos. □

De hecho, la ecuación (2.1) es una generalización de la identidad de Jacobi, porque es equivalente a

$$(2.2) \quad f(f_1 - f_2 + f_1\sigma_2) = m(f_1\sigma_2\sigma_1 + f_2\sigma_1 - \sigma f_2 - \sigma f_1\sigma_2) \\ + m(\sigma f_1 - f_2\sigma_1\sigma_2) + mm_1(\sigma_2\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2\sigma_1).$$

Por lo tanto, si σ denota a la transposición usual $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ y $M = A$ entonces (2.2) se convierte en la identidad de Jacobi clásica. Un caso más general es cuando $M = A$ y σ sólo satisface la ecuación de trenza $\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ y

$$(2.3) \quad \sigma f_2 + \sigma f_1\sigma_2 = f_2\sigma_1 + f_1\sigma_2\sigma_1, \quad \sigma f_1 = f_2\sigma_1\sigma_2$$

entonces (2.2) se convierte en la identidad de Jacobi generalizada descubierta por Woronowicz dentro del marco del cálculo diferencial sobre grupos cuánticos [61]. También, las condiciones (2.3) aparecen en [61]. La identidad (2.1) la tomamos de [5].

Es bien conocido que las álgebras de Lie semisimples están formadas por copias de sl_n módulo algunas relaciones adicionales. En el caso cuántico, los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo están formados por copias de la cuantización de la envolvente universal de sl_n módulo algunas relaciones adicionales. Un fenómeno similar ocurre en la cuantización del caso D_n . Los siguientes q -conmutadores en $U_q^+(sl_4)$ son parte de las relaciones que definen al grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo en el caso D_n .

LEMA 2.2. . Sea k un anillo conmutativo con unidad y $q \in k^*$. Sea $U_q^+(sl_4)$ la k -álgebra asociativa generada por α_i , $i = 1, 2, 3$ con relaciones

$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_3\alpha_1 = 0, \alpha_i\alpha_j^2 - (q + q^{-1})\alpha_j\alpha_i\alpha_j + \alpha_j^2\alpha_i = 0, |i - j| = 1$$

entonces existen generadores $\alpha_{ij} \in U_q^+(sl_4)$, $1 \leq i < j \leq 4$, con relaciones

$$\begin{aligned} m(\alpha_{12} \otimes \alpha_{13} - \sigma(\alpha_{12} \otimes \alpha_{13})) &= 0, \quad m(\alpha_{12} \otimes \alpha_{23} - \sigma(\alpha_{12} \otimes \alpha_{23})) = \alpha_{13} \\ m(\alpha_{12} \otimes \alpha_{14} - \sigma(\alpha_{12} \otimes \alpha_{14})) &= 0, \quad m(\alpha_{12} \otimes \alpha_{24} - \sigma(\alpha_{12} \otimes \alpha_{24})) = \alpha_{14} \\ m(\alpha_{12} \otimes \alpha_{34} - \sigma(\alpha_{12} \otimes \alpha_{34})) &= 0, \quad m(\alpha_{13} \otimes \alpha_{23} - \sigma(\alpha_{13} \otimes \alpha_{23})) = 0 \\ m(\alpha_{13} \otimes \alpha_{14} - \sigma(\alpha_{13} \otimes \alpha_{14})) &= 0, \quad m(\alpha_{13} \otimes \alpha_{34} - \sigma(\alpha_{13} \otimes \alpha_{34})) = \alpha_{14} \\ m(\alpha_{13} \otimes \alpha_{24} - \sigma(\alpha_{13} \otimes \alpha_{24})) &= (q - q^{-1})m(\alpha_{23} \otimes \alpha_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\alpha_{23} \otimes \alpha_{14} - \sigma(\alpha_{23} \otimes \alpha_{14})) &= 0, \quad m(\alpha_{23} \otimes \alpha_{24} - \sigma(\alpha_{23} \otimes \alpha_{24})) = 0 \\ m(\alpha_{23} \otimes \alpha_{34} - \sigma(\alpha_{23} \otimes \alpha_{34})) &= \alpha_{24}, \quad m(\alpha_{14} \otimes \alpha_{24} - \sigma(\alpha_{14} \otimes \alpha_{24})) = 0 \\ m(\alpha_{14} \otimes \alpha_{34} - \sigma(\alpha_{14} \otimes \alpha_{34})) &= 0, \quad m(\alpha_{24} \otimes \alpha_{24} - \sigma(\alpha_{24} \otimes \alpha_{34})) = 0 \end{aligned}$$

donde m es el operador multiplicación de $U_q^+(sl_4)$, $\sigma(\alpha_{ij} \otimes \alpha_{ab}) = q^{c_{ij,ab}}\alpha_{ab} \otimes \alpha_{ij}$, $c_{ij,ab} = \delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{ja} + \delta_{jb}$ y δ es la delta de Kronecker.

DEM. Primero definimos $\alpha_{i(i+1)} = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$ y $\alpha_{13} = \alpha_{12}\alpha_{23} - q^{-1}\alpha_{23}\alpha_{12}$, $\alpha_{24} = \alpha_{23}\alpha_{34} - q^{-1}\alpha_{34}\alpha_{23}$. Entonces, usando (2.1) sobre $\alpha_{12} \otimes \alpha_{23} \otimes \alpha_{34}$ obtenemos

$$\alpha_{13}\alpha_{34} - q^{-1}\alpha_{34}\alpha_{13} = \alpha_{12}\alpha_{24} - q^{-1}\alpha_{24}\alpha_{14}.$$

Ponemos $\alpha_{14} = \alpha_{13}\alpha_{34} - q^{-1}\alpha_{34}\alpha_{13}$. Usando de nuevo (2.1) sobre $\alpha_{12} \otimes \alpha_{23} \otimes \alpha_{24}$ y después sobre $\alpha_{13} \otimes \alpha_{23} \otimes \alpha_{34}$, obtenemos

$$\alpha_{13}\alpha_{24} - \alpha_{24}\alpha_{13} = (q - q^{-1})\alpha_{23}\alpha_{14}$$

y se continua de la misma forma. \square

Usando la misma técnica se puede probar:

LEMA 2.3. *Existen generadores $\beta_{ij} \in U_q^+(sl_4)$, $1 \leq i < j \leq 4$ con relaciones*

$$\begin{aligned} \beta_{12}\beta_{13} - q^{-1}\beta_{13}\beta_{12} &= 0 & \beta_{12}\beta_{23} - q\beta_{23}\beta_{12} &= \beta_{13} \\ \beta_{12}\beta_{14} - q^{-1}\beta_{14}\beta_{12} &= 0 & \beta_{12}\beta_{24} - q\beta_{24}\beta_{12} &= \beta_{14} \\ \beta_{12}\beta_{34} - \beta_{34}\beta_{12} &= 0 & \beta_{13}\beta_{23} - q^{-1}\beta_{23}\beta_{13} &= 0 \\ \beta_{13}\beta_{14} - q\beta_{13}\beta_{23} &= 0 & \beta_{13}\beta_{24} - \beta_{13}\beta_{24} &= 0 \\ \beta_{13}\beta_{34} - q^{-1}\beta_{13}\beta_{34} &= \beta_{14} & \beta_{23}\beta_{14} - \beta_{23}\beta_{14} &= (q - q^{-1})\beta_{13}\beta_{24} \\ \beta_{23}\beta_{24} - q\beta_{23}\beta_{24} &= 0 & \beta_{23}\beta_{34} - q^{-1}\beta_{23}\beta_{34} &= \beta_{24}. \end{aligned}$$

3. La cuantización de D_n positivo

Tratamos con los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo en la forma de Lusztig [44] sobre anillos conmutativos. Esto significa que, si k es un anillo conmutativo con identidad, $q \in k^*$ y G es el diagrama de Dynkin de tipo D_n , $n \geq 4$, con nodos etiquetados $1, 2, \dots, n$ y el nodo de ramificación etiquetado $n-2$, entonces *el grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo D_n positivo*, denotado $U_q^+\mathfrak{o}(2n)$, es la k -álgebra asociativa con 1, con generadores E_1, \dots, E_n y relaciones

$$\begin{aligned} E_i E_j - E_j E_i &= 0 & \text{if } i \text{ no está unido con } j \text{ en } G; \\ E_i E_j^2 - (q + q^{-1})E_j E_i E_j + E_j^2 E_i &= 0 & \text{si } i \text{ está unido con } j \text{ en } G. \end{aligned}$$

Tomemos los símbolos (letras) formales, M_{ij} y S_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$ (que llamaremos *elementos básicos canónicos de $\mathfrak{o}^+(2n)_q$*), ordenados de acuerdo a las siguientes reglas:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} M_{i(i+1)} &> \dots > M_{in} \\ &> S_{in} > S_{i(i+1)} > \dots > S_{i(n-1)} \quad 1 \leq i \leq n-1; \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad S_{j(n-1)} > M_{(j+1)(j+2)} \quad 1 \leq j \leq n-2.$$

Sea L_n el k -módulo con la base canónica de $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ como base libre. Ahora, definimos ($1 \leq i < j \leq n, 1 \leq a < b \leq n$)

$$\begin{aligned} c_{ij,ab} &= \delta_{ia} - \delta_{ib} - \delta_{ja} + \delta_{jb} & h_{ij,ab} &= \delta_{ai} - \delta_{aj} - \delta_{bj} + \delta_{bi} \\ d_{ij,ab} &= \delta_{ia} + \delta_{bj} + \delta_{ja} + \delta_{bi} \end{aligned}$$

donde δ denota a la delta de Kronecker.

