UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE ALGUNOS TEOREMAS CLÁSICOS DE RENOVACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

P R E S E N T A:

MARÍA CRISTINA DÍAZ GONZÁLEZ

TUTOR:
DR. LUIS ANTONIO RINCÓN SOLÍS

2007

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Díaz González María Cristina 55 32 09 57 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 099600978
2. Datos del tutor Dr. Luis Antonio Rincón Solís
3. Datos del sinodal 1 Act. Jaime Vázquez Alamilla
4. Datos del sinodal 2 M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
5. Datos del sinodal 3 Act. Lucio Gerardo Chávez Heredia
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Hugo Villaseñor Hernández
7. Datos del trabajo escrito Sobre algunos teoremas clásicos de renovación 91 p 2007

AGRADECIMIENTOS

Quiero con estas líneas agradecer a todos aquellos que han sido parte de este logro. En primer lugar agradezco infinitamente a la Universidad Nacional Autónoma de México, y en especial a la Facultad de Ciencias, por brindarme no sólo una educación de excelencia sino también por ser mi casa, un lugar en donde conocí la otra parte de mi familia, amigos que me ayudaron no sólo a estudiar aquellas cosas que se me dificultaron, también me enseñaron y me apoyaron en esos momentos importantes, a todos aquellos profesores que con su conocimiento, formación, experiencia y valores me enseñaron cosas que van más allá de las aulas, ... ¡muchas gracias!

Ahora quiero agradecer a aquellas personas que sin su infinito amor no hubiera podido existir, a mis padres. Gracias papá, porque aún cuando en ocasiones nos molestamos y discutimos siempre me apoyas, me escuchas y me tiendes la mano, aún cuando sepas que la decisión tomada no sea la mejor. Gracias por no darme las respuestas, por enseñarme a buscar, por mostrarme el camino de la honestidad, por hacerme ver que las cosas son siempre posibles.

Gracias mamá, tú, hermosa y gran mujer, fuerte y tierna a la vez, me siento no sólo orgullosa de ti, sino también bendecida por tenerte como ejemplo, tus abrazos y tus bendiciones me mostraron que no importa qué pase, tu estas cerca, alentándonos y cuidando de nosotros, eres un ejemplo a seguir en todo ámbito, no dejes de sonreír ni de ser esa persona humana que me mostró lo enorme que puede ser uno cuando se es humano. A Juan Ro, mi hermano que me acompañaste siempre, en los tropiezos, en los triunfos; que me escuchabas cuando algo pasaba, con el que compartía momentos a veces no tan interesantes pero que siempre me acompañabas, que nos desvelábamos cuando teníamos que entregar trabajos o tal vez hasta viendo una película, muchas gracias por tus observaciones. A ustedes tres, les agradezco infinitamente, porque sabemos que todo esto es un logro de los cuatro, los amo.

También quiero dar las gracias a todos mis tíos y tías, pero muy en especial a mi Abuelita, mi tía Anita y mi tío Pablo por sus consejos y su apoyo en todo momento.

A ti Gabriel por tu apoyo incondicional, tus consejos, tu conocimiento, tu cariño, por enseñarme lo hermosa que es la vida aún cuando haya dificultades, por esos momentos en que estuviste para apoyarme, escucharme, por mostrarme tu mundo, muchas veces para mi extraño, pero siempre hermoso.

A los amigos que conocí durante mi estancia en la facultad Reyhsel, Denis, Nancy, Christian, José Luis (Borrego), Luis Rey, Carlos Rubio, Manuel de la Rosa, y a muchos más que espero me disculpen por no mencionar. También a El CÍRCULO: Willie, Mariana, César, Mara, René (y su familia), Julissa, Benja, José Luis. Por que me mostraron que las matemáticas son hermosas por que me abrieron las puertas de sus corazones y su mente, por esas carreras nocturnas por los pasillos de la facultad, por la ayuda para estudiar los temas que se me complicaban, por esas veladas bohemias con la guitarra y la compañía de sus voces.

Al laboratorio de Dinámica No Lineal por su entero apoyo, en especial a Antonio Carrillo, Heriberto, Agustín, y Carolina.

A mis amigos del curso de alemán por que aún teniendo perfiles muy distintos nos hemos entendido, Erika, Ixhel, Miriam, Rogelio, Eugenio, Roberto y Francisco.

A Tere mi amiga de la preparatoria por que a pesar de la distancia y el tiempo que dejábamos de frecuentarnos, estabas para apoyarme y escucharme.
Por último quiero agradecer a mis sinodales el Dr. Luis Antonio Rincón por su apoyo, al Act. Jaime Vázquez Alamilla por su total entrega a la carrera y a los alumnos, a la M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso, porque la pude conocer en otro ámbito distinto al escolar y por su gran apoyo y orientación para que pudiera terminar, al Act. Gerardo Chávez, por sus consejos y su apoyo, y al M. en C. Hugo Villaseñor, por sus comentarios.

Índice general

Índice alfabético

Parte II

Introducción

La construcción de modelos nos permite imitar algunas manifestaciones del mundo, y aún cuando no representa lo mismo que el fenómeno en observación, nos aproxima a la realidad. Un *modelo matemático* es un conjunto de elementos que tienen como propósito describir el comportamiento de un sistema. Una primera aproximación para obtener un modelo es común el iniciar con un modelo de tipo determinístico, y al agregar algunas variaciones o elementos estocásticos a este tipo de modelos podemos dar una mejor representación del fenómeno en estudio. Las características de un fenómeno aleatorio pueden ser descritas a través de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que represente el fenómeno en cuestión.
Al igual que la probabilidad como una rama de las matemáticas, los procesos estocásticos han ido evolucionando a través de los años debido a que las aplicaciones de éstos también se han incrementado.
Muchos modelos de tipo estocástico han sido planteados para analizar el comportamiento de procesos médicos y biológicos, otros se enfocan a sistemas de otro tipo como las reacciones sociales, el manejo de inventarios, sistemas de software, etc.

Objetivo

El objetivo de esta tesis es presentar una introducción a los procesos de renovación, mostrar algunos teoremas límite de este tipo de procesos, y algunas relaciones que existen entre ellos en forma didáctica.

Metodología

En el primer capítulo nos limitaremos a exponer someramente los procesos estocásticos, una clasificación de éstos, y dos tipos de procesos estocásticos: los procesos de Poisson, construidos a partir de procesos de conteo, y las cadenas de Markov.

En el segundo capítulo describimos los Procesos de Renovación.
El tercer capítulo parte medular de este trabajo manifiesta algunos teoremas límite de los procesos de renovación, así como algunas de sus implicaciones. Estos teoremas se tratan individualmente, a excepción del Teorema de Renovación de Blackwell, cuya demostración la podemos encontrar en el libro escrito por William Feller (ver [11]), posteriormente vemos las implicaciones que existen entre ellos.
Por último tomamos un ejemplo en donde aplicamos los teoremas de renovación, así como la estimación de máxima verosimilitud, para el cálculo de tasas hipotecarias.

Parte III

SOBRE ALGUNOS TEOREMAS CLÁSICOS DE RENOVACIÓN

Capítulo 1

Introducción a los Procesos Estocásticos

En este capítulo se expondrán algunas definiciones importantes para estudiar los procesos estocásticos, su clasificación y posteriormente se mencionarán dos tipos de procesos estocásticos importantes: el proceso de Poisson y las cadenas de Markov.

1.1. Conceptos generales

Los procesos estocásticos surgen a partir de la necesidad de modelar fenómenos aleatorios que ocurren a través del tiempo. Algunas de las características de dichos fenómenos, pueden representarse mediante variables aleatorias. La definición matemática de proceso estocástico es la siguiente.

Definición 1 *Sea* $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad. Un* proceso estocástico *es una familia de variables aleatorias* $\{X_t : t \in T\}$ *con* T *un conjunto* *arbitrario de índices.*

Los procesos estocásticos se clasifican en **discretos** y **continuos**, según sea el parámetro t, usualmente interpretado como el tiempo y éstos a su vez, se clasifican según sea X_t, en procesos de **variable discreta** o **continua** para cada t. Contamos entonces con cuatro tipos de procesos estocásticos que mencionamos a continuación.

1. **Procesos a tiempo discreto de variable discreta**. En este caso tanto X_t y t son discretos. Un ejemplo de este tipo de proceso es la cantidad de descendientes de generaciones sucesivas, en donde el espacio de parámetros, así como las variables son de tipo discreto.

2. **Procesos a tiempo discreto de variable continua**. Aquí se tiene que X_t es continua y t es discreta. Por ejemplo suponemos que X_t es la cantidad de agua almacenada en una presa, registrada en tiempos discretos t. Por lo tanto la variable es continua y el espacio de parámetros es discreto.

3. **Procesos a tiempo continuo de variable discreta**. Se tiene que X_t es discreto y t es continuo. Por ejemplo, X_t puede representar el consumo de energía eléctrica medido en Kw en el instante t.

4. **Procesos a tiempo continuo de variable continua**. En este caso X_t y t son continuos. Un ejemplo de este tipo de proceso es el movimiento de un grano de polen observado a través del tiempo. Donde X_t es la posición del grano de polen en el instante t.

En los procesos estocásticos existen dos conceptos muy importantes, éstos son: estacionariedad e independencia en los incrementos. El primero de ellos se refiere a que dado un proceso estocástico, digamos $\{X_t : t \in T\}$, la distribución conjunta de las variables de este proceso es la misma, aún cuando exista un incremento pequeño en el intervalo de tiempo y por tanto en cada una de las observaciones del proceso.
En otras palabras, un proceso estacionario es aquel en que la probabilidad de hallar el proceso estocástico en un estado determinado, después de una gran cantidad de transiciones [1] tiende a ser la misma.
El proceso estocástico $\{X_t : t \in \mathbb{Z}^+\}$ tiene incrementos independientes si las variables aleatorias $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.[2]
Algunos autores como Gazmuri [14] y Ross [20], toman como base estos dos conceptos para definir proceso de Poisson y cadenas de Markov.

1.2. Proceso de Poisson

En esta sección se define el proceso de Poisson y se darán algunos ejemplos y conceptos relacionados con éste. Para definir el proceso de Poisson, necesitamos el concepto de proceso de conteo, de esta forma se caracteriza al proceso de Poisson como llegadas distribuídas a lo largo del tiempo.

El proceso de Poisson debe su nombre a Siméon Denis Poisson (1781 - 1840) matemático francés, quien realizó varias aportaciones a diversos trabajos no sólo en matemáticas, sino en física, especialmente en electromagnetis-

[1]Una transición es la acción de pasar de un estado a otro.

[2]Las definiciones matemáticas de ambos conceptos, podemos encontrarlas por ejemplo en Feller [11], Resnik [19], y Ross [20].

mo, sin embargo en 1837 se publicó un importante trabajo en probabilidad llamado *In Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile*, donde apareció por primera vez la distribución de Poisson.

Figura 1.1: Siméon Denis Poisson

Dicha distribución describe la probabilidad que un evento aleatorio ocurra en un intervalo o espacio de tiempo bajo condiciones en que la probabilidad de ocurrencia del evento es pequeña, pero el número de ensayos realizados es "muy grande", de tal forma que el evento ocurre en pocas ocasiones. En este mismo trabajo introduce la idea de "ley de los grandes números". A pesar que hoy en día este trabajo tiene gran relevancia, en aquella época no fue así, a excepción de Rusia, en donde Chebyshev tomó y desarrolló estas ideas.[3]

[3] En la dirección electrónica: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/-BiogIndex.html, podemos encontrar biografías y fotos de algunos matemáticos importantes, esta biografía es un resumen de aquella escrita por J. J. O'Connor y E. F. Robertson, que podemos encontrar en la dirección electrónica ya mencionada.

Definición 2 *Un* proceso de conteo*, $\{N(t) : t \geq 0\}$, es un proceso estocástico donde $N(0) = 0$, es no decreciente, continuo por la derecha, y sus incrementos son únicamente a través de saltos.*[4]

Los procesos de conteo se utilizan para modelar experimentos aleatorios en donde se desea registrar la ocurrencia repetida de un evento particular en un periodo de tiempo, por ejemplo la cantidad de visitantes a un museo por día. En este caso la variable $N(t)$ representa el número total de visitantes que han ocurrido en el horario de visitas de ese museo, digamos $[0, t]$.
Un proceso de conteo cumple con las siguientes propiedades:

1. La variable $N(t)$ es siempre un entero no negativo.

2. Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.

3. Si $s < t$, entonces el número de eventos que ocurren en el intervalo $(s, t]$, corresponde a $N(t) - N(s)$.

Un caso importante del proceso de conteo es el proceso de Poisson, que definimos a continuación.

Definición 3 *Un proceso de conteo $\{N(t) : t \geq 0\}$, es un* proceso de Poisson *si cumple con las siguientes propiedades:*

1. $N(0) = 0$.

2. Tiene incrementos independientes.

[4]Debemos mencionar que en Stochastic Processes [20] podemos encontrar una definición de proceso de conteo alternativa a la arriba expuesta, y el mismo autor hace la demostración de la equivalencia entre ambas definiciones.

3. El número de eventos en cualquier intervalo de longitud t, tiene una distribución de Poisson con media λt. Esto es que para $s, t \geq 0$

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

De lo anterior se tiene que si $N(t)$ es un proceso de Poisson con tasa λ, entonces $\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t$, y $\mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$.

1.2.1. Tiempos entre eventos

Anteriormente utilizamos un proceso de conteo para caracterizar al proceso de Poisson, sin embargo los conteos realizados no son explícitos respecto del tiempo que transcurre entre la ejecución de los eventos en observación. Para determinar de una manera formal estos tiempos, los asociaremos a variables aleatorias, que darán lugar a un proceso estocástico.

Para $i \geq 1$ definimos T_i como el tiempo entre la ocurrencia de los eventos $i-1$ e i. Estos tiempos los denominaremos **tiempos entre eventos.** De esta forma tenemos el proceso $\{T_n : n \geq 0\}$, donde por conveniencia $T_0 = 0$. Adicionalmente definimos $W_i = T_1 + T_2 + \cdots + T_i$ que corresponde al tiempo de espera para la ocurrencia del i-ésimo evento, y donde establecemos $W_0 = 0$. Observe que

$$N_t = \text{máx}\{n : W_n \leq t\}.$$

Ejemplo 1 *Supongamos que nos encontramos en un banco y observamos cómo es la llegada de los clientes al banco en observación y registramos los primeros cinco eventos, que ocurrieron de la siguiente manera:*

Hora	*Evento*
0	*0*
0:20	*1*
0:27	*2*
0:52	*3*
1:14	*4*

El arribo del primer cliente ocurrió en el minuto 20 por lo que $W_1 = 20$ *al igual que* T_1, $T_2 = 7$, *mientras que* $W_2 = 27$, $T_3 = 25$ *y* $W_3 = 52$, *y así sucesivamente de manera gráfica lo podemos ver en la Figura 1.2*

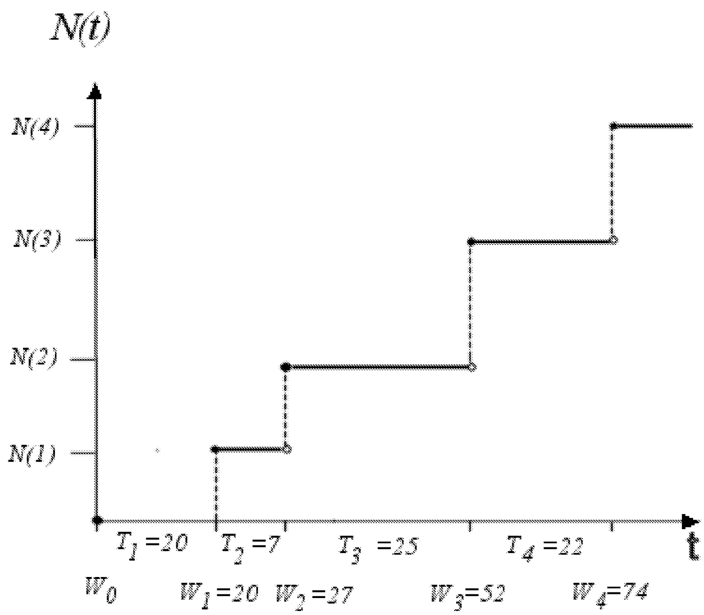

Figura 1.2: Gráfica de la variable de tiempos entre eventos a la llegada de clientes al banco.

En el ejemplo anterior no consideramos distribución alguna en los tiempos entre eventos, sin embargo un caso interesante se presenta cuando la distribución de éstos es exponencial, este suceso lo ilustraremos mediante un ejemplo.

Ejemplo 2 *Tenemos una lámpara que usa focos los cuales tienen un tiempo de vida útil aleatorio T que sigue una distribución exponencial con tasa λ. Supongamos que el primer foco instalado en la lámpara lleva una vida de s unidades de tiempo funcionando correctamente, y nos cuestionamos por la probabilidad de que el foco continúe funcionando x unidades de tiempo adicionales. Entonces,*

$$\begin{aligned} P[T > s + x \mid T > s] &= \frac{P[T > s, T > s + x]}{P[T > s]} \\ &= \frac{P[T > s + x]}{P[T > s]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+x)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Se tiene que la distribución condicional de T también es exponencial con parámetro λ, en otras palabras el tiempo que lleva funcionando el foco no interviene con la distribución de T. Esto nos indica que el tiempo adicional que funcione el foco tiene la misma distribución que un foco nuevo, es decir, el foco “no envejece". A esta propiedad la denominaremos como *falta de memoria*. Esta propiedad se presenta en la distribución exponencial, siendo la única de las variables aleatorias de tipo continuo que la posee.

Proposición 1 *En un proceso de Poisson con tasa λ, los tiempos $T_1, T_2, \dots, T_i$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con distribución exponencial de parámetro λ.*

Demostración.

$$\begin{aligned} P[T_n > t] &= P[T_n > t \mid T_{n-1} = s]P[T_{n-1} = s] \qquad (1.1)\\ &= \int_0^\infty P[T_n > t \mid T_{n-1} = s] f_{T_{n-1}}(s)ds, \end{aligned}$$

como

$$P[T_n > t \mid T_{n-1} = s] = P[N(t+s) - N(t) = 0 \mid T_{n-1} = s],$$

por la propiedad de incrementos independientes del proceso $N(t)$ la información del intervalo $[0, t]$ es irrelevante respecto del intervalo $[t, t+s]$, luego,

$$\begin{aligned} P[T_n > t \mid T_{n-1} = s] &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{T_{n-1}}(s)ds. \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Si esta última ecuación la sustituimos en la ecuación (1.1) obtenemos, $P[T_n > t] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cdot P[T_{n-1} = s] \int_0^\infty P[T_{n-1} = s] = e^{-\lambda t}$. Por lo tanto T_n, T_{n-1} son variables aleatorias independientes con la misma distribución. $\square$

Las aplicaciones de procesos de Poisson se centran básicamente en la ingeniería, principalmente al hacer uso de teoría de colas, en confiabilidad, donde la distribución de las variables aleatorias es exponencial, asi como en la gestión de sistemas, donde se busca analizar y resolver problemas de toma de decisiones respecto a solicitar algún servicio por parte de alguna entidad.