El álgebra no asociativa $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ es una 5-upla $(L_n, \sigma, B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)})$ donde σ son $B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ son funciones lineales; $\sigma : L_n \otimes L_n \rightarrow L_n \otimes L_n$, $B^{(\beta)} : L_n \otimes L_n \rightarrow L_n^{\otimes \beta}$, $\beta = 1, 2, 3$ definidas por las condiciones $\sigma^2 = Id$, $B^{(\beta)}\sigma = -B^{(\beta)}$ y por

$$\begin{aligned}\sigma(M_{ij} \otimes M_{ab}) &= q^{c_{ij,ab}} M_{ab} \otimes M_{ij} && \text{si } M_{ij} > M_{ab}; \\ \sigma(M_{ij} \otimes S_{ab}) &= q^{h_{ij,ab}} S_{ab} \otimes M_{ij} && \text{si } M_{ij} > S_{ab}; \\ \sigma(S_{ij} \otimes S_{ab}) &= q^{d_{ij,ab}} S_{ab} \otimes S_{ij} && \text{si } S_{ij} > S_{ab},\end{aligned}$$

así como

$$\begin{aligned}B^{(1)}(M_{ij} \otimes M_{ab}) &= \delta_{ja} M_{ib} - q \delta_{bi} M_{aj} && B^{(1)}(M_{ij} \otimes S_{ab}) = \delta_{ja} S'_{ib} + \delta_{bj} S'_{ai} \\ B^{(1)}(S_{ij} \otimes S_{ab}) &= 0\end{aligned}$$

donde

$$S'_{ij} = \begin{cases} S_{ij} & \text{si } i < j \\ -q S_{ji} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

y

$$B^{(2)}(M_{ij} \otimes S_{ab}) = \begin{cases} (q - \frac{1}{q}) \frac{1}{q} (S_{ij} \otimes M_{ab} - q S_{in} \otimes M_{an}), & i < a, j = b \\ -q(q - \frac{1}{q}) S_{in} \otimes M_{in}, & i = a, j = b < n \\ (q - \frac{1}{q}) S_{in} \otimes M_{aj}, & i < a < j < b = n \\ (q - \frac{1}{q}) S_{ib} \otimes M_{aj}, & i < a < b < n, j = n \\ -(q - \frac{1}{q}) S_{ai} \otimes M_{bn}, & a < b < i < j = n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$B^{(2)}(S_{ij} \otimes S_{ab}) = \begin{cases} -(q - q^{-1}) S_{bn} \otimes S_{ai} & \text{si } a < b < i < j = n \\ (q - q^{-1}) S_{an} \otimes S_{ib} & \text{si } i < a < b < j = n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$B^{(2)}(M_{ij} \otimes M_{ab}) = \begin{cases} (q - q^{-1}) M_{aj} \otimes M_{ib} & \text{si } i < a < j < b \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$B^{(3)}(M_{ij} \otimes S_{ab}) = \begin{cases} -q(q - q^{-1}) S_{in} \otimes M_{bj} \otimes M_{in} & \text{si } i = a < b < j \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$B^{(3)}(S_{ij} \otimes S_{ab}) = \begin{cases} -q(q - q^{-1}) S_{ib} \otimes M_{jn} \otimes S_{jn} & \text{si } i < j = a < b < n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

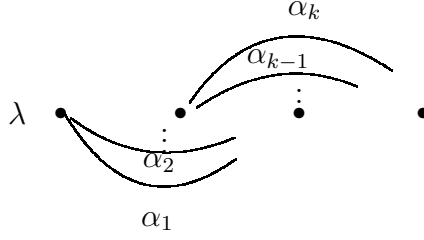


FIGURA 1. El producto tensorial $\lambda\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k$

Nuestra afirmación principal es que $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ es un álgebra de Lie generalizada con envolvente universal la parte positiva del grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo de tipo D_n . Para demostrar semejante afirmación necesitamos poner los elementos de $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ en un carcaj (gráfica orientada) (ver [53]). A pesar de que los carcajes tienen una estructura de álgebra asociativa, nosotros estamos interesados principalmente en su estructura lineal. La estructura asociativa juega un papel secundario.

Sea Γ_n un carcaj de tipo A_n . Tomamos dos copias de la k -categoría $k\Gamma_n$: $\mathcal{D}_n = k\Gamma_n \oplus k\Gamma_n$. En la segunda copia dibujamos arcos punteados, mientras que en la primera dibujamos arcos continuos. Un arco punteado con origen i y final j será etiquetado como S_{ij} y un arco continuo con origen i y final j lo etiquetaremos con M_{ij} . Además, para evitar redundancias, en lugar de escribir un par de conjuntos de vértices, uno por cada copia de $k\Gamma_n$, dibujaremos un sólo conjunto de vértices. Por lo que los arcos continuos y punteados pueden tener vértices comunes.

Definimos funciones $B^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$ como aparecen en las tablas 1, 2 y 3 respectivamente, de forma diagramática, donde un diagrama del tipo de la figura 1, para $\lambda \in k$, significa el producto tensorial $\lambda\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k$.

TEOREMA 3.1. *El grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$ de tipo D_4 positivo es generado por los elementos de $\mathfrak{o}^+(8)_q$, con relaciones*

$$m(x \otimes y) - m\sigma(x \otimes y) = B^{(1)}(x \otimes y) + mB^{(2)}(x \otimes y) + mm_1B^{(3)}(x \otimes y)$$

donde $x, y \in \mathfrak{o}^+(8)_q$ y m es el operador multiplicación de $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$.

DEM. Casi todos los conmutadores consistentes de M_{ij} , S_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$ se pueden obtener de los lemas 2.2 y 2.3. Las excepciones son M_{13} con S_{23} , M_{13} con S_{12} y S_{12} con S_{23} . De hecho, en las tablas 4 y 5 cada fila representa un isomorfismo de $U_q^+(sl_4)$ al subálgebra de $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$ que manda cada cabecera de la tabla a un generador en $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$. Por ejemplo, de la segunda fila de tabla 4 y lema 2.2 obtenemos

$$M_{13}S_{24} - S_{24}M_{13} = (q - q^{-1})M_{23}S_{14}.$$

TABLA 1. La función $B^{(1)}$. En esta tabla, y en las siguientes los elementos x, y son básicos canónicos tales que $x < y$.

$x \otimes y$	$B^{(1)}(x \otimes y)$
	$-q$
otro caso	0

Hay algunos elementos básicos canónicos que se comportan como los generadores β_{ij} en el lema 2.3 pero con $1/q$ en lugar of q . Este comportamiento se muestra en la tabla 6.
















Para lidiar con los casos no cubiertos de conmutadores, definimos una función auxiliar ρ : ρ que coincide con σ , excepto cuando el conmutador sobre $x \otimes y$ tiene la forma $xy - yx = \xi ab$ con $\xi \neq 0$ en k , es entonces que el elemento cuadrático $a \otimes b$ se incluye en ρ . Por ejemplo, $\rho(M_{13} \otimes M_{24}) = M_{24} \otimes M_{13} + (q - q^{-1})M_{23} \otimes M_{14}$. Entonces podemos usar la ecuación (2.1) para ρ sobre $S_{23} \otimes M_{12} \otimes M_{23}$ para obtener

$$S_{23}M_{13} - m\rho(S_{23} \otimes M_{13}) = -qS_{13}M_{23} + qm\rho(S_{13} \otimes M_{23})$$

donde m es el operador multiplicación de $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$. Puesto que $\rho(S_{23} \otimes M_{13}) = qM_{13} \otimes S_{23} + q^2(q - q^{-1})M_{14} \otimes S_{24}$ y $\rho(S_{13} \otimes M_{23}) = q^{-1}M_{23} \otimes S_{13} + (q - q^{-1})M_{24} \otimes S_{14}$ entonces,

$$S_{23}M_{13} - qM_{13}S_{23} = S_{12} - q^2(q - q^{-1})M_{14}S_{24} - (q - q^{-1})S_{13}M_{23} + q(q - q^{-1})M_{24}S_{14}.$$

TABLA 2. La función $B^{(2)}$.

$x \otimes y$	$B^{(2)}(x \otimes y)$
	$(q - q^{-1})$ 
 n	$-q(q - q^{-1})$  n
 n	$(q - q^{-1})$  n
 n	$q^{-1}(q - q^{-1})$  n
	$+(q^{-1} - q)$  n
 n	$(q - q^{-1})$  n
 n	$(q - q^{-1})$  n
 n	$(q^{-1} - q)$  n
otro caso	0

De forma similar, usando (2.1) sobre $S_{23} \otimes M_{24} \otimes S_{14}$ se puede probar que

$$S_{23}S_{12} - q^{-1}S_{12}S_{23} = (q - q^{-1})^2 S_{13}M_{24}S_{24}$$

y usando (2.1) sobre $M_{13} \otimes M_{23} \otimes S_{13}$,

$$M_{13}S_{12} - qS_{12}M_{13} = -q(q - q^{-1})^2 S_{14}M_{23}M_{14}.$$

□

TABLA 3. La función $B^{(3)}$.





$x \otimes y$	$B^{(3)}(x \otimes y)$
	$q(q - q^{-1})^2$ 
	$-q(q^{-1} - q)^2$ 
otro caso	0

TABLA 4. Relaciones del tipo del lema 1

α_{12}	α_{13}	α_{23}	α_{14}	α_{24}	α_{34}
M_{12}	M_{13}	M_{23}	M_{14}	M_{24}	M_{34}
M_{12}	M_{13}	M_{23}	S_{14}	S_{24}	S_{34}
M_{12}	M_{14}	M_{24}	$-q^{-1}S_{13}$	$-q^{-1}S_{23}$	S_{34}
M_{12}	S_{14}	S_{24}	$-q^{-1}S_{13}$	$-q^{-1}S_{23}$	M_{34}

TABLA 5. Relaciones del tipo del lema 2

β_{12}	β_{13}	β_{23}	β_{14}	β_{24}	β_{34}
M_{34}	$-qM_{24}$	M_{23}	S_{23}	S_{24}	S_{34}
S_{34}	$-qS_{14}$	M_{13}	S_{13}	M_{14}	M_{34}
M_{24}	$-qM_{14}$	M_{12}	S_{12}	S_{14}	S_{24}

4. Elementos básicos canónicos en $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$

Definimos inductivamente los siguientes elementos en $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$:

$$\begin{aligned}
 M_{i(i+1)} &= E_i & 1 \leq i \leq n-1; \\
 S_{(n-1)n} &= E_n; \\
 M_{i(i+k)} &= [M_{i(i+k-1)}, M_{(i+k-1)(i+k)}]_q & 1 < k < n; \\
 S_{(n-1-k)n} &= [M_{(n-1-k)(n-1-k+1)}, S_{(n-1-k+1)n}]_q & 1 \leq k \leq n-2; \\
 q^{-1}S_{i(i+1)} &= [M_{in}, S_{(i+1)n}]_q & 1 \leq i < n-1; \\
 S_{i(i+k)} &= [M_{i(i+k-1)}, S_{(i+k-1)(i+k)}]_q & 1 < k < n.
 \end{aligned}$$

TABLA 6. Relaciones de tipo dual al lema 2. El número q se reemplaza por $1/q$ en el lema 2.

β_{12}	β_{13}	β_{23}	β_{14}	β_{24}	β_{34}
M_{23}	S_{24}	S_{34}	S_{12}	S_{13}	M_{14}
M_{23}	M_{24}	M_{34}	S_{12}	S_{13}	S_{14}

donde $[x, y]_q = xy - q^{-1}yx$.

LEMA 4.1.

$$M_{12}M_{1b} - qM_{1b}M_{12} = 0, \quad 2 < b \leq n$$

DEM. Por inducción matemática sobre b . Pongamos

$$[M_{ij}, M_{uv}] = m(Id \otimes Id - \sigma)(M_{ij} \otimes M_{ab})$$

donde m es el operador multiplicación de $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$. De la identidad de Jacobi (2.1) sobre $M_{12} \otimes M_{1(b-1)} \otimes M_{(b-1)b}$ obtenemos

$$(4.1) \quad [M_{12}, [M_{1(b-1)}, M_{(b-1)b}]] - [[M_{12}, M_{1(b-1)}], M_{(b-1)b}] \\ = -q^{-1}[[M_{12}, M_{(b-1)b}], M_{1(b-1)}].$$

Si $b = 3$ entonces el lado derecho de (4.1) es $[M_{13}, M_{13}] = 0$ y si $b > 3$ entonces el lado derecho es cero porque $[M_{12}, M_{(b-1)b}] = 0$ por definición. Se sigue, por inducción matemática sobre b que

$$0 = [M_{12}, [M_{1(b-1)}, M_{(b-1)b}]] = [M_{12}, M_{1b}].$$

□

LEMA 4.2. *Fijemos $1 < j < n$. Entonces*

$$(4.2) \quad M_{1j}M_{j(j+1)} - qM_{j(j+1)}M_{1j} = 0$$

$$(4.3) \quad M_{1j}M_{k(k+1)} - M_{k(k+1)}M_{1j} = 0, \quad j < k < n$$

$$(4.4) \quad M_{1j}S_{(n-1)n} - S_{(n-1)n}M_{1j} = 0.$$

DEM. Por inducción matemática sobre j .

□

Nótese que (4.2) es equivalente a

$$M_{1j}M_{j(j+1)}^2 - (q + q^{-1})M_{j(j+1)}M_{1j}M_{j(j+1)} + M_{j(j+1)}^2M_{1j} = 0$$

por tanto, las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4) son las relaciones que definen a $U_q^+(\mathfrak{o}(2(n-j+2)))$.

TEOREMA 4.3. Sean

$$\mathcal{B} = \{M_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{S_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Si $x, y \in \mathcal{B}$ entonces, existe una subálgebra A de $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$ tal que

- (1) $x, y \in A$ y $A \simeq U_q^+ \mathfrak{o}(8)$ como álgebras;
- (2) $m(x \otimes y) - m\sigma(x \otimes y) = B^{(1)}(x \otimes y) + mB^{(2)}(x \otimes y) + mm_1B^{(3)}(x \otimes y)$, donde m es el operador multiplicación del álgebra $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$.

DEM.

- (1) Supongamos $x = \gamma_{ab}$ y $y = \rho_{ij}$ con $\gamma = M$ ó S y $\rho = M$ ó S . Si $1 < a, b \leq n$ y $1 < i, j \leq n$, entonces x, y están en B , la subálgebra generada por $M_{i(i+1)}$, $1 < i < n$, y $S_{(n-1)n}$, la cual es isomorfa a $U_q^+(\mathfrak{o}2(n-1))$. Por tanto, usando inducción matemática, el teorema se cumple.

Supongamos ahora que $a = 1$. Si $(i, j) \neq (1, 2)$ y $b > 2$, entonces x, y están en el álgebra generada por M_{1b} , M_{bk} , $b < k \leq n$, y $S_{(n-1)n}$, la cual es isomorfa a $U_q^+(\mathfrak{o}2(n-b+2))$ debido al lema 4.2. Si $(i, j) = (1, 2)$ y $b > 2$ entonces, puesto que M_{2b} , M_{bn} , S_{bn} pertenecen a $B \simeq U_q^+(\mathfrak{o}2(n-1))$, podemos usar inducción matemática y el lema 4.1 para obtener que M_{12} , M_{2b} , M_{bn} y S_{bn} son generadores de una subálgebra isomorfa a $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$, la cual contiene a x y y .

- (2) Si $x, y \in \mathcal{B}$, entonces, debido a (1), existe A , una subálgebra isomorfa a $U_q^+ \mathfrak{o}(8)$, tal que $x, y \in A$. Como (2) se cumple en A , (2) también se cumple en $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$.

□

5. Estructuras de álgebra de Lie generalizadas

Sea L un k -módulo y $\sigma : L \otimes L \rightarrow L \otimes L$ una función lineal. Definimos el *álgebra simétrica* $\mathcal{S}(L)$ of L como el cociente del álgebra tensorial L^{\otimes} por el ideal bilateral generado por

$$x \otimes y - \sigma(x \otimes y), \quad x, y \in L.$$

Además, supóngase que hay $s+1$ funciones lineales $B^{(\beta)} : L \otimes L \rightarrow L^{\otimes \beta}$, $\beta = 0, 1, \dots, s$. Defínase

$$R : L^{\otimes} \otimes L^{\otimes} \rightarrow L^{\otimes} \otimes L^{\otimes}$$

mediante

$$R(u \otimes v) = \begin{cases} v \otimes u & \text{si } u = 1 \text{ ó } v = 1 \\ \sigma(u \otimes v) + \sum_k B^{(k)}(u \otimes v) \otimes 1 & \text{si } u, v \in L \\ u \otimes v & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $j : L \rightarrow \mathcal{S}(L)$ morfismo natural y $\hat{L} = L \oplus k$.

DEFINICIÓN 5.1.

- (1) Una σ -Lie álgebra es un k -módulo L junto con las funciones k -lineales $\sigma : L \otimes L \rightarrow L \otimes L$, $B^{(\beta)} : L \otimes L \rightarrow L^{\otimes \beta}$, $0 \leq \beta \leq s$ y $\underline{\cdot} : \hat{L} \otimes \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ tales que
- (a) $\sigma^2 = Id$ y $x \cdot 1 = j(x)$, $\forall x \in L$;
 - (b) $B^{(\beta)}\sigma = -B^{(\beta)}$, $\forall \beta \geq 0$;
 - (c) $(R_1R_2R_1)(x \otimes y \otimes z) \cdot 1 = (R_2R_1R_2)(x \otimes y \otimes z) \cdot 1$, $\forall x, y, z \in L$;
- donde $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_a) \cdot 1 = x_1 \cdot (\dots (x_a \cdot 1) \dots)$ y $1 \cdot z = z$, $\forall z \in \mathcal{S}(L)$.
- (2) El álgebra envolvente universal $U(L)$ de una σ -Lie álgebra L es el álgebra cociente de L^{\otimes} , el álgebra tensorial de L , por el módulo bilateral generado por

$$x \otimes y - \sigma(x \otimes y) - \sum_{\beta=0}^s B^{(\beta)}(x \otimes y).$$

EJEMPLO 5.1. Si ponemos $B^{(\beta)} = 0$ para $\beta \neq 1$ y σ denota la transposición usual $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ entonces obtenemos un álgebra de Lie clásica con corchete $B^{(1)}$ puesto que la así llamada ecuación de trenza $R_1R_2R_1 = R_2R_1R_2$ es equivalente, en este caso a la identidad de Jacobi clásica. Siendo la función $\underline{\cdot} : L \otimes \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ la representación clásica sobre la álgebra simétrica relacionada al teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt [12].

Podría parecer que 1c de la definición 5.1 es una ecuación “externa” a L , sin embargo está dentro de L porque puede escribirse como

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & B^{(1)}B_1^{(1)} - B^{(1)}B_2^{(1)} + B^{(1)}B_2^{(1)}\sigma_1 + B_1^{(0)} - B_1^{(0)}\sigma_2 \\ & + B_1^{(0)}\sigma_2\sigma_1 - B_2^{(0)} + B_2^{(0)}\sigma_1 - B_2^{(0)}\sigma_1\sigma_2 \\ & = j^{-1} \left(\sigma B_2^{(1)} - \sigma B_1^{(1)} - \sigma B_2^{(1)}\sigma_1 + \sum_{\beta \neq 1} B^{(\beta)}(B_2^{(1)} - B_2^{(1)}\sigma_1 - B_1^{(1)}) \right. \\ & \left. + \sum_{\beta \geq 1} (B_2^{(\beta)}\sigma_1\sigma_2 + B_1^{(\beta)}\sigma_2 - B_1^{(\beta)}\sigma_2\sigma_1) + \sum_{\beta \geq 2} (B_2^{(\beta)} - B_1^{(\beta)}) \right) \cdot 1. \end{aligned}$$

Desde luego, como hace notar Vybornov [60], la antisimetría 1b de la definición 5.1 es equivalente a la invertibilidad de la función

R. Nótese que nuestra formulación de σ -Lie álgebra es similar a la definición de Vyborno de un álgebra de Lie cuántica en abstracto.