1.3. Cadenas de Markov

La teoría de los procesos markovianos comprende uno de los temas más extensos e importantes de los procesos estocásticos, dicha importancia se debe a las diversas aplicaciones que tiene en diferentes ciencias como biología, física, ciencias sociales, ingeniería y comercio.

Figura 1.3: Andrei Markov

Lo que hoy conocemos como cadena de Markov fue concebida por el matemático ruso Andrei Markov, cuando a principios del siglo XX, investigaba cómo se alternaban las vocales y consonantes en el poema de Alexander Pushkin, *Eugenio Oneguin.*

Markov desarrolló el modelo de probabilidad en el cual los resultados de eventos sucesivos, se permitía fueran dependientes, de tal forma que cada evento dependía del evento inmediato anterior. Este modelo parece dar una excelente descripción de la variación de vocales y consonantes, con lo cual permitió a Markov calcular de manera precisa la frecuencia con que ocurren las consonantes en el ya citado poema de Pushkin.

Un proceso de Markov nos permite modelar la incertidumbre en muchos siste-

mas del mundo real que se desarrollan dinámicamente a lo largo del tiempo.[5] Los principales campos de investigación de Markov fueron la estadística, la teoría de la probabilidad, el cálculo y la teoría de los números. Su obra más famosa, las cadenas de Markov, fue un producto de un interés exclusivamente teórico, de hecho, jamás escribió nada respecto a sus aplicaciones.[6]
Para fines de este trabajo nosotros sólo estaremos interesados en las cadenas de Markov con espacio de estados discreto.

1.3.1. Cadenas de Markov discretas

Tenemos $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ un proceso estocástico, si $X_n = i$, entonces decimos que el proceso estocástico se encuentra en el estado i al momento n. Supondremos que existe una probabilidad P_{ij} tal que el proceso pasa del estado i al estado j en un paso. Para obtener la probabilidad de encontrar el proceso en el estado j a partir del estado i establecemos lo siguiente:

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, X_r \neq j, \forall r < n \mid X_0 = i\},$$

que denominamos como *probabilidad de primer paso.*

Definición 4 *Decimos que* $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *es una* Cadena de Markov,

[5]La biografía de Markov y de otros matemáticos importantes, así como alguna foto de ellos, podemos encontrarlas en la dirección electrónica: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Markov.html su biografía esta escrita por **J. J. O'Connor y E. F. Robertson**

[6]Johnson David B., Mowry Thomas A. *Matemáticas finitas. Aplicaciones prácticas.* International Thompson Editores. México, 1999.

si cumple,

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \tag{1.2}$$

La definición anterior nos dice que el proceso estocástico $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, esta formado por variables aleatorias dependientes entre sí, sin embargo, las variables aleatorias $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n$, influyen en X_{n+1}, sólo a través de X_n.

De manera concreta podemos decir que *el pasado influye en el futuro sólo a través del presente.* A esta propiedad se le llama *propiedad Markoviana.*

Definida P_{ij}, podemos exponer sus propiedades, dado que las probabilidades son no negativas y el proceso ha de hacer alguna transición hacia algún estado, tenemos que,

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Denotaremos por $\mathbf{P}$ a la matriz de transición de un paso o etapa con probabilidades P_{ij}, de tal forma que,

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Ya definidas las probabilidades de transición en una etapa P_{ij}, ahora expondremos las probabilidades de transición en n etapas P_{ij}^n, que es la probabilidad de pasar de un estado i, al estado j después de n transiciones. Esto es:

$$P_{ij}^{n} = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, \quad n \geq 0, \quad i, j \geq 0$$

Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorv nos dan un método para calcular las probabilidades de transición en n pasos. Estas ecuaciones son:

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{n}\, P_{kj}^{m} \quad \text{para toda} \quad n, m \geq 0$$

Denotamos la matriz de transición en n etapas como $\mathbb{P}^n$ a la matriz de transición de con probabilidades de transición P_{ij}^{n} (esta matriz es la potencia de P_{ij}^{n}).

1.3.2. Clasificación de estados

Las cadenas de Markov, no sólo son clasificadas según las transiciones, sino también según los estados, y éstos a su vez en periodos.
En cuanto a los estados podemos decir que un estado j es *accesible* al estado i, si para algún $n \geq 0$, $P_{ij}^{n} > 0$. En el caso que dos estados i y j sean accesibles entre sí, se les llaman *comunicantes*, y se denota $i \leftrightarrow j$. De la definición podemos observar que

$$P_{ii}^{0} = P\{X_0 = i \mid X_0 = i\} = 1$$

Cabe mencionar que la propiedad de ser comunicantes es una relación de equivalencia, por tanto si dos estados son comunicantes, esto significa que se encuentran en la misma clase de equivalencia.
Diremos que una cadena de Markov es *irreducible* si existe una sola clase de equivalencia, esto es, si todos los estados se comunican entre sí.

Tomemos cualquier estado i, denotemos a f_i como la probabilidad que iniciando en el estado i el proceso eventualmente ingrese de nuevo al estado i. En este caso al estado i le llamamos *recurrente* si $f_i = 1$ y *transitorio* si $f_i < 1$.
En otras palabras podemos decir que si el estado i es recurrente, entonces el proceso regresará al estado i una y otra vez, una infinidad de veces.

Otra propiedad importante que debemos mencionar es el periodo.

Definición 5 *El* periodo[7] *de un estado recurrente j es el máximo común divisor de los índices $n \geq 1$ para los que $P_{jj}^n > 0$, esto es,*

$$d(j) = m.c.d.\{n : P_{jj}^n > 0\}$$

1.3.3. Distribuciones Límite

Tomemos una matriz de transición $\mathbb{P}^n$, si existe P_{ij}^n para $n > 0$ entonces si P_{ij}^n converge a un número conforme $n \to \infty$, entonces existe una probabilidad límite para que el proceso se encuentre en el estado j después de una gran cantidad de transiciones.

Lo anterior lo escribiremos matemáticamente. Denotamos

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{jj}^{nd(j)},$$

de donde se sigue que un estado es recurrente positivo si $\pi_j > 0$ y es no recurrente positivo si $\pi_j = 0$.

[7]Hay autores como Goodman [10], Sidney [19], que toman otra definición de periodo, sin embargo esta definición la tomamos de Ross [20].

A los estados que son recurrentes positivos y aperiodicos, se les llaman *ergódicos*[8].

Teorema 1 *Para una cadena de Markov irreducible y ergódica, el* $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ *existe y es independiente de* i. *Además sea*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad j \geq 0$$

entonces π_j *es la única solución de*

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j &= 1 \end{aligned}$$

A esta probabilidad se le interpreta como la proporción del tiempo a largo plazo en que se visita el estado j.[9]

1.3.4. Tiempos promedio invertidos en estados transitorios

Para estados transitorios i y j, denotamos por s_{ij} los periodos de tiempo esperados, en que la cadena de Markov se encuentra en el estado j, dado que inicia en el estado i.

[8]Estas propiedades las podemos encontrar en Stochastic Proceses [20] e Introduction to Stochastic Proceses [8], donde algunos de estos comentarios los toman como teoremas o proposiciones y las pruebas a algunas de estas proposiciones las dejan al lector.

[9]La demostración a este teorema la podemos encontrar en Introduction to Stochastic Proceses [8].

Sea $\delta_{i,j} = 1$ cuando $i = j$, y 0 en otro caso. A esta función se le llama delta de Kronecker. Si condicionamos en la transición inicial tenemos:

$$s_{ij} = \delta_{i,j} + \sum_k P_{ik} s_{kj}$$

Lo anterior nos muestra que si $s_{kj} = 0$, si k es recurrente la posibilidad de ir de un estado recurrente a uno transitorio no es factible.

Ahora podemos continuar con los procesos de renovación. Es importante mencionar que se tomaron estos dos tipos de procesos en específico debido a que uno de ellos, es un caso particular de los procesos de renovación (Proceso de Poisson), mientras que el otro tipo de proceso (Cadenas de Markov) se toma como un ejemplo para hacer mención sobre algunas aplicaciones de los procesos de renovación.

Capítulo 2

Proceso de renovación

Los procesos de renovación permiten una modelación de sistemas en los que intervienen regeneraciones o renovaciones en el o los sistemas considerados.
En este capítulo presentaremos una introducción al proceso de renovación. Expondremos el tema con definiciones, proposiciones (algunas de ellas sin demostración), y algunos ejemplos.

2.1. Concepto de renovación

Los procesos de renovación, tal como su nombre lo indica se refiere al reemplazo de elementos, estos elementos pueden ser lámparas, personas, baterias, carros, etc. De manera general diremos que una *renovación es el reemplazo de un elemento en el instante en que su vida útil ha terminado.* Estos reemplazos serán los eventos que conciernen a nuestro proceso.

El proceso de renovación involucra dos tipos de variables, una discreta y otra de tipo continua. A la variable aleatoria de tipo continua la llamaremos *tiempo de espera de la enésima renovación*, esta variable considera el tiempo que un artículo es útil. La otra variable es de tipo discreta y determina *el número total de renovaciones realizadas hasta un instante t.*

Ejemplo 3 *Rubén suele ver la televisión los fines de semana desde su sillón favorito, y el control remoto de su televisor se ha vuelto indispensable en esta actividad. La bateria de su control remoto se termina aproximadamente cada tres meses, por lo que regularmente suele cambiar la ya usada por una nueva, aproximadamente cada tres meses a menos que haga falta que la cambie antes de ese tiempo.*
Si el día de hoy observamos cuál ha sido el funcionamiento de la batería que tiene en este momento su control remoto, estaríamos analizando el tiempo total de vida que lleva la bateria, mientras que al examinar la cantidad de baterías utilizadas en un periodo de tiempo, digamos un año, estaríamos contemplando la cantidad de renovaciones realizadas en dicho periodo.

A continuación definiremos formalmente el proceso de renovación.

2.1.1. Proceso de renovación

Definición 6 *Sea $\{T_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas e idénticamente distribuidas. Definimos W_n como la suma de las variables aleatorias T_n, es decir, $W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, y $W_0 = 0$. El proceso T_i es el tiempo que transcurre entre las renovaciones i e $i+1$, es decir el* tiempo entre eventos o renovaciones*; W_n es el tiempo de espera en que ocurre la n-ésima renovación, y le llamaremos* tiempo de espera para la

n-ésima renovación.

Definimos $\{N(t) : t \geq 0\}$ *como:*

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{[0,t]}(W_k) \tag{2.1}$$

donde $I_{[0,t]}$ *es la función indicadora del intervalo* $[0, t]$. *Observemos también que* $N(t) = \text{máx}\{n : W_n \leq t\}$. *Al proceso de conteo* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *le llamaremos* proceso de renovación .[1]

Cabe mencionar que para algunos autores como Resnik [19], o Ross [20], les es indistinto tomar a $N(t)$ o a W_n, como el proceso de renovación. Mientras que autores como Cinlar [8] toman a W_n como el proceso de renovación. Una forma de analizar las relaciones entre las variables $N(t)$ y W_n es mediante la siguiente relación:

$$(N(t) \geq k) \quad \text{si y sólo si} \quad (W_k \leq t).$$

Sin necesidad de demostrarlo podemos observar que el número de renovaciones hasta el momento t son al menos k, esto ocurre sólo en el caso en que dicha renovación, es decir la k-ésima sucede antes de t. Podemos observar esta relación en la Figura 2.1.

[1]Esta definición podemos encontrarla en *Procesos estocásticos para la gestión de sistemas* [14].

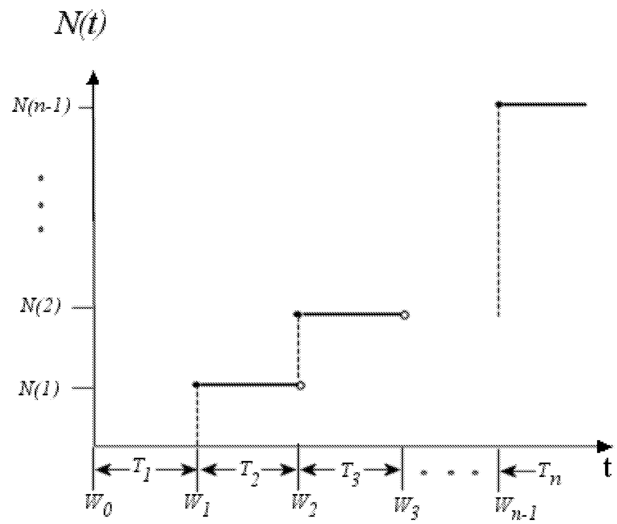

Figura 2.1: Gráfica de una trayectoria de un proceso de renovación

A continuación a manera de resumen expondremos la interpretación de cada una de las variables que intervienen en el proceso de renovación.

T_n	Tiempo entre la $(n-1)$ y la n ésima renovación, es decir, el n-ésimo tiempo entre eventos.
W_n	Tiempo de espera para la n ésima renovación.
$N(t)$	Cantidad total de renovaciones en $[0, t]$.

Otras relaciones entre $N(t)$ y W_n son las siguientes[2]:

$$(N(t) \leq n) = (W_n > t), \quad n \geq 0, \tag{2.2}$$

$$W_{N(t-1)} \leq t \leq W_{N(t)} \quad \text{en} \quad (N(t) \geq 1), \tag{2.3}$$

$$(N(t) = n) = (W_{n-1} \leq t < W_n,) \quad n \geq 1. \tag{2.4}$$

[2]Estas relaciones podemos encontrarlas en [11], [19], [20].

Para poder conocer más relaciones entre las variables $\{N(t) : t \geq 0\}$ y $\{W_n : n \geq 1\}$ en un intervalo $(0, t]$, debemos mencionar la función de renovación.

Función de renovación

Uno de los parámetros más importantes de una distribución es la media, o esperanza matemática. La función de renovación, no es, sino la esperanza matemática de $N(t)$.

Definición 7 *Definimos la* función de renovación *como:*

$$M(t) = \mathbb{E}[N(t)]. \tag{2.5}$$

Podemos caracterizar a la función de renovación, por medio de la transformada de Laplace.

Proposición 2 *Sea $\{X_i : i \in I\}$ un proceso estocástico, y F la función de distribución de las variables aleatorias X_i. La función de renovación puede ser caracterizada de la siguiente manera:*

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \tag{2.6}$$

Demostración. Sabemos que $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$, donde

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{si la enésima renovación ocurre en el intervalo}[0,t] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De aquí que

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right]$$

que la no negatividad de I_n y por el teorema de convergencia monótona, que podemos encontrar en el apéndice (A.8), tenemos,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n = 1\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq t\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t).\end{aligned}$$

□

Además podemos mostrar la siguiente proposición que nos garantiza que el proceso de renovación $N(t)$ tiene esperanza finita.

Proposición 3

$$M(t) < \infty \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t < \infty$$

La demostración a esta proposición la podemos encontrar en Stochastic Processes [20].

Ecuación de renovación

La función de renovación tiene una expresión alternativa a la expuesta anteriormente, esta ecuación se obtiene por medio del argumento de renovación, el cual mostraremos a continuación.

Dado nuestro proceso $M(t) = \mathbb{E}[N(t)]$, condicionamos en T_1 y obtenemos:

$$M(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x] dF(x).$$

En donde

$$\mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \quad > \quad t, \\ 1 + M(t-x) & \text{si} \quad x \quad \leq \quad t. \end{cases}$$

Esto es, $\mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x] = 0$ cuando $x > t$, debido a que el primer evento sucedió al momento x después de t, mientras que el otro caso, el primer evento tuvo lugar, cuando $x \leq t$, por lo que,

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t [1 + M(t-x)] dF(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * M(t) \\ &= F(t) + \int_0^t M dF(x) \\ M(t) &= F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde la última ecuación se le conoce como *ecuación de renovación*. Algunos autores escriben la ecuación de renovación en forma general de la siguiente manera:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y) F d(y) \tag{2.8}$$

Observemos que Z es una función desconocida, mientras que z, suponemos es una función conocida y F es una función de distribución definida en $[0, \infty)$. En el proceso de renovación, la función y ecuación de renovación son los elementos más importantes, ya sea para conocer la distribución del proceso o para poder definir otros elementos del mismo proceso como son otro tipo de variables aleatorias del proceso de renovación que a continuación expondremos.

Variables del proceso de renovación

Un proceso de renovación podemos estudiarlo dependiendo del instante en observación, es decir, podemos estudiar lo que ya aconteció a partir de un instante t o pronosticar lo que posiblemente sucederá con dicho proceso hasta su posible renovación en un futuro. Para poder realizar un análisis con más detalle es necesario mostrar las definiciones de las variables que se involucran en el proceso.

Definición 8 .

1. *Definimos γ_t como el **Tiempo de Vida Restante (TVR)** del evento en observación, es decir,*

$$\gamma_t = W_{N(t+1)} - t. \tag{2.9}$$

2. *El **Tiempo de Vida Actual (TVA)**, es decir el tiempo de vida que lleva el objeto en observación desde su instalación hasta el momento t, lo denotamos por δ_t, es decir,*

$$\delta_t = t - W_{N(t)}. \tag{2.10}$$

3. *Al **Tiempo de Vida Total(TVT)** lo denotamos por β_t, y se encuentra definido como:*

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t. \tag{2.11}$$

La definición de las variables del proceso de renovación nos indica que el tiempo de vida total podemos observarlo como la suma del tiempo de vida restante y el tiempo de vida actual. Después del siguiente ejemplo podremos observar una gráfica donde se encuentran representadas estas variables (ver Figura 2.2).