La función \cdot de la definición 5.1 se puede contruir de una forma canónica para ciertos espacios graduados.

DEFINICIÓN 5.2. Llamamos *graduación estricta* de una σ -Lie álgebra L a una descomposición directa de la forma

$$L = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

donde cada L_i es un subespacio de L tal que

$$(5.2) \quad B^{(k)}(L_i \otimes L_j) \subseteq \bigoplus_{u_1 + \dots + u_k \leq i+j-1} L_{u_1} \otimes \dots \otimes L_{u_k}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Como es usual, si $x \in L_i$, x se dice que x es homogéneo de grado i y escribimos $\eta(x) = i$.

Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una base \mathcal{B}_i consistente de elementos homogéneos de grado i , y además que $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ es un conjunto totalmente ordenado.

Si $\Sigma = (x_1, \dots, x_k)$ es una sucesión finita de elementos no decrecientes en \mathcal{B} , ponemos $z_\Sigma = j(x_1) \dots j(x_k) \in \mathcal{S}(L)$, $\eta(\Sigma) = \eta(x_1) + \dots + \eta(x_k)$ y $z_\emptyset = 1 \in \mathcal{S}(L)$, $\eta(z_\emptyset) = 0$. Además, $x \leq \Sigma = (x_1, \dots, x_k)$, para $x \in \mathcal{B}$, significa $x \leq x_1$.

LEMA 5.1. Sea \mathcal{S}_p el submódulo de $\mathcal{S}(L)$ generado por z_Σ tal que $\eta(\Sigma) \leq p$.

Si $\sigma(x \otimes y) = q_{xy} y \otimes x$, $\forall x, y \in \mathcal{B}$, entonces, existe un k -morfismo $\cdot : L \otimes \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ tal que, para cualquier $x_\lambda \in \mathcal{B}$,

- (1) $x_\lambda \cdot z_\Sigma = j(x_\lambda) z_\Sigma$, si $x_\lambda \leq \Sigma$;
- (2) $x_\lambda \cdot z_\Sigma - j(x_\lambda) z_\Sigma \in \mathcal{S}_{\eta(x_\lambda) + \eta(\Sigma) - 1}$.

DEM. Un subconjunto de

$$\{z_\Sigma \mid \Sigma \text{ es una sucesión no decreciente de elementos básicos de } L\}$$

es una base de $\mathcal{S}(L)$. Por lo que vamos a definir \cdot sobre tal subconjunto. Procedemos por inducción matemática sobre $\eta(x_\lambda) + \eta(\Sigma)$. Si $\eta(x_\lambda) + \eta(\Sigma) = 1$ entonces $\Sigma = \emptyset$. Entonces se define $x_\lambda \cdot z_\emptyset = j(x_\lambda)$. Ahora supóngase que $x_{\lambda'} \cdot z_{\Sigma'}$ está definida para $\eta(x_{\lambda'}) + \eta(\Sigma') < \eta(x_\lambda) + \eta(\Sigma)$, satisfaciendo (1) y (2). Tenemos que definir $x_\lambda \cdot z_\Sigma$. Hay dos casos: $x_\lambda \leq \Sigma$ ó $x_\lambda \not\leq \Sigma$.

Caso $\lambda \leq \Sigma$: defínase $x_\lambda \cdot \Sigma = j(x_\lambda) z_\Sigma$.

Caso $\lambda \not\leq \Sigma$: podemos escribir $\Sigma = (x_\mu, N)$ donde $x_\mu \leq N$ y $x_\lambda > x_\mu$ y

$$B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) = \sum_i \xi_i x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_\beta}$$

donde cada $x_{i_j} \in \mathcal{B}$ y $\xi_i \in k$. Debido a la hipótesis de inducción y (5.2) podemos poner $w = x_\lambda \cdot z_N - z_\lambda z_N \in \mathcal{S}_{\eta(x_\lambda) + \eta(N) - 1}$. Entonces $x_\mu \cdot w$ ya está definido y también podemos definir

$$B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N = \sum_i \xi_i x_{i_1} \cdot (\dots (x_{i_\beta} \cdot z_N) \dots).$$

Por lo tanto, podemos definir

$$(5.3) \quad x_\lambda \cdot z_N = j(x_\lambda)j(x_\mu)z_N + q_{\lambda\mu}x_\mu \cdot w + \sum_\beta B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N$$

satisfaciendo (2). \square

EJEMPLO 5.2. Sea V un k -espacio vectorial y $f : V \otimes V \rightarrow k$ una forma bilineal simétrica. Definimos $B^{(0)} = 2f$, $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $x \otimes y \mapsto -y \otimes x$, y una descomposición trivial $V = \bigoplus_i V_i$, $V_1 = V$, $V_i = 0$ si $i > 0$. Obtenemos $R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2$. Entonces, el álgebra envolvente universal de la σ -Lie algebra $(V, \sigma, B^{(0)})$, es la álgebra de Clifford clásica $Cl(V)$ de V . Como en el caso de las álgebras de Lie, la función lineal $_ \cdot _$ es la representación clásica sobre la álgebra simétrica clásica relacionada al teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para álgebras de Clifford.

EJEMPLO 5.3. El espacio $\mathfrak{o}^+(8)_q$ tiene una estructura de σ -Lie álgebra; la ecuación de la definición 1c se obtiene por cálculos directos (usando *Maxima* [54]). La descomposición (5.2) es inducida por los siguientes elementos básicos canónico de $\mathfrak{o}^+(8)_q$ como homogéneos con grados siguientes: $\eta(M_{12}) = 3, \eta(M_{13}) = 3, \eta(M_{14}) = 1, \eta(S_{14}) = 1, \eta(S_{12}) = 1, \eta(S_{13}) = 1, \eta(M_{23}) = 1, \eta(M_{24}) = 1, \eta(S_{24}) = 1, \eta(S_{23}) = 3, \eta(M_{34}) = 3, \eta(S_{34}) = 3$. Del teorema 3.1 obtenemos $U(\mathfrak{o}^+(8)_q) \simeq U_q^+ \mathfrak{o}(8)$ como álgebras asociativas.

PROPOSICIÓN 5.2. Sea L una σ -Lie algebra con graduación estricta $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i$, sea \mathcal{B}_i una base de L_i , $\forall i \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$. Existe una función lineal $_ \cdot _ : L \otimes \mathcal{S}(L) \rightarrow \mathcal{S}(L)$ tal que

$$(5.4) \quad x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_N) - \sigma(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N = \sum_{\beta=0}^s B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N, \quad \forall x_\lambda, x_\mu \in \mathcal{B}$$

DEM. Se pueden hacer modificaciones naturales a la prueba del lema 1 de [12] para el caso de σ -Lie álgebras (modificaciones de este tipo fuero hechas en el lema V.2 de [3] para una generalización de álgebras de Lie llamadas T -álgebras de Lie). Sea $_ \cdot _$ la función definida en el lema 5.1. Hay dos casos:

- (1) $x_\mu \leq N$ ó $x_\lambda \leq N$;

(2) $x_\mu \not\leq N$ y $x_\lambda \not\leq N$.

(1) Por la antisimetría podemos suponer que $x_\mu \leq N$ y $x_\mu < x_\lambda$. Sea $M = (x_\mu, N)$; entonces, por la definición (5.3),

$$\begin{aligned} q_{\lambda\mu}x_\mu \cdot (x_\lambda \cdot z_N) + \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N &= q_{\lambda\mu}x_\mu \cdot (j(x_\lambda)z_N) \\ &+ q_{\lambda\mu}x_\mu \cdot (x_\lambda \cdot z_N - j(x_\lambda)z_N) + \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N \\ &= x_\lambda \cdot z_M = x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_N). \end{aligned}$$

(2) Sea $N = (x_\gamma, Q)$ where $x_\gamma \leq Q$, $x_\gamma < x_\lambda$ y $x_\gamma < x_\mu$. Supóngase que (5.4) se cumple para cualquier $\eta(x'_\lambda) + \eta(x'_\mu) + \eta(N') \leq r$. Para $\eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(N) \leq r + 1$ tenemos $x_\mu \cdot z_Q = j(x_\mu)z_Q + w$, donde $w \in \mathcal{S}_{\eta(x_\mu) + \eta(Q) - 1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_N) &= x_\lambda \cdot q_{\mu\gamma}(x_\gamma \otimes x_\mu) \cdot z_Q + x_\lambda \cdot \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\mu \otimes x_\gamma) \cdot z_Q \\ &= q_{\mu\gamma}q_{\lambda\gamma}x_\gamma \cdot (x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_Q)) + q_{\mu\gamma} \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\gamma) \cdot (x_\mu \cdot z_Q) \\ &\quad + x_\lambda \cdot \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\mu \otimes x_\gamma) \cdot z_Q \end{aligned}$$

puesto que, calculando el grado, (5.4) se puede aplicar a $x_\lambda \cdot (x_\gamma \cdot j(x_\mu)z_Q) + x_\lambda \cdot (x_\gamma \cdot w) = x_\lambda \cdot (x_\gamma \cdot (x_\mu \cdot z_Q))$. Usando que x_λ, x_μ son intercambiables y $\eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(z_Q) \leq r$ se sigue,

$$\begin{aligned} x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_N) - q_{\lambda\mu}x_\mu \cdot (x_\lambda \cdot z_N) &= \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N \\ &+ \sum_{\beta} \left(B_2^{(\beta)} \sigma_1 \sigma_2 - B_1^{(\beta)} + B_1^{(\beta)} \sigma_2 - B_2^{(\beta)} \sigma_1 + B_2^{(\beta)} \right. \\ &\quad \left. - B_1^{(\beta)} \sigma_2 \sigma_1 \right) (x_\lambda \otimes x_\mu \otimes x_\gamma) \cdot z_Q \\ &= \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N + ((R_2 R_1 R_2 - R_1 R_2 R_1)(x_\lambda \otimes x_\mu \otimes x_\gamma)) \cdot z_Q. \end{aligned}$$

Ahora, podemos usar la ecuación (5.1) sobre $x_\lambda \otimes x_\mu \otimes x_\gamma$ as $A \cdot 1 = B \cdot 1$ donde $A \in L$ y $B \in L^\otimes$; entonces, usando la hipótesis de inducción, (5.1) significa que $A \equiv B \pmod{J_s}$, donde J_s el ideal bilateral del álgebra tensorial L^\otimes generado por $x \otimes y - \sigma(x \otimes y) - \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x \otimes y)$, tal que $\eta(x) + \eta(y) < s = \eta(x_\lambda) + \eta(x_\mu) + \eta(x_\gamma)$.