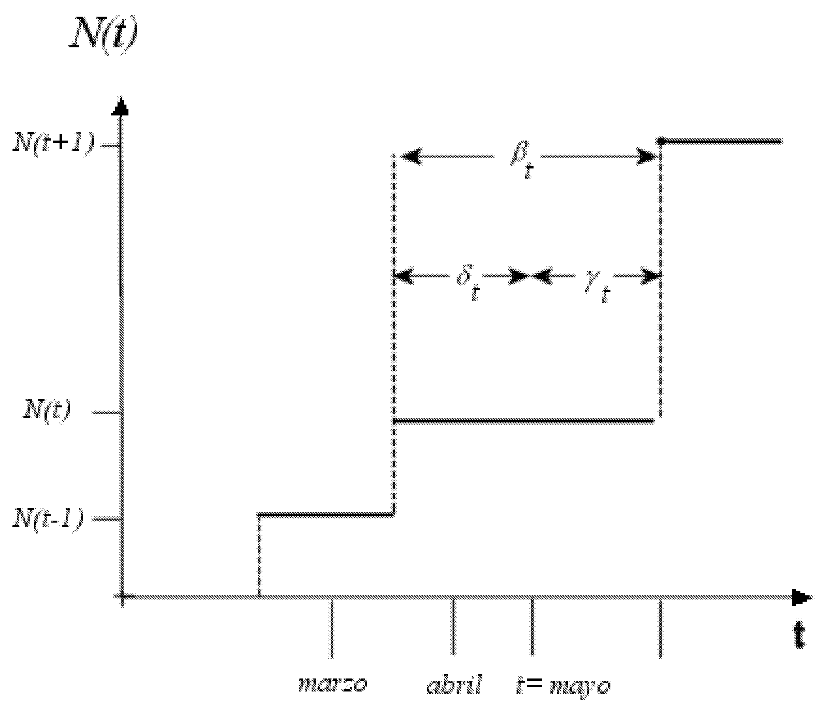

Figura 2.2: Gráfica variables del proceso de renovación

Ejemplo 4 *Recordemos del ejemplo 3, Rubén suele cambiar la batería de su control remoto cada dos meses y medio o tres, evitando con ello quedarse sin control remoto hasta que pueda ir a comprar otra batería, sin embargo en esta ocasión la batería falló antes de esos tres meses (marzo), se supone que Rubén cambiaría la batería en dos semanas más (abril), sin embargo debido a la falla de su batería, tendrá que cambiarla en este momento. Si depués de unas semanas Rubén quisiera saber cómo se va comportando la batería apenas instalada, tendría que fijar un tiempo. Tomemos mayo como punto de observación, entonces la variable γ_t sería el comportamiento de la batería desde este momento hasta que su vida útil termine, en el caso de δ_t su comportamiento se observa desde el momento en que fue instalada la batería hasta ahora. De tal forma que graficamente podemos observar la distribución de las variables en la Figura 2.2.*

De las variables anteriores nos interesa encontrar las distribuciones de γ_t y δ_t, para ello, como primer paso debemos escribir una ecuación de renovación, para posteriormente encontrar la distribución de δ_t. Sea $x > 0$, entonces:

$$P[\delta_t \leq x] = P[\delta_t \leq x, T_1 \leq t] + P[\delta_t \leq x, T_1 > t].$$

Podemos observar que $\delta_t = t$ en $[T_1 > t]$, entonces:

$$P[\delta_t \leq x, T_1 > t] = (1 - F(t))I_{[0,x]}(t).$$

Éste es el segundo miembro del lado derecho de la ecuación. Si observamos el primer miembro de la ecuación, tenemos que en $[T_1 \leq t]$, δ_t inicia muy cercano a T_1, entonces:

$$\begin{aligned}
P[\delta_t \leq x, T_1 \leq t] &= P[t - W_{N(t)-1} \leq x, N(t) \geq 2] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P[t - W_{n-1} \leq x, W_{n-1} \leq t < W_n] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\Big[t - \big(y + \sum_{i=2}^{n-1} T_i\big) \leq x, y + \sum_{i=2}^{n-1} T_i \leq t \leq y + \sum_{i=2}^{n} T_i\Big] F(dy) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\big[t - y - W_{n-2} \leq x, W_{n-2} \leq t - y \leq W_{n-1}\big] F(dy) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\big[t - y - W_{N(t-y)-1} \leq x, N(t-y) = n-1\big] F(dy) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P\big[\delta(t-y) \leq x, N(t-y) = n\big] F(dy) \\
&= \int_0^t P\big[\delta_{t-y} \leq x\big] F(dy).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P[\delta_t \leq x] = (1 - F(t)) I_{[0,x]}(t) + \int_0^t P[\delta_{t-y} \leq x\big] F(dy),$$

si nos fijamos en esta última ecuación podemos observar que es de la forma de la ecuación (2.7), es decir, la ecuación de renovación general, en donde $M(t)$ sería $P[\delta_t \leq x]$, mientras que $F(t)$ sería el equivalente a $(1 - F(t)) I_{[0,x]}(t)$. Esta última sería una expresión de la distribución δ_t.

Para la variable γ_t, parece ser más sencillo ya que tenemos para $x > 0$

$$P[\gamma_t > x] = P[\gamma_t > x, T_1 \leq t] + P[\gamma_t > x, T_1 > t].$$

Para $\gamma_t > x$ en $[T_1 > t]$, debemos tener $T_1 > t + x$ y en $T_1 \leq t$, lo que significa que γ_t inicia sobre T_1 entonces:

$$P[\gamma_t > x] = \int_0^t P[\gamma_{t-y} > x] F(dy) + 1 - F(t + x).$$

Hemos encontrado las ecuaciones que nos serán de utilidad para hallar las distribuciones de δ_t y γ_t, pero no hemos hallado la solución a estas ecuaciones. Para poder obtener las soluciones necesitamos en primer lugar demostrar que la ecuación de renovación tiene solución, para ello mostramos el siguiente teorema:

Teorema 2 *Suponemos $z(t) = 0$ para $t < 0$ y z es localmente acotada, y $F(0) < 1$.*

1. *Una solución de la ecuación de renovación (2.8) es:*

$$M * z(t) = \int_0^t z(t-m)M(dm).$$

2. *No hay otra solución localmente acotada desvaneciéndose en $(-\infty, 0)$.*

La demostración de este teorema podemos encontrarla en Adventures in Stochastic Processes [19], aqui sólo mencionaremos que su demostración consiste en realizar algunos cálculos utilizando convoluciones; este teorema no sólo proporciona las hipótesis necesarias para saber cuándo tiene solución la ecuación de renovación (2.8), sino las condiciones que debe cumplir para que ésta sea única. En ocasiones encontrar de manera explícita la solución a dichas ecuaciones puede no ser tan sencillo.

2.1.2. El proceso de Poisson como un proceso de renovación

En el capítulo anterior escribimos sobre cadenas de Markov, y procesos de Poisson, en esta sección el principal objetivo es mostrar un tipo de proceso de renovación muy específico, el proceso de Poisson como un caso especial de los procesos de renovación.

Como mencionamos los procesos de Poisson se definen a través de un proceso de conteo. Para el caso del proceso de Poisson la distribución del tiempo de espera tiene una distribución de tipo exponencial, que habíamos mencionado tiene una propiedad única entre las variables de tipo continuo; propiedad que llamamos “pérdida de memoria”.

La función de renovación para el proceso de Poisson es $M(t) = \lambda t$.
A continuación expondremos las variables del proceso de renovación para el caso particular del proceso de Poisson.

Tiempo de vida restante

Como habíamos visto γ_t es la variable que representa los tiempos de vida que le restan al objeto en observación. En el proceso de Poisson al momento t, la variable γ_t excede a x si y sólo si no existen renovaciones en el intervalo $(0, x]$, en otras palabras, el proceso de Poisson tiene incrementos independientes, y dichos incrementos son de tipo estacionario.
En términos formales tenemos:

$$\begin{aligned} P[\gamma_t > x] &= P[N_{t+x} - N_t = 0], \\ &= P[N_x = 0], \\ &= e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P[\gamma_t \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

El recorrido del proceso podemos observarlo en la Figura 2.3, en caso de existir renovaciones en el intervalo (t, t+x], entonces γ_t excede a x.

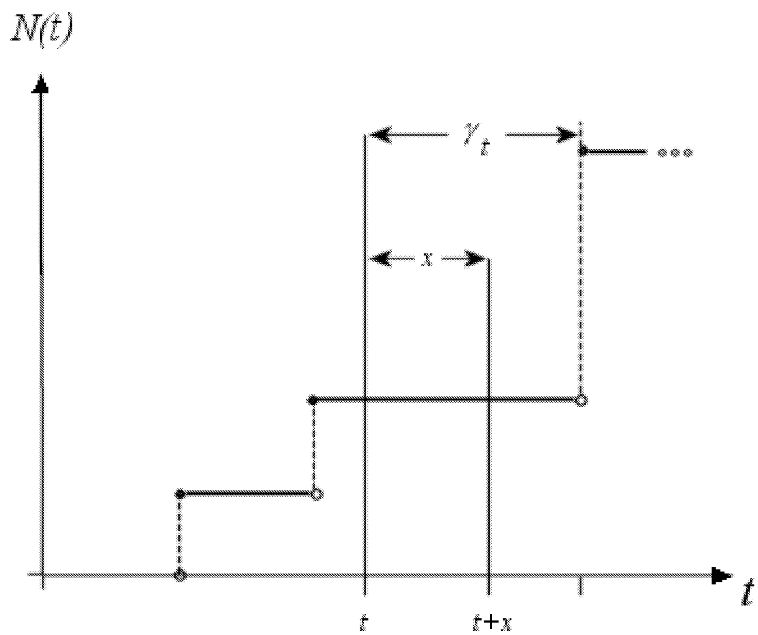

Figura 2.3: TVR del Proceso de Poisson

El tiempo de vida actual

Para el tiempo de vida actual debemos observar que δ_t no puede exceder a t, mientras $x < t$. Por lo tanto el tiempo de vida actual excede a x, si y sólo si no hay renovaciones en el intervalo $(t-x, t]$. En la Figura 2.4 podemos observar su comportamiento.
Ahora nos interesa encontrar la distribución de δ_t, para ello necesitamos observar dos casos:

1. cuando $t \leq x$, y

2. cuando $0 \leq x < t$.

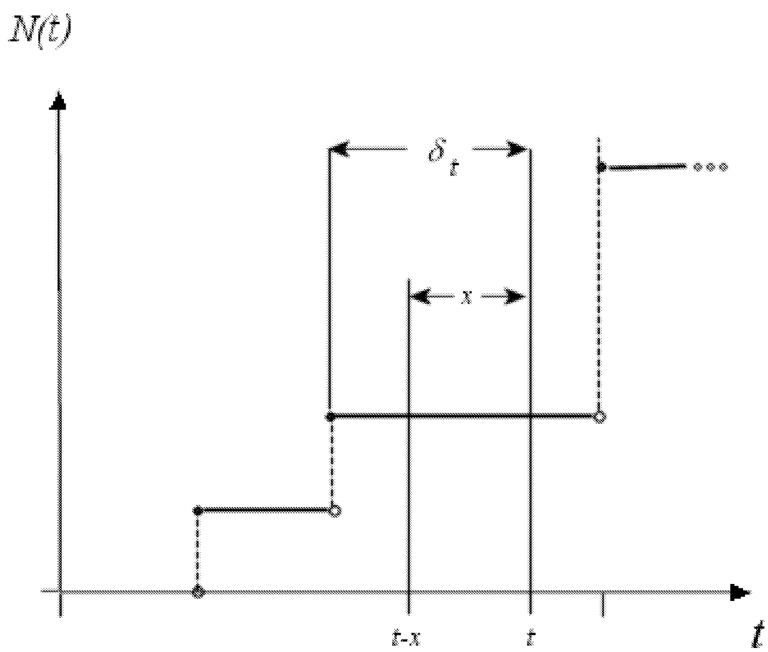

Figura 2.4: TVA del Proceso de Poisson

En el primer caso, si $x \geq t$, entonces la probabilidad de encontrarse en el tiempo de vida actual es de 1, es decir,

$$\begin{aligned} P[\delta_t > x] &= P[N_t - N_{t-x} = 0], \\ &= P[N_x = 0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De aquí que $P[\delta_t \leq x] = 1$.

En el segundo caso tenemos que no hay renovaciones en el intervalo $(t-x, t]$,

entonces,

$$\begin{aligned} P[\delta_t > x] &= P[N_t - N_{t-x} = 0] \\ &= P[N_x = 0] \\ &= e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Por lo tanto $P[\delta_t \leq x] = 1 - e^{\lambda x}$.

$$P[\delta_t \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{para} \quad 0 \leq x < t, \\ 1 & \text{para} \quad x \geq t. \end{cases}$$

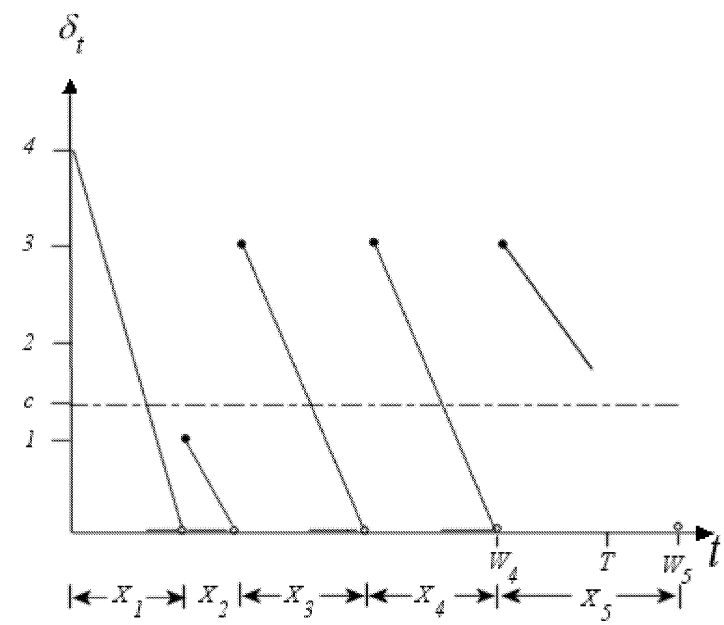

Figura 2.5: Gráfica de la distribución de edad actual al momento t

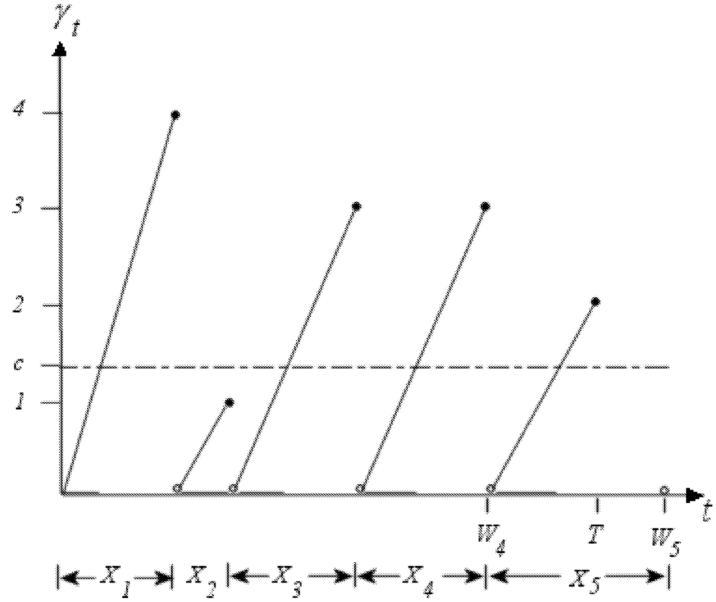

Figura 2.6: Gráfica de la distribución de edad restante al momento t

En cuanto a las gráficas de estas distribuciones podemos observar que ambas tienen forma de dientes de serrucho, sin embargo van en dirección opuesta, mientras la gráfica del tiempo de vida actual es decreciente, la gráfica del tiempo de vida restante es creciente.

Un caso especial podemos observarlo cuando calculamos la media del tiempo total de vida. Este caso se reduce en lo que muchos autores llaman *paradoja de inspección o paradoja de tiempo de espera*.

Paradoja de inspección

Recordemos que la ecuación del tiempo de vida total, es $\beta_t = \gamma_t + \delta_t$. Si a esta ecuación le aplicamos la función esperanza, obtenemos;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta_t] &= \mathbb{E}[\gamma_t] + \mathbb{E}[\delta_t], \\
&= \frac{1}{\lambda} + \int_0^t P[\delta_t > x]dx, \\
&= \frac{1}{\lambda} + \int_0^t e^{-\lambda x}dx, \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).
\end{aligned}
$$

A partir de lo anterior podemos observar que el tiempo de espera, es mayor a $\frac{1}{\lambda}$, sin embargo esperaríamos que dicho tiempo fuese menor, dado que estamos usando la distribución exponencial, por lo tanto la propiedad de falta de memoria se encuentra presente.

Para analizar lo anterior, tenemos dos opciones:

1. La falta de memoria del proceso de Poisson, permite observar que el tiempo de espera al momento que suceda la siguiente renovación no depende del momento en que está en análisis el proceso, lo que nos permite asegurar,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t] &= [N(t)], \\
&= \mathbb{E}[N(t) - N_0], \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}
$$

2. En segundo lugar tenemos que por haber observado de manera aleatoria el proceso, entonces el tiempo esperado debiera ser la mitad del tiempo

esperado entre dos renovaciones consecutivas, esto es

$$\mathbb{E}[W_t] = \frac{1}{2}\lambda^{-1}.$$

De ambas opciones podemos observar que se contradicen, debido a ello se le denomina paradoja de inspección, pero podemos decir de manera intuitiva que una manera de solucionar esta paradoja es que al observar el proceso de manera aleatoria, tenemos una mayor posibilidad de observar una cantidad de renovaciones mayor al promedio, si el tiempo entre ellas tiene una gran dispersión, mientras que en un intervalo de tiempo muy amplio, tenemos una mayor posibilidad de observación, que en un intervalo de tiempo muy corto.

2.1.3. Proceso de renovación discreto

El proceso de renovación discreto tienen una gran importancia debido a que la mayoría de sus aplicaciones estan basadas en cadenas de Markov, que como ya expusimos tienen una gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas.
Supondremos que la distribución entre arribos de un proceso de renovación es aritmética con periodo uno.