Cálculos directos muestran que

$$((R_2 R_1 R_2 - R_1 R_2 R_1)(x_\lambda \otimes x_\mu \otimes x_\gamma)) \cdot z_Q = A \cdot z_Q - B \cdot z_Q = A \cdot z_Q - A \cdot z_Q$$

puesto que $B \equiv A \pmod{J_s}$ y usando la hipótesis de inducción de nuevo.

Por lo tanto,

$$x_\lambda \cdot (x_\mu \cdot z_N) - q_{\lambda\mu} x_\mu \cdot (x_\lambda \cdot z_N) = \sum_{\beta} B^{(\beta)}(x_\lambda \otimes x_\mu) \cdot z_N$$

□

Haciendo un paralelo con la teoría de las álgebras de Lie clásicas, resulta de la proposición 5.2 que:

TEOREMA 5.3. *Sea L una σ -Lie álgebra con graduación estricta $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} L_i$. Entonces*

$$U(L) \simeq \mathcal{S}(L)$$

como k -módulos.

6. Morfismos y problemas de programación entera

DEFINICIÓN 6.1. Si $(L_i, \sigma_i, B_i^{(\beta)})$ es una σ -Lie álgebra, $i = 1, 2$, entonces un morfismo lineal $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ es llamado un morfismo de σ -Lie álgebras si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} L_1 \otimes L_1 & \xrightarrow{B_1^{(\beta)}} & L_1^{\otimes \beta} \\ \varphi \otimes \varphi \downarrow & & \varphi^{\otimes \beta} \downarrow \\ L_2 \otimes L_2 & \xrightarrow{B_2^{(\beta)}} & L_2^{\otimes \beta} \end{array} \quad \beta = 0, 1, \dots \quad \begin{array}{ccc} L_1 \otimes L_1 & \xrightarrow{\sigma_1} & L_1 \otimes L_1 \\ \varphi \otimes \varphi \downarrow & & \varphi \otimes \varphi \downarrow \\ L_2 \otimes L_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & L_2 \otimes L_2 \end{array}$$

donde $\varphi^{\otimes \beta} : L_1^{\otimes \beta} \rightarrow L_2^{\otimes \beta}$, $\varphi^{\otimes \beta} = \varphi \otimes \dots \otimes \varphi$ (β factores).

Fijemos $1 \leq k < n - 1$. Sea $\mathfrak{o}^+(2n, k)_q$ la subálgebra de $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ obtenida eliminando los elementos básicos canónicos M_{ik} , M_{kj} , y S_{ik} , S_{kj} para $1 \leq i < k < j \leq n$.

PROPOSICIÓN 6.1. *Existe un isomorfismo $\varphi : \mathfrak{o}^+(2n, k)_q \rightarrow \mathfrak{o}^+(2(n-1))_q$ de σ -Lie álgebras tal que*

- (1) $\varphi(M_{(k-1)(k+1)}) = M_{(k-1)k}$ y $\varphi(S_{(k-1)(k+1)}) = S_{(k-1)k}$;
- (2) φ preserva el orden de los básicos canónicos.

DEM. Sea $f : \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$, definido por

$$f(j) = \begin{cases} j, & \text{si } j < k \\ j-1, & \text{si } j > k \end{cases}$$

entonces definimos $\varphi : \mathfrak{o}^+(2n, k)_q \rightarrow \mathfrak{o}^+(2(n-1))_q$, $\varphi(M_{ij}) = M_{f(i)f(j)}$, $\varphi(S_{ij}) = S_{f(i)f(j)}$.

Supongamos que $k < i$ en (3.1). Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(M_{i(i+1)}) &= M_{(i-1)i} > \dots > \varphi(M_{in}) = M_{(i-1)(n-1)} > \varphi(S_{in}) \\ &= S_{(i-1)(n-1)} > \varphi(S_{i(i+1)}) = S_{(i-1)i} > \dots > \varphi(S_{i(n-1)}) = S_{(i-1)(n-2)}\end{aligned}$$

la cual es la definición del orden (3.1) en $\mathfrak{o}^+(2(n-1))_q$. De forma similar, si $k > i$,

$$\begin{aligned}\dots > M_{i(k-1)} > M_{ik} > M_{i(k+1)} > \dots M_{in} > S_{in} > \dots \\ &> S_{i(k-1)} > S_{ik} > S_{i(k+1)} > \dots\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\dots > \varphi(M_{i(k-1)}) = M_{i(k-1)} > \varphi(M_{i(k+1)}) = M_{ik} > \dots \\ &> \varphi(M_{in}) = M_{i(n-1)} > \varphi(S_{in}) = S_{i(n-1)} > \dots \\ &> \varphi(S_{i(k-1)}) = S_{i(k-1)} > \varphi(S_{i(k+1)}) = S_{ik} > \dots\end{aligned}$$

De nuevo, este es el orden (3.1) en $\mathfrak{o}^+(2(n-1))_q$.

Ahora, supongamos $k < j$ en (3.2). Entonces,

$$\varphi(S_{j(n-1)}) = S_{(j-1)(n-2)} > \varphi(M_{(j+1)(j+2)}) = M_{j(j+1)}$$

y, si $k > j$,

$$\varphi(S_{j(n-1)}) = S_{j(n-2)} > \varphi(M_{(j+1)(j+2)}) = M_{(j+1)(j+2)}$$

(pues $j+1 \neq k \neq j+2$) el cual es la definición del orden (3.2) en $\mathfrak{o}^+(2(n-1))_q$.

Por lo tanto φ preserva el orden.

Tomemos β_{ij}, γ_{ab} elementos básicos canónicos, ($\beta = M$ ó S y $\gamma = M$ ó S). De las tablas 1 y 2 obtenemos que los coeficientes de $B^{(k)}(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab})$ no dependen de ij, ab ($k = 1, 2, 3$). Además, si eliminamos un vértice diferente de i, j, a y b , los caminos no cambian la forma de la gráfica. Por lo tanto

$$\begin{aligned}B^{(1)}(\varphi \otimes \varphi)(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}) &= \varphi B^{(1)}(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}) \\ B^{(2)}(\varphi \otimes \varphi)(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}) &= (\varphi \otimes \varphi) B^{(2)}(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}) \\ B^{(3)}(\varphi \otimes \varphi)(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}) &= (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi) B^{(3)}(\beta_{ij} \otimes \gamma_{ab}).\end{aligned}$$

□

Para definir una estructura de σ -Lie álgebra basada en los elementos E_{ij}, S_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, primero vamos a definir una graduación estricta sobre ellos satisfaciendo las desigualdades dadas por las tablas 1,2 y 3: sobre cada fila de cualquier tabla, la suma de los grados de los elementos de la primera columna tiene que ser estrictamente mayor

que la suma de los grados de la segunda columna. Por ejemplo, de la tabla 3, primera fila,

$$\eta(M_{ij}) + \eta(S_{ib}) > \eta(M_{in}) + \eta(M_{jb}) + \eta(S_{in}), \text{ si } j < b < n$$

En general, encontrar una solución a un sistema de desigualdades, como éste, se conoce como un problema de *programación entera* [9] (en nuestro caso, la llamada función objetivo es la función trivial cero); si tal solución existe tal sistema se llama *factible*. Nótese que si $\eta(M_{ij}), \eta(S_{ij}), 1 \leq i < j \leq n$, es una solución para el caso n , entonces restringiendo a $2 \leq i < j \leq n$ se obtiene una solución al caso $n - 1$. Por ejemplo, puesto que las soluciones para el caso $n = 6$ se pueden encontrar usando programas para computadora, entonces la función η del lema 5.1 se puede definir también para $n = 4$ y 5 y la identidad de Jacobi 1c se puede probar mediante cálculos directos.

PROPOSICIÓN 6.2. *Si $n = 4, 5$ y 6 entonces $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ tiene una estructura de σ -Lie álgebra.*

Aunque el siguiente lema es trivial, es útil para probar la identidad de Jacobi generalizada sobre $\mathfrak{o}^+(2n)_q$, en caso de que el sistema de desigualdades descrito anteriormente sea factible.

LEMA 6.3. *Si $\gamma_{ij}, \gamma_{ab}, \gamma_{uv}$ son caminos en \mathcal{D}_n , entonces existe una subálgebra B de \mathcal{D}_n tal que*

- (1) $\gamma_{ij}, \gamma_{ab}, \gamma_{uv} \in B$;
- (2) $B \stackrel{\phi}{\cong} \mathcal{D}_6$;
- (3) $\phi(\gamma_{ij}), \phi(\gamma_{ab}), \phi(\gamma_{uv})$ son caminos en \mathcal{D}_6 .

PROPOSICIÓN 6.4. *Sea $n \geq 4$. Si el sistema de desigualdades descrito arriba es factible, entonces $\mathfrak{o}^+(2n)_q$ tiene una graduación estricta y existe una función lineal $\eta : L \otimes \mathcal{S}(\mathfrak{o}^+(2n)_q) \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{o}^+(2n)_q)$ tal que la identidad de Jacobi 1c de la definición 5.1 se cumple.*

DEM. La solución al problema de programación entera asegura la existencia de la función η . Para $n = 4, 5$ y 6 la identidad de Jacobi generalizada 1c de la definición 5.1 se puede probar mediante cálculos directos. Para $n > 6$ podemos tomar x, y, z elementos básicos canónicos en $\mathfrak{o}^+(2n)_q$. Entonces, debido al lema 6.3 y a la proposición 6.1, existe un espacio L_0 el cual es una σ -Lie algebra tal que

- (1) $x, y, z \in L_0$;
- (2) $L_0 \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} \mathfrak{o}^+(12)_q$ como σ -Lie álgebras.

De la identidad de Jacobi generalizada sobre $\mathfrak{o}^+(12)_q$, se sigue la identidad de Jacobi sobre x, y, z . □

Si ponemos $q = 1$ entonces $B^{(2)} = 0$ y $B^{(3)} = 0$ mientras que $B^{(1)}$ es el corchete clásico de $\mathfrak{o}^+(2n)$ donde $M_{ij}|_{q=1} = e_{(i+n)(j+n)} - e_{ji}$ y $S_{ij}|_{q=1} = e_{(i+n)j} - e_{(j+n)i}$, (e_{uv} , $1 \leq u, v \leq 2n$, la base canónica de gl_{2n}).

En resumen, hemos probado:

TEOREMA 6.5.

- (1) $U(\mathfrak{o}^+(2n)_q) \simeq U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$ como álgebras asociativas;
- (2) $\dim_F \mathfrak{o}^+(2n)_q = n^2 - n$;
- (3) Si $q \rightarrow 1$ entonces $\mathfrak{o}^+(2n)_q \rightarrow \mathfrak{o}^+(n)$.
- (4) Si el sistema de desigualdades descrito arriba es factible, entonces,
 - (a) una estructura de σ -Lie álgebra se puede definir sobre $\mathfrak{o}^+(2n)_q$;
 - (b) el álgebra envolvente universal $U_q^+ \mathfrak{o}(2n)$ tiene una base lineal formada por lo monomios de sucesiones no decrecientes de elementos básicos canónicos de $\mathfrak{o}^+(2n)_q$.

CAPÍTULO 6

El caso excepcional E_6 . Trabajo a futuro y posibles aplicaciones.

Las álgebras de Lie clásicas de tipo excepcional E_6 , E_7 y E_8 no aparecieron sino hasta después de que se planteó la clasificación de las álgebras de Lie semisimples [11]. Esto es, no aparecen de forma “natural”. Tal vez sea por eso que no se han propuesto, hasta ahora, cuantizaciones de tales álgebras excepcionales.

La ventaja que tiene el caso excepcional es que no forman familias dependiente de un parámetro n como por ejemplo las D_n con $n \geq 4$. Por lo que, en principio, toda su estructura estudiarse con la ayuda de computadoras.

Esto es así, al menos para el caso de E_6 . El sistema algebraico de cómputo llamado *Groups, Algebra and Programming* (GAP) [29] con el paquete `QuaGroup`, desarrollado por W. A. de Graaf [31], puede usarse para estudiar las relaciones de q -conmutación de E_6 .

1. GAP, QuaGroup y E_6 , E_7 cuánticos

Con la ayuda de GAP y el paquete `QuaGroup` puede notarse de forma experimental las siguientes relaciones de q -conmutación en $U_q^+(E_6)$ y $U_q^+(E_7)$:

$$m(x \otimes y - \sigma(x \otimes y)) = [x, y]_q$$

Qué clase de identidad de Jacobi se satisface es un asunto pendiente.

En el caso E_8 los cálculos toman demasiado tiempo para dar una respuesta¹

2. Computación cuántica y relaciones de q -conmutación

La computación cuántica [48] es un nuevo paradigma de cómputo que aprovecha las leyes de la mecánica cuántica para hacer cálculos.²

¹más de una semana de trabajo continuo en mi vieja AMD K26 3D a 333Mhz sin dar respuesta!

²A la fecha la computación cuántica es más bien un desarrollo formal que práctico: sus entusiastas proclaman que es o bien el futuro de la computación o lo que nos mostrará las limitaciones de la mecánica cuántica; mientras que sus detractores afirman que es algo profundamente enraizado en la ciencia ficción.

La herramienta más útil en el diseño de algoritmos en computación cuántica es, sin lugar a dudas, la transformada cuántica de Fourier $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ definida por $F|j\rangle = (1/\sqrt{N}) \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi jk/N)|k\rangle$.

Es fácil mostrar que se cumple la siguiente relación de q -conmutación:

$$(2.1) \quad F \circ \rho = q\rho \circ F$$

donde $q = \exp(2\pi/N)$ y ρ es la permutación $\rho|k\rangle = |k+1 \bmod N\rangle$. Tal ecuación es la misma que define al plano cuántico, que forma parte de cada grupo cuántico de Drinfeld-Jimbo, sin embargo debido a que tanto k como ρ son invertibles no parece útil estudiar la ecuación (2.1) como un plano cuántico.

La ecuación (2.1) no es la única relación de q -conmutación que aparece relacionada a computación cuántica. Por ejemplo, existen generalizaciones de las matrices de Pauli σ_x y σ_z relacionadas a qudits³. Estas son: $X, Z : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ definidas por

$$X|j\rangle = |j+1 \bmod d\rangle, \quad Z|j\rangle = q^j|j\rangle$$

donde $q = \exp(i2\pi/d)$. Tales cumplen:

$$(2.2) \quad Z^j X^k = q^{jk} X^k Z^j .$$

Tales ecuaciones son usadas en [16], y forman una base de $M(n, \mathbb{C})$ el \mathbb{C} -espacio vectorial de matrices $n \times n$. Por lo que $M(n, \mathbb{C})$ se revela como un álgebra cociente de la envolvente universal de una T -álgebra de Lie abeliana.

El papel de las álgebras de Lie cuánticas estudiadas aquí y su papel en computación cuántica, si lo tiene, está por descubrirse. La esperanza es que la estructura algebraica de tales álgebras cuánticas podrían conducir al diseño de nuevos *algoritmos cuánticos*. Un ejemplo que apoya tal creencia es el siguiente: en [6] se explica cómo el llamado problema de *búsqueda de artículos no estructurados* tiene, a pesar de su nombre, cierta estructura relacionada al grupo simétrico y a la proyección canónica relacionada con el carácter trivial. Se obtiene así una justificación puramente algebraica del famoso *algoritmo de Grover*. Aún más, generalizando tales ideas, se puede diseñar un algoritmo cuántico para encontrar preimágenes de proyecciones [7]. En particular se obtienen nuevos algoritmos de búsqueda que pueden ayudar en el proceso de corrección de errores en las computadoras cuánticas.

³Un *qudit* es una generalización del concepto de *qubit* que es a su vez la cuantización del concepto de bit.

Conclusiones

Hemos encontrado varias generalizaciones del concepto de *álgebra de Lie* dentro de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo de tipo A_n y D_n . Tales generalizaciones resultan ser deformaciones que se colapsan al caso clásico cuando el parámetro de deformación tiende a 1.

La guía que seguimos para encontrar tales generalizaciones fué, por un lado, el teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt; en vista de que su versión clásica es equivalente a la identidad de Jacobi, su versión cuántica produce varias generalizaciones (deformaciones) de tal identidad de Jacobi. La forma más general de la identidad de Jacobi que obtuvimos es la dada en la definición 5.1(c) del capítulo 5. Desafortunadamente ésta involucra al álgebra simétrica, contrario a la identidad de Jacobi clásica que sólo involucra al espacio lineal subyacente.

Por otro lado, nuestro estudio se basa en q -conmutadores. La razón de seguir este camino es que los q -conmutadores no sólo aparecen en los grupos cuánticos (y en álgebras cuánticas relacionadas) sino que también aparecen de forma natural en otros temas relacionados con mecánica cuántica, como *computación cuántica*.

Desafortunadamente nuestras álgebras de Lie cuánticas sólo aparecen en la partes partes positivas y negativas de los grupos cuánticos de Drinfeld-Jimbo. Tales álgebras de Lie cuánticas tienen múltiples corchetes: esto es, aparecen operadores cuadrático-lineal (como son los cohetes clásicos), cuadrático-cuadrático y cuadrático-cúbico. Lo cual no representa mayor problema con las bases de tipo Poincaré-Birkhoff-Witt siempre y cuando se tenga una graduación adecuada.

No pretendemos que las definiciones propuestas aquí sean los axiomas definitivos del concepto de Álgebra de Lie Cuántica. Cuestiones como clasificación, sistemas de raíces, semisimplicidad, formas de Killing que son fundamentales en la teoría de álgebras de Lie clásicas y que posiblemente tengan una contraparte cuántica no se trataron aquí. La cuantización de tales hechos, si es posible, ayudarían a establecer los axiomas fundamentales de una teoría de Álgebras de Lie Cuánticas.

APÉNDICE 1

$$\widetilde{(sl_4^+)}_q$$

Maxima 5.9.3

Sea $X = \{a, b, c, \dots, z\} \cup \{(\cdot), [,]\}$. Sea X^f el monoide generado por las fórmulas bien formadas sobre X con la operación de concatenación. Sea $(\mathbb{Q}(X^f), +, *)$ el campo generado por X sobre los números racionales.

Si $Y \subset X^f$ entonces $\mathbb{Q}(X^f)$ es un $\mathbb{Q}(Y)$ -espacio vectorial.

Si $u_1, \dots, u_n \in X^f$ entonces $u_1 * \dots * u_n \in \mathbb{Q}(X)$ se despliega en *Maxima* como palabra en orden lexicográfico. Por ejemplo

Maxima

```
z*b*a*2 ;
```

TeX Output

$2abz$

Tal hecho lo usaremos para simular funciones lineales en *Maxima*.