1. La sucesión $\{Y_n, n \geq 1\}$, consiste en v.a.i.i.d. no negativas, y establecemos lo siguiente:

   - $P[Y_1 = k] = f_k, \quad k \geq 0,$
   - y suponemos $P[Y_1 < \infty] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = 1.$

2. Definimos para $n \geq 0$

$$m_n \quad = M(\{n\}) \quad = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty} I_{\{n\}}(W_k),$$

Ahora supondremos que $f_0 = 0$, entonces, $P[Y_1 \geq 1] = 1$, y de aquí que, una interpretación de m_n es:

$$m_n = P\Big\{\cup_{k=0}^{\infty}[W_k = n]\Big\} = P\{W_k = n, \text{ para algún } k \geq 0\}.$$

Hay que notar que $M(n) = M[0,n] = \sum_{i=0}^{n} m_i$ con $m_0 = 1$.
Podemos asociar un proceso de renovación a una Cadena de Markov, de la siguiente manera. Sea

$$n_0 = \sup\{n : P[Y_1 = n] > 0\}.$$

Definimos:

$$p_n = \begin{cases} P[Y_1 > n \mid Y_1 > n-1], & \text{si} \quad 1 \quad < \quad n_0, \\ 0, & \text{si} \quad n \quad \geq \quad n_0. \end{cases}$$

Establecemos $q_n = 1 - p_n$. Ahora vamos a considerar una Cadena de Markov $\{A_n\}$ con matriz de transición,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ q_3 & 0 & 0 & p_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Esta construcción la haremos de la siguiente forma, para $n \leq n_0$,

$$\begin{aligned}
f_{00}^{(n)} &= P_0[A_1 = 1, A_2 = 2, \ldots, A_{n-1} = n-1, A_n = 0],\\
&= p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_{n-1} \quad q_n,\\
&= \frac{P[Y_1 > 1]}{P[Y_1 > 0]} \frac{P[Y_1 > 2]}{P[Y_1 > 1]} \cdots \frac{P[Y_1 > n-1]}{P[Y_1 > n-2]} \Big(1 - \frac{P[Y_1 > n]}{P[Y_1 > n-1]} \Big),\\
&= \frac{P[Y_1 = n]}{P[Y_1 > 0]},\\
&= P[Y_1 = n],\\
&= f_n,
\end{aligned}$$

para $n_0 < n, \quad f_{00}^n = f_n = 0.$

Entonces las probabilidades de retorno por primera vez al estado 0, para la Cadena de Markov se encuentran dadas por $\{f_n\}$.

Si iniciamos esta Cadena de Markov en el estado 0, entonces la cantidad de veces que regresa al estado 0, tiene la misma distribución que el proceso de renovación original $\{W_n\}$.

Si aplicamos los procesos de Cadenas de Markov a la sucesión de renovación obtenemos:

$$\begin{aligned}
p_{00}^{(n)} &= P_0[A_0 = 0]\\
&= P[\text{renovación al tiempo} \quad n]\\
&= m_n,
\end{aligned}$$

entonces,

$$p_{00}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} f_{00}^{(j)} p_{00}^{(k-j)},$$

que al analizarlo como proceso de renovación esto se convierte en:

$$m_n = \sum_{j=0}^{n} f_j m_{n-j}.$$

Esto nos muestra que las sucesiones $\{m_n\}$ y $\{f_n\}$ se determinan mutuamente. La importancia de estos procesos de renovación discretos se debe a la gran utilidad que se tienen en la práctica.

A lo largo del capítulo se expusieron algunos conceptos generales del procesos de renovación, cabe mencionar que muchas de las aplicaciones de este tipo de proceso involucra cadenas de Markov, y entre las áreas en las que se aplica podemos mencionar algunas de ingeniería, como confiabilidad, mecánica y electricidad, donde los procesos de Poisson son de gran utilidad debido a que la distribución exponencial es la que comúnmente utilizan para modelar el comportamiento de muchos de los fenómenos que estas áreas estudian.

Capítulo 2

Proceso de renovación

Los procesos de renovación permiten una modelación de sistemas en los que intervienen regeneraciones o renovaciones en el o los sistemas considerados.
En este capítulo presentaremos una introducción al proceso de renovación. Expondremos el tema con definiciones, proposiciones (algunas de ellas sin demostración), y algunos ejemplos.

2.1. Concepto de renovación

Los procesos de renovación, tal como su nombre lo indica se refiere al reemplazo de elementos, estos elementos pueden ser lámparas, personas, baterias, carros, etc. De manera general diremos que una *renovación es el reemplazo de un elemento en el instante en que su vida útil ha terminado.* Estos reemplazos serán los eventos que conciernen a nuestro proceso.

El proceso de renovación involucra dos tipos de variables, una discreta y otra de tipo continua. A la variable aleatoria de tipo continua la llamaremos *tiempo de espera de la enésima renovación*, esta variable considera el tiempo que un artículo es útil. La otra variable es de tipo discreta y determina *el número total de renovaciones realizadas hasta un instante t.*

Ejemplo 3 *Rubén suele ver la televisión los fines de semana desde su sillón favorito, y el control remoto de su televisor se ha vuelto indispensable en esta actividad. La bateria de su control remoto se termina aproximadamente cada tres meses, por lo que regularmente suele cambiar la ya usada por una nueva, aproximadamente cada tres meses a menos que haga falta que la cambie antes de ese tiempo.*
Si el día de hoy observamos cuál ha sido el funcionamiento de la batería que tiene en este momento su control remoto, estaríamos analizando el tiempo total de vida que lleva la bateria, mientras que al examinar la cantidad de baterías utilizadas en un periodo de tiempo, digamos un año, estaríamos contemplando la cantidad de renovaciones realizadas en dicho periodo.

A continuación definiremos formalmente el proceso de renovación.

2.1.1. Proceso de renovación

Definición 6 *Sea* $\{T_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ *una sucesión de variables aleatorias no negativas e idénticamente distribuidas. Definimos* W_n *como la suma de las variables aleatorias* T_n*, es decir,* $W_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$*, y* $W_0 = 0$*. El proceso* T_i *es el tiempo que transcurre entre las renovaciones* i *e* $i+1$*, es decir el* tiempo entre eventos o renovaciones*;* W_n *es el tiempo de espera en que ocurre la* n*-ésima renovación, y le llamaremos* tiempo de espera para la

n-ésima renovación.

Definimos $\{N(t) : t \geq 0\}$ *como:*

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{[0,t]}(W_k) \tag{2.1}$$

donde $I_{[0,t]}$ *es la función indicadora del intervalo* $[0, t]$. *Observemos también que* $N(t) = \text{máx}\{n : W_n \leq t\}$. *Al proceso de conteo* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *le llamaremos* proceso de renovación .[1]

Cabe mencionar que para algunos autores como Resnik [19], o Ross [20], les es indistinto tomar a $N(t)$ o a W_n, como el proceso de renovación. Mientras que autores como Cinlar [8] toman a W_n como el proceso de renovación. Una forma de analizar las relaciones entre las variables $N(t)$ y W_n es mediante la siguiente relación:

$$(N(t) \geq k) \quad \text{si y sólo si} \quad (W_k \leq t).$$

Sin necesidad de demostrarlo podemos observar que el número de renovaciones hasta el momento t son al menos k, esto ocurre sólo en el caso en que dicha renovación, es decir la k-ésima sucede antes de t. Podemos observar esta relación en la Figura 2.1.

[1] Esta definición podemos encontrarla en *Procesos estocásticos para la gestión de sistemas* [14].

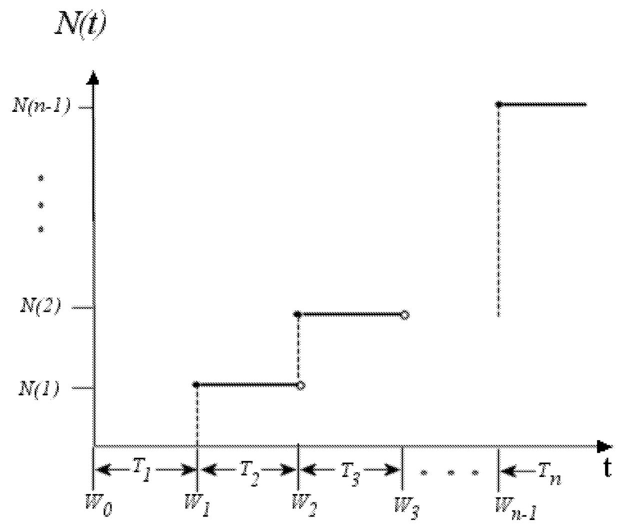

Figura 2.1: Gráfica de una trayectoria de un proceso de renovación

A continuación a manera de resumen expondremos la interpretación de cada una de las variables que intervienen en el proceso de renovación.

T_n	Tiempo entre la $(n-1)$ y la n ésima renovación, es decir, el n-ésimo tiempo entre eventos.
W_n	Tiempo de espera para la n ésima renovación.
$N(t)$	Cantidad total de renovaciones en $[0,t]$.

Otras relaciones entre $N(t)$ y W_n son las siguientes[2]:

$$(N(t) \leq n) = (W_n > t), \quad n \geq 0, \tag{2.2}$$

$$W_{N(t-1)} \leq t \leq W_{N(t)} \quad \text{en} \quad (N(t) \geq 1), \tag{2.3}$$

$$(N(t) = n) = (W_{n-1} \leq t < W_n,) \quad n \geq 1. \tag{2.4}$$

[2]Estas relaciones podemos encontrarlas en [11], [19], [20].

Para poder conocer más relaciones entre las variables $\{N(t) : t \geq 0\}$ y $\{W_n : n \geq 1\}$ en un intervalo $(0, t]$, debemos mencionar la función de renovación.

Función de renovación

Uno de los parámetros más importantes de una distribución es la media, o esperanza matemática. La función de renovación, no es, sino la esperanza matemática de $N(t)$.

Definición 7 *Definimos la* función de renovación *como:*

$$M(t) = \mathbb{E}[N(t)]. \tag{2.5}$$

Podemos caracterizar a la función de renovación, por medio de la transformada de Laplace.

Proposición 2 *Sea $\{X_i : i \in I\}$ un proceso estocástico, y F la función de distribución de las variables aleatorias X_i. La función de renovación puede ser caracterizada de la siguiente manera:*

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \tag{2.6}$$

Demostración. Sabemos que $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$, donde

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{si la enésima renovación ocurre en el intervalo}[0, t] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De aquí que

$$\mathbb{E}[N(t)] \;=\; \mathbb{E}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} I_n\Bigg]$$

que la no negatividad de I_n y por el teorema de convergencia monótona, que podemos encontrar en el apéndice (A.8), tenemos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[I_n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n = 1\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \leq t\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t).
\end{aligned}$$

□

Además podemos mostrar la siguiente proposición que nos garantiza que el proceso de renovación $N(t)$ tiene esperanza finita.

Proposición 3

$$M(t) < \infty \quad \textit{para todo} \quad 0 \leq t < \infty$$

La demostración a esta proposición la podemos encontrar en Stochastic Processes [20].

Ecuación de renovación

La función de renovación tiene una expresión alternativa a la expuesta anteriormente, esta ecuación se obtiene por medio del argumento de renovación, el cual mostraremos a continuación.

Dado nuestro proceso $M(t) = \mathbb{E}[N(t)]$, condicionamos en T_1 y obtenemos:

$$M(t) = \int_0^\infty \mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x]dF(x).$$

En donde

$$\mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > t, \\ 1 + M(t-x) & \text{si} \quad x \leq t. \end{cases}$$

Esto es, $\mathbb{E}[N(t) \mid T_1 = x] = 0$ cuando $x > t$, debido a que el primer evento sucedió al momento x después de t, mientras que el otro caso, el primer evento tuvo lugar, cuando $x \leq t$, por lo que,

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_0^t [1 + M(t-x)]dF(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) \\ &= F^{0*}(t) + F * M(t) \\ &= F(t) + \int_0^t M dF(x) \\ M(t) &= F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Donde la última ecuación se le conoce como *ecuación de renovación*. Algunos autores escriben la ecuación de renovación en forma general de la siguiente manera:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)Fd(y) \tag{2.8}$$

Observemos que Z es una función desconocida, mientras que z, suponemos es una función conocida y F es una función de distribución definida en $[0, \infty)$. En el proceso de renovación, la función y ecuación de renovación son los elementos más importantes, ya sea para conocer la distribución del proceso o para poder definir otros elementos del mismo proceso como son otro tipo de variables aleatorias del proceso de renovación que a continuación expondremos.

Variables del proceso de renovación

Un proceso de renovación podemos estudiarlo dependiendo del instante en observación, es decir, podemos estudiar lo que ya aconteció a partir de un instante t o pronosticar lo que posiblemente sucederá con dicho proceso hasta su posible renovación en un futuro. Para poder realizar un análisis con más detalle es necesario mostrar las definiciones de las variables que se involucran en el proceso.

Definición 8 .

1. *Definimos γ_t como el **Tiempo de Vida Restante (TVR)** del evento en observación, es decir,*

$$\gamma_t = W_{N(t+1)} - t. \tag{2.9}$$

2. *El **Tiempo de Vida Actual (TVA)**, es decir el tiempo de vida que lleva el objeto en observación desde su instalación hasta el momento t, lo denotamos por δ_t, es decir,*

$$\delta_t = t - W_{N(t)}. \tag{2.10}$$

3. *Al **Tiempo de Vida Total(TVT)** lo denotamos por β_t, y se encuentra definido como:*

$$\beta_t = \gamma_t + \delta_t. \tag{2.11}$$

La definición de las variables del proceso de renovación nos indica que el tiempo de vida total podemos observarlo como la suma del tiempo de vida restante y el tiempo de vida actual. Después del siguiente ejemplo podremos observar una gráfica donde se encuentran representadas estas variables (ver Figura 2.2).

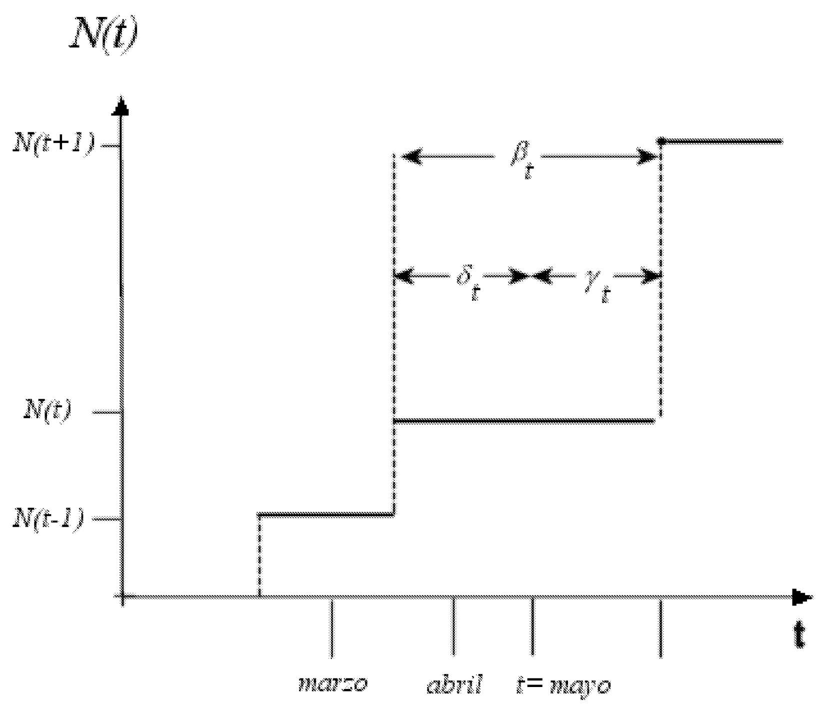

Figura 2.2: Gráfica variables del proceso de renovación

Ejemplo 4 *Recordemos del ejemplo 3, Rubén suele cambiar la batería de su control remoto cada dos meses y medio o tres, evitando con ello quedarse sin control remoto hasta que pueda ir a comprar otra batería, sin embargo en esta ocasión la batería falló antes de esos tres meses (marzo), se supone que Rubén cambiaría la batería en dos semanas más (abril), sin embargo debido a la falla de su batería, tendrá que cambiarla en este momento. Si depués de unas semanas Rubén quisiera saber cómo se va comportando la batería apenas instalada, tendría que fijar un tiempo. Tomemos mayo como punto de observación, entonces la variable γ_t sería el comportamiento de la batería desde este momento hasta que su vida útil termine, en el caso de δ_t su comportamiento se observa desde el momento en que fue instalada la batería hasta ahora. De tal forma que graficamente podemos observar la distribución de las variables en la Figura 2.2.*

De las variables anteriores nos interesa encontrar las distribuciones de γ_t y δ_t, para ello, como primer paso debemos escribir una ecuación de renovación, para posteriormente encontrar la distribución de δ_t. Sea $x > 0$, entonces:

$$P[\delta_t \leq x] = P[\delta_t \leq x, T_1 \leq t] + P[\delta_t \leq x, T_1 > t].$$

Podemos observar que $\delta_t = t$ en $[T_1 > t]$, entonces:

$$P[\delta_t \leq x, T_1 > t] = (1 - F(t))I_{[0,x]}(t).$$

Éste es el segundo miembro del lado derecho de la ecuación. Si observamos el primer miembro de la ecuación, tenemos que en $[T_1 \leq t]$, δ_t inicia muy cercano a T_1, entonces:

$$\begin{aligned}
P[\delta_t \leq x, T_1 \leq t] &= P[t - W_{N(t)-1} \leq x, N(t) \geq 2] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} P[t - W_{n-1} \leq x, W_{n-1} \leq t < W_n] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\Big[t - \big(y + \sum_{i=2}^{n-1} T_i\big) \leq x, y + \sum_{i=2}^{n-1} T_i \leq t \leq y + \sum_{i=2}^{n} T_i\Big] F(dy) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\big[t - y - W_{n-2} \leq x, W_{n-2} \leq t - y \leq W_{n-1}\big] F(dy) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t P\big[t - y - W_{N(t-y)-1} \leq x, N(t-y) = n-1\big] F(dy) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P\big[\delta(t-y) \leq x, N(t-y) = n\big] F(dy) \\
&= \int_0^t P\big[\delta_{t-y} \leq x\big] F(dy).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P[\delta_t \leq x] = (1 - F(t)) I_{[0,x]}(t) + \int_0^t P[\delta_{t-y} \leq x\big] F(dy),$$

si nos fijamos en esta última ecuación podemos observar que es de la forma de la ecuación (2.7), es decir, la ecuación de renovación general, en donde $M(t)$ sería $P[\delta_t \leq x]$, mientras que $F(t)$ sería el equivalente a $(1 - F(t)) I_{[0,x]}(t)$. Esta última sería una expresión de la distribución δ_t.