- Sea $\mathbf{bas} \subset X^f$ y $A \subset X^* \times \dots \times X^*$ fijos. Definimos $B = \{t(x) \mid t \in \mathbf{bas}, x \in A\} \subset X^*$. Sea $Y = \{w \in X^f \mid w \leq t(x), \forall t \in \mathbf{bas}, \forall x \in A\}$. Podemos considerar a W el $\mathbb{Q}(Y)$ -subespacio vectorial del $\mathbb{Q}(Y)$ -espacio $\mathbb{Q}(X)$ generado por B .

El siguiente procedimiento extiende la función $\mathbf{fun} : B \rightarrow \mathbb{Q}(X)$ a una función $\mathbf{extension} : W \rightarrow \mathbb{Q}(X)$ la cual es $\mathbb{Q}(Y)$ -lineal. El argumento de $\mathbf{extension}$ es $\mathbf{argumento}$ y el conjunto \mathbf{bas} es una lista.

Maxima

```
lineal(extension,fun,bas,argumento):=
```



```

block([1,k],
l:length(bas),
if argumento=0 then 0 else
  if op(argumento)="-" then
    (-1)*extension(first(argumento)) else
for k:1 thru l do (
if op(argumento)=bas[k] then return(fun(argumento))
else
if op(argumento)="+" then
  return(sum(extension(part(argumento,i)),i,1,
length(argumento)))
else
if op(argumento)="*" then
  (if atom(first(argumento))=false then
  return(last(argumento)*extension(rest(argumento,-1)))
else
  return(first(argumento)*extension(rest(argumento))) )
else
if op(argumento)="/" then
  return(last(argumento)^(-1)*extension(
first(argumento)))
)
);

```

En particular tal procedimiento puede simular a las extensiones $\mathbb{Q}(q)$ -lineales sobre el espacio generado por $E_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$.

- Si V, W son dos espacios vectoriales, el producto tensorial entre ellos nos da una función $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ que se extiende a una función lineal $\otimes : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$. A la primera función la denotaremos con \mathbf{t} y a la segunda con \mathbf{tensor} , usando el modo *prefix*.
- Luego, el producto tensorial es asociativo:

Maxima

```
declare(t,nary);
```

La extensión lineal es: primero, \mathbf{tensor} tiene que ser bilineal. Para v fijo $\mathbf{ts}(u, v) = u \otimes v$ es lineal:


```
else 0;
```

- El factor $q_{x,y}$ lo da la función `cus`:

```
Maxima
```

```
cus(i,j,a,b):=
  block([c:compara([i,j],[a,b]]),
        if c=true then q^(signo(i,j,a,b)) else
        q^(-signo(i,j,a,b)));
```

- El corchete clásico (= `simbracket`) sobre los elementos básicos:

```
Maxima
```

```
simbracket(u,v):=
  block([e1:part(u,0),e2:part(v,0),
        l1:length(u),l2:length(v),i,j,a,b],
        if l1=2 and l2=2 and e1=E and e2=E then (
          i:part(u,1),
          j:part(u,2),
          a:part(v,1),
          b:part(v,2),
          delta(j,a)*E[i,b]-delta(b,i)*E[a,j] )
        else "error");
```

- El bracket cuántico sobre los elementos básicos:

```
Maxima
```

```
bracket(u):=
  block([i:part(part(u,1),1),j:part(part(u,1),2),
        a:part(part(u,2),1),b:part(part(u,2),2)],
        if compara([i,j],[a,b])=false
          then simbracket(E[i,j],E[a,b])
        else cus(i,j,a,b)*simbracket(E[i,j],E[a,b]));
```

- La extensión a una función $\mathbb{Q}(q)$ -lineal:

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────┐
│
│   Beta(u) := lineal(Beta, bracket, [t], u);
│
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘

```

- Una notación más natural para `cus`:

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────┐
│
│   q(u,v) := cus(part(u,1), part(u,2), part(v,1), part(v,2));
│
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘

```

- La identidad de Jacobi izquierda:

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────┐
│
│   leftJacobi(x,y,z) :=
│     Beta(tensor(Beta(t(x,y)), z)) - Beta(tensor(x, Beta(t(y,z))))
│     + q(x,y) * Beta(tensor(y, Beta(t(x,z))));
│
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘

```

- La identidad de Jacobi derecha:

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────┐
│
│   rightJacobi(x,y,z) :=
│     Beta(tensor(z, Beta(t(x,y)))) - Beta(tensor(Beta(t(z,x)), y))
│     + q(x,y) * Beta(tensor(Beta(t(z,y)), x));
│
└────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘

```

- Ciclos anidados `For` para calcular la identidad de Jacobi izquierda sobre todos los elementos básicos. En cada iteración calcula la diferencia sobre

$$\beta(\beta(E_{ij}, E_{ab}), E_{u,v}) - \beta(E_{ij}, \beta(E_{ab}, E_{uv})) + q_{E_{ij}E_{ab}} \beta(E_{a,b}, \beta(E_{ab}, E_{uv}))$$

e imprime los subíndices de E_{ij} , E_{ab} , E_{uv} . Nos interesa sólo `ciclo(4)`.

```

┌── Maxima ───────────────────────────────────────────────────────────┐
│
│   ciclo(n) :=
│     for i:1 thru n-1 do

```

```

(for j:i+1 thru n do
  (for a:1 thru n-1 do
    (for b:a+1 thru n do
      (for u:1 thru n-1 do
        (for v:u+1 thru n do
          (print("On ",E[i,j],E[a,b],E[u,v],
            "leftJacobi=",
              leftJacobi(E[i,j],E[a,b],E[u,v]))))))));

```

- Lo mismo que el anterior para la identidad de Jacobi derecha:

Maxima

```

ciclo(n):=
  for i:1 thru n-1 do
    (for j:i+1 thru n do
      (for a:1 thru n-1 do
        (for b:a+1 thru n do
          (for u:1 thru n-1 do
            (for v:u+1 thru n do
              (print("On ",E[i,j],E[a,b],E[u,v],
                "rightJacobi=",
                  rightJacobi(E[i,j],E[a,b],E[u,v]))))))));

```

APÉNDICE 2

Trenzas

Maxima 5.9.3

- Usamos las mismas funciones `lineal`, `t`, `delta`, `compara`, `signo`, `cus`, `q(x,y)` definidas en el apéndice anterior.
- La definición de la función pseudobacket \langle , \rangle : tal es la extensión lineal de la función `pseudo`.

Maxima

```
langle(u,v):=
block([i:part(u,1),k:part(u,2),j:part(v,1),l:part(v,2)],
      if (i<j and j<k and k<l) then
          (q-q^(-1))*t(E[i,l],E[j,k])
          else 0
      );
```

TeX Output

Maxima

```
pseudo(u):=
block([a:part(part(u,1),1),
      b:part(part(u,1),2),
      i:part(part(u,2),1),
      j:part(part(u,2),2)],
      if ((a+b<i+j) or (a+b=i+j) and b<j) then
          langle(E[a,b],E[i,j]) else
          -q(E[a,b],E[i,j])*langle(E[i,j],E[a,b])
      );
```

Maxima

```
Pseudo(u):=lineal(Pseudo,pseudo,[t],u);
```

- La presimetría S será la extensión lineal de la función s :

Maxima

```
s(u):=block([i,j,a,b],i:part(part(u,1),1),
            j:part(part(u,1),2),
            a:part(part(u,2),1),
            b:part(part(u,2),2),
            q(E[i,j],E[a,b])*t(E[a,b],E[i,j])
            );
```

Maxima

```
S(u):=lineal(S,s,[t],u);
```

- La definición de la simetría $T = S + \langle, \rangle$:

Maxima

```
T(u):=S(u)+Pseudo(u);
```

- La definición del operador $T_1 = T \otimes Id$. Primero se define en la base:

Maxima

```
t1(u):=tensor(T(t(part(u,1),part(u,2))),part(u,3));
```

y luego se extiende a una función lineal:

Maxima

```
T1(u):=lineal(T1,t1,[t],u);
```

- Similarmente para $T_2 = Id \otimes T$:

Maxima

```
t2(u):=tensor(part(u,1),T(t(part(u,2),part(u,3))));
```

Maxima

```
T2(u):=lineal(T2,t2,[t],u);
```

- Ciclos For anidados para verificar la ecuación de trenza (que por cierto no se cumple). De nuevo, sólo nos interesa ciclo(4).

Maxima

```
ciclo(n):= for i:1 thru n-1 do
  (for j:i+1 thru n do
    (for a:1 thru n-1 do
      (for b:a+1 thru n do
        (for u:1 thru n-1 do
          (for v:u+1 thru n do
            (print("On ",E[i,j],E[a,b],E[u,v],
              "T1T2T1-T2T1T2=",
              expand(T1(T2(T1((t(E[i,j],E[a,b],E[u,v])))
                )))
              -T2(T1(T2((t(E[i,j],E[a,b],E[u,v]
                )))))))))))))));
```

De aquí encontramos que la ecuación de trenza para T no se cumple pues en $E_{1,3} \otimes E_{2,4} \otimes E_{1,3}$:

Maxima

```
T1(T2(T1(t(E[1,3],E[2,4],E[1,3]))));
```

TeX Output

$$\frac{t(E_{1,3}, E_{1,4}, E_{2,3}) \left(q - \frac{1}{q}\right)}{q^2} - t(E_{1,4}, E_{2,3}, E_{1,3}) \left(q - \frac{1}{q}\right) + t(E_{1,3}, E_{2,4}, E_{1,3})$$

Maxima

```
T2(T1(T2(t(E[1,3],E[2,4],E[1,3]))));
```

TeX Output

$$\begin{aligned}
& -t(E_{1,4}, E_{2,3}, E_{1,3})q^2\left(q - \frac{1}{q}\right) + t(E_{1,3}, E_{1,4}, E_{2,3})\left(q - \frac{1}{q}\right) \\
& \qquad \qquad \qquad + t(E_{1,3}, E_{2,4}, E_{1,3})
\end{aligned}$$

En notación infix:

$$\begin{aligned}
T_1 \circ T_2 \circ T_1(E_{1,3} \otimes E_{2,4} \otimes E_{1,3}) &= \frac{\left(q - \frac{1}{q}\right)}{q^2} (E_{1,3} \otimes E_{1,4} \otimes E_{2,3}) \\
&\quad - \left(q - \frac{1}{q}\right) (E_{1,4} \otimes E_{2,3} \otimes E_{1,3}) + E_{1,3} \otimes E_{2,4} \otimes E_{1,3}
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
T_2 \circ T_1 \circ T_2(E_{1,3} \otimes E_{2,4} \otimes E_{1,3}) &= -q^2 \left(q - \frac{1}{q}\right) (E_{1,4} \otimes E_{2,3} \otimes E_{1,3}) \\
&\quad + \left(q - \frac{1}{q}\right) (E_{1,3} \otimes E_{1,4} \otimes E_{2,3}) + E_{1,3} \otimes E_{2,4} \otimes E_{1,3}
\end{aligned}$$

Referencias

- [1] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [2] C. Bautista, "A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for generalized color Lie algebras", *J. of Math. Phys.* **39** 3828-3843 (1998). *Preprint* q-alg/9706016.
- [3] C. Bautista, "The positive part of the quantized universal enveloping algebra of type A_n as a braided quantum group", *preprint* math.QA/9803070.
- [4] C. Bautista, "Quantum Lie algebras of type A_n , PBW bases and the Yang-Baxter equation", *preprint* math.QA/9807140.
- [5] C. Bautista, "Braided identities, quantum groups and Clifford algebras", *Int. J. Theo. Physics.* **40** (1) 53-63 (2001).
- [6] C. Bautista, "A group-theoretical approach to quantum search", in *Group Theoretical Methods in Physics*, G. S. Pogosyan, L. E. Vincent y K. B. Wolf editores, *J. Phys: Conference Series*, **185** 157-162 (2005).
- [7] C. Bautista, "Projections, Möbius group and representation theory for quantum searches", *en preparación*.
- [8] C. Bautista y M. A. Juárez-Ramírez, "Some quantum Lie algebras of type D_n positive", *J. Phys. A: Math Gen.* **36** 2271-2287 (2003).
- [9] M. S Bazarraa y J. J. Jarvis, *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Limusa, México (1981).
- [10] G.M. Bergman, "The diamond lemma for ring theory", *Ad. Math.* **29** 178-218 (1978).
- [11] A. Borel, *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, History of Mathematics Vol **21**, AMS-LMS, Providence, Rhode Island, 2001.
- [12] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Elements of Mathematics. Chap. 1-3. Springer-Verlag, Gran Bretaña, 1989.
- [13] C. Cibils, "A quiver quantum group", *Commun. Math. Phys.* **157** 459-477 (1993).
- [14] C. Cibils y M. Rosso, "Hopf quivers", *preprint* math.QA/0009106, video en MSRI (1999) (www.msri.org)
- [15] M. Chaichian y A. Demichev. *Introduction to Quantum Groups*, World Scientific, Singapore, 1996.
- [16] J. Daboul, S. Wang y B. C. Sanders, "Quantum gates on hybrid systems", *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 2525-2536 (2003).
- [17] G.W. Delius, "Introduction to quantum Lie algebras", *preprint* q-alg/9605026.
- [18] G.W. Delius y M.D. Gould, "Quantum Lie algebras, their existence, uniqueness and q -antisymmetry", *Commun. Math. Phys.* **185** 709 (1997).
- [19] G.W. Delius y A. Huffmann, On quantum Lie algebras and quantum roots systems, *J.Phys. A*29, 1703-1722, (1996). *Preprint* q-alg/9506017

- [20] E.E. Demidov, Yu. I. Manin, E.E. Mukhin, D.V. Zhdanovich. “Non-Standard Quantum Deformations of $GL(n)$ and Constant Solutions of the Yang-Baxter Equation.” *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **102** 203-218 (1990).
- [21] V.K. Dobrev y A. Sudbery, “Representations of the generalized Lie algebra $sl(2)_q$ ”, *J. Phys. A* **31** 6635-6645 (1998). *Preprint* math.QA/9803095.
- [22] V.G. Drinfeld, “Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation,” *Soviet Math. Dokl.* **32** 264-267 (1985).
- [23] V.G. Drinfeld, “Quantum Groups”, *Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, 1986)* Amer. Math. Soc., Providence RI. 798-820 (1987).
- [24] M. Durdevich, “On braided Quantum Groups”, *preprint* q-alg/9412003.
- [25] M. Durdevich, “Generalized braided quantum groups”, *Isr. J. Math.* **98** 329 (1997).
- [26] M. Durdevich, “Quantum geometry and a new concept of space”, <http://www.matem.unam.mx/~micho>
- [27] D. Fishman y S. Montgomery, “A Schur double centralizer theorem for cotriangular Hopf algebras and generalized Lie algebras”, *J. Algebra* **168** 594-614 (1994).
- [28] J. Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge University Press. Cambridge. 1995.
- [29] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4; 2005. (<http://www.gap-system.org>)
- [30] M. Gerstenhaber y S.D. Shack *Algebraic Cohomology and Deformation Theory (Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications)* ed M Hazewinkel and M Gerstenhaber, p 11, Kluwer Academic, Dordrecht (1988).
- [31] W.A. de Graaf, GAP package QuaGroup a package for doing computations with quantum groups, <http://www.gap-system.org/Packages/quagroup.html>, (2003).
- [32] D. Gurevich, “The Yang-Baxter equation and a generalization of formal Lie theory”, *Soviet Math. Dokl.* **33** 758-762 (1986).
- [33] D. Gurevich y V. Rubstov. “Quantization of Poisson pencils and generalized Lie algebras”, en *Proceedings of the V International Conference on Mathematical Physics, String Theory and Quantum Gravity, Alushta, 10-20, 1994*, *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika* **103** (1995) No.3; **104** (1995) No.1. *Preprint* q-alg/9501007.
- [34] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM 9, Springer-Verlag, Nueva York, 1994.
- [35] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover, Nueva York, 1979.
- [36] G. Janssen, E.H.A. Gerbracht, J. Stöken. *Die Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g})$ einer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Arbeitstagung über Quantengruppen.* 94-001. sfb343. Diskrete Strukturen der Mathematik. U. Bielefeld. 1994.
- [37] J. C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society. E.U. 1996.
- [38] M. Jimbo, “A q -difference analog of $U(g)$ and the Yang-baxter equation,” *Lett. Math. Phys.* 247-252 (1986).
- [39] A. Joyal y R. Street, “Braided tensor categories”, *Ad. Math.* **102** 20-78 (1993).
- [40] V.K. Kharchenko, “A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem”, *Algebra and Logic* **38** N4, 476-507, Traducción al inglés: 259-276 (1999)

- [41] V.K. Kharchenko, “A combinatorial approach to quantification of Lie algebras”, *Pacific J. Math.* **203** 191-233 (2002).
- [42] R.G. Larson y J. Towber. “Two dual classes of bialgebras related to the concepts of “quantum group” and “quantum Lie algebra”. *Communications in Algebra* **19**(12) 3295-3345 (1991).
- [43] G. Lusztig, “Finite dimensional algebras arising from quantized universal enveloping algebras”, *J. Amer. Math. Soc.* **3** 257 (1990).
- [44] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progress in mathematics, **110**, Birkhäuser, Boston. 1993.
- [45] V. Lyubashenko V y A. Sudbery “Generalised Lie algebras of type A_n ” *J. Math. Phys.* **39** 3487 (1998).
- [46] S. Majid “Quantum and braided-linear algebra,” *J. Math. Phys.* **34** 2045-2058 (1993).
- [47] S. Majid “Quantum and braided Lie algebras”, *J. Geom. Phys.* **13** 307 (1994).
- [48] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 2001.
- [49] Z. Oziewicz, E. Paal, J. Różański, “Coalgebra, cocomposition and cohomology”, *Non-Associative Algebra and Its Applications*, Kluwer, Dordrecht (1994).
- [50] J. Różański, “Koszul theorem for \mathcal{S} -Lie coalgebras”, *Reports on Math. Phys.* **38** 193 (1996).
- [51] D. E Radford, F. J. O. Souza, D. Yetter (ed), *Diagrammatic Morphisms and Applications*, Contemporary Mathematics **318** AMS, Providence, Rhode Island, 2003.
- [52] C. M. Ringel, PBW-basis of Quantum Groups *Journal Reine Angew. Math.* **470** 51-88 (1996)
- [53] P. Gabriel y A.V. Roiter, *Representations of Finite-Dimensional Algebras*, Springer, Berlin, 1997. p 17
- [54] W. Schelter *et al*, *Maxima*, A computer algebra system, <http://maxima.sourceforge.net>
- [55] M. Scheunert. “Generalized Lie algebras”, *J. Math. Phys.* **20** (4), 712-720 (1979).
- [56] M. Scheunert. *The Theory of Lie Superalgebras*. LNM. 716. Springer-Verlag. Berlin. 1979.
- [57] A. Sudbery. “Matrix-Element Bialgebras Determined by Quadratic Coordinate Algebras”, *J. Algebra* **158** 375-399 (1993).
- [58] H. Yamane. “A Poincaré-Birkhoff-Witt Theorem for Quantized Universal Enveloping Algebras of type A_n ”, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* **25** 503-520 (1989).
- [59] M. Wambst “Complexes de Koszul quantiques”, *Ann. Inst. Fourier*, **43** 1089 (1993).
- [60] M. Vybornov, “Solutions of the Yang-Baxter equation and quantum $\mathfrak{sl}(2)$ ”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **8** 953-961 (1999). *Preprint* math.QA/9806058.
- [61] S. L. Woronowicz, “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)”, *Commun. Math. Phys.* **122** 125 (1989).