Para la variable γ_t, parece ser más sencillo ya que tenemos para $x > 0$

$$P[\gamma_t > x] = P[\gamma_t > x, T_1 \leq t] + P[\gamma_t > x, T_1 > t].$$

Para $\gamma_t > x$ en $[T_1 > t]$, debemos tener $T_1 > t + x$ y en $T_1 \leq t$, lo que significa que γ_t inicia sobre T_1 entonces:

$$P[\gamma_t > x] = \int_0^t P[\gamma_{t-y} > x] F(dy) + 1 - F(t + x).$$

Hemos encontrado las ecuaciones que nos serán de utilidad para hallar las distribuciones de δ_t y γ_t, pero no hemos hallado la solución a estas ecuaciones. Para poder obtener las soluciones necesitamos en primer lugar demostrar que la ecuación de renovación tiene solución, para ello mostramos el siguiente teorema:

Teorema 2 *Suponemos $z(t) = 0$ para $t < 0$ y z es localmente acotada, y $F(0) < 1$.*

1. *Una solución de la ecuación de renovación (2.8) es:*

$$M * z(t) = \int_0^t z(t-m)M(dm).$$

2. *No hay otra solución localmente acotada desvaneciéndose en $(-\infty, 0)$.*

La demostración de este teorema podemos encontrarla en Adventures in Stochastic Processes [19], aqui sólo mencionaremos que su demostración consiste en realizar algunos cálculos utilizando convoluciones; este teorema no sólo proporciona las hipótesis necesarias para saber cuándo tiene solución la ecuación de renovación (2.8), sino las condiciones que debe cumplir para que ésta sea única. En ocasiones encontrar de manera explícita la solución a dichas ecuaciones puede no ser tan sencillo.

2.1.2. El proceso de Poisson como un proceso de renovación

En el capítulo anterior escribimos sobre cadenas de Markov, y procesos de Poisson, en esta sección el principal objetivo es mostrar un tipo de proceso de renovación muy específico, el proceso de Poisson como un caso especial de los procesos de renovación.

Como mencionamos los procesos de Poisson se definen a través de un proceso de conteo. Para el caso del proceso de Poisson la distribución del tiempo de espera tiene una distribución de tipo exponencial, que habíamos mencionado tiene una propiedad única entre las variables de tipo continuo; propiedad que llamamos "pérdida de memoria".

La función de renovación para el proceso de Poisson es $M(t) = \lambda t$.
A continuación expondremos las variables del proceso de renovación para el caso particular del proceso de Poisson.

Tiempo de vida restante

Como habíamos visto γ_t es la variable que representa los tiempos de vida que le restan al objeto en observación. En el proceso de Poisson al momento t, la variable γ_t excede a x si y sólo si no existen renovaciones en el intervalo $(0, x]$, en otras palabras, el proceso de Poisson tiene incrementos independientes, y dichos incrementos son de tipo estacionario.
En términos formales tenemos:

$$\begin{aligned} P[\gamma_t > x] &= P[N_{t+x} - N_t = 0], \\ &= P[N_x = 0], \\ &= e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P[\gamma_t \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

El recorrido del proceso podemos observarlo en la Figura 2.3, en caso de existir renovaciones en el intervalo (t, t+x], entonces γ_t excede a x.

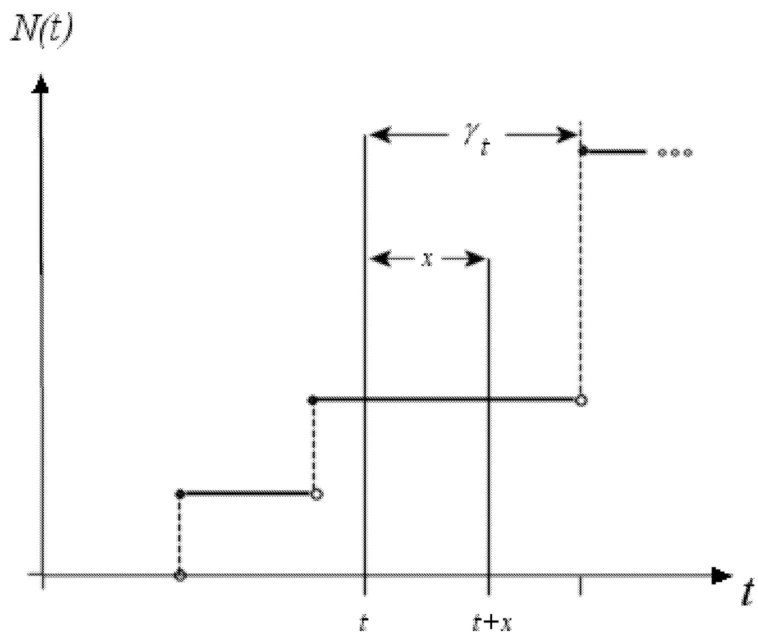

Figura 2.3: TVR del Proceso de Poisson

El tiempo de vida actual

Para el tiempo de vida actual debemos observar que δ_t no puede exceder a t, mientras $x < t$. Por lo tanto el tiempo de vida actual excede a x, si y sólo si no hay renovaciones en el intervalo $(t-x, t]$. En la Figura 2.4 podemos observar su comportamiento.
Ahora nos interesa encontrar la distribución de δ_t, para ello necesitamos observar dos casos:

1. cuando $t \leq x$, y

2. cuando $0 \leq x < t$.

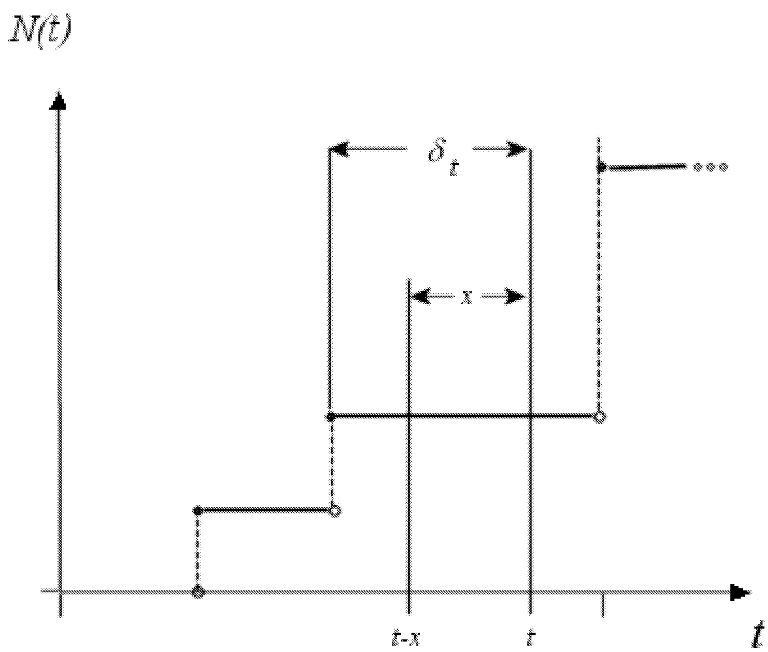

Figura 2.4: TVA del Proceso de Poisson

En el primer caso, si $x \geq t$, entonces la probabilidad de encontrarse en el tiempo de vida actual es de 1, es decir,

$$\begin{aligned} P[\delta_t > x] &= P[N_t - N_{t-x} = 0], \\ &= P[N_x = 0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

De aquí que $P[\delta_t \leq x] = 1$.

En el segundo caso tenemos que no hay renovaciones en el intervalo $(t-x, t]$,

entonces,

$$\begin{aligned} P[\delta_t > x] &= P[N_t - N_{t-x} = 0] \\ &= P[N_x = 0] \\ &= e^{\lambda x} \end{aligned}$$

Por lo tanto $P[\delta_t \leq x] = 1 - e^{\lambda x}$.

$$P[\delta_t \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{para} \quad 0 \leq x < t, \\ 1 & \text{para} \quad x \geq t. \end{cases}$$

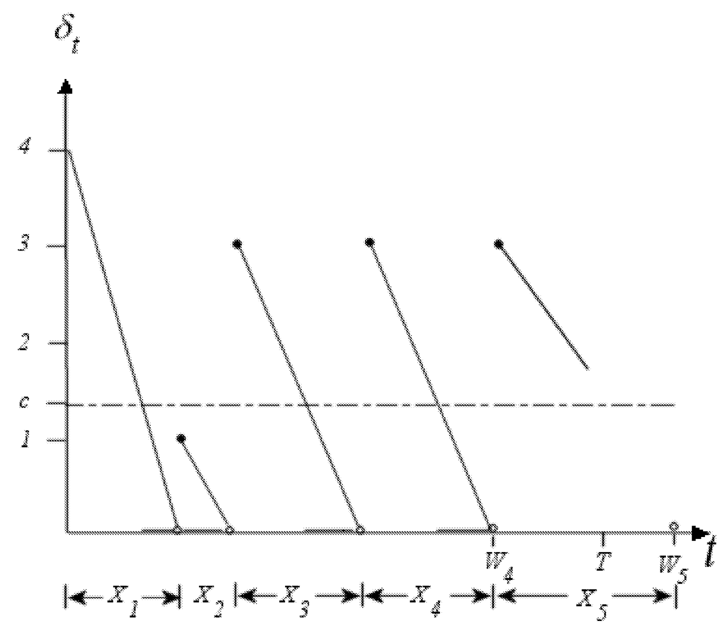

Figura 2.5: Gráfica de la distribución de edad actual al momento t

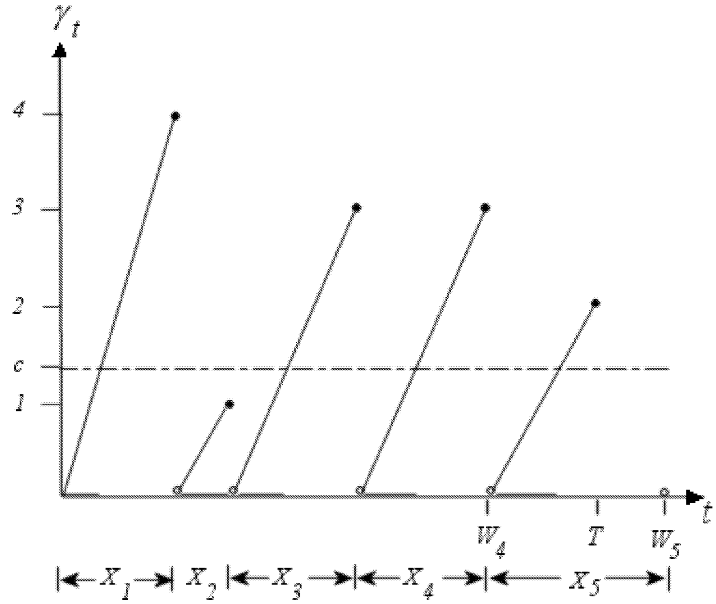

Figura 2.6: Gráfica de la distribución de edad restante al momento t

En cuanto a las gráficas de estas distribuciones podemos observar que ambas tienen forma de dientes de serrucho, sin embargo van en dirección opuesta, mientras la gráfica del tiempo de vida actual es decreciente, la gráfica del tiempo de vida restante es creciente.

Un caso especial podemos observarlo cuando calculamos la media del tiempo total de vida. Este caso se reduce en lo que muchos autores llaman *paradoja de inspección o paradoja de tiempo de espera*.

Paradoja de inspección

Recordemos que la ecuación del tiempo de vida total, es $\beta_t = \gamma_t + \delta_t$. Si a esta ecuación le aplicamos la función esperanza, obtenemos;

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta_t] &= \mathbb{E}[\gamma_t] + \mathbb{E}[\delta_t], \\
&= \frac{1}{\lambda} + \int_0^t P[\delta_t > x]dx, \\
&= \frac{1}{\lambda} + \int_0^t e^{-\lambda x}dx, \\
&= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}).
\end{aligned}$$

A partir de lo anterior podemos observar que el tiempo de espera, es mayor a $\frac{1}{\lambda}$, sin embargo esperaríamos que dicho tiempo fuese menor, dado que estamos usando la distribución exponencial, por lo tanto la propiedad de falta de memoria se encuentra presente.

Para analizar lo anterior, tenemos dos opciones:

1. La falta de memoria del proceso de Poisson, permite observar que el tiempo de espera al momento que suceda la siguiente renovación no depende del momento en que está en análisis el proceso, lo que nos permite asegurar,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t] &= [N(t)], \\
&= \mathbb{E}[N(t) - N_0], \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

2. En segundo lugar tenemos que por haber observado de manera aleatoria el proceso, entonces el tiempo esperado debiera ser la mitad del tiempo

esperado entre dos renovaciones consecutivas, esto es

$$\mathbb{E}[W_t] = \frac{1}{2}\lambda^{-1}.$$

De ambas opciones podemos observar que se contradicen, debido a ello se le denomina paradoja de inspección, pero podemos decir de manera intuitiva que una manera de solucionar esta paradoja es que al observar el proceso de manera aleatoria, tenemos una mayor posibilidad de observar una cantidad de renovaciones mayor al promedio, si el tiempo entre ellas tiene una gran dispersión, mientras que en un intervalo de tiempo muy amplio, tenemos una mayor posibilidad de observación, que en un intervalo de tiempo muy corto.

2.1.3. Proceso de renovación discreto

El proceso de renovación discreto tienen una gran importancia debido a que la mayoría de sus aplicaciones estan basadas en cadenas de Markov, que como ya expusimos tienen una gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas.

Supondremos que la distribución entre arribos de un proceso de renovación es aritmética con periodo uno.

1. La sucesión $\{Y_n, n \geq 1\}$, consiste en v.a.i.i.d. no negativas, y establecemos lo siguiente:

    - $P[Y_1 = k] = f_k, \quad k \geq 0,$
    - y suponemos $P[Y_1 < \infty] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k = 1.$

2. Definimos para $n \geq 0$

$$m_n \quad = M(\{n\}) \quad = \mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty} I_{\{n\}}(W_k),$$

Ahora supondremos que $f_0 = 0$, entonces, $P[Y_1 \geq 1] = 1$, y de aquí que, una interpretación de m_n es:

$$m_n = P\Big\{\cup_{k=0}^{\infty}[W_k = n]\Big\} = P\{W_k = n, \text{ para algún } k \geq 0\}.$$

Hay que notar que $M(n) = M[0,n] = \sum_{i=0}^{n} m_i$ con $m_0 = 1$.
Podemos asociar un proceso de renovación a una Cadena de Markov, de la siguiente manera. Sea

$$n_0 = \sup\{n : P[Y_1 = n] > 0\}.$$

Definimos:

$$p_n = \begin{cases} P[Y_1 > n \mid Y_1 > n-1], & \text{si} \quad 1 \quad < \quad n_0, \\ 0, & \text{si} \quad n \quad \geq \quad n_0. \end{cases}$$

Establecemos $q_n = 1 - p_n$. Ahora vamos a considerar una Cadena de Markov $\{A_n\}$ con matriz de transición,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ q_3 & 0 & 0 & p_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Esta construcción la haremos de la siguiente forma, para $n \leq n_0$,

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(n)} &= P_0[A_1 = 1, A_2 = 2, \ldots, A_{n-1} = n-1, A_n = 0], \\
&= p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_{n-1} \quad q_n, \\
&= \frac{P[Y_1 > 1]}{P[Y_1 > 0]} \frac{P[Y_1 > 2]}{P[Y_1 > 1]} \cdots \frac{P[Y_1 > n-1]}{P[Y_1 > n-2]} \Big(1 - \frac{P[Y_1 > n]}{P[Y_1 > n-1]}\Big), \\
&= \frac{P[Y_1 = n]}{P[Y_1 > 0]}, \\
&= P[Y_1 = n], \\
&= f_n,
\end{aligned}
$$

para $n_0 < n, \quad f_{00}^{n} = f_n = 0.$

Entonces las probabilidades de retorno por primera vez al estado 0, para la Cadena de Markov se encuentran dadas por $\{f_n\}$.

Si iniciamos esta Cadena de Markov en el estado 0, entonces la cantidad de veces que regresa al estado 0, tiene la misma distribución que el proceso de renovación original $\{W_n\}$.

Si aplicamos los procesos de Cadenas de Markov a la sucesión de renovación obtenemos:

$$
\begin{aligned}
p_{00}^{(n)} &= P_0[A_0 = 0] \\
&= P[\text{renovación al tiempo} \quad n] \\
&= m_n,
\end{aligned}
$$

entonces,

$$p_{00}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} f_{00}^{(j)} p_{00}^{(k-j)},$$

que al analizarlo como proceso de renovación esto se convierte en:

$$m_n = \sum_{j=0}^{n} f_j m_{n-j}.$$

Esto nos muestra que las sucesiones $\{m_n\}$ y $\{f_n\}$ se determinan mutuamente. La importancia de estos procesos de renovación discretos se debe a la gran utilidad que se tienen en la práctica.

A lo largo del capítulo se expusieron algunos conceptos generales del procesos de renovación, cabe mencionar que muchas de las aplicaciones de este tipo de proceso involucra cadenas de Markov, y entre las áreas en las que se aplica podemos mencionar algunas de ingeniería, como confiabilidad, mecánica y electricidad, donde los procesos de Poisson son de gran utilidad debido a que la distribución exponencial es la que comúnmente utilizan para modelar el comportamiento de muchos de los fenómenos que estas áreas estudian.

Capítulo 3

Teoremas de Renovación

Algunos de los estudios importantes de la probabilidad es el comportamiento de sus modelos, los distintos tipos de convergencia y las relaciones existentes entre ellas. Los procesos de renovación se han desarrollado a lo largo de la historia y conforme estos procesos se van definiendo de mejor manera, podemos observar que los teoremas incluyen una mayor cantidad de hipótesis y mejoran los modelos que asemejan el comportamiento de los fenómenos que buscan representar.
En este capítulo estudiaremos las relaciones que existen entre los principales teoremas clásicos de renovación.

3.1. Teoremas límite y sus implicaciones

En este capítulo expondremos los teoremas límite de los procesos de renovación, así como algunas implicaciones que existen entre ellos.

Como nos muestra el diagrama (3.1) iniciaremos con las demostraciones de cada uno de los teoremas de manera individual, a excepción del teorema de renovación de Blackwell, cuya demostración podemos encontrar en *Introducción a los Procesos Estocásticos de William Feller [11]*, terminaremos con algunas implicaciones entre los teoremas.

3.1.1. Teorema Elemental de Renovación (TER)

Este teorema fue el primer teorema límite desarrollado para este proceso. Para realizar la demostración definiremos el término de *tiempo de paro,*[1] seguido de esto demostraremos dos lemas, el primero es la ecuación de Wald, el segundo involucra la función de renovación, y terminaremos con el teorema elemental de renovación (TER).

Decimos que un "tiempo de paro" es un proceso aleatorio, en donde el evento $N = n$ denota el momento en que nos detenemos y observamos las variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots, T_n$, (tiempos entre eventos) y antes de examinar las variables $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots$.

Definición 9 *Sea $T_1, T_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias.*
Una variable aleatoria N que toma valores enteros se dice que es un tiempo de paro para la sucesión $T_1, T_2, \ldots$, si el evento $\{N = n\}$ es independiente de $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots$ para toda $n = 1, 2, \ldots$

Un tiempo de paro respecto a una sucesión de variables aleatorias $T_1, T_2, \ldots$ es una variable aleatoria T con la propiedad de que para cada t, el suceso o la falta de ocurrencia de éste $T = t$ depende exclusivamente de los valores

[1] En la bibliografía consultada mencionan el tiempo de paro como un "stopping time", que para efectos de este trabajo tomaremos como tiempo de paro.

de $T_1, T_2, \ldots, T_t$ y además $P(T < \infty) = 1$. En particular para la teoría de decisiones, un tiempo de paro es un mecanismo de decisión para continuar o detener el proceso, con respecto a la información de la posición presente y los eventos ya ocurridos, teniendo casi siempre una decisión de interrumpir el proceso en algún momento.

Lema 1 *(Ecuación de Wald)*
Si $T_1, T_2, T_3, \ldots$, son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con esperanza finita, y si N es un tiempo de paro para $T_1, T_2, \ldots$, tal que $\mathbb{E}[N] < \infty$, entonces:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[T].$$

Demostración. Definimos

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > N, \\ 1 & \text{si} \quad n \leq N. \end{cases}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{N} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot Y_n.$$

Tomando esperanzas

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} T_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot Y_n\right], \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} T_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[T_n \cdot Y_n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[T_n] \cdot \mathbb{E}[Y_n] \end{aligned}$$

por la no negatividad de los términos y por el teorema de convergencia dominada tenemos,

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[T]\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[Y_n], \\
&= \mathbb{E}[T]\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[n \leq N], \\
&= \mathbb{E}[T]\cdot\mathbb{E}[N].
\end{aligned}
$$

[2], que podemos encontrar en el apéndice A.8. □

Lema 2 *Si* $\mathbb{E}[T] = \mu < \infty$, *entonces* $\mathbb{E}[W_{N(t)+1}] = \mu(M(t)+1)$.

Demostración. Por el lema anterior sabemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{N(t)+1}] &= \mathbb{E}[T]\cdot\mathbb{E}[N(t)+1] \\
&= \mathbb{E}[T]\cdot[M(t)+1] \\
&= \mu\cdot[M(t)+1].
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3 *(Teorema Elemental de Renovación (TER)) Sea* $\mu = \mathbb{E}[T_1] = \int_0^{\infty} tF(dt) < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

[2]Algunos de los autores que dan una breve explicación de cómo demostrar este lema son Cinlar [8], Feller [11], Resnik [19], y Ross [20] lo demuestra, y el intercambio de la suma con la integral, lo justifica con el teorema de convergencia dominada.

Demostración. Sabemos $W_{N(t)} \leq t \leq W_{N(t)+1}$, en la última desigualdad al aplicar esperanza obtenemos

$$\begin{aligned} t &\leq \mathbb{E}[W_{N(t)+1}] \\ t &\leq \mu \cdot [M(t)+1] \\ \frac{1}{\mu} &\leq \frac{M(t)+1}{t}, \end{aligned}$$

tomando el límite inferior,

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)+1}{t} &\geq \frac{1}{\mu} \\ \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} &\geq \frac{1}{\mu}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para el otro límite fijemos una constante c y definimos un nuevo proceso de renovación. Sea $\{\bar{T}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ tal que

$$\bar{T}_n = \begin{cases} T_n & \text{si} \quad T_n \leq c, \\ c & \text{si} \quad T_n > c. \end{cases}$$

Sean $\bar{W}_{N(t)+1} = \sum_{i=1}^{n} \bar{T}_i$ y $\bar{N}(t) = \sup\{n : \bar{W}_n < t\}$. tal que, $\bar{T}_n \leq T_n$, entonces

$$\bar{W}_{N(t)+1} \leq t + c,$$

aplicamos esperanza y utilizando el Lema 1, tenemos:

$$\mathbb{E}[\bar{W}_{N(t)+1}] = \mu_c(\bar{M}(t)+1) \leq t + c,$$

donde $\mu_c = \mathbb{E}[\bar{T}_n]$. Entonces

$$\frac{\bar{M}(t)+1}{t+c} \leq \frac{1}{\mu_c}.$$

Si tomamos el límite superior,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{M}(t)}{t+c} + \frac{1}{t+c} \leq \frac{1}{\mu_c}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{M}(t)}{t+c} \leq \frac{1}{\mu_c}.$$

Entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{M}(t)}{t}\frac{t}{t+c} \leq \frac{1}{\mu_c}$$

Como $\bar{T}_n \leq T_n$, entonces $\bar{W}_n \leq W_n$ y $\bar{M}(t) \geq M(t)$. Por lo tanto

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\bar{M}(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_c}.$$

De lo anterior podemos decir que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_c}. \tag{3.3}$$

De las desigualdades (3.2) y (3.3), tenemos,

$$\frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_c} \leq \frac{1}{\mu}$$

Por lo tanto tenemos,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

lo que queríamos demostrar [3]. □

3.1.2. Teorema Clave de Renovación (TCR)

Este teorema lo podemos encontrar como **key renewal theorem** y muchos autores lo toman como un teorema alternativo al teorema de Blackwell[4].

[3] Una demostración alternativa a este teorema podemos encontarla en [11], [18] y [19].

[4] Autores como Cinlar [8], Feller [11], y Resnik [19], hacen en sus textos algunas observaciones interesantes sobre este teorema, y lo toman como una alternativa del teorema de Renovación de Blackwell.

Para la demostración, necesitamos el concepto de función directamente Riemann integrable[5].

Definición 10 *Sea $g \geq 0$ una función acotada sobre intervalos finitos, y para $b > 0$ definimos lo siguiente:*

$$\gamma_b'(n) = \text{ínf}\{g(t) \mid nb \leq t < nb + b\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

$$\gamma_b''(n) = \sup\{g(t) \mid nb \leq t < nb + b\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

y hacemos

$$\sigma_b' = b \sum_n \gamma_b'(n) \quad y \quad \sigma_b'' = b \sum_n \gamma_b''(n). \tag{3.6}$$

Decimos que g es ***Directamente Riemann integrable*** *(lo denotaremos como, $g \in \mathbb{D}$), si las sumas dadas en (3.6), convergen para cada $b > 0$, tal que*

$$\text{lím}_{b \to 0}(\sigma_b'' - \sigma_b') = 0.$$

Si $g \in \mathbb{D}$, entonces

$$\text{lím}_{b \to 0} \sigma_b' = \text{lím}_{b \to 0} \sigma_b'' = \int_0^\infty g(t)dt,$$

donde la última integral es la integral de Riemann.

Teorema 4 *(Teorema Clave de Renovación (TCR))*

Suponemos $g \in \mathbb{D}$, y F es una función de distribución de una variable aleatoria positiva con media $\mu < \infty$. Afirmamos:

$$\text{lím}_{t \to \infty} M * g(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty g(s)ds.$$

[5] En este capítulo tan sólo definiremos la función, pero podremos encontrar un poco más sobre este tema en el apéndice A.7, así como bibliografía en donde podemos encontrar este tipo de funciones, como por ejemplo, [1], [2], [12], y [17].

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned}
M &= 1 + F + F^2 + F^3 + \dots, \\
M - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t), \\
M * F &= F^{*} + F^{2*} + F^{3*} + \dots, \\
M - 1 &= M * F, \\
M * (1 - F) &= 1.
\end{aligned}$$

Por definición de convolución (ver [A.6]),

$$1 = \int_0^t (1 - F(t-s))dM(s),$$

como F es monótona entonces,

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^t (1 - F(t-s))dM(s), \\
&\geq \int_{t-b}^t (1 - F(t-s))dM(s), \quad \text{para} \quad b > 0, \\
&= [1 - (F(t-t) - F(t-t+b))][M(t) - M(t-b)], \\
&= [1 - F(b)][M(t) - M(t-b)],
\end{aligned}$$

para algún $b > 0$ tal que $F(b) < 1$, tenemos que

$$\beta_b = \sup_t [M(t) - M(t-b)] < \infty.$$

Sea

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [nb, nb+b), \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [nb, nb+b), \end{cases}$$

entonces,

$$M * I_n(t) = M(t - nb) - M(t - nb - b),$$

dividimos por t y tomamos límites,

$$\lim_{t\to\infty} M(t-nb) - M(t-nb-b)t = \lim_{t\to\infty} \frac{M(b)}{t}, = \frac{b}{\mu} \tag{3.7}$$

Sea $h = \sum_n c_n I_n$, donde $c_n = 0$, y $\sum_n c_n < \infty$, como

$$\beta_b = \sup_t [M(t) - M(t-b)]$$

para cualquier $b > 0$, podemos decir,

$$M * I_n(t) \leq \beta_b.$$

Podemos observar que,

$$\sum_{n=0}^{k} c_n M * I_n(t) \leq M * h(t) \leq \sum_{n=0}^{k} c_n M * I_n(t) + \beta_b \sum_{n=k}^{\infty} c_n,$$

dividiendo por t, tomando límites y usando (3.7) obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} M * h(t) = \frac{b}{\mu} \sum_n c_n. \tag{3.8}$$

Además $g \in \mathbb{D}$, entonces definimos

$$h'_b(t) = \sum_n \gamma'_b(n) I_n(t) \quad \text{y} \quad h''_b = \sum_n \gamma''_b(n) I_n(t).$$

De aquí que $M * h'_b \leq M * g \leq M * h''_b$. Aplicamos (3.8) a h'_b y h''_b, obteniendo

$$\lim_{t\to\infty} M * h'_b(b) = \frac{1}{\mu} \sigma'_b,$$

que por la definición de Riemann Directamente integrable (3.6) tenemos;

$$\frac{1}{\mu}\sigma'_b = \frac{1}{\mu} b \sum_n \gamma'_b(n) \tag{3.9}$$

$$\lim_{t\to\infty} M * h_b''(b) = \frac{1}{\mu}\sigma_b'', \tag{3.10}$$

de nuevo por (3.6) obtenemos,

$$\frac{1}{\mu}\sigma_b'' = \frac{1}{\mu}b\sum_n \gamma_b''(n). \tag{3.11}$$

Haciendo $b \to 0$, y como $g \in \mathbb{D}$, entonces,

$$\lim_{t\to\infty} M * h_b'(b) = \frac{1}{\mu}\sigma_b' = \frac{1}{\mu}b\sum_n \gamma_b'(n) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)dt, \tag{3.12}$$

y también,

$$\lim_{t\to\infty} M * h_b''(b) = \frac{1}{\mu}\sigma_b'' = \frac{1}{\mu}b\sum_n \gamma_b''(n) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(t)dt. \tag{3.13}$$

Por lo tanto de (3.12) y (3.13) tenemos que

$$\lim_{t\to\infty} M * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(s)ds.$$

□

3.2. Implicaciones entre los Teoremas de Renovación

A continuación demostraremos algunas implicaciones entre los teoremas de renovación. Iniciaremos con la implicación del Teorema de Blackwell al Teorema Elemental. Posteriormente se demostrará la implicación del mismo Teorema de Blackwell al Teorema Clave y por último veremos la implicación del Teorema Clave al Teorema de Blackwell.

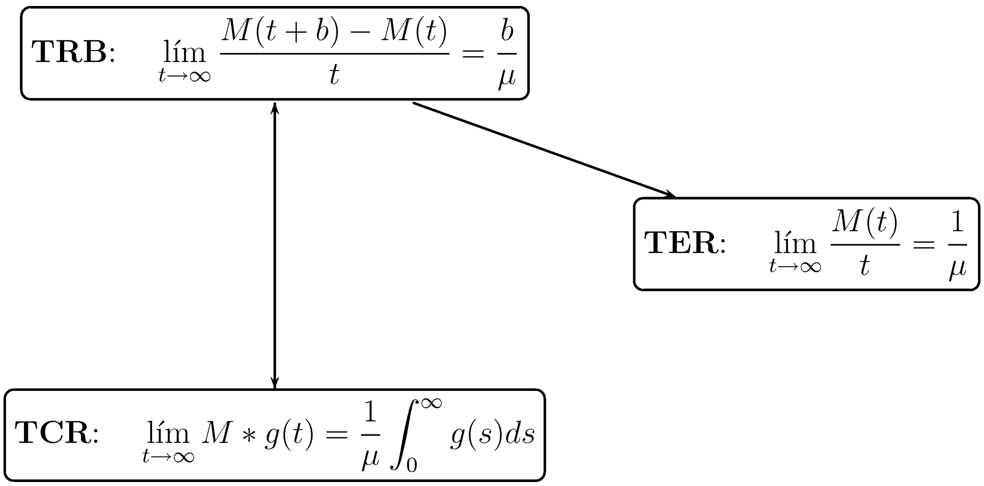

Figura 3.1: Teoremas Límite y sus implicaciones.

3.2.1. Implicación del Teorema de Blackwell al Teorema Elemental

En la demostración de este teorema utilizaremos un teorema que no demostramos aquí, sin embargo damos las referencias de donde podemos encontrar este material y también mencionamos este teorema en el apéndice (ver A.10).

Teorema 5 *Si* $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+b)-M(t)}{t} = \frac{b}{\mu}$ *entonces* $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$

Demostración. Tomemos $b = 1$, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+1)-M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Por el teorema de promedios de Cesàro tenemos que $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+1)-M(t)}{t}$ converge, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(k) - M(k-1) = \frac{1}{n}M(n) - M(0) \to \frac{1}{\mu}.$$

Tomando el límite superior podemos observar que,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)-M(0)}{t} &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{M([t]+1)-M(0)}{[t]}, \\
&= \limsup_{t\to\infty} \frac{M([t]+1)-M(0)}{[t]} \frac{[t]+1}{[t]+1}, \\
&= \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Con el límite inferior tenemos,

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)-M(0)}{t} &\geq \liminf_{t\to\infty} \frac{M([t]+1)-M(0)}{[t]}, \\
&= \liminf_{t\to\infty} \frac{M([t]+1)-M(0)}{[t]} \frac{[t]+1}{[t]+1}, \\
&= \frac{1}{\mu}.
\end{aligned}$$

A partir de los dos últimos límites, aseguramos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

□

3.2.2. Implicación del Teorema de Blackwell al Teorema Clave

Teorema 6 *Si* $\lim_{t\to\infty} \frac{M(t+b)-M(t)}{t} = \frac{b}{\mu}$ *entonces* $\lim_{t\to\infty} M{*}g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(s)ds.$

Demostración. Tomemos el lado derecho de la ecuación

$$\lim_{t\to\infty} M * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty g(s)ds.$$

Sea

$$g(s) = I_{[(n-1)h,h)}(s),$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} g(s)d(Ms) &\leq \frac{1}{\mu}\int_{t-(n-1)h}^{t-nh} g(s)dM(s),\\
&= \frac{1}{\mu}\int_{t-(n-1)h}^{t-nh} dM(s),\\
&= \frac{1}{\mu}M(t-nh)-M(t-(n-1)h),\\
&= \frac{h}{\mu}.
\end{aligned}
$$

Para el lado derecho, vamos a suponer que $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n(t)$, donde

$$
z(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} t-(n-1)h \leq s < t-nh,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}
$$

además $c_n = 0 \quad$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$.

$$
\begin{aligned}
M * g(t) &= \int_0^t g(t-s)dM(s),\\
&= \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n(t-s)dM(s),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^t z_n(t-s)dM(s),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{t-(n-1)h}^{t-nh} z_n(t-s)dM(s),\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n M(t-nh)-M(t-(n-1)h),
\end{aligned}
$$

por lo que, para cada n tenemos $M(t-nh)-M(t-(n-1)h) \to \dfrac{h}{\mu}$ por ser una función acotada y monótona, entonces existe

$$\begin{aligned}\sup_n M(t-nh)-M(t-(n-1)h) &\leq c(h) < \infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n M(t-nh)-M(t-(n-1)h) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{h}{\mu},\end{aligned}$$

como $g \in \mathbb{D}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \int_0^{\infty} g(t)dt.$ □

3.2.3. Implicación del Teorema Clave al Teorema de Blackwell

Teorema 7

$$\lim_{t\to\infty} M * g(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} g(s)ds \quad \textit{entonces} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{M(t+b)-M(t)}{t} = \frac{b}{\mu}.$$

Demostración. Tomemos $g \in \mathbb{D}$ y sea $b > 0$, entonces definimos

$$g(t) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t < b, \\ 0 \qquad\quad \text{si} \quad b \leq t. \end{cases}$$

Para $0 \leq t < b$, podemos ver que

$$\int_0^{\infty} g(t)dt = b,$$

cuando $b < t$, tendríamos,

$$\begin{aligned}M(t) &= g(t) + \int_{x=0}^{t} g(t-x)dM(x), \\ &= \int_{x=t-b}^{t} dM(x), \\ &= M(t) - M(t-b),\end{aligned}$$

por el TCR, observamos que

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = \lim_{t\to\infty} M(t) - M(t-b) = \frac{b}{\mu}.$$

□

Las demostraciones de estas implicaciones en la bibliografía consultada sólo mencionan algunas ideas de cómo demostrarlas y dejan el trabajo al lector, entre los autores que dan ideas de cómo demostrarlas se encuentran William Feller [11], [12], Sheldon Ross [20], y Sidney Resnik [19].

3.2.4. Teorema de Blackwell

Como habíamos mencionado al inicio del capítulo la demostración de este teorema no la desarrollaremos puesto que podemos encontarla en Introducción a la Teoría de Probabilidades [11] en el capítulo de Teoría de la Renovación.

Como pudimos observar las demostraciones de los teoremas y sus implicaciones hacen uso de lemas y teoremas que no necesariamente demostramos aqui, sin embargo es importante notar que algunos de estos teoremas y lemas los podemos encontrar en los apéndices o en su defecto las referencias sobre ellos.

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo expondremos un ejemplo de aplicación escrito por Jan Beran y Dirk Ocker [5], este ejemplo expone el cálculo de las tasas de interés límite o máximas de préstamos hipotecarios, en donde no sólo hacen uso de un proceso de renovación sino también emplean la estimación de máxima verosimilitud y simulación de Monte Carlo.

4.1. Estimación de Tasas de Interés límite basados en Procesos de Renovación

El proceso de estimar las tasas de interés máximas (límite) de una hipoteca se llevará a cabo por medio de procesos de renovación; este proceso busca modelar la longitud de los periodos con tendencia a la baja o a la alza respectivamente. Los precios son calculados por medio de simulación.
En los últimos años en el mercado suizo aparecieron distintos tipos de hipotecas, los más comunes son las de tasas de seguros (roll-over), y tasas

de portafolios de inversión. De manera particular la tasa límite de seguros se convirtió en la más popular. Ya que dicha tasa proporcionaba un seguro contra el evento para que la tasa de interés se elevará sobre cierto nivel ya establecido, el cual es el llamado límite o tope de la tasa. Dichos límites eran propuestos por las tasas del mismo mercado y las políticas de las tasas hipotecarias, que son las que estaremos tomando en cuenta.

El cálculo de dichas tasas límite se basa principalmente en pronósticos de las tasas de interés futuras. Este cálculo puede realizarse con la estimación de algunos parámetros por máxima verosimilitud, prediciendo las tasas de interés futuras, por simulación de Monte Carlo, redes neuronales, sistemas estructurales de ecuaciones, etc.

El procedimiento que llevaremos a cabo será como se describe a continuación. Como primer paso, daremos la ecuación para calcular las tasas de interés límite, posteriormente analizaremos el proceso estocástico que proponemos, como un tercer paso, veremos la estimación realizada por el método de máxima verosimilitud, y por último veremos que la predicción de las tasas de interés futuras, así como su estimación es un precio tope justo.

4.1.1. Estimación de una hipoteca límite

Cuando se da un límite en un préstamo y éste es provisto por la misma institución bancaria, entonces el costo de la opción es incorporada a la base de las tasas de interés.

Denotaremos por K al valor nominal de la hipoteca, y por Z_t a la tasa hipotecaria emitida al instante t, $\quad (t = t_0 + 1, \ldots, t_0 + T)$. Dado un límite

$C > 0$, la tasa pagada por el cliente al momento t es

$$R_t = \text{mín}(Z_t, C).$$

El flujo de efectivo de la institución financiera D_t, al momento t es entonces

$$D_t = (R_t - Z_t) \cdot K \quad (t_0 + 1 \leq t \leq t_0 + T).$$

Supondremos que a fin de otorgar el crédito, la institución bancaria debe tomar un préstamo de otro acreedor, también supondremos que las últimas tasas de interés $Z_{t_0-n+1}, \ldots, Z_{t_0}$ son conocidas, el primer pago de las tasas de interés será pagada al momento $t = t_0 + 1$, si ninguna otra prima es cargada al cliente, entonces el total de la pérdida o ganancia Y sobre el término del contrato será:

$$Y = K \sum_{t=1}^{T} [\text{mín}(Z_t, C) - Z_t]. \tag{4.1}$$

Para $u \leq t$, sea $F_{u,t}$ la σ-álgebra generada por $Z_s (u \leq s \leq t)$. El precio total por el contrato, dado por las observaciones $Z_s (t_0 - n + 1 \leq s \leq t_0)$, es

$$\mu_\alpha \;=\; K\Big\{\alpha T + \sum_{t=1}^{T} [\text{mín}(Z_{t_0+t}, C) - Z_{t_0+t}]\Big\},$$

donde

$$\alpha \;=\; -\frac{1}{KT} \mathbb{E}[Y \mid F_{t_0-n+1,t_0}],$$

Por lo tanto definimos la tasa de interés límite justo como:

$$Z_{t,\alpha} = R_t + \alpha, \tag{4.2}$$

donde α es la prima justa definida por:

$$\alpha(F_{t_0-n+1,t_0}, C, T) = -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \{E[\text{mín}(Z_{t_0+t}, C) \mid F_{t_0-n+1,t_0}] - E[Z_{t_0+t} \mid F_{t_0-n+1,t_0}]\},$$

La prima α depende del comportamiento pasado de las tasas de interés Z_t, en el nivel límite C, con periodo T. Hay que hacer notar que F_{t_0-n+1,t_0}, podría contener más información que el último valor observado de Z_{t_0}.

4.1.2. Modelo para tasas hipotecarias basadas en procesos de renovación

Ahora mencionaremos algunas características cualitativas de Z_t, para posteriormente continuar con la definición de nuestro proceso estocástico.

- Z_t es una función escalón positiva, con $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}$,
- ΔZ_t es casi cero,
- hay largos intervalos donde Z_t permanece constante,
- el tiempo es dividido en largos periodos donde Z_t es monótonamente no-decreciente y en periodos en donde es monótonamente no-creciente.
- la distribución condicional de $\mid \Delta Z_t \mid$, dado $\{\Delta Z_t \geq 0\}$ o $\{\Delta Z_t \leq 0\}$, pueden diferir.

Definición del proceso de renovación

Antes de iniciar debemos hacer algunas suposiciones. Sea U una variable aleatoria con $P(U = -1) = P(U = 1) = \frac{1}{2}$, $\quad W_j > 0$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F_W en $\{w : w = j, \quad j \in \mathbb{N}\}$, tal que $P(0 < W_j < \infty) = 1$. Además $S_0 = 0$ y

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} W_j \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

También supondremos que $W_j \quad (j \in \mathbb{N})$ son independientes de U. Hay que observar que $S_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$ es un proceso de renovación periódico, con periodo 1 y tiempos de espera positivos.
Además definimos $M_i = \max\{j : S_j \leq t\}$ y sean F_1 y F_2 funciones de distribución en $\{0, 1, \ldots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ fijo, y

$$p_1(i) = F_1(i) - F_1(i-1), \quad p_2(i) = F_2(i) - F_2(i-1)$$

sus probabilidades correspondientes.

Ahora definiremos el proceso como sigue:

Definición 11 *Sea $Z_0 = z_0, I_t = (-1)^{M_t - 1} U$, definimos*

$$Z_t - Z_{t-1} = (-1)^{j-1} U A_i \tag{4.4}$$

donde $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de $W_j (j \in \mathbb{N})$ y U, tales que

$$\begin{aligned} P(A_t = i \mid B_{t-1} \cap \{S_{M_{t-1}} = t-1\}) = \quad & 1_{I_t = 1} p_1(i \mid A > 0) + \\ & 1_{I_t = -1} p_2(i \mid A > 0) \end{aligned}$$

y

$$P(A_t = i \mid B_{t-1} \cap \{S_{M_{t-1}} < t-1\}) = 1_{I_t = 1} p_1(i) + 1_{I_t = -1} p_2(i) \tag{4.5}$$

Donde B_t es la σ-álgebra generada por $U, A_r, (r \leq t)$, y M_t.

Observación 1 .

- *El proceso* S_t *divide el eje del tiempo en periodos donde* Z_t *es monótonamente no-decreciente o no-creciente, respectivamente. Dado un punto en el tiempo* t, Z_t *se encuentra en un periodo* $M_t = \min\{j : t \leq S_j\}$. *El valor de* $I_t = (-1)^{M_t - 1}U$, *que determina el tipo de periodo en el que nos encontramos y* $W_{M_t} = S_{M_t} - S_{M_t - 1}$ *determina la longitud del periodo.*

- *La definición nos implica que para* $S_{j-1} + 1 \leq t \leq S_j$,

$$Z_t = z_0 + U\left[\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-1}\sum_{r=1}^{W-i} A_{S_{i-1}+r} + (-1)^{j-1}\sum_{s=1}^{t-S_j-1} A_{S_j+s}\right]$$

- *Para* $t = S_{j-1} + 1$, *tenemos que* $A_t > 0$ *con probabilidad uno. Esta condición se necesita debido a que* $S_j \quad (j \in \mathbb{N})$, *puede ser construida únicamente a partir de las observaciones de las series* $Z_t \quad (t \in \mathbb{N})$.

- *El proceso* Z_t *puede volverse negativa, pero una pequeña modificación puede evitar este problema:*

$$P(A_t = i \mid B_{t-1} \cap \{S_{M_{t-1}} = t-1\}) =$$

$$1_{I_t=1} p_1(i \mid A > 0) + 1_{I_t=-1, Z_{t-1}>0} p_2(i \mid 0 < A \leq Z_{t-1})$$

$$+1_{A_t=0, I_t=-1, Z_{t-1}=0}$$

y

$$P(A_t = i \mid B_{t-1} \cap \{S_{M_{t-1}} = t-1\}) =$$

$$1_{I_t=1} p_1(i) + 1_{I_t=-1} p_2(i \mid A \leq Z_{t-1}).$$

- *Si las tasas de interés observadas cambian en periodos múltiplos de algún otro periodo fijo, digamos d, entonces usamos $Z_t = d{\cdot}Z_t$, tenemos que poner atención en el hecho que el proceso Z_t puede iniciar en un punto del tiempo arbitrario, por lo cual no necesariamente coincide con el inicio del periodo. De manera similar la última observación bien puede no ser el fin del periodo. Esto significa que W_1 y W_{M_n} pueden no ser construidas de manera exacta delas observaciones de los valores de w_1, w_{M_n}. En su lugar, la información observada consiste en los eventos $\{W_1 \geq w_1\}$ y $\{W_{M_n} \geq w_{M_n}\}$.*

Estimación Máxima Verosimilitud

En principio consideraremos la ecuación general de máxima verosimilitud, para posteriormente ver el caso aplicado a un proceso de renovación de tipo Poisson.

Consideremos Z_t como en la definición (11). Supondremos que $F_W(x) = F_w(x;\eta)$, $F_1(x) = F_w(x;\tau)$ y $F_2(x) = F_w(x;\zeta)$, son caracterizados por vectores paramétricos finitos, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_q)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$. Para una serie de observaciones $Z_1, \ldots, Z_n$, el vector paramétrico desconocido es $\theta = (\eta, \tau, \zeta)^t$, y puede ser estimado, maximizando la función de máxima verosimilitud. Vamos a suponer que $Z_2 - Z_1 \neq 0$, y escribiremos a $U = sign(A-2)$. Las cantidades $U, w_1, W_2, \ldots, W_{M_n-1}, w_{M_n}$ y $A_2, \ldots, A_n$, podemos obtenerlas de $Z_1, \ldots, Z_n$, de la siguiente manera:

$$A_t = \mid \Delta Z_t \mid = \mid Z_t - Z_{t-1} \mid, \quad U = sign(A_2),$$

$$w_1 = \min\{t : sign(\Delta Z_t) \neq U\} = 1,$$

$$S_1^* = w_1, \quad S_{M_n}^* = n,$$

$$S_j = \text{mín}\{t : S_{j-1} + 1 \leq t, sign(\Delta Z_t) \neq (-1)^{j-1}U\} \quad (2 \leq j \leq M_n - 1),$$

$$W_j = S_j - S_{j-1}(2 \leq j \leq M_n - 1),$$

$$w_{M_n} = n - S_{M_n-1}^*.$$

La función condicional de máxima verosimilitud, dada por $Z_1 = z_1$ se sigue directamente de la definición (11). Por ejemplo, si $U = 1$ la función de verosimilitud será:

$$L(\theta) = log\{1 - F_W(w_1; \eta)\} + log\{1 - F_W(w_{M_n}; \eta)\} \tag{4.6}$$

$$+ \sum_{j=2}^{M_n-1} logp_w(w_j; \eta) + \sum_{t:I_t=1} logp_1(a_j; \tau) + \sum_{t:I_t=-1} logp_2(a_j; \zeta)$$

donde a_t son los valores observados de A_t

Observación 2 .

1. *Para modificar el modelo con* $X_t \geq 0, \quad p_1(a_t : \tau)$ *y* $p_2(a_t : \zeta)$ *debemos de reemplazarlas por sus probabilidades condicionales correspondientes, excepto cuando* $\text{mín}\{Z_t : I_t = -1\} \geq k$.

2. *Para* $n \to \infty$, *las contribuciones de* w_1 *y* w_{M_n} *son muy pequeñas.*

Estimación de Máxima Verosimilitud para Procesos de Poisson

En esta sección supondremos que W_j son independientes e idénticamente distribuidas con intensidad $\eta, \quad p_1(i) = \tau_i(i = 1, \ldots, k), \quad p_1(0) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \tau_i$

y $p_2(i) = \zeta_i(i = 1, \ldots, k), p_2(0) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \zeta_i$. Al no considerar w_1 y W_{M_n} obtenemos la fórmula explícita para $\hat{\theta}$:

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{\sum_{i=2}^{M_n-1} w_i}{M-n-2}, \\ \hat{\tau}_i &= \frac{1}{n_1} \sum_{I_t=1}^{n} 1\{\mid \Delta Z_t \mid = i\}, \end{aligned}$$

$$\hat{\zeta}_i = \frac{1}{n_2} \sum_{I_t=-1}^{n} 1\{\mid \Delta Z_t \mid = i\}$$

donde $n_1 = \sum_{t=1}^{n} 1\{I_t = 1\}$ y $n_2 = n - n_1$.

Evaluación mediante Pronósticos Simulados

Predicción de tasas de interés futuras y el precio condicional Dadas las observaciones $Z_1, \ldots, Z_n$, la prima α, se obtiene estimando la esperanza condicional de los valores $\mathbb{E}[\text{mín}(Z_{n+t}, C) \mid F_{1,n}]$ y $\mathbb{E}[Z_{n+t} \mid F_{1,n}]$. Por otra parte, para calcular el riesgo del contrato necesitamos estimar la distribución o al menos ciertos extremos de los cuantiles de $Z_t(t = n+1, \ldots, n+T)$ y la pérdida $Y = K \sum_{t=1}^{T} [\text{mín}(Z_{n+t}, C) - Z_{n+t}]$. Esto se realiza en dos pasos

1. Estimamos la máxima verosimilitud de θ,

2. realizamos una simulación de los caminos futuros para $Z_{n+1}, \ldots, Z_{n+T}$, condicionando en $F_{1,n}$. Como sólo es conocida una de las cotas inferiores para la longitud del último periodo W_{M_n} la distribución condicional de

la distribución de Z_{n+k} esta dada por

$$P(Z_{n+k} = z \mid F_{1,n}) = \sum_{i=w_{M_n}}^{\infty} \qquad P(W = i \mid W \geq w_{M_n}) \cdot$$
$$P(Z_{n+k} = z \mid F_{1,n} \cap \{W_{M_n} = i\})$$

Hay que observar que al condicionar en toda la información es de suma importancia, para poder obtener una aproximación lo suficientemente realista par ala distribución futura de Z_t y (Y). Por ejemplo, en caso que $Z_n - Z_{n-1} > 0$ y W_{M_n} sea relativamente pequeño es muy parecido a que $Z - t$ se incremente en un futuro muy cercano. Esto se debe a que la probabilidad condicional $P(W > w_{M_n} \mid W \geq w_{M_n})$ es muy grande. Esto se da en una prima α relativamente grande. Pero por otro lado si $Z_n - Z_{n-1} < 0$ y W_{M_n} es relativamente pequeño, entonces una pequeña prima puede ser cargada, dado que Z_t es poco probable que incremente "mucho" en un futuro cercano.

Precios simulados para contratos con extremos variables Cuando una institución financiera ofrece contratos con un término fijo muy amplio, debe tener reservas suficientes para sobrevivir ante una posible pérdida temporal. Una alternativa para evitar estas pérdidas es ofreciendo los contratos, donde los términos tope, sean ajustados, sobre una base regular. En el caso extremo tenemos ajustes en α y en C en cada momento t. La prima $\alpha(t)$ es entonces un pronóstico entre el $\text{mín}(Z_t, C_t - Z_t)$. Por lo tanto la pérdida general global es igual a:

$$L(t_0) = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} \alpha(F_{t_0-n,t-1}, C_t), \tag{4.7}$$

donde n = número de observaciones, y

$$\alpha(F_{t_0-n,t-1}, C_t) = \mathbb{E}[\text{mín}(Z_t, C_t) - Z_t \mid F_{t_0-n,t-1}] \tag{4.8}$$

En conclusión un precio tope puede involucrar un riesgo muy alto, es decir provocar grandes pérdidas ocasionales, sobre todo cuando dicho tope sea fijado a través del término del contrato. El esquema de ajuste más flexible, es el que menor riesgo involucra, así como tener una prima relativamente pequeña, comparada con la tasa de interés vigente.

Parte IV

Conclusiones

Es importante resaltar que los procesos de renovación son un tipo de procesos cuya teoría es extensa, los teoremas aquí mostrados no son los únicos, sin embargo son los clásicos de la teoría de renovación (de ahí el título de la tesis).
Algunos teoremas de importancia semejante son, la ley de los Grandes números (para procesos de renovación) y el teorema de renovación - recompensa [1], estos teoremas no fueron mencionados en este texto ya que las implicaciones de éstos con los teoremas clásicos (TER, TRB, y TCR) no eran de gran relevancia y el delimitar este trabajo fue un punto esencial para su elaboración.

Otras líneas de investigación o trabajo que quedan abiertas para este tipo de proceso son, las tasas de falla que en algunas áreas de ingeniería son muy importantes para desarrollar temas como confiabilidad y disponibilidad de sistemas, teoría de colas y toma de decisiones, éstas últimas involucran a su vez cadenas de Markov. De igual forma se pueden exponer procesos regenerativos, los cuales tienen relación con los tiempos de espera, y al igual que los procesos de renovación son un tema con múltiples aplicaciones en la ingeniería.
Estos temas podrían ser un buen incentivo para desarrollarlos como seminarios, temas de investigación y en los cursos de probabilidad y procesos estocásticos.
Finalmente podemos decir que la aplicación de estos procesos tiene relevancia en seguros y finanzas.

[1] Este proceso de renovación - recompensa es un proceso alterno al proceso de renovación, donde la sucesión de las variables aleatorias de los tiempos entre eventos son idénticamente distribuidas aunque no necesariamente independientes. También la palabra "recompensa" debe entenderse como una variable que puede tomar valores negativos.

La implicación entre los teoremas es una forma de mostrar la evolución que han tenido estos procesos, conforme se han encontrado diversas aplicaciones de este proceso, las hipótesis que toman en cuenta aumenta o cambia, tal es el caso del TCR, donde una de sus hipótesis refiere a cierto tipo de funciones que en los otros dos teoremas aqui vistos no mencionan.

Apéndice A

Para hablar de procesos estocásticos es necesario mencionar diversos resultados que competen a otras ramas de las matemáticas como son el cálculo, teoría de la medida y análisis. La presente sección tiene como objeto mencionar algunos de los puntos claves utilizados y que no necesariamente se expusieron en el texto, sino que se cree son herramientas o resultados que se conocen.

A.1. Integración

Sea $U(x)$ una función monótona definida en $[0, \infty)$, la integral de $U(x)$ la definimos como,

$$\int_0^\infty g(x)dU(x) \quad \text{o,} \quad \int_{[0,\infty)} g(x)U(dx).$$

Veamos tres casos de la integral arriba expuesta.

1. Sea U una función absolutamente continua (A.C.). Si existe una función de densidad u, tal que $u(x) \geq 0$, $\int_0^T u(x)dx < \infty$, para toda $T > 0$ y

para $b > a \geq 0$,

$$U(b) - U(a) = \int_a bu(s)ds.$$

Interpretamos entonces de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty g(x)Udx = \int_0^\infty g(x)dU(x) = \int_0^\infty g(x)u(x)dx.$$

2. Decimos que U es discreta, si existen elementos $\{a_i\}$ y pesos $\{w_i\}$, tales que $w_i < \infty$, y el límite cuando $h \downarrow 0$, $U(a_i+h) - U(a_i - h) := U(a_i) = w_i$. Esto nos dice que la medida U toma pesos w_i, en a_i. Entonces la función de distribución $U(x)$ es constante excepto en los puntos a_i, donde brinca a un peso w_i. Entonces $U(x)$ satisface:

$$U(x) = \sum_{i:0\leq a_i \leq x} w_i.$$

En este caso interpretamos las integrales como:

$$\int g(x)U(dx) = \int g(x)dU(x) := \sum_i g(a_i)w_i.$$

3. Cuando U es una combinación de las dos anteriores, es decir U es de la forma:

$$U(x) = \alpha U_{AC}(x) + \beta U_d(x),$$

donde U_{AC} es absolutamente continua con función de densidad $u_{AC}(x)$, y U_d es discreta con elementos $\{a_i\}$y pesos w_i, y además $\alpha > 0, \beta > 0$. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}
\int g(x)U(dx) &= \int g(x)dU(x), \\
&= \alpha \int g(x)U_{AC}(dx) + \beta \int g(x)U_d(dx), \\
&= \alpha \int g(x)u_{AC}(x)dx + \beta \sum_i g(a_i)w_i.
\end{aligned}$$

A.2. Integral de Stieltjes

A.2.1. Medida de Stieltjes

Sea F una función monótona no decreciente definida en un segmento $[a,b]$, continua por la izquierda.
Definiremos las medidas de todos los segmentos, intervalos y semisegmentos que pertenecen al segmento básico, de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} m(\alpha,\beta) &= F(\beta)-F(\alpha+0) \\ m[\alpha,\beta] &= F(\beta+0)-F(\alpha) \\ m(\alpha,\beta] &= F(\beta+0)-F(\alpha+0) \\ m[\alpha,\beta) &= F(\beta)-F(\alpha), \end{aligned}$$

esta medida la podemos extender a una σ-álgebra, que contiene a todos los subconjuntos abiertos y cerrados del segmento $[a,b]$.
A la medida que se obtiene a partir de esta construcción se le llama medida de *Lebesgue-Stieljes* de la función F, y que denotaremos por μ_F.
Mencionaremos algunos casos particulares de esta medida.

1. Sea F una función de saltos, $x_1, x_2, \ldots$, que son sus puntos de discontinuidad y $h_1, h_2, \ldots$, los saltos en esos puntos. Decimos pues que μ_F es la medida correspondiente a esta F, y la contruiremos a partir de todos los subconjuntos del segmento $[a,b]$, los cuales son medibles y la medida del conjunto A es

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i.$$

A la medida μ_F construida a partir de una función de saltos le llamamos *discreta*.

2. Sea F una función no decreciente absolutamente continua en $[a, b]$ y sea $f = F'$ su derivada. En este caso, la medida correspondiente μ_F se encuentra definida en todos los subconjuntos de $[a, b]$, medibles según Lebesgue, y para cada conjunto A de este tipo

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)dx.$$

Entonces para cada intervalo (α, β), tenemos,

$$\mu_F(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

A una medida μ_F correspondiente a una función absolutamente continua F la llamaremos *medida absolutamente continua.*

3. Supongamos que F es una función continua singular, su medida correspondiente μ_F se encontrará conglomerado en un conjunto de medida cero, en el que F' sea distinta de cero o en donde no existe. En este caso a μ_F la llamaremos *medida singular.*

La medida en toda la recta, para F una función monótona no decreciente acotada será,

$$F(\infty) - F(-\infty),$$

donde

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x), \quad F(-\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Estos límites existen debido a que la función es monótona y acotada.

A.3. Integral de Lebesgue-Stieltjes

La integral de Lebesgue, de una medida μ_F en el segmento $[a,b]$ generada por una función monótona F la definimos como,

$$\int_a^b f(x)d\mu_F(x).$$

Las integrales respecto a una medida μ_F, que corresponden a una función F, se llama *integral de Lebesgue-Stieltjes* y la denotamos por

$$\int_a^b f(x)dF(x).$$

Al igual que en la medida de Lebesgue (A.2.1) se tienen casos particulares.

1. Sea F una función de saltos, es decir, μ_F es una medida discreta, la integral

   $$\int_a^b f(x)dF(x),$$

   se reduce a la suma

   $$\sum_i f(x_i)h_i,$$

   donde x_i son los puntos de discontinuidad de la función F y h_i los saltos de F en los puntos x_i.

2. Si F es una función absolutamente continua, su integral de Lebesgue-Stieltjes es,

   $$\int_a^b f(x)dF(x),$$

   que es de la forma,

   $$\int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

El concepto de la integral de Lebesgue-Stiletjes lo podemos extender de funciones monótonas a funciones de variación acotada. Una función de variación acotada Φ, la representaremos como la diferencia de dos funciones monótonas,

$$\Phi = \nu - g,$$

donde ν es la variación de la función ϕ en el segmento $[a, x]$. Por lo tanto, la integral de Lebesgue-Stieltjes para Φ es,

$$\int_a^b f(x) d\Phi(x) = \int_a^b f(x) d\nu(x) - \int_a^b f(x) dg(x).$$

A.4. Integral de Riemann-Stieltjes

La integral de Riemann-Stieltjes A.3 es el límite de sumas integrales, con un gran parecido a las sumas integrales de Riemann.
Sean Φ una función continua por la izquierda de variación acotada, definida en $[a, b]$, y f una función arbitraria en $[a, b]$. Consideremos una partición del segmento $[a, b]$ de la siguiente forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Escogemos en cada elemento $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición un punto arbitrario ξ_i, formemos la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})].$$

Cuando $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$, estas sumas tienden a un límite determinado, a este límite le llamaremos *integral de Riemann-Stieltjes* de la función f

respecto a la función Φ y la escribimos como,

$$\int_a^b f(x)d\Phi(x).$$

El material de integración, así como algunos resultados lo tomamos de *Adventures in Stochastic Processes* [19]. La bibliografía sobre el tema de integración es vasta, algunos libros que exponen este tema con aplicaciones dirigidas hacia la probabilidad son *Probability and Measure Theory* [3] y *Probability and Measure* [6], el libro de *Análisis Matemático* [1], es tambien una buena opción para revisar este tema, aunque con un enfoque distinto.

A.5. Tranformadas de Laplace

Una transformada integral es una relación de la forma

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)\, f(t)\, dt$$

en donde una función f se transforma en otra función F por medio de esta integral. Decimos que la función F es la transformada de f, y la función K se llama el kernel de la transformación.

Definición 12 *Sea $f(t)$ una función para $t \geq 0$, suponemos que f satisface ciertas condiciones que mencionaremos posteriormente. Entonces la* transformada de Laplace *de f (que se denotará por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o por $F(s)$), la definimos mediante la ecuación*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

llamaremos a la parte exponencial como el kernel de la función y lo representaremos de la siguiente forma: $[K(s,t) = e^{-st}]$

Este apartado lo tomamos de *Real Analysis and Probability* [2].

A.6. Integral de convolución

Sean $g \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Entonces g es una función *localmente acotada*, si es acotada en intervalos finitos.
Para g, una función localmente acotada y F una función de distribución. definimos la *convolución* de F y g como:

$$F * g(t) := \int_0^t g(t-x)F(dx) \quad \text{para} \quad t \geq 0,$$

A.6.1. Propiedades

1. La convolución es positiva, es decir, $F * g \geq 0$,

2. La convolución $F * g$ es localmente acotada, de hecho,

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \mid F * g \mid \leq \Big(\sup_{0 \leq s \leq t} \mid g(s) \mid \Big) F(t).$$

Verifiquemos lo anterior, definamos $\|g\| := \sup_{0 \leq s \leq t} \mid g(s) \mid$, la cual es finita para cada t por ser localmente acotada. Entonces para cualquier $s \leq t$.

$$\begin{aligned} \mid F * g(s) \mid &= \mid \int_0^s g(s-x)F(dx) \mid \\ &\leq \int_0^s \mid g(s-x)F(dx) \mid \\ &\leq \|g\| \int_0^s \mid F(dx) \mid \\ &= \|g\| F(s) < \infty. \end{aligned}$$

3. Si g es acotada y continua, entonces $F * g$ es continua, dado que $F * g(t) = \mathbb{E}[g(t - Y_1)]$, donde Y_1 tiene una distribución F.

   Por lo tanto si $t_n \to t$, casi seguramente obtendremos $g(t_n - Y_1) \to g(t - Y_1)$, esto debido a que es continua, y dado que g es acotada, por el teorema de convergencia dominada converge[1], y obtenemos,

$$\mathbb{E}[g(t_n - Y_1)] = F * g(t_n) \to \mathbb{E}[g(t - Y_n)] = F * g(t).$$

4. La operación de convolución puede ser repetida, es decir, podemos hacer:

$$F * (F * g).$$

   Definamos:

$$\begin{aligned} F^{0*}(x) &= I_{[0,\infty)}(x), \\ F^{1*}(x) &= F(x), \end{aligned}$$

   y para $n \geq 1$,

$$F^{(n+1)*}(x) = F^{n*} * F(x).$$

   Entonces podemos ver que F^{0*} es la identidad, es decir

$$F^{0*} * g = g,$$

   y la propiedad asociativa sustenta lo siguiente:

$$F * (F * g) = (F * F) * g = F^{2*} * g.$$

5. La convolución de dos distribuciones corresponde a la suma de las variables aleatorias: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes,

[1] El teorema de convergencia dominada lo mencionaremos más adelante en A.9

con función de distribución F_1 y F_2 respectivamente. Entonces X_1+X_2 tiene función de distribución $F_1 * F_2$, debido a que para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P[X_1 + X_2 \leq t] &= P[(X_1, X_2) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq t\}], \\ &= \int\int_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 : x+y\leq t} F_1(dx)F_2(dy), \end{aligned}$$

y a estas dos integrales las podemos escribir como una integral iterada:

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \left[\int_{y=0}^{t-x} F_2 dy \right] F_1(dx), \\ &= \int_0^t F_2(t-x)F_1(dx). \end{aligned}$$

6. La convolución es conmutativa:

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1.$$

Estas propiedades las podmos encontrar demostradas en *Adventures in Stochastic Processes* [19].

A.7. Funciones Directamente Riemann Integrables

Aquí mencionaremos al tipo de funciones que son directamente Riemann Integrables (DRI), tema de importancia ya que la utilizamos para la demostración del teorema clave de renovación. Sea $g \geq 0$ una función acotada sobre intervalos finitos, y para $b > 0$ definimos:

$$\gamma_b'(n) = \text{ínf}\{g(t) \mid nb \leq t < nb + b\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.1}$$

$$\gamma_b''(n) = \sup\{g(t) \mid nb \leq t < nb + b\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.2}$$

hacemos

$$\sigma_b' = b\sum_n \gamma_b'(n) \quad \text{y} \quad \sigma_b'' = b\sum_n \gamma_b''(n). \tag{A.3}$$

Definición 13 *La función g es directamente Riemann integrable (notación $g \in \mathbb{D}$) si las sumas dadas en (A.3), convergen para cada $b > 0$, tal que*

$$\lim_{b\to 0}(\sigma_b'' - \sigma_b') = 0.$$

Si $g \in \mathbb{D}$, entonces

$$\lim_{b\to 0}\sigma_b' = \lim_{b\to 0}\sigma_b'' = \int_0^\infty g(t)dt,$$

donde la última integral es una integral de Riemann.

Esta definición no distingue entre intervalos finitos e infinitos, es un tipo de integración "directa", es decir, no hay paso indirecto que comprenda un paso al límite a partir de intervalos finitos.

Proposición 4 *Las condiciones necesarias para que g sea directamente Riemann integrable son:*

1. *La función $g(t)$ debe ser positiva, es decir, $g(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$,*

2. *$g(t)$ es no creciente,*

3. *La integral de Riemann de $g(t)$ es finita, $\int_0^\infty h(t)dt < \infty$.*

Teorema 8 *Si z es directamente Riemann integrable, entonces z es Riemann integrable en $[0,\infty)$, y*

$$\lim_{h\downarrow 0}\sigma_b' = \lim_{h\downarrow 0}\sigma_b'' = \int_0^\infty z(s)ds,$$

donde $\int_0^\infty z(s)ds$ *es la integral de Riemann.* [2]

Debemos señalar que una función Riemann integrable no implica que sea DRI.

Ejemplo 5 *Para cada* $n = 1, 2, 3, \ldots,$ *consideremos la función*

$$z_n(x) = \begin{cases} \epsilon_n - a_n 2\epsilon_n \mid n - x \mid & si \quad x \in \left(n - \frac{a_n}{2}, n + \frac{a_n}{2}\right), \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

donde $2^{-1} > a_1 > a_2 > \ldots > 0$, *y*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = \infty$$

además $\sum_{1}^{\infty} \epsilon_n a_n < \infty$. *Entonces para* $z_n(x)$ *tenemos*

$$\int_0^\infty z_n(x)dx = 2^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n < \infty,$$

pero $z''(n) \geq h$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \infty$, *para toda* $h > 0$.

A.8. Teorema de convergencia monótona

Sea $h_1, h_2, \ldots$ una sucesión creciente de funciones Borel medibles no negativas y sea $h(\omega) = \lim_{n\to\infty} h_n(\omega), \quad \omega \in \Omega$. Entonces $\int_\Omega h_n d\mu \to \int_\Omega h d\mu$.

[2] La demostración a este teorema la podemos encontrar en *Adventures in Stochastic Processes* [19].

A.9. Teorema de Convergencia Dominada

La demostración del teorema de convergencia dominada hace uso de dos teoremas más, el lema de Fatou y otro teorema sobre funciones Borel medibles, aqui sólo los mencionaremos y las demostraciones a estos tres teoremas las podemos encontrar en *Probability and Measure Theory* [3].

Teorema 9 *Sea h Borel medible.*

1. *Si h es Riemann integrable, entonces h es finita casi seguramente.*

2. *Si $h \geq 0$ y $\int_\Omega h d\mu = 0$,* [3]

A.9.1. Lema de Fatou

Lema 3 *Sean $f_1, f_2, \ldots, f, g$ Borel medibles.*

1. *Si $f_n \geq f$ para toda n, donde $\int_\Omega f d\mu > -\infty$, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} (\limsup_{n\to\infty}) \int_\Omega f_n d\mu \geq (\leq) \int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu (\limsup_{n\to\infty}).$$

Teorema 10 *(*Teorema de Convergencia Dominada*) Sean $f_1, f_2, \ldots, f, g$ Borel medibles tales que, $\mid f_n \mid \leq g$ para toda n, donde g es $\mu-$integrable, y $f_n \to f$ casi segura $[\mu]$, entonces f es $\mu-$integrable, y $\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu$.*

El siguiente es un resultadoq ue utilizamos en la demostración del *(TER)*.

[3] La μ se refiere a la medida de Lebesgue - Stieljes A.3

A.10. Promedios de Cesàro

Teorema 11 *Si* $x_n \to x$, *entonces* $n^{-1}\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$.

La referencia para este teorema es *Probability and Measure* [6].

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, España, 2001.

[2] Robert B. Ash., *Real Analysis and Probability*, Academic Press Inc., USA, 1972.

[3] Robert B. Ash, Catherine A Doléans - Dade *Probability and Measure Theory*, Academic Press Inc., USA, 2000.

[4] Maurice Stevenson Bartlett, *An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications.*, Cambridge University Press, 1998.

[5] Jan Beran, y Dirk Ocker, *Pricing of cap-interest rates based on renewal processes*, http://cofe.uni-konstanz.de, 2002.

[6] Patrick Billingsley *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1995.

[7] Vicente Carot Alonso, *Probabilidades y Procesos Estocásticos*, REPROVAL, Universidad Politécnica de Valencia, 1990.

[8] Erhan Cinlar, *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall Inc., USA, 1975.

[9] Rick Durrett, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer text in Statistics, 1999.

[10] Roe Goodman, *Introduction to Stochastic Models*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., USA, 1988.

[11] William Feller, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Vol I.*, Editorial Limusa, México, 1984.

[12] William Feller, *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Vol II.*, Editorial Limusa, México, 1985.

[13] Gabor J. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Hungría, 1947.

[14] Pedro Gazmuri Schleyer, *Modelos Estocásticos para la Gestión de Sistemas*, Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago; Chile, 1994.

[15] González Videgaray, María del Carmen, *Procesos Estocásticos y Aplicaciones*, ENEP Acatlán, 1985.

[16] James J. Higgings, Sallie Keller-Mc Nulty, *Concepts in Probability and Stochastic Modelling*, Duxbury Press, USA, 1995.

[17] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elementos de la Teoría del Análisis Fincional*, Editorial MIR, Moscú, 1975.

[18] J. Medhi, *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, New Delhi, 1994.

[19] Sidney Resnik, *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston, 1994.

[20] Sheldon M. Ross , *Introduction to Probability Models*, Harcourt Academic Press, San Diego, 1970.

[21] Frederick Solomon, *Probability and Stochastic Processes*, Prentice Hall Inc, USA, 1987.

[22] R. Syski , *Random Processes. A first look*, Marcel Dekker Inc, USA, 1979.

[23] Howard M. Taylor, Samuel Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press Inc, USA, 1994.

[24] Ann Lee Wang, *How much can be taught about Stochastic Processes and to whom?*, University of Malaya,